



HAL
open science

Étude de la transmission acoustique de métaplaques localement résonantes

Abdoulaye Sidiki Ba

► **To cite this version:**

Abdoulaye Sidiki Ba. Étude de la transmission acoustique de métaplaques localement résonantes. Acoustique [physics.class-ph]. Université de Bordeaux, 2016. Français. NNT : 2016BORD0228 . tel-01480516

HAL Id: tel-01480516

<https://theses.hal.science/tel-01480516>

Submitted on 10 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

présentée à

l'université de Bordeaux

École doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur

par **Abdoulaye Sidiki BA**

pour obtenir le grade de

Docteur

Spécialité : Mécanique

Étude de la transmission acoustique de métaplaques localement résonantes

Après avis de :

M. B. MORVAN, Professeur, LOMC, Université du Havre

M. C. AUDOLY, Directeur de recherche, DCNS Research/CEMIS, Toulon

Rapporteur

Rapporteur

Soutenue le 06/12/2016, devant la commission d'examen formée de :

M. Christophe ARISTEGUI, Professeur, I2M, Université de Bordeaux

M. Christian AUDOLY, Ingénieur HDR, DCNS Research, Toulon

M. Thomas BRUNET, Maître de conférences, I2M, Bordeaux INP

M. Olivier MONDAIN-MONVAL, Professeur, CRPP, Université de Bordeaux

M. Brunot MORVAN, Professeur, LOMC, Université du Havre

M. Tony VALIER-BRASIER, Maître de conférences, IJLRDA, Université Paris VI

Directeur de thèse

Rapporteur

Co-directeur de thèse

Examineur

Rapporteur

Examineur

À la mémoire de mes grands-parents,
à mes parents,
à mon frère et à mes sœurs...

Remerciements

Le travail rapporté dans ce mémoire s'inscrivant dans le cadre du projet Labex AMADEus, a été réalisé au sein du département Acoustique et Physique (APy) de l'Institut de Mécanique et d'Ingénierie (I2M) de l'Université de Bordeaux, en étroite collaboration avec le Centre de Recherche Paul Pascal (CRPP). Je tiens naturellement à remercier M. Éric Arquis, directeur du laboratoire, de m'avoir accueilli au sein de sa structure. J'exprime toute ma gratitude et ma reconnaissance à l'égard du Labex AMADEus qui a permis le bon déroulement de la thèse.

J'adresse particulièrement à mon directeur de thèse, M. Christophe Aristégui et à mon co-directeur, M. Thomas Brunet, mes sincères remerciements pour leur aide, leur disponibilité, leur patience et leur encouragement durant les trois années de thèse. A travers ces lignes, je souhaite qu'ils reçoivent toutes les marques de ma reconnaissance.

J'adresse toute ma gratitude à l'égard des membres du jury pour m'avoir fait l'honneur d'y participer : M. Bruno Morvan, et M. Christian Audoly, d'avoir accepté de juger ce travail en tant que rapporteurs, M. Tony Vallier-Brasier et M. Olivier Mondain-Monval en tant qu'examineurs. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont accordé à cette étude.

J'exprime mes remerciements à Benoit Mascaro et Guillaume Lepert pour m'avoir accompagné et soutenu pendant la première année de la thèse. Je les remercie pour leurs disponibilités, leurs qualités humaines et scientifiques, leurs conseils, leurs remarques, et leurs pédagogies.

Mes grands remerciements à mon équipe de recherche FAMAS (Matériaux Fonctionnels pour l'Acoustique), aux collègues physico-chimiques (Kevin Zimny, Artem Kovalenko, et Aurore Merlin), qui n'ont ménagé aucun effort pour mettre à notre disposition des échantillons de qualité. Leurs réactivités, leurs compétences et leurs disponibilités sont à saluer. Je remercie également Olivier Poncelet et Michel Castaings pour leurs discussions, leurs conseils et leurs soutiens.

Tous mes remerciements à l'endroit de ma famille (mes parents, mon frère, mes sœurs, mes oncles et tantes), de mes amis, et de mes collègues pour leurs présences et leurs soutiens. Qu'ils soient certains de ma reconnaissance.

Un grand remerciement à Halima Ball, Ousmane Ba, Abou Kardiatou Ba, Nafi Ousmane Kane, Amadou Bayla Ba pour leurs soutiens mémorables lors de la soutenance de thèse. Je remercie mon oncle Cheikh Oumar BA, ma tante Marieme Yaya BA, mon ami Kolly Traoré, ainsi que leurs familles respectives. Je ne saurais oublier mes collègues (Mahfoudh Taleb Ali, Mohamed Biskiri, Racine Ly, Hélène Pichard, Marie Fraise Ponge, Emmanuel Siryabe, Abdelkrim Saidoun, Benoit Tallon, Alexis Viel, Ricardo Duarte, Santiago Arroyave Tobon, Liwang Liu, Marie Marthe Groz, Valentin Serey,...) avec qui, j'ai passé de très bon moments. Un coucou à Béatrice Desoudin, Sandrine Guit, et Caty.

Je remercie ma grande famille de Bababé et de Kaédi. Un coucou à Marieme Polel Bal, et mes remerciements sa famille pour leurs soutiens indéfectibles.

Une grande pensée à l'Association des Étudiants et Ressortissants Mauritanien en Gironde (AERMG) que j'ai eu le plaisir de présider entre 2015 et 2017. Mes remerciements à tous ses membres.

Notations

$x(= x, y, z), t$	Coordonnée spatiale, temps
r, θ, φ	Coordonnées sphériques
$s(t), S(\omega)$	Signal temporel, spectre du signal
Φ	Déphasage
L, T	Longitudinale, transversale
i	Nombre imaginaire
$\bar{\mathbf{I}}$	Matrice identité
σ_{ij}	Coefficient du tenseur des contraintes
C_{ijkl}	Coefficient du tenseur de rigidité
ε_{kl}	Coefficient du tenseur des déformations
η_{ijkl}	Coefficient du tenseur de viscosité
F, S_0	Force appliquée, aire circulaire du monolithe
δ, l_0	Déplacement induit par la compression, épaisseur initiale du monolithe
E, ν	Module d'Young, coefficient de Poisson
\mathbf{u}	Champ de déplacement
λ, μ	Coefficients de Lamé
\mathbf{p}	Vecteur unitaire de la polarisation d'une onde plane
k	Nombre d'onde
k^L, k^T	Nombre d'onde longitudinal, nombre d'onde transversal
\mathbf{d}	Vecteur unitaire de la direction de propagation d'une onde plane
\mathbf{k}	Vecteur d'onde
f, ω	Fréquence, pulsation de l'onde

λ	Longueur d'onde
$\tilde{\omega}$	Fréquence adimensionnée
$\tilde{\rho}$	Masse volumique adimensionnée
c	Célérité du son
α	Atténuation
$M_{\text{eff}}, Z_{\text{eff}}, n_{\text{eff}}$	Rigidité effective, impédance effective, indice de réfraction effectif
K	Module d'élasticité isostatique
a	Rayon des inclusions
\bar{a}	Rayon moyen d'une distribution en taille
d_w	Diamètre moyen des gouttelettes
\bar{d}	Diamètre moyen d'une distribution en taille
d_i, V_i, N_i	Diamètre, volume, nombre de gouttelettes
$d, \delta d$	Épaisseurs des échantillons, différence d'épaisseurs
$(\Delta d, \Delta t, \Delta v)$	Incertitudes (épaisseurs, temps, célérité du son)
P ou PSD	Polydispersité en taille des inclusions
ϕ	Fraction volumique
η	Nombre de diffuseurs par unité de volume
σ	Écart-type d'une distribution en taille
μ	Espérance d'une distribution en taille
N	Nombre total de diffuseurs par unité de volume
$Q_n, f_{\text{res}}, \Delta f_{\text{res}}$	Facteur de qualité, fréquence de résonance, largeur à mi-hauteur de la fréquence de résonance
ρ	Masse volumique

N_d	Nombre de diffuseurs
G	Coefficient de Gaunt
$\phi(r, \theta, \varphi)$	Potentiel scalaire associé aux ondes L
$\Psi(r, \theta, \varphi)$	Champs de potentiel vecteur
$\psi(r, \theta, \varphi)$	Potentiel scalaire associé aux ondes T
$\chi(r, \theta, \varphi)$	Potentiel scalaire associé aux ondes T
∇, ∇^2	Gradient, Laplacien
$P_n(\cos \theta), P_n^m(\cos \theta)$	Polynôme de Legendre, fonction de Legendre
$j_n, h_n^{(1)}$	Fonction sphérique (Bessel, Hankel) de première espèce
Indices (n, ν, q)	Modes de résonance
T_n^{ij}	Amplitude modale de diffusion
$f_{ij}(\theta)$	Fonction de diffusion
S_n^{ij}	Coefficients de la matrice de diffusion S_n
$P_{ij}, S_i, p_{ij}, s_i, X_{ij}$ et v_i	Coefficients des matrices respectivement P, S, p, s, X et v
$P'_{ij}, S'_i, p'_{ij}, s'_i, X'_{ij}$ et v'_i	Coefficients des matrices respectivement P', S', p', s', X' et v'
$P''_{ij}, S''_i, p''_{ij}, s''_i, X''_{ij}$ et v''_i	Coefficients des matrices respectivement P'', S'', p'', s'', X'' et v''
γ	Coefficient polytropique
P_a	Pression ambiante

Table des matières

Remerciements	5
Notations	1
Table des matières	1
Introduction générale	5
Chapitre 1. Modélisation des propriétés effectives d'un matériau à structure aléatoire	7
1.1. Introduction	7
1.2. Généralités en acoustique linéaire	8
1.2.1. Contraintes et déformations d'un solide viscoélastique linéaire et homogène	9
1.2.2. Équation de propagation dans les solides viscoélastiques linéaires et homogènes.....	10
1.3. Propagation d'ondes élastiques dans un milieu à structure aléatoire composé de sphères viscoélastiques et isotropes distribuées dans une matrice viscoélastique et isotrope.....	11
1.3.1. Présentation des phénomènes de diffusion.....	12
1.3.2. Diffusion d'une onde plane incidente par une inclusion sphérique.....	13
1.3.3. Diffusion multiple d'une onde plane élastique par une population de diffuseurs sphériques : modèles d'homogénéisation	27
1.4. Conclusion	39
Chapitre 2. Comportement acoustique de plaques hétérogènes isolantes à base d'inclusions de silicone poreux	41
2.1. Introduction	41
2.2. Synthèse du silicone poreux et caractérisation de ses propriétés physiques	45
2.2.1. Synthèse du silicone poreux	45
2.2.2. Caractérisation de la structure interne du silicone poreux.....	47
2.2.3. Caractérisation acoustique du silicone poreux.....	55
2.3. Propriétés acoustiques d'une suspension localement résonante.....	70
2.3.1. Synthèse de microbilles de silicone poreux	71

2.3.2. Réponse acoustique de la suspension diluée de microbilles	74
2.4. Propriétés acoustiques de plaques localement résonantes	80
2.4.1. Synthèse et description des plaques étudiées	81
2.4.2. Mesure du coefficient de transmission acoustique.....	82
2.4.3. Influence de l'arrangement.....	88
2.4.4. Comparaison avec des résonateurs type « bulles d'air ».....	90
2.5. Conclusions	94
Conclusion générale et perspectives	97
Annexe 1. Les catégories de résonateurs	103
1.1. Les résonateurs de Minnaert	103
1.2. Les résonateurs de Helmholtz	103
1.3. Les résonateurs de noyau-coque	104
1.4. Les résonateurs de Mie	104
Annexe 2. Relations entre paramètres élastiques et acoustiques	107
Annexe 3. Les fonctions et polynômes de Legendre	109
Annexe 4. Fonctions de Bessel et Hankel en coordonnées sphériques	111
Annexe 5. Diffusion d'une onde plane par un diffuseur sphérique isotrope suspendu dans une matrice isotrope	113
1.1. Déplacements et contraintes en coordonnées sphériques	113
1.2. Paramètres du problème de diffusion.....	113
1.2.1. Onde incidente longitudinale	114
1.2.2. Onde incidente transversale	115
1.2.3. Onde incidente longitudinale ou transversale : formalisme général	116
1.3. Champs de déplacement et de contrainte en fonction des amplitudes modales.....	116
1.3.1. Onde incidente longitudinale	117

1.3.2.	Onde incidente transversale	118
1.4.	Relation entre coefficients de diffusion	119
Annexe 6.	Diffusion d'une onde plane par une population de diffuseurs sphériques suspendus dans une matrice viscoélastique et isotrope	123
1.1.	Limite quasi-statique de la célérité de phase longitudinale effective	123
1.1.1.	Cas particulier du silicone poreux.....	124
1.2.	Limite quasi-statique des rigidités effectives longitudinales ML	124
1.3.	Coefficient de Gaunt	125
Annexe 7.	Caractérisation et propriétés effectives du silicone poreux.....	127
1.1.	Paramètres déterminants dans l'évolution de la célérité du son avec la porosité	127
1.2.	Propriétés effectives du silicone poreux avec différents modèles	128
1.3.	Prédiction des propriétés effectives du silicone poreux avec le modèle de WT.....	128
1.4.	Influence du ratio entre les célérités L et T sur le coefficient de Poisson.....	130
1.5.	Reproductibilité des mesures d'atténuation	130
1.6.	Récapitulatif de la caractérisation acoustique du silicone poreux	131
Annexe 8.	Prédiction des propriétés d'une suspension de microbilles de silicone poreux	133
1.1.	Prédiction des fonctions de diffusion de microbilles de différentes tailles.....	133
1.2.	Influence de la polydispersité	133
1.3.	Propriétés acoustiques effectives d'une suspension de microbilles dans l'agarose	134

Introduction générale

Depuis plus d'une décennie, il se manifeste un très fort intérêt pour les matériaux composites présentant des propriétés dynamiques effectives (macroscopiques) hors du commun [1] [2] [3] [4] [5]. Ces structures, appelées métamatériaux, sont par exemple susceptibles d'exhiber un indice de réfraction négatif qui se traduit par une célérité de phase négative dans les milieux isotropes [2]. Ces métamatériaux sont également susceptibles de présenter des niveaux d'absorption très élevés [6].

Le premier métamatériau (appelé aussi *matériau main gauche*) a été imaginé en électromagnétisme par Veselago [7], qui en considérant un milieu isotrope parfait (non dissipatif) avec des valeurs de permittivité ϵ et de perméabilité magnétique μ négatives, a montré que le vecteur d'onde et le vecteur Poynting étaient orientés selon des directions opposées [7]. Par analogie, les métamatériaux acoustiques isotropes parfaits ont été définis en considérant des valeurs négatives de masse volumique ρ et de module de compressibilité κ [8].

Ces métamatériaux ont le pouvoir de contrôler la propagation des ondes, notamment par le contrôle de leur phase et/ou de leur amplitude. Le panel d'applications que recouvrent de tels matériaux est vaste, allant de l'imagerie ultrasonore très haute résolution (hyper lentille) [9] [10] à l'isolation sonore dans le domaine audible [11], en passant par la furtivité (revêtement des sous-marins) [12].

La synthèse des métamatériaux nécessitent de nouveaux matériaux intelligents et réactifs. Une solution est de considérer des milieux hétérogènes, constitués d'une distribution aléatoire d'inclusions résonantes (ou micro-résonateurs) dispersées dans une matrice à phase continue [13].

Notre stratégie de synthèse de métamatériaux acoustiques exploite les résonances de Mie des inclusions, décrites en Annexe 1, comme proposée initialement par Li et Chan [2]. Cette approche dite de **matériaux localement résonants** [1] consiste à fabriquer un matériau présentant un fort contraste de propriétés acoustiques entre la matrice et les micro-résonateurs pour exalter dans le régime des basses fréquences, les premières résonances des inclusions (modes monopolaire et dipolaire). Elles correspondent en particulier à une diffusion maximale de l'onde auscultatrice par les inclusions.

Le projet de thèse s'inscrit dans les activités du groupe Matériaux Fonctionnels pour l'Acoustique du département Acoustique Physique de l'I2M. Ce groupe cherche en particulier à concevoir des métamatériaux acoustiques à structure aléatoire par le contrôle de la phase et de l'amplitude des ondes ultrasonores auscultatrices. Le contrôle de la phase a par exemple permis de mettre en évidence expérimentalement le premier métamatériau tridimensionnel possédant un indice de réfraction acoustique négatif [14]. L'expérience reposait sur la synthèse, dans le cadre d'un consortium comprenant des physico-chimistes du Centre de Recherche Paul Pascal et du Laboratoire du Futur, de matériaux inclusionnaires, dont les hétérogénéités présentent une célérité de phase 100 fois plus faible que celle de la matrice aqueuse environnante.

Les travaux réalisés lors cette thèse concernent plus particulièrement le contrôle de l'amplitude des ondes ultrasonores en exploitant les fortes résonances d'inclusions à base de matériaux poreux, dispersées dans des matrices solides. Les choix de microbilles de silicone poreux et d'une matrice élastomérique ont permis de dégrader considérablement le coefficient de transmission d'une plaque sub-longueur d'onde à faces parallèles (métaplaque), sur une large bande fréquentielle.

Ce manuscrit est divisé en deux chapitres. Le premier conduit à modéliser les propriétés acoustiques effectives des métamatériaux en se basant sur un modèle de propagation d'ondes adapté aux suspensions relativement concentrées. Nous nous penchons plus précisément sur les théories de diffusion multiple. La conception, la synthèse et la caractérisation ultrasonore de métamatériaux font l'objet du second chapitre. L'impact de la nature de la matrice et de l'arrangement des microbilles (aléatoire, périodique) sur les propriétés acoustiques d'échantillon se présentant sous forme de métaplaques est montré.

Chapitre 1.

Modélisation des propriétés effectives d'un matériau à structure aléatoire

1.1. Introduction

Un moyen de rechercher des structures aux propriétés non naturelles ou encore extraordinaires, est de concevoir des matériaux architecturés présentant lesdites propriétés. Dans ce contexte, nous nous intéressons aux réponses acoustiques de milieux à phase multiple (ou milieux hétérogènes) composés d'une phase continue, le milieu hôte (appelé encore matrice) dans lequel sont réparties aléatoirement des inclusions (ou diffuseurs) à géométries sphériques. L'étude de la propagation des ondes acoustiques dans de tels systèmes inclusionnaires est complexe, comme en témoigne de nombreuses publications [15] [16]. Selon la sollicitation acoustique, le système peut agir comme un milieu homogène équivalent, dont les propriétés macroscopiques (ou effectives) résultent d'une moyenne statistique sur toutes les configurations possibles de positions des diffuseurs, et des interactions entre la sollicitation, la matrice et les diffuseurs.

Il existe de nombreux modèles d'homogénéisation permettant de prédire les propriétés effectives des milieux hétérogènes aléatoires. En 1945, Foldy [17] décrit la multidiffusion d'une onde scalaire par des diffuseurs ponctuels et isotropes, en établissant une première expression du nombre d'onde effectif de l'onde moyenne (cohérente) siégeant dans le milieu. La formulation établie s'arrête au 1^{er} ordre en concentration ϕ de diffuseurs. En 1951, Lax [18] améliore ce modèle en introduisant l'approximation quasi-cristalline (QCA), ce dernier s'intéressant à des diffuseurs anisotropes. En 1961, Waterman et Truell [19] considèrent une distribution de diffuseurs ponctuels et anisotropes. L'expression du nombre d'onde effectif établie dépend alors des 1^{er} et 2^e ordres en concentration de diffuseurs. En 1967, Lloyd et Berry [20] prennent en compte la taille finie des diffuseurs et obtiennent une formulation différente du nombre d'onde effectif. Linton et Martin [21] réécrivent en 2006 le nombre d'onde de Lloyd et Berry en introduisant le coefficient de Gaunt [22], beaucoup plus pratique pour la modélisation numérique. Tous ces modèles ne considèrent que des ondes scalaires. Luppé, Conoir et Norris [23] traitent

alors le cas des matrices solides, en prenant en compte les multiples conversions de modes entre les diffuseurs et la matrice environnante.

Ce chapitre porte sur la modélisation des propriétés effectives de matériaux inclusionnaires. Nous rappelons dans un premier temps, les bases théoriques de l'acoustique linéaire pour l'étude de la propagation acoustique dans un milieu linéaire viscoélastique. Nous exposons ensuite les calculs détaillés de la diffusion acoustique d'une onde plane par une sphère viscoélastique linéaire, isotrope et isolée, suspendue dans une matrice viscoélastique linéaire et isotrope (diffusion simple), puis par une distribution aléatoire de diffuseurs sphériques (diffusion multiple) mono- ou polydisperse (en taille), dans les cas d'une sollicitation longitudinale puis transversale. Les quantités physiques d'intérêt s'expriment alors en fonction de potentiels de déplacement scalaires, puis d'amplitudes modales suite à leur décomposition. Ces développements nous permettent alors d'aborder les différents modèles d'homogénéisation prédisant la réponse acoustique du matériau inclusionnaire et d'en extraire les propriétés effectives du matériau : nombre d'onde k_{eff} , célérité de phase c_{eff} , atténuation α_{eff} ... Lorsque la longueur d'onde excitatrice λ_0 est suffisamment grande devant la taille des diffuseurs, les expressions du nombre d'onde effectif des différents modèles se simplifient. Les approximations basse fréquence des amplitudes modales de diffusion nous permettent d'en déduire l'expression analytique de la célérité de phase effective en limite quasi-statique. Enfin, nous modélisons les propriétés effectives des matériaux inclusionnaires en tenant compte de la polydispersité en taille des diffuseurs, avant de discuter des limites et des domaines de validité des modèles de diffusion multiple considérés.

1.2. Généralités en acoustique linéaire

L'objectif de cette partie est de formaliser les principaux phénomènes qui régissent la propagation d'une onde élastique dans un milieu viscoélastique linéaire. Nous nous intéressons en particulier aux deux types de polarisation (longitudinale et transversale) ainsi qu'aux phénomènes de conversion de modes à l'interface entre deux milieux.

Nous considérons un solide viscoélastique linéaire, homogène et isotrope placé dans un repère cartésien (x, y, z) comme décrit sur la Figure 1. Le passage d'une onde élastique à travers un tel milieu entraîne la vibration des atomes constituant le solide qui se propage de proche en proche par l'intermédiaire des liaisons interatomiques. Dans le cas où la direction de vibration des atomes et celle de la propagation de l'onde sont parallèles, on parle d'onde longitudinale (ou onde de pression, notée dans la suite onde L), Figure 1. a). Dans le cas où les deux directions sont perpendiculaires, l'onde est dite transversale (ou de cisaillement), notée dans la suite onde T, Figure 1. b).

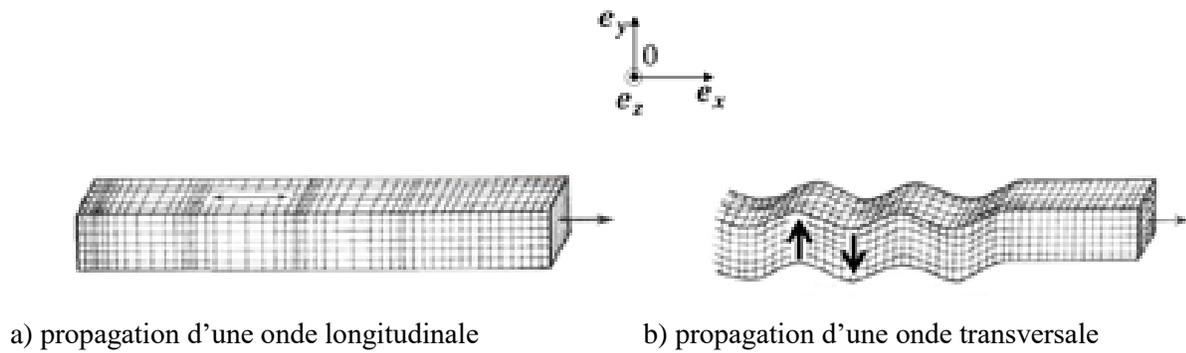


Figure 1. Illustration de la propagation des ondes longitudinale et transversale.

1.2.1. Contraintes et déformations d'un solide viscoélastique linéaire et homogène

Sous l'hypothèse de petites déformations, la loi de comportement d'un milieu viscoélastique linéaire et homogène (ou loi de Hooke généralisée) relie les tenseurs des contraintes σ_{ij} et des déformations ε_{kl} , comme suit [24] :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \eta_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t}, \quad (1)$$

où C_{ijkl} représentent les coefficients du tenseur de rigidité d'ordre 4 (ou coefficients d'élasticité en Pa) et η_{ijkl} ceux du tenseur de viscosité d'ordre 4 (en N.s.m⁻¹) avec $i, j, k, l (= 1, 2, 3)$, indices dont les valeurs sont associées aux trois directions de l'espace cartésien. Les contraintes σ_{ij} sont définies comme des forces par unité de surface exercées par contact d'une particule sur

une autre. Les déformations ε_{kl} s'écrivent comme des dérivées spatiales du champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ du point du milieu de coordonnées \mathbf{x} .

Notons que lorsque le milieu est isotrope, les coefficients d'élasticité C_{ijkl} s'expriment simplement en fonction de deux coefficients, qui peuvent être ceux de Lamé (λ, μ) ou ceux du couple, module d'Young E et coefficient de Poisson ν . Ces différents paramètres sont reliés par les relations suivantes :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ et } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2)$$

1.2.2. Équation de propagation dans les solides viscoélastiques linaires et homogènes

En combinant la loi de Hooke généralisée (1) à l'équation du mouvement appliquée à un élément de volume d'un milieu de masse volumique ρ , est établie l'équation de propagation des ondes élastiques suivante :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j \partial x_k} + \eta_{ijkl} \frac{\partial^3 u_l(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j \partial x_k \partial t}, \quad (3)$$

où $u_i(\mathbf{x}, t)$ désigne la i^e composante du champ de déplacement du point du milieu de coordonnées \mathbf{x} . Cherchons les solutions de cette équation sous la forme d'ondes planes harmoniques homogènes. Décomposons alors spatialement et temporellement le champ de déplacement particulière :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \mathbf{p}, \quad (4)$$

où le vecteur unitaire \mathbf{p} désigne la polarisation de l'onde (i. e. la direction de vibration des atomes), u_0 son amplitude à l'origine, $\omega = 2\pi f$ sa pulsation et f sa fréquence, avec $i^2 = -1$. En introduisant la direction de propagation de l'onde \mathbf{d} , le vecteur d'onde \mathbf{k} s'exprime simplement en fonction du nombre d'onde k :

$$\mathbf{k} = k \mathbf{d} = \left(\frac{\omega}{c} + i\alpha \right) \mathbf{d},$$

où c et α désignent respectivement la célérité de phase et l'atténuation de l'onde élastique. Enfin, la convention $e^{-i\omega t}$ est choisie de sorte que la partie réelle du nombre d'onde k soit positive pour une onde progressive et négative pour une onde rétrograde.

En substituant l'expression (4) du champ de déplacement de l'onde plane monochromatique dans l'équation de propagation (1) réduite aux seuls milieux isotropes et viscoélastiques linéaires, nous obtenons l'équation de Helmholtz :

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) + k^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad (5)$$

pour les ondes longitudinale et transversale susceptibles de siéger dans le milieu. Les relations de dispersion associées :

$$k^L = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \quad (6)$$

et :

$$k^T = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \quad (7)$$

permettent alors de décrire les types d'onde se propageant à l'intérieur du milieu, en reliant les propriétés mécaniques dudit milieu aux propriétés acoustiques des ondes s'y propageant. Les paramètres de Lamé, ici à valeurs complexes, satisfont la relation (1) qui se réduit alors à l'expression suivante :

$$\bar{\sigma} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \bar{\mathbb{I}} + 2\mu \nabla \mathbf{u}, \quad (8)$$

où $\bar{\mathbb{I}}$ désigne la matrice identité.

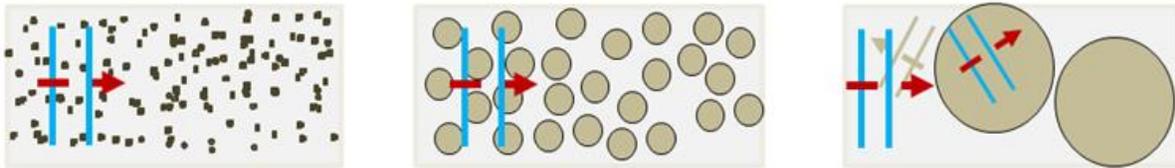
1.3. Propagation d'ondes élastiques dans un milieu à structure aléatoire composé de sphères viscoélastiques et isotropes distribuées dans une matrice viscoélastique et isotrope

Dans le but de décrire le comportement acoustique de matériaux hétérogènes, nous nous intéressons dans cette section à la modélisation de la diffusion d'une onde plane par une population d'inclusions homogènes, isotropes, de géométrie sphérique et repartis aléatoirement

dans une matrice homogène et isotrope. Nous présentons dans un premier temps les calculs de la diffusion acoustique des ondes planes par une sphère viscoélastique linéaire suspendue dans une matrice viscoélastique. Dans un second temps, nous déduisons de cette étude les moyens de modéliser la diffusion d'une onde plane dans deux cas particuliers, celui des sphères fluides puis celui des matrices fluides.

1.3.1. Présentation des phénomènes de diffusion

Les phénomènes de diffusion sont très observés en acoustique [25]. Lorsqu'une onde incidente de longueur d'onde λ_0 se propageant dans un milieu homogène rencontre un obstacle, une partie de son énergie est redistribuée dans toutes les directions de l'espace, l'autre partie étant réfractée à l'intérieur de l'obstacle.



a) diffuseur $\ll \lambda_0$ (diffusion faible)

b) diffuseur $\cong \lambda_0$ (diffusion forte sans déviation de l'onde)

c) diffuseur $\gg \lambda_0$ (diffusion forte avec déviation de l'onde)

Figure 2. Comportement d'une onde élastique de longueur d'onde λ_0 en fonction de la taille des diffuseurs.

La description de l'interaction d'une onde incidente avec un milieu contenant une répartition aléatoire d'obstacles (diffuseurs) dépend des caractéristiques de l'onde (longueur d'onde, ...) et des diffuseurs (taille, forme, ...) [12] [26] [27]. En effet, les phénomènes de réflexion et de réfraction à l'interface entre le milieu hôte et les diffuseurs donnent aux différents faisceaux de l'onde plusieurs trajets possibles, on parle de phénomène de diffusion. Ces phénomènes de diffusion sont plus ou moins marqués selon la longueur d'onde de l'onde incidente λ_0 ou encore le contraste de propriétés entre le milieu hôte et les diffuseurs. La diffusion est faible, lorsque la taille des diffuseurs est extrêmement petite par rapport à la longueur d'onde λ_0 , l'onde traverse alors le milieu comme s'il s'agissait d'un milieu sans diffuseur. Cependant, lorsque λ_0 est

comparable ou petite devant la taille des diffuseurs, on parle de diffusion forte, sans aucune déviation de l'onde incidente dans le premier cas, avec déviation de l'onde incidente dans le second cas [28]. Ces différents phénomènes sont illustrés sur la Figure 2.

Lorsqu'une onde traversant un milieu composé de plusieurs diffuseurs interagit avec un seul obstacle, on parle de diffusion simple. Cependant, l'onde résultant de la diffusion du premier diffuseur peut être à nouveau diffusée par un second diffuseur. Dans le cas de deux diffusions ou plus, on parle de diffusion multiple. Ces deux phénomènes de diffusion sont illustrés sur la

Figure 3.

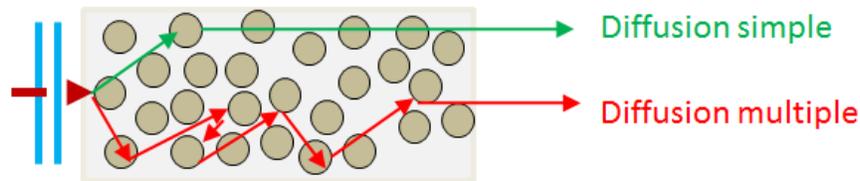


Figure 3. Illustration des phénomènes de diffusion simple et de diffusion multiple.

Dans un milieu aléatoire, deux régimes de diffusion multiple peuvent apparaître, un régime dit propagatif et un régime dit diffusif. Lorsque les distances de propagation sont de l'ordre du libre parcours moyen élastique, représentatif de la distance entre deux interactions, les ondes interagissent fortement entre elles et leur énergie est distribuée dans tout l'espace. En régime propagatif, l'onde subit peu de phénomènes de diffusion et conserve la mémoire de la direction de propagation de l'onde incidente. Cette onde, appelée cohérente, résiste au désordre. Elle s'obtient par une moyenne sur les configurations de positions des diffuseurs. En régime diffusif, l'onde cohérente a perdu la mémoire de la direction de propagation de l'onde incidente [28]. On s'intéresse alors à la progression d'un halo d'énergie. Dans la suite du manuscrit, seul le régime propagatif est considéré.

1.3.2. Diffusion d'une onde plane incidente par une inclusion sphérique

L'étude de la diffusion d'une onde plane par une inclusion sphérique de rayon a est très fournie. Ying et Truell ont modélisé la diffusion d'une onde plane longitudinale par une inclusion

sphérique dans une matrice élastique et isotrope [29]. Dans cet article, les expressions basse fréquence (i. e. $k_0 a \ll 1$) des champs de déplacement dans la matrice et l'inclusion sont établies pour trois cas de figures (sphère élastique et isotrope, cavité sphérique et sphère rigide). Einspruch et Truell [30] déduisent des travaux de Ying et Truell, les champs de déplacement pour le cas d'une cavité sphérique saturée de fluide. Puis, Gaunaud *et al.* [31] considèrent une matrice viscoélastique. Brill *et al.* [32] traitent le problème d'une onde incidente transversale en présence d'une sphère fluide suspendue dans une matrice solide. Enfin, sept ans plus tard [33], ils généralisent le cas de la matrice solide, en considérant une onde incidente longitudinale ou transversale et une inclusion sphérique élastique.

Nous détaillons ci-après le problème de diffusion d'une onde plane longitudinale ou transversale par une inclusion sphérique solide. Nous avons privilégié l'écriture des champs de déplacement considérée par Luppé *et al.* [23]. Ils correspondent également à ceux utilisés par Challis *et al.* [34] ou encore Hasheminejad *et al.* [35] pour la sollicitation longitudinale, et par Brill *et al.* [32] pour le cas transverse.

1.3.2.1. Description du problème

Pour décrire l'interaction entre une onde plane harmonique et un diffuseur, nous présentons dans cette section les calculs de la diffusion acoustique d'une onde plane par une inclusion sphérique viscoélastique placée dans une matrice viscoélastique. La géométrie du problème et les équations sont établies dans le repère de coordonnées sphériques, dont l'origine correspond au centre du diffuseur. Le passage des coordonnées cartésiennes (x, y, z) définies respectivement par leurs vecteurs unitaires $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ aux coordonnées sphériques (r, θ, φ) est décrit dans la Figure 4. Afin de tenir compte des phénomènes de conversion de modes apparaissant à l'interface entre la matrice et l'inclusion, nous étudions les cas où la polarisation de l'onde incidente est longitudinale puis transversale. Dans les deux cas, l'onde se propage selon la direction \mathbf{e}_x correspondant à l'angle $\theta = 0$.

Les matériaux viscoélastiques (matrice et inclusion) sont caractérisés par des paramètres à valeurs complexes (masse volumique ρ_i , et coefficients de Lamé λ_i et μ_i), où i prend la valeur 0 pour la matrice et 1 pour l'inclusion. Nous pouvons également introduire les célérités de phase et

le coefficient d'atténuation des ondes longitudinales (c_i^L et α_i^L) ou transversales (c_i^T et α_i^T), à l'aide des relations (6) et (7).

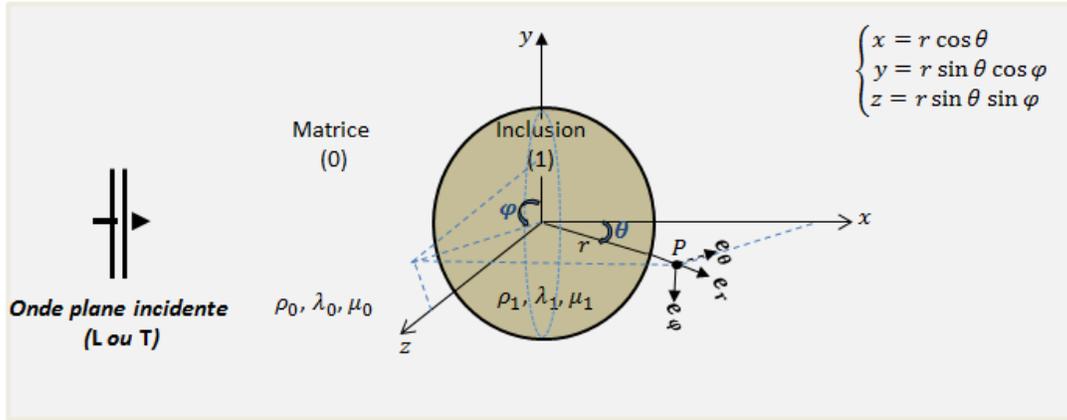


Figure 4. Géométrie du problème pour une onde incidente longitudinale : inclusion sphérique viscoélastique de rayon a caractérisée par l'indice (1), suspendue dans une matrice homogène viscoélastique infinie caractérisée par l'indice (0).

Le champ de déplacement particulier total, solutions de l'équation d'onde (3), s'écrit comme la somme des champs de déplacements longitudinal et transversal :

$$\mathbf{u}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{u}_L(r, \theta, \varphi) + \mathbf{u}_T(r, \theta, \varphi), \quad (9)$$

où \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_T représentent respectivement le déplacement irrotationnel associé à une variation de volume et le déplacement avec rotation mais sans variation de volume. Ces deux vecteurs dérivent respectivement du potentiel scalaire ϕ correspondant à l'onde longitudinale et du potentiel vectoriel Ψ correspondant à l'onde transversale. Ils s'écrivent en fonction de ces potentiels comme suit [12] :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_L(r, \theta, \varphi) &= \nabla\phi(r, \theta, \varphi), \\ \mathbf{u}_T(r, \theta, \varphi) &= \nabla\wedge\Psi(r, \theta, \varphi), \end{aligned} \quad (10)$$

avec : $\Psi = \nabla\wedge(r\psi(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r) + \nabla\wedge(\nabla\wedge(r\chi(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r))$,

où ψ et χ sont les potentiels scalaires associés aux ondes transversales. Ces potentiels sont appelés également potentiels de Debye. Les expressions en coordonnées sphériques du champ de

déplacement et du champ de contrainte en fonction des potentiels scalaires $\phi(r, \theta, \varphi)$, $\psi(r, \theta, \varphi)$ et $\chi(r, \theta, \varphi)$ sont détaillées en Annexe 5.

Avec la dépendance temporelle $e^{-i\omega t}$, les potentiels scalaires satisfont l'équation de Helmholtz qui peut se réécrire comme suit :

$$\left[\nabla^2 + \begin{pmatrix} k^L{}^2 \\ k^T{}^2 \\ k^T{}^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \\ \chi \end{pmatrix} = 0, \quad (11)$$

où les nombres d'onde k^L et k^T respectivement longitudinal et transversal, sont définis par les relations (6) et (7).

Les solutions de l'équation de Helmholtz peuvent s'écrire sous la forme de séries d'harmoniques sphériques comme suit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n w_n(kr) P_n^m(\cos \theta), \quad (12)$$

où Q_n est un coefficient dépendant du mode n , w_n est soit une fonction de Bessel sphérique de première espèce j_n si l'onde siège dans l'inclusion, soit une fonction de Hankel sphérique de premier type $h_n^{(1)}$ si l'onde diverge en champ lointain (dans le milieu hôte). Enfin, P_n^m représentent les fonctions de Legendre qui sont reliées aux Polynômes de Legendre P_n par les égalités suivantes :

$$P_n(\cos \theta) = P_n^0(\cos \theta) \text{ et } P_n^1(\cos \theta) = -\frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}. \quad (13)$$

D'autres relations utiles entre polynômes et fonctions de Legendre sont explicitées en Annexe 2.

1.3.2.2. Onde incidente longitudinale

Dans cette section, nous considérons une onde plane homogène longitudinale se propageant selon la direction e_x et caractérisée par son nombre d'onde k_0^L , comme représenté sur la Figure 4.

La décomposition en séries d'harmoniques sphériques du potentiel de l'onde incidente $\phi_{inc}(x, y, z) = e^{ik_0^L x}$ conduit à [36] [37] :

$$\Phi_{inc}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n + 1) j_n(k_0^L r) P_n(\cos \theta), \quad (14)$$

où l'amplitude du potentiel est supposée unitaire.

Les expressions des champs de potentiel des ondes incidente et diffusées dans la matrice (Φ_0, ψ_0, χ_0) , et ceux des ondes générées dans l'inclusion (Φ_1, ψ_1, χ_1) sont définies comme suit [34] [35] [38]:¹

$$\begin{pmatrix} \Phi_0 = \Phi_{inc} + \Phi^{diff} \\ \psi_0 \\ \chi_0 \\ \Phi_1 \\ \psi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n + 1) \begin{pmatrix} (j_n(k_0^L r) + T_n^{LL} h_n^{(1)}(k_0^L r)) P_n(\cos \theta) \\ T_n^{TL} h_n^{(1)}(k_0^T r) P_n^1(\cos \theta) \\ 0 \\ C_n^{LL} j_n(k_1^L r) P_n(\cos \theta) \\ D_n^{TL} j_n(k_1^T r) P_n^1(\cos \theta) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Le potentiel Φ_0 associé au mouvement longitudinal dans la matrice est constitué de la somme des potentiels des ondes longitudinales incidente Φ_{inc} et diffusée Φ^{diff} dans la matrice. Du fait de la symétrie du problème, la composante de l'onde transversale associée au potentiel χ est nulle et les potentiels scalaires restants ne dépendent que des variables (r, θ) .

Les coefficients $(T_n^{LL}, T_n^{TL}, C_n^{LL}, D_n^{TL})$ désignent les amplitudes modales décrivant respectivement l'onde L diffusée dans la matrice, l'onde T diffusée dans la matrice, l'onde L générée dans l'inclusion et l'onde T générée dans l'inclusion. Ces amplitudes jusqu'ici inconnues, sont maintenant déduites de la continuité des champs de déplacement $\mathbf{u}(r, \theta)$ et du vecteur contrainte $\bar{\sigma}(r, \theta) \cdot \mathbf{e}_r$ à l'interface entre la matrice (0) et l'inclusion (1), définie pour $r = a$ et $0 \leq \theta \leq \pi$. Ces deux conditions de continuité conduisent aux quatre égalités scalaires suivantes :

$$\begin{aligned} u_r^0(a, \theta) &= u_r^1(a, \theta), \\ u_\theta^0(a, \theta) &= u_\theta^1(a, \theta), \\ \sigma_{rr}^0(a, \theta) &= \sigma_{rr}^1(a, \theta), \\ \sigma_{r\theta}^0(a, \theta) &= \sigma_{r\theta}^1(a, \theta). \end{aligned} \quad (16)$$

¹ D'autres définitions peuvent être trouvées dans la littérature. Le Tableau 6 de l'Annexe 5 établit les liens entre les amplitudes modales de l'équation (25) et celles utilisées dans les travaux de Chekroun [26] et de Lepert [12].

Notons que les composantes des champs de déplacement et de contrainte s'écrivent simplement en fonction des amplitudes modales ($T_n^{LL}, T_n^{TL}, C_n^{LL}, D_n^{TL}$) en substituant les expressions (15) dans l'équation (A.12).

Pour le mode $n = 0$, les déplacements tangentiels u_θ et les contraintes de cisaillement $\sigma_{r\theta}$ sont nuls. Les relations (16) se réduisent au système d'équations (2x2) suivant :

$$\begin{pmatrix} P_{11}(a) & P_{13}(a) \\ P_{31}(a) & P_{33}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0^{LL} \\ C_0^{LL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(a) \\ S_3(a) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Pour des modes d'ordre supérieur ($n > 0$), le système matriciel déduit des quatre conditions de continuité devient :

$$\begin{pmatrix} P_{11}(a) & P_{12}(a) & P_{13}(a) & P_{14}(a) \\ P_{21}(a) & P_{22}(a) & P_{23}(a) & P_{24}(a) \\ P_{31}(a) & P_{32}(a) & P_{33}(a) & P_{34}(a) \\ P_{41}(a) & P_{42}(a) & P_{43}(a) & P_{44}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_n^{LL} \\ T_n^{TL} \\ C_n^{LL} \\ D_n^{TL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(a) \\ S_2(a) \\ S_3(a) \\ S_4(a) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Les coefficients P_{ij} et S_i respectivement de la matrice P et du vecteur S (avec $i, j = 1, 2, 3, 4$) sont donnés dans les équations (A.14.1) et (A.14.2) de l'Annexe 5. La résolution des systèmes matriciels (17) et (18) à l'aide de la méthode de Cramer permet d'en extraire les expressions des quatre amplitudes modales.

Les coefficients ($T_n^{LL}, T_n^{TL}, C_n^{LL}, D_n^{TL}$) étant maintenant connus, les potentiels scalaires et les champs de déplacement et de contrainte (A.17) peuvent être évalués numériquement dans les deux phases. Nous nous intéressons ici plus particulièrement à la fonction de diffusion de l'onde incidente L sous forme longitudinale, pour tout angle θ :

$$f_{LL}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) P_n(\cos \theta)}{i k_0^L} T_n^{LL}. \quad (19)$$

Cette dernière est obtenue par identification entre l'écriture en champ lointain ($k_0^L r \gg 1$) du champ de déplacement de l'onde diffusée dans la matrice sous forme longitudinale, déduit du potentiel ϕ^{diff} défini précédemment :

$$\mathbf{u}_L^{\text{diff}}(r, \theta) = \nabla \phi^{\text{diff}}(r, \theta), \quad (20)$$

et celle du champ de déplacement en champ lointain :

$$\mathbf{u}_L^{\text{diff}}(r, \theta) = f_{LL}(\theta) \frac{e^{i k_0^L r}}{r}, \quad (21)$$

établie à l'aide du développement asymptotique suivant de la fonction de Hankel sphérique [39] :

$$h_n^{(1)}(k_0^L r)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow (-i)^{n+1} \frac{e^{i k_0^L r}}{k_0^L r}.$$

D'après l'équation (19), les fonctions de diffusion vers l'avant et rétrodiffusée, correspondant respectivement aux angles particuliers ($\theta = 0$) et ($\theta = \pi$), s'écrivent comme suit :

$$f_{LL}(\theta = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{i k_0^L} T_n^{\text{LL}}$$

et : (22)

$$f_{LL}(\theta = \pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n}{i k_0^L} T_n^{\text{LL}}.$$

Ces expressions seront intégrées dans la suite, dans la modélisation des propriétés effectives de milieux comportant des inclusions sphériques, section 1.3.3.2.

1.3.2.3. Onde incidente transversale

Nous considérons dans cette section, le problème d'une onde plane homogène transversale définie par son nombre d'onde k_0^T , se propageant selon la direction \mathbf{e}_x et interagissant avec une inclusion sphérique, Figure 4.

Du fait de l'asymétrie du problème, les champs acoustiques ont une dépendance angulaire en θ et φ . Le potentiel vecteur de l'onde incidente transversale est donné par [32] :

$$\Psi_{inc}(r, \theta, \varphi) = \nabla \Lambda(r \psi_{inc}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_r) + \nabla \Lambda(\nabla \Lambda(r \chi_{inc}(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_r)). \quad (23)$$

À l'instar de Brill *et al.* [32], la décomposition en séries d'harmoniques sphériques des champs de potentiel des deux ondes incidentes transversales (ψ_{inc}, χ_{inc}) respectivement verticale et horizontale, conduit à :

$$\psi_{inc}(r, \theta, \varphi) = - \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} j_n(k_0^T r) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi$$

et :

$$\chi_{inc}(r, \theta, \varphi) = - \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \frac{i}{k_0^T} j_n(k_0^T r) P_n^1(\cos \theta) \sin \varphi. \quad (24)$$

Les expressions des champs de potentiel des ondes incidente et diffusées dans la matrice (ψ_0, χ_0, Φ_0) , et ceux des ondes générées dans l'inclusion (Φ_1, ψ_1, χ_1) sont définies comme suit [32] :²

$$\begin{pmatrix} \psi_0 = \psi_{inc} + \psi^{diff} \\ \chi_0 = \chi_{inc} + \chi^{diff} \\ \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \psi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix} = - \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \begin{pmatrix} (j_n(k_0^T r) + T_n^{TT} h_n^{(1)}(k_0^T r)) \cos \varphi \\ \frac{i}{k_0^T} ((j_n(k_0^T r) + t_n^{TT} h_n^{(1)}(k_0^T r)) \sin \varphi) \\ T_n^{LT} h_n^{(1)}(k_0^L r) \cos \varphi \\ C_n^{LT} j_n(k_1^L r) \cos \varphi \\ D_n^{TT} j_n(k_1^T r) \cos \varphi \\ d_n^{TT} \frac{i}{k_1^T} j_n(k_1^T r) \sin \varphi \end{pmatrix} P_n^1(\cos \theta). \quad (25)$$

Les potentiels associés au mouvement transversal dans la matrice (ψ_0, χ_0) sont constitués des sommes des potentiels des ondes transversales incidentes (ψ_{inc}, χ_{inc}) et diffusées $(\psi^{diff}, \chi^{diff})$ dans ladite matrice.

Les amplitudes modales $(T_n^{TT}, T_n^{LT}, C_n^{LT}, D_n^{TT}, t_n^{TT}, d_n^{TT})$ définies dans l'équation (25) sont caractéristiques de l'ensemble des ondes en présence. Elles sont maintenant déduites des conditions de continuité à l'interface entre la matrice et l'inclusion $(r = a, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$. En plus des conditions de continuité reportées dans les équations (16), doivent être considérées les continuités du champ de déplacement tangentiel $u_\varphi(r, \theta, \varphi)$ et du champ de contrainte de cisaillement $\sigma_{r\varphi}(r, \theta, \varphi)$:

² D'autres définitions peuvent être trouvées dans la littérature. Le Tableau 6 de l'Annexe 5 établit les liens entre les amplitudes modales de l'équation (25) et celles utilisées dans les travaux de Chekroun [26] et de Lepert [12].

$$\begin{aligned}
 u_r^0(a, \theta, \varphi) &= u_r^1(a, \theta, \varphi), \\
 u_\theta^0(a, \theta, \varphi) &= u_\theta^1(a, \theta, \varphi), \\
 u_\varphi^0(a, \theta, \varphi) &= u_\varphi^1(a, \theta, \varphi), \\
 \sigma_{rr}^0(a, \theta, \varphi) &= \sigma_{rr}^1(a, \theta, \varphi), \\
 \sigma_{r\theta}^0(a, \theta, \varphi) &= \sigma_{r\theta}^1(a, \theta, \varphi), \\
 \sigma_{r\varphi}^0(a, \theta, \varphi) &= \sigma_{r\varphi}^1(a, \theta, \varphi).
 \end{aligned} \tag{26}$$

Notons que les composantes des champs de déplacement et de contrainte s'écrivent simplement en fonction des amplitudes modales ($T_n^{\text{TT}}, T_n^{\text{LT}}, C_n^{\text{LT}}, D_n^{\text{TT}}, t_n^{\text{TT}}, d_n^{\text{TT}}$) en substituant les expressions (25) dans l'équation (A.12).

Le développement des six égalités (26) fait apparaître des dépendances selon les fonctions de Legendre P_n^1 et $\frac{\partial P_n^1}{\partial \theta}$. Ces fonctions étant orthogonales [34], le système d'équations issu des six conditions de continuité se découple en deux sous-systèmes, l'un correspondant aux mouvements dans le plan (système matriciel 4x4) et l'autre aux mouvements hors plan (système matriciel 2x2) :

$$\begin{pmatrix} p_{11}(a) & p_{12}(a) & p_{13}(a) & p_{14}(a) \\ p_{21}(a) & p_{22}(a) & p_{23}(a) & p_{24}(a) \\ p_{31}(a) & p_{32}(a) & p_{33}(a) & p_{34}(a) \\ p_{41}(a) & p_{42}(a) & p_{43}(a) & p_{44}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_n^{\text{LT}} \\ T_n^{\text{TT}} \\ C_n^{\text{LT}} \\ D_n^{\text{TT}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1(a) \\ s_2(a) \\ s_3(a) \\ s_4(a) \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{pmatrix} X_{11}(a) & X_{12}(a) \\ X_{21}(a) & X_{22}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_n^{\text{TT}} \\ d_n^{\text{TT}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(a) \\ v_2(a) \end{pmatrix}.$$

Les coefficients p_{ij}, X_{kl}, s_i et v_k respectivement des matrices p et X et des vecteurs s et v (avec $i, j = 1, 2, 3, 4$ et $k, l = 1, 2$) sont présentés dans les équations (A.15.1) à (A.15.4) de l'Annexe 5. Les amplitudes modales, solutions des systèmes d'équations (27), sont alors évaluées à l'aide de la méthode de Cramer. De manière similaire au cas de l'onde incidente longitudinale, ces coefficients modaux s'écrivent comme des rapports de déterminants de matrices et sont fonctions de la fréquence. Ils possèdent des pôles (fréquences pour lesquelles leur dénominateur s'annule) pour des fréquences, qui correspondent à des maxima de l'amplitude du déplacement acoustique (résonances de l'inclusion).

Les amplitudes modales ($T_n^{TT}, T_n^{LT}, C_n^{LT}, D_n^{TT}, t_n^{TT}, d_n^{TT}$) étant maintenant connues, les potentiels scalaires (25) et les champs de déplacement et de contrainte (A.18) dans les deux phases, peuvent être évalués numériquement.

Nous nous intéressons plus particulièrement à la fonction de diffusion $f_{TT}(\theta, \varphi)$ de l'onde incidente T sous forme transversale, pour tout couple d'angles (θ, φ) . Le champ de déplacement en champ lointain de l'onde transversale diffusée est donné par :

$$\mathbf{u}_T^{\text{diff}}(r, \theta, \varphi) = f_{TT\theta}(\theta, \varphi) \frac{e^{i k_0^T r}}{r} \mathbf{e}_\theta + f_{TT\varphi}(\theta, \varphi) \frac{e^{i k_0^T r}}{r} \mathbf{e}_\varphi, \quad (28)$$

où les composantes angulaires des fonctions de diffusion $f_{TT\theta}(\theta, \varphi)$ et $f_{TT\varphi}(\theta, \varphi)$ sont déterminées en suivant le même raisonnement que pour le cas d'une incidence longitudinale.

Nous obtenons [12] :

$$f_{TT\theta}(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left(T_n^{TT} \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} + t_n^{TT} \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right) \cos \varphi$$

et : (29)

$$f_{TT\varphi}(\theta, \varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left(T_n^{TT} \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} + t_n^{TT} \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) \sin \varphi.$$

Sachant que la fonction de diffusion totale est définie par [12] :

$$f_{TT}(\theta, \varphi) = \sqrt{f_{TT\theta}^2(\theta, \varphi) + f_{TT\varphi}^2(\theta, \varphi)},$$

les fonctions de diffusion vers l'avant et rétrodiffusée correspondant respectivement aux angles particuliers $(\theta = 0)$ et $(\theta = \pi)$, sont données par :

$$f_{TT}(\theta = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{2 i k_0^T} (T_n^{TT} + t_n^{TT})$$

et : (30)

$$f_{TT}(\theta = \pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{2 i k_0^T} (T_n^{TT} - t_n^{TT}).$$

1.3.2.4. Amplitudes modales

1.3.2.4.1. Approximations basse fréquence des coefficients de diffusion T_n^{ij}

Soit la fréquence adimensionnelle $\tilde{\omega}_j (= k_0^j a)$ caractéristique des interactions entre l'onde incidente de nature j et le diffuseur de rayon a , avec $j = L$ ou T . Dans un milieu de propagation dont les coefficients de Lamé sont λ et μ , les fréquences adimensionnelles longitudinale et transversale satisfont la relation $\tilde{\omega}_T^2 = (\lambda + 2\mu) \tilde{\omega}_L^2 / \mu$.

Nous établissons dans la suite les limites basse fréquence ($\tilde{\omega}_j \ll 1$) des amplitudes modales des potentiels scalaires dont dérivent les champs de déplacement (équations (17), (18) et (27)). Toutefois, nous ne considérons ici que les amplitudes modales des ondes diffusées dans la matrice par l'inclusion T_n^{ij} , les indices (i, j) indiquant respectivement la nature des ondes diffusées et celle de l'onde excitatrice (avec $i, j = L$ ou T). Notons que les amplitudes des modes d'ordre supérieur à 3 ($n \geq 3$) sont négligeables par rapport à celles des trois premiers modes ($n = 0, 1, 2$).

Pour une onde incidente longitudinale ($j = L$), les coefficients de diffusion des ondes longitudinale T_n^{LL} et transversale T_n^{TL} , dans la limite basse fréquence :

$$\begin{aligned}
 T_0^{LL} &= \frac{i}{3} \left(\frac{-3\lambda_1 + 3\lambda_0 + 2\mu_0 - 2\mu_1}{4\mu_0 + 2\mu_1 + 3\lambda_1} \right) \tilde{\omega}_L^3 + O(\tilde{\omega}_L^5), \\
 T_1^{LL} &= -\frac{i}{9} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \tilde{\omega}_L^3 + O(\tilde{\omega}_L^5), \\
 T_2^{LL} &= \frac{4i}{3} \frac{\mu_0(\mu_0 - \mu_1)}{9\lambda_0\mu_0 + 6\lambda_0\mu_1 + 14\mu_0^2 + 16\mu_0\mu_1} \tilde{\omega}_L^3 + O(\tilde{\omega}_L^5), \\
 T_1^{TL} &= \frac{i}{9} \left(\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\mu_0} \right) \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \tilde{\omega}_L^3 + O(\tilde{\omega}_L^5), \\
 T_2^{TL} &= -\frac{2i}{3} \frac{\mu_0^{-\frac{1}{2}} (\mu_0 - \mu_1) (\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{3}{2}}}{9\lambda_0\mu_0 + 6\lambda_0\mu_1 + 14\mu_0^2 + 16\mu_0\mu_1} \tilde{\omega}_L^3 + O(\tilde{\omega}_L^5),
 \end{aligned} \tag{31}$$

dépendent des paramètres mécaniques de la matrice et de l'inclusion.

Pour une onde incidente transversale ($j = T$), les limites basse fréquence des coefficients de diffusion des ondes longitudinale T_n^{LT} et transversale T_n^{TT} sont :

$$\begin{aligned}
 T_1^{\text{LT}} &= -\frac{2i}{9} \left(\frac{\mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \right) \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \tilde{\omega}_T^3 + O(\tilde{\omega}_T^5), \\
 T_2^{\text{LT}} &= -4i \frac{\mu_0(\mu_1 - \mu_0)\mu_0^{\frac{1}{2}}}{(9\lambda_0\mu_0 + 6\lambda_0\mu_1 + 14\mu_0^2 + 16\mu_0\mu_1)(\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{1}{2}}} \tilde{\omega}_T^3 + O(\tilde{\omega}_T^5), \\
 T_1^{\text{TT}} &= -\frac{2i}{9} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \tilde{\omega}_T^3 + O(\tilde{\omega}_T^5), \\
 T_2^{\text{TT}} &= -2i \frac{(\lambda_0 + 2\mu_0)(\mu_1 - \mu_0)}{(9\lambda_0\mu_0 + 6\lambda_0\mu_1 + 14\mu_0^2 + 16\mu_0\mu_1)} \tilde{\omega}_T^3 + O(\tilde{\omega}_T^5) \\
 &= -2i \frac{(\lambda_0 + 2\mu_0)(\mu_1 - \mu_0)}{2\mu_1(3\lambda_0 + 8\mu_0) + \mu_0(9\lambda_0 + 14\mu_0)} \tilde{\omega}_T^3 + O(\tilde{\omega}_T^5).
 \end{aligned} \tag{32}$$

Notons que du fait de la symétrie de révolution du diffuseur, les amplitudes modales de diffusion de l'onde transversale sont nulles pour le mode $n = 0$, $T_0^{\text{TL}} = T_0^{\text{LT}} = T_0^{\text{TT}} = 0$ [40].

1.3.2.4.2. Conservation de l'énergie

Nous pouvons relier les amplitudes modales des ondes diffusées T_n^{ij} des ondes longitudinale ($j = L$) et transversale ($j = T$) à celles des ondes incidentes à l'aide de la matrice T_n [33]. Le concept de *S-Matrix* ou matrice de diffusion S_n introduit dans les travaux de Waterman [41] et explicité dans l'article de Brill *et al.* [33], permet de relier les potentiels des ondes sortantes à ceux des ondes excitatrices (incidentes). Cette matrice est telle que :

$$S_n = 1 + 2T_n, \tag{33}$$

qui s'écrit également :

$$\begin{pmatrix} S_n^{\text{LL}} & S_n^{\text{LT}} & 0 \\ S_n^{\text{TL}} & S_n^{\text{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & S_n^{\text{TT}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 T_n^{\text{LL}} & 2\tilde{N} T_n^{\text{LT}} & 0 \\ \frac{2}{\tilde{N}} T_n^{\text{TL}} & 1 + 2 T_n^{\text{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 2 t_n^{\text{TT}} \end{pmatrix}, \tag{34}$$

où :

$$\tilde{N} = \sqrt{n(n+1) \frac{k_0^L}{k_0^T}},$$

les coefficients $(T_n^{\text{LL}}, T_n^{\text{LT}}, T_n^{\text{TL}}, T_n^{\text{TT}}, t_n^{\text{TT}})$ étant solutions des systèmes (17), (18) et (27).

Waterman [42] a montré que dans un milieu parfait (i. e. sans perte), la conservation de l'énergie entraîne la symétrie de matrice de diffusion S_n , équation (34), ainsi que la relation suivante :

$$S_n \quad {}^t S_n^* = \bar{I}, \quad (35)$$

entre ladite matrice et sa matrice adjointe. Notons que nos simulations déduites des résolutions des systèmes (17), (18) et (27) satisfont ces deux propriétés.

Après avoir détaillé la modélisation de la diffusion d'une onde plane harmonique par une sphère viscoélastique, isotrope et homogène suspendue dans une matrice viscoélastique, isotrope et homogène, nous en déduisons dans les sections suivantes celle appropriée aux sphères fluides puis aux matrices fluides.

1.3.2.5. Cas d'une inclusion fluide suspendue dans une matrice viscoélastique

Les développements présentés dans cette section nous permettrons de prédire les propriétés effectives du silicone poreux dont la caractérisation est présentée au Chapitre 2.

La particularité de l'inclusion fluide est que le second coefficient de Lamé est nul ($\mu_1 = 0$). Les ondes transversales ne s'y propagent donc pas [30]. La condition de continuité $u_\theta^0(a, \theta, \varphi) = u_\theta^1(a, \theta, \varphi)$ devient obsolète. Les relations à considérer sont donc :

$$\begin{aligned} u_r^0(a, \theta, \varphi) &= u_r^1(a, \theta, \varphi), \\ \sigma_{rr}^0(a, \theta, \varphi) &= \sigma_{rr}^1(a, \theta, \varphi), \\ \sigma_{r\theta}^0(a, \theta, \varphi) &= \sigma_{r\theta}^1(a, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (36)$$

Les résultats des sections 1.3.2.2 et 1.3.2.3 s'en trouvent simplifié. Par souci de clarté, le symbole ' est associé à chacune des amplitudes modales des différents potentiels (équations (15) et (25)).

Pour une onde incidente longitudinale, le potentiel ψ_1 de l'équation (15) est nul. Le système (17) reste inchangé pour le mode monopolaire. Pour les autres modes ($n \geq 1$), les propriétés (36) conduisent au système matriciel (3x3) suivant :

$$\begin{pmatrix} P'_{11}(a) & P'_{12}(a) & P'_{13}(a) \\ P'_{31}(a) & P'_{32}(a) & P'_{33}(a) \\ P'_{41}(a) & P'_{42}(a) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T'^{LL}_n \\ T'^{TL}_n \\ C'^{LL}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S'_1(a) \\ S'_3(a) \\ S'_4(a) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Pour une onde incidente transversale, les potentiels ψ_1 et χ_1 de l'équation (25) sont nuls. Les conditions (36) à l'interface entre la matrice (0) et l'inclusion (1) se traduisent par :

$$\begin{pmatrix} p'_{11}(a) & p'_{12}(a) & p'_{13}(a) \\ p'_{31}(a) & p'_{32}(a) & p'_{33}(a) \\ p'_{41}(a) & p'_{42}(a) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T'^{LT}_n \\ T'^{TT}_n \\ C'^{LT}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s'_1(a) \\ s'_3(a) \\ s'_4(a) \end{pmatrix} \quad (38)$$

et :

$$X'_{21}(a) t'_n{}^{TT} - v'_2(a) = 0.$$

Les coefficients P'_{ij} et S'_i du système (37) relatif à l'onde incidente longitudinale, et les coefficients p'_{ij} , s'_i , X'_{ij} et v'_i du système (38) relatif à l'onde incidente transversale, se déduisent respectivement des coefficients P_{ij} et S_i pour l'onde incidente L (équations (A.14.1) et (A.14.2)) et des coefficients p_{ij} , s_i , X_{ij} et v_i pour l'onde incidente T (équations (A.15.1) à (A.15.4)), en considérant $\mu_1 = 0$. Les expressions basse fréquence des coefficients de diffusion T'^{ij}_n pour les deux polarisations de l'onde incidente, sont déduites de l'équation (31) :

$$\begin{aligned} T'^{LL}_n &= T_n^{LL}(\mu_1 = 0), \\ T'^{TL}_n &= T_n^{TL}(\mu_1 = 0), \\ T'^{LT}_n &= T_n^{LT}(\mu_1 = 0), \\ T'^{TT}_n &= T_n^{TT}(\mu_1 = 0), \end{aligned} \quad (39)$$

pour $n = 0, 1, 2$.

1.3.2.6. Cas d'une inclusion viscoélastique immergée dans une matrice fluide

Dans cette section, nous considérons la diffusion d'une onde plane harmonique par une sphère viscoélastique immergée dans une matrice fluide, cas d'étude qui permettra de prédire dans le Chapitre 2, les propriétés effectives quasi-statiques d'une suspension de billes de silicone poreux dans un gel aqueux.

Dans cette configuration, les ondes transversales ne se propagent pas dans la matrice ($\mu_0 = 0$). À l'interface entre la matrice et la sphère, nous avons les mêmes conditions de

continuité que celles reportées dans l'équation (36). Le symbole '' est associé à chacune des amplitudes modales des différents potentiels (équation (15)).

Pour une onde incidente longitudinale, le potentiel ψ_0 de l'équation (15) est nul. Pour le mode monopolaire ($n = 0$), le système (17) reste inchangé. Le système matriciel (3x3) déduit des relations de continuité s'écrit pour des modes ($n \geq 1$) :

$$\begin{pmatrix} P''_{11}(a) & P''_{13}(a) & P''_{14}(a) \\ P''_{31}(a) & P''_{33}(a) & P''_{34}(a) \\ 0 & P''_{43}(a) & P''_{44}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T''_{n^{LL}} \\ T''_{n^{TL}} \\ C''_{n^{LL}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S''_1(a) \\ S''_3(a) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Les coefficients P''_{ij} et S''_i se déduisent des coefficients P_{ij} et S_i définis dans les équations (A. 14.1) et (A.14.2), en y reportant la condition $\mu_0 = 0$. Les expressions basse fréquence des coefficients de diffusion $T''_{n^{iL}}$, sont alors déduites de l'équation (31) :

$$\begin{aligned} T''_{n^{LL}} &= T_n^{LL}(\mu_0 = 0), \\ T''_{n^{TL}} &= T_n^{TL}(\mu_0 = 0), \end{aligned}$$

pour $n = 0, 1, 2$.

1.3.3. Diffusion multiple d'une onde plane élastique par une population de diffuseurs sphériques : modèles d'homogénéisation

Après avoir décrit en détail la diffusion d'une onde plane élastique par une sphère isolée, nous considérons dans cette section, la diffusion d'une onde plane par plusieurs diffuseurs sphériques, dans le but de prédire les propriétés effectives d'une suspension aléatoire de micro-résonateurs immergés ou suspendus dans une matrice à phase fluide ou solide. Ces diffuseurs sont répartis aléatoirement dans la matrice comme illustré sur la Figure 5. La diffusion multiple modélise les interactions entre diffuseurs. Nous nous intéressons à leur comportement d'ensemble (macroscopique), en considérant ce milieu hétérogène comme un milieu homogène équivalent. Nous présentons les différentes techniques d'homogénéisation de milieux aléatoires évoquées en introduction de ce chapitre:-

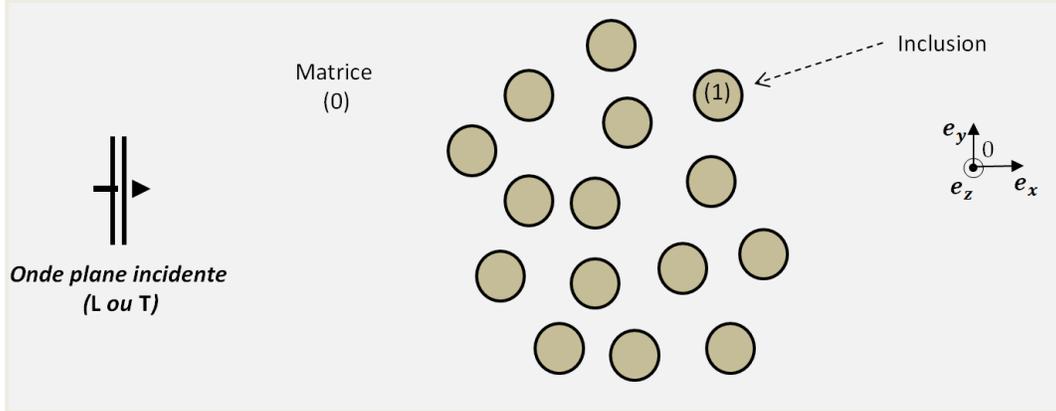


Figure 5. Géométrie du problème de la diffusion d'une onde plane par une population d'inclusions sphériques identiques (de rayon a) et indicées par 1, distribuées aléatoirement dans une matrice viscoélastique infinie indicée par 0.

1.3.3.1. Propriétés effectives

En plus du nombre d'onde effectif k_{eff} (célérité de phase c_{eff} et atténuation α_{eff}), nous pouvons extraire de la propagation de l'onde cohérente dans le milieu homogène équivalent, d'autres paramètres effectifs tels que l'impédance acoustique Z_{eff} , la masse volumique ρ_{eff} ou encore la rigidité M_{eff} . Des descriptions équivalentes considèrent l'indice de réfraction n_{eff} , le module d'élasticité isostatique K_{eff} ou encore les paramètres de Lamé. L'ensemble de ces propriétés sont à valeurs complexes, dépendent de la fréquence, sont associées à la polarisation de l'onde, et peuvent s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned}
 k_{\text{eff}}^j &= \frac{\omega}{c_{\text{eff}}^j} + i \alpha_{\text{eff}}^j, \\
 Z_{\text{eff}}^j &= \rho_{\text{eff}} \frac{\omega}{k_{\text{eff}}^j}, \\
 M_{\text{eff}}^j &= \rho_{\text{eff}} \left(\frac{\omega}{k_{\text{eff}}^j} \right)^2, \\
 n_{\text{eff}}^j &= \frac{c_0^j}{c_{\text{eff}}^j} + i \frac{\alpha_{\text{eff}}^j c_0^j}{\omega},
 \end{aligned} \tag{41}$$

où c_0^j désigne la célérité de phase dans un milieu de référence non dissipatif et j représente la polarisation de l'onde excitatrice, L ou T. Notons que $M_{\text{eff}}^L = \lambda_{\text{eff}} + 2\mu_{\text{eff}}$ et $M_{\text{eff}}^T = \mu_{\text{eff}}$.

1.3.3.2. Modèles de diffusion

Formalisons les interactions multiples entre N_d résonateurs (diffuseurs) à partir des champs de potentiel de déplacement. Le champ de potentiel total $\psi_{\text{tot}}(\mathbf{r})$ au point $P(\mathbf{r})$ repéré par sa position \mathbf{r} comme illustré sur la Figure 5, résulte de la somme du champ incident $\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r})$ et des contributions de tous les champs diffusés $\sum_{j=1}^{N_d} \psi_{\text{diff}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)$ au point P [43] :

$$\psi_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^{N_d} \psi_{\text{diff}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j), \quad (42)$$

avec la particularité que le champ diffusé par chaque diffuseur repéré par sa position \mathbf{r}_j dépend de son propre champ d'excitation [43] :

$$\psi_{\text{diff}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = T_n^{kl} \psi_{\text{exci}}(\mathbf{r}), \quad (43)$$

où T_n^{kl} représente l'amplitude modale de chacune des ondes diffusées par le diffuseur, k et l désignant respectivement les polarisations de l'onde diffusée et de l'onde incidente. Notons qu'on est dans le cas d'une diffusion simple $\psi_{\text{exci}}(\mathbf{r}) = \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r})$.

La distribution aléatoire des diffuseurs nous conduit à moyenner sur l'ensemble des configurations possibles de positions des diffuseurs. C'est dans ce cadre que différents modèles de diffusion appelés aussi modèles d'homogénéisation de milieux à structure aléatoire ont été développés. Ces théories de diffusion prédisent le nombre d'onde effectif de l'onde cohérente qui se propage dans le milieu inclusionnaire vu homogène, sous différentes hypothèses (concentration de diffuseurs...) et avec des conditions de validité propres. Dans le cas où les diffuseurs de rayon a sont identiques (monodispersité en taille des diffuseurs), la fraction volumique d'inclusions est reliée au nombre de diffuseurs par unité de volume η par :

$$\phi = \frac{4}{3} \pi a^3 \eta. \quad (44)$$

1.3.3.2.1. Modèle de Foldy

En 1945, Foldy [17] définit le nombre d'onde effectif de l'onde cohérente longitudinale se propageant dans un milieu fluide contenant η diffuseurs (par unité de volume) ponctuels et isotropes comme suit :

$$k_{\text{eff}}^L{}^2 = k_0^2 + 4\pi f_{LL}(0)\eta. \quad (45)$$

Ce nombre d'onde dépend du 1^{er} ordre en concentration de diffuseurs, de la fonction de diffusion vers l'avant $f_{LL}(0)$ (équation (22)) et du nombre d'onde k_0 de l'onde incidente. Ce modèle de diffusion est très utilisé dans les milieux fluides contenant par exemple des gouttes d'huile [44] ou des bulles d'air [45].

1.3.3.2.2. Modèle de Waterman et Truell

Le modèle de diffusion multiple de Waterman et Truell (WT) [19] conduit à une expression du nombre d'onde effectif de milieux aléatoires, qui dépend du 2^e ordre en concentration de diffuseurs sans pour autant modifier le 1^{er} ordre établi par Foldy. Dans leur étude, WT considèrent des diffuseurs ponctuels anisotropes uniformément repartis dans une matrice fluide. Leur nombre d'onde est donné par :

$$k_{\text{eff}}^L{}^2 = k_0^L{}^2 + 4\pi f_{LL}(0)\eta + \frac{4\pi^2}{k_0^L{}^2} (f_{LL}^2(0) - f_{LL}^2(\pi))\eta^2, \quad (46)$$

où la fonction de rétrodiffusion $f_{LL}(\pi)$ (équation (22)) apparaît en plus de la fonction de diffusion vers l'avant. Notons que l'égalité de ces deux fonctions de diffusion particulières ($f_{LL}(0) = f_{LL}(\pi)$) réduit l'écriture de WT à celle de Foldy (45).

Dans le cadre des travaux de WT, Aristégui et Angel [46] ont établi l'expression de l'impédance effective de l'onde cohérente longitudinale, en analysant les propriétés du système d'ondes cohérentes interagissant avec une plaque contenant une distribution aléatoire de diffuseurs ponctuels. Cette étude a permis d'en déduire les propriétés mécaniques effectives (masse volumique ρ_{eff}^L et rigidité M_{eff}^L) du milieu homogène équivalent :

$$\begin{aligned} \rho_{\text{eff}}^L &= \rho_0 \left(1 + \frac{2\pi}{k_0^L{}^2} \eta (f_{LL}(0) - f_{LL}(\pi)) \right), \\ M_{\text{eff}}^L &= M_0 \left(1 + \frac{2\pi}{k_0^L{}^2} \eta (f_{LL}(0) + f_{LL}(\pi)) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (47)$$

Notons que la formulation WT a été développée pour une matrice fluide mais reste valable pour une matrice solide sous l'hypothèse que la géométrie des inclusions est cylindrique pour les problèmes bidimensionnels ou sphérique pour les problèmes tridimensionnels [12].

Approximations basse fréquence

Les propriétés effectives d'une distribution aléatoire de diffuseurs s'expriment ainsi en fonction des fonctions de diffusion $f_{LL}(0)$ et $f_{LL}(\pi)$ définies par la relation (22), et par suite des amplitudes modales de diffusion T_n^{LL} , dont les approximations basse fréquence sont reportées dans l'équation (31) pour le cas de diffuseurs sphériques. Dans cette limite, les fonctions T_n^{LL} d'ordre supérieur ou égal à 3 étant négligeables, l'expression (46) du nombre d'onde se réduit à :

$$\frac{k_{\text{eff}}^2}{k_0^{L2}} = 1 - \frac{3i\phi}{\tilde{\omega}_L^3} (T_0^{LL} + 3T_1^{LL} + 5T_2^{LL}) + \frac{27\phi^2}{\tilde{\omega}_L^6} (T_0^{LL}T_1^{LL} + 5T_1^{LL}T_2^{LL}). \quad (48)$$

Notons qu'omettre la dépendance en ϕ^2 , revient à accéder à la limite basse fréquence du nombre d'onde de Foldy, équation (45).

En substituant les amplitudes modales (31) dans l'expression (48) du nombre d'onde, nous pouvons exprimer la limite quasi-statique de la célérité de phase à l'aide de la relation suivante :

$$\frac{c_{\text{eff}}|_{\tilde{\omega}_L \rightarrow 0}}{c_0^L} = \frac{1}{\frac{k_{\text{eff}}}{k_0}|_{\tilde{\omega}_L \rightarrow 0}}. \quad (49)$$

Si la matrice est fluide ($\mu_0 = 0$), la limite quasi-statique c_{QS}^{WT} de la célérité de phase s'écrit alors :

$$\frac{c_{QS}^{WT}}{c_0^L} = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - 3\phi \frac{1-\tilde{\rho}}{1+2\tilde{\rho}}\right) \left(1 - \phi \frac{\lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1 - \lambda_0}{\lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1}\right)}}, \quad (50)$$

où c_0^L désigne la célérité de phase longitudinale dans la matrice et $\tilde{\rho} = \rho_1/\rho_0$ le rapport des masses volumiques de l'inclusion et de la matrice. La limite quasi-statique de la masse volumique effective :

$$\rho_{QS}^{WT} = \rho_0 \left(1 - 3\phi \frac{1 - \tilde{\rho}}{1 + 2\tilde{\rho}} \right), \quad (51)$$

est quant à elle obtenue à partir de l'expression (47), et diffère de la loi des mélanges [47] :

$$\rho_{QS} = \rho_0(1 - \phi) + \phi\rho_1, \quad (52)$$

caractéristique des matrices solides quelle que soit la nature de l'inclusion [46].

Enfin, les limites quasi-statiques des coefficients de Lamé effectifs se déduisent des limites quasi-statiques de la célérité de phase (50) et de la masse volumique (51), à l'aide de l'équation (41).

1.3.3.2.3. Modèle de Lloyd et Berry (ou de Linton et Martin)

Lloyd et Berry [20] étendent le modèle de WT aux diffuseurs sphériques de taille finie sans modifier le terme de Foldy. Ils introduisent la notion de rayon d'exclusion permettant ainsi aux diffuseurs de ne pas s'interpénétrer. Leur nombre d'onde est donné par :

$$k_{\text{eff}}^L{}^2 = k_0^L{}^2 + 4\pi f_{LL}(0)\eta - \frac{4\pi^2}{k_0^L{}^2} \left(f_{LL}(0)^2 - f_{LL}(\pi)^2 + \int_0^\pi \frac{d(f_{LL}(\theta)^2)}{d\theta} \frac{d\theta}{\sin(\theta/2)} \right) \eta^2, \quad (53)$$

où $f_{LL}(\theta)$ est la fonction de diffusion pour tout angle θ définie par la relation (19) et qui s'écrit en fonction des amplitudes modales de diffusion, T_n^{LL} . Cependant l'implémentation numérique de l'expression (53) reste complexe. C'est dans ce cadre qu'une écriture équivalente du nombre d'onde de Lloyd et Berry a été proposée par Linton et Martin (LM) [21].

Ils établissent alors une autre formulation du terme fonction du carré de la concentration de diffuseurs, η^2 . En introduisant le coefficient de Gaunt G , ils obtiennent la relation suivante [21] :

$$k_{\text{eff}}^L{}^2 = k_0^L{}^2 + \delta_1\eta + \delta_2\eta^2, \quad (54)$$

avec :

$$\delta_1 = 4\pi f_{LL}(0)$$

et :

$$\delta_2 = -\frac{8\pi^2}{k_0^L{}^6} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{v=0}^{+\infty} \sum_{q=|n-v|}^{n+v} (2n+1)(2v+1) G(0, v; 0, n; q) q T_n^{LL} T_v^{LL}, \quad (55)$$

où :

$$G(0, v; 0, n; q) = \frac{G(n, 0; v, 0; q)}{\sqrt{(2n+1)(2v+1)/(4\pi(2q+1))}}$$

$G(n, 0; v, 0; q)$ désignant l'expression du coefficient de Gaunt développée par Xu [22] et présentée dans l'Annexe 6. Notons que la somme sur le mode q intervenant dans le terme δ_2 est définie de $|n-v|$ à $n+v$ par pas de 2 et que ce terme prend la forme suivante [21] :

$$\delta_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{k_0^L} \right)^4 \sum_{n,v}^{+\infty} K_{nv} T_n^{LL} T_v^{LL},$$

où :

$$K_{nv} = \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{3/4} \sqrt{(n+1)(v+1)} \sum_{q=|n-v|}^{n+v} q \sqrt{q+1} G(n, 0; v, 0; q). \quad (56)$$

Suivant la même démarche qu'Aristégui et Angel [46], Caleap [48] établit dans le cadre des travaux de Lloyd et Berry, la masse volumique effective d'une population de sphères immergées :

$$\rho_{\text{eff}} = \rho_0 (1 + \zeta_1 \eta + \zeta_2 \eta^2), \quad (57)$$

avec :

$$\zeta_1 = \frac{2\pi^2}{k_0^L{}^2} (f_{LL}(0) - f_{LL}(\pi)),$$

$$\zeta_2 = \frac{4\pi^2}{k_0^L{}^4} \left(f_{LL}(0)^2 - f_{LL}(\pi)^2 + \int_0^\pi \frac{d(f_{LL}(\theta)(f_{LL}(\theta) - f_{LL}(\pi - \theta)))}{d\theta} \frac{d\theta}{2 \sin(\theta/2)} \right).$$

En combinant cette relation et l'expression du nombre d'onde (54), l'ensemble des propriétés acoustiques et mécaniques peut alors être évalué (cf. équation (41)).

Approximations basse fréquence

Les propriétés effectives d'une distribution aléatoire de diffuseurs s'expriment en fonction de la fonction de diffusion $f_{LL}(\theta)$ définie par la relation (19), et par suite des amplitudes modales de diffusion T_n^{LL} , dont les approximations basse fréquence sont reportées dans l'équation (31). Dans cette limite, les fonctions T_n^{LL} d'ordre supérieur ou égal à 3 étant négligeables, l'expression (54) du nombre d'onde se réduit à :

$$\frac{k_{\text{eff}}^2}{k_0^{L^2}} = 1 - \frac{3i\phi}{\tilde{\omega}_L^3} (T_0^{LL} + 3T_1^{LL} + 5T_2^{LL}) - \frac{9\phi^2}{2\tilde{\omega}_L^6} \Delta_{LB},$$

avec :

(58)

$$\Delta_{LB} = 12 T_1^{LL^2} + 6 T_0^{LL} T_1^{LL} + 20 T_0^{LL} T_2^{LL} + 66 T_1^{LL} T_2^{LL} + \frac{460}{7} T_2^{LL^2},$$

résultat conforme à celui établi par Challis *et al.* [34].

En substituant les amplitudes modales (31) dans l'expression (58) du nombre d'onde, nous obtenons la limite quasi-statique c_{QS}^L de la célérité de phase de l'onde plane cohérente longitudinale se propageant dans une matrice viscoélastique contenant une distribution aléatoire de diffuseurs viscoélastiques sphériques de concentration ϕ :

$$\left(\frac{c_0^L}{c_{QS}^L} \right)^2 = 1 - \phi \left((1 - \tilde{\rho}) + \frac{\lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1 - \lambda_0 - \frac{2}{3}\mu_0}{\frac{4}{3}\mu_0 + \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1} - \frac{20\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}{9\lambda_0\mu_0 + 6\lambda_0\mu_1 + 16\mu_0\mu_1 + 14\mu_0^2} \right) - \phi^2 \Delta'_2, \quad (59)$$

où c_0^L est la célérité de phase longitudinale dans la matrice, $\tilde{\rho} = \rho_1/\rho_0$ est le rapport des masses volumiques de l'inclusion et de la matrice, et Δ'_2 est un coefficient à valeurs complexes dépendant des propriétés mécaniques de la matrice et des inclusions (explicité dans l'Annexe 6).

Notons que lorsque la fraction volumique est nulle ($\phi = 0$), la célérité de phase (57) se réduit naturellement à celle de la matrice, et lorsque $\Delta'_2 = 0$, nous retrouvons la limite quasi-statique de la célérité de phase de Foldy. L'expression (50) s'applique également aux cas de matrice fluide ($\mu_0 = 0$) ou d'inclusions fluides ($\mu_1 = 0$), sections 1.3.2.5 et 1.3.2.6.

1.3.3.2.4. Modèle de Luppé, Conoir et Norris

Luppé, Conoir et Norris (LCN) [23] généralisent en 2011 le modèle de Linton et Martin en traitant le cas des matrices solides. Apparaît alors dans l'expression du nombre effectif :

$$k_{\text{eff}}^L{}^2 = k_0^L{}^2 + \delta_1 \eta + (\delta_2 + \delta_2^{(c)}) \eta^2, \quad (60)$$

les termes δ_1 et δ_2 définis dans l'équation (55), ainsi que le terme $\delta_2^{(c)}$:

$$\begin{aligned} \delta_2^{(c)} = & -\frac{8\pi^2}{k_0^L{}^6} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{v=0}^{+\infty} \sum_{q=|n-v|}^{n+v} (2n+1)(2v \\ & + 1) G(0, v; 0, n; q) \sum_{L \neq T} \frac{2k_0^L{}^3}{k_0^T (k_0^L{}^2 - k_0^T{}^2)} \left(\frac{k_0^L}{k_0^T}\right)^q T_n^{\text{TL}} T_v^{\text{LT}}, \end{aligned} \quad (61)$$

qui dépend des coefficients de diffusion T_n^{TL} et T_v^{LT} et rend par conséquent compte des multiples conversions de modes aux interfaces entre la matrice et les inclusions. En l'absence de conversion de modes ($\delta_2^{(c)} = 0$), dans le cas des matrices fluides par exemple, les relations (54) et (60) sont identiques.

Approximations basse fréquence

Comme pour les relations (48) et (58), le nombre d'onde de LCN s'écrit dans la limite quasi-statique sous la forme :

$$\frac{k_{\text{eff}}^L{}^2}{k_0^L{}^2} = 1 - \frac{3i\phi}{\tilde{\omega}_L^3} (T_0^{\text{LL}} + 3T_1^{\text{LL}} + 5T_2^{\text{LL}}) - \frac{9\phi^2}{2\tilde{\omega}_L^6} \Gamma_{LCN}, \quad (62)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Gamma_{LCN} = & \Delta_{LB} + \xi \left[(6r^2 + 3) T_1^{\text{LT}} T_1^{\text{TL}} + \left(\frac{90}{7} r^4 + \frac{50}{7} r^2 + 5\right) T_2^{\text{LT}} T_2^{\text{TL}} \right. \\ & \left. + (9r^3 + 6r) \{T_1^{\text{LT}} T_2^{\text{TL}} + T_2^{\text{LT}} T_1^{\text{TL}}\} \right], \end{aligned}$$

où :

$$r = \frac{k_0^L}{k_0^T} \text{ et } \xi = \frac{2k_0^L{}^3}{k_0^T (k_0^L{}^2 - k_0^T{}^2)}.$$

Notons que lorsque $\xi = 0$, l'expression Γ_{LCN} se réduit à Δ_{LB} , coefficient intervenant dans l'expression basse fréquence du nombre d'onde effectif de Lloyd et Berry, équation (58). Les deux modèles sont alors identiques.

En substituant les expressions basse fréquence des fonctions de diffusion (équations (31) et (32)) dans la relation (62), nous obtenons l'expression suivante de la limite quasi-statique de la célérité de phase :

$$\left(\frac{c_0^L}{c_{QS}^L}\right)^2 = 1 - \phi \left((1 - \tilde{\rho}) + \frac{\lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1 - \lambda_0 - \frac{2}{3}\mu_0}{\frac{4}{3}\mu_0 + \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1} - \frac{20\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}{9\lambda_0\mu_0 + 6\lambda_0\mu_1 + 16\mu_0\mu_1 + 14\mu_0^2} \right) - \phi^2 \left(\Delta_2' - \frac{\Delta_2''}{\lambda_0 + \mu_0} \right), \quad (63)$$

où Δ_2'' est un coefficient à valeurs complexes dépendant des propriétés mécaniques de la matrice et des inclusions, explicité dans l'équation (A.21) de l'Annexe 6.

Indice de réfraction

Introduisons l'indice de réfraction acoustique n_{eff} qui relie le nombre d'onde effectif à celui d'un milieu de référence supposé parfait. Ce paramètre équivalent au nombre d'onde effectif, est très en vogue au sein de la communauté des métamatériaux acoustiques, qui cherche en particulier à contrôler le signe de cet indice [14].

Dans la limite quasi-statique l'atténuation effective étant nulle, l'expression analytique de l'indice n_{eff} se déduit facilement de celle de la célérité effective (équation (50), (59) ou (63)) à l'aide de la relation (41).

1.3.3.2.5. Modélisation de la polydispersité en taille des diffuseurs

Dans un cadre plus réaliste, les inclusions n'ont pas exactement les mêmes tailles. La littérature sur la caractérisation des milieux inclusionnaires aléatoires mentionne une distribution logarithmique des diamètres des inclusions [44] [49]. Pour prédire fidèlement les phénomènes de propagation dans de tels milieux, nous présentons dans cette section la prise en compte de la polydispersité en taille des diffuseurs, dans les modèles de diffusion multiple.

Notons que la loi lognormale standard définie comme une distribution normale du logarithme de densité de probabilité $p(y)$, de la variable y , d'espérance μ et d'écart-type σ s'écrit :

$$p(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (64)$$

En considérant un rayon moyen \bar{a} et une polydispersité liée à l'écart-type de la distribution σ , Mascaro *et al.* [44] définissent la polydispersité par $P = \sigma/\bar{a}$, et la fraction volumique totale des diffuseurs par $\phi = \int (\eta(a)4\pi a^3/3)da$. Le nombre total de diffuseurs par unité de volume est donné par :

$$N = \int \eta(a) da, \quad (65)$$

où $\eta(a) = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-\bar{a})^2}{2\sigma^2}}$ désigne la distribution en taille des diffuseurs. L'introduction de la polydispersité dans les modèles de diffusion revient ainsi à moyenniser les effets des résonances [44] et par suite à réduire le facteur de qualité de résonance³.

Dans ce contexte, le nombre d'onde effectif de Foldy, équation (45), devient :

$$k_{\text{eff}}^L{}^2 = k_0^L{}^2 + \int 4\pi \eta(a) \tilde{f}_{LL}(0, a) da, \quad (66)$$

où, pour plus de clarté la dépendance de la fonction de diffusion f_{LL} en fonction du rayon de diffuseur a est ici soulignée, $\tilde{f}_{LL}(0, a) \equiv f_{LL}(0)$ [44]. En considérant N valeurs de la fonction $\eta(a)$, l'équation (66) prend alors la forme discrète suivante :

$$k_{\text{eff}}^L{}^2 = k_0^L{}^2 + \frac{4\pi}{N} \sum_{i=1}^N \eta(a_i) \tilde{f}_{LL}(0, a_i). \quad (67)$$

Les expressions (66) et (67) du nombre d'onde de Foldy sont équivalentes à une moyenne des prédictions du nombre d'onde effectif (45) sur l'ensemble des tailles de diffuseurs.

L'introduction de la polydispersité en taille dans les modèles allant au 2^e ordre en concentration est différente. Dans les cas des modèles de WT, LM ou LNC, la prise en compte de la

³ Le facteur de qualité de résonance, noté Q_n , est défini comme le rapport entre la fréquence de résonance f_{res} du mode n et la largeur à mi-hauteur du pic de résonance du mode correspondant Δf_{res} , [44].

polydispersité revient considérer les interactions entre les populations de diffuseurs de tailles différentes. Le nombre d'onde de Waterman et Truell (46) s'écrit alors :

$$k_{\text{eff}}^L{}^2 = k_0^L{}^2 + \frac{4\pi}{N} \sum_{i=1}^N \eta(a_i) \tilde{f}_{LL}(0, a_i) - \left(\frac{4\pi}{N k_0^L{}^2} \right)^2 \sum_{i,j}^N \sum_{n,v}^{+\infty} (4n+3)(4v+1) T_n^{LL}(a_i) T_v^{LL}(a_j) \eta(a_i) \eta(a_j), \quad (68)$$

alors que celui de Linton et Martin (54) prend la forme suivante :

$$k_{\text{eff}}^L{}^2 = k_0^L{}^2 + \frac{4\pi}{N} \sum_{i=1}^N \eta(a_i) \tilde{f}_{LL}(0, a_i) - \frac{1}{2 N^2} \left(\frac{4\pi}{k_0^L} \right)^4 \sum_{i,j}^N \sum_{n,v}^{+\infty} K_{nv} q \tilde{T}_n^{LL}(a_i) \tilde{T}_v^{LL}(a_j) \eta(a_i) \eta(a_j), \quad (69)$$

où le terme K_{nv} a été défini dans l'équation (58) et où la dépendance des coefficients de diffusion en fonction du rayon de diffuseur a est ici soulignée, $\tilde{T}_n^{ij}(a) \equiv T_n^{ij}$. De manière équivalente, le modèle de LCN, équation (60), devient :

$$k_{\text{eff}}^L{}^2 = k_0^L{}^2 + \frac{4\pi}{N} \sum_{i=1}^N \eta(a_i) \tilde{f}_{LL}(0, a_i) - \frac{1}{2 N^2} \left(\frac{4\pi}{k_0^L} \right)^4 \sum_{i,j}^N \sum_{n,v}^{+\infty} K_{nv} q \tilde{T}_n^{LL}(a_i) \tilde{T}_v^{LL}(a_j) \eta(a_i) \eta(a_j) - \frac{1}{2 N^2} \left(\frac{4\pi}{k_0^L} \right)^4 \sum_{i,j}^N \sum_{n,v}^{+\infty} Q_{nv} \tilde{T}_n^{TL}(a_i) \tilde{T}_v^{LT}(a_j) \eta(a_i) \eta(a_j), \quad (70)$$

où :

$$Q_{nv} = \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{3/4} \sqrt{(n+1)(v+1)} \sum_{q=|n-v|}^{n+v} \left(\frac{k_0^L}{k_0^T} \right)^q \sqrt{q+1} G(n, 0; v, 0; q).$$

L'impact de la polydispersité en taille des diffuseurs sur les propriétés effectives des matériaux inclusionnaires sera discuté dans le Chapitre 2.

1.3.3.2.6. Validité des modèles de diffusion multiple

Toutes les expressions des nombres d'onde effectif reportées précédemment ont été établies sous l'hypothèse de distribution diluée de diffuseurs ($\phi \ll 1$). À forte concentration, des techniques implicites de type CPA (ou *Coherent potential approximation*) seraient plus adaptées [50].

Les prédictions issues des modèles explicites introduits ont été comparées avec succès à des résultats numériques ou expérimentaux dans les cas où les diffuseurs ne résonnent pas [27] [51] [52] [53]. Ces différentes formulations ont également été validées à basse fréquence pour de faibles concentrations de diffuseurs résonants [12] [14] [44] [52].

1.4. Conclusion

La démarche suivie dans ce premier chapitre est purement théorique. Nous avons rappelé les équations nécessaires pour modéliser la propagation d'une onde plane dans un milieu hétérogène composé de diffuseurs sphériques, homogènes, isotropes et répartis aléatoirement dans une matrice homogène et isotrope.

Nous avons résolu dans un premier temps le problème de la diffusion d'une onde longitudinale ou transversale, par une sphère isolée. Pour chacune de ces deux sollicitations, l'identification des amplitudes modales des potentiels de déplacement scalaires (équations (15) et (25)) par la résolution des systèmes (17), (18) ou (27), permet de déterminer les fonctions de diffusion (19) et (29) ainsi que les champs de déplacement et de contrainte au sein du milieu hôte et du diffuseur, équations (A.17) à (A.18).

Enfin, les propriétés de diffusion simple d'une sphère isolée ont été introduites dans différentes modèles d'homogénéisation qui considèrent les mécanismes de diffusion multiple, pour prédire les propriétés effectives de l'onde cohérente longitudinale se propageant dans une population de sphères identiques ou non. Une analyse basse fréquence a conduit en particulier à établir la limite quasi-statique de la célérité de phase effective de l'onde cohérente, pour des phases solides ou fluides.

L'accord entre les prédictions théoriques établies et les propriétés recherchées dans la caractérisation des matériaux est discuté dans le prochain chapitre.

Chapitre 2.

Comportement acoustique de plaques hétérogènes isolantes à base d'inclusions de silicone poreux

2.1. Introduction

Dans le précédent chapitre, nous avons montré la possibilité d'homogénéiser un milieu composite désordonné à partir de théories de diffusion multiple pour en extraire les propriétés effectives acoustiques selon différentes configurations de matrices et de diffuseurs sphériques (*matrice fluide, inclusions solides ; matrice solide, inclusions fluides ; matrice solide, inclusions solides*). Une telle étude théorique est motivée par la possibilité de concevoir et prédire les propriétés effectives d'un matériau multi-échelle ayant des propriétés de métamatériaux acoustiques (célérités de phase négatives, et/ou des niveaux d'atténuation très élevés).

En effet, les propriétés exotiques telles que les célérités de phase négatives peuvent être obtenues avec un système composé d'une matrice fluide dans laquelle est répartie aléatoirement une large collection de micro-résonateurs identiques et calibrés. Pour observer des résonances locales marquées, les résonateurs doivent présenter un contraste très élevé de propriétés acoustiques (masse volumique, célérité du son, ...) avec la matrice environnante pour induire de fortes variations de la célérité du son et de l'atténuation dans le milieu composite permettant ainsi d'obtenir des propriétés effectives non usuelles telles que des paramètres acoustiques négatifs (masse volumique, célérité de phase, célérité de groupe, indice de réfraction, ...). En tirant profit de fortes résonances de Mie (monopolaire et dipolaire) de microbilles de silicone poreux suspendues aléatoirement dans un gel aqueux dilué, Brunet *et al.* [14] ont obtenu le premier métamatériau acoustique tridimensionnel présentant une bande négative de l'indice de réfraction autour de 300kHz. Ces propriétés exotiques résultent du contraste important de célérité du son entre la matrice gel (de l'ordre de $1500\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) et des microbilles de silicone poreux (de l'ordre de $100\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$). Cependant, ces métamatériaux présentent également des niveaux d'atténuation très importants. Ces métamatériaux peuvent donc également servir d'écrans sub-longueurs d'onde très faible coefficients de transmission en vue d'applications telles que l'isolation (ultra-)sonore (transmission nulle) [11]. La stratégie adoptée dans ce manuscrit est celle utilisée par

Brunet *et al.* [14]. L'idée est de répartir aléatoirement un nombre important de micro-résonateurs dans une matrice souple viscoélastique et d'en étudier les propriétés d'isolation acoustique.

Le premier objectif à atteindre est la synthèse de résonateurs acoustiques « efficaces ». Pour cela, nous cherchons des résonateurs présentant un fort contraste de célérité du son par rapport à la matrice environnante dont les propriétés acoustiques sont très proches de celle de l'eau en vue d'applications dans le domaine de l'acoustique sous-marine.

Il est connu depuis longtemps que les milieux poreux peuvent présenter des célérités de son très basses [54] du fait de la présence d'une grande quantité d'air dans le matériau sous forme de pores, entraînant une forte compressibilité du matériau qui reste dense, contrairement aux gaz, du fait de la présence d'un squelette solide. À titre d'exemple, J. Gross *et al.* [55] ont étudié la propagation des ondes longitudinales dans des aérogels de silice sur une plage de masse volumique comprise entre $5 \cdot 10^{-3} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ et $0,5 \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$, Ils ont montré que la célérité du son pouvait descendre jusqu'à $100 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Les milieux bulleux étudiés par V. Leroy *et al.* [49] sont également connus pour leurs très faibles célérités du son de l'ordre de $20 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Toutefois, l'inconvénient de tels systèmes est l'instabilité pour les milieux bulleux et la fragilité pour les aérogels de silice.

Les polymères organiques poreux semblent plus prometteurs en raison de leur stabilité et de leur grand domaine élastique. Dans l'objectif de réduire le plus possible la célérité du polymère poreux, nous avons effectué une étude comparative des célérités du son dans plusieurs matériaux poreux en modélisant la célérité effective déduite du modèle de Luppé, Conoir et Norris (LCN) défini à la partie 1.3.3.2.4 du Chapitre 1. La configuration étudiée ici est celle d'une matrice solide (polymère) chargée avec des inclusions fluides (cavités sphériques d'air de rayons $a = 5 \mu\text{m}$, et de fraction volumique ϕ). Ces pores étant de petite taille devant les longueurs d'ondes millimétriques mises en jeu dans cette étude, les approximations basse-fréquence des modèles d'homogénéisation type LCN données par la relation (63) sont suffisantes. Par la suite, l'expression en limite quasi-statique de la célérité du son sera notée c_{QS}^{LCN} . À partir de cette expression basée sur la configuration *matrice solide/inclusions solides*, nous pouvons en déduire l'expression de la célérité en limite quasi-statique du cas *matrice solide/inclusions fluide* en

considérant la non-propagation des ondes transversales dans l'inclusion (soit $\mu_1 = 0$). La relation (63) devient alors :

$$c_{QS}^{LCN} = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0 \left(1 - \phi \left((1 - \tilde{\rho}) + \frac{3\lambda_1 - 3\lambda_0 - 2\mu_0}{4\mu_0 + 3\lambda_1} + \frac{20\mu_0}{9\lambda_0 + 14\mu_0} \right) - \phi^2 \left(Y'_2 - \frac{Y''_2}{\lambda_0 + \mu_0} \right) \right)}} \quad (71)$$

Les coefficients Y'_2 et Y''_2 dépendent uniquement des paramètres mécaniques de la matrice et de l'air, et sont détaillés en Annexe 6. De plus, le module de cisaillement est relié au module d'Young et au coefficient de Poisson par la relation (2). D'autres relations existantes entre les différents paramètres élastiques et acoustiques sont présentées en Annexe 2. L'expression de la célérité en limite quasi-statique (relation (71)) dépend uniquement des propriétés élastiques de la matrice, des inclusions, et de la fraction volumique ϕ des pores.

À partir des propriétés élastiques d'une liste non exhaustive de matériaux polymériques existante dans la littérature dont le PVC (ou Polychlorure de vinyle) étudié par N. Stenger *et al.* [56], le Polyuréthane considéré par Lepert [12], et le PDMS (ou Polydiméthylsiloxane) utilisé par Leroy *et al.* [57], nous avons modélisé l'évolution de la célérité du son des ondes longitudinales en fonction de la fraction volumique des pores à des longueurs d'ondes ($\sim 1 \mu\text{m}$) très grande devant la taille des cavités d'air (entre 1 et $10 \mu\text{m}$). Cette comparaison est illustrée sur la Figure 6.

Les calculs montrent que le silicone (ou PDMS) poreux possède la plus basse célérité de son comparativement aux autres polymères (PVC et Polyuréthane) poreux. Lorsque la fraction volumique passe de 0 à 5% de porosité, la célérité du son dans le silicone poreux décroît brutalement de $1020 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ à $200 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Remarquons qu'à 40% de porosité, celle-ci est de l'ordre de $100 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

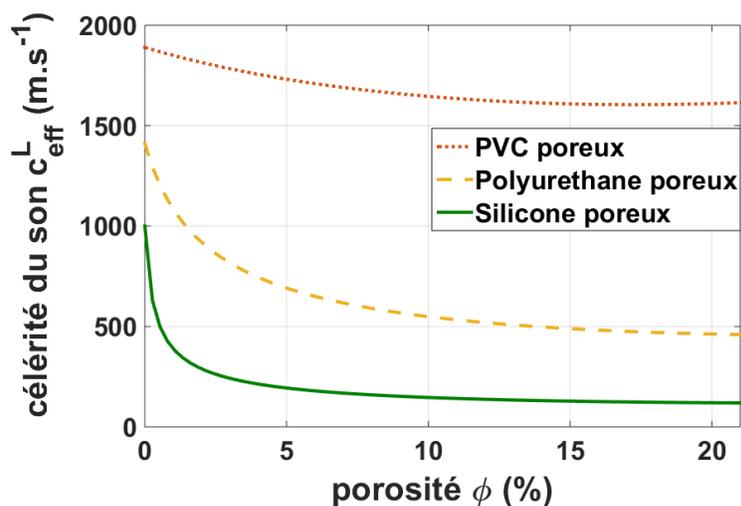


Figure 6. Comparaison de la célérité du son pour différentes matrices polymériques selon la porosité du matériau.

Les propriétés élastiques des différentes matrices sont reportées dans le Tableau 1.

Propriétés élastiques	PVC	Polyurethane	Silicone
Masse volumique ρ_1 (g. cm ⁻³)	1,2	1,18	0,96
1 ^{er} coefficient Lamé λ_1 (GPa)	3,42	8,96	0,99
2 ^e coefficient Lamé μ_1 (GPa)	0,85	2,12	$1,6 \cdot 10^{-3}$

Tableau 1. Propriétés élastiques des matrices polymériques.

Ainsi, dans la suite de ce travail, nous nous focaliserons sur des micro-résonateurs faits à partir de silicone poreux uniquement.

Nous consacrerons **la première partie de ce chapitre** à la synthèse et à la caractérisation mécanique/acoustique du silicone poreux qui constituera la brique élémentaire du métamatériau acoustique.

La seconde partie de ce chapitre décrira la fabrication des micro-résonateurs sphériques à base de silicone poreux. Ces derniers seront suspendus aléatoirement dans un gel aqueux pour l'étude de la réponse acoustique de la suspension.

Enfin, l'objet de **la troisième partie du chapitre** sera d'étudier les propriétés acoustiques en transmission de très fines plaques souples contenant un grand nombre de ces micro-résonateurs.

2.2. Synthèse du silicone poreux et caractérisation de ses propriétés physiques

Nous nous pencherons dans cette section sur la formulation et la fabrication du silicone poreux, puis nous présenterons les caractérisations optique, mécanique et acoustique du silicone poreux conçu sous forme de monolithes circulaires.

2.2.1. Synthèse du silicone poreux

Le silicone ou Polydiméthylsiloxane (ou **PDMS**) est un élastomère formé d'une chaîne de silicium (Si) et d'oxygène (O). La synthèse du silicone poreux est effectuée par nos collègues physico-chimistes du Centre de Recherche Paul Pascal (CRPP) et du Laboratoire du Futur (LOF). La formulation du silicone poreux est possible par polymérisation sous ultra-violet (UV, ou rayon UV) d'une émulsion utilisant une approche dite « PolyHIPE » (où « Polymerized High Internal Phase Emulsions »), appelée également « emulsion templating procedure ». Cette approche développée dans les années 1980 par Unilever [58], et couramment utilisée par différents groupes de recherches scientifiques [59] [60] peut être présentée en trois phases successives illustrées sur la Figure 7. La première consiste à réaliser une dispersion d'un important volume d'eau constituant la phase interne de l'émulsion dans une phase continue d'huile de silicone. Dans la plus part des cas, les émulsions ne sont pas parfaitement monodisperses et leur distribution en taille obéit à une loi gaussienne avec un écart-type très petit. La seconde phase de formulation concerne la réticulation du polymère, elle consiste en une

polymérisation de l'émulsion par un faisceau de lumière UV. Enfin, la troisième phase consiste à sécher l'émulsion dans le but d'éliminer la phase interne (eau) créant ainsi des cavités sphériques d'air [61].

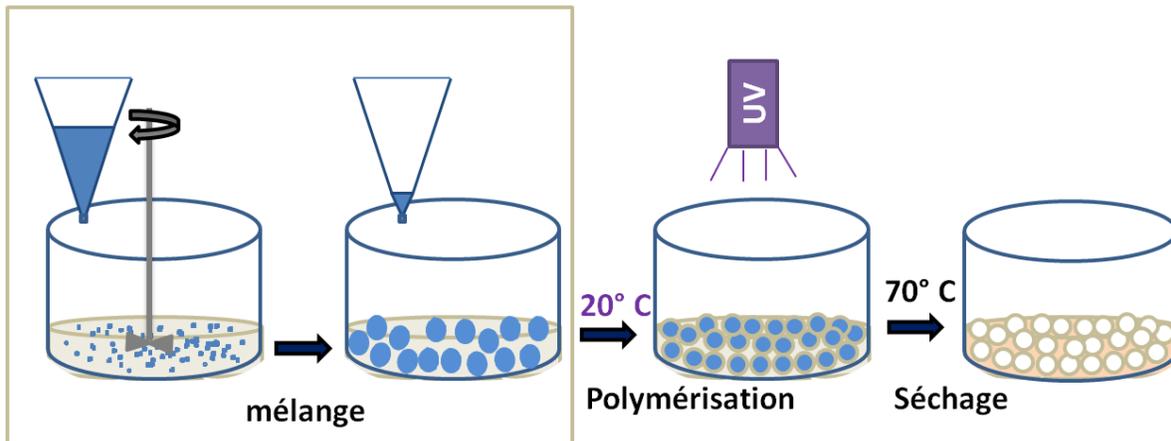


Figure 7. Processus de la formulation du silicone poreux.

Pour fabriquer la phase continue de l'émulsion, un fluide polymérisable par UV à base d'huile de Silicone de type « *Silcolase UV-POLY200* » est mélangé à son catalyseur de type « *Iodonium borate* », ces derniers, étant fournis par l'entreprise *Bluestar Silicone*. L'Isopropylthioxanthone (où *ITX*) acheté auprès de *Sigma-Aldrich* est utilisé comme photo-initiateur i.e. une molécule sensible aux rayons UV qui crée une réaction lorsque cette dernière est exposée au rayon UV. En raison de ses propriétés hydrophiles, le « *poly (oxyde d'éthylène)* » ou « *PEO* »-*bloc-Polydiméthylsiloxane Silube J208-812* acheté auprès de *Siltech* est choisi pour la synthèse du polymère. La phase aqueuse dispersée pour préparer les émulsions inverses est une solution de NaCl à 1,5% du poids total. Cette solution dont le rôle est de stabiliser l'émulsion est introduite progressivement dans le système comme illustré dans la première phase de la formulation de la Figure 7. La fraction volumique finale de la phase aqueuse peut varier de 0 à 40%. Pour de telles fractions volumiques, inférieures à 70%, les matériaux sont appelés émulsions à phase interne polymérisée respectivement faible (si $\phi < 30\%$, appelé *polyLIPE*) ou moyen (si $30\% < \phi < 70\%$, appelé *polyMIPE*).

Contrairement aux premiers travaux sur le silicone poreux, la polymérisation de la phase continue de l'émulsion est réalisée à l'aide d'une lumière UV sur l'échantillon qui sera conçu sous forme de monolithe cylindrique de 35mm de diamètre et une épaisseur variant entre 1 et 5mm. Le principal avantage de l'utilisation de tels fluides polymérisables aux UV est que ces derniers ont une vitesse de polymérisation supérieure à celle obtenue avec des fluides thermoréticulables [61]. Afin d'éviter l'évaporation d'eau pendant le processus de polymérisation et pour obtenir des échantillons avec une surface lisse, les émulsions sont coulées dans des moules en *PTFE* ayant différentes épaisseurs. Ces dernières sont maintenues entre deux plaques de quartz comme illustrées sur la partie a) de la Figure 9. L'application d'une lumière UV sur l'échantillon pendant 5min est suffisante pour polymériser l'émulsion sur chaque face de l'échantillon. Cette technologie permet donc d'atteindre des temps de polymérisation très faibles (quelques minutes) pour des monolithes, par rapport à la polymérisation induite par chaleur (quelques heures). Afin de s'assurer d'une polymérisation homogène dans tout le volume et à la surface de l'échantillon, il est crucial d'utiliser le photo-initiateur *ITX* dans l'émulsion. Après polymérisation, le séchage des échantillons se fait sous l'exposition à la lumière UV à une température de 60°C pendant 24 heures pour évacuer toute trace d'eau dans les cavités. Des mesures de masses ont permis de montrer que de tels traitements étaient indispensables pour évaporer toute l'eau contenue dans l'échantillon sans pour autant modifier le volume apparent de l'échantillon. Nous obtenons ainsi des échantillons de silicone poreux avec des épaisseurs bien définies ayant des surfaces lisses comme visibles à la partie b) de la Figure 9.

2.2.2. Caractérisation de la structure interne du silicone poreux

Dans cette section, nous allons présenter successivement les caractérisations optiques de l'émulsion initiale et du matériau solide final après les phases de polymérisations, et nous terminerons par la caractérisation mécanique du silicone poreux.

2.2.2.1. Caractérisation optique de l'émulsion et du silicone poreux

La caractérisation de l'émulsion se fait à l'aide de la microscopie optique de type *Zeiss* ou *Axiovert* basée sur la diffusion de la lumière. Comme on peut le voir sur la Figure 8, les gouttelettes d'émulsion présentent un comportement adhésif et ont tendance à former des agrégats de la phase dispersée quelle que soit la fraction volumique. La taille des gouttelettes peut être déterminée par diffusion de la lumière de type *Mastersizer S* ou *Malvern*. L'histogramme de la distribution en taille des gouttelettes de diamètre d_i et de volume V_i est présenté en Figure 8. Le diamètre d_w des volumes moyennés sur N_i gouttelettes est défini par :

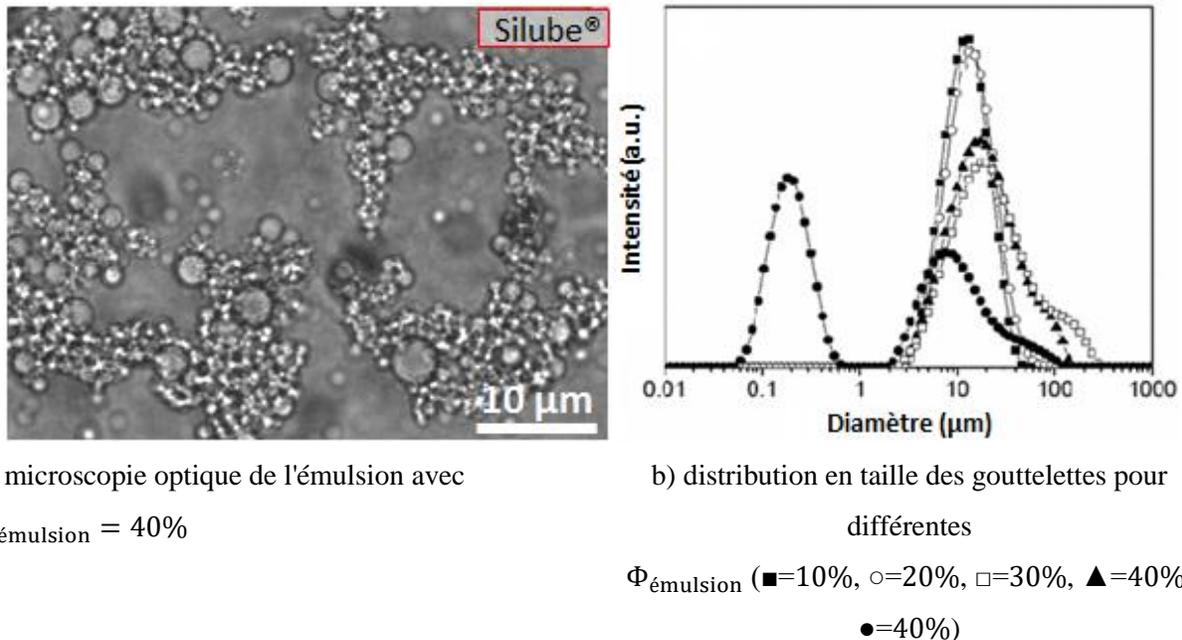
$$d_w = \frac{\sum_i V_i d_i}{\sum_i V_i} = \frac{\sum_i N_i d_i^4}{\sum_i N_i d_i^3} \quad (72)$$

La caractérisation de l'émulsion se poursuit avec la détermination de la polydispersité P qui peut être calculée par :

$$P = \frac{1}{\bar{d}} \frac{\sum_i N_i d_i^3 |\bar{d} - d_i|}{\sum_i N_i d_i^3}, \quad (73)$$

où \bar{d} est le diamètre moyen.

En effet, comme nous pouvons le constater sur la courbe de la Figure 8 représentant l'intensité lumineuse en fonction du diamètre des gouttelettes, lorsque la fraction volumique de la phase aqueuse augmente de 0 à 40%, le diamètre des gouttelettes d_w varie entre 10 et 19 μ m. Notons que l'apparition d'une distribution en taille bimodale est observée pour l'échantillon préparé avec une fraction volumique de 40%.



a) microscopie optique de l'émulsion avec $\Phi_{\text{émulsion}} = 40\%$

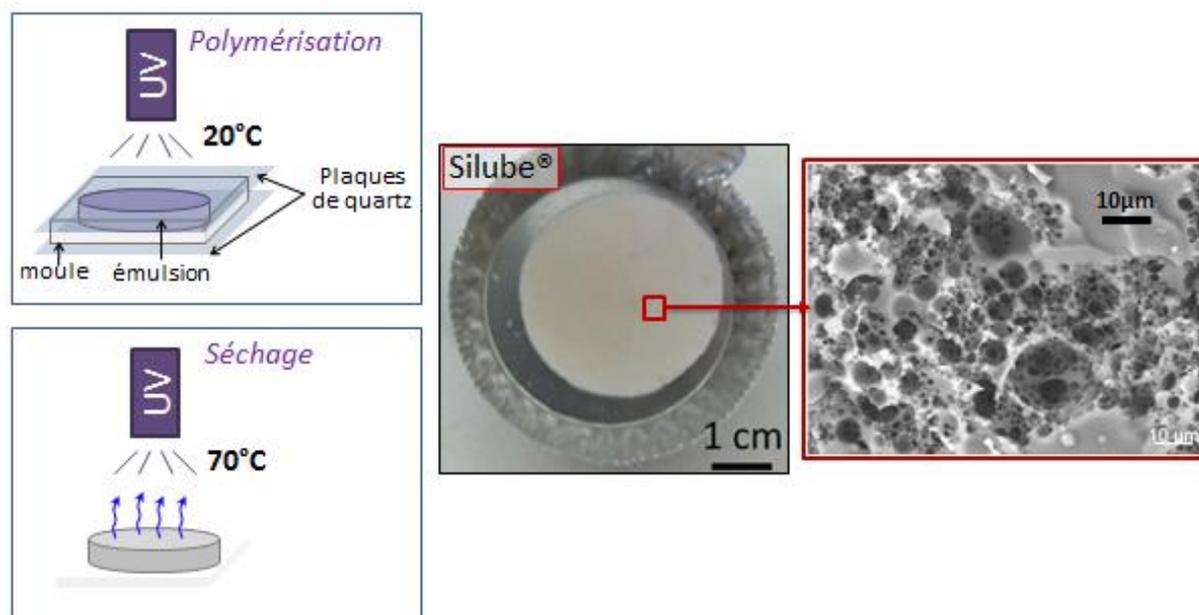
b) distribution en taille des gouttelettes pour différentes

$\Phi_{\text{émulsion}}$ (■=10%, ○=20%, □=30%, ▲=40%, ●=40%)

Figure 8. Caractérisation optique de l'émulsion (a) et distribution en taille des gouttes de la 1^e émulsion préparée à l'aide d'une sonde ultrasonique (b).

De plus, l'addition dans l'émulsion de plus de 20% de la phase interne conduit à la formation d'une nouvelle population de gouttelettes centrées autour de 100µm, mais la grande majorité des gouttelettes possède un diamètre de l'ordre de 10µm. Les émulsions présentent donc une polydispersité assez élevée (~30%) comme prévue pour l'émulsion préparée par cisaillement dans un mortier. Toutefois, les longueurs d'ondes qui seront utilisées lors de la caractérisation ultrasonore sont comprises entre 1 et 10mm, et sont donc largement plus grandes que la taille des pores. En conséquence cette polydispersité n'aura aucune influence sur les résultats attendus.

Les monolithes de silicone poreux ont été caractérisés par microscopie électronique à balayage (où *MEB*) capable de reproduire des images à haute résolution de la surface de l'échantillon comme illustré sur la partie c) de la Figure 9. La structure interne du monolithe de silicone poreux apparaît alors sous la forme de nid d'abeille.



a) processus de polymérisation & séchage

b) monolithe de PDMS poreux

c) structure interne du PDMS poreux

Figure 9. Fabrication et caractérisation optique des monolithes de silicone poreux.

La détermination de la masse volumique des monolithes de silicone poreux se fait facilement en pondérant les mesures de la masse et du volume final des échantillons. Il est important de noter que les matériaux préparés avec une phase interne inférieure ou égale à 10% peuvent présenter une forte hétérogénéité structurelle visible sur la Figure 10. En effet, la structure poreuse non uniforme des matériaux peu concentrés ($\leq 10\%$) est due à la faible masse volumique des pores, conséquence de la formation d'agrégats de gouttelettes sous formes de clusters lors de la phase d'émulsion. L'origine de ces phénomènes est liée à l'optimisation de la surface des gouttes sous l'action de la tension superficielle.

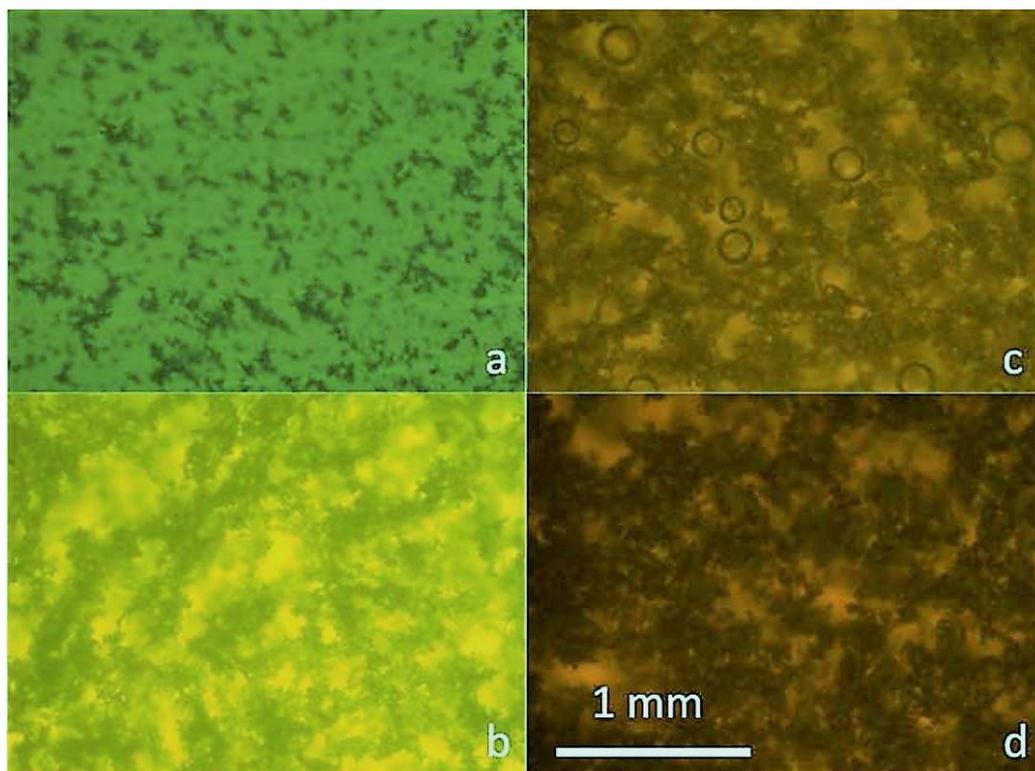
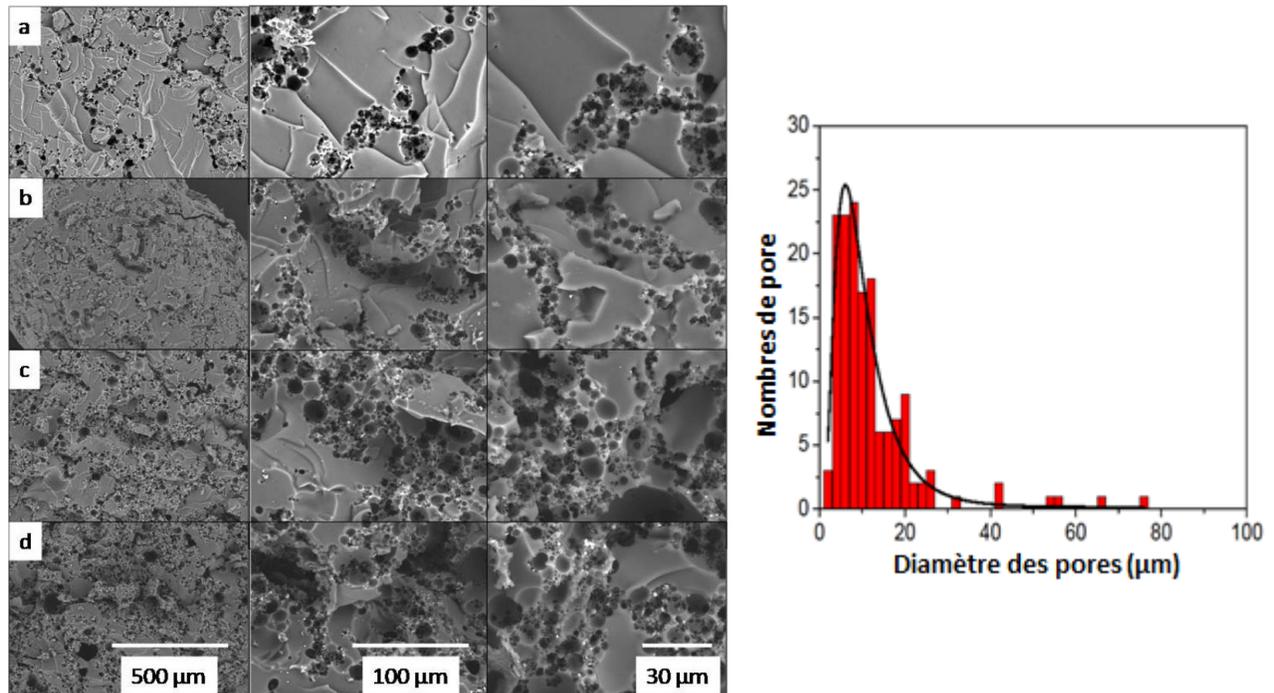


Figure 10. Microscopie optique du silicone poreux préparé à partir d'émulsion de différentes fractions volumiques de la phase interne : 10% (a). 20% (b). 30% (c). 40% (d).

Par ailleurs, nous pouvons observer sur la Figure 10 que le silicone poreux semble plus homogène pour des fractions volumiques de la phase interne très importantes (par exemple 40%). Nous pouvons également remarquer sur l'image (c) de la Figure 10, la présence de grosses bulles d'air introduites lors de l'injection de l'émulsion dans le moule mais ces dernières ne sont observées que très localement. Nous allons voir dans la suite que ces bulles n'auront aucune influence sur les mesures mécaniques et acoustiques.

Afin de décrire plus finement la structure interne des monolithes de silicone poreux, nous pouvons utiliser la microscopie électronique à balayage de type *MEB*, *Hitachi TM-1000* en recouvrant un morceau de l'échantillon d'une fine couche d'or conductrice pour mettre en évidence la porosité des échantillons. La caractérisation en plusieurs échelles du silicone poreux pour différentes fractions volumiques est illustrée sur la Figure 11.



a) observation au MEB de la structure interne du silicone poreux avec différente porosité $\Phi_{émulsion}$ a → 10%, b → 20%, c → 30%, et d → 40%.
 b) distribution en taille des pores pour $\Phi_{émulsion} = 40\%$.

Figure 11. Microscopie électronique à balayage du silicone poreux (a), et distribution en taille des pores (b).

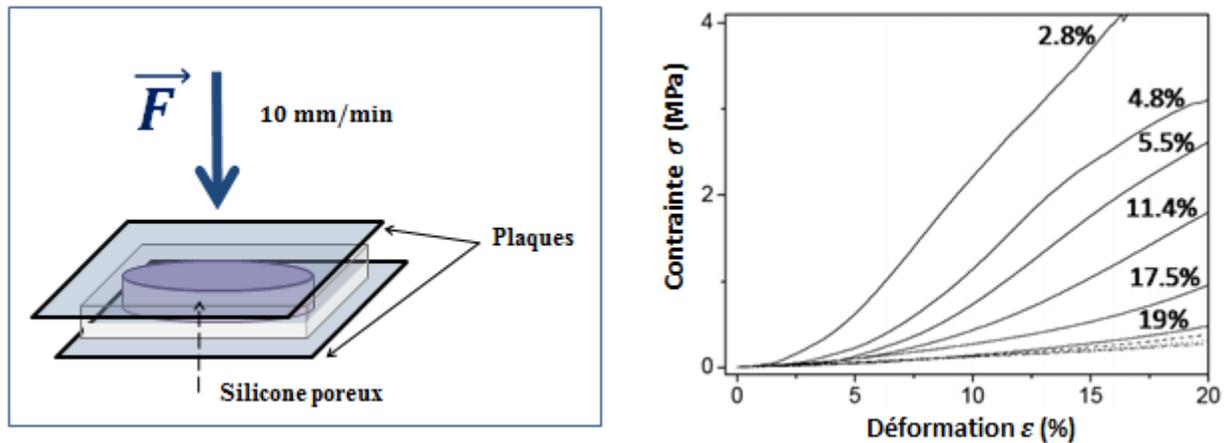
Cette caractérisation fait apparaître un réseau de pores connectés. Cette connexion provient de l'agrégation de gouttelettes d'eau au sein de l'émulsion initiale. La partie b) de la Figure 11 représente l'histogramme de la distribution en tailles des cavités d'air pour une fraction volumique de l'émulsion de 40%. En effet, cette distribution en taille suit une loi log-normale avec une polydispersité élevée, et un diamètre moyen des pores compris entre 5 et 10 μm avec un coefficient de variation de 97% (ce coefficient est équivalent au ratio de l'écart-type par le rayon moyen). À partir de cette incertitude sur la mesure, nous considérons que les deux distributions en taille sont assez similaires pour supposer que la structure du silicone poreux est la même que celle de l'émulsion initiale.

2.2.2.2. Caractérisation mécanique du silicone poreux

La caractérisation des propriétés mécaniques du silicone poreux consiste à étudier l'évolution du module d'Young en fonction de la porosité. Cela est possible grâce à un appareil de type *ZWICK* permettant de comprimer verticalement l'échantillon de silicone poreux cylindrique ($3,5 \times 0,4 \text{ cm}^2$) disposé entre deux plaques parfaitement planes et parallèles. La compression de la plaque du dessus est contrôlée avec une vitesse de déplacement de 10 mm/min , et la machine possède une rigidité beaucoup plus importante que celle de l'échantillon. Le dispositif expérimental illustré sur la Figure 12 permet de mesurer la force F appliquée sur l'échantillon. La contrainte appliquée peut être déduite à partir du ratio de la force mesurée et la surface à laquelle est appliquée la force, cette surface est circulaire et son aire S_0 est égale πa^2 , où a est le rayon de l'échantillon. La déformation est définie comme le ratio du déplacement induit par la compression de l'échantillon et l'épaisseur initiale de l'échantillon. Nous pouvons écrire les relations existantes entre les contraintes et les déformations respectivement comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{F}{S_0}, \\ \varepsilon &= \frac{\delta}{l_0}.\end{aligned}\tag{74}$$

Pour différentes fractions volumiques de pores, nous pouvons montrer l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation comprise entre 0 et 20% comme illustrée sur les courbes b) de la Figure 12. Dans cette plage de déformation, nous sommes en régime linéaire, la rupture apparaît pour des contraintes beaucoup plus élevées. Nous pouvons remarquer que lorsque la fraction volumique augmente, la pente de la courbe contrainte-déformation diminue. En effet, la pente de cette évolution permet d'accéder au module d'élasticité statique (module d'Young E).



a) dispositif des mesures des propriétés mécaniques b) évolution de la contrainte appliquée selon la déformation pour différentes fractions volumiques de pores.

Figure 12. Dispositif expérimental de caractérisation mécanique (a) et évolution de la contrainte en fonction de la déformation (b).

En régime d'élasticité linéaire, la loi de Hooke définie en relation (1) permet de relier les paramètres déformations et contraintes obtenus. La mesure du module d'Young est donnée par :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}. \quad (75)$$

Comme nous pouvons le voir sur la Figure 13, les mesures mécaniques pour des fractions volumiques de pores ϕ allant de 0 à 40% nous ont permis de suivre l'évolution du module d'Young en fonction de la porosité. Nous observons une chute brutale de ce dernier avec la porosité qui passe de 30MPa à 1MPa. Notons que la ligne continue est un fit des points de mesures mécaniques du module d'Young.

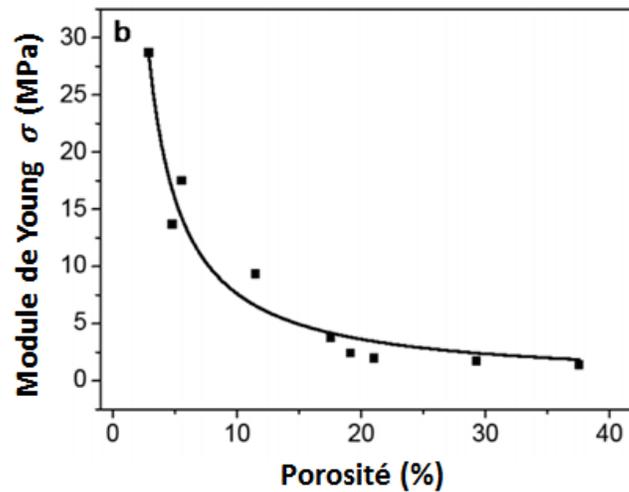


Figure 13. Évolution du module d'Young en fonction de la porosité du silicone poreux.

2.2.3. Caractérisation acoustique du silicone poreux

Dans cette section, nous présentons la caractérisation ultrasonore du silicone poreux qui consiste à mesurer les célérités de phase et les atténuations pour les ondes longitudinales et transversales susceptibles de se propager dans le matériau poreux. Dans cette étude expérimentale, nous disposons pour chaque fraction volumique ϕ d'un couple de monolithes constitués du même matériau (silicone poreux) avec deux épaisseurs différentes.

2.2.3.1. Protocole expérimental

Le dispositif expérimental présenté à la Figure 14 permet de mesurer au contact les célérités de phase et les atténuations des échantillons de silicone poreux.

Ce dispositif expérimental est constitué de deux transducteurs piézoélectriques identiques de diamètre 30mm, de polarisation longitudinale (*Olympus V301*) ou transversale (*Sonaxis CMP79*), l'un servant de source ultrasonore et l'autre de récepteur. Ces derniers sont placés face à face sur un dispositif manuel, gradué, coulissant linéairement et permettant de faire varier la distance

entre les transducteurs, permettant ainsi la mesure précise de l'épaisseur de l'échantillon. Les transducteurs sont large bande et ont une fréquence centrale de 500kHz.

Pour une porosité donnée, nous disposons de deux disques de silicone poreux de diamètre égal à 32mm. Leurs épaisseurs valent respectivement 2 et 4mm. L'échantillon est ensuite placé au contact entre les transducteurs émetteur et récepteur comme illustré sur la Figure 14. À l'aide d'un générateur d'impulsion (type *Olympus 5077PR-40-E*), le transducteur émetteur est excité par une impulsion électrique d'amplitude 400V avec un taux de répétition de 100Hz, permettant ainsi la génération d'un signal acoustique large bande (de 0,1 à 1MHz). Le signal acoustique transmis et détecté par le transducteur récepteur est visualisé sur un oscilloscope (type *Lecroy 9450A*).

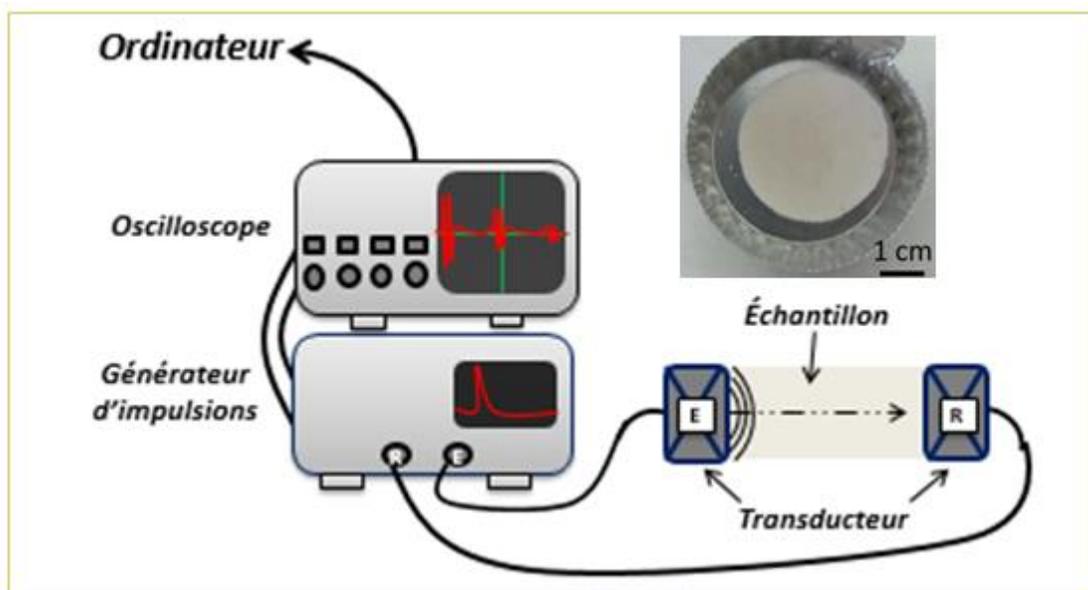


Figure 14. Dispositif expérimental pour la caractérisation acoustique du silicone poreux.

L'épaisseur d de l'échantillon est équivalente à la distance de propagation de l'onde. Compte tenu de la forte dissipation des ondes dans l'échantillon due à la nature macroporeuse du silicone poreux, les hautes fréquences du signal d'excitation centrées autour de 0,5MHz sont totalement absorbées avant d'atteindre le récepteur. Ce dernier ne détecte donc que des fréquences basses (comprises entre 20 et 200kHz).

2.2.3.2. Mesure de la célérité de phase et de l'atténuation

Afin d'assurer une bonne efficacité en terme de transmission des ondes de compression et de cisaillement entre transducteurs et échantillon, la méthode au contact, ici utilisée, nécessite généralement l'utilisation d'un couplant (aqueux pour les ondes de compression ou visqueux pour les ondes de cisaillement). Cependant, nous prendrons la précaution de ne pas utiliser de gel couplant pour nos échantillons car ce dernier pourrait pénétrer les pores et ainsi modifier la nature de l'échantillon.

Quelle que soit la polarisation de l'onde, en considérant un couple de monolithes de silicone poreux supposés identiques d'épaisseurs d_1 et d_2 (avec $d_2 > d_1$), puis en mesurant le signal reçu après propagation dans les échantillons, le passage dans le domaine de Fourier des signaux temporels reçus après propagation dans les échantillons permet de calculer la célérité de phase c_{eff}^i et l'atténuation α_{eff}^i des ondes dans le matériau poreux. La célérité de phase et l'atténuation se calculent de la manière suivante :

$$c_{\text{eff}}^i = \frac{\omega \delta d}{\Phi_1(\omega) - \Phi_2(\omega)}$$

et :

$$\alpha_{\text{eff}}^i = \frac{1}{\delta d} \log \left| \frac{S_1(\omega)}{S_2(\omega)} \right|, \tag{76}$$

où $\delta d = d_2 - d_1$ est la différence d'épaisseur entre les deux monolithes de silicone poreux, $\Phi_1(\omega)$ et $\Phi_2(\omega)$ sont les phases respectivement des ondes se propageant dans les échantillons d'épaisseurs d_1 et d_2 , $S_1(\omega)$ et $S_2(\omega)$ sont les spectres respectivement des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ de pulsation ω .

En supposant que l'onde émise soit plane et monochromatique, sa solution est décrite par la relation (4). La transformée de Fourier rapide de cette solution pour chaque épaisseur d'échantillon permet de retrouver facilement les expressions décrites en relation (76). On note que le champ de déplacement $\mathbf{u}(x_k, t)$ est décrit par la relation (4) équivalent au signal $s(t)$, où x_k est remplacé par d_1 ou d_2 selon l'échantillon considéré, et l'amplitude de l'onde à l'instant initiale u_0 est normalisé à 1.

L'incertitude de la mesure des temps de vol à l'oscilloscope noté Δt est de $0,2\mu\text{s}$. Les incertitudes de la mesure des épaisseurs d'échantillons liées à la lecture sur le dispositif manuel noté Δd est de $10\mu\text{m}$, celles liées à la variation d'épaisseur due au serrage du dispositif manuel est de $40\mu\text{m}$. Cette dernière est estimée à partir de la reproductibilité de la mesure. Les incertitudes sur la mesure de la célérité sont alors calculées comme suit :

$$\Delta v = v \left(\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta t}{t_{\text{TOF}}} \right). \quad (77)$$

Pour décrire de manière complète les propriétés acoustiques ($c_{\text{eff}}^{\text{L}}$, $c_{\text{eff}}^{\text{T}}$, $\alpha_{\text{eff}}^{\text{L}}$, et $\alpha_{\text{eff}}^{\text{T}}$), la caractérisation acoustique du silicone poreux doit se faire en utilisant des transducteurs avec des polarisations longitudinales, puis transversales.

2.2.3.2.1. Onde incidente longitudinale

Dans cette partie, nous nous intéressons aux caractéristiques des ondes de compression se propageant dans le silicone poreux. Nous avons mesuré la célérité de phase et l'atténuation dans ce matériau pour différentes fractions volumiques de pores. Nous présentons sur la Figure 15, le traitement des signaux pour l'extraction de la célérité de phase et de l'atténuation dans le domaine fréquentiel pour un échantillon de silicone poreux de fraction volumique 35%. Les phases ont été obtenues avec la fonction « *angle* » de Matlab, puis déroulées avec la fonction « *Unwrap* » de Matlab. Notons que les signaux temporels ont été filtrés grâce à l'utilisation de fenêtres de type « *Tukey* ou *rectangulaire-smooth* ». Ce fenêtrage temporel est nécessaire pour éliminer tout signal parasite (couplage électromagnétique, éventuels échos dus aux réflexions multiples des ondes sur les faces de l'échantillon) [62].

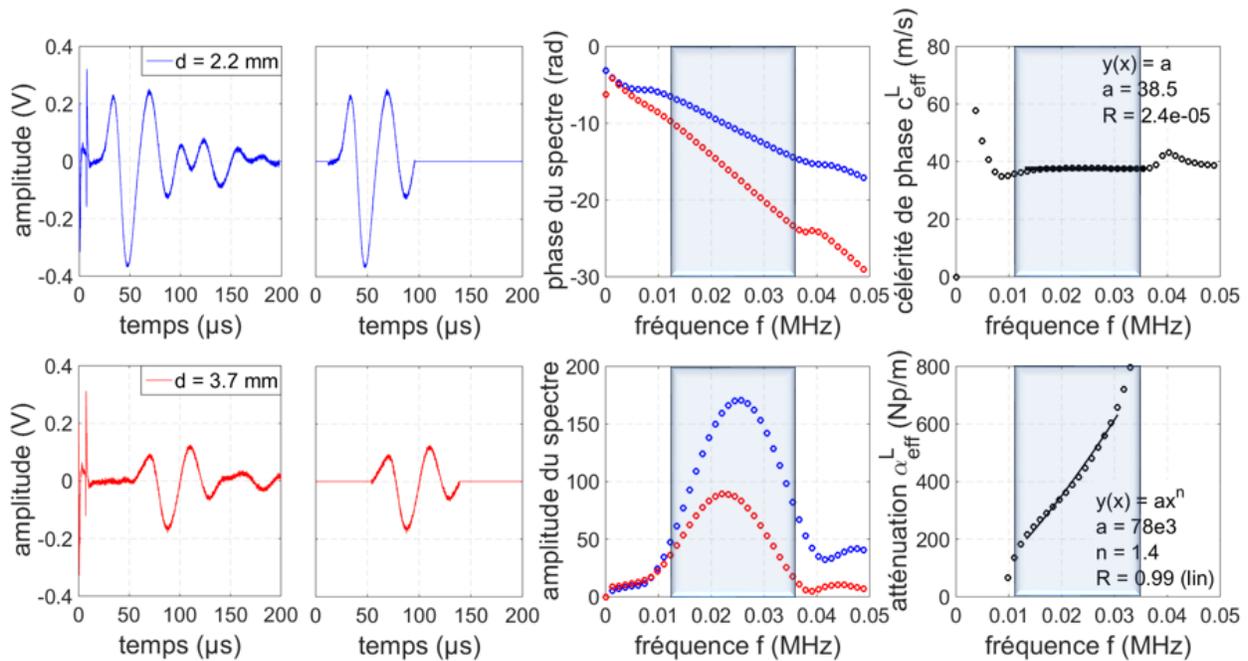


Figure 15. Traitement des signaux pour l'extraction de la célérité de phase et de l'atténuation des ondes longitudinales dans les échantillons de silicone poreux ($\phi = 35\%$, $\delta d = 1,5\text{mm}$).

La caractérisation décrite en Figure 15 a été reproduite pour différents échantillons de silicone poreux ayant des fractions volumiques de pores comprises entre 0% et 40%. Les mesures acoustiques de célérité de phase et d'atténuation sont présentées en fonction de la fréquence et pour différentes porosités comme illustrées sur la Figure 16.

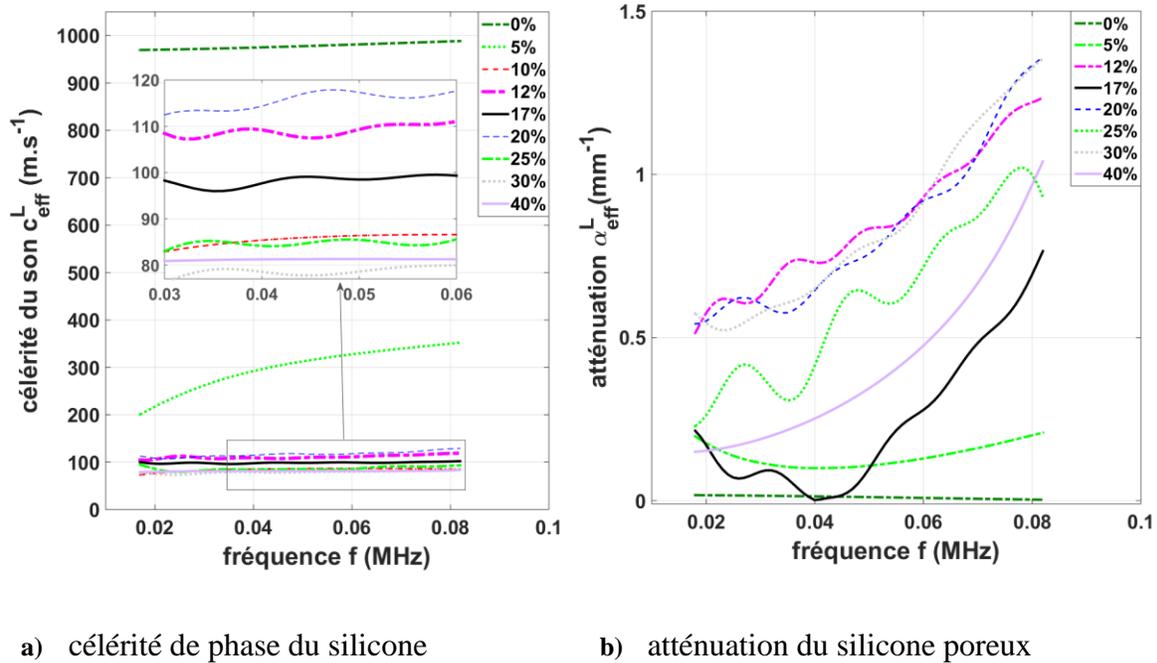


Figure 16. Évolution des propriétés acoustiques du silicone poreux en fonction de la fréquence pour différentes fractions volumiques de pores.

Du fait de la dépendance en fréquence des célérités de phases et des atténuations, ces dernières sont présentées dans la bande passante des signaux. Cette bande peut être repérée par le spectre des signaux, elle correspond aux fréquences pour lesquelles on a un maximum d'énergie de l'onde. Tout comme la Figure 15, nous pouvons observer dans la Figure 16, que dans cette bande passante des transducteurs, la célérité de phase présente un plateau (i.e. indépendant de la fréquence), comportement caractéristique des milieux non dispersifs, les courbes d'atténuations suivent globalement une loi de puissance selon la fréquence, l'amplitude de l'atténuation dépend de la porosité. Cette évolution de l'atténuation peut être fitter avec une loi de puissance. Cependant, les mesures de l'atténuation présentent une difficulté liée à la nature du contact entre transducteur et l'échantillon.

La Figure 17 montre la célérité de phase c_{eff}^L mesurée en fonction de la porosité ϕ . La mesure de la célérité de phase dans le silicone pur est de l'ordre de 1000 m.s^{-1} . Cette célérité chute

considérablement dès que le matériau devient poreux. En effet, la célérité de phase est de l'ordre de 400m.s^{-1} pour une porosité de 5% et tend vers 80m.s^{-1} pour la plus grande porosité considérée ici (i.e. 40%).

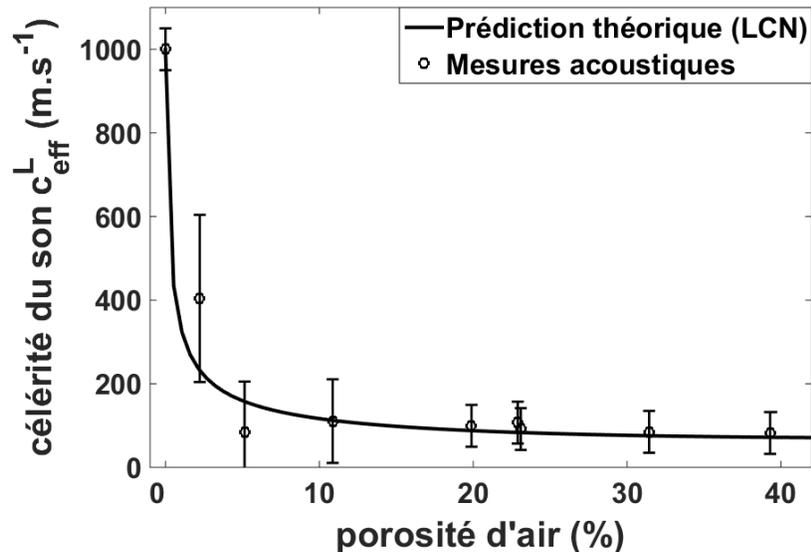


Figure 17. Évolution de la célérité des ondes longitudinales selon la porosité. Confrontation entre mesures acoustiques et prédictions théoriques issues du modèle de LCN.

Nous pouvons observer sur la Figure 17 un très bon accord entre les résultats expérimentaux et les prédictions théoriques qui découlent des modèles de diffusion multiple de LCN simplifiés dans l'approximation basse fréquence. En effet, les longueurs d'ondes mises en jeu pour la caractérisation du silicone poreux sont supérieures à 1mm (longueur d'onde correspondant à une fréquence de 100kHz) tandis que la taille moyenne des pores est de l'ordre de $10\mu\text{m}$. Cependant, nous allons voir qu'en plus du critère de ratio très élevé entre la longueur d'onde et la taille des pores permettant de justifier l'utilisation des approximations basses fréquences qui conduisent à la relation (71), nous pouvons simplifier d'avantage cette relation en considérant les propriétés élastiques du silicone poreux décrites au Tableau 2.

Propriétés élastiques	Matrice (Silicone)	Inclusions (cavités d'air)
Masse volumique (g. cm ⁻³)	$\rho_0 = 1$	$\rho_1 = 10^{-3}$
1 ^{er} coefficient Lamé (GPa)	$\lambda_0 = 1$	$\lambda_1 = 10^{-4}$
2 ^e coefficient Lamé (GPa)	$\mu_0 = 10^{-3}$	$\mu_1 = 0$

Tableau 2. Propriétés élastiques du silicone poreux.

Nous pouvons constater que les propriétés élastiques des inclusions sont négligeables par rapport à celles de la matrice : $\rho_0 \gg \rho_1$, $\lambda_0 \gg \lambda_1$ et $\mu_1 = 0$. Par ailleurs, on note que pour ces matrices élastomériques $\lambda_0 \gg \mu_0$, permettant la simplification de la relation (71) comme suit :

$$c_{QS}^{LCN} = \sqrt{\frac{c_0}{(1-\phi)\left(1 + \frac{3\lambda_0}{4\mu_0}\phi\right)}} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\rho_0\left((1-\phi)\left(1 + \frac{3\lambda_0}{4\mu_0}\phi\right)\right)}}. \quad (78)$$

A partir des simplifications, la célérité en limite quasi-statique issue du modèle de Waterman et Truell (relation (50)) aboutit au même résultat (i.e. la relation (78)). Cette équivalence entre les modèles LCN et WT en limite quasi-statique pour le cas du silicone poreux est explicitement liée au terme correctif de LCN qui se retrouve totalement négligeable, indiquant que les phénomènes de conversion de modes semblent négligeables. De plus, les simulations montrent que les modèles de LCN et de WT sont équivalents aussi pour des grandes longueurs d'ondes. Ces comparaisons sont illustrées sur la Figure 41 de l'Annexe 7.

La relation (78) nous permet de prédire l'évolution de la célérité du son dans le silicone poreux, et d'identifier les paramètres qui pilotent cette décroissance drastique de la célérité de phase avec la porosité. En effet, le très grand ratio $\frac{\lambda_0}{\mu_0} = 10^3$ au dénominateur de cette relation explique pourquoi une petite fraction volumique de porosité permet de faire chuter brusquement la célérité

du son, de sorte qu'à 40% de porosité la célérité du son dans le silicone poreux est 18 fois moins importante que celle dans l'eau.

Toutefois, bien que ces valeurs extrêmement faibles de la célérité du son aient déjà été rapportées sur des supports poreux tels que des aérogels de silice [63], il convient de noter que la porosité de ces aérogels de silice était beaucoup plus élevée que 40% (i.e. des fractions volumiques $\phi > 90\%$) pour donner une célérité de son de l'ordre de $100\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ [55]. De même, la diminution simultanée de la célérité du son et du module d'Young lorsque la porosité augmente a déjà été rapportée dans les nano-mousses de silice [64]. Les observations expérimentales de ces derniers ont été interprétées par la relation classique entre les propriétés mécaniques de solides denses (ρ, λ et μ ou E) et acoustiques c^L . En effet comme décrit au Chapitre 1 (relations (6) et (7)), la célérité longitudinale c^L caractéristique de l'onde acoustique est reliée aux caractéristiques élastiques du milieu (ρ, E et ν), la combinaison des relations (2) et (6) nous permet d'écrire :

$$c^L = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho_0(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (79)$$

Cependant, l'estimation de la célérité longitudinale c^L n'est pas chose aisée à partir des mesures mécaniques (module d'Young E et coefficient de Poisson ν). En particulier, c^L devient particulièrement sensible à la valeur du coefficient de Poisson ν quand celui-ci devient proche de 0,5. Ce point sera discuté dans la suite du manuscrit.

Il est également possible de prédire la valeur de la masse volumique effective du silicone poreux pour chaque porosité à partir de la relation (47) du modèle de Waterman et Truell. Cette dernière est présentée en Annexe 7.

Par ailleurs, les fractions volumiques de porosités prédéfinies pendant la formulation ne correspondent pas exactement à la fraction volumique réelle des pores, ces dernières sont corrigées et exprimées à partir de la mesure de la masse volumique réelle ρ_m de l'échantillon de silicone poreux. À partir de la loi des mélanges, la fraction volumique de pores peut s'écrire comme suit :

$$\phi = \frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_1 - \rho_0}. \quad (80)$$

Les mesures de masse volumique effectuées ont permis donc de corriger la fraction volumique de 40% à exactement 38%, de 30% à exactement 33%, de 25% à exactement 24%, de 20% à exactement 19%, et de 10% à exactement 12%. Malgré cette correction apportée sur la fraction volumique de pores, la courbe théorique de la célérité du son ne se superpose pas aux valeurs expérimentales pour des fractions volumiques de pores comprises entre 5% et 12%. Ce décalage entre les valeurs théoriques et expérimentales dans cette plage de fraction volumique est dû à la structure inhomogène des échantillons pour ces fractions volumiques. Une répétition des mesures a permis de quantifier la reproductibilité des mesures et d'en déduire l'incertitude sur la mesure de la célérité de phase et de l'atténuation.

De plus, pour réduire les incertitudes sur la mesure de l'épaisseur de l'échantillon liées au serrage du dispositif manuel, il est indispensable d'effectuer les mesures acoustiques en disposant les transducteurs à la verticale et non horizontalement comme décrit sur la Figure 14. L'idée est de poser l'échantillon sur le transducteur du dessous, puis de poser le transducteur du dessus sur l'échantillon sous l'effet de son poids, et par la suite mesurer l'épaisseur de l'échantillon grâce à un pied à coulisse. Nous avons constaté dans les mesures préliminaires une différence de $200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le cas de l'échantillon à 0% de porosité.

Par la suite, nous avons cherché à améliorer la formulation du silicone dans le but de réduire d'avantage la célérité du son dans le silicone poreux. La formulation du nouveau silicone consiste à ajouter un polymère dans le silicone pour affaiblir son module de cisaillement et à utiliser un catalyseur pendant la phase de polymérisation. La masse volumique de ce polymère reste inchangée mais le module d'Young est 4 fois plus petit. Ce nouveau procédé a permis d'obtenir une polymérisation rapide du matériau en température et non sous UV. Les caractérisations acoustiques ont également montré des célérités de son plus basses que celles présentées précédemment. Toutefois, le contrôle de la porosité du matériau poreux final n'est pas facile car cette dernière se trouve être bien souvent différente de celle de l'émulsion de départ. L'explication proviendrait de la nature extrêmement molle du matériau, l'émulsion étant moins visqueuse. De ce fait, une partie de l'air emprisonnée dans les cavités peut s'échapper, de sorte

que certains pores peuvent s'effondrer lors de la phase de séchage. Notons que les échantillons fabriqués avec des émulsions de 5% et 10% ont une porosité réelle de 1%, alors que ceux fabriqués avec une émulsion de 60% avaient une porosité réelle de 35%.

Dans les milieux complexes, il est d'usage d'utiliser des lois de puissance pour décrire la dépendance en fréquence du coefficient d'atténuation ($\alpha_{\text{eff}}(f) = \alpha_0 f^n$, où α_0 s'exprimant en $\text{Np} \cdot \text{mm}^{-1}$) [57]. À l'instar de la Figure 15 les mesures d'atténuations longitudinales ont été effectuées sur les échantillons comme présenté en Figure 18. Les courbes d'atténuation ont été adaptées par des lois de puissance pour chaque porosité.

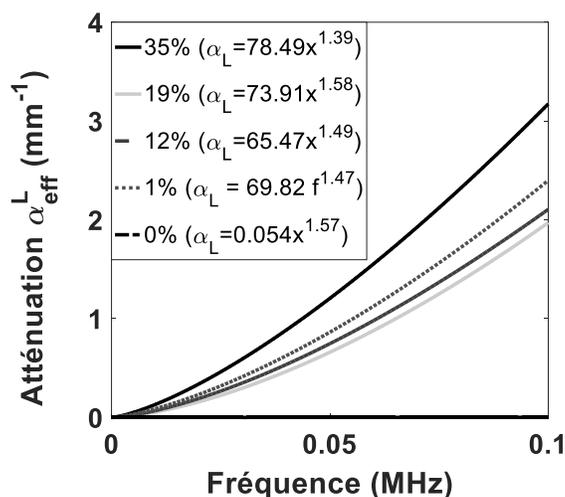


Figure 18. Atténuation longitudinale en fonction de la fréquence pour chaque porosité.

Par ailleurs, la caractérisation complète du silicone poreux requiert l'utilisation des ondes transversales pour mesurer la célérité de phase et l'atténuation des ondes transversales et en déduire le second coefficient de Lamé du matériau.

2.2.3.2.2. Onde incidente transversale

La caractérisation de propriétés transversales des matériaux ayant un faible module de cisaillement a été proposée pour la première fois en 1949 par W. P. Mason *et al.* [65] et H. T. O'Neil [66]. Dans leurs travaux, ils proposèrent un dispositif expérimental basé sur la réflexion d'une onde plane transversale « horizontale » à l'interface entre un propagateur (type *Quartz*) et

l'échantillon disposé au-dessus du propageur. La mesure se fait avec un angle d'incidence et permet de relier l'impédance mécanique transversale au module de cisaillement. À partir de la mesure de la masse volumique, nous pouvons remonter à la mesure de la célérité transversale dans l'échantillon. Cette méthode a ensuite été utilisée pour mesurer le module de cisaillement de divers polymères [67] [68] [69]. L'inconvénient d'une telle technique est la nécessité de disposer d'un volume important d'échantillon de silicone poreux sur un dispositif basé sur la mesure du coefficient de réflexion. Pour cette raison et compte tenu du rapport très important entre les célérités longitudinale et transversale dans des matériaux élastomères [70], la caractérisation du silicone utilisant les ondes transversales avec la méthode décrite à la Figure 14 est délicate et nécessiterait des échantillons de très faibles épaisseurs. Nous avons donc privilégié des mesures au contact. Bien que la polarisation du transducteur de cisaillement soit transversale, ce dernier émet également des ondes longitudinales. L'identification du type d'ondes se fait à partir de l'ordre de grandeur des célérités longitudinales (élevées) et des célérités transversales (faibles).

De plus, il est connu que l'atténuation des ondes transversales dans les tissus mous tels que le silicone (type *RTV-615*) est bien plus importante que celle des ondes longitudinales [70]. Pour les silicones, les ondes transversales se propagent à environ $50\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ [70]. Ces résultats ont été par la suite confirmés par Madsen *et al.* [70] qui ont mesuré la célérité des ondes transversales dans le *silicone-RTV-615* à $65\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ pour une fréquence de 1MHz. En effet, le coefficient de Poisson ν de tels matériaux est très proche de 0,5 [57], ce qui justifie la très faible valeur de la célérité des ondes transversales par rapport aux ondes longitudinales comme détaillé en 1.2.

À l'aide d'un couple de transducteurs de cisaillement (type *SONAXIS*) centrés sur la fréquence fondamentale de 400kHz, nous avons utilisé le même protocole expérimental présenté en Figure 14 pour mesurer la célérité de phase et l'atténuation des ondes transversales du silicone poreux. Nous présentons sur la Figure 19, le traitement des signaux pour l'extraction de la célérité de phase et de l'atténuation dans le domaine fréquentiel pour l'échantillon de silicone poreux à 35% de porosité.

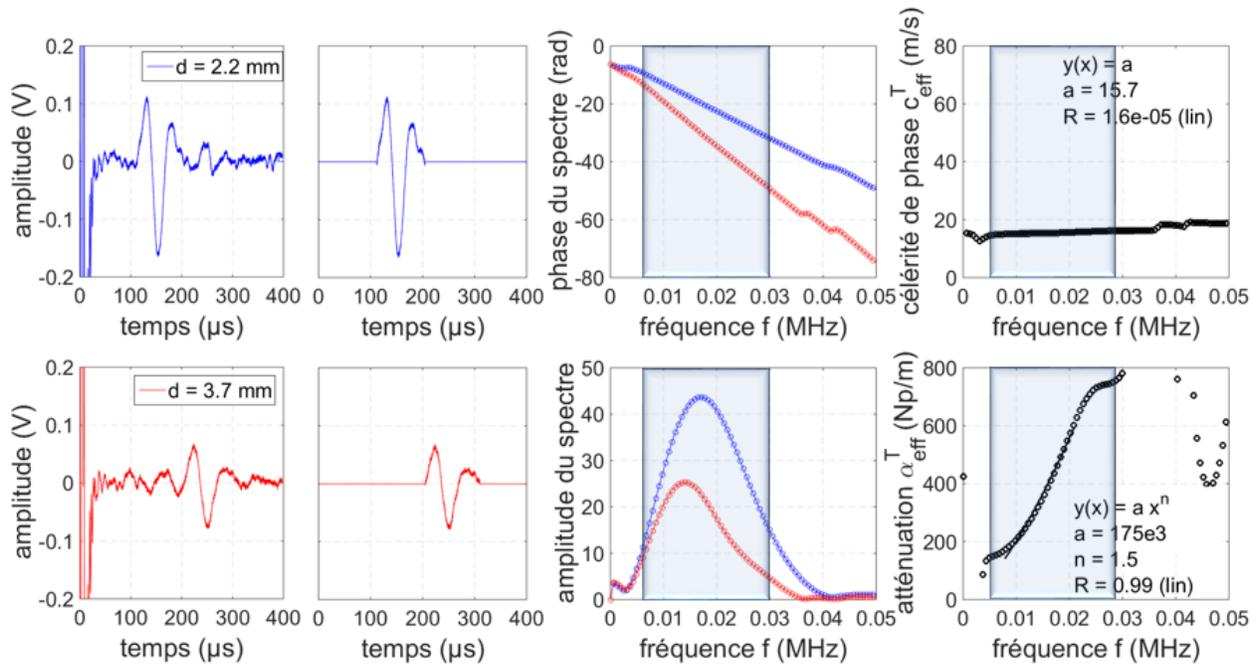


Figure 19. Traitement des signaux pour l'extraction de la célérité de phase et de l'atténuation des ondes transversales dans les échantillons de silicone poreux ($\phi = 35\%$, $\delta d = 1, 5\text{mm}$).

Compte-tenu de l'atténuation très élevée des ondes transversales en comparaison avec les ondes longitudinales dans les échantillons type élastomères, il a été impossible de mesurer le signal de l'onde transversale transmis à travers l'échantillon non poreux. En effet, les transducteurs de cisaillement émettent une composante longitudinale qui se propage plus vite et mieux que la composante transversale. Pour identifier le signal temporel de l'onde transversale, une technique consiste à disposer les deux transducteurs de cisaillement de sorte à avoir des polarisations parallèles, puis perpendiculaires. En effet, l'amplitude du signal est plus importante lorsque les polarisations des transducteurs émetteur et récepteur sont parallèles et moins importante lorsque ces dernières sont perpendiculaires. L'amplitude du signal tend vers zéro lorsqu'on tourne l'un des transducteurs de sorte à croiser leurs polarisations, permettant ainsi d'identifier l'onde transversale.

Toutefois, bien qu'il soit difficile de mesurer les propriétés des ondes transversales dans le silicone pur avec le dispositif de la Figure 14 utilisant des transducteurs de cisaillements dû au fait que la composante longitudinale de l'onde parasite l'onde transversale, nous caractériserons le silicone à partir de la porosité de 1% avec la méthode en transmission [62]. Les signaux peuvent être amplifiés en fonction du niveau du bruit sans modifier la phase de l'onde, et l'amplification doit être appliquée de la même façon sur les échantillons de même porosité.

La célérité de phase des ondes transversales a été mesurée pour des fractions volumiques allant de 1%, 12%, 19% à 35%. Les prédictions théoriques émanant du modèle de Waterman et Truell sont en bon accord avec les valeurs expérimentales comme illustrées sur la Figure 20.

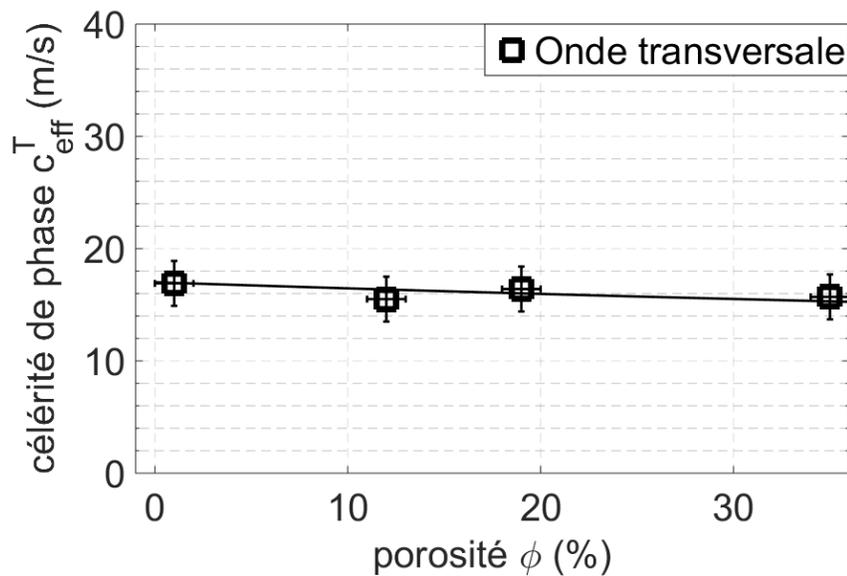


Figure 20. Évolution de la célérité des ondes T selon la porosité, confrontation entre mesures acoustiques et la prédiction théorique issue du modèle de WT.

Nous pouvons remarquer que la célérité des ondes transversales est moins sensible à la porosité (~ 15 m/s) du matériau contrairement aux ondes longitudinales. En effet, à l'instar de la relation (78) nous avons calculé l'expression de la célérité du son de LCN en limite quasi-statique pour une onde incidente transversale. Cette dernière s'obtient en permutant les indices L et T

(respectivement longitudinal et transversal) de la relation (62). De ce fait, en appliquant les simplifications nécessaires ($\rho_0 \gg \rho_1$, $\lambda_0 \gg \lambda_1$ et $\mu_1 = 0$), nous obtenons la relation :

$$c_{QS}^{LCN} = \sqrt{\left(\frac{3}{3 + 2\phi}\right) \frac{\mu_0}{\rho_0}}. \quad (81)$$

Notons que les prédictions théoriques de LCN et WT sont équivalentes, et sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. De plus, comme présentée sur la Figure 21, l'atténuation transversale a été mesurée dans les échantillons de silicone poreux à l'exception de l'échantillon à 1% à cause d'un mauvais rapport signal sur bruit.

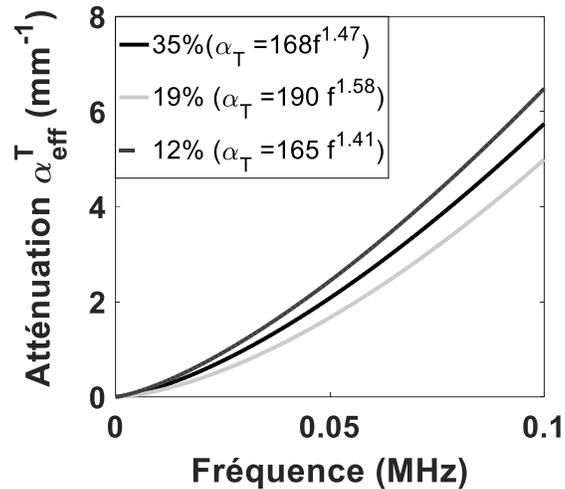


Figure 21. Mesures des atténuations longitudinale et transversale en fonction de la fréquence pour différentes porosités.

Nous pouvons constater que l'atténuation des ondes transversales dans le silicone poreux est plus importante que celle des ondes longitudinales ce qui est cohérent avec les mesures de célérité de phase ($c^T < c^L$) : plus le matériau est mou, plus il est absorbant.

Nous avons présenté dans cette partie une caractérisation complète du silicone poreux avec différentes fractions volumiques de pores. La caractérisation optique utilisant la diffusion de la lumière pendant les phases d'émulsion et du MEB après fabrication des échantillons de silicone

poreux, nous ont permis de voir la structure poreuse des échantillons et de caractériser la distribution en taille des pores : cette dernière est centrée autour de $5\mu\text{m}$. La caractérisation mécanique des échantillons de silicone poreux a permis de mesurer le module d'Young, et de voir que ce dernier décroît rapidement lorsque la porosité augmente. Enfin, la caractérisation acoustique a permis de mesurer les célérités de phase et coefficients d'atténuation des ondes longitudinales et transversales, ces dernières étant reliées aux propriétés élastiques du silicone poreux.

Nous avons vu que le modèle de Luppé, Conoir et Norris, a priori plus approprié pour les matrices solides, peut être simplifié et approximé à son équivalent en limite quasi-statique. De plus, ce dernier est équivalent au modèle de Waterman et Truell dans le cas du silicone poreux à cause du terme correctif négligeable dans ce cas. L'expression de la célérité en limite quasi-statique plus simple à modéliser permet de prédire correctement les mesures expérimentales, et de corrélérer sa diminution soudaine avec la porosité, avec la très faible valeur du module de cisaillement de la matrice μ_0 , contrairement aux études précédentes sur les aérogels de silice.

Nos résultats démontrent que le silicone poreux est un excellent candidat pour la réalisation de matériaux à très faible célérité du son. C'est pourquoi leur utilisation en tant que résonateurs basse fréquence a permis de fabriquer les premiers métamatériaux acoustiques tridimensionnels à indice négatif [14].

2.3. Propriétés acoustiques d'une suspension localement résonante

En 2004, Li et Chan [1] ont prédit que des métamatériaux acoustiques pouvaient posséder un indice négatif à condition de tirer profit de résonances basse fréquence de sphères présentant un fort contraste de célérité de phase par rapport à la matrice environnante. En 2015 [14], il a été montré expérimentalement que des micro-billes à base de silicone poreux ayant une célérité du son 15 fois moins importante que celle d'un gel constituant la matrice, permettaient d'atteindre cet indice négatif pour des fréquences ultrasonores voisines de 300kHz. En conséquence, de fortes variations des propriétés effectives (célérité de phase et atténuation) peuvent apparaître en

exploitant les résonances de Mie (monopolaire et dipolaire) de ces particules (*cf.* Annexe 1). Si de tels métamatériaux présentent un indice de réfraction acoustique négatif, l'atténuation y est également très importante en raison de la forte diffusion résonante [14].

Dans un premier temps, nous montrerons dans cette section comment les microbilles de silicone poreux sont synthétisées. Ensuite une caractérisation acoustique des propriétés localement résonantes d'une suspension aléatoire de ces microbilles de silicone poreux dans un gel aqueux sera présentée. Ce matériau sera qualifié de « métafluide » en raison de la nature fluide de la matrice suspendante.

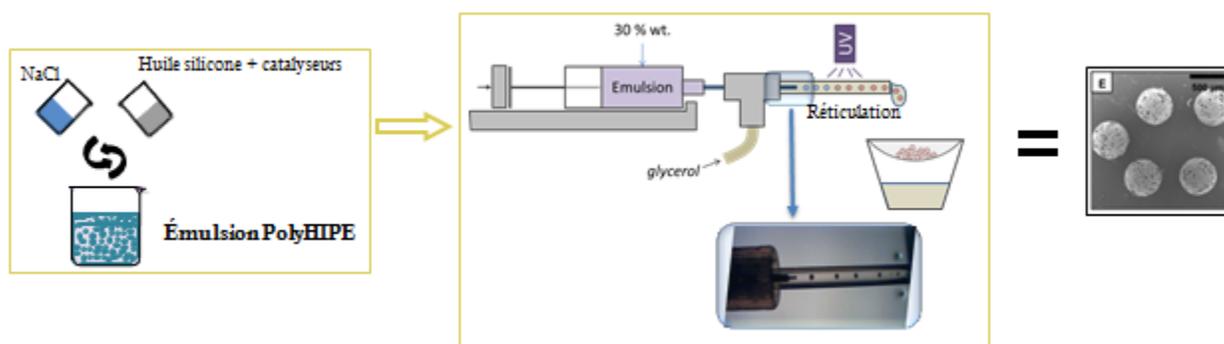
2.3.1. Synthèse de microbilles de silicone poreux

La microfluidique est un outil particulièrement adapté pour la synthèse de particules sphériques micrométriques [71] [59] [72]. Cette technologie va nous permettre la fabrication de microbilles de silicone poreux. La synthèse des billes par voie microfluidique est basée sur des mécanismes rhéologiques d'écoulements de fluides et de polymérisation par UV. Comme illustrée sur la Figure 22, elle est composée de deux étapes, la première (Figure 22.a)) consiste en une émulsion de type PolyHIPE pour la fabrication du silicone poreux (ce procédé de fabrication est décrit aux paragraphes précédents), et la seconde étape (Figure 22.b)) correspond à la fabrication de microbilles par voie microfluidique à partir de l'émulsion préparée. Dans la plupart des cas, l'émulsion est fabriquée avec une porosité de 30%.

Le montage microfluidique est constitué d'une seringue à l'intérieur de laquelle est placée l'émulsion à 30% de porosité [72]. La sortie de la seringue est reliée à un capillaire de diamètre interne 250 μ m et de diamètre externe 313 μ m (capillaire 1) débouchant sur un tube en verre de 3cm de longueur, de 1mm de diamètre interne, et de 1,6mm de diamètre externe. Un autre capillaire de diamètre interne 665 μ m et de diamètre externe 1,25mm, dans lequel coule un jet de glycérol avec un débit constant (capillaire 2), est relié à l'entrée du tube en verre par l'intermédiaire d'une jonction « T ». L'injection de l'émulsion ainsi que le jet du glycérol sont contrôlés par un pousse-seringue avec un débit de 1,5 mL/h. Ce dernier est constitué d'un moteur

pas-à-pas connecté à une butée par une tige filetée et agissant sous forme de piston [59]. Afin d'obtenir des microbilles calibrées, le débit de l'injection de l'émulsion et de l'écoulement du glycérol doivent être constants, le capillaire 1 doit être parfaitement centré dans le capillaire 2 où coule à débit constant le glycérol pour éviter d'éventuelles perturbations dues à l'asymétrie du capillaire 1 par rapport au tube en verre au-dessus duquel est placée une lampe UV dont la fonction est de réticuler les microbilles. Les microbilles de silicone poreux et le glycérol sont récupérés sur un petit panier placé sous la sortie du tube. À l'aide d'une caméra servant à contrôler la dimension des microbilles ou la formation de microsattellites, nous pouvons suivre la fabrication des microbilles de silicone poreux.

On note que dans la phase de préparation de l'émulsion, un traitement de surface est appliqué à l'émulsion afin d'éviter que l'eau (contenue dans la matrice gel) ne s'infiltré dans les microbilles poreuses. Ce traitement rend le cœur des microbilles poreuses hydrophobe pour éviter que l'eau présente dans le gel aqueux n'y pénètre tandis que leur surface externe est rendue hydrophile pour faciliter leur dispersion dans ce gel aqueux.



a) préparation de l'émulsion b) dispositif microfluidique pour la fabrication des microbilles de silicone poreux c) photo des microbilles de silicone poreux

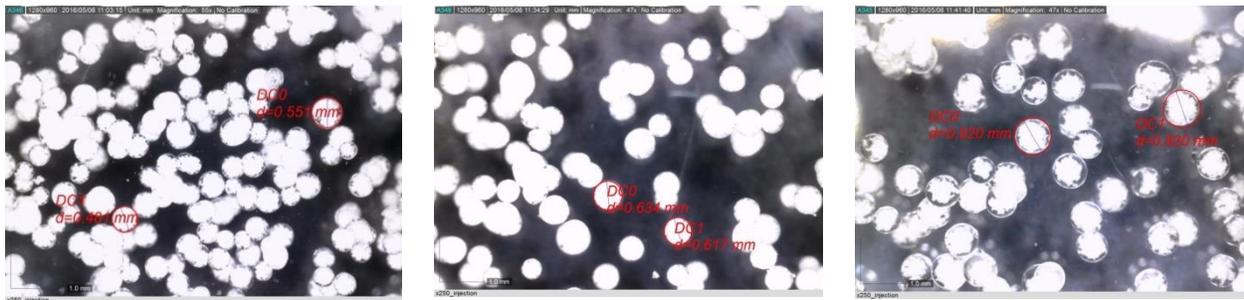
Figure 22. Dispositif de microfluidique pour la fabrication des microbilles de silicone poreux.

Ce type de dispositif permet de produire un nombre important de microbilles de silicone poreux sphériques et calibrées, à raison d'une particule par seconde. Les diamètres des microbilles sont imposés par les diamètres des capillaires d'injection, du diamètre du tube en verre et du débit

d'écoulement du glycérol. La fabrication de particules, plus petites ou plus grosses, nécessitent alors simplement l'ajustement de ces paramètres.

Les microbilles synthétisées ont un diamètre compris entre 200 et 600 μm selon la fréquence de résonance recherchée, et une polydispersité moyenne de 20%. En considérant les mêmes dimensions de capillaire et de tube décrites précédemment, nous avons fabriqué trois tailles de microbilles de silicone poreux en imposant le débit du glycérol en « mbar » (400 μm pour 800mbar, 550 μm pour 400mbar, et 800 μm pour 200mbar).

À l'aide d'une caméra (type *Dino-lite Digital Microscope*), nous pouvons visualiser les microbilles de silicone poreux et mesurer la distribution en taille de celles-ci. Nous représentons sur la Figure 23 des clichés de trois échantillons de microbilles de silicone poreux suspendues dans du gel carbopol avec différents diamètres moyens de billes.



a) suspension de microbilles de silicone poreuses ($\Phi = 6,5\%$, $d = 450 \mu\text{m}$) b) suspension de microbilles de silicone poreuses ($\Phi = 12\%$, $d = 550 \mu\text{m}$) c) suspension de microbilles de silicone poreuses ($\Phi = 7\%$, $d = 800 \mu\text{m}$)

Figure 23. Exemples de dispersions aléatoires de microbilles de silicone poreux suspendues dans du carbopol.

À partir d'un traitement d'image de ces clichés, il est possible de mesurer la taille exacte de chaque microbille et de remonter à la dispersion en taille de la suspension. Ce dernier est déterminé à l'aide des relations (64) et (65). La distribution en taille du premier échantillon (a) est tel que le rayon moyen a est de 225 μm et la polydispersité P à 6,5%, le second (b) de rayon

moyen $275\mu\text{m}$ et de polydispersité 12%, et enfin le troisième de rayon moyen $400\mu\text{m}$ et de polydispersité 7%.

2.3.2. Réponse acoustique de la suspension diluée de microbilles

Dans cette partie, nous étudions la résonance des microbilles de silicone poreux. Nous considérons des échantillons du même type que ceux présentés sur les clichés de la Figure 23 constituant une dispersion aléatoire d'un nombre important de microbilles dans du carbopol (un gel aqueux qui possède les mêmes propriétés acoustiques que l'eau). Cette suspension est ensuite piégée dans un pavé droit et disposé de part et d'autres des transducteurs émetteur et récepteur pour en extraire les propriétés effectives (célérité de phase et atténuation).

Toutefois, les propriétés effectives de la suspension des microbilles sont étroitement liées à la taille, à la polydispersité, et à la fraction volumique des microbilles. Les modèles de diffusions multiples de Waterman et Truell ou de Linton et Martin présentés aux parties 1.3.3.2.2 et 1.3.3.2.3 du Chapitre 1 seront utilisés pour prédire les propriétés effectives de cette suspension diluée.

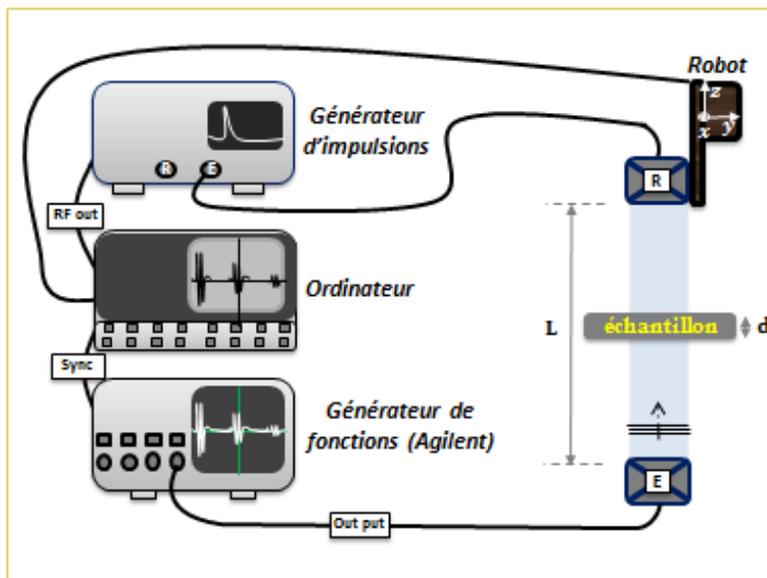
2.3.2.1. Dispositif expérimental

Nous disposons de deux types de cellules parallélépipédiques rectangles d'épaisseurs très fines et constitués de deux films plastiques parallèles ultra-minces ($40\mu\text{m}$) et acoustiquement transparents. L'une des cellules a un volume totale de 6.4ml ($80\text{mm} \times 80\text{mm} \times 1\text{mm}$) et l'autre 32ml ($80\text{mm} \times 80\text{mm} \times 5\text{mm}$).

Le principe de l'expérience est illustré sur les Figure 24 et Figure 25, L'émetteur (E) est excité à l'aide d'un générateur de fonction. Le signal transmis et détecté par le récepteur (R) est envoyé vers un ordinateur via l'amplificateur d'un générateur d'impulsion. L'ensemble échantillon-transducteurs est plongé dans un aquarium de 70cm de long, 40cm de large et 30cm de hauteur. Les transducteurs ultrasonores utilisés sont les mêmes que ceux qui ont permis la caractérisation

acoustique des monolithes de silicone poreux présentée dans la partie 2.2.3 (transducteurs de diamètre 1 pouce et de fréquence centrale 500kHz).

Le matériau ainsi confiné peut être considéré très mince, voire sub-longueur d'onde car son épaisseur d ($\sim 1\text{mm}$) est très petite devant la longueur d'onde du signal ultrasonore émis, ce qui ne permet pas de séparer les éventuelles réflexions multiples aux interfaces.



a) dispositif expérimental de caractérisation en transmission acoustique b) photo de l'échantillon entre deux transducteurs ultrasonores

Figure 24. Représentation schématique du dispositif expérimental pour la caractérisation de la suspension de microbilles de silicone poreux.

2.3.2.2. Mesures de la célérité de phase et de l'atténuation

Le dispositif expérimental permettant de mesurer en immersion et en incidence normale le coefficient de transmission, la célérité de phase et l'atténuation d'une fine plaque à face parallèle est très utilisé pour la caractérisation acoustique de plaques [27] [73]. La mesure de ces paramètres physiques repose essentiellement sur l'analyse de l'amplitude et de la phase de la transformée de Fourier des signaux transmis sans échantillon (signal de référence $s_{\text{ref}}(t)$) et avec

échantillon $s_T(t)$ comme illustré sur Figure 25. Cette caractérisation acoustique est effectuée dans une gamme de fréquences comprises entre 40kHz et 1MHz (en exploitant au maximum la bande passante des transducteurs ultrasonores par des tirs successifs avec différentes fréquences centrales allant de 40kHz et 1MHz, avec et sans l'échantillon). Une fenêtre de type « *rectangulaire-smooth* » est ensuite appliquée sur les signaux reçus de sorte à éliminer d'éventuels échos pour conserver uniquement la partie du signal qui nous intéresse. En passant dans le domaine de Fourier, les spectres des signaux sont définis dans une bande passante (correspondant plus ou moins à la largeur à mi-hauteur du spectre). Pour les mêmes raisons évoquées pour la caractérisation des monolithes de silicone poreux, la phase du spectre est calculée avec la fonction Matlab « *angle* » avec un paramètre $2\pi n$ (où $n = -1, 0, 1$) et est déroulé avec la fonction « *Unwrap* ». Ce déphasage artificiel permet donc de prendre en compte des retards de phase supérieurs ou inférieurs à une période.

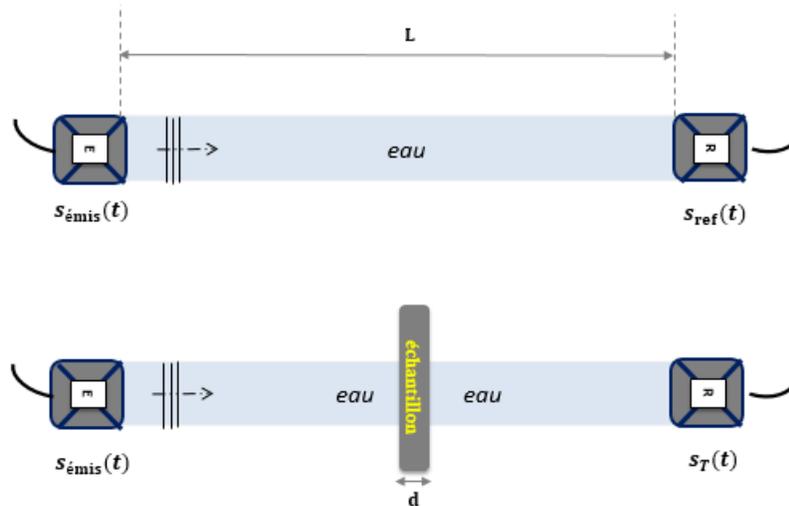
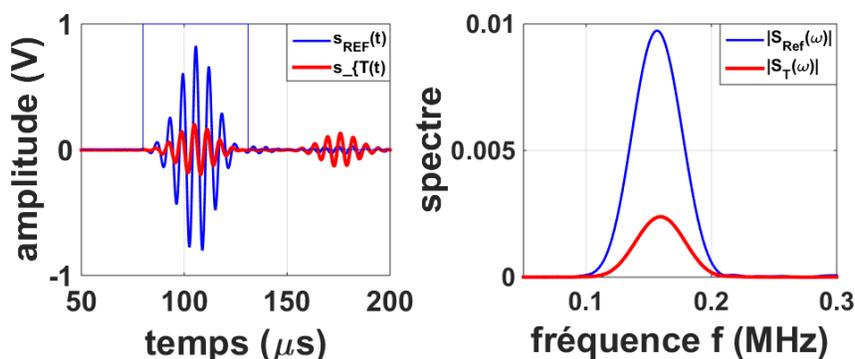


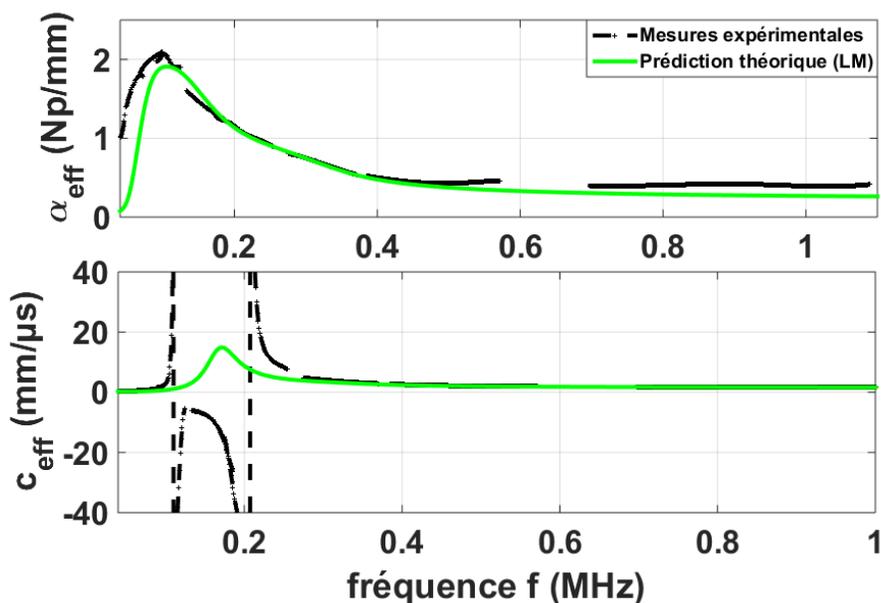
Figure 25. Illustration de la méthode de mesure du signal de référence $s_{\text{ref}}(t)$ (schéma du haut) et du signal transmis à travers l'échantillon $s_T(t)$ (schéma du bas).

Nous ferons ici l'hypothèse que le coefficient de transmission acoustique est égal à $e^{ik_{\text{eff}}d}$. Ce calcul ne prend pas en compte les interfaces entre l'eau et le métafluide. Cette hypothèse est valable à condition que les déphasages (ou pertes) liés à la propagation dans l'épaisseur du métafluide soient bien plus grands que ceux dus aux interfaces via les coefficients de transmission.

Les résultats expérimentaux présentés à la Figure 26 sont obtenus avec un échantillon composé d'une suspension de microbille de silicone poreux de rayon des microbilles 225 μm , de fraction volumique 7%.



a) signaux et modules des spectres des signaux pour une fréquence d'excitation de 150 KHz



b) propriétés effectives de l'atténuation et de célérité de phase de la suspension diluée

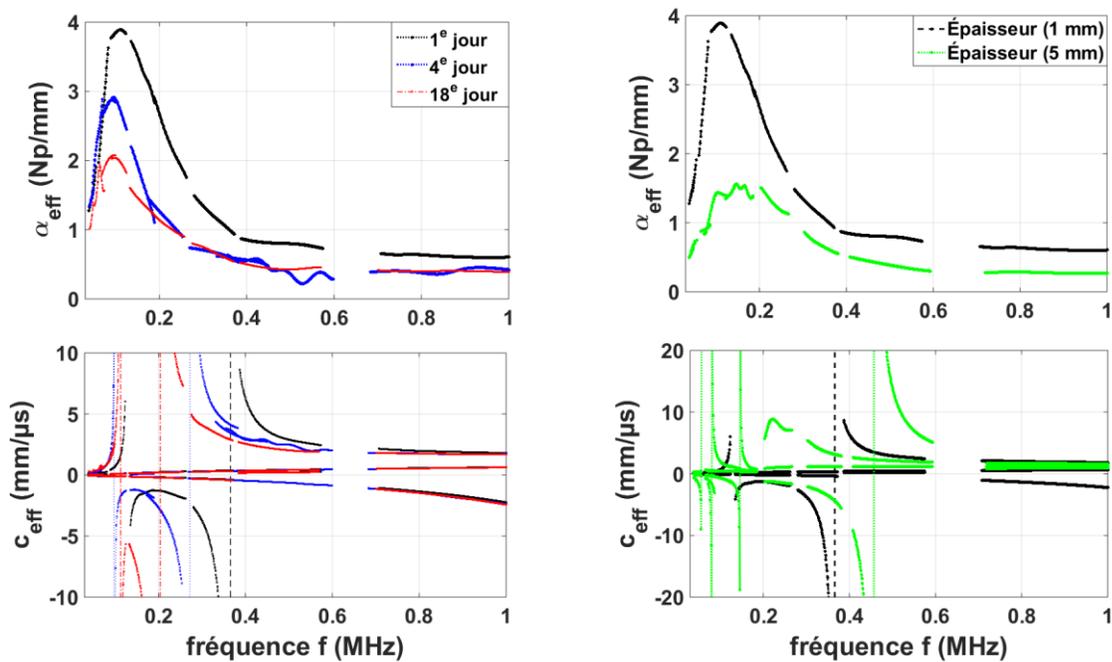
Figure 26. Traitement des signaux à la fréquence d'excitation 150kHz (a). Courbes expérimentales de l'atténuation et de célérité de phase effectives d'un échantillon (composé d'une suspension de microbilles de silicone poreux, de 600 μm de diamètre, 7% de fraction volumique de billes) et d'épaisseur 1mm.

Le module des spectres avec et sans échantillon est centré à 150kHz (Figure 26.a). Les évolutions fréquentielles de l'atténuation et de la célérité de phase effectives sont regroupées sur la Figure 26.b. Le maximum d'atténuation localise la fréquence de résonance monopolaire f_0 (qui est aux alentours de 100kHz) et permet d'évaluer le niveau d'atténuation de la suspension diluée. Les prédictions théoriques de Linton et Martin modélisées avec une fraction volumique de 8%, une polydispersité de 20% et un rayon moyen de 300 μ m sont en très bon accord avec la courbe expérimentale d'atténuation effective, justifiant que l'on puisse négliger les interfaces dans l'extraction des paramètres effectifs. L'influence de la polydispersité sur les propriétés effectives de la suspension est évoquée en Annexe 8. La mesure de la célérité de phase fait apparaître une bande négative dans la zone de résonance (zone comprise entre 88kHz et 270kHz) alors que le modèle théorique ne prédit pas cette bande négative. Nous observons toutefois un bon accord entre expérience et théorie au-delà de cette zone de résonance. La moindre incertitude sur la mesure de la phase de l'onde, notamment due aux interfaces, peut induire des variations artificiellement fortes de la célérité de phase.

Par ailleurs, des expériences similaires ont été effectuées sur des échantillons de suspension de microbilles de silicone poreux avec différents diamètres de billes, les résultats expérimentaux montrent que lorsqu'on augmente la taille des microbilles, le maximum de l'atténuation dû à la résonance des microbilles se translate vers des fréquences basses, tandis que l'effet inverse est observé lorsqu'on diminue la taille de ces dernières. Une autre étude comparative présentée sur la partie a) de la Figure 27 consiste à suivre la stabilité de la suspension des microbilles de silicone poreux dans le temps (jusqu'à 18 jours de suspension dans du carbopol). Comme illustrée sur la partie a) de la Figure 27, il apparaît clairement une légère diminution du niveau d'atténuation avec le temps s'expliquant par la migration d'eau dans les pores contenus dans les microbilles de silicone poreux après un long séjour dans un gel aqueux. En effet, cette pénétration d'eau dans les microbilles modifie les propriétés de la microbille et donc de la suspension. Par la suite, une technique consistant à appliquer un traitement de surface sur les microbilles a permis de limiter cet effet de vieillissement des échantillons.

D'autre part, en considérant un échantillon composé d'une suspension de microbilles de silicone poreux avec une fraction volumique de 7% et un diamètre moyen de microbilles de

400µm, nous avons étudié l'influence de l'épaisseur de l'échantillon (comparaison entre les épaisseurs 1mm et 5mm très petites devant la longueur d'onde excitatrice) sur les propriétés effectives de l'atténuation et de la célérité de phase en $e^{ik_{eff}d}$ comme illustrée sur la partie b) de la Figure 29. Cette comparaison montre une forte diminution du niveau d'atténuation et une bande négative de la célérité de phase plus large pour l'épaisseur à 5mm. Cette différence de niveau d'atténuation est cohérente, puisque l'atténuation des ondes est étroitement liée à la distance de propagation des ondes.



a) suivi dans le temps des propriétés effectives de la suspension diluée

b) effet des épaisseurs de la boîte sur les propriétés effectives de la suspension diluée

Figure 27. Études comparatives des propriétés effectives de la suspension de silicone poreux (400µm de diamètre des microbilles, une fraction volumique de bille de 7% et une polydispersité de 20%).

En conclusions, rappelons que le dispositif expérimental présenté en Figure 24 ne permet donc pas de mesurer de manière précise la célérité de phase mais plutôt la mesure du coefficient de transmission acoustique et la localisation de la fréquence de résonance des objets à partir de la courbe d'atténuation. L'expérimentation permettant la mesure de la célérité est développée par

Brunet *et al.* [14], cette dernière consiste à placer les deux transducteurs au contact direct de la suspension de microbilles de silicone poreux et de faire des mesures pour plusieurs distances de propagation.

2.4. Propriétés acoustiques de plaques localement résonantes

L'étude des propriétés acoustiques de plaques composites est très répandue [12] [27] [39] [73]. L'objet de cette section est de tirer avantage des fortes résonances de microbilles de silicone poreux pour concevoir de très fines plaques souples réduisant fortement la transmission ultrasonore. Les microbilles de silicone poreux réparties aléatoirement dans la plaque viscoélastique doivent être sphériques et relativement monodisperses pour obtenir des effets marqués. Leurs tailles et fractions volumiques seront alors ajustées pour contrôler la bande de fréquence sur laquelle on souhaite minimiser la transmission acoustique. Les microbilles de silicone poreux caractérisées précédemment ont permis de montrer des niveaux d'atténuation assez élevés dus aux résonances (principalement monopolaires) des microbilles de silicone poreux. Nous allons donc synthétiser et caractériser les propriétés acoustiques de très fines plaques viscoélastiques dans lesquelles sont suspendues ces microbilles résonantes (avec dans un cas une répartition aléatoire et dans un autre une répartition périodique). En raison de la nature solide de la matrice, nous ne parlerons plus de « métafluides » mais de « métaplaques ». La synthèse des métaplaques est basée sur des techniques de microfluidique et d'émulsification, et la caractérisation acoustique repose sur la méthode de transmission (mesure effectuée en immersion et en incidence normale).

Dans la première partie de cette section, nous allons décrire la synthèse des plaques. Nous présenterons dans une seconde partie la caractérisation acoustique de plaques composées d'une dispersion aléatoire de microbilles de silicone poreux. Enfin, nous étudierons en dernière partie l'influence de l'arrangement en comparant la transmission à travers une répartition aléatoire de microbilles à celle d'une répartition périodique. Enfin, nous terminerons par une comparaison avec des plaques composées de cavités d'air et non de microbilles de silicone poreux.

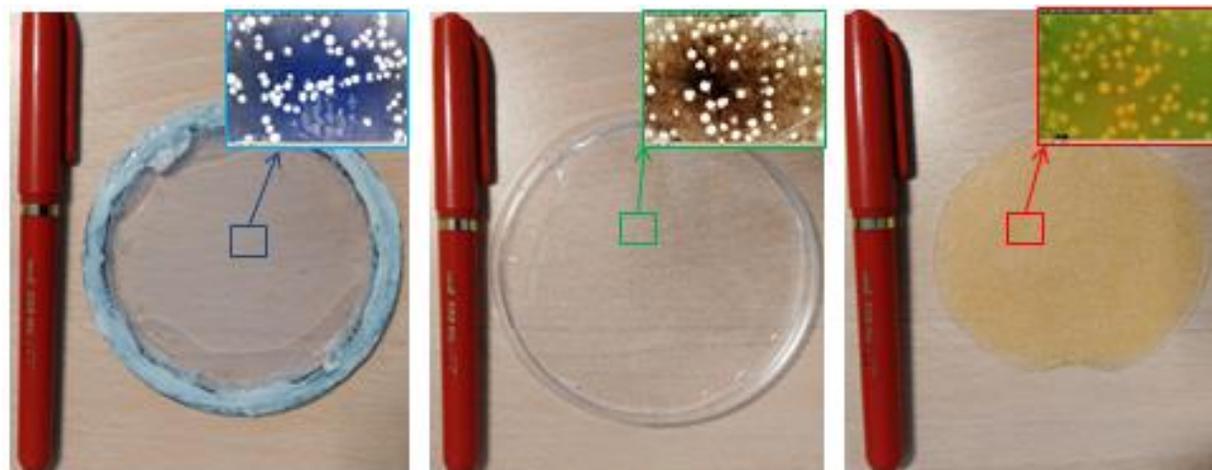
2.4.1. Synthèse et description des plaques étudiées

Nous nous sommes orientés vers des matrices de type élastomère (à faible module de cisaillement) pour conserver les propriétés résonantes des inclusions poreuses observées dans les matrices de type gels aqueux. D'un point de vue acoustique, ces matrices souples ont des propriétés très proches de celles de l'eau (célérité du son de l'ordre 1000-1500 m.s⁻¹). Figure en Tableau 3 un récapitulatif des propriétés mécaniques des diverses matrices considérées dans cette étude (Agarose, PDMS, Latex).

Propriétés élastiques	Matrice (Agarose)	Matrice (PDMS)	Matrice (Latex)
Masse volumique (g. cm ⁻³)	$\rho = 1,005$ [74]	$\rho = 1,02$ [57]	$\rho = 1.1$ mesurée
célérités longitudinale et transversale (mm. μs^{-1})	$c_L = 1,490$ [74] c_T prise égale à zéro	$c_L = 1,026$ [57] $c_T = 0,04$ [57]	$c_L = 1,5$ mesurée c_T non connue
Atténuations longitudinale et transversale (mm ⁻¹)	$\alpha_L = 6,33 \cdot 10^{-6} f^2$ [74] α_T prise égale à zéro	$\alpha_L = 0,023 f^{1.45}$ [57] $\alpha_T = 10^2 \alpha_L$ [70]	α_L non connue α_T non connue

Tableau 3. Propriétés acoustiques des matrices (Agarose, PDMS, Latex).

Notons que les paramètres du Latex non connus (c_T, α_L, α_T) seront ajustés plus tard en fonction de l'expérience. Les microbilles de silicone poreux ici étudiées ont un diamètre moyen de 500 μm et une porosité 30%. Les échantillons sont de géométrie circulaire ($\sim 100\text{mm}$ de diamètre) et d'épaisseur d comprise entre 1 et 3mm. La fraction volumique des billes est de l'ordre de 2,5% pour illustrer l'efficacité de ces plaques avec peu d'objets (diffuseurs). Des photos de ces systèmes aléatoires, pour les trois matrices considérées, sont représentées à la Figure 28.



a) métaplaque d'agarose

b) métaplaque de PDMS

c) métaplaque de latex

Figure 28. Suspension de microbilles de silicone poreux dans différentes matrices molles.

2.4.2. Mesure du coefficient de transmission acoustique

Le dispositif de mesure en transmission (avec une mesure de référence) est la méthode classique de mesure d'atténuation la plus couramment utilisée [12] [75]. Cette dernière présentée en Figure 25 et Figure 29 permet la mesure des spectres de célérité de phase et d'atténuation. Chaque plaque est placée au milieu des transducteurs émetteur et récepteur et perpendiculairement à la normale des surfaces de ceux-ci. En générant en incidence normale une onde de pression par le biais du transducteur émetteur, nous pouvons observer expérimentalement à l'interface *eau/échantillon* la naissance d'une onde réfléchie et d'une onde transmise comme illustré sur la Figure 29. Nous pouvons modéliser les coefficients de réflexion $R(\omega)$ et de transmission $T(\omega)$ de la plaque à partir des théories d'homogénéisations considérant le milieu hétérogène comme un milieu homogène équivalent. Ces deux coefficients dépendant de la fréquence, de l'épaisseur de la plaque d , des nombres d'ondes effectifs dans l'eau k_0 et de la plaque k_{eff} , des impédances acoustiques Z_0 (de l'eau) et Z_{eff} (de la plaque) suffisent à prédire la réponse acoustique d'une plaque. Comme rappelées dans la thèse de J. Dubois [27], elles peuvent être exprimées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 R(\omega) &= \left(\frac{Q e^{-i k_0 d}}{1 - Q^2 e^{2i k_{\text{eff}} d}} \right) \left(1 - e^{2i k_{\text{eff}} d} \right), \\
 T(\omega) &= \left(\frac{1 - Q^2}{1 - Q^2 e^{2i k_{\text{eff}} d}} \right) e^{i (k_{\text{eff}} - k_0) d},
 \end{aligned} \tag{82}$$

avec $Q = \frac{Z_0 - Z_{\text{eff}}}{Z_0 + Z_{\text{eff}}}$.

Il est donc possible de prédire les coefficients $R(\omega)$ et $T(\omega)$ de la plaque à partir des modèles de diffusions multiples présentés au Chapitre 1. Toutefois, la prise en compte des phénomènes de conversions de modes dans la plaque nécessite de calculer la masse volumique effective ρ_{eff} dans le cadre du modèle de LCN (notons que $Z_{\text{eff}} = \rho_{\text{eff}} \frac{\omega}{k_{\text{eff}}}$), ce qui sera en perspective de la thèse. Nous nous contenterons du modèle de Waterman et Truell explicité en termes de nombre d'onde effective k_{eff} et dont la masse volumique effective ρ_{eff} équivalente a été calculée par Aristégui et Angel [46] pour calculer l'impédance effective Z_{eff} de la plaque et donc permettre la prédiction de la transmission acoustique de la suspension de microbille de silicone poreux dans la matrice Agarose.

En utilisant le dispositif expérimental présenté en Figure 25, nous avons effectué des mesures de transmission acoustique sur les différentes plaques d'épaisseurs 1mm. La manipulation consiste à envoyer un train d'ondes de 5 cycles à différentes fréquences d'excitation comprises entre 100 et 800kHz (fréquences contenues dans la bande passante du transducteur de fréquence centrale 500kHz). Le gain en réception est adapté selon la fréquence d'excitation en fonction du niveau de bruit et de l'éventuelle saturation du signal détecté. La distance L entre les transducteurs émetteur et récepteur est de 140mm. Les transducteurs sont alignés avec le centre de l'échantillon circulaire de diamètre 62mm. Le coefficient de transmission est obtenu expérimentalement par le rapport des modules des spectres des signaux transmis à travers l'échantillon $s_T(t)$ et de référence $s_{\text{ref}}(t)$:

$$T(\omega) = \left| \frac{S_T(\omega)}{S_{\text{ref}}(\omega)} \right|. \tag{83}$$

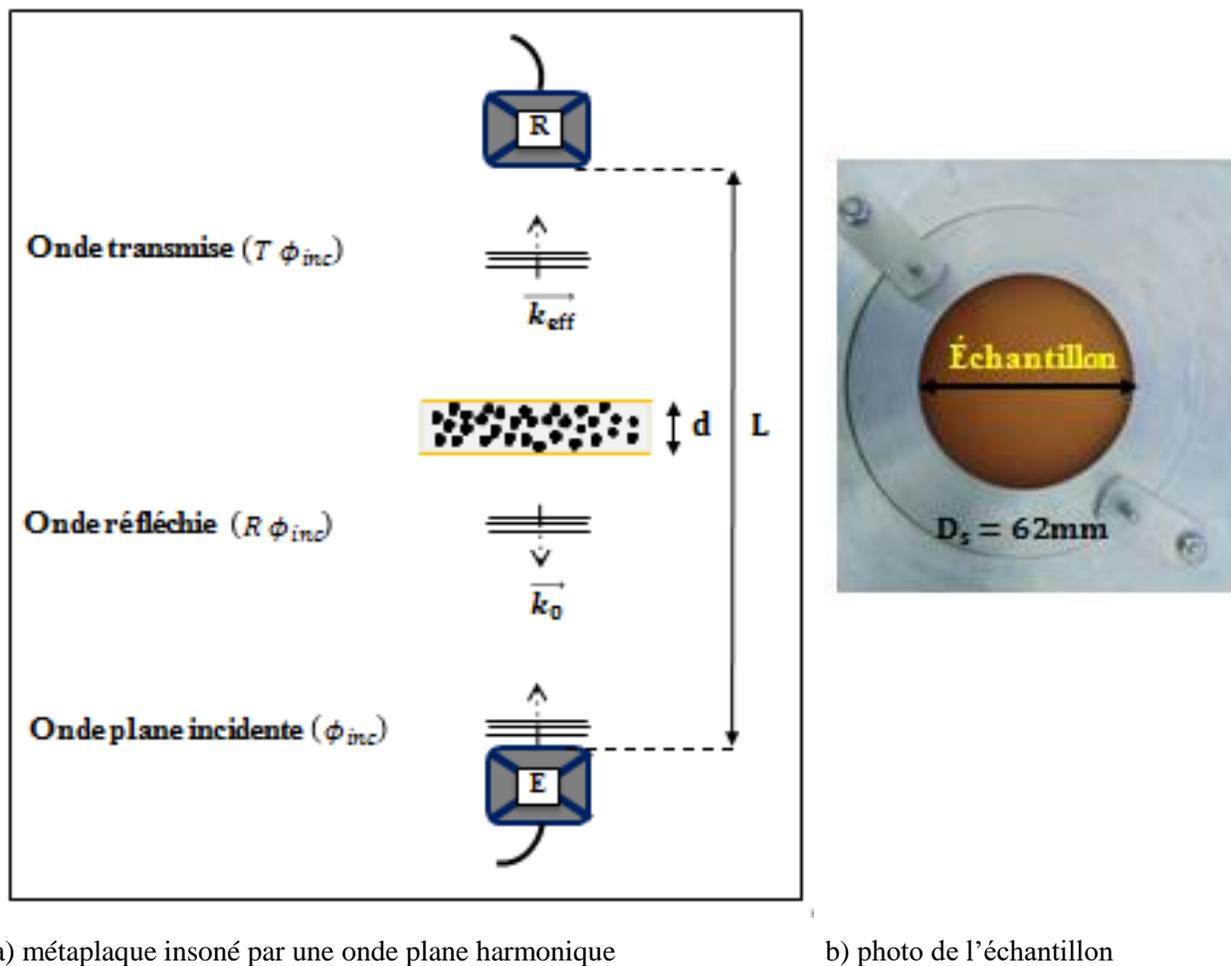


Figure 29. Principe de mesure en transmission et en incidence normale (a).

Photo de la cellule permettant de maintenir l'échantillon circulaire de diamètre 62mm (b).

Une transformée de Fourier des signaux filtrés permet de passer dans le domaine fréquentiel. Nous représentons sur la Figure 30 les résultats des signaux temporels avec et sans échantillon ainsi que les modules des spectres des deux signaux temporels en fonction de la fréquence.

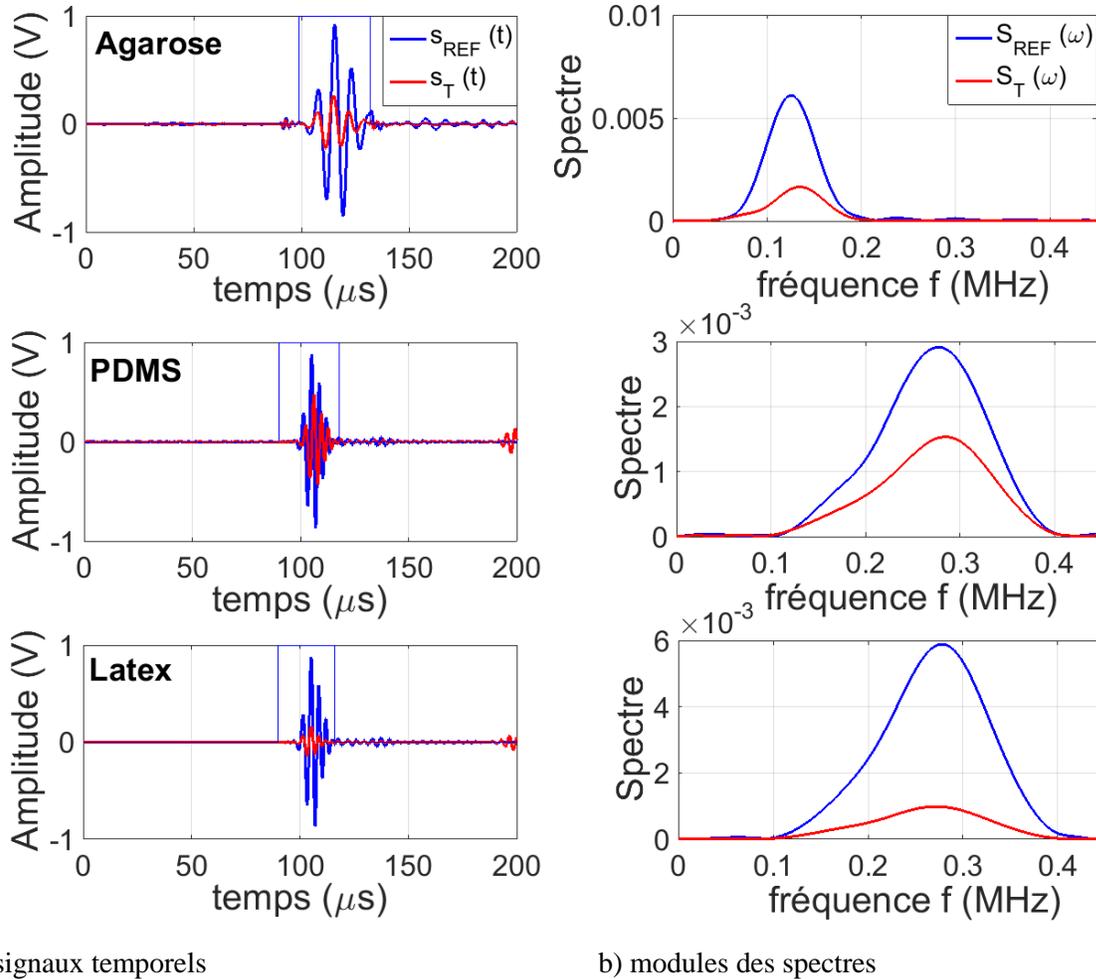


Figure 30. Signaux et spectres des trois échantillons pour diverses matrices (Agarose, PDMS et Latex).

Il est possible d'affiner la résolution en fréquence avec un traitement du signal consistant à augmenter le nombre de points en temps du signal temporel (*zero-padding*). Nous présentons sur la Figure 31, les résultats de la mesure du module du coefficient de transmission acoustique (nommé **CTA**) des trois échantillons (matrices Agarose, PDMS, et du Latex) composés d'une distribution aléatoire de microbilles de silicone poreux en fonction de la fréquence. Pour une épaisseur de plaque de 1,2mm, la relation (82) utilisant la théorie de diffusion multiple de Waterman et Truell [19] permet de prédire correctement ce CTA pour le cas d'une matrice Agarose avec les paramètres d'entrées suivants (rayon moyen \bar{a} des microbilles de silicone

poreux de $250\mu\text{m}$, fraction volumique ϕ de 2,8%, et polydispersité P de 20%), la prédiction théorique pour la matrice PDMS est obtenue avec ($\bar{a} = 250\mu\text{m}$, $\phi = 2,5\%$, $P = 20\%$). Cependant, compte-tenu des paramètres du Latex non connus, il est commun d'ajuster ces derniers suivant l'expérience. En effet, en étudiant la transmission acoustique à travers une dispersion aléatoire de sphères rigides (type carbure de tungstène) dans une matrice viscoélastique (type époxy ayant la même masse volumique que le Latex), Duranteau *et al.* [76] ont montré que les paramètres effectives de la dispersion sont très sensibles à la valeur de c_T de la matrice. Par conséquent, en ajustant les paramètres (célérité du son transversale de la matrice Latex, et fraction volumique de microbilles), nous avons prédit la courbe de transmission acoustique exposée en Figure 31. Les paramètres de la matrice Latex utilisés sont les suivants ($c_T = 0,186\text{mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$, $\bar{a} = 200\mu\text{m}$, $\phi = 5,04\%$, $P = 20\%$, α_L est prise identique à celui du PDMS, et $\alpha_T = 2\alpha_L$).

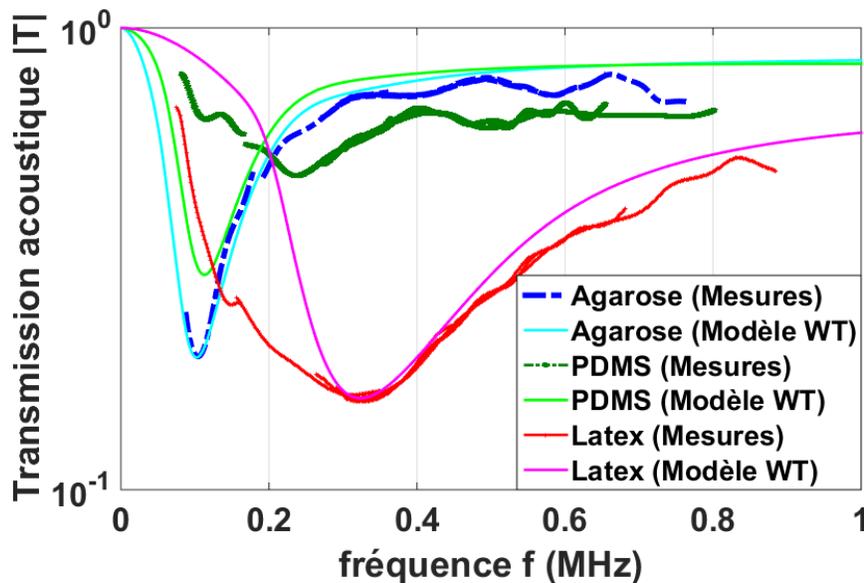


Figure 31. Évolution des coefficients de transmissions acoustiques en fonction de la fréquence de différentes matrices composées d'une dispersion aléatoire de microbilles de silicone poreux.

On constate sur la Figure 31 des minima, plus ou moins prononcés suivant la nature de la matrice utilisée, correspondant à la résonance (monopolaire) des inclusions poreuses. La matrice « *Agarose* » qui est en très bon accord avec la prédiction théorique (courbe en bleu clair) issue du modèle de Waterman et Truell [19] présente un gap prononcé du coefficient de transmission acoustique autour de 100kHz. En effet, l'agarose étant principalement constitué d'eau, nous retrouvons les résultats précédemment obtenus avec les « métafluides ».

Dans le cas de la matrice PDMS, le creux de transmission mesuré est étonnamment peu profond contrairement à sa prédiction théorique (courbe en vert clair). Au vu de la structure de cet échantillon, illustré sur le cliché précédent (Figure 28 b), il est probable que les microbilles ne se comportent pas comme des diffuseurs à part entière. En effet, ces derniers sont constitués du même matériau que la matrice environnante (silicone/PDMS). Le silicone constituant le squelette des microbilles a probablement fusionné avec le silicone de la matrice formant ainsi un agrégat de cavités d'air et non un objet unique aux contours bien définis. Nous pensons que ce type d'agrégats va simplement diffuser les ondes acoustiques sans effet de résonance attendu pour des objets individuels (microbilles). En l'absence de résonance, le gap en transmission est alors moins prononcé. Afin de déterminer si l'absorption de la plaque est liée à la résonance des microbilles de silicone poreux, nous avons présenté sur la Figure 32 des résultats de mesures de transmissions acoustiques effectuées sur des plaques de PDMS avec et sans microbilles de silicone poreux. Le coefficient de transmission de la plaque sans résonateur est quasi-égal à 1, ce qui montre que les creux de la transmission acoustique visibles sur les plaques dans lesquelles il y a les microbilles, sont essentiellement liés à la résonance des diffuseurs (microbilles de silicone poreux) et non aux pertes par réflexions aux interfaces.

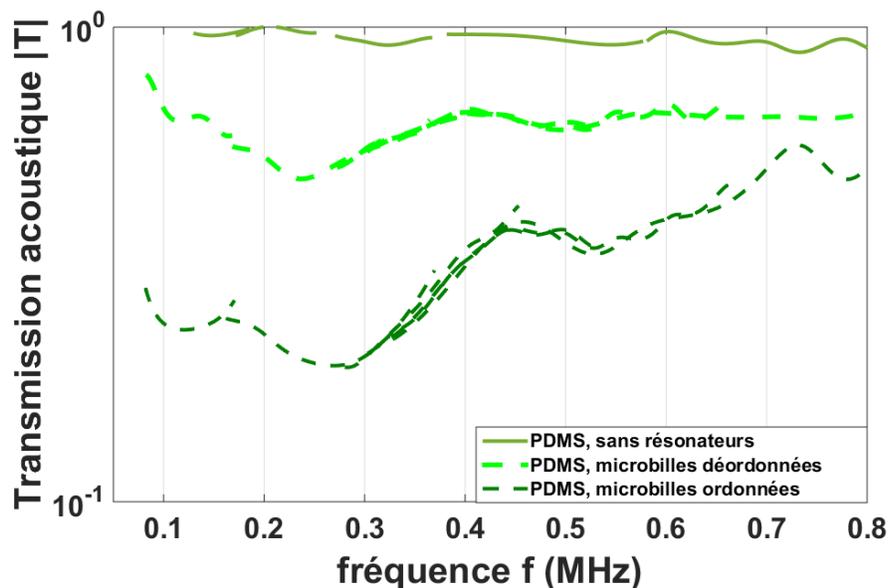


Figure 32. Comparaison de la transmission acoustique sur une plaque de PDMS avec et sans microbilles de silicone poreux.

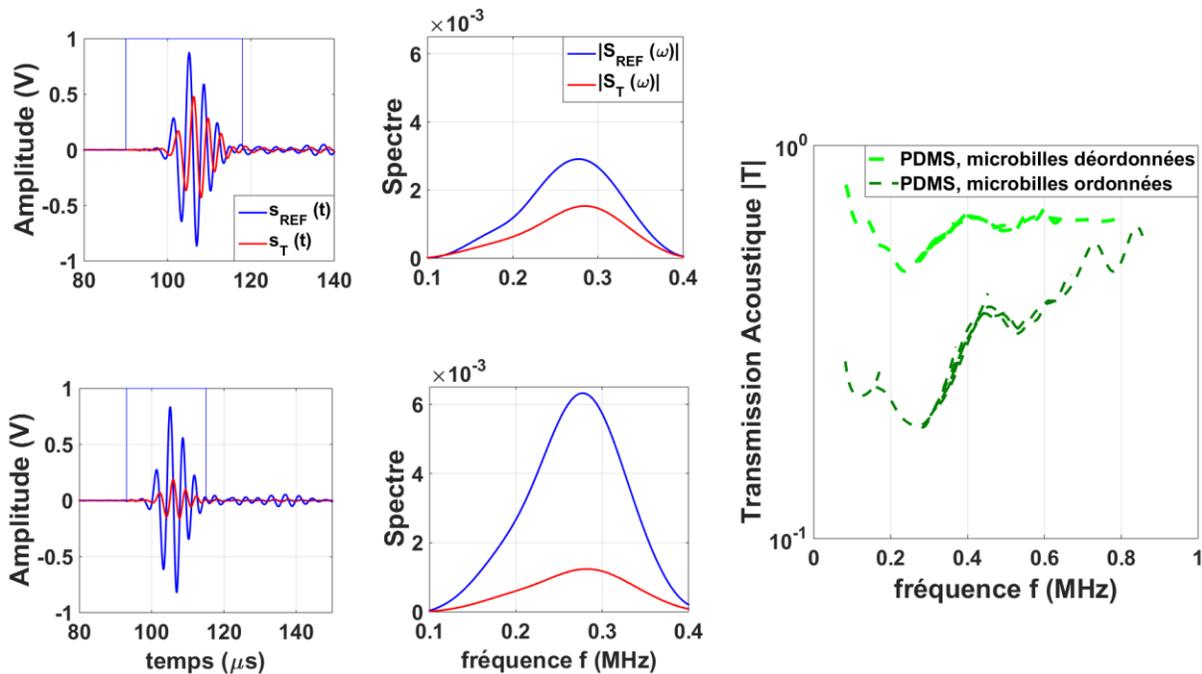
En revanche, les effets résonants des particules semblent conservés (gap en transmission très marqué) dans le cas où le matériau de la matrice (latex) diffère de celui des billes poreuses (silicone). L'accord théorie/expérience est d'ailleurs très satisfaisant. Le latex présente également l'avantage d'avoir des propriétés acoustiques très proches de celle de l'eau (célérité du son de l'ordre de $1500\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$). Cela en fait un matériau intéressant pour la matrice pour les applications en acoustique sous-marine.

2.4.3. Influence de l'arrangement

Pour pallier les problèmes de fusion de matériaux rencontrés avec les matrices PDMS, nous avons cherché à polymériser la matrice PDMS avant de polymériser les microbilles. Pour ce faire, nous avons eu recours à une technique de lithographie douce à l'instar de V. Leroy *et al.* [57]. Cette technique consiste à couler un polymère sous forme liquide, ici du PDMS, non encore réticulé, sur une forêt de plots métalliques, servant ici de moule. Après polymérisation, la couche

de PDMS réticulé est retirée pour donner naissance à un réseau, généralement ordonné, de trous ouverts répartis dans la couche de PDMS. Dans un deuxième temps, ces loges sont remplies de notre émulsion PolyHIPE, qui est alors à son tour polymérisée. Les étapes de la technique de lithographie douce sont détaillées par D. Qin *et al.* [77].

Les résultats de la comparaison du CTA entre l'arrangement périodique, obtenu par lithographie douce, et l'arrangement aléatoire de microbilles de silicone poreux sont présentés sur la Figure 33. Le creux en transmission est bien plus prononcé dans le cas de l'échantillon (ordonné) pour lequel les microbilles ont été polymérisées dans un deuxième temps. Nous pensons que les résonateurs créés par lithographie douce sont plus efficaces comme en témoignent leurs contours mieux définis que dans le cas aléatoire (cf photos dans la Figure 33).



a) signaux temporels (billes ordonnées au-dessus, désordonnées en dessous)

b) spectres (billes ordonnées au-dessus, désordonnées en dessous)

c) comparaison des CTA

Figure 33. Comparaison entre les arrangements aléatoire et périodique de microbilles de silicone poreux dans la matrice PDMS.

Cependant, la comparaison effectuée sur la Figure 33 permet de voir l'avantage de la méthode de lithographie douce mais ne suffit pas pour évaluer l'efficacité de l'arrangement des inclusions. Nous verrons dans la section 2.4.4, une étude comparative plus complète sur la nature du résonateur et de l'influence de l'arrangement des résonateurs. Par ailleurs, nous avons comparé les mesures de coefficient de transmission acoustique présentées en Figure 33 à celles effectués sur une plaque de PDMS pure i.e. sans résonateurs. Notons que ces différentes plaques sont supposées identiques (les mêmes matrices et les mêmes épaisseurs de plaque).

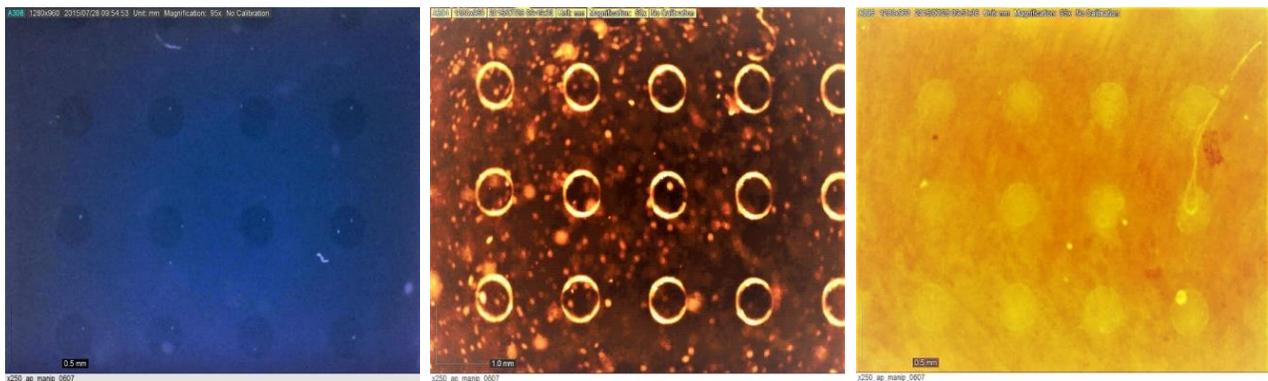
2.4.4. Comparaison avec des résonateurs type « bulles d'air »

2.4.4.1. Caractérisation de plaques avec un arrangement périodique de cavités sphériques d'air

À l'instar de la distribution périodique de microbilles de silicone poreux dans la matrice PDMS, nous présenterons des résultats du coefficient de transmission acoustique des trois échantillons composés des matrices (Agarose, PDMS, et Latex) dans lesquelles sont réparties périodiquement des cavités sphériques d'air en vue de tester l'efficacité de nos résonateurs par rapport aux cavités d'air qui sont utilisées dans les matériaux Alberich [78]. À l'exception de l'échantillon avec la matrice Agarose (échantillon fabriqué avec une technique de mise en forme robotique dont le montage expérimental est décrit dans la thèse de Simon Raffy [59]), la synthèse des échantillons est identique à celle utilisée pour la fabrication du PDMS périodique décrite dans le paragraphe précédent. Ici les loges ne sont pas remplies d'émulsion.

Nous pouvons observer sur la Figure 34 un réseau périodique de la suspension de microcavités sphériques d'air avec un pas régulier de $750\mu\text{m}$ dans les trois échantillons. L'évolution du coefficient de transmission acoustique des trois échantillons (Figure 34) en fonction de la fréquence est présentée sur la Figure 35. Comme attendu, les résultats expérimentaux montrent des creux assez prononcés du coefficient de transmission acoustique pour les échantillons de PDMS (aux alentours de 200kHz) et Latex (aux alentours de 150kHz). Cependant la mesure expérimentale dans l'échantillon d'Agarose ne présente aucune résonance dans la bande passante du capteur. En considérant une épaisseur de plaque de 1,2mm, nous avons modélisé le CTA avec

la théorie de diffusion multiple de Waterman et Truell [19] pour les trois matrices en ajustant les paramètres d'entrées pour chacun des cas. Ces paramètres sont exposés dans le Tableau 4.



a) suspension de cavités

sphériques d'air dans une matrice
Agarose

b) suspension de cavités

sphériques d'air dans une matrice
PDMS

c) suspension de cavités

sphériques d'air dans une matrice
Latex

Figure 34. Suspension de microcavités sphériques d'air dans différentes matrices molles.

Paramètres du modèle	Matrice (Agarose)	Matrice (PDMS)	Matrice (Latex) ⁴
Rayon moyen \bar{a} (μm)	200	200	200
Fraction volumique ϕ (%)	2	2,5	3,2
Polydispersité P (%)	20	20	20

Tableau 4 : Paramètres pertinents imposés dans le modèle de WT.

Le modèle prédit une résonance à très basse fréquence pour le cas de l'agarose (la bande passante du capteur ne permet pas d'observer la résonance très basse fréquence du CTA

⁴ De la même manière que dans la section 2.4.2, nous avons ajusté de la matrice « Latex » avec $c_T = 85\text{m/s}$.

inférieure à 100kHz prédite par le modèle). Notons qu'à la fréquence de résonance des cavités d'air, la mesure du CTA pour la distribution périodique de microcavités sphériques d'air dans la matrice Latex est égale à 0,05 soit un ratio $\frac{\lambda_{eau}}{d}$ de 10. Nous verrons dans la cette section 2.4.4.2, si ce ratio très élevé est intrinsèquement lié à l'influence périodique de l'arrangement ou à la nature ultra-résonante des microcavités d'air.

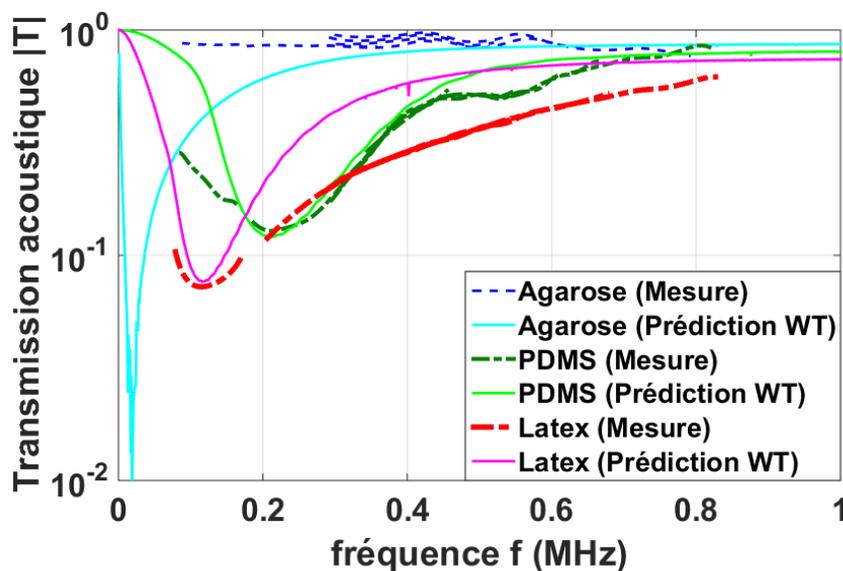
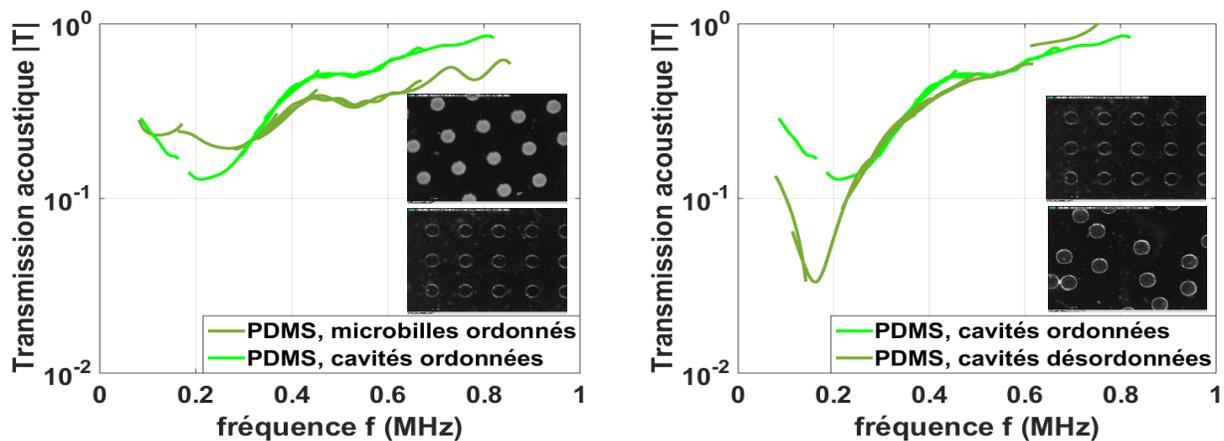


Figure 35. Évolution du coefficient de transmission acoustique en fonction de la fréquence de différentes matrices dans lesquelles sont réparties périodiquement des cavités sphériques d'air.

2.4.4.2. Comparaison avec un arrangement aléatoire de cavité sphérique d'air

Pour évaluer l'effet de l'arrangement sur la mesure du coefficient de transmission acoustique, nous avons fabriqué avec la méthode de lithographie douce, un échantillon de PDMS ayant un arrangement aléatoire de microcavités sphériques d'air. Ce dernier et ceux des échantillons de PDMS avec les arrangements périodiques (de microbilles de silicone poreux, et de microcavités

sphériques d'air) ont a priori les mêmes concentrations d'inclusions (~2,5%), et les mêmes tailles d'inclusions. Nous avons comparé dans un premier temps, les coefficients de transmission acoustique des échantillons PDMS avec les arrangements périodiques (de microbilles de silicone poreux vs les cavités sphériques d'air) pour évaluer l'efficacité du résonateur (Figure 36 a)), et dans un second temps, la comparaison entre un arrangement périodique et un arrangement aléatoire de cavités sphériques d'air pour évaluer l'influence de l'arrangement, Figure 36 b). La mesure des coefficients de transmissions acoustiques des trois échantillons en fonction de la fréquence est présentée à la Figure 36.



a) CTA de la matrice PDMS avec l'arrangement périodique de microbilles de silicone poreux, puis de cavités sphériques d'air

b) CTA de la matrice PDMS avec l'arrangement périodique puis aléatoires de cavités sphériques d'air

Figure 36. Étude de l'influence du résonateur, puis de l'arrangement de cavités sphériques d'air dans une matrice PDMS sur le coefficient de transmission acoustique en fonction de la fréquence.

- **Influence de la nature du résonateur**

Les résultats présentés en Figure 36 a) montrent des niveaux du CTA comparables mais avec un creux légèrement plus prononcé pour le cas des cavités sphériques d'air. Ce résultat est en effet prévisible du fait de la forte compressibilité de l'air.

- **Influence de l'arrangement**

En revanche, les résultats présentés en Figure 36 b) montrent clairement que le creux du CTA pour la distribution aléatoire de cavités sphériques d'air est plus important que celle d'une distribution périodique.

L'ensemble de ces résultats est obtenu avec des plaques de 1,2mm d'épaisseur et une fraction volumique de l'ordre de 2,5%. Ces mesures préliminaires ont clairement fait apparaître des creux en transmission aux fréquences de résonance des résonateurs. Il semblerait donc que nos microbilles de silicone poreux, dispersées dans des matrices viscoélastiques souples, soient de bons candidats pour des applications de type isolation (ultra-)sonore. L'augmentation de la concentration en diffuseurs devrait creuser d'avantage les creux du CTA observés.

2.5. Conclusions

La démarche utilisée dans ce second chapitre est essentiellement expérimentale dont les principaux résultats se déclinent en trois parties :

- **Caractérisation du silicone poreux**

Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à la conception, la fabrication et la caractérisation acoustique/mécanique complète du silicone poreux constituant le matériau « de base » de nos micro-résonateurs. Nous avons exposé en détail les processus physico-chimiques permettant de contrôler avec précision la structure poreuse de ces matériaux. Des mesures ultrasonores effectuées sur des échantillons monolithiques ont permis de mettre en évidence une chute brutale de la célérité du son avec la porosité. Cette tendance est bien décrite par des approximations basse fréquence de modèles de diffusion multiple.

- **Caractérisation du résonateur (microbilles de silicone poreux)**

Dans la seconde partie, nous nous sommes intéressés à la fabrication de microbilles de silicone poreux à partir des émulsions décrites dans la 1^e partie de ce chapitre. Nous avons ensuite étudié la réponse acoustique de la suspension de microbilles de silicone poreux dans un gel aqueux, qualifié de « métafluide », pour évaluer les fréquences de résonance de nos microbilles poreuses. Avec de telles suspensions, nous avons pu mettre en évidence de forts niveaux d'atténuation. Cela provient surtout des fortes résonances monopolaires de ces résonateurs très contrastés.

Les propriétés effectives de ces suspensions ont été décrites avec succès dans le cadre de modèles de diffusion multiple, type Waterman et Truell ou de Linton et Martin, exposés au premier chapitre.

- **Réponse acoustique de la plaque ultra-absorbante**

La troisième partie du chapitre est dédiée principalement à l'étude de la transmission acoustique à travers de très fines plaques viscoélastiques dans lesquelles sont répartis aléatoirement les micro-résonateurs de silicone poreux. Avec une très faible concentration de ces microbilles (~2,5%), nos résultats acoustiques ont montré des coefficients de transmissions acoustiques exhibant des creux très prononcés aux fréquences de résonances des microbilles.

Une série d'études comparatives sur la nature du résonateur (cavités sphériques d'air vs microbilles de silicone poreux) et sur l'influence de l'arrangement des objets (arrangement périodique vs aléatoire) a montré des niveaux de transmissions acoustiques assez différents. De plus, nous avons vu que l'absorption de la plaque est liée principalement à la résonance des microbilles et non aux pertes par réflexions sur les interfaces. Néanmoins, les modèles théoriques de Foldy, de Waterman et Truell, de Linton et Martin ne permettent pas de prédire théoriquement le CTA de la plaque viscoélastique (surtout pour des concentrations élevées de diffuseurs), car ces derniers ne prennent pas en compte les éventuels phénomènes de conversions de modes dans ces modèles. Toutefois, bien qu'il y ait un très bon accord entre le modèle de Linton et Martin et les résultats expérimentaux de la suspension des microbilles dans l'Agarose, le modèle de Luppé, Conoir et Norris devrait permettre une meilleure description du CTA de la plaque à condition de développer la masse volumique effective issue du modèle de LCN.

Conclusion générale et perspectives

Les premiers travaux présentés dans ce manuscrit portent sur la modélisation des propriétés effectives d'un matériau à structure aléatoire insonifié par une onde acoustique supposée plane, harmonique et homogène. Dans un premier temps, nous avons étudié la réponse acoustique d'une sphère isolée et sollicitée par une onde incidente longitudinale (puis transversale) pour en extraire les amplitudes modales de diffusion régissant les déplacements particuliers dans les deux phases en présence. Dans une seconde partie, nous avons introduit les approximations basse fréquence desdites amplitudes modales de diffusion, dans les expressions de nombre d'onde effectif issues de différents modèles d'homogénéisation développés dans le cadre de théories de diffusion multiple (Foldy [17], Waterman et Truell [19], Lloyd et Berry [20], Linton et Martin [21], et Luppé, Conoir et Norris [23]). Nous avons ainsi considéré trois configurations d'inclusions sphériques résonantes et de matrice (inclusions fluides suspendues dans une matrice viscoélastique, inclusions viscoélastiques immergées dans une matrice fluide, inclusions viscoélastiques suspendues dans une matrice viscoélastique) pour prédire les propriétés effectives respectivement du silicone poreux, d'une suspension de microbilles de silicone poreux dans un gel aqueux, puis d'une dispersion de microbilles de silicone poreux dans une plaque viscoélastique. Ces développements analytiques basse fréquence ont conduit en particulier à établir la limite quasi-statique de la célérité de phase effective de l'onde cohérente pour des phases solides ou fluides. Nous avons par la suite pris en compte la polydispersité en taille des diffuseurs dans les différents modèles d'homogénéisation pour accéder à des prédictions plus réalistes des propriétés macroscopiques de métaplaques.

Afin d'étudier la transmission acoustique de métaplaques composées d'une distribution aléatoire de micro-résonateurs de silicone poreux localement résonants, nous avons présenté dans le second chapitre, la caractérisation acoustique complète du silicone poreux qui constitue le matériau de nos résonateurs. Le choix de ce matériau découle de la mise en compétition de polymères poreux possédant des célérités du son proches de celle de l'eau, à l'aide des modèles quasi-statiques développés dans le premier chapitre, ceci afin de tirer profit des fortes résonances de Mie (monopolaire et dipolaire) dans le régime des grandes longueurs d'onde.

Des échantillons de silicone poreux ont été synthétisés sous la forme de monolithes circulaires avec différentes porosités, à l'aide des méthodes d'émulsion dites « PolyHIPE ». Le processus physico-chimique permettant le contrôle précis de la structure poreuse des matériaux a été exposé en détail. Leurs propriétés acoustiques et mécaniques, ainsi que leur structure, ont été caractérisées : célérité de phase, atténuation, masse volumique, module d'Young et distribution en taille des pores. Les mesures ultrasonores ont mis en évidence une chute brutale de la célérité (longitudinale) du son et du module d'Young avec la porosité. Un très bon accord a été trouvé entre les mesures acoustiques et les prédictions issues des modèles de Waterman et Truell, et de Luppé, Conoir, et Norris, adapté aux matrices solides. Les limites quasi-statiques des célérités de phase issues de ces deux modèles coïncident dans le cas particulier du silicone poreux.

À l'aide d'un dispositif de microfluidique, nous avons pu fabriquer une grande quantité de microbilles de silicone poreux calibrées. La réponse acoustique basse fréquence d'une distribution de microbilles de silicone poreux suspendues dans un gel aqueux a permis de mettre en évidence des résonances monopolaire et dipolaire très marquées, induisant un pic du coefficient d'atténuation très élevé et des célérités de phase négatives. Ces résultats expérimentaux montrent le caractère ultra-résonant de nos microbilles, qui présentent un très fort contraste de propriétés acoustiques avec la matrice. La dépendance fréquentielle des propriétés effectives (célérité de phase et atténuation) a également été observée. Nous avons vu que les modèles de diffusion multiple de Linton et Martin [21], et de Waterman et Truell [19] adaptés aux matrices fluides sont en bon accord avec les résultats expérimentaux, en particulier pour l'atténuation acoustique. Ce très bon accord permet en particulier de valider les dispositifs expérimentaux mis en œuvre.

Enfin, des plaques d'épaisseurs sub-longueurs d'onde (~ 1 mm) et viscoélastiques dans lesquelles ont été réparties aléatoirement puis périodiquement nos micro-résonateurs ont été considérées. Ces métaplaques comportant une très faible fraction volumique de microbilles de silicone poreux ($\sim 2,5\%$), présentent l'avantage d'être solide et stable dans le temps comparativement aux métafluides [14]. Les résultats expérimentaux ont montré un large et profond creux dans le coefficient de transmission des métaplaques, au voisinage des fréquences de résonance des microbilles. L'efficacité de ces résonateurs a été étudiée en les comparant à des

résonateurs de type cavités d'air sphériques (supposés être très performants en raison de leur très forte compressibilité), puis l'influence de l'arrangement aléatoire ou périodique de cavités d'air sphériques a été présentée. Dans un premier temps, ces études ont montré que les coefficients de transmission acoustique étaient d'ordre de grandeur comparable. Dans un second temps, il est apparu que l'arrangement aléatoire présentait une chute plus marquée du coefficient de transmission que l'arrangement périodique. Néanmoins, les résultats de ces dernières comparaisons doivent encore être confirmés pour de plus fortes concentrations de diffuseurs.

Les études théorique et expérimentale de la multidiffusion des ondes ultrasonores dans de tels milieux viscoélastiques à structure désordonnée (métafluides et métaplaques) ouvrent de nombreuses perspectives.

Du point de vue théorique, il reste à développer les paramètres dynamiques du modèle de Luppé, Conoir et Norris (masse volumique, impédance...) [23] à l'instar des modèles d'Aristégui et Angel [46] ou de Caleap *et al.* [48], ceci afin de prédire les coefficients de transmission et de réflexion de métaplaques à structure aléatoire fortement chargées. Une caractérisation expérimentale de métaplaques à l'aide d'ondes de cisaillement mériterait d'être effectuée pour valider la formulation du nombre d'onde de Luppé, Conoir et Norris établie pour une onde incidente transversale [23].

Du point de vue expérimental, il reste à considérer des métaplaques présentant des concentrations de diffuseurs plus élevées pour réduire plus encore leur coefficient de transmission sur des plages fréquentielles plus larges. Des mesures du coefficient de réflexion de la plaque permettraient également de compléter l'étude.

Annexes

Annexe 1.

Les catégories de résonateurs

Un résonateur est un objet possédant une ou plusieurs fréquences propres et pouvant de ce fait osciller lorsqu'il est excité par une onde caractérisée par sa longueur d'onde λ_0 : on dit que l'objet résonne. Cette résonance correspond à un maximum d'amplitude de déplacement, qui apparaît à la fréquence de résonance f_{res} . Lorsque la fréquence de l'onde excitatrice $f \leq f_{res}$, l'objet résonne en phase avec l'onde. Tandis que lorsque la fréquence $f > f_{res}$, l'objet résonne en opposition de phase avec l'onde.

Notons que pour un système composé d'un nombre important de résonateurs, les résonances impactent les propriétés effectives du matériau (compressibilité, masse volumique,...). Nous présentons ci-après une variété de résonateurs existants.

1.1. Les résonateurs de Minnaert

Les résonances des bulles de gaz dans un liquide étudiées par exemple par Leroy *et al.* [49] sont dominées par la résonance de Minnaert, conséquence du rapport très élevé des masses volumiques du gaz et du fluide environnant. La fréquence de résonance de la bulle est inversement proportionnelle au rayon a de la bulle et dépend de la pression ambiante P_a , de la masse volumique ρ et du coefficient polytropique γ représentatif d'un processus thermodynamique entre la bulle et son milieu environnant. La fréquence de Minnaert s'écrit sous la forme :

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{3\gamma P_a}{\rho}}. \quad (\text{A.1})$$

L'inconvénient d'un système composé de ces résonateurs est le niveau très élevé de l'atténuation dû à la compressibilité des bulles. La caractérisation d'un tel système ne peut se faire que pour de faibles concentrations. Ces systèmes sont également instables.

1.2. Les résonateurs de Helmholtz

Un autre système pouvant induire une compressibilité effective négative comporte un ensemble de résonateurs d'Helmholtz, proposé par N. Fang *et al.* [79]. Ils considèrent un guide d'ondes de

longueur L comprenant un réseau périodique de résonateurs sub-longueurs d'onde constitués de cavités parallélépipédiques de volume V , dont une section circulaire S_0 relie la face supérieure de la cavité au guide d'ondes. La fréquence de résonance d'Helmholtz est donnée par :

$$f_{res} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S_0}{V L}}. \quad (\text{A.2})$$

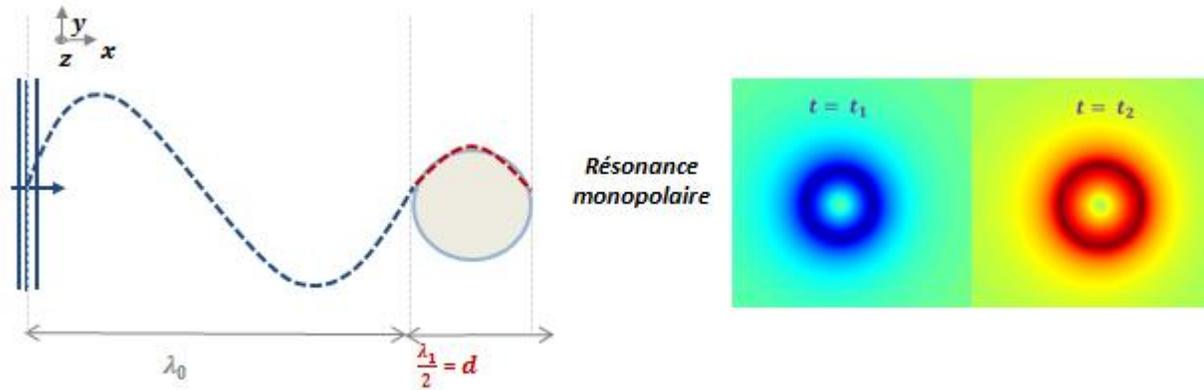
1.3. Les résonateurs de noyau-coque

La résonance dipolaire associée à l'oscillation du centre de masse des résonateurs a été étudiée par Lepert [12] en considérant la diffusion acoustique dans un milieu contenant des diffuseurs sphériques de type « noyau-coque ». La structure biphasique du résonateur permet de contrôler la fréquence où apparaît la résonance dipolaire. Afin d'exalter les résonances basse fréquence, les résonateurs sont constitués de noyaux denses (plomb) et de coques molles (mousse élastomérique).

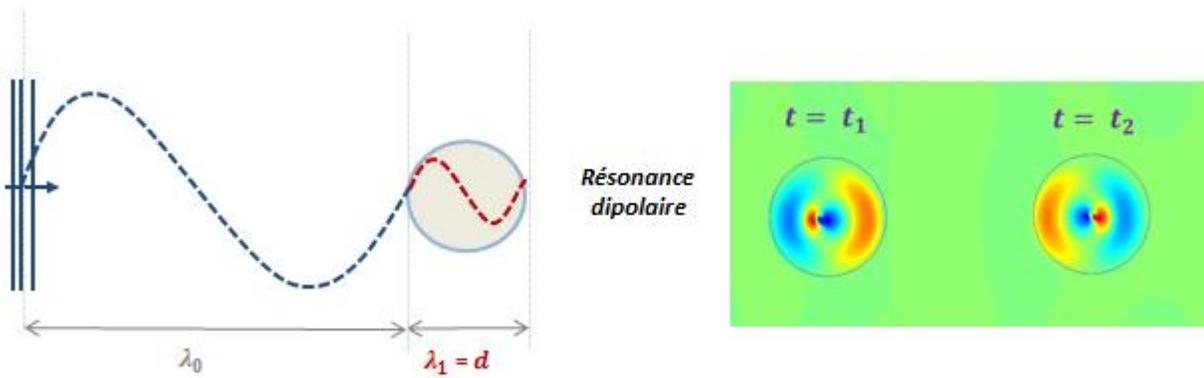
1.4. Les résonateurs de Mie

Lorsque les contrastes de propriétés acoustiques entre la matrice et les inclusions sont suffisants, les premières résonances des inclusions apparaissent à basses fréquences. Nous pouvons dès lors disposer simultanément des résonances monopolaire et dipolaire, les résonances d'ordre supérieur apparaissant à hautes fréquences étant négligeables par rapport aux deux premières.

La première résonance est marquée lorsque la taille du diffuseur est égale à la demi-longueur d'onde de l'onde réfractée dans l'inclusion. La seconde résonance apparaît lorsque la taille du diffuseur est égale à une longueur d'onde de l'onde dans l'inclusion. Lorsque les niveaux de résonance sont importants, les propriétés effectives peuvent être doublement négatives [2]. Le mode monopolaire affecte la compressibilité du matériau, tandis que le mode dipolaire pilote la masse volumique du matériau [12]. Ces deux types de résonance sont illustrés sur la Figure 36.



a) illustration de la résonance monopolaire (compression et dilatation du volume).



b) illustration de la résonance dipolaire (oscillation du centre de masse).

Figure 37. Illustration des résonances mono et dipolaire en fonction de la longueur d'onde dans l'inclusion.

Annexe 2.

Relations entre paramètres élastiques et acoustiques

Les relations entre les différents paramètres élastiques et acoustiques sont reportées dans le Tableau 5.

	λ et μ	E et ν	ν et μ	K et ν	λ et ν
Module d'Young (E)	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$		$2(1 + \nu)\mu$	$3K(1 - 2\nu)$	$\frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu}$
Coefficient de Poisson (ν)	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$				
1 ^{er} coefficient de Lamé (λ)		$\frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\frac{2\nu\mu}{(1 - 2\nu)}$	$\frac{3K\nu}{(1 + \nu)}$	
2 ^e coefficient de Lamé ou rigidité transversale ($\mu \equiv M^T$)		$\frac{E}{2(1 + \nu)}$		$\frac{3K(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$	$\frac{\lambda(1 - \nu)}{3\nu}$
Célérité de phase longitudinale (c^T)	$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}$			
Célérité de phase transversale (c^T)	$\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{E}{2\rho(1 + \nu)}}$			
Module d'élasticité isostatique (K)	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$	$\frac{2(1 + \nu)\mu}{3(1 - 2\nu)}$		$\frac{\lambda(1 - 2\nu)}{2\nu}$
Rigidité longitudinale (M^L)	$\lambda + 2\mu$	$\frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\frac{2(1 - \nu)\mu}{(1 - 2\nu)}$	$\frac{3K(1 - \nu)}{(1 + \nu)}$	$\frac{\lambda(1 - \nu)}{\nu}$

Tableau 5. Relations entre propriétés élastiques et propriétés acoustiques.

Notons également l'égalité suivante :

$$\nu = \frac{3K - 2\mu}{6K + 2\mu} = \frac{3K - E}{6K}$$

Annexe 3.

Les fonctions et polynômes de Legendre

En posant $\mu = \cos \theta$, l'équation de Legendre associée (ou généralisée) s'écrit [36] :

$$(1 - \mu^2) \frac{\partial^2 P_n^m(\mu)}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial P_n^m(\mu)}{\partial \mu} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{(1 - \mu^2)} \right) P_n^m(\mu) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Ses solutions sont les fonctions de Legendre $P_n^m(\cos \theta)$, qui dépendent de la variable θ et des paramètres n et m . Elles s'expriment en fonction des polynômes de Legendre $P_n(\cos \theta)$ par la relation suivante :

$$P_n^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{\partial^m P_n(\cos \theta)}{(\partial \cos \theta)^m}. \quad (\text{A.4})$$

Cette dernière nous permet d'écrire [35] :

$$\frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} = -P_n^1(\cos \theta).$$

Les liens entre les différents ordres des polynômes de Legendre ainsi que leurs dérivées premières sont décrits par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} (n+1)P_{n+1}(\cos \theta) &= (2n+1) \cos \theta P_n(\cos \theta) - n P_{n-1}(\cos \theta), \\ \sin^2 \theta \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \cos \theta} &= n (P_{n-1}(\cos \theta) - \cos \theta P_n(\cos \theta)) \\ &= (n+1) (P_{n+1}(\cos \theta) + \cos \theta P_n(\cos \theta)), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

avec :

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\partial^2 (\cos \theta - 1)^n}{(\partial \cos \theta)^2}.$$

Les expressions des polynômes de Legendre se réduisent pour les deux premiers modes aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} P_0(\cos \theta) &= 1, \\ P_1(\cos \theta) &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Celles relatives aux ordres supérieurs sont détaillées dans l'ouvrage d'Abramowitz [80].

Les cinq premiers modes du polynôme de Legendre $P_n(\cos \theta)$ sont représentés sur la Figure 38.

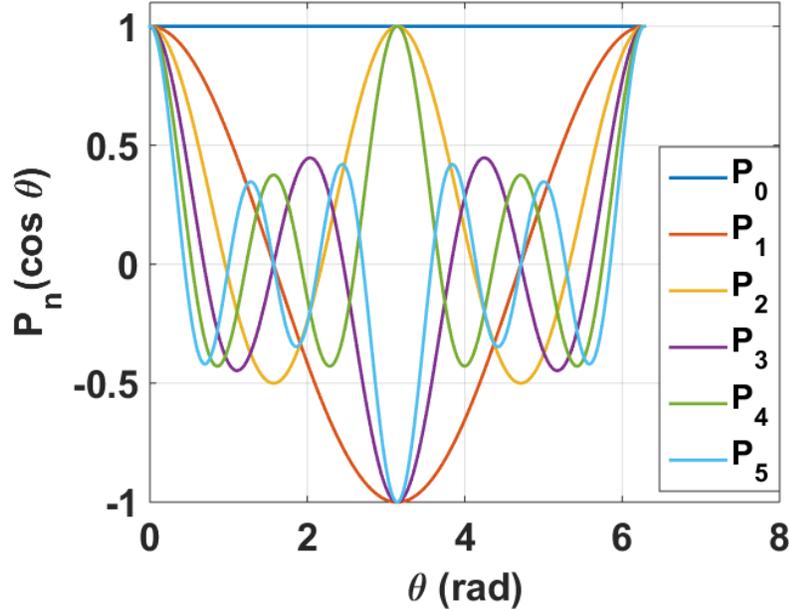


Figure 38. Représentation du polynôme de Legendre pour les cinq premiers modes.

Les relations suivantes :

$$\frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \cos \theta} = \frac{(n+1)}{\sin^4 \theta} (\cos \theta P_n(\cos \theta) - P_{n+1}(\cos \theta)),$$

$$\frac{\partial^2 P_n(\cos \theta)}{(\partial \cos \theta)^2} = \frac{(n+1)}{\sin^4 \theta} ((-n + (n+2) \cos^2 \theta) P_n(\cos \theta) - 2 \cos \theta P_{n+1}(\cos \theta)), \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta) \right) = -n(n+1) \sin \theta P_n(\cos \theta),$$

entre les polynômes de Legendre et leurs dérivées premières et secondes, sont utiles à l'établissement des expressions des champs de déplacement et de contrainte en coordonnées sphériques (Annexe 5).

Annexe 4.

Fonctions de Bessel et Hankel en coordonnées sphériques

L'équation de Bessel sphérique de la fonction $R_n(r)$ dépendant du paramètre n pour tout point repéré par sa position r , s'écrit sous la forme [80] :

$$R_n'' + \frac{2}{r} R_n' + \left(k_0^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R_n = 0, \quad (\text{A.8})$$

où R_n'' et R_n' sont respectivement les dérivées seconde et première de la fonction R_n . Les solutions de cette équation sont les fonctions de Bessel sphériques de première et deuxième espèces, notées $j_n(r)$ et $y_n(r)$. Les fonctions de Bessel et Hankel sphériques de 1^e espèce, respectivement $j_n(r)$ et $h_n^{(1)}(r)$, apparaissent dans les expressions des champs de potentiels reportées dans les équations (15) et (25). Elles s'écrivent respectivement en fonction des fonctions de Bessel et Hankel classiques $J_n(r)$ et $H_n(r)$ comme suit [80] :

$$j_n(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{n+0,5}(r)$$

et : (A.9)

$$h_n^{(1)}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} H_{n+0,5}(r),$$

avec $J_n(r)$, solution de l'équation de Bessel classique en $Y(r)$ [80] :

$$r^2 Y'' + r Y' + (r^2 - \nu^2) Y = 0, \quad (\text{A.10})$$

où Y' et Y'' sont respectivement les dérivées première et seconde de la fonction Y , et $\nu = n + 0,5$.

Sur la Figure 39, nous représentons les cinq premiers modes de la fonction de Bessel sphérique de 1^e espèce.

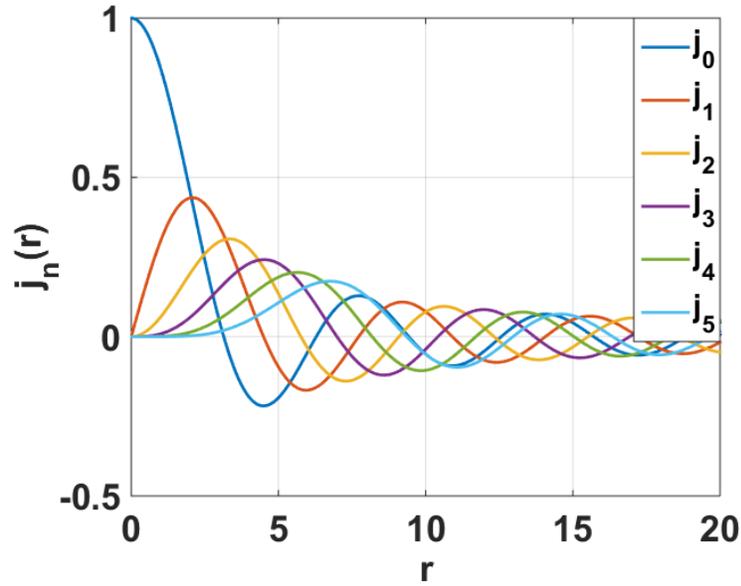


Figure 39. Représentation des cinq premiers modes de la fonction de Bessel sphérique de 1^e espèce.

Les propriétés élémentaires des fonctions de Bessel et de Hankel reposent sur les relations de récurrence suivantes permettant en particulier de relier les dérivées première, seconde et troisième de ces fonctions, que l'on notera f_n à l'ordre n :

$$\begin{aligned}
 f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{x} f_n(x), \\
 n f_{n-1}(x) - (n-1) f_{n+1}(x) &= (2n+1) \frac{\partial f_n(x)}{\partial x}, \\
 \frac{(n+1)}{x} f_n(x) + f_{n+1}(x) &= \frac{\partial f_n(x)}{\partial x}, \\
 x^2 \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial x^2} &= (-x^2 + n(n+1)) f_n(x) + 2x \frac{\partial f_n(x)}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Annexe 5.

Diffusion d'une onde plane par un diffuseur sphérique isotrope suspendu dans une matrice isotrope

Nous présentons dans cette annexe, la résolution analytique du problème aux conditions limites propre à la diffusion d'une onde plane longitudinale puis transversale par un diffuseur sphérique isotrope, abordée dans la section 1.3.2 du Chapitre 1.

1.1. Déplacements et contraintes en coordonnées sphériques

Les composantes normales et tangentielles du champ de déplacement \mathbf{u} et du champ de contrainte $\bar{\sigma}$ (équations (9) et (8)) s'expriment en fonction des potentiels scalaires $\phi(r, \theta, \varphi)$, $\psi(r, \theta, \varphi)$ et $\chi(r, \theta, \varphi)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\phi + \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \right) + (k^T)^2 r \psi, \\
 u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\phi + \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \right) + \frac{(k^T)^2}{\sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}, \\
 u_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\phi + \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \right) - (k^T)^2 \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \\
 \sigma_{rr} &= -\lambda(k^L)^2 \phi + 2\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\phi + \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \right) + (k^T)^2 \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \right), \\
 \sigma_{r\theta} &= \mu \left(2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\phi + \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \right) \right) + (k^T)^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right) \right), \\
 \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\phi + \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \right) \right) + (k^T)^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\chi}{r} \right) \right) \right).
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

1.2. Paramètres du problème de diffusion

Les amplitudes modales des potentiels scalaires (15) et (25) sont solutions des systèmes matriciels (17), (18) ou (27). Sont explicités dans cette section, les paramètres de ces systèmes. Nous rappelons en préambule, les expressions des dérivées des fonctions de Bessel et de Hankel sphériques [80] :

$$j'_n(k_i^j a) = n \frac{j_n(k_i^j a)}{k_i^j a} - j_{n+1}(k_i^j a), \tag{A.13}$$

$$h_n^{(1)'}(k_i^j a) = n \frac{h_n^{(1)}(k_i^j a)}{k_i^j a} - h_{n+1}^{(1)}(k_i^j a),$$

avec $i = 0$ ou 1 , et $j = L$ ou T .

1.2.1. Onde incidente longitudinale

Pour une onde incidente longitudinale, les coefficients de la matrice P et du vecteur S des systèmes (17) et (18) sont donnés par :

$$\begin{aligned}
P_{11}(a) &= (k_0^L a) h_n^{(1)'}(k_0^L a), & p_{31}(a) &= \left((k_0^T a)^2 - 2n(n+1) \right) h_n^{(1)}(k_0^L a) \\
& & & + 4(k_0^L a) h_n^{(1)'}(k_0^L a), \\
P_{12}(a) &= n(n+1) h_n^{(1)}(k_0^T a), & P_{32}(a) &= 2n(n+1) \left((k_0^T a) h_n^{(1)'}(k_0^T a) - h_n^{(1)}(k_0^T a) \right), \\
P_{13}(a) &= -(k_1^L a) j_n'(k_1^L a), & P_{33}(a) &= \frac{\mu_1}{\mu_0} \left((k_1^T a)^2 - 2n(n+1) \right) j_n(k_1^L a) \\
& & & + 4(k_1^L a) j_n'(k_1^L a), \\
P_{14}(a) &= -n(n+1) j_n(k_1^T a), & P_{34}(a) &= 2n(n+1) \frac{\mu_1}{\mu_0} \left(-(k_1^T a) j_n'(k_1^T a) + j_n(k_1^T a) \right), \\
P_{21}(a) &= h_n^{(1)}(k_0^L a), & P_{41}(a) &= 2 \left(-(k_0^L a) h_n^{(1)'}(k_0^L a) + h_n^{(1)}(k_0^L a) \right), \\
P_{22}(a) &= (k_0^T a) h_n^{(1)'}(k_0^T a) + h_n^{(1)}(k_0^T a), & P_{42}(a) &= \left((k_0^T a)^2 - 2(n^2 + n - 1) \right) h_n^{(1)}(k_0^T a) \\
& & & + 2(k_0^T a) h_n^{(1)'}(k_0^T a), \\
P_{23}(a) &= -j_n(k_1^L a), & P_{43}(a) &= 2 \frac{\mu_1}{\mu_0} \left((k_1^L a) j_n'(k_1^L a) - j_n(k_1^L a) \right), \\
P_{24}(a) &= -(k_1^T a) j_n'(k_1^T a) - j_n(k_1^T a), & P_{44}(a) &= -\frac{\mu_1}{\mu_0} \left((k_1^T a)^2 - 2(n^2 + n - 1) \right) j_n(k_1^T a) \\
& & & + 2(k_1^T a) j_n'(k_1^T a),
\end{aligned} \tag{A.14.1}$$

$$\begin{aligned}
S_1(a) &= -(k_0^L a) j_n'(k_0^L a), & S_3(a) &= \left((k_0^T a)^2 - 2n(n+1) \right) j_n(k_0^L a) + 4(k_0^L a) j_n'(k_0^L a), \\
S_2(a) &= -j_n(k_0^L a), & S_4(a) &= 2 \left((k_0^L a) j_n'(k_0^L a) - j_n(k_0^L a) \right).
\end{aligned} \tag{A.14.2}$$

1.2.2. Onde incidente transversale

Pour une onde incidente transversale, les coefficients de la matrice p et du vecteur s du système (27) associé à la diffusion dans le plan, sont donnés par :

$$\begin{aligned}
p_{11}(a) &= (k_0^\perp a) h_n^{(1)'}(k_0^\perp a), & p_{31}(a) &= ((k_0^T a)^2 - 2n(n+1)) h_n^{(1)}(k_0^\perp a) + \\
& & & 4(k_0^\perp a) h_n^{(1)'}(k_0^\perp a), \\
p_{12}(a) &= n(n+1) h_n^{(1)}(k_0^T a), & p_{32}(a) &= 2n(n+1) \left(h_n^{(1)}(k_0^T a) - (k_0^T a) h_n^{(1)'}(k_0^T a) \right), \\
p_{13}(a) &= -(k_1^\perp a) j_n'(k_1^\perp a), & p_{33}(a) &= -\frac{\mu_1}{\mu_0} \left(((k_1^T a)^2 - 2n(n+1)) j_n(k_1^\perp a) \right. \\
& & & \left. + 4(k_1^\perp a) j_n'(k_1^\perp a) \right), \\
p_{14}(a) &= -n(n+1) j_n(k_1^T a), & p_{34}(a) &= 2n(n+1) \frac{\mu_1}{\mu_0} \left((k_1^T a) j_n'(k_1^T a) - j_n(k_1^T a) \right), \\
p_{21}(a) &= h_n^{(1)}(k_0^\perp a), & p_{41}(a) &= 2 \left(h_n^{(1)}(k_0^\perp a) - (k_0^\perp a) h_n^{(1)'}(k_0^\perp a) \right), \\
p_{22}(a) &= (k_0^T a) h_n^{(1)'}(k_0^T a) + h_n^{(1)}(k_0^T a), & p_{42}(a) &= \left((k_0^T a)^2 - 2(n^2 + n - 1) \right) h_n^{(1)}(k_0^T a) \\
& & & + 2(k_0^T a) h_n^{(1)'}(k_0^T a), \\
p_{23}(a) &= -j_n(k_1^\perp a), & p_{43}(a) &= 2 \frac{\mu_1}{\mu_0} \left((k_1^\perp a) j_n'(k_1^\perp a) - j_n(k_1^\perp a) \right), \\
p_{24}(a) &= -\left((k_1^T a) j_n'(k_1^T a) + j_n(k_1^T a) \right), & p_{44}(a) &= -\frac{\mu_1}{\mu_0} \left(((k_1^T a)^2 - 2(n^2 + n - 1)) j_n(k_1^T a) \right. \\
& & & \left. + 2(k_1^T a) j_n'(k_1^T a) \right),
\end{aligned} \tag{A.15.1}$$

$$\begin{aligned}
s_1(a) &= -n(n+1) j_n(k_0^T a), & s_3(a) &= -2n(n+1) \left(j_n(k_0^T a) - (k_0^T a) j_n'(k_0^T a) \right), \\
s_2(a) &= -\left((k_0^T a) j_n'(k_0^T a) \right. & s_4(a) &= -\left(((k_0^T a)^2 - 2(n^2 + n - 1)) j_n(k_0^T a) \right. \\
& \left. + j_n(k_0^T a) \right), & & \left. + 2(k_0^T a) j_n'(k_0^T a) \right).
\end{aligned} \tag{A.15.2}$$

Les coefficients de la matrice X et du vecteur v du système (27) associé à la diffusion hors plan sont donnés par :

$$\begin{aligned}
X_{11}(a) &= -(k_0^T a) h_n^{(1)}(k_0^T a), & X_{21}(a) &= -(k_0^T a) \left((k_0^T a) h_n^{(1)'}(k_0^T a) - h_n^{(1)}(k_0^T a) \right), \\
X_{12}(a) &= (k_1^T a) j_n(k_1^T a), & X_{22}(a) &= (k_1^T a) \frac{\mu_1}{\mu_0} \left((k_1^T a) j_n'(k_1^T a) - j_n(k_1^T a) \right),
\end{aligned} \tag{A.15.3}$$

$$v_1(a) = (k_0^T a) j_n(k_0^T a), \quad v_2(a) = -(k_0^T a) \left((k_0^T a) j'_n(k_0^T a) - j_n(k_0^T a) \right). \quad (\text{A.15.4})$$

1.2.3. Onde incidente longitudinale ou transversale : formalisme général

Notons qu'à l'instar de Brill *et al.* [33], nous pouvons réécrire les systèmes matriciels (18) et (27), respectivement pour les incidences longitudinale (L) et transversale (T), sous une forme généralisée :

$$\begin{pmatrix} P_{11}(a) & P_{12}(a) & P_{13}(a) & P_{14}(a) \\ P_{21}(a) & P_{22}(a) & P_{23}(a) & P_{24}(a) \\ P_{31}(a) & P_{32}(a) & P_{33}(a) & P_{34}(a) \\ P_{41}(a) & P_{42}(a) & P_{43}(a) & P_{44}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_n^{Lk} \\ T_n^{Tk} \\ C_n^{Lk} \\ D_n^{Tk} \end{pmatrix} = S_k = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\text{Re}\{P_{11}(a)\} = S_1 \\ -\text{Re}\{P_{21}(a)\} = S_2 \\ -\text{Re}\{P_{31}(a)\} = S_3 \\ -\text{Re}\{P_{41}(a)\} = S_4 \end{pmatrix} & \text{si } k = L, \\ \begin{pmatrix} -\text{Re}\{P_{12}(a)\} = s_1 \\ -\text{Re}\{P_{22}(a)\} = s_2 \\ -\text{Re}\{P_{32}(a)\} = s_3 \\ -\text{Re}\{P_{42}(a)\} = s_4 \end{pmatrix} & \text{si } k = T. \end{cases} \quad (\text{A.16.1})$$

Dans le cas de l'onde incidente T, on remarque que la matrice P se substitue alors à la matrice p . Le système d'équations hors plan de la relation (27) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} X_{11}(a) & X_{12}(a) \\ d_{21}(a) & d_{22}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_n^{TT} \\ d_n^{TT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{Re}\{X_{11}(a)\} = v_1(a) \\ -\text{Re}\{d_{21}(a)\} = d_2(a) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.16.2})$$

Les coefficients d_{21} , d_{22} et d_2 s'écrivent respectivement en fonction de X_{21} , X_{22} et v_2 comme suit :

$$d_{21}(a) = \frac{X_{21}(a)}{(k_0^T a)}, \quad d_{22}(a) = \frac{X_{22}(a)}{(k_1^T a)}, \quad \text{et } d_2(a) = \frac{v_2(a)}{(k_0^T a)}. \quad (\text{A.16.3})$$

1.3. Champs de déplacement et de contrainte en fonction des amplitudes modales

Écrivons les champs de déplacement et de contrainte en fonction des coefficients de la matrice P et du vecteur S pour une onde incidente longitudinale (équations (A.14.1) et (A.14.2)), et en fonction de coefficients des matrices p et X , et de ceux des vecteurs s et v pour une onde incidente transversale (équations (A.15.1)-(A.15.4)).

1.3.1. Onde incidente longitudinale

À l'aide des équations (A.12), (15), (17) et (18), nous montrons que les champs de déplacement $\mathbf{u}^{(j)}(r, \theta)$ et de contrainte $\bar{\sigma}^{(j)}(r, \theta)$ dans la matrice ($j = 0$) ou l'inclusion ($j = 1$), prennent les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} u_r^{(j)}(r, \theta) &= -\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{2}} (2n+1) P_n(\cos \theta) u_{rn}^{(j)}(r), \\ u_\theta^{(j)}(r, \theta) &= \frac{\sin \theta}{r} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{2}} (2n+1) (P_n(\cos \theta))' u_{\theta n}^{(j)}(r), \\ \sigma_{rr}^{(j)}(r, \theta) &= -\frac{\mu_0}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{2}} (2n+1) P_n(\cos \theta) \sigma_{rrn}^{(j)}(r), \\ \sigma_{r\theta}^{(j)}(r, \theta) &= -\frac{\mu_0 \sin \theta}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{2}} (2n+1) (P_n(\cos \theta))' \sigma_{r\theta n}^{(j)}(r), \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} u_{rn}^{(1)}(r) &= P_{13}(r) C_n^{\text{LL}} + P_{14}(r) D_n^{\text{TL}}, \\ u_{rn}^{(0)}(r) &= -P_{11}(r) T_n^{\text{LL}} - P_{12}(r) T_n^{\text{TL}} + S_1(r), \\ u_{\theta n}^{(1)}(r) &= P_{23}(r) C_n^{\text{LL}} + P_{24}(r) D_n^{\text{TL}}, \\ u_{\theta n}^{(0)}(r) &= -P_{21}(r) T_n^{\text{LL}} - P_{22}(r) T_n^{\text{TL}} + S_2(r), \\ \sigma_{rrn}^{(1)}(r) &= P_{33}(r) C_n^{\text{LL}} + P_{34}(r) D_n^{\text{TL}}, \\ \sigma_{rrn}^{(0)}(r) &= -P_{31}(r) T_n^{\text{LL}} - P_{32}(r) T_n^{\text{TL}} + S_3(r), \\ \sigma_{r\theta n}^{(1)}(r) &= P_{43}(r) C_n^{\text{LL}} + P_{44}(r) D_n^{\text{TL}}, \\ \sigma_{r\theta n}^{(0)}(r) &= -P_{41}(r) T_n^{\text{LL}} - P_{42}(r) T_n^{\text{TL}} + S_4(r), \end{aligned} \tag{A.17}$$

où $(P_n(\cos \theta))'$ désigne la dérivée de $P_n(\cos \theta)$ par rapport à $\cos \theta$. Les amplitudes modales $(T_n^{\text{LL}}, T_n^{\text{TL}}, C_n^{\text{LL}}, D_n^{\text{TL}})$ sont solutions des systèmes (17) et (18).

1.3.2. Onde incidente transversale

À l'aide des équations (A.12), (25) et (27), nous montrons que les champs de déplacement $\mathbf{u}^{(j)}(r, \theta)$ et de contrainte $\bar{\sigma}^{(j)}(r, \theta)$ dans la matrice ($j = 0$) ou l'inclusion ($j = 1$), prennent les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} u_r^{(j)}(r, \theta, \varphi) &= \frac{\cos \varphi}{r} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta) u_{rn}^{(j)}(r), \\ u_\theta^{(j)}(r, \theta, \varphi) &= -\frac{\cos \varphi \sin \theta}{r} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} (P_n^1(\cos \theta))' u_{\theta n}^{(j)}(r), \\ \sigma_{rr}^{(j)}(r, \theta, \varphi) &= -\frac{\mu_0 \cos \varphi}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} P_n^1(\cos \theta) \sigma_{rrn}^{(j)}(r), \\ \sigma_{r\theta}^{(j)}(r, \theta, \varphi) &= -\frac{\mu_0 \cos \varphi \sin \theta}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} (P_n^1(\cos \theta))' \sigma_{r\theta n}^{(j)}(r), \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} u_{rn}^{(1)}(r) &= p_{13}(r) C_n^{\text{LT}} + p_{14}(r) D_n^{\text{TT}}, \\ u_{rn}^{(0)}(r) &= -p_{11}(r) T_n^{\text{LT}} - p_{12}(r) T_n^{\text{TT}} + s_1(r), \\ u_{\theta n}^{(1)}(r) &= p_{23}(r) C_n^{\text{LT}} + p_{24}(r) D_n^{\text{TT}} - \xi X_{12}(r) e_n^{\text{TT}}, \\ u_{\theta n}^{(0)}(r) &= -p_{21}(r) T_n^{\text{LT}} - p_{22}(r) T_n^{\text{TT}} + s_2(r) - \xi (X_{11}(r) t_n^{\text{TT}} - v_1(r)), \\ \sigma_{rrn}^{(1)}(r, \theta, \varphi) &= p_{33}(r) C_n^{\text{LT}} + p_{34}(r) D_n^{\text{TT}}, \\ \sigma_{rrn}^{(0)}(r, \theta, \varphi) &= -p_{31}(r) T_n^{\text{LT}} - p_{32}(r) T_n^{\text{TT}} + s_3(r), \\ \sigma_{r\theta n}^{(1)}(r, \theta, \varphi) &= p_{43}(r) C_n^{\text{LT}} + p_{44}(r) D_n^{\text{TT}} - \xi d_{22}(r) t_n^{\text{TT}}, \\ \sigma_{r\theta n}^{(0)}(r, \theta, \varphi) &= -p_{41}(r) T_n^{\text{LT}} - p_{42}(r) T_n^{\text{TT}} + s_4(r) - \xi (d_{21}(r) t_n^{\text{LT}} - d_2(r)), \end{aligned} \tag{A.18}$$

où $(P_n^1(\cos \theta))'$ désigne la dérivée de $P_n^1(\cos \theta)$ par rapport à $\cos \theta$ et $\xi = \frac{i P_n^1(\cos \theta)}{\sin^2 \theta (P_n^1(\cos \theta))'}$. Les

amplitudes modales $(T_n^{\text{TT}}, T_n^{\text{LT}}, C_n^{\text{LT}}, D_n^{\text{TT}}, t_n^{\text{TT}}, d_n^{\text{TT}})$ sont solutions des systèmes (27).

1.4. Relation entre coefficients de diffusion

Les différentes modélisations de la littérature diffèrent les unes des autres par la définition des potentiels scalaires. Dans cette section, nous établissons les relations entre les amplitudes modales considérées dans ce manuscrit (équations (15) et (25)) et celles des travaux de Chekroun [26] et de Lepert [12]. La définition du champ de déplacement en fonction des trois potentiels scalaires (équation (10)) est commune aux trois études. Le Tableau 6 récapitule l'ensemble des résultats.

Potentiels courants (éqs.(15) et (25))	
Incidence longitudinale (L)	$\begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \psi_0 \\ \chi_0 \\ \Phi_1 \\ \psi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \begin{pmatrix} (j_n(k_0^L r) + T_n^{LL} h_n^{(1)}(k_0^L r)) P_n(\cos \theta) \\ T_n^{TL} h_n^{(1)}(k_0^T r) P_n^1(\cos \theta) \\ 0 \\ C_n^{LL} j_n(k_1^L r) P_n(\cos \theta) \\ D_n^{TL} j_n(k_1^T r) P_n^1(\cos \theta) \\ 0 \end{pmatrix}$
Incidence transversale (T)	$\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \chi_0 \\ \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \psi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix} = - \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \begin{pmatrix} (j_n(k_0^T r) + T_n^{TT} h_n^{(1)}(k_0^T r)) \cos \varphi \\ \frac{i}{k_0^T} ((j_n(k_0^T r) + t_n^{TT} h_n^{(1)}(k_0^T r)) \sin \varphi) \\ T_n^{LT} h_n^{(1)}(k_0^L r) \cos \varphi \\ C_n^{LT} j_n(k_1^L r) \cos \varphi \\ D_n^{TT} j_n(k_1^T r) \cos \varphi \\ d_n^{TT} \frac{i}{k_1^T} j_n(k_1^T r) \sin \varphi \end{pmatrix} P_n^1(\cos \theta)$
Potentiels utilisés par Chekroun et Lepert	
Incidence longitudinale (L)	$\begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \psi_0 \\ \chi_0 \\ \Phi_1 \\ \psi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \begin{pmatrix} \frac{1}{ik_0^T} (j_n(k_0^L r) + A_n^L h_n^{(1)}(k_0^L r)) \\ \frac{1}{ik_0^T} (B_n^L h_n^{(1)}(k_0^T r)) \\ 0 \\ \frac{1}{ik_1^L} (C_n^L j_n(k_1^L r)) \\ \frac{1}{ik_1^T} (D_n^L j_n(k_1^T r)) \\ 0 \end{pmatrix} P_n(\cos \theta)$
Incidence transversale (T)	$\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \chi_0 \\ \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \psi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \begin{pmatrix} \frac{i(j_n(k_0^T r) + B_n^T h_n^{(1)}(k_0^T r) \cos \varphi)}{k_0^T} \\ \left(\frac{i}{k_0^T}\right)^2 (j_n(k_0^T r) + C_n^T h_n^{(1)}(k_0^T r) \sin \varphi) \\ \frac{i A_n^T h_n^{(1)}(k_0^L r) \cos \varphi}{k_0^T} \\ \frac{i D_n^T j_n(k_1^L r) \cos \varphi}{k_1^L} \\ \frac{i E_n^T j_n(k_1^T r) \cos \varphi}{k_1^T} \\ \left(\frac{i}{k_1^T}\right)^2 F_n^T j_n(k_1^T r) \sin \varphi \end{pmatrix} P_n^1(\cos \theta)$

Tableau 6. Champs de potentiel utilisés dans cette étude (2 premières lignes) et dans les travaux de Chekroun [26] et de Lepert [12] (2 dernières lignes), pour les incidences L et T.

Notons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 T_n^{LL} &= A_n^L, \\
 T_n^{TL} &= - \left(\frac{k_0^L}{k_0^T} \right) B_n^L, \\
 T_n^{TT} &= B_n^T, \\
 T_n^{LT} &= - \left(\frac{k_0^T}{k_0^L} \right) A_n^T, \\
 T_n^{LT} T_n^{TL} &= B_n^L A_n^T, \\
 k_0^{T^2} &= \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right) k_0^{L^2}.
 \end{aligned}
 \tag{A.19}$$

Annexe 6.

**Diffusion d'une onde plane par une population de diffuseurs sphériques
suspendus dans une matrice viscoélastique et isotrope**

1.1. Limite quasi-statique de la célérité de phase longitudinale effective

Dans le cadre du modèle de Luppé, Conoir et Norris [23], l'expression de la limite quasi-statique de la célérité de phase longitudinale de l'onde cohérente se propageant au sein d'une population de sphères solides (1) suspendues dans une matrice solide (0) est donnée par :

$$\left(\frac{c_0^L}{c_{QS}^L}\right)^2 = 1 - \phi \left((1 - \tilde{\rho}) + \frac{\lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1 - \lambda_0 - \frac{2}{3}\mu_0}{\frac{4}{3}\mu_0 + \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1} - \frac{20\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}{9\lambda_0\mu_0 + 6\lambda_0\mu_1 + 16\mu_0\mu_1 + 14\mu_0^2} \right) - \phi^2 \left(\Delta_2' - \frac{\Delta_2''}{\lambda_0 + \mu_0} \right) \quad (\text{A.20})$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta_2' = & -\frac{2}{3}(1 - \tilde{\rho})^2 - \frac{3680}{7} \left(\frac{\mu_0(\mu_0 - \mu_1)}{9\lambda_0\mu_0 + 6\lambda_0\mu_1 + 16\mu_0\mu_1 + 14\mu_0^2} \right)^2 \\ & + (1 - \tilde{\rho}) \left(-\frac{\lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1 - \lambda_0 - \frac{2}{3}\mu_0}{\frac{4}{3}\mu_0 + \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1} + 44 \frac{\mu_0(\mu_0 - \mu_1)}{9\lambda_0\mu_0 + 6\lambda_0\mu_1 + 16\mu_0\mu_1 + 14\mu_0^2} \right) \\ & + 40 \left(\frac{\lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1 - \lambda_0 - \frac{2}{3}\mu_0}{\frac{4}{3}\mu_0 + \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1} \right) \left(\frac{\mu_0(\mu_0 - \mu_1)}{9\lambda_0\mu_0 + 6\lambda_0\mu_1 + 16\mu_0\mu_1 + 14\mu_0^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2'' = & -\frac{2}{3}(\lambda_0 + 4\mu_0)(1 - \tilde{\rho})^2 - \frac{24}{7}(\lambda_0 + 2\mu_0) \left(90 \frac{\mu_0^2}{\lambda_0 + 2\mu_0} + 50\mu_0 \right. \\ & \left. + 35(\lambda_0 + 2\mu_0) \right) \frac{\mu_0(\mu_0 - \mu_1)^2}{(9\lambda_0\mu_0 + 6\lambda_0\mu_1 + 16\mu_0\mu_1 + 14\mu_0^2)^2} + (1 - \tilde{\rho}) \\ & + \frac{16(2\lambda_0 + 7\mu_0)(1 - \tilde{\rho})\mu_0(\mu_0 - \mu_1)}{9\lambda_0\mu_0 + 6\lambda_0\mu_1 + 16\mu_0\mu_1 + 14\mu_0^2} \end{aligned}$$

et :

$$\tilde{\rho} = \rho_1/\rho_0.$$

1.1.1. Cas particulier du silicone poreux

Dans le cas du silicone poreux ($\mu_1 = 0$, $\lambda_0 \gg \lambda_1$, $\rho_0 \gg \rho_1$), la relation (A.3.7.2) se simplifie avec :

$$\begin{aligned} \Delta'_2(\mu_1 = 0) (\equiv Y'_2) &= -\frac{2}{3}(1 - \tilde{\rho})^2 - \frac{3680}{7} \left(\frac{\mu_0}{9\lambda_0 + 14\mu_0} \right)^2 \\ &+ (1 - \tilde{\rho}) \left(-\frac{3\lambda_1 - 3\lambda_0 - 2\mu_0}{4\mu_0 + 3\lambda_1} + \frac{44\mu_0}{9\lambda_0 + 14\mu_0} \right) \\ &+ \left(\frac{40\mu_0}{9\lambda_0 + 14\mu_0} \right) \left(\frac{3\lambda_1 - 3\lambda_0 - 2\mu_0}{4\mu_0 + 3\lambda_1} \right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta''_2(\mu_1 = 0) (\equiv Y''_2) &= -\frac{2}{3}(\lambda_0 + 4\mu_0)(1 - \tilde{\rho})^2 \\ &- \frac{24}{7}(\lambda_0 + 2\mu_0) \left(90 \frac{\mu_0^2}{\lambda_0 + 2\mu_0} + 50\mu_0 + 35(\lambda_0 + 2\mu_0) \right) \frac{\mu_0}{9\lambda_0 + 14\mu_0} \\ &+ (1 - \tilde{\rho}) \left(1 + \frac{16\mu_0(2\lambda_0 + 7\mu_0)}{9\lambda_0 + 14\mu_0} \right). \end{aligned} \tag{A.21}$$

1.2. Limite quasi-statique des rigidités effectives longitudinales ML

Au premier ordre en concentration ϕ , les modèles d'A. K. Chatterjee *et al.* [81], Aristégui et Angel [46] et Luppé, Conoir et Norris [23], conduisent à la même expression de la limite quasi-statique de la rigidité effective longitudinale d'une population de sphères :

$$M^L = K + \frac{4}{3}\mu = (\lambda_0 + 2\mu_0) \left(1 + \phi \left(\frac{\lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1 - \lambda_0 - \frac{2}{3}\mu_0}{\frac{4}{3}\mu_0 + \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1} + \frac{20\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}{9\lambda_0\mu_0 + 6\lambda_0\mu_1 + 16\mu_0\mu_1 + 14\mu_0^2} \right) \right). \quad (\text{A.22})$$

1.3. Coefficient de Gaunt

Explicitons le coefficient de Gaunt G qui intervient dans les modèles de Linton et Martin [21] et de Luppé, Conoir et Norris [23]. Il est tel que [22] :

$$G(n, 0; \nu, 0; q) = S \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec :

$$S = \sqrt{\frac{(2n+1)(2\nu+1)(2q+1)}{4\pi}}$$

et :

$$\begin{pmatrix} n & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} (-1)^t t! \frac{\sqrt{(2t-2n)!(2t-2\nu)!(2t-2q)!}}{(t-n)!(t-\nu)!(t-q)!\sqrt{(2t+1)!}} & \text{si } \frac{n+\nu+q}{2} = t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Annexe 7.

Caractérisation et propriétés effectives du silicone poreux

1.1. Paramètres déterminants dans l'évolution de la célérité du son avec la porosité

La relation (41), permet de relier la célérité de phase longitudinale à la rigidité et à la masse volumique du matériau. Pour évaluer la contribution des paramètres (rigidité et masse volumique) sur la célérité effective du matériau poreux, nous présentons en Figure 40, ces paramètres en fonction de la porosité.

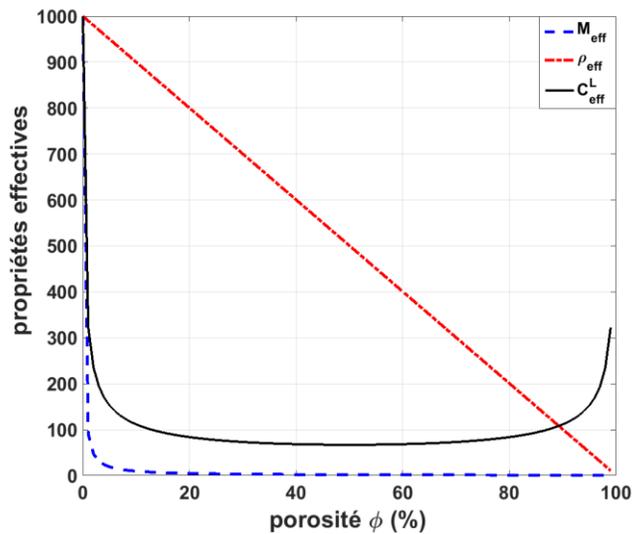


Figure 40. Propriétés effectives en basse fréquence (masse volumique, rigidité et célérité de phase) en fonction de la porosité.

Nous constatons en Figure 40, que l'évolution de la célérité est étroitement liée à l'évolution simultanée de la masse volumique et de la rigidité. En effet, la masse volumique linéairement décroissante de 10^3 mg/cm^3 à 1 mg/cm^3 , et décrite par la loi des mélanges est inversement proportionnelle au carré de la célérité du son, tandis que la rigidité du matériau proportionnelle au carré de la célérité chute exponentiellement entre 10^3 MPa et quasiment 10^{-1} MPa . En effet, la chute drastique et exponentielle de la rigidité est prédominante face à celle de la masse volumique, ce qui permet donc à la célérité de suivre la même tendance. Toutefois, lorsque la fraction volumique de pores est supérieure à 64% (fraction volumique correspondant à

l'empilement le plus compact d'un système désordonné compact [82], [83]), la courbe de célérité s'inverse pour atteindre 320m/s à $\phi = 100\%$ (soit la célérité du son dans l'air). Cette 2^e phase d'évolution de c_{eff} selon la porosité s'explique par le fait que M_{eff} sature à une valeur constante alors que ρ_{eff} continue de chuter linéairement entraînant ainsi une augmentation de la célérité de phase.

1.2. Propriétés effectives du silicone poreux avec différents modèles

Dans le but de montrer que les modèles WT et LCN en approximation basse fréquence et limite quasi-statique sont équivalentes pour le cas du silicone poreux. Nous présentons en Figure 41 (équivalente à celle de la Figure 17 complétée par les courbes de célérités issues des modèles effective et limite quasi-statique de WT), les différentes courbes de célérités selon la porosité.

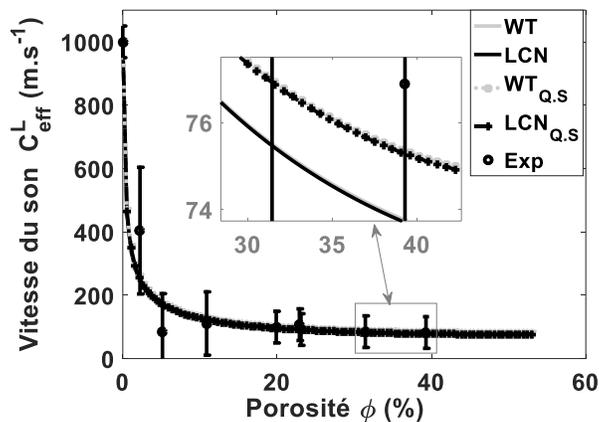


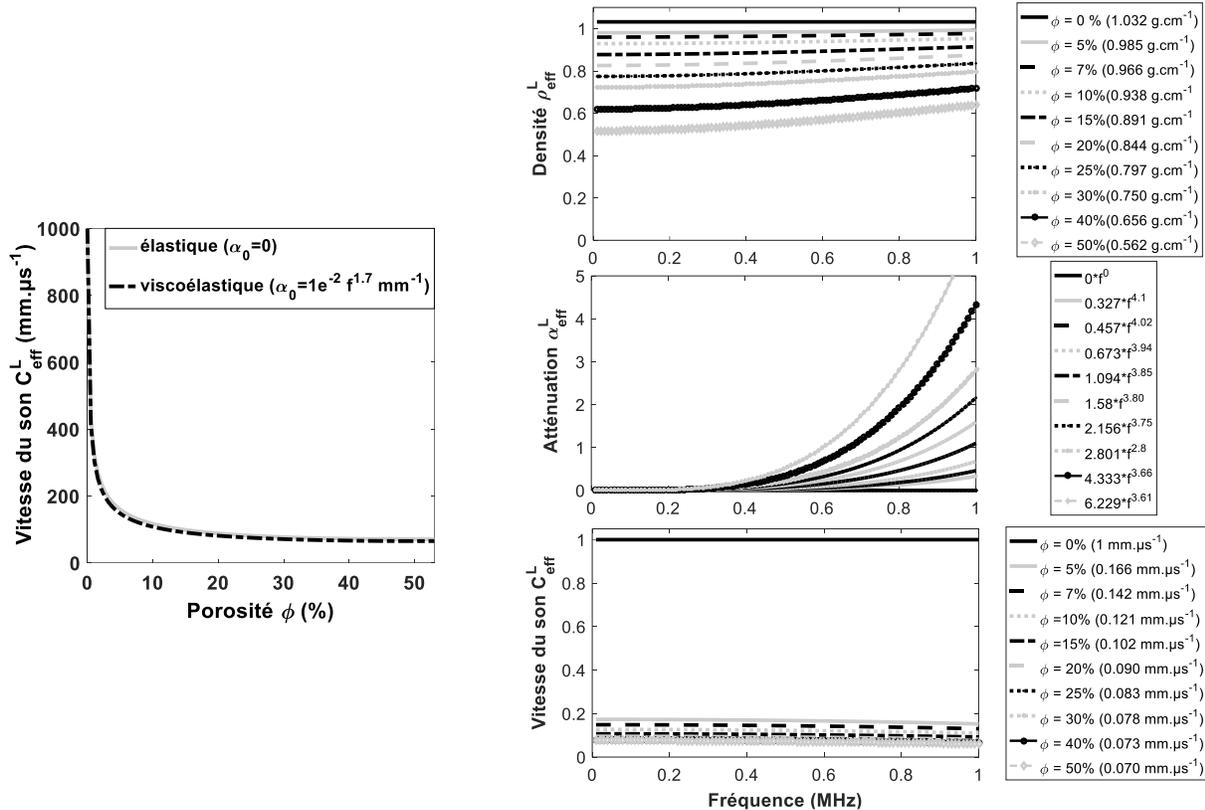
Figure 41. Comparaison des modèles WT et LCN des célérités effectives (à une fréquence de 500kHz) et célérités en limite quasi-statique, la taille des cavités est de 500 μm .

Nous pouvons constater que les quatre courbes de célérités du son se superposent. Sur le zoom de la Figure 41, nous pouvons observer (pour des ϕ très élevées) une différence négligeable qui augmente avec la porosité entre les modèles effectif et quasi-statique.

1.3. Prédiction des propriétés effectives du silicone poreux avec le modèle de WT

Sous l'hypothèse d'atténuation nulle dans le silicone pur, nous avons modélisé l'évolution des propriétés effectives (masse volumique, atténuation et célérité de phase) du silicone poreux pour différentes porosités sur une plage de fréquence comprise entre 0 à 1MHz. La pente \ddot{a} des

courbes de masse volumique et de la célérité de phase sont obtenues avec un fit de la fonction affine $g(x) = \ddot{a} f$, et l'atténuation avec un fit en loi de puissance de la fréquence f .



a) influence de l'atténuation de la matrice sur la célérité du son

b) propriétés effectives en fonction de la fréquence

Figure 42. Prédiction des propriétés effectives (ρ_{eff} , α_{eff} et c_{eff}) du silicone poreux à partir du modèle de diffusion multiple de Waterman et Truell.

Notons que les courbes de masses volumiques effectives pour les porosités 40% et 50% ne peuvent faire l'objet d'une interpolation par une fonction affine mais plutôt par une fonction qui évolue en puissance de la fréquence.

1.4. Influence du ratio entre les célérités L et T sur le coefficient de Poisson

Le coefficient ν peut s'écrire uniquement en fonction des rapports de célérités longitudinale et transversale du matériau comme suit :

$$\nu = \frac{1 - \left(\frac{c^T}{c^L}\right)^2}{2 + \left(\frac{c^T}{c^L}\right)^2} \quad (\text{A.24})$$

Dans le cas du silicone, nous avons étudiée l'influence du ratio $\frac{c^T}{c^L}$ sur la valeur du coefficient de Poisson en considérant que la célérité des ondes transversales dans le silicone est inférieure à 100m/s [57] et sachant que la célérité des ondes L dans le silicone pur est de 1000m/s.

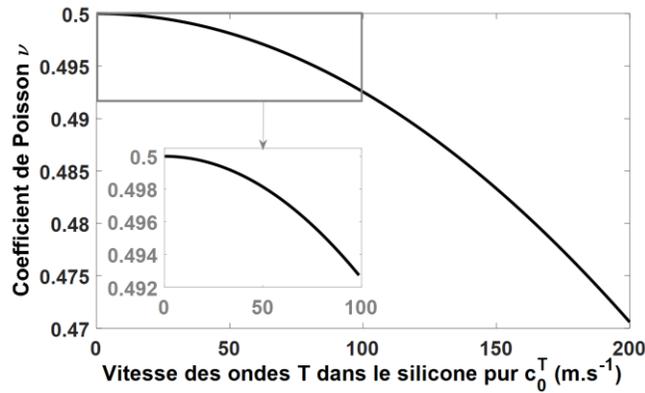


Figure 43. Coefficient de Poisson en fonction de la célérité transversale du silicone poreux comprise entre 0 et $\frac{c^L}{5}$ ($c^L = 1000\text{m/s}$).

Nous pouvons observer que le coefficient de Poisson est compris entre 0,492 et 0,5 pour des valeurs de célérité transversale comprises entre 0 et 100m/s.

1.5. Reproductibilité des mesures d'atténuation

Les mesures de reproductibilités sur des célérités de phase et d'atténuations ont été effectuées. Pour différentes fractions volumiques de pores, nous présentons sur la Figure 44 les résultats de reproductibilité des atténuations longitudinales et transversales, Ces derniers permettent de trouver une valeur moyenne de l'atténuation et d'estimer l'incertitude sur la mesure de cette valeur.

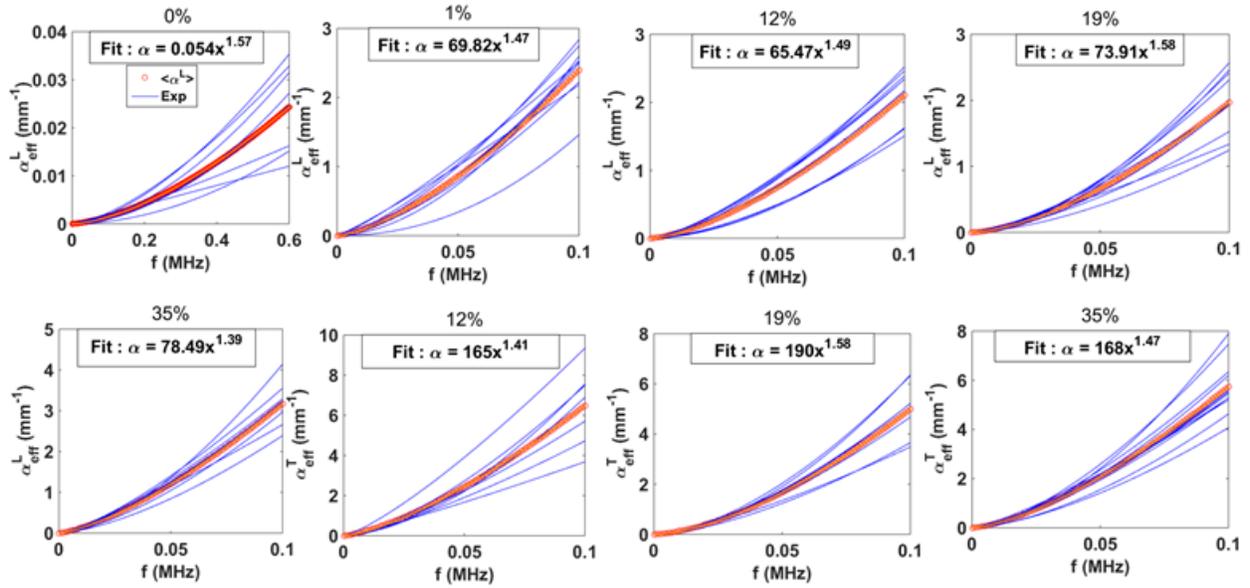


Figure 44. Reproductibilités des mesures d'atténuations longitudinale et transversale dans les nouveaux échantillons.

1.6. Récapitulatif de la caractérisation acoustique du silicone poreux

Sur la Figure 45 nous présentons les courbes expérimentales des célérités longitudinale et transversale dans le silicone poreux ainsi que les prédictions théoriques issues des modèles de Waterman et Truell. Sous la Figure 45, le tableau récapitulatif des mesures de célérités et d'atténuations des ondes longitudinales et transversales dans le silicone poreux.

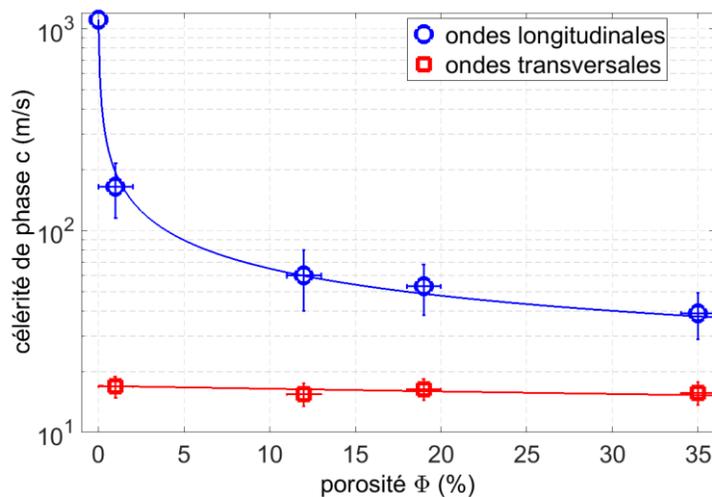


Figure 45. Évolutions des célérités longitudinale et transversale dans le silicone poreux (courbes expérimentales et modèles de Waterman et Truell).

Propriétés Porosités	Célérité L (m. s ⁻³)	Célérité T (m. s ⁻³)	Atténuation L (m. s ⁻³)	Atténuation T (m. s ⁻³)
0%	1030 ± 133	-	0,054 f ^{1,6}	-
1%	150 ± 95	20,7 ± 7,5	61 f ^{1,4}	-
12%	61 ± 6	15,7 ± 3,9	65 f ^{1,5}	165 f ^{1,4}
19%	56 ± 5	16 ± 3,2	74 f ^{1,6}	190 f ^{1,6}
35%	35 ± 5	11 ± 3,5	78 f ^{1,4}	168 f ^{1,5}

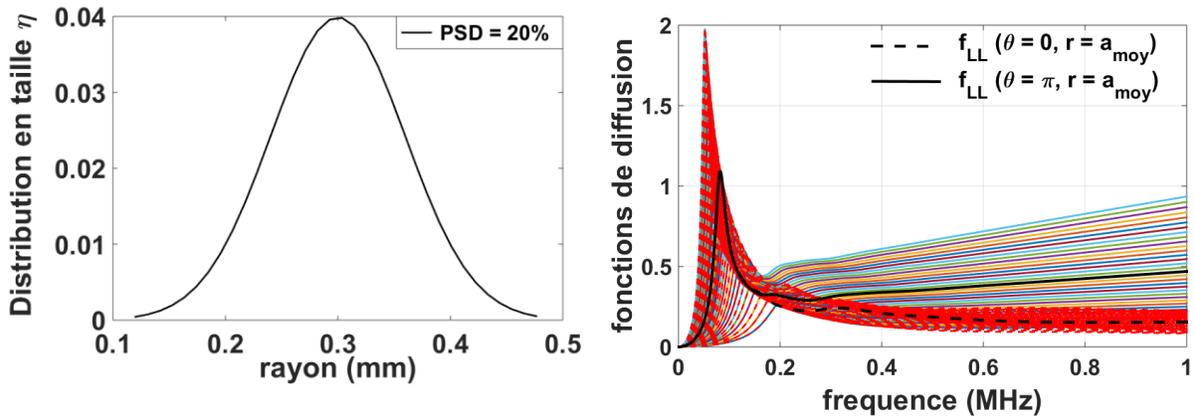
Tableau 7. Récapitulatif de la caractérisation du silicone poreux.

Annexe 8.

Prédiction des propriétés d'une suspension de microbilles de silicone poreux

1.1. Prédiction des fonctions de diffusion de microbilles de différentes tailles

Le modèle confirmant les observations quantitatives de l'atténuation effective en $e^{ik_{\text{eff}}d}$ présenté en partie b) de la Figure 26 a été obtenu en utilisant les paramètres décrit sur la Figure 46. On note un rayon moyen de l'ordre de $300\mu\text{m}$, une résonance marquée des fonctions de diffusion vers l'avant et rétrodiffusée autour de 100kHz pour chaque diffuseur, une fraction volumique de 8% et une polydispersité de 20% .



a) distribution gaussienne en taille de microbilles de silicone poreux

b) fonctions de diffusion rétrodiffusée et vers l'avant

Figure 46. Évolution de la distribution en taille des diffuseurs et des fonctions de diffusion pour toutes les tailles de diffuseurs.

1.2. Influence de la polydispersité

Nous reportons dans la Figure 47, l'évolution de l'atténuation acoustique d'une suspension de silicone poreux en fonction de la fréquence, dans le cadre du modèle de Waterman et Truell, avec dans un cas des microbilles considérées monodisperses, et dans un autre, des microbilles polydisperses. Nous pouvons ainsi observer l'influence de la polydispersité sur l'amplitude de l'atténuation. En effet, la fréquence de résonance reste la même alors que l'amplitude (plus faible

dans le cas polydisperse) et la largeur à mi-hauteur de l'atténuation (plus large dans le cas polydisperse) sont affectées par la polydispersité.

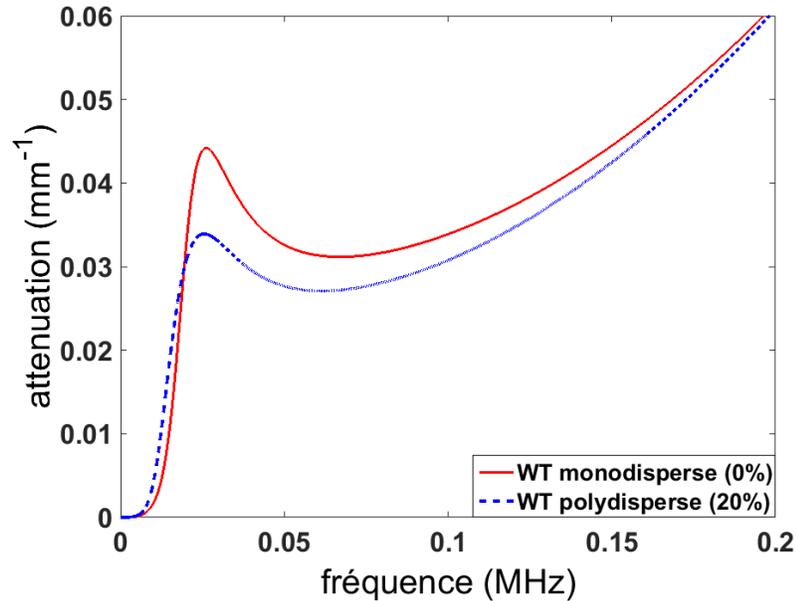


Figure 47. Atténuation en fonction de la fréquence de la suspension dans le cadre du modèle WT (en trait plein, billes monodisperses ; en traits pointillés, billes polydisperses).

1.3. Propriétés acoustiques effectives d'une suspension de microbilles dans l'agarose

Nous présentons sur la Figure 47 une simulation des propriétés effectives (atténuation, célérité de phase, indice de réfraction, et coefficients de transmission et de réflexion) d'une plaque composée d'une matrice d'Agarose comportant une distribution aléatoire de microbilles de silicone poreux de 250 μ m de rayon, une fraction volumique de 2,8%, une polydispersité de 20% et une porosité de microbilles de 30%. Ces simulations sont effectuées pour différents modèles d'homogénéisation (Foldy, WT, LM et LCN).

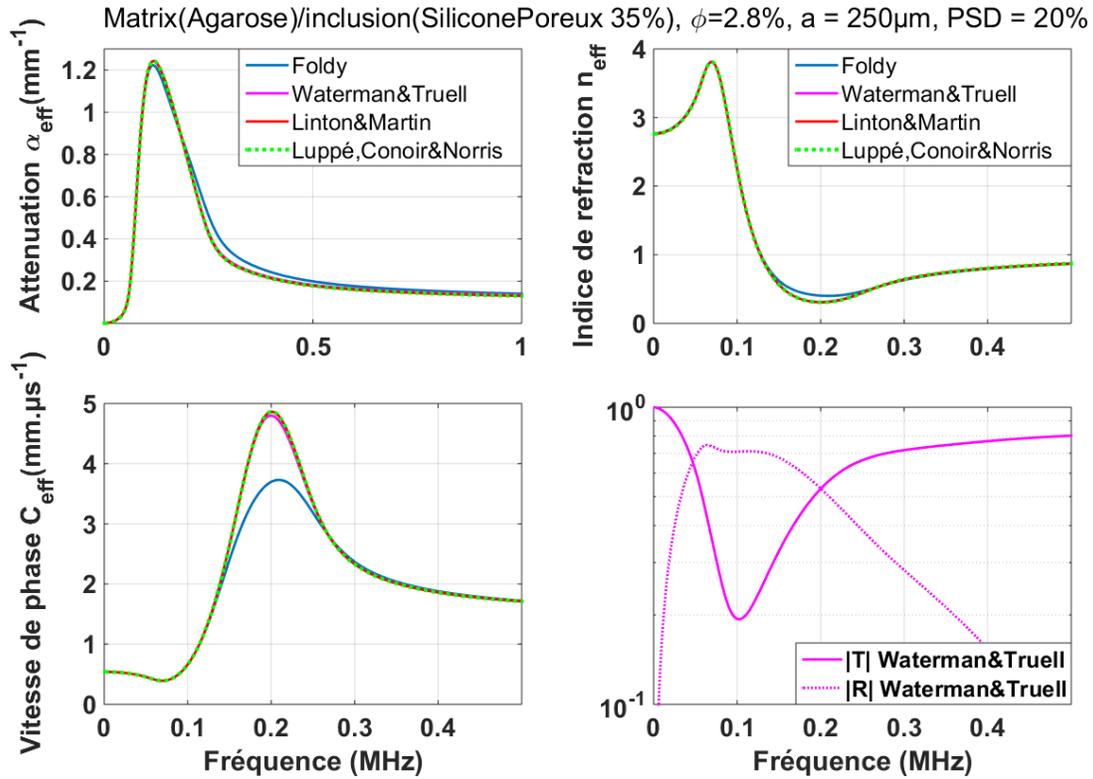


Figure 48. Modélisation des propriétés effectives de la suspension aléatoire de microbilles de silicone poreux dans une matrice Agarose.

À l'exception du modèle de Foldy (1^e ordre en concentration), les différents modèles (2^e ordre en concentration) correspondent parfaitement. Un trou de coefficient de transmission acoustique est observé aux alentours de 100kHz, correspondant à la résonance des microbilles.

Bibliographie

- [1] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Y. Zhu, Z. Yang, C. T. Chan, P. Sheng, "Locally Resonant Sonic Materials," *Science*, vol. 289, no. 5485, pp. 1734-1736, 2000.
- [2] J. Li, C. T. Chan, "Double-negative acoustic metamaterial," *Phys. Rev. E*, vol. 70, no. 5, p. 055602, 2004.
- [3] D. R. Smith, J. B. Pendry, M. C. K. Wiltshire, "Metamaterials and Negative Refractive Index," *Science*, vol. 305, no. 5685, pp. 788-792, 2004.
- [4] P. V. Parimi, W. T. Lu, P. Vodo, J. Sokoloff, J. S. Derov, S. Sridhar, "Negative Refraction and Left-Handed Electromagnetism in Microwave Photonic Crystals," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, no. 12, p. 127401, 2004.
- [5] T. Brunet, J. Leng, O. Mondain-Monval, "Soft Acoustic Metamaterials," *Science*, vol. 342, no. 323, 2013.
- [6] J. Mei, G. Ma, M. Yang, Z. Yang, W. Wen, P. Sheng, "Dark acoustic metamaterials as super absorbers for low-frequency sound," *Nat. Commun.*, vol. 3, p. 756, 2012.
- [7] V. G. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ," *Sov. Phys. Uspekhi*, vol. 10, no. 4, p. 509, 1968.
- [8] J. Li, K. H. Fung, Z. Y. Liu, P. Sheng, C. T. Chan, "Generalizing the Concept of Negative Medium to Acoustic Waves," in *Physics of Negative Refractive and Negative Index Materials*. Washington and Golden: Springer, 2007, pp. 183-215.
- [9] J. B. Pendry, "Negative refraction makes a perfect lens," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, no. 18, p. 3966, 2000.
- [10] J. Li, L. Fok, X. Yin, G. Bartal, Z. Zhang, "Experimental demonstration of an acoustic magnifying hyperlens," *Nat. Mater.*, vol. 8, no. 12, pp. 931-934, 2009.
- [11] H. Larabi, "Cristaux phononiques et métamatériaux acoustiques applications aux domaines du guidage, filtrage et de l'isolation phonique," 2011.
- [12] G. Lepert, "Étude des interactions élasto-acoustiques dans des métamatériaux formés d'inclusions résonnantes réparties aléatoirement," 2013.
- [13] G. Ma, P. Sheng, "Acoustic metamaterials: From local resonances to broad horizons," *Sci. Adv.*, vol. 2, no. 2, p. 11501595, 2016.
- [14] T. Brunet, A. Merlin, B. Mascaró, K. Zimny, J. Leng, O. Poncelet, C. Aristégui, O. Mondain-Monval, "Soft 3D acoustic metamaterial with negative index," *Nat. Mater.*, vol. 14, no. 4, pp. 384-388, 2015.
- [15] N. R. Paterson, "Seismic wave propagation in porous granular media," *Geophysics*, vol. 21, no. 3, pp.

691-714, 1956.

- [16] G. T. Kuster, M. N. Toksöz, "Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media: Part I. Theoretical formulations," *Geophysics*, vol. 39, no. 5, pp. 587-606, 1974.
- [17] L. L. Foldy, "The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers," *Phys. Rev.*, vol. 67, no. 3-4, p. 107, 1945.
- [18] M. Lax, "Multiple scattering of waves," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 23, no. 4, pp. 287-310, 1951.
- [19] P. C. Waterman, R. Truell, "Multiple scattering of waves," *J. Math. Phys.*, vol. 2, no. 4, pp. 512-537, 1961.
- [20] P. Lloyd, M. V. Berry, "Wave propagation through an assembly of spheres, IV. Relations between different multiple scattering theories," *Proc. Phys. Soc.*, vol. 91, no. 13, pp. 678-688, 1967.
- [21] C. M. Linton, P. A. Martin, "Multiple scattering by multiple spheres: a new proof of the Lloyd-Berry formula for the effective wavenumber," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 66, no. 5, pp. 1649-1668, 2006.
- [22] Y. L. Xu, "Fast evaluation of the gaunt coefficients," *Math. Comp.*, vol. 65, no. 216, pp. 1601-1612, 1996.
- [23] F. Luppé, J. M. Conoir, A. N. Norris, "Effective wave numbers for thermo-viscoelastic media containing random configurations of spherical scatterers," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 131, no. 1113, pp. 1113-1120, 2011.
- [24] D. Royer, E. Dieulesaint, *Ondes élastiques dans les solides, Tome 1 : propagation libre et guidée.*: MASSON, 1999.
- [25] P. C. Waterman, "New formulation of acoustic scattering," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 45, no. 6, pp. 1417-1429, 1969.
- [26] M. Chekroun, "Caractérisation mécanique des premiers centimètres du béton avec des ondes de surface," 2008.
- [27] J. Dubois, "Homogénéisation dynamique de milieux aléatoires en vue du dimensionnement de métamatériaux acoustiques," 2012.
- [28] A. Derode, A. Tourin, M. Fink, "Random multiple scattering of ultrasound. II. Is time reversal a self-averaging process?," *Phy. Rev. E*, vol. 64, no. 3, p. 036606, 2001.
- [29] C. F. Ying, R. Truell, "Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid," *J. Appl. Phys.*, vol. 27, no. 1086, pp. 1086-1097, 1956.
- [30] N. G. Einspruch, R. Truell, "Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical fluid obstacle in an elastic medium," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 32, no. 2, pp. 214-220, 1960.

- [31] G. C. Gaunaurd, H. Überall, "Theory of resonant scattering from spherical cavities in elastic and viscoelastic media," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 63, no. 6, pp. 1699-1712, 1978.
- [32] D. Brill, G. Gaunaurd, H. Überall, "Resonance theory of elastic shear-wave scattering from spherical fluid obstacles in solids," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 67, no. 2, pp. 414-424, 1980.
- [33] D. Brill, G. Gaunaurd, "Resonance theory of elastic waves ultrasonically scattered from an elastic sphere," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 81, no. 1, pp. 1-21, 1987.
- [34] R. E. Challis, J. S. Tebbutt, A. K. Holmes, "Equivalence between three scattering formulations for ultrasonic wave propagation in particulate mixtures," *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 31, no. 24, pp. 3481-3497, 1998.
- [35] S. M. Hasheminejad, N. Safari, "Acoustic scattering from viscoelastically coated spheres and cylinders in viscous fluids," *J. Sound Vib.*, vol. 280, no. 1, pp. 101-125, 2005.
- [36] C. Potel, M. Bruneau, *Acoustique générale. Équations différentielles et intégrales, solutions en milieux fluides et solides, applications*, TECHNOSUP ed.: Ellipses, 2006.
- [37] S. K. Kanaun, V. M. Levin, F. J. Sabina, "Propagation of elastic waves in composites with random set of spherical inclusions (effective medium approach)," *Wave Motion*, vol. 40, no. 1, pp. 69-88, 2004.
- [38] J. R. Allegra, S. A. Hawley, "Attenuation of sound in suspensions and emulsions: theory and experiments," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 51, no. 5B, pp. 1545-1564, 1971.
- [39] M. Eude, "Etude expérimentale de la propagation d'une onde acoustique dans un milieu atténuant en présence d'hétérogénéités," 2004.
- [40] T. Valier-Brasier, J. M. Conoir, F. Coulouvrat, J. L. Thomas, "Sound propagation in dilute suspensions of spheres: Analytical comparison between coupled phase model and multiple scattering theory," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 138, no. 4, pp. 2598-2612, 2015.
- [41] P. C. Waterman, "Matrix theory of elastic wave scattering," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 60, no. 3, pp. 567-580, 1976.
- [42] P. C. Waterman, "Symmetry, unitarity and geometry in electromagnetic scattering," *Phys. Rev. D*, vol. 3, no. 4, p. 825, 1971.
- [43] J. M. Conoir, A. N. Norris, "Effective wavenumbers and reflection coefficients for an elastic medium containing random configurations of cylindrical scatterers," *Wave Motion*, vol. 47, no. 3, pp. 183-197, 2010.
- [44] B. Mascaró, T. Brunet, O. Poncelet, C. Aristégui, "Impact of polydispersity on multipolar resonant scattering in emulsions," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 133, no. 4, pp. 1996-2003, 2013.

- [45] V. Leroy, A. Strybulevych, J. H. Page, M. G. Scanlon, "Influence of positional correlations on the propagation of waves in a complex medium with polydisperse resonant scatterers," *Phys. Rev. E*, vol. 83, no. 4, p. 046605, 2011.
- [46] C. Aristégui, Y. Angel, "Effective mass density and stiffness derived from P-wave multiple scattering," *Wave Motion*, vol. 44, no. 3, pp. 153-164, 2007.
- [47] G. C. Gaunaurd, H. Überall, "Resonant theory of the effective properties of perforated solids," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 71, no. 2, pp. 282-295, 1982.
- [48] M. Caleap, B. W. Drinkwater, P. D. Wilcox, "Effective dynamic constitutive parameters of acoustic metamaterials with random microstructure," *New J. Phys.*, vol. 14, no. 3, p. 033014, 2012.
- [49] V. Leroy, A. Strybulevych, J. H. Page, "Sound velocity and attenuation in bubbly gels measured by transmission experiments," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 123, no. 4, pp. 1931-1940, 2008.
- [50] M. L. Cowan, K. Beaty, J. H. Page, Z. Liu, P. Sheng, "Group velocity of acoustic waves in strongly scattering media: Dependence on the volume fraction of scatterers," *Phys. Rev. E*, vol. 58, no. 5, pp. 6626-6636, 1998.
- [51] M. Chekroun, L. Le Marrec, B. Lombard, J. Piraux, O. Abraham, "Comparison between a multiple scattering method and direct numerical simulations for elastic wave propagation in concrete, in Ultrasonic wave propagation in non homogeneous media," *Springer, Berlin Heidelberg*, vol. 128, pp. 317-327, 2009.
- [52] J. Dubois, C. Aristégui, O. Poncelet, "Réponse d'une structure chargée aléatoirement d'inclusions résonantes : application aux effets de type métamatériau," *CFA2010*, no. 10, 2010.
- [53] C. M. Sayers, R. L. Smith, "Ultrasonic velocity and attenuation in an epoxy matrix containing lead inclusions," *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 16, no. 7, p. 1189, 1983.
- [54] L. W. Hrubesh, "Aerogel applications," *J. Non-Cryst. Solids*, vol. 225, pp. 335-342, 1998.
- [55] J. Gross, J. Fricke, "Sound propagation in SiO₂ Aerogels," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 91, no. 4, pp. 2004-2006, 1992.
- [56] N. Stenger, M. Wilhelm, M. Wegener, "Experiments on Elastic Cloaking in Thin Plates," *Phy. Rev. Lett.*, vol. 108, no. 1, p. 014301, 2012.
- [57] V. Leroy, A. Bretagne, M. Fink, A. Tourin, "Design and characterization of bubble phononic crystals," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 95, no. 17, p. 171904, 2009.
- [58] Z. Haq D. Barby, "Low density porous cross-linked polymeric materials and their preparation and use as carriers for included liquids," 4522953, juin 11, 1985.

- [59] S. Raffy, "Synthèse de métamatériaux acoustique par voie microfluidique," 2014.
- [60] M. S. Silverstein, "Emulsion-templated Porous Polymers: A retrospective perspective," *Polymer*, vol. 55, no. 1, pp. 304-320, 2014.
- [61] K. Zimny, A. Merlin, A. Ba, C. Aristégui, T. Brunet, O. Mondain-Monval, "Soft Porous Silicone Rubber as Key Elements for the Realization of Acoustic Metamaterials," *Langmuir*, vol. 31, no. 10, pp. 3215-3221, 2015.
- [62] A. Ba, A. Kovalenko, C. Aristégui, O. Mondain-Monval, T. Brunet, "Soft porous silicone rubbers with ultra-low sound speeds in acoustic metamaterials," *Sci. Rep.*, no. 7, p. 40106, 2017.
- [63] J. Gross, G. Reichenauer, J. Fricke, "Mechanical Properties of SiO₂ Aerogels," *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 21, no. 9, p. 1447, 1988.
- [64] T. Lino, K. Nakamura, "Density Dependence of Acoustic Characteristics of silica Nanofoam," *Acoust. Sci. Technol.*, vol. 32, no. 4, pp. 132-136, 2011.
- [65] W. P. Mason, W. O. Baker, H. J. Mcskimin, J. H. Bepiss, "Measurement of Shear Elasticity and Viscosity of Liquids at Ultrasonic Frequencies," *Phys. Rev.*, vol. 75, no. 6, p. 936, 1949.
- [66] H. T. O'Neil, "Reflection and Refraction of Plane Shear Waves in Viscoelastic Media," *Phys. Rev.*, vol. 75, no. 6, p. 928, 1949.
- [67] I. Alig, D. Lellinger, J. Sulimma, S. Tadjbakhsh, "Ultrasonic shear wave reflection method for measurements of the viscoelastic properties of polymer films," *Rev. Sci. Instrum.*, vol. 68, no. 3, pp. 1536-1542, 1997.
- [68] P. Y. Longin, C. Verdier, M. Piau, "Dynamic shear reology of high molecular weight polydimethylsiloxanes: comparison of rheometry and ultrasound," *J. Nonnewtonian Fluid Mech.*, vol. 76, no. 1, pp. 213-232, 1998.
- [69] V. Leroy, K. M. Pitura, M. G. Scanlon, J. H. Page, "The complex shear modulus of dough over a wide frequency range," *J. Nonnewtonian Fluid Mech.*, vol. 165, no. 9, pp. 475-478, 2010.
- [70] E. L. Madsen, H. J. Sathoff, J. A. Zagzebski, "Ultrasonic shear wave properties of soft tissues and tidduelike materials," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 74, no. 1346, pp. 1346-1355, 1983.
- [71] V. Chokkalingam, B. Weidenhof, M. Krämer, S. Herminghaus, R. Seemann, W. F. Maier, "Template-free preparation of mesoporous silica spheres through optimized microfluidics," *ChemPhysChem*, vol. 11, no. 10, pp. 2091-2095, 2010.
- [72] A. Kovalenko, K. Zimny, B. Mascaro, T. Brunet, O. Mondain-Monval, "Tailoring of the porous structure of soft emulsion-templated polymer materials," *Soft Matter*, vol. 12, no. 23, pp. 5154-5163, 2016.

- [73] A. E. Mouhtadi, "Caractérisation Ultrasonore de Plaques Viscoélastiques Homogènes et Composites," 2011.
- [74] A. Bouakkaz, C. Cachard, G. Gimenez, "Évaluation de l'agar, matériau solide présentant des caractéristiques acoustiques équivalentes à celles de l'eau," *J. Phys. IV*, vol. 4, no. C5, pp. 1221-1224, 1994.
- [75] N. Leymarie, "Analyse du comportement viscoélastique de matériaux anisotropes par reconstruction de formes d'ondes," 2002.
- [76] M. Duranteau, T. Valier-Brasier, J. M. Conoir, R. Wunenburger, "Random acoustic metamaterial with a subwavelength dipolar resonance," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 139, no. 6, pp. 3341-3352, 2016.
- [77] D. Qin, Y. Xia, G. M. Whitesides, "Soft lithography for micro- and nanoscale patterning," *Nat. Protoc.*, vol. 5, no. 3, pp. 491-501, 2010.
- [78] S. M. Ivansson, "Numerical design of Alberich anechoic coatings with superellipsoidal cavities of mixed sizes," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 124, no. 4, pp. 1974-1984, 2008.
- [79] N. Fang, D. Xi, J. Xu, M. Ambati, W. Srituravanich, C. Sun, X. Zhang, "Ultrasonic metamaterials with negative modulus," *Nat. Mater.*, vol. 5, no. 6, pp. 452-456, 2006.
- [80] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and Mathematical tables.*: Courier Corporation, 1964.
- [81] A. K. Chatterjee, A. K. Mal, L. Knopoff, "Elastic moduli of two-component systems," *J. Geophys. Res.*, vol. 83, no. B4, pp. 1785-1792, 1978.
- [82] É. Guyon, J. P. Hulin, D. Bideau, *La matière en désordre.*: EDP Sciences, 2014.
- [83] G. Ceglia, "Élaboration et caractérisation de matériaux polymères poreux modèles à base d'émulsions contrôlées," 2011.
- [84] J. M. Williams, "Toroidal Microstructures form Water-in-Oil Emulsions," *Langmuir*, vol. 4, pp. 44-49, 1988.
- [85] J. F. Allard, *Propagation of sound in porous media.*: Springer, 1993.
- [86] A. J. Devaney, "Multiple scattering theory for discrete, elastic, random media," *J. Math. Phys.*, vol. 21, no. 11, pp. 2603-2611, 1980.
- [87] X. Zhang, Z. Liu, "Negative refraction of acoustic waves in two-dimensional phononic crystals," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 85, no. 2, pp. 341-343, 2004.
- [88] T. E. Gomez Alvarez-Arenas, F. R. Montero de Espinosa, M. Moner-Girona, E. Rodriguez, A. Roig, E. Molins, "Viscoelasticity of silica aerogels at ultrasonic frequencies," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 81, no. 7,

p. 1198, 2002.

- [89] G. Lepert, C. Aristégui, O. Poncelet, T. Brunet, C. Audoly, P. Parneix, "Determination of the effective mechanical properties of inclusionary materials using bulk elastic waves," *Journal of Physics: IOP Publishing*, vol. 498, no. 1, p. 012007, 2014.
- [90] C. G. Robertson, R. Bogoslovov, C. M. Roland, "Effect of structural arrest on Poisson's ratio in nanoreinforced elastomers," *Phys. Rev. E*, vol. 75, no. 5, p. 051403, 2007.
- [91] A. Menner, R. Powell, A. Bismarck, "Open Porous Polymer Foams via Inverse Emulsion Polymerization: Should the Definition of High Internal Phase (ratio) Emulsions Be Extended?," *Macromolecules*, vol. 39, no. 6, pp. 2034-2035, 2006.
- [92] A. Merlin, "Cinétiques de concentration de suspensions colloïdales par évaporation microfluidique : de la solution diluée aux cristaux colloïdaux," 2011.
- [93] L. Sanchis, A. Yanez, "Tree-dimensional acoustic lenses with axial symmetry," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 97, no. 5, p. 054103, 2010.
- [94] M. Kadic, T. Bückmann, R. Schittny, M. Wegener, "Metamaterials beyond electromagnetism," *Rep. Prog. Phys.*, vol. 76, no. 12, p. 126501, 2013.
- [95] J. Valentine, S. Zhang, T. Zentgraf, E. Ulin-Avila, D. A. Genov, G. Bartal, X. Zhang, "Three-dimensional optical metamaterial with a negative refractive index," *Nature*, vol. 455, no. 7211, pp. 376-379, 2008.

ÉTUDE DE LA TRANSMISSION ACOUSTIQUE DE MÉTAPLAQUES LOCALEMENT RÉSONANTES

Les matériaux acoustiques super absorbants, sub-longueur d'ondes et large bande, ouvrent de nouvelles perspectives prometteuses pour l'isolation sonore. Dans ce contexte, nous avons conçu et synthétisé des structures hétérogènes comportant des microbilles sphériques de silicone poreux « ultra-lentes », distribuées dans des matrices aqueuses ou élastomériques. Dans un premier temps, nous avons démontré pourquoi la vitesse du son est aussi basse dans les silicones poreux (<100 m/s) comparativement à celle de milieux homogènes (~1000 m/s). Ce fort contraste de propriétés acoustiques entre phases étant susceptible d'induire des propriétés extrêmement diffusantes des microbilles, nous avons étudié l'impact de la nature de la matrice et de l'arrangement (aléatoire ou périodique) des microbilles sur les propriétés acoustiques d'échantillons se présentant sous forme de plaques sub-longueurs d'ondes à faces parallèles. Nous avons montré que la présence de minima prononcés dans le coefficient de transmission de ces métaplaques était pilotée par la résonance monopolaire des microbilles, et était fortement conditionnée par la nature de la matrice environnante. Enfin, toutes les mesures ultrasonores de l'étude ont été confrontées avec succès à des prédictions issues de modèles de diffusion multiple.

Mots-Clés : isolation sonore, métamatériaux acoustiques, diffusion multiple

STUDY OF ACOUSTIC TRANSMISSION OF LOCALLY RESONANT METASLABS

Acoustic metamaterials may behave like sub-wavelength and broadband sound-absorbers, opening thus new promising routes for sound insulation. In this context, we have designed and achieved heterogeneous structures composed of soft porous silicone rubber microbeads with ultra-low sound speeds, dispersed in various aqueous or elastomeric matrices. First, we show why the sound speed is so low in soft porous silicone rubber materials (<100m/s) in comparison with soft homogeneous materials (~1000m/s). Such a large sound-speed contrast resulting in strongly scattering properties of the microbeads, we have studied the influence of the matrix characteristics as well as the arrangement of microbeads (random or ordered) on the acoustic properties of the samples in form of sub-wavelength slabs. We have evidenced deep and wide minima of acoustic transmission due to the strong monopolar resonances of the microbeads, which strongly depend on the properties of the surrounding matrix. All our ultrasonic measurements have been compared with theoretical predictions based on various Multiple Scattering Theories, revealing an excellent quantitative agreement.

Key words: sound insulation, acoustic metamaterials, multiple scattering