



HAL
open science

Étude des opérateurs différentiels globaux sur certaines variétés algébriques projectives

Benoît Dejoncheere

► **To cite this version:**

Benoît Dejoncheere. Étude des opérateurs différentiels globaux sur certaines variétés algébriques projectives. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de Lyon, 2016. Français. NNT : 2016LYSE1310 . tel-01471548v2

HAL Id: tel-01471548

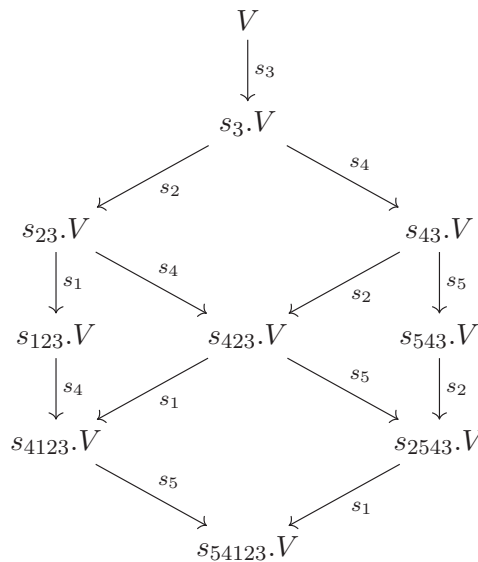
<https://theses.hal.science/tel-01471548v2>

Submitted on 21 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Étude des opérateurs différentiels globaux sur certaines variétés algébriques projectives



Benoît Dejoncheere

Thèse de doctorat



N° d'ordre NNT : 2016LYSE1310

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

opérée au sein de
l'Université Claude Bernard Lyon 1

École Doctorale ED512
Infomaths

Spécialité de doctorat : Mathématiques

Soutenue publiquement le 14/12/2016, par :
Benoît DEJONCHEERE

Étude des opérateurs différentiels globaux sur certaines variétés algébriques projectives

Devant le jury composé de :

M. BRION Michel, DR CNRS, Université Grenoble	Examineur
Mme CUPIT-FOUTOU Stéphanie, Privat-docent, Universität Bochum	Examinatrice
M. MATHIEU Olivier, DR CNRS, Université Lyon 1	Directeur de thèse
Mme MOSER-JAUSLIN Lucy, Professeure, Université de Bourgogne	Examinatrice
M. PERRIN Nicolas, Professeur, Université Versailles	Rapporteur
M. RESSAYRE Nicolas, Professeur, Université Lyon 1	Examineur

Remerciements

Je ne saurais commencer cette section autrement qu'en remerciant Alexis Tchoudjem, mon directeur de thèse. Après avoir encadré mon stage de Master 2, Alexis m'a permis de travailler sur un sujet de thèse très intéressant, sur lequel il a su m'aiguiller avec beaucoup de patience, de pédagogie et de gentillesse.

Un grand merci également à Olivier Mathieu, qui a accepté de co-encadrer ma thèse. Malgré son emploi du temps chargé, il a réussi à partager avec moi ses connaissances, ainsi que sa sagesse et sa grande expérience.

Je tiens aussi à remercier les rapporteurs, Nicolas Perrin et Michel Van den Bergh, pour leur lecture attentive de mon manuscrit, ainsi que pour leurs remarques et commentaires. Je souhaiterais également remercier Michel Brion, Stéphanie Cupit-Foutou, Olivier Mathieu, Lucy Moser-Jauslin, Nicolas Perrin et Nicolas Ressayre pour avoir accepté de prendre du temps pour faire partie de mon jury de thèse ; c'est un honneur de présenter mes travaux devant eux.

Je voudrais remercier les membres de l'équipe AGL, et plus généralement, l'ensemble des membres de l'ICJ, pour leur accueil très chaleureux, ainsi que pour la bonne ambiance qui y règne. En particulier, je souhaiterais remercier le personnel administratif de l'ICJ, ainsi que le personnel de la bibliothèque de mathématiques, pour toute leur aide et leur bonne humeur.

Je remercie également les doctorantes/doctorants/post-docs/stagiaires avec qui j'ai pu passer des moments agréables et avoir des discussions intéressantes : Ange, Antoine, Ariane, Auguste, Benjamin, Bérénice, Bin, Caius, Caterina, Clément, Colin, Coline, Corentin, Félix, Florence, François¹, Gwladys, Hugo, Ivan, Jean-Cyrille, Luigia, Manaf, Marion, Mathias, Maxime¹, Mélanie, Michele, Nils, Nohra, Quentin, Rudy, Sam, Seidon, Simon¹, Tania, Xiaolin, Zahraa. Je remercie les participants du Séminaire de Probas discrètes, grâce à qui je peux régulièrement m'entraîner à compter jusqu'à huit (c'est pas toujours évident !).

Merci à Adrien, Alex, Dimitri, Flavien, Gudu, Ja² et Kab pour tous les bons moments et toutes les soirées mémorables passées ensemble. J'ai beaucoup de chance de vous compter parmi mes amis.

Je tiens également à remercier Uwe Boll pour l'ensemble de sa filmographie.

Enfin, merci à vous, Maman, Papa, Stéphane, à qui je dois tant. Votre indéfectible soutien me va droit au cœur.

1. Avec multiplicité
2. Thanks Jaouen :)

Introduction

Soit k un corps de caractéristique nulle et algébriquement clos. Sur toute variété algébrique lisse X , on peut définir \mathcal{D}_X le faisceau des opérateurs différentiels algébriques sur X , ainsi que son algèbre des opérateurs différentiels globaux $D_X := \Gamma(\mathcal{D}_X)$. Contrairement à l'algèbre des fonctions régulières sur X , D_X n'est pas nécessairement réduite aux constantes si X est projective. Si G est un groupe algébrique et si X est une G -variété, l'action de G induit un morphisme de k -algèbres

$$L : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow D_X$$

où $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G .

L'étude des opérateurs différentiels sur les variétés de drapeaux complets a permis de répondre au début des années 80 à une conjecture de Kazhdan-Lusztig, concernant l'expression des caractères des modules irréductibles de plus haut poids en fonction de ceux des modules de Verma. Cette étude, menée indépendamment par Beilinson et Bernstein dans [BB] et par Brylinski et Kashiwara dans [BK], a mis à jour plusieurs propriétés importantes des faisceaux et algèbres d'opérateurs différentiels sur les variétés de drapeaux $X = G/P$.

La première de ces propriétés qui nous intéressera est la \mathcal{D} -affinité des variétés de drapeaux. En d'autres termes, on a une équivalence de catégories (donnée par les sections globales) entre la catégorie des \mathcal{D}_X -modules, quasi-cohérents comme \mathcal{O}_X -modules, et la catégorie des D_X -modules. C'est un équivalent pour le faisceau \mathcal{D}_X des variétés affines, pour lesquelles on a une équivalence de catégories entre la catégorie des \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents et la catégorie des $k[X]$ -modules. La seconde propriété à laquelle nous allons nous intéresser est une description explicite de l'algèbre D_X comme quotient de l'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ par l'idéal annulateur d'un certain module de Verma généralisé. En particulier, le morphisme L est surjectif. Dans le chapitre 1, nous allons rappeler quelques notions sur les variétés de drapeaux, et nous allons voir plus en détail ces deux propriétés.

Une autre classe de variétés projectives sur laquelle des résultats ont été obtenus est celle des variétés toriques. Les variétés toriques sont des variétés contenant un ouvert isomorphe à un tore, et elles peuvent être étudiées de manière combinatoire. Grâce à cette combinatoire, Musson (dans [Mu]) et Jones (dans [Jo]) ont pu étudier les algèbres d'opérateurs différentiels sur les variétés toriques. À l'exception de ces deux classes de variétés projectives, les algèbres d'opérateurs différentiels sont plutôt mal comprises. Le but de cette thèse est d'étudier cette algèbre dans le cadre de certaines variétés magnifiques de petit rang, et d'observer les différences et similitudes avec le cas des variétés de drapeaux, qui sont exactement les variétés magnifiques de rang 0.

Si G est un groupe réductif connexe, on dit qu'une G -variété projective lisse Y est magnifique de rang r si Y contient une G -orbite ouverte dont le complémentaire est un diviseur à croisement normal $D = \bigcup_{i=1}^r D_i$, où les D_i sont irréductibles, telle que les adhérences de G -orbites soient exactement les intersections de ces D_i . Une classe intéressante

de variétés magnifique est celle des compactifications magnifiques d'espaces symétriques, qui a été introduite par DeConcini et Procesi dans [DCP]. Un espace symétrique est une variété de la forme G/G^θ , où θ est un automorphisme d'ordre 2 de G , et à une telle variété on peut associer un système de racines réduit $\tilde{\Phi}$, et un diagramme, appelé diagramme de Satake, permettant d'obtenir une classification de ces espaces symétriques, qui sera rappelée en annexe.

Dans le chapitre 2, nous parlerons plus en détail des variétés magnifiques et des compactifications magnifiques d'espaces symétriques. Dans la section 5, nous verrons que si X est un espace symétrique quelconque, son diagramme de Satake est une réunion de diagrammes de Satake plus simples, correspondant chacun soit à un espace symétrique de la forme G/H avec G simple, soit à un espace symétrique de la forme $G \times G/G$, où l'involution de $G \times G$ considérée est la permutation des facteurs (c'est un fait déjà connu). Lorsque G est simple de type adjoint, nous construirons un opérateur différentiel sur la compactification magnifique de $G \times G/G$ lorsque le système de racines Φ de G est de type A_1 ou A_2 , et lorsque l'action de $-\theta$ sur le système de racines de G ne fixe aucune racine simple, nous construirons un opérateur différentiel sur les compactifications magnifiques d'espaces symétriques de la forme G/H lorsque le système de racines réduit $\tilde{\Phi}$ est de type A_1 ou A_2 . Les cas restants pour obtenir tous les espaces symétriques G/H avec G simple de type A_1 ou A_2 sont les compactifications magnifiques de PGL_2/k^* (traité en section 5) et de $\mathrm{PGL}_3/\mathrm{PSO}_3$ (traité en section 4). On peut résumer les résultats obtenus dans ce chapitre par :

Théorème. *Soit G un groupe simple adjoint connexe. Alors il existe un opérateur différentiel qui n'est pas dans l'image de L sur les compactifications magnifiques Y des espaces symétriques de la forme $G \times G/G$ ou G/H dont le système de racines réduit est de type A_1 ou A_2 .*

Lorsque $\tilde{\Phi}$ est de type A_1 , ce résultat n'est pas surprenant, puisque nous verrons que Y est en fait une variété de drapeaux pour le groupe $\mathrm{Aut}^0(X)$, qui est plus gros que G . Dans la suite, nous nous intéresserons plus en détail au cas où $\tilde{\Phi}$ est de type A_2 . À l'exception de la compactification magnifique de E_6/F_4 , ces variétés peuvent être décrites à l'aide d'un théorème dû à Thaddeus (cf. [Th2]) comme des quotients GIT $X//\mathbb{C}^*$ de certaines grassmanniennes $X = G'/P'$. Après avoir fait quelques rappels sur les quotients géométriques et sur les quotients GIT, nous présenterons plus en détail ce théorème dans le chapitre 3. En se servant de résultats connus sur les grassmanniennes (qui sont des variétés de drapeaux), nous montrerons, lorsque Y est la compactification magnifique de $\mathrm{PGL}_3 \times \mathrm{PGL}_3/\mathrm{PGL}_3$, de $\mathrm{PGL}_3/\mathrm{PSO}_3$ ou de $\mathrm{PGL}_6/\mathrm{PSp}_6$, les résultats suivants :

Théorème.

- (1) *L'algèbre D_Y des opérateurs différentiels globaux sur Y est de type fini.*
- (2) *Si \mathcal{L} un faisceau inversible sur Y , alors $H^0(Y, \mathcal{L})$ est soit nul soit un module simple à gauche pour l'algèbre $D_{Y, \mathcal{L}}$ des opérateurs différentiels globaux de \mathcal{L} .*

En notant X^{ss} l'ensemble des points semi-stables de X et $X^{us} = X \setminus X^{ss}$, un point important de la preuve est que X^{us} est de codimension au moins 2, ce qui nous donne pour tout faisceau inversible $\overline{\mathcal{L}}$ sur X l'égalité $H^0(X, \overline{\mathcal{L}}) = H^0(X^{ss}, \overline{\mathcal{L}})$. Cependant, cette égalité n'est plus nécessairement vraie pour la cohomologie supérieure, et on peut mesurer la différence à l'aide des groupes de cohomologie locale $H_{X^{us}}^i(X, \overline{\mathcal{L}})$. Après avoir fait plusieurs rappels sur la cohomologie locale, nous expliquerons dans le chapitre 4 l'idée de Kempf (cf. [Ke1]) d'utiliser des complexes de Cousin pour pouvoir exprimer d'une nouvelle manière les $H^i(X, \overline{\mathcal{L}})$, et nous nous inspirerons de cette idée pour donner une manière d'exprimer

les groupes de cohomologie locale $H_{X_w}^l(X, \overline{\mathcal{L}})$ (où X_w désigne une cellule de Bruhat de X , et où l est la longueur de w) à l'aide d'un complexe de Cousin restreint. Ce complexe nous permettra ensuite d'obtenir de bonnes approximations des caractères des \mathfrak{g}' -modules $H_{X_w}^l(X, \overline{\mathcal{L}})$, puis de montrer pour les mêmes Y , en s'aidant de résultats de Brylinski-Kashiwara, le théorème suivant :

Théorème. *Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur Y , et notons $l = \text{codim} X^{us} - 1$. Alors $H^l(Y, \mathcal{L})$ est soit nul soit un $D_{Y, \mathcal{L}}$ -module simple à gauche.*

Pour terminer, on se servira de la description des groupes de cohomologie $H^i(Y, \mathcal{L})$ en tant que \mathfrak{g} -module donnée dans [Tc1] et [Tc2] pour obtenir la simplicité de tous les $H^i(Y, \mathcal{L})$:

Théorème. *Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur Y . Alors $H^i(Y, \mathcal{L})$ est soit nul soit un $D_{Y, \mathcal{L}}$ -module simple à gauche pour tout i*

On pourra mettre ces résultats en perspective avec ceux déjà connus sur les variétés de drapeaux : sur ces exemples, on obtient que D_Y est encore de type fini, et les groupes de cohomologie $H^i(Y, \mathcal{L})$ fournissent encore une famille de modules simples pour les algèbres d'opérateurs différentiels tordus. Cependant, on observe une différence au niveau du morphisme L qui n'est plus surjectif, puisque tous les opérateurs différentiels globaux ne proviennent pas nécessairement de l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} . Dans l'exemple de la section 2.4, on peut observer le rôle que peut avoir un opérateur différentiel qui n'est pas dans l'image de L en comparant la description des $H^0(Y, \mathcal{L})$ en tant que \mathfrak{g} -module et en tant que $D_{Y, \mathcal{L}}$ -module.

Table des matières

Introduction	5
1 Opérateurs différentiels sur les variétés de drapeaux	11
1.1 Rappels sur les variétés de drapeaux	11
1.2 \mathcal{D} -affinité des variétés de drapeaux	13
1.3 Opérateurs différentiels globaux sur les variétés de drapeaux	16
2 Construction d'un opérateur différentiel important	19
2.1 Rappels sur les variétés magnifiques	19
2.2 Compactifications magnifiques d'espaces symétriques	21
2.3 Faisceaux inversibles et leur cohomologie	23
2.4 Etude d'un cas particulier	25
2.5 Non-surjectivité de L en type A_1 et A_2	32
3 Etude en type A_2 via la théorie géométrique des invariants	41
3.1 Rappels sur la théorie géométrique des invariants	41
3.2 Variation des quotients GIT	44
3.3 Collinéations complètes	48
3.4 Etude en rang 2	53
3.4.1 Cas de $\overline{\mathrm{PGL}}_3$	53
3.4.2 Cas de $\overline{\mathrm{PGL}}_3/\overline{\mathrm{PSO}}_3$	59
3.4.3 Cas de $\overline{\mathrm{PGL}}_6/\overline{\mathrm{PSp}}_6$	61
3.4.4 Cas de $\overline{E}_6/\overline{F}_4$	65
4 Etude de la cohomologie supérieure	67
4.1 Cohomologie locale	67
4.2 Complexe de Cousin	73
4.3 Structure de G -module	78
4.4 Lien avec la cohomologie sur les quotients géométriques	81
4.5 Retour sur les exemples de type A_2	82
4.5.1 Cas de $\overline{\mathrm{PGL}}_3$	84
4.5.2 Cas de $\overline{\mathrm{PGL}}_3/\overline{\mathrm{PSO}}_3$	89
4.5.3 Cas de $\overline{\mathrm{PGL}}_6/\overline{\mathrm{PSp}}_6$	91
A Classification des espaces symétriques	95
Bibliographie	99

Chapitre 1

Opérateurs différentiels sur les variétés de drapeaux

1.1 Rappels sur les variétés de drapeaux

Fixons une fois pour toutes un corps k algébriquement clos et de caractéristique nulle. Toutes les variétés entrant en jeu seront considérées comme étant définies sur k . Cette section a pour but de rappeler des résultats bien connus sur les variétés de drapeaux.

Définition. On dit qu'une variété X est une *variété de drapeaux* si $X = G/P$, où G est un groupe algébrique réductif connexe et P un sous-groupe parabolique de G . Si P est un sous-groupe de Borel de G , on dira que X est une *variété de drapeaux complets*.

En particulier, les variétés de drapeaux sont des variétés projectives, lisses, et ce sont exactement les espaces homogènes complets pour l'action d'un certain groupe algébrique G réductif.

Exemples.

- (1) Notons $\mathcal{F}_n := \{(V_i)_{1 \leq i \leq n-1} : 0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq k^n\}$. Alors $\mathcal{F}_n \simeq \mathrm{SL}_n/B$ (pour un Borel $B \subset \mathrm{SL}_n$) est une variété de drapeaux complets.
- (2) Notons pour tout sous-ensemble $I \subset \{1, \dots, n\}$,

$$\mathcal{F}_n(I) := \{(V_i)_{i \in I} : 0 \subsetneq V_{i_1} \subsetneq \dots \subsetneq V_{i_p} \subsetneq k^n, \dim V_{i_k} = i_k\}$$

Alors $\mathcal{F}_n(I) \simeq \mathrm{SL}_n/P_I$ est une variété de drapeaux, où P_I est un sous-groupe parabolique de SL_n conjugué au sous-groupe des matrices triangulaires supérieures par blocs, de blocs diagonaux de taille $i_1, i_2 - i_1, \dots, i_p - i_{p-1}, n - i_p$. En particulier, les grassmanniennes $\mathrm{Gr}_m(k^n)$ sont des variétés de drapeaux, de dimension $m(n - m)$.

- (3) Etant donné ω une forme symplectique non dégénérée et q une forme quadratique non dégénérée sur k^{2n} , notons

$$\mathrm{LaGr}_n(k^{2n}) = \{V \subset k^{2n} : V \text{ totalement isotrope pour } \omega\}$$

et

$$\mathrm{OGr}_n(k^{2n}) = \{V \subset k^{2n} : V \text{ totalement isotrope pour } q\}$$

Alors $\mathrm{LaGr}_n(k^{2n})$ est une variété de drapeaux pour $\mathrm{Sp}_{2n}(\omega)$, et les composantes connexes de $\mathrm{OGr}_n(k^{2n})$ (qui sont données par la parité de la dimension de l'intersection des sous-espaces totalement isotropes avec un sous-espace totalement isotrope fixé) sont des variétés de drapeaux pour $\mathrm{SO}_{2n}(q)$. Elles sont de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

Soit G un groupe algébrique réductif, P un sous-groupe parabolique et $X = G/P$. Fixons T un tore maximal et B un sous-groupe de Borel de G , tous deux contenus dans P . Notons $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$ le système de racines associé, où Φ^+ désigne le sous-ensemble des racines positives pour B , et Δ le sous-ensemble des racines simples. Notons W le groupe de Weyl de (G, T) , et définissons une fonction longueur sur W par :

$$l(w) = |w(\Phi^+) \cap \Phi^-|$$

X a un nombre fini de B -orbites (qui sont toutes isomorphes à des espaces affines), et sa décomposition en B -orbites (décomposition de Bruhat) nous fournit une décomposition cellulaire de X . Notons W_P le sous-groupe de W ayant un représentant dans P , et $W^P = W/W_P$. Notons Λ le réseau des poids (sauf mention du contraire, poids signifiera par la suite poids entier) associé à (G, T) , Λ_P le sous-réseau de Λ des poids W_P -invariants, Δ_P les racines simples de W_P , et Φ_P le système de racines d'un Levi L_P de P . Nous désignerons également par X_0 la B -orbite ouverte. Considérons comme système de représentants de W^P les $\{w \in W, \forall \alpha \in \Phi^+ \cap \Phi_P, w(\alpha) \in \Phi^+\}$. Alors :

$$X = \bigsqcup_{w \in W^P} BwP/P$$

Chaque B -orbite $X_w = BwP/P$ a pour dimension $l(w)$. La décomposition de Bruhat est un cas particulier de décomposition de Białynicki-Birula de X (cf. [B-B]).

La décomposition de Bruhat a beaucoup d'applications : par exemple, quand $X = G/B$, l'étude des cohomologie d'intersection des adhérences des cellules de Bruhat a permis, grâce à la correspondance de Riemann-Hilbert et aux travaux de Beilinson-Bernstein [BB] (et indépendamment, de Brylinski-Kashiwara [BK]) sur les opérateurs différentiels sur X , de prouver la conjecture de Kazhdan-Lusztig décrivant le caractère des représentations irréductibles de G .

Pour $\alpha \in \Delta \setminus \Delta_P$, notons D_α le diviseur $\overline{Bw_0s_\alpha P/P}$, où w_0 désigne l'élément de W^P de plus grande longueur. Alors les D_α recouvrent $X \setminus X_0$ (cf. [Ke1] 3.7). Si D est un diviseur de Weil à support dans $X \setminus X_0$, on peut l'écrire

$$D = \sum_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_P} n_\alpha D_\alpha$$

et en notant ϖ_α le poids fondamental associé à α , on lui associe un poids dans Λ_P :

$$p(D) = \sum_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_P} n_\alpha \varpi_\alpha$$

On peut alors noter $\mathcal{L}_{p(D)}$ pour désigner le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ associé au diviseur de Weil D . Notons Λ_P^+ l'ensemble des poids de la forme $\sum_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_P} n_\alpha \varpi_\alpha$ avec des $n_\alpha \geq 0$. On va décrire maintenant les faisceaux inversibles sur X :

Proposition 1.1.1. *Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur X . Alors $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}_{p(D)}$ pour un unique diviseur de Weil D à support dans $X \setminus X_0$, $\mathcal{L}_{p(D)}$ a des sections globales non nulles si et seulement si $p(D) \in \Lambda_P^+$, ie. on peut écrire*

$$D = \sum_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_P} n_\alpha D_\alpha$$

avec des $n_\alpha \geq 0$. C'est un faisceau ample si et seulement si tous les $n_\alpha > 0$. De plus, pour tout $\lambda \in \Lambda_P$, il existe un diviseur de Weil D à support dans $X \setminus X_0$ tel que $p(D) = \lambda$.

Pour une preuve de cette proposition, on peut se référer à [Ke1] (4.3) et (5.3). Notons $\pi : G \rightarrow X$ la projection. Si χ est un caractère de L_P , on a pour tout ouvert U de X :

$$\mathcal{L}_\chi(U) = \{f \in \mathcal{O}_G(\pi^{-1}(U)) : f(gp) = \chi^{-1}(p)f(g) \text{ pour tous } p \in P, g \in G\}$$

Le théorème de Borel-Weil-Bott décrit les groupes de cohomologie des faisceaux inversibles sur X en tant que \mathfrak{g} -modules. Avant de l'énoncer, il nous faut définir une nouvelle action de W sur Λ : notons ρ la demi-somme des racines positives, et posons

$$w * \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$$

(il s'agit simplement de l'action usuelle translatée par $-\rho$). On a alors :

Théorème 1.1.2 : (Borel-Weil-Bott). *Soit $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}_\lambda$ un faisceau inversible sur $X = G/P$, avec G connexe réductif. Alors :*

1. *Si $\lambda + \rho$ est sur un mur d'une chambre de Weyl (ou de manière équivalente, il existe $w \in W$ tel que $w * (\lambda) = \lambda$), alors $H^i(X, \mathcal{L}_\lambda) = 0$ pour tout i .*
2. *Sinon, il existe $w \in W$ tel que $w * \lambda$ soit dans l'intérieur de la chambre de Weyl fondamentale. Alors $H^i(X, \mathcal{L}_\lambda) = 0$ pour tout $i \neq l(w)$, et*

$$H^{l(w)}(X, \mathcal{L}_\lambda) = (V_{w*\lambda})^*$$

où $V_{w*\lambda}$ est le G -module irréductible de plus haut poids $w * \lambda$ (et G agit par multiplication à gauche : $(g.s)(x) = s(g^{-1}x)$).

Plusieurs preuves ont été données pour ce théorème, comme par exemple celle de Bott [Bo], ou de Kostant [Ko1]. Une preuve beaucoup plus simple a été donnée par Demazure [De1] dans le cas de G/B .

1.2 \mathcal{D} -affinité des variétés de drapeaux

Pour les variétés affines $X = \text{Spec}A$, on a une équivalence de catégories entre les catégories des A -modules, et celles des \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents. Bien sûr, les variétés de drapeaux de dimension strictement positive ne sont pas affines, mais vérifient une propriété similaire pour le faisceau des opérateurs différentiels \mathcal{D}_X .

Définition. Soit X une variété algébrique. Pour tout $m \geq 0$, notons \mathcal{D}_X^m le sous-faisceau de $\text{End}_k(\mathcal{O}_X)$ défini par récurrence sur m sur tout ouvert $U \in X$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X^0(U) &= \mathcal{O}_X(U) \text{ (agissant par multiplication)} \\ \mathcal{D}_X^{m+1}(U) &= \{d \in \text{End}_k(\mathcal{O}_U), \forall V \subset U \text{ ouvert}, \forall f \in \mathcal{O}_X(V), d|_V f - f d|_V \in \mathcal{D}_X^m(V)\} \end{aligned}$$

On définit alors le faisceau des opérateurs différentiels sur X sur tout ouvert $U \subset X$ par

$$\mathcal{D}_X(U) = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{D}_X^m(U)$$

Définissons maintenant ce qu'est une variété \mathcal{D} -affine :

Définition. Soit X une variété algébrique quasi-projective lisse. Notons $D_X = \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$, $\mathcal{D}_X\text{-mod}$ la catégorie des \mathcal{D}_X -modules (à gauche) quasi-cohérents en tant que \mathcal{O}_X -modules, et $D_X\text{-mod}$ la catégorie des D_X -modules. On dit que X est \mathcal{D} -affine si le foncteur section globales

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{D}_X\text{-mod} &\rightarrow D_X\text{-mod} \\ \mathcal{M} &\mapsto \Gamma(X, \mathcal{M}) \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories (ie. il existe un foncteur $\Delta : D_X\text{-mod} \rightarrow \mathcal{D}_X\text{-mod}$ tel que $\Gamma \circ \Delta \cong \text{id}_{D_X\text{-mod}}$ et $\Delta \circ \Gamma \cong \text{id}_{\mathcal{D}_X\text{-mod}}$).

Remarque. Dans ce cas, on peut prendre comme foncteur inverse le foncteur de localisation :

$$\begin{aligned} \Delta : D_X - \mathbf{mod} &\rightarrow \mathcal{D}_X - \mathbf{mod} \\ M &\mapsto M \otimes_{D_X} \mathcal{D}_X \end{aligned}$$

La notation utilisée ici est différente de la notation usuelle du foncteur de localisation $\tilde{}$ pour insister sur le fait que l'on localise en tant que \mathcal{D}_X -module.

Soit X une variété algébrique lisse. Pour tout M objet de $D_X - \mathbf{mod}$,

$$\Gamma(X, \Delta(M)) = \Gamma(X, M \otimes_{D_X} \mathcal{D}_X) = M \otimes_{D_X} \Gamma(X, \mathcal{D}_X) = M$$

donc on a déjà $\Gamma \circ \Delta \cong \text{id}_{D_X - \mathbf{mod}}$. Il suffit donc de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\Delta \circ \Gamma \cong \text{id}_{\mathcal{D}_X - \mathbf{mod}}$.

Proposition 1.2.1. *Pour que X soit \mathcal{D} -affine, il faut et il suffit que, pour tout objet \mathcal{M} de $\mathcal{D}_X - \mathbf{mod}$, les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

- a) $H^i(X, \mathcal{M}) = 0$ pour tout $i > 0$;
- b) $\Gamma(X, \mathcal{M}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{M} = 0$

Démonstration. Si X est \mathcal{D} -affine, le b) est évident, et pour le a), il suffit de remarquer qu'un objet injectif dans $\mathcal{D}_X - \mathbf{mod}$ l'est en tant que \mathcal{O}_X -module, donc les $H^i(X, \cdot)$ sont bien les foncteurs dérivés de $\Gamma(X, \cdot)$.

Si les propriétés a) et b) sont vérifiées, alors Γ est un foncteur exact, et avec b), on déduit que Γ est un foncteur pleinement fidèle. L'essentielle surjectivité de Γ vient du fait que $\Gamma \circ \Delta \cong \text{id}_{D_X - \mathbf{mod}}$. \square

Soient G un groupe algébrique réductif connexe, $T \subset B \subset P \subset G$ respectivement un tore maximal, un sous-groupe de Borel et un sous groupe parabolique. Notons $X = G/P$. On va maintenant énoncer le théorème principal de cette section :

Théorème 1.2.2. *La variété X est \mathcal{D} -affine.*

Ce théorème a été prouvé par Beilinson-Bernstein [BB] dans le cas des variétés de drapeaux complets. Cependant, n'ayant pas de référence pour le cas général de G/P avec G réductif, nous donnerons une preuve de ce théorème ici.

Notons $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. Commençons par rappeler que comme G agit sur X , on a un morphisme naturel $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow D_X$. En effet, si $M \in \mathfrak{g}$, on construit un champ de vecteurs

$$f \mapsto [x \mapsto \frac{d}{dt} f(e^{-Mt}x)|_{t=0}]$$

ce qui nous donne un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \mapsto D_X$, qui se prolonge bien en un morphisme d'algèbres $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow D_X$.

Notons $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$, (H_i) une base de \mathfrak{t} , κ la forme de Killing de \mathfrak{g} et (K_i) la base duale à (H_i) pour κ . Notons également pour $\alpha \in \Phi$, X_α un générateur de \mathfrak{g}_α tel que $\kappa(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$. Définissons l'opérateur de Casimir par

$$C = \sum H_i K_i + \sum_{\alpha \in \Phi^+} (X_\alpha X_{-\alpha} + X_{-\alpha} X_\alpha)$$

C'est un élément du centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, il ne dépend pas de la base choisie, et comme il est central, il agit sur les modules de plus haut poids (et de plus bas poids) de poids λ par le scalaire $c_\lambda = (\lambda + 2\rho, \lambda) = |\lambda + \rho|^2 - |\rho|^2$ (où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire induit par κ sur \mathfrak{t}^*).

Pour prouver le théorème pour G/B , Beilinson et Bernstein ont étudié l'action de

l'opérateur de Casimir C sur des \mathcal{D}_X -modules « tordus » par des faisceaux inversibles. Si \mathcal{L}_λ est un faisceau inversible sur $X = G/P$ (avec $\lambda \in \Lambda_P$), notons

$$\mathcal{D}_{X,\lambda} = \mathcal{L}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_\lambda^{\otimes -1}$$

le faisceau des opérateurs différentiels tordus par \mathcal{L}_λ . Si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X,\lambda}$ -module et si $\mu \in \Lambda_P$ notons $\mathcal{M}(\mu) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}_\mu$. Remarquons que $\mathcal{D}_{X,\lambda} \simeq \mathcal{D}_X$ comme \mathcal{O}_X -module, mais pas comme \mathcal{O}_X -algèbre.

La preuve se ramène au cas des variétés de drapeaux complets, dont nous allons expliquer rapidement l'idée. Si $X = G/B$, on se sert du lemme-clef de [BB] :

Lemme 1.2.3. *Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module, et $\lambda \in \Lambda^+$. Alors :*

- (a) *Le morphisme $i_\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V_\lambda^*$ admet une cosection j_λ*
- (b) *Le morphisme $p_\lambda : \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}} V_\lambda \rightarrow \mathcal{M}(\lambda)$ admet une section q_λ*

En effet, l'action de C sur $\mathcal{M}(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V_\lambda^*$ (resp. $\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{C}} V_\lambda$) est diagonalisable, et $\text{Im}(i_\lambda)$ (resp. $\text{Ker}(p_\lambda)$) sont les sous-espaces caractéristiques associés à la valeur propre c_0 (resp. c_λ).

Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module. Pour tout sous- \mathcal{O}_X -module cohérent \mathcal{F} de \mathcal{M} , et pour tout $\lambda \in \Lambda^+$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{F}(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V_\lambda^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \rightarrow & \mathcal{M}(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V_\lambda^* \end{array}$$

Lorsque \mathcal{L}_λ est ample, pour $n \gg 0$ et $i > 0$ on a $H^i(\mathcal{F}(n\lambda)) = 0$, donc grâce à (a), les flèches $H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{M})$ sont nulles pour $i > 0$, donc $H^i(X, \mathcal{M}) = 0$ pour $i > 0$. Si $\mathcal{M} \neq 0$, et si \mathcal{F} est un sous- \mathcal{O}_X -module cohérent de \mathcal{M} , comme $\Gamma(X, \mathcal{F}(\lambda)) \neq 0$ pour λ dominant bien choisi, grâce au (b), on déduit que $\Gamma(X, \mathcal{M}) \neq 0$. Ceci prouve la \mathcal{D} -affinité des variétés de drapeaux complets.

Revenons maintenant au cas $X = G/P$. Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module, et $p : G/B \rightarrow X$ la projection. Ses fibres sont les P/B , et p est un morphisme plat. Soit \mathcal{F} un sous- \mathcal{O}_X -module cohérent de \mathcal{M} . Comme X est projective lisse, \mathcal{F} admet une résolution localement libre

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_n \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

où $n = \dim X$. La formule de projection (cf. [Ha1] (ex III 8.3)) nous donne

$$R^i p_*(p^* \mathcal{E}_j) = R^i p_*(\mathcal{O}_{G/B}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_j$$

pour tout $0 \leq j \leq n$, et comme p est plat et comme $H^i(P/B, \mathcal{O}_{P/B}) = 0$, on en déduit

$$R^k p_* p^* \mathcal{F} = \begin{cases} \mathcal{F} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$p^* \mathcal{F}$ est muni naturellement d'une structure de $\mathcal{D}_{G/B}$ -module, donc $H^i(G/B, \mathcal{F}) = 0$ pour $i > 0$. Or la suite spectrale de Leray

$$H^p(X, R^q p_* p^* \mathcal{F}) \Rightarrow H^*(G/B, p^* \mathcal{F})$$

dégénère, donc

$$H^i(G/B, p^* \mathcal{F}) = H^i(X, p_* p^* \mathcal{F}) = H^i(X, \mathcal{F}) = 0$$

pour $i > 0$. Ainsi pour tout sous- \mathcal{O}_X -module cohérent \mathcal{F} de \mathcal{M} , les flèches $H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{M})$ pour $i > 0$ sont nulles, donc $H^i(X, \mathcal{M}) = 0$ pour $i > 0$. De plus, comme $p^* \mathcal{F} \neq 0$ lorsque $\mathcal{F} \neq 0$, il en est de même pour $\Gamma(G/B, p^* \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$, donc $\Gamma(X, \mathcal{M}) \neq 0$ lorsque $\mathcal{M} \neq 0$, ce qui prouve bien que X est \mathcal{D} -affine.

1.3 Opérateurs différentiels globaux sur les variétés de drapeaux

Soient comme précédemment G un groupe algébrique réductif connexe, P un sous-groupe parabolique de G , et $X = G/P$. Le but de cette section est d'étudier le morphisme d'algèbres $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow D_X$ construit dans la section précédente, ce qui revient à étudier la structure de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ -module de D_X .

Considérons la filtration de \mathcal{D}_X par les \mathcal{D}_X^m . Soit

$$\text{gr}\mathcal{D}_X = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{D}_X^m / \mathcal{D}_X^{m-1}$$

le gradué associé (où l'on considère que $\mathcal{D}_X^{-1} = 0$). Soit $p : T^*X \rightarrow X$ le fibré cotangent de X . Alors $\text{gr}\mathcal{D}_X$ s'identifie naturellement avec l'image directe $p_*\mathcal{O}_{T^*X}$. Comme X est une variété homogène complète, on a d'après [BoB1] (1.4) l'égalité des sections globales :

Proposition 1.3.1. $\text{gr}D_X = \Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X})$

Une description de D_X a d'abord été donnée par Beilinson et Bernstein dans [BB] lorsque X est une variété de drapeaux complets. Notons

$$\mathfrak{z}_+ = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{g}$$

le centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ privé des constantes, et $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) / \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{z}_+$. Alors on a (cf. [BB] (2)) :

Théorème 1.3.2. *Le morphisme $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow D_X$ est surjectif, et il donne un isomorphisme $L : \mathfrak{U}_0 \xrightarrow{\sim} D_X$*

L'idée générale de leur preuve est la suivante : notons $\mathcal{N} = \{M \in \mathfrak{g}, M \text{ nilpotent}\}$ le cône nilpotent de \mathfrak{g} . Comme pour tout $x \in X$, on peut identifier (via la forme de Killing) la fibre $p^{-1}(x) = T_x X^*$ au sous-espace vectoriel $(\mathfrak{p}x^{-1})^\perp \subset \mathfrak{g}$, qui n'a que des éléments nilpotents. En utilisant des résultats de Kostant (cf. [Ko2]), on obtient que l'application moment $\mu : T^*X \rightarrow \mathcal{N}$ induit un isomorphisme $\Gamma(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X})$, qui se factorise en

$$\Gamma(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}}) \rightarrow \text{gr}\mathfrak{U}_0 \rightarrow \text{gr}D_X \rightarrow \Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X})$$

où la flèche du milieu est le gradué de L .

Cependant, cette preuve ne se généralise pas au cas de $X = G/P$, ceci étant dû au fait que l'image de T^*X dans \mathfrak{g} n'est pas une variété normale en général. On a néanmoins une bonne description de D_X , similaire au cas des variétés de drapeaux complets, due à Borho et Brylinski (cf. [BoB1]). Notons ρ_P la demi-somme des racines de Φ_P^+ , et $\Lambda^+(P) = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*, \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N} \text{ pour les } \alpha \in \Delta_P\}$. Pour $\lambda \in \Lambda^+(P)$, on peut définir un module de Verma généralisé

$$M_P(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{p})} k_\lambda$$

où k_λ désigne le \mathfrak{l}_P -module simple de plus haut poids λ (avec $\mathfrak{l}_P = \text{Lie}(L_P)$), étendu en un \mathfrak{p} -module par une action triviale de $\text{Lie}(R^u(P))$. Notons $I_P(\lambda) \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ son idéal annulateur. On a alors, d'après [BoB1] (3.8) :

Théorème 1.3.3. $D_X \simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) / I_P(2\rho_P - 2\rho)$

Remarques.

- (1) On a une description similaire des sections globales des faisceaux des opérateurs différentiels tordus : si $\lambda \in \Lambda_P$, alors

$$\Gamma(X, \mathcal{D}_{X,\lambda}) \simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) / I_P(2\rho_P - 2\rho + \lambda)$$

(2) Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent. Comme X est lisse, on peut toujours construire une bonne filtration $(\mathcal{M}(i))_{i \geq 0}$ de \mathcal{M} , c'est-à-dire une filtration par des sous- \mathcal{O}_X -modules cohérents qui vérifie pour tous m et p positifs

$$\mathcal{D}(m)\mathcal{M}(p) \subset \mathcal{M}(m+p)$$

où les inclusions sont localement des égalités pour p suffisamment grand. Alors $\text{gr}\mathcal{M}$ est un $\text{gr}\mathcal{D}_X$ -module cohérent, i.e. un $p_*\mathcal{O}_{T^*X}$ -module. Il existe alors un unique \mathcal{O}_{T^*X} -module cohérent $\tilde{\mathcal{M}}$ tel que $p_*(\tilde{\mathcal{M}}) = \text{gr}\mathcal{M}$. On dit que \mathcal{M} est *holonome* si le support de $\tilde{\mathcal{M}}$ (appelé la variété caractéristique de \mathcal{M}) est de dimension $\dim X$. De plus, on dit que \mathcal{M} est à singularité rationnelles si elle admet une bonne filtration $(\mathcal{M}(i))$ telle que pour tout ouvert $U \subset X$, pour toute section $P \in \mathcal{D}(m)(U)$ dont l'image dans \mathcal{O}_{T^*X} s'annule sur le support de $\tilde{\mathcal{M}}$, alors $P\mathcal{M}(p) \subset \mathcal{M}(m+p-1)$.

Lorsque $X = G/B$, sous l'équivalence de catégories de la section 2, Brylinski et Kashiwara ont montré dans [BK] que les \mathcal{D}_X -modules holonomes à singularités rationnelles correspondent aux $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ -modules M de type fini, tels que pour tout $v \in M$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{b}).v$ soit de dimension finie (autrement dit, M est localement \mathfrak{b} -fini), et que $\mathfrak{z}_+.M = 0$. Ainsi par la correspondance de Riemann-Hilbert, la catégorie des $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ -modules de type fini, localement \mathfrak{b} -finis et de caractère central trivial est équivalente à celle des faisceaux pervers sur X .

Chapitre 2

Construction d'un opérateur différentiel important

Les G -variétés magnifiques, où G un groupe réductif connexe, sont des G -variétés intéressantes dans la mesure où on a de bonnes propriétés concernant leurs G -orbites. De plus, comme les variétés de drapeaux sont des variétés magnifiques, c'est une direction naturelle pour tenter de généraliser ce que l'on sait sur les variétés de drapeaux. La première section consistera en des rappels sur les variétés magnifiques. Une classe de variétés mieux comprises parmi les variétés magnifiques est celle des compactifications magnifiques d'espaces symétriques, dont nous rappellerons une construction ainsi que quelques propriétés dans la deuxième section. Nous énoncerons dans la troisième section quelques résultats sur la description en tant que G -modules des groupes de cohomologie des fibrés en droites sur les compactifications magnifiques d'espaces symétriques, qui est partiellement comprise. Nous nous pencherons ensuite sur l'exemple de la compactification magnifique de $\mathrm{PGL}_3/\mathrm{PSO}_3$, où l'on construira un opérateur différentiel global qui ne provient pas de l'algèbre enveloppante de G . Nous verrons enfin dans la dernière section que l'on peut également construire un tel opérateur sur toutes les compactifications magnifiques d'espaces symétriques de type A_1 et A_2 .

2.1 Rappels sur les variétés magnifiques

Les variétés magnifiques sont des objets qui généralisent dans un certain sens les variétés de drapeaux, dans la mesure où ce sont des variétés projectives, complètes, munies d'une action d'un groupe algébrique réductif G vérifiant certaines bonnes propriétés. Les propriétés de ces variétés données ci-dessous sont bien connues, on peut les retrouver par exemple dans [Br], [Lu1] ou encore [Ti].

Définition. Soit G un groupe algébrique réductif connexe. On dit qu'une G -variété projective lisse X est magnifique de rang r si :

- (1) X contient une G -orbite ouverte Ω
- (2) $X \setminus \Omega$ est un diviseur à croisement normaux $D = \bigcup_{i=1}^r D_i$, où les D_i sont les composantes irréductibles de D , dont l'intersection est non vide
- (3) les adhérences des G -orbites de X sont exactement les $\bigcap_{i \in I} D_i$ avec $I \subset \{1, \dots, r\}$

Exemples.

- (1) Les G -variétés magnifiques de rang 0 sont les variétés projectives complètes n'ayant

qu'une seule G -orbite, ce sont exactement les variétés de drapeaux G/P avec $P \subset G$ parabolique

- (2) \mathbb{P}^n est aussi une G -variété magnifique de rang 1 pour $G = \mathrm{SO}(q)$, où q est une forme quadratique non dégénérée de \mathbb{C}^{n+1} . La G -orbite fermée correspond à l'hypersurface ($q = 0$), et la G -orbite ouverte est son complémentaire. On remarque en particulier que le rang d'une variété magnifique dépend de l'action de groupe considérée.
- (3) Pour $n > 0$, l'éclatement de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ le long de la diagonale est une G -variété magnifique de rang 1 pour $G = \mathrm{PGL}_{n+1}$, avec le diviseur exceptionnel et son complémentaire comme G -orbites.
- (4) Les compactifications magnifiques d'espaces symétriques sont des variétés magnifiques, nous reviendrons sur ces variétés dans la section suivante.

Soit X une G -variété magnifique, et notons Ω sa G -orbite ouverte. Soit $B \subset G$ un sous-groupe de Borel. Comme les variétés magnifiques sont des variétés sphériques (cf. [Lu1]), elles ont une B -orbite ouverte $\Omega_B \subset \Omega$. Son complémentaire dans Ω est une union de diviseurs premiers B -stables. Les adhérences dans X de ces diviseurs sont appelées des *couleurs*, et ce sont exactement les diviseurs irréductibles B -stables qui ne sont pas G -stables. Notons Δ_X l'ensemble des couleurs de X , et notons

$$X_0 = X \setminus \bigcup_{D \in \Delta_X} D$$

On appelle X_0 la grosse cellule de X , et elle est isomorphe à un espace affine. Comme X_0 est un espace affine, $\mathrm{Pic}(X)$ est le groupe libre engendré par les classes des faisceaux $\mathcal{O}_X(D)$ où D parcourt Δ_X . Remarquons que X a une unique G -orbite fermée $F = \bigcap_{i=1}^r D_i$, et c'est une variété de drapeaux de la forme G/P_X . Comme X est une G -variété normale projective avec une unique G -orbite fermée, l'action du radical de G est triviale, et quitte à considérer $G/R(G)$, on peut donc supposer que G est semi-simple. X_0 intersecte chaque G -orbite le long de sa B -orbite ouverte, et comme X est sphérique, on a les inégalités $\dim X \leq \dim B$ et $r \leq \mathrm{rg}_{ss}(G)$, où $\mathrm{rg}_{ss}(G)$ désigne le rang semi-simple de G (cf. [Lu1]).

Soit \tilde{G} le revêtement universel de G . Alors tout faisceau inversible \mathcal{L} sur X est \tilde{G} -linéarisable de manière unique (et même, il existe $d > 0$ tel que $\mathcal{L}^{\otimes d}$ soit G -linéarisable). En particulier, les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{L})$ peuvent être munis d'une structure de \mathfrak{g} -module.

- A une G -variété magnifique X , on peut associer plusieurs invariants combinatoires :
- l'ensemble Δ_{P_X} des racines simples associées à P_X ;
 - l'ensemble Δ_X des couleurs de X ;
 - l'ensemble Σ_X des *racines sphériques* de X , définies comme suit : $D_i \cap X_0$ est défini dans X_0 par une équation $f_i = 0$ pour une certaine fonction régulière f_i , et on définit γ_i la racine sphérique associée à D_i comme étant l'opposé du poids de f_i pour l'action de B ;
 - la matrice A_X faisant le lien entre les couleurs et les diviseurs irréductibles G -stables, dont les coefficients sont les $a_{i,D}$ définis par

$$\mathcal{O}_X(D_i) = \mathcal{O}_X\left(\bigoplus_{D \in \Delta_X} a_{i,D} D\right)$$

Soient G un groupe réductif connexe et $T \subset B \subset G$ un tore maximal et sous-groupe de Borel respectivement. Notons

$$\Xi = \{\chi \mid \exists f \in k(X), b.f = \chi(b).f\}$$

le réseau des caractères des fonctions rationnelles B -semi-invariantes sur X . Dans [Wa], Wasserman a remarqué que pour classifier les G -variétés magnifiques X de rang 2, il suffit de la donnée de l'ensemble Θ des T -poids (avec multiplicité) sur l'espace tangent $T_z X$, où z est l'unique B^- point fixe de X , et d'une application

$$\begin{aligned} \rho : \Delta_X &\rightarrow \text{Hom}(\Xi, \mathbb{Z}) \\ D &\mapsto [\chi_f \mapsto v_D(f)] \end{aligned}$$

où v_D désigne l'ordre d'annulation le long de D . Remarquons que ρ est bien définie, puisque si $\chi_f = \chi_{f'}$, alors f est un multiple de f' .

Remarque. Soit G un groupe semi-simple adjoint de type A . Luna a montré dans [Lu3] que l'ensemble des G -variétés magnifiques à isomorphisme près est en bijection avec l'ensemble des systèmes sphériques de G , qui sont des objets de nature combinatoire. Récemment, ceci a été généralisé au cas d'un groupe G semi-simple adjoint quelconque, indépendamment par Bravi et Pezzini dans [BPe] et par Cupit-Foutou dans [C-F].

2.2 Compactifications magnifiques d'espaces symétriques

Les compactifications magnifiques d'espaces symétriques ont été introduites par De Concini et Procesi dans [DCP] (appelées alors espaces symétriques complets). Nous rappelons ici leur construction, et quelques unes de leurs propriétés.

Soit G un groupe algébrique semi-simple adjoint connexe, et θ un automorphisme d'ordre 2 de G . Notons $H = G^\theta$ le sous-groupe des points fixes de G . Remarquons que H est réductif. Le but est de construire une G -variété magnifique X , contenant une G -orbite ouverte isomorphe à G/H . Le morphisme θ induit un automorphisme sur \mathfrak{g} , que l'on note encore θ , et $\mathfrak{h} := \text{Lie}(H)$ correspond exactement au sous-espace propre de valeur propre 1. Si $T \subset G$ est un tore maximal θ -stable, et \mathfrak{t} son algèbre de Lie, \mathfrak{t} se décompose en

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{t}_1$$

où \mathfrak{t}_0 (resp. \mathfrak{t}_1) est le sous-espace propre de \mathfrak{t} associé à la valeur propre 1 (resp. -1). De plus, \mathfrak{t}_0 est l'algèbre de Lie de $T_0 = T^\theta$, et \mathfrak{t}_1 est l'algèbre de Lie de $T_1 = \{t \in T, t^\theta = t^{-1}\}$. Fixons un tore maximal T tel que la dimension de \mathfrak{t}_1 soit maximale. On note l cette dimension, et on l'appelle le rang de l'espace symétrique G/H . Notons Φ l'ensemble des racines de (G, T) . L'action de θ sur \mathfrak{t}^* induit une décomposition

$$\Phi = \Phi_0 \sqcup \Phi_1$$

où Φ_0 est l'ensemble des racines invariantes par θ . On peut alors choisir un sous-groupe de Borel B de telle manière que θ envoie toutes les racines positives de Φ_1 sur des racines négatives. Fixons B un tel Borel. Le choix de B induit un choix de l'ensemble des racines simples Δ , que l'on peut décomposer en

$$\Delta = \Delta_0 \sqcup \Delta_1$$

où $\Delta_i = \Delta \cap \Phi_i$. Soit $\alpha_i \in \Delta_1$, et notons ϖ_i le poids fondamental associé. On a

$$-\theta(\alpha_i) = \alpha_{i'} + \sum_k n_{i,k} \beta_k$$

avec $\alpha_{i'} \in \Delta_1$, $\beta_k \in \Delta_0$ et $n_{i,k} \in \mathbb{N}$, ce qui donne $\theta(\varpi_i) = -\varpi_{i'}$. Notons $\bar{\alpha}_i = \frac{1}{2}(\alpha_i - \theta(\alpha_i))$ la projection de α_i sur $\mathcal{X}(T_1)$. Comme $\dim(T_1) = l$, quitte à renuméroter les $\alpha_i \in \Delta_1$, on peut supposer que les l premiers $\bar{\alpha}_i$ sont distincts (et alors pour $i > l$, on aura $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_{i'}$ pour un certain $i' \leq l$).

Définition. On dit qu'un poids dominant $\lambda = \sum_{\alpha_i \in \Delta_1} n_i \varpi_i$ est *spécial* si $n_i = n_{i'}$, ie. $\theta(\lambda) = -\lambda$

Les poids spéciaux sont en quelque sorte les "bons poids" à étudier : pour tout poids dominant λ , notons V_λ la représentation irréductible de plus haut poids λ , et V_λ^θ le G -module où $V_\lambda^\theta = V_\lambda$ comme espace vectoriel, et avec l'action de G définie par

$$g \star v = \theta(g).v$$

Si λ est spécial, alors $V_\lambda^\theta \simeq V_\lambda^*$ en tant que G -modules. Pour construire une compactification magnifique de G/H , on choisit un poids spécial régulier λ , et on se sert de la proposition suivante (cf. [DCP] 1.7) :

Proposition 2.2.1. *Soit λ un poids spécial régulier. Alors il existe $0 \neq h \in V_{2\lambda}^H$, que l'on peut écrire*

$$h = v_{2\lambda} + \sum_{i=1}^l z_i$$

où $v_{2\lambda}$ est un vecteur de plus haut poids 2λ , et les z_i sont de poids $2\lambda - 2\bar{\alpha}_i$.

Remarquons que les espaces symétriques sont des variétés sphériques (cf. [Ti](26.14) par exemple), donc pour tout poids dominant λ , on a $\dim V_\lambda^H \leq 1$, donc le h de la propriété précédente est unique à scalaire près. On arrive alors à la définition :

Définition. Soit λ un poids spécial régulier. On définit une compactification magnifique X de G/H comme étant l'adhérence de la G -orbite $G.[h]$ dans $\mathbb{P}(V_{2\lambda})$

On a a priori toute une famille de compactifications de G/H , mais d'après [DCP](4), il se trouve qu'elles sont toutes isomorphes :

Proposition 2.2.2. *X est une variété magnifique, et ne dépend pas du poids spécial régulier choisi.*

Remarques.

- (1) D'après [DCP] (4), on peut prendre à la place de $V_{2\lambda}$ une représentation W de plus haut poids 2λ , non nécessairement irréductible, tant qu'elle a une unique droite fixée par H , et que ses T_1 -poids sont de la forme $2\lambda - \sum 2n_i \bar{\alpha}_i$ avec des $n_i \geq 0$. On se servira beaucoup de cette remarque dans le chapitre 3.
- (2) Dans [De2], Demazure a aussi donné une construction d'une compactification de G/H , qui est un cas particulier de celle de De Concini et Procesi. Sa méthode est la suivante : notons $q = \dim H$, et soit (e_1, \dots, e_q) une base de \mathfrak{h} . On pose

$$\Lambda \mathfrak{h} = e_1 \wedge \dots \wedge e_q$$

On regarde \mathfrak{h} comme le point $[\Lambda \mathfrak{h}]$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^q \mathfrak{g})$, et on considère l'adhérence de $G.[\Lambda \mathfrak{h}]$ dans cet espace. On a une décomposition de \mathfrak{h} en

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{t}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_0} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_1^+} k(X_\alpha + X_{\theta(\alpha)})$$

avec des $0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. $\Lambda \mathfrak{h}$ s'écrit alors sous la forme $v + \sum z_i$ où, avec des notations similaires,

$$v \in \Lambda^{\dim \mathfrak{t}_0} \mathfrak{t}_0 \wedge \Lambda^{|\Phi_0|} \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi_0} \mathfrak{g}_\alpha \right) \wedge \Lambda^{|\Phi_1^+|} \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi_1^+} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

est de poids $2\rho_1 = \sum_{\alpha \in \Phi_1^+} \alpha$, et les z_i sont de poids $2\rho_1 - \sum_{\alpha_i \in \Phi_1^+} 2n_i \bar{\alpha}_i$ pour certains entiers positifs n_i . Comme le poids $2\rho_1$ est spécial régulier, on retrouve bien un cas particulier d'une compactification magnifique (cf. [DCP](6.1)).

Comme X est une variété magnifique, on sait qu'il existe une B -cellule affine X_0 . Notons $U' = \prod_{\alpha \in \Phi_1^+} U_\alpha$. Alors on a un isomorphisme B -équivariant

$$X_0 \simeq U' \times \mathbb{A}^l$$

Pour comprendre cet isomorphisme, on peut voir \mathbb{A}^l comme l'adhérence de $T_1.[h]$ dans X_0 , et on identifie $T_1.[h]$ avec l'ouvert de \mathbb{A}^l où toutes les coordonnées sont non nulles. On a un morphisme

$$\begin{aligned} T_1 &\rightarrow T_1.[h] \simeq \mathbb{C}^* \subset \mathbb{A}^l \\ t &\mapsto t.[h] \mapsto (2\overline{\alpha}_1(t), \dots, 2\overline{\alpha}_l(t)) \end{aligned}$$

On remarque que le stabilisateur de $[h]$ dans T_1 est $\{t \in T_1, 2\overline{\alpha}_i(t) = 1, \forall i\}$.

Notons (t_1, \dots, t_l) les coordonnées de \mathbb{A}^l . On a alors

$$k[X_0] = k[U'][t_1, \dots, t_l]$$

On remarque que la B -orbite ouverte est l'ouvert $\bigcap_i (t_i \neq 0)$ de X_0 , et à renumérotation près, les fermés $(t_i = 0)$ correspondent exactement aux $D_i \cap X_0$. On en déduit d'une part que les racines sphériques γ_i sont exactement les $2\overline{\alpha}_i$, et d'autre part que le rang l de l'espace symétrique G/H est égal au rang r de la variété magnifique X .

Donnons pour terminer cette section quelques exemples d'espaces symétriques :

Exemples.

- (1) Soit H un groupe algébrique semi-simple adjoint connexe. Soit $G = H \times H$, et soit l'involution de G $\theta : (h_1, h_2) \mapsto (h_2, h_1)$. Alors $G^\theta \simeq H$, et c'est l'image du plongement diagonal de H dans G . G/H est un espace symétrique, et dans ce cas, on désigne la compactification magnifique de G/H simplement comme la compactification magnifique de H .
- (2) Soit $G = \mathrm{PGL}_n$, $V = k^n$ muni d'une base canonique, et J la matrice d'une forme quadratique non dégénérée dans cette base. Soit θ l'involution $M \mapsto J(M^t)^{-1}J^t$. Alors $H := G^\theta \simeq \mathrm{PSO}_n$, et G/H est un espace symétrique. De manière analogue, si n est pair, et si J' est la matrice d'une forme symplectique non dégénérée dans la base canonique, posons θ' l'involution $M \mapsto J'(M^t)^{-1}J'^t$. Alors $H' := G^{\theta'} \simeq \mathrm{PSp}_n$, et G/H' est aussi un espace symétrique.
- (3) Chevalley et Schafer ont réalisé dans [ChS] les algèbres de Lie simples de type E_6 et F_4 comme sous-algèbres de l'algèbre des endomorphismes d'une certaine algèbre de Jordan, et l'algèbre de type F_4 correspond exactement aux points fixes d'un automorphisme extérieur de l'algèbre de type E_6 . Ainsi si G est un groupe adjoint connexe de type E_6 , et H un sous-groupe connexe de type F_4 , G/H est un espace symétrique.

2.3 Faisceaux inversibles et leur cohomologie

Soient comme précédemment G un groupe algébrique semi-simple adjoint connexe, θ un automorphisme d'ordre 2 de G , $H = G^\theta$ le sous-groupe des points fixes de G et X la compactification magnifique de G/H . A l'aide d'une décomposition de Bialynicki-Birula, De Concini et Procesi ont calculé dans [DCP](7.6) le groupe de Picard de X :

Proposition 2.3.1. $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}^{l+q}$ où q est le nombre de racines simples α_i , avec $1 \leq i \leq l$, telles qu'il existe deux racines simples distinctes α et β telles que $\overline{\alpha}_i = \overline{\alpha} = \overline{\beta}$ avec $-\theta(\alpha) \neq \beta$ ou $(\alpha, \beta) \neq 0$. On dit que X est exceptionnelle lorsque $q > 0$.

La proposition suivante va nous permettre, comme dans le cas des variétés de drapeaux, d'associer un unique poids λ à tout faisceau inversible sur X . En effet, soit F la G -orbite fermée de X . L'inclusion $i : F \hookrightarrow X$ induit un morphisme $i^* : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(F)$. Alors d'après [DCP](8.1),

Proposition 2.3.2. *Le morphisme i^* est injectif.*

En particulier, on peut identifier un faisceau inversible sur X à un faisceau inversible sur la variété de drapeaux F , donc on peut voir $\text{Pic}(X)$ comme un sous-réseau Γ de $\text{Pic}(F)$. On remarque que comme les diviseurs D_i sont définis par des équations de poids $-\gamma_i$, Γ contient le réseau engendré par les racines sphériques. Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur X . $i^*\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur F , et il est isomorphe à un \mathcal{L}_λ pour un certain poids λ . Comme i^* est injectif, par abus de notation, on écrira également \mathcal{L}_λ pour désigner la classe d'un tel faisceau inversible \mathcal{L} dans $\text{Pic}(X)$ (qui est nécessairement unique).

Comme les faisceaux inversibles sur X sont \tilde{G} -linéarisables de manière unique, on aimerait pouvoir décrire les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{L})$ en tant que \mathfrak{g} -modules. Une partie de ce travail a été faite dans [DCP](8.4) avec le théorème :

Théorème 2.3.3. *Soit \mathcal{L}_λ un faisceau inversible sur X . Alors :*

1. $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0$ ssi $\lambda = \mu + \sum_{i=1}^l n_i \gamma_i$ pour μ dominant et les n_i entiers positifs.
2. Lorsque $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0$, alors en tant que \tilde{G} -module,

$$H^0(X, \mathcal{L}) \simeq \bigoplus_{\substack{n_i \geq 0 \\ \nu = \lambda - \sum n_i \gamma_i \text{ dominant}}} V_\nu^*$$

3. Si λ est dominant, $H^i(X, \mathcal{L}_\lambda) = 0$ pour $i > 0$.

Cependant, ce résultat ne décrit pas les groupes de cohomologie supérieure lorsque λ n'est pas dominant.

On dit que X est de rang minimal si, en notant $\text{rang}(G)$ la dimension des tores maximaux de G , on a $r = \text{rang}(G) - \text{rang}(H)$. Si λ est un poids tel que $\lambda + \rho$ soit régulier, notons λ^+ l'unique poids dominant de la forme $w * \lambda$ avec $w \in W$. Avec le théorème suivant, Tchoudjem a décrit dans [Tc1] tous les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{L})$ si X est de rang minimal :

Théorème 2.3.4. *Soit X de rang minimal, et \mathcal{L}_λ un faisceau inversible sur X . Alors en tant que G -modules,*

$$H^i(X, \mathcal{L}_\lambda) \simeq \bigoplus_{J \subset \Sigma_X} \bigoplus_{\substack{\mu \in (\lambda + R_J) \cap \Omega_J \\ \mu + \rho \text{ régulier} \\ l(\mu) + |J| = i}} V_{\mu^+}^*$$

où pour toute partie $J \subset \Sigma_X$,

$$R_J := \sum_{\gamma \in J} \mathbb{Z}_{>0} \gamma + \sum_{\gamma \in \Sigma_X \setminus J} \mathbb{Z}_{\leq 0} \gamma$$

$$\Omega_J := \{\mu \in \Gamma \mid \{\gamma \in \Sigma_X \mid (\mu + \rho, \gamma) < 0\} = J\}$$

2.4 Etude d'un cas particulier

Dans cette section, nous nous intéresserons au cas particulier suivant : soit $G = \mathrm{PGL}_3$, soit θ l'involution $[M] \mapsto [(M^t)^{-1}]$ et $H := G^\theta \simeq \mathrm{PSO}_3$. Soient

$$B = \left\{ \left[\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right] \in \mathrm{PGL}_3 \right\}, T = \left\{ \left[\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right] \in \mathrm{PGL}_3 \right\}$$

On a $\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$, et pour toute racine α , $\theta(\alpha) = -\alpha$. Les racines sphériques sont alors les $\gamma_i = 2\alpha_i$. Rappelons que l'on a un morphisme $L : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow D_X$. Nous allons construire un opérateur différentiel global sur X qui n'est pas dans l'image de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, et grâce à cet opérateur, nous montrerons que pour tout faisceau inversible \mathcal{L}_λ , si $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0$, alors c'est un $D_{X,\lambda}$ -module simple.

Comme X est de rang 2, $\Phi : X_0 \simeq U \times \mathbb{A}^2$, où $U = R^u(B)$. Pour une racine α , notons u_α le sous-groupe à un paramètre

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1 &\rightarrow U_\alpha \\ x &\mapsto u_\alpha(x) = e^{xX_\alpha} \end{aligned}$$

On peut alors représenter un point de X_0 par un couple

$$(u_{\alpha_1+\alpha_2}(z)u_{\alpha_2}(y)u_{\alpha_1}(x), (t_1, t_2))$$

tel que si $t_1 t_2 \neq 0$, en notant Ω la G -orbite ouverte de X , l'isomorphisme Φ se restreint en

$$\begin{aligned} U \times \mathbb{A}^2 &\rightarrow X_0 \cap \Omega \\ (u_{\alpha_1+\alpha_2}(z)u_{\alpha_2}(y)u_{\alpha_1}(x), (t_1, t_2)) &\rightarrow u_{\alpha_1+\alpha_2}(z)u_{\alpha_2}(y)u_{\alpha_1}(x)a(t_1, t_2) \cdot [h] \end{aligned}$$

où $a(t_1, t_2)$ est la classe dans $T_1/\mathrm{Stab}_{T_1}[h]$ d'un certain $t \in T_1$ tel que $\gamma_i(t) = t_i$. Remarquons que γ_i est bien défini sur $T_1/\mathrm{Stab}_{T_1}[h]$ puisque $\mathrm{Stab}_{T_1}[h]$ est exactement l'intersection des noyaux de γ_1 et de γ_2 , ce qui montre que $a(t_1, t_2)$ est unique et bien défini. Par abus de notation, on notera toujours par la suite $a(t_1, t_2)$ un de ses représentants, dont le choix ne sera pas important. On a

$$k[X_0] = k[x, y, z, t_1, t_2]$$

et l'opérateur $\partial = \partial_{t_1} \partial_{t_2}$ est bien défini sur X_0 .

Proposition 2.4.1. *L'opérateur ∂ se prolonge en un opérateur différentiel global $\tilde{\partial}$ qui n'est pas dans l'image de L .*

Démonstration. On va d'abord commencer par montrer que cet opérateur se prolonge aux $n_{\alpha_i} X_0$ (où n_α désigne un relevé de s_α dans $N_G(T)$).

Regardons d'abord les changements de coordonnées de $n_{\alpha_1} X_0$ vers X_0 . Plaçons nous sur l'ouvert $(t_1 t_2 \neq 0)$ de X_0 . Remarquons que pour tout $\zeta \in k^*$,

$$\alpha_1^\vee(\zeta^{-1})u_{\alpha_1}(\zeta)u_{-\alpha_1}(-\zeta^{-1})u_{\alpha_1}(\zeta)$$

est un représentant de s_{α_1} dans $N_G(T)$ (cf. [Hu2]). Comme pour X_0 , nous identifierons un point de $n_{\alpha_1} X_0$ à un couple

$$n_{\alpha_1} \cdot (u_{\alpha_1+\alpha_2}(z')u_{\alpha_2}(y')u_{\alpha_1}(x'), (t'_1, t'_2))$$

Rappelons également qu'avec la formule de Campbell-Hausdorff, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, lorsque $ad(X) : Y \mapsto [X, Y]$ est nilpotent, on a dans G l'égalité

$$e^X e^Y e^{-X} = e^{Y+[X,Y]+\frac{1}{2!}[X,[X,Y]]+\frac{1}{3!}[X,[X,[X,Y]]]+\dots}$$

Plaçons nous sur l'ouvert $(t'_1 + x'^2 \neq 0)$ de $n_{\alpha_1}X_0$, et supposons de plus que $t'_1 t'_2 \neq 0$ et $x' \neq 0$. En prenant $\zeta = -x'$, on obtient

$$\begin{aligned} & (n_{\alpha_1} \cdot (u_{\alpha_1+\alpha_2}(z')u_{\alpha_2}(y')u_{\alpha_1}(x')a(t'_1, t'_2))).[h] \\ &= u_{\alpha_2}(-z')u_{\alpha_1+\alpha_2}(y')n_{\alpha_1}u_{\alpha_1}(x')a(t'_1, t'_2).[h] \\ &= u_{\alpha_1+\alpha_2}(y')u_{\alpha_2}(-z')\alpha_1^\vee(-x'^{-1})u_{\alpha_1}(-x')u_{-\alpha_1}(x'^{-1})a(t'_1, t'_2).[h] \\ &= u_{\alpha_1+\alpha_2}(y')u_{\alpha_2}(-z')\alpha_1^\vee(-x'^{-1})u_{\alpha_1}(-x')a(t'_1, t'_2)e^{\psi X^{-\alpha_1}}.[h] \end{aligned}$$

où $\psi = x'^{-1}\alpha_1(a(t'_1, t'_2))$. Supposons que $1 + \psi^2 \neq 0$. Remarquons que $\alpha_1(a(t_1, t_2))$ dépend du choix du représentant de $a(t_1, t_2)$, mais pas $\alpha_1(a(t_1, t_2))^2 = t_1$, ce qui ne posera donc pas de problème pour la suite. Comme k est algébriquement clos, il existe ξ tel que $\xi^2 = (1 + \psi^2) = (1 + x'^{-2}t'_1)$. On a :

$$u_{\alpha_1}(-\psi)\alpha_1^\vee(\xi)u_{-\alpha_1}(\psi) = \begin{pmatrix} \xi - \xi^{-1}\psi^2 & -\xi^{-1}\psi & 0 \\ \xi^{-1}\psi & \xi^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SO}_3$$

On en déduit

$$\begin{aligned} & u_{\alpha_1+\alpha_2}(y')u_{\alpha_2}(-z')\alpha_1^\vee(-x'^{-1})u_{\alpha_1}(-x')a(t'_1, t'_2)\alpha_1^\vee(\xi^{-1})u_{\alpha_1}(\psi).[h] \\ &= u_{\alpha_1+\alpha_2}(y')u_{\alpha_2}(-z')\alpha_1^\vee(-x'^{-1})u_{\alpha_1}(-x')a(t'_1, t'_2)u_{\alpha_1}\left(\frac{\psi}{1+\psi^2}\right)\alpha_1^\vee(\xi^{-1}).[h] \\ &= u_{\alpha_1+\alpha_2}(y')u_{\alpha_2}(-z')\alpha_1^\vee(-x'^{-1})u_{\alpha_1}(-x')u_{\alpha_1}\left(\alpha_1(a(t'_1, t'_2))\frac{\psi}{1+\psi^2}\right)a(t'_1, t'_2)\alpha_1^\vee(\xi^{-1}).[h] \\ &= u_{\alpha_1+\alpha_2}(y')u_{\alpha_2}(-z')\alpha_1^\vee(-x'^{-1})u_{\alpha_1}(-x')u_{\alpha_1}\left(\alpha_1(a(t'_1, t'_2))\frac{\psi}{1+\psi^2}\right)a(t'_1\xi^{-4}, t'_2\xi^2).[h] \\ &= u_{\alpha_1+\alpha_2}(y')u_{\alpha_2}(-z')\alpha_1^\vee(-x'^{-1})u_{\alpha_1}(-x')u_{\alpha_1}\left(\frac{x'^{-1}t'_1}{1+x'^{-2}t'_1}\right)a(t'_1\xi^{-4}, t'_2\xi^2).[h] \\ &= u_{\alpha_1+\alpha_2}(y')u_{\alpha_2}(-z')\alpha_1^\vee(-x'^{-1})u_{\alpha_1}\left(-x' + \frac{x'^{-1}t'_1}{1+x'^{-2}t'_1}\right)a(t'_1\xi^{-4}, t'_2\xi^2).[h] \\ &= u_{\alpha_1+\alpha_2}(y')u_{\alpha_2}(-z')u_{\alpha_1}\left(-x'^{-1} + \frac{x'^{-3}t'_1}{1+x'^{-2}t'_1}\right)\alpha_1^\vee(-x'^{-1})a(t'_1\xi^{-4}, t'_2\xi^2).[h] \\ &= u_{\alpha_1+\alpha_2}(y')u_{\alpha_2}(-z')u_{\alpha_1}\left(\frac{-x'}{x'^2+t'_1}\right)a\left(\frac{t'_1}{(x'^2+t'_1)^2}, t'_2(x'^2+t'_1)\right).[h] \end{aligned}$$

Les changements de coordonnées obtenus sont :

$$\begin{aligned} z &= y' \\ y &= -z' \\ x &= \frac{-x'}{x'^2+t'_1} \\ t_1 &= \frac{t'_1}{(x'^2+t'_1)^2} \\ t_2 &= t'_2(x'^2+t'_1) \end{aligned}$$

Lorsque $x' = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & n_{\alpha_1} \cdot (u_{\alpha_1+\alpha_2}(z')u_{\alpha_2}(y'), a(t'_1, t'_2)) \\ &= (n_{\alpha_1} \cdot (u_{\alpha_1+\alpha_2}(z')u_{\alpha_2}(y')a(t'_1, t'_2))).[h] \\ &= u_{\alpha_2}(-z')u_{\alpha_1+\alpha_2}(y')n_{\alpha_1}a(t'_1, t'_2).[h] \\ &= u_{\alpha_1+\alpha_2}(y')u_{\alpha_2}(-z')a((t'_1)^{-1}, t'_2 t'_1)n_{\alpha_1}.[h] \\ &= u_{\alpha_1+\alpha_2}(y')u_{\alpha_2}(-z')a((t'_1)^{-1}, t'_2 t'_1).[h] \end{aligned}$$

puisque $n_{\alpha_1} \in H$. Sur l'ouvert $(t'_1 + x'^2 \neq 0)$, les changements de variables obtenus se prolongent bien quand $x' = 0$ (puisque dans ce cas $t'_1 \neq 0$), et de même quand $t'_1 t'_2 = 0$. Remarquons que si $\psi = 0$, il n'existe pas de $[b] \in B$ tel que $be^{\psi X - \alpha_1} \in \text{SO}_3$, donc le point $n_{\alpha_1} \cdot (u_{\alpha_1 + \alpha_2}(z')u_{\alpha_2}(y')u_{\alpha_1}(x'), a(t'_1, t'_2)) \notin X_0$. L'ouvert $(t'_1 + x'^2 \neq 0)$ de $n_{\alpha_1} X_0$ est donc exactement $n_{\alpha_1} X_0 \cap X_0$. Comme $n_{\alpha_1} X_0$ est affine, l'opérateur ∂_{t_1} peut s'écrire sur $n_{\alpha_1} X_0 \cap X_0$

$$\partial_{t_1} = a\partial_{t'_1} + b\partial_{t'_2} + c\partial_{x'} + d\partial_{y'} + e\partial_{z'}$$

pour certaines fonctions régulières a, b, c, d, e sur $n_{\alpha_1} X_0 \cap X_0$. Le calcul donne

$$\partial_{t_1} = (x'^2 - t'_1)(x'^2 + t'_1)\partial_{t'_1} + t'_2(x'^2 + t'_1)\partial_{t'_2} - x'(x'^2 + t'_1)\partial_{x'}$$

De même, on obtient

$$\partial_{t_2} = \frac{-1}{x'^2 + t'_1} \partial_{t'_2}$$

donc

$$\partial_{t_1} \partial_{t_2} = (x'^2 - t'_1)\partial_{t'_1} \partial_{t'_2} + t'_2 \partial_{t'_2}^2 - x' \partial_{x'} \partial_{t'_2}$$

se prolonge bien en un opérateur différentiel sur $n_{\alpha_1} X_0$. De la même manière, on calcule les changements de variable de $n_{\alpha_2} X_0$ vers X_0 :

$$\begin{aligned} z &= -x'' - \frac{z''y'' - x''y''^2}{y''^2 + t_2''} \\ y &= -\frac{y''}{y''^2 + t_2''} \\ x &= z'' - x''y'' \\ t_1 &= t_1''(y''^2 + t_2'') \\ t_2 &= \frac{t_2''}{(y''^2 + t_2'')^2} \end{aligned}$$

et

$$\partial_{t_1} \partial_{t_2} = (y''^2 - t_2'')\partial_{t_1''} \partial_{t_2''} + t_1'' \partial_{t_1''}^2 - y'' \partial_{t_1''} \partial_{y''} - x'' y'' \partial_{t_1''} \partial_{z''}$$

se prolonge sur $n_{\alpha_2} X_0$. Comme X_0 est B -stable, et comme les $n_{\alpha_i} X_0$ sont $s_{\alpha_i} B s_{\alpha_i}$ -stables, ∂ se prolonge sur un ouvert $\bar{\Omega}$ qui est B -stable, $s_{\alpha_1} B s_{\alpha_1}$ -stable et $s_{\alpha_2} B s_{\alpha_2}$ -stable. Comme α_1 et α_2 sont les racines simples de Φ , ∂ se prolonge en un opérateur différentiel $\tilde{\partial}$ défini sur un ouvert G -stable contenant X_0 (qui sera régulier par lissité de X). Comme X_0 intersecte chacune des G -orbites, nécessairement on a $\bar{\Omega} = X$ et $\tilde{\partial} \in D_X$.

De plus, on rappelle que $X_0 \cap D_i$ est le fermé $(t_i = 0)$ de X_0 . Alors en notant \mathcal{I}_{D_i} le faisceau d'idéaux sur X définissant D_i , $t_i \in \Gamma(X_0, \mathcal{I}_{D_i})$. Comme D_1 et D_2 sont tous les deux G -stables, $\Gamma(X_0, \mathcal{I}_{D_1} \mathcal{I}_{D_2})$ est stable par l'action de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, et $\partial \cdot t_1 t_2 = 1 \notin \Gamma(X_0, \mathcal{I}_{D_1} \mathcal{I}_{D_2})$. Ceci prouve que $\tilde{\partial}$ n'est pas dans l'image de L . \square

Pour tout faisceau inversible \mathcal{L}_λ sur X , notons comme dans le cas des variétés de drapeaux $\mathcal{D}_{X,\lambda}$ le faisceau $\mathcal{L}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_\lambda^{\otimes -1}$, et $D_{X,\lambda}$ ses sections globales. Grâce à l'opérateur $\tilde{\partial}$ sur X , on va montrer :

Théorème 2.4.2. *Soit \mathcal{L}_λ un faisceau inversible, tel que $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0$. Alors $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)$ est un $D_{X,\lambda}$ -module simple.*

Démonstration. Soit \mathcal{L}_λ un tel faisceau inversible. Commençons par rappeler que $\text{Pic}(X)$ est engendré librement par les couleurs de X . Notons ses deux couleurs d_1 et d_2 , respectivement de poids $2\varpi_1$ et $2\varpi_2$. A renumérotation près, les diviseurs de bord s'expriment dans $\text{Pic}(X)$ comme $D_1 = 2d_1 - d_2$ et $D_2 = 2d_2 - d_1$. Le faisceau \mathcal{L}_λ est isomorphe au faisceau

$\mathcal{O}_X(m_1d_1 + m_2d_2)$ pour un unique couple d'entiers (m_1, m_2) . Comme X_0 est un espace affine, il existe une section trivialisante σ_λ pour $\mathcal{L}_\lambda|_{X_0}$, ie

$$\Gamma(X_0, \mathcal{L}_\lambda) = k[X_0]\sigma_\lambda$$

qui est unique à un scalaire près, donc qui est un B -vecteur propre. De plus, en notant pour simplifier f_i des sections trivialisantes de $\mathcal{O}_X(d_i)$ sur X_0 , on a

$$\sigma_\lambda = f_1^{\otimes m_1} \otimes f_2^{\otimes m_2}$$

Si v est un vecteur de plus bas poids dans $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)$, alors $v|_{X_0} = f\sigma_\lambda$ pour une certaine fonction régulière f sur X_0 . La preuve de [DCP](8.2) donne que $f = t_1^{n_1}t_2^{n_2}$ pour certains entiers positifs n_1 et n_2 . Ainsi

$$H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\substack{n_i \geq 0 \\ \nu = \lambda - \sum n_i \gamma_i \text{ dominant}}} (\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \cdot t_1^{n_1} t_2^{n_2} \sigma_\lambda)$$

Si $\nu = \lambda - \sum n_i \gamma_i$, notons $f_\nu = t_1^{n_1} t_2^{n_2} \sigma_\lambda$. Pour prouver le théorème, il suffit de prouver

Lemme 2.4.3. *Soient $\nu = \lambda - n_1 \gamma_1 - n_2 \gamma_2$ et $\nu' = \lambda - n'_1 \gamma_1 - n'_2 \gamma_2$. Alors il existe $d, d' \in D_{X, \lambda}$ tels que $d.f_\nu = f_{\nu'}$ et $d'.f_{\nu'} = f_\nu$.*

L'idée est de construire d'abord de tels opérateurs si ν est "proche" de ν' , c'est-à-dire si les $|n_i - n'_i| \leq 1$. Ces opérateurs apparaissent comme des conjugués de \tilde{d} par des éléments du groupe de Weyl W , suivis d'opérateurs du centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ dont on connaît bien l'action.

Calculons d'abord l'action des réflexions simples de W sur σ_λ . Comme $D_1 = 2d_1 - d_2$ et $D_2 = 2d_2 - d_1$, sur $X_0 \cap \Omega$ (où Ω est la G -orbite ouvert de X) on a : $f_1^3 = t_1^{-2} t_2^{-1}$ et $f_2^3 = t_1^{-1} t_2^{-2}$ ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} s_{\alpha_1} \cdot f_1 &= (x^2 + t_1) f_1 \\ s_{\alpha_1} \cdot f_2 &= f_2 \\ s_{\alpha_2} \cdot f_1 &= f_1 \\ s_{\alpha_2} \cdot f_2 &= (y^2 + t_2) f_2 \end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} s_{\alpha_1} \cdot \sigma_\lambda &= (x^2 + t_1)^{m_1} \sigma_\lambda \\ s_{\alpha_2} \cdot \sigma_\lambda &= (y^2 + t_2)^{m_2} \sigma_\lambda \end{aligned}$$

Regardons ensuite l'image de l'opérateur de Casimir C (cf. 1.2) dans D_X . Pour cela, calculons d'abord par exemple $L(X_{\alpha_1})$. Pour $t \in k$, on a sur $X_0 \cap G/H$:

$$\begin{aligned} &e^{-tX_{\alpha_1}} u_{\alpha_1 + \alpha_2}(z) u_{\alpha_2}(y) u_{\alpha_1}(x) a(t_1, t_2) \cdot [h] \\ &= u_{\alpha_1 + \alpha_2}(z - yt) u_{\alpha_2}(y) u_{\alpha_1}(x - t) a(t_1, t_2) \cdot [h] \end{aligned}$$

donc

$$L(X_{\alpha_1}) = \left[f \mapsto \left[x \mapsto \frac{d}{dt} f(e^{-X_{\alpha_1} t} x) \Big|_{t=0} \right] \right] = -y \partial_z - \partial_x$$

L'image dans D_X d'une base de \mathfrak{g} nous donne sur X_0 :

$$\begin{aligned} L(X_{\alpha_1}) &= -y \partial_z - \partial_x \\ L(X_{\alpha_2}) &= -\partial_y \\ L(X_{\alpha_1 + \alpha_2}) &= -\partial_z \\ L(H_{\alpha_1}) &= -z \partial_z + y \partial_y - 2x \partial_x + 4t_1 \partial_{t_1} - 2t_2 \partial_{t_2} \\ L(H_{\alpha_2}) &= -z \partial_z - 2y \partial_y + x \partial_x - 2t_1 \partial_{t_1} + 4t_2 \partial_{t_2} \\ L(X_{-\alpha_1}) &= -(t_1 + x^2) \partial_x + 4xt_1 \partial_{t_1} - 2t_2 \partial_{t_2} \\ L(X_{-\alpha_2}) &= (zy + xy^2 - xt_2) \partial_z - (t_2 + y^2) \partial_y - z \partial_x - 2yt_1 \partial_{t_1} + 4yt_2 \partial_{t_2} \\ L(X_{-\alpha_1 - \alpha_2}) &= -(x^2 y^2 + x^2 t_2 - y^2 t_1 + t_1 t_2) \partial_z - 2xt_2 \partial_y + (-2xz + 2t_1 y) \partial_x - 4zt_1 \partial_{t_1} + 2zt_2 \partial_{t_2} \end{aligned}$$

C agit sur les modules de plus haut poids (et de plus bas poids) μ par le scalaire c_μ . Ainsi dans une somme directe d'espaces de plus haut poids, l'opérateur $C - c_\mu$ est intéressant pour ne garder que les composantes appartenant aux parties de caractère central fixé. On montre le lemme :

Lemme 2.4.4. *Soit $f \in k[X_0]$ et μ dominant. Alors il existe f_1 et f_2 dans $k[X_0]$ tels que $(C - c_\mu) \cdot f f_\mu = f_1 t_1 f_\mu + f_2 t_2 f_\mu$.*

En effet, considérons l'image de $f \sigma_\mu$ dans $\Gamma(X_0, \mathcal{L}_\mu / \mathcal{L}_\mu \otimes \mathcal{I}_F)$. On a :

$$\Gamma(X_0, \mathcal{L}_\mu / \mathcal{L}_\mu \otimes \mathcal{I}_F) = \Gamma(X_0 \cap F, \mathcal{L}_\mu|_{X_0 \cap F}) = \Gamma(BB^- / B^-, (\mathcal{L}_{G/B^-})_\mu) = M_\mu^*$$

où M_μ est le module de Verma de plus haut poids μ . Comme C agit sur M_μ par le scalaire c_μ , $(C - c_\mu) \cdot f f_\mu = 0$ dans $\Gamma(X_0, \mathcal{L}_\mu / \mathcal{L}_\mu \otimes \mathcal{I}_F)$. Donc $(C - c_\mu) \cdot f f_\mu \in \Gamma(X_0, \mathcal{L}_\mu \otimes \mathcal{I}_F)$, donc il existe f_1 et f_2 dans $k[X_0]$ tels que $(C - c_\mu) \cdot f \sigma_\mu = f_1 t_1 f_\mu + f_2 t_2 f_\mu$.

Ainsi quelque soit μ dominant et $f \in k[X_0]$ de degré nul en les t_i , $C - c_\mu$ est exactement la partie de C faisant monter le degré total en t_1 et t_2 , ie.

$$(C - c_\mu) \cdot f f_\mu = (2t_1 \partial_x^2 + 2t_2 \partial_y^2 - 2yt_1 \partial_x \partial_z + 6xt_2 \partial_y \partial_z + 2x^2 t_2 \partial_z^2 - 2t_1 y^2 \partial_z^2 + 2t_1 t_2 \partial_z^2) \cdot f f_\mu$$

Notons $D = \sigma_\lambda \otimes \partial \otimes \sigma_\lambda^{-1}$ l'image de la section ∂ dans $\Gamma(X_0, \mathcal{D}_{X,\lambda})$. Comme $\mathcal{D}_X \simeq \mathcal{D}_{X,\lambda}$ en tant que \mathcal{O}_X -module, D est également la restriction d'une section globale $\tilde{D} \in D_{X,\lambda}$. Soit $\nu = \lambda - n_1 \gamma_1 - n_2 \gamma_2$ un poids dominant avec n_1 et n_2 positifs, et notons $\nu_1 = \langle \nu, \alpha_1 \rangle = 2m_1 - 4n_1 + 2n_2$ et $\nu_2 = \langle \nu, \alpha_2 \rangle = 2m_2 - 4n_2 + 2n_1$. Regardons quel opérateur envoie f_ν sur ses voisins :

- De ν vers $\nu + \gamma_1 + \gamma_2$: supposons que $\nu + \gamma_1 + \gamma_2 \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0} \gamma_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0} \gamma_2$, et qu'il soit dominant. Alors $n_1 > 0$, $n_2 > 0$ et

$$\tilde{D} \cdot f_\nu = \tilde{D} \cdot (t_1^{n_1} t_2^{n_2} \sigma_\lambda) = n_1 n_2 f_{\nu + \gamma_1 + \gamma_2} \neq 0$$

- De ν vers $\nu + \gamma_2$: supposons que $\nu + \gamma_2 \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0} \gamma_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0} \gamma_2$, et qu'il soit dominant. Alors $\nu_1 \geq 2$, $n_2 \geq 1$ et

$$\begin{aligned} s_{\alpha_1} \tilde{D} s_{\alpha_1} \cdot f_\nu &= s_{\alpha_1} \tilde{D} s_{\alpha_1} \cdot t_1^{n_1} t_2^{n_2} \sigma_\lambda \\ &= s_{\alpha_1} \tilde{D} \left[(t_1 + x^2)^{\frac{\nu_1}{2}} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \sigma_\lambda \right] \\ &= s_{\alpha_1} \left[\frac{\nu_1 n_2}{2} (t_1 + x^2)^{\frac{\nu_1}{2} - 1} t_1^{n_1} t_2^{n_2 - 1} \sigma_\lambda + n_1 n_2 (t_1 + x^2)^{\frac{\nu_1}{2}} t_1^{n_1 - 1} t_2^{n_2 - 1} \sigma_\lambda \right] \\ &= \frac{\nu_1 n_2}{2} t_1^{n_1} t_2^{n_2 - 1} \sigma_\lambda + n_1 n_2 (t_1 + x^2) t_1^{n_1 - 1} t_2^{n_2 - 1} \sigma_\lambda \\ &= \left(\frac{\nu_1}{2} + n_1 \right) n_2 f_{\nu + \gamma_2} + n_1 n_2 x^2 f_{\nu + \gamma_1 + \gamma_2} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$(C - c_{\nu + \gamma_1 + \gamma_2}) s_{\alpha_1} \tilde{D} s_{\alpha_1} \cdot f_\nu = -2\nu_1 n_2 (\nu_1 + 2n_1 + 1) f_{\nu + \gamma_2} \neq 0$$

- De ν vers $\nu + \gamma_1$: supposons que $\nu + \gamma_1 \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0} \gamma_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0} \gamma_2$, et qu'il soit dominant. Alors $\nu_2 \geq 2$, $n_1 \geq 1$ et un calcul analogue donne

$$(C - c_{\nu + \gamma_1 + \gamma_2}) s_{\alpha_2} \tilde{D} s_{\alpha_2} \cdot f_\nu = -2\nu_2 n_1 (\nu_2 + 2n_2 + 1) f_{\nu + \gamma_1} \neq 0$$

- De ν vers $\nu - \gamma_1$: supposons que $\nu - \gamma_1 \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0} \gamma_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0} \gamma_2$. Alors $\nu_1 \geq 4$, et on calcule :

$$\begin{aligned} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \tilde{D} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} f_\nu &= \left[\frac{\nu_1}{4} (\nu_1 + 2n_1 + 2n_2 + \nu_2) + \frac{\nu_2}{2} n_1 + n_1 n_2 \right] f_{\nu - \gamma_1} \\ &\quad + \left[\frac{\nu_1}{4} (2 + 2n_1 + 2n_2 + \nu_2) + \nu_2 n_1 + 2n_1 n_2 \right] x^2 f_\nu + \left[\frac{\nu_2}{2} n_1 + n_1 n_2 \right] x^4 f_{\nu + \gamma_1} \\ &\quad + \left[\frac{n_1}{2} n_2 + n_1 n_2 \right] z^2 f_{\nu + \gamma_2} + n_1 n_2 z^2 x^2 f_{\nu + \gamma_1 + \gamma_2} \end{aligned}$$

et

$$(C - c_\nu)(C - c_{\nu+\gamma_1})(C - c_{\nu+\gamma_2-\gamma_1})(C - c_{\nu+\gamma_2})(C - c_{\nu+\gamma_2+\gamma_1})s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}\tilde{D}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}f_\nu = Kf_{\nu-\gamma_1}$$

où

$$\begin{aligned} K = & -512\left(\left[2\nu_1^5 + 32\nu_1^4 + 50\nu_1^3 - 95\nu_1^2 - 237\nu_1 - 122\right]\nu_1\nu_2 + \left[5\nu_1^4 + 30\nu_1^3 - 4\nu_1^2 - 111\nu_1 - 82\right]\nu_1\nu_2^2\right. \\ & + \left[4\nu_1^3 + 7\nu_1^2 - 19\nu_1 - 22\right]\nu_1\nu_2^3 + \left[\nu_1^2 - \nu_1 - 2\right]\nu_1\nu_2^4 + \left[4\nu_1^4 + 60\nu_1^3 + 40\nu_1^2 - 230\nu_1 - 244\right]\nu_1\nu_2n_1 \\ & + \left[10\nu_1^3 + 50\nu_1^2 - 58\nu_1 - 164\right]\nu_1\nu_2^2n_1 + \left[8\nu_1^2 + 6\nu_1 - 44\right]\nu_1\nu_2^3n_1 + \left[2\nu_1 - 4\right]\nu_1\nu_2^4n_1 \\ & + \left[4\nu_1^4 + 36\nu_1^3 - 4\nu_1^2 - 126\nu_1 - 90\right]\nu_1\nu_2n_2 + \left[8\nu_1^4 + 64\nu_1^3 - 72\nu_1^2 - 168\nu_1 + 20\right]\nu_2n_1n_2 \\ & + \left[6\nu_1^3 + 12\nu_1^2 - 30\nu_1 - 36\right]\nu_1\nu_2^2n_2 + \left[12\nu_1^2 + 12\nu_1 - 72\right]\nu_1\nu_2^2n_1n_2 + \left[2\nu_1^2 - 2\nu_1 - 4\right]\nu_1\nu_2^3n_2 \\ & + \left[4\nu_1 - 8\right]\nu_1\nu_2^3n_1n_2 + (\nu_1 + 1)\left[\left[20\nu_1^3 + 30\nu_1^2 - 80\nu_1 - 120\right]\nu_1n_1 + \left[20\nu_1^3 + 6\nu_1^2 - 72\nu_1 - 54\right]\nu_1n_2\right. \\ & \left. + \left[40\nu_1^3 - 28\nu_1^2 - 120\nu_1 + 88\right]n_1n_2 + 5\nu_1(\nu_1 - 2)(\nu_1 + 2)(2\nu_1 + 3)(\nu_1 + 1)\right] \Big) < 0 \end{aligned}$$

car $\nu_1 \geq 4$ (il suffit de remarquer que les expressions entre crochets sont des polynômes en ν_1 dont toutes les dérivées successives sont positives en 4).

- De ν vers $\nu - \gamma_2$: supposons que $\nu - \gamma_1 \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_2$. Alors $\nu_2 \geq 4$, et un calcul analogue donne :

$$(C - c_\nu)(C - c_{\nu+\gamma_2})(C - c_{\nu+\gamma_1-\gamma_2})(C - c_{\nu+\gamma_1})(C - c_{\nu+\gamma_2+\gamma_1})s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}\tilde{D}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}f_\nu = K'f_{\nu-\gamma_2}$$

où $K' \neq 0$ a une expression similaire à celle de K .

- De $\nu = \gamma_1 + \gamma_2 = 2\rho$ vers 0 : supposons que $2\rho \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_2$. Alors il en est de même pour 0, et le calcul donne

$$\begin{aligned} & s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}\tilde{D}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}f_{2\rho} \\ = & (n_1 + 2)(n_2 + 2)f_0 + (n_1n_2 + 2n_1 + n_2 + 2)y^2f_{\gamma_2} + (n_1n_2 + 2n_2 + n_1 + 2)x^2f_{\gamma_1} \\ & + \left[(n_1n_2 + n_2 + 3n_1 + 2)x^2y^2 - 2n_1(n_2 + 2)xyz + 2(n_1 + 1)(n_2 + 1)z^2\right]f_{2\rho} + n_2(n_1 + 1)y^2z^2f_{2\gamma_2+\gamma_1} \\ & + n_1(n_2 + 1)(y^2x^4 - 2x^3yz + x^2z^2)f_{2\gamma_1+\gamma_2} + n_1n_2(z^2x^2y^2 - 2xyz^3 + z^4)f_{4\rho} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & (C - c_{\gamma_1})(C - c_{2\rho})(C - c_{2\gamma_1})(C - c_{2\gamma_1+\gamma_2})(C - c_{4\rho})s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}\tilde{D}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}f_{2\rho} \\ = & -4096(197n_1n_2 + 2202n_1 + 2202n_2 + 7560)f_0 \neq 0 \end{aligned}$$

On résume tous ces cas avec la figure 2.1, où les Z_i désignent des éléments du centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, et où les flèches

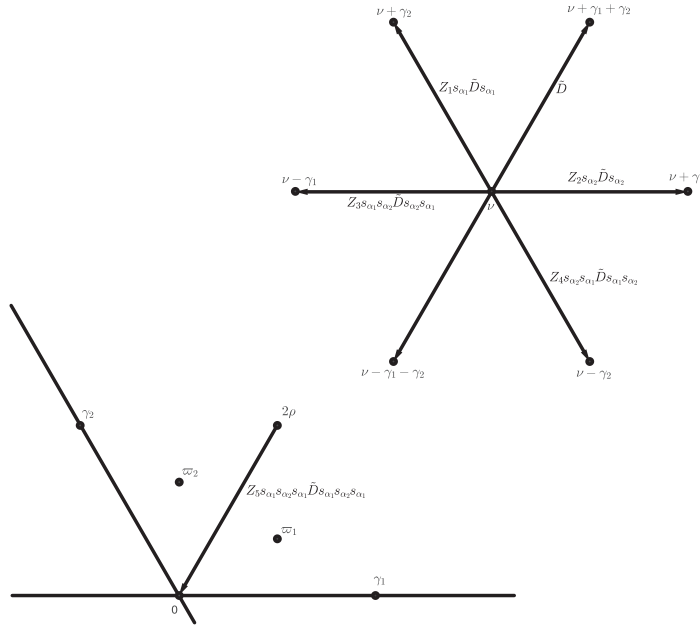
$$\nu \xrightarrow{d} \nu'$$

signifient que $d.\nu = \nu'$.

Pour terminer la preuve, on montre le lemme :

Lemme 2.4.5.

(1) Il existe un unique poids $\nu = \lambda - n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2$ dominant avec n_1, n_2 positifs tel que $n_1 + n_2$ soit maximal parmi ces poids

FIGURE 2.1 – Action des conjugués de \tilde{D}

(2) Si ν et $\nu - \gamma_1 - \gamma_2$ sont dans $\lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_2$ et dominants, mais ni $\nu - \gamma_1$ ni $\nu - \gamma_2$, alors $\nu = 2\rho$.

En effet :

(1) Si $\nu = \lambda - n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2$ et $\mu = \lambda - (n_1 + k)\gamma_1 - (n_2 - k)\gamma_2 \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_2$ sont dominants pour un entier $k > 0$, alors $\mu_1 = \nu_1 - 6k$, donc $\nu_1 \geq 6k$, donc $\nu - \gamma_1$ vérifie dominant, ce qui contredit la maximalité.

(2) Si ν vérifie les hypothèses du lemme, on a $2 \leq \nu_i < 4$, et comme les ν_i sont des entiers pairs, $\nu = 2\rho$.

Notons $\nu_{\max} = \lambda - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2$ l'unique poids vérifiant le (1) du lemme. On construit alors deux opérateurs différentiels globaux d_ν et d'_ν tels que $d_\nu \cdot f_\nu = f_{\nu_{\max}}$ et $d'_\nu \cdot f_{\nu_{\max}} = f_\nu$.

Supposons pour simplifier que $p_1 - n_1 \leq p_2 - n_2$. Reprenons notre $\nu = \lambda - n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2$ fixé précédemment. Alors $\nu - (p_2 - n_2 - p_1 + n_1)\gamma_2 = \nu_{\max} + (p_1 - n_1)(\gamma_1 + \gamma_2) \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_2$ et est dominant, puisque $p_1 \geq n_1$: en effet, comme $\nu_{\max} - \gamma_2$ n'est pas dominant, on a les inégalités

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\nu_{\max})_2 = 2m_2 + 4p_2 - 2p_1 \leq 4 \\ 0 &\leq \nu_2 = 2m_2 + 4n_2 - 2n_1 \end{aligned}$$

donc $\nu_2 - (\nu_{\max})_2 = 4(n_2 - p_2) + 2(p_1 - n_1) \geq -4$ ie. $p_1 - n_1 \geq 2(p_2 - n_2 - 1) \geq 0$ par maximalité de ν_{\max} . De plus, tous les $\nu - k\gamma_2$ avec $0 \leq k \leq p_2 - n_2 - p_1 + n_1$ sont dominants. On a alors des opérateurs différentiels globaux d_k et d'_k envoyant respectivement $\nu - k\gamma_2$ sur $\nu - (k+1)\gamma_2$ et $\nu - (k+1)\gamma_2$ sur $\nu - k\gamma_2$ pour $0 \leq k \leq p_2 - n_2 - p_1 + n_1$. On peut ainsi se ramener au cas où $\nu = \nu_{\max} + q(\gamma_1 + \gamma_2)$. Remarquons que tous les $\nu_{\max} + k(\gamma_1 + \gamma_2)$ sont dominants.

- Si 0 n'est pas dans $\lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_2$, alors 2ρ non plus, donc pour tout $0 < k \leq q$, il existe un $\nu_{\max} + k(\gamma_1 + \gamma_2) - \gamma_i \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_2$ dominant, donc il existe des opérateurs

différentiel globaux $d_{k,1}, d_{k,2}, d'_{k,1}, d'_{k,2}$ tels que

$$\begin{aligned} d_{k,1}(f_{\nu_{\max+k(\gamma_1+\gamma_2)}}) &= f_{\nu_{\max+k(\gamma_1+\gamma_2)-\gamma_i}} \\ d_{k,2}(f_{\nu_{\max+k(\gamma_1+\gamma_2)-\gamma_i}}) &= f_{\nu_{\max+(k-1)(\gamma_1+\gamma_2)}} \\ d'_{k,1}(f_{\nu_{\max+k(\gamma_1+\gamma_2)-\gamma_i}}) &= f_{\nu_{\max+k(\gamma_1+\gamma_2)}} \\ d'_{k,1}(f_{\nu_{\max+(k-1)(\gamma_1+\gamma_2)}}) &= f_{\nu_{\max+k(\gamma_1+\gamma_2)-\gamma_i}} \end{aligned}$$

ce qui nous donne les d_ν et d'_ν .

• Si $0 \in \lambda - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_1 - \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma_2$, on procède comme précédemment pour construire d_1 et d'_1 tels que $d_1(f_\nu) = f_{2\rho}$ et $d'_1(f_{2\rho}) = f_\nu$. Notons

$$\xi = (C - c_{\gamma_1})(C - c_{2\rho})(C - c_{2\gamma_1})(C - c_{2\gamma_1+\gamma_2})(C - c_{4\rho})s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}\tilde{D}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}$$

On pose alors $d_\nu = \xi.d_1$, et $d'_\nu = d'_1.\tilde{D}$. Les opérateurs

$$d = d'_{\nu'}d_\nu, d' = d'_\nu d_{\nu'}$$

envoient bien respectivement f_ν sur $f_{\nu'}$ et $f_{\nu'}$ sur f_ν , ce qui prouve le théorème. \square

2.5 Non-surjectivité de L en type A_1 et A_2

Soient G un groupe algébrique semi-simple adjoint connexe, θ un automorphisme d'ordre 2 de G , $H = G^\theta$ le sous-groupe des points fixes de G et X la compactification magnifique de G/H . Fixons T un tore maximal θ -stable tel que T_1 soit de dimension maximale r , et B un sous-groupe de Borel contenant T tel que θ envoie Φ_1^+ sur Φ_1^- . On peut associer à G/H son diagramme de Satake, un objet combinatoire qui encode G et θ , défini comme suit :

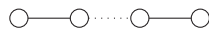
Définition. Le *diagramme de Satake* de G/H est un diagramme construit à partir du diagramme de Dynkin D de Φ par les étapes suivantes :

- (1) On colorie en noir les sommets de D qui sont fixés par θ , et on colorie en blanc les autres.
- (2) On relie par une double flèche les sommets blancs α_i et α_j différents tels que

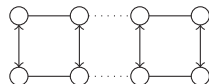
$$\theta(\alpha_i) = -\alpha_j - \sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ \beta_i \in \Delta_0}} n_i \beta_i$$

Exemples.

- (1) Soit $G = \mathrm{PGL}_n$, θ l'involution $M \mapsto (M^t)^{-1}$. Alors $H := G^\theta \simeq \mathrm{PSO}_n$, et le diagramme de Satake de G/H est



- (2) Soit $H = \mathrm{PGL}_n$, $G = H \times H$ et $\theta : (h_1, h_2) \mapsto (h_2, h_1)$. Le diagramme de Satake de $H \times H/H$ est



Proposition 2.5.2. *Si pour toute racine simple α on a $-\theta(\alpha) \neq \alpha$, alors pour tout $\alpha \in \Delta$, $\alpha + \theta(\alpha) \notin \Phi \cup \{0\}$. En particulier, e^{X_α} et $e^{X_{\theta(\alpha)}}$ commutent, et $e^{tX_\alpha} \cdot [h] = e^{-tX_{\theta(\alpha)}} \cdot [h]$.*

Démonstration. C'est évident si α est une racine noire. Soit α une racine blanche. Nous nous servons du lemme 1.3 de [DCP] :

Lemme 2.5.3. *Si $\alpha \in \Phi_0$, alors θ est l'identité sur \mathfrak{g}_α*

Supposons que $\alpha + \theta(\alpha) \in \Phi$. Alors $\alpha + \theta(\alpha) \in \Phi_0$, et $\theta([X_\alpha, X_{\theta(\alpha)}]) = -[X_\alpha, X_{\theta(\alpha)}]$, ce qui contredit le lemme. Ainsi $\alpha + \theta(\alpha) \notin \Phi \cup \{0\}$, et e^{X_α} et $e^{X_{\theta(\alpha)}}$ commutent. Comme $k(X_\alpha + X_{\theta(\alpha)}) \subset \mathfrak{h}$, on obtient

$$e^{tX_\alpha} \cdot [h] = e^{tX_\alpha} e^{-t(X_\alpha + X_{\theta(\alpha)})} \cdot [h] = e^{-tX_{\theta(\alpha)}} \cdot [h]$$

□

On va restreindre notre étude aux cas des compactifications d'espaces symétriques de la forme $H \times H/H$ avec H simple, et G/H avec G simple. Il se trouve qu'avec ces cas, on retrouve tous les espaces symétriques :

Proposition 2.5.4. *Si G' est un facteur simple de G , alors G' est stable par θ , ou bien $\theta(G')$ est un autre facteur simple G'' et la restriction de θ à $G' \times G''$ est l'échange des deux facteurs.*

Démonstration. On va appeler *composante connexe* de S les composantes connexes du diagramme de Dynkin sous-jacent (où on oublie les doubles flèches), et on appelle *composante faiblement connexe* de S un sous-diagramme de S dont tous les points sont reliés par une chaîne d'arêtes du diagramme de Dynkin sous-jacent et de doubles flèches. On va montrer que les composantes faiblement connexes de S sont des diagrammes de Satake d'espaces symétriques soit de la forme $H' \times H'/H'$ avec H' simple, soit de la forme G'/H'' avec G' simple.

Soit α une racine blanche de S , et écrivons $-\theta(\alpha) = \alpha' + \sum_{\beta_i \in \Delta_0} n_i \beta_i$. Supposons que α et α' ne sont pas dans la même composante connexe. Comme $-\theta(\alpha)$ est une racine, les β_i sont nécessairement des racines noires dans la composante connexe de α' , et comme $-\theta(\alpha') = \alpha + \sum_{\beta_i \in \Delta_0} n_i \beta_i$, les β_i sont également dans la composante connexe de α . Ainsi $-\theta(\alpha) = \alpha'$, et α n'est relié par des arêtes du diagramme de Dynkin sous-jacent qu'à des racines blanches. Comme la forme de Killing est θ -invariante, les racines de la composante connexe de α sont toutes blanches, il en est de même pour toutes les autres racines de la composante connexe de α' , et les composantes connexes de α et de α' ont la même matrice de Cartan associée. Ainsi la composante faiblement connexe de α' est le diagramme d'un certain $H' \times H'/H'$, où H' est simple et du même type que la composante connexe de α . S'il n'existe pas de racine α relié à un α' dans une composante connexe différente, alors la composante faiblement connexe de α est le diagramme d'un G'/H'' pour un G' simple. □

Soit $<$ et \tilde{z} deux relations d'ordre total sur Φ_1^+ . et numérotions δ_i les racines de Φ_1^+ de telle manière que $\delta_i < \delta_{i+1}$ (et $\tilde{\delta}_i$ pour l'ordre \tilde{z}). Rappelons que l'on a un isomorphisme

$$\varphi : U' \times \mathbb{A}^r \mapsto X_0$$

On peut représenter un point de X_0 par un couple

$$(u_{\tilde{\delta}_1}(x_{\tilde{\delta}_1}) \dots u_{\tilde{\delta}_n}(x_{\tilde{\delta}_n}), (t_1, \dots, t_r))$$

tel que sur l'ouvert $(\prod t_i \neq 0)$, on ait

$$\varphi(u_{\delta_1}(x_{\delta_1}) \dots u_{\delta_n}(x_{\delta_n}), (t_1, \dots, t_r)) = u_{\delta_1}(x_{\delta_1}) \dots u_{\delta_n}(x_{\delta_n}) a(t_1, \dots, t_r) \cdot [h]$$

où, comme dans (2.4), $a(t_1, \dots, t_r)$ est la classe dans $T_1/\text{Stab}_{T_1}[h]$ d'un certain $t \in T_1$ tel que $\gamma_i(t) = t_i$. De la même manière, on peut alors aussi représenter un point de X_0 par un couple

$$(u_{\delta_1}(x_{\delta_1}) \dots u_{\delta_n}(x_{\delta_n}), (t_1, \dots, t_r))$$

Comme une racine s'exprimant comme la somme de deux racines de Φ_1^+ est elle aussi dans Φ_1^+ , la formule de Campbell-Hausdorff nous dit que les x_{δ_i} sont des polynômes en les $x_{\tilde{\delta}_i}$, et les $x_{\tilde{\delta}_i}$ sont des polynômes en les x_{δ_i} . Ainsi

$$k[X_0] = k[\tilde{x}_{\delta_i}, t_j] = k[x_{\delta_i}, t_j]$$

et les $\partial_{x_{\delta}}$ sont des polynômes en les $\tilde{x}_{\delta_i}, \partial_{\tilde{x}_{\delta_i}}, t_j, \partial_{t_j}$. Ainsi, pour toute racine blanche α_i , pour regarder si un opérateur différentiel sur X_0 monôme en les ∂_{t_i} se prolonge sur $n_{\alpha_i} \cdot X_0$, on peut choisir un ordre total $<_i$ sur Φ_1^+ pour simplifier les calculs.

Théorème 2.5.5. *Soit G un groupe algébrique simple adjoint connexe. Alors un opérateur différentiel sur X_0 , monôme en les ∂_{t_i} se prolonge en un opérateur différentiel global sur $X = \overline{G \times G/G}$ si et seulement si le système de racines $\tilde{\Phi}$ est de type A_1 ou A_2 , ie. $G \simeq \text{PGL}_2$ ou PGL_3 .*

Démonstration. Soit B un sous-groupe de Borel de G , et U son radical unipotent. Alors $B \times B^-$ est un sous-groupe de Borel de $G \times G$, et on a un isomorphisme

$$\varphi : U \times U^- \times \mathbb{A}^r \rightarrow X_0$$

Soit $<_i$ une relations d'ordre total sur Φ^+ pour laquelle α_i est maximal, et numérotions $\delta_1, \dots, \delta_q$ les racines de Φ_1^+ de telle manière que $\delta_k <_i \delta_{k+1}$. On peut représenter un point de X_0 par un couple

$$(u_{\delta_1}(x_{\delta_1}) \dots u_{\delta_q}(x_{\delta_q}) u_{\alpha_i}(x) u_{\delta'_1}(y_{\delta_1}) \dots u_{\delta'_q}(y_{\delta_q}) u_{\alpha'_i}(y), (t_1, \dots, t_r))$$

Sur l'ouvert $(\prod t'_i \neq 0, x' \neq 0)$, on a :

$$\begin{aligned} & n_{\alpha_i} \cdot \varphi(u_{\delta_1}(x'_{\delta_1}) \dots u_{\delta_q}(x'_{\delta_q}) u_{\alpha_i}(x') u_{\delta'_1}(y'_{\delta_1}) \dots u_{\delta'_q}(y'_{\delta_q}) u_{\alpha'_i}(y'), (t'_1, \dots, t'_r)) \\ &= u_{s_{\alpha_i}(\delta_1)}(k_1 x'_{\delta_1}) \dots u_{s_{\alpha_i}(\delta_q)}(k_q x'_{\delta_q}) n_{\alpha_i} u_{\alpha_i}(x') u_{\delta'_1}(y'_{\delta_1}) \dots u_{\delta'_q}(y'_{\delta_q}) u_{\alpha'_i}(y') a(t'_1, \dots, t'_r) \cdot [h] \\ &= u_{s_{\alpha_i}(\delta_1)}(k_1 x'_{\delta_1}) \dots u_{s_{\alpha_i}(\delta_q)}(k_q x'_{\delta_q}) \alpha_i^\vee(-x'^{-1}) u_{\alpha_i}(-x') u_{-\alpha_i}(x'^{-1}) u_{\delta'_1}(y'_{\delta_1}) \dots u_{\delta'_q}(y'_{\delta_q}) u_{\alpha'_i}(y') a(t'_1, \dots, t'_r) \cdot [h] \\ &= u_{s_{\alpha_i}(\delta_1)}(k_1 x'_{\delta_1}) \dots u_{s_{\alpha_i}(\delta_q)}(k_q x'_{\delta_q}) \alpha_i^\vee(-x'^{-1}) u_{\alpha_i}(-x') u_{\delta'_1}(y'_{\delta_1}) \dots u_{\delta'_q}(y'_{\delta_q}) u_{\alpha'_i}(y') u_{-\alpha_i}(x'^{-1}) a(t'_1, \dots, t'_r) \cdot [h] \\ &= u_{s_{\alpha_i}(\delta_1)}(k_1 x'_{\delta_1}) \dots u_{s_{\alpha_i}(\delta_q)}(k_q x'_{\delta_q}) \alpha_i^\vee(-x'^{-1}) u_{\alpha_i}(-x') u_{\delta'_1}(y'_{\delta_1}) \dots u_{\delta'_q}(y'_{\delta_q}) u_{\alpha'_i}(y') u_{\alpha'_i}(-t'_1 x'^{-1}) a(t'_1, \dots, t'_r) \cdot [h] \\ &= u_{\delta_1}(P_1(x'_{\delta_1})) \dots u_{\delta_q}(P_q(x'_{\delta_q})) u_{\alpha_i}(-x'^{-1}) u_{\delta'_1}(y'_{\delta_1}) \dots u_{\delta'_q}(y'_{\delta_q}) u_{\alpha'_i}(y' - t'_1 x'^{-1}) \alpha_i^\vee(-x'^{-1}) a(t'_1, \dots, t'_r) \cdot [h] \\ &= u_{\delta_1}(P_1(x'_{\delta_1})) \dots u_{\delta_q}(P_q(x'_{\delta_q})) u_{\alpha_i}(-x'^{-1}) u_{\delta'_1}(y'_{\delta_1}) \dots u_{\delta'_q}(y'_{\delta_q}) u_{\alpha'_i}(y' - t'_1 x'^{-1}) a(t_1(-x')^{-\langle \gamma_1, \alpha_i \rangle}, \dots, t'_r(-x')^{\langle \gamma_r, \alpha_i \rangle}) \cdot [h] \end{aligned}$$

où les k_j sont définis par $\text{ad}(n_{\alpha_i}) \cdot X_{\delta_j} = k_j X_{s_{\alpha_i}(\delta_j)}$, est les P_j sont des polynômes en les $x'_{\delta_1}, \dots, x'_{\delta_q}$, de degré au plus 1 en chacune de ses variables, donnés par la formule de Campbell-Hausdorff. Ces changements de coordonnées se prolongent lorsque $\prod t'_i = 0$, et sur $n_{\alpha_i} \cdot X_0 \cap X_0 = (x' \neq 0)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_{t_i} &= (-x')^{\langle \gamma_i, \alpha_i \rangle} \partial_{t'_i} - (-x')^{\langle \gamma_i, \alpha_i \rangle - 1} \partial_{y'} \\ \partial_{t_j} &= (-x')^{\langle \gamma_j, \alpha_i \rangle} \partial_{t'_j} \text{ pour } j \neq i \end{aligned}$$

Remarquons que comme Φ^+ et Φ'^+ sont orthogonaux, et comme

$$\langle \gamma_j, \alpha_i \rangle = \langle \gamma_j, \alpha'_i \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$$

un opérateur différentiel défini sur X_0 se prolonge sur $n_{\alpha_i}.X_0$ si et seulement s'il se prolonge à $n_{\alpha'_i}.X_0$. Ainsi $\partial = \prod \partial_{t_j}^{n_j}$ se prolonge à X tout entier si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq r$, on a :

$$n_i(\langle \gamma_i, \alpha_i \rangle - 1) + \sum_{j \neq i} n_j \langle \gamma_j, \alpha_i \rangle = n_i + \sum_{j \neq i} n_j \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \geq 0$$

En notant C la matrice de Cartan de Φ , cela revient à trouver un n -uplet non nul $(n_i) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ tel que $(C - I)(n_i) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$. On obtient que nécessairement $r \leq 2$, $\tilde{\Phi}$ est de type A et les n_i sont tous égaux. Ainsi ceci n'est possible qu'en type A_1 (l'opérateur ∂_{t_1} convient), et en type A_2 (l'opérateur $\partial_{t_1} \partial_{t_2}$ convient). \square

Regardons maintenant le cas où $X = \overline{G/H}$ avec G est simple connexe de type adjoint.

Théorème 2.5.6. *Soit $X = \overline{G/H}$ avec G un groupe algébrique simple adjoint connexe. Supposons de plus que pour toute racine simple α , on a $-\theta(\alpha) \neq \alpha$. Alors un opérateur différentiel sur X_0 , monôme en les ∂_{t_i} se prolonge en un opérateur différentiel global sur X si et seulement si le système de racines $\tilde{\Phi}$ est de type A_1 ou A_2 .*

Démonstration. Soit α une racine blanche telle que $\alpha - \theta(\alpha) = \gamma_i$, et supposons d'abord que $\langle \theta(\alpha), \alpha^\vee \rangle = 0$. Alors $s_\alpha(\theta(\alpha)) = \theta(\alpha)$, et $s_\alpha(\theta(\alpha) - \alpha) = \theta(\alpha) + \alpha \notin \Phi$, donc $-\theta(\alpha) + \alpha \notin \Phi$. Considérons $<$ un ordre total sur Φ_1^+ vérifiant pour tous $\beta, \delta \in \Phi_1^+ \setminus \{\alpha, -\theta(\alpha)\}$:

$$\beta < -\theta(\alpha) < \alpha$$

et

$$\beta < \delta \text{ si } s_\alpha(\delta) \in \Phi_0 \text{ et } s_\alpha(\beta) \notin \Phi_0$$

Numérotons $\beta_1 \dots \beta_q$ les racines de $\Phi_1^+ \setminus \{\alpha, -\theta(\alpha)\}$ telles que $s_\alpha(\beta) \notin \Phi_0$, et $\delta_1, \dots, \delta_p$ celles qui vérifient $s_\alpha(\delta) \in \Phi_0$. Notons comme précédemment $\varphi : U' \times \mathbb{A}^r \xrightarrow{\sim} X_0$. On calcule alors sur l'ouvert $(\prod t'_i \neq 0, x' \neq 0)$:

$$\begin{aligned} & n_\alpha \cdot \varphi(u_{\beta_1}(x'_{\beta_1}) \dots u_{\beta_q}(x'_{\beta_q}) u_{\delta_1}(x'_{\delta_1}) \dots u_{\delta_p}(x'_{\delta_p}) u_{-\theta(\alpha)}(y') u_\alpha(x'), (t'_1, \dots, t'_r)) \\ &= u_{s_\alpha(\beta_1)}(k_1 x'_{\beta_1}) \dots u_{s_\alpha(\beta_q)}(k_q x'_{\beta_q}) u_{s_\alpha(\delta_1)}(k'_1 x'_{\delta_1}) \dots u_{s_\alpha(\delta_p)}(k'_p x'_{\delta_p}) \\ & \quad u_{-\theta(\alpha)}(y') \alpha^\vee (-x'^{-1}) u_\alpha(-x') u_{-\alpha}(x'^{-1}) a(t'_1, \dots, t'_r) \cdot [h] \\ &= u_{s_\alpha(\beta_1)}(k_1 x'_{\beta_1}) \dots u_{s_\alpha(\beta_q)}(k_q x'_{\beta_q}) u_{s_\alpha(\delta_1)}(k'_1 x'_{\delta_1}) \dots u_{s_\alpha(\delta_p)}(k'_p x'_{\delta_p}) \\ & \quad u_{-\theta(\alpha)}(y') \alpha^\vee (-x'^{-1}) u_\alpha(-x') u_{-\theta(\alpha)}(-x'^{-1} t_i) a(t'_1, \dots, t'_r) \cdot [h] \\ &= u_{s_\alpha(\beta_1)}(k_1 x'_{\beta_1}) \dots u_{s_\alpha(\beta_q)}(k_q x'_{\beta_q}) u_{s_\alpha(\delta_1)}(k'_1 x'_{\delta_1}) \dots u_{s_\alpha(\delta_p)}(k'_p x'_{\delta_p}) \\ & \quad u_{-\theta(\alpha)}(y' - x'^{-1} t_i) u_\alpha(-x'^{-1}) a(t'_1 (-x')^{\langle \gamma_1, \alpha_i \rangle}, \dots, t'_r (-x')^{\langle \gamma_r, \alpha_i \rangle}) \cdot [h] \\ &= u_{s_\alpha(\beta_1)}(k_1 x'_{\beta_1}) \dots u_{s_\alpha(\beta_q)}(k_q x'_{\beta_q}) u_{-\theta(\alpha)}(y' - x'^{-1} t_i) u_{s_\alpha(\delta_1)}(k'_1 x'_{\delta_1}) \dots u_{s_\alpha(\delta_p)}(k'_p x'_{\delta_p}) \\ & \quad u_\alpha(-x'^{-1}) a(t'_1 (-x')^{\langle \gamma_1, \alpha_i \rangle}, \dots, t'_r (-x')^{\langle \gamma_r, \alpha_i \rangle}) \cdot [h] \\ &= u_{\beta_1}(Q_1(x'_{\beta_j}, x'_{\delta_j}, x'^{-1}, y' - x'^{-1} t_i)) \dots u_{\beta_q}(Q_q(x'_{\beta_j}, x'_{\delta_j}, x'^{-1}, y' - x'^{-1} t_i)) \\ & \quad u_{\delta_1}(P_1(x'_{\delta_j}, x'^{-1}, y' - x'^{-1} t_i)) \dots u_{\delta_p}(P_p(x'_{\delta_j}, x'^{-1}, y' - x'^{-1} t_i)) \\ & \quad u_{-\theta(\alpha)}(y' - x'^{-1} t_i) u_\alpha(-x'^{-1}) a(t'_1 (-x')^{\langle \gamma_1, \alpha_i \rangle}, \dots, t'_r (-x')^{\langle \gamma_r, \alpha_i \rangle}) \cdot [h] \end{aligned}$$

où comme précédemment, les k_j (resp. k'_j) sont définis par $\text{ad}(n_\alpha).X_{\beta_j} = k_j X_{s_\alpha(\beta_j)}$ (resp. $\text{ad}(n_{\alpha_i}).X_{\delta_j} = k_j X_{s_{\alpha_i}(\delta_j)}$), et les Q_j (resp. P_j) sont des polynômes en $p + q + 2$ variables

(resp. $p+2$ variables), de degré au plus 1 en chacune de ses variables, donnés par la formule de Campbell-Hausdorff. Ces changements de coordonnées se prolongent lorsque $\prod t'_i = 0$, et sur $n_\alpha \cdot X_0 \cap X_0 = (x' \neq 0)$, on obtient comme précédemment :

$$\begin{aligned}\partial_{t_i} &= (-x')^{\langle \gamma_i, \alpha_i \rangle} \partial_{t'_i} - (-x)^{\langle \gamma_i, \alpha_i \rangle - 1} \partial_{y'} \\ \partial_{t_j} &= (-x')^{\langle \gamma_j, \alpha_i \rangle} \partial_{t'_j} \text{ pour } j \neq i\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\langle \theta(\alpha), \alpha^\vee \rangle \neq 0$. Considérons alors $<'$ un ordre total sur Φ_1^+ vérifiant pour tous $\beta, \delta \in \Phi_1^+ \setminus \{\alpha, -\theta(\alpha), s_\alpha(-\theta(\alpha))\}$:

$$\beta <' s_\alpha(-\theta(\alpha)) <' -\theta(\alpha) <' \alpha$$

et

$$\beta <' \delta \text{ si } s_\alpha(\delta) \in \Phi_0 \text{ et } s_\alpha(\beta) \notin \Phi_0$$

On a alors, par des calculs similaires :

$$\begin{aligned}& n_\alpha \cdot \varphi(u_{\beta_1}(x'_{\beta_1}) \dots u_{\beta_q}(x'_{\beta_q}) u_{\delta_1}(x'_{\delta_1}) \dots u_{\delta_p}(x'_{\delta_p}) u_{s_\alpha(-\theta(\alpha))}(z') u_{-\theta(\alpha)}(y') u_\alpha(x'), (t'_1, \dots, t'_r)) \\ &= u_{\beta_1}(Q_1(x'_{\beta_j}, x'_{\delta_j}, x'^{-1}, y', z' - x'^{-1}t_i)) \dots u_{\beta_q}(Q_q(x'_{\beta_j}, x'_{\delta_j}, x'^{-1}, y', z' - x'^{-1}t_i)) \\ & u_{\delta_1}(P_1(x'_{\delta_j}, x'^{-1}, y', z' - x'^{-1}t_i)) \dots u_{\delta_p}(P_p(x'_{\delta_j}, x'^{-1}, y', z' - x'^{-1}t_i)) u_{s_\alpha(-\theta(\alpha))}(Q_{q+1}(x'_{\beta_j}, x'_{\delta_j}, x'^{-1}, y', z' - x'^{-1}t_i)) \\ & u_{-\theta(\alpha)}(z' - x'^{-1}t_i) u_\alpha(-x'^{-1}) a(t'_1(-x')^{\langle \gamma_1, \alpha_i \rangle}, \dots, t'_r(-x')^{\langle \gamma_r, \alpha_i \rangle}). [h]\end{aligned}$$

où les Q_j (resp. P_j) sont des polynômes en $p+q+3$ variables (resp. $p+3$ variables), de degré au plus 1 en chacune de ses variables. Sur $n_\alpha \cdot X_0 \cap X_0 = (x' \neq 0)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_{t_i} &= (-x')^{\langle \gamma_i, \alpha_i \rangle} \partial_{t'_i} - (-x)^{\langle \gamma_i, \alpha_i \rangle - 1} \partial_{z'} \\ \partial_{t_j} &= (-x')^{\langle \gamma_j, \alpha_i \rangle} \partial_{t'_j} \text{ pour } j \neq i\end{aligned}$$

Dans tous les cas, l'opérateur $\partial = \prod \partial_{t_j}^{n_j}$ défini sur X_0 se prolonge à X tout entier si et seulement si pour toute racine blanche α , si $\alpha - \theta(\alpha) = \gamma_i$, on a :

$$n_i(\langle \gamma_i, \alpha_i \rangle - 1) + \sum_{j \neq i} n_j \langle \gamma_j, \alpha_i \rangle = n_i + \sum_{j \neq i} n_j \langle \gamma_j, \alpha_i \rangle \geq 0$$

En regardant la classification des espaces symétriques G/H avec G simple (cf. Appendice), ainsi que leurs diagrammes de Satake, ceci n'est possible que dans les cas où G/H est :

- (1) $\text{PGL}_6/\text{PSp}_6$;
- (2) E_6/F_4 ;
- (3) $\text{PGL}_n/\text{GL}_{n-1}$ avec $n \geq 3$;
- (3') $\text{PSO}_6/\text{GL}_3 \simeq \text{PGL}_4/\text{GL}_3$;
- (4) $\text{Psp}_{2n}/\text{P}(\text{SL}_2 \times \text{Sp}_{2n-2})$ avec $n \geq 2$;
- (5) $\text{PSO}_n/\text{P}(\text{SO}_{n-1} \times k^*)$ avec $n \geq 5$;
- (5') $\text{PGL}_4/\text{PSp}_4 \simeq \text{PSO}_6/\text{P}(\text{SO}_5 \times k^*)$;
- (6) F_4/PSO_9 .

En effet, comme précédemment, il suffit de regarder la matrice des $(\langle \alpha_i, \gamma_j \rangle)$: c'est exactement la matrice de Cartan de $\tilde{\Phi}$ moins l'identité lorsque $\tilde{\Phi}$ est de type différent de

BC_n , et en prenant $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des racines blanches telles que $\alpha_i - \theta(\alpha_i) = \gamma_i$, on a lorsque $\tilde{\Phi}$ est de type BC_n :

$$(\langle \alpha_i, \gamma_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq r} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit ainsi que le rang doit être au plus 2, et que $\tilde{\Phi}$ est nécessairement de type A . Les cas (1) et (2) sont de type A_2 , et l'opérateur $\partial_{t_1} \partial_{t_2}$ convient. Les autres sont de type A_1 , et l'opérateur ∂_{t_1} convient \square

Pour terminer l'étude en type A_1 , il reste à regarder le cas où le diagramme de Satake de G/H est

○

ce qui correspond à l'espace symétrique PGL_2/k^* . L'automorphisme θ est donné par $\theta : g \mapsto (g^t)^{-1}$, on considère

$$T = T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, t \in k^* \right\}, U_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in k \right\}$$

et on obtient, en posant $y = x'^{-1} \alpha(t'_1)$ et ζ tel que $\zeta^2 = 1 + y^2$

$$\begin{aligned} n_\alpha u_\alpha(x') a(t'_1) \cdot [h] &= \alpha^\vee(-x'^{-1}) u_\alpha(-x') a(t'_1) u_{-\alpha}(y) \cdot [h] \\ &= \alpha^\vee(-x'^{-1}) u_\alpha(-x') a(t'_1) \alpha^\vee(\zeta^{-1}) u_\alpha(y) \cdot [h] \\ &= \alpha^\vee(-x'^{-1}) u_\alpha(-x' + \frac{x'^{-1} t'_1}{1 + x'^{-2} t'_1}) a(\frac{t'_1}{(1 + x'^{-2} t'_1)^2}) \cdot [h] \\ &= u_\alpha(\frac{-x'}{x'^2 + t'_1}) a(\frac{t'_1}{(x'^2 + t'_1)^2}) \cdot [h] \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\partial_{t_1} = (x'^2 - t'_1)(x'^2 + t'_1) \partial_{t'_1} - x'(x'^2 + t'_1) \partial_{x'}$$

Remarques.

- (1) Comme dans (2.4), ces opérateurs différentiels ne sont pas dans l'image de $L : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow D_X$, puisqu'ils ne laissent pas stable $\Gamma(X_0, \mathcal{I}_{D_1})$ et $\Gamma(X_0, \mathcal{I}_{D_1} \mathcal{I}_{D_2})$ respectivement.
- (2) Avec le cas de $\mathrm{PGL}_3/\mathrm{PSO}_3$, les espaces symétriques $\mathrm{PGL}_3 \times \mathrm{PGL}_3/\mathrm{PGL}_3$, $\mathrm{PGL}_6/\mathrm{Psp}_6$ et E_6/F_4 sont exactement les espaces symétriques de type adjoint dont le système de racines réduit $\tilde{\Phi}$ est de type A_2 .

Suite à ces remarques, on peut résumer les résultats obtenus dans cette section par

Théorème 2.5.7. *Soit $X = \overline{G/H}$ un espace symétrique, avec soit G simple, soit $G = H \times H$ et H simple. Alors*

- (1) *Si $\tilde{\Phi}$ est de type A_1 , l'opérateur ∂_{t_1} se prolonge en un opérateur différentiel global sur X , qui n'est pas dans l'image de L .*
- (2) *Si $\tilde{\Phi}$ est de type A_2 , l'opérateur $\partial_{t_1} \partial_{t_2}$ se prolonge en un opérateur différentiel global sur X , qui n'est pas dans l'image de L .*

(3) Si de plus pour toute racine simple, $\theta(\alpha) \neq -\alpha$, alors ce sont les seuls cas où un opérateur différentiel sur X_0 de la forme $\prod \partial_{t_i}^{n_i}$ se prolonge en un opérateur différentiel global sur X .

Remarque. Soit TX le fibré tangent à X , et \mathcal{T}_X le faisceau sur X associé. Comme $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, la suite exacte

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_X^1) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{T}_X) \rightarrow 0$$

est scindée. Ainsi $\Gamma(X, \mathcal{D}_X^1) = \Gamma(\mathcal{T}_X) \oplus k = \text{Lie}(\text{Aut}^0(X)) \oplus k$. Donc si $\tilde{\Phi}$ est de type A_1 , ∂_{t_1} est dans l'image de $L' : \mathfrak{U}(\text{Lie}(\text{Aut}^0(X))) \rightarrow D_X$, et on obtient que $\mathfrak{g} \not\subset \text{Lie}(\text{Aut}^0(X))$ puisque $\partial_{t_1} \notin L(\mathfrak{g})$ (par exemple, dans le cas de $\text{PGL}_2 \times \text{PGL}_2 / \text{PGL}_2$, on sait que $\text{Aut}^0(X) = \text{PSL}_4$, puisque dans ce cas $X = \mathbb{P}^3$).

Rappelons que comme G/H est de rang 1, X a uniquement deux G -orbites, à savoir la G -orbite ouverte Ω et la G -orbite fermée D_1 , qui est un diviseur lisse irréductible, et rappelons aussi que $\text{Pic}(X)$ est engendré par l'ensemble Δ_X des couleurs. Alors il existe des entiers $a_{1,D}$ tels que dans $\text{Pic}(X)$,

$$[D_1] = \sum_{D \in \Delta_X} a_{1,D} [D]$$

Il se trouve que si $\tilde{\Phi}$ est de type A_1 , tous ces entiers a_D sont positifs. Or d'après [Br](2.3.2) et (2.4.2), X est une $\text{Aut}^0(X)$ -variété magnifique, dont le complémentaire à sa $\text{Aut}^0(X)$ -orbite ouverte est une union $X_1 \cup \dots \cup X_p$, où les X_j sont exactement les diviseurs irréductibles lisses G -stables pour lesquels il existe un $a_{i,D} < 0$. Ainsi X est une variété de drapeaux pour le groupe $\text{Aut}^0(X)$. On peut également citer [BiBr] (4.1.2) pour une preuve de ce fait.

Chapitre 3

Etude en type A_2 via la théorie géométrique des invariants

Lorsque X est une variété algébrique munie d'une action d'un groupe algébrique réductif G , un problème naturel qui apparaît est de savoir comment quotienter X par cette action pour obtenir un objet G -invariant. Dans la première section, nous rappellerons ce que sont les quotients GIT, dont l'idée est de retirer un certain fermé sur lequel l'action de G a de mauvaises propriétés, pour obtenir un bon quotient de l'ouvert restant. Le choix du fermé à retirer dépend d'objets que l'on peut paramétrer, sous de bonnes hypothèses sur X et G , par un polyèdre convexe dans un espace affine, ce qui nous donne différents quotients GIT du même objet. Nous étudierons les relations entre ces différents quotients dans la deuxième section. En particulier, toujours sous ces bonnes hypothèses, nous verrons qu'il existe un objet canonique qui domine tous ces quotients. Dans la troisième section, nous présenterons un résultat dû à Thaddeus, qui nous permet de retrouver certaines compactifications magnifiques d'espaces symétriques comme des limites inverses de quotients GIT de grassmanniennes. Nous nous servirons dans la quatrième section de ce résultat pour obtenir des propriétés sur ces compactifications lorsqu'elles sont de rang 2 grâce à celles déjà connues sur les grassmanniennes.

3.1 Rappels sur la théorie géométrique des invariants

Cette section a pour but de rappeler des faits connus sur les quotients GIT de variétés algébriques par des groupes réductifs lorsque $k = \mathbb{C}$. On peut retrouver ces propriétés dans [MFK], [Do] et dans [DH].

Soit G un groupe algébrique réductif, agissant sur une variété algébrique X . En général, X a des orbites non fermées, ce qui empêche de munir l'espace des orbites X/G d'une structure de variété. Dans cette section, nous allons voir les notions de quotients géométriques et catégoriques, qui donnent un sens à un quotients X/G , ainsi que celle de quotients GIT de X par G lorsque X est projective.

Définition. On appelle *quotient géométrique* de X par G un morphisme $\pi : X \rightarrow Y$ tel que :

- (1) π est surjective, et ses fibres sont exactement les G -orbites de X ;
- (2) $U \subset Y$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X ;
- (3) pour tout ouvert $U \subset Y$, π induit des isomorphismes $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \simeq \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)^G$. On notera par la suite X/G pour désigner un tel Y .

Remarques.

- (1) Si $p : X \rightarrow Z$ est un morphisme G -invariant, alors il se factorise par π , ie. il existe un morphisme $\tilde{p} : Y \rightarrow Z$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Z \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{p} & \\ Y & & \end{array}$$

commute. En particulier, s'il existe, le quotient géométrique est unique à isomorphisme près.

- (2) Si G est un groupe algébrique affine, et H est un sous groupe fermé de G , la projection $\pi : G \rightarrow G/H$ est un quotient géométrique.
- (3) Un quotient géométrique n'existe pas tout le temps : par exemple, si $n > 0$, on considère $G = k^*$ agissant sur $X = k^n$ par homothéties. Alors X n'admet pas de quotient géométrique : en effet, 0 est dans l'adhérence de toutes les G -orbites, et si un quotient géométrique $\pi : X \rightarrow X/G$ existait, 0 serait le seul point fermé de Y . En revanche, si $X' = X \setminus \{0\}$, le quotient géométrique $\pi' : X' \rightarrow X'/G$ existe, et c'est la projection de X' sur \mathbb{P}^{n-1} .

On peut également définir un autre type de quotient, appelé quotient catégorique :

Définition. On appelle *quotient catégorique* de X par G un morphisme G -invariant $\pi : X \rightarrow Y$ qui satisfait la propriété universelle : tout morphisme G -invariant $p : X \rightarrow Z$ se factorise de manière unique par π . On notera par la suite $X//G$ pour désigner un tel Y . On dit que c'est un *bon quotient catégorique* si de plus :

- (1) pour tout ouvert $U \subset X//G$, π induit des isomorphismes $\Gamma(U, \mathcal{O}_{X//G}) \simeq \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)^G$;
- (2) si W est un fermé G -invariant de X , alors $\pi(W)$ est un fermé de $X//G$; si de plus W' est un autre fermé G -invariant de X , disjoint de W , alors $\pi(W) \cap \pi(W') = \emptyset$

Remarques.

- (1) Les quotients géométriques sont des quotients catégoriques. S'ils existent, les quotients catégoriques sont eux aussi uniques à isomorphisme près.
- (2) La définition de quotient catégorique dépend implicitement du choix d'une catégorie ambiante. Nous considérerons par la suite que tous les objets et les flèches sont dans la catégorie des variétés algébriques.
- (3) Quand un quotient catégorique existe, il ne permet pas nécessairement de comprendre l'action de G sur X : par exemple, si $G = k^*$ agissant sur $X = k^n$ par homothéties, alors $X//G$ est un point.

Pour comprendre l'action de G sur X , l'idée est de se restreindre à des ouverts de X sur lesquels des quotients géométriques ou des quotients catégoriques existent. L'idée est de se débarrasser des points qui ne peuvent pas être séparés par des fonctions G -invariantes. Il faut d'abord comprendre l'action de G sur ces fonctions. Pour cela, on introduit la notion fibré en droite G -linéarisé :

Définition. Soit $\pi : L \rightarrow X$ un fibré en droites sur X , et notons $\sigma : G \times X \rightarrow X$ l'action de G . On appelle G -linéarisation de L une action $\tilde{\sigma} : G \times L \rightarrow L$ tel que :

- (1) Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
G \times L & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & L \\
id \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
G \times X & \xrightarrow{\sigma} & X
\end{array}$$

commute.

(2) La section nulle est G -invariante.

Un fibré en droites G -linéarisé est la donnée d'un fibré en droites L et d'une G -linéarisation $\tilde{\sigma}$ de L .

De la même manière, on a une notion de faisceau inversible G -linéarisé, et la G -linéarisation d'un faisceau inversible \mathcal{L} sur X induit une G -linéarisation des $\mathcal{L}^{\otimes n}$. Etant donné un faisceau inversible G -linéarisé, on définit l'ensemble des points stables et semi-stables de la manière suivante :

Définition. Soit \mathcal{L} un faisceau inversible G -linéarisé sur X , et $x \in X$. On dit que :

(1) x est *semi-stable* (pour \mathcal{L}) s'il existe $n > 0$ et une section $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^G$ telle que $s(x) \neq 0$ et que

$$X_s := \{y \in X \mid s(y) \neq 0\}$$

soit affine ;

(2) x est *stable* (pour \mathcal{L}) si il existe une section s comme dans (1) telle que les G -orbites dans X_s soient fermées, et si le stabilisateur G_x est fini ;

(3) X est *instable* (pour \mathcal{L}) si il n'est pas semi-stable.

On note par $X^{ss}(\mathcal{L})$, $X^s(\mathcal{L})$ et $X^{us}(\mathcal{L})$ l'ensemble des points respectivement semi-stables, stables et instables (pour \mathcal{L}).

Remarque. Pour $x \in X$, \mathcal{L} un faisceau inversible et $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$, la propriété $s(x) = 0$ ne dépend pas de la trivialisation choisie au voisinage de x .

Avec ces définitions, il est clair que $X^{ss}(\mathcal{L})$ et $X^s(\mathcal{L})$ sont des ouverts G -invariants de X . Pour se convaincre de l'utilité de ces définitions, les ouverts $X^{ss}(\mathcal{L})$ et $X^s(\mathcal{L})$ sont les "bons" ouverts admettant des quotients catégoriques et géométriques, comme le montre le théorème suivant (cf. [Do] 8.2) :

Théorème 3.1.1. Soit \mathcal{L} un faisceau inversible G -linéarisé sur X . Alors il existe un bon quotient catégorique

$$\pi : X^{ss}(\mathcal{L}) \rightarrow X^{ss}(\mathcal{L})//G$$

tel que la restriction de π à $X^s(\mathcal{L})$ soit un quotient géométrique.

Supposons pour la suite que X est une variété projective, et que \mathcal{L} est un faisceau inversible ample sur X . Dans ce cas, on peut décrire le quotient $X^{ss}(\mathcal{L})//G$ comme étant

$$X^{ss}(\mathcal{L})//G = \text{Proj}\left(\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^G\right)$$

Ceci a bien un sens puisque $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ est de type fini (on peut le voir comme l'algèbre des fonctions régulières sur l'espace total du fibré L^{-1}), et comme G est réductif, l'algèbre des G -invariants est également de type fini. On notera par la suite $X//_{\mathcal{L}}G$ pour $X^{ss}(\mathcal{L})//G$, et on appelle ce quotient *quotient GIT* de X (pour \mathcal{L}) par G .

Pour vérifier si un point $x \in X$ est (semi-)stable pour un faisceau inversible ample G -linéarisé \mathcal{L} , on dispose d'un critère numérique, appelé le critère de Hilbert-Mumford. A tout faisceau inversible G -linéarisé \mathcal{L} et à sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow G$, on associe l'entier $\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda)$ défini de la manière suivante : en notant $x_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t).x$, le sous-groupe $\lambda(\mathbb{C}^*)$ agit sur la fibre par le caractère $t \mapsto t^{\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda)}$ de \mathbb{C}^* . D'après [DH] (1.1), la (semi-)stabilité se traduit alors en :

Proposition 3.1.2. *Soit \mathcal{L} un faisceau inversible ample G -linéarisé, et $x \in X$. Alors :*

- (1) $x \in X^{ss}(\mathcal{L}) \Leftrightarrow \mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda) \leq 0$ pour tout sous-groupe à un paramètre λ ;
- (2) $x \in X^s(\mathcal{L}) \Leftrightarrow \mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda) < 0$ pour tout sous-groupe à un paramètre λ .

3.2 Variation des quotients GIT

Les variations des quotients GIT $X//_{\mathcal{L}}G$ en fonction du faisceau inversible G -linéarisé \mathcal{L} ont été étudiées notamment dans [DH], [Re], [Th1], et dans [BP] lorsque G est un tore. Nous nous intéressons ici aux résultats connus lorsque X est projective. Pour cela, on introduit le G -groupe de Néron-Severi. La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow 2i\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

induit la suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow \text{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \dots$$

où c_1 est la première classe de Chern de $\text{Pic}(X)$. On définit alors $\text{Pic}(X)_0$ comme le noyau de c_1 , et $NS(X)$, le groupe de Néron-Severi usuel, est l'image de c_1 , ou encore le quotient $\text{Pic}(X)/\text{Pic}(X)_0$. L'idée est de mimer cette définition en prenant en compte les G -linéarisations. Soit $\text{Pic}^G(X)$ le groupe des faisceaux inversibles G -linéarisés sur X à isomorphisme près.

Définition. Soit \mathcal{L} un faisceau inversible G -linéarisé sur X . On dit que \mathcal{L} est *homologiquement trivial* si $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)_0$ et si sa G -linéarisation est triviale sur l'espace total L de \mathcal{L} , ie. $g.(x, t) = (g.x, t)$. On note $\text{Pic}^G(X)_0$ le sous-groupe de $\text{Pic}^G(X)$ formé par les \mathcal{L} homologiquement triviaux. On dit que deux faisceaux inversibles G -linéarisés sont *homologiquement équivalents* si leur différence dans $\text{Pic}^G(X)$ est homologiquement triviale. On définit le G -groupe de Néron-Severi de X par

$$NS^G(X) := \text{Pic}^G(X)/\text{Pic}^G(X)_0$$

On s'intéresse plus particulièrement aux $X//_{\mathcal{L}}G$ lorsque \mathcal{L} est un faisceau inversible G -linéarisé ample, puisque dans ce cas, le choix d'un tel \mathcal{L} revient à fixer un plongement G -équivariant

$$i : X \rightarrow \mathbb{P}(V)$$

où V est un G -module pour lequel il existe un $N > 0$ tel que $\mathcal{L}^{\otimes N} \simeq i^*\mathcal{O}(1)$ (ce plongement n'est pas unique, mais son choix n'a pas d'importance pour la suite). En effet, pour tout $n > 0$, X a les mêmes points (semi-)stables pour \mathcal{L} et $\mathcal{L}^{\otimes n}$, et l'hypothèse d'amplitude nous permet d'utiliser le critère de Hilbert-Mumford pour vérifier la (semi-)stabilité. On donne ici une liste de propriétés tirées de [DH] (2.3 et 3.1)

Proposition 3.2.1. *Soient \mathcal{L} et \mathcal{L}' sont deux faisceaux inversibles amples G -linéarisés.*

(1) *Si \mathcal{L} et \mathcal{L}' sont homologiquement équivalents, alors $X^{ss}(\mathcal{L}) = X^{ss}(\mathcal{L}')$ et $X^s(\mathcal{L}) = X^s(\mathcal{L}')$.*

(2) *Si $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ pour un certain $n > 0$, alors X_s est affine. Ainsi*

$$X^{ss}(\mathcal{L}) = \{x \in X \mid \exists n > 0, \exists s \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^G, s(x) \neq 0\}$$

(3) *Si $x \in X^{ss}(\mathcal{L})$ tel que l'orbite $G.x$ soit fermée et que le stabilisateur G_x soit fini, alors $x \in X^s(\mathcal{L})$.*

On arrive alors à la définition du cône G -ample, qui est l'objet qui va paramétrer les différents quotients GIT :

Définition. Soit \mathcal{L} un faisceau inversible ample G -linéarisé. On dit que \mathcal{L} est G -ample si de plus $X^{ss}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. On dit qu'un élément de $\text{NS}^G(X)$ est G -ample s'il admet un représentant G -ample. On note $\text{NS}^G(X)^+$ l'ensemble des éléments G -amples de $\text{NS}^G(X)$. On définit le *cône G -ample* $C^G(X)$ comme étant le cône convexe engendré par $\text{NS}^G(X)^+$ dans $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}} := \text{NS}^G(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Remarques.

(1) $\text{NS}^G(X)^+$ est un fait un monoïde dans $\text{NS}^G(X)$, puisque si $X^{ss}(\mathcal{L})$ et $X^{ss}(\mathcal{L}')$ sont non-vide, alors $X^{ss}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') \neq \emptyset$. (cf. [DH] 3.1.3)

(2) La notion de G -amplitude dans $\text{NS}^G(X)$ a bien un sens, puisque si \mathcal{L} est un faisceau inversible ample G -linéarisé dans la classe d'un certain \mathcal{L}' G -ample, alors \mathcal{L} et \mathcal{L}' sont homologiquement équivalents, donc \mathcal{L} est aussi G -ample.

On peut étendre le critère de Hilbert-Mumford à $C^G(X)$ de la manière suivante : soit T un tore maximal de G . On a, en notant $\mathcal{X}_*(G) := \text{Hom}(\mathbb{G}_m, G)$,

$$\mathcal{X}_*(G) = \bigcup_{g \in G} \mathcal{X}_*(gTg^{-1})$$

donc pour tout $\lambda \in \mathcal{X}_*(G)$, il existe un $g \in G$ tel que $i_g \circ \lambda \in \mathcal{X}_*(T)$. Soit $|\cdot|$ une norme euclidienne W -invariante sur $\mathcal{X}_*(T) \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{\dim(T)}$. On pose pour $\lambda \in \mathcal{X}_*(G)$ et $x \in X$:

$$\bar{\mu}^{\mathcal{L}}(x, \lambda) := \frac{\mu^{\mathcal{L}}(x, \lambda)}{|i_g \circ \lambda|} \text{ et } M^{\mathcal{L}}(x) = \sup_{\lambda \in \mathcal{X}_*(G)} \bar{\mu}^{\mathcal{L}}(x, \lambda)$$

Si $x \in X$, la fonction $M^{\bullet}(x)$ permet de donner un critère de (semi-)stabilité de x pour un $l \in C^G(X)$:

Proposition 3.2.2. *Pour tout $x \in X$, la fonction*

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}^G(X) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \mathcal{L} & \mapsto & M^{\mathcal{L}}(x) \end{array}$$

se factorise par une fonction $\text{NS}^G(X) \rightarrow \mathbb{R}$, qui se prolonge continûment de manière unique en une fonction toujours notée $M^{\bullet}(x) : \text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $l, l' \in \text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}}$:

$$M^{l+l'}(x) \leq M^l(x) + M^{l'}(x)$$

On prolonge alors la notion de (semi-)stabilité en définissant que $x \in X$ est semi-stable (resp. stable) pour $l \in C^G(X)$ si $M^l(x)$ est négatif (resp. strictement négatif), et on a toujours des quotients catégoriques (resp. géométriques) de l'ouvert des points semi-stables (resp. stable) par G . Grâce à cette fonction, on peut partitionner $C^G(X)$ de la manière suivante :

Définition. On dit qu'une partie $H \subset C^G(X)$ est un *mur* si il existe un $x \in X$ tel que $\dim G_x > 0$ et $H = H(x) := \{l \in C^G(X) \mid M^l(x) = 0\}$. Une composante connexe non-vide du complémentaire de la réunion des murs est appelée une *chambre*.

Cette partition a de bonnes propriétés comme le montre la proposition suivante (cf. [DH] 3.3.2 et 3.4.2) :

Proposition 3.2.3. Soient $l, l' \in C^G(X)$. Alors :

- (1) l et l' sont dans une même chambre si et seulement si $X^{ss}(l) = X^s(l) = X^s(l') = X^{ss}(l')$;
- (2) si $X^{ss}(l) = X^{ss}(l')$ et l est dans un mur, alors l' est dans le même mur

On remarque que $l \in C^G(X)$ est dans un mur si et seulement si $X^{ss}(l) \setminus X^s(l) \neq \emptyset$. On peut raffiner cette partition en introduisant la notion de cellule : on définit une *cellule* de $C^G(X)$ comme la composante connexe d'une classe d'équivalence de $C^G(X)$ pour la relation

$$l \sim l' \Leftrightarrow X^{ss}(l) \setminus X^s(l) = X^{ss}(l') \setminus X^s(l')$$

Avec cette définition, les chambres sont des cellules. Grâce aux propriétés de la fonction $M^\bullet(x)$, on remarque que si F est une cellule, et si $l, l' \in F$, alors $X^{ss}(l) = X^{ss}(l')$, et $X^s(l) = X^s(l')$. On peut alors désigner ces ensembles respectivement par $X^{ss}(F)$ et $X^s(F)$. Si F et F' sont deux cellules distinctes telles que $F \cap \overline{F'} \neq \emptyset$, on peut comparer les points (semi-)stables pour F et F' , ainsi que leurs quotients. Notons pour toute cellule F , $Y(F) := X^{ss}(F)/G$

Proposition 3.2.4. Soit F une cellule dont l'intersection est non vide avec l'adhérence d'une autre cellule F' . Alors :

- (1) on a les inclusions $X^{ss}(F') \not\subset X^{ss}(F)$ et $X^s(F) \subset X^s(F')$;
- (2) l'inclusion $X^{ss}(F') \subset X^{ss}(F)$ induit un morphisme $f_{F',F} : Y(F') \rightarrow Y(F)$, qui se restreint en un isomorphisme au dessus de $X^s(F)/G$. Lorsque $X^s(F) \neq \emptyset$, le morphisme $f_{F',F}$ est surjectif et birationnel.

Cette proposition est énoncée dans [DH] (4.1.5) pour lorsque F et F' ne sont pas des chambres, bien qu'il soit valable pour toutes les cellules. Nous allons donc en donner une preuve.

Démonstration. Les inclusions du (1) sont montrées grâce à la continuité des fonctions $M^\bullet(x)$: soient $l' \in F'$ et $x \in X^{ss}(l')$. Alors $M^{l'}(x) \leq 0$, donc $M^l(x) \leq 0$ pour un certain (donc pour tous) $l \in F$. De même, si $x \in X^s(F)$ et $l \in F \cap \overline{F'}$, alors $M^l(x) < 0$, donc $M^{l'}(x) < 0$ pour un certain (donc pour tous) $l' \in F'$.

Pour montrer que $X^{ss}(F') \neq X^{ss}(F)$, raisonnons par l'absurde : si $X^{ss}(F') = X^{ss}(F)$, alors par continuité, on aurait $X^s(F) = X^s(F')$, donc $X^{ss}(F) \setminus X^s(F) = X^{ss}(F') \setminus X^s(F')$. Comme F et F' sont connexes et $F \cap \overline{F'} \neq \emptyset$, $F \cup F'$ est connexe, et ce serait une cellule, ce qui est absurde.

Par définition du quotient catégorique, il existe un morphisme $f_{F',F}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X^{ss}(F') & \hookrightarrow & X^{ss}(F) \\ \downarrow \pi_{F'} & & \downarrow \pi_F \\ Y(F') & \xrightarrow{f_{F',F}} & Y(F) \end{array}$$

Le morphisme $f_{F',F}$ se restreint à $X^s(F)$ en un isomorphisme par unicité (à isomorphisme près) du quotient géométrique. C'est un morphisme dominant entre variétés projectives, donc il est surjectif. De plus, $X^s(F)$ est un ouvert de $X^{ss}(F')$ et de $X^{ss}(F)$, donc quand $X^s(F) \neq \emptyset$, $f_{F',F}$ est birationnel. \square

Grâce à ces morphismes, on peut construire un objet qui domine tous les quotients GIT et qui ne dépend plus du choix d'une cellule. Remarquons que d'après [DH] (3.3.3 et 3.3.10), le nombre de murs et de cellules est fini. Les quotients $Y(F)$ et les morphismes $f_{F',F}$ forment un système projectif, et la limite projective est un objet canonique qui domine tous les quotients GIT. On note $X//_{GIT}G$ cette limite projective. On a des morphismes dominants $d_F : X//_{GIT}G \rightarrow Y(F)$ pour toute cellule F , et si F s'intersecte avec l'adhérence d'une autre cellule F' , alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X//_{GIT}G & \xrightarrow{d_{F'}} & Y(F') \\ & \searrow d_F & \downarrow f_{F',F} \\ & & Y(F) \end{array}$$

commute.

Supposons maintenant que G est isomorphe à un certain tore $T = (\mathbb{C}^*)^n$, et supposons que $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$. Soit \mathcal{M} le générateur ample de $\text{Pic}(X)$, et soit $\mathcal{L} = \mathcal{M}^{\otimes n}$ la plus petite puissance très ample de \mathcal{M} . Alors il existe un plongement $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$, où V est un T -module de dimension finie, et $\mathcal{L} = i^*\mathcal{O}(1)$. Supposons de plus que X est un fermé irréductible de $\mathbb{P}(V)$. Dans ce cas, le critère de Hilbert-Mumford s'exprime beaucoup plus simplement. En effet, si $x \in X$, alors on peut écrire x sous la forme $x = [v]$ pour un certain $v \in V$. Grâce à l'action de T sur V , on peut décomposer V en

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}(T)} V_\chi$$

où $V_\chi = \{v \in V \mid \forall t \in T, t.v = \chi(t).v\}$, et seulement un nombre fini des V_χ sont non nuls. Ainsi on peut écrire $v = \sum_{\chi} v_\chi$ où les $v_\chi \in V_\chi$. Notons $\Pi(x)$ l'enveloppe convexe dans $\mathcal{X}(T)_{\mathbb{R}} := \mathcal{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ de l'ensemble

$$\{\chi \in \mathcal{X}_*(G) \mid v_\chi \neq 0\}$$

($\Pi(x)$ ne dépend pas d'un choix de v), et $\overset{\circ}{\Pi}(x)$ son intérieur.

Soit $l \in \text{NS}^G(X)_{\mathbb{Q}}$. Comme pour tout $\lambda > 0$, l et λl ont les mêmes points (semi-)stable, on peut voir la demi-droite $\mathbb{R}_+^* l$ comme la demi-droite engendrée par un (\mathcal{L}', σ) avec $\mathcal{L}' \in \text{Pic}(X)$, et σ une G -linéarisation de \mathcal{L}' . On peut alors identifier l'ensemble des demi-droites de $C^G(X)$ avec un polyèdre dans $\mathcal{X}(T)_{\mathbb{R}}$ de la manière suivante : soit $l \in C^G(X) \cap \text{NS}^G(X)_{\mathbb{Q}}$, et soit n tel que nl soit un faisceau inversible G -ample \mathcal{L}' , et soit $x \in X$. La G -linéarisation σ induit pour $t \in G$ un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x(t) : \mathcal{L}'_x & \rightarrow & \mathcal{L}'_{tx} \\ s & \mapsto & \chi_x(t)s(t) \end{array}$$

On associe alors à l le caractère $\chi := \chi_x$. Remarquons que χ ne dépend pas du x choisi (comme X est irréductible, il suffit de recouvrir x par des ouverts G -invariants pour le voir), et χ ne dépend pas du représentant \mathcal{L}' choisi dans $\text{Pic}^G(X)$ puisque la G -linéarisation d'un

$\mathcal{F} \in \text{Pic}^G(X)_0$ est triviale. On a $\mathcal{L}' = \mathcal{M}^{\otimes n'}$ pour un entier $n' > 0$, et en notant \sim la relation d'équivalence être dans la même demi-droite, on a un morphisme :

$$\begin{aligned} \Phi : (C^G(X) \cap \text{NS}^G(X)_{\mathbb{Q}}) / \sim &\rightarrow \mathcal{X}(T)_{\mathbb{R}} \\ l \bmod \sim &\mapsto \frac{n}{n'} \chi \end{aligned}$$

que l'on peut prolonger par continuité, ce qui nous permet l'identification. Remarquons que si $p = \frac{1}{m} \chi \in \mathcal{X}(T)_{\mathbb{R}}$, p correspond à la linéarisation de $\mathcal{L}^{\otimes m}$ par une action de χ sur les fibres, $\mathcal{L}^{\otimes m}$ est très ample et il correspond au plongement $X \hookrightarrow \mathbb{P}(S^m V)$.

Grâce à cette identification, on peut exprimer la (semi-)stabilité de la manière suivante :

Proposition 3.2.5. *Soit $x \in X$ et $p \in \mathcal{X}(T)_{\mathbb{R}}$. Alors :*

- (1) x est semi-stable pour p si et seulement si $p \in \Pi(x)$;
- (2) x est stable pour p si et seulement si $p \in \mathring{\Pi}(x)$

Dans la suite, cette condition sera beaucoup plus facile à vérifier, puisqu'on aura une action explicite de T sur V .

Exemple. Soit $V = \mathbb{C}^3$ et (e_{-1}, e_0, e_1) une base de V telle que \mathbb{C}^* agisse sur V par $t.e_i = t^i.e_i$ pour tout $t \in \mathbb{C}^*$. Alors $\text{NS}^G(X)_{\mathbb{R}} / \sim \simeq \mathbb{R}$, et en écrivant $v \in V$ comme $v = \lambda_{-1}e_{-1} \oplus \lambda_0 e_0 \oplus \lambda_1 e_1$, les points (semi-)stables de $\mathbb{P}(V)$ pour l'action de \mathbb{C}^* sont :

- $X^{ss}(l) = X^s(l) = \emptyset$ pour $l < -1$ ou $l > 1$;
- $X^{ss}(-1) = \{[v] | \lambda_{-1} \neq 0\}$ et $X^s(-1) = \emptyset$;
- $X^{ss}(l) = X^s(l) = \{[v] | \lambda_{-1} \lambda_0 \neq 0 \text{ ou } \lambda_{-1} \lambda_1 \neq 0\}$ pour $-1 < l < 0$;
- $X^{ss}(0) = \{[v] | \lambda_0 \neq 0 \text{ ou } \lambda_1 \lambda_{-1} \neq 0\}$ et $X^s(0) = \{[v] | \lambda_1 \lambda_{-1} \neq 0\}$;
- $X^{ss}(l) = X^s(l) = \{[v] | \lambda_1 \lambda_0 \neq 0 \text{ ou } \lambda_1 \lambda_{-1} \neq 0\}$ pour $0 < l < 1$;
- $X^{ss}(1) = \{[v] | \lambda_1 \neq 0\}$ et $X^s(1) = \emptyset$.

3.3 Collinéations complètes

Dans [Th2], Thaddeus montre que les espaces de modules des collinéations complètes peuvent être vus comme des limites projectives de quotients de grassmanniennes par une certaine action de \mathbb{C}^* . Ce point de vue est intéressant puisque les compactifications magnifiques des espaces symétriques $(\text{PGL}_n \times \text{PGL}_n) / \text{PGL}_n$, $\text{PGL}_n / \text{PSO}_n$ et $\text{PGL}_{2n} / \text{Psp}_{2n}$ sont de tels espaces de modules.

Définition. Soit V et W deux espaces vectoriels.

- (1) Si $u \leq \min(\dim V, \dim W)$, une collinéation complète de V dans W de rang u est la donnée d'un sous-espace $U \subset V$ de dimension u , et de morphismes $f_1 : U \rightarrow W$ et $f_{i+1} : \ker f_i \rightarrow \text{coker } f_i$, définis à un scalaire près, et où le dernier f_i est inversible.
- (2) Une quadrique complète de $\mathbb{P}(V)$ est la donnée d'une hypersurface quadrique $Q_1 \subset \mathbb{P}(V)$ et d'hypersurfaces quadriques Q_{i+1} dans le lieu singulier de Q_i , où le dernier Q_i est lisse.
- (3) Une forme anti-symétrique complète sur V est la donnée d'une 2-forme ω_1 sur V et de 2-formes ω_{i+1} sur le noyau de ω_i , où le dernier ω_i a un noyau de dimension au plus 1, et où les ω_i sont définies à scalaires près.

Remarque. La définition d'une quadrique complète de $\mathbb{P}(V)$ peut s'exprimer aussi comme la donnée d'une forme quadratique q_1 sur V et de formes quadratiques q_{i+1} sur le noyau de q_i , où le dernier q_i est non-dégénéré, et où les q_i sont définies à scalaires près.

Thaddeus a prouvé les résultats suivants dans [Th2] 2.3, 10.1 et 11.1 :

Théorème 3.3.1. Soit V et W deux espaces vectoriels, $v = \dim V$ et $u \leq \min(\dim V, \dim W)$. On a les isomorphismes suivants :

- (1) l'espace de modules des collinéations complètes de V dans W de rang u est isomorphe au quotient $\text{Gr}_u(V \oplus W) //_{GIT} \mathbb{C}^*$, où \mathbb{C}^* agit avec les poids 1 sur V et -1 sur W ;
- (2) l'espace de modules des quadriques complètes de $\mathbb{P}(V)$ est isomorphe au quotient $\text{LaGr}_v(V \oplus V^*) //_{GIT} \mathbb{C}^*$, où \mathbb{C}^* agit avec les poids 1 sur V et -1 sur V^* , et où LaGr désigne la grassmannienne des sous-espaces lagrangiens pour la forme symplectique standard sur $V \oplus V^*$;
- (3) lorsque v est pair, l'espace de modules des formes anti-symétriques complètes de V est isomorphe au quotient $\text{OGr}_v^+(V \oplus V^*) //_{GIT} \mathbb{C}^*$, où \mathbb{C}^* agit avec les poids 1 sur V et -1 sur V^* , et où OGr^+ désigne la composante connexe contenant V de la grassmannienne des sous-espaces orthogonaux pour la forme quadratique $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ sur $V \oplus V^*$.

Remarque. Supposons de plus que $W = V^*$, et que $u = v$. Les espaces de modules introduits dans le théorème sont alors les adhérences de :

- l'espace des automorphismes de V à scalaire près (donc PGL_u) dans $\prod_{i=0}^u \mathbb{P}(\text{Hom}(\Lambda^i V, \Lambda^i V))$;
- l'espace des formes quadratiques non-dégénérées de V à scalaire près (donc $\text{PGL}_u/\text{PSO}_u$) dans $\prod_{i=0}^u \mathbb{P}(S^2(\Lambda^i V))$;
- l'espace des formes anti-symétriques non dégénérées de V à scalaire près (donc $\text{PGL}_u/\text{Psp}_u$) dans $\prod_{i=0}^{\frac{u}{2}} \mathbb{P}(\Lambda^2(\Lambda^i V))$ lorsque u est pair.

Ce sont donc des compactifications magnifiques de $\text{PGL}_u = \text{PGL}_u \times \text{PGL}_u / \text{PGL}_u$, $\text{PGL}_u/\text{PSO}_u$ et de $\text{PGL}_u/\text{Psp}_u$ puisque les espaces $\text{Hom}(\Lambda^i V, \Lambda^i V)$, $S^2(\Lambda^i V)$ et $\Lambda^2(\Lambda^i V)$ ont des vecteurs de plus haut poids non nuls respectivement de poids $\varpi_i + \varpi'_i$, $2\varpi_i$ et ϖ_{2i} , qui sont spéciaux réguliers (cf. remarque 2.2.1).

Soit X une grassmannienne du type $\text{Gr}_u(V \oplus V^*)$ ou $\text{LaGr}_u(V \oplus V^*)$. Le plongement de Plücker

$$\begin{aligned} \iota : X &\hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^u(V \oplus V^*)) \\ U &\mapsto [e_1 \wedge \dots \wedge e_u] \text{ où } (e_1, \dots, e_u) \text{ base de } U \end{aligned}$$

est PGL_u -équivariant, et soit $\mathcal{L} = \iota^* \mathcal{O}(1)$. Comme \mathbb{C}^* agit sur V avec le poids 1 et sur V^* avec le poids -1, on peut décomposer

$$\Lambda^u(V \oplus V^*) = \bigoplus_{-u \leq k \leq u} W_k$$

où \mathbb{C}^* agit sur W_k avec le poids k . Soit U_{w_k} un sous-espace de $V \oplus V^*$ de dimension u tel que $[w_k] = \iota(U)$ avec $w_k \in W_k$. Alors nécessairement $U_{w_k} = U_{w_k} \cap V \oplus U_{w_k} \cap V^*$, donc

$$\dim(U_{w_k} \cap V) + \dim(U_{w_k} \cap V^*) = u \text{ et } \dim(U_{w_k} \cap V) - \dim(U_{w_k} \cap V^*) = k$$

donc $\dim(U_{w_k} \cap V) = \frac{u+k}{2}$ et $\dim(U_{w_k} \cap V^*) = \frac{u-k}{2}$. On en déduit que $W_k \neq 0 \Leftrightarrow k = -u + 2n$ avec n entre 0 et u .

Soit U un sous-espace de $V \oplus V^*$ de dimension u , et $p \in \mathcal{X}(\mathbb{C}^*)_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$. Alors $U \in X^{ss}(p)$ si et seulement si en décomposant v tel que $[v] = \iota(U)$ comme $v = \sum w_k$ dans $\Lambda^u(V \oplus V^*)$, il existe un w_{k_1} et un w_{k_2} non nuls avec $k_1 \leq p \leq k_2$ (cf. Proposition 3.2.5). On en déduit :

Proposition 3.3.2. *Soit $U \in X$ un sous-espace de $V \oplus V^*$ de dimension u , et $p \in \mathbb{R}$. Alors la (semi-)stabilité se traduit par :*

$$U \in X^{ss}(p) \Leftrightarrow \begin{cases} \dim(U \cap V) & \leq \frac{u+p}{2} \\ \dim(U \cap V^*) & \leq \frac{u-p}{2} \end{cases}$$

et

$$U \in X^s(p) \Leftrightarrow \begin{cases} \dim(U \cap V) & < \frac{u+p}{2} \\ \dim(U \cap V^*) & < \frac{u-p}{2} \end{cases}$$

Démonstration. Soit (e_1, \dots, e_u) une base de U , et écrivons pour chaque i $e_i = f_i \oplus f'_i$, avec $f_i \in V$ et $f'_i \in V^*$. Choisissons les e_i de telle sorte que les familles des f_i non nuls et des f'_i non nuls soient libres. Posons

$$v = (f_1 \oplus f'_1) \wedge \dots \wedge (f_u \oplus f'_u)$$

En regroupant par poids, on écrit v sous la forme $\sum w_k$ avec $w_k \in W_k$, et en notant k_1 le plus petit k tel que $w_k \neq 0$, et k_2 le plus grand. Alors en notant $I = \{1 \leq i \leq u \mid f'_i = 0\}$ et $J = \{1 \leq i \leq u \mid f_i = 0\}$, alors

$$w_{k_1} = (1_I(1)f_1 \oplus f'_1) \wedge \dots \wedge (1_I(u)f_u \oplus f'_u)$$

et

$$w_{k_2} = (f_1 \oplus 1_J(1)f'_1) \wedge \dots \wedge (f_u \oplus 1_J(u)f'_u)$$

Ainsi il existe $U_{w_{k_i}}$ tel que $\iota(U_{w_{k_i}}) = [w_{k_i}]$, et on a $\dim(U \cap V) = \dim(U_{w_{k_1}} \cap V) = \frac{u+k_1}{2}$ et $\dim(U \cap V^*) = \dim(U_{w_{k_2}} \cap V^*) = \frac{u-k_2}{2}$. Il suffit de remarquer que U est semi-stable (resp. stable) si et seulement si $k_1 \leq p \leq k_2$ (resp. $k_1 < p < k_2$). \square

Avec ce critère de (semi-)stabilité, on voit que les intervalles $]-u+2n, -u+2(n+1)[$ pour $0 \leq n < u$ sont les chambres, et les autres cellules sont les murs $\{-u+2n\}$ avec $0 \leq n \leq u$. Pour $-u+2n < p < -u+2(n+1)$, on note $X^{ss}(-u+2n+1)$ pour $X^{ss}(p)$ (ceci a un sens puisque p et $-u+2n+1$ sont dans la même chambre). On résume ceci sur la figure 3.1.

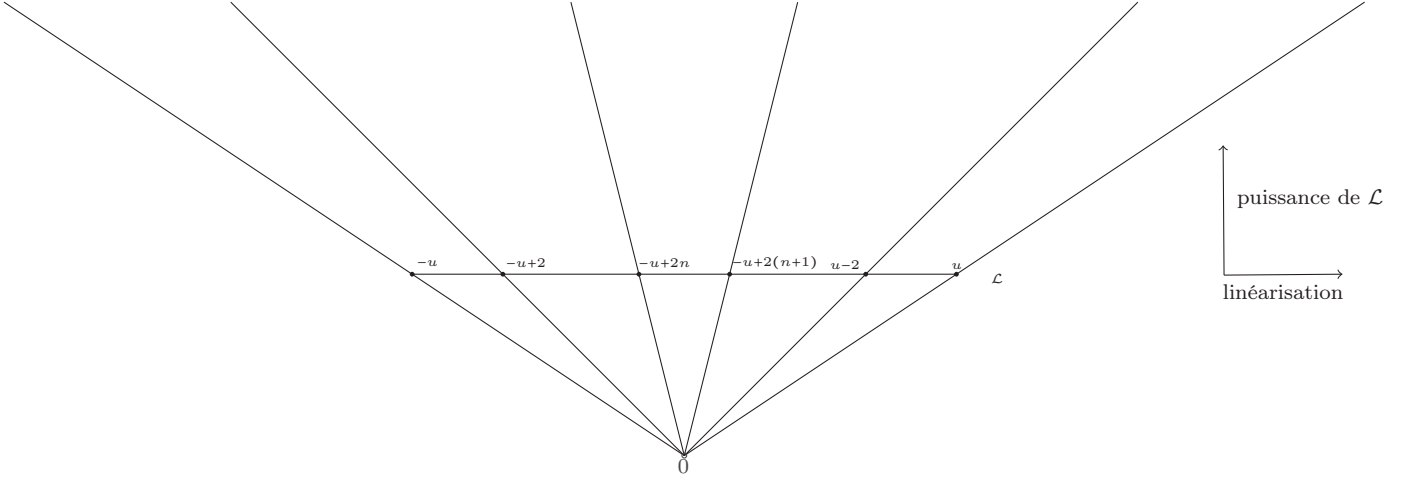
Pour comparer les différents quotients GIT de X par \mathbb{C}^* , introduisons les ensembles suivants : pour $1 \leq n \leq u-1$, notons

$$\begin{aligned} X(-u+2n)^F &= \{[w] \in X, w \text{ de poids } -u+2n\} \\ X(-u+2n-1)^- &= \{[w] \in X, w = \sum_{j \leq -u+2n} w_j, w_{-u+2n} \neq 0\} \\ X(-u+2n+1)^+ &= \{[w] \in X, w = \sum_{j \geq -u+2n} w_j, w_{-u+2n} \neq 0\} \\ \dot{X}(-u+2n-1)^- &= X(-u+2n-1)^- \setminus X(-u+2n)^F \\ \dot{X}(-u+2n+1)^+ &= X(-u+2n+1)^+ \setminus X(-u+2n)^F \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a les inclusions $X(-u+2n)^F \subset X^{ss}(-u+2n)$, $\dot{X}(-u+2n-1)^- \subset X^{ss}(-u+2n-1)$ et $\dot{X}(-u+2n+1)^+ \subset X^{ss}(-u+2n+1)$. Notons $Y(-u+2n)^F$, $Y(-u+2n-1)^-$ et $Y(-u+2n+1)^+$ leurs images respectives dans les quotients associés. D'après [BP] (2.3), on peut décrire le produit fibré $\tilde{Y}(n) := Y(-u+2n+1) \times_{Y(-u+2n)} Y(-u+2n-1)$ comme un éclatement de la manière suivante :

Proposition 3.3.3. *Dans le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y}(n) & \xrightarrow{\phi^+} & Y(-u+2n+1) \\ \downarrow \phi^- & \searrow \psi & \downarrow \\ Y(-u+2n-1) & \longrightarrow & Y(-u+2n) \end{array}$$

FIGURE 3.1 – Cône \mathbb{C}^* -ample de X

ψ , ϕ^+ et ϕ^- sont respectivement des éclatements de $Y(-u+2n)^F$, de $Y(-u+2n+1)^+$ et de $Y(-u+2n-1)^-$, tous de diviseur exceptionnel $Y(-u+2n+1)^+ \times_{Y(-u+2n)^F} Y(-u+2n-1)^-$

Remarque. La restriction de $\pi_{-u+2n} : X^{ss}(-u+2n) \rightarrow Y(-u+2n)$ à $X(-u+2n)^F$ est un quotient géométrique (cf. [BP] 1.4). Soit λ le sous-groupe à un paramètre $\lambda : t \mapsto t^{u-2n}$. On a alors des morphismes

$$\begin{aligned} \dot{X}(-u+2n+1)^+ &\rightarrow X(-u+2n)^F \\ x &\mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t).x \end{aligned}$$

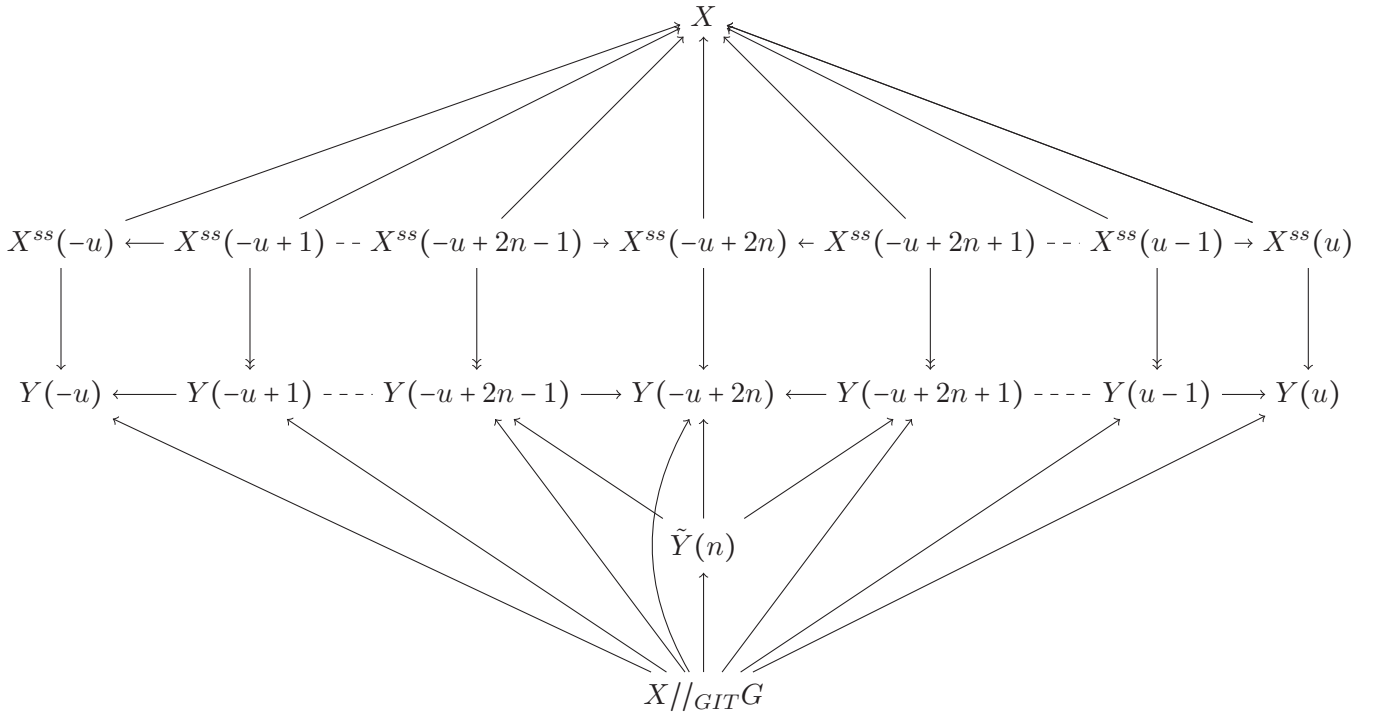
et

$$\begin{aligned} \dot{X}(-u+2n-1)^- &\rightarrow X(-u+2n)^F \\ x &\mapsto \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t).x \end{aligned}$$

et la restriction des morphismes ψ , ϕ^+ et ϕ^- aux diviseurs exceptionnels provient du passage au quotient géométrique du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \dot{X}(-u+2n+1)^+ \times_{X(-u+2n)^F} \dot{X}(-u+2n-1)^- &\longrightarrow & \dot{X}(-u+2n+1)^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \dot{X}(-u+2n-1)^- &\longrightarrow & X(-u+2n)^F \end{array}$$

On résume tout ceci sur le diagramme suivant, qui donne une vision d'ensemble des morphismes entre les différents quotients :



Remarque. Comme X est la limite projective d'un nombre fini de quotients, on remarque que l'on obtient $X//_{GIT}\mathbb{C}^*$ comme un nombre fini de produits fibrés des quotients $Y(F')$ pour les cellules ouvertes F' au dessus des $Y(F)$ pour les cellules fermées F n'étant pas dans le bord de $C^{\mathbb{C}^*}(X)$.

Lorsque $X = \text{OGr}_u^+(V \oplus V^*)$, c'est la composante connexe de $\text{OGr}_u(V \oplus V^*)$ contenant V , donc l'intersection d'un $U \in X$ avec V est nécessairement de dimension paire. On obtient les mêmes critères de (semi-)stabilité, et une description similaire du cône \mathbb{C}^* -ample et des morphismes entre différents quotients, en remplaçant tous les " $2n$ " par des " $4n$ ".

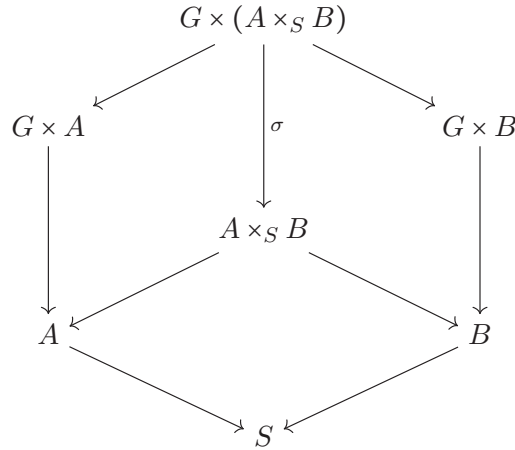
L'action de $G = \text{PGL}_u$ sur V et V^* induit une action (cf. remarque ci-après) de G sur $\text{Gr}_u(V \oplus V^*)$, $\text{LaGr}_u(V \oplus V^*)$ et $\text{OGr}_u^+(V \oplus V^*)$. Pour \mathcal{L} un faisceau inversible \mathbb{C}^* -linéarisé sur une de ces variétés X , $X^{ss}(\mathcal{L})$ et $X^s(\mathcal{L})$ sont G -stables, puisque l'action de G ne change pas les dimension des intersections avec V et V^* . De plus, si $F \cap \overline{F'} \neq \emptyset$ pour F, F' sont deux cellules disjointes, les inclusions $X^{ss}(F') \hookrightarrow X^{ss}(F)$ sont G -équivariantes, et l'action de G sur $X^{ss}(F)$ induit une action de G sur $Y(F)$, ce qui rend les morphismes $f_{F',F} : Y(F') \rightarrow Y(F)$ G -équivariants. On montre alors grâce à la remarque précédente et à la proposition suivante que les $d_F : X//_{GIT}\mathbb{C}^* \rightarrow Y(F)$ sont G -équivariants.

Proposition 3.3.4. Soient A, B et S trois G -variétés, et supposons avoir des morphismes G -équivariants $A \rightarrow S$ et $B \rightarrow S$. Alors on peut munir $A \times_S B$ d'une G -action de telle sorte que les projections soient G -équivariantes.

Démonstration. Grâce aux projections $G \times (A \times_S B) \rightarrow G \times A$ et $G \times (A \times_S B) \rightarrow G \times B$, il existe un unique morphisme

$$\sigma : G \times (A \times_S B) \rightarrow A \times_S B$$

de telle sorte que le diagramme



commute. σ induit une action de G sur $A \times_S B$, et les projections $A \times_S B \rightarrow A$ et $A \times_S B \rightarrow B$ sont G -équivariantes. \square

Remarque. L'action de G considérée sur $\text{LaGr}_u(V \oplus V^*)$ et $\text{OGr}_u^+(V \oplus V^*)$ est celle où $g \in G$ agit par g sur V et par g^{-1} sur V^* . En revanche l'action de G sur $X = \text{Gr}_u(V \oplus V^*)$ considérée provient elle de l'action de $G \times G$, où le premier G agit sur V et le deuxième sur V^* , et comme $\text{diag}(G \times G)$ agit trivialement, on peut définir une action de $g \in G$ par l'action de $(g, 1)$, ie. par g sur V .

3.4 Etude en rang 2

En conservant les notations de la section précédente, on s'intéresse au cas où Y est une PGL_u -variété magnifique de rang 2 apparaissant comme limite projective de quotients de grassmanniennes dans le cadre du Théorème 3.3.1, à savoir les cas $\overline{\text{PGL}}_3$, $\overline{\text{PGL}}_3/\overline{\text{PSO}}_3$ et $\overline{\text{PGL}}_6/\overline{\text{PSP}}_6$. Dans ces cas, on va montrer que

Théorème 3.4.1.

- (1) Y est isomorphe au quotient géométrique $Y(0)$;
- (2) l'algèbre des opérateurs différentiels globaux D_Y est de type fini ;
- (3) si \mathcal{L} est un faisceau inversible sur X , alors $H^0(X, \mathcal{L})$ est soit nul, soit un $D_{Y, \mathcal{L}}$ -module simple à gauche.

3.4.1 Cas de $\overline{\text{PGL}}_3$

Soient $G = \text{PGL}_3$, et $T \subset B \subset G$ le tore maximal des matrices diagonales et le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures. Notons $\Phi = \Phi(G, T)$ le système de racines, et α_1, α_2 les deux racines simples relativement au choix de B . Soit $V = \mathbb{C}^3$, et soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de V , et (e_1^*, e_2^*, e_3^*) sa base duale. Fixons une action de \mathbb{C}^* sur $V \oplus V^*$ par $t \cdot (v \oplus v^*) = tv \oplus t^{-1}v^*$. Notons $X = \text{Gr}_3(V \oplus V^*)$, $Y = \overline{G}$ et $Y(0) = X^{ss}(0)/\mathbb{C}^*$. D'après la section précédente, on a un morphisme dominant G -équivariant $d_0 : Y \rightarrow Y(0)$, que nous allons décrire.

Notons $V_n = \mathbb{C}^n$. Si $M \in M_n(\mathbb{C})$, on peut lui associer son graphe dans $V_n \oplus V_n$ comme étant

$$\Gamma_M = \{v \oplus Mv, v \in V\}$$

ce qui peut se réécrire en identifiant V_n avec V_n^* comme

$$\Gamma_M = \{v \oplus Mv^*, v \in V\}$$

Lorsque M est inversible, Γ_M est un sous-espace de dimension n de $V_n \oplus V_n^*$ vérifiant $\Gamma_M \cap V_n = \Gamma_M \cap V_n^* = 0$.

Dans notre cas, on obtient un morphisme

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathrm{GL}_3 &\rightarrow X \\ M &\mapsto \Gamma_M \end{aligned}$$

Il se trouve que Γ passe au quotient en un morphisme $\pi : \mathrm{PGL}_3 \rightarrow Y(0) : \text{si } t \in \mathbb{C}^* \text{ et } M \in \mathrm{GL}_3, \text{ alors}$

$$t.\Gamma_M = \{tv \oplus t^{-1}Mv^*, v \in V\} = \{v \oplus t^{-2}Mv^*, v \in V\} = \Gamma_{t^{-2}M}$$

Ainsi l'image dans X de $[M] \in \mathrm{PGL}_3$ est exactement la \mathbb{C}^* -orbite de Γ_M , et Γ_M est semi-stable (puisque son intersection avec V et V^* est nulle). Le quotient $X \rightarrow Y(0)$ étant géométrique, cette \mathbb{C}^* -orbite correspond à un point de $Y(0)$. Ainsi π est le morphisme

$$\begin{aligned} G &\rightarrow Y(0) \\ [M] &\mapsto \{\Gamma_{x^{-1}M} = \{v \oplus x^{-1}Mv^*, v \in V\}, x \in \mathbb{C}^*\} \end{aligned}$$

Regardons quelle est l'image de T par ce morphisme. Soit $t = \mathrm{diag}(a, b, c) \in \mathrm{GL}_3$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}^*$. Alors Γ_t est le sous-espace de $V \oplus V^*$ engendré par les vecteurs $e_1 \oplus ae_1^*$, $e_2 \oplus be_2^*$ et $e_3 \oplus ce_3^*$. Rappelons que l'on a un plongement $X \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^3(V \oplus V^*)) =: P$. L'action de \mathbb{C}^* sur V et V^* induit une action de \mathbb{C}^* sur P . Alors X est un fermé \mathbb{C}^* -stable de P , et on peut voir $Y(0)$ comme un fermé de $P(0) = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[\Lambda^3(V \oplus V^*)]^{\mathbb{C}^*})$. Notons $\iota : Y(0) \rightarrow P(0)$ cette inclusion. On a alors

$$\iota(\pi([t])) = \{[(xe_1 \oplus x^{-1}ae_1^*) \wedge (xe_2 \oplus x^{-1}be_2^*) \wedge (xe_3 \oplus x^{-1}ce_3^*)], x \in \mathbb{C}^*\}$$

et

$$[(xe_1 \oplus x^{-1}ae_1^*) \wedge (xe_2 \oplus x^{-1}be_2^*) \wedge (xe_3 \oplus x^{-1}ce_3^*)] = [(e_1 \oplus e_1^*) \wedge (e_2 \oplus e_2^*) \wedge (e_3 \oplus e_3^*)]$$

si et seulement si $a = b = c$, ie. $[t] = 1$ dans T . Ainsi $\pi|_T$ est un isomorphisme sur son image. Notons pour la suite $t_1 = \frac{a}{b} = \alpha_1(t)$ et $t_2 = \frac{b}{c} = \alpha_2(t)$.

Définissons un ordre $<$ tel que $e_1 < e_2 < e_3 < e_1^* < e_2^* < e_3^*$. Soit \mathcal{B} l'ensemble des sous-famille de trois vecteurs $b_1 < b_2 < b_3$ de la base canonique de $V \oplus V^*$, et $B \in \mathcal{B}$. Notons $I_B = \{1 \leq i \leq 3 | \exists j, b_j = e_i\}$ et $I_B^* = \{1 \leq i \leq 3 | \exists j, b_j = e_i^*\}$, et notons $\Lambda U_{I_B}^{I_B^*} = b_1 \wedge b_2 \wedge b_3$. La famille $(\Lambda U_{I_B}^{I_B^*})_{B \in \mathcal{B}}$ forme une base de $\Lambda^3(V \oplus V^*)$, et soit $((\Lambda U_{I_B}^{I_B^*})^*)$ sa base duale. Alors les $(\Lambda U_{I_B}^{I_B^*})^*$ engendrent $\mathbb{C}[\Lambda^3(V \oplus V^*)]$ en tant qu'algèbre, et $\mathbb{C}[\Lambda^3(V \oplus V^*)]$ est une algèbre commutative graduée, avec une graduation compatible avec l'action de \mathbb{C}^* (le poids de $(\Lambda U_{I_B}^{I_B^*})^*$ est $|I_B| - |I_B^*|$). Alors d'après [Do] (3.4), $\mathbb{C}[\Lambda^3(V \oplus V^*)]^{\mathbb{C}^*}$ est de type fini (et même de Cohen-Macaulay d'après [HR] 4.1). On va montrer :

Proposition 3.4.2. d_0 est un isomorphisme.

Démonstration. On va montrer que $Y(0)$ est une compactification magnifique de $G \times G/G$, et on utilisera le fait que les compactifications magnifiques sont uniques à isomorphisme près. Rappelons que l'on a une inclusion $X \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^3(V \oplus V^*))$. Soit $G' = \mathrm{SL}_6$, et \mathfrak{g}' son algèbre de Lie. On va commencer par décomposer le G' -module $\Lambda^3(V \oplus V^*)$ en tant que

somme de $G \times G$ -modules irréductibles. Pour cela, on regarde les vecteurs de plus haut poids pour $G \times G$ dans $\Lambda^3(V \oplus V^*)$, qui sont les $\Lambda U_{1,2}^3$ (qui est de poids (ϖ_2, ϖ'_2) , et 1 pour l'action de \mathbb{C}^*), $\Lambda U_1^{2,3}$ (de poids (ϖ_1, ϖ'_1) , et -1 pour l'action de \mathbb{C}^*), et $\Lambda U_{1,2,3}$ et $\Lambda U^{1,2,3}$, qui sont tous deux de poids 0, et respectivement de poids 3 et -3 pour \mathbb{C}^* . Ainsi, en tant que $G \times G$ -module

$$\Lambda^3(V \oplus V^*) = V_{(\varpi_2, \varpi'_2)} \oplus V_{(\varpi_1, \varpi'_1)} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

Notons (x_i) une base de $V_{(\varpi_2, \varpi'_2)}^*$, (y_j) une base de $V_{(\varpi_1, \varpi'_1)}^*$, et respectivement z et t des vecteurs non nuls de $(0 \oplus 0 \oplus \mathbb{C} \oplus 0)^*$ et de $(0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \mathbb{C})^*$. Alors

$$\mathbb{C}[\Lambda^3(V \oplus V^*)]^{\mathbb{C}^*} = \mathbb{C}[x_i y_j, x_i x_j x_k t, y_i y_j y_k z, zt]$$

Soit

$$\underline{V} = (V_{(\varpi_2, \varpi'_2)} \otimes V_{(\varpi_1, \varpi'_1)}) \oplus (\text{Sym}^3(V_{(\varpi_2, \varpi'_2)}) \otimes \mathbb{C}) \oplus (\text{Sym}(V_{(\varpi_1, \varpi'_1)}^3) \otimes \mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})$$

On a alors un morphisme surjectif $\text{Sym}(\underline{V}) \rightarrow \mathbb{C}[\Lambda^3(V \oplus V^*)]^{\mathbb{C}^*}$, et des inclusions

$$G \rightarrow Y(0) \hookrightarrow \text{Proj}(\mathbb{C}[\Lambda^3(V \oplus V^*)]^{\mathbb{C}^*}) \hookrightarrow \mathbb{P}(\underline{V})$$

Comme \underline{V} a un poids spécial régulier (à savoir (ρ, ρ')), et comme les PGL_3 -invariants de $(\text{Sym}^3(V_{(\varpi_2, \varpi'_2)}) \otimes \mathbb{C}) \oplus (\text{Sym}(V_{(\varpi_1, \varpi'_1)}^3) \otimes \mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})$ sont de poids 0, d'après [DCP] (4.1), Y est isomorphe à l'adhérence dans G de $\mathbb{P}(\text{Sym}(\underline{V}))$, qui est $Y(0)$. \square

On aimerait maintenant comparer X et $X^{ss}(0)$. Un sous-espace $U \in X$ est semi-stable (pour le caractère trivial) si et seulement si $\dim(U \cap V) \leq \frac{3}{2}$ et $\dim(U \cap V^*) \leq \frac{3}{2}$. Alors $X \setminus X^{ss}(0)$ à deux composantes connexes

$$F_1 = \{U \in X, \dim(U \cap V) \geq 2\} \text{ et } F_2 = \{U \in X, \dim(U \cap V^*) \geq 2\}$$

Calculons leurs dimensions (par exemple, celle de F_1). Soit $U \in F_1$. Alors $\dim(U \cap V) = 2$ ou 3, et $\dim(U \cap V) = 3 \Leftrightarrow U = V$. Supposons $\dim(U \cap V) = 2$, et notons $W = U \cap V$. Alors U/W est un sous-espace de $V/W \oplus V^*$, de dimension 1 et d'intersection nulle avec V/W . Alors $\dim(F_1) = \dim(\text{Gr}_2(V)) + \dim(\text{Gr}_1(V/W \oplus V^*)) = 5$ (et c'est la même chose pour F_2), donc $\text{codim}(X \setminus X^{ss}(0)) = \dim(\text{PGL}_3) + 1 - \dim(F_1 \cup F_2) = 4 \geq 2$. Comme X est normale, pour tout ouvert U de X , $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(U \cap X^{ss}(0))$. Autrement dit, en notant $i : X^{ss}(0) \hookrightarrow X$ l'inclusion, on a $\mathcal{O}_X = i_* \mathcal{O}_{X^{ss}(0)}$.

Comme X est une grassmannienne, c'est une variété de drapeaux, donc on sait décrire l'algèbre D_X des opérateurs différentiels globaux sur X . Grâce à une comparaison entre $\mathcal{D}_X^{\mathbb{C}^*}(\pi_0^{-1}(\Omega))$ et $\mathcal{D}_{Y(0)}(\Omega)$ sur des ouverts Ω de $Y(0)$, on va montrer

Proposition 3.4.3. *\mathcal{D}_Y est de type fini.*

Démonstration. Soit Ω un ouvert affine de $Y(0)$. Alors $\pi_0^{-1}(\Omega)$ est un ouvert affine \mathbb{C}^* -invariant de $X^{ss}(0)$, et $\mathbb{C}[\Omega] = \mathbb{C}[\pi_0^{-1}(\Omega)]^{\mathbb{C}^*}$. Comme Ω est affine, on a

$$\mathcal{D}_X^m(\Omega) = \{D \in \text{End}(\mathbb{C}[\Omega]) \mid \forall a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[\Omega], [a_0, [\dots [a_m, D] \dots]] = 0\}$$

et

$$\mathcal{D}_X^m(\pi_0^{-1}(\Omega)) = \{D \in \text{End}(\mathbb{C}[\pi_0^{-1}(\Omega)]) \mid \forall a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}[\pi_0^{-1}(\Omega)], [a_0, [\dots [a_m, D] \dots]] = 0\}$$

La restriction d'un opérateur dans $\mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega))$ à $\mathbb{C}[\Omega]$ nous donne un morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega))^{\mathbb{C}^*} &\rightarrow \mathcal{D}_{Y(0)}(\Omega) \\ d &\mapsto d|_{\mathbb{C}[\Omega]} \end{aligned}$$

Soit $U \in X$, et pour $v \in \Lambda^3(V \oplus V^*)$ tel que $\iota(U) = [v]$, écrivons $v = w_{-3} \oplus w_{-1} \oplus w_1 \oplus w_3$ (où w_i désigne la partie de poids i de v). On a

$$X^{ss}(0) = \{U \in X \mid w_{-3} \text{ ou } w_{-1} \neq 0, w_3 \text{ ou } w_1 \neq 0\}$$

On montre le lemme :

Lemme 3.4.4. *Avec ces notations, w_1 et w_{-1} sont non nuls lorsque $U \in X^{ss}(0)$*

En effet, supposons que w_{-3} (resp. w_3) est non nul. Alors en reprenant les notations et le raisonnement de la preuve de la proposition 3.3.2, on a $J = \{1, 2, 3\}$ et $|I| \geq 2$ (resp. $I = \{1, 2, 3\}$ et $|J| \geq 2$), donc w_1 et w_{-1} sont non nuls. Ainsi pour tout $U \in X^{ss}(0)$, w_1 et w_{-1} sont non nuls.

Ainsi $t \in \mathbb{C}^*$ fixe U si et seulement si $t = t^{-1}$, ie. $\text{Stab}_{\mathbb{C}^*}(U) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On peut alors recouvrir $Y(0)$ par des ouverts affines Ω_i tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} \pi_0^{-1}(\Omega_i) & \simeq & \mathbb{C}^* \times \Omega_i \quad (t, x) \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ \Omega_i & \leftarrow & \mathbb{C}^* \times \Omega_i \quad (t^2, x) \\ x & \leftarrow & (t, x) \end{array}$$

On a alors des isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\pi_0^{-1}(\Omega_i)] &\simeq \mathbb{C}[\Omega_i] \otimes \mathbb{C}[t_i^{\pm 2}] \\ \mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega_i)) &\simeq \mathbb{C}[t_i^{\pm 2}, \partial_{t_i^2}] \otimes \mathcal{D}_{Y(0)}(\Omega_i) \\ \mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega_i))^{\mathbb{C}^*} &\simeq \mathbb{C}[t_i \partial_{t_i}] \otimes \mathcal{D}_{Y(0)}(\Omega_i) \end{aligned}$$

On peut relever les opérateurs différentiels sur Ω_i avec les morphismes suivants pour $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} r_n : \mathcal{D}_{Y(0)}(\Omega_i) &\rightarrow \mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega_i))^{\mathbb{C}^*} \\ d &\mapsto \tilde{d} := d \otimes (t_i \partial_{t_i})^n \end{aligned}$$

Grâce à ces morphismes, on peut décomposer $\mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega_i))^{\mathbb{C}^*}$ en

$$\mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega_i))^{\mathbb{C}^*} = \bigoplus_{n \geq 0} D_n(\Omega_i)$$

où

$$\begin{aligned} D_0(\Omega_i) &:= \{d \in \mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega_i))^{\mathbb{C}^*} \mid d.t_i^2 = 0\} \simeq \mathcal{D}_{Y(0)}(\Omega_i) \otimes 1 \\ D_n(\Omega_i) &:= \{d = 0 \text{ ou } d \in \mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega_i))^{\mathbb{C}^*} \mid \frac{d.t_i^4}{d.t_i^2} = 2^n t_i^2\} \simeq \mathcal{D}_{Y(0)}(\Omega_i) \otimes (t_i \partial_{t_i})^n \text{ pour } n > 0 \end{aligned}$$

Les relèvements r_n se recollent bien, car si $d \in \mathcal{D}_{Y(0)}(\Omega_i \cup \Omega_j)$, alors $r_n(d|_{\Omega_i})$ et $r_n(d|_{\Omega_j})$ coïncident sur les fonctions régulières \mathbb{C}^* -invariantes sur $\pi_0^{-1}(\Omega_i \cap \Omega_j)$, et quitte à remplacer t_j par $t'_j = \pm t_j^{-1}$ pour que t_i et t_j coïncident sur $\Omega_i \cap \Omega_j$, on a $\partial_{t_i} t_i = \pm \partial_{t_j} t_j$. Ainsi pour tout ouvert Ω de $Y(0)$, on peut prolonger $t_i \partial_{t_i}$ en un $t \partial_t$ sur Ω et on a des relèvements $r_n : \mathcal{D}_{Y(0)}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega))^{\mathbb{C}^*}$. De même, on a $D_n(\Omega_i) \cap D_n(\Omega_j) = D_n(\Omega_i \cup \Omega_j)$, ce qui nous permet de décomposer $\mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega))^{\mathbb{C}^*}$ en

$$\mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega))^{\mathbb{C}^*} = \bigoplus_{n \geq 0} D_n(\Omega)$$

où les $D_n(\Omega)$ sont isomorphes à $\mathcal{D}_{Y(0)}(\Omega) \otimes (t \partial_t)^n$. On a alors pour tout ouvert $\Omega \in Y(0)$ un isomorphisme

$$\mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega))^{\mathbb{C}^*} \simeq \mathbb{C}[t \partial_t] \otimes \mathcal{D}_{Y(0)}(\Omega)$$

En particulier, on a $\mathcal{D}_X(X^{ss}(0))^{\mathbb{C}^*} \simeq D_{Y(0)} \otimes \mathbb{C}[t\partial_t] = D_Y \otimes \mathbb{C}[t\partial_t]$. De plus, pour tout ouvert $\Omega \in X$, comme $\mathcal{D}_X^0(\Omega) = \mathcal{O}_X(\Omega)$, la définition des $\mathcal{D}_X^m(\Omega)$ donne par récurrence que $\mathcal{D}_X^m(\Omega) = \mathcal{D}(X^{ss}(0) \cap \Omega)$ pour $m \geq 0$, donc que $D_X = \mathcal{D}_X(X^{ss}(0))$.

Soit $G' = \mathrm{SL}_6$, et \mathfrak{g}' son algèbre de Lie. X étant une variété de drapeaux pour G' , on sait décrire l'algèbre de ses opérateurs différentiels globaux sur X . Comme D_X est un $S(\mathfrak{g}')$ -module de type fini, donc une \mathbb{C} -algèbre de type fini, $\mathrm{gr}(D_X)$ est une \mathbb{C} -algèbre commutative de type fini (on peut prendre comme générateurs les composantes homogènes d'une famille finie de générateurs de D_X), donc il en est de même pour $\mathrm{gr}(D_X)^{\mathbb{C}^*}$. On remarque que \mathbb{C}^* laisse stable D_X^m , donc il existe un supplémentaire \mathbb{C}^* -stable de D_X^{m-1} dans D_X^m , que nous notons E^m . Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}(D_X^{\mathbb{C}^*}) &= \bigoplus_{m \geq 0} ((D_X^m)^{\mathbb{C}^*} / (D_X^{m-1})^{\mathbb{C}^*}) \\ &\simeq \bigoplus_{m \geq 0} (E^m)^{\mathbb{C}^*} \\ &\simeq \left(\bigoplus_{m \geq 0} E^m \right)^{\mathbb{C}^*} \\ &\simeq \left(\bigoplus_{m \geq 0} D_X^m / D_X^{m-1} \right)^{\mathbb{C}^*} \\ &\simeq (\mathrm{gr}(D_X))^{\mathbb{C}^*} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{gr}(D_X^{\mathbb{C}^*})$ est de type fini, donc $D_X^{\mathbb{C}^*} \simeq D_{Y(0)} \otimes \mathbb{C}[t\partial_t]$ est de type fini, et comme le morphisme $D_X^{\mathbb{C}^*} \rightarrow D_Y$ est surjectif, D_Y est de type fini. \square

On va maintenant s'intéresser à la structure de $\mathcal{D}_{X,\mathcal{L}}$ -module de $H^0(X,\mathcal{L})$ pour un faisceau inversible \mathcal{L} sur Y . On peut associer de manière unique à \mathcal{L} un diviseur de Cartier (f_i) , où les f_i sont des fonctions rationnelles sur $Y(0)$, que l'on peut identifier à des fonction \tilde{f}_i rationnelles sur $X^{ss}(0)$ (que l'on peut donc prolonger de manière unique sur X pour que les $\frac{\tilde{f}_i}{f_j}$ soient régulières sur les bons ouverts) \mathbb{C}^* -invariantes. Alors en notant $\overline{\mathcal{L}}$ le faisceau inversible sur $X^{ss}(0)$ associé au diviseur de Cartier (\tilde{f}_i) , on a pour tout ouvert Ω de $Y(0)$

$$\mathcal{L}(\Omega) \simeq \overline{\mathcal{L}}(\pi_0^{-1}(\Omega))^{\mathbb{C}^*}$$

et comme $\mathrm{codim}(X \setminus X^{ss}(0)) \geq 2$, les faisceaux inversibles sur $X^{ss}(0)$ sont exactement les restrictions à $X^{ss}(0)$ des faisceaux inversibles sur X . En terme de diviseurs de Weil, si $\mathcal{L} = \mathcal{O}_Y(d)$, alors en notant $D = \overline{\pi_0^{-1}(d)}$, on a $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{O}_X(D)$.

Soient $T' \subset B' \subset P' \subset G'$ respectivement le tore maximal des matrices diagonales, le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures et le sous-groupe parabolique des matrices ayant un bloc 3×3 de 0 en bas à gauche. Notons $\Delta' = \{\beta_1, \dots, \beta_5\}$ les racines simples associées à ce choix de T' et B' , et ϖ_i les poids fondamentaux associés. Alors P' est le sous groupe parabolique maximal associé à la racine simple β_3 , et les faisceaux inversibles sur X sont alors isomorphes à un certain $\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Sur la grosse cellule U de G'/P' , $\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}(U) = \mathcal{O}_X(U) \cdot f_{k\varpi_3}$ où $f_{k\varpi_3}$ vérifie $f_{k\varpi_3}(np) = \varpi_3(p)^k$ pour $n \in (P')^u$ et $p \in P'$. Comme $\varpi_3 = \frac{1}{2}\beta_1 + \beta_2 + \frac{3}{2}\beta_3 + \beta_4 + \frac{1}{2}\beta_5$, et comme \mathbb{C}^* agit avec le sous-groupe à un paramètre $\tau = 2\varpi_3^\vee$, $f_{k\varpi_3}$ est de poids $3k$ pour l'action de \mathbb{C}^* , donc si U est un ouvert de trivialisations de $\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}$ \mathbb{C}^* -invariant et $\sigma_{k\varpi_3}$ est une section trivialisante, alors comme X est irréductible, $\sigma_{k\varpi_3}$ est aussi de poids $3k$, et on a

$$\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}(U)^{\mathbb{C}^*} = \mathcal{O}_X(U)_{-3k \cdot \sigma_{k\varpi_3}}$$

où $\mathcal{O}_X(U)_i$ désigne la partie de poids i de $\mathcal{O}_X(U)$ pour l'action de \mathbb{C}^* . Remarquons que comme $\mathbb{C}[\pi_0^{-1}(\Omega)] \simeq \mathbb{C}[\Omega] \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 2}]$ pour tout ouvert affine $\Omega \subset Y(0)$, si $(\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n \neq 0$, alors tous les $(\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_m$ sont nuls pour m et n de parité différente.

$\text{Pic}(Y)$ est engendré par les $\mathcal{O}_Y(d_1)$ et $\mathcal{O}_Y(d_2)$, où les d_i sont les couleurs de Y . Alors en notant D_i l'adhérence de $\pi_0^{-1}(d_i)$ dans X , pour tout ouvert Ω de $Y(0)$, on a

$$\mathcal{O}_Y(d_i)(\Omega) \simeq \mathcal{O}_X(D_i)(\pi_0^{-1}(\Omega))^{\mathbb{C}^*}$$

Comme $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$, il existe $k_i \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{O}_X(D_i) \simeq \overline{\mathcal{L}}_{k_i\varpi_3}$. Dans G , la $B \times B^-$ -orbite ouverte est donnée par les équations

$$M_3(g) = g_{3,3} \neq 0 \text{ et } M_{23}(g) = \begin{vmatrix} g_{2,2} & g_{2,3} \\ g_{3,2} & g_{3,3} \end{vmatrix} \neq 0$$

Quitte à renuméroter les d_i , sur $\pi_0^{-1}(G)$, D_1 (resp. D_2) est défini par

$$F_1 := \frac{(\Lambda U_{1,2}^3)^*}{(\Lambda U_{1,2,3})^*} = 0 \text{ (resp. } F_2 := \frac{(\Lambda U_1^{2,3})^*}{(\Lambda U_{1,2,3})^*} = 0)$$

qui sont respectivement de poids -2 et -4 pour l'action de \mathbb{C}^* . A renumérotation près, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(D_1)(\pi_0^{-1}(G)) &= \mathcal{O}_X(\pi_0^{-1}(G)) \cdot \frac{1}{F_1} \\ \mathcal{O}_X(D_2)(\pi_0^{-1}(G)) &= \mathcal{O}_X(\pi_0^{-1}(G)) \cdot \frac{1}{F_2} \end{aligned}$$

Soit U_i un ouvert de trivialisations de $\overline{\mathcal{L}}_{k_i\varpi_3}$ d'intersection non vide avec D_i , et soit $\Omega_i = U_i \cap \pi_0^{-1}(G)$. Alors les \mathbb{C}^* -invariants sont

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(D_i)(\Omega_i)^{\mathbb{C}^*} &= \mathcal{O}_X(\omega_i)_{-2^i} \cdot \frac{1}{F_i} \\ &= \overline{\mathcal{L}}_{k_i\varpi_3}(\Omega_i)_{3k_i-2^i} \cdot \frac{1}{F_i\sigma_{k_i\varpi_3}} \end{aligned}$$

et comme le poids des sections trivialisantes ne dépend pas de l'ouvert de trivialisations choisi, on obtient que pour tout ouvert \mathbb{C}^* -invariant $U \subset X$

$$\mathcal{O}_X(D_i)(U)^{\mathbb{C}^*} \simeq \overline{\mathcal{L}}_{k_i\varpi_3}(\Omega_i)_{3k_i-2^i}$$

Ainsi pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur Y , il existe $k, n \in \mathbb{Z}$ tel que sur tout ouvert U de $Y(0)$, on a $\mathcal{L}(U) \simeq \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}(\pi_0^{-1}(U))_n$. On peut alors montrer :

Proposition 3.4.5. *Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur Y . Alors $H^0(Y, \mathcal{L})$ est soit nul, soit un $D_{Y, \mathcal{L}}$ -module simple à gauche.*

Démonstration. Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur Y . Il existe alors $k, n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\mathcal{L} \simeq (\pi_0)_*(\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n$$

En particulier, on a $H^0(Y, \mathcal{L}) \simeq H^0(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n$. Rappelons que pour tout ouvert affine U dans $Y(0)$, $\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}(\pi_0^{-1}(U)) \simeq \mathcal{L}_{k\varpi_3}(U) \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 2}]$. Soit $M(k\varpi_3)$ le module de Verma de plus haut poids $k\varpi_3$, et $L(k\varpi_3)$ son quotient irréductible. Notons $M_{P'}(2\rho'_{P'} - 2\rho + k\varpi_3)$ le module de Verma généralisé de plus haut poids $2\rho'_{P'} - 2\rho + k\varpi_3$, et $I_{P'}(2\rho_P - 2\rho + k\varpi_3) \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ son idéal annulateur. Alors $H^0(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) \simeq L(k\varpi_3)^*$, et comme c'est un D_X -module, simple comme $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')$ -module, il est aussi simple comme D_X -module (puisque D_X est isomorphe à $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}')/I_{P'}(2\rho'_{P'} - 2\rho + k\varpi_3)$). L'action de \mathbb{C}^* induit des graduations

$$\begin{aligned} H^0(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n \\ D_{X, k\varpi_3} &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (D_{X, k\varpi_3})_n \end{aligned}$$

et l'action de D_X est compatible avec la graduation, ie.

$$(D_{X,k\varpi_3})_m \cdot H^0(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n \subset H^0(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_{m+n}$$

Soit S un sous- $D_{X,k\varpi_3}^{\mathbb{C}^*}$ -module strict de $H^0(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n$. Alors $D_{X,k\varpi_3} \cdot S$ est un sous-module strict de $H^0(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n$ (puisque sa partie de degré n est exactement S), donc $S = 0$. Ainsi $H^0(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n$ est un $D_{X,k\varpi_3}^{\mathbb{C}^*}$ -module simple.

Comparons maintenant les structures de $D_{X,k\varpi_3}^{\mathbb{C}^*}$ -module et de D_Y -module sur $H^0(Y, \mathcal{L}) \simeq H^0(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n$. Soit $\Omega \subset Y(0)$ un ouvert affine. On décompose $\mathcal{D}_{X,k\varpi_3}(\pi_0^{-1}(\Omega))^{\mathbb{C}^*}$ en

$$\mathcal{D}_{X,k\varpi_3}(\pi_0^{-1}(\Omega))^{\mathbb{C}^*} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}(\pi_0^{-1}(\Omega))_{n+2p} \otimes \mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega))_{2q} \otimes \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}^{\otimes -1}(\pi_0^{-1}(\Omega))_{-n-2p-2q}$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\pi_0^{-1}(\Omega_i)] &\simeq \mathbb{C}[\Omega_i] \otimes \mathbb{C}[t_i^{\pm 2}] \\ \mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega_i)) &\simeq \mathbb{C}[t_i^{\pm 2}, \partial_{t_i^2}] \otimes \mathcal{D}_{Y(0)}(\Omega_i) \end{aligned}$$

Une section de

$$((\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_{n+2p} \otimes (\mathcal{D}_X)_{2q} \otimes (\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}^{\otimes -1})_{-n-2p-2q})(\pi_0^{-1}(\Omega))$$

est une combinaison linéaire de sections de la forme

$$s = t^{2p} \sigma \otimes t^{2q} \partial(t^2 \partial_{t^2})^k \otimes t^{-2(p+q)} \tau$$

où $\sigma \in \overline{\mathcal{L}}(\pi_0^{-1}(\Omega))_{k\varpi_3}_n$, $\partial \in \otimes \mathcal{D}_Y(\Omega)$ et $\tau \in \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}^{\otimes -1}(\pi_0^{-1}(\Omega))_{-n}$, et $k \geq 0$. La section s agit sur $\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}(\pi_0^{-1}(\Omega))_n$ comme $c(p, q, k, n) \cdot \sigma \otimes \partial \otimes \tau$, où $c(p, q, k, n)$ est un scalaire. Comme X est irréductible, ces scalaires $c(p, q, k, n)$ ne dépendent pas de l'ouvert Ω , et si d_1 et d_2 sont deux sections de $((\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n \otimes \mathcal{D}_Y \otimes (\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}^{\otimes -1})_{-n})(\pi_0^{-1}(\Omega))$ agissant de la même manière sur $\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}(\pi_0^{-1}(\Omega))_n$, alors $d_1 = d_2$, puisque ce sont des endomorphismes de $\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}(\pi_0^{-1}(\Omega))_n$. Donc si $d \in D_{X,k\varpi_3}^{\mathbb{C}^*}$, il agit sur $H^0(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n$ comme un certain $c \cdot d'$, où c est un scalaire et $d' \in H^0(X, (\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n \otimes \mathcal{D}_Y \otimes (\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}^{\otimes -1})_{-n})$, donc $H^0(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n$ est un $H^0(X, (\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n \otimes \mathcal{D}_Y \otimes (\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}^{\otimes -1})_{-n})$ -module simple. Comme

$$\begin{aligned} H^0(X, (\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n \otimes \mathcal{D}_Y \otimes (\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}^{\otimes -1})_{-n}) &= H^0(X^{ss}(0), (\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n \otimes \mathcal{D}_Y \otimes (\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}^{\otimes -1})_{-n}) \\ &= D_{Y, \mathcal{L}} \end{aligned}$$

Ainsi $H^0(Y, \mathcal{L})$ est un D_Y -module simple à gauche. \square

3.4.2 Cas de $\overline{\text{PGL}}_3/\overline{\text{PSO}}_3$

On garde les mêmes G, B, T, Φ et V de la section précédente, (e_1, e_2, e_3) la base canonique de V et (e_1^*, e_2^*, e_3^*) sa base duale. On garde aussi l'action de \mathbb{C}^* sur $V \oplus V^*$ par les poids 1 sur V et -1 sur V^* . Soit $\theta : g \mapsto {}^t(g^{-1})$, et $H = G^\theta$. Notons ω la forme bilinéaire anti-symétrique sur $V \oplus V^*$ donnée dans sa base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{pmatrix}$$

ie.

$$\omega(v_1 \oplus v_1^*, v_2 \oplus v_2^*) = v_2^*(v_1) - v_1^*(v_2)$$

et notons maintenant $X = \text{LaGr}_3(V \oplus V^*)$, $Y = \overline{G/H}$ et $Y(0) = X^{ss}(0)//\mathbb{C}^*$. On a toujours un morphisme dominant G -équivariant $d_0 : Y \rightarrow Y(0)$, que nous allons décrire.

Si $M \in \text{GL}_3$, on peut lui associer une forme bilinéaire symétrique non dégénérée

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_M : (v, w) \mapsto {}^t v {}^t M M w$$

sur $V \times V$. On peut alors associer à M le « graphe » de la forme bilinéaire associée à M défini par

$$B_M := \{(v \oplus \langle v, \cdot \rangle_M), v \in V\} = \{(M^{-1}v \oplus [w \mapsto {}^t v M w]), v \in V\}$$

Remarquons que si $O \in \text{SO}_3$, alors $B_M = B_{OM}$. De plus, B_M est un sous-espace vectoriel de $V \oplus V^*$ de dimension 3, d'intersection nulle avec V et V^* , et B_M est lagrangien puisque

$$\omega((v \oplus \langle v, \cdot \rangle_M), (w \oplus \langle w, \cdot \rangle_M)) = \langle w, v \rangle_M - \langle v, w \rangle_M = 0$$

On a donc un morphisme

$$\begin{aligned} B : \text{GL}_3/\text{SO}_3 &\rightarrow X \\ M \cdot \text{SO}_3 &\mapsto B_M \end{aligned}$$

En particulier, $B_M \in X^{ss}(0)$. Tout comme dans le cas de $\overline{\text{PGL}}_3$, ce morphisme induit un morphisme

$$\begin{aligned} G/H &\rightarrow Y(0) \\ [M] &\mapsto \{B_{x^{-1}M}, x \in \mathbb{C}^*\} \end{aligned}$$

puisque pour $x \in \mathbb{C}^*$, on a

$$x \cdot B_M = \{(xv \oplus x^{-1}\langle v, \cdot \rangle_M), v \in V\} = \{(v \oplus \langle v, \cdot \rangle_{x^{-1}M}), v \in V\} = B_{x^{-1}M}$$

et puisque le quotient $X^{ss}(0) \rightarrow Y(0)$ est géométrique, les points de $Y(0)$ sont exactement les \mathbb{C}^* -orbites de $X^{ss}(0)$.

Soit $[t] = [\text{diag}(\frac{a}{b}, 1, \frac{c}{b})] \in T$. Notons comme précédemment $P = \mathbb{P}(\Lambda^3(V \oplus V^*))$, $P(0) = \text{Proj}(\mathbb{C}[\Lambda^3(V \oplus V^*)]^{\mathbb{C}^*})$ et $\iota : Y(0) \hookrightarrow P(0)$ l'inclusion. Remarquons que $Y(0)$ est encore un fermé de $P(0)$. Notons également $t_1 = \frac{a}{b}$ et $t_2 = \frac{b}{c}$. On a

$$\begin{aligned} \iota(\pi([t])) &= \{[(xe_1 \oplus x^{-1}\frac{a^2}{b^2}e_1^*) \wedge (xe_2 \oplus x^{-1}e_2^*) \wedge (xe_3 \oplus x^{-1}\frac{c^2}{b^2}e_3^*)], x \in \mathbb{C}^*\} \\ &= \{[(xe_1 \oplus x^{-1}t_1^2e_1^*) \wedge (xe_2 \oplus x^{-1}e_2^*) \wedge (t_2xe_3 \oplus x^{-1}e_3^*)], x \in \mathbb{C}^*\} \end{aligned}$$

On obtient

Proposition 3.4.6. d_0 est un isomorphisme

Démonstration. La preuve est similaire au cas précédent : on décompose $\Lambda^3(V \oplus V^*)$ en somme de représentations de PGL_3

$$\Lambda^3(V \oplus V^*) = V_{2\varpi_2} \oplus V_{2\varpi_1} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

puis on utilise le même raisonnement. □

On a toujours $X \setminus X^{ss}(0) = F_1 \cup F_2$ avec

$$F_1 = \{U \in X, \dim(U \cap V) \geq 2\} \text{ et } F_2 = \{U \in X, \dim(U \cap V^*) \geq 2\}$$

On a $\dim(F_1) = \dim(F_2) = 3$ (puisque si U est lagrangien et $\dim(U \cap V) = 2$, alors $U/(U \cap V) \in \text{LaGr}_1(\frac{V}{U \cap V} \oplus (\frac{V}{U \cap V})^*)$) et $\dim X = 6$. Comme X est normale, on a toujours $\mathcal{O}_X = i_*\mathcal{O}_{X^{ss}(0)}$ (où $i : X^{ss}(0) \hookrightarrow X$ est l'inclusion). De la même manière, on montre que

Proposition 3.4.7. D_Y est de type fini

Démonstration. La preuve est identique à celle du cas précédent, en remplaçant $G' = \mathrm{SL}_6$ par $G' = \mathrm{Sp}_6$ ($\mathrm{LaGr}(V \oplus V^*)$ est une variété de drapeaux pour Sp_6). \square

Si \mathcal{L} est un faisceau inversible sur $Y(0)$, il existe toujours un faisceau inversible $\overline{\mathcal{L}}$ sur $X^{ss}(0)$ tel que $\mathcal{L}(\Omega) \simeq \overline{\mathcal{L}}(\pi_0^{-1}(\Omega))^{\mathbb{C}^*}$ sur tout ouvert $\Omega \subset Y(0)$. Soient $T' \subset B' \subset P' \subset G'$ respectivement un tore maximal de G' , un sous-groupe de Borel de G' et un sous-groupe parabolique de telle sorte que $G'/P' \simeq X$. Notons $\Delta' = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ les racines simples associées à ce choix de T' et B' , et ϖ_i les poids fondamentaux associés. Alors P' est le sous groupe parabolique maximal associé à la racine simple β_3 , et les faisceaux inversibles sur X sont alors isomorphes à un certain $\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme $\varpi_3 = \beta_1 + 2\beta_2 + \frac{3}{2}\beta_3$, et comme \mathbb{C}^* agit avec le sous-groupe à un paramètre $\tau = 2\varpi_3^\vee$, $f_{k\varpi_3}$ est de poids $6k$ pour l'action de \mathbb{C}^* , donc si U est un ouvert de trivialisations de $\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}$ \mathbb{C}^* -invariant et $\sigma_{k\varpi_3}$ est une section trivialisante, alors on a

$$\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}(U)^{\mathbb{C}^*} = \mathcal{O}_X(U)_{-6k \cdot \sigma_{k\varpi_3}}$$

$\mathrm{Pic}(Y)$ est encore engendré par les $\mathcal{O}_Y(d_1)$ et $\mathcal{O}_Y(d_2)$, où les d_i sont les couleurs de Y . Il existe $k_i \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout ouvert Ω de $Y(0)$, on ait, en notant $D_i = {}^o \mathrm{verline} \pi_0^{-1}(d_i)$,

$$\mathcal{O}_Y(d_i)(\Omega) \simeq \mathcal{O}_X(D_i)(\pi_0^{-1}(\Omega))^{\mathbb{C}^*}$$

et $\mathcal{O}_X(D_i) \simeq \overline{\mathcal{L}}_{k_i\varpi_3}$. Dans G/H , la B -orbite ouverte est donnée par les équations

$$M_1({}^t gg) = ({}^t gg)_{1,1} \neq 0 \text{ et } M_{12}({}^t gg) = \begin{vmatrix} ({}^t gg)_{1,1} & ({}^t gg)_{1,2} \\ ({}^t gg)_{2,1} & ({}^t gg)_{2,2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Quitte à renuméroter les d_i , sur $\pi_0^{-1}(G)$, D_1 (resp. D_2) est défini par

$$F_1 := \frac{(\Lambda U_{2,3}^1)^*}{(\Lambda U_{1,2,3})^*} \neq 0 \text{ (resp. } F_2 := \frac{(\Lambda U_3^{1,2})^*}{(\Lambda U_{1,2,3})^*} \neq 0)$$

qui sont respectivement de poids -2 et -4 pour l'action de \mathbb{C}^* . On a alors pour tout ouvert \mathbb{C}^* -invariant $U \subset X$

$$\mathcal{O}_X(D_i)(U)^{\mathbb{C}^*} \simeq \overline{\mathcal{L}}_{k_i\varpi_3}(\Omega_i)_{6k_i - 2i}$$

Ainsi pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur \tilde{X} , il existe $k, n \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout ouvert \mathbb{C}^* -invariant Ω de $Y(0)$, $\mathcal{L}(\Omega) \simeq \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}(\pi_0^{-1}(\Omega))_n$. La même preuve que précédemment donne alors :

Proposition 3.4.8. Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur Y . Alors $H^0(Y, \mathcal{L})$ est soit nul, soit un $D_{Y, \mathcal{L}}$ -module simple à gauche.

3.4.3 Cas de $\overline{\mathrm{PGL}_6/\mathrm{PSP}_6}$

Considérons maintenant $G = \mathrm{PGL}_6$, $J = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{pmatrix}$ et $\theta : g \in G \mapsto -J^t(g^{-1})J$, et soit $H = G^\theta$. Notons T le tore maximal des matrices diagonales. Ce cas est un peu plus délicat à traiter, puisque le sous-groupe de Borel \tilde{B} des matrices triangulaires supérieures n'est

pas le bon à considérer, puisque pour ce choix, les racines positives non θ -stables ne sont pas toutes envoyées sur des racines positives. Considérons plutôt

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} p & b & n & 0 & g & k \\ 0 & q & l & 0 & c & h \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ a & f & o & s & j & m \\ 0 & 0 & i & 0 & t & d \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 & u \end{pmatrix}, a, \dots, o \in \mathbb{C}, p, \dots, u \in \mathbb{C}^* \right\}$$

C'est bien un sous-groupe de Borel, puisque si on note $s_i = s_{\alpha_i}$ dans W , c'est le conjugué de B par $w = s_3 s_4 s_5 s_2 s_1$. Notons β_1, \dots, β_5 les racines simples associées au choix de B , et $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ celles associées au choix de \tilde{B} . Alors quitte à renuméroter les β_i , on a

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \\ \beta_2 &= \alpha_1 \\ \beta_3 &= \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \beta_4 &= \alpha_5 \\ \beta_5 &= -\alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 \end{aligned}$$

Soit $V = \mathbb{C}^6$, (e_1, \dots, e_6) sa base canonique, et (e_1^*, \dots, e_6^*) la base duale. Considérons l'action de \mathbb{C}^* sur $V \oplus V^*$ par $t \cdot (v \oplus v^*) = tv \oplus t^{-1}v^*$. Soit b la forme bilinéaire symétrique sur $V \oplus V^*$ donnée par

$$b(v_1 \oplus v_1^*, v_2 \oplus v_2^*) = v_2^*(v_1) + v_1^*(v_2)$$

Soit $X = \text{OGr}^+(V \oplus V^*)$, $Y = \overline{G/H}$, et $\pi_0 : X^{ss}(0) \rightarrow Y(0)$ le quotient par l'action de \mathbb{C}^* . On a toujours un morphisme dominant G -équivariant $d_0 : Y \rightarrow Y(0)$.

Si $M \in \text{GL}_6$, on peut lui associer une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_M : (v, w) \mapsto {}^t v^t M J M w$$

Alors comme dans le cas précédent, on associe à M le « graphe » de $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ défini par

$$A_M := \{(v \oplus \langle v, \cdot \rangle_M), v \in V\} = \{(M^{-1}v \oplus [w \mapsto {}^t v J M w]), v \in V\}$$

Cette fois ci, on a $B_M = B_{OM}$ lorsque $O \in \text{Sp}_6$, A_M est un sous-espace vectoriel de $V \oplus V^*$ de dimension 6, d'intersection nulle avec V et V^* , et cette fois ci, A_M est totalement isotrope puisque

$$b((v \oplus \langle v, \cdot \rangle_M), (w \oplus \langle w, \cdot \rangle_M)) = \langle w, v \rangle_M + \langle v, w \rangle_M = 0$$

Remarquons que comme $V \cap A_M = 0$, A_M est bien dans X . De plus, si $x \in \mathbb{C}^*$, on a

$$x.A_M = \{xv \oplus x^{-1}\langle v, \cdot \rangle_M, v \in V\} = A_{x^{-1}M}$$

Le quotient $X^{ss}(0) \rightarrow Y(0)$ étant encore géométrique, on obtient un morphisme

$$\begin{aligned} G/H &\rightarrow Y(0) \\ [M] &\mapsto \{A_{x^{-1}M}, x \in \mathbb{C}^*\} \end{aligned}$$

Pour regarder l'image de T dans $Y(0)$, il suffit de regarder l'image de $T_1 = \{t \in T, \theta(t) = t^{-1}\}$, et $t = [\text{diag}(a, b, c, d, e, f)]$ est dans T_1 si et seulement si $a = d, b = e$ et $c = f$. Regardons donc l'image de $t = [\text{diag}(a, b, c, a, b, c)] = [\text{diag}(t_1, 1, t_2^{-1}, t_1, 1, t_2^{-1})]$. Notons $P = \mathbb{P}(\Lambda^6(V \oplus V^*))$,

$P(0) = \text{Proj}(\mathbb{C}[\Lambda^6(V \oplus V^*)]^{\mathbb{C}^*})$ et $\iota : Y(0) \hookrightarrow P(0)$ l'inclusion. $Y(0)$ est encore un fermé de $P(0)$. On a

$$\begin{aligned} \iota(\pi([t])) &= \{[(xe_1 \oplus -x^{-1}t_1^2e_4^*) \wedge (xe_2 \oplus -x^{-1}e_5^*) \wedge (t_2^2xe_3 \oplus -x^{-1}e_6^*) \\ &= \wedge (xe_4 \oplus x^{-1}t_1^2e_1^*) \wedge (xe_5 \oplus x^{-1}e_2^*) \wedge (t_2^2xe_6 \oplus x^{-1}e_3^*)], x \in \mathbb{C}^*\} \end{aligned}$$

Fixons un ordre $<$ tel que $e_1 < \dots < e_6 < e_1^* < \dots < e_6^*$, et notons comme précédemment pour toute sous-famille de six vecteurs $B = (b_1 < \dots < b_6)$ de la base canonique de $V \oplus V^*$, $I_B = \{1 \leq i \leq 6 \mid \exists j, b_j = e_i\}$ et $I_B^* = \{1 \leq i \leq 6 \mid \exists j, b_j = e_i^*\}$, et notons $\Lambda U_{I_B}^{I_B^*} = b_1 \wedge \dots \wedge b_6$. La famille $(\Lambda U_{I_B}^{I_B^*})$ forme une base de $\Lambda^3(V \oplus V^*)$, et soit $((\Lambda U_{I_B}^{I_B^*})^*)$ sa base duale. On obtient

Proposition 3.4.9. *d_0 est un isomorphisme*

Démonstration. On a deux inclusions $X \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^6(V \oplus V^*))$ et $X \hookrightarrow \mathbb{P}(W)$, où W est la représentation fondamentale de $G' = \text{SO}_{12}$ de plus haut poids ϖ_6 . Le morphisme injectif G' -équivariant $G' \rightarrow \text{SL}_{12}$ nous donne un morphisme injectif de G -modules $W \rightarrow \Lambda^6(V \oplus V^*)$, dont l'image est engendrée par ΛU_{123456} , ΛU^{123456} , et par les $\Lambda U_{I_c}^I$ et les $\Lambda U_I^{I_c}$, où I parcourt les sous-ensembles de deux éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et ce morphisme préserve l'action de \mathbb{C}^* . Ainsi on décompose W en somme de G -modules

$$W = V_{\varpi_4} \oplus V_{\varpi_2} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

où \mathbb{C}^* agit respectivement sur chacun des termes avec les poids 2, -2, 6 et -6. Le restant de la preuve est similaire. \square

On a $X^{ss}(0) = \{U \in X, \dim(U \cap V) \leq 3, \dim(U \cap V^*) \leq 3\}$, et $X \setminus X^{ss}(0) = F_1 \cup F_2$ où

$$F_1 = \{U \in X, \dim(U \cap V) \geq 4\} \text{ et } F_2 = \{U \in X, \dim(U \cap V^*) \geq 4\}$$

On a $\dim(F_1) = \dim(F_2) = 9$, puisque si U est un sous-espace orthogonal de $V \oplus V^*$ tel que $\dim(U \cap V) = 4$, alors $U/(U \cap V) \in \text{OGr}^+(\frac{V}{U \cap V} \oplus (\frac{V}{U \cap V})^*)$ qui est de dimension 1, et $\dim(\text{Gr}_4(V)) = 8$, et on a $\dim X = 15$. Comme X est normale, on a toujours $\mathcal{O}_X = i_* \mathcal{O}_{X^{ss}(0)}$ (où $i : X^{ss}(0) \hookrightarrow X$ est l'inclusion). De la même manière, on montre que

Proposition 3.4.10. *D_Y est de type fini*

Démonstration. Soit $U \in X$, et pour $v \in \Lambda^6(V \oplus V^*)$ tel que $\iota(U) = [v]$, écrivons $v = w_{-6} \oplus w_{-4} \oplus w_{-2} \oplus w_0 \oplus w_2 \oplus w_4 \oplus w_6$ (où w_i désigne la partie de poids i de v). On a

$$X^{ss}(0) = \{U \in X \mid w_{-6} \text{ ou } w_{-4} \text{ ou } w_{-2} \text{ ou } w_0 \neq 0, w_6 \text{ ou } w_4 \text{ ou } w_2 \text{ ou } w_0 \neq 0\}$$

On va montrer une variante du lemme 3.4.4

Lemme 3.4.11. *Avec ces notations, w_2 et w_{-2} sont non nuls lorsque $U \in X^{ss}(0)$*

En effet, supposons que w_4 ou w_6 est non nul. Alors on a $|J| \geq 5$ et $|I| \geq 3$, donc w_2 est non nul. De même, si w_{-4} ou w_{-6} est non nul, alors $|I| \geq 5$ et $|J| \geq 3$, donc w_2 est non nul. Il suffit alors de remarquer que $X^{ss}(0) = X^s(0)$, ce qui nous donne

$$X^{ss}(0) = \{U \in X \mid w_{-6} \text{ ou } w_{-4} \text{ ou } w_{-2} \neq 0, w_6 \text{ ou } w_4 \text{ ou } w_2 \neq 0\}$$

Ainsi pour tout $U \in X^{ss}(0)$, w_2 et w_{-2} sont non nuls.

Le restant de la preuve est identique en remplaçant les t_i^2 par t_i^4 (et on a $t_i^4 \partial_{t_i^4} = \frac{1}{4} t_i \partial_{t_i}$), 2^n par 4^n , et SL_6 par $G' = \text{SO}_{12}$ \square

Si \mathcal{L} est un faisceau inversible sur $Y(0)$, il existe encore un faisceau inversible $\overline{\mathcal{L}}$ sur $X^{ss}(0)$ tel que $\mathcal{L}(\Omega) \simeq \overline{\mathcal{L}}(\pi_0(\Omega))^{\mathbb{C}^*}$ sur tout ouvert $\Omega \subset Y(0)$. Soient $T' \subset B' \subset P' \subset G'$ respectivement un tore maximal des matrices diagonales de G , un sous-groupe de Borel de G et un sous-groupe parabolique tel que $G'/P' \simeq X$. Notons $\Delta' = \{\beta_1, \dots, \beta_6\}$ les racines simples associées à ce choix de T' et B' , et ϖ_i les poids fondamentaux associés. Alors P' est le sous groupe parabolique maximal associé à la racine simple β_6 , et les faisceaux inversibles sur X sont alors isomorphes à un certain $\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme

$$\varpi_6 = \frac{1}{2}\beta_1 + \beta_2 + \frac{3}{2}\beta_3 + 2\beta_4 + \beta_5 + \frac{3}{2}\beta_6$$

et comme \mathbb{C}^* agit avec le sous-groupe à un paramètre $\tau = 2\overline{\varpi_6}^\vee$, $f_{k\varpi_6}$ est de poids $3k$ pour l'action de \mathbb{C}^* , donc si U est un ouvert de trivialisations de $\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6}$ \mathbb{C}^* -invariant et $\sigma_{k\varpi_6}$ est une section trivialisante, alors on a

$$\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6}(U)^{\mathbb{C}^*} = \mathcal{O}_X(U)_{-3k \cdot \sigma_{k\varpi_6}}$$

$\text{Pic}(Y)$ est encore engendré par les $\mathcal{O}_Y(d_1)$ et $\mathcal{O}_Y(d_2)$, où les d_i sont les couleurs de Y . Soit $D_i = \overline{\pi_0^{-1}(d_i)}$. Il existe $k_i \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout ouvert Ω de $Y(0)$, on ait

$$\mathcal{L}(d_i)(\Omega) \simeq \mathcal{O}_X(D_i)(\pi_0^{-1}(\Omega))^{\mathbb{C}^*}$$

et $\overline{\mathcal{L}}_{d_i} \simeq \overline{\mathcal{L}}_{k_i\varpi_6}$. Dans G/H , la B -orbite ouverte est donnée par les équations

$$M_{14}({}^t g J g) = \begin{vmatrix} ({}^t g J g)_{1,1} & ({}^t g J g)_{1,4} \\ ({}^t g J g)_{4,1} & ({}^t g J g)_{4,4} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$M_{1245}({}^t g g) = \begin{vmatrix} ({}^t g J g)_{1,1} & ({}^t g J g)_{1,2} & ({}^t g J g)_{1,4} & ({}^t g J g)_{1,5} \\ ({}^t g J g)_{2,1} & ({}^t g J g)_{2,2} & ({}^t g J g)_{2,4} & ({}^t g J g)_{2,5} \\ ({}^t g J g)_{4,1} & ({}^t g J g)_{4,2} & ({}^t g J g)_{4,4} & ({}^t g J g)_{4,5} \\ ({}^t g J g)_{5,1} & ({}^t g J g)_{5,2} & ({}^t g J g)_{5,4} & ({}^t g J g)_{5,5} \end{vmatrix} \neq 0$$

Quitte à renuméroter les d_i , sur $\pi_0^{-1}(G)$, D_1 (resp. D_2) est défini par

$$F_1 := \frac{(\Lambda U_{2,3,5,6}^{1,4})^*}{(\Lambda U_{1,2,3,4,5,6})^*} \neq 0 \quad (\text{resp. } F_2 := \frac{(\Lambda U_{3,6}^{1,2,4,5})^*}{(\Lambda U_{1,2,3,4,5,6})^*} \neq 0)$$

qui sont respectivement de poids -4 et -8 pour l'action de \mathbb{C}^* . Quitte à renuméroter les d_i de telle manière que $\pi_0^{-1}(d_i) = (F_i = 0)$ dans $\pi_0^{-1}(G)$, on a pour tout ouvert \mathbb{C}^* -invariant $U \subset X$

$$\mathcal{O}_X(D_i)(U)^{\mathbb{C}^*} \simeq \overline{\mathcal{L}}_{k_i\varpi_6}(\Omega_i)_{3k_i - 2.2^i}$$

Ainsi pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur \tilde{X} , il existe $k, n \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout ouvert \mathbb{C}^* -invariant Ω de $Y(0)$, $\mathcal{L}(\Omega) \simeq \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6}(\pi_0^{-1}(\Omega))_n$. On obtient alors :

Proposition 3.4.12. *Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur Y . Alors $H^0(Y, \mathcal{L})$ est soit nul, soit un $D_{Y, \mathcal{L}}$ -module simple à gauche.*

Démonstration. La preuve est similaire au cas $\overline{\text{PGL}}_3$, à la seule différence que comme pour tout ouvert affine Ω de $Y(0)$, on a

$$\mathbb{C}[\pi_0^{-1}(\Omega_i)] \simeq \mathbb{C}[\Omega_i] \otimes \mathbb{C}[t_i^{\pm 4}]$$

donc il faut remplacer tous les t^2 par des t^4 , ϖ_3 par ϖ_6 , et la décomposition de $\mathcal{D}_{X, k\varpi_6}(\pi_0^{-1}(\Omega))^{\mathbb{C}^*}$ est

$$\mathcal{D}_{X, k\varpi_6}(\pi_0^{-1}(\Omega))^{\mathbb{C}^*} = \bigoplus_{p, q \in \mathbb{Z}} \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6}(\pi_0^{-1}(\Omega))_{n+4p} \otimes \mathcal{D}_X(\pi_0^{-1}(\Omega))_{4q} \otimes \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6}^{\otimes -1}(\pi_0^{-1}(\Omega))_{-n-4p-4q}$$

□

Remarque. Ce qui fait fonctionner ces preuves est le fait que l'ensemble des points instables est suffisamment petit pour qu'il y ait pas de différence entre les sections sur X et celles sur $X^{ss}(0)$, ce qui nous permet de comparer $H^0(Y, \mathcal{L})$ et $H^0(X, \overline{\mathcal{L}})^{\mathbb{C}^*}$. Cependant, ceci n'est plus vrai en cohomologie supérieure : si on note i la codimension de $X \setminus X^{ss}(0)$ dans X , il y a une différence entre $H^{i-1}(X, \overline{\mathcal{L}})$ et $H^{i-1}(X^{ss}(0), \overline{\mathcal{L}})$, que nous étudierons dans le chapitre suivant.

3.4.4 Cas de $\overline{E_6/F_4}$

Lorsque \tilde{G} est un groupe adjoint connexe de type E_6 , il existe un automorphisme extérieur d'ordre 2 de E_6 dont les points fixes forment un sous-groupe H de type F_4 , et le système de racines de \tilde{G}/H est de type A_2 . Dans ce cas, on peut toujours montrer que $Y = \overline{\tilde{G}/H}$ est isomorphe au quotient d'une variété de drapeaux G'/P par \mathbb{C}^* , où G' est un groupe connexe simplement connexe de type E_7 , et où P est un sous-groupe parabolique. On peut également montrer que D_Y est de type fini. Pour le faire, on utilise la description de ces groupes de type E_6 et E_7 , que l'on peut trouver dans [Sp].

Soient $A := V_{\varpi_1}$ et $B := V_{\varpi_6}$ les deux représentations irréductibles de dimension 27 d'un groupe de type E_6 . On peut alors construire un groupe connexe simplement connexe G de type E_6 comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}(A) \times \mathrm{GL}(B)$, et H peut être vu comme le sous-groupe des points fixes de l'automorphisme permutant A et B . De plus, en tant qu'espaces vectoriels, $A \simeq B \simeq M_3 \oplus M_3 \oplus M_3$, où M_3 est l'espace des matrices 3×3 . Notons

$$\begin{aligned} i : \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathrm{GL}(A) \times \mathrm{GL}(B) \\ t &\mapsto (t, t^{-1}) \end{aligned}$$

et $H_1 = i(\mathbb{C}^*).G$.

Considérons maintenant V_{ϖ_7} la représentation irréductible de plus haut poids ϖ_7 de G' . Elle est de dimension 54, et elle se décompose en tant que G -modules en

$$V_{\varpi_7} = A \oplus B \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

De plus, on peut voir H_1 comme le sous-groupe de G' qui stabilise cette décomposition. Soit $w = I_3 \oplus I_3 \oplus I_3 \in M_3 \oplus M_3 \oplus M_3$, et soit $v = (w, w, 1, 1) \in V_{\varpi_7}$. Le morphisme

$$\begin{aligned} H_1 &\rightarrow \mathbb{P}(V_{\varpi_7}) \\ h &\mapsto h.[v] \end{aligned}$$

a des fibres isomorphes à H , ce qui donne une inclusion $H_1/H \hookrightarrow \mathbb{P}(V_{\varpi_7})$, qui se factorise par G'/P , où P est un conjugué de P_{ϖ_7} . Ainsi on a $H_1/H \hookrightarrow G'/P \hookrightarrow \mathbb{P}(V_{\varpi_7})$. De plus, i induit une action de \mathbb{C}^* sur V_{ϖ_7} , avec des poids 1, -1, -3 et 3 $A, B, 0 \oplus 0 \oplus \mathbb{C} \oplus 0$ et $0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \mathbb{C}$. On a des morphismes

$$\tilde{G}/H \hookrightarrow (G'/P)//\mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathbb{P}(V_{\varpi_7})//\mathbb{C}^*$$

où les quotients considérés le sont pour un faisceau inversible ample avec une \mathbb{C}^* -linéarisation triviale. Si on note (x_i) une base de A^* , (y_j) une base de B^* , et respectivement z et t deux vecteurs non nuls de $(0 \oplus 0 \oplus \mathbb{C} \oplus 0)^*$ et de $(0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \mathbb{C})^*$, on a

$$\mathbb{C}[V_{\varpi_7}]^{\mathbb{C}^*} = \mathbb{C}[x_i y_j, x_i x_j x_k z, y_i y_j y_k t, zt]$$

Soit

$$\underline{V} = (A \otimes B) \oplus (\mathrm{Sym}^3(A) \otimes \mathbb{C}) \oplus (\mathrm{Sym}^3(B) \otimes \mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})$$

On a alors un morphisme surjectif $\text{Sym}(\underline{V}) \rightarrow \mathbb{C}[V_{\varpi_7}]^{\mathbb{C}^*}$, et des inclusions

$$\tilde{G}/H \hookrightarrow (G'/P)//\mathbb{C}^* \hookrightarrow \text{Proj}(\mathbb{C}[V_{\varpi_7}]^{\mathbb{C}^*}) \hookrightarrow \mathbb{P}(\underline{V})$$

Comme \underline{V} a un poids spécial régulier (à savoir $\varpi_1 + \varpi_6$), et comme les H -invariants dans $(\text{Sym}^3(A) \otimes \mathbb{C}) \oplus (\text{Sym}^3(B) \otimes \mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})$ sont de poids 0, Y est isomorphe à l'image de \tilde{G}/H dans $\mathbb{P}(\underline{V})$, qui est $(G'/P)//\mathbb{C}^*$.

En utilisant le critère de (semi-)stabilité 3.2.5 pour les quotients GIT par un tore, on observe que l'on a toujours

$$X^s(0) = X^{ss}(0) = \{U \in X \mid w_{-3} \text{ ou } w_{-1} \neq 0, w_1 \text{ ou } w_3 \neq 0\}$$

et que le quotient $(G'/P)//\mathbb{C}^*$ est géométrique. Ainsi la même preuve que dans les cas précédents nous donne que D_Y est de type fini, puisque G'/P est une variété de drapeaux pour G' .

Chapitre 4

Etude de la cohomologie supérieure

Si X est une variété algébrique et si U est un ouvert de X , on aimerait comparer les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{L})$ et $H^i(U, \mathcal{L}|_U)$, où \mathcal{L} est un faisceau inversible sur X . Pour cela, on dispose d'un outil appelé la cohomologie locale, que nous décrirons dans la première section. Lorsque X est muni d'une bonne filtration par des fermés emboîtés (par exemple, si X est une variété de drapeaux, on obtient une telle filtration grâce à la décomposition de Bruhat), un objet intéressant à étudier est le complexe de Cousin associé à cette filtration. C'est un complexe de groupes de cohomologie locale, qui nous permet sous certaines hypothèses de pouvoir exprimer $H^i(X, \mathcal{L})$ comme le i -ème groupe de cohomologie de ce complexe. Nous étudierons ce complexe dans la deuxième section. Lorsque X est une G -variété et que la filtration a de bonnes propriétés, les groupes de cohomologie locales sont des \mathfrak{g} -modules. On verra dans la troisième section que si X est une variété de drapeaux, il suffit de s'intéresser aux \mathfrak{g} -modules $H_{X_w}^{\text{codim}(X_w)}(X, \mathcal{L})$ pour pouvoir décrire entièrement le complexe de Cousin, ce qui est intéressant puisqu'on sait décrire leurs caractères. Nous appliquerons enfin tout ceci aux cas traités dans le chapitre précédent pour étudier les groupes de cohomologie $H^i(Y, \mathcal{L})$.

4.1 Cohomologie locale

La cohomologie locale est l'analogue pour la cohomologie des faisceaux de l'homologie relative pour l'homologie singulière. Elle a été développée dans [SGA2] et [Ha2], que nous prendrons avec [Ke1] pour références pour cette section.

Définition. Soit X une variété algébrique, et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module sur X . Si Z est un fermé de X , on dit qu'une section globale σ de \mathcal{F} est à *support dans* Z si sa restriction à l'ouvert $X \setminus Z$ est nulle. On note $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ le groupe des sections globales de \mathcal{F} à support dans Z .

Si $Z_2 \subset Z_1$ sont deux fermés dans X , on a une injection $\Gamma_{Z_2}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_{Z_1}(X, \mathcal{F})$. On définit alors

$$\Gamma_{Z_1/Z_2}(X, \mathcal{F}) = \Gamma_{Z_1}(X, \mathcal{F}) / \Gamma_{Z_2}(X, \mathcal{F})$$

Remarques.

- (1) $\Gamma_X(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ et $\Gamma_{\emptyset}(X, \mathcal{F}) = 0$
- (2) Si Z est un fermé de X , $\Gamma_{Z/\emptyset}(X, \mathcal{F}) = \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ et $\Gamma_{Z/Z}(X, \mathcal{F}) = 0$
- (3) Soient $Z_2 \subset Z_1$ deux fermés de X , \mathcal{F} un faisceau sur X , et notons $i : X \setminus Z_2 \hookrightarrow X$ l'inclusion. On a alors un morphisme de restriction

$$i^* : \Gamma_{Z_1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_{Z_1 \setminus Z_2}(X \setminus Z_2, \mathcal{F})$$

et son noyau est $\Gamma_{Z_2}(X, \mathcal{F})$. On a ainsi une injection

$$\Gamma_{Z_1/Z_2}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_{Z_1 \setminus Z_2}(X \setminus Z_2, \mathcal{F})$$

On dit qu'un faisceau \mathcal{F} sur X est flasque si pour tous ouverts $U \subset V$ dans X , le morphisme de restriction

$$\Gamma(V, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$$

est surjectif. Comme dans le cadre de la cohomologie usuelle, les faisceaux flasques sont importants puisqu'ils sont $\Gamma_{Z_1/Z_2}(X, \bullet)$ -acycliques (donc en particulier, $\Gamma_Z(X, \bullet)$ -acycliques)

Proposition 4.1.1. *Soient $Z_2 \subset Z_1$ deux fermés de X , et $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ trois faisceaux flasques sur X . Si la suite*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$$

est exacte, alors la suite

$$0 \rightarrow \Gamma_{Z_1/Z_2}(X, \mathcal{F}_1) \rightarrow \Gamma_{Z_1/Z_2}(X, \mathcal{F}_2) \rightarrow \Gamma_{Z_1/Z_2}(X, \mathcal{F}_3) \rightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Commençons par prouver que lorsque \mathcal{F} est flasque, l'injection

$$\Gamma_{Z_1/Z_2}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_{Z_1 \setminus Z_2}(X \setminus Z_2, \mathcal{F})$$

est en fait un isomorphisme. Si s est une section de $\Gamma(X \setminus Z_2, \mathcal{F})$ à support dans $Z_1 \setminus Z_2$, comme \mathcal{F} est flasque, elle s'étend en une section f' sur X dont le support est contenu dans Z_1 puisque f' et s ont la même restriction à $X \setminus Z_1$. On a donc une surjection $\Gamma_{Z_1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_{Z_1 \setminus Z_2}(X \setminus Z_2, \mathcal{F})$, qui passe au quotient.

Ainsi il suffit de montrer que pour tout fermé Z de X , la suite

$$0 \rightarrow \Gamma_Z(X, \mathcal{F}_1) \rightarrow \Gamma_Z(X, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\varphi} \Gamma_Z(X, \mathcal{F}_3) \rightarrow 0$$

est exacte. Soit $s \in \Gamma_Z(X, \mathcal{F}_3)$, et définissons

$$E = \{(U, \sigma), U \text{ ouvert de } X, \sigma \in \Gamma_Z(U, \mathcal{F}_2), \varphi(\sigma) = s|_U\}$$

On munit E d'un ordre \leq tel que $(U, \sigma) \leq (U', \sigma')$ si $U \subset U'$ et $\sigma = \sigma'|_U$. Le lemme de Zorn nous fournit l'existence d'un élément maximal (U_0, s_0) , et on a nécessairement $U_0 = X$, sinon on prend $x \in X \setminus U$, et V un voisinage de x , et comme \mathcal{F} est flasque, on obtient un $(U_0 \cup V, \tilde{s}) \in E$, ce qui contredit la maximalité de (U_0, s_0) . On a alors $\varphi(s_0) = s$, et par construction, on a $s_0|_U = 0$, donc $s_0 \in \Gamma_Z(X, \mathcal{F}_2)$. Comme $\Gamma(X, \bullet)$ est exact à gauche, on obtient bien la suite exacte. \square

On peut maintenant définir $H_Z^i(X, \bullet)$ comme le foncteur dérivé à droite de $\Gamma_Z(X, \bullet)$: si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module sur X et si

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow \dots$$

est une résolution flasque de \mathcal{F} , alors $H_Z^i(X, \mathcal{F})$ est le i -ème groupe de cohomologie du complexe

$$\Gamma_Z(X, \mathcal{G}_0) \rightarrow \Gamma_Z(X, \mathcal{G}_1) \rightarrow \Gamma_Z(X, \mathcal{G}_2) \rightarrow \dots$$

et on a en particulier $H_Z^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$.

Pour définir des « foncteurs dérivés » à droite $H_{Z_1/Z_2}^i(X, \bullet)$, il faut être prudent, puisque $\Gamma_{Z_1/Z_2}(X, \bullet)$ n'est pas nécessairement exact à gauche. On s'intéresse à une résolution

flasque particulière, la résolution de Godement (cf. [Go] II.4.3), définie comme suit : si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module sur X , on définit pour tout ouvert U de X

$$G(\mathcal{F})(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

on a un morphisme $d_0 : \mathcal{F} \rightarrow G(\mathcal{F})$, et $G_0(\mathcal{F}) := G(\mathcal{F})$ est flasque. On définit alors par récurrence

$$G_{i+1}(\mathcal{F})(U) = G(\text{coker}(d_i)) \text{ et } d_{i+1} = G_i(\mathcal{F}) \rightarrow \text{coker } d_i \rightarrow G_{i+1}(\mathcal{F})$$

et on définit alors $H^i(X, \mathcal{F})$ comme le i -ème groupe de cohomologie du complexe

$$\Gamma_{Z_1/Z_2}(G_0(\mathcal{F})) \rightarrow \Gamma_{Z_1/Z_2}(G_1(\mathcal{F})) \rightarrow \Gamma_{Z_1/Z_2}(G_2(\mathcal{F})) \rightarrow \dots$$

Les propriétés suivantes s'obtiennent par définition des foncteurs de cohomologie locale :

Proposition 4.1.2.

- (1) On a toujours $H_X^i(X, \mathcal{F}) = H^i(X, \mathcal{F})$, $H_{\emptyset}^i(X, \mathcal{F}) = 0$ et si Z est un fermé de X , $H_{Z/\emptyset}^i(X, \mathcal{F}) = H_Z^i(X, \mathcal{F})$ et $H_{Z/Z}^i(X, \mathcal{F}) = 0$.
- (2) On n'a pas nécessairement $H_{Z_1/Z_2}^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma_{Z_1/Z_2}(X, \mathcal{F})$, mais $d_0 : \mathcal{F} \rightarrow G(\mathcal{F})$ induit un morphisme $\Gamma_{Z_1/Z_2}(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_1/Z_2}^0(X, \mathcal{F})$.
- (3) Si $Z_2 \subset Z_1$ sont deux fermés de X , alors pour $i \geq 0$, on a

$$H_{Z_1/Z_2}^i(X, \mathcal{F}) \simeq H_{Z_1 \setminus Z_2}^i(X \setminus Z_2, \mathcal{F})$$

- (4) Si $Z_3 \subset Z_2 \subset Z_1$ sont trois fermés de X , on a une suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H_{Z_1/Z_2}^{i-1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_2/Z_3}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_1/Z_3}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_1/Z_2}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_2/Z_3}^{i+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

en particulier, lorsque $Z_1 = X$ et $Z_3 = \emptyset$, on obtient la suite exacte

$$\dots \rightarrow H^{i-1}(X \setminus Z_2, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_2}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X \setminus Z_2, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_2}^{i+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

- (5) Si $Z = Z_1 \sqcup Z_2$ est une réunion disjointe de deux fermés, alors

$$H_Z^i(X, \mathcal{F}) = H_{Z_1}^i(X, \mathcal{F}) \oplus H_{Z_2}^i(X, \mathcal{F})$$

Si V est un ouvert de X contenant les fermés $Z_2 \subset Z_1$, la restriction à V ne change pas les groupes de cohomologie locale :

Lemme 4.1.3 : Lemme d'excision. *La restriction à V induit des isomorphismes*

$$H_{Z_1/Z_2}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_1/Z_2}^i(V, \mathcal{F}|_V)$$

Le lemme d'excision nous permet donc d'étendre toutes ces définitions à des Z localement fermés dans X . Remarquons que d'après [SGA2] V.3.2, si $f : X \rightarrow X'$ est un morphisme de variétés, et si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module, alors pour tous $Z_2 \subset Z_1$ fermés de X' , on a une suite spectrale

$$H_{Z_1/Z_2}^p(X', R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow H_{f^{-1}Z_1/f^{-1}Z_2}^{*p}(X, \mathcal{F})$$

De manière analogue, on peut définir des faisceaux de cohomologie locale : on note $\underline{\Gamma}_Z(\mathcal{F})$ le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto \Gamma_{Z \cap U}(U, \mathcal{F})$$

et $\underline{\Gamma}_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F})$ le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto \Gamma_{Z_1 \cap U / Z_2 \cap U}(U, \mathcal{F})$$

Remarquons tout de suite que $\underline{\Gamma}_X(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. On a alors une version locale des propriétés globales (cf. [Ke1] 8.1-8.3) :

Proposition 4.1.4. *Soient Z et $Z_2 \subset Z_1$ des fermés de X , et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. Notons $i : X \setminus Z \rightarrow X$ et $j : X \setminus Z_2 \rightarrow X$ les inclusions. Alors*

(1) *Il y a une suite exacte de faisceaux*

$$0 \rightarrow \underline{\Gamma}_Z(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_*(\mathcal{F}|_{X \setminus Z})$$

(2) *On a un isomorphisme $\underline{\Gamma}_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F}) \simeq \underline{\Gamma}_{Z_1}(\mathcal{F})/\underline{\Gamma}_{Z_2}(\mathcal{F})$*

(3) *On a une injection $\underline{\Gamma}_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F}) \hookrightarrow j_*(\underline{\Gamma}_{Z_1 \setminus Z_2}(\mathcal{F}|_{X \setminus Z_2}))$*

(4) *Les faisceaux flasques sont acycliques pour les foncteurs $\underline{\Gamma}_Z(\bullet)$ et $\underline{\Gamma}_{Z_1/Z_2}(\bullet)$, et si \mathcal{F} est flasque, alors $\underline{\Gamma}_Z(\mathcal{F})$ et $\underline{\Gamma}_{Z_1/Z_2}(\mathcal{F})$ sont flasques.*

De la même manière, on définit $\mathcal{H}_Z^i(\bullet)$ (resp. $\mathcal{H}_{Z_1/Z_2}^i(\bullet)$) les foncteurs dérivés de $\underline{\Gamma}_Z(\bullet)$ (resp. $\underline{\Gamma}_{Z_1/Z_2}(\bullet)$), avec les mêmes précautions que le cas global. On donne ici quelques propriétés de ces faisceaux (cf. [Ke1] 8.5), que l'on peut comparer avec les propriétés de la proposition 4.1.2 :

Proposition 4.1.5.

(1) *Le faisceau $\mathcal{H}_{Z_1/Z_2}^i(\mathcal{F})$ est le faisceau associé au préfaisceau*

$$U \mapsto H_{Z_1 \cap U / Z_2 \cap U}^i(U, \mathcal{F})$$

(2) *On a un isomorphisme $\underline{\Gamma}_Z(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$, mais la flèche*

$$\underline{\Gamma}_{Z_1/Z_2}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_1/Z_2}^0(X, \mathcal{F})$$

n'est pas nécessairement un isomorphisme.

(3) *L'inclusion $j : X \setminus Z_2 \rightarrow X$ induit une suite spectrale*

$$R^p j_* \mathcal{H}_{Z_1 \setminus Z_2}^q(\mathcal{F}|_{X \setminus Z_2}) \Rightarrow \mathcal{H}_{Z_1/Z_2}^*(\mathcal{F})$$

(4) *Si $Z_3 \subset Z_2 \subset Z_1$ sont trois fermés de X , on a une suite exacte longue*

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}_{Z_1/Z_2}^{i-1}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_2/Z_3}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_1/Z_3}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_1/Z_2}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_2/Z_3}^{i+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

en particulier, lorsque $Z_1 = X$ et $Z_3 = \emptyset$, on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{Z_2}^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_{X \setminus Z_2}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_2}^1(\mathcal{F}) \rightarrow 0$$

et des isomorphismes $\mathcal{H}_{Z_2}^{i+1}(\mathcal{F}) = R^i j_(\mathcal{F}|_{X \setminus Z_2})$ pour $i > 0$.*

De plus, on peut retrouver les groupes de cohomologie locale grâce aux faisceaux de cohomologie locale (cf. [SGA2] I.2.5, [Ke1] 8.5) :

Proposition 4.1.6. Soient $Z_2 \subset Z_1$, $W_2 \subset W_1$, et notons $S_1 := Z_1 \cap W_1$, $S_2 = (W_1 \cap Z_2) \cup (W_2 \cap Z_1)$. On a une suite spectrale

$$H_{W_1/W_2}^p(X, \mathcal{H}_{Z_1/Z_2}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H_{S_1/S_2}^*(X, \mathcal{F})$$

En particulier, lorsque $W_1 = X$ et $W_2 = \emptyset$, on obtient la suite spectrale

$$H^p(X, \mathcal{H}_{Z_1/Z_2}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H_{Z_1/Z_2}^*(X, \mathcal{F}) \quad (*)$$

On donne tout de suite un critère de dégénérescence de cette suite spectrale qui nous sera utile par la suite :

Proposition 4.1.7. Soit X un schéma noethérien, soient $Z_2 \subset Z_1$ deux fermés tels que $Z_1 \setminus Z_2$ soit affine, et soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent. Alors la suite spectrale $(*)$ dégénère, et

$$H_{Z_1/Z_2}^i(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{H}_{Z_1/Z_2}^i(X, \mathcal{F}))$$

Démonstration. Commençons par rappeler les trois résultats suivants :

Lemme 4.1.8.

- (1) Si X est localement noethérien et \mathcal{F} quasi-cohérent, alors pour tout $Z \subset X$ fermé, les $\mathcal{H}_Z^i(\mathcal{F})$ sont quasi-cohérents.
- (2) Si X est noethérien, $Y \subset X$ est un fermé, et \mathcal{F} quasi-cohérent on a un isomorphisme

$$\lim_{\rightarrow} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^i(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{\otimes m}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_Y^i(\mathcal{F})$$

- (3) Si (\mathcal{F}_α) est un système inductif de faisceaux abéliens sur X quasi-noethérien, alors pour tout i on a un isomorphisme

$$H^i(X, \lim_{\rightarrow} \mathcal{F}_\alpha) = \lim_{\rightarrow} H^i(X, \mathcal{F}_\alpha)$$

On se réfère respectivement à [SGA2] II.3, [SGA2] II.6 et [Ke2] 8 pour des preuves.

Notons $\mathcal{F}' = \mathcal{F}|_{X \setminus Z_2}$. Comme $Z_1 \setminus Z_2$ est affine, le morphisme

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}}^i(\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}/\mathcal{I}_{Z_1 \setminus Z_2}^{\otimes m}, \mathcal{F}') \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}}^i(\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}/\mathcal{I}_{Z_1 \setminus Z_2}^{\otimes m+1}, \mathcal{F}')$$

est une inclusion, et il induit une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H^i(X \setminus Z_2, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}}^i(\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}/\mathcal{I}_{Z_1 \setminus Z_2}^{\otimes m}, \mathcal{F}')) \\ &\rightarrow H^i(X \setminus Z_2, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}}^i(\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}/\mathcal{I}_{Z_1 \setminus Z_2}^{\otimes m+1}, \mathcal{F}')) \rightarrow H^i(X \setminus Z_2, \mathcal{G}_m) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

où \mathcal{G}_m désigne le quotient. \mathcal{G}_m est quasi-cohérent, et il est annulé par $\mathcal{I}_{Z_1 \setminus Z_2}$. On peut alors voir \mathcal{G}_m comme un $\mathcal{O}_{Z_1 \setminus Z_2}$ -module. En notant $j : Z_1 \setminus Z_2 \rightarrow X \setminus Z_2$ l'inclusion, on a $j_*j^*\mathcal{G}_m = \mathcal{G}_m$, et la suite spectrale

$$H^p(X \setminus Z_2, R^q j_* j^* \mathcal{G}_m) \Rightarrow H^*(Z_1 \setminus Z_2, j^* \mathcal{G}_m)$$

dégénère, donc $H^p(Z_1 \setminus Z_2, j^* \mathcal{G}_m) = H^p(X \setminus Z_2, \mathcal{G}_m) = 0$ quand $p > 0$ puisque $Z_1 \setminus Z_2$ est affine et $j^* \mathcal{G}_m$ est quasi-cohérent. Ainsi pour $i > 0$ et $p > 0$, on a des surjections

$$H^p(X \setminus Z_2, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}}^i(\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}/\mathcal{I}_{Z_1 \setminus Z_2}^{\otimes m}, \mathcal{F}')) \rightarrow H^p(X \setminus Z_2, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}}^i(\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}/\mathcal{I}_{Z_1 \setminus Z_2}^{\otimes m+1}, \mathcal{F}'))$$

ce qui prouve que tous les $H^p(X \setminus Z_2, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}}^i(\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}/\mathcal{I}_{Z_1 \setminus Z_2}^{\otimes m}, \mathcal{F}'))$ sont nuls, puisque c'est nul lorsque $m = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} & H^p(X \setminus Z_2, \mathcal{H}_{Z_1 \setminus Z_2}^q(\mathcal{F}')) \\ &= H^p(X \setminus Z_2, \lim_{\rightarrow} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}}^q(\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}/\mathcal{I}_{Z_1 \setminus Z_2}^{\otimes m}, \mathcal{F}')) \\ &= \lim_{\rightarrow} H^p(X \setminus Z_2, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}}^q(\mathcal{O}_{X \setminus Z_2}/\mathcal{I}_{Z_1 \setminus Z_2}^{\otimes m}, \mathcal{F}')) = 0 \end{aligned}$$

lorsque $p > 0$. Ainsi pour $i > 0$, on a

$$H_{Z_1 \setminus Z_2}^i(X \setminus Z_2, \mathcal{F}') = H^0(X \setminus Z_2, \mathcal{H}_{Z_1 \setminus Z_2}^i(\mathcal{F}'))$$

Pour les mêmes raisons, en notant $\iota : X \setminus Z_2 \rightarrow X$ l'inclusion, $R^p \iota_* \mathcal{H}_{Z_1 \setminus Z_2}^q(\mathcal{F}')$ est nul pour $p > 0$, et la suite spectrale

$$R^p \iota_* \mathcal{H}_{Z_1 \setminus Z_2}^q(\mathcal{F}') \Rightarrow \mathcal{H}_{Z_1/Z_2}^*(\mathcal{F})$$

dégénère. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} H_{Z_1/Z_2}^i(X, \mathcal{F}) &= H_{Z_1 \setminus Z_2}^i(X \setminus Z_2, \mathcal{F}') \\ &= H^0(X \setminus Z_2, \mathcal{H}_{Z_1 \setminus Z_2}^i(\mathcal{F}')) \\ &= H^0(X, \iota_* \mathcal{H}_{Z_1 \setminus Z_2}^i(\mathcal{F}')) \\ &= H^0(X, \mathcal{H}_{Z_1/Z_2}^i(\mathcal{F})) \end{aligned}$$

□

Exemples.

- (1) Soit X une variété algébrique projective lisse, munie de l'action de k^* , telle que le nombre de k^* -points fixes soit fini, soit $x \in X^{k^*}$ et $\nu : k^* \rightarrow k^*$ un sous-groupe à un paramètre. On définit

$$X^+(x) = \{y \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0} \nu(t)y = x\}$$

Alors si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent, on a pour tout i

$$H_{X^+(x)}^i(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{H}_{X^+(x)}^i(\mathcal{F}))$$

puisque $X^+(x)$ est isomorphe à un espace affine (c'est une cellule de Bialynicki-Birula).

- (2) Soit $X = G/P$ une variété de drapeaux, $T \subset B \subset P$ un tore maximal et un sous-groupe de Borel de G est soit $w \in W^P$. Notons $X_w = BwP/P$, et soit Z'_i la réunion des cellules de Bruhat de codimension i . Alors pour \mathcal{F} quasi-cohérent :

$$\begin{aligned} H_{Z'_i}^i(X, \mathcal{F}) &= \bigoplus_{l(w)=i} H_{X_w}^i(X, \mathcal{F}) \\ &= \bigoplus_{l(w)=i} H^0(X, \mathcal{H}_{X_w}^i(\mathcal{F})) \end{aligned}$$

Pour terminer cette section, remarquons que lorsque l'on contrôle la profondeur de Z , les faisceaux de cohomologie locale $\mathcal{H}_Z^i(\mathcal{F})$ s'annulent si i est suffisamment petit (ou suffisamment grand). La bonne notion à utiliser ici est celle de schéma de Cohen-Macaulay. On rappelle que la profondeur d'un anneau M est la longueur maximale d'une suite d'éléments (m_1, \dots, m_r) de M telle que m_i ne soit pas un diviseur de zéro dans $M/(m_1, \dots, m_{i-1})M$, et qu'un anneau local est de Cohen-Macaulay si sa profondeur est égale à sa dimension. On dit qu'un schéma X est de Cohen-Macaulay si tous ses anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ sont de Cohen-Macaulay. Alors si Z est un fermé de X , on a exactement

$$\text{codim}(Z) = \inf\{\text{prof}(\mathcal{O}_{X,x}), x \in Z\}$$

donc les propositions III.3.3 et III.3.12 de [SGA2] nous donnent

Proposition 4.1.9. *Si X est de Cohen-Macaulay, Z est fermé dans X et \mathcal{F} est localement libre, alors $\mathcal{H}_Z^i(\mathcal{F}) = 0$ pour $i < \text{codim}(Z)$. De plus, si \mathcal{I}_Z est localement engendré par $\text{codim}(Z)$ éléments, alors $\mathcal{H}_Z^i(\mathcal{F}) = 0$ pour $i > \text{codim}(Z)$*

Corollaire 4.1.10. *Si X est de Cohen-Macaulay, Z est localement fermé dans X et \mathcal{F} est localement libre, alors $H_Z^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $i < \text{codim}(Z)$. De plus, si V est un ouvert de X dans lequel Z est fermé, si Z est affine et si \mathcal{I}_Z est localement engendré dans V par $\text{codim}(Z)$ éléments, alors $H_Z^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $i > \text{codim}(Z)$*

Démonstration. C'est évident si $i < \text{codim}(Z)$ grâce à la suite spectrale (*) et au lemme d'excision. Soit V un ouvert de X tel que Z soit fermé dans V . Alors on a

$$\begin{aligned} H_Z^i(X, \mathcal{F}) &= H_Z^i(V, \mathcal{F}|_V) \\ &= H^0(V, \mathcal{H}_Z^i(\mathcal{F}|_V)) = 0 \end{aligned}$$

pour $i > \text{codim}(Z)$ puisque V est aussi de Cohen-Macaulay et $\mathcal{F}|_V$ est toujours localement libre. \square

4.2 Complexe de Cousin

Soient X une variété algébrique et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module, et supposons avoir quatre fermés $Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset Z_1$. On peut construire une suite exacte de groupes de cohomologie locale relativement aux fermés $Z_3 \subset Z_2 \subset Z_1$, et on peut faire la même chose pour les fermés $Z_4 \subset Z_3 \subset Z_2$ et $Z_4 \subset Z_2 \subset Z_1$. Pour tout $j > 0$, ces trois suites exactes nous donnent le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \vdots & & \ddots \\ & & & & \downarrow & & \swarrow \\ & & & & H_{Z_1/Z_2}^{j-1}(X, \mathcal{F}) & & \\ & & & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ \dots & \longrightarrow & H_{Z_2/Z_4}^j(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{Z_2/Z_3}^j(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{Z_3/Z_4}^{j+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots \\ & & \swarrow & & \downarrow & & \\ & & H_{Z_1/Z_4}^j(X, \mathcal{F}) & & H_{Z_1/Z_3}^j(X, \mathcal{F}) & & \\ & & \swarrow & & \downarrow & & \\ \dots & & & & \vdots & & \end{array}$$

On obtient donc des morphismes

$$H_{Z_1/Z_2}^{j-1}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} H_{Z_2/Z_3}^j(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{d'} H_{Z_3/Z_4}^{j+1}(X, \mathcal{F})$$

et comme le diagramme précédent commute, on obtient que $d' \circ d = 0$. L'idée du complexe de Cousin est de généraliser cela à une filtration $\{Z\}$ de X

$$\emptyset = Z_{n+1} \subset Z_n \subset Z_{n-1} \subset \dots \subset Z_2 \subset Z_1 \subset Z_0 = X$$

On obtient alors un complexe

$$H_{Z_0/Z_1}^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_1/Z_2}^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_2/Z_3}^2(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots \rightarrow H_{Z_n}^n(X, \mathcal{F})$$

En notant e le morphisme

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) = \Gamma_{Z_0}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_{Z_0/Z_1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_0/Z_1}^0(X, \mathcal{F})$$

on obtient une suite de morphismes notée $\text{Cousin}_{\{Z\}}\mathcal{F}$:

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_0/Z_1}^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_1/Z_2}^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots \rightarrow H_{Z_n}^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow 0$$

Kempf a montré dans [Ke1] 7.8 :

Proposition 4.2.1. *Cousin $_{\{Z\}}\mathcal{F}$ est un complexe, appelé le complexe de Cousin de \mathcal{F} relativement à Z .*

De la même manière, on a un complexe de Cousin local de \mathcal{F} relativement à Z , noté $\underline{\text{Cousin}}_{\{Z\}}\mathcal{F}$:

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}_{Z_0/Z_1}^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_1/Z_2}^1(\mathcal{F}) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{H}_{Z_n}^n(\mathcal{F}) \rightarrow 0$$

Ce complexe est en fait le complexe de faisceaux associé au préfaisceau

$$U \mapsto \text{Cousin}_{\{Z \cap U\}}\mathcal{F}|_U$$

Sous certaines bonnes hypothèses sur $\{Z\}$ et sur \mathcal{F} , ce complexe nous permet de retrouver les $H^i(X, \mathcal{F})$, à l'aide de la proposition suivante (cf. [Ke1] 8.7) :

Proposition 4.2.2. *Soient $\{Z\}$ et \mathcal{F} comme précédemment, et supposons que*

- (a) *le complexe de Cousin local $\underline{\text{Cousin}}_{\{Z\}}\mathcal{F}$ est exact ;*
- (b) *on a pour tout i un isomorphisme $H_{Z_i/Z_{i+1}}^i(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{H}_{Z_i/Z_{i+1}}^i(\mathcal{F}))$;*
- (c) *pour tout i et pour tout $j > 0$, $H^j(X, \mathcal{H}_{Z_i/Z_{i+1}}^i(\mathcal{F})) = 0$.*

Alors :

- (1) *Cousin $_{\{Z\}}\mathcal{F}$ est le complexe des sections globales de $\underline{\text{Cousin}}_{\{Z\}}\mathcal{F}$;*
- (2) *le i -ème groupe d'homologie du complexe Cousin $_{\{Z\}}\mathcal{F}$ est isomorphe à $H^i(X, \mathcal{F})$. En particulier, si tous les $H^i(X, \mathcal{F})$ pour $i > 0$ sont nuls, le complexe Cousin $_{\{Z\}}\mathcal{F}$ est une résolution de $H^0(X, \mathcal{F})$.*

Les conditions (b) et (c) sont lourdes à vérifier, mais on peut montrer (cf. [Ke1] 9.5 et 9.6) qu'elles sont vérifiées dans un cas plutôt simple. En effet, si la condition

(C) pour tout i , $Z_i \setminus Z_{i+1}$ est affine

est vérifiée, alors elle entraîne (b) et (c) pour tout \mathcal{F} quasi-cohérent. Pour vérifier la condition (a) pour un \mathcal{F} quasi-cohérent, on se sert de [Ke1] 10.3 et 10.5, qui nous dit que sous l'hypothèse (C), les assertions (a), (A), (A1) et (A2) sont équivalentes, où

(A) $\mathcal{H}_{Z_p}^i(\mathcal{F}) = 0$ lorsque $p \neq i$;

(A1) $\mathcal{H}_{Z_p}^i(\mathcal{F}) = 0$ lorsque $p > i$;

(A2) $\mathcal{H}_{Z_p/Z_{p+1}}^i(\mathcal{F}) = 0$ lorsque $p \neq i$

Supposons maintenant avoir une filtration $\{Z\}$ de X vérifiant (C) telle que pour tout i on ait $\text{codim}(Z_i) = i$, et soit \mathcal{F} un faisceau localement libre sur X .

Définition. On définit le i -ème complexe de Cousin restreint de \mathcal{F} relativement à $\{Z\}$ comme étant le complexe

$$0 \rightarrow H_{Z_i}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_i/Z_{i+1}}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_{i+1}/Z_{i+2}}^{i+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots \rightarrow H_{Z_n}^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow 0$$

et on le note $\text{Cousin}_{\{Z\},i}\mathcal{F}$. De la même manière, on définit le i -ème complexe de Cousin local restreint de \mathcal{F} relativement à $\{Z\}$ comme

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{Z_i}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_i/Z_{i+1}}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_{i+1}/Z_{i+2}}^{i+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{H}_{Z_n}^n(\mathcal{F}) \rightarrow 0$$

et on le note $\underline{\text{Cousin}}_{\{Z\},i}\mathcal{F}$

Ce sont bien des complexes, puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & & H_{Z_i}^i(X, \mathcal{F}) & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ \dots & \longrightarrow & H_{Z_i/Z_{i+2}}^i(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{Z_i/Z_{i+1}}^i(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{Z_{i+1}/Z_{i+2}}^{i+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots \\ & & \swarrow & & \downarrow & & \end{array}$$

commute, et que la ligne du bas est exacte. Le i -ème complexe de Cousin restreint nous permet alors de calculer les $H_{Z_i}^j(X, \mathcal{H}_{Z_i}^i\mathcal{F})$:

Théorème 4.2.3. Soit $\{Z\}$ une filtration de X vérifiant (C), et soit \mathcal{F} quasi-cohérent vérifiant (a), ie. tel que $\underline{\text{Cousin}}_{\{Z\}}\mathcal{F}$ soit exact. Alors

- (1) on a un isomorphisme $\text{Cousin}_{\{Z\},i}\mathcal{F} \rightarrow H^0(X, \underline{\text{Cousin}}_{\{Z\},i}\mathcal{F})$;
- (2) le j -ème groupe d'homologie du complexe $\text{Cousin}_{\{Z\},i}\mathcal{F}$ est isomorphe à $H^j(X, \mathcal{H}_{Z_i}^i\mathcal{F})$. En particulier, lorsque les $H^j(X, \mathcal{H}_{Z_i}^i\mathcal{F})$ pour $j > 0$ sont nuls, le complexe $\text{Cousin}_{\{Z\},i}\mathcal{F}$ est une résolution de $H^i(X, \mathcal{F})$.

Démonstration. Rappelons que pour $Z_2 \subset Z_1$, $W_2 \subset W_1$, et $S_1 := Z_1 \cap W_1$, $S_2 = (W_1 \cap Z_2) \cup (W_2 \cap Z_1)$, on a une suite spectrale

$$H_{W_1/W_2}^p(X, \mathcal{H}_{Z_1/Z_2}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H_{S_1/S_2}^*(X, \mathcal{F})$$

Soit \mathcal{F} satisfaisant les conditions équivalentes (a),(A),(A1) et (A2).

Commençons par montrer (1). Soit $k \geq i$. D'après (A2), on a $\mathcal{H}_{Z_k/Z_{k+1}}^j(\mathcal{F}) = 0$ pour $j \neq k$. La suite spectrale

$$H^p(X, \mathcal{H}_{Z_k/Z_{k+1}}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H_{Z_k/Z_{k+1}}^*(X, \mathcal{F})$$

nous donne $H_{Z_k/Z_{k+1}}^k(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{H}_{Z_k/Z_{k+1}}^k(\mathcal{F}))$. De plus, (A1) nous donne $\mathcal{H}_{Z_i}^p(\mathcal{F}) = 0$ pour $p < i$, ce qui nous donne grâce à la suite spectrale

$$H^p(X, \mathcal{H}_{Z_i}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H_{Z_i}^*(X, \mathcal{F})$$

l'isomorphisme $H_{Z_i}^i(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{H}_{Z_i}^i(\mathcal{F}))$, ce qui prouve (1).

Pour prouver (2), commençons par montrer que $\underline{\text{Cousin}}_{\{Z\},i}\mathcal{F}$ est une résolution de $\mathcal{H}_{Z_i}^i(\mathcal{F})$. Soit $p \geq i$. Comme \mathcal{F} vérifie (A), on a

$$\mathcal{H}_{Z_{p+1}}^p(\mathcal{F}) = \mathcal{H}_{Z_p}^{p+1}(\mathcal{F}) = 0$$

ce qui nous donne une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{Z_p}^p(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_p/Z_{p+1}}^p(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_{p+1}}^{p+1}(\mathcal{F}) \rightarrow 0$$

Comme c'est vrai pour tout $p \geq i$, on obtient bien que $\underline{\text{Cousin}}_{\{Z\},i}\mathcal{F}$ une résolution de $\mathcal{H}_{Z_i}^i(\mathcal{F})$. Comme $Z_k \setminus Z_{k+1}$ est affine, $H^j(X, \mathcal{H}_{Z_k/Z_{k+1}}(\mathcal{F})) = 0$ pour $j > 0$, donc $\underline{\text{Cousin}}_{\{Z\},i}\mathcal{F}$ est une résolution acyclique de $\mathcal{H}_{Z_i}^i(\mathcal{F})$. \square

Remarques.

- (1) Lorsque X est de Cohen-Macaulay et que $\{Z\}$ est une filtration de X qui satisfait (C) telle que pour tout i on ait $\text{codim}(Z_i) = i$, alors les faisceaux localement libres sur X vérifient (A1).
- (2) Lorsque les $H_{Z_i}^j(X, \mathcal{F})$ sont nuls pour $j > i$, alors le complexe $\text{Cousin}_{\{Z\},i}\mathcal{F}$ est une résolution de $H_{Z_i}^i(X, \mathcal{F})$.

On va s'intéresser particulièrement au cas où X est une variété de drapeaux. Soit $X = G/P$ une variété de drapeaux, $T \subset B \subset P$ un tore maximal et un sous-groupe de Borel de G , et $n = \dim X$. On considère la filtration de X par les Z_i où

$$Z_i = \bigcup_{l(w)=n-i} \overline{X_w}$$

Les Z_i sont en fait les réunions des B -orbites de codimension au moins i . La filtration $\{Z\}$ vérifie alors (C). Notons également $Z_{n+1} = \emptyset$. Comme $Z_i \setminus Z_{i+1}$ est la réunion disjointe des B -orbites de codimension exactement i , on a

$$\begin{aligned} H_{Z_i/Z_{i+1}}^i(X, \mathcal{F}) &= H_{Z_i \setminus Z_{i+1}}^i(X \setminus Z_{i+1}, \mathcal{F}) \\ &= \bigoplus_{l(w)=n-i} H_{X_w}^i(X \setminus Z_{i+1}, \mathcal{F}) \\ &= \bigoplus_{l(w)=n-i} H_{X_w}^i(X, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

par le lemme d'excision. On peut donc réécrire les morphismes dans le complexe de Cousin (restreint) de \mathcal{F} relativement à Z comme

$$d^i : \bigoplus_{l(w)=n-i} H_{X_w}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow \bigoplus_{l(w')=n-i-1} H_{X_{w'}}^{i+1}(X, \mathcal{F})$$

Notons $\partial X_w := \overline{X_w} \setminus X_w$. Alors on a

$$H_{X_w}^i(X, \mathcal{F}) = H_{\overline{X_w} \setminus \partial X_w}^i(X \setminus \partial X_w, \mathcal{F}) = H_{\overline{X_w} / \partial X_w}^i(X, \mathcal{F})$$

donc le morphisme $H_{X_w}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{X_{w'}}^{i+1}(X, \mathcal{F})$ est nul si $X_{w'} \not\subset \partial X_w$. Le complexe $\text{Cousin}_{\{Z\},i}\mathcal{F}$ induit alors des sous-complexes $\text{Cousin}_{\{Z\},w}\mathcal{F}$ (où $l(w) = n - i$) :

$$0 \rightarrow H_{\overline{X_w}}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{X_w}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow \bigoplus_{\substack{l(w')=n-i-1 \\ X_{w'} \subset \overline{X_w}}} H_{X_{w'}}^{i+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

et

$$\bigoplus_{\substack{l(w')=n-i-j \\ X_{w'} \subset \overline{X_w}}} H_{X_{w'}}^{i+j}(X, \mathcal{F}) = H_{\overline{X_w} \cap Z_{i+j} / \overline{X_w} \cap Z_{i+j+1}}^{i+j}(X, \mathcal{F})$$

Soit $\underline{\text{Cousin}}_{\{Z\},w}\mathcal{F}$ la version locale de $\text{Cousin}_{\{Z\},w}\mathcal{F}$, ie. le complexe

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{\overline{X_w}}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{X_w}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \bigoplus_{\substack{l(w')=n-i-1 \\ X_{w'} \subset \overline{X_w}}} \mathcal{H}_{X_{w'}}^{i+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

Supposons de plus que $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$. Alors il n'y a qu'un seul $\overline{X_w}$ de codimension 1, et c'est une couleur de X . Alors

Proposition 4.2.4. *Soit \mathcal{F} un faisceau localement libre sur X , $i > 0$ et $w \in W^P$ de longueur $l(w) = n - i$. Alors*

- (1) on a un isomorphisme $\text{Cousin}_{\{Z\},w}\mathcal{F} \rightarrow H_{\overline{X_w}}^0(X, \underline{\text{Cousin}}_{\{Z\},w}\mathcal{F})$;
- (2) le j -ème groupe d'homologie du complexe $\text{Cousin}_{\{Z\},w}\mathcal{F}$ est isomorphe à $H_{\overline{X_w}}^j(X, \mathcal{H}_{\overline{X_w}}^i\mathcal{F})$.

Démonstration. L'idée de la preuve est la même que celle du théorème 4.2.3. Soit $k \geq i$. Comme $\mathcal{H}_{Z_k/Z_{k+1}}^j(\mathcal{F}) = 0$ pour $j \neq k$, et puisqu'on a, en notant $j : X \setminus Z_{k+1} \rightarrow X$ l'inclusion, une suite spectrale

$$\bigoplus_{l(w)=n-k} R^p j_* \mathcal{H}_{\overline{X_w} \cap Z_k / \overline{X_w} \cap Z_{k+1}}^q(\mathcal{F}|_{X \setminus Z_{k+1}}) = R^p j_* \mathcal{H}_{Z_k \setminus Z_{k+1}}^q(\mathcal{F}|_{X \setminus Z_{k+1}}) \Rightarrow \mathcal{H}_{Z_k/Z_{k+1}}^*(\mathcal{F})$$

on obtient que $\mathcal{H}_{\overline{X_w} \cap Z_k / \overline{X_w} \cap Z_{k+1}}^j(\mathcal{F}) = 0$ pour $j < k$. La suite spectrale

$$H_{\overline{X_w}}^p(X, \mathcal{H}_{\overline{X_w} \cap Z_k / \overline{X_w} \cap Z_{k+1}}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H_{\overline{X_w} \cap Z_k / \overline{X_w} \cap Z_{k+1}}^*(X, \mathcal{F})$$

nous donne

$$H_{\overline{X_w} \cap Z_k / \overline{X_w} \cap Z_{k+1}}^k(X, \mathcal{F}) = H_{\overline{X_w}}^0(X, \mathcal{H}_{\overline{X_w} \cap Z_k / \overline{X_w} \cap Z_{k+1}}^k(\mathcal{F}))$$

De plus, comme $\overline{X_w}$ est fermé et \mathcal{F} est localement libre, on a $\mathcal{H}_{\overline{X_w}}^p(\mathcal{F}) = 0$ pour $p < i$, ce qui nous donne un isomorphisme

$$H_{\overline{X_w}}^i(X, \mathcal{F}) = H_{\overline{X_w}}^0(X, \mathcal{H}_{\overline{X_w}}^i(\mathcal{F}))$$

ce qui prouve (1).

Pour prouver (2), on va utiliser le fait que $\underline{\text{Cousin}}_{\{Z\},i}\mathcal{F}$ est une résolution acyclique de $\mathcal{H}_{Z_i}^i(\mathcal{F})$, et que le foncteur $\Gamma_{\overline{X_w}}(\bullet)$ est exact à gauche. Comme on a une suite spectrale

$$\mathcal{H}_{\overline{X_w}}^q(\mathcal{H}_{Z_{i+k}/Z_{i+k+1}}^p(\mathcal{F})) \Rightarrow \mathcal{H}_{\overline{X_w} \cap Z_{i+k} / \overline{X_w} \cap Z_{i+k+1}}^*(\mathcal{F})$$

et comme $Z_{i+k} \setminus Z_{i+k+1}$ et $\overline{X_w} \cap Z_{i+k} \setminus \overline{X_w} \cap Z_{i+k+1}$ sont affines, on obtient que $\mathcal{H}_{\overline{X_w}}^0(\mathcal{H}_{Z_{i+k}/Z_{i+k+1}}^{i+k}(\mathcal{F})) = \mathcal{H}_{\overline{X_w} \cap Z_{i+k} / \overline{X_w} \cap Z_{i+k+1}}^{i+k}(\mathcal{F})$, et que les $\mathcal{H}_{Z_{i+k}/Z_{i+k+1}}^{i+k}(\mathcal{F})$ sont $\Gamma_{\overline{X_w}}(\bullet)$ -acycliques. De plus, la suite spectrale

$$\mathcal{H}_{\overline{X_w}}^q(\mathcal{H}_{Z_i}^p(\mathcal{F})) \Rightarrow \mathcal{H}_{\overline{X_w} \cap Z_i}^*(\mathcal{F})$$

nous donne $\mathcal{H}_{\overline{X_w}}^0(\mathcal{H}_{Z_i}^i(\mathcal{F}))$. Ainsi la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{\overline{X_w} \cap Z_i}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{\overline{X_w} \cap Z_i / \overline{X_w} \cap Z_{i+1}}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{\overline{X_w} \cap Z_{i+1} / \overline{X_w} \cap Z_{i+2}}^{i+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{H}_{\overline{X_w} \cap Z_n}^n(\mathcal{F}) \rightarrow 0$$

est exacte. Le même argument que précédemment appliqué à la suite spectrale

$$H_{\overline{X_w}}^q(X, \mathcal{H}_{Z_{i+k}/Z_{i+k+1}}^p(\mathcal{F})) \Rightarrow H_{\overline{X_w} \cap Z_{i+k} / \overline{X_w} \cap Z_{i+k+1}}^*(X, \mathcal{F})$$

nous donne que les $\mathcal{H}_{Z_{i+k}/Z_{i+k+1}}^{i+k}(\mathcal{F})$ sont $\Gamma_{\overline{X_w}}(\bullet)$ -acycliques, ce qui prouve (2). \square

Remarque. Comme précédemment, lorsque $H_{X_w}^j(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $j > i = n - l(w)$, alors le complexe $\text{Cousin}_{\{Z\}, w} \mathcal{F}$ est une résolution de $H_{X_w}^i(X, \mathcal{F})$. Soit l le premier entier strictement positif (s'il existe) tel que $H_{X_w}^l(X, \mathcal{H}_{X_w}^i \mathcal{F}) \neq 0$, et $k = i + l$. On a alors une suite exacte

$$0 \rightarrow H_{X_w}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\overline{X_w}/\overline{X_w} \cap Z_{i+1}}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots \\ \rightarrow H_{Z_{k-1} \cap \overline{X_w}/Z_k \cap \overline{X_w}}^{k-1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_k \cap \overline{X_w}/Z_{k+1} \cap \overline{X_w}}^k(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_k \cap \overline{X_w}/Z_{k+1} \cap \overline{X_w}}^k(X, \mathcal{F})/\text{im}(d_l) \rightarrow 0$$

et comme $H_{Z_{k+1} \cap \overline{X_w}/Z_{k+2} \cap \overline{X_w}}^k(X, \mathcal{F}) = 0$, on a

$$\ker(d_{l+1}) = H_{Z_k \cap \overline{X_w}/Z_{k+2} \cap \overline{X_w}}^k(X, \mathcal{F})$$

et on peut récupérer $\text{im}(d_l)$ grâce à la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{im}(d_l) \rightarrow H_{Z_k \cap \overline{X_w}/Z_{k+2} \cap \overline{X_w}}^k(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{X_w}^l(X, \mathcal{H}_{X_w}^i \mathcal{F}) \rightarrow 0$$

4.3 Structure de G -module

Soit X une variété algébrique, munie de l'action d'un groupe algébrique G . Sous certaines bonnes hypothèses sur \mathcal{F} , on peut alors munir les groupes (resp. les faisceaux) de cohomologie locale d'une structure de \mathfrak{g} -module (resp. d'une G -linéarisation), comme le montre le résultat suivant dû à Kempf (cf. [Ke1] 11.1, 11.2 et 11.6).

Proposition 4.3.1. *Soit \mathcal{F} un faisceau quasi-cohérent G -linéarisé sur X , soient $W_3 \subset W_2 \subset W_1$ trois de X , et $\{Z\}$ une suite de fermés de X . Alors*

(1) *Il existe une structure naturelle de \mathfrak{g} -module sur $H_{W_1/W_2}^i(X, \mathcal{F})$;*

(2) *Il existe une G -linéarisation naturelle sur les faisceaux $\mathcal{H}_{W_1/W_2}^i(\mathcal{F})$;*

(3) *Les morphismes*

$$H_{W_1/W_2}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathcal{H}_{W_1/W_2}^i(\mathcal{F}))$$

sont des morphismes de \mathfrak{g} -modules

(4) *Les suites exactes*

$$\dots \rightarrow H_{Z_1/Z_2}^{i-1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_2/Z_3}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_1/Z_3}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_1/Z_2}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_2/Z_3}^{i+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

et

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}_{Z_1/Z_2}^{i-1}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_2/Z_3}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_1/Z_3}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_1/Z_2}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_2/Z_3}^{i+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

sont respectivement des complexes de \mathfrak{g} -modules et de faisceaux G -linéarisés.

(5) *Les complexes $\text{Cousin}_{\{Z\}} \mathcal{F}$ et $\underline{\text{Cousin}}_{\{Z\}} \mathcal{F}$ sont respectivement des complexes de \mathfrak{g} -modules et de faisceaux G -linéarisés.*

Remarque. On remarque que les complexes de Cousin restreints $\text{Cousin}_{\{Z\}, i} \mathcal{F}$ et $\underline{\text{Cousin}}_{\{Z\}, i} \mathcal{F}$ sont également respectivement des complexes de \mathfrak{g} -modules et de faisceaux G -linéarisés, puisque grâce à (4), les augmentations

$$H_{Z_i}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{Z_i/Z_{i+1}}^i(X, \mathcal{F})$$

et

$$\mathcal{H}_{Z_i}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}_{Z_i/Z_{i+1}}^i(\mathcal{F})$$

sont respectivement des morphismes de \mathfrak{g} -modules et de faisceaux G -linéarisés.

Reprenons maintenant le cas d'une variété de drapeaux $X = G'/P'$. Soient $T' \subset B' \subset P'$ un tore maximal et un sous-groupe de Borel de G' , et soit comme précédemment $\{Z\}$ la filtration de X par les Z_i qui sont les réunions des B' -orbites de codimension au moins i . Notons $n = \dim X$, et $Z_{n+1} = \emptyset$. Les Z_i sont B' -invariants, donc pour tout faisceau quasi-cohérent G' -linéarisé \mathcal{F} , le complexe $\text{Cousin}_{\{Z\}}\mathcal{F}$ est un complexe de B' -modules, et le complexe $\underline{\text{Cousin}}_{\{Z\}}\mathcal{F}$ est un complexe de faisceaux B' -linéarisés. De plus, les X_w et les $\overline{X_w}$ sont B' -invariants, donc il en est de même pour les complexes $\text{Cousin}_{\{Z\},w}\mathcal{F}$ et $\underline{\text{Cousin}}_{\{Z\},w}\mathcal{F}$. Les structures de B' -modules des groupes de cohomologie $H_{Z_i/Z_{i+1}}^i(X, \mathcal{F})$ induisent des structures de T' -modules, et $\text{Cousin}_{\{Z\},w}\mathcal{F}$ est également un complexe de T' -modules.

Soit M un T' -module. On peut alors décomposer M en

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{X}(T)} M_\lambda$$

où $M_\lambda = \{m \in M \mid \forall t \in T, t.m = \lambda(t)m\}$, et on note $\text{mult}_\lambda(M)$ la dimension de ce sous-espace caractéristique. On définit alors

Définition. Soit M un T' -module tel que $\text{mult}_\lambda(M)$ soit fini pour tout $\lambda \in \Lambda$ (par exemple, si M est un objet de la catégorie \mathcal{O}). On définit le caractère de M comme étant la somme formelle $[M] \in \mathbb{Z}\mathcal{X}(T)$ définie par

$$[M] = \sum_{\lambda \in \mathcal{X}(T)} \text{mult}_\lambda(M) e^\lambda$$

et pour $f \in \mathbb{Z}\mathcal{X}(T)$, on note $f(\lambda)$ le coefficient devant e^λ .

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes :

Proposition 4.3.2. Soient M_1, M_2 et M_3 trois T -modules. Alors :

- (1) Si $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$ est une suite exacte, alors $[M_2] = [M_1] + [M_3]$.
- (2) Soient $f, g \in \mathbb{Z}\mathcal{X}(T)$. Lorsque pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'ensemble

$$\{(\mu, \nu) \in \Lambda^2 \mid \lambda = \mu + \nu, f(\mu)g(\nu) \neq 0\}$$

est fini, on définit $f * g$ par

$$(f * g)(\lambda) = \sum_{\mu + \nu = \lambda} f(\mu)g(\nu)$$

Alors on a $[M_1 \otimes M_2] = [M_1] * [M_2]$

Démonstration. Pour (1), il suffit de voir que si $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$ est une suite exacte, alors $\dim(M_2)_\lambda = \dim(M_1)_\lambda + \dim(M_3)_\lambda$, et pour le (2), il suffit de voir que $(M_1 \otimes M_2)_\lambda = \bigoplus_{\mu + \nu = \lambda} (M_1)_\mu \otimes (M_2)_\nu$ □

En particulier, si M est un T -module, et que l'on a une résolution

$$0 \rightarrow M \rightarrow M_0 \xrightarrow{d_0} M_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} M_n \rightarrow 0$$

de M , alors on a des suites exactes courtes

$$0 \rightarrow \ker(d_i) \rightarrow M_i \rightarrow \text{im}(d_i) \rightarrow 0$$

et on obtient

$$[M] = \sum (-1)^i [M_i]$$

Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur X , et supposons que G' est semi-simple simplement connexe. On peut alors G' -linéariser \mathcal{L} de manière unique. Grâce à l'égalité précédente, on obtient les résultats suivants :

Proposition 4.3.3. *Soit \mathcal{L} un faisceau inversible G' -linéarisé sur X .*

(1) *Si \mathcal{L} est engendré par ses sections globales, alors*

$$[H^0(X, \mathcal{L})] = \sum_{k=0}^n (-1)^k [H_{Z_k/Z_{k+1}}^k(X, \mathcal{L})] = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\sum_{l(w)=n-k} [H_{X_w}^k(X, \mathcal{L})] \right)$$

(2) *Si j est le premier entier strictement positif tel que $H_{Z_i}^j(X, \mathcal{H}_{Z_i}^i \mathcal{L})$ soit non nul, alors*

$$\begin{aligned} [H_{Z_i}^i(X, \mathcal{L})] &= \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k [H_{Z_{i+k}/Z_{i+k+1}}^{i+k}(X, \mathcal{L})] + (-1)^j [\text{im}(d_j)] \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \left(\sum_{l(w)=n-i-k} [H_{X_w}^{i+k}(X, \mathcal{L})] \right) + (-1)^j [\text{im}(d_j)] \end{aligned}$$

et pour tout $\lambda \in \mathcal{X}(T')$, on a $[\text{im}(d_j)](\lambda) \leq [H_{Z_{i+j}/Z_{i+j+1}}^{i+j}(X, \mathcal{L})](\lambda)$

(3) *Si $w \in W^P$ est de longueur $n - i$, et si j est le premier entier strictement positif tel que $H_{X_w}^j(X, \mathcal{H}_{X_w}^i \mathcal{L})$ soit non nul, alors*

$$\begin{aligned} [H_{X_w}^i(X, \mathcal{L})] &= \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k [H_{Z_{i+k} \cap \overline{X_w}/Z_{i+k+1} \cap \overline{X_w}}^{i+k}(X, \mathcal{L})] + (-1)^j [\text{im}(d_j)] \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \left(\sum_{\substack{l(w')=n-i-k \\ X_{w'} \subset \overline{X_w}}} [H_{X_{w'}}^{i+k}(X, \mathcal{L})] \right) + (-1)^j [\text{im}(d_j)] \end{aligned}$$

et pour tout $\lambda \in \mathcal{X}(T')$, on a $[\text{im}(d_j)](\lambda) \leq [H_{Z_{i+j} \cap \overline{X_w}/Z_{i+j+1} \cap \overline{X_w}}^{i+j}(X, \mathcal{L})](\lambda)$

Démonstration. Les égalités des caractères sont obtenus grâce aux complexes Cousin $_{\{Z\}}$ \mathcal{L} , Cousin $_{\{Z\},i}$ \mathcal{L} et Cousin $_{\{Z\},w}$ \mathcal{L} . Pour (1), si \mathcal{L} est engendré par ses sections globales, alors le théorème de Borel-Weil-Bott nous donne que les $H^i(X, \mathcal{L})$ sont nuls pour $i > 0$, donc Cousin $_{\{Z\}}$ \mathcal{L} est bien une résolution de $H^0(X, \mathcal{L})$. Les inégalités sont obtenues en remarquant que $\text{im}(d_j)$ est un sous-objet de $H_{Z_{i+j}/Z_{i+j+1}}^{i+j}(X, \mathcal{L})$. \square

Un avantage de ces formules est que l'on sait calculer les caractères $[H_{Z_k/Z_{k+1}}^k(X, \mathcal{L})]$. Introduisons d'abord quelques notations. Pour tout $w \in W^{P'}$, il existe un unique T' -point fixe x tel que $X_w = B' \cdot x$ (à savoir $x = wP'/P'$). Notons $P'_x = wP'w^{-1}$ le stabilisateur de x , U_x le conjugué par w du radical unipotent U' de P' et U_x^- le conjugué par w du sous-groupe unipotent U'^- opposé à U' . Notons $N(w) = U_x^- \cdot x$. Alors $N(w)$ est un ouvert de X isomorphe à un espace affine, contenant X_w comme un fermé, et on a $\overline{X_w} \cap N(w) = X_w$. Notons également $K(w)$ l'ensemble des racines positives qui sont dans U_x , $L(w)$ l'ensemble des racines positives qui sont dans U_x^- , et $J(w) = K(w) \sqcup L(w)$. Grâce au lemme d'excision, on a pour tout j

$$H_{X_w}^j(X, \mathcal{L}) = H_{X_w}^j(N(w), \mathcal{L})$$

et comme $N(w)$ est isomorphe à un espace affine, on peut calculer plus facilement son caractère, ce qui a été fait dans [Kel] 12.8 :

Proposition 4.3.4. *On a $H_{X_w}^j(X, \mathcal{L}_\lambda) = 0$ pour $j \neq n - l(w)$, et*

$$[H_{X_w}^{n-l(w)}(X, \mathcal{L}_\lambda)] = e^{ww_0, P'(\lambda)} \frac{\prod_{\alpha \in K(w)} e^\alpha}{\prod_{\beta \in J(w)} (1 - e^\beta)}$$

Remarque. Grâce à cette formule et en écrivant

$$[V_\lambda^*] = [H^0(X, \mathcal{L})] = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\sum_{l(w)=n-k} [H_{X_w}^k(X, \mathcal{L})] \right)$$

on peut retrouver la formule du caractère de Weyl en l'appliquant au cas $X = G/B$.

4.4 Lien avec la cohomologie sur les quotients géométriques

Soit X une variété algébrique irréductible projective munie de l'action d'un groupe réductif connexe G , et soit \mathcal{M} un faisceau inversible G -linéarisé sur X . Si \mathcal{L} est un faisceau inversible sur $Y := X^{ss}(\mathcal{M})/G$, on aimerait décrire les groupes de cohomologie $H^i(Y, \mathcal{L})$. Notons $\pi : X^{ss}(\mathcal{M}) \rightarrow Y$ le quotient. Comme dans les cas particuliers étudiés dans le chapitre précédent, on peut associer à \mathcal{L} un diviseur de Cartier (f_i) , et chacun des f_i peut être vu comme une fonction rationnelle G -invariante sur $X^{ss}(\mathcal{M})$, ce qui nous donne un diviseur de Cartier (donc un faisceau inversible G -linéarisé $\overline{\mathcal{L}}$) sur $X^{ss}(\mathcal{M})$ vérifiant pour tout ouvert U de Y

$$\mathcal{L}(U) = \overline{\mathcal{L}}(\pi^{-1}(U))^G$$

ce qui nous donne l'intuition de comparer $H^i(Y, \mathcal{L})$ et $H^i(X^{ss}(\mathcal{M}), \overline{\mathcal{L}})^G$.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de Y par des ouverts affine trivialisant \mathcal{L} . Comme \mathcal{L} est quasi-cohérent, on a des isomorphismes

$$H^i(Y, \mathcal{L}) = \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{L})$$

où $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{L})$ est le i -ème groupe de cohomologie du complexe de Čech $C^*(\mathcal{U}, \mathcal{L})$

$$0 \rightarrow \prod_{i_0} H^0(U_{i_0}, \mathcal{L}) \rightarrow \prod_{i_0 < i_1} H^0(U_{i_0} \cap U_{i_1}, \mathcal{L}) \rightarrow \prod_{i_0 < i_1 < i_2} H^0(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap U_{i_2}, \mathcal{L}) \rightarrow \dots$$

De la même manière, en notant $\mathcal{V} = (\pi^{-1}(U_i))_{i \in I}$, on a un recouvrement de $X^{ss}(\mathcal{M})$ par des ouverts affines G -invariants trivialisant $\overline{\mathcal{L}}$, et $H^i(X^{ss}(\mathcal{M}), \overline{\mathcal{L}}) = \check{H}^i(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{L}})$ est le i -ème groupe de cohomologie du complexe de Čech $C^*(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{L}})$. Par définition de $\overline{\mathcal{L}}$, on a

$$C^*(\mathcal{U}, \mathcal{L}) = C^*(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{L}})^G$$

et les flèches

$$d'_k : \prod_{i_0 < \dots < i_k} \mathcal{L}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}) \rightarrow \prod_{i_0 < \dots < i_{k+1}} \mathcal{L}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{k+1}})$$

sont les restrictions aux G -invariants des flèches

$$d_k : \prod_{i_0 < \dots < i_k} \overline{\mathcal{L}}(\pi^{-1}(U_{i_0}) \cap \dots \cap \pi^{-1}(U_{i_k})) \rightarrow \prod_{i_0 < \dots < i_{k+1}} \overline{\mathcal{L}}(\pi^{-1}(U_{i_0}) \cap \dots \cap \pi^{-1}(U_{i_{k+1}}))$$

puisqu'il est clair que d_k envoie les G -invariants sur des G -invariants. Ainsi on obtient que $\ker d'_k = \ker d_k \cap C^k(\mathcal{U}, \mathcal{L})$. Bien que ce soit moins évident, il se trouve que l'on a la même description pour $\text{im } d_k$:

Proposition 4.4.1. *On a $\text{im } d'_k = \text{im } d_k \cap C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{L})$, et $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{L}) = \check{H}^k(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{L}})^G$.*

Démonstration. La réductivité de G est importante ici. Comme G est réductif, $C^k(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{L}})^G$ admet un supplémentaire dans $C^k(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{L}})$. On dispose donc de morphismes de projections $p_k : C^k(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{L}}) \rightarrow C^k(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{L}})^G$, et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C^k(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{L}}) & \xrightarrow{d_k} & C^{k+1}(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{L}}) \\ \downarrow p_k & & \downarrow p_{k+1} \\ C^k(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{L}})^G & \xrightarrow{d'_k} & C^{k+1}(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{L}})^G \end{array}$$

commute, ce qui nous donne $\text{im } d'_k = (\text{im } d_k)^G$, et donc $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathcal{L}) = \check{H}^k(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{L}})^G$. \square

On a donc un isomorphisme $H^k(Y, \mathcal{L}) \rightarrow H^k(X^{ss}(\mathcal{M}), \overline{\mathcal{L}})^G$. Notons $X^{us} = X \setminus X^{ss}(\mathcal{M})$, et $i : X^{ss}(\mathcal{M}) \rightarrow X$, et supposons que X est normale, et que X^{us} est de codimension au moins 2. On peut alors prolonger $\overline{\mathcal{L}}$ en un unique faisceau inversible sur X , que nous noterons encore $\overline{\mathcal{L}}$, et on a une suite exacte

$$\dots \rightarrow H^{i-1}(X^{ss}(\mathcal{M}), \overline{\mathcal{L}}) \rightarrow H_{X^{us}}^i(X, \overline{\mathcal{L}}) \rightarrow H^i(X, \overline{\mathcal{L}}) \rightarrow H^i(X^{ss}(\mathcal{M}), \overline{\mathcal{L}}) \rightarrow H_{X^{us}}^{i+1}(X, \overline{\mathcal{L}}) \rightarrow \dots$$

Cette suite exacte nous donne $H^k(X^{ss}(\mathcal{M}), \overline{\mathcal{L}})$ dans plusieurs cas :

- si $H^k(X, \overline{\mathcal{L}}) = H^{k+1}(X, \overline{\mathcal{L}}) = 0$, alors on a un isomorphisme

$$H^k(X^{ss}(\mathcal{M}), \overline{\mathcal{L}}) \simeq H_{X^{us}}^{k+1}(X, \overline{\mathcal{L}})$$

- si $k < \text{codim } X^{us} - 1$, alors

$$H^k(X^{ss}(\mathcal{M}), \overline{\mathcal{L}}) \simeq H^k(X, \overline{\mathcal{L}})$$

De plus, X^{us} est un fermé G -stable de X , donc ces isomorphismes sont des isomorphismes de G -modules, ce qui nous donne les mêmes isomorphismes entre les G -invariants.

Remarque. Lorsque X est une variété de drapeaux, les $H^k(X, \overline{\mathcal{L}})$ sont presque tous nuls (au plus un seul est non nul, d'après le théorème de Borel-Weil-Bott), ce qui nous permet de calculer presque tous les $H^k(Y, \mathcal{L})$. De plus, lorsque X^{us} est une union disjointe de variétés de Schubert, on peut approcher $H_{X^{us}}^{k+1}(X, \overline{\mathcal{L}})^G$ grâce à une approximation des G -invariants du caractère $[H_{X^{us}}^{k+1}(X, \overline{\mathcal{L}})]$. Les exemples que nous allons maintenant étudier rentrent dans ce cadre.

4.5 Retour sur les exemples de type A_2

Reprenons les trois exemples étudiés dans le chapitre précédent, à savoir les compactifications magnifiques Y de PGL_3 , $\text{PGL}_3/\text{PSO}_3$ et de $\text{PGL}_6/\text{PSP}_6$. Rappelons que ces variétés sont isomorphes à un certain quotient géométrique $X^{ss}(0)/\mathbb{C}^*$ d'une grassmannienne X . L'objectif de cette section est de montrer que les groupes de cohomologie $H^i(Y, \mathcal{L})$ pour $i = \text{codim } X^{us}$ sont des $D_{Y, \mathcal{L}}$ -modules simples à gauche. Pour cela, nous allons montrer pour ces exemples que $H^i(Y, \mathcal{L})$ sont isomorphe à un $H_Z^{i+1}(X, \mathcal{L}')^{\mathbb{C}^*}$ pour un certain fermé connexe Z et un certain faisceau inversible \mathbb{C}^* -linéarisé \mathcal{L}' sur X , qui est un $D_{X, \mathcal{L}'}^{\mathbb{C}^*}$ -module simple à gauche. Comme on a déjà montré dans le chapitre précédent que les $H^0(Y, \mathcal{L})$ sont des $D_{Y, \mathcal{L}}$ -modules simples, on pourra, à l'aide de la dualité de Serre, écrire ce résultat sous cette forme :

Théorème 4.5.1. *Sur ces exemples de type A_2 , pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur Y , $H^i(Y, \mathcal{L})$ est un $D_{Y, \mathcal{L}}$ -module simple à gauche pour tout i .*

Commençons par énoncer plusieurs lemmes : soit X une variété algébrique projective lisse munie de l'action d'un groupe algébrique réductif G , et soit F est une cellule de $C^G(X)$ telle que $X^{us} := X \setminus X^{ss}(F)$ soit de codimension au moins 2. Notons $j : X^{ss}(F) \rightarrow X$ l'inclusion et $\pi : X^{ss}(F) \rightarrow Y(F)$ le quotient. Alors :

Lemme 4.5.2. *Le morphisme*

$$\begin{aligned} q : \text{Pic}^G(X) &\rightarrow \text{Pic}(Y(F)) \\ \mathcal{L} &\mapsto (\pi_* j^* \mathcal{L})^G \end{aligned}$$

admet une cosection $s : \text{Pic}(Y(F)) \rightarrow \text{Pic}^G(X)$ qui est un morphisme de groupes

Démonstration. Le morphisme q est déjà bien défini puisque pour tout ouvert U de $Y(F)$, on a

$$\pi_* j^* \mathcal{L}(U)^G = \{f \in \mathcal{L}(\pi^{-1}(U)), \forall g \in G, g.f = f\} = j^* \mathcal{L}(\pi^{-1}(U))^G$$

et comme X^{us} est de codimension au moins 2, on peut trouver de la même manière que dans la section 3.5 pour tout $\mathcal{M} \in \text{Pic}(Y(F))$ un $\overline{\mathcal{M}}$ tel que $q(\overline{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}$: si (f_i) est le diviseur de Cartier associé à \mathcal{M} , le diviseur de Cartier $(\pi^* f_i)$ sur $X^{ss}(F)$ se prolonge de manière unique en un diviseur de Cartier (\tilde{f}_i) sur X , et $\overline{\mathcal{M}}$ est le faisceau inversible associé à \mathcal{M} . La G -linéarisation de $\overline{\mathcal{M}}$ provient du fait que les sections trivialisantes sont G -invariantes. La cosection est donc $s : \mathcal{M} \mapsto \overline{\mathcal{M}}$, et pour tout ouvert U de $Y(F)$ et $\mathcal{M} \in \text{Pic}(Y(F))$, on a

$$\mathcal{M}(U) = s(\mathcal{M})(\pi^{-1}(U))^{\mathbb{C}^*}$$

Comme $\pi^* f_i \pi^* g_j = \pi^*(f_i g_j)$ pour deux diviseurs de Cartier (f_i) et (g_j) , s est bien un morphisme de groupes. \square

Remarquons également que si X est une G -variété, les groupes de cohomologie $H_Z^i(X, \mathcal{L})$ sont des \mathfrak{g} -modules, et

Proposition 4.5.3. *On a un isomorphisme $H_{gZ}^i(X, \mathcal{L}) = g^{-1} H_Z^i(X, g\mathcal{L})$*

Démonstration. Il suffit de le remarquer pour $i = 0$, où on a

$$\begin{aligned} \Gamma_{gZ}(X, \mathcal{L}) &= \{\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{L}), \sigma|_{gZ} = 0\} \\ &= \{g^{-1}\sigma, \sigma \in \Gamma_Z(X, g\mathcal{L}), \sigma|_Z = 0\} \\ &= g^{-1}\Gamma_Z(X, g\mathcal{L}) \end{aligned}$$

\square

En particulier, si $X = G/P$ est une variété de drapeaux et $w \in W^P$, alors on a $[H_{wZ}^i(X, \mathcal{L}_\lambda)] = w^{-1}[H_Z^i(X, \mathcal{L}_{w\lambda})]$.

Rappelons également le fait suivant, que l'on peut trouver par exemple dans [HTT] (1.2.7) :

Lemme 4.5.4. *Si A est un anneau, on note A^{op} l'anneau tel que $A = A^{op}$ comme groupe abélien, et la multiplication \star sur A^{op} est donnée par $a \star b = ba$. On a alors un isomorphisme*

$$\mathcal{D}_X^{op} \simeq \omega_X \otimes \mathcal{D}_X \otimes \omega_X^{\otimes -1}$$

En particulier, $\mathcal{D}_{X,\mathcal{L}}^{op} = \mathcal{D}_{X,\mathcal{L}^{\otimes -1} \otimes \omega_X}$, et on a une équivalence de catégories entre les $\mathcal{D}_{X,\mathcal{L}}$ -modules à gauche quasi-cohérents et les $\mathcal{D}_{X,\mathcal{L}^{\otimes -1} \otimes \omega_X}$ -modules à droite quasi-cohérents. Lorsque X est une variété de drapeaux, les catégories des $\mathcal{D}_{X,\mathcal{L}}$ -modules à gauche et des $\mathcal{D}_{X,\mathcal{L}^{\otimes -1} \otimes \omega_X}$ -modules à droites sont équivalentes, puisque X est \mathcal{D} -affine.

Avant de commencer, nous allons énoncer le résultat crucial de cette section :

Lemme 4.5.5. *Soit $X = G/P$ une variété de drapeaux, et $Z \subset X$ un fermé connexe de codimension l . Alors pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur X , le $\mathcal{D}_{X,\mathcal{L}}$ -module $H_Z^l(X, \mathcal{L})$ est simple.*

Démonstration. Notons X^{an} l'espace analytique associé à X , et notons par $\underline{\Gamma}_{[Z]}$ et $\mathcal{H}_{[Z]}^*$ les équivalents analytiques des foncteurs $\underline{\Gamma}_Z$ et \mathcal{H}_Z^* . Ce lemme découle alors de plusieurs résultats de Brylinski-Kashiwara (cf. [BK] 1.4 et 1.5) :

- en notant $j : X^{an} \rightarrow X$ le morphisme naturel d'espaces annelés, on a pour tout \mathcal{O}_X -module cohérent \mathcal{F}

$$\mathcal{H}_{[Z]}^*(j^*\mathcal{F}) = j^*\mathcal{H}_Z^*(\mathcal{F})$$

- si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X^{an}}$ -module cohérent dont la variété caractéristique est incluse dans celle de $\mathcal{H}_{[Z]}^l(\mathcal{O}_{X^{an}})$, alors le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X^{an}}}(\mathcal{H}_{[Z]}^l(\mathcal{O}_{X^{an}}), \mathcal{M})$ est localement constant de rang fini sur Z , et on a un isomorphisme

$$\mathcal{H}_{[Z]}^l(\mathcal{O}_{X^{an}}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X^{an}}}(\mathcal{H}_{[Z]}^l(\mathcal{O}_{X^{an}}), \mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}$$

Lorsque Z est connexe, on obtient :

- si Z est connexe, tout sous- $\mathcal{D}_{X^{an}}$ -module cohérent de $\mathcal{H}_{[Z]}^l(\mathcal{O}_{X^{an}})$ est soit $\mathcal{H}_{[Z]}^l(\mathcal{O}_{X^{an}})$ soit 0.

puisque si \mathcal{M} est un tel sous-module, alors $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X^{an}}}(\mathcal{H}_{[Z]}^l(\mathcal{O}_{X^{an}}), \mathcal{M})$ est sur Z le faisceau constant 0 ou $\underline{\mathbb{C}}$, ce qui donne $\mathcal{M} = 0$ ou $\mathcal{H}_{[Z]}^l(\mathcal{O}_{X^{an}})$.

Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur X , et soit \mathcal{F} un sous- \mathcal{D}_X -module quasi-cohérent strict de $\mathcal{H}_Z^l(\mathcal{L}) = \mathcal{H}_Z^l(\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{L}$. Alors $j^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes -1})$ est un $\mathcal{D}_{X^{an}}$ -module quasi-cohérent strict de $\mathcal{H}_{[Z]}^l(\mathcal{O}_{X^{an}})$. Comme les faisceaux quasi-cohérents sont des limites directes de leurs sous-faisceaux cohérents, on obtient que $j^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes -1}) = 0$ et $\mathcal{F} = 0$.

Soit maintenant M un sous- $\mathcal{D}_{X,\mathcal{L}}$ -module strict de $H_Z^l(X, \mathcal{L}) = H^0(X, \mathcal{H}_Z^l(\mathcal{L}))$. Par \mathcal{D} -affinité de X , $\mathcal{D}_{X,\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{D}_{X,\mathcal{L}}} M$ est un sous- $\mathcal{D}_{X,\mathcal{L}}$ -module strict quasi-cohérent de $\mathcal{H}_Z^l(\mathcal{L})$, donc est nul. Ainsi $H_Z^l(X, \mathcal{L})$ est un $\mathcal{D}_{X,\mathcal{L}}$ -module simple. \square

4.5.1 Cas de $\overline{\mathrm{PGL}}_3$

Rappelons que dans le chapitre 3, nous avons montré que $Y = \overline{\mathrm{PGL}}_3$ était isomorphe au quotient géométrique $X^{ss}(0)/\mathbb{C}^*$, où $X = \mathrm{Gr}_3(V \oplus V^*)$ et $V = \mathbb{C}^3$. Reprenons les mêmes notations G', T', B', P', π_0 et ι que dans la section 3.5.1. Notons Λ le réseau des poids de T' . Rappelons également que X^{us} à deux composantes connexes

$$F_1 = \{U \in X, \dim(U \cap V) \geq 2\} \text{ et } F_2 = \{U \in X, \dim(U \cap V^*) \geq 2\}$$

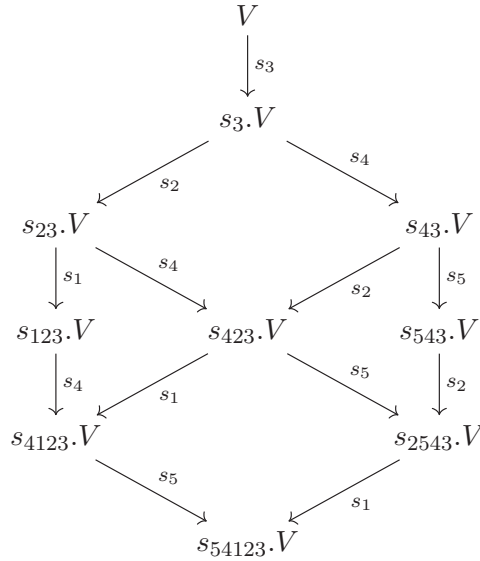
Nous allons montrer

Proposition 4.5.6. *F_1 est une variété de Schubert de X , et F_2 est son translaté par $w_{0,P'}$ le mot de plus grande longueur dans $W_{P'}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que F_1 est un fermé B' -stable, puisque si $b \in B'$ et $U \in F_1$, alors

$$\dim bU \cap V = \dim U \cap b^{-1}V = \dim U \cap V \geq 2$$

et comme $w_{0,P'}.V = V^*$, $F_2 = w_{0,P'}.F_1$. \square

FIGURE 4.1 – T' -points fixes de F_1

Remarque. On peut également se servir du critère d'Hilbert-Mumford pour avoir une décomposition de $X^{us}(0)$ en cellules de Bialynicki-Birula de la manière suivante. Rappelons que \mathbb{C}^* agit sur X par le sous-groupe à un paramètre $\tau = 2\varpi_3^\vee$. Soit $x \in X$. Pour examiner la semi-stabilité de X , il suffit d'après le critère d'Hilbert-Mumford de regarder l'action de tous les sous-groupes à un paramètre $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow \tau(\mathbb{C}^*)$ sur la fibre $\iota^*(\mathcal{O}(1))_{x_0^\lambda}$, où $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ est un plongement et

$$x_0^\lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t).x$$

Or ces sous groupes à un paramètre sont exactement les $k\tau$, avec $k \in \mathbb{Z}$, et si $k > 0$, alors $x_0^{k\tau} = x_0^\tau$ et si τ agit sur $\iota_*(\mathcal{O}(1))_{x_0^\tau}$ par le caractère μ , alors $k\tau$ agit sur cette fibre par le caractère $k\mu$. Il suffit donc de se restreindre aux sous-groupes à un paramètre τ et $-\tau$ pour étudier la semi-stabilité de x . Comme le critère d'Hilbert-Mumford ne regarde que ce qu'il se passe en les x_0^λ , on en déduit que $X^{us}(0)$ est une union de cellules de Bialynicki-Birula de X

$$X_\lambda^+(z) := \{y \in X, \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t).y = z\}$$

(où z est un $\tau(\mathbb{C}^*)$ -point fixe de X) pour les sous-groupes à un paramètre $\lambda = \tau$ ou $-\tau$. Remarquons que $X_{-\tau}^+(z) = w_{0,P'}X_\tau^+(w_{0,P'}z)$ (puisque dans ce cas $w_0 = -1$), et comme P' est le sous-groupe parabolique maximal associé à la racine simple β_3 , on a $\langle \alpha, \tau \rangle \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi_{P'}$, donc $X^{T'} = X^{\tau(\mathbb{C}^*)}$. Ainsi $X^{us}(0)$ est une union de cellules de la forme $X_\tau^+(w.P'/P')$ et $w_{0,P'}X_\tau^+(w_{0,P'}w.z)$ avec $w \in W_{P'}$, et comme $X^{us}(0)$ est fermé, s'il contient $X_\tau^+(w.P/P)$ il contient tous les $X_\tau^+(w'.P'/P')$ avec $w > w'$.

Regardons maintenant quels sont les T' -points fixes de F_1 . Comme V est l'unique B' -point fixe de X , ils sont tous de la forme $w.V$, avec $w \in W^{P'}$. De plus, $W^{P'}$ agit par permutation sur les éléments de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ de $V \oplus V^*$, donc $w.V$ est dans F_1 si et seulement si au moins deux vecteurs parmi $w.e_1, w.e_2$ et $w.e_3$ sont dans $\{e_1, e_2, e_3\}$. On notera pour simplifier $s_{i_1 \dots i_k}$ pour désigner $s_{i_1} \dots s_{i_k}$. On trouve donc que les T' -points fixes de F_1 sont donnés sur la figure 4.1 Ainsi, en notant $w = s_{54123}w_{0,P'}$, on a $F_1 = \overline{X_w}$. Remarquons que si $w' < w$, ce diagramme nous donne exactement les $X_{w''}$ contenus dans $\overline{X_{w'}}$, puisque la relation d'ordre $w_1 < w_2$ engendrée par les flèches

$w_2.V \rightarrow w_1.V$ est exactement l'ordre de Bruhat.

Rappelons que comme X est une variété magnifique de rang minimal, on dispose d'une description explicite des groupes de cohomologie $H^i(Y, \mathcal{L})$ (cf. 2.3.4) donnée par

$$H^i(Y, \mathcal{L}_\lambda) \simeq \bigoplus_{J \subset \Sigma_X} \bigoplus_{\substack{\mu \in (\lambda + R_J) \cap \Omega_J \\ \mu + \rho \text{ régulier} \\ l(\mu) + |J| = i}} V_{\mu^*}$$

où pour toute partie $J \subset \Sigma_X$,

$$R_J := \sum_{\gamma \in J} \mathbb{Z}_{>0} \gamma + \sum_{\gamma \in \Sigma_X \setminus J} \mathbb{Z}_{\leq 0} \gamma$$

et

$$\Omega_J := \{\mu \in \Gamma \mid \{\gamma \in \Sigma_X \mid (\mu + \rho, \gamma) < 0\} = J\}$$

$\text{Pic}(Y)$ est engendré par $\mathcal{O}_X(d_1) \simeq \mathcal{L}_{(\varpi_1, -\varpi_1)}$ et par $\mathcal{O}_X(d_2) \simeq \mathcal{L}_{(\varpi_2, -\varpi_2)}$, donc on peut l'identifier avec le réseau

$$\{(\alpha, -\alpha), \alpha \in \Lambda'\}$$

où Λ' désigne le réseau des poids de PGL_3 . Notons pour simplifier, $\tilde{\varpi}_i = (\varpi_i, -\varpi_i)$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 2\tilde{\varpi}_1 - \tilde{\varpi}_2 \\ \gamma_2 &= 2\tilde{\varpi}_2 - \tilde{\varpi}_1 \\ \rho &= \gamma_1 + \gamma_2 = \tilde{\varpi}_1 + \tilde{\varpi}_2 \end{aligned}$$

Comme $\text{Pic}(Y)$ est engendré par $\mathcal{L}_{\tilde{\varpi}_1}$ et $\mathcal{L}_{\tilde{\varpi}_2}$, il suffit de connaître leurs images par la cosection s pour déterminer s entièrement. Rappelons que comme X^{us} est de codimension au moins 2, on a $H^0(Y, \mathcal{L}) = H^0(X, s(\mathcal{L}))^{\mathbb{C}^*}$. Pour éviter toute confusion, on note par des \mathcal{L} les faisceaux inversibles sur Y , et par des $\bar{\mathcal{L}}$ les faisceaux inversibles sur X . Rappelons que si U est un ouvert \mathbb{C}^* -invariant de $X^{ss}(0)$ et si $\bar{\mathcal{L}}$ est un faisceau inversible \mathbb{C}^* -linéarisé sur X , on note $\bar{\mathcal{L}}(U)_n$ est la partie de poids n pour l'action de \mathbb{C}^* de $\bar{\mathcal{L}}$. On montre alors :

Proposition 4.5.7. *A renumérotation près, on a pour tout ouvert U de Y :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\varpi}_1}(U) &= \bar{\mathcal{L}}_{\varpi_3}(\pi_0^{-1}(U))_{-1} \\ \mathcal{L}_{\tilde{\varpi}_2}(U) &= \bar{\mathcal{L}}_{\varpi_3}(\pi_0^{-1}(U))_1 \end{aligned}$$

Démonstration. On sait déjà qu'il existe k_i et n_i tels que

$$\mathcal{L}_{\tilde{\varpi}_1}(U) = \bar{\mathcal{L}}_{k_i \varpi_3}(\pi_0^{-1}(U))_{n_i}$$

On a $H^0(Y, \mathcal{L}_{\tilde{\varpi}_i}) = V_{\tilde{\varpi}_i}^* \neq 0$, donc $k_i \varpi_3$ est dominant, donc $k_i \geq 0$. Puisque $\bar{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{O}_X$, ses sections globales sont isomorphes à \mathbb{C} , et les \mathbb{C}^* -semi-invariants de ses sections globales sont concentrées en degré 0. Comme pour tout ouvert U de Y , $\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_X(\pi_0^{-1}(U))_0$, et comme s admet une section (à savoir q), on en déduit que $k_i > 0$.

Remarquons que l'ensemble des $\lambda \in \Lambda'$ tel que $H^0(Y, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0$, que nous notons $SG(\Lambda')$, est le cône convexe engendré par γ_1 et γ_2 intersecté avec Λ' . Ainsi pour tout $\lambda \in SG(\Lambda')$, il existe des entiers positifs a_1, a_2, b_1, b_2 tels que $\lambda = a_1 \tilde{\varpi}_1 + a_2 \tilde{\varpi}_2 + b_1 \gamma_1 + b_2 \gamma_2$. De plus, pour tout $\lambda \in SG(\Lambda') \setminus 0$, on a

$$\mathcal{L}_\lambda(U) = \bar{\mathcal{L}}_{k_\lambda \varpi_3}(\pi_0^{-1}(U))_{n_\lambda}$$

avec $k_\lambda > a_1 k_1 + a_2 k_2 + b_1 k_{\gamma_1} + b_2 k_{\gamma_2} > 0$, donc $k_\lambda = 1$ n'est possible que pour $\lambda = \tilde{\varpi}_1, \tilde{\varpi}_2, \gamma_1$ ou γ_2 . Notons $k'_i = k_{\gamma_i}$, et $n'_i = n_{\gamma_i}$. Comme $H^0(X, \bar{\mathcal{L}}_{\varpi_3}) = \Lambda^3(\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3)$ où \mathbb{C}^* agit avec le poids 1 sur le premier \mathbb{C}^3 et -1 sur le deuxième, ses \mathbb{C}^* -semi-invariants sont de poids -3, -1,

1 et 3. En particulier, si \mathbb{C}^* agit avec un de ces poids sur les sections trivialisantes de $\overline{\mathcal{L}}_{\varpi_3}$, on remarque que $q(\overline{\mathcal{L}}_{\varpi_3}) \neq \mathcal{O}_Y$. Ainsi au moins un des k_i ou k'_i est égal à 1. Or comme $k'_i = 2k_i - k_j$ avec $i \neq j$, si l'un des k'_i ou des k_i est égal à 1, alors ils le sont tous (puisque les k_i et k'_i sont strictement positifs). De plus, $n'_i = 2n_i - n_j$, et on a $\{n_1, n_2, n'_1, n'_2\} = \{-3; -1; 1; 3\}$, donc à renumérotation près, on a nécessairement $n_1 = -1, n_2 = 1, n'_1 = -3$ et $n'_2 = 3$. \square

Remarque. C'est cohérent avec le fait que $H^0(Y, \mathcal{L}_{\gamma_i}) = \mathbb{C}$, puisque $\Lambda^3(\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3)_{\pm 3} \simeq \mathbb{C}$.

Grâce à cette description de s , on montre

Proposition 4.5.8. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $H^4_{X^{us}}(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$ et $H^6_{X^{us}}(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$ sont non nuls.*

Démonstration. Remarquons déjà que seuls les groupes de cohomologie $H^0(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$ et $H^9(X, \overline{\mathcal{L}}_{\varpi_3})$ peuvent être non nuls, puisque :

- si $k \geq 0$, seul le $H^0(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$ est non nul (puisque $k\varpi_3 + \rho$ est dominant) ;
- si $-5 \leq k \leq -1$, tous les groupes de cohomologie sont nuls (puisque $k\varpi_3 + \rho$ n'est pas régulier) ;
- si $k \leq -6$, seul le $H^9(X, \overline{\mathcal{L}}_{\varpi_3})$ est non nul (puisque $-k\varpi_3 - \rho$ est dominant)

Ainsi on a des isomorphismes $H^4_{X^{us}}(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) = H^3(X^{ss}(0), \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$ et $H^6_{X^{us}}(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) = H^5(X^{ss}(0), \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$.

Si $k \leq 0$, considérons le faisceau $\mathcal{L}_{4\tilde{\omega}_1 - 4\tilde{\omega}_2 + k\gamma_1}$. On a alors pour tout ouvert U de Y

$$\mathcal{L}_{4\tilde{\omega}_1 - 4\tilde{\omega}_2 + k\gamma_1}(U) = \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}(\pi_0^{-1}(U))_{-8-3k}$$

et

$$V_{2\tilde{\omega}_1} \subset H^3(Y, \mathcal{L}_{4\tilde{\omega}_1 - 4\tilde{\omega}_2 + k\gamma_1}) = H^3(X^{ss}(0), s(\mathcal{L}_{4\tilde{\omega}_1 - 4\tilde{\omega}_2 + k\gamma_1}))^{\mathbb{C}^*} \neq 0$$

Si $k \geq 0$, considérons plutôt le faisceau $\mathcal{L}_{4\tilde{\omega}_2 - 4\tilde{\omega}_1 + k\gamma_2}$. On a alors pour tout ouvert U de Y

$$\mathcal{L}_{4\tilde{\omega}_2 - 4\tilde{\omega}_1 + k\gamma_2}(U) = \overline{\mathcal{L}}_{k\lambda\varpi_3}(\pi_0^{-1}(U))_{8+3k}$$

et

$$V_{2\tilde{\omega}_2} \subset H^3(Y, \mathcal{L}_{4\tilde{\omega}_2 - 4\tilde{\omega}_1 + k\gamma_2}) = H^3(X^{ss}, s(\mathcal{L}_{4\tilde{\omega}_2 - 4\tilde{\omega}_1 + k\gamma_2}))^{\mathbb{C}^*} \neq 0$$

Dans tous les cas, on a bien $H^3(X^{ss}(0), \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) \neq 0$. Pour montrer que $H^5(X^{ss}(0), \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) \neq 0$, on utilise la dualité de Serre sur Y , qui nous donne pour tout faisceau inversible \mathcal{L}_λ un isomorphisme

$$H^5(Y, \mathcal{L}_\lambda) \simeq H^3(Y, \mathcal{L}_{-\lambda - 2\tilde{\omega}_1 - 2\tilde{\omega}_2})^*$$

où le $*$ désigne le dual en tant qu'espace vectoriel. \square

Remarque. Comme Y est une compactification magnifique d'espace symétrique, on a grâce à [DCP] 8.3 une description explicite du faisceau canonique

$$\omega_Y = \mathcal{L}_{-\mu}$$

où $\mu = \sum_{\alpha \in \Phi_1^+} \alpha$. Dans notre cas, on a $\omega_Y = \mathcal{L}_{-2\tilde{\omega}_1 - 2\tilde{\omega}_2}$.

On voudrait maintenant se servir du complexe de la section 2 pour calculer $H^4_{F_i}(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$. Soit j le plus petit entier strictement positif (s'il existe) tel que $H^j_{F_1}(X, \mathcal{H}^4_{F_1}(\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})) \neq 0$. On a alors $H^{4+j}_{F_1}(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) \neq 0$, et $H^{4+j}_{X^{us}}(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) \neq 0$. Si $j = 1, 3$ ou 4 , on a

$$H^{3+j}(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) = H^{4+j}(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) = 0$$

donc on a

$$H_{X^{us}}^{4+j}(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) = H^{3+j}(X^{ss}, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$$

et pour toute \mathbb{C}^* -linéarisation de $\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}$, on a

$$H_{X^{us}}^{4+j}(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})^{\mathbb{C}^*} = H^{3+j}(X^{ss}, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})^{\mathbb{C}^*} = H^{3+j}(Y, q(\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})) = 0$$

grâce à la description de la cohomologie sur Y . Ainsi $H_{F_1}^{4+j}(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) = H_{X^{us}}^{4+j}(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) = 0$ pour $j = 1, 3$ ou 4 .

Rappelons que l'on a noté w l'élément de $W_{P'}$ tel que $Bs_{54123}.V = X_w$ (on a $w = s_{3423}$ puisque $w_{0,P'} = s_{342312543}$). On sait que $H_{F_1}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$ est le noyau de la flèche

$$H_{X_w}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) \rightarrow H_{X_{s_1w}}^5(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) \oplus H_{X_{s_5w}}^5(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$$

On a alors pour tout $\lambda \in \Lambda$

$$\begin{aligned} [H_{X_w}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})](\lambda) &\geq [H_{F_1}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})](\lambda) \\ [H_{F_1}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})](\lambda) &\geq [H_{X_w}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})](\lambda) - [H_{X_{s_1w}}^5(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})](\lambda) - [H_{X_{s_5w}}^5(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})](\lambda) \end{aligned}$$

Calculons ces caractères. On a :

- $ww_{0,P'}(k\varpi_3) = \frac{k}{2}(\alpha_3 - \alpha_5 - \alpha_1)$;
- $s_1ww_{0,P'}(k\varpi_3) = \frac{k}{2}(\alpha_3 - \alpha_5 + \alpha_1)$;
- $s_5ww_{0,P'}(k\varpi_3) = \frac{k}{2}(\alpha_3 + \alpha_5 - \alpha_1)$;
- $K(w) = \{\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4\}$;
- $L(w) = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5\}$;
- $K(s_1w) = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4\}$;
- $L(s_1w) = \{\alpha_2, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5\}$;
- $K(s_5w) = \{\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5\}$;
- $L(s_5w) = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4\}$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} [H_{X_w}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})] &= e^{\frac{k}{2}(\alpha_3 - \alpha_5 - \alpha_1)} e^{\alpha_2 + \alpha_3} e^{\alpha_3} e^{\alpha_3 + \alpha_4} e^{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} \prod_{\lambda \in J(w)} \sum_{k \geq 0} e^\lambda \\ [H_{X_{s_1w}}^5(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})] &= e^{\frac{k}{2}(\alpha_3 - \alpha_5 + \alpha_1)} e^{\alpha_1} e^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} e^{\alpha_3} e^{\alpha_3 + \alpha_4} e^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} \prod_{\lambda \in J(s_1w)} \sum_{k \geq 0} e^\lambda \\ [H_{X_{s_5w}}^5(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})] &= e^{\frac{k}{2}(\alpha_3 + \alpha_5 - \alpha_1)} e^{\alpha_2 + \alpha_3} e^{\alpha_3} e^{\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5} e^{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5} e^{\alpha_5} \prod_{\lambda \in J(s_5w)} \sum_{k \geq 0} e^\lambda \end{aligned}$$

Grâce à cette description, on remarque que les \mathbb{C}^* -semi-invariants de $H_{F_1}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$ sont de poids au moins $8 + k$. Grâce au lemme 4.5.3, on obtient que les \mathbb{C}^* -semi-invariants de $H_{F_2}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$ sont de poids au plus $-8 + k$. Ainsi pour tout faisceau inversible \mathbb{C}^* -linéarisé \mathcal{L} sur X , au moins un des deux $H_{F_1}^4(X, s(\mathcal{L}))^{\mathbb{C}^*}$ et $H_{F_2}^4(X, s(\mathcal{L}))^{\mathbb{C}^*}$ est nul.

On peut maintenant montrer

Proposition 4.5.9. *Pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur Y , $H^i(Y, \mathcal{L})$ est un $D_{Y, \mathcal{L}}$ -module simple à gauche pour tout i .*

Démonstration. Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur Y . Commençons pour le montrer lorsque $i = 3$. Il existe k et n deux entiers tels que pour tout ouvert U de Y , on ait

$$\mathcal{L}(U) \simeq \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}(\pi_0(U))_n$$

et alors

$$H^3(Y, \mathcal{L}) = H^3(X^{ss}(0), \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n = H_{X^{us}}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n$$

Or on vient de voir qu'il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que $H_{X^{us}}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n = H_{F_i}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n$, et F_i est connexe. On peut donc appliquer le lemme 4.5.5, qui nous dit que $H_{F_i}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$ est un $D_{X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}}$ -module simple à gauche, et donc $H_{F_i}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n$ est un $D_{X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}}^{\mathbb{C}^*}$ -module simple à gauche. En particulier, $H_{F_i}^4(X, \mathcal{O}_X)_n$ est un $D_X^{\mathbb{C}^*}$ -module simple. Soit Ω un ouvert \mathbb{C}^* -invariant de X contenant F_i . Comme $\mathcal{H}_{F_i}^4(\mathcal{L})$ est à support dans F_i , on a $H_{F_i}^4(X, \mathcal{L}) = \mathcal{H}_{F_i}^4(\mathcal{L})(\Omega)$. Si \mathcal{F} est un faisceau sur X , notons

$$\mathcal{F}^{glob}(\Omega) = \{\sigma|_{\Omega}, \sigma \in \Gamma(X, \mathcal{F})\}$$

Alors $\mathcal{H}_{F_i}^4(\mathcal{L})(\Omega)_n$ est un $\mathcal{D}_X^{glob}(\Omega)_0$ -module simple. De plus, comme $\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3} \otimes \mathcal{D}_X \otimes \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}^{\otimes -1}$ est isomorphe à \mathcal{D}_X en tant que \mathcal{O}_X -module, on a

$$((\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n \otimes (\mathcal{D}_X)_0 \otimes (\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}^{\otimes -1})_{-n})^{glob}(\Omega) = \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}(\Omega)_n \otimes \mathcal{D}_X^{glob}(\Omega)_0 \otimes \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}^{\otimes -1}(\Omega)_{-n}$$

Comme

$$\mathcal{H}_{F_i}^4(\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) = \mathcal{H}_{F_i}^4(\mathcal{O}_X) \otimes \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}$$

on obtient que $\mathcal{H}_{F_i}^4(\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})(\Omega)_n$ est un $\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}(\Omega)_n \otimes \mathcal{D}_X^{glob}(\Omega)_0 \otimes \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}^{\otimes -1}(\Omega)_{-n}$ -module simple, ie. $H_{F_i}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n$ est un $H^0(X, (\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n \otimes (\mathcal{D}_X)_0 \otimes (\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}^{\otimes -1})_{-n})$ -module simple. Or

$$H_{F_i}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n = H^3(Y, \mathcal{L})$$

et

$$H^0(X, (\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n \otimes (\mathcal{D}_X)_0 \otimes (\overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}^{\otimes -1})_{-n}) \simeq D_{Y, \mathcal{L}} \otimes \mathbb{C}[t\partial_t]$$

et comme l'action de $t\partial_t$ sur $H^3(Y, \mathcal{L})$ est triviale, $H^3(Y, \mathcal{L})$ est un $D_{Y, \mathcal{L}}$ -module simple.

Le cas où $i = 0$ a déjà été traité dans le chapitre précédent. Rappelons que les seuls groupes de cohomologie non nuls sont en degrés 0, 3, 5 et 8. Si $i = 5$ ou 8, on utilise la dualité de Serre

$$H^i(Y, \mathcal{L}_\lambda) \simeq H^{n-i}(Y, \mathcal{L}_{-\lambda-\mu})^*$$

Comme $H^{n-i}(Y, \mathcal{L}_{-\lambda-\mu})$ est un $D_{Y, \mathcal{L}^{\otimes -1} \otimes \omega_Y}$ -module simple à gauche, son dual est un $D_{Y, \mathcal{L}^{\otimes -1} \otimes \omega_Y}$ -module simple à droite, donc d'après le lemme 4.5.4, c'est un $D_{Y, \mathcal{L}}$ -module à gauche. Ainsi les $H^i(Y, \mathcal{L}_\lambda)$ avec $i = 5$ ou 8 sont des $D_{Y, \mathcal{L}}$ -modules simples. \square

4.5.2 Cas de $\overline{\text{PGL}_3/\text{PSO}_3}$

Rappelons que $Y = \overline{\text{PGL}_3/\text{PSO}_3}$ est isomorphe au quotient géométrique $X^{ss}(0)/\mathbb{C}^*$, où $X = \text{LaGr}_3(V \oplus V^*)$ et $V = \mathbb{C}^3$. Reprenons les mêmes notations G', T', B', P', π_0 et ι que dans la section 3.5.2. Notons toujours Λ le réseau des poids de T' . L'ensemble des points instables X^{us} à toujours deux composantes connexes

$$F_1 = \{U \in X, \dim(U \cap V) \geq 2\} \text{ et } F_2 = \{U \in X, \dim(U \cap V^*) \geq 2\}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, on a toujours

Proposition 4.5.10. F_1 est une variété de Schubert de X , et F_2 est son translaté par $w_{0, P'}$ le mot de plus grande longueur dans $W_{P'}$.

Les T' -points fixes de F_1 sont encore les $w.V$ avec $w \in W_{P'}$ tels que au moins deux des $w(e_1), w(e_2), w(e_3)$ soient dans $\{e_1, e_2, e_3\}$. Ils sont donnés sur la figure suivante :

$$\begin{array}{c}
V \\
\downarrow s_3 \\
s_3.V \\
\downarrow s_2 \\
s_{23}.V \\
\downarrow s_1 \\
s_{123}.V
\end{array}$$

Contrairement à $\overline{\text{PGL}}_3$ et à $\overline{\text{PGL}}_6/\overline{\text{PSP}}_6$, Y n'est pas une variété magnifique de rang minimal. Cependant, une description similaire des groupes de cohomologie $H^i(Y, \mathcal{L})$ a été donnée par Tchoudjem dans [Tc2] (théorème 8.6 et figure 5). En particulier, ils sont nuls si $i = 1$ et 4. On a toujours une bonne description de s , grâce à la proposition suivante :

Proposition 4.5.11. *A renumérotation près, on a pour tout ouvert U de Y :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{\omega}_1}(U) &= \overline{\mathcal{L}}_{\varpi_3}(\pi_0^{-1}(U))_{-1} \\
\mathcal{L}_{\tilde{\omega}_2}(U) &= \overline{\mathcal{L}}_{\varpi_3}(\pi_0^{-1}(U))_1
\end{aligned}$$

Démonstration. On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 4\varpi_1 - 2\varpi_2 \\
\gamma_2 &= 4\varpi_2 - 2\varpi_1 \\
\omega_Y &= \mathcal{L}_{2\varpi_1+2\varpi_2}
\end{aligned}$$

La preuve est similaire à celle du cas précédent, en remplaçant $\tilde{\omega}_i$ par $2\varpi_i$. \square

De plus, comme précédemment, les $H^i(X, \overline{\mathcal{L}})$ sont non nuls seulement si $i = 0$ ou 6. Ainsi on des isomorphismes

$$H^2(Y, \mathcal{L}) = H_{X^{us}}^3(X, s(\mathcal{L}))^{\mathbb{C}^*}$$

Notons w l'élément de $W_{P'}$ tel que $BS_{123}.V = X_w$ (on a $w = s_{323}$ puisque $w_{0,P'} = s_{323123}$). $H_{F_1}^3(X, \mathcal{L}_{k\varpi_3})$ est le noyau de la flèche

$$H_{X_w}^3(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3}) \rightarrow H_{X_{s_1w}}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$$

donc pour tout $\lambda \in \Lambda$

$$[H_{X_w}^3(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})](\lambda) \geq [H_{F_1}^3(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})](\lambda) \geq [H_{X_w}^3(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})](\lambda) - [H_{X_{s_1w}}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})](\lambda)$$

On a :

- $ww_{0,P'}(k\varpi_3) = \frac{k}{2}(\alpha_3 - 2\alpha_1)$;
- $s_1ww_{0,P'}(k\varpi_3) = \frac{k}{2}(\alpha_3 + 2\alpha_1)$;
- $K(w) = \{2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3\}$;
- $L(w) = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1\}$;
- $K(s_1w) = \{2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1, \alpha_3\}$;
- $L(s_1w) = \{\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2\}$

et

$$\begin{aligned}
[H_{X_w}^3(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})] &= e^{\frac{k}{2}(\alpha_3-2\alpha_1)} e^{2\alpha_2+\alpha_3} e^{\alpha_2+\alpha_3} e^{\alpha_3} \prod_{\lambda \in J(w)} \sum_{k \geq 0} e^\lambda \\
[H_{X_{s_1w}}^4(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})] &= e^{\frac{k}{2}(\alpha_3+2\alpha_1)} e^{2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3} e^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} e^{\alpha_1} e^{\alpha_3} \prod_{\lambda \in J(s_1w)} \sum_{k \geq 0} e^\lambda
\end{aligned}$$

Donc les \mathbb{C}^* -semi-invariants de $H_{F_1}^3(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$ sont de poids au moins $6 + k$, et d'après le lemme 4.5.3, les \mathbb{C}^* -semi-invariants de $H_{F_2}^3(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})$ sont de poids au plus $-6 + k$. Ainsi il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que $H_{X^{us}}^3(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n = H_{F_i}^3(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_3})_n$, ce qui nous permet d'appliquer le lemme 4.5.5 pour obtenir comme précédemment

Proposition 4.5.12. *Pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur Y , $H^i(Y, \mathcal{L})$ est un $D_{Y, \mathcal{L}}$ -module simple à gauche pour tout i .*

4.5.3 Cas de $\overline{\text{PGL}_6/\text{PSP}_6}$

Considérons maintenant $Y = \overline{\text{PGL}_6/\text{PSP}_6}$. Y est isomorphe au quotient géométrique $X^{ss}(0)/\mathbb{C}^*$, où $X = \text{OGr}_6^+(V \oplus V^*)$ et $V = \mathbb{C}^3$. Reprenons les mêmes notations $G', T', B', P', \pi_0, G, T, B$ et ι que dans la section 3.5.3. Notons encore Λ le réseau des poids de T' . L'ensemble des points instables X^{us} à toujours deux composantes connexes

$$F_1 = \{U \in X, \dim(U \cap V) \geq 4\} \text{ et } F_2 = \{U \in X, \dim(U \cap V^*) \geq 4\}$$

On a encore

Proposition 4.5.13. *F_1 est une variété de Schubert de X , et F_2 est son translaté par w_0, P' le mot de plus grande longueur dans $W_{P'}$.*

Les T' -points fixes de F_1 sont encore les $w.V$ avec $w \in W_{P'}$ tels que au moins quatre des $w(e_1), \dots, w(e_6)$ soient dans $\{e_1, \dots, e_6\}$. Ils sont donnés sur la figure 4.2.

On a encore une description explicite du morphisme s :

Proposition 4.5.14. *A renumérotation près, on a pour tout ouvert U de Y :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\overline{\varpi}_1}(U) &= \overline{\mathcal{L}}_{\overline{\varpi}_6}(\pi_0^{-1}(U))_{-2} \\ \mathcal{L}_{\overline{\varpi}_2}(U) &= \overline{\mathcal{L}}_{\overline{\varpi}_6}(\pi_0^{-1}(U))_2 \end{aligned}$$

Démonstration. La preuve est similaire au cas précédent. La seule différence est que les \mathbb{C}^* -semi-invariants de X sont de poids $-6, -2, 2$ et 6 , puisqu'on s'intéresse uniquement à la composante connexe de la grassmannienne orthogonale dont l'intersection avec V est de dimension paire. \square

Rappelons les égalités

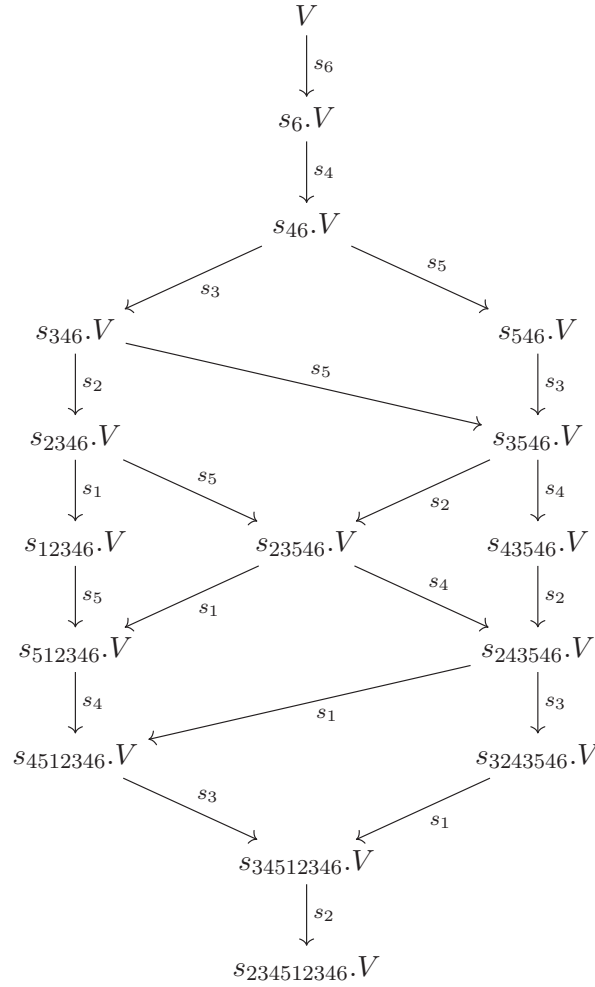
$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2\varpi_2 - \varpi_4 \\ \gamma_2 &= \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 = 2\varpi_4 - \varpi_2 \\ \omega_Y &= \mathcal{L}_{4\varpi_2 + 4\varpi_4} \end{aligned}$$

Y étant une variété magnifique de rang minimal, on connaît les groupes de cohomologie $H^i(Y, \mathcal{L})$. En particulier, ils sont nuls pour i différent de $0, 5, 9$ et 14 . De plus, les $H^i(X, \overline{\mathcal{L}})$ sont non nuls seulement si $i = 0$ ou 15 . Ainsi pour $0 < i < 14$, on a des isomorphismes

$$H^i(Y, \mathcal{L}) = H_{X^{us}}^{i+1}(X, s(\mathcal{L}))^{\mathbb{C}^*}$$

Soit j le plus petit entier strictement positif (s'il existe) tel que $H_{F_1}^j(X, \mathcal{H}_{F_1}^6 \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6}) \neq 0$. On a alors $H_{X^{us}}^{6+j}(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6}) \neq 0$, ce qui n'est possible que si $j = 4$ ou 9 . Soit $w \in W_{P'}$ tel que $X_w = B_{s_{234512346}}.V$. On a alors d'après la proposition 4.3.3 l'égalité

$$\begin{aligned} [H_{F_1}^6(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})] &= [H_{X_w}^6(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})] - [H_{X_{s_2w}}^7(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})] + [H_{X_{s_{32}w}}^8(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})] \\ &\quad + [H_{X_{s_{12}w}}^8(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})] - [H_{X_{s_{432}w}}^9(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})] - [H_{X_{s_{132}w}}^9(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})] + [im(d_3)] \end{aligned}$$

FIGURE 4.2 – T' -points fixes de F_1

Ce qui nous donne des approximations de $[H_{F_1}^6(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})]$ par

$$[H_{X_w}^6(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda) \geq [H_{F_1}^6(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda) \geq [H_{X_w}^6(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda) - [H_{X_{s_2w}}^7(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda)$$

$$[H_{F_1}^6(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda) \leq [H_{X_w}^6(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda) - [H_{X_{s_2w}}^7(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda) + [H_{X_{s_{32w}}}^8(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda) + [H_{X_{s_{12w}}}^8(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda)$$

et

$$[H_{F_1}^6(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda) \geq [H_{X_w}^6(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda) - [H_{X_{s_2w}}^7(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda) + [H_{X_{s_{32w}}}^8(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda) + [H_{X_{s_{12w}}}^8(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda) - [H_{X_{s_{432w}}}^9(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda) - [H_{X_{s_{132w}}}^9(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})](\lambda)$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$. Notons pour alléger les notations $\sum_{i=1}^6 n_i \alpha_i$ par $1^{n_1} \dots 6^{n_6}$, dans lequel on n'affiche pas les i tel que $n_i = 0$. On peut alors calculer une approximation de $[H_{F_1}^6(X, \bar{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})]$ avec

- $ww_{0,P'}(k\varpi_6) = \frac{k}{2}(\alpha_6 - \alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3)$;
- $s_2ww_{0,P'}(k\varpi_6) = \frac{k}{2}(\alpha_6 - \alpha_1 - \alpha_3)$;
- $s_{32}ww_{0,P'}(k\varpi_6) = \frac{k}{2}(\alpha_6 - \alpha_1 + \alpha_3)$;

- $s_{12}ww_{0,P'}(k\varpi_6) = \frac{k}{2}(\alpha_6 + \alpha_1 - \alpha_3)$;
- $s_{432}ww_{0,P'}(k\varpi_6) = \frac{k}{2}(\alpha_6 - \alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4)$;
- $s_{132}ww_{0,P'}(k\varpi_6) = \frac{k}{2}(\alpha_6 + \alpha_1 + \alpha_3)$;
- $K(w) = \{6, 46, 346, 456, 3456; 34^256\}$;
- $L(w) = \{12, 12^23^24^256, 123, 1234, 12345, 2345, 234, 23, 2\}$;
- $K(s_2w) = \{6, 46, 2346, 456, 23456, 234^256, 2\}$;
- $L(s_2w) = \{1, 123^24^256, 123, 1234, 12345, 345, 34, 3\}$;
- $K(s_{32}w) = \{6, 346, 2346, 3456, 23456, 23^24^256, 23, 3\}$;
- $L(s_{32}w) = \{1, 1234^256, 12, 1234, 12345, 45, 4\}$;
- $K(s_{12}w) = \{6, 46, 12346, 456, 123456, 1234^256, 12, 1\}$;
- $L(s_{12}w) = \{23^24^256, 23, 234, 2345, 345, 34, 3\}$;
- $K(s_{432}w) = \{46, 346, 2346, 34^256, 234^256, 23^24^256, 234, 34, 4\}$;
- $L(s_{432}w) = \{1, 123456, 12, 123, 12345, 5\}$;
- $L(s_{132}w) = \{6, 346, 12346, 3456, 123456, 123^24^256, 123, 3, 1\}$;
- $K(s_{132}w) = \{234^256, 2, 234, 2345, 45, 4\}$

On obtient que les \mathbb{C}^* -semi-invariants de $H_{F_1}^6(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})$ sont de poids au moins $12 + k$, et ceux de $H_{F_2}^6(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})$ sont de poids au plus $-12 + k$. Ainsi $H_{X^{us}}^6(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})_n = H_{F_1}^6(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})_n$ ou $H_{F_2}^6(X, \overline{\mathcal{L}}_{k\varpi_6})_n$, ce qui nous permet d'appliquer le lemme 4.5.5 pour obtenir de la même manière

Proposition 4.5.15. *Pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur Y , $H^i(Y, \mathcal{L})$ est un $D_{Y, \mathcal{L}}$ -module simple à gauche pour tout i .*

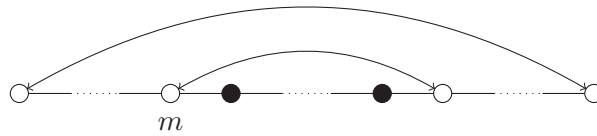
Annexe A

Classification des espaces symétriques

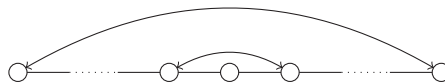
Dans cet appendice, nous rappellerons une classification des espaces symétriques G/H avec G simple, à l'aide des diagrammes de Satake. Nous donnerons pour chaque G/H les groupes G et H , le type du système de racines réduit $\tilde{\Phi}$ de G/H , et le diagramme de Satake de G/H . On peut trouver une preuve de cette classification dans [He].

G de type A

- $G = \mathrm{SL}_n, H = \mathrm{S}(\mathrm{L}_m \times \mathrm{L}_{n-m})$ avec $m < \frac{n}{2}$ Type BC_m



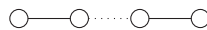
- $G = \mathrm{SL}_n, H = \mathrm{S}(\mathrm{L}_m \times \mathrm{L}_m)$ avec $m = \frac{n}{2}$ Type C_m



- $G = \mathrm{SL}_{2n}, H = \mathrm{Sp}_{2n}$ Type A_{n-1}



- $G = \mathrm{SL}_n, H = \mathrm{SO}_n$ Type A_{n-1}



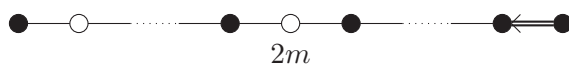
G de type B

- $G = \mathrm{SO}_{2n+1}, H = \mathrm{SO}_m \times \mathrm{SO}_{n-m}$ avec $m \leq n$ Type B_m



G de type *C*

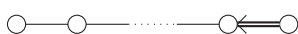
- $G = \text{Sp}_{2n}, H = \text{Sp}_{2m} \times \text{Sp}_{2(n-m)}$ avec $m < \frac{n}{2}$ (et n impair) Type BC_m



- $G = \text{Sp}_{2n}, H = \text{Sp}_{2m} \times \text{Sp}_{2m}$ avec $m = \frac{n}{2}$ Type C_m

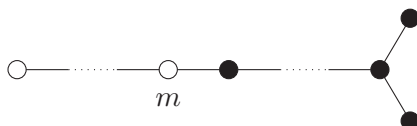


- $G = \text{Sp}_{2n}, H = \text{GL}_n$ Type C_n

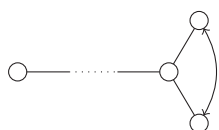


G de type *D*

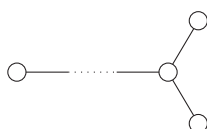
- $G = \text{SO}_{2n}, H = \text{SO}_m \times \text{SO}_{2n-m}$ avec $m < n - 1$ Type B_m



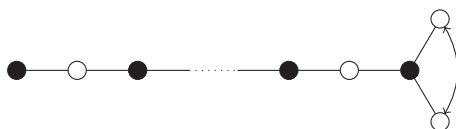
- $G = \text{SO}_{2n}, H = \text{SO}_m \times \text{SO}_{2n-m}$ avec $m = n - 1$ Type B_m



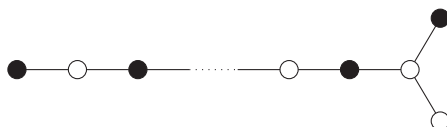
- $G = \text{SO}_{2n}, H = \text{SO}_n \times \text{SO}_n$ Type D_n



- $G = \text{SO}_{2n}, H = \text{GL}_n$ avec $n = 2m + 1$ Type BC_m



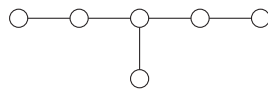
- $G = \text{SO}_{2n}, H = \text{GL}_n$ avec $n = 2m$ Type C_m



G de type E_6

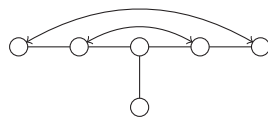
- $G = E_6, H = \text{Sp}_8$

Type E_6



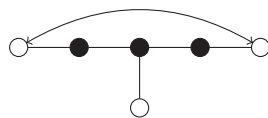
- $G = E_6, H = \text{SL}_6 \times \text{SL}_2$

Type F_4



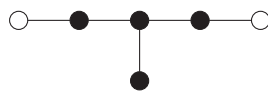
- $G = E_6, H = \text{SO}_{10} \times k^*$

Type BC_2



- $G = E_6, H = F_4$

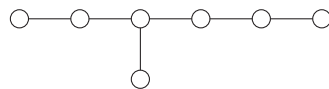
Type BC_2



G de type E_7

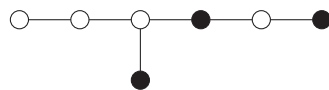
- $G = E_7, H = \text{SL}_8$

Type E_7



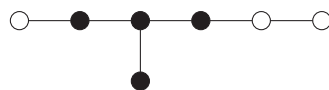
- $G = E_7, H = \text{SO}_{12} \times \text{SL}_2$

Type F_4



- $G = E_7, H = E_6 \times k^*$

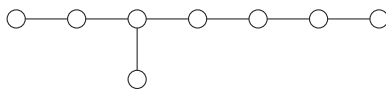
Type C_3



G de type E_8

- $G = E_8, H = SO_{16}$

Type E_8



- $G = E_8, H = E_7 \times SL_2$

Type F_4



G de type F_4

- $G = F_4, H = Sp_6 \times SL_2$

Type F_4



- $G = F_4, H = SO_9$

Type BC_1



G de type G_2

- $G = G_2, H = SL_2 \times SL_2$

Type G_2



Bibliographie

- [BB] BEILINSON A., BERNSTEIN J., *Localisation de \mathfrak{g} -modules.*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292 (1981), no. 1, 15-18.
- [B-B] BIALYNICKI-BIRULA A., *Some theorems on actions of algebraic groups.*, Ann. of Math. (2) 98 (1973), 480-497.
- [Be] BENOIST Y., *\mathcal{D} -modules sur la variété des drapeaux.*, Éléments de la théorie des systèmes différentiels. Images directes et constructibilité (Nice, 1990), 99-116, Travaux en Cours, 46, Hermann, Paris, 1993.
- [BiBr] BIEN F., BRION M., *Automorphisms and local rigidity of regular varieties.*, Compositio Math. 104 (1996), no. 1, 1-26.
- [BK] BRYLINSKI J.-L., KASHIWARA M., *Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems.*, Invent. Math. 64 (1981), no. 3, 387-410.
- [Bo] BOTT R., *Homogeneous vector bundles.*, Ann. of Math. (2) 66 (1957), 203-248.
- [BoB1] BORHO W., BRYLINSKI J.-L., *Differential operators on homogeneous spaces. I. Irreducibility of the associated variety for annihilators of induced modules.*, Invent. Math. 69 (1982), no. 3, 437-476.
- [BoB2] BORHO W., BRYLINSKI J.-L., *Differential operators on homogeneous spaces. II. Relative enveloping algebras.*, Bull. Soc. Math. France 117 (1989), no. 2, 167-210.
- [BoB3] BORHO W., BRYLINSKI J.-L., *Differential operators on homogeneous spaces. III. Characteristic varieties of Harish-Chandra modules and of primitive ideals.*, Invent. Math. 80 (1985), no. 1, 1-68.
- [BP] BRION M., PROCESI C., *Action d'un tore dans une variété projective.*, Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989), 509-539, Progr. Math., 92, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990
- [BPe] BRAVI P., PEZZINI G., *Wonderful subgroups of reductive groups and spherical systems.*, J. Algebra 409, 101-147 (2014).
- [Br] BRION M., *The total coordinate ring of a wonderful variety.*, J. Algebra 313 (2007), no. 1, 61-99.
- [C-F] CUPIT-FOUTOU S., *Wonderful varieties : A geometrical realization.*, arXiv :math.AG/0907.2852
- [CS] ČAP A., SLOVÁK J., *Parabolic geometries : Background and general theory.*, Mathematical Surveys and Monographs, 154. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [ChS] CHEVALLEY C., SCHAFER R. D., *The exceptional simple Lie algebras F_4 and E_6 .*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 36, (1950). 137-141.
- [DCP] DE CONCINI C., PROCESI C., *Complete symmetric varieties*, Lecture Notes in Mathematics 996, Berlin, New York : Springer-Verlag, pp. 1-44 (1983).

- [De1] DEMAZURE M., *A very simple proof of Bott's theorem.*, Invent. Math. 33 (1976), no. 3, 271-272.
- [De2] DEMAZURE M., *Limites de groupes orthogonaux ou symplectiques.*, Preprint, Paris, 1980
- [DH] DOLGACHEV I. V., HU Y., *Variation of geometric invariant theory quotients.*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 87 (1998), 5-56
- [Do] DOLGACHEV I. V., *Lectures on invariant theory.*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 296. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [Go] GODEMENT R., *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.*, Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, 1973.
- [Ha1] HARTSHORNE R., *Algebraic geometry.*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [Ha2] HARTSHORNE R., *Local cohomology.*, A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall, 1961. Lecture Notes in Mathematics, No. 41 Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.
- [He] HELGASON S., *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.*, Pure and Applied Mathematics, 80. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.
- [HR] HOCHSTER M., ROBERTS J. L., *Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay.*, Advances in Math. 13 (1974), 115-17
- [HTT] HOTTA R., TAKEUCHI K., TANISAKI T., *D-modules, perverse sheaves, and representation theory.*, Translated from the 1995 Japanese edition by Takeuchi. Progress in Mathematics, 236. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008.
- [Hu1] HUMPHREYS J., *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category \mathcal{O} .*, Graduate Studies in Mathematics, 94. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [Hu2] HUMPHREYS J., *Linear algebraic groups.*, Graduate Texts in Mathematics, No. 21. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.
- [Jo] JONES A. G., *Rings of differential operators on toric varieties.*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 37 (1994), no. 1, 143-160.
- [Ke1] KEMPF G., *The Grothendieck-Cousin complex of an induced representation.*, Adv. in Math. 29 (1978), no. 3, 310-396.
- [Ke2] KEMPF G., *Some elementary proofs of basic theorems in the cohomology of quasicoherent sheaves.*, Rocky Mountain J. Math. 10 (1980), no. 3, 637-645.
- [Ko1] KOSTANT B., *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem.*, Ann. of Math. (2) 74 (1961) 329-387.
- [Ko2] KOSTANT B., *Lie group representations on polynomial rings.*, Amer. J. Math. 85 (1963) 327-404.
- [Lu1] LUNA D., *Toute variété magnifique est sphérique.*, Transform. Groups 1 (1996), no. 3, 249-258.
- [Lu2] LUNA D., *Grosses cellules pour les variétés sphériques.*, Algebraic groups and Lie groups, 267-280, Austral. Math. Soc. Lect. Ser., 9, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [Lu3] LUNA D., *Variétés sphériques de type A.*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 94 (2001), 161-226.

- [MFK] MUMFORD D., FOGARTY J., KIRWAN F., *Geometric invariant theory.*, Third edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)], 34. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Mu] MUSSON I. M., *Differential operators on toric varieties.*, J. Pure Appl. Algebra 95 (1994), no. 3, 303-315.
- [Re] RESSAYRE, N., *The GIT-equivalence for G -line bundles.*, Geom. Dedicata 81 (2000), no. 1-3, 295-324.
- [SGA2] GROTHENDIECK A., *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux.*, Augmenté d'un exposé par Michèle Raynaud. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, 1962. Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 2. North-Holland Publishing Co., Amsterdam ; Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1968.
- [Sp] SPRINGER T. A., *Some groups of type E_7 .*, Nagoya Math. J. 182 (2006), 259-284.
- [Tc1] TCHOUDJEM A., *Cohomologie des fibrés en droites sur les variétés magnifiques de rang minimal.*, Bull. Soc. Math. France 135 (2007), no. 2, 171-214.
- [Tc2] TCHOUDJEM A., *Sur la cohomologie à support des fibrés en droites sur les variétés symétriques complètes.*, Transform. Groups 15 (2010), no. 3, 655-700.
- [Th1] THADDEUS M., *Geometric invariant theory and flips.*, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), no. 3, 691-723.
- [Th2] THADDEUS M., *Complete collineations revisited.*, Math. Ann. 315 (1999), no. 3, 469-495
- [Ti] TIMASHEV D.A., *Homogeneous spaces and equivariant embeddings.*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 138. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, 8. Springer, Heidelberg, 2011.
- [Tu] TU L.W., *Une courte démonstration de la formule de Campbell-Hausdorff.*, J. Lie Theory 14 (2004), no. 2, 501-508.
- [Wa] WASSERMAN B., *Wonderful varieties of rank two.*, Transform. Groups 1 (1996), no. 4, 375-403.

Étude des opérateurs différentiels globaux sur certaines variétés algébriques projectives

Résumé : Initiée indépendamment par Beilinson et Bernstein et par Brylinski et Kashiwara, l'étude des opérateurs différentiels sur les variétés de drapeaux complets a permis de répondre à une conjecture de Kazhdan et Lusztig. Ayant été poursuivie notamment par les travaux de Borho et Brylinski, cette étude a mis à jour plusieurs propriétés intéressantes sur les opérateurs différentiels sur les variétés de drapeaux. Cependant, en dehors du cas des variétés de drapeaux et du cas des variétés toriques projectives, qui a été étudié de manière combinatoire, les opérateurs différentiels sont plutôt mal compris sur les variétés projectives.

Dans cette thèse, nous nous pencherons sur le cas de certaines compactifications magnifiques Y d'espaces symétriques G/H de petit rang, et nous comparerons les résultats obtenus avec ceux connus sur les variétés de drapeaux. Nous allons commencer par construire un opérateur différentiel global sur Y qui ne provient pas de l'action infinitésimale de l'algèbre de Lie de G , ce qui constitue une différence avec le cas des variétés de drapeaux.

Ensuite, nous nous intéresserons à trois cas particulier que nous exprimerons comme des quotients GIT d'une certaine grassmannienne X . Grâce à cette description, nous verrons plusieurs similitudes avec le cas des variétés de drapeaux : nous montrerons que l'algèbre des opérateurs globaux sur Y est de type fini, et que pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur Y , ses sections globales forment un module simple pour l'algèbre des opérateurs différentiels globaux de Y tordus par \mathcal{L} . Enfin, en utilisant des arguments de cohomologie locale, nous montrerons que c'est également le cas pour les groupes de cohomologie supérieurs.

Mots clés : Variétés magnifiques, opérateurs différentiels, variétés de drapeaux, quotients GIT, cohomologie locale

Study of global differential operators on some projective algebraic varieties

Abstract : Started independently by Beilinson and Bernstein, and by Brylinski and Kashiwara, the study of global differential operators on complete flag varieties has been very useful to answer a conjecture of Kazhdan and Lusztig. In their subsequent work, Borho and Brylinski have discovered many interesting properties on differential operators on flag varieties. But apart from the case of flag varieties, and the case of projective toric varieties, which has been investigated with combinatorial methods, differential operators on projective varieties are rather badly known.

In this thesis, we will investigate the case of some wonderful compactifications Y of symmetric spaces G/H of small rank, and we will compare our results with what is known in the case of flag varieties. We will first construct a differential operator on Y which does not come from the infinitesimal action of G , which is different from the case of flag varieties.

We will then look at three particular cases, which will be expressed as GIT quotients of some Grassmannian X . With this description, we will find some similarities with the case of flag varieties : we will show that the algebra of global differential operators is of finite type, and that for each invertible sheaf \mathcal{L} on Y , the module of its global sections is simple as a module over the algebra of global differential operators of Y twisted by \mathcal{L} . Finally, using arguments of local cohomology, we will show that it is still the case for higher cohomology groups.

Keywords : Wonderful varieties, differential operators, flag varieties, GIT quotients, local cohomology

Image en couverture : Ordre de Bruhat sur une variété Schubert de $Gr_{3,6}$.

