



HAL
open science

Explosions de cycles : analyses qualitatives, simulations numériques et modèles

Lucile Mégret

► **To cite this version:**

Lucile Mégret. Explosions de cycles : analyses qualitatives, simulations numériques et modèles. Analyse numérique [math.NA]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. Français. NNT : 2016PA066359 . tel-01484461

HAL Id: tel-01484461

<https://theses.hal.science/tel-01484461v1>

Submitted on 7 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université Pierre et Marie Curie

École Doctorale 386

Laboratoire Jacques-Louis Lions & Équipe projet MYCENAE, INRIA

**Explosions de cycles : analyses qualitatives,
simulations numériques et modèles**

Par Lucile Mégret

Thèse de doctorat de Mathématiques

Dirigée par Frédérique Clément et Jean-Pierre Francoise

Présentée et soutenue publiquement le 25/11/2016

Devant un jury composé de :

Madame Frédérique Clément (directeur)

Monsieur Jean-Pierre Francoise (directeur)

Monsieur Jacques Demongeot (rapporteur)

Monsieur Peter de Maesschalck (rapporteur)

Monsieur Mathieu Desroches

Monsieur Toni Guillamon

Monsieur Alain Haraux

Monsieur Maciej Krupa

Remerciements

Mes premier remerciements vont à mes directeurs de thèse, Frédérique Clément et Jean-Pierre François pour avoir guidé ce travail de recherche. Je tiens ensuite à témoigner ma reconnaissance à Mathieu Desroches pour sa collaboration et son aide précieuse.

Un grand merci également à Jacques Demongeot et à Peter de Maesschalck d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire. Merci à Toni Guillamon, Alain Haraux et Maciej Krupa pour l'honneur qu'ils me font en étant présents dans ce jury.

Merci aux doctorants et apprentis informaticiens côtoyés à Jussieu, pour les déjeuner, cafés et soirées perdues ensemble qui contribueront à rendre ces trois années inoubliables. Je n'oublie pas les amis rencontrés de la crèche à l'université. Sans les projets sur la comète, les passions fantaisistes et les grandes discussions partagées, ce parcours n'aurait pas été le même.

Un grand merci à toute ma famille : A la fratrie et à mes parents pour leur aide, leur confiance et leur soutien infailible.

Enfin, merci à Yannick de marcher avec moi depuis l'entrée à l'université jusqu'à la sortie.

Table des matières

Introduction	1
1 État de l'art	5
1.1 Dynamiques lentes-rapides et théorie géométrique des perturbations singulières	5
1.1.1 Définition, problème réduit et couche-limite	5
1.1.2 Hyperbolicité normale et théorème de Fenichel	8
1.1.3 Au-delà de l'hyperbolicité : le cas du pli	10
1.1.4 Méthode d'éclatement en dimension deux	10
1.2 La bifurcation de Andronov-Hopf singulière	12
1.3 Explosion de cycle	15
1.3.1 Présentation	15
1.3.2 Démonstration et sens de l'explosion de cycle	16
1.4 Propriétés d'invariance d'échelle de la forme normale de la bifurcation de Andronov-Hopf et équations de Liénard	20
1.4.1 Propriétés d'invariance d'échelle de la forme normale	20
1.4.2 Système de Liénard généralisé : mise en place d'une théorie perturbative	21
1.4.3 Calcul des coefficients de l'explosion de cycle dans le cas d'un système de Liénard lent-rapide	22
1.5 Intégration explicite de la forme normale	22

1.5.1	Fonction de Lambert	22
1.5.2	Intégration explicite de la forme normale avec la fonction de Lambert	24
1.5.3	Étude des cycles de la forme normale	25
1.6	Explorations numériques par xppAut	29
1.6.1	Continuation par rapport à un paramètre	30
1.6.2	Pseudo-Arclength Continuation de Keller	31
1.6.3	Problème au bord et collocation orthogonale	32
1.6.4	Continuation d'une branche d'orbites périodiques	33
2	Explosion globale de cycles limites (d'une bifurcation de Andronov-Hopf à une bifurcation homocline)	35
2.1	Paramétrisation par les fonctions de Lambert des solutions d'une équation de Liénard généralisée intégrable	35
2.1.1	Une équation de Liénard généralisée intégrable	36
2.1.2	Paramétrisation des lignes de niveau de H par la fonction de Lambert	39
2.2	Version lente-rapide	39
2.3	Explosion globale et simulations numériques	40
2.4	Vérification de l'existence de l'explosion par la méthode de Eckhaus .	43
2.5	Stratégie basée sur l'application de premier retour et la paramétrisation par les fonctions de Lambert	50
2.5.1	Introduction d'une équation sur les paramètres et existence de la solution	50
2.5.2	Approximation de la solution	53
2.5.3	Étude du sens de variation du ratio des intégrales abéliennes .	58
2.6	Perturbation non polynomiale avec cycle limite explicite	61
2.6.1	Un exemple simple	61
2.6.2	Forme générale de la perturbation non polynômiale considérée	63

2.6.3	Perturbation du système (2.7)	64
2.6.4	Cas particulier du système (2.9)	65
2.6.5	Cas lent-rapide	66
2.7	Cas tronqué	69
3	Explosion de cycles 3D et addition de spikes dans le système de Hindmarsh-Rose	75
3.1	Introduction	75
3.2	Géométrie de la courbe critique du système de Hindmarsh-Rose	79
3.2.1	Le système une direction rapide/deux directions lentes	79
3.2.2	Sous-système rapide et variété critique	80
3.2.3	Nature des points stationnaires du système couche-limite (3.2)	81
3.2.4	Portrait de phase du système couche-limite en fonction de la valeur de z	84
3.3	Candidats limites périodiques	85
3.4	Explosion de cycle 3D	89
3.4.1	Addition de spikes par variation de I , pour ε fixé	89
3.4.2	Addition de spikes lorsque ε varie	91
3.5	Canard avec lèvres	93
3.5.1	Approximation de la variété centrale par un polynôme	96
3.5.2	En dimension supérieure	100
4	Contribution à l'analyse d'une minimalité du modèle de F. Clément et J.-P. Françoise	103
4.1	Oscillations multi-modales (MMOs)	103
4.2	MMOs dans un système à trois échelles de temps	104
4.3	Vers un modèle minimal	106
4.4	Système désingularisé	107
4.5	Étude de la singularité au pli supérieur	109
4.5.1	Extension de la théorie de Fenichel dans K_1	110

4.5.2	Preuve de l'existence d'oscillations dans K_2	113
4.5.3	Preuve du théorème 4	116
4.6	Description qualitative des trajectoires périodiques du système (4.2) .	118
4.6.1	Le plateau	118
4.6.2	La décharge	118
4.6.3	La phase pulsatile	119
4.7	Conclusion et perspectives	119
5	Conclusion et perspectives	121
	Bibliographie	123

Introduction

Ce travail porte sur de nouvelles explosions de cycles (orbites périodiques), l'étude de leur structure par l'analyse qualitative, leur mise en évidence par simulation numérique (Auto, Xpp) et la discussion de leur pertinence dans des modèles mathématiques dans les neurosciences. Elle est organisée en trois parties consacrées respectivement aux dynamiques lentes-rapides de type une variable rapide/une variable lente, d'une partie deux relative aux dynamiques à deux variables rapides/une variable lente et d'une troisième partie portant sur les dynamiques une variable rapide/deux variables lentes.

La plupart des neurones sont excitables, c'est à dire silencieux mais capables de produire un potentiel d'action ou de déclencher une réponse oscillatoire à certaines formes de stimulations. Dès 1940, Hodgkin identifia trois classes fondamentales d'axones excitables distinguées par leurs réponses à un courant injecté d'amplitude variable.

Les axones de type I sont capables d'« intégrer » le courant injecté et la courbe de réponse en fréquence à une intensité de courant appliqué (f, I) est continue. Il y a une bifurcation SNIC (Bifurcation pli sur un cycle) pour $I = I_{bif} = 0$ où la fréquence approche zéro.

Pour les axones de type II, on a une discontinuité de la courbe (f, I) et ces axones ne sont pas capables de maintenir l'oscillation en dessous d'une certaine fréquence. Il existe une bande de fréquence très étroite associée à l'oscillation de relaxation. Ces axones agissent comme des filtres de bande passante et la fréquence est relativement

insensible à l'intensité du courant injecté.

Les neurones de type III n'oscillent pas mais déclenchent un ou quelques potentiels d'action et ils détectent un « changement » dans le stimulus. On parle de détecteur de pente ou réponse à la dérivée du stimulus ; mais on peut aussi penser à une réponse impulsionnelle. A partir de 1980, Rinzel et Ermentrout ont expliqué par la théorie des bifurcations singulières la différence entre les types I et II.

Pour le type I, l'oscillation apparaît par une bifurcation SNIC.

Pour le type II, on a une bifurcation d'Andronov-Hopf singulière.

Il est naturel d'explorer davantage [18] à l'aide de la théorie des bifurcations (singulières) la transition entre le type II et le type I d'excitabilité. Dans l'article [18], les auteurs proposent l'introduction de la bifurcation de Bogdanov-Takens-SNIC. On y observe en particulier des explosions de cycle incomplètes qui se terminent dans une bifurcation homocline et dont nous allons proposer l'analyse au deuxième chapitre.

Le troisième chapitre concerne une étude poussée du système de Hindmarsh-Rose et du phénomène de l'addition de spike. Cette partie est constituée elle même de quatre étapes successives :

- Une description géométrique de la courbe S_0 formée des points stationnaires de la dynamique rapide et de sa projetée Σ_0 sur le plan des (x, z) s'accompagne d'une description de la nature des points stationnaires et de leurs bifurcations (noeud-foyer, deux plis, deux Hopf et deux homoclines). Une plage de paramètre I est choisie de façon à faire apparaître un phénomène « canard » de nature très similaire à ce qui se rencontre dans les systèmes de dimension deux. Cette description géométrique s'accompagne d'une description numérique de deux entonnoirs d'orbites périodiques de la dynamique rapide.
- L'analyse exhaustive et systématique des candidats limites périodiques à $\varepsilon = 0$. Il s'agit à notre connaissance de nouveau « candidats canards » qui sont 3D. Ils sont à distinguer drastiquement des candidats canards 2D des candidats canards 3D de Benoît et des candidats canards 3D d'Argemi (auquel ils ressemblent le plus).

- La mise en évidence numérique des orbites périodiques 3D correspondantes pour ε petit mais non nul. Le fait que ces cycles sont canards près du pli du bas est le moteur de l'explosion, mais l'originalité de cette explosion est la richesse des étapes successives traversées. Cette partie trois est purement numérique et elle s'appuie sur des méthodes de continuation numérique d'orbite périodique (Auto et Xpp).
- Dans le dernier paragraphe on fait varier le paramètre I . Grâce à la méthode de prolongation, et en particulier aux travaux de Mathieu Desroches, partant d'un cycle 3D avec une certaine donnée initiale qui représente un bursting avec N spikes pour le système 3D en $I = I_0$, on fait varier I en le faisant monter au pli du haut puis redescendre. On revient alors au même système 3D pour une donnée initiale différente avec une orbite périodique qui a maintenant $N + 1$ spikes.

Ce travail nous semble avoir quelques perspectives en particulier, la nouvelle explosion de cycle décrite dans le troisième chapitre et qui donne une explication géométrique à l'addition de spikes semble, dans le système de Hindmarsh-Rose, directement liée à l'ensemble des bifurcations intermédiaires. La question se pose de savoir s'il existerait d'autres modèles naturels dans les neurosciences pour lesquels on aurait un scénario d'additions de spikes différent.

Un autre sujet de perspective est lié à la partie trois. Dans un article récent, Rubin Kirk et al [53] ont posé la question de la minimalité du système de F. Clément et J.-P. Françoise [14]. Notre étude qui s'inscrit dans cette question a permis une discussion des caractéristiques des profils des solutions d'un système à une variable rapide/deux variables lentes qui partagent une partie des propriétés caractéristiques du modèle 4D proposé dans [14] et constitue une base de possibles travaux pour la suite.

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Dynamiques lentes-rapides et théorie géométrique des perturbations singulières

Les systèmes physiologiques évoluent souvent selon plusieurs échelles de temps. Par exemple, en neurosciences, le potentiel d'action des neurones évolue très vite devant les temps d'ouverture et de fermeture des canaux ioniques.

D'un point de vue mathématique, ces systèmes sont modélisés comme des problèmes de perturbations singulières.

1.1.1 Définition, problème réduit et couche-limite

Un système lent-rapide est un système dynamique de la forme

$$\begin{aligned}v' &= f(v, w, \varepsilon) \\w' &= \varepsilon g(v, w, \varepsilon),\end{aligned}\tag{1.1}$$

où $(v, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ sont les variables d'espace avec $k, m \geq 1$ et $0 < \varepsilon \ll 1$. La variable v est la variable rapide tandis que w est la variable lente. Le paramètre ε est le ratio du temps en lequel les variables lentes et rapides évoluent. Les fonctions $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ sont supposées C^∞ . Le prime

désigne la dérivation par rapport au temps d/dt . En changeant l'échelle de temps par la transformation $\tau = \varepsilon t$ nous obtenons le système

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{v} &= f(v, w, \varepsilon) \\ \dot{w} &= g(v, w, \varepsilon),\end{aligned}\tag{1.2}$$

où le point désigne la dérivation par rapport au temps lent $d/d\tau$.

Si on passe à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans le système (1.1) nous obtenons le système *couche limite*

$$\begin{aligned}v' &= f(v, w, 0) \\ w' &= 0,\end{aligned}\tag{1.3}$$

Si on passe à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans le système (1.2) nous obtenons le système *réduit*

$$\begin{aligned}v' &= 0 \\ w' &= g(v, w, \varepsilon).\end{aligned}\tag{1.4}$$

Les solutions du système lent-rapide (1.1) sont en général bien approchées quand $\varepsilon \rightarrow 0$ par des concaténations de segments de trajectoires du système couche-limite et de segments de trajectoires du système réduit.

Définition 1. *Soit l'ensemble*

$$S = \{(v, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, f(v, w, 0) = 0\}$$

*l'ensemble des points stationnaires du système (1.3). Si la jacobienne $D_{v,w}f$ calculée le long de S est de rang maximum, cet ensemble définit une variété de dimension k . Dans tous les cas, cet ensemble S est appelé la **variété critique**.*

Exemples en dimension deux : Le système de Fitzhugh-Nagumo est une simplification du modèle de Hodgking-Huxley qui décrit le potentiel d'action dans l'axone géant du calamar.

$$\begin{aligned}x' &= x - \frac{x^3}{3} - y + I \\ y' &= \varepsilon(x + a - by).\end{aligned}$$

où a et b sont fixées, $\varepsilon \ll 1$ et I est le paramètre de bifurcation.

La variété critique est une courbe dans le plan donnée par

$$S_0 = \{(x, y) | y = x - x^3/3 + I\}.$$

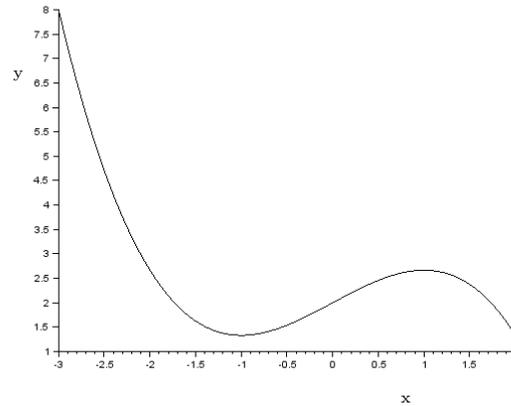


FIGURE 1.1 – Tracé de la variété critique dans le plan.

Exemple en dimension trois : Le modèle de Hindmarsh–Rose qui représente l’activité neuronale est un système lent-rapide de dimension trois, composé de deux variables rapides et une variable lente. Son équation est

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - ax^3 + bx^2 + I - z \\ \dot{y} &= c - dx^2 - y \\ \dot{z} &= \varepsilon(s(x - x_1) - z) \end{cases}$$

où a, b, c, d, s et x_1 sont fixées, $\varepsilon \ll 1$ et I est le paramètre de bifurcation.

La variété critique est une courbe dans l’espace donnée par

$$S_0 = \{(x, y, z) | y = c - dx^2; z = -ax^3 + (b - d)x^2 + c + I\}.$$

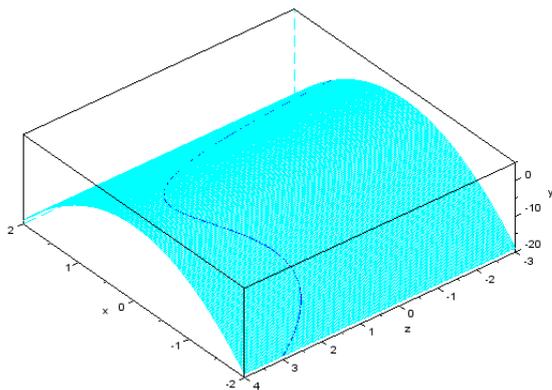


FIGURE 1.2 – Tracé de la variété critique dans l'espace.

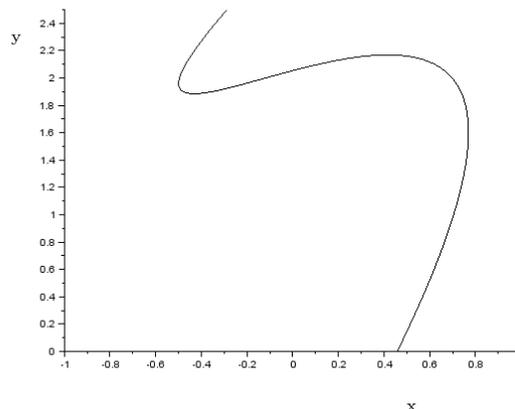


FIGURE 1.3 – Projection de la variété critique dans le plan (z, x) .

Une étude de cette variété critique en fonction du paramètre I est présentée dans le chapitre 3

Une première classification des problèmes de perturbations singulières repose sur l'étude des propriétés de la variété critique du problème couche limite.

1.1.2 Hyperbolicité normale et théorème de Fenichel

Les problèmes de perturbation singulière ont, sous certaines conditions, des propriétés de régularité par rapport au paramètre ε qui permettent une première approche « facile » de segments de solution des systèmes (1.1) et (1.2).

Définition 2. Un sous-ensemble $S_j \subseteq S$ est dit **normalement hyperbolique** si tous les points $(v, w) \in S_j$ sont des points d'équilibres hyperboliques du système couche limite. C'est à dire, si la Jacobienne par rapport à la variable rapide v notée $D_v f$ n'a aucune valeur propre dont la partie réelle soit nulle.

Un tel sous-ensemble $S_j \subseteq S$ est dit : **attractif** si toutes les valeurs propres de $D_v f$ sont à partie réelle négative et est souvent noté S_a ; **répulsif** si toutes les valeurs

propres de $D_v f$ sont à partie réelle positive et est souvent noté S_r ; **de type selle** si il n'est ni attractif ni répulsif.

Soit S_j un sous ensemble normalement hyperbolique de la variété critique. Pour tout point $p \in S_j$ la jacobienne $D_v f$ admet m_s valeurs propres à partie réelle négative et m_i valeurs propres à partie réelle positive. Nous en déduisons la définition des variétés locales stables et instables associées à la variété critique S_k .

Définition 3. *Les variétés stables et instables associées à la variété critique S_j notées respectivement $W_{loc}^s(S_j)$ et $W_{loc}^i(S_j)$ sont les unions :*

$$W_{loc}^s(S_j) = \bigcup_{p \in S_j} W_{loc}^s(p), W_{loc}^i(S_j) = \bigcup_{p \in S_j} W_{loc}^i(p),$$

où $W_{loc}^s(p)$ et $W_{loc}^i(p)$ forment une famille de fibrées rapides de $W_{loc}^s(S_j)$ et $W_{loc}^i(S_j)$ au point p . La variété $W_{loc}^s(S_j)$ est de dimension $m_s + k$, la variété $W_{loc}^i(S_j)$ est de dimension $m_i + k$.

La théorie géométrique des perturbations singulières dans le cadre de variétés normalement hyperboliques est appelée *théorie de Fenichel*. Cette théorie garantit la persistance d'une variété normalement hyperbolique proche de $S_j \subseteq S$ ainsi que de la variété locale stable et de la variété locale instable correspondante proches de $W_{loc}^s(S_j)$ et $W_{loc}^i(S_j)$.

Théorème 1. Théorème de Fenichel. *Soit le système (1.1) où f et g sont C^∞ . Supposons que $S_j \subseteq S$ est une variété normalement hyperbolique compacte. Alors, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit on a :*

- i) *Pour tout $r < \infty$ il existe une variété de régularité C^r notée $S_{j,\varepsilon}$ normalement hyperbolique, localement invariante par le flot et proche de S_j de $C^r O(\varepsilon)$.*
- ii) *Pour tout $r < \infty$ il existe deux variétés de régularité C^r , respectivement stable et instable,*

$$W_{loc}^s(S_{j,\varepsilon}) = \bigcup_{p_\varepsilon \in S_{j,\varepsilon}} W_{loc}^s(p_\varepsilon), W_{loc}^i(S_{j,\varepsilon}) = \bigcup_{p_\varepsilon \in S_{j,\varepsilon}} W_{loc}^i(p_\varepsilon),$$

localement invariantes par le flot et proches de $C^r O(\varepsilon)$ de $W_{loc}^s(S_j)$ et $W_{loc}^i(S_j)$ respectivement.

Ces variétés ne sont généralement pas uniques mais exponentiellement proches en ε les unes des autres.

1.1.3 Au-delà de l'hyperbolicité : le cas du pli

La variété S n'est pas normalement hyperbolique en un point p si au moins une valeur propre de $D_v f$ au point p est à partie réelle nulle. Cela correspond à un point de bifurcation du problème couche-limite sous la variation du paramètre w . Ces points sont des plis au sens de la théorie des bifurcations.

Définition 4. *La variété critique S du système (1.2) possède un ensemble de plis si il existe un ensemble F formant une variété de dimension $k - 1$ de la variété critique S de dimension k définie de la façon suivante :*

$$F = \{(v, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, f(v, w, 0) = 0, \text{rang}(D_v f)(v, w, 0) = m - 1, \\ G \cdot [(D_{vv}^2 f)(v, w, 0)](R, R) \neq 0, G \cdot [(D_w f)(v, w, 0)] \neq 0\} \quad (1.5)$$

où G et R sont les vecteurs nuls à gauche et à droite de la jacobienne $D_v f$. L'ensemble F est l'ensemble des **points plis** de la variété critique.

En ces points, des phénomènes complexes, typiques des systèmes à plusieurs échelles de temps peuvent se produire. C'est le cas notamment du phénomène d'**explosion de cycle** ou **explosion canard** que nous détaillerons dans la section 1.3.

1.1.4 Méthode d'éclatement en dimension deux

Comme nous l'avons vu précédemment, la théorie de Fenichel permet de suivre le flot d'un système singulièrement perturbé dans le cas normalement hyperbolique. La méthode d'éclatement consiste en un changement de coordonnées qui transforme le point singulier en sphère. L'idée est alors d'étendre la théorie de Fenichel ou la théorie des perturbations classiques dans des cartes bien choisies. Afin d'expliquer l'idée de cette méthode nous traiterons le cas d'un système plan. Cette méthode sera utilisée

dans le chapitre 4 en dimension trois.

Ici nous considérons le système de dimension deux

$$\begin{aligned}\dot{v} &= f(v, w, \lambda, \varepsilon) \\ \dot{w} &= \varepsilon g(v, w, \lambda, \varepsilon)\end{aligned}\tag{1.6}$$

où λ est le paramètre de bifurcation. Dans le cas d'un système lent rapide plan, la variété critique S_0 est de dimension un, il s'agit d'une courbe dans le plan. Supposons qu'il existe $S_h \subseteq S_0$ telle que $S_h = S_r \cup F \cup S_a$ où S_a est normalement hyperbolique attractive, S_r est normalement hyperbolique répulsive et F est un point pli. Au voisinage du pli, que nous supposons à l'origine dans un souci de simplicité, on procède au changement de coordonnées suivant :

$$v = r\tilde{v}, w = r^2\tilde{w}, \varepsilon = r^2\tilde{\varepsilon}, \lambda = r\tilde{\lambda}.\tag{1.7}$$

Où $(\tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\lambda}) \in S^3$ et $r > 0$. Nous définissons alors deux cartes :

Carte K_1 Dans cette carte, la « direction » de la coordonnée w est fixée. La carte K_1 est définie par :

$$v = r_1 v_1, w = r_1^2 w_1, \varepsilon = r_1^2 \varepsilon_1, \lambda = r_1 \lambda_1.\tag{1.8}$$

Carte K_2 Dans cette carte, la « direction » de la coordonnée ε est fixée. La carte K_1 est définie par :

$$v = r_2 v_2, w = r_1^2 w_2, \varepsilon = r_2^2 \varepsilon_2, \lambda = r_2 \lambda_2.\tag{1.9}$$

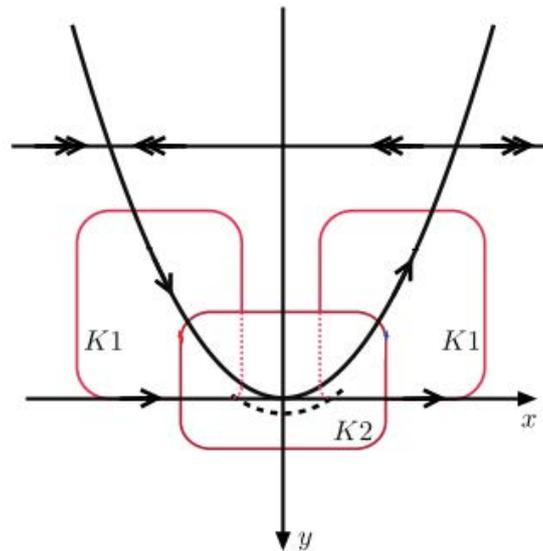


FIGURE 1.4 – Éclatement du pli à l'origine et carte K_1 et K_2 .

La théorie de Fenichel peut se prolonger dans la carte K_1 tandis que la bifurcation de Hopf est analysée dans la carte K_2 . Nous verrons dans la section 1.3 de ce chapitre un exemple d'étude de point singulier par cette méthode en dimension deux.

1.2 La bifurcation de Andronov-Hopf singulière

La bifurcation de Andronov-Hopf a été beaucoup étudiée dans les champs de vecteurs du plan avec une variable rapide et une variable lente; voir par exemple [7, 28, 29, 36, 37, 48].

La version singulière de la bifurcation de Andronov-Hopf produit une explosion de cycles. En effet, l'orbite périodique qui apparaît à travers la bifurcation de Hopf explose d'une amplitude de l'ordre de $O(\varepsilon^{1/2})$ à une amplitude de l'ordre de $O(1)$ pour une variation du paramètre significatif μ de l'ordre de $O(\exp(-c/\varepsilon))$. Ce phénomène implique des cycles limites appelés *canards* qui ont la propriété particulière de suivre une branche attractive et une branche répulsive (localement) de la variété invariante. L'explosion de cycle a d'abord été découverte et étudiée à l'aide de méthodes d'ana-

lyse non-standard [5, 7], d'analyse asymptotique et d'analyse numérique [2, 3, 29]. F. Dumortier et R. Roussarie ont décrit le phénomène, dans le cas de Van der Pol, avec des méthodes issues de la théorie géométrique des perturbations singulières dans [28]. L'étude dans un cas plus général via l'utilisation des méthodes introduites dans [28] fut plus tard développée par Krupa et Szmolyan dans [48]. L'aspect forme normale a été développé dans [9]. J. Guckenheimer a introduit un système canonique pour une bifurcation de Andronov-Hopf singulière avec deux variables lentes dans plusieurs articles [37, 39]. Nous considérons ici le cas d'une seule variable lente et analysons une famille plus générale qui induit un cadre global de perturbation. Dans ce contexte, on peut suivre les orbites périodiques en utilisant à la fois les méthodes de continuation analytiques et numériques. La combinaison des explosions de cycles et des bifurcations homoclines a été étudiée dans de nombreux travaux, dans le cas de perturbations singulières d'EDO's [63, 41, 57, 64], et dans le contexte des ondes progressives solutions de EDPs [13, 40]. Nous récapitulons ci-dessous les conditions énoncées par B. Braaksma dans [9] pour obtenir une bifurcation de Hopf singulière.

Définition 5. Soit J_ε une famille de matrices définies pour $0 < \varepsilon \ll 1$. Soient $\lambda_+(\varepsilon) = \alpha + i\beta$ et $\lambda_-(\varepsilon) = \alpha - i\beta$ ses valeurs propres. On dit que λ_\pm sont à partie imaginaire singulière si et seulement si $\alpha = O(1)$, et $\beta \rightarrow +\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proposition 1. Soit

$$J_\varepsilon = \begin{pmatrix} a/\varepsilon & b/\varepsilon \\ c & d \end{pmatrix}, 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1.10)$$

Soient $\lambda_\pm(\varepsilon)$ les valeurs propres des J_ε .

Alors, ces valeurs propres sont à partie imaginaire singulière si et seulement si :

- $a = 0$,
- $bc < 0$.

Pour une démonstration voir [9].

Nous allons maintenant déterminer les conditions pour que les valeurs propres d'un système à l'équilibre soient à partie imaginaire singulière. Nous verrons ensuite la forme normale d'un tel système. La construction de la forme normale permettra d'expliquer pourquoi la présence de valeurs propres à partie imaginaire singulière entraîne un retard à la bifurcation.

Théorème 2. *Soit*

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= f(x, y, a) \\ \dot{y} &= g(x, y, a)\end{aligned}\tag{1.11}$$

un système différentiel lent-rapide tel que $f(0) = g(0) = 0$. Alors, d'après la proposition 1, les valeurs propres de la jacobienne à l'équilibre sont à partie imaginaire singulière si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} \partial_x f(0) & \partial_y f(0) \\ \partial_x g(0) & \partial_y g(0) \end{pmatrix} \neq 0,\tag{1.12}$$

- $\partial_x f(0) = 0$,
- $\partial_y f(0) \partial_x g(0) < 0$.

Si de plus

- $\partial_x^2 f(0) \neq 0$,

$$-(\partial_{xx}^2 \partial_{xy}^2) \begin{pmatrix} \partial_x f(0) & \partial_y f(0) \\ \partial_x g(0) & \partial_y g(0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_a f(0) \\ \partial_a g(0) \end{pmatrix} + \partial_{x,a}^2 f(0) \neq 0,\tag{1.13}$$

alors, le système peut se mettre sous la forme normale

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v + \frac{u^2}{2} + \delta F(u, \alpha) + O(\delta^2) \\ \dot{v} &= -u + O(\delta^2),\end{aligned}\tag{1.14}$$

Où $F = O(1)$, $\delta = O(\sqrt{\varepsilon})$. Nous ne reproduisons pas ici la démonstration de ce théorème qui est faite dans l'article de Braaksma [9]. Nous donnerons simplement les changements de variables successifs à injecter dans le développement de Taylor

des fonctions f et g afin de comprendre pourquoi le système présente un retard à la bifurcation. La première transformation consiste à poser :

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon A \\ x &= \sqrt{\varepsilon} X \\ y &= \varepsilon Y \\ t &= \sqrt{\varepsilon} T. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Ensuite, pour obtenir la forme désirée, il suffit de poser :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \varepsilon A [-(\partial_{xx}^2 \partial_{xy}^2) \begin{pmatrix} \partial_x f(0) & \partial_y f(0) \\ \partial_x g(0) & \partial_y g(0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_a f(0) \\ \partial_a g(0) \end{pmatrix} + \partial_{x,a}^2 f(0)] \\ \omega &= \sqrt{-\partial_y f(0) \partial_x g(0)} \\ V &= \partial_y f(0) Y, \end{aligned} \tag{1.16}$$

puis de déduire l'équation différentielle avec ces nouvelles variables et paramètres. Pour finir, on pose :

$$\begin{aligned} X &= \omega \partial_{xx}^2 f(0)^{-1} u \\ V &= \omega^2 \partial_{xx}^2 f(0)^{-1} \\ T &= \omega^{-1} \tau. \end{aligned} \tag{1.17}$$

On obtient le système désiré en dérivant u et v par rapport à τ .

Comme $u/v = O(1/\sqrt{\varepsilon})$, il est possible de repasser à un système lent-rapide faisant apparaître le paramètre ε . Remarquons que l'ordre de grandeur de la partie imaginaire ($O(1/\sqrt{\varepsilon})$) se retrouve dans la relation $\tau = t \times O(\sqrt{\varepsilon})$. Ainsi le temps caractéristique des oscillations, c'est à dire la période des orbites périodiques, est aussi en $O(1/\sqrt{\varepsilon})$.

1.3 Explosion de cycle

1.3.1 Présentation

Les canards sont des solutions particulières des systèmes lents-rapides, c'est à dire des systèmes d'EDO dont les variables évoluent suivant des échelles de temps

différentes. Ceci étant dû à la présence d'un petit paramètre $0 < \varepsilon \ll 1$. Les canards sont des trajectoires qui suivent la partie attractive de la nullcline rapide ou variété critique, passent près d'un point de bifurcation du sous-système rapide et continuent le long de la partie répulsive de la variété critique pour un temps suffisamment long $O(1)$. Le phénomène canard a d'abord été découvert par Benoît, Callot, Diener & Diener dans [7] pour l'oscillateur de Van der Pol et été étudié à l'aide de l'analyse non standard. Plus tard, des résultats similaires ont été obtenus avec des techniques standards, en particulier avec des études asymptotiques [29] et géométriques (appelées méthode de blow-up ou d'éclatement) [27]. Outre le fait qu'ils suivent des branches répulsives et attractives, les canards n'existent que pour un intervalle de valeurs de paramètres exponentiellement petit en ε . L'évolution des canards dans l'espace des paramètres est généralement appelé *explosion* [10]. Ces solutions particulières sont présentes dans un grand nombre de systèmes ayant des applications variées, en particulier en neurosciences où les canards sont associés au mécanisme de transition d'un état stationnaire à une oscillation de relaxation. C'est par exemple le cas du modèle de FitzHugh-Nagumo qui est une version réduite du modèle de Hodgkin-Huxley, celui-ci décrit le potentiel d'action dans l'axone géant du calamar [43]; voir [52] pour plus de détails.

1.3.2 Démonstration et sens de l'explosion de cycle

Soit le système lent-rapide :

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, \lambda, \varepsilon) \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \lambda, \varepsilon) \end{aligned} \tag{1.18}$$

La variété critique est donnée par $f(x, y, \lambda, \varepsilon) = 0$. Supposons qu'il y ait un pli en $(0, 0, 0, 0)$. On s'intéresse alors à $S = f(x, y, 0, 0) = 0$. On fait 4 hypothèses,

H1 : S est un graphe $y = \phi(x)$ qui admet un minimum local en $x = 0$ et un maximum local en $x = x_m$. Ce graphe est découpé en trois parties

$$\begin{aligned} S_r &= \{y = \phi(x), x < 0\} \\ S_m &= \{y = \phi(x), 0 < x < x_m\} \\ S_l &= \{y = \phi(x), x > x_m\}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Cette hypothèse fixe la forme de S qui doit être « S-shaped ». C'est à dire croissante sur $] - \infty, 0[$ et sur $]x_m, +\infty[$ et décroissante sur $]0, x_m[$.

H2 : Pour le problème couche-limite, S_l et S_r sont attractives, S_m est répulsive. C'est à dire

$$\frac{\partial f}{\partial x} < 0 \text{ sur } S_l \text{ et } S_r,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x} > 0 \text{ sur } S_m.$$

H3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0, 0, 0, 0) &\neq 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0, 0) \neq 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0, 0, 0) &\neq 0 \end{aligned} \tag{1.20}$$

et

$$x' = \frac{g(x, \phi(x), 0)}{\phi'(x)}$$

n'est pas singulier quand $x \rightarrow 0$. Ceci impose que l'origine est un point singulier non dégénéré.

H4 : Considérons le flot lent

$$x' = \frac{g(x, \phi(x), 0)}{\phi'(x)}$$

et supposons que $x' < 0$ sur S_l et $x' > 0$ sur S_r .

Dans ces conditions, on peut réécrire le système de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x' &= -yh_1(x, y, \lambda, \varepsilon) + x^2h_2(x, y, \lambda, \varepsilon) + \varepsilon h_3(x, y, \lambda, \varepsilon) \\ y' &= \varepsilon[xh_4(x, y, \lambda, \varepsilon) - \lambda h_5(x, y, \lambda, \varepsilon) + yh_6(x, y, \lambda, \varepsilon)], \end{aligned} \tag{1.21}$$

où $h_3(x, y, \lambda, \varepsilon) = O(x, y, \lambda, \varepsilon)$ et $h_j(x, y, \lambda, \varepsilon) = 1 + O(x, y, \lambda, \varepsilon)$ pour $j = 1, 2, 4, 5$.
 On introduit les constantes $a_1 = \frac{\partial h_3}{\partial x}(0)$, $a_2 = \frac{\partial h_1}{\partial x}(0)$, $a_3 = \frac{\partial h_2}{\partial x}(0)$, $a_4 = \frac{\partial h_4}{\partial x}(0)$,
 $a_5 = h_6(0)$. On définit la constante

$$A = -a_2 + 3a_3 - 2a_4 - 2a_5.$$

Proposition 2. *Si $A \neq 0$, il y a une bifurcation d'Andronov-Hopf. Si $A < 0$ la bifurcation de Hopf est sur-critique, si $A > 0$ elle est sous-critique.*

Proposition 3. *Il existe ε_0, λ_0 tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $|\lambda| < \lambda_0$ le système (1.18) admet exactement un point d'équilibre p_ε qui converge vers le point canard lorsque $(\varepsilon, \lambda) \rightarrow 0$. De plus, il existe une courbe $\lambda_H(\sqrt{\varepsilon})$ telle que p_ε est stable pour $\lambda < \lambda_H(\sqrt{\varepsilon})$ et change de stabilité à travers une bifurcation de Hopf en $\lambda_H(\varepsilon)$. La courbe $\lambda_H(\sqrt{\varepsilon})$ admet le développement*

$$\lambda_H(\sqrt{\varepsilon}) = -\frac{a_1 + a_5}{2}\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}). \quad (1.22)$$

Proposition 4. *Il existe une fonction $\lambda_c(\sqrt{\varepsilon})$ qui connecte $S_{l,\varepsilon}$ et $S_{m,\varepsilon}$ si et seulement si $\lambda = \lambda_c(\sqrt{\varepsilon})$ admet le développement*

$$\lambda_c(\sqrt{\varepsilon}) = -\left(\frac{a_1 + a_5}{2} + \frac{A}{8}\right)\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Définition 6. *Soit $s \in [0, y_m = \phi(x_m)[$. soit $x_1 < 0 < x_2$ tel que $\phi(x_1) = \phi(x_2) = s$. On appelle **ensemble périodique limite** ou **canard candidat** l'ensemble*

$$\Gamma_0(s) = \{(x, y) | x_1 \leq x \leq x_2; y = \phi(x)\} \cup \{(x, y) | x_1 \leq x \leq x_2; y = s\}.$$

Notons $\lambda = \lambda(s, \sqrt{\varepsilon})$ le paramètre tel qu'il existe un cycle passant par le point $(0, s)$.

Proposition 5. *Il existe $\nu \in]0, 1[$ tel que*

$$|\lambda(s, \sqrt{\varepsilon}) - \lambda_c(\sqrt{\varepsilon})| < e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\nu}}}. \quad (1.23)$$

Nous ne donnerons ici que les grandes idées de la preuve de ces propositions. Pour une démonstration détaillée voire [47]. La preuve de la proposition 3 vient de l'étude du système dans la carte K_2 définie au premier chapitre. En effet, dans cette carte, le système (1.21) devient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -y_2 + x_2^2 + r_2 G_1(x_2, y_2) + O(r_2(\lambda_2 + r_2)) \\ \dot{y}_2 &= x_2 - \lambda_2 + r_2 G_2(x_2, y_2) + O(r_2(\lambda_2 + r_2)), \end{aligned} \quad (1.24)$$

où $G_1(x_2, y_2) = a_1 x_2 - a_2 x_2 y_2 + a_3 x_2^3$ et $G_2(x_2, y_2) = a_4 x_2^2 + a_5 y_2$.

Soit (x_2^*, y_2^*) le point d'équilibre du système. Celui-ci est donné par $x_2^* = \lambda_2 + O(r_2^2 + \lambda_2^2 + r_2 \lambda_2)$, $y_2^* = O(r_2^2 + \lambda_2^2 + r_2 \lambda_2)$. Ainsi la jacobienne au point d'équilibre est donnée par

$$J(x_2^*, y_2^*) = \begin{pmatrix} 2\lambda_2 + r_2 a_2 + O(r_2^2 + \lambda_2^2 + r_2 \lambda_2) & -1 + O(r_2^2 + \lambda_2^2 + r_2 \lambda_2) \\ 1 + O(r_2^2 + \lambda_2^2 + r_2 \lambda_2) & r_2 a_5 + O(r_2^2 + \lambda_2^2 + r_2 \lambda_2) \end{pmatrix}.$$

Le calcul des valeurs propres et du premier coefficient de Lyapounov apportent la preuve de la proposition 3. Il faut cependant être prudent : Les conditions de transversalité doivent être vérifiées comme une condition en $\lambda(\varepsilon)$. C'est à dire qu'il faut vérifier que

$$\frac{d\alpha}{d\varepsilon}(\tilde{\lambda}_2(\sqrt{\varepsilon})) \neq 0,$$

où $\alpha(\tilde{\lambda}_2(\sqrt{\varepsilon}))$ est la partie réelle de la valeur propre de la jacobienne et $\lambda_2 = r_2 \tilde{\lambda}_2 = \sqrt{\varepsilon} \tilde{\lambda}_2$. De même, il faut vérifier que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \text{Re}(L_1(\lambda_2(\sqrt{\varepsilon}))) \neq 0$$

où L_1 est le premier coefficient de Lyapounov.

Pour prouver la proposition 4 il faut d'abord exprimer le système (1.24) comme un système hamiltonien perturbé. C'est à dire mettre le système (1.24) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix}' = e^{2y_2} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial y_2} \\ -\frac{\partial H}{\partial x_2} \end{pmatrix} (x_2, y_2) + r_2 G(x_2, y_2) + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + O(r_2(\lambda_2 + r_2)), \quad (1.25)$$

où H est l'hamiltonien du système. La condition pour qu'un cycle du système hamiltonien persiste est alors donnée par le zéro de la première fonction de Melnikov

$$r_2 d_{r_2} + \lambda_2 d_{\lambda_2} = 0,$$

où d_{r_2} et d_{λ_2} sont données par :

$$\begin{aligned} d_{r_2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{grad}[H(\gamma(t))] \cdot G(\gamma(t)) dt \\ d_{\lambda_2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{grad}[H(\gamma(t))] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt \end{aligned} \quad (1.26)$$

où $\gamma(t)$ est l'orbite périodique recherchée.

1.4 Propriétés d'invariance d'échelle de la forme normale de la bifurcation de Andronov-Hopf et équations de Liénard

1.4.1 Propriétés d'invariance d'échelle de la forme normale

Soit le système

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= y - \frac{x^2}{2} \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Il s'agit de la forme normale de la bifurcation de Hopf singulière, après les transformations suivantes : $y \rightarrow -y$, $t \rightarrow -t$. Effectuons le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\varepsilon} x \\ y &= \varepsilon y \\ t &= \sqrt{\varepsilon} t. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Dans ces nouvelles coordonnées, le système devient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x^2 \\ \dot{y} &= -x \end{aligned} \quad (1.29)$$

Nous retrouvons le fait que l'ordre de grandeur de la partie imaginaire des valeurs propres de la jacobienne du système à l'origine peut apparaître explicitement dans la donnée du système.

1.4.2 Système de Liénard généralisé : mise en place d'une théorie perturbative

Une équation de Liénard généralisée est un système de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - f(x) \\ \dot{y} &= -g(x)\end{aligned}\tag{1.30}$$

où f et g sont des fonctions polynômiales. Pour notre cadre d'analyse, il est pertinent de réécrire un tel système de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \left(\frac{x^2}{2} + \sum_{i=0}^N \alpha_i x^i \right) \\ \dot{y} &= - \left(x + \sum_{i=0}^K \beta_i x^i \right).\end{aligned}\tag{1.31}$$

En effet, nous allons voir que, sous certaines conditions, dans le cas lent-rapide, l'absorption du ε dans l'équation par le même changement de variables que précédemment conduit à un système qui se présente comme une perturbation de l'équation (1.27).

Soit le système lent-rapide

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - \left(\frac{x^2}{2} + \sum_{i=0}^N \alpha_i x^i \right) \\ \dot{y} &= - \left(x + \sum_{i=0}^K \beta_i x^i \right).\end{aligned}\tag{1.32}$$

Reprenons le changement d'échelle (1.28). Alors le système (1.32) devient

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{\alpha_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\varepsilon}} x + \alpha_2 x^2 + \sum_{i=3}^N \alpha_i \sqrt{\varepsilon}^{i-2} x^i \right) \\ \dot{y} &= - \left(x + \frac{\beta_0}{\sqrt{\varepsilon}} + \beta_1 x + \sum_{i=2}^K \beta_{i-1} \sqrt{\varepsilon}^{i-1} x^i \right).\end{aligned}\tag{1.33}$$

Ainsi, nous pourrions considérer que (1.33) est une perturbation de la forme normale si

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \varepsilon o(\varepsilon), \alpha_1 = \sqrt{\varepsilon} o(\varepsilon), \alpha_2 = o(\sqrt{\varepsilon}) \\ \beta_0 &= \sqrt{\varepsilon} o(\varepsilon), \beta_1 = o(\varepsilon).\end{aligned}$$

1.4.3 Calcul des coefficients de l'explosion de cycle dans le cas d'un système de Liénard lent-rapide

Dans le cas du système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \frac{x^2}{2}[1 + \alpha x + O(x^2)] \\ \dot{y} &= -\varepsilon(x[1 + \beta x + O(x^2)] + \lambda[1 + O(x)]). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Il est clair que les hypothèses (H1)-(H4) sont vérifiées. Les fonctions définies dans la partie précédente valent :

$$\begin{aligned} h_1 &= -1 & h_2 &= -\frac{1}{2}[1 + \alpha x + O(x^2)] & h_3 &= 0 \\ h_4 &= -[1 + \beta x + O(x^2)] & h_5 &= -[1 + O(x)] & h_6 &= 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 & a_2 &= 0 & a_3 &= -\frac{\alpha}{2} \\ a_4 &= -\beta & a_5 &= 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Nous obtenons ainsi

$$A = -\frac{3}{2}\alpha + 2\beta.$$

1.5 Intégration explicite de la forme normale

1.5.1 Fonction de Lambert

Considérons la fonction :

$$f : w \mapsto z = we^w. \quad (1.37)$$

Cette fonction est localement inversible au voisinage de $w = 0$ et le théorème d'inversion de Lagrange donne cette inverse comme la série :

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n. \quad (1.38)$$

Cette série convergente définit la *branche principale* de la fonction de Lambert [16].

Remarquons que f présente un point critique en $w = -1$, donc une valeur critique en $z = -1/e$. Cela implique que le rayon de convergence de la série est inférieur ou égal à $1/e$. En fait, on peut vérifier qu'il est exactement égal à $1/e$, en utilisant le critère de Cauchy.

Le lemme suivant est démontré dans [16] (p. 23). Pour le confort du lecteur nous en rappelons ici la preuve.

Lemme 1. *La fonction de Lambert présente un point de ramification d'ordre 2 au point $z = -1/e$. Plus précisément, si on change la variable z en $p = \sqrt{2(ez + 1)}$, il existe une série convergente sur le disque $p \in D(0, \sqrt{2})$ telle que :*

$$W_0(z) = -1 + \Phi(p) = -1 + p - \frac{1}{3}p^2 + \frac{11}{72}p^3 + \dots \quad (1.39)$$

Preuve Posons $z = we^w$, avec $w = -1 + u$. On obtient $w = \frac{1}{e}(-1 + u)e^u$, si bien que :

$$z = \frac{1}{e} \left[-1 + \sum_{k \geq 2} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) u^k \right]. \quad (1.40)$$

If $p = \sqrt{2(ez + 1)}$,

$$z = \frac{p^2}{2} - 1 = -1 + \frac{u^2}{2} + \dots \quad (1.41)$$

Par le théorème d'inversion locale, on obtient deux branches analytiques :

$$\begin{aligned} u &= \Phi(p) = p + \dots \\ u &= \Phi(-p) = -p + \dots \end{aligned} \quad (1.42)$$

Les deux branches sont notées $W_0(z) > -1$, $z \in \mathbb{R}$ et W_{-1} , respectivement :

$$\begin{aligned} W_0(z) &= -1 + \Phi(p) \\ W_{-1}(z) &= -1 + \Phi(-p). \end{aligned} \quad (1.43)$$

□

Ces deux branches correspondent aux deux solutions réelles de l'équation $we^w = z$. Il y a en fait une infinité d'autres solutions complexes de l'équation qui définissent d'autres branches.

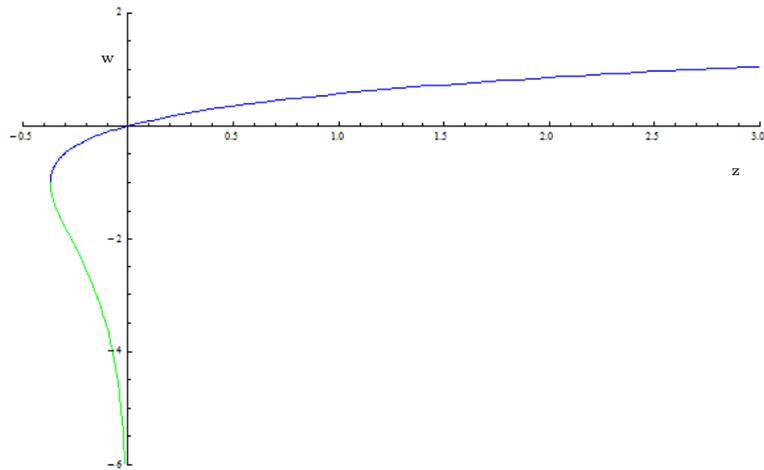


FIGURE 1.5 – Les deux branches réelles de la fonction de Lambert sur $] -1/e, +\infty[$ tracées avec *mathematica*.

En bleu la branche principale W_0 , en vert W_{-1} .

1.5.2 Intégration explicite de la forme normale avec la fonction de Lambert

Reprenons le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \frac{x^2}{2} \\ \dot{y} &= -x.\end{aligned}\tag{1.44}$$

Une intégrale première de cette équation est :

$$e^{-y} \left[\frac{x^2}{2} - y - 1 \right] = h \in [-1, +\infty[.\tag{1.45}$$

Remarquons que pour $h \in [-1, 0[$ les courbes $H(x, y) = h$ sont fermées et sont donc des orbites périodiques du système (1.44). En posant $u = -y - \frac{x^2}{2} - 1$, nous obtenons :

$$ue^u = \frac{h}{e} e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Ainsi, pour $h < 0$ les trajectoires peuvent être séparées en deux graphes au dessus de l'axe des x .

$$\begin{aligned}y_+(x, h) &= \frac{x^2}{2} - 1 - W_{-1}\left(\frac{h}{e} e^{x^2/2}\right), \\ y_-(x, h) &= \frac{x^2}{2} - 1 - W_0\left(\frac{h}{e} e^{x^2/2}\right).\end{aligned}\tag{1.46}$$

Pour $h \leq 0$, il n'y a qu'une seule solution $y_-(x, h) = \frac{x^2}{2} - 1 - W_0(\frac{h}{e}e^{x^2/2})$.

Si nous rétablissons les coordonnées initiales en présence de deux échelles de temps, on trouve que le système (1.27) admet l'hamiltonien suivant :

$$H(x, y, \varepsilon) = e^{-y/\varepsilon} \left(\frac{x^2}{2} - y - \varepsilon \right) = h \in [-\varepsilon, +\infty[\quad (1.47)$$

Nous obtenons ainsi, la paramétrisation des orbites $\forall h \in [-\varepsilon, 0[$:

$$\begin{aligned} y_+(h, x, \varepsilon) &= \frac{x^2}{2} - \varepsilon(1 + W_{-1}(\frac{h}{e}e^{\frac{x^2}{2\varepsilon}})) \\ y_-(h, x, \varepsilon) &= \frac{x^2}{2} - \varepsilon(1 + W_0(\frac{h}{e}e^{\frac{x^2}{2\varepsilon}})). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Les points d'intersection avec la courbe $y = \frac{x^2}{2}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} x^\pm(h) &= \pm \sqrt{-2\varepsilon \ln(-h)} \\ y^+(h) &= -\varepsilon \ln(-h). \end{aligned} \quad (1.49)$$

1.5.3 Étude des cycles de la forme normale

Dans cette partie, on souhaite préciser le flot du champ de vecteurs sur les orbites périodiques. On va vérifier que le flot est rapide sur la partie supérieure de l'orbite et lent sur la partie inférieure. On pourrait déduire ce résultat des théorèmes généraux d'asymptotique des systèmes lents-rapides. On donne ici à titre d'exercice une estimation de l'évolution du flot sur la partie supérieure de l'orbite qui est basée sur l'asymptotique des fonctions de Lambert. Soit $\gamma_h(t)$ une orbite périodique du système (1.27) qui part du point $(0, \bar{y})$ à l'instant 0 et qui correspond à la ligne de niveaux $H(\gamma_h(t)) = h$. Elle va à la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2}$ qu'elle atteint au point (y^+, x^+) (qui correspond au point d'intersection de W_{-1} et W_0 calculé précédemment) à l'instant t^+ . Puis elle se rapproche de la parabole $y = x^2/2 - \varepsilon$ qu'elle longe lentement jusqu'au point $(0, L_+(h))$ qu'elle atteint à l'instant T^+ . On donne ici l'estimation $t^+ = t^+(\varepsilon) = O\sqrt{\varepsilon}$.

On peut également suivre $\gamma_h(t)$ par inversion du temps. Dans ce cas, la trajectoire va à la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2}$ qu'elle atteint au point $(y^-, x^-) = (y^+, -|x^+|)$ (car le système est symétrique) à l'instant t^- , puis elle se rapproche de la parabole

$y = x^2/2 - \varepsilon$ qu'elle longe lentement jusqu'au point $(0, L_-(h) = L_+(h))$ qu'elle atteint à l'instant T^- .

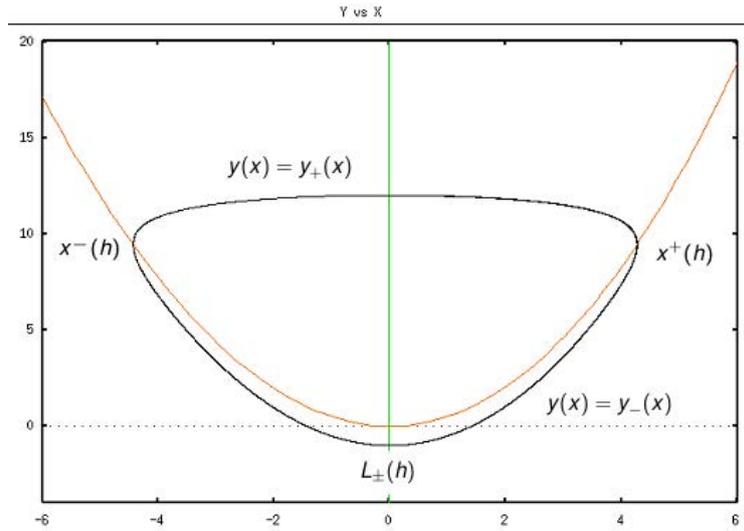


FIGURE 1.6 – En noir l'orbite $\gamma_h(t)$, en rouge, la nullcline $\dot{x} = 0$, en vert la nullcline $\dot{y} = 0$.

Proposition 6. Le temps t^+ mis par l'orbite pour atteindre le point (x^+, y^+) est d'ordre de grandeur $O(\sqrt{\varepsilon})$.

Preuve

$$\begin{aligned}
 t^+ &= \int_0^{x^+} dt \\
 &= \varepsilon \int_0^{x^+} \frac{1}{y(x) - x^2/2} dx \\
 &= \varepsilon \int_0^{x_\alpha} \frac{1}{y_+(x) - x^2/2} dx + \varepsilon \int_{x_\alpha}^{x^+} \frac{1}{y_+(x) - x^2/2} dx
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Où (x_α, y_α) est le point atteint à l'instant $t_\alpha < t^+$ tel que $y_\alpha = x_\alpha^2/2 + \varepsilon^\alpha$. Alors

$$\begin{aligned}
 t^+ &= \varepsilon \int_0^{x_\alpha} \frac{1}{y(x) - x^2/2} dx + \varepsilon \int_{x_\alpha}^{x^+} \frac{1}{y(x) - x^2/2} dx \\
 &\leq \varepsilon \int_0^{x_\alpha} \frac{1}{\varepsilon^\alpha} dx - \int_{x_\alpha}^{x^+} \frac{1}{1 + W_{-1}(\frac{h}{e} e^{x^2/2\varepsilon})} dx \\
 &= \varepsilon^{1-\alpha} x_\alpha - \int_{x_\alpha}^{x^+} \frac{1}{1 + W_{-1}(\frac{h}{e} e^{x^2/2\varepsilon})} dx \\
 &= O(\varepsilon^{1-\alpha}) - \int_{x_\alpha}^{x^+} \frac{1}{1 + W_{-1}(\frac{h}{e} e^{x^2/2\varepsilon})} dx.
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Les données satisfont : $x_\alpha < \sqrt{2\bar{y}}$.

Par définition de x_α , on a :

$$\begin{aligned}
\frac{x_\alpha^2}{2} - \varepsilon[1 + W_{-1}(\frac{h}{e}e^{x_\alpha^2/2\varepsilon})] &= \frac{x_\alpha^2}{2} + \varepsilon^\alpha \\
\Leftrightarrow -\varepsilon^{1-\alpha}[1 + W_{-1}(\frac{h}{e}e^{x_\alpha^2/2})] &= 1 \\
\Leftrightarrow W_{-1}(\frac{h}{e}e^{x_\alpha^2/2\varepsilon}) &= -1 - \varepsilon^{\alpha-1} \\
\Leftrightarrow \frac{h}{e}e^{x_\alpha^2/2\varepsilon} &= -(1 + \varepsilon^{\alpha-1})e^{-(1+\varepsilon^{\alpha-1})}.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Afin de calculer l'intégrale restante, on pose :

$$\begin{aligned}
u &= \frac{h}{e}e^{\frac{x^2}{2\varepsilon}} \\
x &= \sqrt{2\varepsilon(1 + \ln(u/h))} \\
dx &= \frac{2\varepsilon}{u} \frac{du}{2\sqrt{2\varepsilon(1 + \ln(u/h))}}.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

On obtient alors :

$$-\int_{x_\alpha}^{x^+} \frac{1}{1+W_{-1}(\frac{h}{e}e^{x^2/2\varepsilon})} dx = -\varepsilon \int_{-(\varepsilon^{\alpha-1}+1)e^{-(\varepsilon^{\alpha-1}+1)}}^{-e^{-1}} \frac{1}{u(1+W_{-1}(u))} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon[1+\ln(u/h)]}} du. \tag{1.54}$$

On estime la valeur de $\sqrt{2\varepsilon(1 + \ln(u/h))}$.

$$\begin{aligned}
-(1 + \varepsilon^{\alpha-1})e^{-(1+\varepsilon^{\alpha-1})} &\geq u &\geq -e^{-1} \\
-\frac{(1+\varepsilon^{\alpha-1})e^{-(1+\varepsilon^{\alpha-1})}}{h} &\leq \frac{u}{h} &\leq -\frac{e^{-1}}{h} \\
-\frac{(1+\varepsilon^{\alpha-1})e^{-(1+\varepsilon^{\alpha-1})}}{-\frac{\bar{y}+\varepsilon}{\varepsilon}e^{-\bar{y}/\varepsilon}} &\leq \frac{u}{h} &\leq -\frac{e^{-1}}{-\frac{\bar{y}+\varepsilon}{\varepsilon}e^{-\bar{y}/\varepsilon}} \\
\frac{(\varepsilon+\varepsilon^\alpha)}{\bar{y}+\varepsilon}e^{(-1-\varepsilon^{\alpha-1}+\bar{y}/\varepsilon)} &\leq \frac{u}{h} &\leq -\frac{\varepsilon}{\bar{y}+\varepsilon}e^{-1+\bar{y}/\varepsilon} \\
\ln(\frac{\varepsilon+\varepsilon^\alpha}{\bar{y}+\varepsilon}) - \varepsilon^{\alpha-1} + \bar{y}/\varepsilon &\leq \ln(u/h) + 1 &\leq \ln(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}) + \bar{y}/\varepsilon \\
2\varepsilon \ln(\frac{\varepsilon+\varepsilon^\alpha}{\bar{y}+\varepsilon}) - 2\varepsilon^\alpha + 2\bar{y} &\leq 2\varepsilon[\ln(u/h) + 1] &\leq 2\varepsilon \ln(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}) + 2\bar{y} \\
2\bar{y} + O(\varepsilon \ln(\varepsilon^\alpha)) &\leq 2\varepsilon[\ln(u/h) + 1] &= 2\bar{y} + O(\varepsilon \ln(\varepsilon)).
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
2\varepsilon[1 + \ln(u/h)] &= 2\bar{y} + O(\varepsilon \ln(\varepsilon)), \\
\sqrt{2\varepsilon[1 + \ln(u/h)]} &= \sqrt{2\bar{y}} + O(\varepsilon \ln(\varepsilon)).
\end{aligned} \tag{1.56}$$

En injectant ce résultat dans l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \int_{-(\varepsilon^{\alpha-1}+1)e^{-(\varepsilon^{\alpha-1}+1)}}^{-e^{-1}} \frac{1}{u(1+W_{-1}(u))} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon[1+\ln(u/h)]}} du \\
= & -\varepsilon \int_{-(1+\varepsilon^{\alpha-1})e^{\varepsilon^{\alpha-1}+1}}^{-e^{-1}} \frac{W'_{-1}(u)}{W_{-1}(u)} \frac{1}{\sqrt{2\bar{y}}+O(\varepsilon \ln \varepsilon)} du \\
= & -\varepsilon \int_{-(1+\varepsilon^{\alpha-1})e^{\varepsilon^{\alpha-1}+1}}^{-e^{-1}} \frac{W'_{-1}(u)}{W_{-1}(u)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\bar{y}}} + O(\varepsilon \ln(\varepsilon)) \right) du \quad (1.57) \\
= & \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2\bar{y}}} + O(\varepsilon \ln(\varepsilon)) \right) \ln(\varepsilon^{\alpha-1} + 1) \\
= & \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2\bar{y}}} + O(\varepsilon \ln(\varepsilon)) \right) (\varepsilon^{\alpha-1} + o(\varepsilon^{\alpha-1})) \\
= & O(\varepsilon^\alpha).
\end{aligned}$$

En combinant les résultats, on obtient :

$$t^+ \lesssim O(\varepsilon^{1-\alpha}) + O(\varepsilon^\alpha) \quad (1.58)$$

qui est minimum et vaut $O(\sqrt{\varepsilon})$ pour $\alpha = 1/2$.

□

Application de premier retour Dans ce cas, $L_+ = L_-$ est l'application :

$$\bar{y} \rightarrow -\varepsilon[1 + W_0(-(\bar{y}/\varepsilon + 1)e^{-\bar{y}/\varepsilon-1})].$$

Calcul des exposants de Floquet Le système étant de dimension deux, l'exposant de Floquet différent de 1 vaut

$$\lambda = \int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt.$$

Soit :

$$\begin{aligned}
I^+(h) &= \int_0^{T^+} \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{T^+} f'(x(t)) dt \\
&= -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{t^+} f'(x(t)) dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_{t^+}^{T^+} f'(x(t)) dt \\
&= -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{x^+(h)} \frac{\varepsilon f'(x)}{y(x)-f(x)} dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_{x^+(h)}^0 \frac{\varepsilon f'(x)}{y(x)-f(x)} dx \\
&= -\int_0^{x^+(h)} \frac{f'(x)}{-\varepsilon[1+W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})]} dx - \int_0^{x^+(h)} \frac{f'(x)}{-\varepsilon[1+W_0(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})]} dx \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{x^+(h)} \frac{f'(x)}{1+W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} - \frac{f'(x)}{1+W_0(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} \\
&= \int_0^{x^+(h)} \frac{[W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})]'}{W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} - \frac{[W_0(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})]'}{W_0(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} \\
&= \ln\left(\frac{W_0(h\varepsilon^{-1})}{W_{-1}(h\varepsilon^{-1})}\right).
\end{aligned} \tag{1.59}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
[W(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})] &= \frac{f'(x)}{\varepsilon} \frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon} \frac{W(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})}{\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon} [1+W(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})]} \\
&= \frac{f'(x)}{\varepsilon} \frac{W(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})}{1+W(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})}.
\end{aligned} \tag{1.60}$$

De plus, par définition de $x^\pm(h)$, $W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x^\pm(h))/\varepsilon}) = -1$. Ainsi, $I(h) = 0$. De même,

$$I^-(h) = \int_0^{T^-} \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt = 0. \tag{1.61}$$

Il s'ensuit que $\lambda = 0$.

1.6 Explorations numériques par xppAut

Les systèmes lents-rapides étant extrêmement raides, le calcul numérique des solutions exige le recours à des méthodes de calcul fines. Les simulations numériques présentes dans cette thèse sont réalisées avec le logiciel Xpp et la package Auto. Voyons quelles méthodes numériques sont employées.

De façon générale, le but est de calculer une branche de solution d'une équation non linéaire de la forme :

$$F(X) = 0, F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

C'est un système sous déterminé ainsi, sauf aux singularités, l'ensemble des solutions est une courbe. De très nombreux problèmes peuvent se mettre sous cette forme. En particulier l'étude d'une branche de solution d'une équation différentielle ordinaire dépendant d'un paramètre

$$\dot{x} = F(x, \lambda). \quad (1.62)$$

Dans notre cas, cette branche de solution peut être de deux natures : Soit il s'agit d'une branche de point d'équilibre, auquel cas nous rencontrons un problème stationnaire ; soit une branche d'orbite périodique, auquel cas nous rencontrons un problème au bord.

1.6.1 Continuation par rapport à un paramètre

Supposons qu'une solution de la forme

$$F(U_0) = 0, U_0 = (u_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

est connue. Il s'agit de trouver une branche de solutions paramétrée par $\lambda : (u(\lambda), \lambda)$. La première stratégie est d'utiliser la méthode de Newton pour trouver une solution du problème augmenté suivant :

$$\begin{aligned} F(u_1, \lambda_1) &= 0 \\ \lambda_1 &= \lambda_0 + \Delta\lambda, \end{aligned}$$

où $\Delta\lambda$ est donné et avec $u_1^0 = u_0 + \Delta\lambda \dot{u}_0$ comme approximation d'origine.

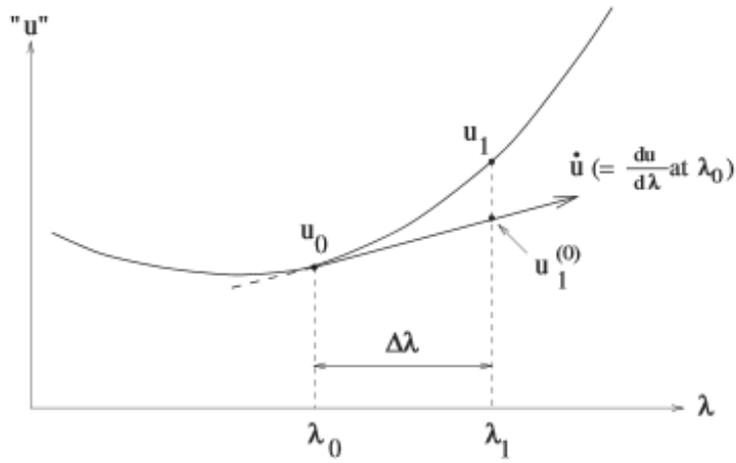


FIGURE 1.7 – *Interprétation graphique de la continuation par rapport à un paramètre. Tirée de [23].*

Remarquons que cette méthode ne converge pas lorsque la branche de solution présente un pli. Pour résoudre cette difficulté, il suffit de continuer la branche de solution en faisant varier la longueur d'arc au lieu de faire varier le paramètre. C'est le principe de la « Pseudo-Arclength Continuation de Keller » utilisée par AUTO (voir [30]).

1.6.2 Pseudo-Arclength Continuation de Keller

A nouveau, supposons une solution (u_0, λ_0) de l'équation 1.62 connue. Au lieu d'imposer la valeur du changement de paramètre, fixons la valeur du changement de la longueur d'arc s . Il suffit alors d'utiliser la méthode de Newton pour résoudre le problème augmenté suivant :

$$\begin{aligned} F(u_1, \lambda_1) &= 0, \\ (u_1 - u_0)^T \dot{u}_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) \dot{\lambda}_0 - \Delta s &= 0, \end{aligned} \tag{1.63}$$

où Δs est fixé et avec $u_1^0 = u_0 + \Delta s \dot{u}_0$, $\lambda_1^0 = \lambda_0 + \Delta s \dot{\lambda}_0$ comme approximation initiale.

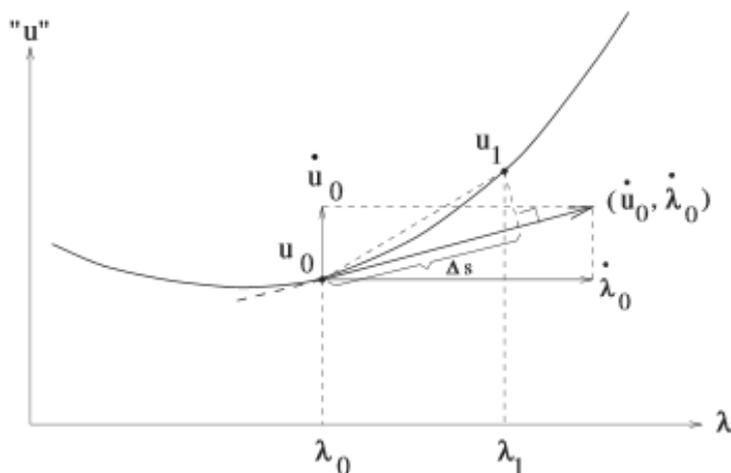


FIGURE 1.8 – *Interprétation graphique de la continuation par rapport à la longueur d'arc.*
Tirée de [23].

Comme le montre la figure 1.8, cette méthode converge vers la solution même lorsque la branche de solution présente un pli. Cette méthode s'adapte bien dans la recherche de solution périodique.

1.6.3 Problème au bord et collocation orthogonale

Problème au bord Le but est maintenant de rechercher une solution à l'équation

$$\begin{aligned} u'(t) - f(u(t), \mu, \lambda) &= 0 \\ t &\in [0, 1] \end{aligned} \quad (1.64)$$

où λ est le paramètre de continuation et respectant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} b(u(0), u(1), \mu, \lambda) &= 0 \\ \int_0^1 q(u(t), \mu, \lambda) dt &= 0. \end{aligned} \quad (1.65)$$

La première égalité est la condition au bord, la deuxième la contrainte intégrale.

Collocation orthogonale Afin de pouvoir continuer une branche de solutions périodiques de l'équation (1.64), la première étape est de discrétiser celle-ci. Com-

mençons donc par découper l'intervalle de temps représenté par une période :

$$[0, 1] = \cup [t_{j-1}, t_j] \quad j = 1, \dots, N \quad t_j - t_{j-1} = h.$$

Approchons maintenant u par une fonction continue P^m , polynomiale par morceaux qui est polynomiale de degré m sur chaque intervalle $[t_{j-1}, t_j]$, $j \in [1, N]$.

On calcule alors une solution p_h^j de degré m telle que $\rightarrow z_{j,i}$ sont les racines de degré m du polynôme de Legendre sur l'intervalle $[t_{j-1}, t_j]$

La solution P_h doit satisfaire les conditions (1.65). L'équation de continuation par rapport à la pseudo longueur d'arc devient :

$$\int_0^1 (u(t) - u_0(t))^T \dot{u}_0(t) dt + (\mu - \mu_0)^T \dot{\mu}_0 + (\lambda - \lambda_0) \dot{\lambda}_0 - \delta s = 0.$$

1.6.4 Continuation d'une branche d'orbites périodiques

Pour trouver les solutions périodiques de l'équation $u'(t) - f(u(t), \lambda) = 0$, Auto résout un problème au bord. Afin de mettre l'équation sous la bonne forme, Auto fixe l'intervalle de périodicité par la transformation

$$\begin{aligned} u'(t) &= T f(u(t), \lambda) \\ u(0) &= u(1). \end{aligned}$$

La période T est alors une inconnue du système. Remarquons que la solution de cette équation n'est pas unique. En effet, si $\tilde{u}_k(t)$ est une solution, alors $\tilde{u}_k(t + \tau)$ en est une autre pour tout τ . Nous choisissons celle qui minimise

$$D(\tau) = \int_0^1 \|\tilde{u}_k(t + \tau) - \tilde{u}_{k-1}(t)\|_2^2 dt.$$

En écrivant $u_k(t)$ la solution, cela revient à chercher u_k tel que :

$$\int_0^1 u_k(t)^T u_{k-1}(t) dt = 0.$$

Ce qui fournit une contrainte intégrale appelée *condition de la phase intégrale*. Ainsi posé, le problème se présente bien comme un problème au bord que Auto résout avec

un schéma de collocation orthogonale. L'équation de continuation par rapport à la longueur d'arc par la méthode de Keller s'écrit

$$\int_0^1 (u_k(t) - u_{k-1}(t))^T \dot{u}_{k-1}(t) dt + (T_k - T_{k-1})^T \dot{T}_{k-1} + (\lambda_k - \lambda_{k-1})^T \dot{\lambda}_{k-1} = \Delta s.$$

Chapitre 2

Explosion globale de cycles limites (d'une bifurcation de Andronov-Hopf à une bifurcation homocline)

2.1 Paramétrisation par les fonctions de Lambert des solutions d'une équation de Liénard généralisée intégrable

Dans cette section nous allons étendre le travail réalisé sur la forme normale de la bifurcation de Hopf singulière dans la catégorie des équations de Liénard généralisées définies en introduction.

2.1.1 Une équation de Liénard généralisée intégrable

Soit un système dynamique défini par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - f(x) \\ \dot{y} &= -f'(x), \end{aligned} \tag{2.1}$$

Où f est un polynôme en x . On suppose que tous les points critiques de f (les zéros de $f'(x)$) sont simples. À une translation des coordonnées près, on peut supposer que l'un des minima locaux de f est à l'origine. Dans ce cas, f est de la forme $f(x) = \frac{x^2}{2} + O(x^3)$. L'équation (2.1) est intégrable et a pour hamiltonien

$$H : (x, y) \rightarrow e^{-y}[f(x) - y - 1].$$

Cette famille de systèmes intégrables est particulièrement intéressante car il y a une forme explicite de l'intégrale première. Une solution évidente est donnée par : $\{y = f(x) - 1\}$.

Lemme 2. *Les points critiques de la fonction H sont exactement les points (x_0, y_0) tels que $f'(x_0) = 0$ et $y_0 = f(x_0)$. Les valeurs critiques de H sont $h_0 = -\exp(-f(x_0)) < 0$. Les points critiques de H sont des points de Morse soit de type centre (pour les minima locaux de $f(x)$), soit de type selles (pour les maxima locaux de $f(x)$).*

Preuve Si on choisit un système de coordonnées locales centrées au point $(x_0, y_0 = f(x_0))$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + X \\ y &= f(x_0) + Y, \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le développement de Taylor de H au point (x_0, y_0) est :

$$H(X, Y) = e^{-f(x_0)} \left[-1 + \frac{f''(x_0)}{2} X^2 + 2Y^2 + \dots \right] \tag{2.3}$$

ce qui prouve le lemme.

□

Remarquons que les orbites fermées de l'hamiltonien associé avec H ne peuvent pas intersecter la courbe lente (qui est contenue dans $H = 0$). Puisque elles doivent contenir un point critique de H dans leur intérieure, elles sont nécessairement toutes au-dessus de la courbe lente, dans le domaine de l'union des $\{H = h < 0\}$. De plus, le lemme de Morse montre que toutes les orbites proches d'un point critique associé à un minima de f sont nécessairement fermées. Le portrait de phase de l'hamiltonien de H se présente comme des continuums d'orbites périodiques, autour de chaque point critique de type centre.

Par le théorème d'isotopie de Thom, le type topologique des lignes de niveaux de $\{H = h\}$ ne peut changer que lorsque h traverse une valeur critique. Ces niveaux critiques correspondent à des boucles homoclines ou hétéroclines. Dans certains cas, un continuum d'orbites périodiques borné par une boucle hétérocline peut être inclu dans un autre ensemble d'orbites périodiques.

Exemples 1

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - f(x) \\ \dot{y} &= -f'(x)\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\text{avec : } f(x) = (x + 1)x(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 3).$$

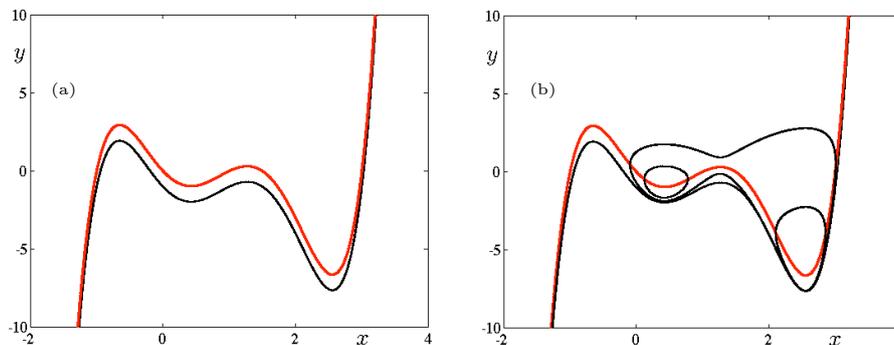


FIGURE 2.1 – La courbe lente $\{y = f(x) - 1\}$ (en noir) et la courbe critique (en rouge); image (a). Trois cycles appartenant à trois continuums; image (b).

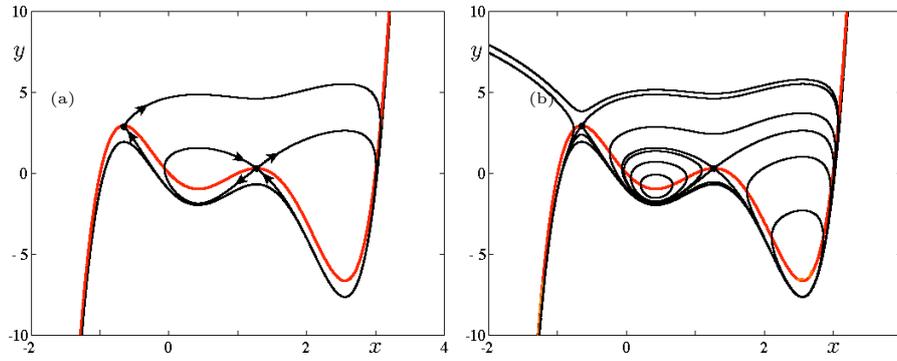


FIGURE 2.2 – Les trois boucles homoclines bornant chacun des trois continuums; image (a). Portrait de phase complet; image (b).

Exemples 2

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - f(x) \\ \dot{y} &= -f'(x) \end{aligned} \tag{2.5}$$

avec : $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$.

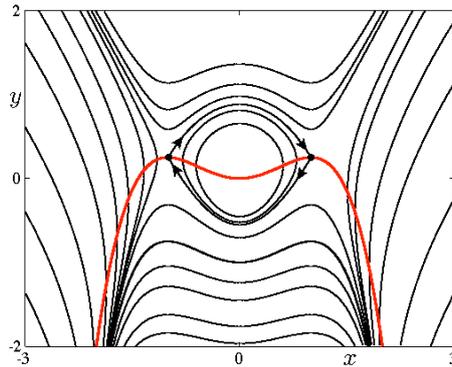


FIGURE 2.3 – Un continuum d'orbites périodiques borné par une boucle hétérocline.

Les deux cas présentés sur les figures 2.2 et 2.3 donnent tous les types de portraits de phases possibles. Tout système de la forme de (2.1) aura un portrait de phase composé de centres entourés de continuums d'orbites périodiques délimités par des boucles homoclines ou hétéroclines.

2.1.2 Paramétrisation des lignes de niveau de H par la fonction de Lambert

Revenons au système (2.1) dont une intégrale première est

$$e^{-y} [f(x) - y - 1] = h = \text{constante.}$$

En posant $u = -y - f(x) - 1$, nous obtenons :

$$ue^u = \frac{h}{e} e^{f(x)}.$$

Ainsi, les trajectoire peuvent être divisées en deux parties

$$\begin{aligned} y_+ &= f(x) - 1 - W_{-1}\left(\frac{h}{e} e^{f(x)}\right), \\ y_- &= f(x) - 1 - W_0\left(\frac{h}{e} e^{f(x)}\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Remarque 1. *Une orbite périodique intersecte transversalement la courbe $y = \frac{x^2}{2}$ en exactement deux points.*

Comme dans le cas quartique vu dans le chapitre 1, cela permet une paramétrisation des trajectoires :

Lemme 3. *Soit γ une trajectoire quelconque du système 2.8. Alors, $y = f(x) - 1 - W\left(\frac{h}{e} e^{f(x)}\right)$ où W vaut W_{-1} au-dessus de la courbe $y = f(x)$ et vaut W_0 au-dessous de la courbe $y = f(x)$.*

2.2 Version lente-rapide

Soit maintenant le système dynamique lent-rapide (à deux échelles de temps) :

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= y - f(x) \\ \dot{y} &= -f'(x), \end{aligned} \tag{2.7}$$

où $f(x) = x^2/2 + O(x^3)$ est une fonction polynomiale et où $0 < \varepsilon \ll 1$. Après le changement d'échelle $(x, y, t) \rightarrow (\varepsilon^{1/2}x, \varepsilon y, \varepsilon^{1/2}t)$ le système devient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - f_\varepsilon(x) \\ \dot{y} &= -f'_\varepsilon(x). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nous avons vu dans la partie 1.4.2 que ce système se présente comme une perturbation de la forme normale de la bifurcation de Hopf. L'équation (2.8) est intégrable et a pour intégrale première

$$H : (x, y) \rightarrow e^{-y}[f_\varepsilon(x) - y - 1].$$

Dans les coordonnées initiales, l'intégrale première est :

$$H : (x, y) \rightarrow e^{-y/\varepsilon}[f(x) - y - \varepsilon].$$

Cette fois ci, la courbe lente est explicitement donnée par $\{y = f(x) - \varepsilon\}$ et les orbites périodiques sont données par $H = h \in [-\varepsilon, h_{max}[$. Où, h_{max} est la valeur de l'hamiltonien correspondant à la boucle homocline ou hétérocline bornant le continuum d'orbites périodiques.

2.3 Explosion globale et simulations numériques

Dans ce chapitre, nous allons utiliser les outils vu précédemment pour étudier une catégorie particulière de système lent-rapide. C'est une première étape pour aborder un problème plus général, à savoir l'existence possible de bifurcations qui conduisent à un changement radical de portrait de phase pour une très petite (de l'ordre de 10^{-7} dans l'exemple présenté ici) variation de paramètre. Nous mettons en évidence l'existence de telle perte de stabilité extrêmement rapide dans un exemple de perturbation singulière. Cet exemple est fortement inspiré de l'explosion des *cycles canards* découverts et étudiés d'abord par E. benoit, J.-L. Callot, F. Diener et M. Diener. ([7]) Après avoir présenté le système perturbé nous donnons un preuve numérique de la très rapide perte de stabilité en utilisant la continuation numérique. Nous évaluons ensuite l'intervalle dans lequel varie le paramètre de la naissance du cycle par bifurcations de Hopf à sa disparition par bifurcation homocline. Pour finir, nous utilisons la fonction de Lambert afin d'estimer le paramètre pour lequel la bifurcation homocline a lieu.

Soit la famille d'équation de Liénard intégrable (dépendante du paramètre α) :

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - \frac{x^2}{2} - \alpha \frac{x^3}{3} \\ \dot{y} &= -x - \alpha x^2,\end{aligned}\tag{2.9}$$

que nous perturbons de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - \frac{x^2}{2} - \alpha \frac{x^3}{3} \\ \dot{y} &= -x - x^2(\alpha - \beta) + \sqrt{\varepsilon}\mu.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Après changement d'échelle le système devient :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \frac{x^2}{2} - \sqrt{\varepsilon}\alpha \frac{x^3}{3} \\ \dot{y} &= -x - \sqrt{\varepsilon}x^2(\alpha - \beta) + \mu.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Les simulations numériques sont réalisées avec le logiciel XPPAUT [30]. Ces simulations correspondent au deux parties de la figure 2.5. Pour $\alpha = 0.395$, $\sqrt{\varepsilon} = 0.03125$ et $\beta = 0.01$, un petit canard naît pour μ très petit et négatif. Puis, pour μ entre -0.0003128 et -0.0003127 , il y a explosion du cycle, le petit canard saute au canard maximal qui disparaît par une bifurcation homocline. Afin de saisir les différentes étapes de la bifurcation à partir de la bifurcation de Hopf jusqu'à la bifurcation homocline via l'explosion canard, on a utilisé la continuation numérique avec le software package AUTO. L'utilisation de la Path-following method [45], combinée au solveur au valeur-limite [25, 26], est très efficace pour traiter numériquement des problèmes à plusieurs échelles de temps, qui sont très raides à cause de la très forte repulsivité de la direction normale de la variété lente, et ce, tout particulièrement dans le régime canard ; voir [17] pour plus de détails sur le sujet. Afin d'illustrer ce propos, nous présentons Fig. 2.4 le diagramme de bifurcation du système 2.11 par rapport à μ (panel (a)) ainsi qu'une sélection de cycle canard s'approchant de la connexion homocline (panel (b)).

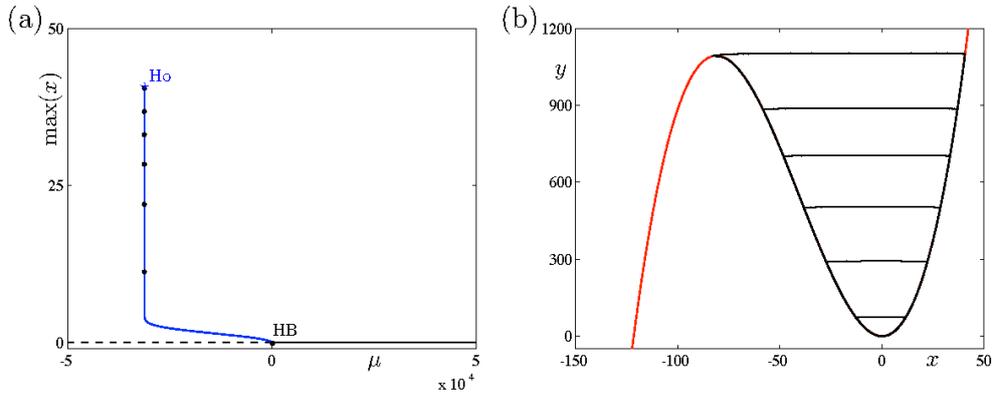


FIGURE 2.4 – (a) : Diagramme de bifurcation du système 2.11 par rapport à μ . (b) : Quelques cycles limites de la branche explosive (in blue) montée en (a), qui s'approchent de la connexion homocline.

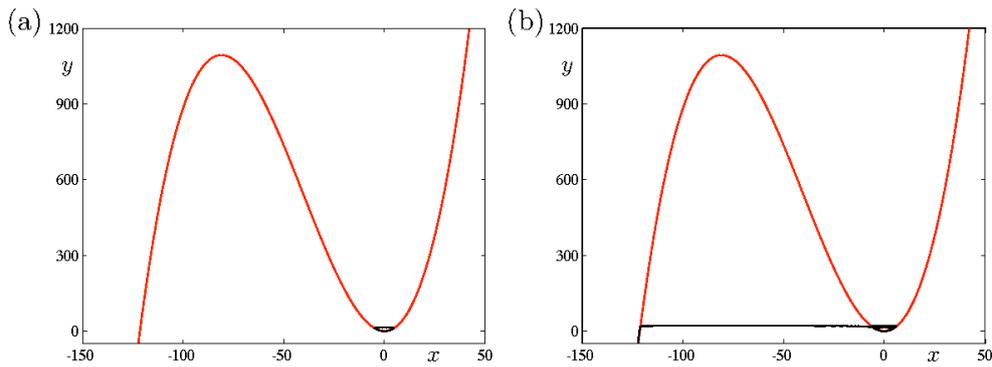


FIGURE 2.5 – (a) : Petit cycle canard pour $\alpha = 0.395$, $\sqrt{\varepsilon} = 0.03125$, $\beta = 0.01$ et $\mu = -0.0003127$. (b) : Une trajectoire avec la même condition initiale pour $\mu = -0.0003128$.

Le même phénomène se produit pour $\alpha = 0.395$, $\sqrt{\varepsilon} = 0.03125$, $\mu = -0.0003126$: un petit cycle canard saute à la bifurcation homocline lorsque β décroît entre 0.00999534 et 0.00999533.

2.4 Vérification de l'existence de l'explosion par la méthode de Eckhaus

Nous avons vu dans le chapitre 1 une méthode géométrique pour prouver l'explosion canard. Reprenons cette méthode : le système (2.10) peut s'écrire

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -yh_1(x, y, \tilde{\mu}) + \frac{x^2}{2}h_2(x, y, \tilde{\mu}) + \varepsilon h_3(x, y, \tilde{\mu}) \\ \dot{y} &= \varepsilon[xh_4(x, y, \tilde{\mu}) - \tilde{\mu}h_5(x, y, \tilde{\mu}) + yh_6(x, y, \tilde{\mu})]\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}h_1 &= -1, & h_2 &= -(1 + x\frac{2\alpha}{3}), & h_3 &= 0 \\ h_4 &= -[1 + x(\alpha + \beta)], & h_5 &= -1, & h_6 &= 0,\end{aligned}$$

et $\tilde{\mu} = \sqrt{\varepsilon}\mu$. Alors on a

$$a_1 = a_2 = a_5 = 0, \quad a_4 = -\alpha - \beta \quad \text{et} \quad a_3 = -\frac{2\alpha}{3},$$

où a_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont les constantes définies dans le premier chapitre partie 1.3.

Le calcul de la constante A nous donne

$$A = -2a_2 + 3a_3 - 2a_4 - 2a_5 = 2\beta.$$

D'après la proposition 3 il y a une bifurcation de Hopf pour $\tilde{\mu} = 0$ (ce qui se vérifie facilement par le calcul des valeurs propres de la jacobienne du système) et d'après la proposition 4 il y a explosion de cycle pour

$$\tilde{\mu} = \frac{A}{8}\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}) = \frac{\beta}{4}\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}),$$

soit

$$\mu = \tilde{\mu}/\sqrt{\varepsilon} = \frac{\beta}{4}\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

Avec les valeurs prises pour les simulations numériques, cela donne $\mu = 0.0000781 + O(\varepsilon)$. La partie explicite de la valeur de ce paramètre ne correspond pas à ce qui est observé numériquement. Cela permet de remarquer que ce résultat théorique n'a en fait aucun intérêt dans notre cas. En effet, puisque β est un paramètre de

perturbation, il décroît vers zéro avec ε . Ainsi l'ordre de grandeur de $A\sqrt{\varepsilon}$ peut être inférieur à ε . C'est ce qui se passe ici.

Pour estimer la valeur du paramètre de bifurcation μ et prouver la présence d'un phénomène d'explosion de cycle nous allons donc recourir à une autre approche, basée sur des expansions asymptotiques. Nous suivons ici de près les estimations proposées par Eckhaus pour le cas de l'équation de van der Pol. Il y a de bonnes raisons de penser que cette approche est adaptée car, dans le cas intégrable, on a une équation explicite pour la courbe lente. Puisque nous savons que les courbes canards suivront de près la solutions $y = f(x) - \varepsilon$ il semble logique de chercher une solution qui s'écrira comme une perturbation de cette courbe. Pour simplifier l'écriture nous nommons la perturbation de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= y - f(x) = y - \frac{x^2}{2} - \alpha \frac{x^3}{3} \\ \dot{y} &= -f'(x) + \delta(x) = -x - \alpha x^2 + \sqrt{\varepsilon} \mu + \beta x^2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Comme rappelé précédemment, pour $\delta(x) = 0$, $y - f(x) = -\varepsilon$ est solution de l'équation (2.9). Pour $\delta(x) \neq 0$ nous chercherons donc une solution ϕ de l'équation

$$y - f(x) = -\varepsilon - \varepsilon^2 \phi(x, \varepsilon)$$

sur un intervalle $[x_0, x_1]$ tel que $|x_0| \leq \frac{1}{\alpha}$.

Le système d'équation se réécrit alors avec les variables x et ϕ ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -1 - \varepsilon \phi \\ \varepsilon \dot{\phi} &= -\frac{\delta(x)}{\varepsilon} - \phi f'(x). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Il s'ensuit que ϕ est solution de l'équation différentielle

$$\varepsilon[-1 + \varepsilon \phi] \frac{d\phi}{dx} = -f'(x)\phi - \frac{\delta(x)}{\varepsilon}$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \left[\frac{f'(x)}{\varepsilon} + \varepsilon \phi'(x) \right] \phi(x) + \frac{\delta(x)}{\varepsilon} \\ &= \left[\frac{f(x)}{\varepsilon} + \varepsilon \phi(x) \right]' \phi(x) + \frac{\delta(x)}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Nous allons résoudre cette équation différentielle par la méthode de variation de la constante. La solution dépendra bien sûr de la fonction ϕ elle-même. Puisque nous ne voulons pas une solution explicite mais une condition d'existence sur les paramètres, la stratégie consistera alors à mettre en évidence les conditions pour que cette solution reste bornée. Cela passe par un assez grand nombre d'expansions asymptotiques. Pour faciliter la lecture nous donnons ici le résultat.

Lemme 4. *Pour $\beta = O(\varepsilon)$, il y a un cycle canard pour*

$$\mu = -\sqrt{\varepsilon}\beta(1 + o_\varepsilon(1)) + \sigma\varepsilon^{5/2}e^{-p^2/\varepsilon}$$

pour un certain $p > 0$ et où $o_\varepsilon(1)$ signifie $o(1)$ en ε .

Pour parvenir à ce résultat commençons par résoudre l'équation homogène

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \left[\frac{f(x)}{\varepsilon} + \varepsilon\phi(x) \right] \phi(x), \\ \Rightarrow \phi(x) &= Ke^{\frac{f(x)-f(x_0)}{\varepsilon} + \varepsilon(\phi(x)-\phi(x_0))}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Par la méthode de variation de la constante, nous obtenons pour solution de l'équation (2.14)

$$\begin{aligned} \phi(x) &= e^{\frac{Q(x)}{\varepsilon}} \left[\phi(x_0) e^{-\frac{Q(x_0)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{x_0}^x e^{-\frac{Q(t)}{\varepsilon}} \delta(t) dt} \right] \\ Q(x) &= f(x) + \varepsilon^2 \phi(x). \end{aligned} \quad (2.16)$$

A quelles conditions sur $\delta(x)$ existe-il une solution bornée? En suivant la méthode de Eckhaus nous définissons l'intervalle $I = [x_0, x_1]$ tel que $\forall x \in I, Q(x) \leq Q(x_0)$. Soit V l'espace des fonctions continues $v(x, \varepsilon)$ définies sur $[x_0, x_1]$ et bornées lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On pose

$$\phi(x) = T_2(\phi)(x) + T_1(\phi)(x) \quad (2.17)$$

où T_1 et T_2 sont des opérateurs définis sur V par :

$$\begin{aligned} T_2(v)(x) &= \phi(x_0) e^{\frac{Q(v,x)-Q(v,x_0)}{\varepsilon}} \\ T_1(v)(x) &= e^{\frac{Q(v,x)}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{x_0}^x e^{-\frac{Q(v,t)}{\varepsilon}} \delta(t) dt \\ Q(v,x) &= f(x) + \varepsilon^2 v(x). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Comme dans le cas de van der Pol, le but va être de prouver l'existence d'une solution par théorème du point fixe et de montrer que la linéarisation

$$\hat{\phi}(x) = T_1(0)(x) + T_2(0)(x),$$

tant qu'elle reste bornée, est une bonne approximation de la solution ϕ .

Il est immédiat que

$$T_2(v)(x) = T_2(0)(x)[1 + O(\varepsilon)].$$

Il en découle que

$$T_2(v)(x) = O(e^{-\frac{p^2}{\varepsilon}})$$

pour une certaine constante p .

L'analyse de ϕ_1 est plus délicate. Pour des raisons techniques, nous considérerons un prolongement continu de f et v en dehors de $[x_0, x_1]$ tel que les intégrales

$$\int_{x_0}^{x_1} e^{-\frac{Q(v,t)}{\varepsilon}} \frac{\delta(t)}{\varepsilon} dt$$

soient bien définies. La valeur de cette intégrale subit une variation de l'ordre de $O(e^{-\frac{f(x_0)}{\varepsilon}}) + O(e^{-\frac{f(x_1)}{\varepsilon}})$ lorsque l'on change les prolongements de f et v . Pour tout $v \in V$, soit $\delta_v(t)$ tel que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Q(v,t)}{\varepsilon}} \frac{\delta_v(t)}{\varepsilon} dt = 0. \quad (2.19)$$

Il nous faut maintenant obtenir une relation sur μ et β qui permette de remplir cette condition. Nous vérifierons ensuite que cette relation fournit un critère suffisant pour garantir l'existence de la solution.

Les égalités suivantes sont immédiates v étant borné.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{t^2}{\varepsilon} e^{-\frac{Q(v,t)}{\varepsilon}} dt &= (1 + O(\varepsilon)) \int_0^x \frac{t^2}{\varepsilon} e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt \\ \int_{x_0}^x e^{-\frac{Q(v,t)}{\varepsilon}} dt &= (1 + O(\varepsilon)) \int_0^x e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt. \end{aligned} \quad (2.20)$$

La deuxième intégrale s'approche bien par l'intégrale de Gauss, penchons nous sur la première.

Pour commencer, remarquons que

$$\int_{x_0}^x \frac{t^2}{\varepsilon} (1 + \alpha t) e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt = \int_{x_0}^x \frac{t}{\varepsilon} f'(t) e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt = x_0 e^{-\frac{f(x_0)}{\varepsilon}} - x e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}} + \int_{x_0}^x e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt.$$

Prouvons que

$$\int_{x_0}^x \frac{t^2}{\varepsilon} e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt = (1 + o(1)) \int_{x_0}^x \frac{t^2}{\varepsilon} (1 + \alpha t) e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt.$$

Pour cela, coupons les intégrales en deux, de part et d'autre de l'origine. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^x \frac{t^3}{\varepsilon} e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt}{\int_0^x \frac{t^2}{\varepsilon} e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt} &= \frac{\int_0^x e^{-\frac{f(t)-3\varepsilon \ln(t)}{\varepsilon}} dt}{\int_0^x e^{-\frac{f(t)-2\varepsilon \ln(t)}{\varepsilon}} dt} \\ &= \frac{\int_0^x e^{-\frac{g_3(t)}{\varepsilon}} dt}{\int_0^x e^{-\frac{g_2(t)}{\varepsilon}} dt} \end{aligned}$$

Le maximum de $-g_3(t)$ est atteint pour $t = \sqrt{3\varepsilon} + O(\varepsilon)$, le maximum de $-g_2(t)$ est atteint pour $t = \sqrt{2\varepsilon} + O(\varepsilon)$. Ainsi, par la méthode de Laplace, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^x \frac{t^3}{\varepsilon} e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt}{\int_0^x \frac{t^2}{\varepsilon} e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt} &\sim \frac{\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon}{g_3''(\sqrt{3\varepsilon+O(\varepsilon)})}} e^{-\frac{g_3(\sqrt{3\varepsilon+O(\varepsilon)})}{\varepsilon}}}{\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon}{g_2''(\sqrt{2\varepsilon+O(\varepsilon)})}} e^{-\frac{g_2(\sqrt{2\varepsilon+O(\varepsilon)})}{\varepsilon}}} \\ &= K\sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

où $K = O(1)$ en ε .

Nous pouvons refaire exactement la même chose entre x_0 et 0.

Il s'ensuit que

$$\int_{x_0}^x \frac{t^2}{\varepsilon} e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt = (1 + O(\sqrt{\varepsilon})) \int_{x_0}^x \frac{t^2}{\varepsilon} f'(t) e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt.$$

Nous pouvons maintenant utiliser des expansions asymptotiques pour trouver une valeur approchée de μ et β telle que l'équation (2.19) soit vérifiée. Cette équation se réécrit

$$\frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt = -\beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} \frac{t^2}{\varepsilon} dt.$$

Déroulons maintenant le calcul en injectant le résultat précédent dans l'équation :

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\int_{x_0}^x e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt + O(e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}}) \right] &= -\beta \left[\int_{x_0}^x e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} \frac{t^2}{\varepsilon} dt + O(e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}}) \right] \\
 \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\int_{x_0}^x e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt + O(e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}}) \right] &= -\beta \left[(1 + O(\sqrt{\varepsilon})) \left(\int_{x_0}^x e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt + x_0 e^{-\frac{f(x_0)}{\varepsilon}} + x e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + O(e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}}) \right] \\
 \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\int_{x_0}^x e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt + O(e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}}) \right] &= -\beta(1 + O(\sqrt{\varepsilon})) \left[\int_{x_0}^x e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt + O(e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}}) \right].
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que l'intégrale est grande devant $O(e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}})$ pour obtenir une expression liant μ et β . Ce qui est immédiat par la méthode de Laplace puisque

$$\int_{x_0}^x e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} dt \sim \sqrt{2\varepsilon\pi}.$$

Si bien que l'équation (2.21) nous donne

$$\mu = -\sqrt{\varepsilon}\beta(1 + O(\sqrt{\varepsilon})) [1 + O(\varepsilon^{-1/2} e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}}) + O(\varepsilon^{-1/2} e^{-\frac{f(x_0)}{\varepsilon}})]. \tag{2.22}$$

Nous pouvons maintenant vérifier que l'opérateur T_1 est contractant :

$$T_1(v)(x) = \frac{e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}}}{\varepsilon} e^{\varepsilon v(x)} \int_{x_0}^x e^{-\frac{f(t)}{\varepsilon}} [\sqrt{\varepsilon}\mu + \beta t^2] e^{\varepsilon v(t)} dt.$$

Si x_0 est tel que $|x_0| \leq \sqrt{1 + O(\sqrt{\varepsilon})}$, tous les termes sous l'intégrale sont de signe constant et on obtient, comme dans le cas de van der Pol que

$$T_1(v)(x) = O(\sqrt{\varepsilon}) \|v\|_{\infty}.$$

Si $|x_0| > \sqrt{1 + O(\sqrt{\varepsilon})}$, alors si $x_0 < x \leq -\sqrt{1 + O(\sqrt{\varepsilon})}$, le terme sous l'intégrale reste de signe constant et il n'y a pas de difficulté particulière. Sinon coupons l'intégrale

de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
T_1(v)(x) &= \frac{e^{\frac{f(x)}{\varepsilon}}}{\varepsilon} e^{\varepsilon v(x)} \int_{x_0}^x e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}} [\sqrt{\varepsilon}\mu + \beta t^2] e^{\varepsilon v(t)} dt \\
&= \frac{e^{\frac{f(x)}{\varepsilon}}}{\varepsilon} e^{\varepsilon v(x)} \int_{-\sqrt{1+o(1)}}^{-\sqrt{1+o(1)}} e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}} [\sqrt{\varepsilon}\mu + \beta t^2] e^{\varepsilon v(t)} dt \\
&\quad + \frac{e^{\frac{f(x)}{\varepsilon}}}{\varepsilon} e^{\varepsilon v(x)} \int_{-\sqrt{1+o(1)}}^x e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}} [\sqrt{\varepsilon}\mu + \beta t^2] e^{\varepsilon v(t)} dt \\
&= O\left(e^{\frac{f(x)-f(-\sqrt{1+o(1)})}{\varepsilon}}\right) + \frac{e^{\frac{f(x)}{\varepsilon}}}{\varepsilon} e^{\varepsilon v(x)} \int_{-\sqrt{1+o(1)}}^x e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}} [\sqrt{\varepsilon}\mu + \beta t^2] e^{\varepsilon v(t)} dt
\end{aligned}$$

Si $x \leq \sqrt{1+O(\sqrt{\varepsilon})}$ le signe sous l'intégrale est de signe constant et $0 < f(x) < f(-\sqrt{1+d})$. Ainsi nous obtenons

$$T_1(v)(x) = T_1(0)(x) + O(\sqrt{\varepsilon})\|v\|_{\infty} + O(e^{-\frac{p^2}{\varepsilon}})$$

pour un certain p .

Si $x > \sqrt{1+O(\sqrt{\varepsilon})}$ il suffit de recouper l'intégrale en $\sqrt{1+O(\sqrt{\varepsilon})}$ pour parvenir au même résultat. Ainsi, l'opérateur T_1 est contractant et le théorème du point fixe garantit l'existence d'une solution.

Soit δ_{ϕ} tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon} - \varepsilon\phi_1} \frac{\delta_{\phi}(x)}{\varepsilon} dx = 0.$$

Notons μ_{ϕ} et le paramètre correspondant à δ_{ϕ} . Il ne reste plus qu'à vérifier sous quelle perturbation de δ_{ϕ} cette solution persiste et reste bornée. Considérons une perturbation de μ_c de la forme :

$$\mu = \mu_{\phi} + \sigma\varepsilon^{5/2} e^{-\frac{p^2}{\varepsilon}}. \quad (2.23)$$

Dans ces conditions

$$\phi_1(v, x) = e^{\frac{Q(x)}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^x e^{-\frac{Q(t)}{\varepsilon}} \frac{\delta_{\phi}(t)}{\varepsilon} dt + e^{\frac{Q(x)}{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sigma e^{-\frac{p^2}{\varepsilon}} \int_{x_0}^x e^{-\frac{Q(t)}{\varepsilon}} dt. \quad (2.24)$$

De la même manière que précédemment, on peut vérifier l'existence d'une solution bornée $\forall x \in [x_0, x_1]$ telle que $Q(x) < p^2$. De plus, la formule $\mu_{\phi} = -\sqrt{\varepsilon}\beta$ donne

une première approximation valable de la condition sur les paramètres pour que que l'équation (2.19) soit vérifiée. En effet, pour $\beta = 0.01$, $\sqrt{\varepsilon} = 0,03125$ on a $\mu = -0,0003125$ ce qui est proche des valeurs obtenues avec xpp.

Remarque 2. *Le système de van Der Pol est le même que le système (2.10) avec $\beta = \alpha$. Ainsi, le résultat pour Van der Pol est un cas particulier de notre étude.*

Remarque 3. *Dans l'analyse à la Eckhaus, rien n'impose à β d'être un $o(1)$ en ε . Cependant, dans ce travail, β est un paramètre de perturbation et se doit donc d'être petit. Dans la suite nous imposerons $\beta = O(\varepsilon^\tau)$ où $0 < \tau + 1/2 < 2$. Ce choix d'ordre de grandeur sera justifié dans la partie suivante.*

2.5 Stratégie basée sur l'application de premier retour et la paramétrisation par les fonctions de Lambert

On veut maintenant développer une autre stratégie basée sur l'application de premier retour et ses premières dérivées données en terme d'intégrale de fonction de Lambert afin de trouver le paramètre correspondant à l'explosion canard.

2.5.1 Introduction d'une équation sur les paramètres et existence de la solution

On pose

$$\begin{aligned} h &= e^{-\frac{y}{\varepsilon}} \left[\frac{f(x)}{\varepsilon} - \frac{y}{\varepsilon} - 1 \right] \\ \omega &= e^{-\frac{y}{\varepsilon}} \frac{y-f(x)}{\varepsilon} - e^{-\frac{-y}{\varepsilon}} (-f'(x) - \delta(x)) dx \\ &= dh - e^{-\frac{y}{\varepsilon}} \delta(x) dx. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Considérons une solution de l'équation (2.10) passant par le point $(0, -\varepsilon[1+W_{-1}(he^{-1})])$. Soit $L_+(h, \beta, \mu)$ la première intersection (en valeur de y) entre cette trajectoire et l'axe des abscisses $\{x = 0\}$ en suivant le flot en temps positif. Soit $L_-(h, \beta, \mu)$ le

point d'intersection avec $\{x = 0\}$ de cette trajectoire en suivant le flot en temps négatif. Soit $\gamma_{\mu,\beta,h}$ la courbe fermée formée de l'union des arcs de la trajectoire entre les deux points $L_+(h, \beta, \mu)$ et $L_-(h, \beta, \mu)$ et du segment $[L_-(h, \beta, \mu), L_+(h, \beta, \mu)]$ sur l'axe $x = 0$. Alors, l'équation intégrale :

$$\int_{\gamma_{\mu,\beta}} \omega = \int_{\gamma_{\mu,\beta}} dh - \int_{\gamma_{\mu,\beta}} e^{-\frac{y}{\varepsilon}} \delta(x) dx,$$

donne la condition :

$$\begin{aligned} L_+(h, \mu, \beta) - L_-(h, \mu, \beta) &= - \int_{\gamma_{\mu,\beta}} e^{-\frac{y}{\varepsilon}} \delta(x) dx \\ &= - \int_{\gamma_0} e^{-\frac{y}{\varepsilon}} \delta(x) dx + \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\int_{\gamma_{\mu,\beta}} x^2 e^{-\frac{y}{\varepsilon}} dx \right) \Big|_{\mu=\beta=0} \\ &\quad + \beta \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\int_{\gamma_{\mu,\beta}} x^2 e^{-\frac{y}{\varepsilon}} dx \right) \Big|_{\mu=\beta=0} \\ &\quad + \sqrt{\varepsilon} \beta \mu \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\int_{\gamma_{\mu,\beta}} e^{-\frac{y}{\varepsilon}} dx \right) \Big|_{\mu=\beta=0} \\ &\quad + \sqrt{\varepsilon} \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\int_{\gamma_{\mu,\beta}} e^{-\frac{y}{\varepsilon}} dx \right) \Big|_{\mu=\beta=0} \\ &\quad + O(\beta^3). \end{aligned}$$

En effet, d'après l'étude réalisée par la méthode de Eckhaus $\mu = O(\sqrt{\varepsilon}\beta) = O(\varepsilon^{\tau+1/2})$.

Évaluons l'ordre de grandeur des dérivées :

$$\int_{\gamma_{\mu,\beta}} x^2 e^{-\frac{y}{\varepsilon}} dx = \int_{x_{\mu,\beta}^-}^{x_{\mu,\beta}^+} x^2 e^{-y^+/\varepsilon} dx - \int_{x_{\mu,\beta}^-}^0 x^2 e^{-y^-/\varepsilon} dx - \int_0^{x_{\mu,\beta}^+} x^2 e^{-y^-/\varepsilon} dx.$$

où y^+ représente la partie supérieure de la trajectoire, y^- la partie inférieure, x^+ et x^- l'intersection de la trajectoire avec la cubique $y = x^2/2 + \alpha x^3/3$. En dérivant cette égalité nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\int_{\gamma_{\mu,\beta}} x^2 e^{-\frac{y}{\varepsilon}} dx \right) \Big|_{\mu=\beta=0} &= -\frac{1}{\varepsilon} \left[\int_{x_{0,0}^-}^{x_{0,0}^+} x^2 e^{-y^+/\varepsilon} \frac{\partial y^+}{\partial \nu} dx - \int_{x_{0,0}^-}^0 x^2 e^{-y^-/\varepsilon} \frac{\partial y^-}{\partial \nu} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{x_{0,0}^+} x^2 e^{-y^-/\varepsilon} \frac{\partial y^-}{\partial \nu} dx \right] + 2 \frac{\partial x^+}{\partial \nu} (x^+)^2 e^{-f(x^+)/\varepsilon} \\ &\quad - 2 \frac{\partial x^-}{\partial \nu} (x^-)^2 e^{-f(x^-)/\varepsilon}, \end{aligned}$$

où $\nu = \mu$ ou β . Les deux deniers éléments de la somme sont exponentiellement petits en ε . Qu'en est il des intégrales? La première est la plus facile à estimer. En effet, $y^+(x) = f(x^\pm) + O(\varepsilon)$, ainsi

$$-\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_{0,0}^-}^{x_{0,0}^+} x^2 e^{-y^+/\varepsilon} \frac{\partial y^+}{\partial \nu} dx = O(\varepsilon^{-1} e^{-f(x^+)/\varepsilon}).$$

Penchons nous maintenant sur

$$-\int_0^{x_{0,0}^+} x^2 e^{-y^-/\varepsilon} \frac{\partial y^-}{\partial \nu} dx,$$

les résultats seront les mêmes pour l'intégrale entre x^- et 0. Nous avons vérifié précédemment que $y^- - f(x) + \varepsilon = O(1)\varepsilon^2$. Ainsi, $\forall x, |y^-(\beta, \mu, x) - y^-(0, 0, x)| = O(\varepsilon^2)$, puis,

$$\begin{aligned} \frac{|y^-(\beta, \mu, x) - y^-(0, 0, x)|}{\mu} &= O(\varepsilon^{2-\tau-1/2}), \\ \frac{|y^-(\beta, \mu, x) - y^-(0, 0, x)|}{\beta} &= O(\varepsilon^{2-\tau}). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^-}{\partial \mu} &= O(\varepsilon^{2-\tau-1/2}), \\ \frac{\partial y^-}{\partial \beta} &= O(\varepsilon^{2-\tau}). \end{aligned}$$

cela nous mène aux égalités

$$\begin{aligned} \int_0^{x_{0,0}^+} x^2 e^{-y^-/\varepsilon} \frac{\partial y^-}{\partial \mu} dx &= O(\varepsilon^{2-\tau-1/2}) \int_0^{x_{0,0}^+} x^2 e^{-f(x)/\varepsilon} dx, \\ \int_0^{x_{0,0}^+} x^2 e^{-y^-/\varepsilon} \frac{\partial y^-}{\partial \beta} dx &= O(\varepsilon^{2-\tau}) \int_0^{x_{0,0}^+} x^2 e^{-f(x)/\varepsilon} dx. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^{x_{0,0}^+} x^2 e^{-f(x)/\varepsilon} dx &= \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} x^2 e^{-f(x)/\varepsilon} dx + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{x_{0,0}^+} x^2 e^{-f(x)/\varepsilon} dx \\ &= O(1) \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} x^2 + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{x_{0,0}^+} x^2 e^{-f(x)/\varepsilon} dx \\ &= O(\varepsilon^{3/2}) + O(\varepsilon \sqrt{2\pi\varepsilon}) \quad (\text{par la méthode de Laplace}) \\ &= O(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned}$$

Il est clair que nous obtenons le même équivalent entre x^- et 0. Pour finir, il vient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{x_{0,0}^+} x^2 e^{-y^-/\varepsilon} \frac{\partial y^-}{\partial \mu} dx &= O(\varepsilon^{2-\tau-1/2}), \\ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{x_{0,0}^+} x^2 e^{-y^-/\varepsilon} \frac{\partial y^-}{\partial \beta} dx &= O(\varepsilon^{2-\tau}). \end{aligned}$$

Dont nous déduisons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\int_{\gamma_{\mu,\beta}} x^2 e^{-\frac{y}{\varepsilon}} dx \right) \Big|_{\mu=\beta=0} &= O(\varepsilon^{2-\tau-1/2}), \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\int_{\gamma_{\mu,\beta}} x^2 e^{-\frac{y}{\varepsilon}} dx \right) \Big|_{\mu=\beta=0} &= O(\varepsilon^{2-\tau}). \end{aligned}$$

Nous obtenons de même que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\int_{\gamma_{\mu,\beta}} e^{-\frac{y}{\varepsilon}} dx \right) \Big|_{\mu=\beta=0} &= O(\varepsilon^{1-\tau}), \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\int_{\gamma_{\mu,\beta}} e^{-\frac{y}{\varepsilon}} dx \right) \Big|_{\mu=\beta=0} &= O(\varepsilon^{1-\tau+1/2}). \end{aligned}$$

Soit en sommant le tout :

$$L_+(h, \mu, \beta) - L_-(h, \mu, \beta) = \int_{\gamma_0} e^{-y/\varepsilon} \delta(x) dx + O(\varepsilon^{3\tau}).$$

2.5.2 Approximation de la solution

Il s'agit maintenant de calculer, à l'aide de la fonction de Lambert, une approximation du paramètre de bifurcation μ , β étant fixé. Rappelons la paramétrisation des lignes de niveaux de l'hamiltonien

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) - \varepsilon [1 + W(\frac{h}{\varepsilon} e^{\frac{f(x)}{\varepsilon}})], \\ e^{W(u)} &= \frac{u}{W(u)} \end{aligned}$$

pour $W = W_{-1}$ ou $W = W_0$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{L_+(h,\beta,\mu) - L_-(h,\beta,\mu)}{h} &= \beta \underbrace{\int_{x^-(h)}^{x^+(h)} x^2 \left[\frac{1}{W_0\left(\frac{h}{e} e^{\frac{f(x)}{\varepsilon}}\right)} - \frac{1}{W_{-1}\left(\frac{h}{e} e^{\frac{f(x)}{\varepsilon}}\right)} \right] dx}_{I_2(h)} \\ &+ \sqrt{\varepsilon} \mu \underbrace{\int_{x^-(h)}^{x^+(h)} \frac{1}{W_0\left(\frac{h}{e} e^{\frac{f(x)}{\varepsilon}}\right)} - \frac{1}{W_{-1}\left(\frac{h}{e} e^{\frac{f(x)}{\varepsilon}}\right)} dx}_{I_1(h)} \\ &+ O((\sqrt{\varepsilon} \mu, \beta)^2). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Il est facile de vérifier que pour $h \neq -1$, $I_1(h)$ et $I_2(h) \neq 0$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites pour trouver un cycle en résolvant l'équation $L_+(h, \mu, \beta) - L_-(h, \mu, \beta) = 0$. La solution de cette équation compliquée peut en première approximation être approchée par la solution de l'équation

$$\beta I_2(h) + \sqrt{\varepsilon} \mu I_1(h) = 0. \quad (2.27)$$

MATHEMATICA et MAPLE, permettent de nombreux calculs impliquant les fonctions de Lambert [16] et permettent de résoudre numériquement cette équation. En résolvant l'équation (2.27) pour $h = -e^{-\frac{1}{6\alpha^2\varepsilon}}$ (le niveau de la boucle homocline) on trouve que la perte de stabilité doit avoir lieu pour $\mu \simeq 0.00031274$, ce qui est une approximation de très grande précision de ce qui est observé lors des simulations numériques.

Pour trouver une autre expression de μ en fonction de β et h , on va appliquer le théorème des fonctions implicites à μ :

Théorème 3. Théorème des fonctions implicites

Soit

- U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$,
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, \lambda) \rightarrow f(x, \lambda)$ de classe C^k , $k \geq 1$,
- $(x_0, \lambda_0) \in U$ tel que $f(x_0, \lambda_0) = 0$.

On note $f_\lambda(x) = f(x, \lambda)$ Dans ces conditions, si $d(f_{\lambda_0})(x_0) \neq 0$ alors il existe :

- un voisinage ouvert V de λ_0 dans \mathbb{R}^2 ,

- un voisinage ouvert W de x_0 dans \mathbb{R} ,
- une application $\phi : V \rightarrow W$ de classe C^k ,

tel que $W \times V \subset U$ et $\forall (x, \lambda) \in W \times V$,

$$f(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(\lambda).$$

De plus, $\forall x \in W$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}(\lambda) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(\phi(\lambda), \lambda)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(\lambda), \lambda)}.$$

Pour que le résultat soit global il suffit que la courbe $f(x, \lambda) = 0$ soit connexe par arc.

Afin d'appliquer le théorème on pose

$$\begin{aligned} F(h, \mu, \beta) &= \beta I_2(h) + \sqrt{\varepsilon} \mu I_1(h), \\ G(x, h) &= \frac{1}{W_0(\frac{h}{\varepsilon} e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}})} - \frac{1}{W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{-\frac{f(x)}{\varepsilon}})}. \end{aligned}$$

On sait que $\forall h_0 \in]-1, h_m[$, $F(h_0, 0, 0) = 0$

$$(\partial_\mu F)(h_0, \mu, 0) = \sqrt{\varepsilon} I_1(h) > 0,$$

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites : Il existe un voisinage $U \in]-1, h_m[$, $(h_0, 0)$, un voisinage V de 0 tel que

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow V \\ (h, \beta) &\rightarrow \phi(h, \beta) \end{aligned} \tag{2.28}$$

tel que

$$F(h, \phi(h, \beta), \beta) = 0.$$

Soit β petit et fixé. On note

$$\phi_\beta(h) := \phi(h, \beta).$$

Montrons que la courbe $\{F(h, \mu, \beta) = 0\} = C$ est connexe par arc. Soit (h_1, μ_1) et (h_2, μ_2) tel que $F(h_1, \mu_1, \beta) = F(h_2, \mu_2, \beta) = 0$. soit

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow (h(t), \mu(t)) = ((h_2 - h_1)t + h_1, \mu(h(t))), \end{aligned} \tag{2.29}$$

où

$$\mu(h(t)) = -\frac{\beta I_2(h(t))}{\sqrt{\varepsilon} I_1(h(t))}.$$

Il est clair que ce chemin est inclus dans C . Ainsi pour tout β suffisamment petit il existe une solution ϕ_β définie pour h variant entre $] -1, h_m[$.

Alors :

$$\begin{aligned} \phi'_\beta(h) &= -\frac{(\partial_h F)(h, \phi_\beta(h), \beta)}{(\partial_\mu F)(h, \phi_\beta(h), \beta)} \\ &= -\frac{\sqrt{\varepsilon} \phi_\beta(h) I'_1(h) + \beta I'_2(h)}{\sqrt{\varepsilon} I_1(h)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$\begin{aligned} \phi_\beta(h) &= -\left(\frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}} I_2(h) + K\right) \frac{1}{I_1(h)} \\ &= \frac{\beta I_2(h)}{\sqrt{\varepsilon} I_1(h)} + \frac{K}{I_1(h)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Nous allons maintenant montrer que $K = 0$. Puisque nous savons que $\mu(0) = 0$ (c'est la bifurcation de Hopf), il suffit de montrer que $\lim_{h \rightarrow -1} \frac{I_2(h)}{I_1(h)} = 0$. Rappelons que

$$0 \leq f(x) \leq -\varepsilon \ln(-h).$$

Cela implique que

$$\lim_{h \rightarrow -1} \frac{h}{e} e^{f(x)/\varepsilon} = -e^{-1}.$$

Or, comme on l'a déjà vu, la fonction W_0 admet en $-e^{-1}$ le développement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned} W_0(z) &= -1 + p + O(p^2) \\ p &= \sqrt{2(ez + 1)}, \\ W_0(z) &= -1 + p + O(p^2) \\ p &= -\sqrt{2(ez + 1)}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Si bien que, en posant $h = -1 + \delta$

$$\begin{aligned} W_0\left(\frac{h}{e} e^{f(x)/\varepsilon}\right) &= -1 + \sqrt{2\delta} e^{\frac{f(x)}{2\varepsilon}} + O(\delta) \\ W_{-1}\left(\frac{h}{e} e^{f(x)/\varepsilon}\right) &= -1 - \sqrt{2\delta} e^{\frac{f(x)}{2\varepsilon}} + O(\delta). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{W_0(\frac{h}{\varepsilon}e^{f(x)/\varepsilon})} - \frac{1}{W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon}e^{f(x)/\varepsilon})} &= \frac{2\sqrt{2\delta}e^{\frac{f(x)}{2\varepsilon}}}{1-2\delta e^{f(x)/2}} + O(\delta) \\ &= 2\sqrt{2\delta}e^{\frac{f(x)}{2\varepsilon}} + O(\delta). \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer la limite de $I_2(h)/I_1(h)$:

$$\begin{aligned} \frac{I_2(h)}{I_1(h)} &= \frac{\int_{x^-}^{x^+} x^2 [2\sqrt{2\delta}e^{\frac{f(x)}{2\varepsilon}} + O(\delta)] dx}{\int_{x^-}^{x^+} 2\sqrt{2\delta}e^{\frac{f(x)}{2\varepsilon}} + O(\delta) dx} \\ &= \frac{\int_{x^-}^{x^+} x^2 [e^{\frac{f(x)}{2\varepsilon}} + O(\sqrt{\delta})] dx}{\int_{x^-}^{x^+} e^{\frac{f(x)}{2\varepsilon}} + O(\sqrt{\delta}) dx}. \end{aligned}$$

Rappelons que $0 \leq f(x)/\varepsilon \leq -\ln(-h) = -\ln(1-\delta) = \delta + O(\delta^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{I_2(h)}{I_1(h)} &= \frac{\int_{x^-}^{x^+} x^2 [1 + \frac{f(x)}{2\varepsilon} + O((f(x)/\varepsilon)^2) + O(\sqrt{\delta})] dx}{\int_{x^-}^{x^+} 1 + \frac{f(x)}{2\varepsilon} + O((f(x)/\varepsilon)^2) + O(\sqrt{\delta}) dx} \\ &= \frac{\int_{x^-}^{x^+} x^2 [1 + O(\sqrt{\delta})] dx}{\int_{x^-}^{x^+} 1 + O(\sqrt{\delta}) dx} \\ &= \frac{[1 + O(\sqrt{\delta})] [\frac{(x^+)^3}{3} + \frac{(x^-)^3}{3}]}{[1 + O(\sqrt{\delta})] [x^+ + x^-]} \\ &= \frac{O(\delta^3)}{O(\delta)}. \end{aligned}$$

On en conclut que Φ_β se prolonge par continuité en -1 et que

$$\mu(h) = \phi_\beta(h) = -\frac{\beta I_2(h)}{\sqrt{\varepsilon} I_1(h)}.$$

Il est clair que Φ_β se prolonge également en h_m .

Calculons maintenant $I_1'(h)$ et $I_2'(h)$.

$$\begin{aligned} I_2'(h) &= \int_{x^-(h)}^{x^+(h)} x^2 \partial_h G(h, x) dx + (x^+)'(h) (x^+(h))^2 G(x^+(h), h) \\ &\quad - (x^-)'(h) (x^-(h))^2 G(x^-(h), h) \\ I_1'(h) &= \int_{x^-(h)}^{x^+(h)} \partial_h G(h, x) dx + (x^+)'(h) G(x^+(h), h) - (x^-)'(h) G(x^-(h), h). \end{aligned}$$

On a :

$$G(x^+(h), h) = G(x^-(h), h) = 0.$$

Par ailleurs

$$\partial_h G(h, x) = -\frac{1}{h} \left[\frac{1}{W_0(\frac{h}{\varepsilon} e^{\frac{f(x)}{\varepsilon}})[1+W_0(\frac{h}{\varepsilon} e^{\frac{f(x)}{\varepsilon}})]} - \frac{1}{W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{\frac{f(x)}{\varepsilon}})[1+W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{\frac{f(x)}{\varepsilon}})]} \right] < 0.$$

Si bien que :

$$\begin{aligned} I'_2(h) &= \int_{x^-(h)}^{x^+(h)} x^2 \partial_h G(h, x) dx \\ &= \tilde{I}_2(h) \\ I'_1(h) &= \int_{x^-(h)}^{x^+(h)} \partial_h G(h, x) dx \\ &= \tilde{I}_1(h). \end{aligned}$$

2.5.3 Étude du sens de variation du ratio des intégrales abéliennes

Étudier le sens de variation du rapport d'intégrales Abéliennes est toujours un problème épineux. L'expression de $I'_{1,2}$ ne nous permet pas de l'évaluer simplement. Nous reprenons ici la méthode proposée par C. Li en appendice de [27].

Posons

$$P(h) = \frac{I_2(h)}{I_0(h)} > 0$$

pour tout $h > -1$ et $P(-1) = 0$. Supposons que P ne soit pas strictement croissante. Alors, il existe un plus petit $h_0 \in]-1, h_m[$ tel que $P'(h_0) = 0$. Nous allons montrer que, sous cette hypothèse, il existe $h < h_0$ tels que $P(h) > P(h_0)$. Ce qui fournira une contradiction puisque $P(h) > P(-1)$.

$$\begin{aligned} P(h) - P(h_0) &= \frac{I_2(h)}{I_0(h)} - \frac{I_2(h_0)}{I_0(h_0)} \\ &= \frac{\xi(h) - \xi(h_0)}{I_0(h)I_0(h_0)} \\ &= \frac{\xi'(\theta)(h - h_0)}{I_0(h)I_0(h_0)} \end{aligned} \tag{2.33}$$

pour un certain $\theta \in]h, h_0[$ et où $\xi(h) = I_0(h_0)I_2(h) - I_0(h)I_2(h_0)$. Ainsi,

$$P(h) - P(h_0) = \frac{h-h_0}{I_0(h)} Q(\theta) \tag{2.34}$$

où $Q(h) = I_2'(h) - P(h_0)I_0'(h)$. Pour $h < h_0$, le signe de $P(h) - P(h_0)$ est le même que celui de $-Q(h)$. Il est clair que si $P'(h_0) = 0$, alors $Q(h_0) = 0$.

On a alors :

$$Q(h) = -\frac{1}{h} \int_{x^-(h)}^{x^+(h)} (x^2 - P(h_0)) \partial_h G(h, x) dx. \quad (2.35)$$

Puisque $Q(h_0) = 0$ et que $\partial_h G(h, x)$ est de signe constant il existe $x_1 \in]x^-(h_0), x^+(h_0)[$ tels que $x_1^2 - P(h_0) > 0$. Soit h_1 tel que $x^-(h_1) = -\sqrt{x_1^2}$.

Il est clair que $\{H = h_0\}$ entoure $\{H = h_1\}$. Alors les lignes $x = \pm\sqrt{P(h_0)}$ intersectent $\{H = h_0\}$. Soit $h \in]h_0, h_1[$. Alors les lignes $x = \pm\sqrt{P(h)}$ intersectent également $\{H = h\}$. L'anneau D entre $\{H = h\}$ et $\{H = h_0\}$ est ainsi coupé en quatre parties que l'on nomme D_1, D_2, D_3 et D_4 . Remarquons que l'on peut transformer l'expression de $Q(h)$. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{1}{W(\frac{h}{e} e^{f(x)})} &= \frac{1}{h} e^{-y} \\ \frac{1}{W(\frac{h}{e} e^{f(x)})[1+W(\frac{h}{e} e^{f(x)})]} dx &= \begin{cases} \frac{1}{y-f(x)} dx \\ \frac{1}{f'(x)} dy \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Finalement

$$\begin{aligned} Q(h) &= Q(h) - Q(h_0) \\ &= -\frac{1}{h} \int_{x^-(h)}^{x^+(h)} [x^2 - P(h_0)] \partial_h G(h, x) dx + \frac{1}{h_0} \int_{x^-(h_0)}^{x^+(h_0)} [x^2 - P(h_0)] \partial_h G(h, x) dx \\ &= -\frac{1}{h^2} \int_{H=h} [x^2 - P(h_0)] \frac{e^{-y}}{y-f(x)} dx + \frac{1}{h_0^2} \int_{H=h_0} [x^2 - P(h_0)] \frac{e^{-y}}{y-f(x)} dx \\ &= -\frac{1}{h^2} \int_{\partial D} [x^2 - P(h_0)] \frac{e^{-y}}{y-f(x)} dx. \end{aligned} \quad (2.37)$$

En effet, puisque $Q(h_0) = 0$ il est clair que $\frac{h_0^2}{h^2}Q(h_0) = 0$. Si bien que

$$\begin{aligned}
 Q(h) &= -\frac{1}{h^2} \int_{\partial D_1 \cup \partial D_3} [x^2 - P(h_0)] \frac{e^{-y}}{f'(x)} dy - \frac{1}{h^2} \int_{\partial D_2 \cup \partial D_4} [x^2 - P(h_0)] \frac{e^{-y}}{y-f(x)} dx \\
 &= -\frac{1}{h^2} \int_{D_1 \cup D_3} \frac{e^{-y}}{f'(x)^2} [x^2 + 2\alpha x P(h_0) + P(h_0)] dx dy \\
 &\quad + \frac{1}{h^2} \int_{D_2 \cup D_4} [x^2 - P(h_0)] \frac{-e^{-y}[f(x)-y] + e^{-y}}{[f(x)-y]^2} dx dy \\
 &= -\frac{1}{h^2} \int_{D_1 \cup D_3} \frac{e^{-y}}{f'(x)^2} [x^2 + 2\alpha x P(h_0) + P(h_0)] dx dy \\
 &\quad - \frac{1}{h} \int_{D_2 \cup D_4} \frac{x^2 - P(h_0)}{[f(x)-y]^2} dx dy
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Si $\alpha > 0$, il est clair que $x^2 + 2\alpha P(h_0)x + P(h_0) > 0$. Sinon le polynôme admet deux racines réelles à condition d'avoir $\alpha^2 P(h_0) > 1$. Or, puisque $|x^-| > \sqrt{P(h_0)}$, nécessairement $-\frac{1}{\alpha} < -\sqrt{P(h_0)}$. Puis

$$\frac{1}{6\alpha^2} > \frac{P(h_0)}{2} + |\alpha| \frac{P(h_0)^{3/2}}{3} > \frac{P(h_0)}{2}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{3} > \alpha^2 P(h_0).$$

Il s'ensuit que $P(h) - P(h_0) > 0$.

Ainsi, le paramètre μ est effectivement donné pas la fonction strictement croissante :

$$\mu(h) = -\frac{\beta I_2(h)}{\sqrt{\varepsilon} I_1(h)}. \tag{2.39}$$

Notons que le μ ainsi obtenu est la solution de l'équation $\int e^{-\frac{y}{\varepsilon}} \delta(x) dx = 0$. Dans la suite on le notera $\tilde{\mu}$. La valeur du paramètre qui donne effectivement le cycle est donc : $\mu(h) = (-\beta I_2(h) + O(\varepsilon^3))(\sqrt{\varepsilon} I_1(h))^{-1}$ soit $\mu = \tilde{\mu} + O(\varepsilon^2)$ puisque $I_1 = O(\sqrt{\varepsilon})$.

Vérifions que ce résultat est cohérent avec celui obtenu par la méthode de Eckhaus, c'est à dire qu'on a bien

$$-\frac{\beta I_2(h)}{\sqrt{\varepsilon} I_1(h)} = O(\sqrt{\varepsilon} \beta).$$

Pour cela, il faut avoir

$$\frac{I_2(h)}{I_1(h)} = O(\varepsilon).$$

L'ordre de grandeur de I_1 est

$$I_1 \sim \int_{x^-}^{x^+} e^{-f(x)/\varepsilon} dx \sim \sqrt{\varepsilon}.$$

L'ordre de grandeur de I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &\sim \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{\varepsilon}} x^2 e^{-f(x)/\varepsilon} dx + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{x^+} x^2 e^{-f(x)/\varepsilon} dx + \int_{x^-}^{-\sqrt{\varepsilon}} x^2 e^{-f(x)/\varepsilon} dx \\ &\sim \varepsilon^{3/2}, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

2.6 Perturbation non polynomiale avec cycle limite explicite

On va maintenant donner un exemple de perturbation non polynomiale pour obtenir des systèmes admettant une solution périodique explicite. On sort donc de la classe des équations de Liénard.

2.6.1 Un exemple simple

Soit la fonction

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

et soit le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -(x^2 - x). \end{aligned}$$

Les points d'équilibres de ce système sont $(0, 0)$ et $(1, 0)$. La jacobienne du système est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres au point d'équilibre $(0, 0)$ sont $\lambda = \pm i$, il s'agit donc d'un centre, les valeurs propres au point d'équilibre $(1, 0)$ sont $\lambda = \pm 1$, il s'agit donc d'un nœud col. On calcule les dérivées secondes de H :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= -1 + 2x, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} &= 1. \end{aligned}$$

Par la formule de Taylor à l'ordre deux, on en déduit que au voisinage de $(0, 0)$

$$H(x, y) - H(1, 0) = \frac{(1-x)^2}{2} + \frac{y^2}{2} + O(((1-x)^3, y^3)) > 0.$$

Ainsi H présente un minimum en $(1, 0)$ et $H(1, 0) = -1/6$. Au col, $H(0, 0) = 0$.

$$H(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm x \sqrt{|1 - \frac{2}{3}x|},$$

La trajectoire donnée par $y = \pm x \sqrt{1 - \frac{2}{3}x}$ pour les valeurs de x telles que $1 - \frac{2}{3}x > 0$ forme une boucle homocline. Perturbons maintenant le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \alpha y(H - c), c \in [-1/6, 0]. \end{aligned}$$

Il est immédiat que la courbe donnée part :

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} = c,$$

soit

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^2}{2}(1 - \frac{2}{3}x^3) + c}$$

avec $\frac{x^2}{2}(1 - \frac{2}{3}x^3) + c > 0$ est une solution périodique du système.

2.6.2 Forme générale de la perturbation non polynômiale considérée

Soit

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{2.40}$$

où P et Q sont des fonctions analytiques, un système dynamique qui peut être lent-rapide. Supposons qu'il existe une intégrale première du système H à laquelle est associé un facteur intégrant ψ . C'est à dire, si on pose

$$\omega = Pdy - Qdx,$$

Alors

$$\psi\omega = dH.$$

La fonction H est constante le long des lignes de niveaux du système et prend ses valeurs dans un intervalle I . Par identification

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x} &= -\psi Q = -\psi\dot{y} \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \psi P = \psi\dot{x}.\end{aligned}\tag{2.41}$$

On considère le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) + \alpha(x, y)[H(x, y) - h] \quad c \in I.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Lemme 5. *La courbe donnée par $H(x, y) = h$ est une solution du système.*

Démonstration. La dérivée de H par rapport au temps est nulle le long de la courbe $H(x, y) = h$. En effet :

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt}(x, y) &= \dot{x}\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \dot{y}\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Ainsi, si le système hamiltonien (2.40) présente un centre, en choisissant bien les valeurs du paramètre h dans le système (2.42) on peut suivre l'évolution des orbites périodiques. Si le système est lent rapide, on peut alors avoir une expression explicite d'orbite canard comme c'est le cas dans la section précédente.

2.6.3 Perturbation du système (2.7)

Soit maintenant le système

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - f(x) \\ \dot{y} &= -f'(x) + \mu(x, y)[H(x, y) - h]\end{aligned}\tag{2.43}$$

Où f est un polynôme de degré minimum 2,

$$H(x, y) = e^{-y/2}(f(x) - y - \varepsilon),$$

et $\varepsilon \in [-1, h_m]$.

Alors la courbe donnée par

$$H(x, y) = h,$$

Soit

$$y(x) = f(x) - \varepsilon(1 + W_{-1,0}(\frac{h}{\varepsilon}e^{-f(x)/\varepsilon}))$$

est une solution périodique du système. En effet,

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt}(x, y) &= \dot{x} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \dot{y} \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ &= \frac{y-f(x)}{\varepsilon} f'(x) e^{-y/\varepsilon} + [-f'(x) + \mu(x, y)(H(x, y) - h)] \\ &\quad \times [-\frac{1}{\varepsilon} e^{-y/\varepsilon} (f(x) - y - 1) - y e^{-y/\varepsilon}] \\ &= 0\end{aligned}$$

Pour (x, y) tel que $H(x, y) = h$.

2.6.4 Cas particulier du système (2.9)

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \alpha \frac{x^3}{3},$$

En variant h de -1 à $e^{-\frac{1}{6\alpha^2}}$, on suit les orbites périodiques de la bifurcation de Hopf à la bifurcation homocline. En effet, pour $h = -1$, la courbe $H(x, y) = h$ est réduite à l'origine qui est un point d'équilibre. Pour $h = -e^{-\frac{1}{6\alpha^2}}$ la courbe correspondant à $H(x, y) = h$ est la boucle homocline. Il est clair que cette courbe passe par le maximum local de f qui est bien un point d'équilibre. Il est aisé de vérifier qu'il s'agit d'un nœud col. En effet la jacobienne du système est

$$\begin{pmatrix} -f'(x) & 1 \\ -f''(x) + \frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y)[H(x, y) - h] & \frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y)[H(x, y) - h] \\ +\mu(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) & +\mu(x, y) \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Pour $h = -e^{-\frac{1}{6\alpha^2}}$ et (x, y) correspondant au point d'équilibre on vérifie que

$$\begin{aligned} H(x, y) - h &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0, \\ f''(x) &= -1. \end{aligned}$$

Ainsi les valeurs propres de la jacobienne sont 1 et -1 .

Cycles multiples Soit maintenant :

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= y - f(x) \\ \dot{y} &= -f'(x) + \beta \prod_{k=1}^n [H(x, y) - h_k]. \end{aligned}$$

où $h_1, \dots, h_n \in I$

Lemme 6. *Chacune des courbes données par $H(x, y) = h_k$ est une orbite périodique du système.*

preuve Pour tout $H(x, y) = h_k$,

$$\frac{d}{dt}H(x, y) = 0.$$

□

Exemple

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= y - \left(\frac{x^2}{2} + \alpha \frac{x^3}{3}\right) \\ \dot{y} &= -x - \alpha x^2 + \beta [H(x, y) - h_1][H(x, y) - h_2][H(x, y) - h_3]. \end{aligned}$$

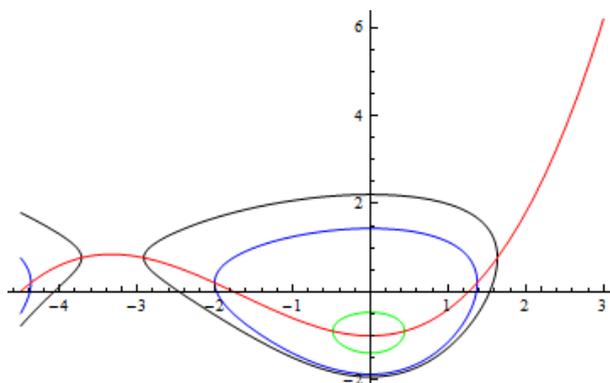


FIGURE 2.6 – Orbites périodiques du système pour $\varepsilon = 1$, $\alpha = 0.3$, $h_1 = -0,9$ (en vert), $h_2 = -0,3$ (en bleu) et $h_3 = -0,17$ (en noir).

2.6.5 Cas lent-rapide

Système perturbé Soit le système lent-rapide

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= y - f(x) \\ \dot{y} &= -f'(x) + \varepsilon \beta [H(x, y) - h], \end{aligned} \tag{2.44}$$

soit après changement d'échelles :

$$\begin{aligned} X' &= Y - f_\varepsilon(X) \\ Y' &= -f'_\varepsilon(X) + \beta [e^{-Y}(f_\varepsilon(X) - Y - 1) - h]. \end{aligned} \tag{2.45}$$

— Pour $h = -1$, le point $(0, 0)$ est un point d'équilibre de type centre.

- Pour $h = h_h$ correspondant à la boucle homocline du système non perturbé, le point $(x_h, y_h) = (-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{6\alpha^2})$ tel que $x_h < 0$ donné par $y_h = f(x_h)$, $f'(x_h) = 0$ est un point stationnaire de type col.

↔ En faisant varier h en -1 et h_h , on suit les orbites périodiques de leur naissance par bifurcation de Hopf à leur disparition par bifurcation homocline.

Évolution du cycle pour $\varepsilon \neq 1$.

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - \left(\frac{x^2}{2} + \alpha \frac{x^3}{3}\right), \\ \dot{y} &= -x - \alpha x^2 + \varepsilon \beta \left[e^{-y/\varepsilon} \left(\frac{f(x)}{\varepsilon} - \frac{y}{\varepsilon} - 1\right) - h \right].\end{aligned}$$

$$\rightarrow f'(-\frac{1}{\alpha}) = 0 \rightarrow h_h = -e^{-f(-\frac{1}{\alpha})/\varepsilon} = -e^{-\frac{1}{6\varepsilon\alpha^2}}.$$

Pour $\sqrt{\varepsilon} = 0.03125$, $h_h = -2.811787299503 * 10^{-824}$.

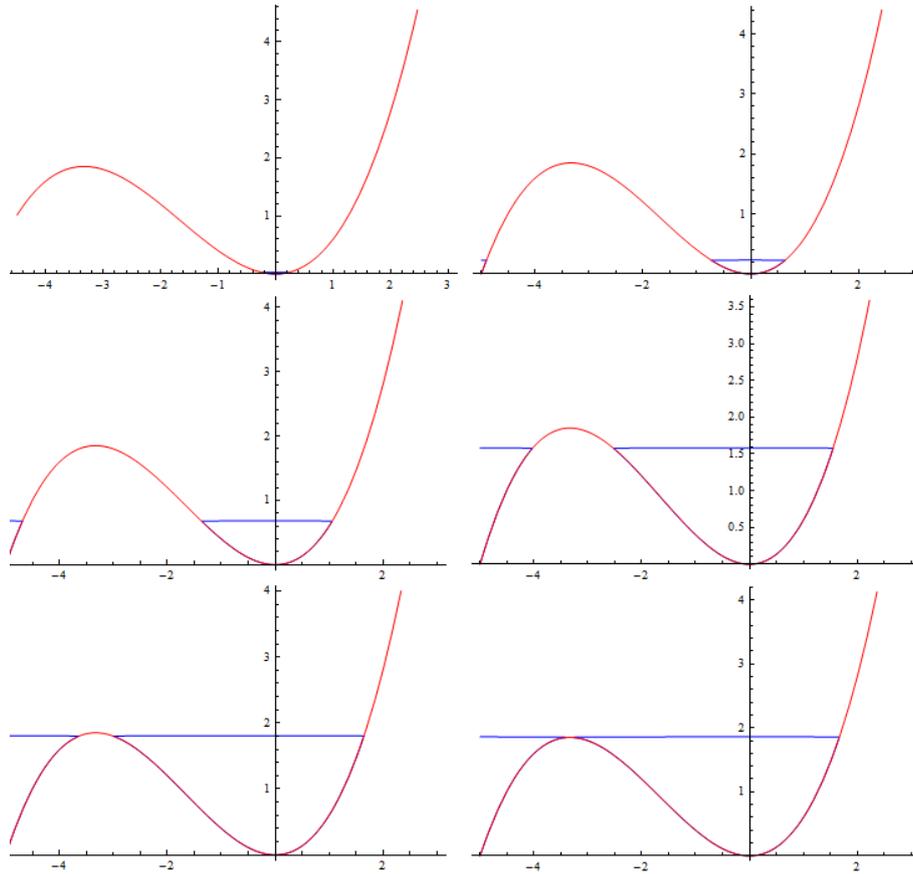


FIGURE 2.7 – Évolution des trajectoires $H(x, y) = h$ pour $\alpha = 0.3$, $\sqrt{\varepsilon} = 0.03125$ et h prend successivement les valeurs $h = -10^{-10}$, $h = -10^{-100}$, $h = -10^{-300}$, $h = -10^{-700}$, $h = -10^{-800}$ et $h = -2.9 \times 10^{-824}$

— La partie supérieure de cycle est donnée par $y(h, \varepsilon, x) = f(x) - \varepsilon[1 + W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon}e^{f(x)\varepsilon})]$.

↔ La hauteur de cycle $y(h, \varepsilon)$ (l'ordonnée pour $x = 0$) est donnée par :

$$y(h, \varepsilon) = -\varepsilon[1 + W_{-1}(he^{-1})].$$

— Le cycle maximum (boucle homocline) a pour hauteur

$$O_{max} = -\varepsilon[1 + W_{-1}(-e^{-1-\frac{1}{6\alpha^2\varepsilon}})] \simeq \frac{1}{6\alpha^2}.$$

— Taille de l'intervalle dans lequel varie le paramètre h pour passer du cycle de hauteur $\frac{O_{max}}{100} \simeq \frac{1}{600\alpha^2}$ au cycle maximum.

$$\begin{aligned} -\varepsilon[1 + W_{-1}(he^{-1})] &\geq \frac{1}{600\alpha^2} \\ \Leftrightarrow h &\geq -(1 + \frac{1}{600\alpha^2\varepsilon})e^{-\frac{1}{600\alpha^2\varepsilon}} \end{aligned} \tag{2.46}$$

— La taille du cycle est multipliée par 100 pour $h \in [-(1 + \frac{1}{600\alpha^2\varepsilon})e^{-\frac{1}{600\alpha^2\varepsilon}}, -e^{-\frac{1}{6\alpha^2\varepsilon}}]$.

Calcul des exposants de Floquets. Le système étant de dimension deux, l'exposant de Floquets différent de 1 est donné par :

$$\lambda_1 = \int_0^T \operatorname{div}(X(\gamma))(t) dt \quad (2.47)$$

où T est la période et γ l'orbite périodique. Puisque nous avons une expression explicite du cycle il est possible de calculer cette valeur.

$$\operatorname{div}(X) = -\frac{1}{\varepsilon} f'(x) - \beta e^{-\frac{y}{\varepsilon}} \left(\frac{f(x)}{\varepsilon} - \frac{y}{\varepsilon} \right) = -\frac{1}{\varepsilon} \left[f'(x) - \beta h \varepsilon \frac{1 + W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{\frac{f(x)}{\varepsilon}})}{W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{\frac{f(x)}{\varepsilon}})} \right]. \quad (2.48)$$

De plus

$$dt = \frac{dx}{y - f(x)} = -\frac{dx}{\varepsilon [1 + W(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})]}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{x^-(h)}^{x^+(h)} \left[\frac{f'(x)}{1 + W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} - \frac{f'(x)}{1 + W_0(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} - \beta h \varepsilon \left(\frac{1}{W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} - \frac{1}{W_0(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} \right) \right] dx \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{x^-(h)}^{x^+(h)} \left[\frac{f'(x)}{1 + W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} - \frac{f'(x)}{1 + W_0(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} \right] dx + \frac{\beta h}{\varepsilon} \int_{x^-(h)}^{x^+(h)} \left[\frac{1}{W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} - \frac{1}{W_0(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} \right] dx \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{x^-(h)}^{x^+(h)} \left[\frac{[W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})]'}{W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} - \frac{[W_0(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})]'}{W_0(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} \right] dx + \frac{\beta h}{\varepsilon} \int_{x^-(h)}^{x^+(h)} \left[\frac{1}{W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} - \frac{1}{W_0(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} \right] dx \\ &= 0 + \frac{\beta h}{\varepsilon} \int_{x^-(h)}^{x^+(h)} \left[\frac{1}{W_{-1}(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} - \frac{1}{W_0(\frac{h}{\varepsilon} e^{f(x)/\varepsilon})} \right] dx < 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Le cycle limite explicite est attractif.

2.7 Cas tronqué

On approche l'hamiltonien $H(x, y) = e^{-y}(\frac{x^2}{2} - y - 1)$ par $H_n(x, y) = (1 - \frac{y}{n})^n(\frac{x^2}{2} - y - 1)$. Alors,

$$dH_n = -(1 - \frac{y}{n})^{n-1}(\frac{x^2}{2} - y - 1) + (1 - \frac{y}{n})^n(x dx - dy).$$

Le facteur intégrant est $(1 - \frac{y}{n})^{n-1}$. D'où, en multipliant par $(1 - \frac{y}{n})^{-n+1}$ on pose

$$\omega_n = (1 - \frac{y}{n})^{-n+1} dH_n = -(\frac{x^2}{2} - y - 1)dy + (1 - \frac{y}{n})(x dx - dy).$$

Le système dynamique associé est

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{n+1}{n}y - \frac{x^2}{2} \\ \dot{y} &= -x(1 - \frac{y}{n}). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Point d'équilibre : $(0, 0) \rightarrow H_n = -1 =$ centre (fonction de Morse). $y = n \rightarrow H_n = 0$.

Version lente-Rapide

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= \frac{n+1}{n}y - \frac{x^2}{2} \\ \dot{y} &= -x(1 - \frac{y}{n\varepsilon}). \end{aligned} \quad (2.51)$$

L'intégrale première du système est :

$$H_n^\varepsilon(x, y) = \left(1 - \frac{y}{n\varepsilon}\right)^n \left(\frac{x^2}{2} - y - \varepsilon\right). \quad (2.52)$$

Version perturbée :

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= \frac{n+1}{n}y - \frac{x^2}{2} - \alpha\sqrt{\varepsilon}x^3 \\ \dot{y} &= -(x + \beta\sqrt{\varepsilon})(1 - \frac{y}{n\varepsilon}). \end{aligned} \quad (2.53)$$

La jacobienne du système est

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\varepsilon}(x + 3\alpha\sqrt{\varepsilon}x) & \frac{n+1}{n\varepsilon} \\ \frac{y}{n\varepsilon} - 1 & \frac{1}{n\varepsilon}(x + \beta\sqrt{\varepsilon}) \end{vmatrix}. \quad (2.54)$$

Au point d'équilibre $x = -\beta\sqrt{\varepsilon}$ on a :

$$J(x, y) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{vmatrix} \beta\sqrt{\varepsilon} - 3\alpha\varepsilon\beta^2 & \frac{n+1}{n} \\ \frac{1}{n+1}(\frac{\beta^2}{2} + \alpha\varepsilon\beta^3) - 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.55)$$

Les valeurs propres sont les solutions du système :

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \frac{\lambda}{\varepsilon}(\beta\sqrt{\varepsilon} - 3\alpha\varepsilon\beta^2) - \frac{1}{n\varepsilon}(\frac{\beta^2}{2} + \alpha\varepsilon\beta^3) + \frac{n+1}{n\varepsilon} &= 0 \\ \Delta &= \frac{1}{\varepsilon^2}(\beta\sqrt{\varepsilon} - 3\alpha\varepsilon\beta^2)^2 - 4\frac{n+1}{n\varepsilon} + \frac{4}{n\varepsilon}(\frac{\beta^2}{2} + \alpha\varepsilon\beta^3) \\ &= \frac{\beta^2}{\varepsilon}(1 - 3\alpha\sqrt{\varepsilon}\beta)^2 - 4\frac{n+1}{n\varepsilon} + \frac{4\beta^2}{n\varepsilon}(\frac{1}{2} + \alpha\varepsilon\beta) \end{aligned} \quad (2.56)$$

il s'ensuit que

$$\lambda = \frac{\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}(1 - 3\alpha\sqrt{\varepsilon}\beta) \pm i\frac{\sqrt{\Delta}}{2}.$$

Il y a donc une bifurcation de Hopf pour $\beta = 0$. Montrons qu'elle est suivie d'une explosion de cycle.

Explosion de cycle : méthode de Eckhaus

Commençons par fixer la relation

$$n = o(\varepsilon\alpha^2).$$

Ainsi, les cycles limites seront bornés par la droite $y = n\varepsilon$ et disparaîtront par bifurcation homocline bien avant d'atteindre les plis supérieurs de la cubique.

Rappelons le système analysé :

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot{x} &= \frac{n+1}{n}y - (x^2/2 + \alpha\sqrt{\varepsilon}x^3) \\ \dot{y} &= -(x + \beta\sqrt{\varepsilon})\left(1 - \frac{y}{n\varepsilon}\right).\end{aligned}\tag{2.57}$$

Posons

$$f(x) = x^2/2 + \alpha\sqrt{\varepsilon}x^3.$$

On recherche une solution ϕ à l'équation

$$y = \frac{n}{n+1}(x^2/2 + \alpha\sqrt{\varepsilon}x^3 - \varepsilon - \varepsilon^2\phi(x, \varepsilon)).\tag{2.58}$$

Alors, le système (2.57) devient :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -1 - \varepsilon\phi \\ \varepsilon\dot{\phi} &= -g(x)\phi - \frac{h(x)}{\varepsilon}, \\ g(x) &= f'(x) - \frac{x+\beta\sqrt{\varepsilon}}{n} \\ h(x) &= f'(x) - \frac{x+\beta\sqrt{\varepsilon}}{n}(n+2 - f(x)/\varepsilon).\end{aligned}\tag{2.59}$$

Posons

$$p(x) = f(x) - \frac{1}{n}\left(\frac{x^2}{2} + x\beta\sqrt{\varepsilon}\right).$$

On obtient alors :

$$\phi'(x) = \left(\frac{p(x)}{\varepsilon} + \varepsilon\phi(x)\right)' \phi(x) + \frac{h(x)}{\varepsilon^2}.\tag{2.60}$$

Cette équation a pour solution :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= e^{\frac{Q(x)}{\varepsilon}} \left[\phi(x_0) e^{-\frac{Q(x_0)}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{x_0}^x e^{-\frac{Q(t)}{\varepsilon}} h(t) dt \right], \\ Q(x) &= p(x) + \varepsilon^2 \phi(x).\end{aligned}\tag{2.61}$$

Prenons $|x_0| < f^{-1}(n\varepsilon)$. Soit $I = [x_0, x_1]$ l'intervalle tel que $\forall x \in I, Q(x) < Q(x_0)$ et soit V l'ensemble des fonctions définies sur I et bornées lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Posons

$$\phi(x) = \phi_2(x, \phi) + \phi_1(x, \phi)$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont des opérateurs définis sur V tel que

$$\begin{aligned}\phi_2(x, v) &= \phi(x_0) e^{\frac{Q(x)-Q(x_0)}{\varepsilon}} \\ \phi_1(x, v) &= e^{\frac{Q(x)}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{x_0}^x e^{-\frac{Q(t)}{\varepsilon}} h(t) dt \\ Q(x) &= p(x) + \varepsilon^2 v(x).\end{aligned}\tag{2.62}$$

Il est immédiat que

$$\phi_2(x, v) = \phi_2(x, 0)(1 + O(\varepsilon)).$$

Il s'ensuit que

$$\phi_2(x, v) = O(e^{-k^2/\varepsilon})$$

pour un certain k .

Remarquons que

$$h(x) = p'(x) - \frac{1}{n}(x + \beta\sqrt{\varepsilon})(n + 1 - \frac{f(x)}{\varepsilon}).$$

Alors,

$$\begin{aligned}\phi_1(x, v) &= e^{\frac{Q(x)}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon^2} \left[(1 + O(\varepsilon)) \int_{x_0}^x e^{-\frac{p(t)}{\varepsilon}} p'(t) dt \right. \\ &\quad + \frac{1}{n} \int_{x_0}^x t e^{-\frac{Q(t)}{\varepsilon}} (n + 1 - f(t)/\varepsilon) dt \\ &\quad \left. + \frac{\beta\sqrt{\varepsilon}}{n} \int_{x_0}^x e^{-\frac{Q(t)}{\varepsilon}} (n + 1 - f(t)/\varepsilon) dt \right].\end{aligned}$$

Puisque $n + 1 - f(t)/\varepsilon > 0$ sur I nous pouvons appliquer la méthode de Laplace sur la dernière intégrale, il en découle que

$$\phi_1(x, v) = e^{\frac{Q(x)}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\frac{\beta\varepsilon(n + 1)}{n} \sqrt{2\pi} + O(e^{-\frac{Q(x_0)}{\varepsilon}}) + O(e^{-\frac{Q(x)}{\varepsilon}}) \right].$$

Ainsi, ϕ_1 reste borné si

$$\beta = \sigma n \varepsilon e^{-\frac{u^2}{\varepsilon}}$$

pour un certain u tel que $u^2 > Q(x_0)$.

Alors :

$$\begin{aligned} \phi_1(x, v) - \phi_1(x, 0) &= \frac{e^{\frac{p(x)}{\varepsilon}}}{\varepsilon^2} \left(\int_{x_0}^{x_1} e^{-\frac{p(t)}{\varepsilon}} (e^{\varepsilon(v(x)-v(t))} - 1) h(t) dt \right) \\ &= O\left(e^{\frac{p(x)}{\varepsilon}} / \varepsilon\right) \int_{x_0}^{x_1} e^{-\frac{p(t)}{\varepsilon}} h(t) dt \\ &= O(n\sigma) = O(\sigma\alpha^2\varepsilon). \end{aligned}$$

Nous en déduisons qu'il existe une solution à l'équation

$$v(x) = \phi_1(x, v) + O(e^{-k^2/2})$$

pour un certain k . Il s'ensuit que

$$\phi(x) = \phi_1(0, x) + O(\sigma\alpha^2\varepsilon).$$

Ainsi il y a explosion de cycle canard pour

$$\beta = \sigma n \varepsilon e^{-\frac{u^2}{\varepsilon}}.$$

Chapitre 3

Explosion de cycles 3D et addition de spikes dans le système de Hindmarsh-Rose

3.1 Introduction

Le bursting (ou oscillations en salves) est un comportement typique des cellules excitables, il peut être relié à l'activité électrique et/ou à l'activité sécrétrice. Le bursting apparait notamment lors de l'étude mathématique de l'activité sécrétrice des cellules bêta du pancréas in [61] ou des neurones à GnRH [14], [49].

Les oscillations en salves sont caractérisées par l'alternance d'une phase active au cours de laquelle le système produit des oscillations rapides (aussi appelées spikes) et d'une phase quiescente au cours de laquelle le comportement du système correspond à des oscillations lentes ou à l'absence d'oscillation. La figure 3.1 montre un exemple d'oscillations en salves. Celles qui sont représentées dans la figure sont obtenues par simulations numériques du modèle de Hindmarsh-Rose [42]. Nous voyons sur la figure 3.1 la trace en temps d'une variable rapide x , qui présente plusieurs phases de salves. Pour produire des oscillations en salves, un système lent-rapide doit

être constitué de au moins deux variables rapides et une variable lente. On distingue différents types d'oscillations en salves, caractérisés par la fréquence de la phase active et les bifurcations du système rapide. Rinzel [58] fût le premier à proposer une telle classification. Il utilise la structure de bifurcation du sous-système rapide pour comprendre la transition de la phase oscillatoire à la phase quiescente et vice-versa. Cette démarche lui permet de caractériser trois classes principales de types de salves : le bursting carré, elliptique et parabolique. Plus tard, Bertram, Butte, Kiemel et Sherman ont étendu ces travaux dans [8]. Dans ce dernier article, les auteurs étudient la transition d'un type d'oscillations en salves à un autre via un chemin dans le déploiement universel d'une bifurcation de codimension deux. Izhikevich [44] propose une classification plus générale en considérant un plus grand nombre de combinaisons de bifurcations du sous-système rapide pouvant initier et terminer les salves. Dans l'article [35], Josić, Golubitsky et Kaper utilisent une approche basée sur la théorie des singularités afin de définir la forme normale des bifurcations de codimension un et deux, ainsi que les bifurcations génériques de codimension trois qui donnent lieu à des oscillations en salves. Dans ce chapitre, on se concentre sur le bursting carré et en particulier sur le modèle de Hindmarsh-Rose introduit dans [42] pour modéliser les oscillations en salves observées dans les cellules bêta du pancréas. Il s'agit d'un système d'EDOs polynomiales. Le modèle de Hindmarsh-Rose est maintenant couramment utilisé en neurosciences pour modéliser le bursting carré. Il est également utilisé pour représenter l'activité des cellules β du pancréas ; voir [19].

Ce modèle est minimal : il est composé de deux variables rapides et d'une variable lente. Dans ce modèle, la phase active est initiée par une bifurcation nœud-col et est achevée par une bifurcation homocline du sous-système rapide. Pour une analyse détaillée des bifurcations dans le modèle de Hindmarsh-Rose nous invitons le lecteur à se référer à [62]. Les canards sont des solutions spéciales des systèmes lents-rapides, c'est à dire de systèmes d'EDOs où les variables évoluent selon des échelles de temps différentes. Le rapport des deux échelles de temps est représenté par un paramètre $0 < \varepsilon \ll 1$. Les trajectoires canards sont des solutions qui suivent la partie attractive

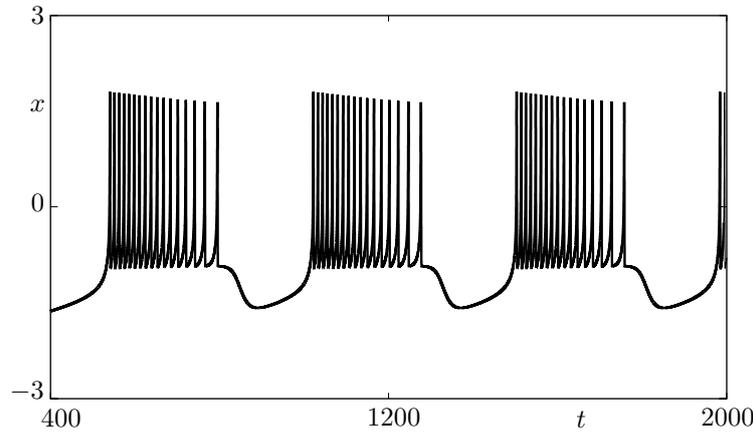


FIGURE 3.1 – *Bursting carré dans le modèle de Hindmarsh-Rose; trace en temps de la variable x .*

de la nulcline rapide (ou variété critique), passent près du point de bifurcation du sous-système rapide, puis, suivent la partie répulsive de la variété critique durant un temps suffisamment long. Le phénomène canard a été découvert par Benoît, Callot, Diener et Diener [7] dans l'oscillateur de van der Pol et étudié par des méthodes d'analyse non standard. Plus tard, des résultats similaires ont été obtenus par le biais de méthodes standards, en particulier par des méthodes d'expansions asymptotiques [29] ainsi que via une approche géométrique de la théorie des perturbations singulières appelée technique d'éclatement [28]. Outre le fait qu'ils suivent des variétés invariantes répulsives pour un large intervalle de temps, les canards (dans les systèmes 2-D) ont la particularité de n'exister que pour un domaine de paramètres de volume exponentiellement petit en $\exp(-k^2/\varepsilon)$. L'évolution des canards dans l'espace des paramètres est généralement appelée *explosion canard* [10]. Ces solutions particulières sont présentes dans un grand nombre de systèmes ayant des applications variées, en particulier en neurosciences où les canards sont associés au mécanisme de transition d'un état de repos aux oscillations de relaxation (voir par exemple, [43, 52]) Pour autant, l'existence de solutions canards n'est pas le propre des systèmes lents-rapides plans. En particulier E. Benoît [6] a développé une approche théorique de phénomènes canards qui se produisent dans les systèmes avec une variable rapide et deux variables

lentes. Il a en particulier démontré que en dimension 3, le phénomène canard se produit génériquement. Dans le contexte des dynamiques avec deux variables rapides et une variable lente, les canards se sont révélés (numériquement) organiser, au travers de multiples explosions, le mécanisme d'addition de spikes; voir [22, 38, 66]. Dans [21], les auteurs ont trouvé des canards particuliers apparaissant durant l'addition de spike dans le modèle de Hindmarsh-Rose (HR). En effet, les orbites canards typiques trouvés dans la transition d'addition de spike suivent la branche répulsive de la variété critique (ce qui correspond à la phase quiescente) puis présente un ou plusieurs spikes dans la direction rapide (ce qui correspond à la phase active). Cependant, dans le modèle de Hindmarsh-Rose, pour un régime de paramètre juste avant le premier canard avec spike, lorsqu'une trajectoire canard passe suffisamment proche du pli supérieur de la variété critique (voir Fig. 3.18 (a)), au lieu de spiker, elle fait une petite excursion le long de l'autre coté du cylindre parabolique sur lequel est tracée la variété critique. Lorsque ces trajectoires sont tracées dans l'espace des phases en trois dimensions, la forme de ces solutions rappelle une lèvre (voir Fig. 3.18 (b)). Ce phénomène semble être la première étape du mécanisme d'addition de spikes dans le bursting carré; c'est l'un des résultats présentés dans ce chapitre. En effet, bien que les différents résultats présentés dans ce chapitre soient obtenus dans le système de Hindmarsh-Rose, ils pourraient avoir une portée plus générale. Les canards auxquels nous nous intéressons sont des orbites périodiques, c'est pourquoi nous les appelons « cycles canards » ou simplement « cycle ». La terminologie « explosion de cycle » est justifiée dans le sens où, pour une très petite variation de paramètre (dans le modèle de Hindmarsh-Rose ce paramètre est I), l'amplitude des cycles varie significativement. Dans le système de Hindmarsh-Rose, nous n'avons pas obtenu de preuve mathématique rigoureuse de cette explosion. En revanche, nous expliquons comment suivre cette explosion à la limite singulière $\varepsilon = 0$. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, les orbites périodiques tendent vers des ensembles qui se composent d'un arc de la courbe critique et d'une trajectoire du sous-système rapide de dimension deux. Puisque ces ensembles sont ceux susceptibles d'être la limite des orbites périodiques.

Puisqu'ils sont limites d'orbites périodiques, nous appelons ces ensembles *candidats limites-périodiques*. Cette notions d'ensembles limites-périodiques a d'abord été introduite par J.-P. Françoise et C.C. Pugh [33] dans le contexte du 16ème problème de Hilbert. Ils sont aussi candidats-canards, et sont parcourus au cours de l'explosion. La terminologie « candidat-canard » est dû à E. Benoit. Il y a des exemples de tels candidats-canards dans les systèmes une variable rapide/une variable lente (où ils ont été découverts pour la première fois) et dans les systèmes deux variables lentes/une variable rapide (cf [6, 4, 1]). Cependant, les candidats-canards-3D présentés dans ce chapitre sont d'une nature complètement différente. A notre connaissance, l'analyse proposée dans ce chapitre est complètement nouvelle et nous la croyons véritablement utile à la compréhension du phénomène d'addition de spike dans les dynamiques de type une variable lente/deux variables rapides.

3.2 Géométrie de la courbe critique du système de Hindmarsh-Rose

3.2.1 Le système une direction rapide/deux directions lentes

Le système de Hindmarsh-Rose se compose de deux variables rapides (x, y) et d'une variable lente z . Il dépend d'un paramètre I :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - ax^3 + bx^2 + I - z \\ \dot{y} &= c - dx^2 - y \\ \dot{z} &= \varepsilon (s(x - x_1) - z) \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans ce chapitre, nous considérons les valeurs classiques pour les paramètres $a = c = 1$, $b = 3$, $d = 5$, $s = 4$, $x_1 = -1,618$ et ε de l'ordre de 10^{-3} . On s'intéresse aux bifurcations du système lent-rapide 3D lorsque le paramètre I varie. Nous expliquerons dans la suite pourquoi la valeur de I est choisie proche de 1,33.

3.2.2 Sous-système rapide et variété critique

Le sous-système rapide (ou système couche-limite) est obtenu à la limite $\varepsilon = 0$ dans (3.1). Il s'agit du système plan :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + 3x^2 + I - z \\ \dot{y} = 1 - 5x^2 - y, \end{cases} \quad (3.2)$$

Où z est maintenant considéré comme un paramètre. Les points stationnaires du système (3.2) satisfont :

$$\dot{x} = \dot{y} = 0.$$

Cette equation est celle d'une courbe dans l'espace (x, y, z) donnée par

$$\begin{cases} y = 1 - 5x^2, \\ z = -x^3 - 2x^2 + I + 1 \end{cases}$$

Cette courbe 3D, notée S_0 dépend du paramètre I et est donnée par l'intersection des surfaces $z = f(x) = I - x^3 - 2x^2 + 1$ et $y = 1 - 5x^2$.

$$S_0 = \{(x, y, z) | y = 1 - 5x^2; z = f(x)\}.$$

Nous considèrerons aussi la courbe plane Σ_0 qui est la projection de S_0 dans le plan (x, z) .

La surface $\{z = f(x)\}$ présente deux courbes plus définies par $f'(x) = 0$, ce qui implique $x = 0$ or $x = -4/3$.

Afin d'observer une explosion de cycle, il nous faut choisir le paramètre I de sorte que la nullcline lente $\dot{z} = 0$ intersecte la courbe critique au voisinage du pli $x = -4/3$. Ainsi, la valeur de I doit être très proche de

$$I_{pli} = s(-4/3 - x_1) + (-4/3)^3 + 2 * (4/3)^2 - 1. \quad (3.3)$$

Prenons par exemple $I = 1,33 \simeq I_{pli}$.

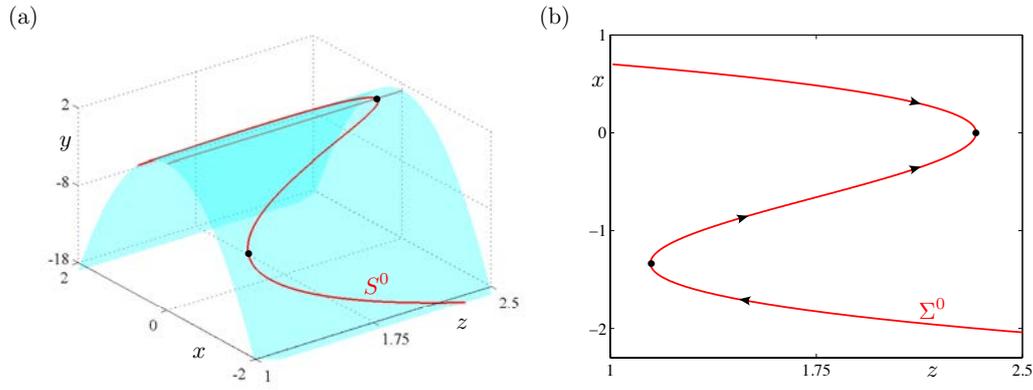


FIGURE 3.2 – a) : tracé de la variété critique S_0 dans l'espace ; b) tracé de Σ_0 dans le plan (z, x) .

3.2.3 Nature des points stationnaires du système couche-limite (3.2)

Dans ce paragraphe, nous travaillons à I fixé et nous discutons de la nature des points stationnaires de la dynamique rapide lorsque z varie. On peut représenter ces points stationnaires par l'intersection de la courbe Σ_0 et de la droite $z = \text{constante}$ correspondante à la valeur de z choisie. La Jacobienne du sous-système rapide est :

$$J(x) = \begin{pmatrix} -3x^2 + 6x & 1 \\ -10x & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

les valeurs propres sont les solutions de l'équation

$$\lambda^2 + \lambda(3x^2 - 6x + 1) + 3x^2 + 4x = 0. \quad (3.5)$$

Le discriminant est

$$\Delta = (3x^2 - 6x + 1)^2 - 4(3x^2 + 4x). \quad (3.6)$$

Pour la suite de l'étude, il est commode de séparer la courbe Σ_0 en trois parties séparées par les points plis supérieurs et inférieurs $p_1 = \Sigma_0 \cap \{x = -4/3\}$ et $p_2 = \Sigma_0 \cap \{x = 0\}$. On pose :

$$\Sigma_0 = \Sigma_0^g \cup p_1 \cup \Sigma_0^m \cup p_2 \cup \Sigma_0^d,$$

$\Sigma_0^g = \Sigma_0 \cap \{x < -4/3\}$, $\Sigma_0^m = \Sigma_0 \cap \{-4/3 < x < 0\}$, $\Sigma_0^d = \Sigma_0 \cap \{0 < x\}$. Nous allons maintenant étudier la nature des points stationnaires de chaque branche lorsque z décroît à partir de $z = I + 1$. Pour cela, discutons la nature des bifurcations traversées successivement lorsque z décroît de $z = I + 1$ à $z = f(-4/3) = -32/27 + I + 1 = I - 5/27$. Lorsque z décroît à partir du nœud-col pour $z = I + 1$, le point stationnaire de la branche droite de la courbe est un nœud attractif. Le discriminant Δ de l'équation 3.5 devient négatif lorsque z traverse la valeur $z_{nf} \simeq 0,9972 + I$, ainsi, passé cette valeur z_{nf} le point stationnaire est un foyer attractif. Remarquons que le signe de $3x^2 - 6x + 1$ change pour $x_{hopf}^+ = 1 - \sqrt{6}/3 \simeq 0,2$ and $x_{hopf}^- = 1 + \sqrt{6}/3 \simeq 1,8$. Pour ces valeurs, le discriminant de l'équation (3.5) est négatif. Ainsi, pour les valeurs de paramètre z telles que $z = z_{hopf}^- = f(x_{hopf}^-)$ et $z = z_{hopf}^+ = f(x_{hopf}^+)$, le système (3.2) présente une bifurcation de Hopf. Cela implique que le point stationnaire de la branche droite de Σ_0 est un foyer attractif pour $z_{nf} < z < z_{hopf}^+$. Ce foyer est répulsif pour $z_{hopf}^+ < z < z_{hopf}^-$. A la bifurcation de Hopf sur-critique en $z = z_{hopf}^+$, un cycle attractif est créé. Ce cycle disparaît via une bifurcation homocline pour $z = z_{hom}^+$ qui peut être numériquement estimée, par exemple le logicielle XPPAUT [30], à $2,1 < z_{hom}^+ < 2,2$ (pour $I \simeq 1,33$). Remarquons que le col appartenant à cette boucle homocline est le point stationnaire de la branche du milieu de Σ_0 . Une autre boucle homocline apparaît pour $1,4 < z_{hom}^- < 1,5$, là encore, la valeur est estimée avec XPPAUT. Cette dernière valeur est également estimée avec XPP-Auto. Un autre cycle limite attractif émerge de cette bifurcation homocline. Enfin, ce cycle attractif disparaît via une bifurcation de Hopf sur-critique pour $z = z_{hopf}^-$.

Résumons : Le point stationnaire est foyer répulsif pour $z_{hopf}^- < 1,4 < z_{hom}^- < 1,5 < 2,1 < z_{hom}^+ < 2,2 < z_{hopf}^+$, Il y a une bifurcation nœud-col entre la branche du milieu est celle de gauche pour $z = I - 5/27$ le point stationnaire de la branche de droite devient un nœud attractif lorsque z décroît $z < z_{hopf}^- = f(x_{hopf}^-) \simeq -11,312 + I \ll I - 5/27$. La figure 3.3 montre le diagramme de bifurcation du système (3.2) dans le plan (x,z) .

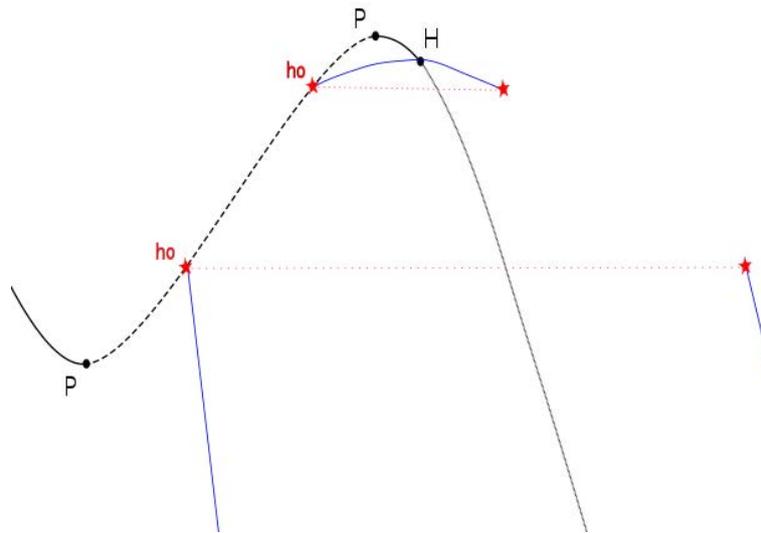


FIGURE 3.3 – Schéma du diagramme de bifurcation du système (3.2) dans le plan (x, z) ; les segments de courbes en trait plein représentent les équilibres stables du système, la courbe en tirets représentent les équilibres de type col, la courbe en pointillées représente les points d'équilibres instables. En rouge, les boucles homoclines; en bleu, l'enveloppe des cycles limites. Les « p » désignent les points de bifurcation pli.

3.2.4 Portrait de phase du système couche-limite en fonction de la valeur de z

Sur les figures 3.4 à 3.11, la courbe rouge est la nullcline $\dot{x} = y - x^3 + 3x^2 + I - z = 0$, la courbe verte est la nullcline $\dot{y} = 1 - 5x^2 - y = 0$. Le point stationnaire est donc le point d'intersection de ces deux courbes.

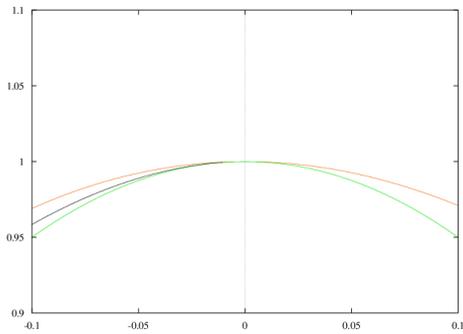


FIGURE 3.4 - $z = I + 1$. Le point stationnaire est un pli

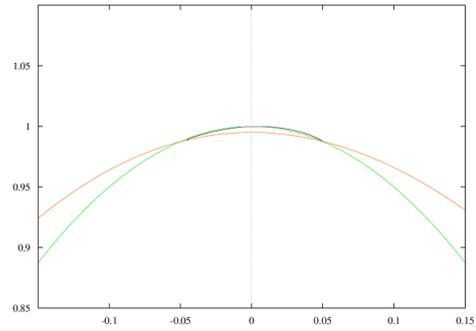


FIGURE 3.6 - $z_n < z < I + 1$. Le point stationnaire est un nœud attractif

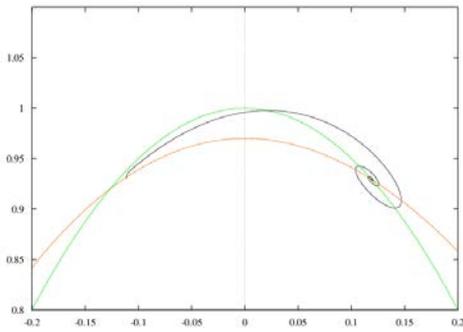


FIGURE 3.5 - $z_H^+ < z < z_n$. Le point stationnaire est un foyer attractif

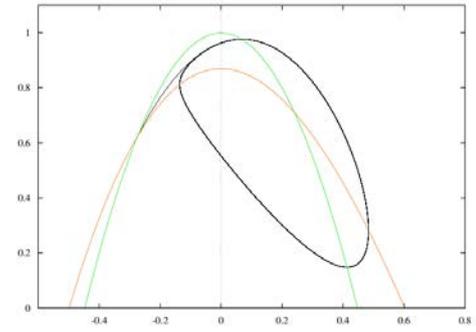


FIGURE 3.7 - $z_h^+ < z < z_H^+$. Le point stationnaire est un foyer répulsif, présence d'un cycle attractif.

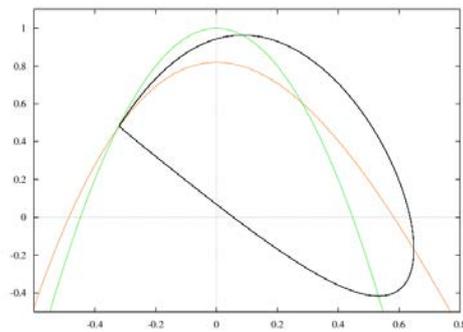


FIGURE 3.8 – $z = z_h^+$. Le point stationnaire est un foyer répulsif, présence d'une boucle homocline.

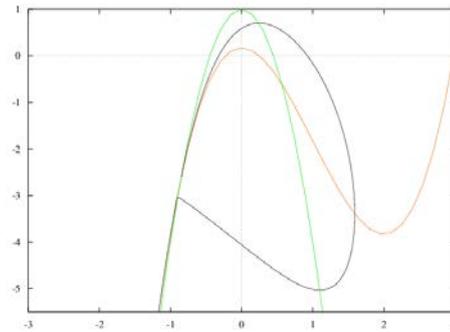


FIGURE 3.10 – $z_h^- < z < z_h^+$. Le point stationnaire est un foyer répulsif, absence de cycle attractif.

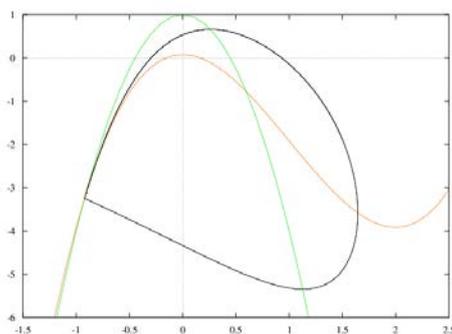


FIGURE 3.9 – $z = z_h^-$. Le point stationnaire est un foyer répulsif, présence d'une boucle homocline.

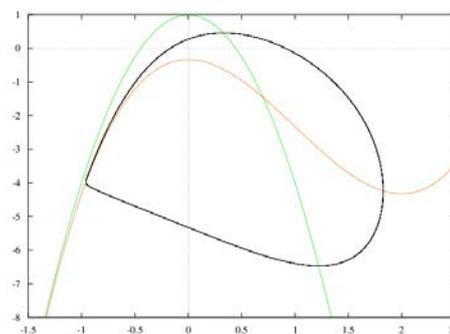


FIGURE 3.11 – $f(-4/3) < z < z_h^-$. Le point stationnaire est un foyer répulsif, présence d'un cycle attractif.

3.3 Candidats limites périodiques

La définition d'ensemble limite-périodique à d'abord été proposée dans [33] dans le cadre du 16ème problème de Hilbert. Dans une famille de champ de vecteur X dépendant d'un paramètre $\bar{\lambda}$, un ensemble limite-périodique Γ est un ensemble invariant de X si il existe une suite d'orbites périodiques γ_n d'une suite de champ de vecteur X_n tel que $X_n \rightarrow X$ et $\gamma_n \rightarrow \Gamma$ dans le sens de la métrique de Hausdorff sur les ensembles compacts.

Il est montré dans [33] que pour un champ de vecteur plan, les ensembles limites-périodiques sont une union de points stationnaires et d'orbites connectant des points stationnaires.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux ensembles limites-périodiques qui sont la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ des orbites périodiques (cycles) du système lent-rapide tri-dimensionnel (3.1). Plus précisément, nous allons lister tous les candidats-limites-périodiques possibles en fonction des différentes valeurs de z . La terminologie est inspirée des candidats-canards introduits précédemment dans les systèmes 1+1 et 1+2.

Définition 7. *Un ensemble candidat-limite-périodique (ensemble clp) est l'union fermée d'un segment de S_0 et d'un segment hétérocline de la dynamique (3.2) (où z est un paramètre) connectant entre eux un point stationnaire et/ou un cycle limite de (3.2) et qui est limite, au sens de Hausdorff d'une suite d'orbites périodiques de (3.2) lorsque les paramètres varient et $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Nous allons présenter la liste exhaustive de tous les ensembles clp possibles lorsque z décroît à partir de la valeur $z = I + 1$.

Pour $z = I + 1$ il n'y a qu'un seul ensemble clp possible. Celui-ci est composé du segment de S_0 allant jusqu'au pli du haut et de la courbe hétérocline connectant les deux seuls points d'équilibre du système (3.2) présents pour $z = I + 1$: le pli et le nœud attractif. La forme de cet ensemble clp n'est pas sans rappeler la configuration « canard maximal » des systèmes lents-rapides plans.

Pour $I + 1 > z > z_{hopf}^+$, il y a deux ensembles clp possibles. Un se compose d'un arc de S_0 complété avec une trajectoire hétérocline du système (3.2) qui relie un col de la branche médiane S_0^m à un nœud attractif de la branche gauche S_0^g . Un autre, composé d'un arc de S_0 , complété par une trajectoire hétérocline qui relie le col de la branche médiane S_0^m au point attractif (nœud ou foyer) de la branche droite S_0^d , suivi de $S_0^d \cap \{z \leq z \leq \tilde{I} + 1\}$ puis de la trajectoire rapide qui relie le pli au nœud attractif de S_0^g pour $z = I + 1$. Cette configuration rappelle la configuration « canards sans

tête, canards avec tête » des systèmes 1+1.

Pour $z_{hom}^+ z < z < z_{hopf}^+$, il y a deux clp possibles. Un est composé d'un arc de S_0 suivie d'une solution hétérocline du système rapide qui relie le col de la branche médiane au point attractif de la branche gauche. Par ailleurs, un autre clp est composé d'un arc de S_0 suivi d'une connection hétérocline du col de la branche médiane sur un cycle limite attractif du système rapide. Puis il se complète avec un cône de cycles limites du système rapide pour $z \leq \tilde{z} \leq z_{hopf}^+$ puis du segment $S_0^d \cap \{z_{hopf}^+ \leq \tilde{z} \leq I + 1\}$. Il s'agit donc d'un clp qui n'est pas équidimensionnel puisqu'il est constitué de branches de dimension un et d'une surface.

Pour $z = z_{hom}^+$, il y a une infinité de clp possibles. On a toujours le clp composé d'un arc de S_0 suivi d'une solution hétérocline du système rapide qui relie le col de la branche médiane au point attractif de la branche gauche. Cette fois-ci, on peut aussi compléter avec la boucle homocline du col. Mais alors, on peut compléter le clp soit par une trajectoire hétérocline du col au nœud attractif de S_0^g , soit remonter le long de S_0 et exécuter l'un des scénarii précédents, soit remonter le cône jusqu'à la bifurcation de Hopf z_{hopf}^+ et remonter jusqu'au pli ...

Pour $z_{hom}^- < z < z_{hom}^+$, cette fois encore il y a deux clp possibles et les deux sont de même nature. En effet, tous deux se composent d'un arc de S_0 suivi d'une solution hétérocline du système rapide qui relie le col de la branche médiane au point attractif de la branche gauche. Seulement, l'orbite hétérocline du premier clp possible est « directe » dans le sens où elle s'éloigne du col dans la directions du nœud attractif. Le deuxième clp possible contourne largement le foyer répulsif avant de rejoindre le nœud attractif. Cette dernière trajectoire ressemble à ce que nous pourrions appeler un « canard excité ».

Pour $z = z_{hom}^-$ il y a une infinité des clp possibles. Il y a toujours le clp composé d'un arc de S_0 et d'une trajectoire hétérocline du système rapide reliant le col au nœud attractif. L'autre possibilité est de, après l'arc de S_0 , compléter le clp par une boucle homocline. Mais alors, une fois revenu au col, le clp peut être complété soit par une trajectoire rapide qui va du col au nœud attractif, soit remonter le long de

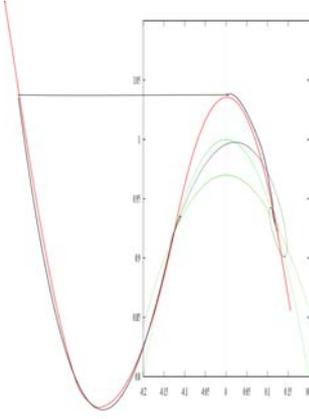


FIGURE 3.12 - *Candidat limite périodique avec tête pour $z_{hopf}^+ < z < z_{nf}$.*

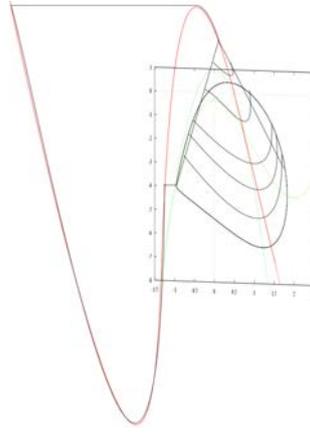


FIGURE 3.13 - *Candidat limite périodique avec tête pour $z_{hom}^+ < z < z_{hopf}^+$.*

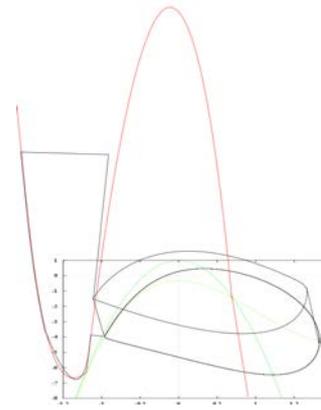


FIGURE 3.14 - *Candidat limite périodique avec tête pour $f(-4/3) < z < z_{hom}^-$.*

S_0 et exécuter l'un des scénarii précédents.

Enfin, pour $f(-4/3) < z < z_{hom}^-$ il y a également une infinité des candidats limites périodiques possibles puisqu'après la trajectoire rapide qui s'enroule autour du cycle attractif, l'ensemble limite est complété par des cycles du système rapide jusqu'à la bifurcation homocline. Les figures 3.12 à 3.14 représentent schématiquement la projection des ensembles-clp dans deux plans perpendiculaires : La courbe rouge représente Σ_0 (donc dans le plan (x, z)), l'encadré est dans le plan (x, y) , donc orthogonal à la courbe Σ_0 . Les deux courbes vertes sont les nullclines rapides $\dot{x} = \dot{y} = 0$ pour la valeur de z correspondante. La courbe en noir est l'ensemble cpl. La figure 3.14 représente une oscillation en salves pour ε très petit qui illustre bien la convergence des cycles vers l'ensemble-clp correspondant lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.4 Explosion de cycle 3D

3.4.1 Addition de spikes par variation de I , pour ε fixé

Le phénomène d'addition de spikes dans le bursting square-wave a d'abord été étudié par Terman dans [66]. Dans cet article, l'auteur met en évidence l'existence de solutions périodiques composées de segment(s) canard(s) pour un très petit intervalle de paramètres entre des orbites périodiques stables à n et à $n + 1$ spikes. Toutefois, le principal résultat de l'article est la preuve de l'existence d'une dynamique en fer à cheval dans les système présentant un bursting carré (de type Morris-Lecar). Les orbites canard suivent la branche répulsive de la variété critique S_0 et ainsi, organise la transition entre des burstings avec différents nombres de spikes par burst. Plus tard, Guckenheimer et Kuehn [38] ont développé un algorithme pour calculer les variétés lentes de type selle. Ces variétés sont la clé du mécanisme d'addition de spikes dans le bursting carré. Dans ce dernier article, les auteurs décrivent le processus d'addition de spikes via des canards en invoquant le comportement d'une oscillation en salves donnée lorsque le burst finit. C'est à dire qu'ils examinent la position de la solution entre les variétés stables et instables de la variété lente (répulsive) 1D. De très nombreux travaux traitent du phénomène d'addition de spikes impliquant des orbites canards; voir par exemple [22, 55]. En particulier, dans [22], les auteurs ont étudié le processus d'addition d'un spike au burst d'une solution périodique en faisant varier un paramètre. Ils interprètent ce résultat comme l'extension de l'explosion canard classique et choisissent donc de l'appeler *spike-adding canard explosion*. Ce mécanisme d'addition de spikes via une explosion canard est illustré figure 3.15 : nous pouvons y voir la projection dans le plan (z, x) de la solution pour six valeurs différentes de paramètre. L'évolution du paramètre entraîne une déformation de l'attracteur du système allant d'un cycle limite sans aucun spike (image (a)) jusqu'à une solution de type oscillations en salves à trois spikes (image (f)). Le processus est exactement le même pour l'addition de chaque spike. Lorsque la nullcline lente (non représentée) intersecte la nullcline cubique (la variété critique S_0) sur sa branche

attractive inférieure, alors le système admet un point stationnaire stable. Sous l'influence d'une variation d'un paramètre, disons I , cet équilibre se rapproche du point pli inférieur de S_0 et finit par le traverser. Le point stationnaire se déséquilibre alors via une bifurcation de Hopf de laquelle émerge un petit cycle limite attractif. Initialement, proche du petit cycle limite, la dynamique est essentiellement bidimensionnelle. Pour une très petite variation de I , l'amplitude du cycle explose exactement comme lors de l'explosion canard classique dans l'oscillateur de van der Pol [7]. Lors de cette explosion de cycles, la solution suit la branche centrale (instable) de S_0 jusqu'à atteindre le pli supérieur de S_0 et former ainsi ce que nous pouvons appeler un *canard maximal*. C'est le cycle limite présenté sur la figure 3.15(a), il s'agit toujours d'un cycle lent sans aucun spike. Cette image met en évidence la croissance du segment canard entre les deux points plis de la variété critique. Passé cette étape, une petite oscillation se crée et la solution devient véritablement tridimensionnelle. Le profil du cycle limite va alors dépendre des éléments du diagramme de bifurcation du sous-système rapide (apparent sur toutes les images de la figure), c'est à dire des bifurcations de Hopf sur-critiques et des bifurcations homoclines ; voir [22] pour plus de détails. Lorsque I continue d'augmenter, le petit spike grandit et se déplace jusqu'à arriver proche de la bifurcation homocline de gauche du sous-système rapide. Pour une telle orbite, représentée sur l'image (b), le segment canard est localisé proche du point pli inférieur de S_0 et, après le spike, l'orbite descend vers la branche inférieure de S_0 , ce qui marque le retour à la phase quiescente. La localisation du spike continue encore un peu de descendre, jusqu'à atteindre le voisinage immédiat de la bifurcation homocline du sous système rapide. A ce moment, une nouvelle explosion canard commence, il en résulte l'addition d'un deuxième spike à l'attracteur périodique du système, comme nous pouvons le voir sur l'image (d). Le principal élément de la dynamique qui initie la deuxième explosion de cycle est la localisation de la trajectoire immédiatement après le spike, lorsque la trajectoire atteint le voisinage de la branche centrale de S_0 , relative aux variétés stables et instables associées au point stationnaire de type selle du sous-système rapide. En effet, lorsque le point selle traverse la

bifurcation homocline, les positions de ces variétés stables et instables sont échangées. Ainsi, lorsque la trajectoire du système complet revient du burst suffisamment proche de la boucle homocline, il est possible pour la dynamique de passer du régime rapide au régime lent en longeant la variété lente instable 1D et ainsi de produire un segment canard. C'est le début de la deuxième explosion de cycle qui entraîne l'addition du deuxième spike à l'attracteur du système via une famille de cycles qui évolue progressivement le long du segment canard et via un cycle avec un spike et un canard maximal (image (c)), juste avant la naissance du deuxième spike. L'évolution de la trajectoire lors de l'addition du deuxième spike est exactement similaire à celle de la trajectoire lors de la première explosion qui fait apparaître le premier spike. C'est à dire que la transition (sous l'influence de la variation de I) entre l'état représenté en (b), l'état représenté en (c) et l'état représenté en (d) est exactement semblable et la même chose se produit pour passer des états (d) à (e) à (f). Remarquons que chacun des cycles représentés sur la figure 3.15 sont obtenues par simulation numérique. Les cycles des images (b), (d) et (f) peuvent être obtenus par simulation directe car ils sont stables. En revanche, les cycles des images (a), (c) et (e) sont plis, ce qui les rend inaccessibles en suivant simplement la solution que ce soit en temps positif ou en temps négatif. Pour les obtenir, il faut utiliser un solver de problèmes aux conditions limites tel que celui implémenté dans le package [24].

3.4.2 Addition de spikes lorsque ε varie

La dépendance en ε des oscillations en salves représente également un phénomène intéressant. Lorsque ε décroît, les trajectoires se rapprochent de la limite singulière dont nous avons précédemment introduit la structure avec la description des ensembles clp. En utilisant un fois encore le solver du package AUTO, nous pouvons calculer de telles branches de solutions lorsque ε approche la limite singulière pour une valeur de I fixée, choisie pour être dans le régime d'addition de spikes (ici $I = 1, 33$). Le long de cette branche un mécanisme d'addition de spikes via une explosion canard

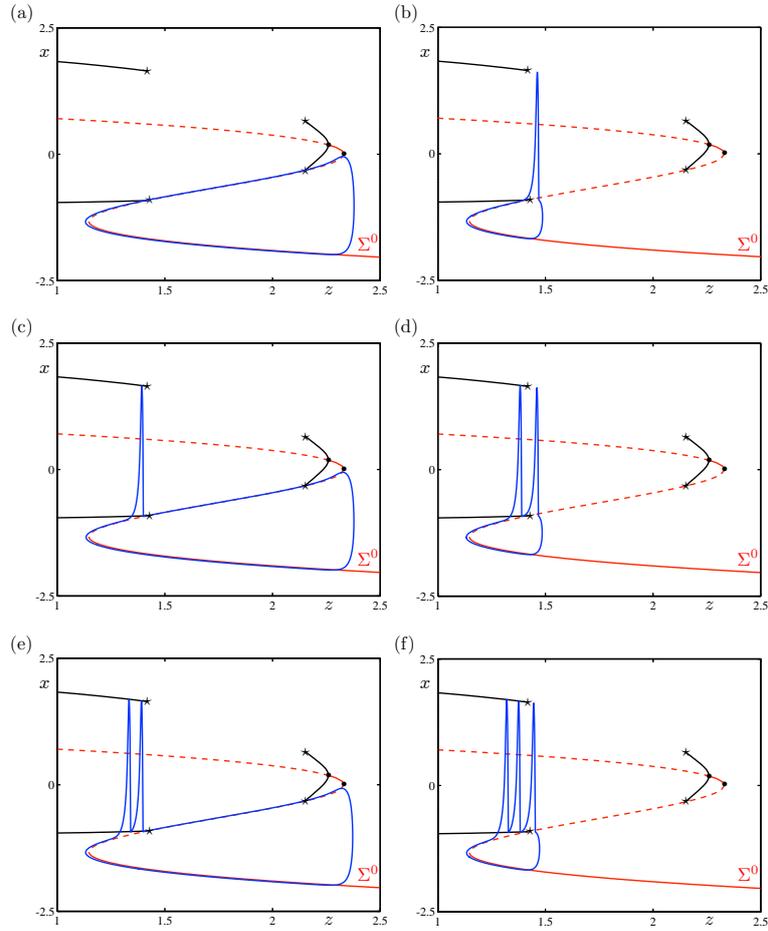


FIGURE 3.15 – Mécanisme d'addition de spikes dans le modèle de Hindmarsh-Rose . Sur chacune des images, les paramètres sont fixés à la valeur précisée dans le texte et I varie dans un intervalle exponentiellement petit autour de 1,33. Sur chaque image, le cycle limite calculé est projeté dans le plan (z, x) et superposé au diagramme de bifurcation du sous-système rapide pour $I = 1,33$ (les branches de points stationnaires, c'est à dire Σ_0 sont tracées en rouge tandis que les branches de cycles limites sont tracées en noir).

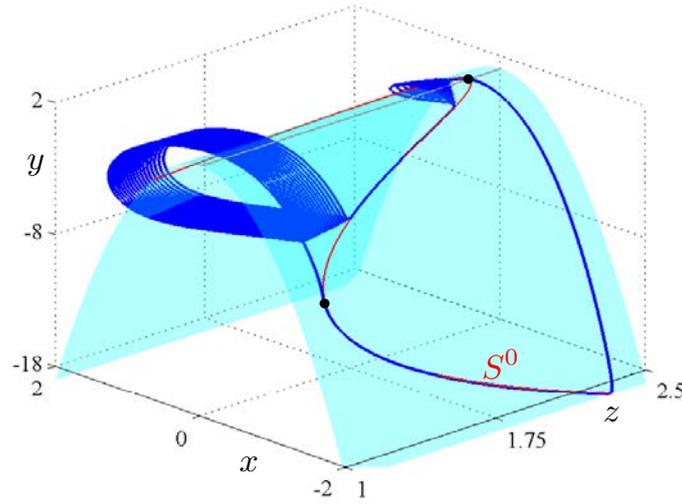


FIGURE 3.16 – Oscillations en salves pour $\varepsilon \simeq 2.10^{-4}$. Ce cycle illustre bien la convergence vers l'ensemble-clp correspondant qui est constitué d'un cylindre formé par les cycles de grandes amplitudes du sous-système rapide et d'un entonnoir formé par les oscillations de petites amplitudes du sous-système rapide.

similaire a lieu : lorsque ε tend vers la limite singulière, de plus en plus de spikes sont ajoutés au burst. Ce phénomène est très bien illustré par la figure 3.16. Le cycle représenté est calculé pour une valeur de ε environ dix fois inférieure à celle choisie pour tracer la figure 3.1. A la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, le nombre de spikes par burst tend vers l'infini et donc vers l'ensemble clp formé d'une surface constituée d'une famille d'orbites périodiques du sous-système rapide.

3.5 Canard avec lèvres

Comme signalé précédemment, les bifurcations entre $z = I + 1$ et $z = z_{hom}^+$ sont typiques de Hindmarsh-Rose . Les parties précédentes ont bien détaillé le mécanisme d'addition de spike. Il est maintenant intéressant de se pencher sur la partie de la variété critique au voisinage du point de bifurcation pli pour $z = I + 1$. En effet, pour $z_{nf} < z < I + 1$, les trajectoires suivent la variété centrale associée au pli. Or cette

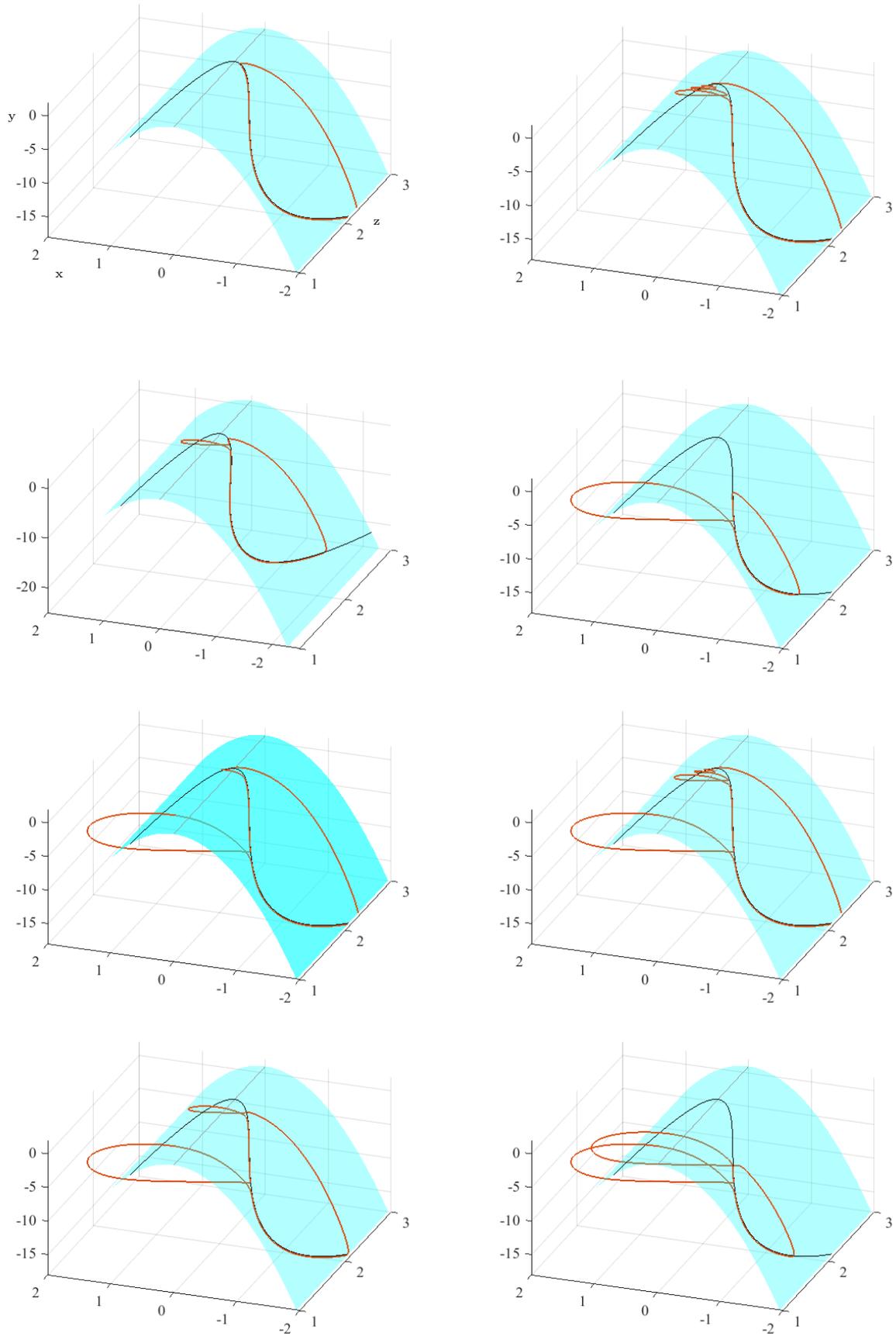


FIGURE 3.17 – Transition d'oscillations en salves de zéro à deux spikes pour une variation de I de l'ordre de $0,01$; En noir la variété critique S , en bleu la surface $y = 1 - 5x^2$, en rouge l'orbite périodique.

dernière est très proche de la surface $y = 1 - 5x^2$. Ainsi, les trajectoires sont tracées sur la même surface que la variété critique. Une trajectoire canard présentant cette particularité sera appelée un « canard avec lèvre ».

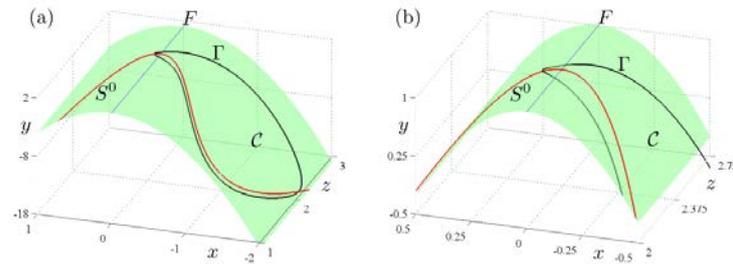


FIGURE 3.18 – En vert la surface $y = 1 - x^2$, en rouge la variété critique S , en noir un canard avec lèvre. La figure de gauche est un zoom sur la lèvre du canard.

L'approximation de la variété centrale est indépendante, à une constante près, de la valeur de I . Pour simplifier les calculs, effectuons la translations $y \rightarrow y + 1$, $z \rightarrow z + I + 1$. Nous obtenons le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x^3 + 3x^2 - z \\ \dot{y} &= -5x^2 - y.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Pour $z = 0$, l'origine est un point d'équilibre. La jacobienne du système en ce point est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les valeurs propres sont $\lambda = 0$ de vecteur propre associé $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\lambda = -1$

de vecteur propre associé $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nous considérons le sous-système rapide dans la base de vecteurs propre $(v, w) = (x + y, y)$. Dans ces coordonnées, le système (??) devient

$$\begin{cases} \dot{v} &= -2v^2 - 2w^2 + 4vw - v^3 + w^3 + 3v^2w - 3vw^2 \\ \dot{w} &= -w - 5v^2 - 5w^2 + 10vw \end{cases}\tag{3.8}$$

3.5.1 Approximation de la variété centrale par un polynôme

Si la variété centrale n'est pas unique, nous pouvons néanmoins en calculer un développement de Taylor formel qui approche un jet fini de son équation. Pour ce faire, cherchons une approximation de l'équation de la variété centrale vue comme un graphe $w = f(v)$ tel que l'ensemble $\{w = f(v)\}$ est invariant par le flot :

$$w = f(v) = \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3 + O(v^4),$$

D'après les égalités du système (3.8) nous obtenons

$$\dot{v}f'(v) = -5v^2 - f(v) - 5f(v)^2 + 10vf(v).$$

En identifiant les termes de même degré, nous déduisons $\alpha_2 = -5$, $\alpha_3 = -70$. Ainsi,

$$f(v) = -5v^2 - 70v^3 + O(v^4) \tag{3.9}$$

Nous souhaitons comprendre comment la variable v évolue proche du point d'équilibre pli. L'origine n'étant pas un point d'équilibre du système de Hindmarsh-Rose, nous considérons le système étendu :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + 3x^2 - z, \\ \dot{y} = -5x^2 - y, \\ \dot{z} = \varepsilon[s(x - x_0) - z], \\ \dot{\varepsilon} = 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

où $s = 4$ et $x_0 = x_1 - 2.33/s = -1.9505$. Dans les système de coordonnée (v, w, z, ε) ces équations deviennent :

$$\begin{cases} \dot{v} = -2v^2 + 4vw - 2w^2 - v^3 + 3v^2w + w^3 - z, \\ \dot{y} = -5v^2 + 10vw - 5w^2 + w^3 - w, \\ \dot{z} = \varepsilon[s(v - w - x_0) - z], \\ \dot{\varepsilon} = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

L'origine $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ est maintenant un point d'équilibre avec une unique direction hyperbolique. Comme précédemment, nous cherchons une approximation du graphe de « la » variété centrale à l'origine :

$$w = \psi(v, z, \varepsilon) = \alpha v^2 + \beta z^2 + \gamma \varepsilon^2 + \delta v z + \zeta v \varepsilon + \eta z \varepsilon + \dots$$

Par identification de termes de même degré dans l'équation

$$\dot{v} \partial_v \psi(v, z, \varepsilon) + \dot{z} \partial_z \psi(v, z, \varepsilon) + \dot{\varepsilon} \partial_\varepsilon \psi(v, z, \varepsilon) - (-5v^2 - \psi(v, z, \varepsilon)) = O((v, z, \varepsilon)^3),$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \alpha &= -5, \\ \beta = \delta &= -10, \\ \zeta &= -10s x_0, \\ \eta &= -30s x_0, \\ \gamma &= -30(s x_0)^2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\psi(v, z, \varepsilon) = -5v^2 - 10z^2 - 30(s x_0)^2 \varepsilon^3 - 10v z - 10(s x_0) v \varepsilon - 30(s x_0) z \varepsilon + \dots \quad (3.12)$$

La restriction de la dynamique à la variété invariante (modulo les termes d'ordre trois) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -2v^2 - z + O((v, z, \varepsilon)^3) \\ \dot{z} &= -s \varepsilon x_0 + O((v, z, \varepsilon)^2) \\ \dot{\varepsilon} &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ainsi, la partie essentielle de la dynamique :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -2v^2 - z \\ \dot{z} &= -s \varepsilon x_0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

se réduit (après une translation en temps) à l'étude de l'équation non-autonome $\dot{v} = -2v^2 + (s \varepsilon x_0)t$. Cette équation peut s'intégrer avec les fonctions de Airy dont l'asymptotique permet de vérifier l'existence de solutions telles que $v < 0$ dans un

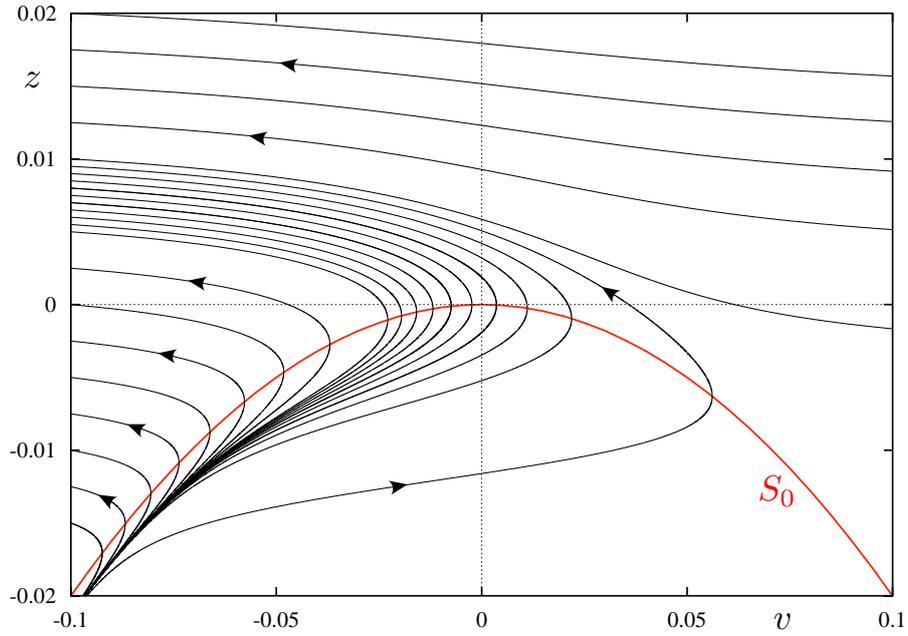


FIGURE 3.19 – Portrait de phase du système (3.7) présentant des trajectoires canards avec lèvre.

premier temps, puis $v > 0$ et enfin $v < 0$ à nouveaux. Ceci explique ce que nous avons appelé les « lèvres ».

L'équation de la variété centrale et ses approximations restent valides tant que $|\lambda_2/\lambda_1| \simeq 0$, où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la Jacobienne associée au système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x^3 + 3x^2 + z \\ \dot{y} &= -y - 5x^2, \end{aligned}$$

à l'origine. Proche de l'origine, il suffit de travailler avec l'approximation

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + 3x^2 - z, \\ \dot{y} &= -5x^2 - y. \end{aligned}$$

Le point d'équilibre qui nous intéresse correspond à $x \simeq \sqrt{z/2}$. La matrice jacobienne associée en ce point est

$$J_{(\sqrt{z/2}, -5z/2)} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{z/2} & 1 \\ -10\sqrt{z/2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont solutions de l'équation

$$p^2 - p(6\sqrt{z/2} - 1) + 4\sqrt{z/2}$$

dont le discriminant est donné par

$$z/2 + 1 - 28\sqrt{z/2}.$$

Cette quantité tend vers zéro $\sqrt{z/2} \simeq 1/28$ ou $z \simeq 2/28^2$. Ainsi, pour une valeur de z de l'ordre de 10^{-3} , les valeurs propres deviennent complexes conjuguées, ce qui explique la très petites taille de l'intervalle de validité de l'approximation de la variété centrale. Nous pouvons maintenant vérifier que les tailles typique des paramètres sont cohérentes. Localement, nous obtenons

$$\begin{aligned} z &= 0.472\varepsilon t, \\ v &= -0.472\varepsilon \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

On peut supposer que $\varepsilon \ll 1/28^2$ (c'est le cas dès que $\varepsilon = 10^{-3}$, ce qui est un choix classique pour les simulations numériques). Dans ce cas, nous pouvons autoriser le temps atteindre la valeur 1. Nous voyons alors que le terme dominant dans (3.12) est $-5v^2$.

Ceci complète la description des canards avec lèvre dans le modèle de Hindmarsh-Rose . Nous pouvons maintenant proposer une définitions des canard avec lèvre :

Définition 8. *Soit X un système lent-rapide composé de deux variables rapides et d'une variable lente. On suppose de plus qu'il y a une bifurcation pli du sous-système rapide pour une certaine valeur de la variable lente vu comme un paramètre et que pour cette valeur, la dérivée en temps de la variable lente n'est pas nulle. Alors, un canard avec lèvre est une trajectoire qui se rapproche du pli du sous-système rapide et tel que :*

- *L'évolution monotone de la variable lente entraîne une évolution lente et monotone de la variable non-hyperbolique,*
- *dans le domaine de validité de la variété centrale du sous-système rapide, la composante hyperbolique de la trajectoire reste proche de la variété lente.*

L'équation (3.13) et sa réduction (3.14) mettent en évidence que le phénomène « canard avec lèvres » se ramène en fait à la traversée lente d'une bifurcation pli. C'est clairement un phénomène générique qui se produit pour tout système équivalant aux équations (3.13).

3.5.2 En dimension supérieure

Le travail précédent se généralise en dimension supérieure. Ce que nous avons appelé canard avec lèvres est la traversée dynamique d'une bifurcation pli ; ajouter des variables lentes ne serait donc pas pertinent. Soit le système de dimension $m + n + 1$:

$$\begin{aligned} \forall k \in [1, m], \dot{x}_k &= \sum_{i=1}^n \mu_i y_i + \lambda_k z \\ \forall k \in [1, n], \dot{y}_k &= \theta_k y_k + \sum_{i=1}^m \kappa_i^k x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \kappa_{ij}^k x_i x_j \\ \dot{z} &= \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Soit ψ la variété centrale du système étendu. Localement, la dynamique est donnée par

$$\begin{aligned} y_k &= \psi_k \\ \dot{x}_k &= \lambda_k z \\ \dot{z} &= \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Pour tout $k \in [1, n]$ posons

$$\psi_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i^k x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \alpha_{ij}^k x_i x_j + \beta^k z^2 + \gamma^k \varepsilon^2 + \sum_{i=1}^m \delta_i^k x_i z + \sum_{i=1}^m \xi_i^k \varepsilon x_i + \eta^k \varepsilon z,$$

où λ_k and $\theta_k = \pm 1$. Les termes d'ordre deux en x_i de la variété centrale sont les mêmes que ceux de la variété critique. Nous savons aussi qu'il y a un terme produit de x_i et z ainsi qu'un terme produit de x et ε . Comme précédemment, la question est de savoir si les termes uniquement en x sont significatifs de sorte que la variété centrale reste proche de la variété critique. Par identification, pour tout $\forall k \in [1, n]$:

$$\sum_{i=1}^m \delta_i^k x_i = \theta_k \sum_{i=1}^m \xi_i^k x_i$$

il vient que les termes d'ordre un en x sont donnés par

$$\sum_{i=1}^m \xi_i^k x_i (\varepsilon + \theta_k z).$$

Exactement de la même manière que dans le cas tri-dimensionnel, le domaine de validité de la variété critique de sous système rapide est indépendant de ε . Nous pouvons autoriser la variable temps t à atteindre la valeur 1. Il s'ensuit que, si $\theta_k = -1$, le terme d'ordre un en x devient négligeable devant le terme d'ordre deux en x . Ainsi, nous obtenons un canard avec lèvre en chaque variable hyperbolique.

Chapitre 4

Contribution à l'analyse d'une minimalité du modèle de F.

Clément et J.-P. Françoise

4.1 Oscillations multi-modales (MMOs)

Les « mixed-mode oscillations » (MMOs) sont des dynamiques complexes, elles se caractérisent par l'alternance d'oscillations de faible amplitude suivie de grandes oscillations de relaxation. Si ces dynamiques à deux échelles ont été autant étudiées au cours des dernières années, c'est qu'elles apparaissent naturellement à l'observation d'un grand nombre de systèmes chimiques ou biologiques. Citons leur première description par Zhabotinsky dans [69] qui décrit une famille de réactions chimiques oscillantes appelée réaction de Belousov-Zhabotinsky. L'étude des MMOs est également d'un grand intérêt mathématique : Pour se produire ces dernières ont besoin d'un système dynamique composé de, au moins, deux variables lentes et d'une variable rapide dont la variété critique, c'est à dire l'ensemble des points d'équilibre de la variable rapide, présente un pli. Leur existence est fortement liée à la présence de *phénomènes canards* dans le système et de *bifurcations plis* dans le sous-système ra-

pide. L'engouement pour les MMOs dans les systèmes lents-rapides commence avec les travaux de Milik et al. [51] qui ont prouvé que les MMOs sont liées à un phénomène canard généralisé. Brøns et al. dans [11] expliquent comment un pseudo-nœud peut se combiner avec un mécanisme de retour global afin de donner naissance à des MMOs. Cet article fondateur sert de base pour un grand nombre de travaux concernant ces dynamiques trouvées dans diverses applications [60, 59, 31, 68]. De plus, on peut classer les MMOs selon le type de bifurcations impliquées dans leur formation [56, 20]. Cette méthode d'analyse n'est pas sans rappeler la classification des *Bursting oscillation* pourtant, elle est bien plus récente. De façon phénoménologique, on distingue différents types de MMOs selon la manière dont se succèdent les petites et les grandes oscillations. Ainsi une MMOs composée de L_1 grandes oscillations suivies de s_1 petites oscillations, elles mêmes suivies de L_2 grandes oscillations ect sera notée $L_1^{s_1} L_2^{s_2} \dots$. Cette série s'appelle la *signature* de la MMO. Dans le cas d'une MMO périodique, la signature est abrégée par la signature d'une période. Deux notions essentielles pour étudier les MMOs sont les *canards secondaires* et les *secteurs de rotation* : Un canard secondaire est une trajectoire originaire de la variété lente attractive, qui en passant dans la région du pli exécute un certain nombre de petites oscillations, puis continue en longeant la variété lente instable. Ces canards secondaires divisent l'espace des phases en régions appelées secteurs de rotation. Le choix du nom provient de ce que deux trajectoires qui traversent la région comprise entre deux canards secondaires consécutifs exécutent le même nombre de petites oscillations.

4.2 MMOs dans un système à trois échelles de temps

Le système trois échelles de temps composé de deux equations de types Fitz-Hugh–Nagumo couplé (4.1) a été proposé et étudié dans [14, 15, 67, 49]. Il s'agit d'un modèle 4D à trois échelles de temps qui modélise la sécrétion de GnRH (gonado-

libérine) par les neurones hypothalamiques chez les femelles mammifères. Ce modèle est un *phantom burster*. Le système de forçage (qui représente l'activité du système régulateur) évolue en temps lent et agit en déplaçant la nullcline lente du système forcé (le système sécréteur).

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \delta \dot{x} &= -y + \lambda_3 x^3 + \lambda_1 x \\
 \delta \dot{y} &= a_0 x + a_1 y + a_2 + cX \\
 \delta \dot{X} &= -Y + \mu_3 X^3 + \mu_1 X \\
 \dot{Y} &= X + b_1 Y + b_2.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Le système (x, y) est le sécréteur tandis que le système (X, Y) est le régulateur. La dynamique admet trois modes : une phase pulsatile (oscillations de relaxation transitoire), une phase de décharge (état quasi stationnaire) et une phase de petites oscillation correspondants au passage de la nullcline lente à travers un pli de la nullcline rapide. En effet, lorsque le système régulateur présente un cycle limite, pour certaines valeurs de paramètre, la variable X entraîne le système sécréteur alternativement dans deux régimes d'oscillations rapides. Il s'ensuit que la trace en temps de la variable y , qui représente la sécrétion de GnRH au cours du temps, présente une alternance périodique entre une phase pulsatile et une décharge. Lors de la transition entre la décharge et la phase pulsatile suivante, on observe un plateau composé d'un segment de très petites oscillations. Dans [49] les auteurs obtiennent un résultat local qui caractérise des canards et des secteurs de rotations dans le cas d'un nœud avec une échelle de temps supplémentaire. Il est naturel de supposer que certaines des dynamiques observées dans le système (4.1) ne pourront pas être reproduite par un système à seulement deux échelles de temps. Dans [53] les auteurs étudient un système à trois échelles de temps composé de deux Morris-Lecar couplés. Ils identifient certaines solutions dont les propriétés requièrent réellement trois échelles de temps et ne peuvent donc pas apparaître dans des systèmes à deux échelles de temps.

4.3 Vers un modèle minimal

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la possibilité de reproduire les comportements observés dans le modèle (4.1) avec un modèle 3D plus simple :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x^2 - x^3 = -y + f(x) \\ \dot{y} &= \varepsilon(x + z) \\ \dot{z} &= \varepsilon\delta(\mu + az - bx).\end{aligned}\tag{4.2}$$

où $0 < \varepsilon \ll 1$, $0 < \delta \ll 1$, $\mu = O(1)$, $a = O(1)$ et $b = O(1)$. La figure 4.1 (obtenue avec le logiciel xppAuto) montre la trace en temps de la variable x du système (4.2). Dans ce chapitre, nous allons suivre un raisonnement proche de celui présenté dans [49].

Les auteurs étudient dans [46] un système très similaire à (4.2) qui présente des solutions MMOs. Il s'agit de l'équation :

$$\begin{aligned}v' &= -z + f_2v^2 + f_3v^3 \\ z' &= \varepsilon(v - w) \\ w' &= \varepsilon^2(\mu - g_1z).\end{aligned}$$

Nous verrons que le mécanisme à l'origine de ce que nous appellerons la décharge est étroitement relié à la présence du facteur bx dans l'équation de \dot{z} du système (4.2).

La variété critique $S_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -y - x^2 - x^3 = 0\}$ est une surface de forme cubique dans \mathbb{R}^3 . Elle est constituée de deux surfaces attractives que nous noterons S_0^{a+} et S_0^{a-} ainsi que d'une d'une surface répulsive que nous noterons S_0^r . Ces surfaces sont séparées pas deux courbes plis que nous noterons l^+ et l^- . D'après la théorie de Fenichel [32], S_0 persiste comme une surface localement invariante notée S_ε pour de petites valeurs de $\varepsilon > 0$ loin des courbes plis. C'est de cette non persistance de la variété invariante au voisinage des plis que naissent les canards.

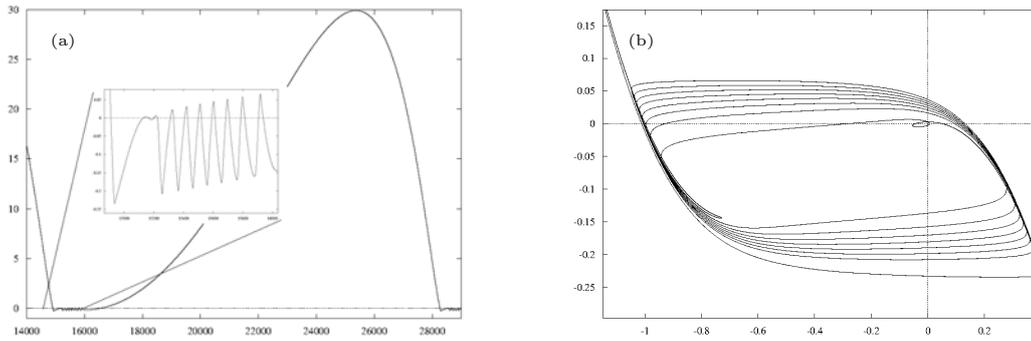


FIGURE 4.1 – Trace en temps du système 4.2; panel (a). Portrait de phase du système 4.2; panel (b) tracés pour les valeurs de paramètre $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.1$, $\mu = 1.01$, $a = 1$ et $b = -1.4209$

4.4 Système désingularisé

A la limite $\varepsilon = 0$, nous avons $-y - x^2 - x^3 = 0$. On en déduit l'expression du système réduit :

$$\begin{aligned} -x(2 + 3x)\dot{x} &= \dot{y} \\ \dot{z} &= \mu + az - bx. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Par un changement d'échelle qui consiste à multiplier les termes de droite par $-x(2 + 3x)$, on obtient le système désingularisé

$$\begin{aligned} \delta\dot{x} &= x + z \\ \dot{z} &= -x(2 + 3x)(\mu + az - bx)S(-x(2 + 3x)), \end{aligned} \quad (4.4)$$

où $S(-x(2 + 3x))$ est le signe de $-x(2 + 3x)$. La dynamique du système 4.2 au pli dépend essentiellement de la dynamique du système 4.4. Il est clair que l'origine est un point d'équilibre du système 4.4.

Classification de l'équilibre pli en fonction du paramètre μ .

Pour étudier les valeurs propres du système à l'origine il suffit de considérer la partie

linéaire du système :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + z \\ \dot{z} &= -2\mu x + \dots\end{aligned}\tag{4.5}$$

Les valeurs propres recherchées sont les solutions de l'équation :

$$\lambda^2 - \lambda + 2\mu = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = 1 - 8\mu$. Remarquons que μ est le produit des deux valeurs propres $\mu = \lambda_- \times \lambda_+$. On distingue cinq cas :

- $\mu > 1/8$ alors l'origine est un foyer répulsif ($\Re(\lambda_{\pm}) = 1$),
- $\mu < 0$ alors l'origine est un pseudo-nœud ($\lambda_- < 0 < \lambda_+$),
- $\mu = 0$ alors l'origine est un pseudo-col-nœud ($\lambda_- = 0, \lambda_+ = 1$),
- $0 < \mu < 1/8$ alors l'origine est un nœud répulsif ($\lambda_-, \lambda_+ > 0$),
- $\mu = 1/8$ alors l'origine est un pli dégénéré ($\lambda_- = \lambda_+ > 0$).

Benoît dans [6] puis Szmolyan et Wechselberger dans [65] ont montré que dans le deuxième cas, il existe un unique canard connectant S_{ε}^{a-} et S_{ε}^r . De plus, comme prouvé dans [50], il ne peut pas y avoir de MMOs dans ce cas. Par ailleurs, le foyer ne peut pas donner lieu à des solutions canards. Nous écarterons donc ces deux cas de notre étude et nous concentrerons sur les trois restants.

Une simple translation permet de mener la même étude sur le second pli. Posons $x = \tilde{x} - 2/3, z = \tilde{z} + 2/3$. Alors le système 4.4 devient :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{x} + \tilde{z} \\ \dot{\tilde{z}} &= -\tilde{x}(\tilde{x} - \frac{2}{3})[(\mu + \frac{2}{3}(a+b)) + a\tilde{z} - b\tilde{x}],\end{aligned}\tag{4.6}$$

de partie linéaire

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{x} + \tilde{z} \\ \dot{\tilde{z}} &= 2\tilde{\mu}\tilde{x}\end{aligned}\tag{4.7}$$

où $\tilde{\mu} = [\mu + \frac{2}{3}(a+b)]\frac{1}{3}$. Remarquons que pour pouvoir observer des petits oscillations sur les deux plis à la fois on doit avoir $0 \leq \mu \leq 1/8$ et $-1/8 \leq \tilde{\mu} \leq 0$. Ce qui conduit à la condition sur les paramètres : $-9/16 - 3\mu/2 \leq a+b \leq -3\mu/2$.

La figure 4.1 est obtenue dans un régime de paramètre tel qu'il puisse y avoir des petites oscillations au pli du haut tandis que le pli du bas est de type saut et ne présente pas de segment canard. C'est donc dans ce régime de paramètre que nous allons trouver la présence de petites oscillations par des méthodes d'éclatements.

4.5 Étude de la singularité au pli supérieur

Notons Σ^{in} la section définie par $\{y = -\rho^2\}$ avec $0 < \rho \ll 1$ fixé. Soit S_ε^a la variété de Fenichel attractive proche de la variété critique donnée par $y = -x^2 - x^3$ définie au voisinage de Σ^{in} . Remarquons que Σ^{in} est transverse au flot de (4.2) et intersecte S_ε^a proche du pli mais en reste à une distance $O(1)$ en ε . Nous allons nous concentrer sur la description des trajectoires partant de la courbe $S_\varepsilon^a \cap \Sigma_{in}$. Chaque trajectoire provenant de $S_\varepsilon^a \cap \Sigma_{in}$ entre dans un voisinage du pli et exécute un certain nombre de petites rotations avant de quitter la région du pli. Le nombre de petites oscillations peut varier d'une trajectoire à une autre.

Définition 9. *Un k -ème canard secondaire est un canard qui exécute k petites oscillations avant de quitter la région du pli.*

*Soit deux trajectoires (x, y, z) et $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ dont le nombre de petites rotations diffère. Alors, il existe un canard secondaire de position initiale entre (x, y, z) et $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Cela nous amène à définir les **secteurs de rotation** comme les segments de $S_\varepsilon^a \cap \Sigma_{in}$ entre deux canards secondaires consécutifs.*

Le théorème suivant donne une description précise des secteur de rotation :

Théorème 4. *Il existe un nombre R tel que pour tout $0 < \nu < R$ il existe une famille de canards secondaires avec*

$$\frac{\nu}{\delta} < k < \frac{R}{\delta}.$$

Les canards avec un nombre de rotations consécutives se suivent. La distance entre deux canards consécutifs mesurée sur la section Σ^{in} est bornée inférieurement par $C_1\delta\sqrt{\varepsilon}$ et supérieurement par $C_2\delta\sqrt{\varepsilon}$ où C_1 et C_2 sont des constantes positives.

Soit la fonction

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\bar{r}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\varepsilon}) &\rightarrow (\bar{r}\bar{x}, \bar{r}^2\bar{y}, \bar{r}\bar{z}, \bar{r}^2\bar{\varepsilon}) = (x, y, z, \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pour prouver l'existence de MMOs, nous travaillerons dans deux cartes. La première notée K_1 est donnée par $\bar{y} = -1$, la deuxième notée K_2 est donnée par $\bar{\varepsilon} = 1$.

Dans un premier temps, nous allons étendre la théorie de Fénichel dans K_1 . En effet, nous allons montrer que la variété lente proche de la variété critique dont l'existence et garantie par la théorie de Fénichel loin des points non hyperboliques peut être prolongée au voisinage du pli dans la carte K_1 . Nous passerons à l'étude des trajectoires guidées par ces variétés dans K_2 .

4.5.1 Extension de la théorie de Fenichel dans K_1

Dans cette carte, nous avons

$$x = x_1 r_1, y = -r_1^2, z = r_1 z_1, \varepsilon = r_1^2 \varepsilon_1.$$

Il s'ensuit que le flot est donné dans K_1 par l'équation

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{2}\varepsilon_1 x_1 F(x_1, z_1) - (-1 + x_1^2 + r_1 x_1^3) \\ \dot{r}_1 &= \frac{1}{2}r_1 \varepsilon_1 F(x_1, z_1) \\ \dot{z}_1 &= -\frac{1}{2}\varepsilon_1 z_1 F(x_1, z_1) + \varepsilon_1 \delta(\mu + ar_1 z_1 - br_1 x_1) \\ \dot{\varepsilon}_1 &= -\varepsilon_1^2 F(x_1, z_1), \end{aligned} \quad (4.9)$$

où

$$F(x_1, z_1) = -(x_1 + z_1).$$

Nous définissons

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{in} &= \{(x_1, r_1, z_1, \varepsilon_1) | r_1 = \rho\}, \\ \Sigma_1^{out} &= \{(x_1, r_1, z_1, \varepsilon_1) | r_1 = \eta, 0 < \eta \ll 1\}. \end{aligned}$$

Nous verrons que les trajectoires entrées par Σ_1^{in} en étant dirigées par la prolongation de la variété de Fénichel passent par Σ_1^{out} . Il est clair que, pour tout z_1 , il y a deux

points d'équilibres non-hyperboliques en $(\pm 1, 0, z_1, 0)$. La variété centrale y est donnée en première approximation par $x_1 \simeq 1$. Après un réajustement de l'échelle de temps par ε_1 , nous obtenons que Le flot du système (4.9) restreint à la variété centrale est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \frac{1}{2}r_1 F(x_1, z_1) \\ \dot{z}_1 &= -\frac{1}{2}z_1 F(x_1, z_1) + \delta(\mu + az_1 r_1 - bax_1) \\ \dot{\varepsilon}_1 &= -\varepsilon_1 F(x_1, z_1). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Les hyperplans $\{r_1 = 0\}$ et $\{\varepsilon_1 = 0\}$ sont toujours invariants. Ainsi, en chaque point pli, la variété centrale est donnée par :

$$x_1 = \pm 1 + O(r_1, \varepsilon_1).$$

Ces variétés centrales sont les prolongements dans K_1 des variétés de Fénichel. Au voisinage de $r_1 = 0$, L'intersection de la variété centrale et de l'hyperplan $\varepsilon_1 = 0$ est donnée par l'équation

$$-1 + x_1^2 + r_1 x_1^3 = 0,$$

soit par

$$\begin{aligned} x_1 &= \pm \sqrt{1 - r_1 x_1^3} \\ &= \pm \left[1 - \frac{r_1 x_1^3}{2}\right] + O(r_1^2 x_1^6) \\ &= \pm \left[1 - \frac{r_1}{2}(1 + O(r_1, \varepsilon_1))^3\right] \\ &= \pm \left[1 - \frac{r_1}{2} + O(r_1^2, \varepsilon_1)\right]. \end{aligned}$$

Soit CM_a la variété centrale approchée par $x_1 = 1 - \frac{r_1}{2} + O(r_1^2, \varepsilon_1)$. Celle-ci est attractive au voisinage de $r_1 = 0$ et $\varepsilon_1 = 0$. Il existe de même une variété centrale répulsive notée CM_r dont l'expression approchée est donnée par $x_1 = -1 + \frac{r_1}{2} + O(r_1^2, \varepsilon_1)$.

Le flot restreint à la variété CM_a , après changement de l'échelle de temps d'un facteur ε_1 est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \frac{1}{2}r_1 \tilde{F}(z_1, z_1, \varepsilon_1) \\ \dot{z}_1 &= -\frac{1}{2}z_1 \tilde{F}(z_1, z_1, \varepsilon_1) + \delta[\mu + az_1 r_1 + b - b\frac{r_1}{2} + O(r_1^2, \varepsilon_1)] \\ \dot{\varepsilon}_1 &= -\tilde{F}(z_1, z_1, \varepsilon_1), \end{aligned} \quad (4.11)$$

où

$$\tilde{F}(z_1, z_1, \varepsilon_1) = -1 + \frac{r_1}{2} - z_1 + O(r_1^2, \varepsilon_1).$$

Les plans $\{\varepsilon_1 = 0\}$ et $\{z_1 = 0\}$ sont toujours invariants. Le système (4.11) admet deux points singuliers

$$z_1^+ = \frac{-1 + \sqrt{1 - 8\delta(\mu + b)}}{2} = -2\delta(\mu + b) + O(\delta^2),$$

et

$$z_1^- = \frac{-1 - \sqrt{1 - 8\delta(\mu + b)}}{2} \simeq -1 + 2\delta(\mu + b) + O(\delta^2).$$

Il est aisé de vérifier que

$$-1 \leq z_1^- < z_1^+ \leq 0.$$

La jacobienne du système (4.11) en $(0, z_1, 0)$ est donnée par :

$$J_\delta(0, z_1, 0) = \begin{pmatrix} -1/2 - z_1/2 & 0 & 0 \\ -z_1/2 + \delta[az_1 - b/2 + O(\delta)] & 1/2 + z_1 & -1/2O(1) \\ 0 & 0 & 1 + z_1 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Ainsi, pour $\delta \neq 0$, les deux points d'équilibre sont hyperboliques. Qu'en est-il lorsque $\delta \rightarrow 0$? On a :

$$J_{0^+}(0, z_1^+, 0) = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0^+ & 1/2 & -1/2O(1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

et

$$J_{0^+}(0, z_1^-, 0) = \begin{pmatrix} 0^- & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2O(1) \\ 0 & 0 & 0^+ \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Il est clair que le point d'équilibre z_1^- n'est pas hyperbolique pour $\delta = 0$. Ainsi, pour $\delta = 0$, $\tilde{F}(r_1, z_1, \varepsilon_1)$ est l'équation d'une variété centrale composée de points d'équilibres. Pour étendre ce résultat à toute valeur de $0 \leq \delta \ll 1$, il suffit d'ajouter au système (4.11) l'équation :

$$\dot{\delta} = 0.$$

On peut alors appliquer le théorème de la variété centrale et prouver l'existence d'une variété centrale de dimension deux associée à l'équilibre $(0, z_1^-, 0)$ pour tout $\delta > 0$.

Les valeurs propres de la jacobienne au point $(0, z_1^-, 0)$ pour $\delta^* < 0$ sont

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -2\delta(\mu + b) + O(\delta^2) \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2} + 4\delta(\mu + b) + O(\delta^2) \\ \lambda_3 &= 4\delta(\mu + b) + O(\delta^2).\end{aligned}$$

Le vecteur propre associé à λ_3 est $(0, -O(1), 1)$, le vecteur propre associé à λ_1 est $(1, 1 + O(\delta), 0)$ et le vecteur propre associé à λ_2 est $(0, 1, 0)$. Ainsi, le long des trajectoires, $r_1 \rightarrow 0$ et ε_1 croît.

Soit S_ε^a la variété lente de Fénichel attractive.

$$S_\varepsilon^a \cup \Sigma_1^{in} = \{(x, y, z) | x = \rho, y = -\rho^2\}.$$

Quel est le point de Σ_1^{out} atteint par les trajectoire partant de $CM_a \cup \Sigma_1^{in}$?

La dynamique du système (4.11) approche le flot du système (4.9) sur CM_a . Ainsi, la direction z_1 s'étend loin de l'équilibre à l'origine vers le point d'équilibre $(0, z_1^-, 0)$. Il s'ensuit que la projection de la variété CM_a sur la direction z_1 est contenue dans l'intervalle $] -1, 0[$. Finalement, l'intersection $CM_a \cup \Sigma_1^{out}$ est une fine bande dans l'espace à quatre dimensions $(x_1, r_1, z_1, \varepsilon_1)$ contenant un segment proche de l'intervalle $\{x_1 = 1, -1 < z_1 < 0\}$.

4.5.2 Preuve de l'existence d'oscillations dans K_2

Dans cette carte, nous avons

$$x = r_2 x_2, y = r_2^2 y_2, z = r_2 z_2, \varepsilon = r_2^2$$

ou, de manière équivalente

$$x = \sqrt{\varepsilon} x_2, y = \varepsilon y_2, z = \sqrt{\varepsilon} z_2.$$

Ainsi, le flot dans K_2 est donné par

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -y_2 - x_2^2 - \sqrt{\varepsilon}x_2^3 \\ \dot{y}_2 &= x_2 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= \delta(\mu + a\sqrt{\varepsilon}z_2 - b\sqrt{\varepsilon}x_2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Le changement de carte est donné par

$$\begin{aligned} \kappa_{12} : & \begin{cases} K_1 \rightarrow K_2 \\ (x_1, \varepsilon_1, z_1) \rightarrow \left(\frac{x_1}{\sqrt{\varepsilon_1}}, -\frac{1}{\varepsilon_1}, \frac{z_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \right) = (x_2, y_2, z_2) \end{cases} \\ \kappa_{21} : & \begin{cases} K_2 \rightarrow K_1 \\ (x_2, y_2, z_2) \rightarrow \left(\frac{x_2}{\sqrt{-y_2}}, -\frac{1}{y_2}, \frac{z_2}{\sqrt{-y_2}} \right) = (x_1, \varepsilon_1, z_1) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Le système (4.15) est lent-rapide avec deux directions rapides et une lente. Le paramètre singulier est δ . Nous avons vu que l'image de l'extension de S_ε^a dans Σ_1^{out} est approchée par

$$\{x_1 = 1, -1 < z_1 < 0\}.$$

L'image de cet ensemble dans K_2 est donné par

$$\left\{x_2 = \frac{1}{\sqrt{\eta}}, -\frac{1}{\sqrt{\eta}} < z_2 < 1\right\}. \quad (4.17)$$

Les trajectoires provenant de l'intervalle donné par (4.17) sont attirées par la variété lente du système (4.15) donné par

$$S_{2,0} = \{x_2 = -z_2, y_2 = -z_2^2 + \sqrt{\varepsilon}z_2^3\}. \quad (4.18)$$

Nous reconnaissons dans le sous-système rapide de (4.15) une perturbation de la forme normale de la bifurcation de Hopf singulière. Décrivons la phase de retard à la bifurcation.

La linéarisation du sous-système rapide est donné par

$$\begin{pmatrix} -2x_2 - 3\sqrt{\varepsilon}x_2^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le long de $S_{0,2}$ cela devient

$$\begin{pmatrix} 2A(\varepsilon)z_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

où $A(\varepsilon) = 1 + O(\sqrt{\varepsilon})$. Ainsi, tant que $z_2 \neq 0$, tout les points d'équilibre sont hyperboliques. Il s'ensuit que, pour tout $\eta > 0$, il existe des variétés lentes invariantes S_δ^a et S_δ^r pour $-1/\eta < z_2 < -\eta$ et $\eta < z_2 < 1/\eta$.

Translatons $S_{0,2}$ sur l'axe $(0, 0, z_2)$. On pose

$$\begin{aligned} x_2 &= x - z + O(\sqrt{\varepsilon}) \\ y_2 &= y - z_2^2 + O(\sqrt{\varepsilon}) \\ z_2 &= z. \end{aligned}$$

Le système (4.15) devient alors :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + 2A(\varepsilon)xz - x^2 + O(\sqrt{\varepsilon}, \delta) \\ \dot{y} &= x + O(\sqrt{\varepsilon}, \delta) \\ \dot{z} &= \delta[\mu + (a+b)\sqrt{\varepsilon}z - b\sqrt{\varepsilon}x_2] + O(\varepsilon\delta). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Les valeurs propres de (4.19) sont données par l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - 2A(\varepsilon)z_2 + 1 = 0.$$

Ainsi, les valeurs propres sont imaginaires si

$$-\frac{1}{A(\varepsilon)} < z_2 < \frac{1}{A(\varepsilon)}$$

et la partie réelle est de même signe que z_2 . Pour $-1/A(\varepsilon) < z < 0$, nous définissons la fonction $e^* = \psi(z)$ où z^* est la valeur telle que

$$\int_z^{z^*} \frac{s}{\mu + s(a+b)} ds = 0. \quad (4.21)$$

Les trajectoires attirées vers S_δ^a proche de z_2 seront repoussées loin de S_δ^r proche de z^* . Pour $z_0 < 0$, posons

$$\Sigma_{z_0} = \{(x, y, z) | z = z_0\}.$$

La proposition suivante caractérise la transition de Σ_{z_0} à $\Sigma_{z_0^*}$.

Proposition 7. *Il existe $\eta_1, \eta_2 > 0$ tel que pour tout $z_0 \in]-1/A(\varepsilon), 0[$ et $(x, y, z_0) \in \Sigma_{z_0}$ suffisamment proche de l'origine dans Σ_{z_0} , soit $(x(t), y(t), z(t))$ la trajectoire du système (4.20) partant de (x, y, z_0) , soit $z_0^* = \psi(z_0)$.*

Alors, il existe $t^ > 0$ tel que pour tout $t \in]0, t^*[$, $z_0 < z(t) < z_0^*$ et $x^2(t) + y^2(t) < \eta_1$. Si de plus il existe $0 < \alpha < 1/4$ tel que la distance $D((x, y, z_0), S_\delta^a \cup \Sigma_{z_0}) < \delta^{2(1+\alpha)}$; alors la distance $D((x(t^*), y(t^*), z_0^*), S_\delta^r) < \eta \alpha_2^{2(1+\alpha)}$.*

Nous renvoyons le lecteur aux travaux de Neishtadt [54] pour une démonstration de cette proposition.

4.5.3 Preuve du théorème 4

Dans cette section, nous utiliserons à la fois les coordonnées originales (x_2, y_2, z_2) et les coordonnées translattées (x, y, z) . Soit C_δ un cylindre de rayon $\delta^{2(1+\alpha)}$ autour de S_δ^a où $0 < \alpha < 1/4$ est une constante. Les trajectoires partant de σ_2^{in} avec $z_2 < 0$ entrent dans C_δ puis en sortent pour $z_2 > 0$. Nous utiliserons les coordonnées (x_2, y_2, z_2) pour la partie de la trajectoire en-dehors de C_δ et nous utiliserons les coordonnées (x, y, z) pour la partie de la trajectoire en-dedans du cylindre.

Rappelons que la variété centrale CM_a coïncide avec l'extension à K_1 de la variété lente S_ε^a . On appellera également CM_a l'image de CM_a dans K_2 par la transformation κ_{12} .

Remarquons que le point

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}, -\frac{1}{\eta}, -\frac{1}{\sqrt{\eta}} \right)$$

appartient à la variété critique du système (4.15). Le point d'équilibre en lequel les valeurs propres de la jacobienne passent de réelles à complexes est donné par

$$z_2^- = -\frac{1}{A(\varepsilon)}.$$

Pour $\eta < 1 + O(\sqrt{\varepsilon})$, $z_2^- \in]-1/\sqrt{\eta}, 0[$. Soit une trajectoire de (4.15) partant de $CM_a \cup \Sigma_2^{in}$ tel que $-1/A(\varepsilon) < z_2(0) < -\eta_0 < 0$. La portion de trajectoire considérée s'arrête dans C_δ . Dans ces conditions, le flot est essentiellement dans la direction

rapide et loin des singularités. Ainsi, le temps mis pour effectuer cette portion de trajectoire est de l'ordre de $O(\ln(\delta))$ uniformément en δ et de plus, la coordonnée z_2 reste comprise dans l'intervalle $] -1/A(\varepsilon), -\eta_0[$ pour δ suffisamment petit.

Pour étudier la suite de la trajectoire à l'intérieur du cylindre C_δ nous passons aux coordonnées rectifiées (x,y,z) .

Soit une trajectoire partant d'un point de C_δ noté z_0 . Une telle trajectoire suit d'abord S_δ^a puis S_δ^r jusqu'à ce que z approche z_0^* . D'après le corolaire 5.1 de [50], le flot de (4.15) pour les trajectoires provenant de C_δ est linéaire au premier ordre (pour un certain choix de $0 < \alpha < 1/4$). De plus, pour tout z_0 tel que $-1/A(\varepsilon) < z_0 < -\eta_0 < 0$, il existe $\tilde{z}^*(z_0, \delta) = z^*(z_0) + O(\delta)$ tel que la translation de $C_\delta \cup \{z = z_0\}$ à $\{z = \tilde{z}^*(z_0, \delta)\}$ est une rotation d'angle $R(z_0/\delta)$ où

$$R(z_0) = \int_{z_0}^{\psi(z_0)} \frac{\sqrt{z-1}}{\mu + (a+b)z} dz. \quad (4.22)$$

La démonstration complète est donnée dans la section 5 de [50]. Considérons un intervalle $(x_0, y_0, z) \in C_\delta$ tel que z varie dans un intervalle de taille $O(\delta)$ autour de z_0 . Pour tout z considérons l'image de (x_0, y_0, z) par la transition via le flot de (4.15) à la section $\{z = \tilde{z}^*(z_0, \delta)\}$. L'image de l'intervalle est un segment qui forme une spirale très serrée. En effet, il suffit d'une variation de z de l'ordre de $O(\delta)$ pour induire un incrément de l'angle de rotation supérieur à 2π tandis que $\tilde{z}^*(z_0, \delta)$ varie très peu. Penchons nous maintenant sur la continuation de CM_r par inversion du temps au voisinage de $\tilde{z}^*(z_0, \delta)$. Les trajectoires de CM_r suivent la direction rapide de (4.15) et convergent vers S_δ^r , elles doivent donc intersecter la spirale transversalement. Si, au lieu de prendre l'intervalle $\{(x_0, y_0, z) \in C_\delta, z = Z_0 + O(\delta)\}$ on choisit un segment de la continuation de CM_r à C_δ nous obtenons une spirale similaire et une intersection transverse similaire, séparée par une distance $K\delta$ pour une constante $K > 0$. Ces intersections correspondent aux canards secondaires. Par le calcul, nous obtenons que

$$-\frac{1}{A(\varepsilon)} < z_0 < -\eta \Rightarrow \psi'(z_0) < 0.$$

Ainsi, le nombre de petites oscillations augmente lorsque z_0 décroît. Cela implique que les canards secondaires sont uniques et que deux canards secondaires successifs diffèrent d'une petite oscillation. Cela implique également que la distance entre deux canards secondaires est de l'ordre de $O(\delta)$. Pour conclure la preuve du théorème 4, il suffit de revenir aux coordonnées originales (x,y,z) .

4.6 Description qualitative des trajectoires périodiques du système (4.2)

4.6.1 Le plateau

Cette phase est décrite et analysée dans la partie précédente puisqu'elle se passe au pli du haut.

4.6.2 La décharge

Les points d'équilibre du système (4.4) sont donnés par $x = -z$ et $z(2 - 3z)[\mu + (a + b)z] = 0$. Il est clair qu'il y a trois points d'équilibre.

Le point $(0, 0)$ est un nœud répulsif, le point $(-2/3, 2/3)$ est un col, enfin, le point $(\mu/(a + b), -\mu/(a + b))$ où $-\mu/(a + b) > 2/3$ est un foyer attractif. Si on se place dans le demi plan $x > -2/3$, le facteur $-x(3x + 2)$ est négatif. Ainsi, les trajectoires sont données par celles du système (4.4) par inversion du temps.

Le col en $(-2/3, 2/3)$ est à l'origine du « demi-tour » de la variable x qui initie la décharge. En effet, par le calcul (avec par exemple matlab), nous obtenons que le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_+ \simeq 11,17$ est $v_+ \simeq (1 \ 0, 1)^T$ tandis que le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_- \simeq -2.50$ est $v_- \simeq (-0,62 \ 0,78)^T$. Ainsi, lorsque la trajectoire, tout en étant proche de $\{y = f(x)\}$ passe au dessous de la variété attractive du col, elle s'en éloigne en étant dirigée vers l'avant. Mais, lorsque la trajectoire passe au dessus de la variété attractive du col, elle fait demi-tour et

s'éloigne du col en longeant $\{y = f(x)\}$ dans le sens opposé. Il s'agit d'un exemple de dynamique en fer à cheval, c'est ce qui initie la décharge.

Dans le demi plan $x > -2/3$, le foyer est répulsif et entouré d'un cycle attractif. Pour les valeurs de a , b et μ données, il se produit une bifurcation de Hopf pour un certain δ_H tel que $\delta_H \in]0.08, 0.09[$. La trajectoire s'enroule autour du cycle, jusqu'à s'approcher de la valeur $x = -2/3$. Alors la trajectoire va très vite (puisque δ est relativement petit) dans la direction de x croissant. La trajectoire est alors capturée par la variété attractive du nœud $(0, 0)$ (rappelons que la direction du temps est inversée). Lorsque la trajectoire se rapproche du point $(0, 0)$ l'approximation $y = f(x)$ cesse d'être valable et la trajectoire entre dans la phase du plateau étudiée précédemment.

4.6.3 La phase pulsatile

Lors de cette phase trajectoires effectuent des oscillations de type bursting. En effet, le sous système rapide (x, y) admet un cycle limite autour duquel s'enroule les trajectoires tandis que la variable z augmente lentement. Ceci se poursuit jusqu'à entrer dans la phase de la décharge.

4.7 Conclusion et perspectives

Le système (4.2) formé de deux variables lentes et d'une variable rapide permet de retrouver une alternance de phase pulsatile et de mode de décharge. Toutefois, il ne permet pas de retrouver l'accélération de la fréquence entre le début et la fin de la phase pulsatile. Ce dernier point est une propriété essentielle du modèle (4.1) de Clément-Françoise. En effet, cette accélération des fréquences modélise un aspect fondamental des oscillations du GnRH qui se produit lors de la transition de la phase lutéale à la phase folliculaire. Une autre faiblesse importante du système (4.2) par rapport au système de Clément-Françoise est de ne pas permettre de contrôle quantitatif sur les différentes phases car il semble extrêmement sensible aux paramètres

(en particulier, il y a un très petit intervalle de paramètre pour lequel on a à la fois le plateau et la récurrence globale de la solution).

A court terme, ce travail pourrait être complété par une étude plus précise de la condition d'existence d'une bifurcation de Hopf dans le système désingularisé. Cette étude pourrait permettre d'évaluer un volume dans l'espace des paramètres pour lequel il y aurait plus de petites oscillations sur le plateau tout en conservant la structure du retour global après la décharge.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

La prolongation de cycles limites dans les champs de vecteurs a été beaucoup étudiée aussi bien analytiquement que numériquement. Dans cette thèse, notre objectif était de contribuer à cette recherche, avec l'utilisation de nouveaux outils, dans le cadre des systèmes lents-rapides.

L'étude réalisée s'appuie sur un grand nombre de travaux existants. Selon la nature du système étudié (une variable lente/une variable rapide dans le chapitre 2, une variable lente/deux variables rapides dans le chapitre 3, deux variables lentes/une variable rapide dans le chapitre 4), différentes approches théoriques ont été privilégiées : L'introduction toute récente (2015) de la fonction de Lambert dans le cadre des systèmes dynamiques nous a permis de proposer une nouvelle équation pour suivre l'évolution d'un cycle après une bifurcation de Hopf singulière dans un système de Liénard généralisé. Nous avons également proposé une étude détaillée du mécanisme d'addition de spikes dans le bursting du modèle de Hindmarsh-Rose à une analyse de type théorie des singularités ainsi que l'introduction d'un nouveau type d'ensemble candidat-limite-périodique (clp). Enfin, à l'aide d'arguments géométriques de la théorie des bifurcations, nous proposons l'étude de la minimalité d'un modèle pour reproduire des solutions complexes, impliquant plusieurs régimes d'oscillations. Dans tous les cas, les études théoriques ont été complétées par une analyse numérique des

solutions, obtenues à l'aide de méthodes de continuation fines.

Ce travail nous semble avoir un certain nombre de perspectives. Tout d'abord la prolongation du travail réalisé dans le troisième chapitre de cette thèse. En effet, ce chapitre introduit les ensembles clp multidimensionnels pour la première fois et nous ébauchons l'analyse d'un nouveau mécanisme d'addition de spikes dans le modèle de Hindmarsh-Rose via des explosions de cycles en faisant varier le paramètre ε . Cette étude pourra être complétée par la recherche de mesure invariante de support contenue dans les ensembles clp et par des méthodes de moyennisations [12].

Une autre perspective serait d'étudier le phénomène de spike-adding dans le modèle de Clément-Françoise [14]. Il semble que la continuation des orbites périodiques 4D (alternant phase pulsatile et mode décharge) montre que l'addition de spike à la phase pulsatile se fait par disparition d'un petit spike dans le plateau [49].

Par ailleurs, dans cette thèse, nous nous sommes concentré sur des modèles issus des neurosciences. Cependant, d'importants travaux pourraient être réalisés en appliquant les méthodes d'analyse développées ici à l'écologie. En effet, J.-P. Françoise et A. Vidal ont étudié dans [34] un modèle deux variables rapides/une variable lente de dynamique tri-trophique proie/prédateur/super-prédateur en analysant la géométrie de la variété critique du modèle et l'ensemble des bifurcation du sous-système rapide. L'utilisation des ensembles clp pourrait permettre une compréhension plus précise de l'évolution de ces dynamiques. Nous pouvons par exemple envisager de prévoir ou tout du moins d'expliquer l'influence qu'aurait le ralentissement de l'activité du super-prédateur sur l'évolution du système proie/prédateur.

Bibliographie

- [1] J. Argemi. Approche qualitative d'un problème de perturbations singulières dans r_4 . In *Equadiff*, volume 78, pages 333–340, 1978.
- [2] S. M. Baer and T. Erneux. Singular Hopf bifurcation to relaxation oscillations. *SIAM J. Appl. Math.*, 46(5) :721–739, 1986.
- [3] S. M. Baer and T. Erneux. Singular Hopf bifurcation to relaxation oscillations ii. *SIAM J. Appl. Math.*, 52(6) :1651–1664, 1992.
- [4] E. Benoît. Canards et enlacements. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, **72**(1) :63–91, 1990.
- [5] E. Benoît. Relation entrée-sortie. *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. Math.*, 293(1) :293–296, 1981.
- [6] E. Benoît. Systèmes lents-rapides dans \mathbb{R}^3 et leurs canards. *Astérisque Soc. Math. France, Paris*, pages 109–159, 1983.
- [7] E. Benoît, J.-L. Callot, F. Diener, and D. M. Chasse au canard. *Collect. Math.*, 32(1-2) :37–119, 1981.
- [8] R. Bertram, M. J. Butte, T. Kiemel, and A. Sherman. Topological and phenomenological classification of bursting oscillations. *Bull. of Math. Bio.*, 57(3) :413–439, 1995.
- [9] B. Braaksma. Singular Hopf bifurcation in systems with fast and slow variables. *J. Nonlin. Sci.*, 8(5) :457–490, 1998.
- [10] M. Brøns. Bifurcation and instabilities in the Greitzer model for compressor system surge. *Mathematical Engineering in Industry*, 2(1) :51–63, 1988.

- [11] M. Brøns, M. Krupa, and M. Wechselberger. Mixed-mode oscillations due to generalized canard phenomenon. In *in Bifurcation Theory and Spatio-temporal Pattern Formation, Fields Institute Communications*, volume 49, pages 39–64. AMS, Providence, RI., 2006.
- [12] A. Buica, J.-P. Françoise, and J. Llibre. Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter. *Comm. on Pure and Applied Analysis*, 6 :103–111, 2007.
- [13] L. Buřič, A. Klíč, and L. Purmová. Canard solutions and travelling waves in the spruce budworm population model. *Appl. Math. Comput.*, 183(2) :1039–1051, 2006.
- [14] F. Clément and J.-P. Françoise. Mathematical modeling of the GnRH pulse and surge generator. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 6 :441–456, 2007.
- [15] F. Clément and A. Vidal. Foliation-based parameter tuning in a model of the gnrh pulse and surge generator. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 8 :1591–1631, 2009.
- [16] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth. On the Lambert W function. *Adv. Comput. Math.*, 5(1) :329–359, 1996.
- [17] P. De Maesschalck and M. Desroches. Numerical continuation techniques for planar slow-fast systems. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 12(3) :1159–1180, 2013.
- [18] P. De Maesschalck and M. Wechselberger. Neural excitability and singular bifurcations. *J. of Math. Neuroscience*, 5(1), 2015.
- [19] C. A. Del Negro, C. F. Hsiao, S. H. Chandler, and A. Garfinkel. Evidence for a novel bursting mechanism in rodent trigeminal neurons. *Biophysical journal*, 75(1) :174–182, 1998.
- [20] M. Desroches, J. Guckenheimer, B. Krauskopf, C. , H. M. Osinga, and M. Wechselberger. Mixed-mode oscillations with multiple time scales. *Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM review*, 54(2) :211–288, 2012.
- [21] M. Desroches and M. R. Jeffrey. Canards and curvature : nonsmooth approximation by pinching. *Nonlinearity*, 24(5) :1655–1982, 2011.

- [22] M. Desroches, T. J. Kaper, and M. Krupa. Mixed-mode bursting oscillations : Dynamics created by a slow passage through spike-adding canard explosion in a square-wave burster. *Chaos*, 23(4) :046106, 2013.
- [23] E. J. Doedel. *Lecture Notes on Numerical Analysis of Nonlinear Equation*. Department Of Computer Science, Concordia University, Montreal, Canada.
- [24] E. J. Doedel, A. R. Champneys, F. Dercole, T. F. Fairgrieve, Y. A. Kuznetsov, B. Oldeman, R. C. Paffenroth, B. Sandstede, X. J. Wang, and C. H. Zhang. Auto-07p : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. available at the URL <http://indy.cs.concordia.ca>, 2007.
- [25] E. J. Doedel, H. B. Keller, and J.-P. Kernévez. Numerical analysis and control of bifurcation problems part i : Bifurcation in finite dimensions. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1(3) :493–520, 1991.
- [26] E. J. Doedel, H. B. Keller, and J.-P. Kernévez. Numerical analysis and control of bifurcation problems part ii : Bifurcation in infinite dimensions. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1(4) :745–772, 1991.
- [27] F. Dumortier and R. Roussarie. Canard cycles and center manifold. In *Mem. Amer. Math. Soc.*, volume 121, 1996.
- [28] F. Dumortier and R. Roussarie. Birth of canard cycles. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S.*, 2(4) :723–781, 2009.
- [29] W. Eckhaus. Relaxation oscillations including a standard chase on french ducks. In B. Springer-Verlag, editor, *Asymptotic Analysis II*, volume 985, pages 449–494. 1983.
- [30] B. Ermentrout. Simulating, analyzing, and animating dynamical systems : a guide to XPPAUT for researchers and students. In *Software Environment and Tools*, volume 14. SIAM, Philadelphia, 2002.
- [31] B. Ermentrout and M. Wechselberger. Canards, clusters and synchronization in a weakly coupled interneuron model. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 8 :253–278, 2009.

- [32] N. Fenichel. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *J. Differential Equations*, 31 :53–98, 1979.
- [33] J.-P. Francoise and C. Pugh. Keeping track of limit cycles. *J. Differential Equations*, 65(2) :139–157, 1986.
- [34] J.-P. Francoise and A. Vidal. Canard cycles in global dynamics. *Int. J. of Bif. and Chaos*, 22(2) :37C70, 2012.
- [35] M. Golubitsky, K. Josic, and T. J. Kaper. An unfolding theory approach to bursting in fast-slow systems. In I. of Physics, editor, *Global Analysis of Dynamical Systems*, pages 277–308. 2001.
- [36] J. Guckenheimer. Bifurcations of relaxation oscillations. In *Normal Forms, Bifurcations and Finiteness Problems in Differential Equations*, volume 137, pages 295–316. NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 2004.
- [37] J. Guckenheimer. Singular Hopf bifurcation in systems with two slow variables. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 7(4) :1355–1377, 2008.
- [38] J. Guckenheimer and C. Kuehn. Computing slow manifold of saddle type. *SIAM J. on Appl. Dyn. Syst.*, 8(3) :854–879, 2009.
- [39] J. Guckenheimer and D. LaMar. Periodic orbit continuation in multiple time scale systems. In *Numerical continuation methods for dynamical systems : path following and boundary value problem*, pages 253–267. Springer, 2007.
- [40] J. Härterich. Viscous profiles of traveling waves in scalar balance laws : the canard case. *Methods Appl. Anal.*, 10(1) :97–118, 2003.
- [41] M. Hayashi. On canard homoclinic of a Liénard perturbation system. *Appl. Math.*, 2 :1221–1224, 2011.
- [42] J. L. Hindmarsh and R. M. Rose. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. In *Proceeding of the Royal society of London*, volume 221 of *B Biological sciences*, pages 87–102, 1984.

- [43] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. of Physiol.*, 117(4) :500–544, 1952.
- [44] E. M. Izhikevich. Neural excitability, spiking and bursting. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 10(6) :1171–1266, 2000.
- [45] H. B. Keller. Lectures on numerical methods in bifurcation problems. Technical Report 79, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 1987.
- [46] M. Krupa, N. Popović, and N. Kopell. Mixed-mode oscillations in three time-scale systems : A prototypical example. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 7(2) :361–420, 2008.
- [47] M. Krupa and P. Szmolyan. Extending geometric singular perturbation theory to nonhyperbolic points—fold and canard points in two dimensions. *SIAM J. Math. Anal.*, 33(2) :286–314, 2001.
- [48] M. Krupa and P. Szmolyan. Relaxation oscillation and canard explosion. *J. Differential Equations*, 174(2) :312–368, 2001.
- [49] M. Krupa, A. Vidal, M. Desroches, and F. Clément. Mixed-mode oscillations in a multiple time scale phantom bursting system. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 11 :1458–1498, 2012.
- [50] M. Krupa and M. Wechselberger. Local analysis near a folded saddle-node singularity. *J. Diff. Equ.*, 248(12) :2841–2888, 2010.
- [51] A. Milik, P. Szmolyan, and H. Loeffelmann. Geometry of mixed-mode oscillations in the 3d autocatalor. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 8 :505–519, 1998.
- [52] J. Moehlis. Canard for a reduction of the Hodgkin-Huxley equations. *Journal of Mathematical Biology*, 52(2), 2006.

- [53] P. Nan, Y. Wang, V. Kirk, and J. E. Rubin. Understanding and distinguishing three-time-scale oscillations : case study in a coupled Morris-Lecar system. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 14(3) :1518–1557, 2015.
- [54] A. Neishtadt. Prolongation of the loss of stability in the case of dynamic bifurcation ii. *Differ. Equ.*, 24 :171–176, 1988.
- [55] J. Nowacki, H. M. Osinga, and K. Tsaneva-Atanasova. Dynamical systems analysis of spike-adding mechanisms in transient bursts. *The Journal of Mathematical Neuroscience (JMN)*, 2(1), 2012.
- [56] N. Popović. Mixed-mode dynamics and the canard phenomenon : towards a classification. In *International Workshop on Multi-Rate Processes and Hysteresis, Journal of Physics*, volume Conference Series 138, 2008.
- [57] B. Rachid. Canards homocliniques. In *The 7th International Colloquium on Differential Equations in Bulgaria (Plovdiv)*, 1997.
- [58] J. Rinzel. A formal classification of burstion mechanisms in excitable systems. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Berkeley, California, USA, 1986.
- [59] H. Rotstein, M. Wechselberger, and N. Kopell. Canard induced mixed-mode oscillations in a medial entorhinal cortex layer ii stellate cell model. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 7 :1582–1611, 2008.
- [60] J. Rubin and M. Wechselberger. Giant squid-hidden canard : The 3d geometry of the Hodgkin-Huxley model. *Biol. Cyber.*, 97 :5–32, 2007.
- [61] A. Sherman, J. Rinzel, and J. Keizer. Emergence of organized bursting in cluster of pancreatic beta-cells by channel sharing. *Biophysical Journal*, 54(3) :411–425, 1988.
- [62] A. Shilnikov and M. Kolomiets. Methods of the qualitative theory for the Hindmarsh-Rose model : A case study. a tutorial. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18(8) :2141–2168, 2008.

- [63] P. R. D. Silva. Canard cycles and homoclinic bifurcation in a 3 parameter family of vector fields on the plane. *Publ. Math.*, 43 :163–189, 1999.
- [64] O. C. Sisaber and R. Bebbouchi. On a singularly perturbed Liénard system with three equilibrium points. In *Dynamical Systems and Applications*, pages 648–651. Proceedings of a conference held in Antalya, Turkey, Jul7 2004.
- [65] P. Szmolyan and M. Wechselberger. Canard in \mathbb{R}^3 . *J. Diff. Equ.*, 200(1) :177–419, 2001.
- [66] D. Terman. Chaotic spikes arising from a model of bursting in excitable membranes. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 51(5) :1418–1450, 1991.
- [67] A. Vidal and F. Clément. A dynamical model for the control of the GnRH neurosecretory system. *J. Neuroendocrinol.*, 22 :1251—1266, 2010.
- [68] T. Vo, R. Bertram, J. Tabak, and M. Wechselberger. Mixed mode oscillations as a mechanism for pseudo-plateau bursting. *J. Comput. Neurosci.*, 28(3) :443–458, 2010.
- [69] A. M. Zhabotinsky. Periodical oxidation of malonic acid in solution (a study of the belousov reaction kinetics). *Biofizika*, 9 :306, 1964.