



HAL
open science

Effet Casimir-Polder sur des atomes piégés

Axel Maury

► **To cite this version:**

Axel Maury. Effet Casimir-Polder sur des atomes piégés. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. Français. NNT : 2016PA066327 . tel-01478886

HAL Id: tel-01478886

<https://theses.hal.science/tel-01478886>

Submitted on 28 Feb 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie

Spécialité : Physique

École doctorale : « Physique en Île-de-France »

réalisée

**au laboratoire Kastler Brossel
sous la direction d'Astrid Lambrecht**

présentée par

Axel MAURY

pour obtenir le grade de :

Docteur de l'université Pierre et Marie Curie

Sujet de la thèse :

Effet Casimir-Polder sur des atomes piégés

soutenue le 27 septembre 2016

devant le jury composé de :

M.	Mauro ANTEZZA	Rapporteur
M.	Daniel BLOCH	Rapporteur
Mme	Marie-Christine ANGONIN	Examinatrice
M.	Ernst Rasel	Examineur
M.	Serge REYNAUD	Examineur

Remerciements

« Professeur, quand aborderons-nous la physique quantique ? » : à cette question mon professeur de physique en classe de 5e répondit par un froncement de sourcils interrogateur !

Master de physique théorique en poche, douze ans plus tard, en 2013, l'équipe « fluctuations quantiques et relativité » m'accueillait au sein du laboratoire Kastler Brossel pour le sujet : « Effet Casimir-Polder sur des atomes piégés » proposé par Astrid Lambrecht et Romain Guérout, qui ont dirigé ma thèse. Ces trois années furent riches d'enseignement et je les remercie pour toute l'aide et le soutien qu'ils m'ont apportés.

Avec Marie-Pascale Gorza, Manuel Donaire et Gabriel Dufour, mes compagnons au quotidien pendant ces trois années au sein de l'équipe, les échanges furent stimulants, et je les remercie pour tous ces moments enrichissants et leur soutien, tant au sein du laboratoire qu'à l'extérieur.

Je remercie également les membres de l'équipe du SYRTE qui travaillent sur l'expérience FORCA-G, pour leurs explications, en particulier Franck Pereira Dos Santos, Peter Wolf et Cyrille Solaro.

Je remercie les cinq membres du jury : Marie-Christine Angonin, Ernst Rasel et Serge Reynaud et particulièrement les deux rapporteurs Daniel Bloch et Mauro Antezza, pour l'intérêt qu'ils témoignent ainsi à mon travail. Et bien sûr, je ne saurais oublier les équipes techniques et administratives du laboratoire qui nous permettent d'avoir des conditions de travail exceptionnelles.

Axel Maury

Table des matières

Notations	v
I Introduction	1
I.1 FORCA-G : dispositif expérimental et principe de mesure	2
I.1.1 Réseau optique : piège dipolaire	2
I.1.2 Principe de mesure	4
I.1.3 Recherche d'une déviation à la loi de Newton	8
I.2 Interaction de Casimir-Polder	10
I.2.1 Effet Casimir-Polder entre un atome et un miroir	11
I.2.2 Effet Casimir entre deux surfaces conductrices	14
I.2.3 Petit historique des expériences	16
I.3 Organisation de la thèse	18
II Potentiel Casimir-Polder pour l'expérience FORCA-G	19
II.1 Potentiel de Casimir-Polder	19
II.1.1 Opérateurs bosoniques de création et annihilation	19
II.1.2 Utilisation du théorème de fluctuation-dissipation	23
II.1.3 Formalisme des matrices de diffusion	26
II.2 Détermination des coefficients de réflexion du miroir	30
II.2.1 Permittivités des matériaux constituant le miroir	30
II.2.2 Calcul des coefficients du miroir	33
II.3 Mesures optiques des caractéristiques du miroir	37
II.3.1 Transmittance du miroir dans le visible	37
II.3.2 Mesures ellipsométriques dans le proche infrarouge	39
II.3.3 Évaluation de l'incertitude sur les coefficients de réflexion	40
II.4 Calcul du potentiel de Casimir-Polder pour FORCA-G	50
II.4.1 Influence de la température	50
II.4.2 Influence de l'épaisseur des couches du miroir	52
II.4.3 Incertitude sur le potentiel de Casimir-Polder	55
III Effet Casimir-Polder sur des atomes piégés	57
III.1 Atomes dans un réseau	57
III.1.1 Fonctions de Bloch	57
III.1.2 Fonctions de Wannier	61
III.1.3 Force de pesanteur et états de Wannier-Stark	62

III.2	Traitement perturbatif de l'effet Casimir-Polder	64
III.2.1	Présence du miroir et modification des états de Wannier-Stark	64
III.2.2	Effet Casimir-Polder et fonctions de Wannier-Stark	67
III.2.3	Interaction à courtes distances : potentiel de Lennard-Jones	68
III.2.4	Calcul des corrections des niveaux d'énergie	69
III.2.5	Comparaison avec la méthode de régularisation du potentiel de Casimir-Polder par une sphère	72
III.3	Traitement non perturbatif	74
III.3.1	Comparaison des différents potentiels près de la surface	74
III.3.2	Résultats numériques	75
III.3.3	Dépendance des états atomiques aux divers paramètres	78
III.4	Méthode perturbative et puits du réseau optique	91
III.4.1	Profondeur des puits et étalement des fonctions d'onde	91
III.4.2	Comparaison des deux méthodes en fonction de la profondeur des puits	92
IV	Déséquilibre thermique : interaction atome-surface	97
IV.1	Configuration géométrique : miroir d'épaisseur infinie	97
IV.1.1	Calcul de la force entre l'atome et le miroir dans le cas d'un déséquilibre thermique	97
IV.1.2	Comportement à courte distance	102
IV.1.3	Application à un exemple simple	103
IV.2	Configuration géométrique : miroir d'épaisseur finie multi-couche	104
IV.2.1	Calcul de la partie hors équilibre de la force dans le cas d'une surface d'épaisseur finie	105
IV.2.2	Comparaison des deux méthodes	107
IV.2.3	Application à un exemple	111
IV.3	Application à l'expérience FORCA-G	113
IV.3.1	Calcul de la partie déséquilibre du potentiel de Casimir-Polder	113
IV.3.2	Effet du déséquilibre thermique sur les atomes piégés	116
	Conclusion	121
A	Fonctions de Green	123
A.1	Formalisme	123
A.2	Configuration d'un atome face à une interface	124
A.3	Configuration d'un atome face à un milieu d'épaisseur finie	125
A.4	Théorie de la réponse-linéaire/Théorie de Langevin	127

Notations

Aspects généraux

Nous nous plaçons dans un repère Cartésien. Il est repéré par trois vecteurs unitaires orientés dans le sens direct avec pour origine $O : \{O; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$.

— $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = \mathbf{R} + z\mathbf{e}_z$ est un vecteur position dans ce repère.

— $\mathbf{K}^\pm = k_x\mathbf{e}_x + k_y\mathbf{e}_y \pm k_z\mathbf{e}_z = \mathbf{k} \pm k_z\mathbf{e}_z$. K est la norme de ce vecteur et k est la norme du vecteur transverse \mathbf{k} .

Nous choisissons comme convention pour le passage du repère cartésien $\{O; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ au repère dans les coordonnées sphériques $\{O; \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta\}$:

$$x = r \cos(\phi) \sin(\theta)$$

$$y = r \sin(\phi) \sin(\theta)$$

$$z = r \cos(\theta)$$

avec $\phi \in [0, 2\pi]$ et $\theta \in [0, \pi]$.

Le symbole \sum est sous entendu pour toute sommation sur les indices répétés du type, nous utiliserons la convention de sommation d'Einstein, par exemple

$$\sum_i \sum_j G_{ij} G_{ij} = G_{ij} G_{ij}$$

Nous définissons le symbole \sum' de la manière suivante :

$$\sum'_n f_n = \frac{1}{2} f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Constantes

— Constante de Planck

$$h = 6,626068 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

— Constante de Planck réduite

$$\hbar = 1,054571 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

— Vitesse de la lumière

$$c = 299792458 \text{ m.s}^{-1}$$

- Constante de Boltzmann $k_B = 1,38065 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
- Accélération de pesanteur $g = 9,80927 \text{ m.s}^{-2}$
- Masse de l'atome de Rubidium 87 $m_{Rb} = 86,9092 \text{ u.a} = 1,44316 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$

Unités

Les équations et formules du chapitre II portant sur le potentiel de Casimir-Polder sont exprimées dans le système d'unité international. Les données et calculs portant sur les mesures ellipsométriques et de transmittance présentés dans ce chapitre sont exprimés en fonction de différentes unités de fréquences :

- $\lambda = 1 \text{ nm} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi c}{10^{-9}} \approx 1,9 \cdot 10^{18} \text{ rad.s}^{-1}$
- $\frac{1}{\lambda} = 1 \text{ cm}^{-1} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi c}{10^{-2}} \approx 1,9 \cdot 10^{11} \text{ rad.s}^{-1}$

Dans le chapitre III, l'ensemble des résultats est exprimé en terme des paramètres du réseau optique de l'expérience FORCA-G, unités adéquates pour les grandeurs étudiées :

- Énergie de recul $\frac{E_r}{h} = 8,11 \text{ kHz}$
- Pas du réseau optique $a = \frac{\lambda_l}{2} = 266 \text{ nm}$
- Notons que $E_r \approx 8,55 \cdot 10^{-31} \text{ J} \approx 5,34 \cdot 10^{-12} \text{ eV}$

Chapitre I

Introduction

Le travail de thèse que j'ai réalisé au laboratoire Kastler Brossel avait pour objectif de fournir certaines évaluations théoriques pour l'expérience FORCA-G (force de Casimir et gravitation à courte distance). Le but de cette expérience est de réaliser des mesures de forces à faible distance entre des atomes et un miroir en utilisant des techniques d'interférométrie atomique [1]. Ces techniques permettent de mesurer de très petits déphasages, ce qui est particulièrement intéressant pour rechercher une déviation à la loi de la gravitation universelle de Newton à faible distance. Cette déviation est prédite dans de nombreuses théories d'unification de la mécanique quantique et de la relativité générale. Si cette déviation existe, elle est forcément très faible, n'ayant pas été encore observée. La précision de l'interféromètre atomique pourrait être un atout dans la recherche de cette déviation.

Cette expérience a donc deux objectifs principaux : utiliser un interféromètre atomique afin de mesurer les interactions des atomes avec une surface massive à très courte distance ; et grâce à la configuration particulière de l'expérience, réaliser une mesure de précision de l'effet Casimir-Polder qui est l'interaction dominante aux distances considérées entre l'atome et la surface. Notre travail porte sur ce second sujet, déterminer le plus précisément possible les états des atomes interagissant avec la surface. Cet aspect de l'expérience avait déjà été abordé dans un précédent travail théorique [2]. Mais cette étude ne considérait encore qu'un cas idéal, où la surface utilisée était parfaitement réfléchissante, la température de la surface n'était pas prise en compte : la modélisation du problème n'était pas suffisamment réaliste par rapport à la précision des mesures visée par l'expérience. De plus la manière de résoudre la régularisation du potentiel près de la surface en représentant l'atome par une sphère dure mérite d'être reconsidérée.

Dans la suite de cette introduction, nous présentons le dispositif expérimental de FORCA-G. Nous expliquerons les différentes étapes historiques aboutissant à la mise en évidence de l'effet Casimir d'un point de vue théorique. Puis nous résumerons les différents progrès réalisés dans la mesure de l'effet Casimir au cours de ces trente dernières années.

I.1 Expérience FORCA-G : dispositif expérimental et principe de mesure

Le dispositif expérimental proposé pour FORCA-G (voir figure I.1) a été conçu afin de permettre la mesure des interactions gravitationnelle et électromagnétique entre un atome piégé dans une onde stationnaire et le miroir réfléchissant cette onde. Les atomes sont piégés dans un réseau optique vertical réalisé par un laser de longueur d'onde $\lambda_l = 532$ nm. Ils sont confinés de manière transverse à l'aide d'un laser de longueur d'onde 1064 nm.

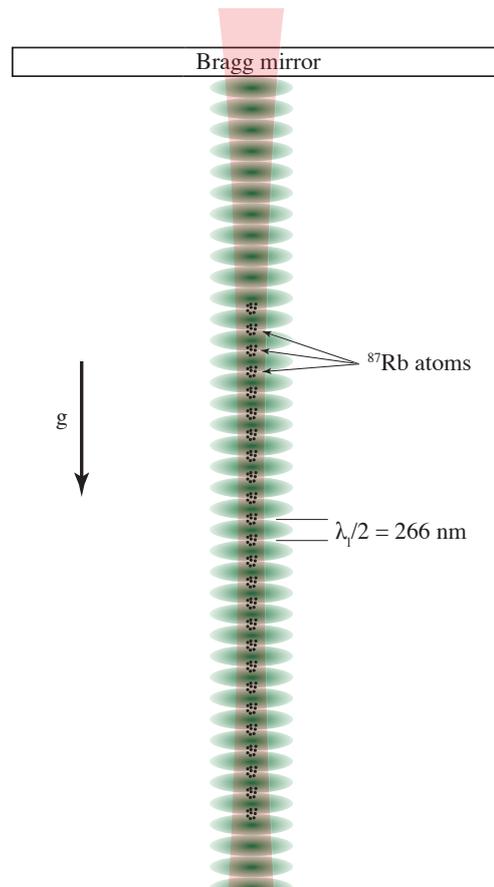


FIGURE I.1 – Schéma de la configuration de l'expérience FORCA-G.

I.1.1 Réseau optique : piège dipolaire

Le principe du piège dipolaire repose sur le fait qu'un atome plongé dans le champ électromagnétique d'un laser subit un décalage de ses niveaux d'énergies qui dépend de sa polarisabilité, de l'intensité du champ et du désaccord entre la fréquence du laser et la fréquence atomique proche de celle du laser [3]. La force s'exerçant sur les atomes provient de l'interaction du champ incident avec le dipôle induit par ce champ.

Considérons une onde laser de polarisation linéaire suivant \mathbf{e}_z et de fréquence ω_l dont le champ électrique s'écrit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0(\mathbf{r})\mathbf{e}_z \cos(\omega_l t - \phi(\mathbf{r})),$$

où $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ est l'amplitude du champ et $\phi(\mathbf{r})$ sa phase à la position \mathbf{r} . Prenons un atome à deux niveaux : nous modélisons une transition atomique par un état fondamental de moment cinétique nul $|g\rangle$, et un niveau excité de moment cinétique unité, de base $\{|e, m_z\rangle, m_z = -1, 0, +1\}$ où l'axe de quantification pour la base du moment cinétique est pris parallèle à \mathbf{e}_z . $\hbar\omega_{eg}$ est la différence d'énergie entre $|g\rangle$ et $|e\rangle$.

Dans le cadre de l'approximation dipolaire électrique, nous pouvons écrire l'interaction dipolaire électrique entre l'atome et le champ sous la forme

$$\begin{aligned} V_{d.e.}(\mathbf{r}, t) &= -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ &= -d_0 E_0(\mathbf{r})(\sigma_+ + \sigma_-) \cos(\omega_l t - \phi(\mathbf{r})), \end{aligned}$$

où d_0 est le dipôle atomique réduit, caractéristique de la transition atomique considérée et où nous avons introduit les opérateurs $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ et $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$.

La force exercée sur l'atome s'écrit alors

$$\mathbf{F} = -\nabla_{\mathbf{r}} V_{d.e.}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{I.1.1})$$

On peut montrer que dans le régime stationnaire, le dipôle atomique moyen est égal à

$$\mathbf{d}(t) = -\frac{d_0^2}{\hbar\Delta} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{I.1.2})$$

où nous avons posé

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\omega_l - \omega_{eg}} - \frac{1}{\omega_l + \omega_{eg}}.$$

Ainsi selon le signe de Δ , le dipôle est en phase ou en opposition de phase avec le champ.

La valeur moyenne \mathbf{f} de l'opérateur force \mathbf{F} (I.1.1) s'écrit

$$\mathbf{f} = \epsilon \cdot \mathbf{d} \nabla [\mathbf{E}_0 \cos(\omega_l t - \phi)].$$

L'expression de la force dipolaire $\mathbf{f}_{dip} = -\nabla V$ dérive alors du potentiel V

$$V(\mathbf{r}) = \frac{d_0^2 |E_0(\mathbf{r})|^2}{4\hbar\Delta}.$$

Le faisceau lumineux éclairant l'atome induit un dipôle $\mathbf{d} = \alpha(\omega)\mathbf{E}$, où la polarisabilité $\alpha(\omega)$ se déduit de (I.1.2)

$$\alpha(\omega) = -\frac{d_0^2}{\hbar\Delta}.$$

Le potentiel, pour ce traitement perturbatif, s'écrit alors

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha(\omega)}{4} |\mathbf{E}_0(\mathbf{r})|^2.$$

Ce résultat se généralise sans aucun problème au cas d'un atome à plusieurs niveaux. La polarisabilité totale est obtenue en faisant la somme sur ces différents niveaux.

Plusieurs points sont à noter. Le potentiel est d'abord proportionnel à l'intensité du laser. La fréquence du champ monochromatique du laser va déterminer la force s'exerçant sur l'atome. Si $\omega_l > \omega_{eg}$, le piège est désaccordé vers le bleu, Δ est positif, ce qui implique que la polarisabilité est négative, donc le potentiel de piégeage est positif. Les atomes sont alors attirés vers les zones où le potentiel est minimal : les atomes sont attirés vers les noeuds de l'onde stationnaire. Si $\omega_l < \omega_{eg}$, le piège est désaccordé vers le rouge, Δ est négatif, ce qui implique que le potentiel de piégeage est négatif, les atomes sont attirés vers les ventres de l'onde stationnaire. L'expérience FORCA-G se trouve dans une configuration où le désaccord est vers le bleu, $\lambda_l = 532$ nm et $\lambda_{eg} = 780$ nm (longueur d'onde pour la première transition de l'atome de rubidium), ce qui entraîne que les atomes sont piégés dans les minima du potentiel.

1.1.2 Principe de mesure

On veut séparer un paquet atomique en deux parties localisées dans des puits différents puis les recombinaison pour les faire interférer, le déphasage étant sensible à la différence de potentiel entre ces deux puits. Pour plus de détails sur le fonctionnement de l'interféromètre atomique, nous nous reporterons aux travaux [2, 4].

Pour déplacer les atomes de puits en puits du réseau, des transitions Raman sont utilisées. Ces transitions ont lieu lorsque la différence de fréquence entre les deux faisceaux correspond à la différence d'énergie entre deux niveaux de puits voisins traduite en fréquence.

a Interféromètre à impulsion Raman

Ici nous exposons le principe de base d'une transition Raman stimulée et leur utilisation dans un interféromètre.

Considérons un atome à trois niveaux modélisé sur la figure I.2. L'atome est éclairé par deux lasers dont la différence de fréquence est accordée sur la transition des deux niveaux hyperfins $|g\rangle$ et $|e\rangle$. Pour l'expérience utilisant du ^{87}Rb , $|g\rangle$ correspond à $|5^2S_{1/2}, F=1, m_F=0\rangle$ et $|e\rangle$ à $|5^2S_{1/2}, F=2, m_F=0\rangle$. Les fréquences des deux lasers, ω_1 et ω_2 , sont proches de la transition optique vers le niveau $|c\rangle = |5^2P_{3/2}\rangle$ à 780 nm. L'écart entre la pulsation de transition atomique et la pulsation des lasers est appelé le désaccord Raman et s'écrit

$$\Delta = \omega_c - \omega_g - \omega_1.$$

Si l'atome est initialement dans l'état $|g\rangle$ avec une quantité de mouvement \mathbf{p} , il absorbe alors un photon du champ classique $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \propto e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \phi_1)}$ qui lui confère l'impulsion de ce photon $\hbar \mathbf{k}_1$. Le photon est ensuite diffusé par émission stimulée dans le mode du deuxième laser dont le champ classique est donné par $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) \propto e^{i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \phi_2)}$ et l'atome acquiert donc l'impulsion $\hbar \mathbf{k}_2$ par conservation de la quantité de mouvement.

À la fin de la transition, l'atome a donc une quantité de mouvement totale valant $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_{eff}$ avec $\mathbf{k}_{eff} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$. De plus lorsque le désaccord Raman Δ est grand devant la largeur naturelle Γ de l'état supérieur, alors l'état $|c\rangle$ est très peu peuplé et nous pouvons négliger l'émission spontanée. La cohérence de la superposition des états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ n'est alors plus limitée par la largeur naturelle Γ de l'état excité, et nous pouvons donc traiter l'atome comme un atome à deux niveaux.

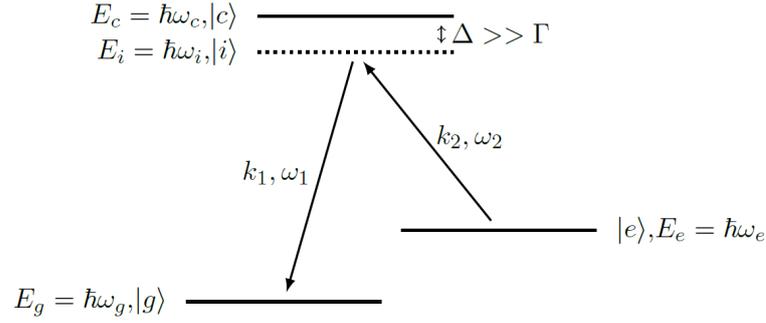


FIGURE I.2 – Diagramme représentant un système atomique à trois niveaux. La pulsation des lasers utilisés pour effectuer la transition Raman sont ω_1 et ω_2 (figure extraite de [2]).

L'interaction entre un champ électromagnétique et un atome à deux niveaux est un problème classique en mécanique quantique. Si nous écrivons la fonction d'onde atomique comme

$$|\psi(t)\rangle = a_g(t)e^{-i\omega_g t}|g\rangle + a_e(t)e^{-i\omega_e t}|e\rangle,$$

où $a_g(t)e^{-i\omega_g t}$ et $a_e(t)e^{-i\omega_e t}$ sont respectivement les amplitudes de état propres $|g\rangle$ et $|e\rangle$, alors l'équation de Schrödinger, si nous supposons que les lasers sont à résonance parfaite au système d'équation suivant

$$\begin{cases} i\dot{a}_g(t) = \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\Delta} e^{i\phi} a_e(t) \\ i\dot{a}_e(t) = \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\Delta} e^{i\phi} a_g(t) \end{cases} \quad (\text{I.1.3})$$

où Ω_1 et Ω_2 sont les fréquences de Rabi décrivant l'interaction entre un état $|i\rangle$ avec un champ k et ϕ représente la phase effective des deux lasers. En utilisant l'approximation dipolaire, ces fréquences s'écrivent

$$\Omega_k = \langle g | \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_k | e \rangle.$$

La résolution du système (I.1.3) donne

$$\begin{cases} a_g(t) = \cos\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) a_g(0) - ie^{i\phi} \sin\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) a_e(0) \\ a_e(t) = -ie^{-i\phi} \sin\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) a_g(0) + \cos\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) a_e(0) \end{cases}$$

où nous avons posé $\Omega_{eff} = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta}$. Si nous nous intéressons maintenant à la probabilité de présence dans chaque état hyperfin, nous obtenons les oscillations de Rabi entre les deux états de la superposition

$$\begin{cases} P_g(t) = 1 - \sin^2\left(\frac{\Omega_{eff} t}{2}\right) \\ P_e(t) = \sin^2\left(\frac{\Omega_{eff} t}{2}\right) \end{cases}$$

en supposant que les conditions initiales sont telles que $a_g(0) = 1$ et $a_e(0) = 0$. Deux cas particuliers sont intéressants pour construire un interféromètre. Le premier cas est lorsque nous choisissons le temps t tel que $\Omega_{eff} t = \frac{\pi}{2}$. La répartition est alors équiprobable sur les deux états, et l'état de l'atome peut s'écrire

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g, \mathbf{p}\rangle + |e, \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_{eff}\rangle),$$

où les deux paquets d'onde s'éloignent l'un de l'autre du fait de leur différence de quantité de mouvement. Le deuxième cas d'intérêt pour les expériences est le cas où $\Omega_{eff} t = \pi$. Dans ce cas, nous avons un transfert total de l'état $|g, \mathbf{p}\rangle$ vers l'état $|e, \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_{eff}\rangle$.

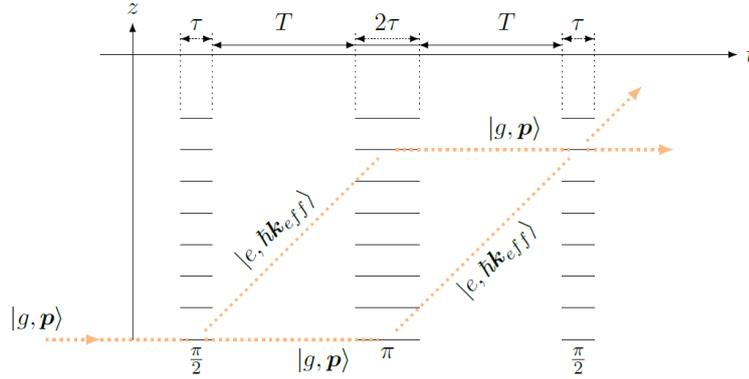


FIGURE I.3 – Interféromètre de Mach-Zehnder atomique. Les ondes lumineuses formant le réseau de diffraction sont représentées par les lignes horizontales noires tandis que les ondes de De Broglie sont représentées par les lignes pointillées orange.

Les séquences de ces impulsions $\pi/2$ ou π séparées par des temps d'évolution libre T sont utilisées pour les interféromètres atomiques. La figure I.3 représente l'équivalent d'un interféromètre de Mach-Zehnder pour les ondes atomiques qui est un des plus simples que l'on puisse imaginer. Dans ce cas, une première impulsion $\pi/2$ sépare les deux composantes de la fonction d'onde. Après une durée T , une impulsion π les redirige l'une vers l'autre jusqu'à ce qu'elles se rejoignent au bout d'un nouveau laps de temps T . Enfin, une dernière impulsion recombine les deux paquets d'onde afin de les faire interférer. La probabilité de transition finale peut être calculée à l'aide d'un formalisme matriciel, déjà expliqué dans des thèses précédentes sur le projet FORCA-G [2, 4].

Pour des atomes en début d'interféromètre dans l'état $|g\rangle$, il en résulte la probabilité de transition finale P_e des atomes dans l'état $|e\rangle$ après un temps total d'interféromètre T_{interf}

$$P_e = \frac{|a_e(T_{interf})|^2}{|a_e(T_{interf})|^2 + |a_g(T_{interf})|^2} = \frac{1}{2} (1 - C \cos(\Delta\phi)),$$

où C est le contraste de l'interféromètre. Le déphasage $\Delta\phi$ dépend du type d'interféromètre réalisé, et la mesure de ce déphasage permet dans différents cas de remonter à une mesure de la différence de potentiel entre deux puits.

b Mesure

Le schéma interférométrique (voir schéma I.4) consiste donc à séparer un paquet d'onde atomique dans un puits n en deux à l'aide d'une impulsion $\frac{\pi}{2}$ micro-onde. On fait ensuite voyager les deux paquets d'onde ainsi séparés dans les deux puits voisins $n+1$ et $n-1$ (il est possible de séparer les deux paquets vers des puits plus éloignés) à l'aide d'impulsions Raman π dont le désaccord correspond à la différence de potentiel entre les puits. On laisse ensuite les paquets d'onde évoluer librement dans chaque puits pendant un temps T . Le fait d'ajouter une impulsion de symétrisation permet de s'affranchir de la dépendance en ω_{eg} du déphasage total. En effet

$$\Delta\phi = \frac{2}{\hbar} (m_{Rb}g\lambda_l + V_{n+1} - V_{n-1})T + (\omega_{eg}^{(n+1)} - \omega_{eg}^{(n-1)})T - \phi^{(1)} + 2(\phi^{(2)} - \phi^{(3)} + \phi^{(4)}) - \phi^{(5)} \quad (\text{I.1.4})$$

dans le cas où deux paquets d'onde sont initialement dans le puits n et sont séparés de deux puits avant d'être recombines. Dans cette équation, V_n correspond à l'effet du potentiel dû à la surface sur un atome dans le puits n . Les ϕ_s^i sont les facteurs de phase pour chaque impulsion utilisée pour réaliser l'interféromètre, elles dépendent du laser utilisé et sont connues. Le terme $m_{Rb}g\lambda_l$ représente la différence d'énergie potentielle gravitationnelle entre les deux puits due à la configuration verticale du dispositif. Enfin $\omega_{eg}^{(n)}$ correspond à la différence d'énergie entre les deux niveaux hyperfins de l'atome dans le puits n .

Ce schéma interférométrique repose sur des transitions Raman entre deux puits voisins. Il en résulte que la force de Rabi qui définit la force du couplage, donnée dans le cas précédent pour des atomes en l'absence de potentiel lumineux et de miroir, devient

$$\Omega_{nn'} = \Omega_{eff} \langle \psi_n | e^{-ik_{eff}z} | \psi_{n'} \rangle,$$

où ψ_n est l'état externe de l'atome dans le puits n et k_{eff} le vecteur d'onde effectif des lasers Raman. Cette fréquence de Rabi doit être optimisée en fonction des paramètres du réseau afin de favoriser les transitions souhaitées entre puits voisins.

Le couplage ne sera évidemment efficace que si la différence de fréquence des faisceaux Raman correspond à la différence d'énergie entre les états couplés

$$\omega_{Ram} = \omega_{eg} + \frac{E_n - E_{n'}}{\hbar},$$

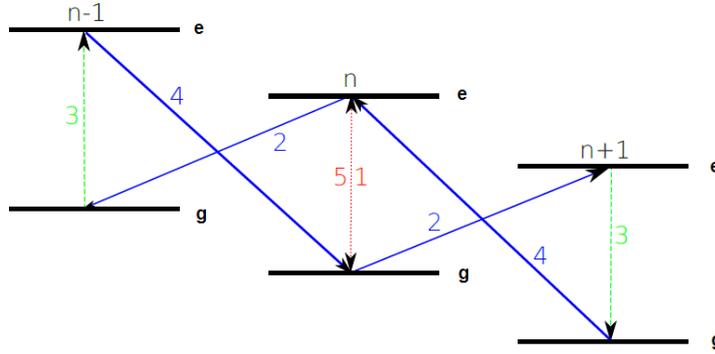


FIGURE I.4 – Schéma papillon pour l'interféromètre. Les lignes pointillées rouges représentent les impulsions $\frac{\pi}{2}$ micro-ondes utilisées pour créer la superposition cohérente et pour recombinaison le paquet d'onde à la sortie du schéma interférométrique. Les lignes bleues symbolisent les impulsions π Raman entre un puits et son voisin tandis que les tirets verts représentent les impulsions π micro-ondes dans les deux puits séparés. La séquence des impulsions est donnée par les chiffres de 1 à 5.

avec ω_{eg} la différence entre les deux niveaux hyperfins de l'atome et E_n le niveau d'énergie de l'état externe de cet atome. Il faut donc pour chaque transition fixer le désaccord ω_{Ram} et choisir la durée et la puissance de l'impulsion Raman de façon à réaliser une impulsion π ou $\frac{\pi}{2}$.

L'objectif de l'expérience est de mesurer la différence de potentiel de l'équation (I.1.4) avec une précision de 10^{-4} Hz. Cet objectif tient compte des sources de bruits pouvant intervenir dans l'expérience et limiter la précision de la mesure sur la différence de phase. En effet, chaque terme de cette équation est soumis à des incertitudes provenant de l'erreur commise sur la connaissance de la phase des lasers utilisés pour effectuer les transitions Raman dans l'interféromètre soit de la modification anisotrope des niveaux d'énergie atomiques le long du piège. Pour le détail de ces incertitudes, nous nous reporterons aux différents travaux réalisés précédemment [4, 5].

I.1.3 Recherche d'une déviation à la loi de Newton

La recherche de déviation à la loi de la gravité de Newton est un problème récurrent de ces dernières années. Initialement motivée par de possibles déviations à la gravité standard dues à de nouvelles forces dont le couplage serait du même ordre que la gravité, cette recherche a récemment été encouragée par les modèles de théories d'unification qui prédisent l'existence de forces dix mille fois plus grandes que la gravité entre 1 et 100 μm . Même si les premiers résultats n'ont pas permis l'observation de cette «cinquième force», ces recherches ont amélioré notre compréhension de la gravité et permis de réduire la fenêtre des paramètres possibles pour l'existence de cette force (voir figure I.5).

Cette cinquième force est souvent paramétrée par un potentiel de Yukawa qui s'ajoute au potentiel de gravitation :

$$U(r) = \frac{GMm}{r} \left(1 + \alpha e^{-\frac{r}{\lambda}}\right),$$

où les paramètres α et λ représentent respectivement l'amplitude de la déviation et sa portée. G , M et m sont respectivement la constante de gravitation, la masse du miroir, et la masse de l'atome. Cette paramétrisation permet de comparer prédictions et contraintes expérimentales, et d'établir à l'aide des données expérimentales des zones d'exclusion dans le plan des paramètres (λ, α) résumant ces interactions.

Ainsi toute mesure de forces à faible distance permet de poursuivre la recherche de cette déviation et dans le cas d'un résultat négatif d'étendre la zone d'exclusion du plan (λ, α) . La recherche de cette force pour la plage des faibles distances est difficile à cause de la présence des forces électromagnétiques (van der Waals, Casimir-Polder) qui sont dominantes de plusieurs ordres de grandeur. Toute expérience visant la recherche de cette déviation à la gravitation pour ces distances s'accompagne alors de l'objectif premier de mesurer l'effet Casimir-Polder avec une grande précision afin de pouvoir contrôler cet effet et pouvoir éventuellement observer cette déviation recherchée [1].

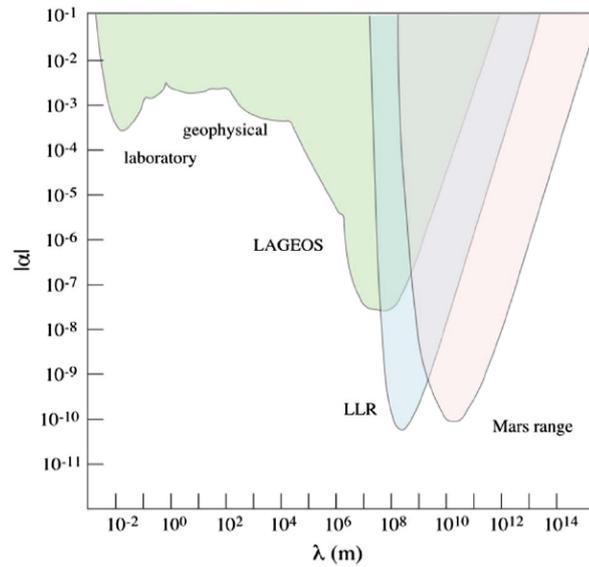


FIGURE I.5 – Plan des paramètres (λ, α) résumant les contraintes sur la recherche de la déviation à la loi de la gravitation.

Les prédictions des tests pour l'expérience FORCA-G sont représentées par différentes courbes en bleu, rouge et noir sur la figure I.6. Ces courbes ont été obtenues [6, 2] pour différentes méthodes de mesures réalisables. Ces calculs ont été réalisés en considérant une sensibilité expérimentale de 10^{-4} Hz. La courbe en noir représente une mesure de la différence de potentiel pour des atomes de ^{87}Rb situés dans le puits $n = 70$, en plaçant le puits $n = 0$ au niveau de la surface, et dont l'interféromètre réaliserait une transition $\Delta n = \pm 1$. La courbe en bleu correspond à des atomes placés dans le puits $n = 40$ réalisant la même transition. Quant à la courbe en rouge, elle représente une mesure différentielle à l'aide d'atomes de ^{85}Rb et ^{87}Rb placés dans le

puits $n = 5$ et réalisant une transition $\Delta n = \pm 1$. L'utilisation de deux isotopes différents permet de s'affranchir des effets dus à la force de Casimir-Polder, et ainsi de n'être sensible qu'à la différence de masse.

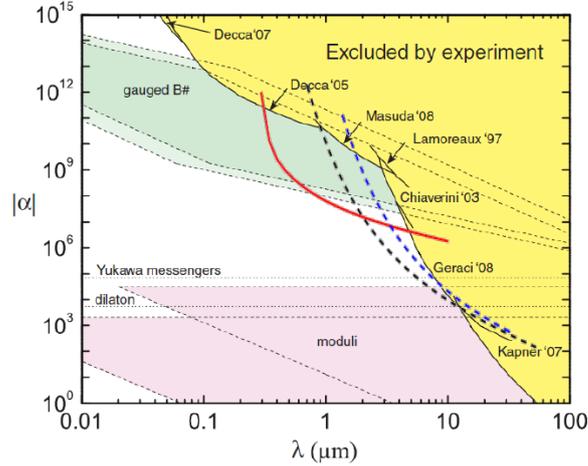


FIGURE I.6 – Contraintes attendues pour l'expérience FORCA-G. Les zones en jaune sont les zones exclues par des expériences antérieures (figure extraite de [6]). Les trois courbes superposées correspondent aux contraintes calculées théoriquement dans le cas de deux isotopes initialement dans les quatrième et sixième puits du réseau (courbe en rouge) et avec un seul isotope dans le puits 40 (courbe en noir) et 70 (courbe en bleu).

I.2 Interaction de Casimir-Polder

Deux objets électriquement neutres interagissent entre eux via la force de van der Waals. Il y a maintenant bientôt un siècle et demi, en 1873 dans son travail de thèse [7], Johannes Diderik van der Waals modifie l'équation d'état des gaz parfaits afin de prendre en compte l'existence d'une force attractive entre les molécules constituant un gaz. À cette période l'origine de cette force reste inexpliquée. C'est en 1930 que London montre, à l'aide de la nouvelle théorie quantique, par un calcul perturbatif au second ordre, une interaction attractive en r^{-6} entre deux atomes identiques sans moment dipolaire permanent [8]. L'interaction est due aux moments dipolaires instantanés qui proviennent des fluctuations des nuages électroniques des atomes.

Overbeek et Verwey [9] étudièrent les interactions attractives entre colloïdes en attribuant l'origine de ces interactions à la force de van der Waals. Mais la théorie de London échouait à expliquer leurs résultats expérimentaux, l'énergie attractive entre les colloïdes décroissait plus vite que prévu à grande distance. Overbeek suggéra alors que le temps de propagation du champ électromagnétique d'une particule à l'autre devait être pris en compte pour l'interaction à grande distance.

C'est Hendrik Casimir et Dirk Polder qui étudièrent alors le problème de l'interaction de van der Waals dans le cadre de l'électrodynamique quantique en utilisant la théorie des perturbations. Ils étudièrent l'interaction retardée dans les configurations

atome-surface et atome-atome [10]. Comme l'avait suggéré Overbeek, ils mirent en évidence que l'interaction à grande distance pour la configuration atome-atome était en r^{-7} . Le calcul de Casimir et Polder est l'une des premières applications des méthodes de l'électrodynamique quantique. Le résultat important du travail de Casimir est l'interprétation qu'il fait du résultat à partir de la notion d'énergie de point zéro du champ électromagnétique.

I.2.1 Effet Casimir-Polder entre un atome et un miroir

Dans leur travail original [10], Casimir et Polder ont décrit le problème dans l'approximation du couplage minimal qui consiste à substituer $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}_\alpha - q_\alpha \mathbf{A}(\mathbf{r})$ afin de prendre en compte l'interaction particule-champ, où $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est le potentiel vecteur en jauge de Coulomb, \mathbf{p} la quantité de mouvement et q_α la charge de la particule α considérée.

$$H = \frac{1}{2} \int d^3r \left[\epsilon_0 \mathbf{E}^{\perp 2}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] + \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha} \left[\mathbf{p}_\alpha^2 - q_\alpha \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] + \sum_{\alpha \neq \alpha'} \frac{q_\alpha q_{\alpha'}}{8\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_{\alpha'}|}. \quad (\text{I.2.1})$$

Mais le problème peut être considérablement simplifié en formulant le problème sous la forme de l'approximation du couplage multipolaire (*multipolar coupling scheme*). Cette approximation repose sur le traitement de l'interaction atome-champ comme une interaction dipolaire. Elle a été proposée en 1959 par E. Power et S. Zienau [11]. Elle consiste à transformer les variables dynamiques au moyen d'une transformation de la forme $\hat{O}' = \hat{U} \hat{O} \hat{U}^\dagger$ avec l'opérateur unitaire

$$\hat{U} = e^{\frac{i}{\hbar} \int d^3r \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})}$$

dépendant de la polarisation $\hat{\mathbf{P}}$ et du potentiel vecteur du champ électromagnétique. En exprimant l'Hamiltonien (I.2.1) en terme des variables transformées et en appliquant un développement au premier ordre, nous obtenons l'Hamiltonien

$$H' = \frac{1}{2} \int d^3r \left[\epsilon_0 \mathbf{E}'^{\perp 2}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] + \sum_\alpha \frac{\mathbf{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}'^{\perp 2}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2\epsilon_0} \int d^3r \mathbf{P}^2(\mathbf{r}),$$

où \mathbf{d} le moment dipolaire est défini par

$$\mathbf{d} = \sum_\alpha q_\alpha \mathbf{r}_\alpha,$$

et le champ électrique transformé

$$\mathbf{E}'^\perp(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^\perp(\mathbf{r}) + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}^\perp(\mathbf{r}).$$

L'interaction atome-champ peut s'écrire à présent sous la forme de l'Hamiltonien d'interaction

$$H_{int} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}'^\perp(\mathbf{r}). \quad (\text{I.2.2})$$

Notre nouveau champ \mathbf{E}'^\perp , que nous noterons à présent \mathbf{E} , peut être quantifié sous la forme standard

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{K},p} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{K}}}{2\epsilon_0}} \left(\mathbf{f}_{\mathbf{K},p}(\mathbf{r}) a_{\mathbf{K},p} + \mathbf{f}_{\mathbf{K},p}^*(\mathbf{r}) a_{\mathbf{K},p}^\dagger \right),$$

où chaque terme correspond à une onde progressive de vecteur d'onde \mathbf{K} et de polarisation p et où les opérateurs $a_{\mathbf{K},p}^\dagger$ et $a_{\mathbf{K},p}$ sont respectivement les opérateurs de création et d'annihilation d'un photon dans le mode $\{\mathbf{K},p\}$. Les fonctions $\mathbf{f}_{\mathbf{K},p}(\mathbf{r})$ sont les fonctions modes associées aux conditions aux limites choisies. Dans notre cas, la présence de la surface peut être modélisée par une boîte de taille L parfaitement conductrice avec les conditions aux limites suivantes

$$-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}, \quad -\frac{L}{2} \leq y \leq \frac{L}{2}, \quad 0 \leq z \leq L,$$

où nous faisons tendre L vers l'infini à la fin du calcul pour revenir au cas d'une surface infinie. Dans ces cas, les fonctions $\mathbf{f}_{\mathbf{K},p}(\mathbf{r})$ s'expriment en fonction de x , y et z comme

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_{\mathbf{K},p}(\mathbf{r}))_x &= \sqrt{\frac{8}{V}} (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{K},p})_x \cos \left[k_x \left(x + \frac{L}{2} \right) \right] \sin \left[k_y \left(y + \frac{L}{2} \right) \right] \sin [k_z z] \quad (\text{I.2.3}) \\ (\mathbf{f}_{\mathbf{K},p}(\mathbf{r}))_y &= \sqrt{\frac{8}{V}} (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{K},p})_y \sin \left[k_x \left(x + \frac{L}{2} \right) \right] \cos \left[k_y \left(y + \frac{L}{2} \right) \right] \sin [k_z z] \\ (\mathbf{f}_{\mathbf{K},p}(\mathbf{r}))_z &= \sqrt{\frac{8}{V}} (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{K},p})_z \sin \left[k_x \left(x + \frac{L}{2} \right) \right] \sin \left[k_y \left(y + \frac{L}{2} \right) \right] \cos [k_z z], \end{aligned}$$

où les $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{K},p}$ sont les vecteurs unitaires de polarisation tels que

$$\sum_p |(\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{K},p})_i|^2 = 1 - \frac{k_i^2}{K^2}, \quad i = x, y, z \quad (\text{I.2.4})$$

et les valeurs des composantes du vecteur \mathbf{K} autorisées sont

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{L}, \quad \{n_x, n_y, n_z\} \in \mathbb{N}.$$

À présent, nous pouvons calculer la force subie par l'atome due à l'interaction atome-champ modélisé par l'Hamiltonien d'interaction H_{int} (I.2.2). Le calcul perturbatif doit se faire au second ordre car l'opérateur moment dipolaire est impair, la perturbation au premier ordre est nulle.

$$\Delta E(\mathbf{r}) = \sum_e \sum_{\mathbf{K},p} \frac{|\langle e, 1_{\mathbf{K},p} | -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) | g, 0 \rangle|^2}{\hbar(\omega_{\mathbf{K}} + \omega_{eg})},$$

où l'état initial $|g, 0\rangle$ correspond à un atome dans son état fondamental g en l'absence de photon et l'état excité $|e, 1_{\mathbf{K},p}\rangle$ correspond à un atome dans un état excité e en présence d'un photon du champ dans le mode $\{\mathbf{K},p\}$.

Nous insérons dans cette équation les composantes de $\mathbf{f}_{\mathbf{K},p}(\mathbf{r})$ (I.2.3). En observant que, dans la limite où $L \rightarrow \infty$, nous pouvons remplacer les fonctions trigonométriques par leurs valeurs moyennes de sorte que $\sin(k_{x/y}L/2) \cos(k_{x/y}L/2) \rightarrow 0$ et $\cos(k_{x/y}L/2)^2 \rightarrow 1/2$ (car ces fonctions oscillent avec k_i très rapidement par rapport

aux autres fonctions dans l'intégrant), nous montrons que la perturbation au deuxième ordre de l'énergie s'écrit

$$\Delta E(z) = \sum_e \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{p}} \frac{1}{\hbar(\omega_{\mathbf{K}} + \omega_{eg})} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{K}}}{2\epsilon_0} \frac{2}{V} \left[\left| d_{eg}^x \right|^2 |(\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{K}, p})_x|^2 \sin(k_z z)^2 \right. \\ \left. + \left| d_{eg}^y \right|^2 |(\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{K}, p})_y|^2 \sin(k_z z)^2 + \left| d_{eg}^z \right|^2 |(\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{K}, p})_z|^2 \cos(k_z z)^2 \right].$$

Nous décidons de considérer le cas où il n'y a qu'une seule particule α , dans notre cas, un atome : $\mathbf{d} = q\mathbf{r}$. Nous faisons l'hypothèse que cette atome est à symétrie sphérique, ainsi nous pouvons écrire $\left| d_{eg}^x \right|^2 = \left| d_{eg}^y \right|^2 = \left| d_{eg}^z \right|^2 = |d_{eg}|^2$. En utilisant également la relation (I.2.4) sur les vecteurs de polarisation, la correction en énergie s'écrit

$$\Delta E(z) = \sum_e \sum_{\mathbf{K}} \frac{|d_{eg}|^2}{\hbar(\omega_{\mathbf{K}} + \omega_{eg})} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{K}}}{2\epsilon_0} \frac{2}{V} \left(1 - \frac{k_z^2}{K^2} \cos(2k_z z) \right).$$

À présent nous faisons tendre vers l'infini le volume de notre boîte fictive. Dans ce cas la somme sur \mathbf{K} devient une intégrale suivant la condition

$$\sum_{\mathbf{K}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{K} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi K^2 dK d\theta \sin(\theta),$$

où le dernier membre de cette relation est exprimée en coordonnées sphériques. La correction en énergie se réécrit alors

$$\Delta E(z) = - \sum_e \int_0^\infty K^2 dK \\ \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \frac{|d_{eg}|^2}{\hbar c(K + K_{eg})} \frac{\hbar c K}{4\pi^2 \epsilon_0} \left(1 - \cos^2(\theta) \cos(2K \cos(\theta) z) \right).$$

En intégrant selon la variable θ , nous obtenons

$$\Delta E(z) = - \sum_e \int_0^\infty K^2 dK \frac{|d_{eg}|^2}{\hbar c(K + K_{eg})} \frac{\hbar c K}{4\pi^2 \epsilon_0} \left(\frac{\sin(2Kz)}{Kz} + \frac{\cos(2Kz)}{(Kz)^2} - \frac{\sin(2Kz)}{2(Kz)^3} \right), \\ \Delta E(z) = - \sum_e \left[\int_0^\infty K^2 dK \frac{|d_{eg}|^2}{\hbar c(K + K_{eg})} \frac{\hbar c K e^{2iKz}}{4\pi^2 \epsilon_0} \left(\frac{1}{2iKz} + \frac{1}{2(Kz)^2} - \frac{1}{4i(Kz)^3} \right) \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^0 K^2 dK \frac{|d_{eg}|^2}{\hbar c(-K + K_{eg})} \frac{\hbar c K e^{2iKz}}{4\pi^2 \epsilon_0} \left(\frac{1}{2iKz} + \frac{1}{2(Kz)^2} - \frac{1}{4i(Kz)^3} \right) \right].$$

En passant dans le plan complexe à l'aide d'une rotation de Wick : nous introduisons les variables $u = -iK$ pour faire l'intégration, nous obtenons

$$\Delta E(z) = -\frac{\hbar c}{4\pi^2\epsilon_0} \int_0^\infty u^2 du \sum_e \frac{2|d_{eg}|^2 K_{eg}}{\hbar c(u^2 + K_{eg}^2)} \frac{e^{-2uz}}{2z} \left(1 + \frac{2}{2uz} + \frac{2}{4u^2 z^2}\right)$$

que nous pouvons réécrire en faisant apparaître la polarisabilité atomique, définie comme il suit pour un atome dans son état fondamental

$$\alpha(\omega) = \frac{2}{\hbar} \sum_e \frac{\omega_{eg} |d_{eg}|^2}{\omega_{eg}^2 - \omega^2},$$

$$\Delta E(z) = -\frac{\hbar c}{4\pi^2\epsilon_0} \int_0^\infty u^2 du \alpha(iu) \frac{e^{-2uz}}{2z} \left(1 + \frac{1}{uz} + \frac{1}{2u^2 z^2}\right). \quad (\text{I.2.5})$$

Nous retrouvons alors le résultat démontré par Casimir et Polder.

L'expression (I.2.5) peut être explicitée en calculant l'intégrale à l'aide d'hypothèses sur la distance atome-surface z ce qui est généralement fait en distinguant deux régimes : l'un à grande distance, appelé régime de Casimir-Polder et l'autre à courte distance nommé régime de van der Waals. Cette distinction se fait par la comparaison de la distance z avec la longueur d'onde typique de la transition atomique λ_{at} .

Dans le cas où $z \ll \lambda_{at}$, nous nous trouvons dans le régime de van der Waals et nous pouvons considérer que la vitesse de la lumière est très grande devant les autres quantités en jeu dans (I.2.5). Ceci permet de considérer que le produit $uz \ll 1$, donc l'exponentielle dans (I.2.5) tend vers 1 tandis que le terme $\frac{u^2}{2z} \left(1 + \frac{2}{2uz} - \frac{2}{4u^2 z^2}\right)$ tend vers $\frac{1}{4z^3}$. L'expression du potentiel devient

$$V_{vdW}(z) = -\frac{\hbar c}{16\pi^2\epsilon_0 z^3} \int_0^\infty du \alpha(iu).$$

Dans le cas où $z \gg \lambda_{at}$, l'exponentielle dans (I.2.5) décroît beaucoup plus rapidement que la polarisabilité de l'atome. Nous pouvons remplacer $\alpha(iu)$ par sa valeur statique $\alpha(0) = \alpha_0$. Dans ce cas nous pouvons nous ramener à une expression simple du potentiel ¹

$$V_{CP}(z) = -\frac{3\hbar c\alpha_0}{32\pi^2\epsilon_0 z^4}. \quad (\text{I.2.6})$$

I.2.2 Effet Casimir entre deux surfaces conductrices

Après avoir travaillé sur les interactions atome-atome et atome-miroir parfait en termes de différences d'énergie de point zéro [12], Casimir calcula la différence d'énergie de point zéro entre une «grande cavité» et une cavité dont deux des parois sont plus rapprochées. Il démontra ainsi l'existence d'une interaction attractive entre deux plaques parfaitement conductrices placées dans le vide [13]. Cet effet peut être vu comme une manifestation physique des conditions aux limites imposées au champ fluctuant du vide. Qualitativement, la différence entre l'intérieur et l'extérieur de la cavité vient du fait que les modes propres sont différents à l'intérieur et à l'extérieur.

1. À noter que (I.2.6) est obtenue en opérant le changement de variable $x = uz$ et en utilisant la formule $\int_0^\infty x^2 dx e^{-2x} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right) = \frac{3}{4}$

Nous partons de la quantification du champ électromagnétique. Nous avons l'Hamiltonien classique

$$H_{EM} = \sum_{\mathbf{K},p} \hbar\omega_K \left(a_{\mathbf{K},p}^\dagger a_{\mathbf{K},p} + \frac{1}{2} \right),$$

où chaque terme correspond à une onde progressive de vecteur d'onde \mathbf{K} et de polarisation p et où les opérateurs $a_{\mathbf{K},p}^\dagger$ et $a_{\mathbf{K},p}$ sont respectivement les opérateurs de création et d'annihilation d'un photon dans le mode $\{\mathbf{K},p\}$. Le terme $\frac{1}{2}$ représente ce qui est appelé «l'énergie de point zéro» et correspond à la valeur moyenne de l'Hamiltonien sur l'état à zéro photon.

Nous considérons deux cavités de volume différent : une première cavité (1) cubique de volume L^3 constituée de paroi parfaitement conductrice dont les différentes parois sont à grande distance les unes des autres ; une deuxième cavité (2) où les deux parois parallèles au plan (xOy) sont proches l'une de l'autre avec une distance a . Dans les deux cas, l'énergie totale dans les deux cavités est

$$E = \sum_{\mathbf{K},p} \frac{\hbar\omega_K}{2},$$

où la somme est opérée sur l'ensemble des fréquences de résonance de la cavité. Comme nous le savons, ce résultat est divergent. Le résultat qui a un sens physique est la différence d'énergie entre les deux types de cavité, cette différence s'interprète comme l'interaction entre les deux surfaces réfléchissantes parallèles dans le plan (xOy) .

Les conditions aux limites de la cavité (1) imposent aux nombres d'onde

$$k_x = \frac{\pi}{L}n_x, \quad k_y = \frac{\pi}{L}n_y, \quad k_z = \frac{\pi}{L}n_z$$

et pour la cavité (2)

$$k_x = \frac{\pi}{L}n_x, \quad k_y = \frac{\pi}{L}n_y, \quad k_z = \frac{\pi}{a}n_z,$$

avec dans les deux cas n_x , n_y et n_z des entiers positifs. Nous rappelons la relation suivante entre \mathbf{K} et ω_K :

$$\omega_K = cK = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}.$$

Nous pouvons alors calculer la valeur de l'énergie dans la cavité (2)

$$E_2(a) = \sum'_{n,p} \int dk_x \int dk_y \frac{\hbar c}{2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}.$$

L'énergie dans la cavité (1) s'écrit également

$$E_1(\infty) = \sum'_{n,p} \int dk_x \int dk_y \frac{\hbar c}{2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}.$$

À partir de ces deux quantités, nous pouvons calculer la différence d'énergie entre ces deux situations

$$E(a) = E_1(\infty) - E_2(a).$$

Nous obtenons alors une quantité finie. En utilisant la formule d'Euler-Maclaurin, nous obtenons l'expression obtenue par Casimir

$$E(a) = -\frac{\hbar c \pi^2 A}{720 a^3}$$

qui dépend de la distance entre les deux surfaces conductrices et de l'aire $A = L^2$ de ces deux surfaces.

1.2.3 Petit historique des expériences

a Mesure de la force de Casimir

La première expérience de mesure de la force de Casimir entre deux surface métalliques a été réalisée par Sparnaay en 1958 [14]. Les surfaces métalliques étaient séparées de 0,5 à 0,2 μm . Les mesures furent réalisées avec des surfaces Al-Al, Cr-Cr et Cr-acier. Les difficultés principales de cette expérience étaient le contrôle du parallélisme des surfaces, ainsi que le contrôle de la neutralité des surfaces métalliques. En effet la force de Casimir peut être facilement occultée par les forces électrostatiques. L'expérience mit en évidence une force attractive entre les deux surfaces, mais l'erreur estimée était d'environ 100 %.

L'une des premières expériences qui donna une mesure non-ambiguë de la force de Casimir fut réalisée par van Blokland et Overbeek en 1978 [15]. La force fut mesurée à l'aide d'un peson placé entre une lentille et une surface, toutes les deux recouvertes avec une couche de chrome de 50 à 100 nm, séparées d'une distance de 132 à 670 nm. L'utilisation d'une lentille au lieu d'une seconde surface simplifiait le contrôle de la géométrie en supprimant le problème de parallélisme. La comparaison des résultats de mesure avec les calculs obtenus par la théorie de Lifshitz permit de conclure à un accord entre les valeurs mesurées et calculées. La précision de cette expérience était de l'ordre de 25 %.

Ces vingt dernières années, grâce à de nouvelles techniques de mesures, de nouvelles expériences ont été réalisées afin d'améliorer la précision sur la mesure de l'effet Casimir. La plupart de ces expériences de mesures de la force de Casimir est également motivée par la recherche de contraintes sur les paramètres (λ, α) pour l'existence d'une déviation à la loi de la gravitation.

En 1997 Steve Lamoreaux put mesurer cette force en utilisant un pendule de torsion [16], mesurée entre une sphère métallique et un plan métallique. Comme les forces électrostatique et de Casimir agissent simultanément, il est nécessaire de soustraire précisément l'effet de la force électrostatique afin de déterminer la valeur de la force de Casimir. La mesure fut faite pour des distances comprises entre 0,6 et 6 μm . L'accord entre les résultats expérimentaux et théoriques était de l'ordre de 5 %, mais après correction la force dut être mesurée avec une erreur de l'ordre de 10 % à courte distance [17, 18, 19].

Après cette première expérience de Lamoreaux, Mohideen réalisa une deuxième série d'expériences avec une précision améliorée [20, 21, 22]. Ces expériences étaient

basées sur l'utilisation d'un microscope à force atomique. Une sphère métallique est fixée sur un bras du microscope (micro-poutres ou *microcantilever*), et portée au voisinage d'une surface métallique à une distance comprise entre 0,1 et 0,9 μm . D'autres expériences utilisant le même type de dispositif [23, 24] furent également menées par la suite et permirent d'améliorer la mesure de la force de Casimir. L'ensemble de ces mesures de force de Casimir permet également d'améliorer les contraintes pour les paramètres (λ, α) dans la recherche de déviation à la loi de la gravitation. L'ensemble de ces résultats est présenté sur le diagramme d'exclusion I.6.

Nous nous arrêterons ici dans l'exposé non-exhaustif des différents travaux sur la mesure des forces de Casimir.

b Mesure de la force de Casimir-Polder

Parallèlement à ces expériences sur la force de Casimir, d'autres utilisant des atomes furent menées afin de mesurer les forces de van der Waals et de Casimir-Polder.

Une des premières expériences fut réalisée en 1993 [25]. Elle mesurait la déflexion d'atomes de sodium passant à proximité d'une surface en fonction de la distance entre les atomes et cette surface (distance supérieure au micromètre). Une deuxième expérience réalisée en 1996 [26] mesura la force de van der Waals à l'aide d'un miroir à atomes : des atomes froids sont lâchés au dessus d'une surface, et une onde évanescente désaccordée dans le bleu de la transition est créée au niveau de la surface. La puissance et le désaccord de l'onde sont ajustés pour que les atomes soient repoussés par l'onde évanescente et rebondissent sur la surface. Pour une puissance laser fixée, il faut alors tenir compte du potentiel de Casimir-Polder pour voir correspondre le désaccord à partir duquel les atomes sont réfléchis et le désaccord théorique.

Une autre expérience de 2011 utilisa le principe de réflexion spéculaire [27]. Lorsque des atomes arrivent vers une surface avec une vitesse faible, ils peuvent être réfléchis par cette surface, à cause d'un phénomène de réflexion quantique. La dépendance de la réflexion en fonction de la vitesse d'incidence est expliquée par l'interaction de Casimir-Polder. D'autres expériences reprirent par la suite le même principe [28, 29, 30]. Néanmoins ces différentes mesures, insuffisamment précises, ne permirent pas de nouvelle contrainte sur l'existence d'une cinquième force.

Plus récemment une expérience utilisant un condensat de ^{87}Rb fut menée par E. Cornell en 2005 [31] basée sur une proposition dans [32]. Le principe de cette expérience était d'approcher le condensat d'une surface et de mesurer la modification de la fréquence d'oscillation du piège par la force de Casimir-Polder à longue portée (entre 3 et 10 μm). En 2007, une autre expérience permit de mesurer pour la première fois la force de Casimir-Polder en situation de déséquilibre thermique entre la surface et le champ du vide [33].

Une autre approche permet d'étudier la dépendance du potentiel de Casimir-Polder à plus courte portée (environ 100 nm, van der Waals) [34]. Elle utilise le principe de la spectroscopie de réflexion sélective à une interface. L'intérêt de cette méthode est que les atomes n'ont pas besoin d'être refroidis. Il est possible de varier la température et le matériau de surface utilisé. Cette équipe de l'université de Villetaneuse a récemment étudié le comportement du C_3 du potentiel de van der Waals en fonction de la température [35] pour un atome excité.

Toutes ces mesures ont pour grande incertitude la distance réelle de l'atome à la surface. De nouveaux projets sont imaginés. Ils impliquent des atomes piégés dans des réseaux et des mesures différentielles permettant de raffiner la précision sur la distance. Utiliser des techniques d'interférométrie atomique permet des mesures très précises. Il est possible d'envisager de mesurer une cinquième force si elle est seulement 1000 fois plus grande que la gravité à courte distance [36]. C'est au sein de ces nouveaux projets que s'inscrit l'expérience FORCA-G qui comme beaucoup des expériences présentées ici a le double objectif de mesurer l'effet Casimir-Polder avec une excellente précision et de contraindre les paramètres d'une éventuelle déviation à la loi de la gravitation.

1.3 Organisation de la thèse

Le chapitre II de cette thèse se concentre sur la détermination du potentiel de Casimir-Polder pour le miroir conçu pour l'expérience FORCA-G. Nous calculons les coefficients de réflexions caractérisant ce miroir. Nous déterminons particulièrement l'incertitude que nous avons sur le calcul du potentiel de Casimir-Polder résultant de notre connaissance limitée de certaines caractéristiques du miroir.

Le chapitre III se concentre sur la détermination des niveaux d'énergie des atomes piégés dans le réseau face au miroir. Après avoir rappelé certains résultats des calculs déjà réalisés lors de précédentes études [2]. Nous montrons l'impossibilité d'utiliser une méthode perturbative pour résoudre le problème de la modification des niveaux d'énergie par l'interaction Casimir-Polder. Nous développons alors une méthode numérique non-perturbative pour résoudre le problème aux valeurs propres et choisissons de modéliser l'interaction très courte distance entre l'atome et le miroir par un potentiel de Lennard-Jones.

Le chapitre IV considère la situation d'un déséquilibre thermique, c'est-à-dire le cas où le miroir est à une température différente de l'environnement. Après avoir présenté les résultats et calculs déjà réalisés sur ce sujet, nous les appliquons à la configuration de l'expérience FORCA-G pour estimer si un tel déséquilibre serait observable.

Pour finir, différents résultats mathématiques sont présentés dans l'appendice portant particulièrement sur le formalisme des fonctions de Green utilisé dans la détermination du potentiel de Casimir-Polder.

Chapitre II

Potentiel Casimir-Polder pour l'expérience FORCA-G

L'expérience FORCA-G utilise un miroir spécialement fabriqué pour le dispositif expérimental. Il nous faut déterminer avec la meilleure précision possible le potentiel de Casimir-Polder induit par ce miroir, afin de pouvoir par la suite calculer l'effet dû au potentiel de Casimir-Polder sur les niveaux d'énergie des atomes piégés dans le réseau optique. Nous présenterons d'abord trois calculs du potentiel de Casimir-Polder. Nous déterminerons ensuite les coefficients de réflexion du miroir nécessaires pour calculer le potentiel. Enfin nous estimerons l'incertitude sur la connaissance du potentiel due aux incertitudes sur les différents paramètres entrant dans le calcul des coefficients de réflexion.

II.1 Potentiel de Casimir-Polder

Nous présentons ici trois méthodes différentes pour calculer le potentiel de Casimir-Polder, méthodes qui seront utilisées par la suite. La méthode qui utilise des opérateurs bosoniques de création et d'annihilation des excitations du champ électromagnétique [37], sera pratique pour calculer l'effet induit par le potentiel de Casimir-Polder sur les niveaux d'énergie des atomes piégés. La méthode qui utilise le théorème de fluctuation-dissipation sera introduite pour calculer le potentiel dans le cas d'un déséquilibre thermique entre le miroir et l'environnement [38, 39]. La méthode utilisant les matrices de diffusion [40, 41] a pour avantage d'être générale, elle donne un résultat valable pour tout type de géométrie et de plus à l'inverse des deux autres méthodes n'est pas un développement au premier ordre en $\alpha(\omega)$, où $\alpha(\omega)$ est la polarisabilité de l'atome.

II.1.1 Opérateurs bosoniques de création et annihilation

Nous considérons la situation d'une surface diélectrique traitée comme un milieu dispersif continu et local caractérisé par une constante diélectrique $\epsilon(\omega)$ et une perméabilité $\mu(\omega) = 1$. Cette surface se trouve dans le plan xOy positionnée en $z = 0$ dans le vide. Un atome de rubidium 87 dans son état fondamental est placé face à cette surface à la position z . L'Hamiltonien du système s'écrit alors

$$H = H_{EM} + H_{at} + H_{int},$$

avec

$$H_{at} = \sum_i \hbar\omega_i |i\rangle \langle i|,$$

$$H_{EM} = \sum_\lambda \int d^3r \int_0^{+\infty} d\omega \hbar\omega \hat{\mathbf{f}}_\lambda^\dagger(\mathbf{r},\omega) \hat{\mathbf{f}}_\lambda(\mathbf{r},\omega),$$

$$H_{int} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(z).$$

H_{at} est associé au degré de liberté interne de l'atome où $|i\rangle$ est un état interne atomique ayant pour énergie $\hbar\omega_i$. H_{EM} est l'Hamiltonien du système constitué par l'ensemble vide et miroir. Les opérateurs $\hat{\mathbf{f}}_\lambda^\dagger(\mathbf{r},\omega)$ et $\hat{\mathbf{f}}_\lambda(\mathbf{r},\omega)$ sont des opérateurs bosoniques de création et d'annihilation d'un quantum d'énergie $\hbar\omega$ de polarisation λ . L'action de l'opérateur $\hat{\mathbf{f}}_\lambda^\dagger(\mathbf{r},\omega)$ sur l'état vide $|\{0\}\rangle$ s'écrit $|\mathbf{1}_\lambda(\mathbf{r},\omega)\rangle = \hat{\mathbf{f}}_\lambda^\dagger(\mathbf{r},\omega) |\{0\}\rangle$.

L'effet Casimir-Polder provient de l'interaction entre l'atome et le champ électromagnétique modifié par la surface. Nous représenterons cette interaction par l'Hamiltonien dipolaire H_{int} [11]. $\hat{\mathbf{d}}$ correspond à l'opérateur moment dipolaire pour l'atome et $\hat{\mathbf{E}}(z)$ est le champ électrique à la position z de l'atome qui s'exprime sous la forme :

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i\sqrt{\frac{\hbar}{\pi\epsilon_0}} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\omega^2}{c^2} \int d^3r' \sqrt{\epsilon''(\mathbf{r}',\omega)} \left(\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) \cdot \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r}',\omega) + \text{h.c.} \right), \quad (\text{II.1.1})$$

où $\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)$ est ici la fonction de Green (voir appendice A) pour le champ électrique induit par les fluctuations du champ de polarisation du milieu (la sommation sur les polarisations λ du champ est sous entendue dans l'ensemble du calcul). $\epsilon''(\mathbf{r},\omega)$ est la partie imaginaire de la permittivité du matériau constituant le miroir.

Nous devons prendre en compte la température T d'équilibre thermique à laquelle se fera l'expérience FORCA-G. L'état initial s'écrit sous la forme : $|I\rangle = |g\rangle |\mathbf{n}(\mathbf{r},\omega)\rangle$ où $|g\rangle$ est l'état fondamental interne de l'atome et $|\mathbf{n}(\mathbf{r},\omega)\rangle$ l'état du vide en présence du miroir à la position \mathbf{r} de l'atome. Cet état correspond à l'excitation d'un nombre moyen n de quanta d'énergie $\hbar\omega$ à la température T avec $n(\omega,T) = 1/(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)$. D'après la théorie des perturbations, nous avons au second ordre (le premier ordre est nul car l'opérateur moment dipolaire est impair)

$$\Delta E(\mathbf{r}) = -\sum_e \int d^3r' \int d\omega \left[\frac{\left| \langle g | \langle \mathbf{n}(\mathbf{r},\omega) | \hat{\mathbf{d}}_i \cdot E_i(\mathbf{r}) | \mathbf{n} + \mathbf{1}(\mathbf{r},\omega) \rangle | e \rangle \right|^2}{\hbar(\omega + \omega_{eg})} + \frac{\left| \langle g | \langle \mathbf{n}(\mathbf{r},\omega) | \hat{\mathbf{d}}_i \cdot E_i(\mathbf{r}) | \mathbf{n} - \mathbf{1}(\mathbf{r},\omega) \rangle | e \rangle \right|^2}{\hbar(\omega + \omega_{eg})} \right]. \quad (\text{II.1.2})$$

L'état intermédiaire $|\mathbf{n} \pm \mathbf{1}(\mathbf{r}',\omega)\rangle |e\rangle$ correspond à un état interne excité $|e\rangle$ de l'atome d'énergie $\hbar\omega_e$ et $|\mathbf{n} \pm \mathbf{1}(\mathbf{r}',\omega)\rangle$ un état du système {vide+miroir} où il y a un quantum d'excitation $\hbar\omega$ en plus ou en moins par rapport à l'état initial $|\mathbf{n}(\mathbf{r},\omega)\rangle$. Notons qu'à

température nulle, seul le premier terme d'émission existe : de l'état $|\{0\}\rangle$ seul l'état $|\mathbf{1}(\mathbf{r}',\omega)\rangle$ peut être créé.

$$\begin{aligned} \Delta E(\mathbf{r}) = & -\frac{\hbar}{\pi\epsilon_0 c^4} \int d^3 r' \int d\omega \sum_e \frac{d_i^{ge} d_j^{eg} \omega^4}{\hbar(\omega + \omega_{eg})} \\ & \langle \mathbf{n}(\mathbf{r},\omega) | \int d^3 r'' \epsilon''(\mathbf{r}'',\omega) G_{ik}(\mathbf{r},\mathbf{r}'',\omega) \hat{f}_k(\mathbf{r}'',\omega) | \mathbf{n} + \mathbf{1}(\mathbf{r},\omega) \rangle \\ & \times \langle \mathbf{n} + \mathbf{1}(\mathbf{r},\omega) | \int d^3 r'' \epsilon''(\mathbf{r}'',\omega) G_{jk}^*(\mathbf{r},\mathbf{r}'',\omega) \hat{f}_k^\dagger(\mathbf{r}'',\omega) | \mathbf{n}(\mathbf{r},\omega) \rangle \\ & + \langle \mathbf{n}(\mathbf{r},\omega) | \int d^3 r'' \epsilon''(\mathbf{r}'',\omega) G_{ik}(\mathbf{r},\mathbf{r}'',\omega) \hat{f}_k^\dagger(\mathbf{r}'',\omega) | \mathbf{n} - \mathbf{1}(\mathbf{r},\omega) \rangle \\ & \times \langle \mathbf{n} - \mathbf{1}(\mathbf{r},\omega) | \int d^3 r'' \epsilon''(\mathbf{r}'',\omega) G_{jk}^*(\mathbf{r},\mathbf{r}'',\omega) \hat{f}_k(\mathbf{r}'',\omega) | \mathbf{n}(\mathbf{r},\omega) \rangle \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des opérateurs de création et d'annihilation et le fait que le milieu est local

$$\begin{aligned} \hat{f}_i^\dagger(\mathbf{r},\omega) | \mathbf{n}(\mathbf{r}',\omega) \rangle &= \delta_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sqrt{n(\omega,T) + 1} | \mathbf{n} + \mathbf{1}(\mathbf{r}',\omega) \rangle, \\ \hat{f}_i(\mathbf{r},\omega) | \mathbf{n}(\mathbf{r}',\omega) \rangle &= \delta_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sqrt{n(\omega,T)} | \mathbf{n} - \mathbf{1}(\mathbf{r}',\omega) \rangle, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta E(\mathbf{r}) = & -\frac{\hbar}{\pi\epsilon_0 c^4} \int d^3 r' \int d\omega \sum_e \frac{d_i^{ge} d_j^{eg} \omega^4}{\hbar(\omega + \omega_{eg})} (2n(\omega,T) + 1) \\ & \int d^3 r'' G_{ik}(\mathbf{r},\mathbf{r}'',\omega) \delta_k(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \int d^3 r''' G_{jk}^*(\mathbf{r},\mathbf{r}''',\omega) \delta_k(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'''), \end{aligned}$$

soit

$$\Delta E(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar}{\pi\epsilon_0 c^4} \int d^3 r' \int d\omega \frac{d_i^{ge} d_j^{eg} \omega^4}{\hbar(\omega + \omega_{eg})} (2n(\omega,T) + 1) \epsilon''(\mathbf{r}',\omega) G_{ik}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) G_{jk}^*(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega).$$

Comme la fonction de Green \mathbf{G} obéit à la relation suivante (voir A.4) :

$$\frac{\omega^2}{c^2} \int d^3 r'' \epsilon''(\mathbf{r}'',\omega) G_{ik}(\mathbf{r},\mathbf{r}'',\omega) G_{jk}^*(\mathbf{r}',\mathbf{r}'',\omega) = \Im(G_{ij}(r,r',\omega)),$$

la correction du niveau d'énergie de l'atome dans son état fondamental donne :

$$\Delta E(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar}{\pi\epsilon_0 c^2} \sum_e \int d\omega \frac{d_i^{ge} d_j^{eg} \omega^2}{\hbar(\omega + \omega_{eg})} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \Im(G_{ij}(r,r,\omega)),$$

où nous avons utilisé également la relation $2n(\omega,T) + 1 = \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)$. Avec les relations $G(r,r', -\omega^*) = G^*(r,r',\omega)$ et $\Im(G) = \frac{G - G^*}{2i}$, nous obtenons

$$\Delta E(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar}{2i\pi\epsilon_0 c^2} \left[\int_0^\infty d\omega \frac{d_i^{ge} d_j^{eg} \omega^2}{\hbar(\omega + \omega_{eg})} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) + \int_0^{+\infty} d\omega \frac{d_i^{ge} d_j^{eg} \omega^2}{\hbar(-\omega + \omega_{eg})} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) \right].$$

Nous définissons alors la polarisabilité $\alpha(\omega)$ de l'atome dans son état fondamental

$$\alpha_{ij}(\omega) = \sum_e \frac{2}{\hbar} \sum_e \frac{\omega_{eg} d_i^{eg} d_j^{eg}}{(\omega_{eg}^2 - \omega^2)}. \quad (\text{II.1.3})$$

Pour obtenir le potentiel de Casimir-Polder, nous ne considérons que la contribution du champ réfléchi \mathbf{G}^r par la surface (voir A.2) qui est la partie de la fonction de Green due à la présence de la surface diélectrique. Les autres contributions du champ vont correspondre au décalage de Lamb.

$$V_{CP}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2\pi\epsilon_0 c^2} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \text{Tr} [\Im(\alpha(\omega) \cdot \mathbf{G}^r(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega))]$$

Nous exprimons le potentiel de Casimir-Polder sur les fréquences imaginaires $i\xi = \omega$ en procédant à une rotation de Wick. Sur l'axe des fréquences imaginaires la fonction $\coth(\frac{\hbar\omega}{2k_B T})$ a pour pôles les fréquences de Matsubara $\xi = 2n\pi k_B T / \hbar$. Grâce au théorème des résidus, l'intégrale s'écrit

$$V_{CP}(\mathbf{r}) = \frac{k_B T}{\epsilon_0 c^2} \sum_n' \xi_n^2 \text{Tr} [\alpha(i\xi_n) \cdot \mathbf{G}^r(r, r, i\xi_n)].$$

Pour un miroir plan, la fonction de Green $\mathbf{G}^{(r)}$ A.2 s'écrit

$$\mathbf{G}^{(r)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = i \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2 2k_z} (\epsilon^{TE} r^{TE} \epsilon^{TE} + \epsilon^{TM+} r^{TM} \epsilon^{TM-}) e^{(\mathbf{K}^+ \cdot \mathbf{r} - \mathbf{K}^- \cdot \mathbf{r})},$$

où r^{TE} et r^{TM} sont les coefficients de réflexion du miroir respectivement pour les polarisations transverse électrique et transverse magnétique. ϵ^{TE} et $\epsilon^{TM\pm}$ sont les vecteurs polarisations associées définis par

$$\epsilon^{TE} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_z,$$

$$\epsilon^{TM\pm} = \epsilon^{TE} \wedge \mathbf{K}^\pm,$$

avec \mathbf{k} le vecteur d'onde transverse, le vecteur d'onde $\mathbf{K}^+ = \mathbf{k} + k_z \mathbf{e}_z$ si l'onde se propage en s'éloignant du miroir et $\mathbf{K}^- = \mathbf{k} - k_z \mathbf{e}_z$ si l'onde se propage vers le miroir. L'expérience utilise des atomes de ^{87}Rb . Nous supposons que l'atome est à symétrie sphérique (isotrope) car il ne possède qu'un unique électron sur sa dernière couche électronique. À partir de (II.1.3), nous avons alors

$$\alpha_{ij}(\omega) = \sum_e \frac{2}{3\hbar} \sum_e \frac{\omega_{eg} |\mathbf{d}_{eg}|^2}{(\omega_{eg}^2 - \omega^2)} \delta_{ij} = \alpha(\omega) \delta_{ij}, \quad (\text{II.1.4})$$

où $\alpha(\omega)$ est la polarisabilité scalaire de l'atome. Le potentiel de Casimir-Polder s'écrit dans ce cas

$$V_{CP}(z) = \frac{2k_B T}{\pi c^2} \sum_n' \xi_n^2 \frac{\alpha(i\xi_n)}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{k dk}{2\kappa} e^{-2\kappa z} \left[r^{TE} - \left(2 \frac{\kappa^2 c^2}{\xi_n^2} + 1 \right) r^{TM} \right]. \quad (\text{II.1.5})$$

Le miroir utilisé dans l'expérience FORCA-G a été élaboré pour avoir certaines propriétés de réflexion donc ce n'est pas un miroir formé d'une seule couche. La difficulté est de trouver les coefficients de réflexion d'un miroir multicouche qui correspondent le mieux aux propriétés optiques de ce miroir.

II.1.2 Utilisation du théorème de fluctuation-dissipation

Nous définissons deux demi-espaces V_1 et V_2 qui correspondent respectivement au vide avec une permittivité $\epsilon_1(\omega, \mathbf{r}) = 1$ et au miroir avec une permittivité $\epsilon_2(\omega, \mathbf{r})$. L'atome se trouve dans le demi-espace V_1 à une distance z de l'interface entre le vide et le miroir. Nous considérons un atome décrit par la fonction complexe de polarisabilité diélectrique $\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega)$. La force diélectrique agissant sur l'atome neutre s'écrit

$$F(\mathbf{r}) = \left\langle d_i^{tot}(t, \mathbf{r}) \nabla' E_i^{tot}(\mathbf{r}', t) \Big|_{\mathbf{r}} \right\rangle. \quad (\text{II.1.6})$$

Le champ électrique \mathbf{E}^{tot} correspond à la somme du champ électrique créée par les fluctuations du vide \mathbf{E}^{fl} et du champ électrique induit par le moment dipolaire électrique \mathbf{E}^{ind} . Le moment dipolaire électrique \mathbf{d}^{tot} correspond également à la somme du moment dipolaire électrique induit par le champ électrique environnant \mathbf{d}^{ind} et de la partie fluctuante du moment dipolaire électrique \mathbf{d}^{fl} . Le moment dipolaire induit par le champ électrique pour un atome isotrope s'écrit

$$\mathbf{d}^{ind} = \alpha(\omega) \mathbf{E}^{tot}, \quad (\text{II.1.7})$$

où nous supposons comme précédemment que l'atome est isotrope avec la polarisabilité atomique $\alpha(\omega)$ défini par (II.1.4). Nous modélisons l'atome comme un dipôle source ponctuel $\mathbf{d}(t, \mathbf{r}) = \int d\omega \mathbf{d}(\omega) e^{-i\omega t}$. Alors le champ de polarisation électrique créé par l'atome à une position \mathbf{r}'' est $\mathbf{P}(\omega, \mathbf{r}'') = \mathbf{d}(\omega) \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r})$. Le champ électrique induit à la position \mathbf{r}' par un dipôle électrique en \mathbf{r} s'écrit¹

$$\mathbf{E}^{ind}(\omega, \mathbf{r}') = \int d^3 \mathbf{r} \mathbf{G}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{P}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{G}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}^{tot}(\omega). \quad (\text{II.1.8})$$

1. Il est à noter qu'ici les définitions de la fonction de Green $\mathbf{G}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r})$ de (II.1.1) et (II.1.8) sont légèrement différentes. Les deux fonctions de Green diffèrent d'un facteur $\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2}$, le champ de polarisation électrique et l'opérateur bosonique étant reliés par $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = i \sqrt{\frac{\hbar \epsilon_0}{\pi}} \sqrt{\Im(\epsilon(\mathbf{r}, \omega))} \hat{\mathbf{f}}_e(\mathbf{r}, \omega)$

Nous choisissons de faire ce calcul à l'ordre le plus bas, ainsi les équations (II.1.7), (II.1.8), et (II.1.6) se réécrivent respectivement

$$\mathbf{d}^{ind} \approx \alpha(\omega)\mathbf{E}^{fl}, \quad (\text{II.1.9})$$

$$\mathbf{E}^{ind}(\omega, \mathbf{r}') \approx \mathbf{G}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}^{fl}(\omega), \quad (\text{II.1.10})$$

$$F(\mathbf{r}) \approx \left\langle d_i^{ind}(t) \nabla' E_i^{fl}(\mathbf{r}', t) \Big|_{\mathbf{r}} \right\rangle + \left\langle d_i^{fl}(t) \nabla' E_i^{ind}(\mathbf{r}', t) \Big|_{\mathbf{r}} \right\rangle. \quad (\text{II.1.11})$$

À partir des équations (II.1.9) et (II.1.10), nous obtenons pour les deux membres de l'équation (II.1.11)

$$\begin{aligned} \left\langle d_i^{ind}(t) \nabla' E_j^{fl}(\mathbf{r}', t) \Big|_{\mathbf{r}} \right\rangle &= \left\langle \int \frac{d\omega}{2\pi} d_i^{ind}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t} \nabla' \int \frac{d\omega'}{2\pi} E_j^{fl\dagger}(\omega', \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}} e^{i\omega' t} \right\rangle \quad (\text{II.1.12}) \\ &= \int \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i(\omega-\omega')t} \alpha(\omega) \left\langle E_i^{fl}(\omega, \mathbf{r}) \nabla' E_j^{fl\dagger}(\omega', \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}} \right\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle d_i^{ind}(t) \nabla' E_j^{fl}(\mathbf{r}', t) \Big|_{\mathbf{r}} \right\rangle &= \left\langle \int \frac{d\omega}{2\pi} d_i^{fl}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t} \nabla' \int \frac{d\omega'}{2\pi} E_j^{ind\dagger}(\omega', \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}} e^{i\omega' t} \right\rangle \quad (\text{II.1.13}) \\ &= \int \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i(\omega-\omega')t} \nabla' G_{jk}^*(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}} \left\langle d_i^{fl}(\omega) d_k^{fl\dagger}(\omega') \right\rangle. \end{aligned}$$

À l'équilibre thermique pour une température T , nous pouvons appliquer le théorème de fluctuation dissipation afin de calculer la valeur moyenne de (II.1.12) et (II.1.13). Ce théorème nous donne pour le dipôle électrique fluctuant

$$\left\langle d_i^{fl}(\omega) d_k^{fl\dagger}(\omega') \right\rangle = \frac{4\pi\hbar\delta(\omega-\omega')\delta_{ik}}{1-e^{-\hbar\omega/k_B T}} \alpha''(\omega) \quad (\text{II.1.14})$$

et pour le champ électrique fluctuant

$$\left\langle E_i^{fl}(\omega, \mathbf{r}) E_j^{fl\dagger}(\omega', \mathbf{r}') \right\rangle = \frac{4\pi\hbar\delta(\omega-\omega')}{1-e^{-\hbar\omega/k_B T}} \Im(G_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')). \quad (\text{II.1.15})$$

Ces deux expressions permettent de calculer la force de Casimir-Polder entre l'atome et la surface à l'équilibre à la température T . Nous obtenons en combinant ensemble les expressions (II.1.12), (II.1.13), (II.1.14) et (II.1.15) dans (II.1.11) :

$$\begin{aligned} F(T, \mathbf{r}) &= \int \frac{d\omega}{\pi} \frac{\hbar}{1-e^{-\hbar\omega/k_B T}} (\alpha(\omega) \nabla' \Im(G_{ii}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')) \Big|_{\mathbf{r}} + \nabla' G_{ii}^*(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}} \alpha''(\omega)) \\ &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \frac{\hbar}{1-e^{-\hbar\omega/k_B T}} (\alpha(\omega) \nabla' \Im(G_{ii}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')) \Big|_{\mathbf{r}} + \nabla' G_{ii}^*(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}} \alpha''(\omega)) \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \frac{\hbar}{1-e^{\hbar\omega/k_B T}} (\alpha(-\omega) \nabla' \Im(G_{ii}(-\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')) \Big|_{\mathbf{r}} + \nabla' G_{ii}^*(-\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}} \alpha''(-\omega)). \end{aligned}$$

Or d'après le théorème de réciprocité, nous avons la relation $G_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{ji}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r})$. Nous avons également la relation $G_{ij}^*(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{ij}(-\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ du fait de la causalité. De plus la fonction complexe de la polarisabilité de l'atome $\alpha(\omega)$ a pour propriété :

$\alpha'(\omega)$ est une fonction paire et $\alpha''(\omega)$ est une fonction impaire. Enfin, nous utilisons les relations suivantes : $\frac{1}{1-e^{-\hbar\omega/k_B T}} = 1 + \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} = 1 + n(\omega, T)$ où $n(\omega, T)$ correspond au nombre de photons de fréquence ω à la température T . Nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} F(T, \mathbf{r}) &= \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \left(1 + \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \right) (\alpha(\omega) \nabla' \Im(G_{ii}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'))|_{\mathbf{r}} + \nabla' G_{ii}^*(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}} \alpha''(\omega)) \\ &\quad - \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} (\alpha^*(\omega) \nabla' \Im(G_{ii}^*(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'))|_{\mathbf{r}} - \nabla' G_{ii}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}} \alpha''(\omega)) \\ &= \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \left(1 + 2 \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \right) \Im(\alpha(\omega) \nabla' G_{ii}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}}) \\ &= F_0(\mathbf{r}) + F_{th}^{eq}(\mathbf{r}, T), \end{aligned}$$

où $F_0(\mathbf{r})$ est la contribution des fluctuations du vide en l'absence de photons thermiques et $F_{th}^{eq}(\mathbf{r}, T)$ la contribution des photons thermiques pour une température T . Nous pouvons sommer ces deux contributions et réécrire :

$$F^{eq}(T, \mathbf{r}) = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \Im(\alpha(\omega) \nabla' G_{ii}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\mathbf{r}}). \quad (\text{II.1.16})$$

Nous souhaitons exprimer $F^{eq}(T, \mathbf{r})$ sous la forme d'une intégrale sur les fréquences complexes $i\xi = \omega$, nous réalisons comme précédemment une rotation de Wick et notons que les fréquences de Matsubara $\xi_n = 2n\pi k_B T / \hbar$ sont les pôles de $\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)$. Nous obtenons la force de Casimir-Polder comme une somme sur ces fréquences (II.1.17) :

$$F^{eq}(T, z) = \frac{2k_B T}{\pi c^2} \sum_n \xi_n^2 \frac{\alpha(i\xi_n)}{4\pi\epsilon_0} \int k dk e^{-2\kappa z} \left[r^{TE} - \left(2 \frac{\kappa^2 c^2}{\xi_n^2} + 1\right) r^{TM} \right]. \quad (\text{II.1.17})$$

Il est à noter que la possibilité de faire une rotation de Wick vient de la sommabilité de la contribution du vide $F_0(\mathbf{r})$ et de la contribution des photons thermiques $F_{th}^{eq}(\mathbf{r}, T)$, ce qui nous permet de faire apparaître la fonction $\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)$ qui est développable en série sur ces pôles. Nous verrons ultérieurement que dans le cas d'un déséquilibre thermique entre la température du miroir et du vide, ces deux contributions ne peuvent pas être réunies, nous devons garder l'intégrale sur les fréquences réelles. Afin de comparer avec le résultat (II.1.5), nous voulons obtenir, à partir de la force $F^{eq}(T, z)$, le potentiel $V^{eq}(T, z)$. Comme nous sommes à l'équilibre thermique, nous avons la relation suivante entre la force de Casimir-Polder et son énergie :

$$E = - \int_z^{+\infty} F(z') dz'. \quad (\text{II.1.18})$$

Nous obtenons alors le résultat attendu calculé dans le paragraphe II.1.1 :

$$V^{eq}(T, z) = \frac{2k_B T}{\pi c^2} \sum_n \xi_n^2 \frac{\alpha(i\xi_n)}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{k dk}{2\kappa} e^{-2\kappa z} \left[r^{TE} - \left(2 \frac{\kappa^2 c^2}{\xi_n^2} + 1\right) r^{TM} \right]. \quad (\text{II.1.19})$$

II.1.3 Formalisme des matrices de diffusion

a Pression de radiation

Nous considérons deux objets au repos, à savoir l'objet 1 et 2. Ces deux objets sont séparés d'une distance L l'un de l'autre et se trouvent à l'équilibre thermique avec leur environnement à une température T . Nous considérons que nos deux objets (dans la pratique un miroir plan et un atome) ont un axe de symétrie selon la direction \mathbf{e}_z . Ainsi la pression de radiation subie par ces deux objets s'écrit

$$T_{zz}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \left[E_z E_z + c^2 B_z B_z - \frac{1}{2} (E^2 + c^2 B^2) \right].$$

Le champ électrique \mathbf{E} et \mathbf{B} peut s'écrire sous la forme d'une décomposition sur les fréquences :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_{p, \phi} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{dk_z}{2\pi} \frac{\hbar \omega}{2} \left(e^{-i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} \boldsymbol{\epsilon}^{p, \phi} e_p^\phi(\mathbf{k}, k_z) + \text{h.c.} \right), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \sum_{p, \phi} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{dk_z}{2\pi} \frac{\hbar \omega}{2} \left(e^{-i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})} \boldsymbol{\beta}^{p, \phi} e_p^\phi(\mathbf{k}, k_z) + \text{h.c.} \right), \end{aligned}$$

où $\omega = c|\mathbf{K}|$. La somme se fait sur la polarisation $p = \{TE, TM\}$ et sur le sens de propagation $\phi = \{+, -\}$. $\boldsymbol{\epsilon}^{p, \phi}$ est le vecteur polarisation du champ électrique (A.2.2) et (A.2.3). $\boldsymbol{\beta}^{p, \phi}$ le vecteur polarisation du champ magnétique qui est défini par

$$\boldsymbol{\beta}^{TE} = -\boldsymbol{\epsilon}^{TM}, \quad (\text{II.1.20})$$

$$\boldsymbol{\beta}^{TM} = \boldsymbol{\epsilon}^{TE}. \quad (\text{II.1.21})$$

Les amplitudes du champ $e^{p, \phi}(\mathbf{k}, k_z)$ et $(e^{p, \phi})^\dagger(\mathbf{k}, k_z)$ correspondent aux opérateurs de création et d'annihilation du champ électromagnétique. Les fonction de corrélation à l'équilibre thermique à la température T sont les suivantes

$$\begin{aligned} \langle e^{p, \phi}(\mathbf{k}, k_z) e^{p', \phi'}(\mathbf{k}', k'_z) \rangle_{therm} &= 0 \quad (\text{II.1.22}) \\ \langle (e^{p, \phi})^\dagger(\mathbf{k}, k_z) (e^{p', \phi'})^\dagger(\mathbf{k}', k'_z) \rangle_{therm} &= 0 \\ \langle e^{p, \phi}(\mathbf{k}, k_z) (e^{p', \phi'})^\dagger(\mathbf{k}', k'_z) \rangle_{therm} &= (2\pi)^3 \delta_{pp'} \delta_{\phi\phi'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(k_z - k'_z) (1 + n(\omega, T)) \\ \langle (e^{p, \phi})^\dagger(\mathbf{k}, k_z) e^{p', \phi'}(\mathbf{k}', k'_z) \rangle_{therm} &= (2\pi)^3 \delta_{pp'} \delta_{\phi\phi'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(k_z - k'_z) n(\omega, T). \end{aligned}$$

La valeur moyenne de la pression de radiation s'écrit alors

$$\begin{aligned} \langle T_{zz}(\mathbf{r}, z) \rangle_{therm} &= \frac{1}{2} \sum_{p, \phi} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{dk_z}{2\pi} \frac{\hbar \omega}{2} \times \langle e_p^\phi (e_p^\phi)^\dagger + (e_p^\phi)^\dagger e_p^\phi \rangle_{therm} \\ &\quad \times \left[\epsilon_z^{p, \phi} (\epsilon_z^{p, \phi})^* - \epsilon_x^{p, \phi} (\epsilon_x^{p, \phi})^* - \epsilon_y^{p, \phi} (\epsilon_y^{p, \phi})^* \right. \\ &\quad \left. + \beta_z^{p, \phi} (\beta_z^{p, \phi})^* - \beta_x^{p, \phi} (\beta_x^{p, \phi})^* - \beta_y^{p, \phi} (\beta_y^{p, \phi})^* \right]. \end{aligned}$$

À partir de la définition des vecteurs de polarisations (A.2.2), (A.2.3), (II.1.20) et (II.1.21), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left[\epsilon_z^{p,\phi} (\epsilon_z^{p',\phi'})^* - \epsilon_x^{p,\phi} (\epsilon_x^{p',\phi'})^* - \epsilon_y^{p,\phi} (\epsilon_y^{p',\phi'})^* + \beta_z^{p,\phi} (\beta_z^{p',\phi'})^* \right. \\ & \quad \left. - \beta_x^{p,\phi} (\beta_x^{p',\phi'})^* - \beta_y^{p,\phi} (\beta_y^{p',\phi'})^* \right] = -\delta_{pp'} \frac{2c^2}{\omega^2} \left(k_z^2 + |k_z|^2 \right). \end{aligned}$$

Au final, nous trouvons que la pression de radiation exercée par le vide en z est

$$\langle T_{zz}(\mathbf{r}, z) \rangle_{therm} = \frac{1}{2} \sum_{p,\phi} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \hbar k_z \times \left\langle e_p^\phi (e_p^\phi)^\dagger + (e_p^\phi)^\dagger e_p^\phi \right\rangle_{therm}.$$

b Réflexion et transmission par un miroir plan

Nous décrivons l'interaction de chaque objet avec le champ électromagnétique via un opérateur de réflexion \mathcal{R}^\pm et un opérateur de transmission \mathcal{T}^\pm qui relie les champs incidents, réfléchis et transmis. Les deux objets sont au repos, donc le processus de diffraction conserve les fréquences. De manière générale nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} E_{p,out}^-(\mathbf{k}, \omega) &= \sum_{p'} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \langle p, \mathbf{k} | \mathcal{R}^- | p', \mathbf{k}' \rangle E_{p',in}^+(\mathbf{k}', \omega), \\ E_{p,out}^+(\mathbf{k}, \omega) &= \sum_{p'} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \langle p, \mathbf{k} | \mathcal{R}^+ | p', \mathbf{k}' \rangle E_{p',in}^-(\mathbf{k}', \omega), \\ E_{p,out}^+(\mathbf{k}, \omega) &= \sum_{p'} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \langle p, \mathbf{k} | \mathcal{T}^+ | p', \mathbf{k}' \rangle E_{p',in}^+(\mathbf{k}', \omega), \\ E_{p,out}^-(\mathbf{k}, \omega) &= \sum_{p'} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \langle p, \mathbf{k} | \mathcal{T}^- | p', \mathbf{k}' \rangle E_{p',in}^-(\mathbf{k}', \omega). \end{aligned}$$

Les opérateurs de réflexion et de transmission respectent les propriétés suivantes. Le processus est causal, donc le champ réfléchi ou transmis ne peut précéder le champ incident. Ceci assure que les opérateurs \mathcal{R}^\pm et \mathcal{T}^\pm sont analytiques dans le demi-plan supérieur des fréquences complexes. Le principe de réflexion de Schwarz permet d'étendre les fonctions au domaine complet des fréquences complexes, ainsi les opérateurs respectent la propriété

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_p^\pm)^* (\omega, \mathbf{k}) &= \mathcal{R}_p^\pm (-\omega^*, \mathbf{k}), \\ (\mathcal{T}_p^\pm)^* (\omega, \mathbf{k}) &= \mathcal{T}_p^\pm (-\omega^*, \mathbf{k}). \end{aligned} \tag{II.1.23}$$

L'objet 1 qui est un miroir plan, est également invariant par translation dans le plan $\{xOy\}$, donc le vecteur d'onde \mathbf{k} et la polarisation sont aussi conservés. Seul le paramètre ϕ peut changer lorsque le champ se réfléchit sur l'objet 1. Nous allons décrire la cavité formée par les deux objets 1 et 2 à l'aide de deux matrices de diffusion, une

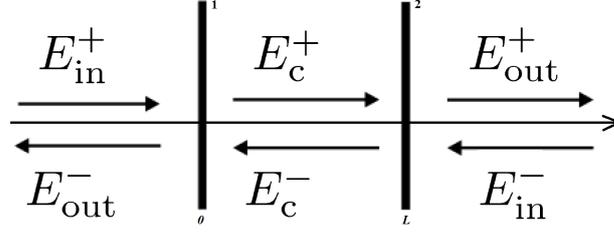


FIGURE II.1 – Représentation schématique de la diffusion du champ électrique en présence d'une cavité formée par deux objets

matrice S qui relie les champs extérieurs entrant et sortant et une matrice R qui relie le champ à l'intérieur de la cavité au champ extérieur entrant. Nous considérons que l'objet 1 se trouve à la position $z = 0$, l'objet 2 se trouve à la position $z = L$, et nous étudions le champ $E_C(z)$ dans la cavité.

$$\begin{pmatrix} E_{out}^- \\ E_{out}^+ \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} E_{in}^+ \\ E_{in}^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E_C^+ \\ E_C^- \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} E_{in}^+ \\ E_{in}^- \end{pmatrix}$$

où les matrices S et R sont définies par

$$S = \frac{1}{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} \mathcal{D}\mathcal{R}_1^- e^{-ik_z L} + \mathcal{T}_1^- \mathcal{R}_2^- \mathcal{T}_1^+ e^{ik_z L} & \mathcal{T}_1^+ \mathcal{T}_2^+ \\ \mathcal{T}_1^- \mathcal{T}_2^- & \mathcal{D}\mathcal{R}_2^+ e^{-ik_z L} + \mathcal{T}_2^+ \mathcal{R}_1^+ \mathcal{T}_2^- e^{ik_z L} \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{1}{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_1^+ & \mathcal{R}_1^+ \mathcal{T}_2^- e^{ik_z L} \\ \mathcal{R}_2^- \mathcal{T}_1^+ e^{ik_z L} & \mathcal{T}_2^- \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{D} = 1 - \mathcal{R}_1^+ \mathcal{R}_2^- e^{2ik_z L}$ correspond aux résonances dans la cavité, c'est-à-dire aux multiples réflexions possibles du champ à l'intérieur de celle-ci. S et R sont obtenus à l'aide du formalisme des matrices de transfert (voir paragraphe II.2.2).

À présent nous pouvons exprimer le champ dans la cavité en fonction du champ du vide à l'extérieur et ainsi déterminer la fonction de corrélation

$$\begin{aligned} & \left\langle e_{p,C}(\omega, \mathbf{k}) \cdot e_{p,C}^\dagger(\omega, \mathbf{k}) + e_{p,C}^\dagger(\omega, \mathbf{k}) \cdot e_{p,C}(\omega, \mathbf{k}) \right\rangle_{therm} \\ & = \text{Tr}(RR^\dagger) \left\langle e_{p,in}(\omega, \mathbf{k}) e_{p,in}^\dagger(\omega, \mathbf{k}) + e_{p,in}^\dagger(\omega, \mathbf{k}) e_{p,in}(\omega, \mathbf{k}) \right\rangle_{therm}. \end{aligned}$$

Or à partir de (II.1.22), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left\langle e_{p,C}(\omega, \mathbf{k}) \cdot e_{p,C}^\dagger(\omega, \mathbf{k}) + e_{p,C}^\dagger(\omega, \mathbf{k}) \cdot e_{p,C}(\omega, \mathbf{k}) \right\rangle_{therm} \\ & = 2 \left(1 + f_p(\omega, \mathbf{k}) + f_p^*(\omega, \mathbf{k}) \right) (1 + 2n(\omega, T)), \quad (\text{II.1.24}) \end{aligned}$$

avec la définition

$$f_p(\omega, \mathbf{k}) = \langle p, \mathbf{k} | \frac{\mathcal{R}_1^+ \mathcal{R}_2^-}{\mathcal{D}} | p, \mathbf{k} \rangle.$$

c Énergie de Casimir-Polder

Nous avons déterminé l'expression générale de la pression de radiation exercée par le champ du vide sur un objet de symétrie axiale \mathbf{e}_z à la position z . Cet objet subit cette pression de radiation exercée par le champ du vide à gauche et à droite. Les pressions totales exercées sur l'objet 1 et 2 s'écrivent alors pour la situation du schéma II.1

$$\begin{aligned} \langle P_1(z) \rangle_{therm} &= \frac{1}{2} \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \hbar k_z \times \left\langle e_{p,L}^+(e_{p,L}^+)^\dagger + (e_{p,L}^+)^\dagger e_{p,L}^+ + e_{p,L}^-(e_{p,L}^-)^\dagger \right. \\ &\quad \left. + (e_{p,L}^-)^\dagger e_{p,L}^- - e_{p,C}^+(e_{p,C}^+)^\dagger - (e_{p,C}^+)^\dagger e_{p,C}^+ - e_{p,C}^-(e_{p,C}^-)^\dagger - (e_{p,C}^-)^\dagger e_{p,C}^- \right\rangle_{therm}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle P_2(z) \rangle_{therm} &= \frac{1}{2} \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \hbar k_z \times \left\langle e_{p,C}^+(e_{p,C}^+)^\dagger + (e_{p,C}^+)^\dagger e_{p,C}^+ + e_{p,C}^-(e_{p,C}^-)^\dagger \right. \\ &\quad \left. + (e_{p,C}^-)^\dagger e_{p,C}^- - e_{p,R}^+(e_{p,R}^+)^\dagger - (e_{p,R}^+)^\dagger e_{p,R}^+ - e_{p,R}^-(e_{p,R}^-)^\dagger - (e_{p,R}^-)^\dagger e_{p,R}^- \right\rangle_{therm}. \end{aligned}$$

Utilisant (II.1.22) et (II.1.24) respectivement les fonctions de corrélations du champ du vide dans le demi-espace de gauche et de droite et les fonctions de corrélations du champ du vide dans la cavité formée par les objets 1 et 2, nous obtenons les pressions de radiations exercées sur 1 et 2

$$\begin{aligned} \langle P_1(z) \rangle_{therm} &= - \sum_p \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \hbar k_z (1 + 2n(\omega, T)) (f_p(\omega, \mathbf{k}) + f_p^*(\omega, \mathbf{k})), \\ \langle P_2(z) \rangle_{therm} &= \sum_p \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \hbar k_z (1 + 2n(\omega, T)) (f_p(\omega, \mathbf{k}) + f_p^*(\omega, \mathbf{k})). \end{aligned}$$

L'intégrale s'étend sur tout le spectre des fréquences qui contient les ondes évanescentes et les ondes propagatives. La force de Casimir-Polder qui s'exerce sur l'objet 2 est

$$F_{CP}(z) = A_2 \sum_p \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \hbar k_z (1 + 2n(\omega, T)) (f_p(\omega, \mathbf{k}) + f_p^*(\omega, \mathbf{k})),$$

où A_2 est la surface de l'objet 2 sur laquelle s'exerce cette pression $P_2(z) - P_1(z)$. Il est à noter que cette formulation n'est valable que pour des objets plans car nous avons écrit les champs $E_{p,out}^-(\mathbf{k}, \omega)$, $E_{p,out}^+(\mathbf{k}, \omega)$, $E_{p,in}^-(\mathbf{k}, \omega)$ et $E_{p,in}^+(\mathbf{k}, \omega)$ dépendant uniquement du vecteur d'onde transverse \mathbf{k} , privilégiant un axe de symétrie \mathbf{e}_z . Comme dans les paragraphes précédents, nous opérons une rotation de Wick pour exprimer l'intégrale sur les fréquences complexes $\omega = i\xi$. Grâce à la relation (II.1.23), $f_p^*(i\xi, \mathbf{k}) = f_p(i\xi, \mathbf{k})$, la force s'écrit

$$F_{CP}(L) = k_B T A_2 \sum_p \sum_n \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} 2\kappa f_p(i\xi_n, \mathbf{k}),$$

avec ξ_n les fréquences de Matsubara.

Dans notre expérience l'objet 1 correspond à un miroir plan et l'objet 2 à un atome de rubidium [42], nous avons alors

$$\begin{aligned} \langle p, \mathbf{k} | \mathcal{R}_1^\dagger | p', \mathbf{k}' \rangle &= (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{pp'} r^p(\omega, \mathbf{k}), \\ \langle p, \mathbf{k} | \mathcal{R}_2^\phi | p', \mathbf{k}' \rangle &= \frac{i\omega^2 \alpha(\omega)}{2\epsilon_0 c^2 k_z} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}} e^{-i\phi(k_z + k'_z)z} \left[\epsilon_p^\phi(\omega, \mathbf{k}) \cdot \epsilon_{p'}^{-\phi}(\omega, \mathbf{k}') \right], \end{aligned}$$

avec $r^p(\omega, \mathbf{k})$ les coefficients de réflexion du miroir, et $\alpha(\omega)$ la polarisabilité de l'atome et $\{\mathbf{R}, z\}$ la position de l'atome. Nous ne prenons pas en compte les réflexions multiples sur l'atome qui est un objet microscopique, un développement sur $\alpha(\omega)$ au premier ordre suffit. Comme nous sommes à l'équilibre thermodynamique à la température T , la relation (II.1.18) donne :

$$V^{eq}(T, z) = \frac{2k_B T}{c^2} \sum_n \xi_n^2 \frac{\alpha(i\xi_n)}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{k dk}{2\kappa} e^{-2\kappa z} \left[r^{TE} - \left(2 \frac{\kappa^2 c^2}{\xi_n^2} + 1 \right) r^{TM} \right].$$

II.2 Détermination des coefficients de réflexion du miroir

Pour calculer numériquement le potentiel de Casimir-Polder (II.1.19) pour l'expérience FORCA-G, il faut déterminer les coefficients de réflexion du miroir. Le miroir, fabriqué par le LMA (laboratoire des matériaux avancés), est constitué de deux types de matériaux, de la silice SiO_2 et du pentoxyde de tantale Ta_2O_5 . Ces deux matériaux sont déposés en couche sur un substrat, en BK7 ou en silice. Il est composé de 15 couches de Ta_2O_5 et de 15 couches de SiO_2 qui sont déposées en alternance, formant un miroir de Bragg. La première couche face à l'atome de rubidium 87 est une couche de silice. Nous allons d'abord présenter les données utilisées pour le calcul de la permittivité en fréquence complexe $\epsilon(i\xi)$ des deux matériaux. Ensuite nous déterminons par le calcul des matrices de transfert les coefficients de réflexion du miroir. Nous comparons ces résultats aux mesures de transmittance et d'ellipsométrie réalisées par le LISV (laboratoire d'ingénierie des systèmes de Versailles). Ceci nous permet de mettre en évidence les diverses sources d'incertitude sur les coefficients de réflexion du miroir.

II.2.1 Permittivités des matériaux constituant le miroir

a Permittivité du SiO_2

La permittivité d'un matériau traduit la réponse du milieu à la présence d'un champ électrique. Pour déterminer la permittivité du SiO_2 , nous avons utilisé les données optiques compilées dans [43]. Dans cet ouvrage sont répertoriés n et k , respectivement l'indice de réfraction et le coefficient d'extinction qui sont reliés à la permittivité par la relation suivante :

$$\epsilon(\omega) = (n + ik)^2.$$

Nous obtenons, avec $\epsilon'(\omega)$ la partie réelle et $\epsilon''(\omega)$ la partie imaginaire de la permittivité :

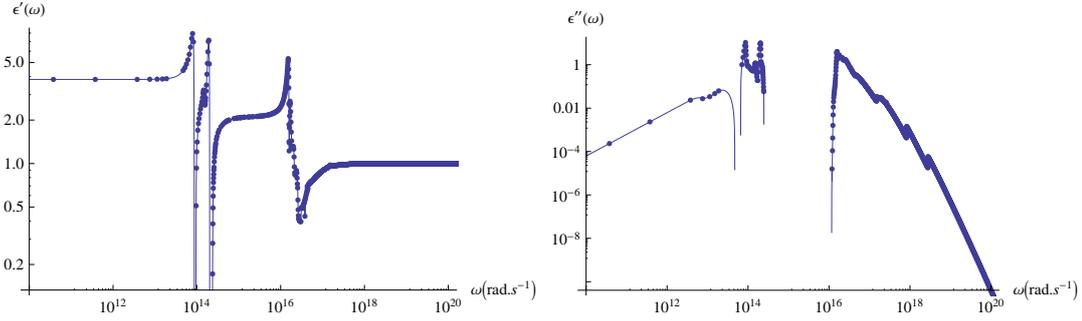


FIGURE II.2 – $\epsilon'(\omega)$ et $\epsilon''(\omega)$ respectivement à gauche et à droite en fonction de ω exprimée en rad.s^{-1} obtenues à partir de [43]

$$\epsilon'(\omega) = n^2 - k^2$$

$$\epsilon''(\omega) = 2nk$$

$\epsilon'(\omega)$ et $\epsilon''(\omega)$ sont reliées par les relations de Kramers-Kronig :

$$\epsilon'(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{x \epsilon''(x)}{x^2 - \omega^2} dx,$$

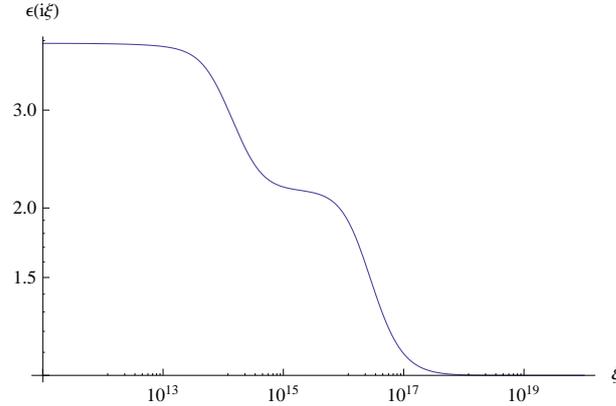
$$\epsilon''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\epsilon'(x) - 1}{x^2 - \omega^2} dx.$$

Le potentiel de Casimir-Polder (II.1.19) s'exprime comme une intégrale ou une somme sur les fréquences complexes. Il nous est nécessaire de calculer la permittivité $\epsilon(i\xi)$. À partir des relations de Kramers-Kronig, nous avons la relation

$$\epsilon(i\xi) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x \epsilon''(x)}{x^2 + \xi^2} dx. \quad (\text{II.2.1})$$

À partir des données optiques du SiO_2 , nous obtenons ϵ' et ϵ'' (voir figure II.2). Pour obtenir $\epsilon(i\xi)$, il est évident que nous ne pouvons pas intégrer sur l'ensemble des fréquences ω , mais nous savons que $\epsilon''(\omega)$ est une fonction impaire [44] donc $\epsilon''(0) = 0$ car la silice est un diélectrique et nous pouvons supposer au vu du comportement de la fonction sur la figure II.2 que $\epsilon''(\omega)$ tend vers 0 en ω aux basses fréquences. Pour $\omega > 10^{20} \text{ rad.s}^{-1}$, le milieu devient transparent aux hautes fréquences, $\epsilon''(\omega)$ tend vers 0 en ω , donc sa contribution est négligeable dans l'intégration.

$\epsilon(i\xi)$ est représentée sur la figure II.3. Nous remarquons que la fonction possède deux marches, l'une à environ $10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$ et l'autre à $10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$. Ces deux marches correspondent aux deux résonances principales que nous observons sur la courbe de $\epsilon''(\omega)$ et $\epsilon'(\omega)$ vers $10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$ et $10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$ sur la figure II.2. Il est à noter également que $\epsilon(i\omega)$ tend vers 1 lorsque ω tend vers ∞ ce qui découle directement de la relation (II.2.1). Nous pouvons aussi remarquer que d'après les relations de Kramers-Kronig et

FIGURE II.3 – $\epsilon(i\xi)$ en fonction de ξ exprimée en rad.s^{-1}

sur les figure II.2 et II.3, $\epsilon(i\omega)$ tend vers la valeur statique ϵ_0 lorsque ω tend vers 0. L'avantage de travailler en fréquences complexes est d'obtenir une permittivité (ou une polarisabilité $\alpha(i\xi)$ pour l'atome) sans résonances ce qui permet d'avoir un intégrant avec un comportement moins pathologique qu'en fréquences réelles.

b Permittivité du Ta_2O_5

Il a été plus difficile d'obtenir des données optiques sur un intervalle en fréquence suffisamment large pour le pentoxyde de tantale. Nous n'avons trouvé qu'une unique source de données pour la permittivité de ce matériau dans [45]. Le modèle de permittivité pour le Ta_2O_5 proposé dans cet article est

$$\epsilon(\omega) = \left(A + \frac{B}{\lambda} \right)^2 - \frac{\omega_{p,0}^2}{\omega^2 + i\gamma_0\omega} + \sum_{n=1}^N \frac{\omega_{p,n}^2}{\omega_n^2 - \omega^2 - i\gamma_n\omega}. \quad (\text{II.2.2})$$

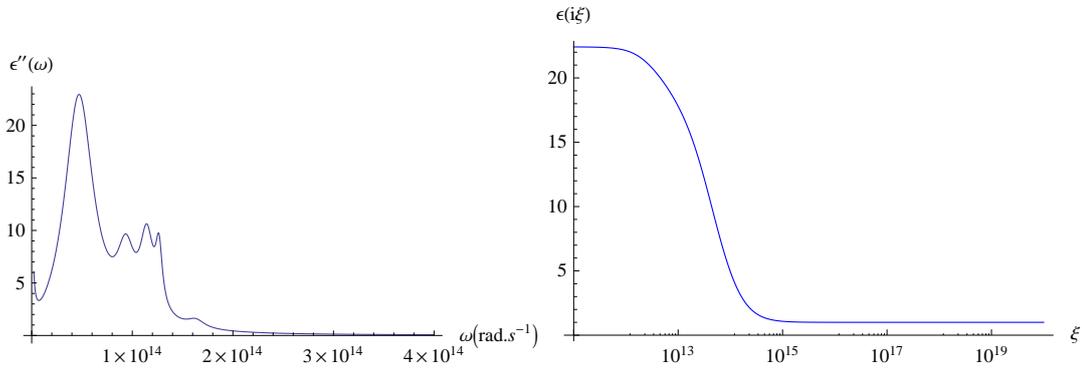
Le premier terme correspond à l'indice de réfraction selon la loi de Cauchy qui est valable pour les hautes fréquences où le milieu devient transparent, c'est en fait un développement limité en $1/\lambda$. Le second terme est un terme de Drude pour un électron libre dans le cas de pentoxyde de tantale non-cristallisé (amorphe). Le troisième terme correspond à la somme de N oscillateurs qui représentent les bandes d'absorption des phonons dans l'infra-rouge lointain. Les différents paramètres de ce modèle ont été obtenus grâce à différentes mesures ellipsométriques et spectrométriques sur une couche de Ta_2O_5 déposée sur un substrat de silice pour des fréquences allant de 10 cm^{-1} à 10000 cm^{-1} . Nous avons répertorié dans le tableau II.1 les valeurs numériques des différents paramètres pour du Ta_2O_5 amorphe.

Nous pouvons remarquer sur la figure II.4 que $\epsilon''(\omega)$ tend rapidement vers 0 à partir de $10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$, le matériau devient transparent pour les hautes fréquences. Ainsi nous pouvons nous fixer comme borne supérieure d'intégration pour calculer la permittivité en fréquence complexe $\omega = 10^{15}$, afin de prendre en compte l'oscillateur à la fréquence $\omega_n = 3020 \text{ cm}^{-1}$ soit $\omega_n = 5,7 \cdot 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$. D'après (II.2.2), $\epsilon''(\omega)$ diverge si ω tend vers 0. Dans l'hypothèse où Ta_2O_5 se comporte comme un diélectrique

n	ω_n (cm ⁻¹)	$\omega_{p,n}$ (cm ⁻¹)	γ_j (cm ⁻¹)
0		6490	$6,5 \cdot 10^5$
1	266	1040	188
2	500	573	112
3	609	634	88
4	672	408	43
5	868	277	113
6	3020	373	652

Table II.1 – Paramètre de $\epsilon(\omega)$ pour du Ta₂O₅ amorphe.

aux basses fréquences, $\epsilon''(\omega)$ doit tendre vers 0 quand ω tend vers 0. Pour réaliser l'intégration (II.2.1), nous choisissons cependant un comportement diélectrique. La relation $\epsilon'(0) = \epsilon(i0)$ doit nous aider à choisir la borne inférieure d'intégration dans l'expression (II.2.1). Sur la figure II.4, $\epsilon(i\xi)$ a les mêmes caractéristiques que dans le cas de la silice, une asymptote égale à 1 pour ω qui tend vers ∞ et une asymptote $\epsilon_0 = 22,41$ pour ω qui tend vers 0. Cette fois-ci la fonction $\epsilon(i\xi)$ du Ta₂O₅ ne possède qu'une seule marche car $\epsilon''(\omega)$ n'a qu'une seule résonance significative pour $\omega_n = 266$ cm⁻¹ soit $\omega = 5,01 \cdot 10^{13}$ rad.s⁻¹.

FIGURE II.4 – À gauche $\epsilon''(\omega)$ en fonction de ω exprimée en rad.s⁻¹ et à droite $\epsilon(i\xi)$ calculée en fonction de ξ exprimées en rad.s⁻¹.

II.2.2 Calcul des coefficients du miroir

Nous présentons ici la méthode utilisée [40, 46] pour calculer les coefficients de réflexion d'un miroir constitué de n couches de matériau quelconque d'épaisseur e_n et l'appliquons pour les coefficients de réflexion caractérisant le miroir de l'expérience FORCA-G.

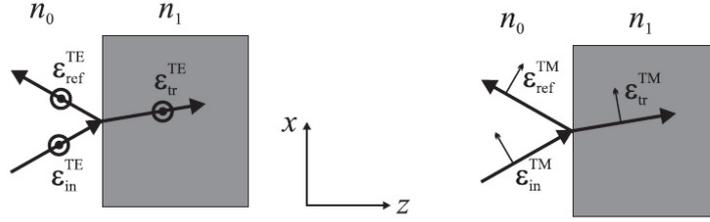


FIGURE II.5 – Réfraction sur une interface avec une polarisation TE à gauche et une polarisation TM à droite.

a Coefficients de réflexion de Fresnel et matrices S et T

Tout d'abord nous introduisons les coefficients de Fresnel. Pour un champ électrique incident d'amplitude \mathcal{E}^{in} caractérisé par une onde plane de fréquence ω et de vecteur d'onde \mathbf{K} , l'amplitude \mathcal{E}^{in} dans le milieu 0 est reliée par les coefficients de Fresnel r_{01} et t_{01} respectivement au champ réfléchi \mathcal{E}^{ref} dans le milieu 0 et transmis \mathcal{E}^{tr} dans le milieu 1. Sur le schéma II.5, nous montrons la réfraction d'une onde incidente de polarisation transverse électrique (TE) et transverse magnétique (TM) à une interface entre deux milieux 0 et 1. Dans cette configuration, les coefficients de Fresnel s'écrivent

$$\begin{aligned} r_{01}^{TE} &= \frac{\kappa_0 - \kappa_1}{\kappa_0 + \kappa_1} = -e^{-\beta^{TE}}, \\ r_{01}^{TM} &= \frac{\epsilon_1 \kappa_0 - \epsilon_0 \kappa_1}{\epsilon_1 \kappa_0 + \epsilon_0 \kappa_1} = -e^{-\beta^{TM}}, \\ t_{01}^{TE} &= \frac{2\kappa_0}{\kappa_0 + \kappa_1}, \\ t_{01}^{TM} &= \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \kappa_0}{\epsilon_1 \kappa_0 + \epsilon_0 \kappa_1}, \end{aligned}$$

avec $\kappa_i = \sqrt{\epsilon_i \frac{\omega^2}{c^2} + \mathbf{k}^2}$ la partie longitudinale du vecteur d'onde \mathbf{K}^\pm où $\omega = i\xi$, c la vitesse de la lumière, et, ϵ_0 et ϵ_1 la permittivité des milieux 0 et 1. Les coefficients de réflexion d'une onde incidente allant du milieu 1 vers le milieu 0 \bar{r}_{01} et \bar{t}_{01} sont reliés à r_{01} et t_{01} par les relations

$$\bar{r}_{01} = -r_{01},$$

$$\bar{t}_{01} = \frac{\kappa_1}{\kappa_0} t_{01}.$$

À présent, nous donnons la définition et le lien entre la matrice S et la matrice de transfert T qui vont nous servir par la suite à calculer les coefficients de réflexion pour un miroir multi-couche. La matrice de diffusion S relie les composantes du champ entrant E_{in} , c'est-à-dire qui se dirige vers l'interface, aux composantes du champ sortant E_{out} , c'est-à-dire qui s'éloigne de l'interface. La matrice S s'écrit alors

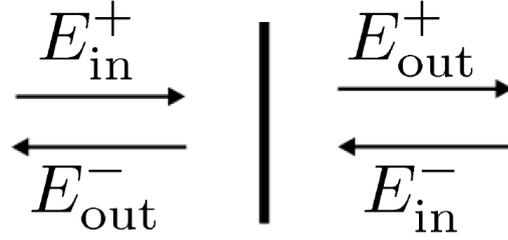


FIGURE II.6 – Représentation sous forme de réseau de l'interface du milieu 0 et 1.

$$\begin{aligned}
 |E_{in}\rangle &= \begin{pmatrix} E_{in}^+ \\ E_{in}^- \end{pmatrix} & |E_{out}\rangle &= \begin{pmatrix} E_{out}^- \\ E_{out}^+ \end{pmatrix} \\
 |E_{out}\rangle &= S |E_{in}\rangle & S &= \begin{pmatrix} r & \bar{t} \\ t & \bar{r} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

où r et t correspondent au coefficient de Fresnel à l'interface entre le milieu de gauche et de droite. La matrice de transfert T est définie afin de relier le champ qui se trouve à gauche E_L de l'interface au champ qui se trouve à droite E_R .

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}_L\rangle &= \begin{pmatrix} E_{in}^+ \\ E_{out}^- \end{pmatrix} & |E_R\rangle &= \begin{pmatrix} E_{out}^+ \\ E_{in}^- \end{pmatrix} \\
 |E_L\rangle &= T |E_R\rangle & T &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi en déduire les relations suivantes entre les matrices S et T

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{t} & b &= \frac{-\bar{r}}{t} \\
 c &= \frac{r}{t} & d &= \frac{t\bar{t}-r\bar{r}}{t}
 \end{aligned} \tag{II.2.3}$$

Les matrices T sont parfaitement adaptées pour notre problème de miroir multi-couche. Pour obtenir la matrice de transfert du miroir total, il suffira de multiplier les différentes matrices de transfert pour chaque couche du miroir. Nous obtiendrons les coefficients de réflexion du miroir grâce aux relations (II.2.3) qui nous donnent facilement le lien entre les coefficients des matrices de transfert et les coefficients de réflexion. Cette formulation à partir des matrices de transfert est également parfaitement adaptée pour écrire le champ électrique E décomposé sur une base d'onde progressive (sens des z croissant) et régressive tel que $E = E^+ e^{i\mathbf{K}^+ \cdot \mathbf{r}} + E^- e^{i\mathbf{K}^- \cdot \mathbf{r}}$ (cf. A.3).

b Matrice de transfert pour une couche d'épaisseur donnée

La matrice de transfert pour une lame d'épaisseur donnée s'écrit à l'aide de deux matrices de transfert de base, une matrice pour l'interface entre le milieu 0 et le milieu 1 et son inverse pour l'interface entre le milieu 1 et le milieu 0, et une matrice de propagation à travers le milieu 1. La matrice de transfert du milieu 0 au milieu 1 se détermine à partir des relations (II.2.3).

$$T_{01} = \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_0}} \frac{1}{\sqrt{2 \sinh \beta}} \begin{pmatrix} e^{\frac{\beta}{2}} & -e^{-\frac{\beta}{2}} \\ -e^{-\frac{\beta}{2}} & e^{\frac{\beta}{2}} \end{pmatrix} \quad T_1^{prop} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha_1} \end{pmatrix}$$

avec $\beta^{TE} = \ln\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_0}{\kappa_1 - \kappa_0}\right)$, $\beta^{TM} = \ln\left(\frac{\kappa_1 + \epsilon_1 \kappa_0}{\epsilon_1 \kappa_0 - \kappa_0}\right)$ et $\alpha_i = \kappa_i e$ où e est l'épaisseur de la lame. Donc nous obtenons les coefficients de réflexion pour une lame constituée d'une seule couche 1 dans un milieu 0 en faisant le produit

$$T^{lame} = T_{01} T_1^{prop} T_{10}.$$

Grâce aux relations (II.2.3) entre les coefficients des matrices de diffusion S et de transfert T , nous avons $r = \frac{a}{c}$, ainsi nous obtenons pour un miroir constitué d'une seule couche d'épaisseur e

$$r = -\frac{\sinh \beta}{\sinh(\alpha + \beta)}.$$

c Calcul des coefficients r^{TE} et r^{TM}

Pour un miroir multi-couche, nous procédons de la même manière. Dans notre cas, nous calculons les 30 matrices de transferts des 30 couches du miroir, chaque matrice de transfert ayant une épaisseur différente e_n . Pour obtenir la matrice de transfert du miroir complet, nous faisons le produit des matrices des différentes couches dans l'ordre où elles apparaissent dans le miroir, de la dernière couche déposée sur le substrat à la première face à l'atome de rubidium dans l'expérience :

$$T^{miroir} = \prod_{n=1}^{30} T_n^{lame}.$$

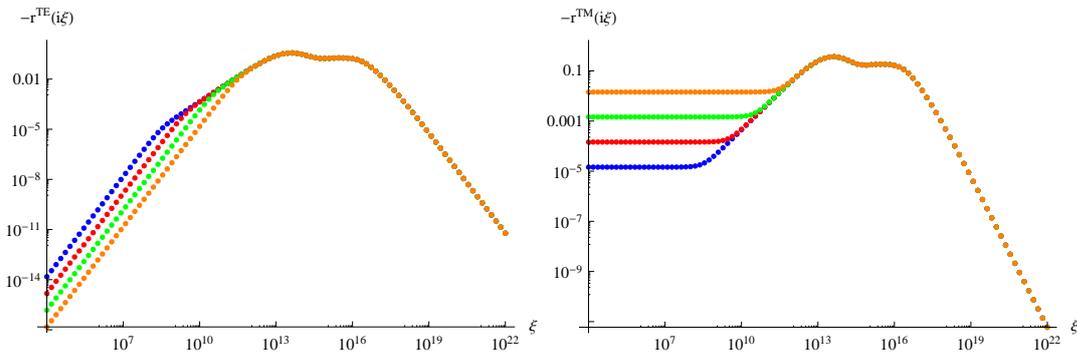


FIGURE II.7 – À gauche r^{TE} , à droite r^{TM} en fonction de ξ en rad.s^{-1} pour différentes valeurs de k : en bleu $k = 1 \text{ m}^{-1}$, en rouge $k = 10 \text{ m}^{-1}$, en vert $k = 100 \text{ m}^{-1}$ et en orange $k = 1000 \text{ m}^{-1}$.

Nous obtenons les coefficients de réflexion r^{TE} et r^{TM} en utilisant à nouveau les relations (II.2.3). Nous ne donnerons pas l'expression littérale des coefficients de réflexion car évidemment vu la complexité du miroir, leur expression ne peut pas s'écrire simplement.

Sur la figure II.7, nous avons tracé les coefficients $r^{TE}(i\xi, k)$ et $r^{TM}(i\xi, k)$ pour différents valeurs de k , la norme du vecteur d'onde transverse. Nous constatons que $|r|$ est inférieure à 1, comme attendu, par principe de conservation de l'énergie. r^{TE} et r^{TM} tendent vers 0 en $1/\omega^2$ pour les hautes fréquences ce qui correspond à la transparence du miroir à haute fréquence. À ces fréquences, le mouvement des électrons du matériau constituant le miroir ne peuvent pas suivre les oscillations du champ. Quant au basses fréquences, nous pouvons observer que $r^{TE}(i\xi, k)$ tend vers 0 en ω^2 et $r^{TM}(i\xi, k)$ tend vers une constante non nulle. Ce cas correspond à la situation de l'électrostatique, en fréquences réelles, où r^{TM} tend vers le coefficient de Fresnel statique $\frac{\epsilon(0)-1}{\epsilon(0)+1}$.

II.3 Mesures optiques des caractéristiques du miroir

Pour pouvoir tester notre modèle de miroir et vérifier la précision du calcul théorique de nos coefficients de réflexion, nous avons fait réaliser plusieurs mesures sur le miroir de l'expérience. Nous avons obtenu des mesures ellipsométriques dans l'infrarouge proche pour des longueurs d'onde comprises entre 1.7 et 30 μm et des mesure de transmittance dans le visible pour des longueurs d'onde comprises entre 400 et 1500 nm. Nous allons dans cette partie comparer ces résultats à nos calculs de transmittance et de paramètres ellipsométriques. Nous mettrons ensuite en évidence que la différence entre nos calculs et ces mesures viennent de diverses sources d'incertitude.

II.3.1 Transmittance du miroir dans le visible

La transmittance est définie par $T = |t|^2$. Comme nous travaillons sur les coefficients de réflexion, nous allons plutôt faire le lien avec la réflectance R définie par $R = |r|^2 = \left(|r^{TE}|^2 + |r^{TM}|^2 \right) / 2$. La transmittance T et la réflectance sont reliées par l'équation (II.3.1) qui est une conséquence de la conservation de l'énergie, à savoir l'énergie du champ électrique incident est égale à la somme de l'énergie du champ électrique réfléchi et du champ électrique transmis.

$$R + T = 1 \quad (\text{II.3.1})$$

Ce calcul de transmittance doit être réalisé en fréquence réelle. Les mesures de transmittance que nous avons, ont été réalisées pour un angle d'incidence de 0° , donc le vecteur d'onde \mathbf{K}_i dans un milieu i quelconque n'a qu'une unique composante selon \mathbf{e}_z et s'écrit $k_{i,z} = \sqrt{\epsilon_i} \frac{\omega}{c}$.

Comme nous pouvons le voir sur le graphique II.8, notre modèle des coefficients de réflexion nous donne un résultat pour la transmittance du miroir assez proche des mesures. Néanmoins nous cherchons à calculer le potentiel de Casimir-Polder le plus précisément possible pour ce miroir. Les différences entre la mesure et le calcul de la transmittance peuvent provenir soit de l'épaisseur des couches du miroir, soit de la permittivité des matériaux constituant le miroir que nous ne connaissons qu'avec une certaine précision. Nous pouvons déjà faire le constat que si nous modifions par exemple l'épaisseur des deux premières couches du miroir, la transmittance du miroir est modifiée de manière significative pour certaines longueurs d'onde (voir figure

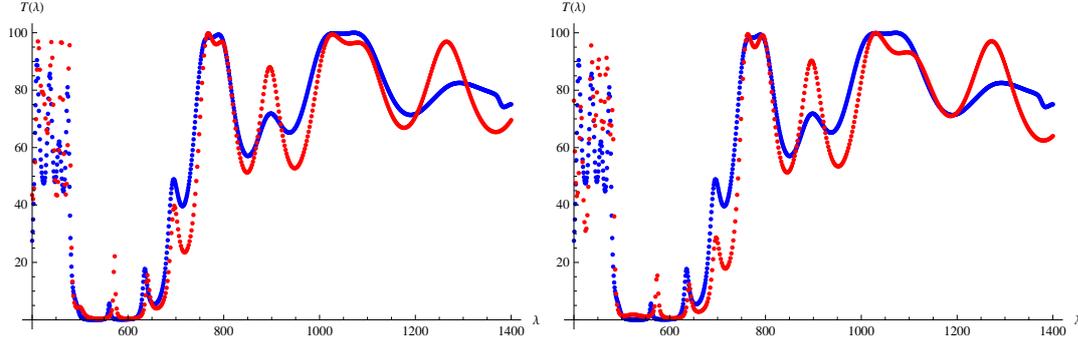


FIGURE II.8 – À gauche, comparaison de la transmittance mesurée en bleu pour le miroir entre 400 et 1500 nm et de la transmittance calculée en rouge à partir des données optiques du SiO_2 et du Ta_2O_5 . Transmittance exprimée en %. À droite, comparaison de la transmittance mesurée en bleu pour le miroir entre 400 et 1500 nm et de la transmittance calculée en rouge à partir des données optiques du SiO_2 et du Ta_2O_5 où nous avons modifié l'épaisseur de la première couche en silice de +10 nm et de la deuxième couche en pentoxyde de tantale de +30 nm.

II.8). Par contre après cette légère modification, l'aspect général de la fonction $T(\lambda)$ est conservé, ainsi la bonne réflexion de la lumière verte autour de 500 – 600 nm est l'une des caractéristiques souhaitées afin de construire le réseau optique. Cette dernière propriété vient de la périodicité des couches des matériaux choisis, propriété qui peut être retrouvée par un modèle de miroir de Bragg qui est un miroir qui alterne périodiquement $2N$ couches composées de deux types de milieux. Dans ce modèle de miroir [47], nous avons les relations

$$|R|^2 = \frac{|C|^2}{|C|^2 + \frac{\sinh K\Lambda}{\sinh NK\Lambda}},$$

$$|K|^2 = \frac{1}{\Lambda} \cos^{-1} \left[\frac{1}{2}(A + D) \right],$$

$$A^{TE} = e^{ik_{1,z}a} \left[\cos k_{2,z}b + \frac{1}{2}i \left(\frac{k_{2,z}}{k_{1,z}} + \frac{k_{1,z}}{k_{2,z}} \right) \sin k_{2,z}b \right],$$

$$C^{TE} = e^{ik_{1,z}a} \left[-\frac{1}{2}i \left(\frac{k_{2,z}}{k_{1,z}} - \frac{k_{1,z}}{k_{2,z}} \right) \sin k_{2,z}b \right],$$

$$D^{TE} = e^{-ik_{1,z}a} \left[\cos k_{2,z}b - \frac{1}{2}i \left(\frac{k_{2,z}}{k_{1,z}} + \frac{k_{1,z}}{k_{2,z}} \right) \sin k_{2,z}b \right],$$

$$A^{TM} = e^{ik_{1,z}a} \left[\cos k_{2,z}b + \frac{1}{2}i \left(\frac{n_1^2 k_{2,z}}{n_2^2 k_{1,z}} + \frac{n_2^2 k_{1,z}}{n_1^2 k_{2,z}} \right) \sin k_{2,z}b \right],$$

$$C^{TM} = e^{ik_{1,z}a} \left[-\frac{1}{2}i \left(-\frac{n_1^2 k_{2,z}}{n_2^2 k_{1,z}} + \frac{n_2^2 k_{1,z}}{n_1^2 k_{2,z}} \right) \sin k_{2,z}b \right],$$

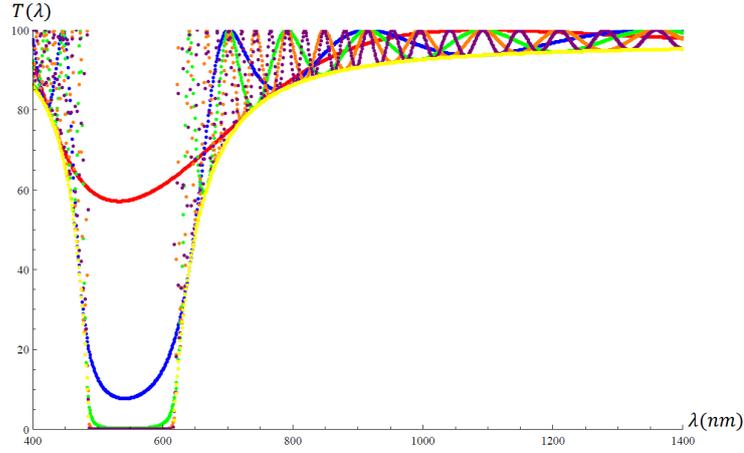


FIGURE II.9 – Transmittance exprimée en % pour un miroir de Bragg constitué de Ta_2O_5 pour la première couche et de SiO_2 pour la deuxième. Les différentes couleurs identifient le nombre N de cellules constituées de deux couches : $N = 2$ en rouge, $N = 5$ en bleu, $N = 10$ en vert, $N = 20$ en orange, et $N = 40$ en violet.

$$D^{TM} = e^{-ik_{1z}a} \left[\cos k_{2z}b - \frac{1}{2}i \left(\frac{n_1^2 k_{2z}}{n_2^2 k_{1z}} + \frac{n_2^2 k_{1z}}{n_1^2 k_{2z}} \right) \sin k_{2z}b \right],$$

avec $k_{1,z}$ et $k_{2,z}$ respectivement la composante du vecteur d'onde selon z dans le milieu 1 et le milieu 2, N le nombre de cellules où une cellule est composée d'une couche du milieu 1 d'épaisseur a et d'une couche du milieu 2 d'épaisseur b avec $\Lambda = a + b$. Nous observons sur la figure II.9 le pic entre 500 – 600 nm dû à l'interférence constructive des réflexions sur toutes les couches. Le nombre de cellules permet de faire varier le nombre de période d'oscillation et la profondeur du pic entre 500 – 600 nm. Les épaisseurs des premières couches du miroir permettent de faire varier la transmittance pour certaines longueurs d'ondes, par exemple l'expérience FORCA-G nécessite une bonne transmission autour de certaines transitions du rubidium.

Avec ces mesures de la transmittance, nous n'avons pu tester que les longueurs d'onde dans le domaine visible. Or pour la permittivité du Ta_2O_5 [b], ce sont les longueurs d'onde dans l'infrarouge entre 200 et 1500 cm^{-1} soit entre 6 et 50 μm qui donnent la réponse la plus significative au champ électrique. Alors que pour le SiO_2 , la réponse la plus significative est centrée autour de 10^{14} rad.s^{-1} soit quelques micromètres. Lorsque nous passons en fréquences complexes ce sont ces résonances qui contribueront principalement à $\epsilon(i\xi)$ et ainsi à l'effet Casimir-Polder. Nous présentons dans le paragraphe qui suit, des mesures ellipsométriques dans le proche infrarouge afin de tester cette gamme de longueurs d'onde.

II.3.2 Mesures ellipsométriques dans le proche infrarouge

Les mesures complémentaires demandées dans l'infrarouge ont été réalisées par ellipsométrie entre 1,7 et 30 μm . L'ellipsométrie est une technique d'analyse optique

basée sur le changement de polarisation de la lumière lors d'une réflexion en incidence optique sur une surface plane. On envoie sur un échantillon, ici le miroir, une onde lumineuse polarisée, et on analyse la modification de polarisation introduite par l'échantillon. L'ellipsométrie analyse cette modification par l'intermédiaire du rapport ρ (II.3.2) des coefficients de réflexion r^{TE} et r^{TM} .

$$\rho = \frac{r^{TM}}{r^{TE}} = \tan(\Psi)e^{i\Delta} \quad (\text{II.3.2})$$

Ψ et Δ sont des angles et prennent respectivement des valeurs entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et entre 0 et 2π . $\tan(\Psi)$ représente le rapport des modules des coefficients de réflexion. $\Delta = \delta_{TM} - \delta_{TE}$ est la différence de phase introduite par la réflexion.

À présent, nous calculons Ψ et Δ pour différents angles d'incidence en fonction de la longueur d'onde λ à partir des coefficients de réflexion. L'angle d'incidence θ est donné dans le vide par la relation : $c|\mathbf{k}| = \sin(\theta)\omega$. En fréquences réelles, k_z s'écrit $k_z = \sqrt{\epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2}$. Ainsi nous calculons les coefficients de réflexion en fonction de la fréquence réelle ω et de l'angle d'incidence θ . Nous pouvons alors obtenir $\rho(\omega, \theta)$:

$$\rho(\omega, \theta) = \frac{r^{TM}(\omega, \sin(\theta)\frac{\omega}{c})}{r^{TE}(\omega, \sin(\theta)\frac{\omega}{c})},$$

$$\Psi = \arctan(|\rho|),$$

$$\Delta = \arg(\rho).$$

L'ellipsomètre infrarouge utilisé a réalisé des mesures pour un spectre en longueurs d'onde entre $1.7 \mu\text{m}$ et $30 \mu\text{m}$, ce qui correspond à un intervalle entre 303 cm^{-1} et 5800 cm^{-1} , avec une précision de l'ordre du cm^{-1} . Les mesures sont réalisées pour des angles d'incidence compris entre 30° et 80° . L'ellipsomètre fournit les valeurs des angles Ψ et Δ en fonction de la longueur d'onde λ . Nous pouvons voir sur les figures II.10 et II.11 la comparaison entre les mesures en bleu et le calcul théorique réalisé en rouge à partir du calcul des coefficients de réflexion. Nous pouvons faire la même observation que pour la transmittance, nous n'obtenons que grossièrement un comportement identique. Nous avons une assez bonne correspondance pour les longueurs d'onde entre 300 cm^{-1} et 1500 cm^{-1} . Ces mesures d'angles ellipsométriques ne nous permettent pas néanmoins de couvrir tout le spectre qui pourrait nous intéresser notamment la résonance principale de la permittivité du pentoxyde de tantale pour une fréquence de 266 cm^{-1} qui vient de la partie Drude de la permittivité. Nous ne pouvons pas vérifier son éventuel caractère métallique.

II.3.3 Évaluation de l'incertitude sur les coefficients de réflexion

Nous avons mis en évidence un désaccord important entre les mesures d'angles ellipsométriques et de transmittance du miroir et les calculs théoriques de ces mêmes grandeurs à l'aide de notre modèle de coefficients de réflexion. Dans ce paragraphe le but est de déterminer l'incertitude que nous faisons dans notre calcul théorique et de mettre en évidence quelles sont les principales sources de cette incertitude dans notre calcul, en comparant toujours aux mesures précédentes.

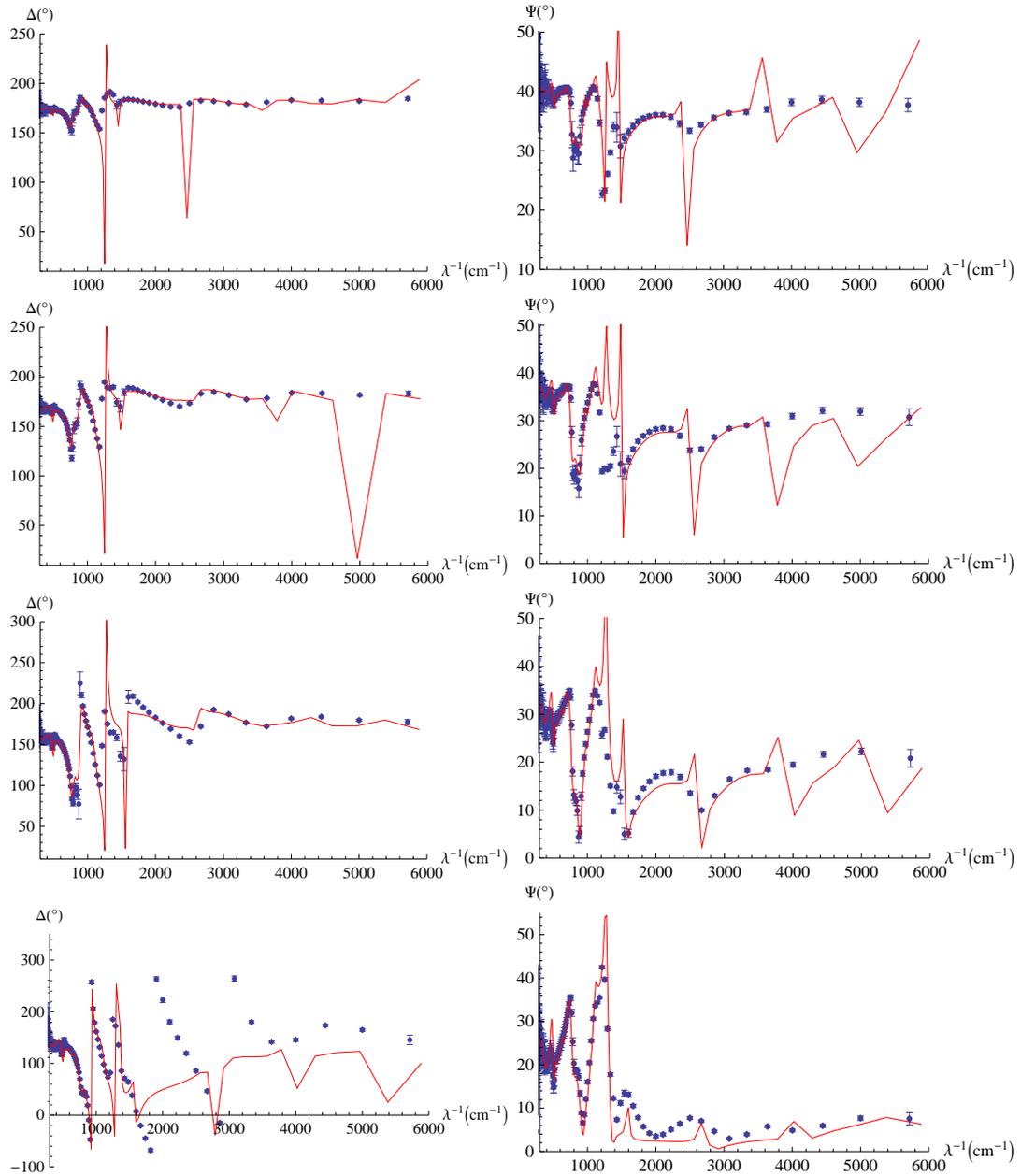


FIGURE II.10 – De gauche à droite et de haut en bas, $\Delta(\lambda^{-1}, \theta = 30^\circ)$, $\Psi(\lambda^{-1}, \theta = 30^\circ)$, $\Delta(\lambda^{-1}, \theta = 40^\circ)$, $\Psi(\lambda^{-1}, \theta = 40^\circ)$, $\Delta(\lambda^{-1}, \theta = 50^\circ)$, $\Psi(\lambda^{-1}, \theta = 50^\circ)$, $\Delta(\lambda^{-1}, \theta = 60^\circ)$, $\Psi(\lambda^{-1}, \theta = 60^\circ)$, avec en rouge la courbe calculée théoriquement et en bleu les mesures de l'ellipsomètre exprimées en fonction de λ^{-1} en cm^{-1} .

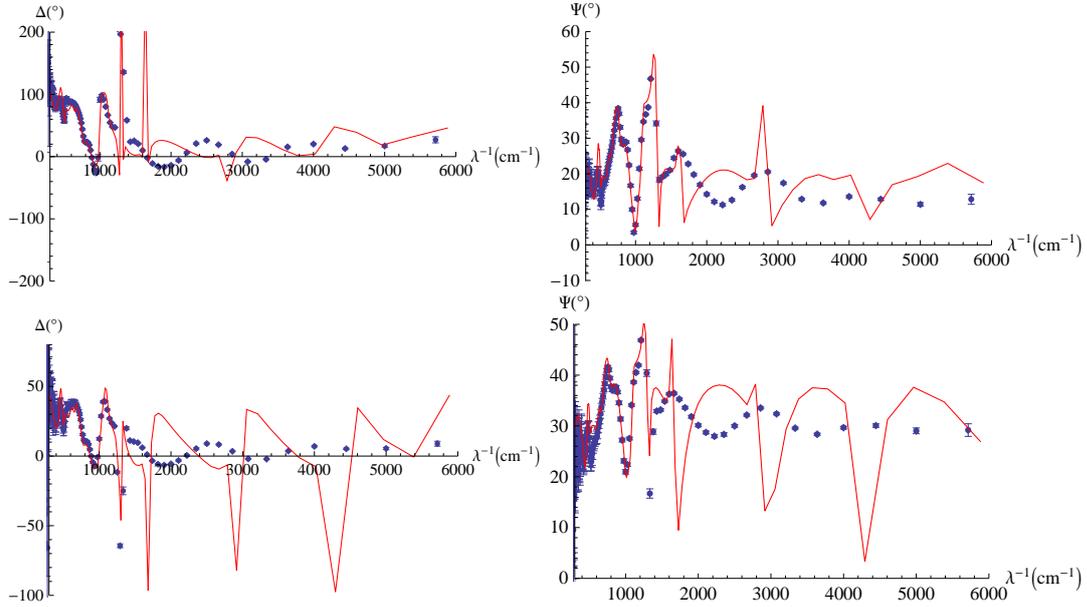


FIGURE II.11 – De gauche à droite et de haut en bas, $\Delta(\lambda^{-1}, \theta = 70^\circ)$, $\Psi(\lambda^{-1}, \theta = 70^\circ)$, $\Delta(\lambda^{-1}, \theta = 80^\circ)$, $\Psi(\lambda^{-1}, \theta = 80^\circ)$ avec en rouge la courbe calculée théoriquement et en bleu les mesures de l'ellipsomètre exprimées en fonction de λ^{-1} en cm^{-1} .

Les sources d'incertitudes comme nous l'avons déjà évoqué sont les données optiques utilisées pour déterminer la permittivité des matériaux et l'épaisseur des couches du miroir. Notre connaissance de la permittivité des matériaux est issue de mesures optiques (du type ellipsométrique ou autre, voir [43, 45]). Ces grandeurs sont ainsi seulement connues avec une certaine précision. Les épaisseurs des couches du miroir qui nous ont été fournies sont théoriques et déterminées pour remplir les conditions demandées par l'expérience. Les épaisseurs effectives du miroir peuvent être différentes en raison des techniques de fabrication du miroir.

a Paramètres du modèle de la permittivité du Ta_2O_5

Dans le paragraphe b, nous avons présenté un modèle pour la permittivité du pentoxyde de tantale. Pour ce modèle différents paramètres entrent en compte (voir tableau II.1). Ces paramètres ont été déterminés par différentes procédures d'ajustement des données mesurées (angles ellipsométriques, ou transmittance). Ces paramètres sont connus à partir de [45] sans aucune information sur la précision avec laquelle ils sont connus. Nous savons que les mesures ont été réalisées avec une résolution spectrale de 4 cm^{-1} , mais nous ne connaissons ni l'incertitude sur les mesures ni le coefficient χ^2 qui caractérisent l'accord entre les mesures et le modèle utilisé pour la procédure d'ajustement. Pour la suite nous allons choisir arbitrairement une incertitude relative de 5% pour l'ensemble des paramètres et testerons également le cas où elle serait de 10%.

Pour caractériser l'incertitude avec laquelle nous connaissons ces paramètres, nous

définissons la fonction gaussienne $p_{\omega_j}(x)$ pour la fréquence ω_j qui donne la probabilité que la fréquence ω_j vaille x (loi normale)

$$p_{\omega_j}(x) = \frac{1}{\sigma_{\omega_j} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\omega_j)^2}{2(\sigma_{\omega_j})^2}}.$$

En pratique si on répète un grand nombre de fois une mesure physique, on obtient le plus souvent pour les résultats de la mesure une distribution de probabilité gaussienne. Ce résultat peut être démontré pour toutes mesures soumises à des erreurs systématiques négligeables mais à de nombreuses sources d'erreurs aléatoires indépendantes (en mathématique *théorème central limite*). Les paramètres de la permittivité du Ta₂O₅ sont issus de l'ajustement de données expérimentales, d'où le choix de cette distribution de probabilité gaussienne.

Ayant choisi une incertitude relative 5% pour l'ensemble des paramètres, $\sigma_{\omega_j} = 0.05\omega_j$, nous définissons la même fonction pour tous les paramètres ω_j , $\omega_{p,j}$ et γ_j . Pour déterminer l'incertitude sur les angles ellipsométriques, sur la transmittance du miroir, ou par la suite sur le potentiel de Casimir-Polder due à σ , nous procédons ainsi : nous tirons au sort chacun des paramètres du modèle (II.2.2) du Ta₂O₅ et chaque valeur x choisie pour un paramètre sort avec la probabilité $p(x)$ définie pour celui-ci ; une fois le choix de tous les paramètres réalisé, nous pouvons calculer la quantité souhaitée. Nous réitérons le processus un grand nombre de fois pour obtenir l'incertitude σ (ou écart type) et la valeur moyenne sur la quantité calculée.

Nous présentons les résultats obtenus par cette méthode. Nous pouvons voir que pour $\Psi(\lambda^{-1}, \frac{\Pi}{6})$, $\Delta(\lambda^{-1}, \frac{\Pi}{6})$ et $T(\lambda)$ calculés, représentés en rouge sur les figures II.12 et II.13, l'incertitude induite sur l'incertitude des paramètres ω_j , $\omega_{p,j}$ et γ_j est négligeable. Pour ces trois quantités, nous trouvons une incertitude inférieure à 10^{-10} .

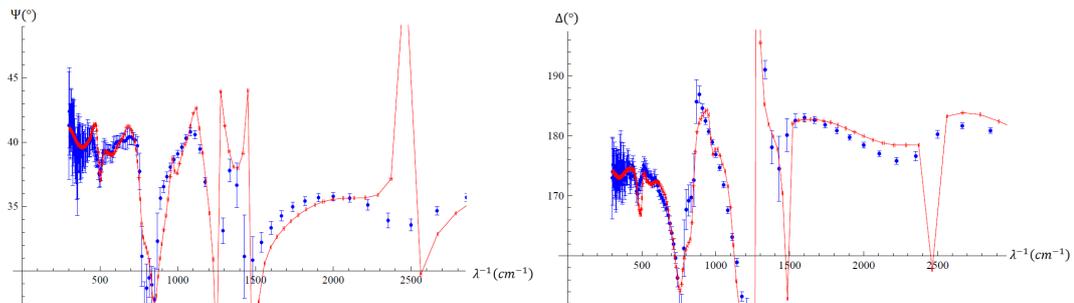


FIGURE II.12 – À gauche l'angle ellipsométrique $\Psi(\lambda^{-1}, \frac{\Pi}{6})$. À droite l'angle ellipsométrique $\Delta(\lambda^{-1}, \frac{\Pi}{6})$. En bleu les mesures réalisées entre 1.7 et 33 μm (soit entre 303 cm^{-1} et 5800 cm^{-1}), en rouge le calcul théorique avec l'incertitude induite par les incertitudes des paramètres du modèle de Ta₂O₅.

Ces résultats montrent que l'importante différence entre la transmittance mesurée et celle calculée ne peut être expliquée par l'incertitude sur les paramètres du modèle (II.2.2) du Ta₂O₅. La même observation peut être faite pour les angles ellipsométriques $\Psi(\lambda^{-1}, \theta)$ et $\Delta(\lambda^{-1}, \theta)$. Même en considérant une incertitude relative plus élevée sur

les paramètres de la permittivité, par exemple de l'ordre de 10%, l'effet est toujours négligeable.

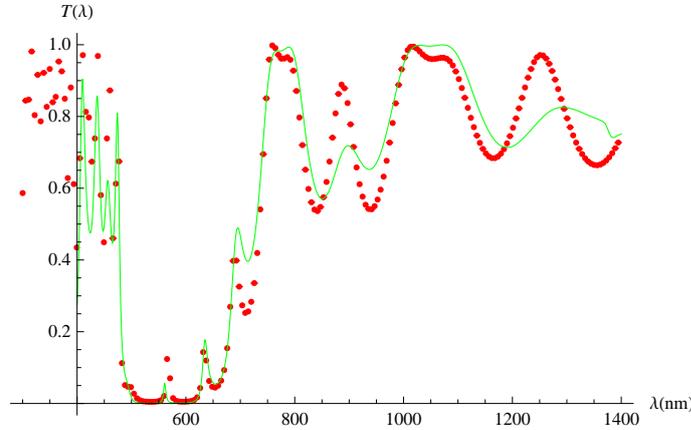


FIGURE II.13 – La transmittance du miroir $T(\lambda)$. En rouge le calcul théorique de l'incertitude induite par la méconnaissance des paramètres du modèle de Ta_2O_5 (épaisseur du point rouge), en vert la transmittance mesurée.

b Incertitude sur la permittivité de la silice

Comme nous l'avons montré dans le paragraphe a, la permittivité de la silice est calculée à partir des indices de réfraction n et d'extinction k . Dans [43], la valeur de ces deux indices est donnée sur un large spectre, mais ces valeurs ne proviennent pas toutes des mêmes mesures. L'incertitude n'est alors pas la même pour l'ensemble du spectre, et toutes ces sources ne précisent pas l'erreur faite lors des mesures. Comme pour le pentoxyde de tantale, nous allons regarder l'effet d'une incertitude de 10% sur les indices n et k de la silice sur la transmittance et des angles ellipsométriques.

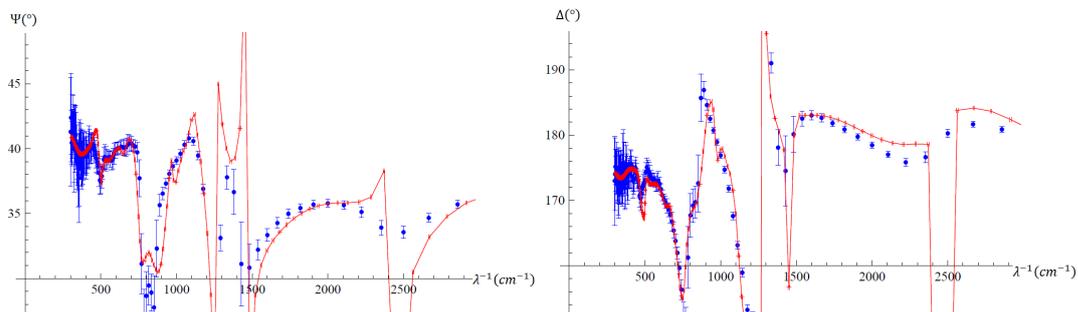


FIGURE II.14 – À gauche l'angle ellipsométrique $\Psi(\lambda^{-1}, \frac{\Pi}{6})$. À droite l'angle ellipsométrique $\Delta(\lambda^{-1}, \frac{\Pi}{6})$. En bleu les mesures réalisées entre 1.7 et 33 μm (soit entre 303 cm^{-1} et 5800 cm^{-1}), en rouge le calcul théorique avec l'incertitude induite par l'incertitude sur les indices des réfraction et d'extinction de la silice.

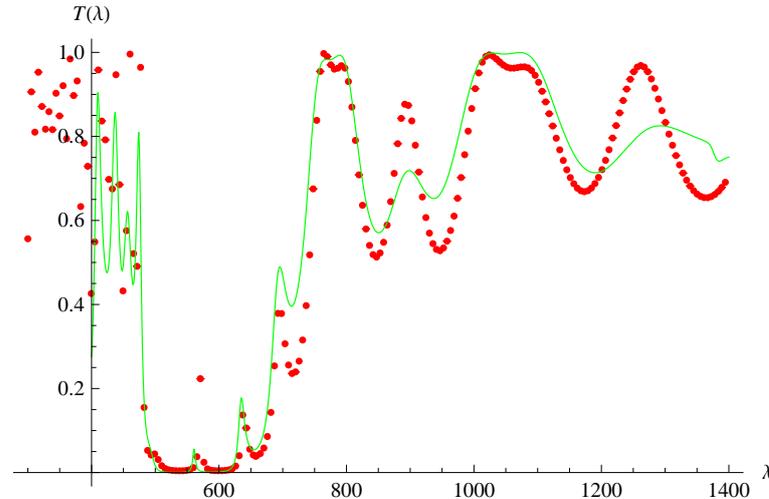


FIGURE II.15 – La transmittance du miroir $T(\lambda)$. En rouge le calcul théorique avec le calcul théorique avec l'incertitude induite par l'incertitude sur les indices des réfraction et d'extinction de la silice, en vert la transmittance mesurée.

Pour évaluer l'incertitude théorique induite par celle sur les indices n et k de la silice, nous procédons comme précédemment.

Sur les figures II.14 et II.15, nous observons que l'effet d'une incertitude de 10% sur les indices de la silice est également négligeable, inférieure à 1%. En fait pour les deux matériaux, introduire une incertitude ne fait qu'ajouter une sorte de bruit à la permittivité. Mais globalement celle-ci garde le même comportement. Ainsi les coefficients de réflexion et par conséquent la transmittance et les angles ellipsométriques sont faiblement impactés par ce type d'incertitude. De plus le potentiel de Casimir-Polder est exprimé sous la forme d'une intégrale sur les fréquences complexes. Comme nous l'avons déjà noté le passage en fréquences complexes pour la permittivité opère une sorte de moyenne sur l'ensemble du spectre, ainsi l'effet de bruit dû aux incertitudes sur certaines fréquences est également moyenné.

c Épaisseurs des couches du miroir

N'ayant que peu d'informations sur les techniques utilisées pour la fabrication du miroir, nous n'avons aucun moyen d'estimer l'incertitude sur les épaisseurs des couches du miroir par rapport à leur valeur théorique. Nous savons que la précision avec laquelle est déposée une couche est de l'ordre de 2 nm. Nous pouvons considérer que le choix d'une incertitude relative de l'ordre de 5% est alors une limite supérieure suffisante. Nous procédons comme précédemment pour les paramètres du modèle de permittivité du Ta_2O_5 , et nous définissons la fonction $p_{e_i}(x)$ pour l'épaisseur de la couche i qui donne la probabilité que l'épaisseur de la couche i vaille x

$$p_{e_i}(x) = \frac{1}{\sigma_e \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-e_i)^2}{2(\sigma_e)^2}}.$$

Comme nous avons supposé que les épaisseurs des couches du miroir sont connues avec une précision de l'ordre de 5%, nous posons $\sigma_{e_i} = 0.05e_i$.

Nous pouvons déjà constater sur les figures II.16 et II.17 qu'une incertitude sur les épaisseurs des couches du miroir est bien plus significative qu'une incertitude sur la permittivité. Cette incertitude peut expliquer l'importante différence entre la transmittance mesurée en bleu sur la figure II.16 et la transmittance calculée en rouge. Pour les angles ellipsométriques $\Psi(\lambda^{-1}, \frac{\pi}{6})$ et $\Delta(\lambda^{-1}, \frac{\pi}{6})$, nous pouvons voir également que les résultats correspondent mieux aux mesures expérimentales en tenant compte de cette variation sur les épaisseurs, mais restent incompatibles pour certaines plages de fréquences.

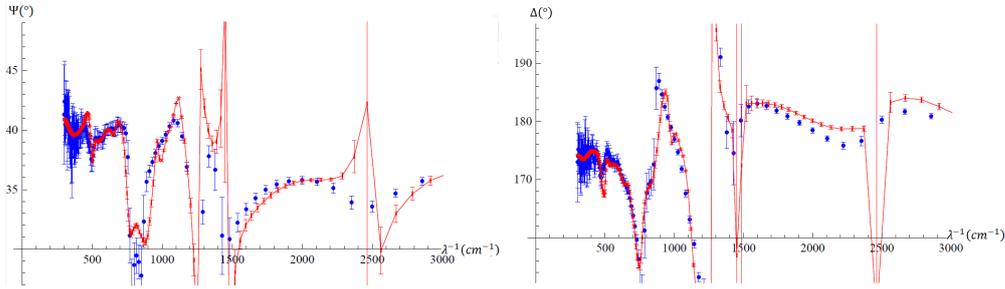


FIGURE II.16 – À gauche l'angle ellipsométrique $\Psi(\lambda^{-1}, \frac{\pi}{6})$. À droite l'angle ellipsométrique $\Delta(\lambda^{-1}, \frac{\pi}{6})$. En bleu les mesures réalisées entre 1.7 et 33 μm (soit entre 303 cm^{-1} et 5800 cm^{-1}), en rouge le calcul théorique avec l'incertitude induite par les incertitudes sur les épaisseurs des couches du miroir avec $\sigma_{e_i} = 0.05e_i$.

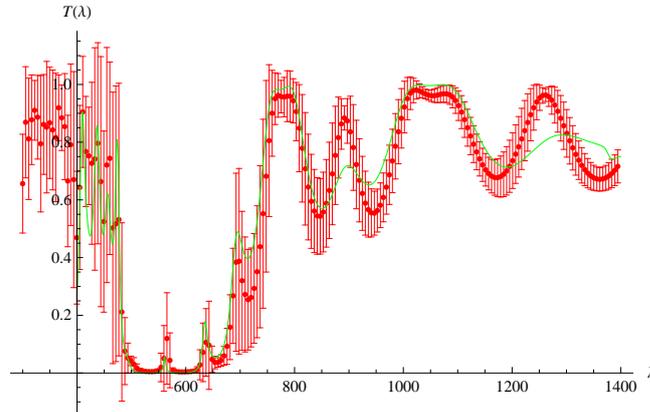


FIGURE II.17 – La transmittance du miroir $T(\lambda)$. En rouge le calcul théorique avec le calcul théorique avec l'incertitude induite par les incertitudes sur les épaisseurs des couches du miroir avec $\sigma_{e_i} = 0.05e_i$. En vert la transmittance mesurée.

Nous pouvons constater la très faible incertitude sur la transmittance autour de 500-600 nm, cette propriété est très stable. Comme nous l'avons montré précédemment II.3.1, la bonne réflectivité du miroir pour ces longueurs d'onde est une caractéristique

d'un miroir de Bragg qui alterne des couches de silice de 90 nm et de pentoxyde de tantale de 65 nm. Sur la figure II.9, nous pouvions voir que déjà pour $N = 10$, c'est-à-dire 20 couches, cette caractéristique était obtenue. L'ajout de couches supplémentaires et l'ajustement de leur épaisseur servent à obtenir les autres caractéristiques voulues pour le miroir, à savoir une bonne transparence pour 780 nm et 1064 nm, en faisant le nombre d'oscillations et l'amplitude de celles-ci. Ainsi ces dernières caractéristiques du miroir sont beaucoup plus sensibles aux variations d'épaisseurs des couches.

À noter également sur la figure II.3.1 pour certaines longueurs d'onde, des barres d'erreur laissent à penser que la transmittance pourrait prendre des valeurs supérieures à 1 ou inférieures à 0. La transmittance prend des valeurs comprises entre 0 et 1. Pour les longueurs d'onde où la valeur moyenne de $T(\lambda)$ prend une valeur proche de 0 ou 1, la distribution des valeurs prises par $T(\lambda)$ est asymétrique autour de cette valeur moyenne car bornée par 0 ou 1. Il est donc erroné de choisir une distribution gaussienne pour caractériser cette distribution, or c'est ce que nous supposons ici en représentant la valeur moyenne de $T(\lambda)$ avec une barre d'erreur $2 \pm \sigma$ (95 % des valeurs que peut prendre $T(\lambda)$ se trouvent dans cet intervalle), d'où des valeurs de $T(\lambda)$ négative ou supérieure à 1.

d Miroir modélisé avec ou sans substrat

Malgré la prise en considération d'une forte incertitude sur les épaisseurs des couches, nous pouvons voir sur les figures II.16 et II.17 que l'évaluation théorique des paramètres ellipsométriques et de transmittance ne correspond pas aux mesures qui ont pu être réalisées. Or, jusqu'à présent, la modélisation que nous avons faite de notre miroir à trente couches ne prenait pas en compte le substrat sur lequel ces trente couches sont déposées. En effet, le LMA a fabriqué deux miroirs selon la configuration déjà citée : l'un déposé sur un substrat en BK7, l'autre sur un substrat en silice, tous les deux d'environ 5 mm d'épaisseur.

Nous avons recalculé Ψ , Δ et T en considérant cette fois-ci le miroir dont les couches ont été déposées sur un substrat en silice. Nous considérons l'épaisseur de ce substrat comme infinie car les atomes piégés dans le réseau face au miroir seront à des distances de celui-ci de l'ordre de quelques micromètres. Nous pouvons voir sur les figures II.18 et II.19 que les mesures et l'évaluation théorique des paramètres ellipsométriques correspondent mieux. Les fortes oscillations de périodes 1000 cm^{-1} observables sur les courbes théoriques de Ψ et Δ dans le cas sans substrat (voir figures II.10 et II.11) sont ici atténuées. Pour comprendre d'où viennent ces résonances, nous pouvons considérer le cas d'un miroir constitué d'une seule couche de silice et un miroir également en silice mais d'épaisseur infinie. Si nous traçons leurs paramètres ellipsométriques $\Delta(\lambda^{-1}, \theta = 60^\circ)$ et $\Psi(\lambda^{-1}, \theta = 60^\circ)$, nous pouvons constater sur la figure II.20 que ces oscillations sont présentes pour le miroir d'épaisseur finie mais disparaît pour le miroir d'épaisseur infinie. Ces résonances sont donc liées à l'épaisseur du miroir qui se comporte comme une cavité Fabry-Perot. L'ajout du substrat d'épaisseur infinie a pour effet d'atténuer cet effet.

Nous avons également calculé la transmittance du miroir dans le cas où nous prenons en compte le substrat de silice. Nous avons aussi déterminé l'incertitude sur la transmittance qu'implique une incertitude de l'ordre de 5% sur l'épaisseur des couches

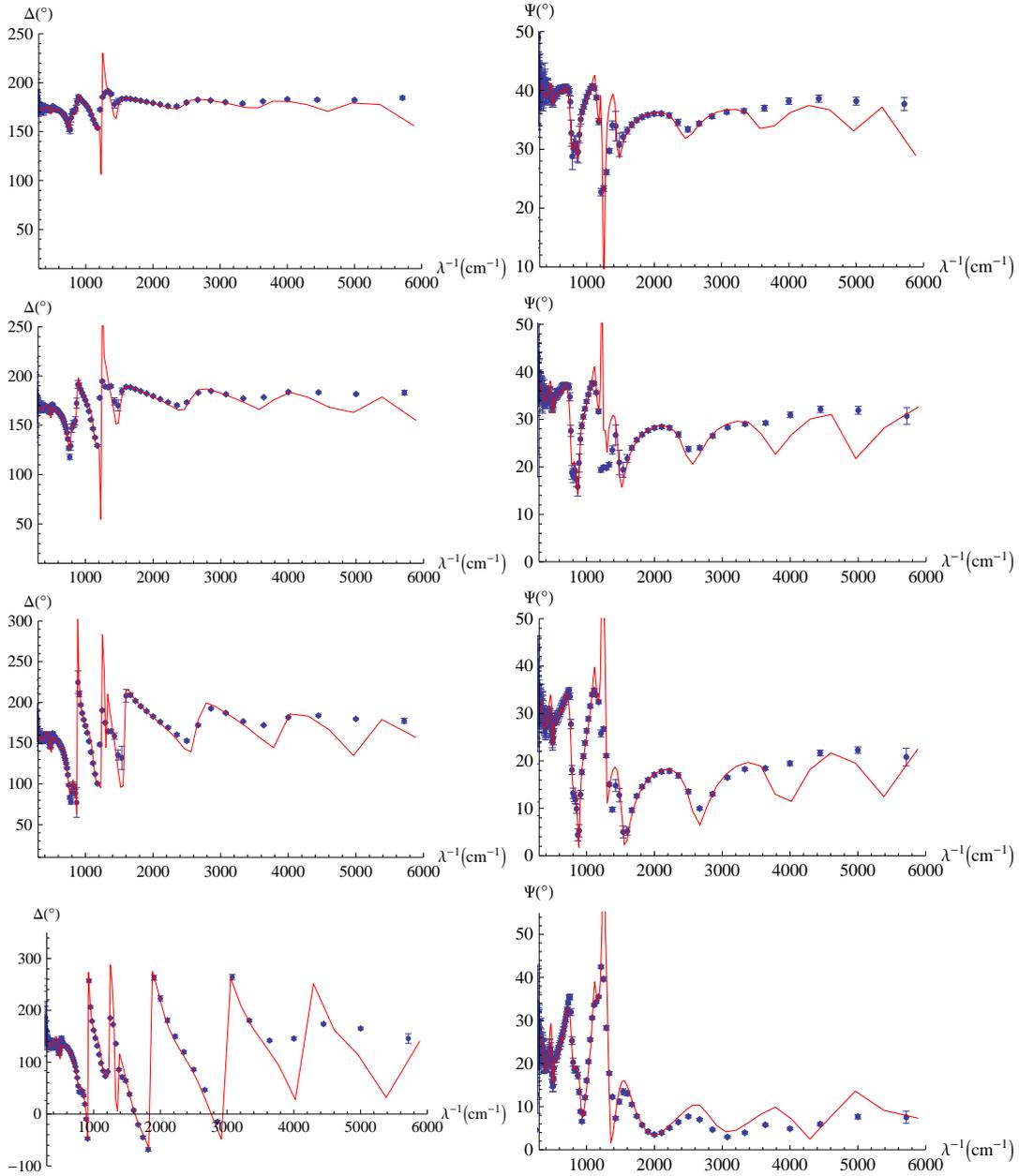


FIGURE II.18 – Déterminés en considérant le substrat en silice : de gauche à droite et de haut en bas : $\Delta(\lambda^{-1}, \theta = 30^\circ)$, $\Psi(\lambda^{-1}, \theta = 30^\circ)$, $\Delta(\lambda^{-1}, \theta = 40^\circ)$, $\Psi(\lambda^{-1}, \theta = 40^\circ)$, $\Delta(\lambda^{-1}, \theta = 50^\circ)$, $\Psi(\lambda^{-1}, \theta = 50^\circ)$, $\Delta(\lambda^{-1}, \theta = 60^\circ)$, avec en rouge la courbe calculée théoriquement et en bleu les mesures de l'ellipsomètre exprimées en fonction de λ^{-1} en cm^{-1} .

du miroir. Ces résultats sont représentés sur la figure II.21. Nous pouvons observer que la transmittance mesurée en vert et calculée en rouge correspondent mieux et cette incertitude sur l'épaisseur des couches suffit pour expliquer la différence entre les

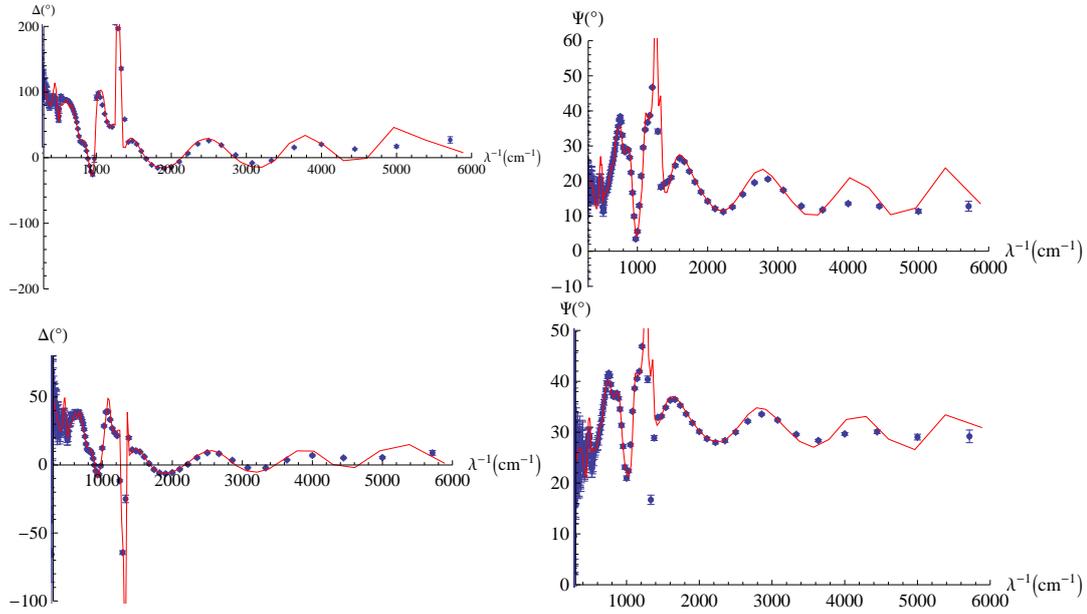


FIGURE II.19 – Déterminés en considérant le substrat en silice : de gauche à droite et de haut en bas : $\Psi(\lambda^{-1}, \theta = 60^\circ)$, $\Delta(\lambda^{-1}, \theta = 70^\circ)$, $\Psi(\lambda^{-1}, \theta = 70^\circ)$, $\Delta(\lambda^{-1}, \theta = 80^\circ)$, $\Psi(\lambda^{-1}, \theta = 80^\circ)$ avec en rouge la courbe calculée théoriquement et en bleu les mesures de l'ellipsomètre exprimées en fonction de λ^{-1} en cm^{-1} .

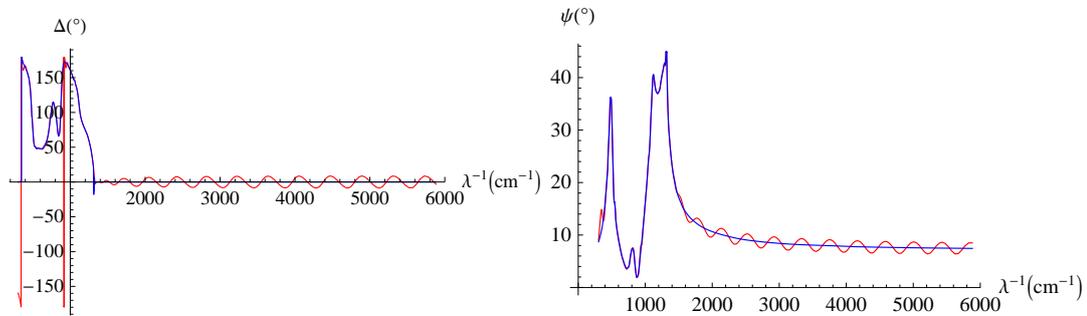


FIGURE II.20 – À droite $\Psi(\lambda^{-1}, \theta = 60^\circ)$ calculé en rouge pour un miroir en silice d'épaisseur $20 \mu\text{m}$ et en bleu pour un miroir en silice d'épaisseur infinie. À gauche $\Delta(\lambda^{-1}, \theta = 60^\circ)$ calculé en rouge pour un miroir en silice d'épaisseur $20 \mu\text{m}$ et en bleu pour un miroir en silice d'épaisseur infinie.

mesures et notre calcul.

Ces derniers résultats montrent la nécessité de considérer le substrat sur lequel est déposé notre miroir pour déterminer les coefficients de réflexion nécessaires au calcul du potentiel de Casimir-Polder.

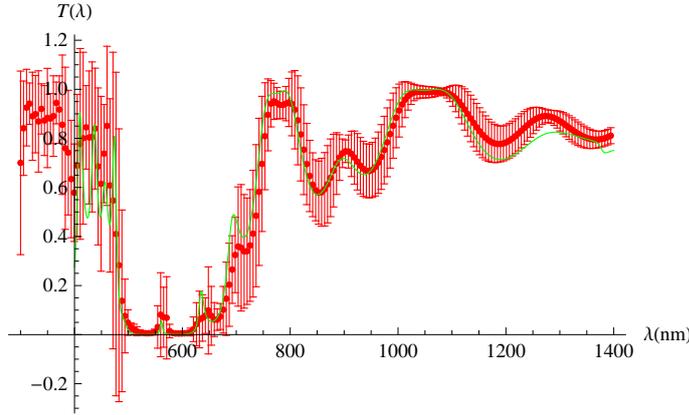


FIGURE II.21 – Dans le cas où le substrat est pris en compte : la transmittance du miroir $T(\lambda)$. En rouge le calcul théorique avec le calcul théorique avec l'incertitude induite par les incertitudes sur les épaisseurs des couches du miroir avec $\sigma_{e_i} = 0.05e_i$. En vert la transmittance mesurée.

II.4 Calcul du potentiel de Casimir-Polder pour FORCA-G

À présent nous pouvons calculer le potentiel de Casimir-Polder dans le cas d'un atome de rubidium 87 face au miroir conçu pour l'expérience FORCA-G. Nous montrons l'influence de la température d'équilibre sur le potentiel. Nous étudions ensuite la relation entre la distance de l'atome au miroir et l'épaisseur de ce dernier, et nous montrons qu'à courte distance seule la première couche du miroir multi-couche contribue. Enfin à partir de notre travail d'évaluation des sources d'incertitudes, nous déterminons l'imprécision sur le potentiel de Casimir-Polder.

II.4.1 Influence de la température

Le potentiel de Casimir-Polder subi par un atome de rubidium 87 de polarisabilité $\alpha(\omega)$ à la température T à la distance z du miroir s'écrit d'après (II.1.19)

$$V_{CP}(z, T) = \frac{1}{\beta z^3} \sum_n' U_n^2 \frac{\alpha(iU_n c/z)}{4\pi\epsilon_0} \times \left[\int_0^\infty \frac{K dK}{\sqrt{K^2 + U_n^2}} e^{-2\sqrt{K^2 + U_n^2}} (r^{TE}(U_n, K) - (1 + \frac{2K^2}{U_n^2}) r^{TM}(U_n, K)) \right],$$

où nous avons introduit les variables adimensionnées U_n et K , définies par $K = |\mathbf{k}| z$ et les fréquences de Matsubara adimensionnées $U_n = \frac{2\pi k_B T n z}{\hbar}$. Nous définissons également le facteur de réduction η comme le rapport entre le potentiel de Casimir-Polder exact, c'est-à-dire celui pour le miroir de l'expérience, et le potentiel de Casimir-Polder dans le cas d'un miroir parfait V_{CP}^{perf} à la limite retardée qui s'écrit sous la forme

$$V_{CP}^{perf>}(z,T) = \frac{-C_4^{perf}(T)}{z^4}.$$

avec $C_4^{perf}(T) \approx 10^{-54} \text{ J.m}^4$ pour $T = 290 \text{ K}$

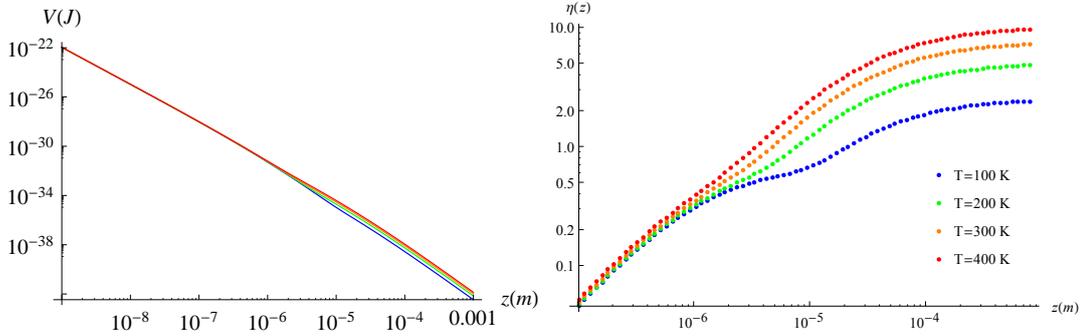


FIGURE II.22 – À gauche, valeur absolue du potentiel donnée en joule en fonction de z en mètre calculé pour différentes températures. À droite rapport entre le potentiel et le comportement à longue distance en fonction de z en mètre. $T_{bleu} = 100 \text{ K}$, $T_{vert} = 200 \text{ K}$, $T_{orange} = 300 \text{ K}$, $T_{rouge} = 400 \text{ K}$

Sur le graphique de droite de la figure II.22, nous pouvons observer les deux régimes différents attendus. À courte distance, $\eta(z)$ est linéaire donc le potentiel est de la forme $V_{CP}(z) = \frac{C_3(T)}{z^3}$. Comme z tend vers 0, la variable adimensionnée U_n tend vers 0 également. L'expression du coefficient $C_3(T)$ s'écrit

$$C_3(T) = k_B T \sum_n' \frac{\alpha(iU_n c/z)}{4\pi\epsilon_0 c} \int_0^\infty 2K^2 dK e^{-2K} r^{TM}(0, K).$$

À longue distance, η devient constant donc le potentiel s'écrit à présent sous la forme $V_{CP}(z,T) = \frac{C_4(T)}{z^4}$. De plus l'écart entre les courbes est linéaire en T car à longue distance, seule la première fréquence de Matsubara $U_n = 0$ contribue au calcul du potentiel de Casimir-Polder. En effet si la distance z augmente, la variable adimensionnée U_n croît et donc la valeur de l'intégrale diminue à cause du terme $e^{-2\sqrt{K^2+U^2}}$, ainsi nous obtenons la relation

$$C_4(T) = k_B T \frac{\alpha(0)}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty K dK e^{-2K} 2K^2 r^{TM}(0, K).$$

À longue distance, nous obtenons le rapport $\frac{\eta(z,T1)}{\eta(z,T2)} = \frac{T1}{T2}$, par exemple pour $z = 10^{-3} \text{ m}$, nous trouvons bien que $\frac{\eta(z,T=200)}{\eta(z,T=100)} = 2$.

Le miroir de l'expérience sera à température ambiante, températures comprises entre 290 K et 300 K. Sur la figure II.23, nous avons tracé l'écart relatif $\Delta(z)$ entre le potentiel à la température de 290 K (et également 292.5 K, 295 K et 297.5 K) et le potentiel à la température de 300 K, nous pouvons voir qu'il y a une différence significative de l'ordre de quelques pour-cents. Le changement de régime du potentiel peut également s'observer sur ce dernier graphique. En effet les deux paliers correspondent à

deux régimes différents : à courte distance $\Delta(z; T) = \frac{C_3(T) - C_3(300)}{C_3(300)}$ et à longue distance $\Delta(z; T) = \frac{C_4(T) - C_4(300)}{C_4(300)} = \frac{T - 300}{300}$. Il s'agira de montrer par la suite si cette différence peut être significative sur les niveaux d'énergie des atomes qui seront piégés dans le réseau optique.

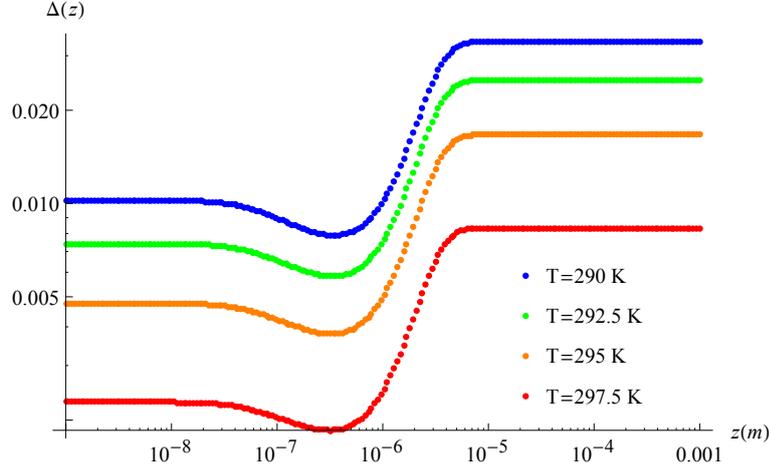


FIGURE II.23 – Écarts relatifs entre le potentiel Casimir-Polder à différente température T et le potentiel Casimir-Polder à la température $T = 300$ K.

II.4.2 Influence de l'épaisseur des couches du miroir

a Cas du miroir à une couche (slab)

Nous considérons ici un miroir constitué d'une seule couche d'épaisseur e de silice (SiO_2). Il est assez simple à partir des coefficients de réflexion de ce miroir exprimés en fréquence complexe (II.4.1), de voir que si l'épaisseur du miroir tend vers l'infini, R tend vers r le coefficient de Fresnel. Nous retrouvons bien le cas du miroir d'épaisseur infinie (bulk), la situation géométrique est celle d'une interface séparant deux milieux, le vide où se trouve l'atome et la silice.

$$R = \frac{r(1 - e^{-2\kappa e})}{1 - r^2 e^{-2\kappa e}} \quad (\text{II.4.1})$$

La figure II.24 montre l'évolution du rapport entre le potentiel de Casimir-Polder $V_{CP}(e, z)$ pour ce miroir une couche et le potentiel de Casimir-Polder $V_{CP}^{bulk}(z)$ pour un bulk en fonction de l'épaisseur e du miroir pour différentes distances z fixées entre l'atome et le miroir. Nous observons clairement que pour $e \gg z$, le potentiel $V_{CP}(e, z)$ tend vers la valeur du potentiel de Casimir-Polder $V_{CP}^{bulk}(z)$ à la distance z considérée. Il suffit d'ailleurs que l'épaisseur e soit supérieure à la distance z entre l'atome et le miroir. Pour $e < z$, $V_{CP}(e, z)$ est inférieure à $V_{CP}^{bulk}(z)$.

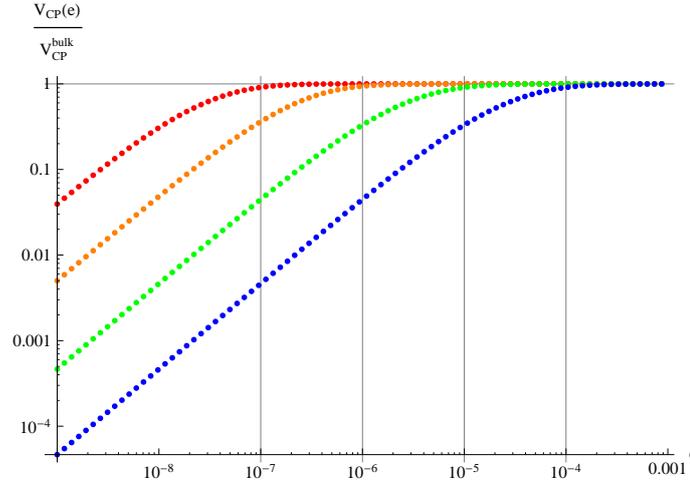


FIGURE II.24 – Rapport entre le potentiel de Casimir-Polder $V_{CP}(e, z)$ pour un miroir d'épaisseur e à une distance z , et le potentiel de Casimir-Polder à cette même distance pour le cas d'un bulk $V_{CP}^{bulk}(z)$ pour différentes distances au miroir : en bleu $z = 10^{-4}$ m, en vert $z = 10^{-5}$ m, en orange $z = 10^{-6}$ m et en rouge $z = 10^{-7}$ m. Les fonctions $f(z) = 1$ et $z = 10^{-7}$, $z = 10^{-6}$, $z = 10^{-5}$ et $z = 10^{-4}$ sont également représentées.

b Cas d'un miroir multi-couche

À la lumière du résultat précédent, nous pouvons supposer que si la distance z entre le miroir multi-couche et l'atome est inférieure à l'épaisseur de la première couche d'épaisseur e_1 alors la valeur du potentiel de Casimir-Polder sera identique à celle d'un bulk constitué du même matériau.

Nous considérons un miroir avec deux couches d'épaisseur e_1 et e_2 . La couche e_1 qui est celle face à l'atome, est constituée de silice, quant à la deuxième couche, elle est constituée de Ta_2O_5 . Sur la figure II.25, nous avons tracé le rapport entre le potentiel Casimir-Polder du miroir constitué de deux couches $V_{CP}^{multi}(z)$ et un potentiel de Casimir-Polder $V_{CP}^{slab}(z)$ pour un miroir ayant une seule couche d'épaisseur e_1 en silice. Nous retrouvons le comportement attendu, pour des distances z inférieures à l'épaisseur de la première couche e_1 , le potentiel $V_{CP}^{multi}(z)$ est égal $V_{CP}^{slab}(z)$. Cette propriété des miroirs multi-couche peut être utile si on veut calculer le coefficient C_3 du potentiel Casimir-Polder, il suffit de se restreindre au cas simple d'un miroir constitué uniquement de la première couche du miroir multi-couche considéré.

À présent, nous considérons le miroir de l'expérience FORCA-G. Nous savons que la première couche face à l'atome de rubidium est constituée de silice et a une épaisseur de 148 nm. Comme ci-dessus, nous calculons le rapport entre la force de Casimir-Polder $F_{CP}^{slab}(z)$ pour un miroir ayant une seule couche de silice d'épaisseur 148 nm et la force de Casimir-Polder $F_{CP}^{FORCA-G}(z)$ pour le miroir de l'expérience FORCA-G. Nous pouvons voir sur la figure II.26 le même comportement. Pour une distance z inférieure à l'épaisseur de la première couche du miroir multi-couche, nous voyons que la force de Casimir-Polder est identique à la force de Casimir-Polder pour un miroir

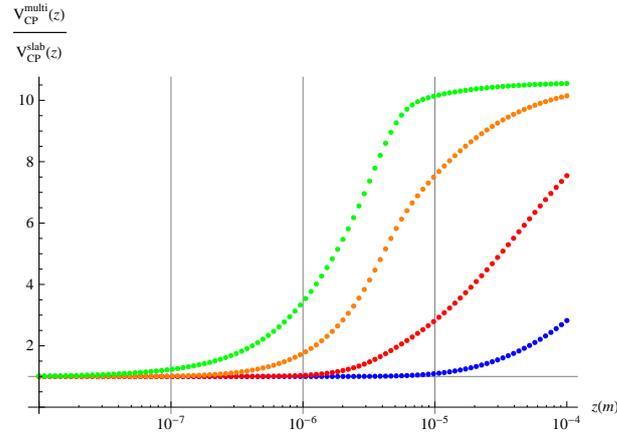


FIGURE II.25 – Rapport entre le potentiel de Casimir-Polder $V_{CP}^{multi}(z)$ et le potentiel de Casimir-Polder $V_{CP}^{slab}(z)$ tracé en fonction de la distance z au miroir. En bleu un miroir avec $e_1 = 10 \mu\text{m}$, en rouge $e_1 = 1 \mu\text{m}$, en orange $e_1 = 0.1 \mu\text{m}$ et en vert $e_1 = 0.01 \mu\text{m}$. Les fonctions $f(z) = 1$ et $z = 10^{-8}$, $z = 10^{-7}$, $z = 10^{-6}$ et $z = 10^{-5}$ sont également représentées.

constitué de la seule première couche du miroir multi-couche.

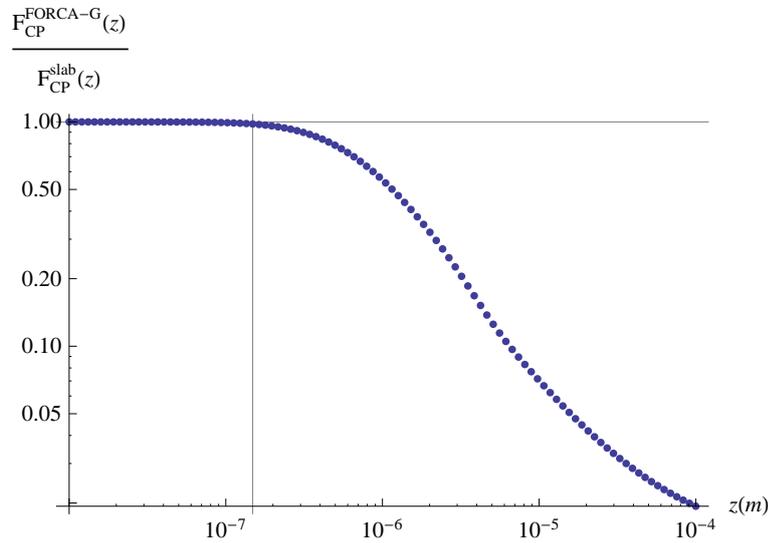


FIGURE II.26 – Rapport entre $F_{CP}^{slab}(z)$, la force de Casimir-Polder d'un miroir avec une couche d'épaisseur 148 nm, et $F_{CP}^{FORCA-G}(z)$ la force de Casimir-Polder pour le miroir de l'expérience. Les droites $f(z) = 1$ et $z = 148 \cdot 10^{-9}$ sont également représentées.

II.4.3 Incertitude sur le potentiel de Casimir-Polder

Dans notre calcul de potentiel de Casimir-Polder, nous avons deux sources d'incertitudes : l'incertitude sur les coefficients de réflexion du miroir et l'incertitude sur la polarisabilité du rubidium. Nous avons mis en évidence au paragraphe II.3.3 que c'était l'incertitude sur les épaisseurs des couches du miroir qui avait un impact significatif sur celle des coefficients de réflexion et pouvait expliquer la différence entre les mesures de transmittance et d'angles ellipsométrique et nos calculs. Nous ne prendrons comme source d'incertitude sur les coefficients du miroir seulement celle liée à l'épaisseur des couches. La polarisabilité $\alpha(i\xi)$ utilisée est le résultat d'un calcul théorique [48] à l'aide de différentes méthodes dont la précision est supérieure à 99%. Ainsi nous négligerons l'éventuelle incertitude due à la polarisabilité de l'atome.

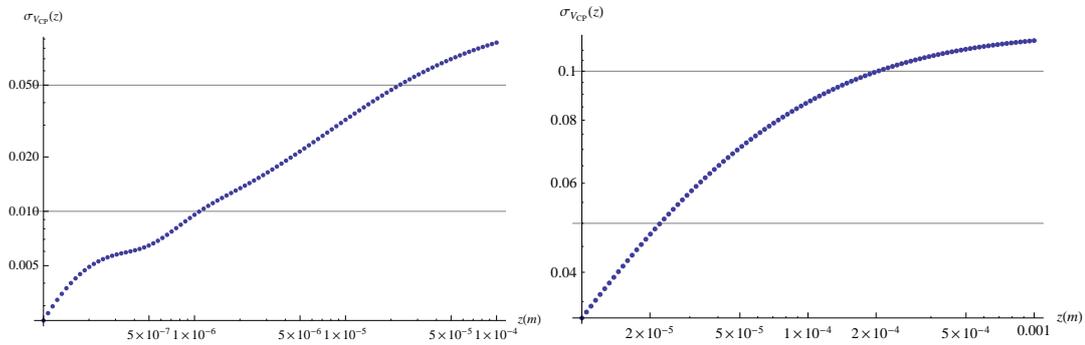


FIGURE II.27 – Écart type $\sigma_{V_{CP}}(z)$ du potentiel de Casimir-Polder pour des distances comprises entre 100 nm et 100 μm , et entre 10 μm et 1 mm.

Pour estimer l'incertitude sur le potentiel de Casimir-Polder, nous procédons de manière identique que pour la transmittance et les angles ellipsométriques au paragraphe II.3.3 afin d'obtenir l'écart type $\sigma_{V_{CP}}(z)$ en fonction de la distance au miroir du potentiel Casimir-Polder. Nous choisissons une incertitude relative de 5% pour les épaisseurs des couches du miroir car nous avons montré que c'est pour cette incertitude que notre calcul et les mesures sont compatibles. Sur la figure II.27, nous avons représenté l'écart type $\sigma_{V_{CP}}(z)$, il croît avec la distance au miroir. Si l'atome est très proche du miroir, comme nous l'avons montré II.4.2, l'atome ne voit que la première couche du miroir et le potentiel de Casimir-Polder est le même dans le cas d'un miroir d'épaisseur infini, donc l'incertitude sur les épaisseurs des couches n'a que très peu d'influence pour les courtes distances. Nous pouvons voir que pour une distance inférieure à environ 100 nm qui correspond à l'épaisseur de la première couche du miroir, l'incertitude est inférieure à 0.5% et tend vers 0 plus rapidement.

L'incertitude sur le potentiel de Casimir-Polder reste inférieure à 10% pour les distances considérées dans l'expérience FORCA-G. Les atomes se trouveront dans la première dizaine de puits près du miroir, c'est-à-dire à une distance maximale de quelques dizaines de micromètres.

Chapitre III

Effet Casimir-Polder sur des atomes piégés

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans la situation expérimentale de l'expérience FORCA-G, à savoir un atome de rubidium 87 piégé dans un réseau optique vertical de longueur d'onde $\lambda_l = 532$ nm face à un miroir. Nous considérons dans un premier temps la situation d'un atome piégé dans ce réseau en l'absence de miroir, et montrons que dans ce cas l'atome est caractérisé par des états de Wannier-Stark. Dans une deuxième partie, nous cherchons à déterminer par la méthode des perturbations l'effet sur les états Wannier-Stark du potentiel de Casimir-Polder déterminé dans le chapitre précédent. Nous mettons en évidence que ce calcul, dans lequel ce potentiel est traité comme une perturbation, n'est pas adapté pour les atomes piégés dans les puits proches du miroir. Nous présentons alors une méthode numérique non-perturbative pour calculer les niveaux d'énergie et les états des atomes piégés.

III.1 Atomes dans un réseau

III.1.1 Fonctions de Bloch

Nous considérons un réseau unidimensionnel [49]. Nous avons un atome de masse m_{Rb} piégé dans un potentiel périodique de profondeur V_0 de période $a = \frac{\pi}{k_l} = \frac{\lambda_l}{2}$ où k_l est le nombre d'onde du faisceau laser utilisé pour créer le potentiel périodique. Pour l'expérience FORCA-G, nous avons $a = 266$ nm. L'Hamiltonien du système dans cette situation s'écrit

$$H_{Bloch} = \frac{p^2}{2m_{Rb}} + V_0 \sin^2(k_l x).$$

Le nombre d'onde k_l permet d'introduire une échelle d'énergie appelée énergie de recul $E_r = \frac{\hbar^2 k_l^2}{2m_{Rb}}$. Dans l'expérience FORCA-G, la profondeur des puits est choisie égale à $V_0 = 3 E_r$, avec $E_r = 8.11$ kHz, pour favoriser les transitions entre puits voisins. Nous gardons cette valeur pour nos calculs. Nous pouvons alors écrire l'équation aux valeurs propres

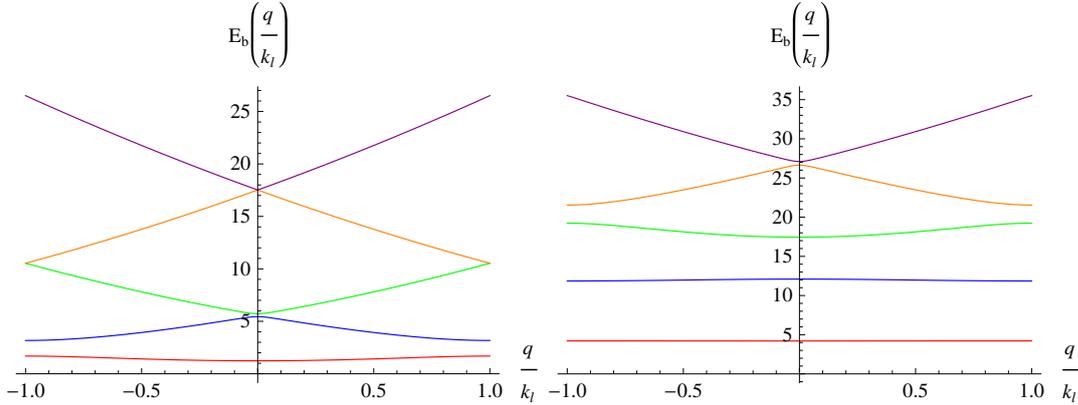


FIGURE III.1 – Premières bandes d'énergie $\frac{E_b(q)}{E_r}$ en fonction de $\frac{q}{k_l}$ pour un potentiel $\frac{V_0}{E_r} = 3$ à gauche et $\frac{V_0}{E_r} = 20$ à droite.

$$-\psi''(X) + \frac{V_0}{2E_r} \sin^2(X)\psi(X) = \frac{E}{E_r} \psi(X),$$

où $X = k_l x$. D'après le théorème de Bloch, nous pouvons chercher les états propres d'un Hamiltonien correspondant au potentiel spatialement périodique sous la forme d'onde de Bloch $\psi_q(x)$ avec

$$\begin{aligned} \psi_q(x) &= e^{ixq} u_q(x), \\ u_q(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} C_j(q) e^{ix2\pi j/a}, \end{aligned}$$

où q est appelée la quasi-impulsion, avec pour conditions aux limites $u_q(x) = u_q(x+a)$. Pour une valeur donnée de q , nous avons plusieurs solutions $E_b(q)$ et les conditions aux limites impliquent que $E_b(q + 2\pi/a) = E_b(q)$. Afin de former une base avec les états propres du hamiltonien, nous imposons que q soit restreint à la première zone de Brillouin $-\frac{\pi}{a} < q < \frac{\pi}{a}$ afin de ne compter qu'une seule fois chaque état propre. En réécrivant l'équation d'onde avec ψ sous forme d'ondes de Bloch, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\left[\left(2j + \frac{q}{k_l}\right)^2 + \frac{V_0}{2E_r} \right] C_j - \frac{V_0}{4E_r} (C_{j-1} + C_{j+1}) = \frac{E}{E_r} C_j.$$

Ce système d'équations peut être résolu sous forme matricielle afin d'obtenir les valeurs propres $E_b(q)$ et les vecteurs propres, c'est-à-dire les coefficients $C_j(q)$. Les énergies $E_b(q)$ ont une structure de bande (voir figure III.1), bandes indicées par b , et plus les puits sont profonds plus les bandes sont séparées entre elles, donc la transition de l'état atomique du niveau d'énergie d'une bande b à une bande $b \pm 1$ est moins probable. Les coefficients C_j (voir figure III.2) convergent rapidement pour des grandes valeurs de j , nous nous limiterons donc dans nos calculs à $|j| \leq 20$.

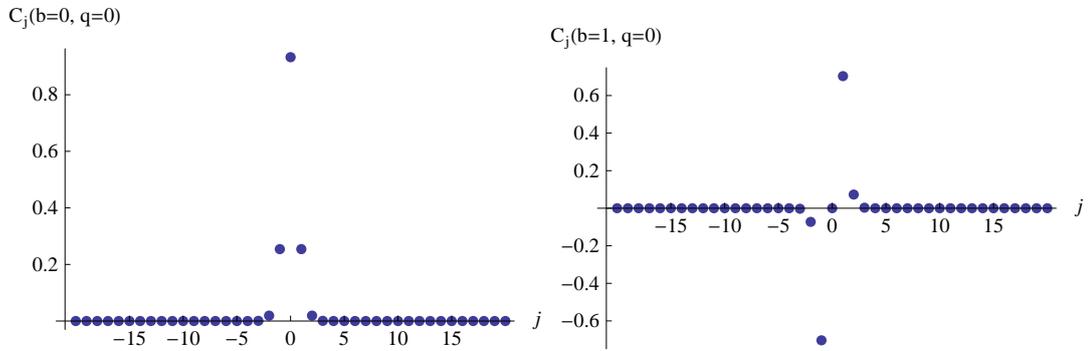


FIGURE III.2 – Coefficients $C_j(b, q)$ en fonction de leur indice j pour $\frac{V_0}{E_r} = 5$, de gauche à droite ($b = 0, q = 0$) et ($b = 1, q = 0$)

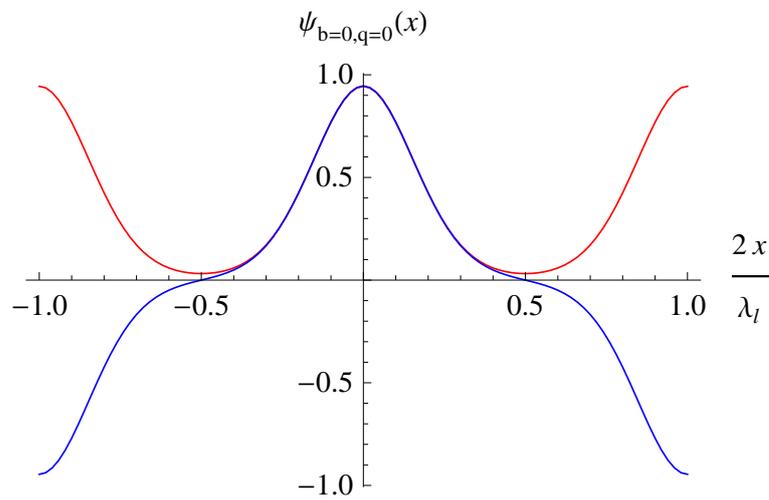


FIGURE III.3 – Fonction de Bloch en fonction de $\frac{x}{a}$ pour $\frac{V_0}{E_r} = 20$, et $b = 0$ et pour $q = 0$ en rouge et $q = \frac{\pi}{a}$ en bleu.

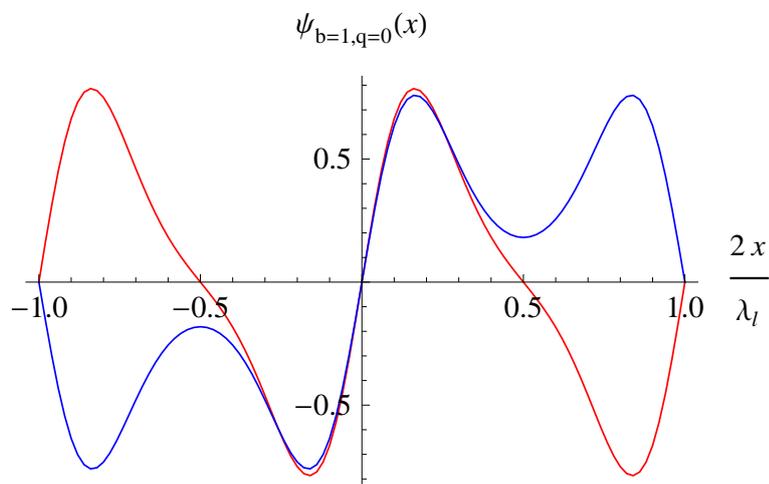


FIGURE III.4 – Fonction de Bloch en fonction de $\frac{x}{a}$ pour $\frac{V_0}{E_r} = 20$, et $b = 1$ et pour $q = 0$ en rouge et $q = \frac{\pi}{a}$ en bleu.

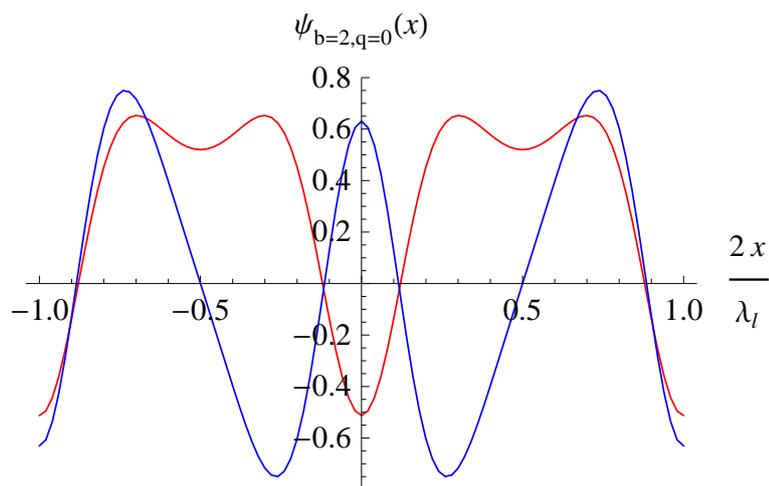


FIGURE III.5 – Fonction de Bloch en fonction de $\frac{x}{a}$ pour $\frac{V_0}{E_r} = 20$, et $b = 2$ et pour $q = 0$ en rouge et $q = \frac{\pi}{a}$ en bleu.

III.1.2 Fonctions de Wannier

Comme nous avons pu le voir sur les figures III.3, III.4, et III.5, les états de Bloch sont délocalisés, les fonctions d'onde ne donnent aucune information sur la probabilité qu'a l'atome de se trouver à une position donnée. L'introduction des fonctions de Wannier est très utile car elle permet d'avoir des fonctions localisées au voisinage des minima locaux du réseau [50]. Ainsi l'hamiltonien pour cette base de fonctions permet de raisonner de manière intuitive par rapport aux sites du réseau. Pour définir cette base des fonctions de Wannier, nous choisissons une série de points correspondant aux minima du réseau, $x_n = na = n\frac{\lambda}{2}$ avec n le numéro du puits. Nous définissons alors les fonctions de Wannier pour une bande b donnée telle que

$$w_{b,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2k_L}} \int_{-k_L}^{k_L} \psi_{b,q}(x) e^{-inaq} dq.$$

La fonction de Wannier $w_{b,n}(x)$ est la transformée de Fourier de la fonction de Bloch $\psi_{b,q}(x)$, qui de manière analogue, en traitement du signal, permet de passer d'un signal continu à un signal discret.

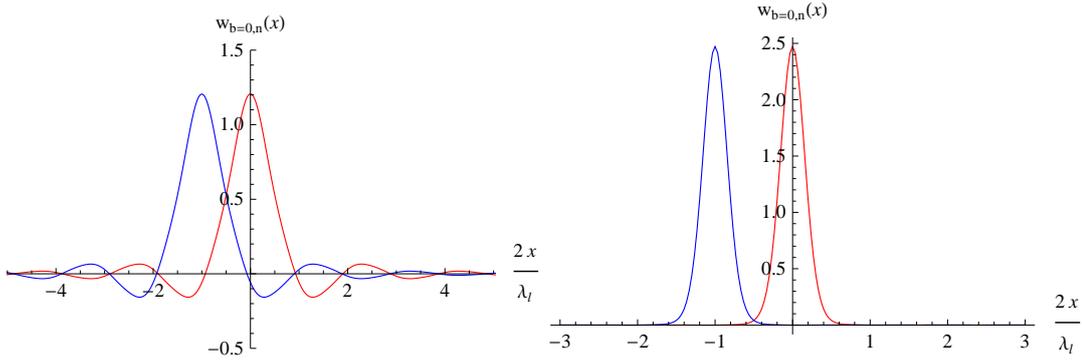


FIGURE III.6 – Fonctions de Wannier $w_{0,0}(x)$ en rouge et $w_{0,-1}(x)$ en bleu en fonction de $2x/\lambda_l$ pour $\frac{V_0}{E_r} = 1$ à gauche et $\frac{V_0}{E_r} = 20$ à droite.

Nous pouvons remarquer sur la figure III.6 que plus la profondeur des puits du réseau est grande, plus les fonctions sont localisées au niveau de leur site d'indice n . Pour un puits où $\frac{V_0}{E_r} = 1$, il y a plus d'oscillations autour du pic principal. Pour un puits avec $\frac{V_0}{E_r} = 20$, la fonction d'onde n'a que le pic en $x = na$, elle est totalement localisée dans ce puits.

Nous cherchons à présent à écrire l'Hamiltonien en seconde quantification. Pour les fonctions de Bloch, nous avons les opérateurs $a_{b,q}$ et $a_{b,q}^\dagger$ d'annihilation et de création d'une particule dans l'onde de Bloch $\psi_{b,q}$. Le changement de base donne les opérateurs $b_{b,n}$ et $b_{b,n}^\dagger$ pour l'onde de Wannier $w_{b,n}$.

$$a_{b,q} = \frac{1}{\sqrt{2k_L}} \sum_n e^{inaq} b_{b,n}$$

Nous obtenons l'Hamiltonien

$$H = \sum_b \sum_{n,n'} J_b(n-n') b_{b,n}^\dagger b_{b,n'}.$$

Il décrit le saut d'une particule d'un site n vers un site n' avec l'amplitude $J_b(n-n')$ qui dépend de la bande considérée. Pour une bande b donnée, l'énergie d'une particule dans un puits n est : $E_{b,n} = J_b(0)$. L'élément de matrice $J_b(n)$ s'écrit en fonction des énergies $E_b(q)$ et inversement

$$J_b(n) = \frac{1}{2\pi k_L} \int_{-k_L}^{k_L} dq E_b(q) e^{inaq}, \quad (\text{III.1.1})$$

$$E_b(q) = J_n(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_b(n) \cos(naq). \quad (\text{III.1.2})$$

III.1.3 Force de pesanteur et états de Wannier-Stark

Dans l'expérience le réseau optique est vertical et les atomes sont piégés dans le réseau sous le miroir, nous devons prendre en compte la force de pesanteur [51]. Nous ajoutons à notre Hamiltonien le potentiel qui est un terme linéaire :

$$H_{WS} = \frac{p^2}{2m} + \frac{V_0}{E_r} \sin^2(k_l z) - \frac{m_{Rb}g}{E_r} z, \quad (\text{III.1.3})$$

avec $g \approx 9,80927 \text{ m.s}^{-2}$ et $m_{Rb} = 1,44316 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$ pour le rubidium 87. Ce terme linéaire brise la symétrie de translation ce qui a pour effet de localiser les états propres des atomes piégés dans le réseau. Précédemment du fait de la symétrie de translation, les états de Bloch étaient périodiques et non localisés, chaque puits du réseau était équivalent pour l'atome. La présence du potentiel de pesanteur va induire une différence d'énergie $m_{Rb}ga$ entre chaque puits, la symétrie de translation est brisée, l'état de l'atome dépendra de l'indice du puits.

Nous supposons afin de simplifier notre problème que nous pouvons nous placer dans une bande d'énergie b et considérer cette dernière comme isolée. Cette approximation consiste à négliger les couplages des états entre bandes qui sont appelés effet Landau-Zener. Par transitions successives entre les différentes bandes de Bloch, les atomes peuvent sortir du piège. Il a été montré dans [2] que pour la situation expérimentale considérée, le temps de vie des états Wannier-Stark est suffisamment long pour que nous puissions négliger cet effet. Ainsi nous cherchons les solutions de l'équation aux valeurs propres

$$H_{WS} |W_{b,n}\rangle = E_{b,n} |W_{b,n}\rangle.$$

Nous écrivons toujours notre fonction d'onde $W_{b,n}(z)$ sous la forme d'une superposition d'états de Bloch

$$W_{b,n}(z) = \int_{-k_L}^{k_L} \psi_{b,q}(z) f_n(q) dq.$$

En injectant l'expression de $W_{b,n}(z)$ dans l'équation aux valeurs propres, nous trouvons l'équation

$$(E_b(q) - E_{b,n}) f_n(q) - i \frac{m_{Rb}g}{E_r} \frac{\partial}{\partial q} f_n(q) = 0.$$

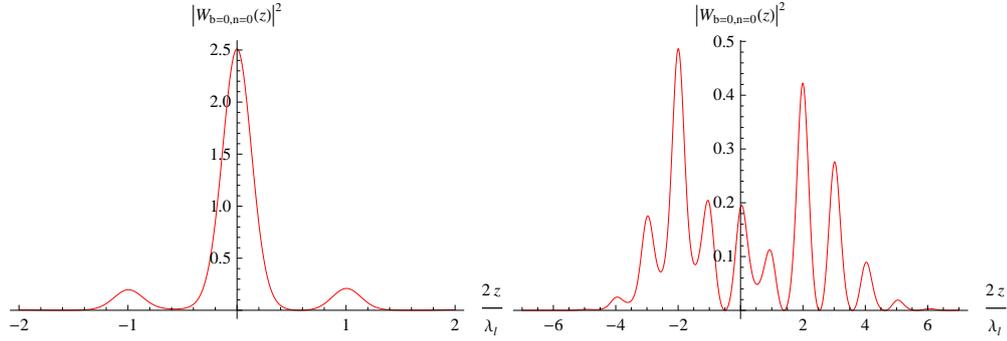


FIGURE III.7 – Fonctions de Wannier-Stark $|W_{0,0}(z)|^2$ pour $\frac{V_0}{E_r} = 10$ à gauche et $\frac{V_0}{E_r} = 3$ à droite. L'abscisse est exprimée en $2z/\lambda_l$, ainsi numéro de puits et abscisses correspondent.

Nous obtenons alors la solution

$$f_n(q) = A e^{-i \frac{E_r}{m_{Rb} g} (q E_{b,n} - \int_0^q E_b(q') dq')},$$

où A est une constante d'intégration. D'après le résultat de (III.1.2) et l'équation (III.1.3), nous avons les relations

$$E_{b,n} = J_b(0) - m_{Rb} g n a,$$

$$\int_0^q E_b(q') dq' = q J_b(0) + 2 \sum_{n=1} J_{b,n} \int_0^q \cos(n a q') dq' = q J_b(0) + 2 \sum_{n=1} \frac{k_l J_b(n)}{n \pi} \sin\left(\frac{n q \pi}{k_l}\right).$$

Dans notre cas, $m_{Rb} g a$ vaut $0,0700738 E_r$ et chaque niveau Wannier-Stark pour une bande de Bloch b donnée est séparé des autres d'un facteur $m_{Rb} g a$. Quant à la dépendance des niveaux de Wannier-Stark à la profondeur des puits du réseau et à la bande de Bloch, elle est contenue dans $J_b(0)$ (III.1.1) qui est la somme des énergies de Bloch $E_b(q)$ sur la première zone de Brillouin (voir figure III.1). Le tableau III.1 montre la dépendance de $J_0(0)$, c'est-à-dire $E_{0,0}$, à la profondeur V_0 : plus les puits sont profonds, plus $E_{0,0}$ est élevée.

V_0 en E_r	$J_b(0) = E_{0,0}$ en E_r	V_0 en E_r	$J_b(0) = E_{0,0}$ en E_r
1	0,771523	7	2,36079
2	1,13055	8	2,54641
3	1,43683	9	2,72047
4	1,70481	10	2,88484
5	1,94403	15	3,60223
6	2,16113	20	4,20493

Table III.1 – Dépendance des énergies de Wannier-Stark $E_{0,0}$ à la profondeur V_0 des puits du réseau.

Nous pouvons remarquer sur la figure III.7 que plus les puits du réseau sont profonds, plus les fonctions d'onde sont localisées autour de leur site d'indice n . La forme de la fonction est indépendante du puits, les fonctions d'onde sont simplement translatées d'un puits à l'autre. En effet le réseau créé par le potentiel $V_0 \sin(k_l z)$ est infini, la symétrie du problème est conservée en partie, d'où l'invariance par translation de la fonction d'onde $W_{0,n}(z)$ pour tout n .

III.2 Traitement perturbatif de l'effet Casimir-Polder

Dans cette partie, nous abordons l'effet du miroir sur les atomes de rubidium dans le piège à l'aide d'un traitement perturbatif, malgré la divergence du potentiel de Casimir-Polder très près du miroir. Dans [2, 6], un tel traitement perturbatif a déjà été utilisé, et la régularisation du potentiel a été faite en modélisant l'atome par une sphère dure. Ce choix a l'avantage de permettre de calculer les niveaux d'énergie des atomes piégés en présence du miroir, mais le résultat dépend fortement du choix du rayon effectif de l'atome. Nous espérons mieux modéliser ce qui se passe très près de la surface en introduisant un potentiel de Lennard-Jones et choisissons de régulariser le potentiel via l'introduction d'une coupure.

III.2.1 Présence du miroir et modification des états de Wannier-Stark

Dans III.1.3, nous avons déterminé les états de Wannier-Stark dans le cas d'un réseau infini en présence de la force de pesanteur. Or le miroir crée un mur à la position $z = 0$ et brise totalement la symétrie, la fonction d'onde des états propres des atomes ne doit plus être invariante par translation. Nous imposons comme conditions aux limites que la fonction d'onde $\psi(z = 0) = 0$ et pour le potentiel $V(z = 0) = \infty$. L'Hamiltonien est le suivant :

— si $z > 0$

$$H_{WS}^{mod} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + V_0 \sin^2(k_z z) - mgz$$

— si $z \leq 0$

$$H_{WS}^{mod} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + V_0 \sin^2(k_z z) + \infty$$

En adimensionnant la coordonnée z par le pas du réseau $\frac{\lambda_l}{2} = 266$ nm et l'énergie par l'énergie de recul $E_r = 8.11$ kHz, nous pouvons réécrire H_{WS}^{mod} sous la forme

$$H_{WS}^{mod} = \frac{-1}{4\pi^2} \frac{d^2}{d\tilde{z}^2} + \frac{V_0}{E_r} \sin^2(\pi\tilde{z}) - \frac{mg\lambda}{E_r 2} \tilde{z}.$$

Pour résoudre l'équation aux valeurs propres, nous utilisons la méthode des différences finies, méthode déjà utilisée dans [2, 6]. Cette méthode consiste à choisir une boîte de dimension L , et nous discrétisons l'espace avec un pas $\delta z = \frac{L}{N+1}$. Nous imposons les conditions aux bords : $\psi(z = 0) = 0$ et $\psi(z = L) = 0$. La condition en $z = 0$ est une condition physique due à la présence de la surface, la condition en $z = L$ est simplement numérique afin de réaliser le calcul. Nous prendrons soin de choisir une boîte suffisamment grande pour que l'effet de la condition en $z = L$ soit négligeable pour les fonctions d'onde des atomes. Nous divisons donc notre boîte en $N + 1$ points :

$z_0 = 0, z_1, z_2, \dots, z_{N+1} = L$ et nous exprimons l'Hamiltonien sous la forme d'une matrice sur cette espace discrétisé,

$$\frac{d^2 f}{dz^2}(z) = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta z) + f(z - \delta z) - 2f(z)}{\delta z^2}.$$

Nous avons pour la partie cinétique la matrice

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi^2 \delta z^2} & \frac{-1}{\pi^2 \delta z^2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{-1}{\pi^2 \delta z^2} & \frac{2}{\pi^2 \delta z^2} & \frac{-1}{\pi^2 \delta z^2} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \frac{-1}{\pi^2 \delta z^2} & \frac{2}{\pi^2 \delta z^2} & \frac{-1}{\pi^2 \delta z^2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{-1}{\pi^2 \delta z^2} & \frac{2}{\pi^2 \delta z^2} \end{pmatrix}.$$

Nous y ajoutons la matrice diagonale du potentiel $V(z_i)$.

n	$E_{0,n}^{mod}$ exprimée en E_r	$\delta E_n^{mod} (10^{-2} E_r)$
1	1,47573	13,707
2	1,33866	9,959
3	1,23907	8,036
4	1,15871	7,217
5	1,08654	7,029
6	1,01625	7,0085
7	0,946165	7,0074
8	0,876091	7,0074
9	0,806017	7,0074
10	0,735943	7,0074
11	0,665869	7,0074
12	0,595795	7,0074
13	0,525722	7,0074
14	0,455648	7,0074
15	0,385574	

Table III.2 – Les 15 premières valeurs des énergies propres modifiées E_n^{mod} par le potentiel infini en $z = 0$ et la différence δE_n entre chaque énergie propre successive.

Dans le tableau III.2, nous avons reporté les 15 premières énergies propres modifiées par le potentiel infini en $z = 0$ modélisant l'impénétrabilité du miroir par les atomes. Nous avons également reporté $\delta E_n^{mod} = E_{0,n}^{mod} - E_{0,n+1}^{mod}$. Nous voyons qu'à partir du puit $n = 7$, $\delta E_n^{mod} = \frac{mg\lambda}{E_r^2} = 0.0700738 E_r$, donc la présence matérielle du miroir (hors interactions Casimir-Polder ou Lennard-Jones) ne se fait plus sentir et les fonctions d'onde modifiées sont identiques à celles de Wannier-Stark pour la première bande calculées en l'absence du mur créé par le miroir. Nous pouvons constater sur les figures III.8 et III.9 que plus l'atome s'éloigne du miroir, plus les fonctions d'onde retrouvent la forme des fonctions de Wannier-Stark. En effet pour cette profondeur de puits $V_0 =$

3 E_r , les états propres de Wannier-Stark sont étalés sur 5 puits de part et d'autre du puits central n . Ainsi à partir de $n = 6$, l'effet du mur en $z = 0$ commence à devenir négligeable. Pour des atomes piégés suffisamment loin du miroir, nous pouvons considérer que le réseau est infini et que les états propres de ces atomes correspondent aux états Wannier-Stark.

Les nouveaux états propres des atomes ont été obtenus en calculant les valeurs et vecteurs propres de la matrice $T+V$, c'est-à-dire en diagonalisant celle-ci. Ces nouveaux états modifiés par la présence du miroir sont toujours orthogonaux. Ils forment une base pour le système auquel nous nous sommes réduits sur l'intervalle $[0; L]$, mais ne correspondent évidemment plus à la base complète des états du système physique réel qui est infinie (le réseau est formellement non borné). De plus le calcul des valeurs et vecteurs propres de la matrice $T + V$ ne fournit pas seulement les états propres dans la première bande d'énergie de Bloch, mais contient également les états propres des bandes supérieures et des états de boîtes, états d'une particule se trouvant entre deux potentiels infinis. Ces états de boîtes apparaissent lorsque les états de bandes supérieures ont des fonctions d'onde dont l'étalement est bien plus grand que la taille de la boîte choisie.

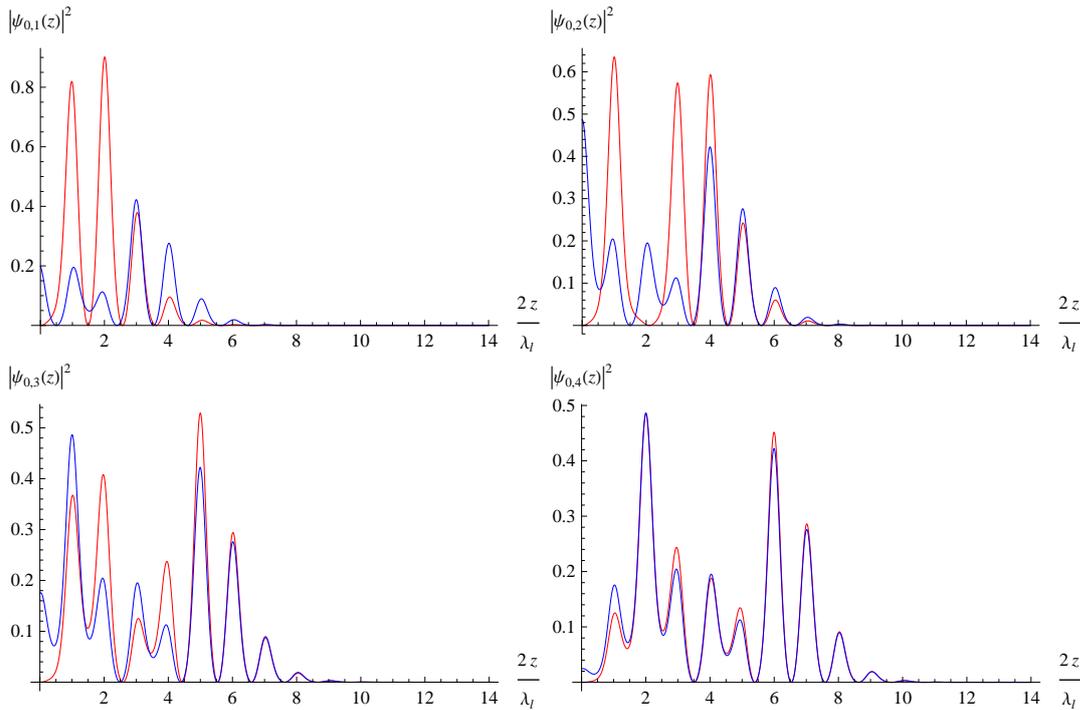


FIGURE III.8 – Les quatre premières fonctions d'onde modifiées en rouge et en bleu les fonctions de Wannier-Stark correspondantes, avec de gauche à droite et de haut en bas $|\psi_{0,1}(z)|^2$, $|\psi_{0,2}(z)|^2$, $|\psi_{0,3}(z)|^2$, et $|\psi_{0,4}(z)|^2$

Nous noterons dans la suite $\psi_{0,n}$ et $E_{0,n}^{mod}$ les états et énergies Wannier-Stark d'un atome piégé dans un puits n dans la première bande de Bloch modifiée par le potentiel infini en $z = 0$.

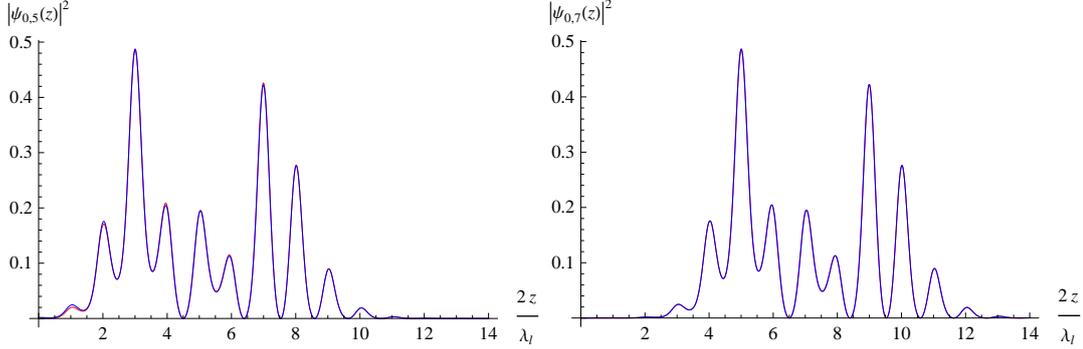


FIGURE III.9 – Les fonctions d’onde modifiées en bleu, et en rouge les fonctions de Wannier-Stark correspondantes, avec de gauche à droite $|\psi_{0,5}(z)|^2$, et $|\psi_{0,7}(z)|^2$

III.2.2 Effet Casimir-Polder et fonctions de Wannier-Stark

Nous avons choisi de faire l’hypothèse que l’effet Casimir-Polder est une perturbation sur les niveaux d’énergie des atomes. Pour déterminer la modification des états Wannier-Stark modifiés, nous utilisons la théorie des perturbations indépendantes du temps sur l’état fondamental :

$$|I\rangle = |g\rangle |n_e(\mathbf{r}, \omega)\rangle |\psi_{0,n}\rangle$$

de l’Hamiltonien non perturbé $H = H_{WS}^{mod} + H_{EM} + H_{at}$. La différence avec le paragraphe II.1.1 est l’introduction H_{WS}^{mod} dans l’Hamiltonien total et de $|\psi_{0,n}\rangle$ dans l’état initial. Dans le cas de l’approximation dipolaire et pour un miroir diélectrique, l’effet Casimir-Polder s’écrit

$$H_{int} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{z}),$$

où \mathbf{d} est le moment dipolaire électrique.

Nous retrouvons au second ordre un résultat similaire à (II.1.2)

$$\Delta E(\mathbf{r}) = - \sum_{n'} \sum_e \int d^3 r' \int d\omega \left[\frac{|\langle \psi_{0,n} | \langle g | \langle n_e(\mathbf{r}, \omega) | \hat{d}_i \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) | (n+1)_e(\mathbf{r}, \omega) \rangle | e \rangle | \psi_{0,n'} \rangle|^2}{\hbar(\omega + \omega_{eg} + \omega_{n'n})} + \frac{|\langle \psi_{0,n} | \langle g | \langle n_e(\mathbf{r}, \omega) | \hat{d}_i \cdot \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) | (n-1)_e(\mathbf{r}, \omega) \rangle | e \rangle | \psi_{0,n'} \rangle|^2}{\hbar(\omega + \omega_{eg} + \omega_{n'n})} \right].$$

Les états Wannier-Stark modifiés sont des états orthogonaux, donc il ne peut pas y avoir de couplage entre deux états externes n et n' . Au final, nous opérons le même calcul que dans II.1.1 et trouvons le résultat

$$\Delta E_n = \int_0^\infty dz V_{CP}(z) |\psi_{0,n}(z)|^2, \quad (\text{III.2.1})$$

où V_{CP} est le potentiel de Casimir-Polder (II.1.5) en fonction de la distance z au miroir. Les fonctions de Wannier-Stark modifiées sont étendues spatialement sur plusieurs puits du réseau, la correction d'un niveau d'énergie s'exprime alors comme une valeur moyenne sur l'ensemble des positions de l'énergie de Casimir-Polder.

III.2.3 Interaction à courtes distances : potentiel de Lennard-Jones

Nous venons de montrer que la correction des niveaux d'énergie d'un état de Wannier-Stark s'exprime sous la forme d'une intégrale sur l'ensemble des positions de l'atome (III.2.1). Un premier problème se présente à nous. Cette intégrale s'opère sur l'ensemble des distances de $z = 0$ à l'infini. Or le potentiel de Casimir-Polder n'est pas valable aux très courtes distances. Ce potentiel provient de l'interaction entre l'atome et le champ électrique du vide réfléchi sur le miroir. Mais à très courte distance, le miroir ne peut plus être considéré comme un objet plan dont la réponse est modélisée par des coefficients de réflexion et de transmission.

L'atome ayant une taille de l'ordre de l'ångström, nous considérons que le potentiel de Casimir-Polder est valide pour des distances minimales comprises entre 1 et 10 nm. Pour des distances inférieures entre la surface et l'atome, nous choisissons de modéliser l'interaction par un potentiel de Lennard-Jones qui devient répulsif pour des distances de l'ordre de l'ångström. Il caractérise l'interaction entre le nuage électronique de l'atome avec le nuage électronique des atomes constituant le miroir.

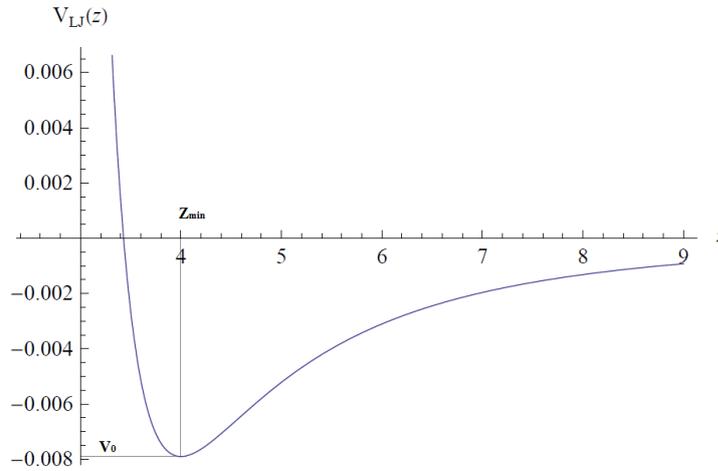


FIGURE III.10 – Potentiel de Lennard-Jones $V_{LJ}(z)$ exprimée en eV pour $z_{min} = 4 \text{ \AA}$ en fonction de la distance z au miroir exprimée en \AA .

Nous écrivons le potentiel de Lennard-Jones sous la forme suivante :

$$V_{LJ}(z) = \frac{V_{LJ}^0}{3} \left[\left(\frac{z}{z_{min}} \right)^{12} - 4 \left(\frac{z}{z_{min}} \right)^3 \right],$$

où V_{LJ}^0 correspond à la profondeur du puits, et z_{min} est la distance à l'équilibre qui correspond l'adsorption de l'atome sur la surface (voir figure III.10). Classiquement un

potentiel de type physisorption qui modélise l'interaction entre un atome et une surface est choisi sous la forme d'un potentiel de Lennard-Jones 9-3, résultant de la sommation par paire d'un Lennard-Jones 12-6 modélisant une interaction atome-atome. Le choix de 12-3 permet d'accentuer la pente de la barrière infinie. Nous définissons alors un nouveau potentiel $V(z)$ pour l'interaction entre l'atome et la surface :

$$V(z) = \begin{cases} V_{LJ}(z) & z < z_s \\ V_{CP}(z) & z > z_s \end{cases} \quad (\text{III.2.2})$$

où z_s est la distance à laquelle nous recollons les deux potentiels. Pour recoller continûment le potentiel de Lennard-Jones au potentiel de Casimir-Polder, nous raccordons ces deux potentiels via la relation

$$V_{LJ}^0 = \frac{3V_{CP}(z_c)}{\left[\left(\frac{z_s}{z_{min}} \right)^{12} - 4 \left(\frac{z_s}{z_{min}} \right)^3 \right]}. \quad (\text{III.2.3})$$

Ainsi notre nouveau potentiel ne dépend pas de trois paramètres mais seulement de deux. En fait pour une distance à l'équilibre $z_{min} = 4 \text{ \AA}$, $z_s = 1 \text{ nm}$ et le potentiel de Casimir-Polder évalué pour le miroir de l'expérience à température ambiante à l'équilibre de $T = 295 \text{ K}$, nous trouvons pour $V_{LJ}^0 = 7,9 \text{ meV}$. Or nous savons que pour ce type d'interaction, V_{LJ}^0 est de l'ordre de quelques centaines de meV [52]. En réalité l'interaction atome-surface pour des distances inférieures au nanomètre est notre plus grand inconnu. Une détermination précise de cette interaction nécessiterait un calcul complet de l'ensemble des interactions mises en jeu à ces distances. Le potentiel de Casimir-Polder pourrait également être modifié en prenant en compte la possibilité qu'une partie des atomes de rubidium viennent se coller sur la surface [53], ce qui permettrait peut-être d'expliquer le désaccord entre V_{LJ}^0 calculé et celui mesuré pour ce modèle de Lennard-Jones. Néanmoins nous nous contenterons pour ce travail de modéliser l'interaction à très courte distance par le potentiel de Lennard-Jones et nous étudierons par la suite l'influence des deux paramètres z_s et z_{min} introduits.

III.2.4 Calcul des corrections des niveaux d'énergie

Dans le paragraphe III.2.1, nous avons déterminé les fonctions d'ondes pour l'Hamiltonien H_{WS}^{mod} . Ces fonctions d'onde tendent vers 0 lorsque z tend vers 0, ce qui est dû à la présence du miroir : l'atome ne peut pas être à cette position. Néanmoins si nous regardons un peu plus attentivement le comportement de ces fonctions d'ondes, nous pouvons remarquer III.11 que $|\psi_{0,n}(z)|^2$ tend vers 0 à la vitesse de z^2 . Or notre potentiel diverge beaucoup plus vite que $|\psi_{0,n}(z)|^2$. La correction ΔE_n divergera.

Rappelons que l'un des objectifs de l'expérience est de mesurer la force de Casimir-Polder pour des distances proches du miroir, c'est-à-dire dans le quatrième ou le cinquième puits. Le réseau optique donne des pseudo-états de Wannier-Stark qui ont l'avantage d'être localisés autour des puits du réseau. Ainsi lors du calcul de la correction des niveaux d'énergie, nous pouvons comparer ΔE_n et $V_{CP}(n\lambda/2)$, et obtenir une sorte de mesure du potentiel de Casimir-Polder. Pour cette raison, nous allons tout de même essayer de traiter ce problème à l'aide du traitement perturbatif.

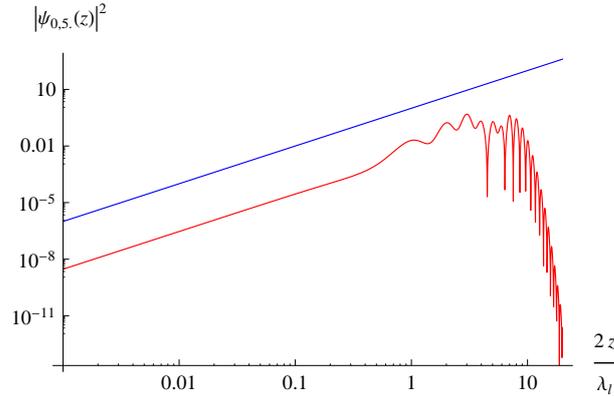


FIGURE III.11 – Comparaison de $|\psi_{0,5}(z)|^2$ en rouge avec z^2 en bleu.

Nous appliquons une coupure à l'intégrale de (III.2.1). Nous réécrivons la correction des niveaux d'énergie des états Wannier-Stark modifiés

$$\Delta E_n = \int_{z_c}^{+\infty} dz V(z) |\psi_{0,n}(z)|^2,$$

avec $V(z)$ le nouveau potentiel défini ci-dessus (III.2.2) et z_c la position de la coupure. Mais où placer la coupure ? Nous savons que le rayon atomique mesuré du rubidium r_{Rb} est d'environ 235 pm (le rayon calculé est de 265 pm). La coupure peut être choisie comme $z_c = r_{Rb}$, mais dans ce cas nous faisons l'hypothèse que l'atome est une sphère dure et que l'interaction avec la surface relève d'une simple condition d'impenétrabilité (plus ou moins équivalent à la régularisation du potentiel [6]). Nous pouvons également appliquer une coupure arbitraire à $z_c = 1$ nm, en considérant d'après les figures III.8 et III.9 que la probabilité que les atomes se trouvent à une distance inférieure du miroir est négligeable, en fait nous faisons l'hypothèse que l'interaction de l'atome avec le miroir à très courte distance est négligeable : nous négligeons l'effet du potentiel de Lennard-Jones.

À présent nous fixons arbitrairement $z_{min} = 2,3 \text{ \AA}$ et $z_s = 1$ nm, et nous concentrons uniquement sur la dépendance au paramètre z_c . Nous appliquons une série de coupures différentes de 2 Å à 1 nm pour étudier l'influence de celle-ci sur les résultats des corrections en énergie ΔE_n . Sur la figure III.12 de gauche, nous observons deux zones. Pour les puits loin de la surface $n \geq 8$ ou 9, les corrections en énergie ΔE_n suivent un comportement similaire au potentiel de Casimir-Polder $V_{CP}(n\lambda/2)$; d'ailleurs si nous avons des puits plus profonds, par exemple $V_0 = 10 E_r$, les états Wannier-Stark modifiés sont mieux localisés autour d'un puits, et dans ce cas, $\Delta E_n \approx V_{CP}(n\lambda/2)$ (voir figure III.12 de droite). Pour les puits proches de la surface, les corrections ΔE_n diffèrent totalement du comportement de $V_{CP}(n\lambda/2)$.

Sur la figure III.13, nous avons représenté l'écart relatif entre les corrections en énergie ΔE_n calculées pour $z_c = 1$ nm avec celles calculées pour $z_c \in [2,9]$. Pour des puits $n \geq 10$, l'écart relatif entre tous ces résultats est inférieure à 10^{-6} et il est nul pour $n > 14$: pour les puits lointains, le choix du paramètre de coupure n'est pas significatif.

Comme nous l'observons sur la figure III.13, l'écart relatif est important pour les puits près du miroir avec des écarts relatifs allant de 5 à 100%. Ces écarts sont importants pour ces puits car la probabilité d'être très proche du miroir est significative, et la partie du potentiel de Lennard-Jones contribue également de manière importante à ΔE_n , ainsi l'influence de la coupure qui a pour effet de minimiser l'effet du miroir à courte distance, est significative.

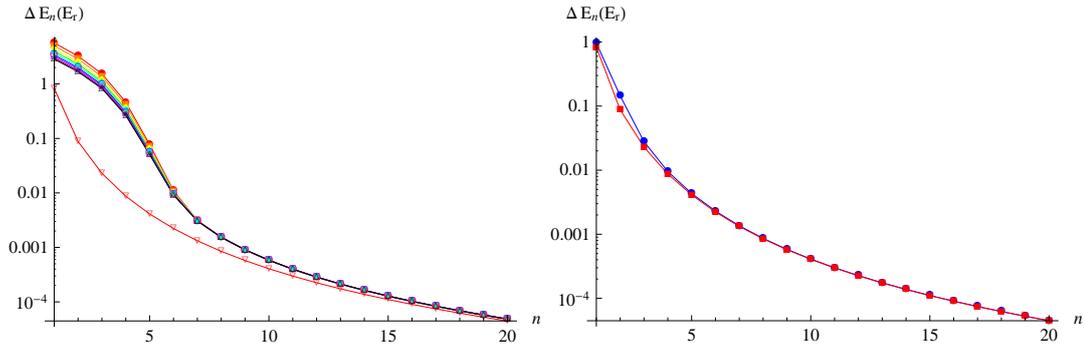


FIGURE III.12 – À gauche correction ΔE_n calculées pour différentes coupures. En rouge le potentiel de Casimir-Polder $V_{CP}(n\lambda/2)$ au centre du puits n . À droite : en bleu les corrections ΔE_n calculées pour une coupure $z_c = 2 \text{ \AA}$ pour un réseau avec des puits de profondeurs $V_0 = 10 E_r$; en rouge le potentiel de Casimir-Polder $V_{CP}(n\lambda/2)$ au centre du puits n .

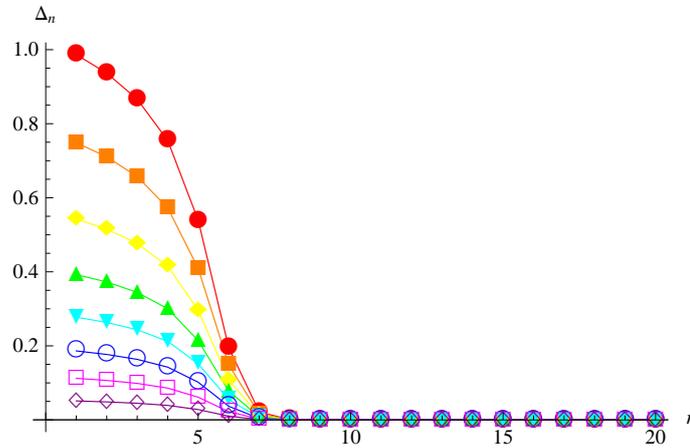


FIGURE III.13 – Écart relatif Δ_n entre la correction E_n calculée pour $z_c = 1 \text{ nm}$ et : en rouge $z_c = 2 \text{ \AA}$, en orange $z_c = 3 \text{ \AA}$, en jaune $z_c = 4 \text{ \AA}$, en vert $z_c = 5 \text{ \AA}$, en cyan $z_c = 6 \text{ \AA}$, en bleu $z_c = 7 \text{ \AA}$, en magenta $z_c = 8$ et en violet $z_c = 9 \text{ \AA}$.

III.2.5 Comparaison avec la méthode de régularisation du potentiel de Casimir-Polder par une sphère

Avant de conclure sur ce traitement perturbatif de l'interaction entre l'atome et le miroir (Casimir-Polder et Lennard-Jones), nous voudrions comparer cette méthode de calcul utilisant un paramètre de coupure dans l'intégrale de (III.2.1) et la méthode utilisée dans la thèse de Sophie Pelisson [2, 6]. Cette méthode de régularisation considère l'atome comme une sphère dure de rayon r_{Rb} . Dans le cas d'une sphère métallique devant un miroir [54, 55, 56], il a été démontré que le comportement du potentiel de Casimir est : à grande distance z^{-4} (limite retardée), un comportement intermédiaire en z^{-3} (van der Waals) et à courte distance en z^{-1} , résultat de la régularisation. Ce dernier comportement à courte distance permet de ne pas avoir un résultat divergent pour les corrections.

L'atome est modélisé par une distribution sphérique de densité de probabilité $\rho(r')$. Deux types de distribution sont testées, une distribution uniforme

$$\rho_1(r') = N_1,$$

et une distribution parabolique

$$\rho_2(r') = N_2(R^2 - x'^2 - y'^2 - (z' - z - r_{Rb})^2),$$

où l'atome est constitué d'un noyau qui contient la majorité de la densité de probabilité caractérisant le noyau atomique au centre de la sphère, et le cortège d'électrons qui représente une densité plus faible vers les bords de la sphère. N_1 et N_2 sont des constantes de normalisation. Ainsi le potentiel régularisé s'écrit

$$V_{reg}(z) = \int_{\Omega} d^3r' \rho(r') V(z'),$$

avec Ω le volume atomique et $z' = r_{Rb} + z + r' \cos(\theta')$ où z est le centre de l'atome et $\{r', \theta', \phi'\}$ les coordonnées sphériques de l'atome dans le repère cartésien de centre $\{0, 0, z + r_{Rb}\}$.

Pour les puits éloignés du miroir, nous retrouvons un résultat similaire au cas où nous opérons une coupure sur l'intégration (voir figure III.14) avec un comportement proche du potentiel de Casimir-Polder. Pour les puits proches du miroir $n < 8$, la correction ΔE_n dépend fortement de la méthode utilisée, avec par exemple des écarts relatifs de l'ordre de 1 à 10 % entre la méthode de régularisation et l'introduction d'une coupure (voir figure III.15). De plus entre ces deux méthodes, l'écart relatif est non nul pour les puits lointains, mais tout de même inférieur à 0.1 %. Quant à l'écart relatif entre deux corrections ΔE_n calculées pour deux rayons différents, [2] a montré que pour les puits lointains, il était inférieur à 1 %.

Nous avons pu voir que ces deux méthodes ne donnent aucun résultat précis pour les corrections en énergie ΔE_n dans les puits $n < 8$. À l'inverse pour les puits lointains l'écart relatif entre ces deux méthodes est très faible, inférieur à 1 %. Pour les puits $n > 14$, le calcul de ΔE_n dépend très faiblement du rayon de l'atome pour la méthode de régularisation avec la sphère, et ne dépend pas du paramètre de coupure z_c pour l'autre méthode. Ce dernier point nous permet de choisir préférentiellement la méthode de la

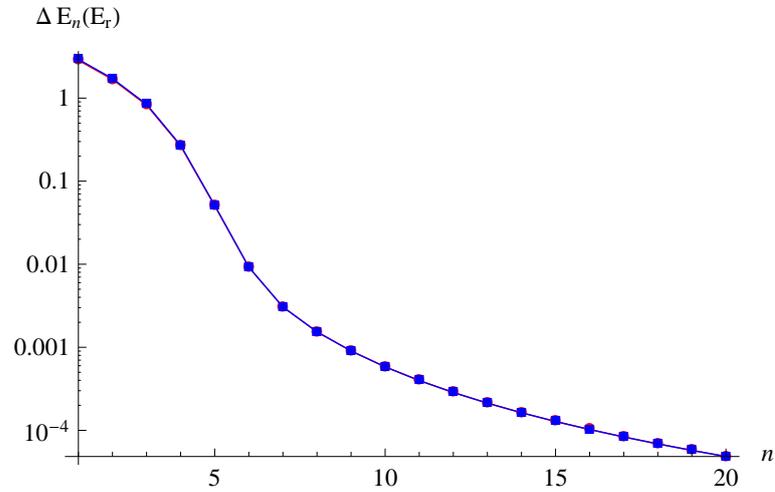


FIGURE III.14 – En bleu ΔE_n calculée par régularisation du potentiel de Casimir-Polder pour une distribution parabolique sphérique de rayon 200 pm. En rouge ΔE_n calculée pour une coupure $z_c = 1$ nm.

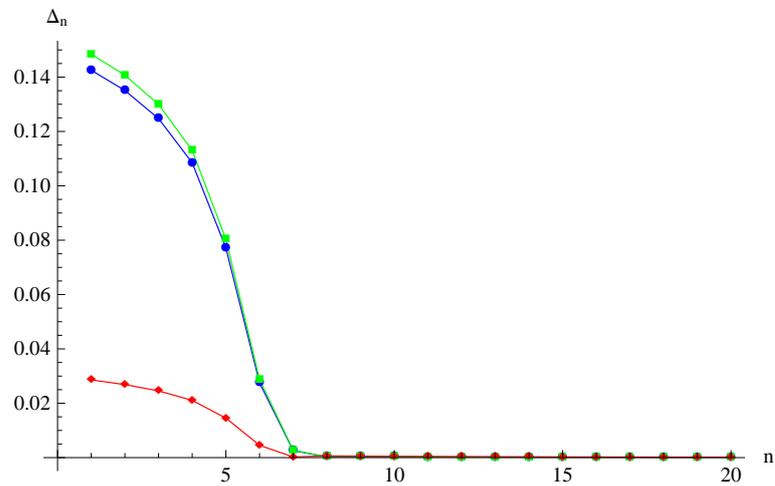


FIGURE III.15 – Écart relatif Δ_n entre la correction ΔE_n calculée pour $z_c = 1$ nm et : en rouge la correction ΔE_n calculée par régularisation du potentiel de Casimir-Polder pour une distribution parabolique sphérique de rayon 300 pm, en bleu 200 pm et un distribution homogène sphérique de rayon 200 pm.

coupure, plus précise pour les puits lointains. Physiquement l'atome a une probabilité quasiment nulle de se trouver près du miroir pour des états $n > 14$. Néanmoins pour les premiers puits, la méthode de la coupure est la plus imprécise.

III.3 Traitement non perturbatif

Dans cette partie, nous mettons d'abord en évidence l'impossibilité d'appliquer un traitement perturbatif et donc d'utiliser le résultat (III.2.1) pour calculer les niveaux d'énergie des atomes. Nous déterminons ensuite les niveaux d'énergie des atomes par un traitement non perturbatif à l'aide de la méthode numérique des différences finies introduite précédemment pour déterminer les états Wannier-Stark modifiés III.2.1. Nous étudions alors la dépendance de ces états aux paramètres introduits dans le potentiel de Lennard-Jones, et à la température. Enfin nous déterminons l'impact sur ces niveaux d'énergie de l'incertitude déjà calculée pour le potentiel de Casimir-Polder II.4.3.

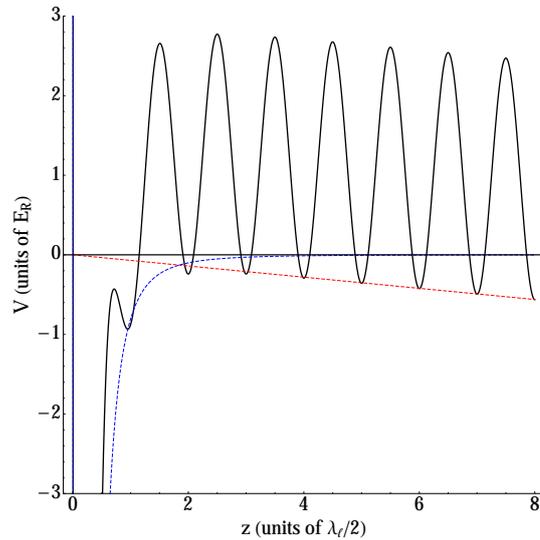


FIGURE III.16 – Potentiel total $V(z)$ exprimé en énergie de recul E_r . En rouge le potentiel de pesanteur et en bleu le potentiel de Casimir-Polder.

III.3.1 Comparaison des différents potentiels près de la surface

Le problème de convergence de ΔE_n (III.2.1) provient du comportement de la fonction d'onde $|\psi_{0,n}(x)|^2$ pour les z proches de la surface et nous avons essayé de résoudre ce problème en supprimant la divergence, mais est-ce vraiment justifié? En réalité les potentiels de Casimir-Polder et de Lennard-Jones ne peuvent pas être considérés à ces distances comme une perturbation devant les autres contributions de l'Hamiltonien. Comme nous pouvons le voir sur la figure III.16, V_{CP} et V_{LJ} sont de l'ordre de $10^8 E_r$ près du miroir alors que le potentiel optique et le potentiel de pesanteur ne sont que de

quelques énergies de recul. Comme les fonctions d'onde des états Wannier-Stark modifiés par le potentiel infini sont étalées sur plusieurs puits (voir figures III.8 et III.9), la probabilité d'être près de la surface pour un atome est non nul pour les premiers puits $n < 10$. Comme les potentiels V_{CP} et V_{LJ} ne sont pas des perturbations près de la surface, la méthode perturbative n'est donc pas applicable pour les états des premiers puits du piège.

III.3.2 Résultats numériques

Nous proposons de résoudre ce problème en traitant la totalité du hamiltonien $H = \frac{p^2}{2m} + V_{tot}(z)$ par la méthode des différences finies avec

$$V_{tot}(\tilde{z}) = U_0 \sin(\pi\tilde{z}) + \frac{mg\lambda}{2E_r}\tilde{z} + \frac{V(\frac{\lambda}{2}\tilde{z})}{E_r},$$

où $V(z)$ est le potentiel défini par (III.2.2). Nous avons choisi une boîte de taille $L = 36$ que l'on divise en 10^6 intervalles. Nous gardons toujours fixé $z_{min} = 4 \text{ \AA}$ et $z_s = 1 \text{ nm}$. Pour comparer les méthodes perturbative et non-perturbative, nous avons d'abord la relation

$$E_n^{pt} = E_{0,n}^{mod} + \Delta E_n \quad (\text{III.3.1})$$

qui est la définition des niveaux d'énergie E_n^{pt} des atomes calculées par une méthode perturbative avec ΔE_n la correction due à la perturbation induite par le potentiel $V(z)$ (III.2.2). Nous définissons également la relation suivante :

$$E_n \equiv E_{0,n}^{mod} + \delta E_n \quad (\text{III.3.2})$$

où E_n sont les niveaux d'énergie des atomes calculées par la non-perturbative. Cette dernière égalité est arbitraire, elle permet de définir la grandeur δE_n qui va servir à comparer les deux méthodes utilisées. Nous avons reporté dans le tableau III.3 les énergies propres E_n calculées par cette dernière méthode, les énergies propres des états Wannier-Stark $E_{0,n}^{mod}$ modifiés par le potentiel infini en $z = 0$, et la grandeur δE_n .

Si la méthode perturbative est justifiée, alors la correction en énergie ΔE_n et la différence δE_n doivent être égales. Sur la figure III.17, le graphique de gauche montre en rouge ΔE_n et en bleu δE_n . Nous pouvons voir que pour les puits proches du miroir $n < 8$, ces deux courbes ne correspondent pas. À l'inverse pour les puits loin de la surface $n \geq 8$, ΔE_n et δE_n ont des valeurs similaires, l'écart relatif est alors inférieur à 1% entre ces deux grandeurs (voir figure III.17). Ces observations viennent confirmer que pour les premiers puits nous ne pouvons pas appliquer un traitement perturbatif. Pour les puits lointains, le traitement perturbatif peut être appliqué, il est possible de l'appliquer dès le puits $n = 8 - 9$, et non seulement à partir de $n = 22$, car l'écart relatif est déjà inférieur à 1%. Sur la figure III.17, nous avons mis en évidence que le traitement perturbatif qui utilise la méthode introduisant une coupure dans l'intégration, est plus précis que la méthode de régularisation par une sphère : l'écart relatif entre δE_n et ΔE_n converge plus vite vers zéro pour ΔE_n calculé avec une coupure z_c . En réalité, il est peu probable pour un atome dans un état $n \in \llbracket 8, 21 \rrbracket$ de se trouver à une distance

n	E_n en E_r	$E_{0,n}^{mod}$ en E_r	δE_n en E_r	n	E_n en E_r	$E_{0,n}^{mod}$ en E_r	δE_n en E_r
1	0,73075	1,47574	0,74499	11	0,665471	0,665869	0,000416
2	1,37186	1,33867	-0,03319	12	0,595509	0,595795	0,000398
3	1,24405	1,23907	-0,00498	13	0,525509	0,525722	0,000213
4	1,14885	1,15871	0,00986	14	0,455485	0,455648	0,000168
5	1,07457	1,08654	0,01197	15	0,385446	0,385574	0,000163
6	1,00953	1,01625	0,00672	16	0,315398	0,315500	0,000102
7	0,943121	0,946165	0,003044	17	0,245343	0,245426	0,000083
8	0,874539	0,876091	0,001552	18	0,175284	0,175352	0,000068
9	0,805109	0,806017	0,000908	19	0,105221	0,105279	0,000058
10	0,73536	0,735943	0,000583	20	0,0351562	0,0352047	0,0000485

Table III.3 – Les 20 premières valeurs des énergie propres

du miroir inférieure à λ_l . Nous pouvons supprimer la divergence de l'intégrale de ΔE_n (III.2.1).

Nous pouvons voir sur les figures III.18 à III.20 que les fonctions d'onde $\phi_n(z)$ des atomes calculées par la méthode non-perturbative retrouvent la forme des fonctions de Wannier-Stark modifiées $\psi_{0,n}(z)$ par le potentiel infini en $z = 0$ à partir du puits $n = 6$. Pour les premières fonctions $n \leq 7$, nous notons la présence d'oscillations entre le miroir et le premier puits. Ces oscillations sont dues au potentiel de Lennard-Jones qui crée un puits entre le miroir et le premier puits du réseau. Ces oscillations rapides correspondent à la vitesse acquise par les atomes dans le puits due à la pente très raide du potentiel Lennard-Jones. Comme dans le cas du potentiel harmonique, ces oscillations sont liées aux modes de résonance de l'atome dans le puits. Ces premiers états comme nous allons le voir par la suite sont des états liés à la surface. Lorsque l'atome est assez loin de ce puits, la probabilité de présence d'être dans le puits Lennard-Jones devient très faible et ces oscillations ne sont plus significatives. Néanmoins ces oscillations existent toujours pour tout état n dont l'énergie E_n est supérieure à V_{LJ}^0 . Par

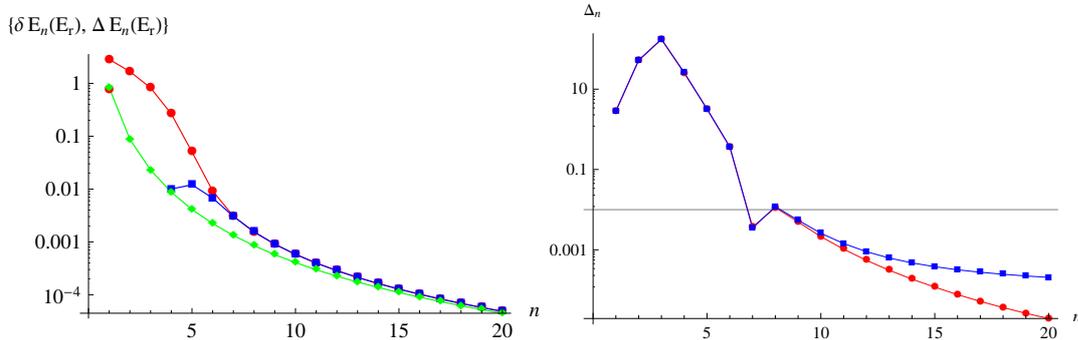


FIGURE III.17 – À gauche en vert potentiel de Casimir-Polder V_{CP} , en rouge ΔE_n et en bleu δE_n exprimés en E_r . À droite l'écart relatif entre δE_n et ΔE_n , en rouge ΔE_n calculé par la méthode de la coupure avec $z_c = 1$ nm et en bleu ΔE_n calculé par la méthode de régularisation avec $r_{Rb} = 2$ Å.

exemple, le choix de $z_{min} = 4 \text{ \AA}$ impose $V_{LJ}^0 = 8.10^7 E_r$. Les états Wannier-Stark ont une différence d'énergie d'environ $0.07 E_r$ entre deux puits voisins, donc il faut atteindre un état $n = 10^9$ afin que la probabilité pour l'atome d'être dans le puits Lennard-Jones soit formellement nulle.

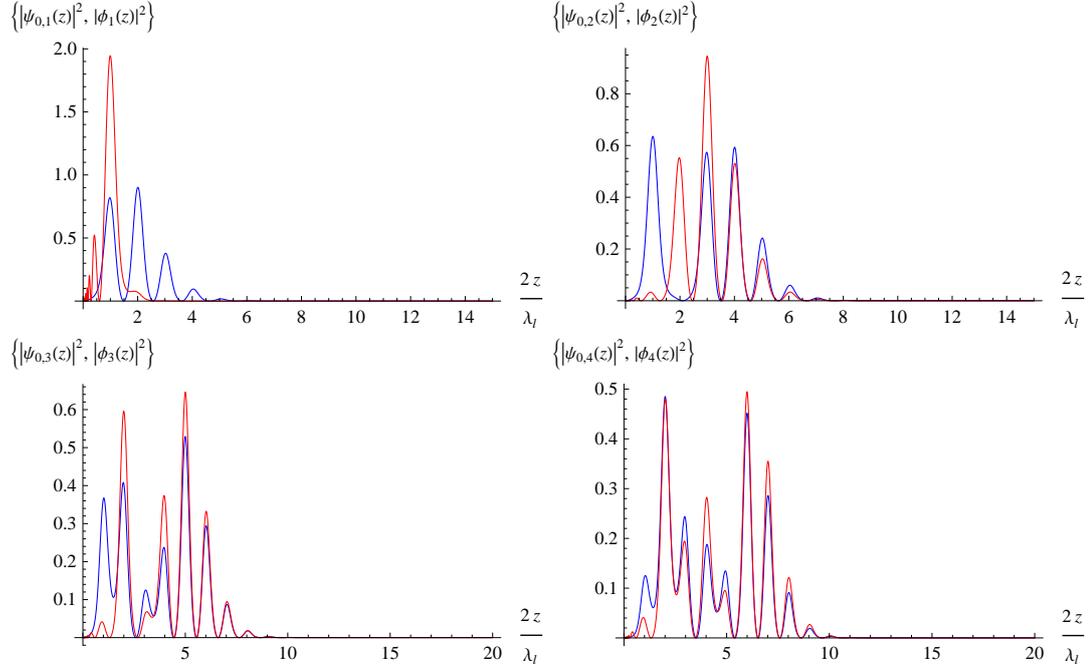


FIGURE III.18 – En haut à gauche $|\phi_1(x)|^2$ en rouge et $|\psi_{0,1}(z)|^2$ en bleu. En haut à droite $|\phi_2(x)|^2$ en rouge et $|\psi_{0,2}(z)|^2$ en bleu. En bas à gauche $|\phi_3(x)|^2$ en rouge et $|\psi_{0,3}(z)|^2$ en bleu. En bas à droite $|\phi_4(x)|^2$ en rouge et $|\psi_{0,4}(z)|^2$ en bleu.

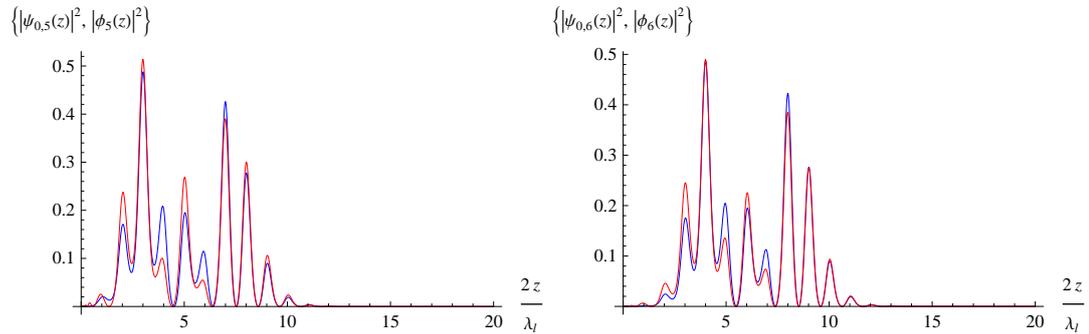


FIGURE III.19 – À gauche $|\phi_5(x)|^2$ en rouge et $|\psi_{0,5}(z)|^2$ en bleu. À droite $|\phi_6(x)|^2$ en rouge et $|\psi_{0,6}(z)|^2$ en bleu.

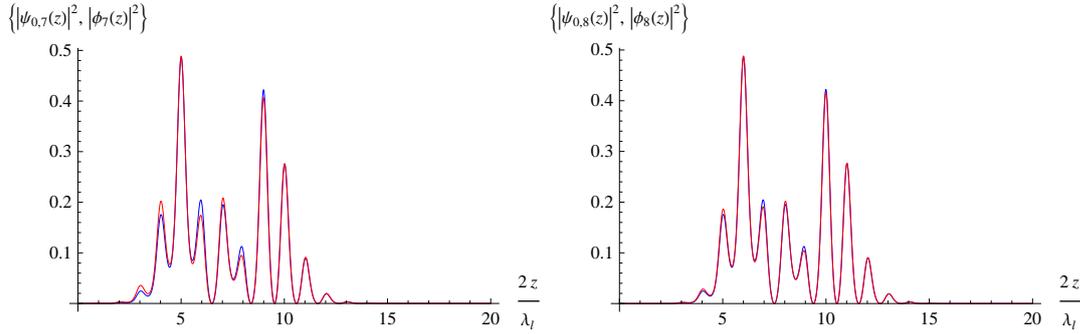


FIGURE III.20 – À gauche $|\phi_7(x)|^2$ en rouge et $|\psi_{0,7}(z)|^2$ en bleu. À droite $|\phi_8(x)|^2$ en rouge et $|\psi_{0,8}(z)|^2$ en bleu.

III.3.3 Dépendance des états atomiques aux divers paramètres

a Paramètres de la méthode numérique

Nous proposons ici d'étudier la stabilité des résultats en fonction de certains paramètres introduits et qui pourraient paraître arbitraires. Nous allons d'abord regarder l'influence de la valeur du potentiel que nous imposons en $z = 0$, puis l'influence du nombre N de points choisis pour la méthode des différences finies sur la précision des résultats obtenus.

Nous pouvons montrer que déjà pour $N = 10^5$ la précision relative est d'au moins 10^{-6} , soit une précision de l'ordre de $10^{-7} - 10^{-8} E_r$, c'est-à-dire la limite de la précision de l'expérience FORCA-G qui est de $10^{-8} E_r$ (nous verrons par la suite qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une précision supérieure car l'incertitude sur le potentiel de Casimir-Polder II.4.3 est plus grande). Afin que les valeurs propres convergent plus rapidement et nos résultats soient plus précis pour un plus petit N , nous choisissons l'approximation à l'ordre supérieur de la dérivée seconde

$$\frac{d^2 f}{dz^2}(z) = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{-f(z + 2\delta z) + 16f(z + \delta z) + 16f(z - \delta z) - f(z - 2\delta z) - 30f(z)}{12\delta z^2}.$$

Malheureusement lorsque nous voulons calculer les niveaux d'énergie en présence du potentiel $V(z)$, la valeur des premiers niveaux d'énergie ne converge pas suffisamment rapidement et pour $N = 10^7$, la précision relative n'est que de 10^{-2} (ce qui n'est pas suffisant pour étudier l'effet Casimir-Polder qui est ici de l'ordre de $10^{-4} E_r$). Le problème est que le potentiel de Lennard-Jones est défini pour des distances de $[0,1]$ nm. Le choix d'avoir un pas de discrétisation constant fait que nous n'avons pas assez de points près de la surface pour caractériser avec précision le potentiel. Nous décidons ainsi d'utiliser une échelle logarithmique afin de concentrer un nombre plus important de points près de la surface et de garder un pas linéaire loin de la surface. Nous avons alors

$$\rho = z + \ln z,$$

ρ correspondant à la nouvelle variable de l'échelle logarithmique. La dérivée seconde de la fonction se réécrit

$$\frac{d^2 f}{dz^2}(z) = \left(\frac{d^2 \rho}{dz^2}\right) \frac{df}{d\rho} + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 \frac{d^2 f}{d\rho^2}.$$

ρ est la nouvelle variable à discrétiser. L'utilisation de l'échelle logarithmique permet d'avoir des valeurs de E_n qui sont très stables pour tout n avec une précision relative inférieure à 10^{-6} , sauf pour $n = 1$ qui a une précision relative de seulement 10^{-4} pour $N = 10^5$ (N correspond à présent aux nombres de points pour la nouvelle variable ρ).

b Influence du paramètre z_{min} du potentiel de Lennard-Jones

Le potentiel de Lennard-Jones que nous avons introduit, sert à modéliser l'interaction à très courte distance entre l'atome et la surface de silice constituant la première couche du miroir. Nous savons que pour ce type d'interaction la position z_{min} du potentiel est de l'ordre de quelques ångströms. Dans [52], un calcul de l'interaction entre une surface de silice et un atome de rubidium adsorbé sur cette surface donne $z_{min} = 2,3$ Å qui correspond au rayon de covalence de l'atome et une énergie de liaison de 0.35 eV. Or par notre méthode de recollement des deux potentiels de Lennard-Jones et de Casimir-Polder, pour $z_{min} = 2.3$ Å, nous trouvons seulement $V_{LJ}^0 = 7,7$ meV. Comme nous l'avions déjà noté dans III.2.3, l'impossibilité de recoller le potentiel de Casimir-Polder et de Lennard-Jones signifie que le potentiel de Lennard-Jones ne correspond pas à l'interaction réelle à ces distances. À défaut d'étudier les interactions réelles mises en jeu à ces distances entre l'atome et la surface de silice, nous nous contenterons du modèle introduit et étudierons l'influence du paramètre z_{min} dans un intervalle autour de la valeur calculée par [52]. Nous choisissons de varier z_{min} sur un intervalle entre 2,2 Å et 2,6 Å. Nous avons gardé les mêmes paramètres que précédemment : $N = 10^4$ et $L = 40$ qui nous permettent d'avoir une précision relative de 10^{-6} .

Le potentiel de Lennard-Jones donne un nombre fini d'états liés dans le puits. Ces états représentent les états vibrationnels d'un atome lié à la surface, indexés par un nombre quantique v . Comme nous ne connaissons pas le nombre d'états liés dans le puits du potentiel à cause de l'incertitude sur la profondeur, nous les indexons de $v = -1$ pour le premier niveau d'énergie le moins lié, puis $v = -2$ pour le second, etc.

Sur la figure III.21, nous représentons les vingt-huit premiers niveaux d'énergie. Décrivons la figure que nous avons. D'abord, nous observons un motif pseudo-périodique. Pour chaque période, le niveau d'énergie E_1 croît lorsque z_{min} croît. Lorsque le niveau d'énergie E_1 atteint une valeur proche de celle de l'état $n = 7$, cet état E_1 se transforme progressivement en l'état $n = 7$ (l'indexation des états se fait en comparant la forme des fonctions d'ondes à celle des états Wannier-Stark $\psi_{0,n}(z)$ modifiés par le potentiel infini en $z = 0$), l'état $n = 7$ en l'état $n = 6, \dots$, et l'état $n = 2$ s'échappe du puits dans lequel il est piégé. En réalité les sept premiers niveaux d'énergie sont fortement liés au puits du potentiel Lennard-Jones. De bas en haut nous trouvons les autres niveaux d'énergie E_{28} à E_8 qui sont extrêmement stables et ne dépendent quasiment pas de z_{min} .

D'après (III.2.3), lorsque z_{min} croît la profondeur V_{LJ}^0 du puits du potentiel de Lennard-Jones décroît, ainsi les états liés dans le puits Lennard-Jones ainsi que l'état

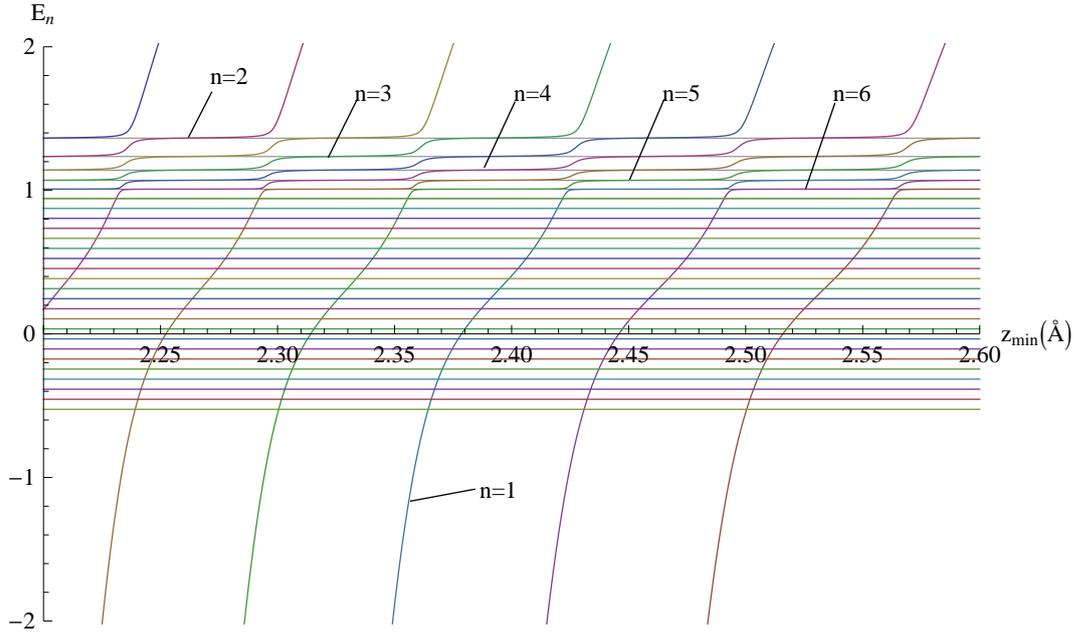


FIGURE III.21 – Les vingt-huit premiers niveaux d'énergies en fonction de z_{min} exprimés en E_r

E_1 , que nous pouvons considérer comme l'énergie $v = -1$, croissent. Les états dans les puits du réseau pour $n > 7$ ne sont pas, ou extrêmement peu influencés par le potentiel de Lennard-Jones, ces états ne sont pas liés à la surface. À l'inverse les états de $n = 1$ à $n = 7$ sont fortement liés à la surface et dépendent de la profondeur du puits V_{LJ}^0 , les états Wannier-Stark modifiés par le potentiel infini en $z = 0$ (en l'absence du potentiel $V(z)$) étant étalés sur cinq à six puits de chaque côté du puits central n . Comme nous l'avons déjà observé lorsque l'état E_1 atteint le niveau d'énergie de l'état $n = 7$, les différents niveaux d'énergie montent et l'état se transforme dans l'état suivant $n - 1$ jusqu'à l'état $n = 2$ qui se trouve alors à la limite de l'énergie de dissociation d'un puits effectif englobant le premier puits et le puits Lennard-Jones; l'état $n = 2$ sort du puits. Quant à l'état $n = 1$ se transformant en l'état $n = 7$, le nouvel état $n = 1$ correspond à l'ancien état $v = -2$ du puits Lennard-Jones, états du puits Lennard-Jones qui sortent également progressivement de ce puits lorsque V_{LJ}^0 diminue.

En réalité nous retrouvons le même type de comportement que pour un potentiel de Lennard-Jones simple où lorsque l'état $v = -1$ atteint la limite de l'énergie de dissociation, cet état sort du puits; par contre ici le puits effectif englobe le puits Lennard-Jones et le premier puits du réseau incluant alors les 7 premiers états des puits du réseau dans ceux liés à la surface.

L'expérience FORCA-G mesure les niveaux d'énergie des atomes dans le piège optique par interférométrie atomique (voir schéma de l'interféromètre papillon I.4). Ainsi le déphasage mesuré est proportionnel à $E_{n+1} - E_{n-1}$. Nous avons représenté sur la figure III.22 la différence $E_{n+1} - E_{n-1}$ pour $n = 8$ à $n = 11$. Comme nous pouvons l'observer, l'effet du paramètre z_{min} devient négligeable à partir du niveau d'énergie

$n = 10$ où l'incertitude relative est inférieure à 10^{-6} . Étant donné que l'expérience FORCA-G souhaite réaliser des mesures précises pour des faibles distances au miroir, c'est-à-dire pour les premiers puits, il est nécessaire de pouvoir déterminer z_{min} .

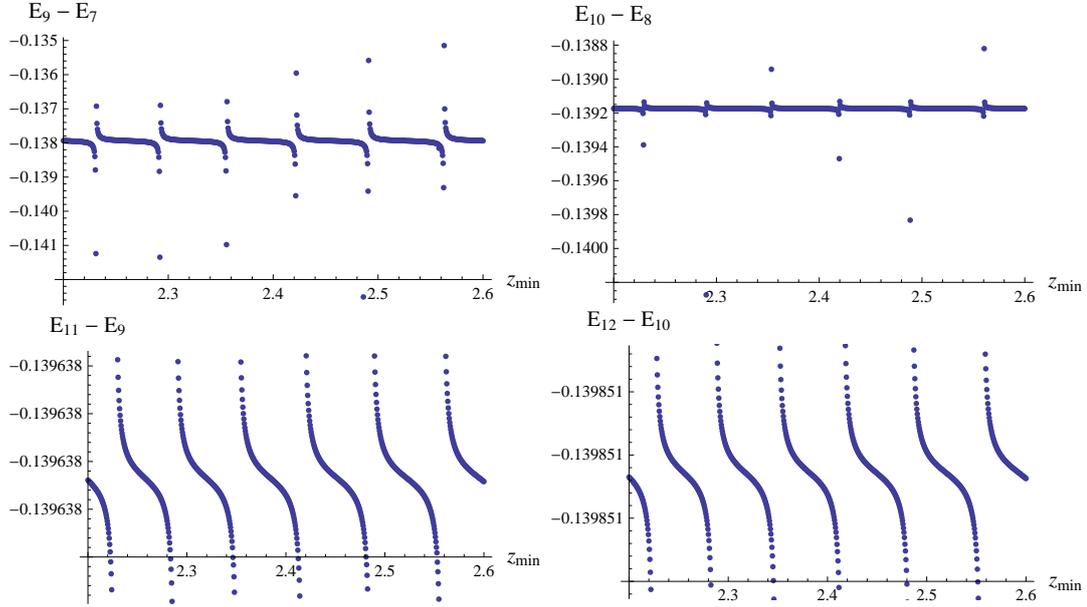


FIGURE III.22 – Différences $E_{n+1} - E_{n-1}$ exprimées en E_r en fonction de z_{min} pour de haut en bas et de gauche à droite $n = 8$, $n = 9$, $n = 10$ et $n = 11$.

c Détermination du paramètre z_{min}

À ce stade, nous pourrions finalement considérer le paramètre z_{min} comme négligeable étant donné que nous obtenons les énergies E_n avec une précision de l'ordre de 1 % à partir du 7^e. Cependant l'expérience FORCA-G réalise une mesure interférométrique, donc des différences d'énergie $E_{n+1} - E_{n-1}$ sont mesurées. Dans ce cas, comme nous avons pu le voir sur la figure III.22, l'impact du paramètre z_{min} n'est plus négligeable.

Pour un ensemble donné de niveaux d'énergie E_n , nous avons un ensemble de valeur de z_{min} possibles. Pour chacun de ces z_{min} , nous obtenons le même spectre en énergie et les mêmes fonctions à une petite différence près. Comme nous l'avons rappelé, cette pseudo-périodicité en fonction de z_{min} est liée au nombre d'états liés dans le puits Lennard-Jones. Ainsi pour un ensemble de z_{min} qui donne le même spectre en énergie, chaque z_{min} est lié à une profondeur du puits Lennard-Jones différente, à un nombre de niveaux d'énergie dans ce puits différent et donc les fonctions d'onde ne sont pas identiques près du minimum du potentiel de Lennard-Jones. Ces fonctions d'onde ont quelques oscillations de plus ou de moins, nombre d'oscillations lié également au nombre de niveaux d'énergie (le $v^{\text{ième}}$ niveau d'énergie, en comptant à partir du fond du puits, a v oscillations dans sa fonction d'onde).

Nous pouvons observer ce comportement sur la figure III.23. Nous avons calculé la

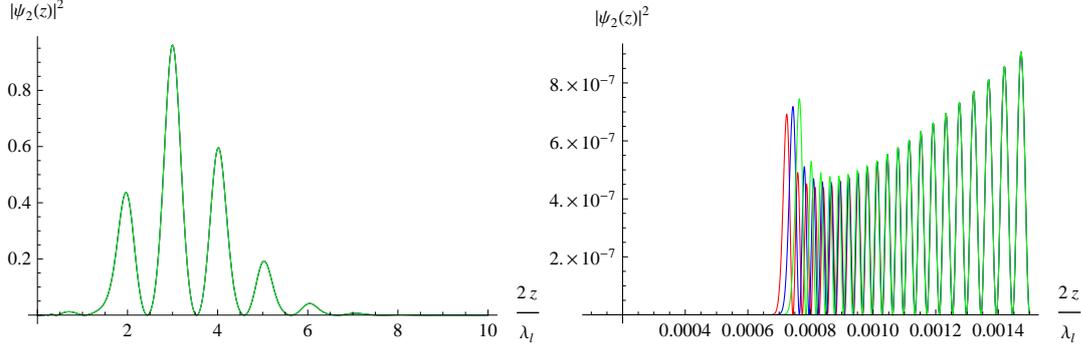


FIGURE III.23 – Fonction d’onde $|\psi_2(z)|^2$ dans le cas où $E_2 = 1,36388 E_r$ pour $z_{min} = 2,2 \text{ \AA}$ en rouge, $z_{min} = 2,25971 \text{ \AA}$ en bleu et $z_{min} = 2,32189 \text{ \AA}$ en vert.

fonction $\psi_2(z)$ dans le cas où $E_2 = 1,36388$ pour trois valeurs de z_{min} différentes. Sur le graphique de gauche nous pouvons voir que les trois fonctions d’onde sont identiques. Sur le graphique de droite, nous pouvons voir que pour des distances inférieures au nanomètre, les trois fonctions d’onde diffèrent près du minimum du Lennard-Jones car la position et la profondeur de ce minimum sont différentes. Pour $z_{min} = 2,2 \text{ \AA}$ il y a v oscillations dans le premier puits du réseau optique, pour $z_{min} = 2,25971 \text{ \AA}$, il y a $v - 1$ oscillations et pour $z_{min} = 2,32189 \text{ \AA}$, $v - 2$ oscillations. Néanmoins les trois fonctions deviennent rapidement identiques.

À défaut de pouvoir déterminer le paramètre z_{min} de manière unique, nous pouvons associer à un spectre expérimental donné un ensemble de z_{min} possibles.

d Explication de l’effet du paramètre z_{min} par un modèle simple

Nous allons dans ce paragraphe modéliser le potentiel de Lennard-Jones par un puits carré d’une profondeur $V_0(z_{min})$ de largeur a et une barrière infinie pour le miroir en $z = 0$. (voir figure III.24). L’équation de Schrödinger s’écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2}(z) + V(z)\psi(z) = E\psi(z).$$

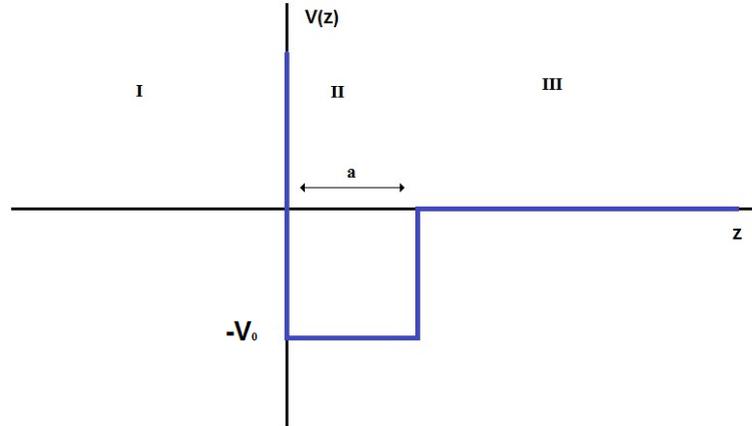
Nous pouvons définir trois zones I, II et III pour résoudre l’équation de Schrödinger. Dans la zone I, le potentiel $V(z)$ est infini donc $\psi_I(z) = 0$. Dans la zone III, l’équation s’écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_{III}}{dz^2}(z) = E\psi_{III}(z).$$

Nous posons $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ et la solution est $\psi_{III}(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$. Comme la fonction ne doit pas diverger à l’infini, $\psi_{III}(z) = Be^{-kz}$. Dans la zone II, l’équation s’écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_{III}}{dz^2}(z) = (E + V_0)\psi_{III}(z).$$

Nous posons $E + V_0 = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$ soit $\frac{2mV_0}{\hbar^2} = K^2 + k^2$. La solution de l’équation s’écrit alors $\psi_{II}(z) = \alpha e^{iKz} + \beta e^{-iKz}$. La continuité entre la zone I et II donne $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$

FIGURE III.24 – Schéma du potentiel simplifié choisi $V(z)$.

donc $\psi_{II} = 2i\alpha \sin(Kz)$. La continuité entre la zone II et III donne

$$\begin{cases} 2i\alpha \sin(aK) = Be^{-ka} \\ 2i\alpha \cos(aK) = Bke^{-ka} \end{cases}$$

ce qui donne comme équation pour déterminer K_n ,

$$\tan(aK) = \frac{K}{\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} - K^2}}. \quad (\text{III.3.3})$$

Nous pouvons voir sur la figure III.25 la résolution graphique de l'équation (III.3.3). La fonction tangente définie une période de $\frac{\pi}{a}$. Le second membre de l'équation possède une divergence pour $K = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$, quand la profondeur du potentiel diminue son asymptote se déplace vers la gauche, quand cette asymptote croise une asymptote de la fonction $\tan(aK)$, il y a une intersection de moins entre les deux courbes donc le puits perd un niveau d'énergie $E_n = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} - V_0$. Nous pouvons également remarquer que lorsque la profondeur du puits diminue, le déplacement de l'asymptote a pour conséquence d'augmenter la pente de la courbe. Comme la fonction tangente est croissante les intersections entre les deux courbes se font pour des K_n plus grands. Ce comportement explique le déplacement progressif des niveaux d'énergie vers le haut du puits de potentiel lorsque V_0 diminue.

Notre objectif est d'estimer la période de z_{min} que nous avons mise en évidence dans notre calcul précédent. Comme nous l'avons montré par l'aide de ce modèle simple de puits carré, cette période est définie par le déplacement de l'asymptote d'une période $\frac{\pi}{a}$. Ainsi la période $\lambda_{z_{min}} = |z_{min} - z'_{min}|$ est définie par

$$\Delta V_{LJ}^0 = \left| \sqrt{\frac{2mV_{LJ}^0(z_{min})}{\hbar^2}} - \sqrt{\frac{2mV_{LJ}^0(z'_{min})}{\hbar^2}} \right| = \frac{\pi}{a}, \quad (\text{III.3.4})$$

où z_{min} et z'_{min} correspondent à deux paramètres qui donnent le même spectre en énergie et qui sont consécutifs.

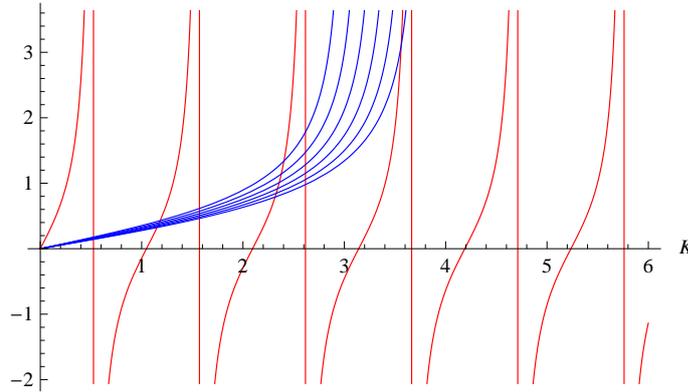


FIGURE III.25 – En rouge la fonction $\tan(aK)$ pour $a = 3$ et en bleu $\frac{K}{\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} - K^2}}$ pour différentes profondeurs V_0 : $\frac{2mV_0}{\hbar^2} = 9,10,11,12,13,14$.

La principale difficulté de ce modèle simplifié est l'identification du paramètre a pour le vrai potentiel $V(z)$. Nous choisissons de définir le paramètre a comme la distance entre le point z_1 et z_2 représenté sur la figure III.26. Le point z_1 est la position où $V_{LJ}(z_1) = 0$ et le point z_2 est l'intersection avec l'axe des abscisses de la tangente au potentiel Lennard-Jones dont la pente est maximale. Dans ce cas nous trouvons que $a = 3,6$ Å. Pour déterminer une période, nous choisissons $z_{min} = 2,2$ Å et le premier z'_{min} suivant qui donne le même spectre est $z'_{min} = 2,25971$ Å (voir figure III.21 et paragraphe c) ; ce qui nous donne $\sqrt{\frac{2mV_{LJ}^0(z_{min})}{\hbar^2}} - \sqrt{\frac{2mV_{LJ}^0(z'_{min})}{\hbar^2}} = 1,0 \cdot 10^{10}$, soit $a = 3,1$ Å. Ainsi nous avons montré que ce modèle de puits carré extrêmement simple permet d'estimer grossièrement la période $\lambda_{z_{min}}$ et explique mathématiquement l'origine de cette périodicité.

En fait nous retrouvons un résultat connu sur les phases accumulées [57]. Soit un

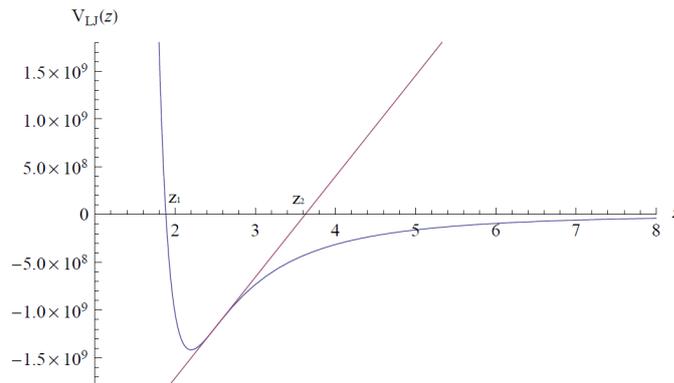


FIGURE III.26 – Potentiel de Lennard-Jones avec $z_{min} = 2,2$ Å exprimé en E_r et tangente du potentiel au point où elle est maximale.

potentiel $V(z)$ quelconque et l'opérateur \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) - E$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps de solution $\psi(z)$ est $\mathcal{L}\psi(z) = 0$. Pour résoudre cette équation nous pouvons écrire la solution sous la forme suivante :

$$\psi(z) = \alpha(z)e^{i\phi(z)}$$

avec l'amplitude $\alpha(z)$ et la phase $\phi(z)$. L'équation de Schrödinger donne alors deux équations :

$$\mathcal{L}\alpha(z) = \alpha^{-3}(z),$$

$$\phi'(z) = \alpha^{-2}(z).$$

Cette seconde équation donne directement la solution suivante pour la phase

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^z \alpha^{-2}(z) dz$$

Nous considérons le cas d'un potentiel $V(z)$ ayant des états liés E et avec seulement deux points tournants z_1 et z_2 définis par $V(z_{1,2}) = E$. Dans ce cas l'opérateur \mathcal{L} dépend de l'énergie E et la condition pour avoir un état lié est

$$\phi(\infty) = n\pi$$

avec n un entier. Les états liés E_n sont ceux dont la phase accumulée $\phi(\infty)$ est un multiple de π .

À présent, si nous nous plaçons dans l'approximation WKB [58], nous définissons une phase $\phi_{WKB}(z)$, définie dans la région $z_1 < z < z_2$, par l'expression

$$\phi_{WKB}(z) = \int_{z_1}^z \sqrt{\frac{2m(E - V(z))}{\hbar^2}} dz,$$

La figure III.27 montre les deux fonctions $\alpha^{-2}(z)$ et $\sqrt{2m(E - V(z))/\hbar^2}$ pour un potentiel d'un oscillateur harmonique $V(z) = \frac{1}{2}mz^2$. Loin des points tournants z_1 et z_2 , l'approximation WKB est valide et les deux fonctions coïncident. Près des points tournants, l'approximation n'est plus valide.

Dans notre cas très simple de puits carré, l'approximation WKB donne un résultat exact. Nous avons $V(z) = -V_0^1$, $z_1 - z_2 = a$ et nous considérons l'énergie limite $E = 0$ qui est le dernier état lié possible pour le V_0^1 choisi dans le puits. Quand nous cherchons la période de z_{min} , dans cet exemple, cela revient à chercher un autre V_0^2 qui donne $E = 0$ comme étant un état lié dans le puits. Alors pour ces deux V_0^1 et V_0^2 , la relation $\phi_{WKB}(z_2) = n\pi$ est vérifiée donc $\phi_{WKB}^1(a) - \phi_{WKB}^2(a) = \sqrt{\frac{2mV_0^1}{\hbar^2}}a - \sqrt{\frac{2mV_0^2}{\hbar^2}}a = n\pi$ qui correspond à la condition (III.3.4) où $n = 1$.

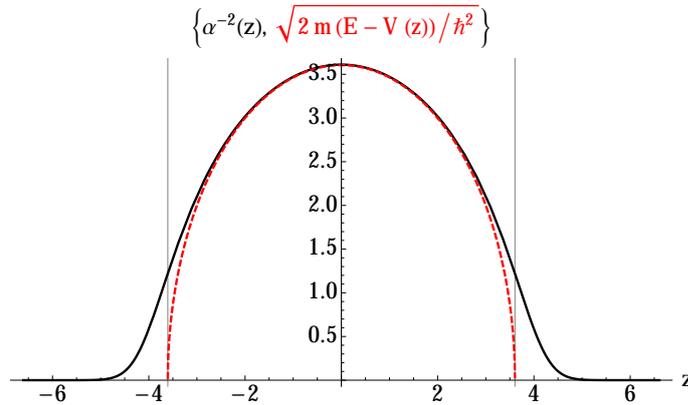


FIGURE III.27 – Les fonctions $\alpha^{-2}(z)$ et $\sqrt{2m(E - V(z))/\hbar^2}$ respectivement en noir et en rouge calculées pour un potentiel harmonique. Les deux lignes verticales correspondent aux points tournants.

e Influence de la position du recollement entre les deux potentiels Lennard-Jones et Casimir-Polder

Nous proposons ici de regarder l'influence de la position du recollement z_s entre le potentiel Lennard-Jones et le potentiel Casimir-Polder sur les niveaux d'énergies (III.2.2). Jusqu'à présent nous avons fixé arbitrairement la position de ce recollement à une distance au miroir de 1 nm. Comme nous l'avons déjà mentionné le potentiel de Casimir-Polder ne devient plus pertinent lorsque l'atome commence à voir la structure du miroir, mais il n'y a aucune raison de privilégier 1 nm plutôt que 5 nm. Nous avons choisi pour ce calcul de fixer le minimum du potentiel de Lennard-Jones à $z_{min} = 2,4 \text{ \AA}$, et d'étudier la dépendance à z_s sur un intervalle compris entre 5 \AA et 5 nm.

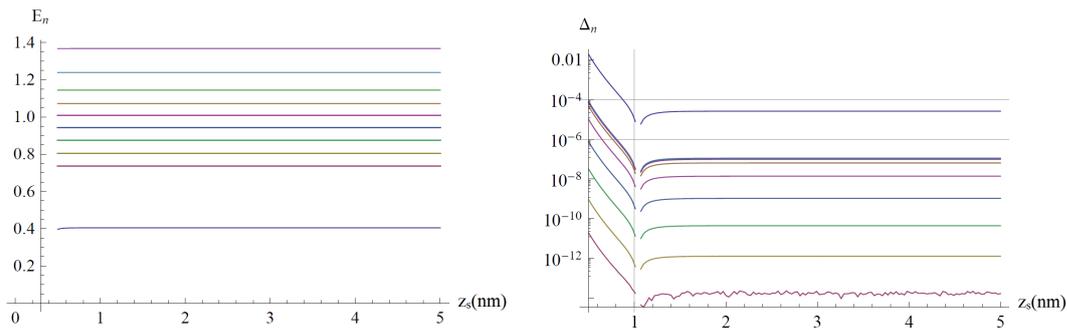


FIGURE III.28 – À gauche, les neuf premiers niveaux d'énergies exprimés en E_r en fonction de z_s , avec de haut en bas E_n pour $n = 2$ à $n = 10$. La plus basse énergie correspond à E_1 . Les énergies sont exprimées en énergie de recule E_r . À droite les écarts relatifs de $E_n(z_s)$ par rapport à $E_n(z_s = 1)$ avec de haut en bas E_n pour $n = 1$ à $n = 10$.

Sur la figure III.28, nous pouvons voir la dépendance des premiers niveaux d'énergie

en fonction de z_s . Il apparaît que les niveaux d'énergie ne sont pas affectés par ce paramètre entre 8 et 5 Å, seul E_1 est fortement dépendant de z_s pour des valeurs inférieures à 8 Å. Sur le deuxième graphique de droite de la figure III.28, nous avons calculé en fonction de z_s l'écart relatif par rapport à $E_n(z_s = 1 \text{ nm})$. Mis à part E_1 , pour $z_s > 1 \text{ nm}$, les niveaux d'énergie ne sont pas ou peu dépendants du paramètre de recollement, avec des écarts relatifs inférieurs à 10^{-6} . Même pour $z_s = 0,5 \text{ nm}$, l'écart relatif entre $E_n(0,5)$ et $E_n(1)$ est inférieur à 10^{-4} ; néanmoins le cas $z_s = 0,5$ est un cas limite car z_s est proche de la position de z_{min} . Ce potentiel de Lennard-Jones a été construit afin de le raccorder au potentiel de Casimir-Polder : autour du raccord des deux potentiels, le potentiel $V(z)$ (III.2.2) doit se comporter en $1/z^3$. Ceci nous permet de définir comme condition :

$$\left(\frac{z_{min}}{z_s}\right)^{12} / \left(\frac{z_{min}}{z_s}\right)^3 \ll 1,$$

la partie en $1/z^{12}$ du potentiel de Lennard-Jones doit être négligeable au niveau du raccord des potentiels devant la partie en $1/z^3$. Ainsi pour $z_s = 1 \text{ nm}$, il y a 6 ordres de différence entre la partie en $1/z^{12}$ et en $1/z^3$ alors que pour $z_s = 5 \text{ Å}$, il n'y a déjà plus que 3 ordres de différence, d'où un plus grand écart relatif pour le niveau d'énergie E_1 qui est quasiment un état lié du Lennard-Jones, les autres niveaux d'énergie restent encore peu influencés par z_s avec un écart relatif inférieur à 10^{-4} .

La variation du paramètre z_s entre 0,8 nm et 5 nm est totalement négligeable sur les niveaux d'énergie en regard à la précision visée par l'expérience. Seul E_1 dépend significativement du paramètre z_s , mais l'expérience FORCA-G n'envisage pas de porter des atomes dans ce puits car cet état sera instable et les atomes tendront à se coller sur la surface.

f Incertitudes sur les niveaux d'énergie des atomes piégés

Nous avons déterminé comment l'incertitude sur les épaisseurs des couches du miroir et sur la permittivité du Ta_2O_5 se répercutait sur le potentiel de Casimir-Polder II.4.3. Nous pouvons calculer l'incertitude sur les niveaux d'énergie des atomes dans le réseau optique.

Nous connaissons l'incertitude $\sigma_{CP}(z)$ en fonction de la distance de l'atome au miroir. Pour chaque mesure des niveaux d'énergie de l'atome, nous tirons avec la probabilité $P(x,z)$ la valeur x du potentiel de Casimir-Polder à la position z , où la fonction P est définie par :

$$P(x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{CP}(z)} e^{-\frac{(x-V_{CP}(z))^2}{2\sigma_{CP}(z)^2}}$$

Nous obtenons ainsi de manière aléatoire le potentiel de Casimir-Polder en fonction de z pour des positions discrètes. Pour chaque tirage du potentiel de Casimir-Polder, nous calculons les niveaux d'énergie de l'atome dans les puits du réseau par la méthode développée dans les paragraphes précédents. Après un nombre suffisamment important de tirages, nous pouvons calculer la valeur moyenne des niveaux d'énergie pour chaque puits et l'incertitude associée.

n	$\langle E_n \rangle$ en E_r	σ_{E_n} en E_r	n	$\langle E_n \rangle$ en E_r	σ_{E_n} en E_r
2	1.36545	$9.4 \cdot 10^{-5}$	11	0.665471	$2.0 \cdot 10^{-6}$
3	1.23697	$8.9 \cdot 10^{-5}$	12	0.595509	$1.3 \cdot 10^{-6}$
4	1.14242	$8.0 \cdot 10^{-5}$	13	0.525509	$9 \cdot 10^{-7}$
5	1.07082	$5.4 \cdot 10^{-5}$	14	0.455485	$10 \cdot 10^{-7}$
6	1.00870	$1.5 \cdot 10^{-5}$	15	0.385446	$7 \cdot 10^{-7}$
7	0.943052	$5.6 \cdot 10^{-6}$	16	0.315398	$7 \cdot 10^{-7}$
8	0.874535	$3.1 \cdot 10^{-6}$	17	0.245343	$6 \cdot 10^{-7}$
9	0.805109	$1.3 \cdot 10^{-6}$	18	0.175284	$5 \cdot 10^{-7}$
10	0.735360	$1.9 \cdot 10^{-6}$	19	0.105221	$5 \cdot 10^{-7}$
			20	0.0351563	$4.5 \cdot 10^{-7}$

Table III.4 – Valeur moyenne des niveaux d'énergie des 20 premiers puits calculée à partir de 10 tirages et écart-type associé aux niveaux d'énergie exprimés en terme de l'énergie de recul E_r .

Nous réalisons ce calcul à une température $T = 295$ K, pour des puits d'une profondeur de $U_0 = 3 E_r$. Nous avons choisi comme paramètre pour le potentiel Lennard-Jones $z_{min} = 4.1$ Å. Le calcul des niveaux d'énergie s'effectue sur une grille de points (logarithmique) avec $N = 10^5$ points et la taille de la boîte a été fixée à environ $L = 30$ puits. Avec ces paramètres la précision relative de la méthode numérique sera de 10^{-6} (excepté pour le premier niveau E_1). Nous obtenons les résultats suivants pour 10 mesures, résumées dans le tableau III.4. Nous pouvons constater à partir des résultats du tableau que l'incertitude due à l'épaisseur des couches du miroir et de la permittivité du Ta_2O_5 est inférieure à l'incertitude due à la méthode numérique utilisée, alors que nous n'avons réalisé seulement que 10 mesures. Ainsi l'incertitude sur la connaissance des caractéristiques du miroir ne sera pas un facteur limitant pour la détermination des niveaux d'énergie E_n des atomes dans les puits. Évidemment si nous choisissons une grille de points plus dense pour faire notre calcul, par exemple $N = 10^7$, l'incertitude sur les paramètres du miroir deviendra significative.

L'évolution de σ_{E_n} montre que l'incertitude sur les niveaux d'énergie des atomes proches du miroir est décroissante en fonction des n croissants (voir figure III.29). Cette observation semble en contradiction avec l'évolution de l'incertitude $\sigma_{CP}(z)$ qui est croissante pour les z croissants (le potentiel est plus sensible aux variations d'épaisseur des couches II.3.3). Si l'atome est loin du miroir, le potentiel de Casimir-Polder devient négligeable devant le potentiel optique du réseau et le potentiel de pesanteur, ainsi l'incertitude de Casimir-Polder aura un faible impact ; finalement, à ces distances, le potentiel de Casimir-Polder devient quasiment négligeable et nous retrouvons les états de Wannier-Stark.

Si l'atome est piégé près du miroir, le potentiel de Casimir-Polder et le potentiel de Lennard-Jones sont dominants devant le potentiel optique. L'incertitude est très faible pour le potentiel de Casimir-Polder (l'atome ne voit que la première couche du miroir), mais du fait de la construction du potentiel de Lennard-Jones (cf. III.2.3), une petite variation du potentiel de Casimir-Polder impacte significativement la valeur de V_{LJ}^0 pour un z_{min} fixé. Comme les niveaux d'énergie des atomes piégés dans les premiers

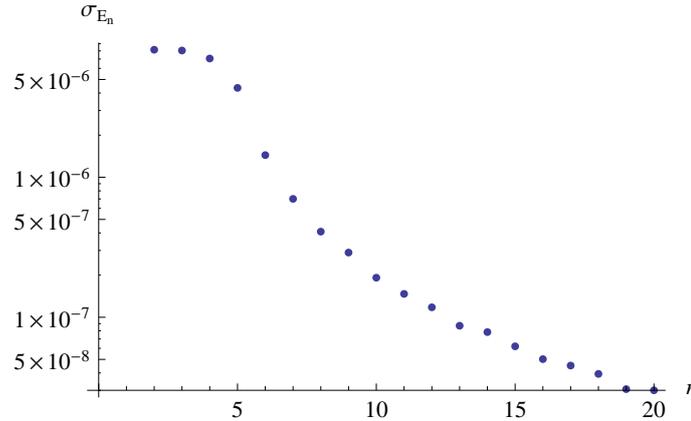


FIGURE III.29 – Incertitude σ_{E_n} exprimée en E_r sur la valeur moyenne $\langle E_n \rangle$ pour 100 mesures.

puits sont très sensibles aux paramètres V_{LJ}^0 , ils sont plus sensibles à l'incertitude sur le potentiel de Casimir-Polder. En réalité cette sensibilité des niveaux d'énergie E_n à courte distance est essentiellement un artefact de la méthode de calcul.

Sur la figure III.29, nous avons réalisé les mêmes calculs mais pour 100 tirages. Nous pouvons voir que nous obtenons une excellente précision. Ainsi l'incertitude sur la détermination du potentiel de Casimir-Polder ne sera pas un facteur limitant pour le calcul des niveaux d'énergie des atomes, le facteur limitant reste la précision de la méthode de calcul.

g Influence de la température sur les niveaux d'énergie

L'expérience se fait à température ambiante. La température de la salle d'expérience n'est pas régulée avec précision, nous devons donc considérer des écarts possibles de quelques degrés Celsius. Or comme nous l'avons déjà montré II.4.1, la température a un effet significatif sur la valeur du potentiel de Casimir-Polder avec une différence de l'ordre du pour-cent pour un écart de 2 K aux distances considérées qui sont de l'ordre du micro-mètre. Dans ce paragraphe, nous regardons comment cette dépendance se répercute sur les niveaux d'énergie de l'atome et si elle peut être observable, comparée aux autres sources d'incertitude.

Nous gardons les paramètres suivants : $N = 10^4$, $L = 40$ et $z_{min} = 2.3 \text{ \AA}$. Nous avons calculé les premiers niveaux d'énergie $E_n(T)$ pour quatre températures différentes : $T = 290 \text{ K}$, $T = 292,5 \text{ K}$, $T = 295 \text{ K}$ et $T = 297,5 \text{ K}$. Comme nous le voyons sur la figure III.30, la température semble avoir un effet négligeable hormis pour les premiers niveaux d'énergie. L'effet qui peut paraître significatif pour les premiers puits est une fois encore un artefact de calcul dû à la méthode de construction du potentiel : un faible effet de la température à courte distance sur le potentiel de Casimir-Polder joue énormément sur la valeur de V_{LJ}^0 lors du recollement, et par conséquent influe fortement sur E_n pour $n = 1$ à $n = 6$.

Les écarts entre les niveaux d'énergie E_n calculés à deux températures différentes

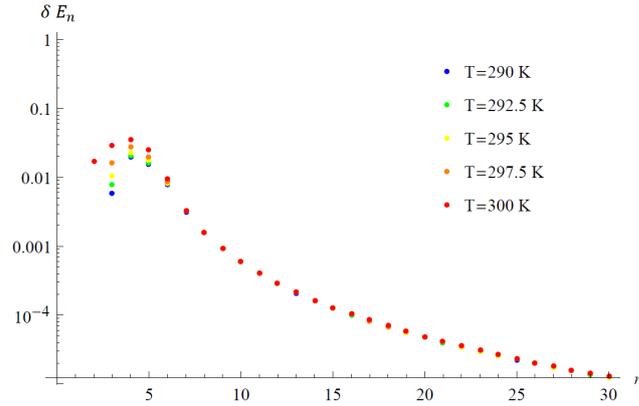


FIGURE III.30 – Corrections δE_n exprimées en E_r pour différentes températures : $T = 300$ K en rouge, $T = 297,5$ K en orange, $T = 295$ K en jaune, $T = 292,5$ K en vert et $T = 290$ K en bleu.

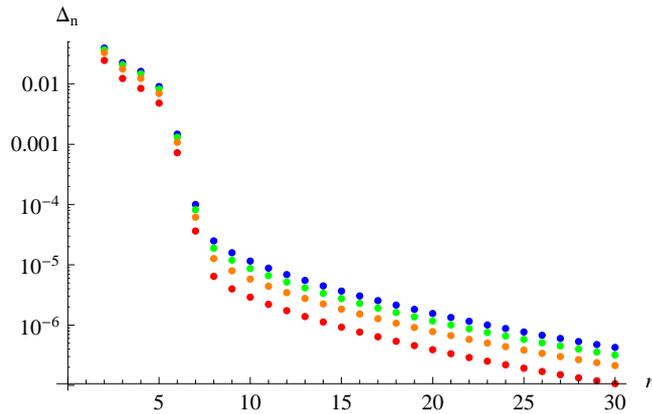


FIGURE III.31 – Écarts exprimés en E_r entre les niveaux d'énergie E_n calculés à $T = 300$ K et : en bleu les niveaux d'énergie E_n calculés à $T = 290$ K, en vert $T = 292,5$ K, en orange $T = 295$ K et en rouge $T = 297,5$ K.

(voir figure III.31) sont compris entre 10^{-5} et 10^{-6} . Cet écart est supérieur à la précision que nous pouvons avoir avec cette méthode numérique pour un nombre N raisonnable, il est donc pertinent de le prendre en compte dans notre calcul. L'effet de la température est également supérieur à la sensibilité que désire atteindre l'expérience qui est de 10^{-4} Hz, soit environ $10^{-8} E_r$. La température précise de la salle d'expérience doit donc être prise en compte lors des mesures des niveaux d'énergie, car une différence de 2 K implique un écart d'environ $10^{-6} E_r$ sur les niveaux d'énergie E_n . Cet effet significatif de la température à l'équilibre thermique en comparaison de la précision visée par l'expérience permet d'envisager également une mise en évidence de cette dépendance thermique de l'effet Casimir-Polder.

III.4 Méthode perturbative et puits du réseau optique

Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous revenons sur l'utilisation du traitement perturbatif et montrons qu'il peut être utilisé pour des puits plus proches de la surface dans le cas d'un réseau plus profond.

III.4.1 Profondeur des puits et étalement des fonctions d'onde

L'un des objectifs de l'expérience FORCA-G est de réaliser une mesure de l'effet Casimir-Polder à courte distance, c'est-à-dire pour les premiers puits du réseau $n = 4$ ou $n = 5$. Nous avons montré, que pour les vingt premiers puits du réseau, l'utilisation de la méthode perturbative était inadaptée. Nous avons alors développé une méthode non-perturbative numérique afin de traiter ce problème, or cette méthode de calcul ne permet pas d'écrire les niveaux d'énergie des atomes sous la forme de (III.3.1) car $V(z)$, le potentiel Casimir-Polder prolongé par le potentiel Lennard-Jones (III.2.2), ne peut pas être considéré comme une perturbation comparée au reste du potentiel. L'impossibilité d'utiliser la méthode perturbative, même pour des puits aussi éloignés que $n = 10$, est due à l'étalement des fonctions d'onde Wannier-Stark modifiées sur plusieurs puits. Si nous voulons pouvoir écrire les niveaux d'énergie sous la forme de l'équation (III.3.1), afin de pouvoir obtenir une sorte d'effet Casimir-Polder moyen exercé à la position $z = n\frac{\lambda}{2}$, il nous faut pouvoir appliquer la méthode perturbative. Le seul paramètre sur lequel nous pouvons agir pour contrôler l'étalement de la fonction d'onde des atomes piégés, est la profondeur des puits V_0 du réseau. Nous pouvons voir clairement sur la figure III.33 que plus les puits du réseau sont profonds, plus la fonction d'onde $\psi_n^2(z)$ est localisée autour du puits n . La méthode perturbative serait ainsi applicable pour des atomes plus proches de la surface. Comme la correction des niveaux d'énergie due à l'effet Casimir-Polder s'écrit :

$$\Delta E_n = \int |\psi_{0,n}(z)|^2 V(z) dz$$

plus la fonction d'onde est localisée, plus ΔE_n coïncide avec la valeur du potentiel Casimir-Polder au centre du puits n .

Jusqu'à présent pour nos calculs, nous avons utilisé $V_0 = 3 E_r$ qui est la profondeur envisagée pour l'expérience FORCA-G. Il nous faut cependant garder à l'esprit que cette profondeur pour le réseau a été choisie pour maximiser, lors de la mesure interférométrique, les transitions du type $n \rightarrow n \pm 1$ (n est le numéro du puits), et pour minimiser les transitions supérieures [2, 59, 60]. Néanmoins nous pouvons voir sur la figure 4 de [59] et la figure 2.7 de [4] qu'il est peut être possible de trouver un autre maximum pour les transitions du type $n \rightarrow n \pm 1$ pour $V_0 \approx 7 E_r$ qui permettrait de minimiser également les transitions du type $n \rightarrow n$, $n \rightarrow n \pm 2$ et $n \rightarrow n \pm 3$. D'autre part, l'expérience peut être réalisée avec des transitions $n \rightarrow n \pm 4 - 5$, ce qui permet d'envisager des profondeurs de puits plus importantes et plus favorables à des mesures de Casimir-Polder.

III.4.2 Comparaison des deux méthodes en fonction de la profondeur des puits

Nous nous proposons de calculer les niveaux d'énergie des atomes dans la configuration de l'expérience FORCA-G pour des différentes profondeurs de puits. Nous choisissons de faire les calculs pour différentes valeurs de V_0 comprises entre $3 E_r$ et $10 E_r$. Pour chacune de ces valeurs de V_0 , nous calculons les niveaux d'énergie par les deux méthodes, perturbative et non-perturbative. Par la méthode perturbative, nous obtenons la correction ΔE_n induite par le potentiel $V(z)$. Par la méthode non-perturbative, nous obtenons l'énergie totale E_n de l'atome dans l'état n . Pour comparer ces deux méthodes nous calculons la grandeur δE_n définie par (III.3.2) qui correspondra à ΔE_n si les deux méthodes sont équivalentes III.3.2.

Pour ce calcul, nous avons choisi comme paramètre $z_{min} = 2,3 \text{ \AA}$ pour la position du minimum du potentiel Lennard-Jones. Pour la méthode perturbative, nous avons choisi comme coupure $z_c = 10 \text{ \AA}$. Les autres paramètres du calcul sont les mêmes : $L = 40$, $N = 10^4$, $z_s = 1 \text{ nm}$ et $T = 295 \text{ K}$. Sur la figure III.34, nous avons représenté, pour différentes profondeurs V_0 , ΔE_n et δE_n ainsi que $V_{CP}(n)$, la valeur du potentiel de Casimir-Polder au centre du puits. Nous pouvons voir clairement que plus les puits sont profonds, plus ΔE_n ou δE_n converge vers la même valeur que $V_{CP}(n)$, ce qui est normal car les fonctions d'onde deviennent plus localisées. Nous constatons également que plus les puits sont profonds, plus ΔE_n et δE_n tendent à être identiques pour les premiers puits. Pour préciser ce dernier point, nous traçons l'écart relatif Δ_n afin de pouvoir comparer précisément ces deux méthodes : $\Delta_n = (\Delta E_n - \delta E_n) / \delta E_n$.

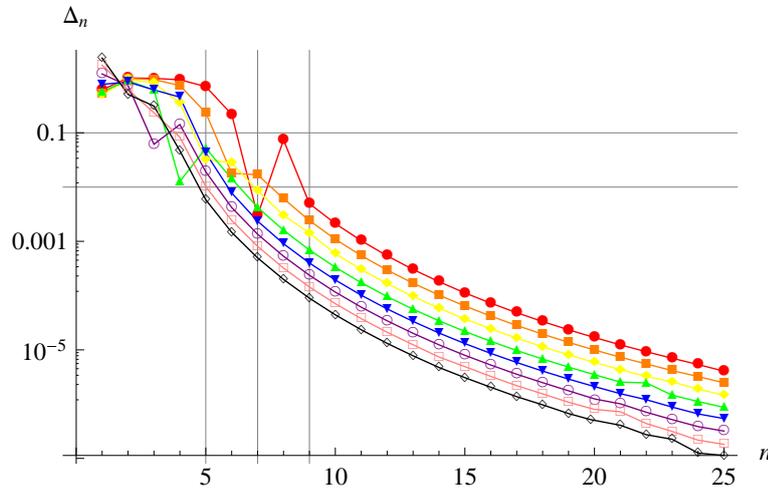


FIGURE III.32 – Écart relatif Δ_n de la méthode perturbative par rapport à la méthode non-perturbative pour différentes profondeurs de puits : en rouge $V_0 = 3 E_r$, en orange $V_0 = 4 E_r$, en jaune $V_0 = 5 E_r$, en vert $V_0 = 6 E_r$, en bleu $V_0 = 7 E_r$, en violet, $V_0 = 8 E_r$, en rose $V_0 = 9 E_r$ et en noir $V_0 = 10 E_r$. Sont représentées également les asymptotes $\Delta_n = 0,1$, $\Delta_n = 0,01$ et les droites $n = 5$, $n = 7$ et $n = 9$

Nous avons représenté Δ_n sur la figure III.32. Nous retrouvons déjà les résultats

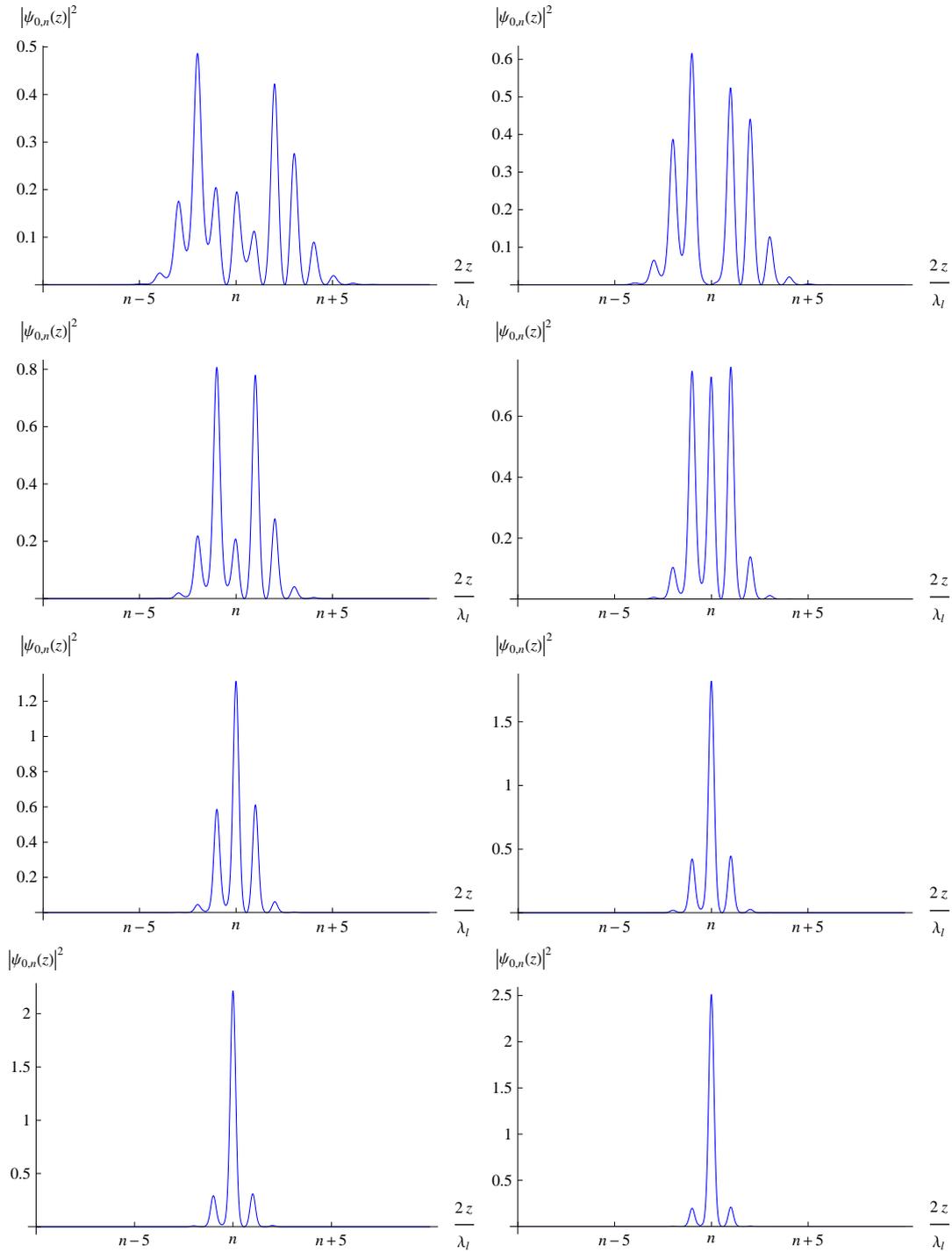


FIGURE III.33 – Fonctions d’onde $|\psi_{0,n}(z)|^2$ pour différentes profondeurs de puits du réseau, pour un puits n suffisamment loin de la surface. De gauche à droite et de haut en bas, V_0 est égale respectivement à 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 E_r .

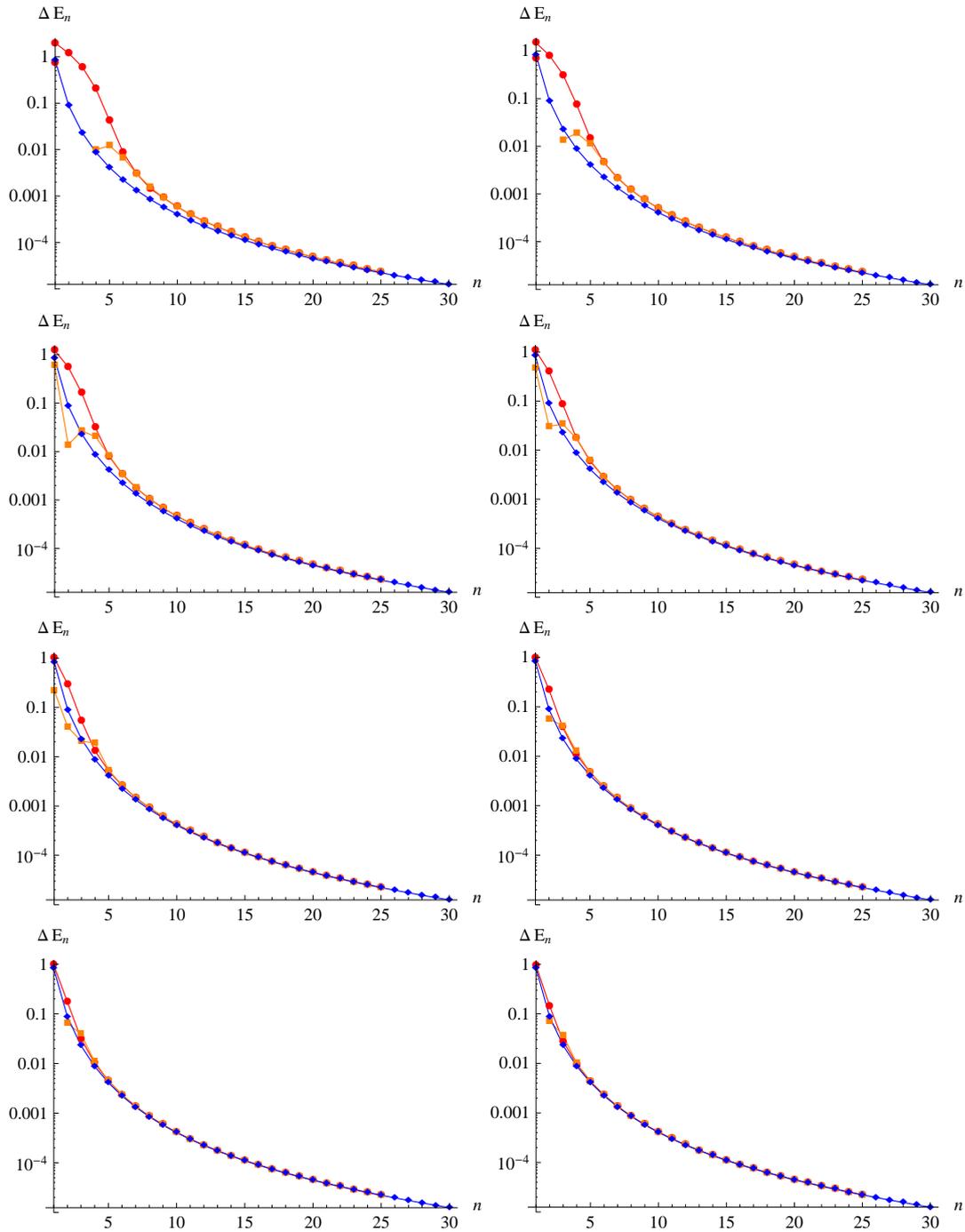


FIGURE III.34 – De gauche à droite et de haut en bas, V_0 est égal respectivement à 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 E_r . En rouge ΔE_n calculée par traitement perturbatif, en orange δE_n calculée par traitement non perturbatif et en bleu $V_{CP}(n)$ la valeur du potentiel de Casimir-Polder au centre du puits n .

constatés, l'écart relatif est inférieur à 1 % à partir de $n = 9$ pour $V_0 = 3 E_r$, ce qui nous avait permis de noter que la méthode perturbative pouvait être appliquée avant $n = 21$. Nous cherchons à trouver une profondeur de puits qui nous permettrait d'extraire l'effet Casimir-Polder pour des atomes dans le quatrième ou le cinquième puits en appliquant la méthode perturbative. Nous pouvons voir que l'écart relatif est inférieur à 1% seulement à partir de $V_0 = 9 E_r$ pour $n = 5$. De même pour le puits $n = 6$, V_0 doit être supérieur ou égal à $7 E_r$, et pour une mesure dans le puits $n = 7$, V_0 doit être supérieur ou égal à $5 E_r$.

À partir de la figure 3 de [59] et de la périodicité des amplitudes de transitions $n \rightarrow n \pm 1$, il est peut-être envisageable d'utiliser un réseau avec des puits de profondeur $U \approx 7$.

Chapitre IV

Déséquilibre thermique : interaction atome-surface

Au cours de l'expérience FORCA-G, les lasers présents pourraient chauffer le miroir. Nous aurions alors une situation de déséquilibre thermique entre la température du miroir et celle du vide qui correspond à la température ambiante de la salle d'expérience, à savoir environ $T_E = 300$ K. D'ailleurs le montage a été conçu de manière à pouvoir chauffer volontairement le miroir pour une expérience avec déséquilibre thermique. Dans ce dernier chapitre, nous nous intéressons à l'effet d'un tel déséquilibre sur les niveaux d'énergie des états des atomes piégés dans le réseau optique. Dans un premier temps, nous présentons le calcul de la force de Casimir-Polder développé dans [39, 61, 62] dans le cas d'un miroir d'épaisseur infinie, puis dans une deuxième partie, nous déterminons la force pour le cas d'un miroir d'épaisseur finie et comparons aux résultats obtenus dans [63]. Enfin nous déterminons l'effet de ce déséquilibre sur les niveaux d'énergie des atomes, et estimons si cet effet pourrait être observé au sein de l'expérience FORCA-G.

IV.1 Configuration géométrique : miroir d'épaisseur infinie

IV.1.1 Calcul de la force entre l'atome et le miroir dans le cas d'un déséquilibre thermique

Nous considérons la configuration suivante : l'atome toujours dans son état fondamental est placé dans le vide à une distance $z > 0$ d'un miroir diélectrique d'épaisseur infinie placé en $z = 0$. Nous faisons l'hypothèse que le vide et le miroir sont localement à l'équilibre thermique respectivement à la température T_E et T_S . Nous avons donc deux zones (1) et (2), respectivement de volumes V_1 pour le vide et V_2 pour le miroir. Le champ électrique fluctuant \mathbf{E}^{fl} dans le vide ou le matériau constituant le miroir a pour origine les fluctuations du champ de polarisation $\mathbf{P}(\omega, \mathbf{r})$:

$$\mathbf{E}^{fl}(\omega, \mathbf{r}) = \int d^3 \mathbf{r}' G_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') P_j(\omega, \mathbf{r}'), \quad (\text{IV.1.1})$$

champ de polarisation $\mathbf{P}(\omega, \mathbf{r})$, dont la fonction de corrélation à l'équilibre thermique à la température T et pour un milieu de permittivité $\epsilon(\omega)$ est donnée par le théorème

de fluctuation dissipation

$$\langle P_i(\omega, \mathbf{r}) P_j^*(\omega', \mathbf{r}') \rangle = \frac{4\pi\delta(\omega - \omega')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{ij}\hbar\epsilon_0\epsilon''(\omega)}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}}. \quad (\text{IV.1.2})$$

Cette expression est valide dans le cas où nous faisons l'hypothèse que les corrélations du champ de polarisation sont locales. Afin de pouvoir appliquer ce théorème dans le volume V_1 qui correspond au vide, nous assignons à ce dernier une permittivité $\epsilon_1(\omega)$ que nous ferons tendre vers 1 à la fin de notre calcul. Ceci nous permet de décrire les fluctuations du champ électrique venant de l'environnement à l'aide du théorème de fluctuation dissipation.

Nous partons de l'expression de la force dipolaire au premier ordre que nous avons établie (II.1.11). Dans cette expression, seul le membre de gauche nous intéresse pour la contribution des fluctuations du champ électrique, le membre de droite correspondant aux fluctuations du dipôle qui n'est pas affecté par le déséquilibre thermique et dont la contribution a déjà été calculée précédemment II.1.2. Dans le cas du déséquilibre thermique nous avons deux contributions, celle du champ électrique provenant du demi-espace V_1 délimité par le vide et celle provenant du demi-espace V_2 délimité par le miroir. À partir de (II.1.11), (IV.1.1) et (IV.1.2), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \langle d_i^{ind}(t) \nabla' E_i^{fl}(\mathbf{r}', t) |_{\mathbf{r}} \rangle &= \int \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i(\omega - \omega')t} \alpha(\omega) \nabla' \langle E_i^{fl}(\omega, \mathbf{r}) E_i^{fl\dagger}(\omega', \mathbf{r}') \rangle |_{\mathbf{r}} \\ &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \frac{\alpha(\omega) \hbar\epsilon_0\epsilon''(\omega)}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}} \int d\mathbf{r}'' G_{ik}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}^*(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') |_{\mathbf{r}} \\ &\quad - \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \frac{\alpha(-\omega) \hbar\epsilon_0\epsilon''(-\omega)}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \int d\mathbf{r}'' G_{ik}(-\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}^*(-\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') |_{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Or $\epsilon''(\omega)$ et $\alpha''(\omega)$ sont deux fonctions impaires et $\epsilon'(\omega)$ et $\alpha'(\omega)$ deux fonctions paires et de plus nous avons la relation $G_{ij}^*(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{ij}(-\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ du fait de la causalité.

$$\begin{aligned} \langle d_i^{ind}(t) \nabla' E_i^{fl}(\mathbf{r}', t) |_{\mathbf{r}} \rangle &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \frac{\alpha(\omega) \hbar\epsilon_0\epsilon''(\omega)}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}} \int d\mathbf{r}'' G_{ik}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}^*(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') |_{\mathbf{r}} \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \frac{\alpha^*(\omega) \hbar\epsilon_0\epsilon''(\omega)}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \int d\mathbf{r}'' G_{ik}^*(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') |_{\mathbf{r}} \\ &= \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \epsilon_0\epsilon''(\omega) \alpha(\omega) \int d\mathbf{r}'' G_{ik}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}^*(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') |_{\mathbf{r}} \\ &\quad + \frac{2\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{\epsilon_0\epsilon''(\omega)}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \Re \left(\alpha(\omega) \int d\mathbf{r}'' G_{ik}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}^*(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') |_{\mathbf{r}} \right) \end{aligned}$$

Les fluctuations du champ à la température T_S dont la source se trouve dans le milieu (2) (dans notre cas le miroir) donnent

$$\begin{aligned} \langle d_i^{ind}(t) \nabla' E_i^{fl}(\mathbf{r}', t) |_{\mathbf{r}} \rangle_S &= \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \epsilon_0\epsilon_2''(\omega) \alpha(\omega) \int_{V_2} d\mathbf{r}'' G_{ik}^{(t)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}^{(t)*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') |_{\mathbf{r}} \\ &\quad + \frac{2\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{\epsilon_0\epsilon_2''(\omega)}{e^{\hbar\omega/k_B T_S} - 1} \Re \left(\alpha(\omega) \int_{V_2} d\mathbf{r}'' G_{ik}^{(t)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}^{(t)*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') |_{\mathbf{r}} \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire

$$\left\langle d_i^{ind}(t) \nabla' E_i^{fl}(\mathbf{r}', t) |_{\mathbf{r}} \right\rangle_S = F_0^S(\mathbf{r}) + F_{th}^{neq}(T_S, 0, \mathbf{r}),$$

avec

$$F_0^S(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \epsilon_0 \epsilon_2''(\omega) \alpha(\omega) \int_{V_2} d\mathbf{r}'' G_{ik}^{(t)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}^{(t)*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') |_{\mathbf{r}} \quad (\text{IV.1.3})$$

qui ne dépend pas de la température. Cette contribution provient uniquement des fluctuations du champ dans la zone (2) en l'absence de photons thermiques, et

$$F_{th}^{neq}(T_S, 0, \mathbf{r}) = \frac{2\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon_2''(\omega)}{e^{\hbar\omega/k_B T_S} - 1} \Re \left(\alpha(\omega) \int_{V_2} d\mathbf{r}'' G_{ik}^{(t)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}^{(t)*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') |_{\mathbf{r}} \right). \quad (\text{IV.1.4})$$

Seule la partie transmise du champ venant du demi-espace V_2 contribue car l'atome se trouve dans le demi-espace V_1 . Quant aux fluctuations du champ qui viennent de la zone (1), les parties incidentes i , locales l et réfléchies r contribuent (voir appendice A.2)

Les fluctuations du champ à la température T_E dont la source se trouve dans le milieu (1) donnent

$$\begin{aligned} \left\langle d_i^{ind}(t) \nabla' E_i^{fl}(\mathbf{r}', t) |_{\mathbf{r}} \right\rangle_E = & \sum_{(a,b) \in \{i,l,r\}} \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \epsilon_0 \epsilon_1''(\omega) \alpha(\omega) \int_{V_1} d\mathbf{r}'' G_{ik}^{(a)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}^{(b)*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') |_{\mathbf{r}} \\ + & \sum_{(a,b) \in \{i,l,r\}} \frac{2\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon_1''(\omega)}{e^{\hbar\omega/k_B T_E} - 1} \Re \left(\alpha(\omega) \int_{V_1} d\mathbf{r}'' G_{ik}^{(a)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}^{(b)*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') |_{\mathbf{r}} \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire alors

$$\left\langle d_i^{ind}(t) \nabla' E_i^{fl}(\mathbf{r}', t) |_{\mathbf{r}} \right\rangle_E = F_0^E(\mathbf{r}) + F_{th}^{neq}(0, T_E, \mathbf{r}),$$

avec

$$F_0^E(\mathbf{r}) = \sum_{(a,b) \in \{i,l,r\}} \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \epsilon_0 \epsilon_1''(\omega) \alpha(\omega) \int_{V_1} d\mathbf{r}'' G_{ik}^{(a)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}^{(b)*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') |_{\mathbf{r}} \quad (\text{IV.1.5})$$

qui ne dépend pas de la température. Cette contribution provient uniquement des fluctuations du champ du vide en l'absence de photons thermiques, et

$$\begin{aligned} F_{th}^{neq}(0, T_E, \mathbf{r}) = & \sum_{(a,b) \in \{i,l,r\}} \frac{2\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon_1''(\omega)}{e^{\hbar\omega/k_B T_E} - 1} \Re \left(\alpha(\omega) \right. \\ & \left. \times \int_{V_1} d\mathbf{r}'' G_{ik}^{(a)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}^{(b)*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') |_{\mathbf{r}} \right). \end{aligned}$$

Le théorème démontré dans [64] donne la relation suivante sur les différentes fonctions de Green du champ électrique pour la configuration donnée ici A.4 :

$$\begin{aligned} \sum_{(a,b) \in \{i,l,r\}} \int_{V_1} d\mathbf{r}'' \epsilon_1''(\omega) G_{ik}^{(a)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') G_{ik}^{(b)*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') + \int_{V_2} d\mathbf{r}'' \epsilon_2''(\omega) G_{ik}^{(t)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') G_{ik}^{(t)*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') \\ = \frac{1}{\epsilon_0} \Im(G_{ik}^{(i)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + G_{ik}^{(l)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + G_{ik}^{(r)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')). \end{aligned} \quad (\text{IV.1.6})$$

Cette relation est la conséquence de l'identité entre les deux méthodes qui permettent de décrire macroscopiquement les fluctuations du champ électromagnétique : la théorie de la réponse linéaire et la théorie de Langevin. En utilisant cette équation, nous pouvons sommer de manière incohérente les deux parties F_0^E (IV.1.5) et F_0^S (IV.1.3) indépendantes de la température :

$$F_0^S(\mathbf{r}) + F_0^E(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \alpha(\omega) \nabla' \Im(G_{ii}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'))|_{\mathbf{r}}.$$

À partir de la relation (IV.1.6), nous pouvons également réécrire IV.1.1 afin de faire apparaître la force F_{th}^{eq} :

$$F_{th}^{neq}(0, T_E, \mathbf{r}) = \frac{2\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \Re[\alpha(\omega) \nabla' \Im(G_{ii}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'))|_{\mathbf{r}}] - F_{th}^{neq}(T_E, 0, \mathbf{r}),$$

où $F_{th}^{neq}(T_E, 0, \mathbf{r})$ correspond à (IV.1.4) à la température T_E . À présent nous pouvons écrire la force dipolaire totale au premier ordre pour le cas d'un déséquilibre thermique entre le miroir et le vide :

$$\begin{aligned} F(T_S, T_E, \mathbf{r}) &= \langle d_i^{ind}(t) \nabla' E_i^{fl}(\mathbf{r}', t) |_{\mathbf{r}} \rangle + \langle d_i^{fl}(t) \nabla' E_i^{ind}(\mathbf{r}', t) |_{\mathbf{r}} \rangle \\ &= F_{th}^{neq}(T_S, 0, \mathbf{r}) - F_{th}^{neq}(T_E, 0, \mathbf{r}) + \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \alpha(\omega) \nabla' \Im(G_{ii}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'))|_{\mathbf{r}} \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \frac{2\hbar}{e^{\hbar\omega/k_B T_E} - 1} \Re[\alpha(\omega) \nabla' \Im(G_{ii}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'))|_{\mathbf{r}}] \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \frac{\hbar}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T_E}} \nabla' G_{ii}^*(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r})|_{\mathbf{r}} \alpha''(\omega) \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \frac{\hbar}{1 - e^{\hbar\omega/k_B T_E}} \nabla' G_{ii}^*(-\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r})|_{\mathbf{r}} \alpha''(-\omega) \\ &= F_{th}^{neq}(T_S, 0, \mathbf{r}) - F_{th}^{neq}(T_E, 0, \mathbf{r}) + \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \Im(\alpha(\omega) \nabla' G_{ii}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'))|_{\mathbf{r}} \\ &\quad + \frac{2\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T_E} - 1} \Im(\alpha(\omega) \nabla' G_{ii}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'))|_{\mathbf{r}} \\ &= F_{th}^{neq}(T_S, 0, \mathbf{r}) - F_{th}^{neq}(T_E, 0, \mathbf{r}) + F_0(\mathbf{r}) + F_{th}^{eq}(T_E, \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Au final, nous obtenons la force agissant entre l'atome et le miroir dans le cas d'un déséquilibre thermique comme la somme de la force à l'équilibre et d'un terme additionnel :

$$F_{th}^{neq}(T,0,\mathbf{r}) = \frac{2\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon_2''(\omega)}{e^{\hbar\omega/k_B T_S} - 1} \Re \left(\alpha(\omega) \times \int d\mathbf{r}'' G_{ik}^{(t)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}^{(t)*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')|_{\mathbf{r}} \right), \quad (\text{IV.1.7})$$

$$F(T_S, T_E, \mathbf{r}) = F^{eq}(T_E, \mathbf{r}) + F_{th}^{neq}(T_S, 0, \mathbf{r}) - F_{th}^{neq}(T_E, 0, \mathbf{r}). \quad (\text{IV.1.8})$$

À présent nous allons déterminer l'expression analytique de $F_{th}^{neq}(T,0,\mathbf{r})$ en fonction des coefficients de réflexion et de transmission du miroir. Il nous faut déterminer la fonction de Green $\mathbf{G}^{(t)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ dans le cas d'une interface de type plan. Nous utilisons le formalisme développé dans [65] pour ce type de géométrie. La partie transmission s'écrit alors A.2

$$G_{ij}^{(t)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')} g_{ij}^{(t)}(\omega, \mathbf{k}, z, z'),$$

où nous avons les relations habituelles $\epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} = \mathbf{k}^2 + k_z^2$ et $\mathbf{r} = \mathbf{R} + z \mathbf{e}_z$ et $\mathbf{g}^{(t)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est présenté dans A.2 :

$$g_{ij}^{(t)}(\omega, \mathbf{k}, z, z') = \frac{i\omega^2}{2\epsilon_0 c^2 k_{z2}} e^{i(k_{z1} z - k_{z2} z')} \left(\left(\epsilon_1^{TE} \right)_i t_{21}^{TE} \left(\epsilon_2^{TE} \right)_j + \left(\epsilon_1^{TM+} \right)_i t_{21}^{TM} \left(\epsilon_2^{TM+} \right)_j \right),$$

où k_{z1} et k_{z2} sont respectivement la composante selon \mathbf{e}_z du vecteur d'onde dans le milieu 1 et le milieu 2. t_{21}^{TE} et t_{21}^{TM} sont respectivement les coefficients de transmission du milieu 2 (le miroir) vers le milieu 1 (le vide) pour les polarisations TE et TM . Pour une simple interface plan, les coefficients de transmission correspondent aux coefficients de Fresnel.

$$t_{21}^{TE} = \frac{2k_{z2}}{k_{z2} + k_{z1}}$$

$$t_{21}^{TM} = \frac{2\sqrt{\epsilon_2(\omega)}k_{z2}}{\epsilon_1(\omega)k_{z2} + \epsilon_2(\omega)k_{z1}}$$

Pour déterminer l'expression de $F_{th}^{neq}(T,0,z)$, nous devons d'abord développer la partie suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{V_2} d\mathbf{r}'' G_{ik}^{(t)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla' G_{ik}^{(t)*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}} \\ &= \frac{\omega^4}{4\epsilon_0^2 c^4 |k_{z2}|^2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^0 dz'' e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')} (-i) k_{z1}^* e^{i(k_{z1} z - k_{z1}^* z')} e^{2\Im(k_{z2}) z''} a(\omega, \mathbf{k})|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}} \\ &= \frac{\omega^2}{4\epsilon_0^2 \epsilon_2''(\omega) c^2 |k_{z2}|^2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} (-i) k_{z1}^* \Re(k_{z2}) e^{-2\Im(k_{z1}) z} a(\omega, \mathbf{k}), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation $2\Im(k_{z_2})\Re(k_{z_2}) = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_2''(\omega)$ et $a(\omega, \mathbf{k})$ a pour expression

$$a(\omega, \mathbf{k}) = \left| t_{21}^{TE} \right|^2 + \frac{k^2 + |k_{z_1}|^2}{\omega^2/c^2} \frac{k^2 + |k_{z_2}|^2}{|\epsilon_2(\omega)|\omega^2/c^2} \left| t_{21}^{TM} \right|^2.$$

En remplaçant cette dernière expression calculée dans l'expression de (IV.1.7), nous obtenons le résultat

$$F_{th}^{neq}(T, 0, z) = \frac{\hbar}{\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \int_0^\infty k dk \Re(k_{z_2}) \frac{e^{-2z\Im(k_{z_1})}}{|k_{z_2}|^2} \Re \left(\frac{\alpha(\omega)}{4\pi\epsilon_0} (-i) k_{z_1}^* \left[\left| t_{21}^{TE} \right|^2 + \frac{k^2 + |k_{z_1}|^2}{\omega^2/c^2} \frac{k^2 + |k_{z_2}|^2}{|\epsilon_2(\omega)|\omega^2/c^2} \left| t_{21}^{TM} \right|^2 \right] \right). \quad (\text{IV.1.9})$$

IV.1.2 Comportement à courte distance

Considérer le régime à courte distance, ou le régime non-retardé, revient à considérer le cas où la longueur d'onde λ du champ électromagnétique est très grande devant la distance z qui sépare l'atome du miroir. La condition à considérer est la suivante $\omega z/c \rightarrow 0$, et les conditions physiques $\omega \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$ et $c \rightarrow \infty$ sont alors équivalentes. Nous repartons de l'expression (IV.1.9) que nous écrivons en séparant la contribution des ondes évanescentes $\omega/c < k$ et des ondes propagatives $\omega/c > k$:

$$F_{th}^{neq}(T, 0, z) = \frac{\hbar}{\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \times \left(\int_0^{\frac{\omega}{c}} k dk \frac{\Re(k_{z_2})}{|k_{z_2}|^2} \frac{\Im(\alpha(\omega))}{4\pi\epsilon_0} k_{z_1} \left[\left| t_{21}^{TE} \right|^2 + \frac{k^2 + |k_{z_1}|^2}{\omega^2/c^2} \frac{k^2 + |k_{z_2}|^2}{|\epsilon_2(\omega)|\omega^2/c^2} \left| t_{21}^{TM} \right|^2 \right] + \int_{\frac{\omega}{c}}^\infty k dk \Re(k_{z_2}) \frac{e^{-2zk_{z_1}}}{|k_{z_2}|^2} \frac{\Re(-\alpha(\omega))}{4\pi\epsilon_0} k_{z_1} \left[\left| t_{21}^{TE} \right|^2 + \frac{k^2 + |k_{z_1}|^2}{\omega^2/c^2} \frac{k^2 + |k_{z_2}|^2}{|\epsilon_2(\omega)|\omega^2/c^2} \left| t_{21}^{TM} \right|^2 \right] \right). \quad (\text{IV.1.10})$$

Comme nous considérons le cas où $z/\lambda \ll 1$ (valable en particulier pour λ_{at} , la condition $k_B T \ll \hbar\omega_{at}$ étant respectée), nous pouvons ignorer la partie imaginaire de la polarisabilité atomique, ce qui annule l'intégrale relative aux ondes propagatives :

$$F_{th}^{neq}(T, 0, z) = \frac{\hbar}{\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \times \int_{\frac{\omega}{c}}^\infty k dk \Re(k_{z_2}) \frac{e^{-2zk_{z_1}}}{|k_{z_2}|^2} \frac{\Re(-\alpha(\omega))}{4\pi\epsilon_0} k_{z_1} \left[\left| t_{21}^{TE} \right|^2 + \frac{k^2 + |k_{z_1}|^2}{\omega^2/c^2} \frac{k^2 + |k_{z_2}|^2}{|\epsilon_2(\omega)|\omega^2/c^2} \left| t_{21}^{TM} \right|^2 \right].$$

À partir des formules suivantes,

$$\frac{\Re(k_{z_2}) \left| t_{21}^{TE} \right|^2}{|k_{z_2}|^2} = \frac{\Re(k_{z_1}) (1 - |r_{12}^{TE}|^2) + 2\Im(k_{z_1})\Im(r_{12}^{TE})}{|k_{z_1}|^2},$$

$$\frac{\Re(\epsilon_2^* k_{z_2}) |t_{21}^{TM}|^2}{|\epsilon_2| |k_{z_2}|^2} = \frac{\Re(\epsilon_1^* k_{z_1})(1 - |r_{12}^{TM}|^2) + 2\Im(\epsilon_1^* k_{z_1})\Im(r_{12}^{TM})}{|\epsilon_1| |k_{z_1}|^2},$$

nous pouvons réécrire les coefficients de transmission de Fresnel de l'interface en fonction des coefficients de réflexion. Notons que pour les ondes évanescentes, $\Re(k_{z_1}) = 0$. Dans ce régime à courte distance, équivalent au régime basse fréquence, le coefficient de Fresnel r_{12}^{TE} tend vers 0 (r_{12}^{TM} tend vers la valeur statique $\frac{\epsilon(0)-1}{\epsilon(0)+1}$), l'expression de (IV.1.10) devient

$$F^{neq}(T, 0, z) = \frac{-2\hbar}{\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \int_{\frac{\omega}{c}}^\infty k dk e^{-2k_{z_1} z} \frac{\Re(\alpha(\omega))}{4\pi\epsilon_0} \Im(r_{12}^{TM}) \left(2 \frac{k^2}{\omega^2/c^2} - 1 \right). \quad (\text{IV.1.11})$$

Le comportement Lorentzien de $\alpha(\omega)$ et le terme $e^{-2k_{z_1} z}$ permettent de garder l'hypothèse $\omega z/c \ll 1$.

Pour obtenir la force totale s'exerçant sur l'atome, nous avons l'expression (IV.1.8). Dans ce régime à courte distance $F^{eq}(T, t)$ (II.1.16) donne

$$F^{eq}(T, z) = \frac{-\hbar}{\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \left(1 + \frac{2}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \right) \int_{\frac{\omega}{c}}^\infty k dk e^{-2k_{z_1} z} \frac{\Re(\alpha(\omega))}{4\pi\epsilon_0} \left(2 \frac{k^2}{\omega^2/c^2} - 1 \right) \Im(r_{12}^{TM}), \quad (\text{IV.1.12})$$

où comme précédemment $\alpha''(\omega)$ ne contribue pas. Nous obtenons pour la force totale à partir des expressions de $F^{eq}(T, z)$ (IV.1.12) et $F^{neq}(T, 0, z)$ (IV.1.11) déterminées à courte distance.

$$F(T_S, T_E, z) = F^{neq}(T_S, 0, z) + F_0(z),$$

où $F_0(z)$ est la partie de la force ne dépendant pas de la température qui est la force de Casimir-Polder en l'absence de photons thermiques. À courte distance, seule la partie évanescente (ayant ces sources dans le miroir) contribue à la force.

IV.1.3 Application à un exemple simple

Nous choisissons pour notre exemple de considérer un atome de rubidium 87 devant un miroir en silice. Pour ce calcul, nous prenons la fonction $\epsilon(\omega)$ de la silice [43]. Contrairement au calcul de la force de Casimir-Polder à l'équilibre, il est nécessaire d'avoir la polarisabilité de l'atome en fonction des fréquence réelles. Nous choisissons un modèle de polarisabilité où nous ne considérons que les deux premières transitions $D1$ et $D2$ de l'atome de rubidium. En effet ce sont principalement les deux premières transitions qui contribuent.

$$\alpha(\omega) = \frac{2}{3\hbar} \left(\frac{\omega_{5S-5P_{3/2}} \langle 5P_{3/2} \| D \| 5S_{1/2} \rangle^2}{\omega_{5S-5P_{3/2}}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_{5S-5P_{3/2}}} + \frac{\omega_{5S-5P_{1/2}} \langle 5P_{1/2} \| D \| 5S_{1/2} \rangle^2}{\omega_{5S-5P_{1/2}}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_{5S-5P_{1/2}}} \right)$$

Comme nous l'avons montré, $F_{th}^{neq}(T, 0, z)$ est composée de deux parties. Pour $T_S = 600$ K et $T_E = 300$ K nous trouvons que

— la partie propagative vaut

$$F_{th}^{neq,PW}(T_S = 600,0,10^{-6}) - F_{th}^{neq,PW}(T_E = 300,0,10^{-6}) = -1,23785.10^{-33}\text{N},$$

— la partie évanescente est égale à

$$F_{th}^{neq,EW}(T_S = 300,0,10^{-6}) - F_{th}^{neq,EW}(T_E = 600,0,10^{-6}) = -9,76492.10^{-27}\text{N}$$

qui est supérieure de 5 ordres à la partie propagative. Cette dernière est donc négligeable à ces températures. Par contre si on se place à une température proche de la fréquence de résonance de l'atome $T = 1.8.10^4$ K. La partie propagative n'est plus négligeable et devient l'effet dominant

$$F_{th}^{neq,PW}(T_S = 18100,0,10^{-6}) - F_{th}^{neq,PW}(T_E = 18400,0,10^{-6}) = -3,27022.10^{-22}\text{N}.$$

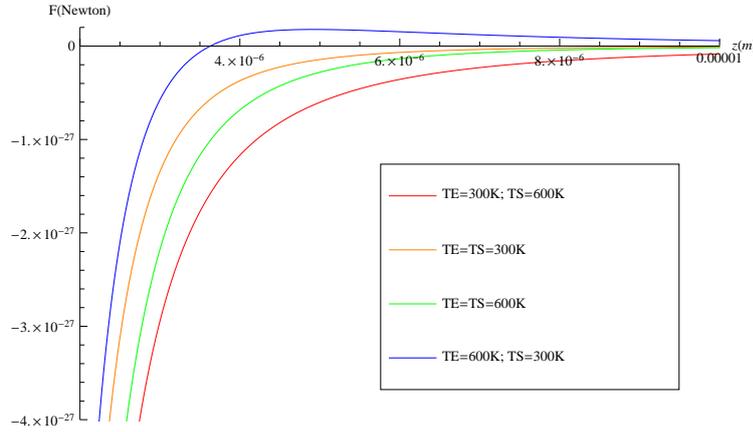


FIGURE IV.1 – Force entre l'atome et le miroir exprimée en newton dans les cas où le vide est à l'équilibre à la température T_E et le miroir à l'équilibre à la température T_S . En rouge $T_E = 300$ K $T_S = 600$ K, en vert $T_E = T_S = 600$ K, en orange $T_E = T_S = 300$ K et en bleu $T_E = 600$ K et $T_S = 300$ K.

Nous retrouvons l'observation déjà faite par Antezza [61] pour une surface de saphir, si $T_S < T_E$ la force peut devenir répulsive à certaines distances, ce qui vient du terme $\frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T_S} - 1} - \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T_E} - 1}$ qui est clairement de signe opposé au cas $T_S > T_E$. (préciser comportement longue distance)

IV.2 Configuration géométrique : miroir d'épaisseur finie multicouche

Jusqu'ici nous avons considéré un miroir d'épaisseur infinie. Nous aimerions à présent étudier le cas d'un miroir d'épaisseur finie constitué de plusieurs couches diélectriques. Dans ce cas la configuration géométrique du problème est la suivante : le vide

occupe le demi-espace V_0 avec une permittivité $\epsilon_0(\omega)$ que nous faisons tendre vers 1 à la fin du calcul, le miroir est divisé en N volumes V_i d'épaisseur e_i et de permittivité $\epsilon_i(\omega)$ avec $i \in [1, N]$. Nous avons déjà calculé la force de Casimir-Polder dans le cas d'un miroir d'épaisseur finie à l'équilibre thermique, grâce au formalisme des matrices de transfert. En utilisant le théorème d'additivité de manière généralisée [64] pour plusieurs couches de diélectrique nous avons une expression similaire à la précédente pour la force subie par l'atome. Chaque couche apporte une contribution $F_{th}^{neq,i}(T_S, 0, z)$ due au fait qu'elle est à la température T_S et il faut soustraire la contribution $F_{th}^{neq,i}(T_E, 0, z)$, contribution qui est contenue dans $F^{eq}(T_E, z)$.

$$F(T_S, T_E, z) = F^{eq}(T_E, z) + \sum_{i=1}^N F_{th}^{neq,i}(T_S, 0, z) - F_{th}^{neq,i}(T_E, 0, z) \quad (\text{IV.2.1})$$

L'intégration sur le volume V_i dans F_{th}^{neq} ne se fait plus sur $]-\infty, 0]$ mais sur $[-e_{i-1}, e_i]$. La fonction de Green $\mathbf{G}^{(t)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est également différente pour une couche finie car il peut y avoir des réflexions multiples dans une couche. Tout d'abord, il est nécessaire de déterminer cette fonction de Green pour une couche d'épaisseur finie.

IV.2.1 Calcul de la partie hors équilibre de la force dans le cas d'une surface d'épaisseur finie

Soit trois zones de l'espace (voir figure A.1) : une zone (1) de volume V_1 comprise selon l'axe de coordonnée z entre $[0, \infty[$ avec pour permittivité ϵ_1 , une zone (2) de volume V_2 comprise selon l'axe de coordonnée z entre $[0, -e]$ de permittivité ϵ_2 , et une zone (3) de volume V_3 comprise selon l'axe de coordonnée z entre $]-\infty, -e]$ de permittivité ϵ_1 . Pour le calcul de F_{th}^{neq} (IV.1.7) dans le cas d'un miroir d'épaisseur e , il nous faut connaître la fonction de Green $G_{ij}^{(tEp)}$ qui caractérise le champ électrique induit dans la zone (1) par une source de polarisation dans la zone (2)

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(z)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}.$$

Pour déterminer $G_{ij}^{(tEp)}$, nous utilisons le formalisme des matrices de transfert II.2.2 et procédons de la même manière que dans [65] et A.3. Nous trouvons alors que

$$G_{ij}^{(tEp)}(\omega, \mathbf{k}, z, z') = \frac{i\omega^2}{2\epsilon_0 c^2 k_{2z}} \sum_p \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[\frac{t_{21}^p}{1 - r_{21}^p r_{21}^p e^{2ik_z 2e}} \left(\epsilon_2^{p+} \right)_i \left(\epsilon_1^{p+} \right)_j e^{(ik_{z1}z - ik_{z2}z')} \right. \\ \left. + \frac{t_{21}^p r_{21}^p e^{2ik_z 2e}}{1 - r_{21}^p r_{21}^p e^{2ik_z 2e}} \left(\epsilon_2^{p-} \right)_i \left(\epsilon_1^{p+} \right)_j e^{(ik_{z1}z + ik_{z2}z')} \right].$$

Pour le calcul de $F_{th}^{neq}(T, 0, z)$, nous devons calculer $\int d\mathbf{r}'' G_{ik}^{(tEp)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') G_{ik}^{(tEp)*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')$. Nous noterons à présent cette intégrale $S_{ii}^{(tt)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')} S_{ii}^{(tt)}(\omega, z, z')$.

$$\begin{aligned}
s_{ii}^{(tt)}(\omega, z, z') &= \frac{\omega^4}{4\epsilon_0^2 c^4 |k_{z2}|^2} \int_{-e}^0 dz'' \\
&\left(\frac{|t_{21}^p|^2}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} |\epsilon_2^{p+}|^2 |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{i(k_{z1}z - k_{z1}^* z')} e^{i(k_{z2}^* - k_{z2})z''} \right. \\
&+ \frac{|t_{21}^p|^2 |r_{21}^p|^2 e^{2i(k_{z2} - k_{z2}^*)e}}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} |\epsilon_2^{p-}|^2 |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{i(k_{z1}z - k_{z1}^* z')} e^{i(k_{z2} - k_{z2}^*)z''} \\
&+ \frac{|t_{21}^p|^2 r_{21}^{p*} e^{-2ik_{z2}^*e}}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} \epsilon_{2i}^{p+} (\epsilon_{2i}^{p-})^* |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{i(k_{z1}z - k_{z1}^* z')} e^{-i(k_{z2} + k_{z2}^*)z''} \\
&\left. + \frac{|t_{21}^p|^2 r_{21}^p e^{2ik_{z2}e}}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} (\epsilon_{2i}^{p+})^* \epsilon_{2i}^{p-} |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{i(k_{z1}z - k_{z1}^* z')} e^{i(k_{z2} + k_{z2}^*)z''} \right)
\end{aligned}$$

L'intégrale sur z'' donne quatre contributions différentes :

$$\begin{aligned}
s_{ii}^{(tt)}(\omega, z, z') &= \frac{\omega^4}{4\epsilon_0^2 c^4 |k_{z2}|^2} \\
&\times \left(\frac{|t_{21}^p|^2}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} |\epsilon_2^{p+}|^2 |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{i(k_{z1}z - k_{z1}^* z')} \frac{1 - e^{-2\Im(k_{z2})e}}{2\Im(k_{z2})} \right. \\
&+ \frac{|t_{21}^p|^2 |r_{21}^p|^2 e^{-4\Im(k_{z2})e}}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} |\epsilon_2^{p-}|^2 |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{i(k_{z1}z - k_{z1}^* z')} \frac{1 - e^{2\Im(k_{z2})e}}{-2\Im(k_{z2})} \\
&+ \frac{|t_{21}^p|^2 r_{21}^{p*} e^{-2ik_{z2}^*e}}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} \epsilon_{2i}^{p+} (\epsilon_{2i}^{p-})^* |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{i(k_{z1}z - k_{z1}^* z')} \frac{1 - e^{2i\Re(k_{z2})e}}{-2i\Re(k_{z2})} \\
&\left. + \frac{|t_{21}^p|^2 r_{21}^p e^{2ik_{z2}e}}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} (\epsilon_{2i}^{p+})^* \epsilon_{2i}^{p-} |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{i(k_{z1}z - k_{z1}^* z')} \frac{1 - e^{-2i\Re(k_{z2})e}}{2i\Re(k_{z2})} \right).
\end{aligned}$$

La relation $2\Re(k_{z2})\Im(k_{z2}) = \epsilon''(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}$ permet de réécrire

$$\begin{aligned}
s_{ii}^{(tt)}(\omega, z, z') &= \frac{\omega^2}{2\epsilon_0^2 c^2 \epsilon''(\omega) |k_{z2}|^2} \\
&\times \left(\Re(k_{z2}) \frac{|t_{21}^p|^2}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} |\epsilon_2^{p+}|^2 |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{i(k_{z1}z - k_{z1}^* z')} e^{-\Im(k_{z2})e} \sinh(\Im(k_{z2})e) \right. \\
&+ \Re(k_{z2}) \frac{|t_{21}^p|^2 |r_{21}^p|^2}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} |\epsilon_2^{p-}|^2 |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{i(k_{z1}z - k_{z1}^* z')} e^{-3\Im(k_{z2})e} \sinh(\Im(k_{z2})e) \\
&+ \Im(k_{z2}) \frac{|t_{21}^p|^2 r_{21}^{p*} e^{-2ik_{z2}^*e}}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} \epsilon_{2i}^{p+} (\epsilon_{2i}^{p-})^* |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{i(k_{z1}z - k_{z1}^* z')} e^{i\Re(k_{z2})e} \sin(\Re(k_{z2})e) \\
&\left. + \Im(k_{z2}) \frac{|t_{21}^p|^2 r_{21}^p e^{2ik_{z2}e}}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} (\epsilon_{2i}^{p+})^* \epsilon_{2i}^{p-} |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{i(k_{z1}z - k_{z1}^* z')} e^{-i\Re(k_{z2})e} \sin(\Re(k_{z2})e) \right).
\end{aligned}$$

Nous avons également les relations suivantes sur les vecteurs polarisations :

$$\begin{aligned} |\epsilon^{TE\pm}|^2 &= 1 \\ |\epsilon^{TM\pm}|^2 &= \frac{\mathbf{k}^2 + |k_z|^2}{\epsilon(\omega)\omega^2/c^2} \\ (\epsilon_i^{p+})^* \epsilon_i^{p-} &= \epsilon_i^{p+} (\epsilon_i^{p-})^* = \frac{\mathbf{k}^2 - |k_z|^2}{\epsilon(\omega)\omega^2/c^2}. \end{aligned}$$

En remplaçant ces différentes expressions dans IV.1.7, nous obtenons

$$\begin{aligned} F_{th}^{neq}(T,0,z) &= \frac{2\hbar}{\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{e^{\hbar\omega/k_B T_S} - 1} \Re \left[\frac{\alpha(\omega)}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{kdk}{|k_{z2}|^2} (-ik_{z1}^*) e^{-2\Im(k_{z1})z} \right. \\ &\quad \Re(k_{z2}) \frac{|t_{21}^p|^2}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} |\epsilon_2^{p+}|^2 |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{-\Im(k_{z2})e} \sinh(\Im(k_{z2})e) \\ &\quad + \Re(k_{z2}) \frac{|t_{21}^p|^2 |r_{21}^p|^2}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} |\epsilon_2^{p-}|^2 |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{-3\Im(k_{z2})e} \sinh(\Im(k_{z2})e) \\ &\quad + \Im(k_{z2}) \frac{|t_{21}^p|^2 r_{21}^{p*}}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} \epsilon_{2i}^{p+} (\epsilon_{2i}^{p-})^* |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{-i\Re(k_{z2})e} e^{-2\Im(k_{z2})e} \sin(\Re(k_{z2})e) \\ &\quad \left. + \Im(k_{z2}) \frac{|t_{21}^p|^2 r_{21}^p}{|1 - (r_{21}^p)^2 e^{2ik_{z2}e}|^2} (\epsilon_{2i}^{p+})^* \epsilon_{2i}^{p-} |\epsilon_1^{p+}|^2 e^{i\Re(k_{z2})e} e^{-2\Im(k_{z2})e} \sin(\Re(k_{z2})e) \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.2.2})$$

Pour le cas multi-couche, nous devrions considérer la fonction de Green $\mathbf{G}^{(t)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ de chaque couche et utiliser le formalisme des matrices de transfert pour déterminer les coefficients de réflexion et de transmission pour chaque interface à l'intérieur du miroir entre la couche considérée et le vide, soit pour un miroir à 30 couches déterminer 120 coefficients de réflexion et de transmission et 30 fonction de Green. Le formalisme développé dans ce paragraphe est beaucoup trop fastidieux pour être facilement implémenté.

IV.2.2 Comparaison avec le résultat obtenu par la méthode des matrices de diffusion

Dans [63], une autre méthode est développée pour déterminer la force de Casimir-Polder dans le cas du déséquilibre thermique. Cette méthode reprend le formalisme des matrices de diffusion II.1.3, ici développée dans le cas de ce déséquilibre. Cette méthode a l'avantage de donner un résultat exprimé à partir des coefficients de réflexion du miroir, indépendamment des coefficients de Fresnel caractérisant chaque couche. La force totale subie par l'atome s'écrit :

$$F_{CP}(z, T_S, T_E) = \frac{1}{2} (F^{eq}(z, T_S) + F^{eq}(z, T_E)) + \Delta F(z, T_S, T_E),$$

où $F^{eq}(z, T)$ correspond à l'expression habituelle de la force de Casimir-Polder dans le cas d'équilibre thermique. $\Delta F(z, T_S, T_E)$ est la contribution à la force due au déséquilibre thermique entre la température du miroir et de l'environnement.

$$\Delta F(z, T_S, T_E) = \frac{-\hbar}{4\pi^2 \epsilon_0 c^2} \Im \left[\sum_p \int_0^{+\infty} d\omega \omega^2 \alpha(\omega) n(T_S, T_E) \right. \\ \times \left(\int_0^{\omega/c} k dk (|R^p|^2 + |T^p|^2 - 1 - \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} R^p e^{2ik_z z}) \right. \\ \left. \left. - \int_{\omega/c}^{+\infty} k dk \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} R^{p*} e^{2ik_z z} \right) \right], \quad (\text{IV.2.3})$$

où R^p et T^p sont les coefficients de réflexion et de transmission du miroir considérés, et $n(T_S, T_E) = n(T_S) - n(T_E)$ avec $n(T) = 1 / \left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1 \right)$. Ce résultat est valable uniquement dans le cas où nous faisons l'hypothèse que le miroir et l'environnement sont à l'équilibre, et chacun a ainsi respectivement sa température T_S et T_E .

L'avantage de cette formulation est qu'elle est utilisable pour tout type de miroir composé d'un nombre quelconque de couches de différents matériaux. La formulation présentée précédemment permet a priori de faire le même type de calcul, mais nécessiterait, comme nous l'avons expliqué, de calculer la contribution de chaque couche à la force de Casimir-Polder dans le cas du déséquilibre thermique. Nous proposons de montrer dans ce paragraphe l'équivalence des deux résultats pour le cas d'un miroir constitué d'une seule couche d'épaisseur e d'un matériau de permittivité $\epsilon_2(\omega)$.

Réécrivons d'abord $F_{CP}(z, T_S, T_E)$ dans cette formulation pour faire apparaître la force écrite sous la forme $F_{CP}(z, T_S, T_E) = F^{eq}(z, T_E) + F^{neq}(z, T_S) - F^{neq}(z, T_E)$ démontrée par la méthode précédente (IV.1.8) :

$$F_{CP}(z, T_S, T_E) = \frac{-\hbar}{2\pi c^2} \sum_p \int_0^{+\infty} d\omega \omega^2 \Im \left[\frac{\alpha(\omega)}{4\pi \epsilon_0} \right. \\ \times \left. \int_0^{+\infty} k dk \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} R^p e^{2ik_z z} (2n(T_S) + 2n(T_E) + 2) \right] \\ - \frac{\hbar}{\pi c^2} \sum_p \int_0^{+\infty} d\omega \omega^2 \Im \left[\frac{\alpha(\omega)}{4\pi \epsilon_0} \left((n(T_S) - n(T_E)) \int_0^{\omega/c} k dk (|R^p|^2 + |T^p|^2 - 1) \right. \right. \\ \left. \left. + (n(T_E) - n(T_S)) \int_0^{\omega/c} k dk \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} R^p e^{2ik_z z} \right. \right. \\ \left. \left. + (n(T_E) - n(T_S)) \int_{\omega/c}^{+\infty} k dk \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} R^{p*} e^{2ik_z z} \right) \right].$$

En séparant les contributions thermiques qui viennent de la surface à la température T_S de celle de l'environnement à la température T_E , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 F_{CP}(z, T_S, T_E) &= \frac{\hbar}{\pi c^2} \sum_p \int_0^{+\infty} d\omega \omega^2 n(T_S) \Im \left[\frac{\alpha(\omega)}{4\pi\epsilon_0} \right. \\
 &\quad \times \left(\int_0^{\omega/c} k dk \left(-|R^p|^2 - |T^p|^2 + 1 + \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} e^{2i\Re(k_z)z} (R^p - R^p) \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. + \int_{\omega/c}^{+\infty} k dk \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} e^{-2\Im(k_z)z} (R^{p*} - R^p) \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\hbar}{\pi c^2} \sum_p \int_0^{+\infty} d\omega \omega^2 n(T_E) \Im \left[\frac{\alpha(\omega)}{4\pi\epsilon_0} \right. \\
 &\quad \times \left(\int_0^{\omega/c} k dk \left(|R^p|^2 + |T^p|^2 - 1 - \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} e^{2i\Re(k_z)z} (R^p + R^p) \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. + \int_{\omega/c}^{+\infty} k dk \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} e^{-2\Im(k_z)z} (-R^{p*} - R^p) \right) \right] \\
 &\quad - \frac{\hbar}{\pi c^2} \sum_p \int_0^{+\infty} d\omega \omega^2 \Im \left[\frac{\alpha(\omega)}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{+\infty} k dk \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} e^{2ik_z z} R^p \right]
 \end{aligned}$$

Afin de faire apparaître l'expression de $F^{eq}(z, T_E)$, nous récrivons

$$\begin{aligned}
 F_{CP}(z, T_S, T_E) &= \frac{\hbar}{\pi c^2} \sum_p \int_0^{+\infty} d\omega \omega^2 n(T_S) \Im \left[\frac{\alpha(\omega)}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\omega/c} k dk \left(-|R^p|^2 - |T^p|^2 + 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\omega/c}^{+\infty} k dk \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} e^{-2\Im(k_z)z} (R^{p*} - R^p) \right] \\
 &\quad - \frac{\hbar}{\pi c^2} \sum_p \int_0^{+\infty} d\omega \omega^2 n(T_E) \Im \left[\frac{\alpha(\omega)}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\omega/c} k dk \left(-|R^p|^2 - |T^p|^2 + 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\omega/c}^{+\infty} k dk \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} e^{-2\Im(k_z)z} (R^{p*} - R^p) \right] \\
 &\quad - \frac{\hbar}{\pi c^2} \sum_p \int_0^{+\infty} d\omega \omega^2 \Im \left[\frac{\alpha(\omega)}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{+\infty} k dk \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} e^{2ik_z z} R^p (1 + 2n(T_E)) \right]
 \end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi la forme souhaitée (IV.1.8)

$$F_{CP}(z, T_S, T_E) = F^{neq}(z, T_S) - F^{neq}(z, T_E) + F^{eq}(z, T_E),$$

où nous définissons $F^{neq}(z, T)$ par

$$F^{neq}(z,T) = \frac{\hbar}{\pi c^2} \sum_p \int_0^{+\infty} d\omega \omega^2 n(T) \Im \left[\frac{\alpha(\omega)}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\omega/c} k dk \left(-|R^p|^2 - |T^p|^2 + 1 \right) + \int_{\omega/c}^{+\infty} k dk \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} e^{-2\Im(k_z)z} (R^{p*} - R^p) \right]. \quad (\text{IV.2.4})$$

Il faut à présent montrer que $F^{neq}(z,T)$ est bien égale à l'expression (IV.2.2) de $F_{th}^{neq}(T,0,z)$. Tout d'abord nous devons réécrire IV.2.2 sous la forme d'une intégrale sur k séparée en partie évanescente et partie propageante. Nous allons également utiliser les relations suivantes qui relient les coefficients de Fresnel de transmission et de réflexion entre eux :

$$\frac{k^2 + |k_{z_2}|^2}{\omega^2/c^2} = \frac{\Re(\epsilon_2^* k_{z_2})}{\Re(k_{z_2})}, \quad (\text{IV.2.5})$$

$$\frac{k^2 - |k_{z_2}|^2}{\omega^2/c^2} = \frac{\Im(\epsilon_2^* k_{z_2})}{\Im(k_{z_2})}, \quad (\text{IV.2.6})$$

$$\frac{\Re(k_{z_2}) |t_{21}^{TE}|^2}{|k_{z_2}|^2} = \frac{\Re(k_{z_1})(1 - |r_{12}^{TE}|^2) + 2\Im(k_{z_1})\Im(r_{12}^{TE})}{|k_{z_1}|^2}, \quad (\text{IV.2.7})$$

$$\frac{\Re(\epsilon_2^* k_{z_2}) |t_{21}^{TM}|^2}{|\epsilon_2| |k_{z_2}|^2} = \frac{\Re(\epsilon_1^* k_{z_1})(1 - |r_{12}^{TM}|^2) + 2\Im(\epsilon_1^* k_{z_1})\Im(r_{12}^{TM})}{|\epsilon_1| |k_{z_1}|^2}, \quad (\text{IV.2.8})$$

$$\frac{\Im(k_{z_2}) |t_{21}^{TE}|^2}{|k_{z_2}|^2} = \frac{\Im(k_{z_1})(1 - |r_{12}^{TE}|^2) - 2\Re(k_{z_1})\Im(r_{12}^{TE})}{|k_{z_1}|^2}, \quad (\text{IV.2.9})$$

$$\frac{\Im(\epsilon_2^* k_{z_2}) |t_{21}^{TM}|^2}{|\epsilon_2| |k_{z_2}|^2} = \frac{\Im(\epsilon_1^* k_{z_1})(1 - |r_{12}^{TM}|^2) + 2\Re(\epsilon_1^* k_{z_1})\Im(r_{12}^{TM})}{|\epsilon_1| |k_{z_1}|^2}. \quad (\text{IV.2.10})$$

À partir de ces différentes formules nous pouvons réécrire l'expression ci-dessous valable pour la polarisation TE

$$F_{th}^{neq}(T,0,z) = \frac{\hbar}{\pi c^2} \int_0^{+\infty} d\omega \omega^2 n(T) \Re \left[\frac{\alpha(\omega)}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{+\infty} k dk (-ik_z^*) e^{-2\Im(k_z)z} |\epsilon_1^{TE+}|^2 \left(\frac{\Re(k_{z_2}) |t_{21}|^2}{|k_{z_2}|^2 |D|^2} (1 - e^{-2\Im(k_{z_2})e}) - \frac{\Re(k_{z_2}) |t_{21}|^2}{|k_{z_2}|^2 |D|^2} |r_{12}|^2 (e^{-4\Im(k_{z_2})e} - e^{-2\Im(k_{z_2})e}) - i \frac{\Im(k_{z_2}) |t_{21}|^2}{|k_{z_2}|^2 |D|^2} r_{12}^* (e^{-2ik_{z_2}^*e} - e^{-2\Im(k_{z_2})e}) + i \frac{\Im(k_{z_2}) |t_{21}|^2}{|k_{z_2}|^2 |D|^2} r_{12} (e^{2ik_{z_2}^*e} - e^{-2\Im(k_{z_2})e}) \right) \right],$$

où nous avons noté $D = (1 - r_{12}^2 e^{2ik_{z_2}e})$. En utilisant les relations (IV.2.7) et (IV.2.9), et en notant que pour les ondes propageantes $\frac{\omega}{c} > k$, $|\epsilon_1^{TE+}|^2 = 1$ et pour les ondes évanescentes $\frac{\omega}{c} < k$, $|\epsilon_1^{TE+}|^2 = 1 = \epsilon^{TE+} \cdot \epsilon^{TE-}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 F_{th}^{neq}(T,0,z) &= \frac{\hbar}{\pi c^2} \sum_p \int_0^{+\infty} d\omega \omega^2 n(T) \\
 &\left(\Im \left[\frac{\alpha(\omega)}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\omega/c} \frac{kdk}{|D|^2} \left((1 - |r_{12}|^2)(1 - e^{-2\Im(k_{z_2})e}) - (1 - |r_{12}|^2) |r_{12}|^2 (e^{-4\Im(k_{z_2})e} - e^{-2\Im(k_{z_2})e}) \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + 2i\Im(r_{12})r_{12}^*(e^{-2ik_{z_2}^*e} - e^{-2\Im(k_{z_2})e}) - 2i\Im(r_{12})r_{12}(e^{2ik_{z_2}^*e} - e^{-2\Im(k_{z_2})e}) \right) \right] \right. \\
 &+ \Re \left[\frac{\alpha(\omega)}{4\pi\epsilon_0} \int_{\omega/c}^{+\infty} kdk \frac{\epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-}}{|D|^2} \left(2\Im(r_{12})(1 - e^{-2\Im(k_{z_2})e}) - 2\Im(r_{12}) |r_{12}|^2 (e^{-4\Im(k_{z_2})e} - e^{-2\Im(k_{z_2})e}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - i(1 - |r_{12}|^2)r_{12}^*(e^{-2ik_{z_2}^*e} - e^{-2\Im(k_{z_2})e}) + i(1 - |r_{12}|^2)r_{12}(e^{2ik_{z_2}^*e} - e^{-2\Im(k_{z_2})e}) \right) \right] \right).
 \end{aligned}$$

Ce dernier résultat est similaire pour la polarisation TM grâce aux relations (IV.2.5), (IV.2.6), (IV.2.8) et (IV.2.10) et grâce au fait que le milieu 1 correspond au vide, d'où $\epsilon_1^* = 1$. La seule différence pour le terme de la polarisation TM est qu'il faut multiplier par $|\epsilon_1^{TM+}|^2 = (k^2 + |k_{z_1}|^2) / (\omega^2/c^2)$. Nous pouvons faire le même constat que précédemment : pour les ondes propagatives $|\epsilon_1^{TM+}|^2 = 1$, et pour les ondes évanescentes $|\epsilon_1^{TM+}|^2 = \frac{k^2 + |k_{z_1}|^2}{\omega^2/c^2} = \frac{2k^2 - \omega^2/c^2}{\omega^2/c^2} = \epsilon^{TM+} \cdot \epsilon^{TM-}$.

À présent pour le cas du miroir avec une seule couche, nous développons dans l'expression de $F^{neq}(z,T)$ (IV.2.4) les coefficients R et T en terme de coefficient de Fresnel

$$\begin{aligned}
 R &= r_{12} \frac{1 - e^{2ik_{z_2}e}}{D}, \\
 T &= \frac{(1 + r_{12}r_{21})e^{2ik_{z_2}e}}{D}.
 \end{aligned}$$

En injectant ces deux expressions de R et T dans $F^{neq}(z,t)$ (IV.2.4), et en multipliant l'intégrand par D^* pour mettre au même dénominateur que l'expression de $F_{th}^{neq}(T,0,z)$, nous pouvons montrer que $F^{neq}(z,T)$ et $F_{th}^{neq}(T,0,z)$ sont bien égales.

IV.2.3 Application à un exemple

Nous choisissons ici de calculer la force de Casimir-Polder dans le cas d'un déséquilibre entre le miroir et l'environnement pour un atome de rubidium 87 devant un miroir constitué d'une couche d'épaisseur e de silice SiO_2 . Pour faire ce calcul nous allons utiliser la deuxième formulation que nous avons présentée qui introduit directement les coefficients de réflexion et de transmission du miroir dans la partie contribuant au déséquilibre. Sur la figure IV.2, nous avons tracé la force de Casimir-Polder $F_{CP}(z,e,T_S,T_E)$ dans le cas où le miroir a une épaisseur $e = 10 \mu\text{m}$. Nous pouvons faire la même observation que dans le cas du miroir d'épaisseur infinie, la force peut devenir répulsive si la température T_S du miroir est inférieure à la température T_E de l'environnement. Sur la figure IV.3, nous avons tracé la force $F_{CP}(z,e,T_S,T_E)$ en fonction de l'épaisseur e du miroir pour une distance au miroir de $z = 1 \mu\text{m}$. Nous

retrouvons le même comportement que dans le cas à l'équilibre, la force tend vers une valeur asymptotique constante si le rapport $\frac{e}{z}$ devient grand.

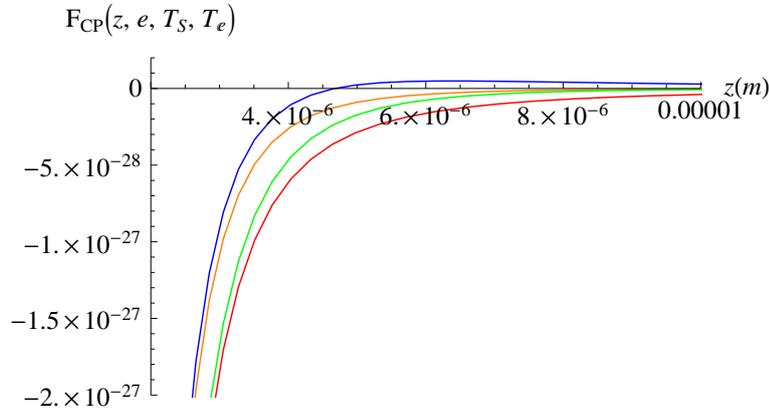


FIGURE IV.2 – Force de Casimir-Polder dans le cas du déséquilibre thermique $F_{CP}(z,e,T_S,T_E)$ exprimée en Newton en fonction de la distance z au miroir exprimée en mètre pour un miroir d'épaisseur $e = 10 \mu\text{m}$: en rouge pour $T_S = 600 \text{ K}$ et $T_E = 300 \text{ K}$, en orange pour $T_S = T_E = 600 \text{ K}$, en vert pour $T_E = T_S = 300 \text{ K}$ et en bleu pour $T_S = 300 \text{ K}$ et $T_E = 600 \text{ K}$.

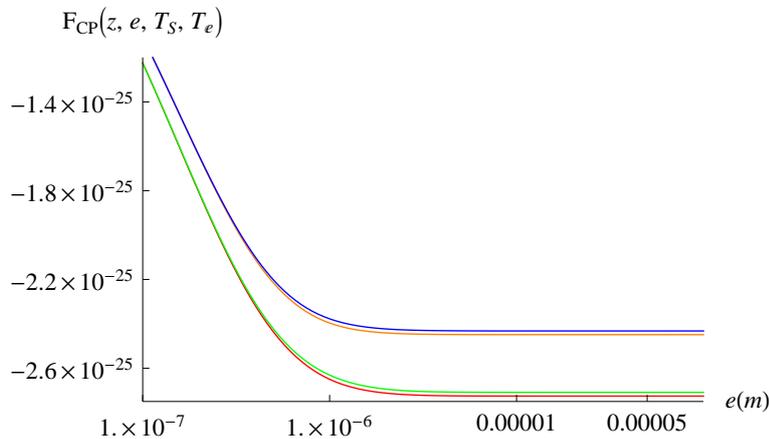


FIGURE IV.3 – Force de Casimir-Polder dans le cas du déséquilibre thermique $F_{CP}(z,e,T_S,T_E)$ à une distance $z = 1 \mu\text{m}$ exprimée en Newton en fonction de l'épaisseur e du miroir exprimée en mètre. En rouge pour $T_S = 600 \text{ K}$ et $T_E = 300 \text{ K}$, en orange pour $T_S = T_E = 600 \text{ K}$, en vert pour $T_E = T_S = 300 \text{ K}$ et en bleu pour $T_S = 300 \text{ K}$ et $T_E = 600 \text{ K}$.

IV.3 Application à l'expérience FORCA-G

L'expérience FORCA-G est conçue de telle manière qu'il serait possible d'étudier le cas du déséquilibre thermique présenté dans les paragraphes précédents. Cette étude ne pourrait se faire que dans le cas où la température du miroir serait plus élevée que celle de l'environnement, la température du miroir ne pouvant être modifiée que par un chauffage laser. Pour pouvoir calculer les niveaux d'énergie des atomes dans le piège optique, il faut déterminer le potentiel de Casimir-Polder dans le cas du déséquilibre thermique.

IV.3.1 Calcul de la partie déséquilibre du potentiel de Casimir-Polder

a Relation entre la force et le potentiel de Casimir-Polder dans le cas du déséquilibre thermique

Reprécisons quelques hypothèses omises lors de nos calculs. Soit un Hamiltonien $H = H_0 + V$ où V représente une petite variation d'énergie devant H_0 . Dans notre situation, H_0 se compose de trois parties : l'Hamiltonien qui décrit le système « extérieur » (réseau, potentiel de pesanteur, etc.), l'Hamiltonien de l'atome qui caractérise l'état interne de l'atome $|a\rangle$ et l'Hamiltonien du champ qui caractérise l'état du champ $|\mathbf{n}(\omega)\rangle$ constitué pour chaque mode de $n(\omega, T)$ photons d'énergie $\hbar\omega$ à la température T . V correspond à l'interaction atome-champ. D'après la théorie quantique des perturbations la correction en énergie au deuxième ordre d'un état $|i\rangle = |a\rangle |\mathbf{n}(\omega)\rangle$ s'écrit :

$$E_i = E_i^0 + V_{nn}^{aa} + \sum_{b \neq a} \sum_{m \neq n} \frac{|V_{nm}^{ab}|^2}{E_n^0 - E_m^0}, \quad (\text{IV.3.1})$$

où E_i^0 correspond à l'énergie d'un état $|i\rangle$ non-perturbé.

Or nous voulons déterminer la correction en énergie des états atomiques et non ceux des états atome-champs car c'est ce que nous mesurons : le temps caractéristique des fluctuations du champ est beaucoup plus court que le temps caractéristique de transition d'un atome. Nous devons alors faire une moyenne statistique sur les états du réservoir. La fonction thermodynamique à considérer pour avoir la correction en énergie d'un atome sera donc $\mathcal{F} = E - TS$ avec \mathcal{F} l'énergie libre, S l'entropie et E l'énergie interne du système. L'expression (IV.3.1) doit être substituée dans

$$e^{-\beta\mathcal{F}^a} = \sum_n e^{-\beta E_n^a}$$

qui correspond à la fonction de partition Z où nous pouvons voir clairement que nous sommes sur toutes les états $|\mathbf{n}(\omega)\rangle$ possibles du champ pour un état atomique $|a\rangle$ donné. Nous trouvons alors

$$\mathcal{F}^a = \mathcal{F}^{a,0} + \sum_n V_{nn}^{aa} p_n + \sum_{b \neq a} \sum_n \sum_{m \neq n} \frac{|V_{nm}^{ab}|^2 p_n}{E_n^0 - E_m^0} - \frac{1}{2k_B T} \sum_n (V_{nn}^{aa})^2 p_n + \frac{1}{2k_B T} \left(\sum_n V_{nn}^{aa} p_n \right)^2$$

où $p_n = e^{\beta E_n} / Z$ est la probabilité que le champ soit dans l'état $|\mathbf{n}(\omega)\rangle$.

Jusqu'à présent dans le cas de l'équilibre thermique avec $T_S = T_E$, ce que nous avons appelé $V_{CP}(z)$ dans les chapitres précédents, était donc cette correction $\delta \mathcal{F}^g$ de l'énergie libre au deuxième ordre pour un atome dans l'état fondamental $|g\rangle$, due au couplage atome-champ.

Dans le cas de déséquilibre thermique entre le miroir et l'environnement, notre calcul précédent de la force $F_{CP}(T_S, T_E, z)$ fait plusieurs hypothèses. Le miroir est à l'équilibre à la température T_S et l'environnement est à l'équilibre à la température T_E , nous négligeons les échanges thermiques entre eux. C'est cette hypothèse qui nous permet également de justifier la sommation de manière incohérente de la contribution des deux champs venant du miroir et de l'environnement pour déterminer la force $F_{CP}(T_S, T_E, z)$ (voir paragraphe IV.2.1). Dans la pratique, cela signifie que le temps de mesure est beaucoup plus petit que le temps nécessaire au miroir pour se thermaliser avec l'environnement. Cette dernière hypothèse est pour l'instant non vérifiée dans la situation expérimentale considérée et reste à démontrer. Dans cette situation, nous pouvons alors écrire

$$\mathcal{F} = - \int_z^{+\infty} F_{CP}(z') dz',$$

comme pour une force conservative. Ainsi nous pouvons écrire pour le potentiel de Casimir-Polder dans le cas d'un déséquilibre thermique entre le miroir et l'environnement :

$$V_{CP}(z, T_S, T_E) = \frac{1}{2} (V^{eq}(z, T_S) + V^{eq}(z, T_E)) + \Delta V(z, T_S, T_E),$$

où la partie déséquilibre ΔV correspond à

$$\Delta V(z, T_S, T_E) = - \int_z^{+\infty} \Delta F(z', T_S, T_E) dz'.$$

Rappelons que nous considérons des températures où $k_B T \ll \hbar \omega_{at}$, loin de la résonance atomique, ainsi le terme indépendant de z dans (IV.2.3) ne contribue pas car la partie imaginaire de la polarisabilité $\alpha''(\omega)$ est nulle si ω est loin de la résonance atomique : ce terme correspond à l'absorption de photons par l'atome. Nous trouvons alors

$$\Delta V(z, T_S, T_E) = \frac{\hbar}{4\pi^2 \epsilon_0 c^2} \Im \left[\sum_p \int_0^{+\infty} d\omega \omega^2 \alpha(\omega) n(T_S, T_E) \right. \\ \left. \times \left(\int_0^{\omega/c} k dk (-\epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} R^p e^{2ik_z z}) \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{\omega/c}^{+\infty} k dk \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} R^{p*} e^{2ik_z z} \right) \right].$$

b Potentiel de Casimir-Polder pour l'expérience FORCA-G

Pour déterminer les niveaux d'énergie des atomes piégés dans le potentiel optique, il ne suffit pas de connaître le potentiel de Casimir-Polder au centre du puits considéré car les fonctions d'onde sont étalées sur plusieurs puits. Il nous faut connaître le potentiel sur un large intervalle : $z \in [10^{-9}, 10^{-4}]$. Cependant le calcul d'un point du potentiel est très long numériquement car les coefficients de réflexion et de transmission du miroir de l'expérience sont plus complexes que pour une seule couche, et à l'inverse du cas à l'équilibre thermique nous intégrons sur toutes les fréquences et non seulement sur les fréquences de Matsubara. Le fait de travailler en fréquences réelles pose un problème qui avait pu être plus ou moins écarté dans le chapitre II : la connaissance du comportement de la permittivité du pentoxyde de tantale pour des fréquences inférieures à 10 cm^{-1} b.

Nous savons que le pentoxyde de tantale est un diélectrique, ce qui implique la propriété suivante : $\epsilon''(-\omega) = -\epsilon''(\omega)$ d'où $\epsilon''(0) = 0$. Or sur l'intervalle en fréquence $[0, 10] \text{ cm}^{-1}$, nous ne connaissons absolument pas le comportement de $\epsilon(\omega)$. Cette méconnaissance n'était pas un frein dans nos précédents calculs car nous travaillions en fréquences complexes, et nous avons pu imposer une borne inférieure d'intégration (une coupure) $\omega = 11,6 \text{ cm}^{-1}$ dans l'intégrale (II.2.1), grâce à la propriété $\epsilon(i0) = \epsilon'(0)$.

À présent, nous devons travailler en fréquences réelles et par conséquent connaître le comportement de la permittivité du pentoxyde de tantale sur l'ensemble du spectre. Or comme nous l'illustrons sur la figure IV.4, nous avons de multiples façons de faire converger $\epsilon''(\omega)$ vers 0 en $\omega = 0$. $\Delta F(z, T_S, T_E)$ dépend alors fortement du comportement que nous imposons à $\epsilon''(\omega)$ sur l'intervalle $[0, 10] \text{ cm}^{-1}$ (soit $[0, 10^{12}] \text{ rad.s}^{-1}$). En effet, ces différents choix accentuent plus ou moins l'existence hypothétique d'une résonance à une fréquence inférieure à 10 cm^{-1} . Pour exemple, nous avons représenté sur la figure IV.4 l'intégrant $f(\omega, z, T_S, T_E)$ de $\Delta F(z, T_S, T_E)$ (IV.2.3) en fonction de ω .

$$f(\omega, z, T_S, T_E) = -\Im \left[\sum_p \omega^2 \alpha(\omega) n(T_S, T_E) \int_{\omega/c}^{+\infty} k dk \epsilon^{p+} \cdot \epsilon^{p-} R^{p*} \frac{e^{2ik_z z}}{2ik_z} \right]$$

En raison de cette difficulté qui n'est pas soluble en l'état de nos connaissances sur les propriétés optiques du matériau constituant le miroir, et afin de pouvoir estimer l'effet de l'application d'un déséquilibre thermique dans un système du type de l'expérience de FORCA-G, nous allons considérer un miroir constitué uniquement d'une couche de silice d'épaisseur $e = 2 \mu\text{m}$ (épaisseur du miroir de l'expérience).

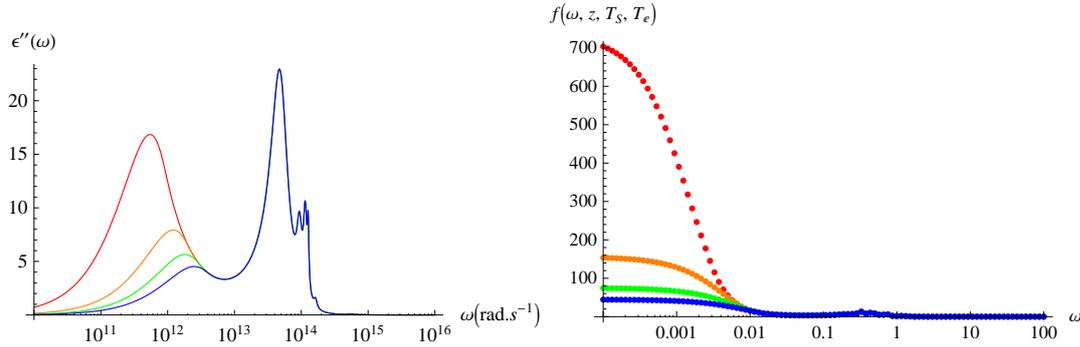


FIGURE IV.4 – À gauche, la permittivité $\epsilon''(\omega)$ du pentoxyde de tantale pour différentes convergences vers $\omega = 0$. À droite représentation de l'intégrant $f(\omega, z, T_S, T_E)$ en fonction de ω (ici variable adimensionnée) pour $z = 10^{-6}$ m, $T_S = 300$ K et $T_E = 300$ K pour les différents comportements représentés pour $\epsilon''(\omega)$.

IV.3.2 Effet du déséquilibre thermique sur les atomes piégés

a Effet des lasers de l'expérience

Rappelons que l'expérience FORCA-G utilise deux lasers qui sont en permanence allumés et dirigés vers le miroir : le laser vert qui crée le réseau optique, et un laser rouge qui sert au confinement transverse des atomes. Ces deux lasers sont donc susceptibles de chauffer le miroir. Nous ne considérons pas les deux lasers Raman, ceux-ci n'étant utilisés que pendant des temps très courts (la durée d'un pulse π , cf. I.1.2). Le laser créant le réseau a pour longueur d'onde $\lambda_l = 532$ nm, un rayon à $1/e^2$ (pour les faisceaux gaussiens, c'est le rayon lorsque la puissance nominale du laser a diminué de e^{-2}) w_l de l'ordre de $700 \mu\text{m}$ et une puissance $P_l = 8$ W. Le laser de confinement a pour longueur d'onde $\lambda_c = 1064$ nm, un rayon à $1/e^2$ $w_c = 190 \mu\text{m}$ et une puissance $P_c = 2.15$ W [4].

La relation (IV.3.2) nous permet de déterminer l'ordre de la variation de température du miroir soumis à un laser [66] par rapport à la température d'équilibre en l'absence de laser :

$$\Delta T = \frac{P_i A}{2\pi w_i \kappa}, \quad (\text{IV.3.2})$$

où P_i est la puissance du laser considéré, w_i est le rayon $1/e^2$ pour ce faisceau laser, A le coefficient d'absorption du miroir, et κ la conductivité thermique du matériau constituant le miroir. La variation de température a une forme gaussienne autour du point d'impact du laser. Pour simplifier notre problème, nous supposons que la variation de température à la surface du miroir est homogène et de l'ordre de ΔT (IV.3.2). Pour une surface constituée de silice sur un substrat en BK7 (c'est le cas d'un des miroirs de l'expérience), nous avons $\kappa = 1,4 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et le coefficient d'absorption A est de l'ordre de 10^{-4} [67]. Ainsi le laser vert du réseau qui est le plus puissant, induit une variation de température ΔT de l'ordre de 10^{-1} K.

Nous procédons comme dans le chapitre III pour déterminer les niveaux d'énergie

des atomes piégés dans le réseau optique face à ce miroir à la température T_S . Nous choisissons un potentiel de Lennard-Jones avec un paramètre $z_{min} = 4 \text{ \AA}$. Nous réalisons le calcul en choisissant une boîte de taille $L = 40$, divisée en $N = 10^4$ points (grille logarithmique). Nous pouvons l'observer sur la figure IV.5 que la différence entre les niveaux d'énergie calculés à l'équilibre thermique à $T_E = 300 \text{ K}$ et les niveaux d'énergie calculés à $T_E = 300 \text{ K}$ et $T_S = 300,1 \text{ K}$ est de l'ordre de 10^{-6} à $10^{-7} E_r$ pour les puits suffisamment éloignés de la surface (voir tableau IV.1). L'effet non voulu du chauffage du miroir par le laser du réseau est supérieur à la précision de $10^{-8} E_r$ visée par l'expérience : soit il faut considérer cet effet comme une source d'incertitude, soit pour chaque mesure la température du miroir doit être connue précisément à chaque mesure.

Comme nous l'avons déjà noté précédemment, l'écart plus important pour les niveaux des atomes piégés dans les premiers puits proches de la surface est dû à la méthode utilisée pour recoller continûment le potentiel de Lennard-Jones et le potentiel de Casimir-Polder. L'écart calculé ici ne prend pas seulement en compte l'effet du déséquilibre thermique ΔT induit sur le miroir. Seuls les niveaux d'énergie pour des atomes dans des puits suffisamment éloignés sont pertinents pour calculer un tel écart.

n	$E_n(300,300)$	$E_n(300 + \Delta T,300)$	n	$E_n(300,300)$	$E_n(300 + \Delta T,300)$
2	1,35082	1,33694	11	0,665425	0,665370
3	1,22342	1,20940	12	0,595483	0,595452
4	1,12825	1,11258	13	0,525494	0,525475
5	1,05778	1,03760	14	0,455476	0,455465
6	1,00351	0,99158	15	0,385441	0,385434
7	0,941889	0,940222	16	0,315396	0,315391
8	0,874162	0,873733	17	0,245342	0,245340
9	0,804944	0,804754	18	0,175284	0,175282
10	0,735276	0,735178	19	0,105222	0,105221

Table IV.1 – Niveaux d'énergie $E_n(T_S, T_E)$ exprimés en E_r pour différentes situations de déséquilibre thermique.

L'étude présentée dans [67] met en lumière l'extrême dépendance du coefficient d'absorption aux différents paramètres caractérisant la surface. Par exemple, suivant que le substrat sur lequel est déposée la couche de matériau est du BK7 ou du silica, le coefficient d'absorption peut être dix fois plus grand et par conséquent la variation de température également. Il est à noter qu'une mesure du coefficient d'absorption du miroir est alors nécessaire pour connaître la variation de température qu'induit le laser dans les conditions de l'expérience FORCA-G.

b Ajout d'un laser de chauffage

L'expérience FORCA-G est construite de telle manière que seul le cas du chauffage du miroir est envisageable. Nous considérons la situation où l'environnement est à la température ambiante de la salle d'expérience avec $T_E = 300 \text{ K}$ et trois cas où le miroir est porté à la température $T_S = 400 \text{ K}$, $T_S = 500 \text{ K}$ et $T_S = 600 \text{ K}$. Ces trois

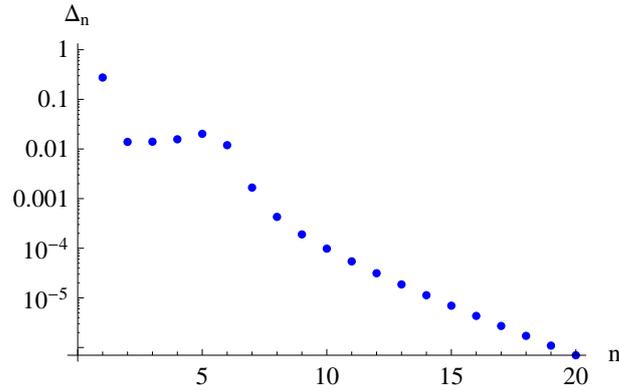


FIGURE IV.5 – L'écart exprimé en E_r entre les niveaux d'énergie E_n calculés dans la situation d'équilibre à $T_E = 300$ K et la situation de léger déséquilibre où $T_S = 300.1$ K.

températures de chauffage ont été choisies en se référant à l'expérience exposée dans [33], où le miroir est chauffé par laser à des températures de 605 K, où 479 K pour une température de l'environnement à 310 K.

Nous procédons comme dans le chapitre III pour déterminer les niveaux d'énergie des atomes piégés dans le réseau optique face à ce miroir à la température T_S . Nous choisissons un potentiel de Lennard-Jones avec un paramètre $z_{min} = 4 \text{ \AA}$. Nous réalisons le calcul en choisissant une boîte de taille $L = 40$, divisée en $N = 10^4$ points. Nous obtenons les énergies E_n résumées dans le tableau IV.2 pour les trois températures T_S envisagées. À noter que le fort impact du déséquilibre thermique sur les niveaux d'énergie des atomes piégés dans les premiers puits n'est pas forcément pertinent, toujours en raison de la manière dont nous raccordons le potentiel de Casimir-Polder et le potentiel de Lennard-Jones qui impacte fortement les paramètres de ce dernier III.2.3. Nous pouvons voir sur la figure IV.6 que la différence entre les niveaux d'énergie E_n calculés à l'équilibre thermique et les niveaux d'énergie calculés dans le cas du déséquilibre est de l'ordre $10^{-4} E_r$ pour $T_S = 600$ K et $10^{-5} E_r$ pour $T_S = 400$ K : l'effet que nous pouvons constater sur le potentiel est clairement identifiable sur les niveaux d'énergie, plus le miroir a une température élevée, plus l'écart par rapport au cas à l'équilibre thermique est grand. L'effet du déséquilibre sur les niveaux d'énergie des atomes est bien supérieur aux variations de température à l'équilibre thermique. Cet effet est alors bien supérieur à la précision visée par l'expérience de $10^{-8} E_r$. Si le chauffage du miroir par laser est envisagé et mis en œuvre avec succès, alors cet effet semble a priori facilement observable. De plus le paragraphe précédent montre qu'un faible chauffage de quelques degrés peut suffire pour avoir un effet significatif en regard de la précision de l'expérience.

n	$E_n(300,300)$	$E_n(400,300)$	$E_n(500,300)$	$E_n(600,300)$
2	1,35082	1,33613	1,34258	1,34072
3	1,22342	1,20815	1,21444	1,21290
4	1,12825	1,11179	1,11806	1,11649
5	1,05778	1,03850	1,04604	1,04390
6	1,00351	0,995095	0,998187	0,996515
7	0,941889	0,941167	0,940888	0,940335
8	0,874162	0,873945	0,873683	0,873365
9	0,804944	0,804798	0,804607	0,804375
10	0,735276	0,735165	0,735016	0,734834
11	0,665425	0,665335	0,665213	0,665065
12	0,595483	0,595408	0,595307	0,595182
13	0,525494	0,525430	0,525343	0,525236
14	0,455476	0,455420	0,455345	0,455253
15	0,385441	0,385392	0,385326	0,385245
16	0,315396	0,315352	0,315293	0,315221
17	0,245342	0,245303	0,245250	0,245186
18	0,175284	0,175249	0,175201	0,175144
19	0,105222	0,105190	0,105147	0,105095
20	0,0351577	0,0351281	0,0350888	0,0350415

Table IV.2 – Niveaux d'énergie $E_n(T_S, T_E)$ exprimés en E_r pour différentes situations de déséquilibre thermique.

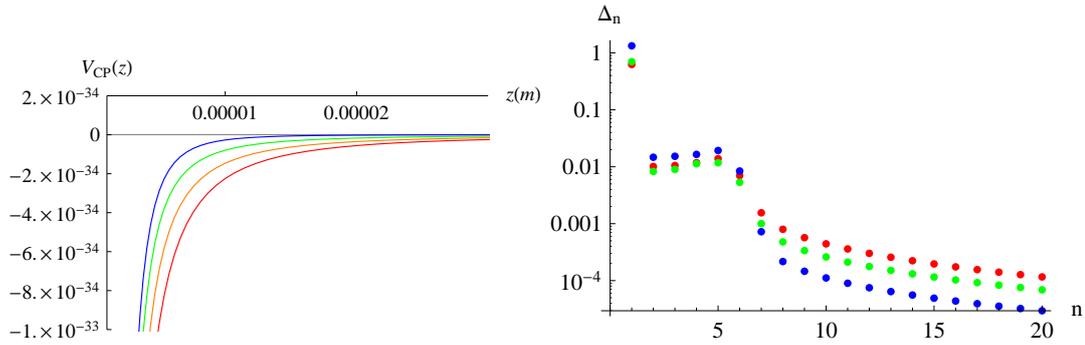


FIGURE IV.6 – À gauche le potentiel de Casimir-Polder exprimé en joule pour $T_S = T_E = 300$ K en bleu, pour $T_S = 400$ K et $T_E = 300$ K en vert, pour $T_S = 500$ K et $T_E = 300$ K en orange, et pour $T_S = 600$ K et $T_E = 300$ K en rouge. À droite l'écart exprimé en E_r entre les niveaux d'énergie E_n calculés dans la situation d'équilibre à $T_E = 300$ K et la situation de déséquilibre où $T_S = 400$ K (en bleu), $T_S = 500$ K (en vert) et $T_S = 600$ K (en rouge).

Conclusion

Dans ce travail, nous avons cherché à fournir l'évaluation théorique la plus réaliste et précise possible des états et niveaux d'énergie d'atomes piégés dans un réseau optique proche d'une surface, selon la situation développée dans l'expérience FORCA-G. Cette expérience en cours de réalisation a pour but de mesurer entre autre l'effet Casimir-Polder et d'atteindre une précision mesure jamais égalée de l'ordre de 10^{-4} Hz, soit $10^{-8} E_r$.

Nous avons d'abord déterminé le potentiel de Casimir-Polder pour le miroir utilisé dans l'expérience à l'équilibre thermique. La difficulté a été la bonne modélisation du miroir. Le manque de connaissances sur la permittivité d'un des matériaux constituant le miroir semblait le facteur limitant pour obtenir le potentiel avec une bonne précision. Nous avons montré qu'il n'en était rien, et que c'était plutôt la précision avec laquelle nous connaissons l'épaisseur des couches de différents matériaux constituant le miroir qui avait le plus fort impact. Néanmoins l'ensemble de ces incertitudes n'a qu'un effet limité sur l'incertitude du potentiel de Casimir-Polder aux distances considérées dans l'expérience.

Dans une deuxième partie, nous avons calculé les états des atomes dans le piège. Nous avons d'abord rappelé le travail déjà réalisé avec un traitement perturbatif du potentiel de Casimir-Polder, et montré l'impossibilité d'utiliser cette méthode pour des atomes piégés dans les premiers puits du réseau, puits trop près de la surface. Nous avons alors développé une méthode non perturbative numérique pour calculer ces états. Nous avons caractérisé l'interaction entre l'atome et la surface à des distances inférieures au nanomètre par un potentiel de Lennard-Jones qui modélise l'interaction répulsive entre le nuage électronique de l'atome et celui des atomes constituant le miroir. Ce modèle introduit alors un paramètre libre z_{min} , la position du minimum du potentiel de Lennard-Jones. Nous espérons que ce paramètre introduit puisse être déterminé à l'aide d'une mesure.

Nous avons aussi montré que l'effet de la température était significatif. Une différence de quelques degrés implique une différence d'environ $10^{-5} - 10^{-6} E_r$ sur les niveaux d'énergie des atomes, effet supérieur aux autres incertitudes dues au potentiel ou à la méthode de calcul sur les niveaux d'énergie, et surtout effet bien supérieur à la précision visée. Ainsi, grâce à la précision par l'expérience, la dépendance à la température du potentiel de Casimir-Polder pourrait être mesurée simplement à travers les fluctuations de température de la salle d'expérience.

Dans une dernière partie, nous nous sommes intéressés à la situation où nous pourrions appliquer un déséquilibre thermique entre le miroir et l'environnement. Nous avons présenté deux méthodes pour calculer la force de Casimir-Polder dans cette si-

tuation, l'une utilisant le formalisme des fonctions de Green, et une autre utilisant les matrices de diffusion. Nous n'avons pu donner qu'un ordre d'idée de l'effet de ce déséquilibre sur les niveaux d'énergie des atomes car nous avons choisi de faire ce calcul en utilisant un miroir plus simple que celui de l'expérience. En effet le manque d'information sur la permittivité du pentoxyde de tantale dans le domaine infra-rouge limite fortement la pertinence d'une telle évaluation pour le miroir réel de l'expérience.

L'excellente précision visée par l'expérience FORCA-G nous permet d'envisager de nombreux autres effets à étudier, comme la dépendance à la rugosité de la surface du miroir, ou encore, la modélisation des effets sur le potentiel Casimir-Polder des atomes qui se collent au miroir. Néanmoins toute étude d'un déséquilibre thermique entre l'environnement et le miroir nécessite un approfondissement de nos connaissances sur la permittivité des matériaux constituant le miroir de l'expérience.

Annexe A

Fonctions de Green

Dans cet appendice, nous présentons le formalisme des fonctions de Green solutions de l'équation d'onde (A.1.6). Ensuite grâce au formalisme développé dans [65] pour les surfaces optiques, nous présentons l'expression de la fonction de Green, solution de cette équation d'onde, dans la géométrie qui nous intéresse. Pour finir nous rappelons la relation (IV.1.6) et la redémontrons dans le cas d'une configuration à trois couches.

A.1 Formalisme

Nous considérons un milieu continu homogène diélectrique de permittivité relative $\epsilon(\omega)$ de volume V . Les équations de Maxwell classiques pour les champs électriques et magnétiques s'écrivent alors :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.1.1})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{A.1.2})$$

où le champ \mathbf{D} est l'induction électrique, \mathbf{H} le champ magnétique et \mathbf{B} l'induction magnétique. Ils sont reliés par les relations :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (\text{A.1.3})$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

avec \mathbf{P} le champ de polarisation, et \mathbf{M} le champ de magnétisation. Nous ne considérons pas ici de champ de magnétisation car nous avons un matériau diélectrique. À partir des équations et relations (A.1.1), (A.1.2) et (A.1.3), nous obtenons l'équation d'onde suivante qui relie le champ électrique \mathbf{E} et le champ de polarisation \mathbf{P}

$$\nabla \wedge \nabla \mathbf{E} - \frac{\epsilon(\omega)\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = \mu_0 \omega^2 \mathbf{P}. \quad (\text{A.1.4})$$

Nous pouvons écrire le champ électrique \mathbf{E} à la position \mathbf{r} comme la convolution

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \int_V d^3 \mathbf{r}' \mathbf{G}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}(\omega, \mathbf{r}'), \quad (\text{A.1.5})$$

du champ de polarisation $\mathbf{P}(\omega, \mathbf{r}')$ à la position \mathbf{r}' avec la fonction de Green $\mathbf{G}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ du système considéré. La fonction de Green décrit entièrement . Dans ce cas l'équation d'onde précédente (A.1.4) donne :

$$\nabla \wedge \nabla \mathbf{G}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\epsilon(\omega)\omega^2}{c^2} \mathbf{G}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mu_0 \omega^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{A.1.6})$$

Dans la suite nous allons utiliser le formalisme des fonctions de Green développé par Sipe [65] pour les surfaces optiques. Ce formalisme a l'avantage d'exprimer ces fonctions à l'aide de coefficients de réflexion et de transmission des interfaces considérées et des vecteurs de polarisations ϵ^{TE} et $\epsilon^{TM\pm}$, ce qui est totalement adapté à la géométrie que nous avons dans notre problème, à savoir un atome devant un miroir plan.

A.2 Configuration d'un atome face à une interface

Nous considérons la configuration où nous avons deux milieux diélectriques 1 et 2 séparés par une interface plan qui correspond dans notre cas à un miroir diélectrique, qui se trouve dans le plan xOy à la position $z = 0$. Le milieu 1 de permittivité ϵ_1 est dans la zone de l'espace où $z > 0$ (à droite de l'interface) et le milieu 2 de permittivité ϵ_2 est dans la zone de l'espace où $z < 0$ (à gauche de l'interface). Du fait de la géométrie, nous pouvons écrire la fonction de Green sous la forme d'une transformée de Fourier 2D

$$G_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')} g_{ij}(\omega, \mathbf{k}, z, z') \quad (\text{A.2.1})$$

où la fonction $g_{ij}(\omega, \mathbf{k}, z, z')$ ne dépend que du vecteur d'onde transverse et de la coordonnée selon l'axe \mathbf{e}_z .

Le champ électrique observé dans la zone 1 en \mathbf{r} ($z > 0$) se décompose en quatre contributions. Ce champ peut être généré par une source de radiation également dans la zone 1 à la position \mathbf{r}' qui atteint la position d'observation du champ en \mathbf{r} sans aucune réflexion sur l'interface, c'est la partie incidente du champ $\mathbf{E}^{(i)}(\omega, \mathbf{r})$. Le champ peut être généré par une source de radiation dans la zone 1 à la position \mathbf{r}' qui atteint la position d'observation du champ en \mathbf{r} en se réfléchissant sur l'interface, c'est la partie réfléchie du champ $\mathbf{E}^{(r)}(\omega, \mathbf{r})$. Enfin il y a une dernière composante au champ qui est la partie locale $\mathbf{E}^{(l)}(\omega, \mathbf{r})$. Ce champ peut être généré par une source de radiation qui provient de la zone 2 à la position \mathbf{r}' qui atteint la position d'observation du champ en \mathbf{r} dans la zone 1 en traversant l'interface, c'est la partie transmise du champ $\mathbf{E}^{(t)}(\omega, \mathbf{r})$.

Les transformées de Fourier des fonctions de Green correspondantes à ces différentes contributions du champ électrique observé depuis la zone 1 s'écrivent

$$g_{ij}^{(i)}(\omega, \mathbf{k}, z, z') = i \frac{\omega^2}{2\epsilon_0 c^2 k_{z_1}} \left((\epsilon_1^{TE})_i (\epsilon_1^{TE})_j + (\epsilon_1^{TM+})_i (\epsilon_1^{TM+})_j \right) e^{ik_{z_1}|z-z'|},$$

où la polarisation est ϵ^{TM+} si $z' < z$, et ϵ^{TM-} si $z' > z$,

$$g_{ij}^{(r)}(\omega, \mathbf{k}, z, z') = i \frac{\omega^2}{2\epsilon_0 c^2 k_{z_1}} \left((\epsilon_1^{TE})_i (\epsilon_1^{TE})_j r^{TE} + (\epsilon_1^{TM+})_i (\epsilon_1^{TM-})_j r^{TM} \right) e^{ik_{z_1}(z+z')},$$

$$g_{ij}^{(l)}(\omega, \mathbf{k}, z, z') = -\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_1(\omega)} \delta_{iz} \delta_{jz} \delta(z - z'),$$

$$g_{ij}^{(t)}(\omega, \mathbf{k}, z, z') = i \frac{\omega^2}{2\epsilon_0 c^2 k_{z_2}} \left((\epsilon_1^{TE})_i (\epsilon_2^{TE})_j t^{TE} + (\epsilon_1^{TM+})_i (\epsilon_2^{TM+})_j t^{TM} \right) e^{i(k_{z_1}z - k_{z_2}z')},$$

où r^{TE} , r^{TM} , t^{TE} et t^{TM} sont respectivement les coefficients de réflexion à l'interface dans la zone 1 et de transmission de la zone 2 vers la zone 1 pour les polarisations transverse électrique et transverse magnétique. La définition des vecteurs de polarisation $\epsilon_{1/2}^{TE}$ et $\epsilon_{1/2}^{TM}$ dans le milieu 1 ou 2 est

$$\epsilon_{1/2}^{TE} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_z = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} k_y \\ k_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2.2})$$

$$\epsilon_{1/2}^{TM\pm} = \epsilon_{1/2}^{TE} \wedge \mathbf{K}_{1/2}^\pm = \frac{1}{K_{1/2} k} \begin{pmatrix} \mp k_x k_{z_{1/2}} \\ \mp k_y k_{z_{1/2}} \\ k^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2.3})$$

avec le vecteur d'onde $\mathbf{K}_{1/2}$ dans le milieu 1 ou 2 et le vecteur d'onde transverse \mathbf{k} .

A.3 Configuration d'un atome face à un milieu d'épaisseur finie

Nous considérons à présent trois milieux 1, 2 et 3 respectivement de permittivité $\epsilon_1(\omega)$, $\epsilon_2(\omega)$ et $\epsilon_3(\omega)$ selon la configuration représentée sur la figure A.1. Nous utilisons le formalisme des matrices de transfert développé dans II.2.2 où le champ électrique dans un milieu i s'écrit sous la forme d'un vecteur ayant pour

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E^+ \epsilon^{p+} e^{i\mathbf{K}^+ \cdot \mathbf{r}} + E^- \epsilon^{p-} e^{i\mathbf{K}^- \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{A.3.1})$$

où E^+ correspond à la composante du champ se propageant dans le sens des z croissant et E^- dans le sens des z décroissant. $\epsilon^{p\pm}$ est le vecteur polarisation avec $p \in \{TE, TM\}$. Ici le champ est décomposé sur la base des ondes progressives et régressives.

Nous souhaitons déterminer le champ créé dans le milieu 1 par une source se trouvant dans le milieu 2. Nous considérons une source

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P} \delta(z - z_0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}},$$

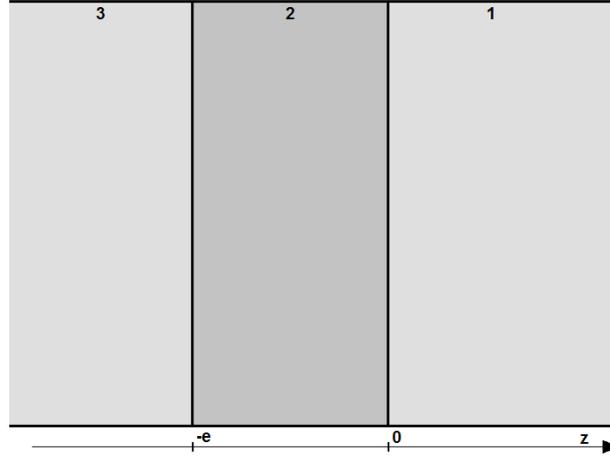


FIGURE A.1 – Représentation schématique d'un configuration de la situation

où $0 > z_0 > -e$. Considérons le champ créé par cette source dans le cas où le milieu 2 emplit tout l'espace. Dans ce cas le champ électrique s'écrit $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(z)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}$ avec

$$\mathbf{E}(z) = \frac{i\omega^2}{2\epsilon_0 c^2 k_{z_2}} \sum_p \left[\left(\epsilon_2^{p+} \right)_i \left(\epsilon_2^{p+} \right)_j P_j \theta(z - z_0) e^{ik_{z_2}(z - z_0)} + \left(\epsilon_2^{p-} \right)_i \left(\epsilon_2^{p-} \right)_j P_j \theta(z - z_0) e^{ik_{z_2}(z - z_0)} \right] - \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_2} P_i \delta(z - z_0) \quad (\text{A.3.2})$$

À partir de (A.3.2) et de (A.3.1), nous pouvons remarquer que $E_2^- = 0$ si $z > z_0$ et $E_2^+ = 0$ si $z < z_0$, alors le champ créé par une source à la position z_0 s'écrit

$$E_2(z_0^+) = \begin{pmatrix} v^+ \\ -v^- \end{pmatrix} + E_2(z_0^-) = v + E_2(z_0^-), \quad (\text{A.3.3})$$

où

$$v^\pm = \frac{i\omega^2}{2\epsilon_0 c^2} \frac{1}{k_{z_2}} \epsilon_2^{p^\pm} \cdot \mathbf{P}$$

Grâce au formalisme des matrices de transfert, nous pouvons relier les champs $E_1(0)$, $E_2(z_0^+)$, $E_2(z_0^-)$ et $E_3(-e)$ par les relations

$$E_1(0) = T_{12} (T_2^{prop}(-z_0))^{-1} E_2(z_0^+),$$

$$E_2(z_0^-) = (T_2^{prop}(z_0 + e))^{-1} T_{23} E_3(-e).$$

À partir de (A.3.3), nous obtenons la relation suivante

$$E_1(0) = T_{12} (T_2^{prop}(-z_0))^{-1} v + T_{12} (T_2^{prop}(e))^{-1} T_{23} E_3(-e), \quad (\text{A.3.4})$$

où T_{ij} est la matrice de transfert au niveau de l'interface du milieu i vers le milieu j et $T_i^{prop}(z)$ est la matrice de transfert dans le milieu i sur une distance z . Si le champ électrique créé dans le milieu 1 ou le milieu 3 est uniquement dû à la source dans le milieu 2, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de champ incident venant de $z = \pm\infty$, alors nous avons

$$E_1(0) = \begin{pmatrix} E_1^+ \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_2(-e) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_2^- e^{ik_{z3}e} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.5})$$

À partir des équations (A.3.4) et (A.3.5), nous pouvons déterminer E_1^+ et E_2^- , et en particulier nous obtenons

$$E_1^+ = t_{21} \frac{e^{-k_{z2}z_0} v_+ + r_{23} e^{2ik_{z2}e} e^{ik_{z2}z_0} v_-}{1 - r_{23} r_{21} e^{2ik_{z2}e}}.$$

Nous considérons, à présent, une source plus générale de la forme

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(z) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}},$$

avec $-e < z < 0$, la solution est obtenue grâce au principe de superposition. Nous trouvons pour un champ de la forme $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1 e^{i\mathbf{K}_1^+ \cdot \mathbf{r}} = E_{1+} \boldsymbol{\epsilon}_1^{p+} e^{i\mathbf{K}_1^+ \cdot \mathbf{r}}$ qui se propage dans le sens des z croissant dans la région 1

$$E_{1+} = \frac{i\omega^2}{2\epsilon_0 c^2 k_{2z}} \sum_p \frac{t_{21}^p}{1 - r_{21}^p r_{21}^p e^{2ik_{z2}e}} \left[\int_{-e}^0 e^{-ik_{z2}z'} \boldsymbol{\epsilon}_2^{p+} \cdot \mathbf{P}(z') dz' \right. \\ \left. + r_{21}^p e^{2ik_{z2}e} \int_{-e}^0 e^{ik_{z2}z'} \boldsymbol{\epsilon}_2^{p-} \cdot \mathbf{P}(z') dz' \right]$$

où nous avons remplacé v^\pm par son expression. À partir de (A.1.5) et (A.2.1), l'expression de E_{1+} nous permet de déduire la fonction de green transmise $G_{ij}^{(tEp)}(\omega, \mathbf{k}, z, z')$ du milieu (2) vers le milieu (1), ainsi nous avons l'expression suivante

$$g_{ij}^{(tEp)}(\omega, \mathbf{k}, z, z') = \frac{i\omega^2}{2\epsilon_0 c^2 k_{2z}} \sum_p \left[\frac{t_{21}^p}{1 - r_{21}^p r_{21}^p e^{2ik_{z2}e}} \left(\boldsymbol{\epsilon}_2^{p+} \right)_i \left(\boldsymbol{\epsilon}_1^{p+} \right)_j e^{(ik_{z1}z - ik_{z2}z')} \right. \\ \left. + \frac{t_{21}^p r_{21}^p e^{2ik_{z2}e}}{1 - r_{21}^p r_{21}^p e^{2ik_{z2}e}} \left(\boldsymbol{\epsilon}_2^{p-} \right)_i \left(\boldsymbol{\epsilon}_1^{p+} \right)_j e^{(ik_{z1}z + ik_{z2}z')} \right].$$

A.4 Relation entre la théorie de la réponse-linéaire et la théorie de Langevin

À plusieurs reprises, nous avons utilisé la relation ci-dessous [64], par exemple dans le chapitre II afin de remplacer le produit de convolution de fonction Green par la partie imaginaire de celle-ci.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon_0} \Im(G_{ik}^{(i)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + G_{ik}^{(l)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + G_{ik}^{(r)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')) = \\ & \sum_{(a,b) \in \{i,l,r\}} \int d\mathbf{r}'' \epsilon_1''(\omega) G_{ik}^{(a)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') G_{ik}^{(b)*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') + \int d\mathbf{r}'' \epsilon_2''(\omega) G_{ik}^{(t)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') G_{ik}^{(t)*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') \end{aligned} \quad (\text{A.4.1})$$

Soit un système constitué de deux régions de volume V_1 et V_2 . La région V_2 correspond au vide séparé par une interface de la région V_1 . Cette dernière région est elle-même constituée de N régions diélectriques de volume V_{1i} . Nous avons alors la fonction diélectrique déterminée pour l'ensemble du système par

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \epsilon_{ij}^{(1i)}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') & \text{pour } \{\mathbf{r}, \mathbf{r}'\} \in V_{1i} \\ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') & \text{pour } \{\mathbf{r}, \mathbf{r}'\} \in V_{1i} \\ 0 & \text{si } \mathbf{r} \text{ et } \mathbf{r}' \text{ n'appartiennent pas au même milieu} \end{cases} \quad (\text{A.4.2})$$

Rien n'exclut que le milieu matériel de l'une des régions V_{1i} soit le vide.

Dans l'approche théorique de la réponse-linéaire, le champ électrique dans (A.1.5) est interprété en terme de valeur moyenne. Cette valeur moyenne du champ disparaît si le champ de polarisation \mathbf{P} est absent. Le théorème de fluctuation-dissipation relie alors la fonction de corrélation symétrisée à la fonction de réponse

$$\left\langle \frac{1}{2} \{E_i(\mathbf{r}, t), E_j^*(\mathbf{r}', t)\} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \hbar \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \Im(G_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')). \quad (\text{A.4.3})$$

Dans l'approche théorique de Langevin, les champs électrique et magnétique sont interprétés comme des variables stochastiques qui sont gouvernées par les champs de polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ et de magnétisation $\mathbf{M}(\mathbf{r})$. Ces champs décrivent un processus aléatoire gaussien. Ainsi pour décrire ce processus, la connaissance de la fonction de corrélation est suffisante. Nous avons alors la relation symétrisée suivante pour la polarisation

$$\left\langle \frac{1}{2} \{P_i(\omega, \mathbf{r}), P_j^*(\omega', \mathbf{r}')\} \right\rangle = 4\pi\epsilon_0 \hbar \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \epsilon_{ij}''(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta(\omega - \omega').$$

C'est ce point de vue que nous avons utilisé pour déterminer la force de Casimir-Polder dans le cas du déséquilibre thermique. En écrivant la fonction de corrélation symétrisée

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} \{E_i(\mathbf{r}_1, t), E_j(\mathbf{r}_2, t)\} \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int_V d^3r \int_V d^3r' \epsilon_0 \hbar \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \\ &\quad \times G_{ik}(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}) G_{jl}^*(\omega, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \epsilon_{kl}''(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (\text{A.4.4})$$

Si l'ensemble du système défini est à l'équilibre thermodynamique, nous nous attendons à ce que les deux points de vues mènent à un résultat identique. Ainsi par comparaison de (A.4.3) et (A.4.4), nous trouvons la condition

$$\Im (G_{ij}(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)) = \epsilon_0 \int_V d^3r \int_V d^3r' G_{ik}(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}) G_{jl}^*(\omega, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \epsilon''_{kl}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Cette condition est démontrée rigoureusement dans [64]. Cette dernière expression est équivalente à la formule (A.4.1) appliquée dans le cas où le système est constitué de seulement un volume V_1 d'un milieu de permittivité $\epsilon_1(\omega)$ et V_2 de permittivité $\epsilon_2(\omega)$, où les corrélations du champ de polarisation sont locales (permittivité indépendante de la position). L'expression (IV.2.1) donnant la force de Casimir-Polder dans le cas d'un miroir multi-couche découle de (A.4.1) établie pour un système constitué de plusieurs régions V_{1i} de permittivité diélectrique (A.4.2).

Bibliographie

- [1] P. Wolf, P. Lemonde, A. Lambrecht, S. Bize, A. Landragin, et A. Clairon, “From optical lattice clocks to the measurement of forces in the casimir regime,” *Phys. Rev. A* **75**, 063608 (2007). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.75.063608>. I, I.1.3
- [2] S. Pelisson, “Etude d’états atomiques à proximité d’une surface massive : Application à l’expérience forca-g,” Thèse de doctorat, UPMC (2012). I, I.1.2, I.2, a, I.1.3, I.3, III.1.3, III.2, III.2.1, III.2.5, III.4.1
- [3] J. Dalibard, “Le potentiel dipolaire,” dans “Des cages de lumières pour les atomes : la physique des pièges et des réseaux atomiques,” (2013). URL : https://www.college-de-france.fr/media/jean-dalibard/UPL4448615917413485875_Resume_cours1_6.pdf. I.1.1
- [4] B. Pelle, “Interféromètres atomiques dans un réseau optique,” Thèse de doctorat, UPMC (2013). I.1.2, a, b, III.4.1, a
- [5] A. Hilico, “Capteur de forces à atomes piégés dans un réseau optique. caractérisation des performances,” Thèse de doctorat, ENS (2014). b
- [6] R. Messina, S. Pelisson, M.-C. Angonin, et P. Wolf, “Atomic states in optical traps near a planar surface,” *Phys. Rev. A* **83**, 052111 (2011). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.052111>. I.1.3, I.6, III.2, III.2.1, III.2.4, III.2.5
- [7] J. D. van der Waals, “Over de continuïteit van den gas- en vloeïstoestand,” Thèse de doctorat, Leiden (1873). I.2
- [8] F. London, “Zur theorie und systematik der molekularkräfte,” *Zeitschrift für Physik* **63**, 245–279 (1930). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/BF01421741>. I.2
- [9] E. J. W. Verwey et J. T. G. Overbeek, “Long distance forces acting between colloidal particles,” *Trans. Faraday Soc.* **42**, B117–B123 (1946). URL : <http://dx.doi.org/10.1039/TF946420B117>. I.2
- [10] H. B. G. Casimir et D. Polder, “The influence of retardation on the london-van der waals forces,” *Phys. Rev.* **73**, 360–372 (1948). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.73.360>. I.2, I.2.1
- [11] S. Z. E. A. Power, “Coulomb gauge in non-relativistic quantum electro-dynamics and the shape of spectral lines,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **251**, 427–454 (1959). URL : <http://www.jstor.org/stable/91664>. I.2.1, II.1.1
- [12] H. B. G. Casimir, “Sur les forces van der waals-london,” *Journal de chimie physique et de physico-chimie biologique* **46**, 407–410 (1949). I.2.2

- [13] H. B. G. Casimir, "On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates," *Indag. Math.* **10**, 261–263 (1948). [Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc.100N3-4,61(1997)]. [I.2.2](#)
- [14] M. Sparnaay, "Measurements of attractive forces between flat plates," *Physica* **24**, 751 – 764 (1958). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031891458800907>. [a](#)
- [15] P. H. G. M. van Blokland et J. T. G. Overbeek, "van der waals forces between objects covered with a chromium layer," *J. Chem. Soc., Faraday Trans. 1* **74**, 2637–2651 (1978). URL : <http://dx.doi.org/10.1039/F19787402637>. [a](#)
- [16] S. K. Lamoreaux, "Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μ m range," *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5–8 (1997). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.5>. [a](#)
- [17] S. K. Lamoreaux, "Erratum : Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μ m range [phys. rev. lett. 78, 5 (1997)]," *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5475–5476 (1998). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.5475>. [a](#)
- [18] A. Lambrecht et S. Reynaud, "Comment on "demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μ m range"," *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5672–5672 (2000). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.5672>. [a](#)
- [19] S. K. Lamoreaux, "Lamoreaux replies :," *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5673–5673 (2000). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.5673>. [a](#)
- [20] U. Mohideen et A. Roy, "Precision measurement of the casimir force from 0.1 to 0.9 μ m," *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4549–4552 (1998). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.4549>. [a](#)
- [21] A. Roy, C.-Y. Lin, et U. Mohideen, "Improved precision measurement of the casimir force," *Phys. Rev. D* **60**, 111101 (1999). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.111101>. [a](#)
- [22] B. W. Harris, F. Chen, et U. Mohideen, "Precision measurement of the casimir force using gold surfaces," *Phys. Rev. A* **62**, 052109 (2000). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.62.052109>. [a](#)
- [23] J. Chiaverini, S. J. Smullin, A. A. Geraci, D. M. Weld, et A. Kapitulnik, "New experimental constraints on non-newtonian forces below 100 μ m," *Phys. Rev. Lett.* **90**, 151101 (2003). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.151101>. [a](#)
- [24] R. Decca, D. López, E. Fischbach, G. Klimchitskaya, D. Krause, et V. Mostepanenko, "Precise comparison of theory and new experiment for the casimir force leads to stronger constraints on thermal quantum effects and long-range interactions," *Annals of Physics* **318**, 37 – 80 (2005). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491605000485>, special Issue. [a](#)
- [25] C. I. Sukenik, M. G. Boshier, D. Cho, V. Sandoghdar, et E. A. Hinds, "Measurement of the casimir-polder force," *Phys. Rev. Lett.* **70**, 560–563 (1993). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.560>. [b](#)

- [26] A. Landragin, J.-Y. Courtois, G. Labeyrie, N. Vansteenkiste, C. I. Westbrook, et A. Aspect, “Measurement of the van der waals force in an atomic mirror,” *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1464–1467 (1996). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.1464>. b
- [27] F. Shimizu, “Specular reflection of very slow metastable neon atoms from a solid surface,” *Phys. Rev. Lett.* **86**, 987–990 (2001). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.987>. b
- [28] V. Druzhinina et M. DeKieviet, “Experimental observation of quantum reflection far from threshold,” *Phys. Rev. Lett.* **91**, 193202 (2003). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.193202>. b
- [29] T. A. Pasquini, Y. Shin, C. Sanner, M. Saba, A. Schirotzek, D. E. Pritchard, et W. Ketterle, “Quantum reflection from a solid surface at normal incidence,” *Phys. Rev. Lett.* **93**, 223201 (2004). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.223201>. b
- [30] H. Oberst, Y. Tashiro, K. Shimizu, et F. Shimizu, “Quantum reflection of he* on silicon,” *Phys. Rev. A* **71**, 052901 (2005). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.052901>. b
- [31] D. M. Harber, J. M. Obrecht, J. M. McGuirk, et E. A. Cornell, “Measurement of the casimir-polder force through center-of-mass oscillations of a bose-einstein condensate,” *Phys. Rev. A* **72**, 033610 (2005). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.72.033610>. b
- [32] M. Antezza, L. P. Pitaevskii, et S. Stringari, “Effect of the casimir-polder force on the collective oscillations of a trapped bose-einstein condensate,” *Phys. Rev. A* **70**, 053619 (2004). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.70.053619>. b
- [33] J. M. Obrecht, R. J. Wild, M. Antezza, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, et E. A. Cornell, “Measurement of the temperature dependence of the casimir-polder force,” *Phys. Rev. Lett.* **98**, 063201 (2007). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.063201>. b, b
- [34] H. Failache, S. Saliel, M. Fichet, D. Bloch, et M. Ducloy, “Resonant van der waals repulsion between excited cs atoms and sapphire surface,” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5467–5470 (1999). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.5467>. b
- [35] Laiotis, A., Passerat de Silans, T., Maurin, I., Ducloy, M., et Bloch, D., “Casimir-polder interactions in the presence of thermally excited surface modes,” *Nat. Commun.* **5**, 4364 (2014). URL : <http://www.nature.com/ncomms/2014/140709/ncomms5364/full/ncomms5364.html>. b
- [36] S. Dimopoulos et A. A. Geraci, “Probing submicron forces by interferometry of bose-einstein condensed atoms,” *Phys. Rev. D* **68**, 124021 (2003). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.68.124021>. b
- [37] Scheel, S. et Buhmann, Y., “Macroscopic quantum electrodynamics : concepts and applications,” *Acta Physica Slovaca* **58** (2008). II.1

- [38] C. Henkel, K. Joulain, J.-P. Mulet, et J.-J. Greffet, “Radiation forces on small particles in thermal near fields,” *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics* **4**, S109 (2002). URL : <http://stacks.iop.org/1464-4258/4/i=5/a=356>. II.1
- [39] M. Antezza, “Thermal dependence of the casimir-polder-lifshitz force and its effect on ultra-cold gases,” Thèse de doctorat, University of Trenton, Department of Physics (2006). II.1, IV
- [40] C. Genet, A. Lambrecht, et S. Reynaud, “Casimir force and the quantum theory of lossy optical cavities,” *Phys. Rev. A* **67**, 043811 (2003). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.67.043811>. II.1, II.2.2
- [41] Reynaud, S. et Lambrecht, A., “Casimir forces,” (2014). II.1
- [42] R. Carminati, M. Nieto-Vesperinas, et J.-J. Greffet, “Reciprocity of evanescent electromagnetic waves,” *J. Opt. Soc. Am. A* **15**, 706–712 (1998). URL : <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-15-3-706>. c
- [43] E. D. Palik, éd., *Handbook of Optical Constants of Solids* (Academic Press, 1997). a, II.2, II.3.3, b, IV.1.3
- [44] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., et Pitaevskii, L. P., *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon Press, 1984). a
- [45] T. J. Bright, J. I. Watjen, Z. M. Zhang, C. Muratore, A. A. Voevodin, D. I. Koukis, D. B. Tanner, et D. J. Arenas, “Infrared optical properties of amorphous and nanocrystalline ta₂o₅ thin films,” *Journal of Applied Physics* **114**, 083515 (2013). URL : <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jap/114/8/10.1063/1.4819325>. b, II.3.3, a
- [46] C. Genet, “La force de casimir entre deux miroirs métalliques à température non nulle,” Thèse de doctorat, Université Paris VI (2002). II.2.2
- [47] A. Yariv et P. Yeh, *Optical waves in crystals* (Wiley, New York, 1984). II.3.1
- [48] A. Derevianko, S. G. Porsev, et J. F. Babb, “Electric dipole polarizabilities at imaginary frequencies for hydrogen, the alkali-metal, alkaline-earth, and noble gas atoms,” *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **96**, 323 – 331 (2010). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0092640X09000874>. II.4.3
- [49] J. Dalibard, “Réseaux optiques : les principes de base,” dans “Des cages de lumières pour les atomes : la physique des pièges et des réseaux atomiques,” (2013). URL : http://www.college-de-france.fr/media/jean-dalibard/UPL8676362538384804843_cours2.pdf. III.1.1
- [50] J. Dalibard, “Réseaux optiques dans le régime des liaisons fortes,” dans “Des cages de lumières pour les atomes : la physique des pièges et des réseaux atomiques,” (2013). URL : http://www.college-de-france.fr/media/jean-dalibard/UPL7303764949083833780_cours3.pdf. III.1.2
- [51] P. Lemonde et P. Wolf, “Optical lattice clock with atoms confined in a shallow trap,” *Phys. Rev. A* **72**, 033409 (2005). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.72.033409>. III.1.3
- [52] Sedlacek, J. A., Kim, E., Rittenhouse, S. T., Weck, P. F., Sadeghpour, H. R., et Shaffer, J. P., “Electric field cancellation on quartz : a rb absorbate induced negative electron affinity surface,” (2015). III.2.3, b

- [53] J. M. Obrecht, R. J. Wild, et E. A. Cornell, “Measuring electric fields from surface contaminants with neutral atoms,” *Phys. Rev. A* **75**, 062903 (2007). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.75.062903>. III.2.3
- [54] P. A. Maia Neto, A. Lambrecht, et S. Reynaud, “Casimir energy between a plane and a sphere in electromagnetic vacuum,” *Phys. Rev. A* **78**, 012115 (2008). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.012115>. III.2.5
- [55] A. Canaguier-Durand, P. A. Maia Neto, I. Cavero-Pelaez, A. Lambrecht, et S. Reynaud, “Casimir interaction between plane and spherical metallic surfaces,” *Phys. Rev. Lett.* **102**, 230404 (2009). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.230404>. III.2.5
- [56] A. Canaguier-Durand, A. Gérardin, R. Guérout, P. A. Maia Neto, V. V. Nesvizhevsky, A. Y. Voronin, A. Lambrecht, et S. Reynaud, “Casimir interaction between a dielectric nanosphere and a metallic plane,” *Phys. Rev. A* **83**, 032508 (2011). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.032508>. III.2.5
- [57] W. E. Milne, “The numerical determination of characteristic numbers,” *Phys. Rev.* **35**, 863–867 (1930). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.35.863>. d
- [58] H. Friedrich et J. Trost, “Working with {WKB} waves far from the semiclassical limit,” *Physics Reports* **397**, 359 – 449 (2004). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157304001589>. d
- [59] Q. Beaufils, G. Tackmann, X. Wang, B. Pelle, S. Pelisson, P. Wolf, et F. P. dos Santos, “Laser controlled tunneling in a vertical optical lattice,” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 213002 (2011). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.213002>. III.4.1, III.4.2
- [60] S. Pelisson, R. Messina, M.-C. Angonin, et P. Wolf, “Dynamical aspects of atom interferometry in an optical lattice in proximity to a surface,” *Phys. Rev. A* **86**, 013614 (2012). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.013614>. III.4.1
- [61] M. Antezza, “Surface-atom force out of thermal equilibrium and its effect on ultracold atoms,” *Journal of Physics A : Mathematical and General* **39**, 6117 (2006). URL : <http://stacks.iop.org/0305-4470/39/i=21/a=S02>. IV, IV.1.3
- [62] M. Antezza, L. P. Pitaevskii, et S. Stringari, “New asymptotic behavior of the surface-atom force out of thermal equilibrium,” *Phys. Rev. Lett.* **95**, 113202 (2005). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.113202>. IV
- [63] R. Messina et M. Antezza, “Scattering-matrix approach to casimir-lifshitz force and heat transfer out of thermal equilibrium between arbitrary bodies,” *Phys. Rev. A* **84**, 042102 (2011). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.042102>. IV, IV.2.2
- [64] W. Eckhardt, “Macroscopic theory of electromagnetic fluctuations and stationary radiative heat transfer,” *Phys. Rev. A* **29**, 1991–2003 (1984). URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.29.1991>. IV.1.1, IV.2, A.4, A.4

- [65] J. E. Sipe, “New green-function formalism for surface optics,” *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 481–489 (1987). URL : <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-4-4-481>. [IV.1.1](#), [IV.2.1](#), [A](#), [A.1](#)
- [66] K. An, B. A. Sones, C. Fan-Yen, R. R. Dasari, et M. S. Feld, “Optical bistability induced by mirror absorption : measurement of absorption coefficients at the sub-ppm level,” *Opt. Lett.* **22**, 1433–1435 (1997). URL : <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-22-18-1433>. [a](#)
- [67] P. Roche, M. Commandré, L. Escoubas, J. P. Borgogno, G. Albrand, et B. Lazari-dès, “Substrate effects on absorption of coated surfaces,” *Appl. Opt.* **35**, 5059–5066 (1996). URL : <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-35-25-5059>. [a](#), [a](#)

Sujet : Effet Casimir-Polder sur des atomes piégés

Résumé : Ce travail de thèse présente la modélisation théorique de l'expérience FORCA-G. L'objectif de cette expérience est la mesure des interactions à courte portée entre des atomes piégés dans un réseau optique et une surface massive à une grande précision. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à l'effet Casimir-Polder induit par la surface sur les atomes. Le but était de fournir la prédiction la plus précise possible des états atomiques. Ceci a consisté à considérer les effets de la température sur l'interaction Casimir-Polder et modéliser la surface de la manière la plus réaliste possible. Afin de résoudre le problème de divergence qu'impliquait un traitement perturbatif de l'interaction atome-surface, nous avons développé une méthode numérique pour un traitement non-perturbatif de l'interaction Casimir-Polder et modélisé l'interaction atome-surface à très courte distance par un potentiel de Lennard-Jones. Chaque effet et incertitude sur les états atomiques ont été évalués afin de déterminer s'ils seraient observables ou un facteur limitant en regard de la précision visée par l'expérience. Enfin nous nous sommes intéressés au cas d'un déséquilibre thermique entre la température du miroir et la température de l'environnement qui pourrait être induit par les lasers en présence ou un laser de chauffage. Nous avons calculé la correction du potentiel Casimir-Polder due au déséquilibre et évalué l'effet sur les niveaux d'énergie atomiques pour déterminer si cet effet pouvait être mesuré.

Mots clés : Effet Casimir-Polder, Effet Casimir-Polder hors équilibre thermique, Potentiel de Lennard-Jones, réseau optique, état Wannier-Stark, miroir multi-couche

Subject : Casimir-Polder interaction of atoms trapped in a lattice

Abstract: This thesis presents the theoretical modeling of the experiment FORCA-G. The purpose of this experiment is to measure short-range interactions between trapped atoms in an optical lattice and a massive surface with a high precision. We are focused on Casimir-Polder effect induced by the surface on the atoms. The aim was to give the most possible precise prediction of atomic states. This work took the temperature effects on Casimir-Polder interaction into account, modelled the surface of the experiment. In order to solve the divergence problem due to the perturbative treatment of the atom-surface interaction, we developed a digital method for a non-perturbative treatment of the Casimir-Polder interaction and modelled the short-range atom-surface interaction by a Lennard-Jones potential. Each effect and uncertainties on the atomic states were evaluated so that we know if they could be observable or a limiting factor compared to the experiment precision. Finally we were focused on an out of thermal equilibrium situation between the mirror and environment temperature which may be induced by the lasers. We computed the correction to the Casimir-Polder potential due to this disequilibrium and evaluated the effect on the atomic states.

Keywords : Casimir-Polder interaction, Out of thermal equilibrium Casimir-Polder interaction, Lennard-Jones potential, Optical lattice, Wannier-Stark states, multi-layer mirror