
Analyse et développement de méthodes numériques pour des problèmes issus de la physique des plasmas

Martin Campos Pinto

Habilitation à Diriger des Recherches
(spécialité mathématiques appliquées)

soutenue le 8 Mars 2017

Composition du Jury

<i>Rapporteurs :</i>	Annalisa Buffa	<i>EPFL, Lausanne</i>
	Patrick Ciarlet	<i>POEMS, ENSTA ParisTech</i>
	Ralf Hiptmair	<i>ETH Zürich</i>
<i>Jury :</i>	Patrick Ciarlet	<i>POEMS, ENSTA ParisTech</i>
	Albert Cohen	<i>LJLL, Université Pierre et Marie Curie</i>
	Bruno Després	<i>LJLL, Université Pierre et Marie Curie</i>
	Frédéric Hecht	<i>LJLL, Université Pierre et Marie Curie</i>
	Ralf Hiptmair	<i>ETH Zürich</i>
	Benoît Perthame	<i>LJLL, Université Pierre et Marie Curie</i>
	Eric Sonnendrücker	<i>IPP, Max-Planck Garching</i>
	Chantal Stehlé	<i>LERMA, Université Pierre et Marie Curie</i>

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Par bien des aspects, la recherche en mathématiques ressemble à la marche en montagne. Qu'il s'agisse de trouver une voie accessible vers un col aperçu dans la brume ou de gravir des pentes parfois raides pour atteindre de nouveaux espaces, l'effort y est souvent solitaire mais les plaisirs se partagent comme de bons repas, lorsque la vue est dégagée et que les esprits se libèrent pour prendre de la hauteur.

Le plaisir de la marche est également celui des nouvelles rencontres et des échanges, et je voudrais remercier Annalisa Buffa, Patrick Ciarlet et Ralf Hiptmair d'avoir accepté de relire mon mémoire et de m'avoir fait part de leurs commentaires. Un grand merci également à Chantal Stehlé, Frédéric Hecht et Benoît Perthame pour avoir bien voulu faire part de mon jury. Quant à Albert Cohen, dont l'énergie ne m'a jamais quitté depuis mes années de thèse, il sait ce que je lui dois et je profite avec plaisir de cette nouvelle occasion pour lui redire ma gratitude.

Au cours de ces dernières années j'ai eu la chance de travailler avec des chercheurs enthousiastes, et ma propre progression doit beaucoup à la finesse de leur vue et à la portée de leur regard. Je voudrais ainsi remercier Bruno Després pour m'avoir accueilli avec beaucoup de générosité au sein du groupe de travail qu'il avait constitué au LJLL pour étudier la modélisation mathématique et numérique des plasmas avec Frédérique Charles et Lise-Marie Imbert-Gérard, puis Mehdi Badsì et maintenant Anouk Nicolopoulos et Teddy Pichard. Qu'ils soient ici remerciés pour les très beaux problèmes que nous avons étudiés ensemble depuis quelques années.

Lors de mon séjour à Strasbourg, Eric Sonnendrücker et Stéphanie Salmon m'ont fait découvrir de nouveaux horizons grâce aux questions passionnantes qu'ils se posaient sur les discrétisations des équations de Maxwell, et ils en sont également remerciés ici. Nos nombreuses tentatives d'exploration sur ces problèmes se sont parfois heurtées à des impasses et si elles ont parfois débouché sur de jolies solutions, ce fut le plus souvent grâce à leur curiosité et à leur motivation. Au LBNL, Alex Friedman, Steve Lund et leurs collègues du groupe Heavy Ion Fusion m'ont fait le plaisir de partager avec moi leur expertise physique et numérique des plasmas cinétiques, et de m'accompagner dans la poursuite de nouvelles méthodes particulières. En remontant un peu plus loin dans le temps je voudrais également remercier Wolfgang Dahmen pour les beaux problèmes de préconditionnement multi-échelles que nous avons attaqués ensemble, rejoints dans cet effort par Kolja Brix, Ralf Massjung et Claudio Canuto.

Au delà de ces collaborations, de nouveaux liens ont pu se nouer au sein de projets tels que CHROME, où les échanges avec Stéphane Heuraux, Filipe da Silva et les membres du groupe POEMS m'ont permis de mieux comprendre certaines propriétés de la propagation des ondes dans les plasmas magnétisés. Le projet SELALIB est également le lieu de nombreuses interactions agréables et fructueuses avec les collègues de l'institut Max-Planck à Garching (Katharina Kormann, Yaman Güçlü, Ahmed Ratnani, Jakob Ameres, Eric Sonnendrücker encore, et par connexité, Florian Hindelang et Céline Caldini-Queiros), ceux de Strasbourg (Michel Mehrenberger, Sever Hirstoaga, et par connexité

Philippe Helluy, Emmanuel Franck, Michael Gutnic) et les anciens (Pierre Navaro et Nicolas Crouseilles notamment), et maintenant à Paris (Antoine Le Hyaric et Pierre-Henri Tournier).

En élargissant le cercle, j'ai conscience que mon travail se nourrit d'échanges réguliers avec de nombreux chercheurs, mathématiciens ou physiciens. La communauté mobilisée sur les questions de modélisation des plasmas est large et relativement cohérente, ce qui permet d'agréables rencontres et retrouvailles, à des rythmes plus ou moins réguliers, avec des collègues de divers horizons. Je pense ainsi à Blanca Ayuso, Alessandro Biancalani, Alain Bossavit, José-Antonio Carrillo, Young-Pil Choi, Stéphane Colombi, Fabrice Deluzet, François Dubois, Alexandre Ern, Francis Filbet, Virginie Grandgirard, Mohammed Lemou, Mathieu Lutz, Omar Maj, Marie Mounier, Claudia Negulescu, Simon Labrunie, Thomas Rey, Rémi Sentis... et la liste est loin d'être exhaustive.

Surtout, je sais que la beauté des chemins reflète souvent la qualité des compagnons de voyage. En ce qui me concerne j'ai toujours eu la chance d'être entouré de collègues chaleureux, que ce soit à Paris, Berkeley, Aachen ou Strasbourg. A défaut de pouvoir tous les citer, qu'ils sachent que je les remercie d'être ce qu'ils sont, et de faire des laboratoires de recherche des lieux de vie et de pensée.

Je garde enfin mes derniers remerciements pour ma famille. En plus du goût pour la science, elle m'a fait découvrir et aimer la marche, les thèses, et la montagne.

A Prosper, Gaston, Hector, et à Clémentine

Table des matières

Remerciements	i
Introduction	1
1 Méthodes Lagrangiennes et semi-Lagrangiennes pour le transport	5
1.1 Une méthode semi-Lagrangienne adaptative par ondelettes interpolantes	6
1.2 Particules régulières à déformations polynomiales	11
1.3 Une méthode lagrangienne avant-arrière	15
2 Approximation compatible non-conforme des équations de Maxwell	21
2.1 Le système de Maxwell temporel	22
2.2 Approximation conforme par des éléments finis mixtes	23
2.3 Discrétisation Conga (Galerkin conforme / non-conforme)	26
2.4 Critères abstraits pour l'approximation compatible des sources	29
2.5 Application aux discrétisations conformes et Conga	34
2.6 Application au couplage avec une méthode particulière	35
2.7 Lien avec les discrétisations DG standard	37
3 Etude théorique et numérique de quelques modèles réduits	39
3.1 Gaines cinétiques dans un plasma électrostatique	39
3.2 Propagation d'ondes par FDTD dans un plasma magnétisé	44
3.3 Résonances hybrides dans un plasma magnétisé	47
Perspectives	53
Bibliographie	55

What I cannot create, I do not understand. (Richard Feynman)

Introduction

Pour un mathématicien appliqué, la physique des plasmas représente un vaste domaine de problèmes passionnants. Discipline relativement jeune à l'échelle des sciences modernes, les gaz ionisés n'ayant été isolés et étudiés en tant que tels qu'à la fin du XIXe siècle (le terme "plasma" étant proposé pour les désigner par Irving Langmuir en 1928), elle a connu un essor très important au cours du XXe siècle, en raison notamment de ses applications dans les domaines de la fusion nucléaire et de l'astrophysique, la matière étant essentiellement à l'état de plasma dans l'univers. Depuis les années 1950, l'avènement du calcul scientifique a nourri ces avancées en suscitant le développement de méthodes efficaces pour la simulation numérique des plasmas, méthodes qui ont à la fois joué le rôle d'outil scientifique dans l'analyse des propriétés de la matière et de sujet de recherche en elles-mêmes.

Pour le système de Vlasov-Maxwell par exemple, qu'on peut considérer comme un modèle précis pour décrire le comportement des plasmas de fusion par confinement magnétique, diverses méthodes numériques ont été développées dès les années 1960, et leurs propriétés ont pu être justifiées par des travaux conjoints de mathématiciens et physiciens. Néanmoins, il est possible de dire qu'en raison des interactions complexes entre les champs et les particules d'une part, et de la taille des grands tokamaks et la durée de confinement actuellement prévus pour la fusion d'autre part, ces méthodes requièrent encore un nombre de calculs trop important pour en permettre une utilisation routinière dans la simulation de scénarios expérimentaux réalistes.

Partant de ce constat, on s'est attaché à l'amélioration des performances des méthodes numériques existantes, en concentrant nos efforts sur les étapes de conception des méthodes et en donnant un rôle central à l'analyse mathématique de leurs propriétés. Pour l'équation de Vlasov

$$\partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + F(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) = 0$$

qui modélise le transport des particules chargées représentées ici par leur densité f dans l'espace des phases (x, v) sous l'effet de forces électro-magnétiques F , on a travaillé au développement de méthodes devant permettre d'augmenter significativement la précision des calculs à un coût modéré. Dans le cadre des méthodes semi-Lagrangiennes, qui combinent le transport lagrangien par un suivi des trajectoires caractéristiques et la projection des densités ainsi transportées sur des grilles de discrétisation, on a étudié des schémas de prédiction de grilles adaptatives permettant de garantir a priori la précision des densités approchées. On s'est ensuite intéressé aux méthodes numériques particulières (lagrangiennes) en raison de leur prédominance dans de très nombreux codes numériques utilisés par des physiciens. Un écueil des simulations particulières étant la présence d'un bruit numérique important, caractérisé par des oscillations de nature probabiliste ou déterministe dans les densités approchées, on a proposé plusieurs méthodes permettant de reconstruire des approximations précises des densités transportées

à partir des positions existantes des particules.

Notre intérêt pour les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \partial_t B + \operatorname{curl} E = 0 \\ \partial_t E - \operatorname{curl} B = -J \end{cases}$$

qui modélisent l'évolution du champ électro-magnétique en présence d'une densité de courant J , s'est d'abord porté sur l'étude du couplage compatible de solveurs de type éléments finis avec une discrétisation particulière des sources de courant. Dans le cadre des schémas de différences finies développés depuis plusieurs décennies pour les équations de Maxwell, il existait en effet des techniques d'approximation du courant porté par les particules numériques qui permettent de préserver de façon satisfaisante les contraintes en divergence exprimées par les lois de Gauss

$$\begin{cases} \operatorname{div} B = 0 \\ \operatorname{div} E = \rho \end{cases}$$

sans qu'il soit nécessaire de les prendre en compte de façon explicite sous la forme d'équations supplémentaires à résoudre comme c'est le cas dans les méthodes dites de *divergence cleaning*. En collaboration avec Eric Sonnendrücker et son équipe, nous avons alors étendu ces techniques, dite de déposition conservative du courant, aux solveurs par éléments finis sur maillages non-structurés. Nos travaux pour généraliser ces méthodes au cadre des solveurs de type Galerkin discontinus, qui mettent en jeu des espaces de fonctions totalement discontinues pour une plus grande localité des calculs et une gestion plus souple des maillages non-conformes, nous ont alors permis d'éclaircir deux points importants. D'une part, que les propriétés de stabilité en temps long des solutions approchées pouvaient être garantis lorsque les solveurs reproduisaient au niveau discret certaines propriétés de structure bien connues, vérifiées par les opérateurs différentiels exacts et leurs espaces fonctionnels associés, et que cette structure discrète était le critère naturel pour l'approximation compatible des sources de courant. D'autre part, qu'il était aisé, en s'appuyant sur les travaux importants menés par la communauté mathématicienne sur les discrétisations conformes, de concevoir des schémas de type Galerkin discontinus qui préservent cette structure fondamentale. Ces études nous ont ainsi amené à proposer une nouvelle classe de discrétisations non-conformes (appelée "Conga" pour *Conforming/Nonconforming Galerkin*), qui semblent étendre naturellement aux espaces de fonctions totalement discontinues l'essentiel des propriétés de stabilité et de précision (notamment spectrales) établies pour les méthodes d'éléments finis conformes, sans qu'il soit nécessaire d'introduire des termes de pénalisation, comme c'est généralement le cas pour les méthodes non-conformes existantes. Leur mise en œuvre dans des codes de calcul nous a permis de vérifier que ces propriétés théoriques se traduisaient par de bonnes qualités numériques, et a donné l'occasion de mettre en évidence certaines similitudes avec des méthodes Galerkin discontinues existantes.

Depuis quelques années j'ai également étudié divers modèles réduits pour les plasmas, sous l'impulsion notamment de Bruno Després. Dans le cadre de la thèse de Mehdi Badsì, nous avons étudié un modèle mathématique pour les gaines de plasma, qui sont des fines couches chargées au voisinage d'une paroi métallique absorbante, dont le potentiel s'ajuste pour garantir la neutralité du plasma. Leur comportement n'ayant pas été décrit de façon entièrement satisfaisante par des modèles mathématiques, nous avons proposé un premier modèle auto-consistant dans une configuration simple unidimensionnelle, dont nous avons pu montrer le caractère bien posé sous des conditions qui recouvrent

certains critères utilisés classiquement en physique des plasmas. Nous avons également étudié, dans le modèle réduit dit de “plasma froid”, plusieurs problèmes de propagation d’ondes électromagnétiques lorsque un champ magnétique intense est imposé par un mécanisme externe comme c’est le cas dans un tokamak. Après avoir résolu certaines difficultés de discrétisation qui provoquaient des instabilités numériques dans des codes standards utilisés par des physiciens, nous avons proposé une nouvelle formulation du système des plasmas froids en présence de résonances hybrides correspondant à un transfert d’énergie entre l’onde et le bain d’ions environnant, dans la limite où la collisionnalité ions-électrons tendait vers 0. Le problème limite étant mal posé (défaut d’unicité), nous avons montré que notre reformulation permettait de retrouver le caractère bien posé en ajoutant des contraintes intégrales faisant intervenir des solutions manufacturées contenant des singularités de même nature que celles des solutions exactes.

Ce manuscrit propose une synthèse de ces travaux en trois parties. La première décrit les méthodes semi-Lagrangiennes et Lagrangiennes développées pour l’approximation des problèmes de transport dont l’équation de Vlasov ci-dessus est un cas particulier. Les grandes lignes de leur analyse sont également présentées, ainsi que les principales estimations d’erreur a priori. L’approximation des équations de Maxwell par des méthodes compatibles est présentée dans la seconde partie. Après avoir rappelé la structure des discrétisations par éléments finis mixtes conformes, on présente la forme de la discrétisation Conga et ses principales propriétés, notamment dans le contexte de l’approximation compatible des termes sources. Ces résultats sont alors appliqués au cadre des discrétisations particulières du courant, et le lien est fait avec certaines méthodes de type Galerkin discontinues. La troisième partie présente enfin les travaux réalisés dans l’étude des problèmes de gaines électrostatiques et de propagation d’ondes électromagnétiques dans des plasmas magnétisés.

Chapitre 1

Méthodes Lagrangiennes et semi-Lagrangiennes pour le transport

On s'intéresse dans ce chapitre à l'approximation d'une équation de transport

$$\partial_t f(t, x) + u(t, x) \cdot \nabla f(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (1.1)$$

associée à une donnée initiale $f^0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, un temps final T et un champ de vitesse $u : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Dans la plupart des cas, u dépend lui-même de la densité f de sorte que le problème est non-linéaire.

Pour simplifier la présentation on supposera ici que u est donné, et suffisamment régulier pour qu'on puisse définir des trajectoires caractéristiques $X(t) = X(t; s, x)$, solutions du problème de Cauchy

$$X'(t) = u(t, X(t)), \quad X(s) = x, \quad t \in [0, T] \quad (1.2)$$

avec $x \in \mathbb{R}^d$ et $s \in [0, T]$. Le flot $F_{s,t} : x \mapsto X(t)$ est alors inversible et vérifie $(F_{s,t})^{-1} = F_{t,s}$. En particulier, la solution de (1.1) peut se mettre sous la forme

$$f(t, x) = f^0((F_{0,t})^{-1}(x)) \quad \text{pour } t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (1.3)$$

On s'intéresse alors à la question suivante : si l'on dispose d'un schéma numérique performant pour approcher le flot caractéristique entre deux instants $t_n = n\Delta t$, qu'il s'agisse du flot *avant*

$$F^{n,n+1} = F_{t_n, t_{n+1}} \quad (1.4)$$

comme c'est le cas dans l'approche particulière [99, 95], ou du flot *arrière*

$$B^{n,n+1} = (F_{t_n, t_{n+1}})^{-1} \quad (1.5)$$

comme c'est le cas dans l'approche semi-Lagrangienne classique [122, 127, 125], quelles méthodes peut-on utiliser pour approcher $f^n = f(t_n)$ de façon efficace ?

Liste de publications

Le contenu de ce chapitre s'appuie sur les travaux suivants :

- [39] M. Campos Pinto, Adaptive semi-Lagrangian schemes for Vlasov equations, in *Analytical and Numerical Aspects of Partial Differential Equations*, E. Emmrich and P. Wittbold (Eds.) de Gruyter, Berlin, 2009

- [40] M. Campos Pinto, How to predict accurate wavelet grids in adaptive semi-Lagrangian schemes? *ESAIM : Proc.* 29, 2009
- [55] M. Campos Pinto, E. Sonnendrücker, A. Friedman, D.P. Grote and S.M. Lund, Noiseless Vlasov–Poisson simulations with linearly transformed particles, *Journal of Computational Physics* 275, 2014
- [41] M. Campos Pinto, Towards smooth particle methods without smoothing, *Journal of Scientific Computing* 65, 2015
- [44] M. Campos Pinto, J.A. Carrillo, F. Charles and Y.P. Choi, Convergence of a linearly transformed particle method for aggregation equations, (arXiv :1507.07405), 2015
- [46] M. Campos Pinto and F. Charles, Uniform Convergence of a Linearly Transformed Particle Method for the Vlasov–Poisson System, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 54, 2016
- [45] M. Campos Pinto and F. Charles, From particle methods to hybrid semi-Lagrangian schemes, (hal-01385676), submitted, 2016

1.1 Une méthode semi-Lagrangienne adaptative par ondelettes interpolantes

Dans mes travaux de thèse [38, 50] j’avais étudié avec Michel Mehrenberger un schéma semi-Lagrangien adaptatif dans lequel la solution était approchée par interpolations de type éléments finis \mathbb{P}_1 sur des maillages adaptés dynamiquement. Dans cette direction je me suis d’abord intéressé à une extension de cette approche à des représentations dans des base d’ondelettes interpolantes.

Cette méthode s’inspire d’un schéma similaire proposé dans [14], mais s’en distingue par le fait qu’elle s’articule autour d’une notion de bonne adaptation d’un arbre d’ondelettes à une fonction donnée. Cette notion nous a permis de proposer une méthode de prédiction de grille adaptative qui s’accompagne d’une estimation d’erreur a priori pour les densités transportées et projetées sur cette grille.

Les méthodes semi-Lagrangiennes [122, 121, 127, 125] calculent des solutions discrètes f_h^n approchant la solution exacte $f(t_n)$ aux instants $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots, N = T/\Delta t$, en suivant deux principes :

- chaque solution approchée f_h^n est déterminée par ses valeurs ponctuelles sur une grille Γ_h ;
- les valeurs ponctuelles de f_h^{n+1} sont calculées à partir de celles de f_h^n en utilisant la méthode des caractéristiques, via une formule du type

$$f_h^{n+1}(x_i) = f_h^n(B_h^{n,n+1}(x_i)), \quad x_i \in \Gamma_h$$

où $B_h^{n,n+1}$ est une approximation du flot arrière (1.5) calculée à partir de f_h^n .

Ces étapes doivent bien sûr être précisées pour pouvoir définir un schéma numérique. Par exemple, dans le cas le plus simple où l’on utiliserait une grille régulière $\Gamma_h = h\mathbb{Z}$ pour résoudre en dimension 1 une équation à vitesse u connue, on pourra utiliser un schéma de Runge-Kutta pour définir le flot arrière approché. Le calcul des valeurs de f_h^{n+1} sur les points de grille se ramène alors à l’évaluation de f_h^n aux points de la forme $B_h^{n+1}(x_i)$, $i \in \mathbb{Z}$. Cela peut se faire par des interpolations locales d’ordre $2R$, en désignant par

$$L_{k,j}(x) = \prod_{\substack{j'=-R+1 \\ j' \neq j}}^R \frac{x - x_{k+j'}}{x_{k+j} - x_{k+j'}}, \quad j = -R+1, \dots, R$$

les $2R$ polynômes de Lagrange associés aux noeuds $x_{k-R+1}, \dots, x_{k+R}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, et en posant ensuite

$$f_h^n(x) = \sum_{l=-R+1}^R L_{k,l}(x) f_h^n(x_{k+l}) \quad \text{où } k \text{ est tel que } x \in [x_k, x_{k+1}]. \quad (1.6)$$

La méthode d'interpolation définit ainsi la façon dont la solution approchée f_h^n est déterminée par ses valeurs ponctuelles sur la grille Γ_h .

Dans les travaux [[39, 40]], j'ai développé une méthode où (en dimension $d = 2$, par simplicité) les densités transportées sont approchées dans des bases d'ondelettes interpolantes, sous la forme

$$f_h^n(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda^n} d_\lambda^n \varphi_\lambda(x), \quad \Lambda^n \subset \Gamma_\infty := \{2^{-\ell} k : \ell \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Ici Λ^n est une grille dyadique non-uniforme, la fonction φ_λ est l'ondelette interpolante associée au noeud dyadique λ , et les scalaires $d_\lambda^n \in \mathbb{R}$ sont les coefficients d'ondelettes également appelés *détails*. Basées sur une représentation hiérarchique des fonctions continues, les ondelettes interpolantes offrent à la fois une technique d'interpolation d'ordre élevé sur des grilles non uniformes, et un critère pratique de raffinement (ou de déraffinement) de la grille. Leur construction repose sur un procédé itératif d'interpolation dyadique que l'on rappelle ici. Après avoir partitionné l'ensemble des noeuds dyadiques en niveaux successifs,

$$\Gamma_\infty = \Gamma_0 \cup \left(\bigcup_{\ell \geq 1} \nabla_\ell \right) \quad \text{avec} \quad \nabla_\ell = \Gamma_\ell \setminus \Gamma_{\ell-1} \quad \text{et} \quad \Gamma_\ell = 2^{-\ell} \mathbb{Z}^2,$$

on désigne par $|\lambda|$ le niveau d'un noeud λ , caractérisé par la relation $\lambda \in \nabla_{|\lambda|}$. Sur la grille uniforme correspondante on pose alors

$$\varphi_\lambda(\gamma) = \delta_{\lambda,\gamma}, \quad \gamma \in \Gamma_{|\lambda|} \quad (1.7)$$

et la construction est ensuite itérative : à partir des valeurs construites sur Γ_ℓ avec $\ell \geq |\lambda|$, on définit celles du niveau $\ell+1$ en utilisant une formule d'interpolation centrée semblable à (1.6). Pour $\gamma \in \nabla_{\ell+1}$ cela consiste à définir une grille locale (ou stencil) d'interpolation $S_\gamma \subset \Gamma_\ell$, par

$$S_\gamma = \begin{cases} \gamma + 2^{-\ell}(\{-R+1, \dots, R\} - \frac{1}{2} \times \{0\}) & \text{si } \gamma \in 2^{-(\ell+1)}((2\mathbb{Z}+1) \times 2\mathbb{Z}) \\ \gamma + 2^{-\ell}(\{0\} \times \{-R+1, \dots, R\} - \frac{1}{2}) & \text{si } \gamma \in 2^{-(\ell+1)}(2\mathbb{Z} \times (2\mathbb{Z}+1)) \\ \gamma + 2^{-\ell}(\{-R+1, \dots, R\} - \frac{1}{2})^2 & \text{si } \gamma \in 2^{-(\ell+1)}(2\mathbb{Z}+1)^2 \end{cases} \quad (1.8)$$

comme représenté sur la figure 1.1, et à poser

$$\varphi_\lambda(\gamma) = \sum_{\mu \in S_\gamma} \pi_{\gamma,\mu} \varphi_\lambda(\mu) \quad \text{pour } \gamma \in \nabla_{\ell+1}, \quad \ell \geq |\lambda| \quad (1.9)$$

où $\pi_{\gamma,\mu}$ correspond à la valeur en γ du polynôme de Lagrange associé au noeud μ dans le stencil S_γ .

Il est connu (voir par exemple [71, 62]) qu'on obtient par ce procédé une base de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$, et une conséquence de son caractère multi-échelles est que les fonctions y sont représentées de façon hiérarchique : on a

$$g = \sum_{\gamma \in \Gamma_0} g(\gamma) \varphi_\gamma + \sum_{\ell \geq 1} \sum_{\gamma \in \nabla_\ell} d_\gamma(g) \varphi_\gamma \quad \text{avec} \quad d_\gamma(g) = g(\gamma) - \sum_{\mu \in S_\gamma} \pi_{\gamma,\mu} g(\mu)$$

pour tout $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$, la somme infinie étant convergente dans L^∞ . Ainsi, les coefficients successifs de g dans cette base correspondent à des erreurs d'interpolation qui seront d'autant plus petites que

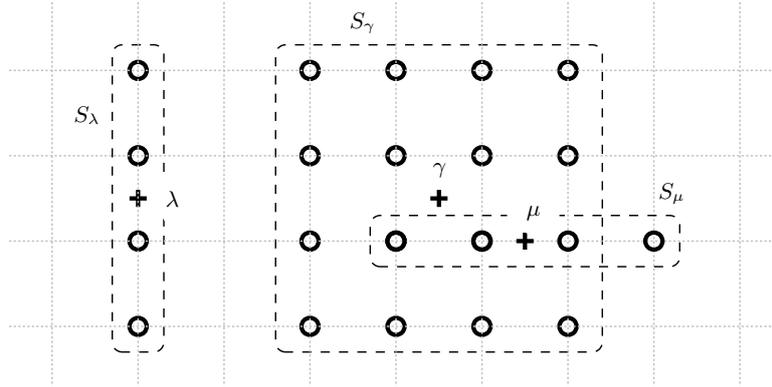


FIGURE 1.1 – Allure des stencils d'interpolation dyadique (1.8) dans $\Gamma_\ell = 2^{-\ell}\mathbb{Z}^2$ pour les 3 types de noeuds de niveau $\ell + 1$, avec $R = 2$.

g est régulière localement. Dans notre méthode, cette propriété est exploitée en introduisant (i) des grilles *admissibles* de noeuds dyadiques $\Lambda \subset \Gamma_\infty$ devant vérifier

$$\gamma \in \Lambda \implies S_\gamma \subset \Lambda \quad (1.10)$$

et (ii) une interpolation par ondelettes sur ces grilles,

$$P_\Lambda g := \sum_{\gamma \in \Lambda \cap \Gamma_0} g(\gamma) \varphi_\gamma + \sum_{\gamma \in \Lambda \setminus \Gamma_0} d_\gamma(g) \varphi_\gamma, \quad g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2).$$

Grace à (1.10) on vérifie qu'il s'agit bien d'une interpolation, au sens où g et $P_\Lambda g$ coïncident sur Λ , de sorte que les fonctions représentées de cette façon sont bien déterminées par leurs valeurs sur la grille. Nous nous retrouvons donc dans un cadre propice à une méthode semi-Lagrangienne.

L'objectif est alors, partant d'une bonne approximation f_h^n de $f(t_n)$ sur une grille Λ^n , de prédire une grille Λ^{n+1} qui sera bien adaptée à l'approximation de $f(t_{n+1})$. Pour cela nous avons proposé une stratégie simple de *transport de grille dyadique*, dont l'analyse repose sur une notion de bonne adaptation à une fonction donnée. Pour préciser cette notion et en déduire un critère constructif, on introduit quelques notations supplémentaires. A tout noeud γ de niveau ℓ , on associe des noeuds *enfants* (de niveau $\ell + 1$) définis par

$$\mathcal{C}(\gamma) = \begin{cases} \gamma + 2^{-\ell}(\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \times \{0\}) & \text{si } \gamma \in 2^{-\ell}((2\mathbb{Z} + 1) \times 2\mathbb{Z}) \\ \gamma + 2^{-\ell}(\{0\} \times \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}) & \text{si } \gamma \in 2^{-\ell}(2\mathbb{Z} \times (2\mathbb{Z} + 1)) \\ \gamma + 2^{-\ell}(\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}^2 \setminus (0, 0)) & \text{sinon, i.e. si } \gamma \in 2^{-\ell}(2\mathbb{Z} + 1)^2 \end{cases} \quad (1.11)$$

comme représenté sur la figure 1.2, et on désigne par $\mathcal{P}(\lambda)$ le *parent* d'un noeud λ , caractérisé par la relation $\lambda \in \mathcal{C}(\mathcal{P}(\lambda))$. Clairement, une grille admissible au sens de (1.10) est un arbre, au sens où si $\lambda \in \Lambda$ alors $\mathcal{P}(\lambda) \in \Lambda$. Les *feuilles externes* d'un arbre sont alors définies comme l'ensemble

$$\mathcal{L}_{\text{out}}(\Lambda) = \{\lambda \in \Gamma_\infty \setminus \Lambda : \mathcal{P}(\lambda) \in \Lambda\}.$$

Ensuite, on appelle *noeuds-étoile* de niveau ℓ les éléments de $\nabla_\ell^* = 2^{-\ell}(2\mathbb{Z} + 1)^2 \subset \nabla_\ell$ correspondant au raffinement simultané des deux dimensions, comme c'est le cas aux 3e lignes de (1.8) ou (1.11).

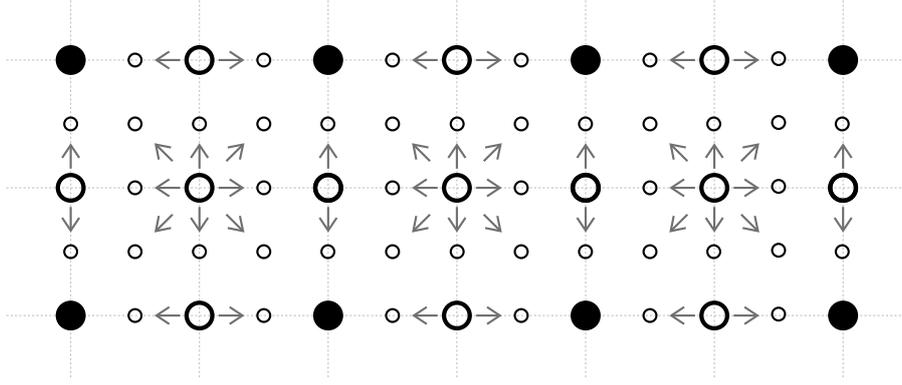


FIGURE 1.2 – Structure d’arbre des grilles d’ondelettes. Ici les noeuds noirs sont sur la grille uniforme $\Gamma_{\ell-1} = 2^{1-\ell}\mathbb{Z}^2$, les grands noeuds blancs sont dans $\nabla_\ell = \Gamma_\ell \setminus \Gamma_{\ell-1}$ et les petits noeuds blancs sont dans $\nabla_{\ell+1}$. Les flèches indiquent les relations parents \rightarrow enfants.

L’ensemble de tous les noeuds étoile est $\Gamma_\infty^* = \cup_{\ell \in \mathbb{Z}} \nabla_\ell^*$, et on peut vérifier que si Λ est une grille admissible, les feuilles externes de type étoile permettent de définir un maillage associé à Λ . L’ensemble

$$M(\Lambda) := \{\Omega_\lambda : \lambda \in \mathcal{L}_{\text{out}}(\Lambda) \cap \Gamma_\infty^*\} \quad (1.12)$$

composé de cellules de la forme

$$\Omega_\lambda := \lambda + 2^{-|\lambda|}[-1, 1]^2$$

est une partition de \mathbb{R}^2 dont la résolution locale correspond au niveau maximal des noeuds étoiles de Λ . Enfin, les *voisins* d’un noeud-étoile $\gamma \in \Gamma_\infty^*$ sont les noeuds dont le domaine d’influence $\Sigma_\lambda = \lambda + 2^{-|\lambda|}(2R-1)[-1, 1]^2$ (correspondant à l’enveloppe convexe du stencil S_λ) intersecte sa cellule Ω_γ : on note leur ensemble par

$$\mathcal{N}(\gamma) = \{\lambda \in \Gamma_\infty^* : \Sigma_\lambda \cap \Omega_\gamma \neq \emptyset\}, \quad \gamma \in \Gamma_\infty^*.$$

On peut alors préciser la notion de bonne adaptation à une fonction donnée. On va en réalité en définir deux versions, l’une faible et l’autre forte.

Définition 1.1 Soit $0 < \kappa < 1$ une constante fixée. Etant donné $\varepsilon > 0$ et $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$, une grille dyadique Λ est dite faiblement ε -adaptée à g si

$$\sup_{\gamma \in \mathcal{L}_{\text{out}}(\Lambda) \cap \Gamma_\infty^*} \sup_{\lambda \in \mathcal{N}(\gamma) \setminus \Lambda} 2^{\kappa(|\lambda| - |\gamma|)} |d_\lambda(g)| \leq \varepsilon.$$

Si la deuxième borne supérieure peut être prise sur tous les voisins $\mathcal{N}(\gamma)$, y compris ceux présents dans la grille Λ , alors cette dernière est dite fortement ε -adaptée à g .

Ces critères fournissent un guide pratique pour la construction d’arbres bien adaptés à une fonction connue : on vérifiera en effet ces propriétés en raffinant le maillage dyadique (1.12) associé aux noeuds-étoile de telle sorte que sur chacune de ses cellules Ω_γ , on ait $2^{\kappa|\lambda|} |d_\lambda(g)| \leq \varepsilon 2^{\kappa|\gamma|}$ pour tous les noeuds λ dont le domaine Σ_λ intersecte Ω_γ . La particularité de la propriété faible est qu’elle exclut de ce critère les coefficients dont les noeuds sont présents dans l’arbre, au motif que seuls les détails absents de l’arbre contribuent à l’erreur d’interpolation. On a en effet le résultat suivant :

Lemme 1.2 *Si Λ est une grille faiblement ε -adaptée à $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$ et graduée, au sens où l'on a $\mathcal{N}(\gamma) \cap \Gamma_{|\gamma|-1} \subset \Lambda$ pour tout $\gamma \in \Lambda$, alors l'erreur d'interpolation associée vérifie*

$$\|g - P_\Lambda g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \lesssim \varepsilon$$

avec une constante indépendante de g .

Ainsi, l'adaptation faible est suffisante à l'approximation précise d'une fonction donnée.

Le principe de l'adaptation forte (qui demande de raffiner localement les grilles au voisinage des grands détails, quand bien même leurs noeuds seraient présents dans l'arbre), est qu'elle doit être assez robuste pour être préservée par un algorithme simple de transport d'arbres dyadiques. Un tel algorithme peut être obtenu en raffinant successivement les noeuds dont les images par le flot arrière touche une maille de niveau essentiellement supérieur. La forme précise de cet algorithme fait intervenir un entier fixé $\delta \geq 1$ correspondant à un nombre de raffinement additionnels.

Algorithme 1.3 ($\mathbb{T}_B(\Lambda)$: transport de grilles) *Soit $\delta \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Etant donné un flot B , et partant de $\Lambda_0^* := \Gamma_0^*$, on construit*

$$\Lambda_{\ell+1}^* := \Lambda_\ell^* \cup \{\gamma \in \mathcal{L}_{\text{out}}(\Lambda_\ell^*) \cap \Gamma_\infty^* : \min\{|\lambda| : \lambda \in \mathcal{L}_{\text{out}}(\Lambda) \cap \Gamma_\infty^*, B(\gamma) \in \overline{\Omega}_\lambda\} > |\gamma| - \delta\}$$

jusqu'à ce que $\Lambda_{L+1}^* = \Lambda_L^*$, et on note $\mathbb{T}_B(\Lambda) := \Lambda_L^*$ la grille dyadique ainsi obtenue.

Le théorème suivant nous indique que ce procédé permet de contruire des grilles bien adaptées aux fonctions transportées par le flot B .

Théorème 1.1 (voir [39], Th. 6.9) *Si le flot B et son inverse sont Lipschitziens, de constantes respectives L et L' , et si $\delta \geq 1 + \ln_2(L(8R + 2LL' - 3))$, alors l'algorithme 1.3 préserve l'adaptation des grilles au sens où*

$$\text{si } \Lambda \text{ est fortement } \varepsilon\text{-adaptée à } g, \text{ alors } \mathbb{T}_B(\Lambda) \text{ est faiblement } C\varepsilon\text{-adaptée à } \mathcal{T}_B g = g \circ B$$

avec une constante C qui ne dépend que de B . De plus les cardinalités des grilles prédites sont stables,

$$\#(\mathbb{T}_B(\Lambda)) \lesssim \#(\Lambda). \quad (1.13)$$

On en déduit le schéma adaptatif suivant. En utilisant un algorithme \mathbb{A}_ε qui construit une grille fortement adaptée à une fonction donnée suivant le critère plus haut, et un algorithme \mathbb{G} de graduation d'arbre (voir [39], Sec. 6.1), on commence par interpoler la densité initiale sur l'arbre gradué qui lui est adapté,

$$f_\varepsilon^0 := P_{\Lambda_\varepsilon^0} f^0 \quad \text{où} \quad \Lambda_\varepsilon^0 := \mathbb{G}(\mathbb{A}_\varepsilon(f^0)). \quad (1.14)$$

Pour $n + 1 \leq N = T/\Delta t$, on calcule alors en deux temps.

- (i) On transporte d'abord la densité approchée par une méthode semi-Lagrangienne en utilisant l'arbre prédit par notre méthode

$$\tilde{f}_\varepsilon^{n+1} := P_{\tilde{\Lambda}_\varepsilon^{n+1}} \mathcal{T} f_\varepsilon^n \quad \text{où} \quad \tilde{\Lambda}_\varepsilon^{n+1} := \mathbb{G}(\mathbb{T}_{B_h^{n,n+1}}(\Lambda_\varepsilon^n)). \quad (1.15)$$

Ici, $\mathcal{T} f_\varepsilon^n = f_\varepsilon^n \circ B_h^{n,n+1}$ désigne la densité transportée suivant un flot approché calculé à partir de f_ε^n .

- (ii) On corrige ensuite la grille de façon à assurer qu'elle reste fortement adaptée à la densité approchée,

$$f_\varepsilon^{n+1} := P_{\Lambda_\varepsilon^{n+1}} \tilde{f}_\varepsilon^n \quad \text{où} \quad \Lambda_\varepsilon^{n+1} := \mathbb{G}(\mathbb{A}_\varepsilon(\tilde{f}_\varepsilon^{n+1})). \quad (1.16)$$

Dans la mesure où le flot approché est calculé à partir de f_ε^n , on pourra supposer qu'il vérifie

$$\|B^{n,n+1} - B_h^{n,n+1}\|_{L^\infty(\Omega)} \lesssim \Delta t^r + \Delta t \|f(t^n) - f_\varepsilon^n\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (1.17)$$

pour un entier r correspondant à l'ordre du schéma en temps utilisé. On peut alors démontrer l'estimation a priori suivante.

Théorème 1.2 *On suppose que le flot approché vérifie une estimation telle que (1.17). Si la donnée initiale f^0 est Lipschitzienne, ainsi que les flots exacts avant (1.4) et arrière (1.5), alors la solution approchée calculée par le schéma (1.14)-(1.16) vérifie*

$$\|f(t_n) - f_\varepsilon^n\|_{L^\infty(\Omega)} \lesssim (\Delta t)^{r-1} + \varepsilon/\Delta t \quad (1.18)$$

pour $n\Delta t \leq T$, avec une constante indépendante de ε et Δt .

1.2 Particules régulières à déformations polynomiales

Malgré leur précision, les méthodes semi-lagrangiennes restent relativement peu utilisées en physique des plasmas. En dehors du code GYSELA [86, 87] la majorité des grands codes cinétiques développés en physique des plasmas sont en effet basés sur des approches purement eulériennes ou lagrangiennes (voir par exemple [82, Sec. 3.1] pour une revue dans le domaine des plasmas de fusions gyrocinétiques). Pour l'essentiel, les solveurs lagrangiens se fondent sur une représentation particulière des densités dans l'espace des phases. Utilisée depuis les années 50 en physique des plasmas [78, 72, 37] (et en dynamique des fluides, cf. [59, 68]), cette approche a comme principaux avantages son coût relativement faible (pas de maillage de l'espace des phases contrairement aux méthodes semi-Lagrangiennes, et adaptation naturelle des ressources de calcul aux zones où se trouve le plasma), sa simplicité de mise en oeuvre et sa robustesse sur de longs temps de simulation, notamment due à la conservation de plusieurs quantités physiques fondamentales [99, 95].

Les méthodes particulières ne sont pour autant pas exemptes de défauts. En particulier, leurs résultats sont souvent marqués par des oscillations non-physiques (dont la nature peut être probabiliste ou déterministe) qui, s'ils n'empêchent pas totalement leur exploitation, en dégradent significativement la qualité. De nombreuses méthodes existent pour réduire ces oscillations (par exemple en re-projetant périodiquement la densité sur de nouvelles grilles de particules [73, 98, 113, 101], ou en moyennant les poids des particules voisines [10, 66], ou encore en proposant des formules locales de reconstruction de la densité [131, 63], pour n'en citer que quelques unes) mais leur analyse mathématique ne permet que rarement d'en estimer précisément leurs performances.

Partant de ce constat, j'ai voulu étudier des schémas numériques permettant une représentation précise des densités, et dont la mise en oeuvre serait relativement aisée dans le cadre d'un code particulière existant. Par simplicité j'ai essentiellement travaillé dans un cadre déterministe (les particules étant initialement situés sur une grille prescrite), mais sans perdre de vue l'application de mes travaux au cadre probabiliste des méthodes Monte-Carlo, suivi dans de nombreux codes particulières, voir p.ex. [28].

Dans sa version déterministe, la méthode particulière standard [100, 118] approche la densité f par une superposition de particules numériques de la forme

$$f_{h,\varepsilon}^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} w_k \varphi_\varepsilon(x - x_k^n). \quad (1.19)$$

Ici w_k est le poids de la particule centrée en x_k^n , et φ_ε désigne une régularisation de paramètre $\varepsilon > 0$ de la masse de Dirac, typiquement de la forme $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} \varphi(\varepsilon^{-1}x)$ avec φ une fonction régulière à

support compact telle qu'une B-spline ou un noyau de régularisation, voir p. ex. [68, 98]. Le paramètre h correspond quand à lui à une distance moyenne entre les centres. Pour simplifier notre présentation on pourra considérer des particules initialement placées sur une grille cartésienne,

$$x_k^0 = hk, \quad k \in \mathbb{Z}^d, \quad (1.20)$$

et on supposera que leurs trajectoires suivent le flot exact (1.4),

$$x_k^{n+1} = F^{n,n+1}(x_k^n).$$

Dans ce contexte, les poids sont usuellement donnés par une approximation initiale des masses locales, par exemple $w_k = h^d f^0(x_k^0)$. L'analyse classique voit alors ce procédé comme (i) une approximation (au sens des distributions) de f^0 par une somme pondérée de mesures de Dirac, (ii) le transport exact de cette distribution, et (iii) la régularisation de cette approximation par le noyau de convolution φ_ϵ . Sous réserve que ce dernier vérifie une condition d'ordre $r \geq 1$ sur ses moments, l'estimation d'erreur standard [11, 118] prend la forme

$$\|f(t^n) - f_{h,\epsilon}^n\|_{L^p} \leq C \left(\epsilon^r \|f^0\|_{W^{r,p}} + (h/\epsilon)^m \|f^0\|_{W^{m,p}} \right), \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (1.21)$$

Il est possible d'améliorer cette estimation en modifiant les quadratures initiales [63], mais dans tous les cas ce type de résultats met en évidence une faiblesse de l'approche (1.19), à savoir la nécessité de devoir choisir $\epsilon \gg h$ lorsque $\epsilon, h \rightarrow 0$ pour garantir la convergence forte des densités, ce qui se traduit par un recouvrement croissant des particules qui pénalise fortement les applications numériques. En pratique les méthodes particulières sont souvent utilisées avec un recouvrement limité, suffisant pour la convergence faible des densités et, dans la configuration la plus générale où le flot exact dépend lui-même de la densité transportée, pour une précision jugée acceptable des trajectoires des particules.

L'absence de convergence forte se matérialise en général par des oscillations dans les densités approchées. Pour réduire ces oscillations tout en conservant un recouvrement borné ($\epsilon \sim h$) des particules, de nombreux auteurs ont proposé des méthodes dites *semi-lagrangiennes avant* (FSL, en anglais) consistant à re-projeter périodiquement la densité (1.19) sur la grille (opération souvent désignée sous le terme de *remapping*) [73, 98, 113, 65, 69, 101]. Ces projections ont un effet régularisant qui tend à éliminer les oscillations dues à la distortion du nuage de particules, mais elles introduisent également une diffusion numérique qui peut détériorer la validité des calculs sur des longues durées, de sorte que plusieurs auteurs ont mis au point des techniques avancées de remaillages, voir [101] ou [12, 13, 133] pour des méthodes multi-échelles.

Pour réduire ces oscillations tout en conservant un recours limité aux remappings et un recouvrement limité des particules, j'ai étudié dans une série de travaux [41, 55, 46] une classe de méthodes dans laquelle les particules sont progressivement déformées de façon à mieux suivre le flot caractéristique de l'équation de transport. La densité initiale est à nouveau approchée par un ensemble de particules pondérées,

$$f_h^0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} w_k \varphi_h(x - x_k^0) \quad (1.22)$$

mais contrairement à (1.19) où les particules sont simplement translattées le long des trajectoires, on les transforme maintenant en utilisant des approximations locales du flot arrière $B^{0,n} = (F_{0,t_n})^{-1}$. Au premier ordre la méthode consiste à linéariser le flot arrière autour de chaque trajectoire

$$B_{(1),k}^{0,n} : x \mapsto x_k^0 + D_k^n(x - x_k^n) \quad (1.23)$$

où D_k^n est une matrice de déformation qui correspond à la matrice Jacobienne $J_{B^{0,n}}(x_k^n)$, et à transporter les fonctions de forme suivant

$$\varphi_h(x - x_k^0) \mapsto \varphi_h(B_{(1),k}^{0,n}(x) - x_k^0) = \varphi_h(D_k^n(x - x_k^n)).$$

L'approximation par particules transformées linéairement (LTP) prend alors la forme

$$f_h^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} w_k \varphi_h(D_k^n(x - x_k^n)) \quad (1.24)$$

et on a le résultat suivant (voir [41], Th. 1).

Théorème 1.3 *L'approximation LTP (1.24) vérifie*

$$\|f(t_n) - f_h^n\|_{L^\infty} \leq \|f^0 - f_h^0\|_{L^\infty} + Ch\|f^0\|_{L^\infty} \quad (1.25)$$

avec une constante C qui dépend de la régularité du flot $F^{0,n}$ et de son inverse.

Au deuxième ordre le développement local du flot arrière prend la forme

$$B_{(2),k}^{0,n} : x \mapsto x_k^0 + D_k^n(x - x_k^n) + \frac{1}{2}((x - x_k^n)^t (Q_k^n)_i (x - x_k^n))_{1 \leq i \leq d}$$

où le terme quadratique $(Q_k^n)_i$ correspond à la matrice Hessienne $H_{(B^{0,n})_i}(x_k^n)$ de la i -ème composante du flot. On généralise cette approche à tout ordre r en posant

$$B_{(r),k}^{0,n}(x) := (x - x_k^n) + x_k^0 + \phi_k'(0) + \dots + \frac{1}{r!} \phi_k^{(r)}(0) \quad \text{où} \quad \phi_k(s) = (B^{0,n} - I)(x_k^n + s(x - x_k^n)).$$

En revanche, l'application $B_{(r),k}^{0,n}$ n'est en général pas injective et le support de $\varphi_h(B_{(r),k}^{0,n}(x) - x_k^0)$ n'a aucune raison d'être contenu dans un voisinage de x_k^n . Pour définir la transformation polynomiale des particules il est donc nécessaire d'introduire une restriction a priori des supports. La localisation proposée dans [41] consiste à transporter par le flot linéarisé $F_{(1),k}^{0,n} = (B_{(1),k}^{0,n})^{-1}$ une extension du support initial de la particule. Si ce dernier est inclus dans une boule $\Sigma_{h,k}^0 = B_{\ell^\infty}(x_k^0, h\rho^0)$, on pose

$$\Sigma_{h,k}^n := F_{(1),k}^{0,n}(B_{\ell^\infty}(x_k^0, h\rho_{h,k}^n)) \quad \text{avec} \quad \rho_{h,k}^n := \rho^0 + \frac{1}{h} \|B_{(1),k}^{0,n} - B^{0,n}\|_{L^\infty(F^{0,n}(\Sigma_{h,k}^0))} \quad (1.26)$$

et on définit la déformation polynomiale des particules régulières par

$$\varphi_h(x - x_k^0) \mapsto \mathbb{1}_{\Sigma_{h,k}^n}(x) \varphi_h(B_{(r),k}^{0,n}(x) - x_k^0).$$

Le résultat suivant (voir [41], Th. 2) établit la convergence à l'ordre r de cette approximation.

Théorème 1.4 *L'approximation par particules transformées polynomialement à l'ordre r , définie par*

$$f_h^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} w_k \mathbb{1}_{\Sigma_{h,k}^n}(x) \varphi_h(B_{(r),k}^{0,n}(x) - x_k^0) \quad (1.27)$$

vérifie

$$\|f(t_n) - f_h^n\|_{L^\infty} \leq \|f^0 - f_h^0\|_{L^\infty} + Ch^r \|f^0\|_{L^\infty} \quad (1.28)$$

avec une constante C qui dépend de la régularité du flot $F^{0,n}$ et de son inverse.

La forme explicite des constantes C apparaissant dans les théorèmes ci-dessus (donnée dans [41]) indique une forte détérioration de la précision lorsque le flot devient irrégulier. Pour cette raison il est bénéfique d'effectuer des re-projections, car elles permettent de redémarrer le procédé décrit plus haut avec un flot caractéristique réinitialisé. On observe qu'avec des projections périodiques sur la grille la méthode prend une tournure semi-Lagrangienne. La déformation polynomiale des particules peut alors être vue comme un moyen de limiter le recours à ces projections, car nos estimations indiquent une convergence forte pour $h \rightarrow 0$ sans qu'il soit nécessaire de re-projeter.

Les matrices D_k^n et $(Q_k^n)_i$ apparaissant dans les flots linéaires et quadratiques (si l'on se limite aux premiers ordres) étant des approximations des matrices Jacobiennes et Hessiennes du flot arrière, à savoir $J_{B^{0,n}}(x_k^n)$ et $H_{(B^{0,n})_i}(x_k^n)$, il est possible en pratique de les calculer à partir de la position des marqueurs voisins. Une approximation par différences finies sur la grille de départ des dérivées du flot avant $F^{0,n} = F_{0,t_n}$ donne en effet

$$J_k^n := \left(\frac{(x_{k+e_j}^n - x_{k-e_j}^n)_i}{2h} \right)_{1 \leq i, j \leq d} \approx J_{F^{0,n}}(x_k^0) \quad (1.29)$$

et suivant l'identité $J_{F^{0,n}}(x_k^0)J_{B^{0,n}}(x_k^n) = I_d$, on peut poser

$$D_k^n := (J_k^n)^{-1}. \quad (1.30)$$

Pour les termes quadratiques on approche les matrices Hessiennes du flot avant par

$$(H_k^n)_i := \left((h)^{-2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^1 (-1)^{\alpha_1+\alpha_2} (x_{k+\alpha_1 e_{j_1} + \alpha_2 e_{j_2}}^n)_i \right)_{1 \leq j_1, j_2 \leq d} \approx H_{(F^{0,n})_i}(x_k^0). \quad (1.31)$$

En dérivant deux fois (en x_k^0) l'identité $I = B^{0,n}F^{0,n}$ on obtient d'autre part

$$0 = (J_{\bar{F}^n}(x_k^0))^t H_{(B^{0,n})_i}(x_k^n) J_{F^{0,n}}(x_k^0) + \sum_{j=1}^d (J_{B^{0,n}}(x_k^n))_{i,j} H_{(F^{0,n})_j}(x_k^0),$$

on pose alors

$$(Q_k^n)_i := -(D_k^n)^t \left(\sum_{j=1}^d (D_k^n)_{i,j} (H_k^n)_j \right) D_k^n. \quad (1.32)$$

On peut vérifier la précision de ces approximations. En particulier, il existe un seuil $h^*(F^{0,n})$ en dessous duquel les matrices J_k^n sont inversibles et l'on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$,

$$h \leq h^*(F^{0,n}) \implies \|D_k^n - J_{B^{0,n}}(x_k^n)\| \leq Ch^2 \quad \text{et} \quad \|(Q_k^n)_i - H_{(B^{0,n})_i}(x_k^n)\| \leq Ch \quad (1.33)$$

avec des constantes C qui dépendent du flot exact $F^{0,n}$, voir par exemple [45], Annexe.

Plusieurs tests numériques ont mis en évidence les qualités de convergence de cette approche. Ainsi, la figure 1.3 représente les courbes d'erreur obtenues en transportant une densité initiale régulière dans un champ de vitesse $u(t, x) = \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \text{curl} \phi(x)$ avec $\phi(x) := -\frac{1}{\pi} \sin^2(\pi x_1) \sin^2(\pi x_2)$, tel que la solution revient à son état initial en $t = T$ après avoir été étirée jusqu'en $t = T/2$. On y vérifie que l'approximation particulière classique (1.19), représentée (sous l'acronyme TSP) pour plusieurs valeurs d'un exposant q déterminant le rayon des particules $\epsilon = h^q$, ne converge que pour des valeurs $q < 1$ correspondant à un recouvrement croissant des particules, et que cette convergence est relativement lente. Celle de la méthode FSL (avec remappings, sans déformation) est plus rapide mais requiert

une décroissance de la période de remapping Δt_r , semblable en pratique à une condition CFL. La principale qualité des méthodes LTP et QTP (avec déformations linéaires et quadratiques) est que la convergence a lieu pour valeurs constantes de la période Δt_r , et que les valeurs optimales de cette période, correspondant au meilleur compromis entre les erreurs de remapping et la distortion du flot, sont sensiblement plus grandes avec la méthode QTP.

En collaboration avec des physiciens du groupe “Heavy Ion Fusion” du Laboratoire Lawrence Berkeley, j’ai décrit et validé numériquement un schéma *Linearly-Transformed Particle-In-Cell* (LTPIC) pour l’équation de Vlasov-Poisson 1d1v, où les particules sont déformées suivant la méthode LTP, le champ électrique étant résolu par une méthode traditionnelle. Les résultats numériques obtenus dans cette voie [55] montrent une précision comparable à celle de solveurs d’ordre élevés sur grille (p. ex. semi-Lagrangiens), réputés pour leur qualité.

Avec Frédérique Charles (LJLL) nous avons étendu l’analyse à ce système non-linéaire de Vlasov-Poisson 1d1v. Dans l’article [46] nous avons prouvé la convergence a priori de la densité approchée en norme uniforme (à l’ordre 1) et des trajectoires approchées pour les particules (à l’ordre 2). Par rapport aux estimations classiques de Cottet et Raviart [67] appliquées au cas où les particules ne se recouvrent qu’en nombre fini ($\varepsilon \sim h$), notre approche permet de gagner un ordre de convergence au prix de la transformation linéaire des profils des particules.

Avec Frédérique Charles (LJLL), Young-Pil Choi et José Antonio Carrillo (Imperial College) nous avons également appliqué la méthode LTP à une classe d’équations d’agrégation, pour laquelle nous avons montré (théoriquement et numériquement) des résultats de convergence forte pour la densité, ce qui ne semble pas pouvoir être le cas avec des méthodes particulières à échelle fixe. Ces résultats ont fait l’objet d’un article soumis [44].

1.3 Une méthode lagrangienne avant-arrière

Malgré le gain de précision apporté par les déformations polynomiales, la méthode décrite dans la section précédente a l’inconvénient de produire des particules dont le support peut s’étendre indéfiniment dans certaines directions, rendant délicate leur localisation a priori. En particulier, il n’est pas aisé de déterminer rapidement quelles particules interviennent dans l’évaluation des densités (1.24) ou (1.27) en un point x donné, et leur distance à x pouvant croître indéfiniment entre deux remappings, leur recensement devient vite très coûteux en plusieurs dimensions d’espace.

Pour éviter ce phénomène, l’option la plus simple est d’abandonner la représentation de f^n sous la forme d’une superposition de particules régulières. On souhaite toutefois préserver l’ingrédient central des méthodes LTP et QTP, à savoir l’approximation locale du flot arrière $B^{0,n}$ au voisinage des marqueurs x_k^n par les formules (1.29)-(1.32). En effet celles-ci ont l’avantage de fournir des résultats précis (au vu des simulations numériques illustrées dans la figure 1.3 par exemple) et de ne faire intervenir que la position des marqueurs voisins.

Pour atteindre cet objectif, une solution naturelle consiste à adapter au cadre des méthodes particulières l’approche locale utilisée par Colombi et Alard dans [64] pour concevoir des schémas semi-lagrangiens très précis. En effet, aux particules ponctuelles transportées *en avant* il est possible d’associer une représentation fondée sur l’approximation locale du *flot arrière* par les techniques décrites plus haut. Précisément, la méthode que nous avons proposée dans [45] approche la densité $f(t^n, x) = f^0(B^{0,n}(x))$ par les étapes suivantes :

- (i) A chaque marqueur x_k^n on associe une approximation locale $B_{h,k}^{0,n}$ du flot arrière, calculée de la même façon que dans les méthodes LTP ou QTP par différences finies. On rappelle qu’au premier ordre ce flot approché prend la forme

$$B_{h,k}^{0,n}(x) = x_k^0 + D_k^n(x - x_k^n) \tag{1.34}$$

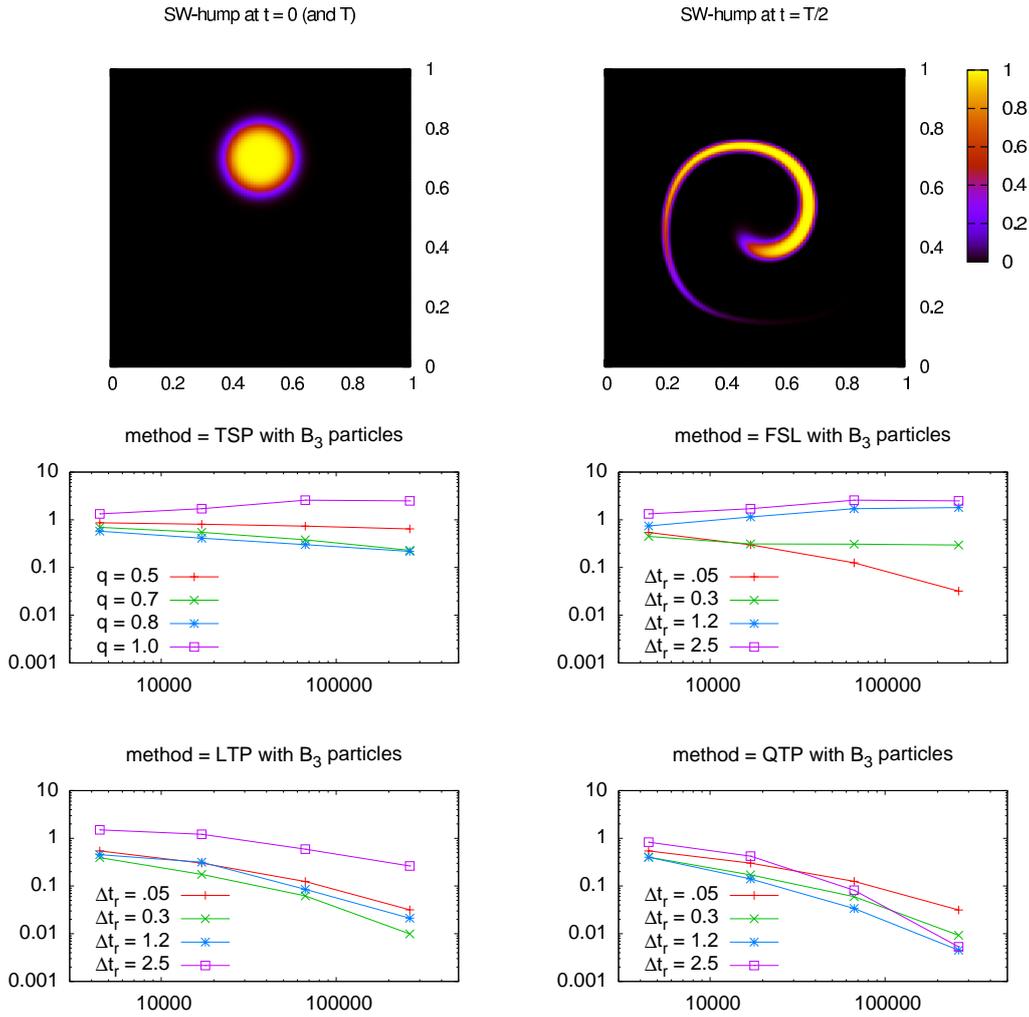


FIGURE 1.3 – Courbes de convergence (erreurs L^∞ vs. nombre de particules $N \sim h^{-2}$) pour un problème de transport passif à flot réversible, approché par diverses méthodes décrites dans la section 1.2 : la méthode TSP (traditional smooth particle) utilise des particules régulières de rayon $\epsilon = h^q$ sans remappings, la méthode FSL (forward semi-Lagrangian) remappe des particules $\epsilon = h$ avec diverses périodes Δt_r , comme les méthodes LTP et QTP qui imposent en plus une déformation (linéaire et quadratique) des particules régulières. Les figures du haut montrent la solution exacte en $t = 0$ et T à gauche, et en $t = T/2$ l’instant d’étirement maximal, à droite.

avec une matrice D_k^n calculée par les formules (1.29)-(1.30), et au deuxième ordre on a

$$B_{h,k}^{0,n}(x) = x_k^0 + D_k^n(x - x_k^n) + \frac{1}{2}((x - x_k^n)^t (Q_k^n)_i (x - x_k^n))_{1 \leq i \leq d} \quad (1.35)$$

avec des matrices $(Q_k^n)_i$ calculées par les formules (1.31)-(1.32).

- (ii) Pour rassembler ces approximations locales du flot arrière de façon régulière, on considère ensuite une partition de l’unité

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} S(x - i) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (1.36)$$

mettant en jeu une fonction de forme $S \geq 0$ à support compact, par exemple une B-spline. Utilisant à nouveau une grille de pas h , dont les noeuds seront notés $\xi_i = ih$ pour éviter une confusion avec les marqueurs, on note $S_{h,i}(x) = S((x - \xi_i)/h)$ la fonction de forme associée au noeud ξ_i . Une approximation globale du flot arrière est alors donnée par

$$B_h^{0,n}(x) := \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} B_{h,k^*(n,i)}^{0,n}(x) S_{h,i}(x) \quad (1.37)$$

où le marqueur d'indice $k^*(n, i)$ est défini comme le plus proche du noeud ξ_i à l'instant t_n , i.e.,

$$k^*(n, i) := \operatorname{argmin}_{k \in \mathbb{Z}^d} \|x_k^n - \xi_i\|_\infty.$$

(iii) La densité approchée est alors donnée par une représentation lagrangienne standard,

$$f_h^n(x) := f^0(B_h^{0,n}(x)) \quad (1.38)$$

qu'on qualifiera d'approximation lagrangienne avant-arrière (FBL, *forward-backward lagrangian*), en précisant éventuellement : L-FBL ou Q-FBL, suivant que les flots locaux sont linéaires (1.34) ou quadratiques (1.35).

A nouveau, il est important de pouvoir réinitialiser les flots caractéristiques lorsque ceux-ci deviennent trop irréguliers pour pouvoir être approchés correctement, et comme dans la section précédente cela peut être réalisé par un remapping, i.e. une ré-initialisation des particules approchant la densité approchée transportée jusque là.

On vérifie qu'avec ce nouveau procédé l'évaluation de la densité en un point donné est a priori beaucoup plus locale qu'avec les méthodes LTP et QTP, où la déformation polynomiale des particules peut étendre rapidement (et indéfiniment) leur support. Dans les simulations numériques, cette meilleure localité se traduit par un gain important de temps cpu, déjà visible en dimension $d = 2$ sur les méthodes de second ordre illustrées figure 1.4, en raison de l'accroissement plus rapide du support des particules dans la méthode QTP, voir (1.26). Ce gain sera d'autant plus important que la dimension d'espace d est grande, notamment dans le cas d'équations de Vlasov dimensions $d = 2 + 2$ ou $3 + 3$ actuellement en cours d'implémentation dans la plate-forme logicielle Selalib [124], développée en collaboration avec des équipes de l'IPP à Garching (Allemagne), de l'IRMA à Strasbourg et de l'IRMAR à Rennes.

On dispose également des estimations a priori suivantes, dans lesquelles le seuil $h^*(F^{0,n})$ correspond à l'inversibilité de la matrice Jacobienne approchée par différences finies, voir (1.33).

Théorème 1.5 *Soit $h \leq h^*(F^{0,n})$. Si le flot exact $F^{0,n}$ et son inverse $B^{0,n}$ sont dans $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$, l'approximation (1.38) de premier ordre (L-FBL) vérifie*

$$\|f(t^n) - f_h^n\| \leq Ch^2$$

avec une constante indépendante de h . Si de plus $F^{0,n}$ et $B^{0,n}$ sont dans $W^{3,\infty}(\mathbb{R}^d)$, alors l'approximation (1.38) de second ordre (Q-FBL) vérifie

$$\|f(t^n) - f_h^n\| \leq Ch^3$$

avec une constante indépendante de h .

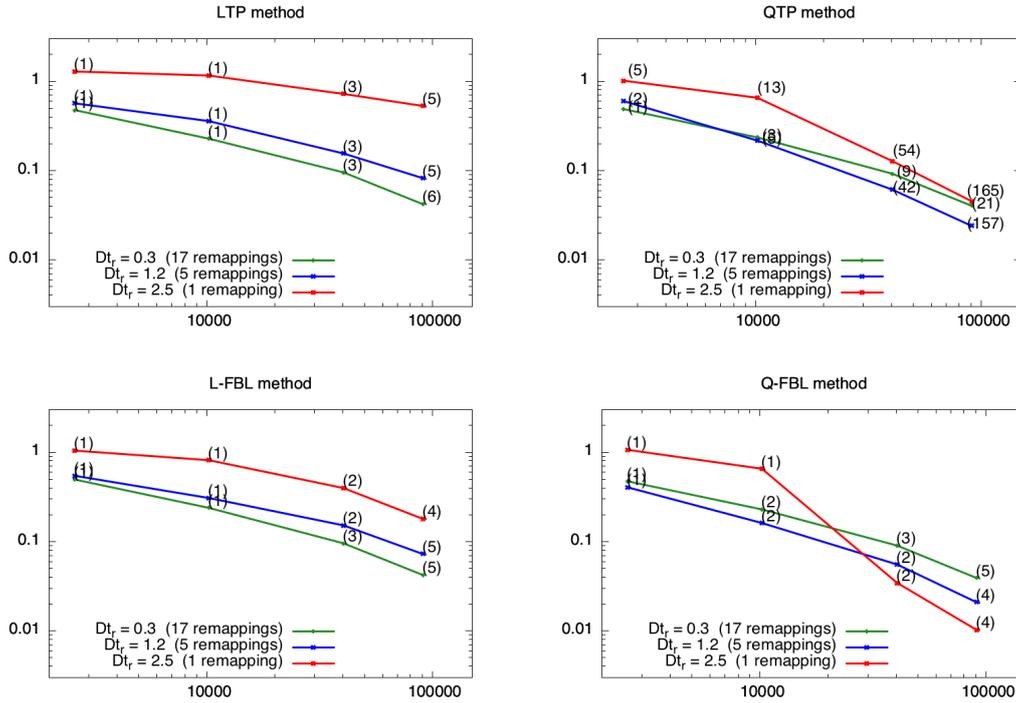


FIGURE 1.4 – Courbes de convergence (erreurs L^∞ vs. nombre de particules $N \sim h^{-2}$) pour le problème de transport passif illustré sur la figure 1.3. Les courbes du haut reprennent les résultats des méthodes à déformation polynomiale (LTP et QTP), tandis que les courbes du bas indiquent celles des approximations lagrangiennes avant-arrière (1.38) de premier et second ordre (L-FBL et Q-FBL). Les nombres entre parenthèses indiquent les temps cpu (en secondes) de chaque simulation.

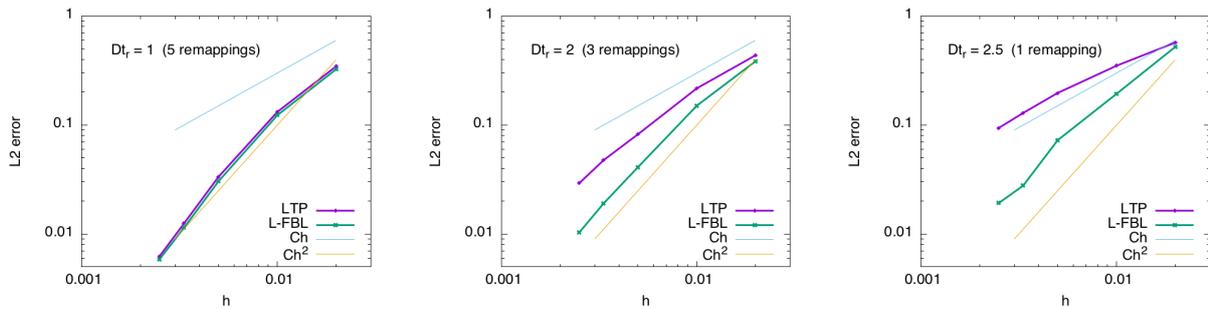


FIGURE 1.5 – Courbes de convergence (erreurs relatives L^2 vs. h) pour le problème de transport passif illustré sur la figure 1.3, approché par les méthodes LTP et L-FBL. Le gain d'un ordre apparaît clairement sur ces courbes d'erreur L^2 , lorsqu'on augmente la période entre deux remappings.

En comparaison avec les méthodes particulières à déformation polynomiales, ces estimations permettent de gagner un ordre de convergence. La raison étant essentiellement que dans la densité approchée, la décomposition en termes d'échelle h est maintenant réalisée sur le flot arrière, plutôt que sur la densité elle-même, ce qui évite de perdre une puissance de h via la constante de Lipschitz de la densité numérique. Ce gain de convergence n'est pas seulement visible dans les estimations a priori :

on l'observe dans les simulations numériques lorsque le transport (sans remapping) est réalisé sur des périodes suffisamment grandes, comme illustré figure 1.5.

Chapitre 2

Approximation compatible non-conforme des équations de Maxwell

Liste de publications

Le contenu de ce chapitre s'appuie sur les travaux suivants :

- [[48]] M. Campos Pinto, S. Jund, S. Salmon and E. Sonnendrücker, Charge conserving FEM-PIC schemes on general grids, *Comptes Rendus Mécanique* 342, 2014
- [[54]] M. Campos Pinto and E. Sonnendrücker, Gauss-compatible Galerkin schemes for time-dependent Maxwell equations, *Mathematics of Computation* 85, 2016
- [[42]] M. Campos Pinto, Constructing exact sequences on non-conforming discrete spaces, *Comptes Rendus Mathématique* 354, 2016
- [[51]] M. Campos Pinto, M. Mounier and E. Sonnendrücker, Handling the divergence constraints in Maxwell and Vlasov–Maxwell simulations, *Applied Mathematics and Computation* 272, 2016
- [[49]] M. Campos Pinto, M. Lutz and M. Mounier, Electromagnetic PIC simulations with smooth particles : a numerical study, *ESAIM : Proc.* 53, 2016
- [[52]] M. Campos Pinto and E. Sonnendrücker, Compatible Maxwell solvers with particles I : conforming and non-conforming 2D schemes with a strong Ampere law, ⟨hal-01303852⟩, under revision for SMAI-JCM, 2016
- [[53]] M. Campos Pinto and E. Sonnendrücker, Compatible Maxwell solvers with particles II : conforming and non-conforming 2D schemes with a strong Faraday law, ⟨hal-01303861⟩, under revision for SMAI-JCM, 2016
- [[43]] M. Campos Pinto, Structure-preserving conforming and nonconforming discretizations of mixed problems, ⟨hal-01471295⟩, submitted, 2017

2.1 Le système de Maxwell temporel

Pour approcher les équations de Maxwell (écrites ici en 2D, où la présence de deux opérateurs rotationnels, l'un scalaire et l'autre vectoriel noté en caractères gras, permet de clarifier certains aspects de notre exposé)

$$\begin{cases} \partial_t B + \operatorname{curl} \mathbf{E} = 0 \\ \partial_t \mathbf{E} - c^2 \operatorname{curl} B = -\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}, \end{cases} \quad (2.1)$$

les éléments finis mixtes [85, 18] sont une méthode de référence. Caractérisés par la présence de plusieurs espaces distincts reliés entre eux par des relations de compatibilité traduisant la structure géométrique des espaces fonctionnels dans lesquels s'écrivent certaines propriétés importantes des équations considérées, ces schémas permettent d'atteindre des ordres élevés dans des domaines complexes et possèdent d'importantes propriétés de stabilité et d'approximabilité, qu'il s'agisse des équations temporelles ou du problème aux valeurs propres

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{E} = \lambda \mathbf{E}$$

comme cela a pu être mis en évidence par plusieurs auteurs, voir p.ex. [106, 27, 93, 16, 135, 17].

Pour décrire cette structure, on empruntera certaines notations à la géométrie différentielle et au calcul extérieur par éléments finis, voir [25, 27, 93, 2, 3, 94]. Ayant posé

$$W^0 = L^2(\Omega), \quad W^1 = L^2(\Omega)^2, \quad W^2 = L^2(\Omega), \quad W^3 = \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

on introduit des opérateurs d^l , $l \in \{0, 1, 2\}$, définis sur $V^l \subset W^l$ et à valeurs dans W^{l+1} , par

$$V^0 = H_0^1(\Omega) \xrightarrow{d^0 = -\operatorname{grad}} V^1 = H_0(\operatorname{curl}; \Omega) \xrightarrow{d^1 = \operatorname{curl}} V^2 = L^2(\Omega) \xrightarrow{d^2 = f_\Omega} V^3 = \mathbb{R} \quad (2.3)$$

où $f_\Omega = |\Omega|^{-1} \int_\Omega$. On supposera ici que le domaine Ω est Lipschitzien, borné et simplement connexe de sorte que cette suite est exacte, au sens où l'image de chaque opérateur coïncide avec le noyau de l'opérateur suivant, voir par exemple [140, Rem. 3.17]. Les adjoints $(d^l)^*$ sont définis sur $V_{l+1}^* \subset W^{l+1}$ et à valeurs dans W^l , par

$$V_3^* = \mathbb{R} \xrightarrow{(d^2)^* = \iota} V_2^* = H(\operatorname{curl}; \Omega) \xrightarrow{(d^1)^* = \operatorname{curl}} V_1^* = H(\operatorname{div}; \Omega) \xrightarrow{(d^0)^* = \operatorname{div}} V_0^* = L^2(\Omega) \quad (2.4)$$

où ι désigne l'injection canonique $\mathbb{R} \rightarrow L^2(\Omega)$. Cette suite est également exacte [140, Cor. 3.16]. Suivant [1, 57] on peut alors utiliser un opérateur "composite" pour représenter l'action combinée des deux rotationnels,

$$\mathcal{A} := c \begin{pmatrix} 0 & -d^1 \\ (d^1)^* & 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{curl} \\ \operatorname{curl} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

C'est un opérateur non borné de $\mathcal{W} := W^2 \times W^1$ dans lui-même, défini sur $\mathcal{V} := D(\mathcal{A}) = V_2^* \times V^1$, i.e., $\mathcal{V} = H(\operatorname{curl}; \Omega) \times H_0(\operatorname{curl}; \Omega)$. Muni de conditions aux bords métalliques $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, le système de Maxwell (2.1) peut alors se réécrire sous la forme

$$\partial_t U - \mathcal{A}U = -F \quad (2.6)$$

avec $U = (cB, \mathbf{E})^T$ et $F = (0, \varepsilon_0^{-1} \mathbf{J})^T$. Le caractère bien posé de cette équation s'établit alors avec des arguments standards : \mathcal{A} étant anti-symétrique au sens où $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$, il génère un semi-groupe de contractions de classe \mathcal{C}_0 [139, section IX.8] et le problème de Cauchy (2.6) peut s'étudier avec

des outils classiques [117]. Par exemple si $F \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathcal{W})$, alors (2.6) muni d'une condition initiale $U^0 \in \mathcal{V}$ possède une unique solution $U \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{V})$.

Le système complet des équations de Maxwell comprend également les lois de Gauss, qui s'obtiennent en prenant formellement la divergence des équations d'Ampère et Faraday (2.1) et peuvent se voir comme un critère d'admissibilité pour les solutions générales de (2.6). Ainsi, la loi de Gauss électrique

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (2.7)$$

représente une condition sur le champ \mathbf{E} initial et sur la densité de charge ρ , dans la mesure où elle sera vérifiée en tout temps à condition de l'être en $t = 0$, et si les sources vérifient l'équation "de continuité"

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0$$

exprimant le fait que la densité de courant \mathbf{J} est le flux de la densité de charges ρ . Un raisonnement similaire s'applique pour la loi de Gauss magnétique, pour laquelle les sources sont en principe toujours nulles. En 3D celle-ci s'écrit $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, et dans le modèle 2D présenté ici cette relation dégénère en $\int_{\Omega} B = \text{cst}$, compte tenu de la suite restreinte (2.3). A nouveau on peut écrire ces lois sous une forme "composite"

$$\mathcal{D}U = R \quad \text{avec} \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} d^2 & 0 \\ 0 & (d^0)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{\Omega} & 0 \\ 0 & \operatorname{div} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

et en écrivant $R = (f_{\Omega} c B^0, \epsilon_0^{-1} \rho)^T$ la densité de charge généralisée dans ce modèle 2D.

2.2 Approximation conforme par des éléments finis mixtes

L'approche standard consiste à choisir une discrétisation conforme $V_h^l \subset V^l$ de la suite primale (2.3), sur laquelle les opérateurs discrets peuvent être définis par simple restriction $d_h^l = d^l|_{V_h^l}$. Plusieurs choix sont possibles, des constructions systématiques étant proposées dans [92, 2]. Un choix usuel [106, 108] consiste à prendre, \mathcal{T}_h désignant une triangulation conforme de Ω ,

$$V_h^0 = \mathcal{L}_{p,0}(\Omega, \mathcal{T}_h) \xrightarrow{d_h^0 = -\mathbf{grad}|_{V_h^0}} V_h^1 = \mathcal{N}_{p-1,0}(\Omega, \mathcal{T}_h) \xrightarrow{d_h^1 = \operatorname{curl}|_{V_h^1}} V_h^2 = \mathbb{P}_{p-1}(\mathcal{T}_h) \quad (2.9)$$

où l'on a noté, en remontant la suite :

$$\mathbb{P}_{p-1}(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_T \in \mathbb{P}_{p-1}(T), T \in \mathcal{T}_h\} \quad (2.10)$$

l'espace des polynômes par morceaux de degré maximal $p - 1$ sur la triangulation \mathcal{T}_h ,

$$\mathcal{N}_{p-1,0}(\Omega, \mathcal{T}_h) = \mathcal{N}_{p-1}(\mathcal{T}_h) \cap H_0(\operatorname{curl}; \Omega) \quad \text{avec} \quad \mathcal{N}_{p-1}(T) = \mathbb{P}_{p-1}(T)^2 + \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \mathbb{P}_{p-1}(T) \quad (2.11)$$

l'espace de Nédélec (de première espèce) muni de conditions aux bords homogènes, et

$$\mathcal{L}_{p,0}(\Omega, \mathcal{T}_h) = \mathbb{P}_p(\mathcal{T}_h) \cap \mathcal{C}_0(\Omega) \quad (2.12)$$

l'espace des éléments continus (de "Lagrange") nuls aux bords. L'espace (2.11) est associé à des degrés de libertés d'arêtes curl-conformes dont nous ne rappellerons pas ici la forme précise (on renvoie pour cela à [18] ou [52] par exemple), mais qui sont destinés à assurer la continuité des composantes tangentielles des champs de part et d'autre des arêtes. En deux dimensions ces éléments correspondent

à une rotation de $\pi/2$ des éléments div-conformes introduits dans [119] et leur extension au cas tri-dimensionnel a été proposée dans [114]. Ces éléments ont été longuement étudiés, voir p.ex. [85, 18]. Notamment, on sait que la suite discrète (2.9) est encore exacte, ce qui peut se vérifier directement ([52], Lemme 3.2) ou se déduire du fait que ces espaces sont des cas particuliers de la construction générale proposée dans [2]. On notera que ce cadre a été étendu à d'autres espaces conformes tels que les éléments finis par splines dans [36].

L'approximation par éléments finis mixtes de (2.1) basée sur ces espaces conformes consiste alors à calculer $(B_h, \mathbf{E}_h) \in \mathcal{C}^0([0, T]; V_h^2 \times V_h^1)$, solution de

$$\begin{cases} \langle \partial_t B_h, \varphi \rangle + \langle \text{curl } \mathbf{E}_h, \varphi \rangle = 0 & \varphi \in V_h^2 \subset L^2(\Omega) \\ \langle \partial_t \mathbf{E}_h, \boldsymbol{\varphi} \rangle - c^2 \langle B_h, \text{curl } \boldsymbol{\varphi} \rangle = -\frac{1}{\varepsilon_0} \langle \mathbf{J}_h, \boldsymbol{\varphi} \rangle & \boldsymbol{\varphi} \in V_h^1 \subset H_0(\text{curl}; \Omega) \end{cases} \quad (2.13)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de $L^2(\Omega)$ et $\mathbf{J}_h \in \mathcal{C}^0([0, T]; V_h^1)$ représente une approximation du terme source \mathbf{J} . Un choix usuel [106, 108, 103], [48] consiste à définir ce terme par une simple projection L^2 dans l'espace discret V_h^1 , i.e.

$$\langle \mathbf{J}_h, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \langle \mathbf{J}, \boldsymbol{\varphi} \rangle, \quad \boldsymbol{\varphi} \in V_h^1. \quad (2.14)$$

On rappellera dans la section 2.4 que pour les éléments utilisés ici, ce choix permet de vérifier un diagramme commutant qui conduit à une propriété de stabilité en temps long, mais ce n'est pas toujours le cas.

Utilisant l'inclusion $\text{curl } V_h^1 \subset V_h^2$, on note que la première équation est vérifiée au sens fort,

$$\partial_t B_h + \text{curl } \mathbf{E}_h = 0 \quad (\text{dans } V_h^2). \quad (2.15)$$

En particulier, on voit qu'en 3D cette approche calcule un champ B_h dont la divergence reste nulle dès lors qu'elle l'est au temps initial, sans qu'il soit besoin de le calculer dans un sous-espace de $H(\text{div}; \Omega)$.

On observera que l'égalité (2.15) entraîne, par dérivation temporelle de la deuxième équation de (2.13), que le champ approché vérifie ici

$$\langle \partial_t^2 \mathbf{E}_h, \boldsymbol{\varphi} \rangle + c^2 \langle \text{curl } \mathbf{E}_h, \text{curl } \boldsymbol{\varphi} \rangle = -\frac{1}{\varepsilon_0} \langle \partial_t \mathbf{J}_h, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad (2.16)$$

une formulation étudiée dans l'article classique [107].

D'autre part, il est possible de construire sur le même principe une discrétisation basée sur la suite duale (2.4). Cette approche est suivie dans plusieurs travaux [1, 106, 130] et nous l'avons également analysée, dans [52] pour le cas bi-dimensionnel et dans [54] pour le cas tri-dimensionnel. Les conditions aux bords sont alors discrétisées de façon naturelle, et c'est l'équation d'Ampère (avec un courant approché) qui est vérifiée au sens fort par les solutions discrètes.

Une qualité importante de la discrétisation mixte est que sous certaines conditions sur les espaces sous-jacents, l'opérateur d'évolution défini par le schéma (2.13),

$$\mathcal{A}_h := c \begin{pmatrix} 0 & -d_h^1 \\ (d_h^1)^* & 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & -\text{curl}|_{V_h^1} \\ (\text{curl}|_{V_h^1})^* & 0 \end{pmatrix} : (V_h^2 \times V_h^1) \rightarrow (V_h^2 \times V_h^1), \quad (2.17)$$

est *spectralement correct* au sens où ses modes propres approchent correctement ceux de l'opérateur exact \mathcal{A} dans le domaine Ω considéré. Ce type de propriétés a été longuement étudié dans de nombreux travaux, voir par exemple [26, 19, 22, 15, 110, 56], et on peut en rappeler la version synthétique présentée dans [3] sous les hypothèses que

- (H1) l'intersection $V^1 \cap V_1^*$ est dense et s'injecte de façon compacte dans W^1

- (H2) il existe une suite de projections $\pi_h^l : W^l \rightarrow V_h^l$, bornées uniformément par rapport à h dans W^l et dans V^l , pour lesquelles le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc}
 V^0 & \xrightarrow{d^0} & V^1 & \xrightarrow{d^1} & V^2 & \xrightarrow{d^2} & V^3 \\
 \pi_h^0 \downarrow & & \pi_h^1 \downarrow & & \pi_h^2 \downarrow & & \pi_h^3 \downarrow \\
 V_h^0 & \xrightarrow{d^0} & V_h^1 & \xrightarrow{d^1} & V_h^2 & \xrightarrow{d^2} & V_h^3
 \end{array} \tag{2.18}$$

au sens où $d^l \pi_h^l = \pi_h^{l+1} d^l$ pour $l \in \{0, 1, 2\}$. On a bien sûr posé ici $V_h^3 = \mathbb{R}$.

Ces hypothèses sont bien vérifiées : (H1) correspond à l'inclusion compacte de $H_0(\text{curl}; \Omega) \cap H(\text{div}; \Omega)$ dans $L^2(\Omega)^2$ et se déduit de [109, cor. 3.49] qui établit son analogue dans \mathbb{R}^3 . La propriété (H2) peut s'obtenir grâce à la construction générale proposée dans [60, cor. 6.3] pour une famille de suites exactes d'espaces discrets décrite dans [2], à laquelle (2.9) appartient. On peut alors préciser cette propriété en considérant un opérateur G qui représente l'inverse de \mathbf{curl} sur l'espace

$$X^1 := (\ker d^1)^\perp \cap V^1 = \{\mathbf{u} \in H_0(\text{curl}; \Omega) : \text{div } \mathbf{u} = 0\}. \tag{2.19}$$

Précisément, $G : L^2(\Omega)^2 \rightarrow X^1$ est défini par

$$\langle \mathbf{curl} G\mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{v} \in X^1. \tag{2.20}$$

G est un opérateur compact et auto-adjoint de $L^2(\Omega)^2$ dans lui-même, et en tant que tel il possède un nombre au plus dénombrable de valeurs propres positives, dont le seul point d'accumulation est 0 : on peut ainsi écrire

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

les inverses de ses valeurs propres non nulles, en répétant les valeurs propres multiples. On désigne par $(\mathbf{u}_i)_{i \geq 1}$ une suite orthonormale de vecteurs propres associés, et on appelle \mathfrak{E}_i l'espace engendré par \mathbf{u}_i . Suivant [20] on note alors $m(N)$ la dimension de l'espace généré par les N premières valeurs propres *distinctes* : cet espace, $\mathfrak{E}_1 + \dots + \mathfrak{E}_{m(N)}$, ne dépend pas du choix des \mathbf{u}_i . On montre alors que les modes propres non nuls de \mathcal{A} , qui sont de la forme générique $-i\omega$ en raison de son caractère antisymétrique, peuvent être associées de façon bijective à ceux de G : on a

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} cb \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} = -i\omega \begin{pmatrix} cb \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} G\mathbf{e} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^{-2} \mathbf{e} \\ b = \frac{1}{i\omega} \mathbf{curl} \mathbf{e}. \end{cases} \tag{2.21}$$

Pour caractériser les modes propres de la discrétisation conforme (2.13), (2.17), on approche alors X^1 par l'espace discret

$$X_h^1 := (\ker d_h^1)^\perp \cap V_h^1 = \{\mathbf{u} \in V_h^1 : \langle \mathbf{u}, \mathbf{grad} \varphi \rangle = 0, \varphi \in V_h^0\}, \tag{2.22}$$

et on considère $G_h : L^2(\Omega)^2 \rightarrow X_h^1$ défini par

$$\langle \mathbf{curl} G_h \mathbf{u}, \mathbf{curl} \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{v} \in X_h^1. \tag{2.23}$$

A nouveau c'est un opérateur compact et auto-adjoint de $L^2(\Omega)^2$ dans lui-même, et on peut ordonner les inverses de ses valeurs propres non-nulles,

$$0 < \lambda_{1,h} \leq \lambda_{2,h} \leq \dots$$

en répétant les valeurs propres multiples. Comme plus haut, on désigne par $(\mathbf{u}_{i,h})_{i \geq 1}$ une suite ortho-normale de vecteurs propres associés, et on note $\mathfrak{E}_{i,h}$ l'espace engendré par $\mathbf{u}_{i,h}$. A nouveau, ces modes propres peuvent être associées de façon univoque à ceux de \mathcal{A}_h , via une équivalence identique à (2.21).

L'analyse développée dans [3] permet alors d'établir la convergence

$$\|G - G_h\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega)^2, L^2(\Omega)^2)} \rightarrow 0,$$

et la théorie des perturbations des opérateurs linéaires nous garantit que les modes propres approchés $(\lambda_{i,h}, \mathbf{u}_{i,h})_{i \geq 1}$ convergent vers les modes exacts $(\lambda_i, \mathbf{u}_i)_{i \geq 1}$ au sens de la définition 2.1 de [16] : pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $N \geq 1$, il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \leq h_0$ on a

$$\max_{1 \leq i \leq m(N)} |\lambda_i - \lambda_{i,h}| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \text{gap} \left(\sum_{i=1}^{m(N)} \mathfrak{E}_i, \sum_{i=1}^{m(N)} \mathfrak{E}_{i,h} \right) \leq \varepsilon, \quad (2.24)$$

le gap entre deux espaces étant défini classiquement comme

$$\text{gap}(\mathfrak{E}, \mathfrak{F}) := \max \left(\sup_{\substack{u \in \mathfrak{E} \\ \|u\| \leq 1}} \inf_{v \in \mathfrak{F}} \|u - v\|, \sup_{\substack{v \in \mathfrak{F} \\ \|v\| \leq 1}} \inf_{u \in \mathfrak{E}} \|u - v\| \right). \quad (2.25)$$

2.3 Discrétisation Conga (Galerkin conforme / non-conforme)

Un objectif important que nous nous étions fixés ici a été d'étendre des approximations telles que (2.13) à des espaces d'éléments finis *entièrement discontinus*, tout en préservant l'essentiel des propriétés citées plus haut, notamment :

- (i) dans l'extension à \mathbb{R}^3 , la possibilité de calculer un champ B_h à divergence exactement nulle, sans faire intervenir d'espaces discrets conformes dans $H(\text{div}; \Omega)$,
- (ii) la correction spectrale de l'opérateur d'évolution discret \mathcal{A}_h , sans ajout de terme dissipatif,
- (iii) des estimations d'erreur d'ordre élevé, stables en temps long.

(2.26)

Si elle augmente la taille des problèmes discrets en dupliquant potentiellement des degrés de liberté aux interfaces entre les éléments (et complexifie parfois leur pré-conditionnement, cf. [31, 32]) l'utilisation d'espaces discontinus offre plusieurs avantages. D'une part, elle peut être particulièrement appropriée lorsqu'on sait que les solutions recherchées sont a priori discontinues de part et d'autres d'interfaces connues, pour éviter des phénomènes de Gibbs. D'autre part, la localité des calculs est souvent requise dans des codes parallèles devant réduire au minimum les communications inter-processeurs. Ainsi, lorsqu'on souhaite résoudre un problème instationnaire tel que (2.1) au moyen d'un schéma explicite en temps, l'inversion des matrices de masse doit se faire à chaque pas de temps. Dans le cadre d'une discrétisation conforme telle que (2.13), où les fonctions de base de V_h^1 sont en général supportées sur plus d'un élément, cette inversion est une opération a priori globale qui entraîne des calculs coûteux. Plusieurs auteurs ont d'ailleurs proposé des techniques de diagonalisation des matrices de masse, mais aucune technique ne semble entièrement satisfaisante dans le cadre général d'éléments non-structurés. Avec des espaces discontinus les matrices de masse sont diagonales par blocs et leur inversion s'effectue maille par maille.

L'approche communément suivie pour mettre en oeuvre des espaces discontinus est celle des méthodes Galerkin discontinues (voir p.ex. [80, 96]), mais elle ne permet pas, en principe, de préserver les propriétés que nous souhaitons : la correction spectrale semble nécessiter l'introduction de termes dissipatifs [89, 134, 35, 29] et la stabilité en temps long requiert de corriger les champs via des techniques

dites de *divergence cleaning* qui nécessitent la résolution d'équations additionnelles paraboliques ou hyperboliques, voir par exemple [112, 97, 129].

Pour cette raison, nous avons proposé une discrétisation dans laquelle des espaces non-conformes sont incorporés tout en préservant l'essentiel de la structure géométrique des approximations conformes telles que (2.13). La méthode qui en résulte a été dénommée CONGA dans [[54]], pour "COncforming/Non-conforming GALerkin".

Le principe consiste à partir d'une formulation conforme de référence et de relaxer les contraintes de continuité inter-éléments dans les espaces discrets, de façon à n'utiliser que des espaces discontinus. Ici V_h^2 est déjà discontinu, nous n'avons donc besoin d'introduire qu'un seul nouvel espace $\tilde{V}_h^1 \not\subset H_0(\text{curl}; \Omega)$. Il sera agréable de supposer que cet espace vérifie

$$V_h^1 \subset \tilde{V}_h^1 \not\subset V^1.$$

Dans le contexte de la discrétisation (2.9), il ressort de notre analyse que le choix naturel est de considérer un espace de Nédélec brisé

$$\tilde{V}_h^1 := \mathcal{N}_{p-1}(\mathcal{T}_h) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2 : \mathbf{u}|_T \in \mathcal{N}_{p-1}(T), T \in \mathcal{T}_h\}. \quad (2.27)$$

On note qu'il est également possible d'utiliser pour \tilde{V}_h^1 un espace standard de polynômes par morceaux tel que $\mathbb{P}_{p-1}(\mathcal{T}_h)^2$, à condition de construire la suite conforme de référence (2.9) autour de l'espace de Nédélec de deuxième espèce [115], cf. [[53]], Rem. 4.5.

Le deuxième ingrédient est une projection bornée sur l'espace conforme,

$$\mathcal{P}_h^1 : L^2(\Omega)^2 \rightarrow V_h^1 \subset \tilde{V}_h^1, \quad (\mathcal{P}_h^1)^2 = \mathcal{P}_h^1, \quad (2.28)$$

qui permettra d'étendre naturellement la méthode conforme aux espaces discontinus. On demandera à cette projection de préserver les $m \geq 1$ premiers moments sur chaque maille,

$$\langle (\mathcal{P}_h^1 - I)\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{P}_{m-1}(\mathcal{T}_h)^2,$$

de sorte que le projecteur adjoint est une approximation de l'identité

$$(\mathcal{P}_h^1)^*\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}, \quad h \rightarrow 0, \quad (2.29)$$

pour tout $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2$. Comme l'espace discontinu \tilde{V}_h^1 se compose des restrictions des fonctions de l'espace conforme V_h^1 sur les différentes mailles de \mathcal{T}_h , il est naturel de définir ses degrés de liberté comme les restrictions à chaque maille de ceux de V_h^1 . Notre projecteur consistera alors à moyenner les degrés de libertés provenant de plusieurs mailles, et son extension stable à L^2 sera assurée si l'on utilise comme degrés de libertés pour V_h^1 des intégrales contre des polynômes locaux, déduits par dualité des bases locales de l'espace conforme V_h^1 , suivant la procédure proposée dans [77]. L'application de \mathcal{P}_h^1 sur l'espace \tilde{V}_h^1 est alors locale, et presque triviale. Nous renvoyons à [[53]] pour sa construction détaillée.

L'approximation Conga associée à (2.13) consiste alors à calculer $(B_h, \mathbf{E}_h) \in \mathcal{C}^0([0, T]; V_h^2 \times \tilde{V}_h^1)$ solution de

$$\begin{cases} \langle \partial_t B_h, \varphi \rangle + \langle \text{curl } \mathcal{P}_h^1 \mathbf{E}_h, \varphi \rangle = 0 & \varphi \in V_h^2 \subset L^2(\Omega) \\ \langle \partial_t \mathbf{E}_h, \tilde{\varphi} \rangle - c^2 \langle B_h, \text{curl } \mathcal{P}_h^1 \tilde{\varphi} \rangle = -\frac{1}{\varepsilon_0} \langle \mathbf{J}_h, \tilde{\varphi} \rangle & \tilde{\varphi} \in \tilde{V}_h^1 \not\subset H_0(\text{curl}; \Omega) \end{cases} \quad (2.30)$$

où \mathbf{J}_h désigne à nouveau une approximation discrète (cette fois dans \tilde{V}_h^1) du terme source \mathbf{J} . A la différence du cas conforme, nous verrons qu'une projection L^2 n'est pas appropriée pour définir \mathbf{J}_h , et devra être remplacée par une approximation faisant intervenir la projection conforme \mathcal{P}_h^1 .

La première propriété listée dans nos objectifs (2.26) se déduit immédiatement de la forme de (2.30) : en utilisant l'inclusion $\text{curl } \mathcal{P}_h^1 \tilde{V}_h^1 \subset V_h^2$, on observe en effet que la première équation peut à nouveau se lire de façon forte dans V_h^2 ,

$$\partial_t B_h + \text{curl } \mathcal{P}_h^1 \mathbf{E}_h = 0. \quad (2.31)$$

En particulier (lorsque cela a du sens, par exemple en 3D), la divergence du champ discret B_h sera exactement nulle, dès que ce sera le cas à l'instant initial. Et similairement au cas conforme, on observe qu'en dérivant temporellement la deuxième équation de (2.30) et en utilisant (2.31), le champ approché vérifie ici

$$\langle \partial_t^2 \mathbf{E}_h, \tilde{\varphi} \rangle + c^2 \langle \text{curl } \mathcal{P}_h^1 \mathbf{E}_h, \text{curl } \mathcal{P}_h^1 \tilde{\varphi} \rangle = -\frac{1}{\varepsilon_0} \langle \partial_t \mathbf{J}_h, \tilde{\varphi} \rangle \quad (2.32)$$

formulation a priori nouvelle qu'on pourra comparer à (2.16).

En reprenant le fil d'analyse résumé plus haut pour la discrétisation conforme, il est également possible de démontrer la deuxième propriété listée en (2.26), à savoir que l'opérateur d'évolution Conga

$$\tilde{\mathcal{A}}_h := c \begin{pmatrix} 0 & -d_h^1 \mathcal{P}_h^1 \\ (d_h^1 \mathcal{P}_h^1)^* & 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & -\text{curl } \mathcal{P}_h^1|_{\tilde{V}_h^1} \\ (\text{curl } \mathcal{P}_h^1|_{\tilde{V}_h^1})^* & 0 \end{pmatrix} : (V_h^2 \times \tilde{V}_h^1) \rightarrow (V_h^2 \times \tilde{V}_h^1) \quad (2.33)$$

approche correctement les modes propres de l'opérateur exact \mathcal{A} . Comme plus haut, on commence par introduire une discrétisation appropriée de l'espace X^1 , qui repose sur l'identification d'une nouvelle suite exacte faisant intervenir l'espace non-conforme \tilde{V}_h^1 . En s'appuyant sur les propriétés de la suite exacte conforme (2.9) et de la projection conforme (2.28), on vérifie l'identité clef

$$\ker(d_h^1 \mathcal{P}_h^1|_{\tilde{V}_h^1}) = \ker d_h^1 \oplus \ker(\mathcal{P}_h^1|_{\tilde{V}_h^1}) = d_h^0 V_h^0 \oplus (I - \mathcal{P}_h^1) \tilde{V}_h^1, \quad (2.34)$$

d'où l'on déduit que la suite suivante, *non-conforme*, est encore exacte [42]

$$\tilde{V}_h^0 := V_h^0 \times \tilde{V}_h^1 \xrightarrow{\tilde{d}_h^0} \tilde{V}_h^1 \xrightarrow{\tilde{d}_h^1 = d_h^1 \mathcal{P}_h^1|_{\tilde{V}_h^1}} V_h^2. \quad (2.35)$$

Ici \tilde{V}_h^0 est donc une nouvelle discrétisation non-conforme de l'espace V^0 (ici H_0^1) et la discrétisation correspondante de l'opérateur d^0 (ici le gradient) induite par (2.34) est définie par

$$\tilde{d}_h^0 : \tilde{V}_h^0 \ni (\varphi, \tilde{\mathbf{v}}) \mapsto d_h^0 \varphi + (I - \mathcal{P}_h^1) \tilde{\mathbf{v}}. \quad (2.36)$$

i.e., $\tilde{d}_h^0(\varphi, \tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{grad} \varphi + (I - \mathcal{P}_h^1) \tilde{\mathbf{v}}$. On approche alors l'espace $X^1 = (\ker d^1)^\perp \cap V^1$ par

$$\tilde{X}_h^1 := (\ker d_h^1 \mathcal{P}_h^1)^\perp \cap \tilde{V}_h^1 = \{ \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{V}_h^1 : \langle \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{grad} \varphi \rangle + \langle \tilde{\mathbf{u}}, (I - \mathcal{P}_h^1) \tilde{\mathbf{v}} \rangle = 0, \varphi \in V_h^0, \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{V}_h^1 \}, \quad (2.37)$$

et la discrétisation non-conforme du problème aux valeurs propres (2.20) prend la forme d'un opérateur $\tilde{G}_h : L^2(\Omega)^2 \rightarrow \tilde{X}_h^1$, défini par

$$\langle \text{curl } \mathcal{P}_h^1 \tilde{G}_h \mathbf{u}, \text{curl } \mathcal{P}_h^1 \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{v} \in \tilde{X}_h^1. \quad (2.38)$$

A nouveau c'est un opérateur compact et auto-adjoint de $L^2(\Omega)^2$ dans lui-même, dont on peut ordonner les inverses des valeurs propres non-nulles

$$0 < \tilde{\lambda}_{1,h} \leq \tilde{\lambda}_{2,h} \leq \dots$$

en répétant les valeurs propres multiples. On note $(\tilde{\mathbf{u}}_{i,h})_{i \geq 1}$ une suite orthonormale de vecteurs propres associés, et $\tilde{\mathcal{E}}_{i,h}$ l'espace engendré par $\tilde{\mathbf{u}}_{i,h}$. Enfin, ces modes propres peuvent être associées de façon univoque à ceux de $\tilde{\mathcal{A}}_h$, via une équivalence semblable à (2.21). En utilisant les propriétés (2.28)-(2.29) de la projection \mathcal{P}_h^1 et les relations des suites exactes discrètes, on montre alors le résultat suivant.

Théorème 2.1 ([54]) *L'approximation non-conforme (Conga) \tilde{G}_h de l'inverse de $\mathbf{curl} \mathbf{curl}$ définie par (2.38) s'exprime en fonction de son analogue conforme (2.23) comme*

$$\tilde{G}_h = P_{\tilde{X}_h^1} G_h P_{\tilde{X}_h^1}$$

où $P_{\tilde{X}_h^1}$ désigne la projection L^2 dans l'espace discontinu (2.37). De plus cet opérateur converge vers l'inverse exact (2.20),

$$\|G - \tilde{G}_h\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega)^2, L^2(\Omega)^2)} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

En particulier, les modes propres approchés $(\tilde{\lambda}_{i,h}, \tilde{\mathbf{u}}_{i,h})_{i \geq 1}$ des opérateurs Conga \tilde{G}_h et $\tilde{\mathcal{A}}_h$ convergent vers les modes exacts $(\lambda_i, \mathbf{u}_i)_{i \geq 1}$ au sens de (2.24).

Dans \mathbb{R}^2 , on a montré [53] que l'opérateur Conga (2.33) coïncidait avec la discrétisation DG standard par flux centrés (sans pénalisation), dont le caractère spectralement correct a été étudié et vérifié numériquement [89] mais pas formellement démontré, du moins à notre connaissance. Les discrétisations Conga et DG diffèrent en revanche dans le cas tridimensionnel, où l'on sait que cette dernière n'est spectralement correcte qu'à condition d'ajouter une pénalisation des sauts, voir [89, 134, 35, 34], ou bien de faire intervenir des solutions vérifiant certaines conditions d'interface [29] qui interdisent l'usage de fonctions totalement discontinues. Dans ce sens, on pourra consulter [91] pour une démonstration du caractère nécessaire de ces conditions d'interfaces pour l'approximation d'un problème elliptique (une équation de Poisson) sous forme mixte, lorsque le schéma ne réalise pas lui-même un certain couplage des mailles voisines au travers de ses opérateurs discrets. En un sens, la discrétisation Conga permet donc de réaliser ce couplage au niveau des opérateurs discrets, sans faire intervenir de pénalisation.

On notera que la correction spectrale est un ingrédient essentiel à la bonne approximation du problème d'évolution associé. C'est assez clair dans la mesure où des modes parasites (resp. corrects), pourraient se propager (resp. ne pas se propager) dans le cas d'une approximation spectrale incorrecte, et cela a été précisé par des estimations d'erreur a priori uniformes dans [21]. L'absence de pénalisation est également un avantage pour l'approximation de problèmes d'évolution, où elle revient à une absence de termes dissipatifs et offre ainsi de meilleures propriétés de conservation discrètes.

2.4 Critères abstraits pour l'approximation compatible des sources

La stabilité en temps long des méthodes numériques pour le système de Maxwell (2.1) est liée à leur propriétés de conservation des contraintes en divergence. Nous avons vu en effet qu'au niveau continu, les lois de Gauss étaient préservées par les équations d'Ampère et Faraday, ce qui se vérifie facilement en prenant la divergence de ces dernières. Lorsque les méthodes numériques ne préservent pas ce principe, ce qui est généralement le cas des schémas Galerkin discontinus (DG), elles sont susceptibles de développer des instabilités en temps long par accumulation de petites erreurs [129] *quand bien même leur convergence en $h \rightarrow 0$ serait établie à l'ordre élevé*. Pour éviter ces instabilités, les techniques usuelles consistent à introduire des termes dissipatifs [88, 89] ou à corriger les champs par des techniques de résolution approchée des lois de Gauss, d'abord introduites dans le cadre des schémas par différences finies [24, 105, 104] et ensuite généralisées à d'autres méthodes sous la forme de corrections elliptiques, paraboliques ou hyperboliques [111, 96, 9, 61], voir également [51] pour une revue récente sur ces techniques.

On propose ici de formuler de façon précise certaines relations de compatibilité que les sources numériques devraient vérifier pour éliminer ces instabilités, sans qu'il soit nécessaire d'ajouter de la dissipation ou de corriger les champs via des équations supplémentaires. Comme on le verra, ces critères

de compatibilité sont vérifiés naturellement dans le cadre des formulations mixtes de type conformes, et leur mise en oeuvre dans les schémas discontinus de type Conga est aisée et peu coûteuse.

Le principe des discrétisations compatibles est donc de préserver les relations qui garantissent la conservation exacte des lois de Gauss. On pense ainsi à l'identité fondamentale $\operatorname{div} \mathbf{curl} = 0$, mais on va voir qu'il est d'abord nécessaire de ré-exprimer convenablement cette relation dans le cadre d'une discrétisation donnée, puisqu'elle n'est qu'un ingrédient parmi d'autres au sein d'un système plus large. Pour préciser ce point, considérons une discrétisation en espace des équations de Maxwell (2.1) de la forme

$$\begin{cases} \partial_t B_h + \operatorname{curl}_h \mathbf{E}_h = 0 \\ \partial_t \mathbf{E}_h - c^2 \mathbf{curl}_h B_h = -\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}_h. \end{cases} \quad (2.39)$$

Reproduire l'identité $\operatorname{div} \mathbf{curl} = 0$ dans ce cadre consiste à identifier un opérateur de divergence discrète div_h vérifiant

$$\operatorname{div}_h \mathbf{curl}_h = 0. \quad (2.40)$$

Il est alors clair que le système (2.39) préservera une loi de Gauss discrète de la forme

$$\operatorname{div}_h \mathbf{E}_h = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_h \quad (2.41)$$

dès lors que les sources discrètes vérifient l'équation de continuité associée

$$\partial_t \rho_h + \operatorname{div}_h \mathbf{J}_h = 0. \quad (2.42)$$

Un raisonnement similaire s'applique pour la loi de Gauss magnétique. Il n'est toutefois pas certain que l'équation (2.41) soit suffisamment forte pour garantir la stabilité en temps long des solutions discrètes. Pour que cela soit le cas, il faut que (2.41) permette de déterminer la partie "discrètement irrotationnelle" du champ électrique, i.e., les champs dans $\ker \operatorname{curl}_h$, puisque leur croissance temporelle n'est pas contrôlée par l'équation d'évolution (2.39). L'équation (2.42) peut alors servir de critère pour identifier des opérateurs d'approximation des sources *compatibles* avec la discrétisation (2.39). Nous pouvons alors décomposer le dernier objectif de notre liste (2.26) de la façon suivante.

- (iii-a) dans un cadre abstrait, identifier certaines propriétés des opérateurs différentiels discrets et de l'approximation des sources qui garantissent une stabilité en temps long,
 - (iii-b) pour divers schémas (conformes ou non), identifier des opérateurs d'approximation des sources vérifiant ces critères,
 - (iii-c) étudier la mise en oeuvre numérique de ces approximations dans le cas où les sources sont données par un solveur particulière.
- (2.43)

Dans le cas particulier où les sources exactes sont connues, il est possible de réaliser une version simplifiée de notre programme qui ne fasse pas apparaître de divergence discrète. Pour le voir, on déduit de la suite exacte (2.4) et d'une propriété standard des opérateurs adjoints, voir p.ex. [30, Cor. 2.18], que $\ker(d^0)^* = (\operatorname{Im} d^0)^\perp = (d^0 V^0)^\perp = (\ker d^1)^\perp$ où l'exposant \perp désigne le complémentaire orthogonal dans l'espace de Hilbert naturel. Il s'en suit que

$$\ker \mathcal{D} = \mathbb{R}^\perp \times \ker(d^0)^* = (\ker(d^1)^*)^\perp \times (\ker d^1)^\perp = (\ker \mathcal{A})^\perp. \quad (2.44)$$

Ainsi, en l'absence de sources nous voyons que la loi de Gauss (2.8) contraint les solutions générales de l'équation d'évolution (2.6) à être orthogonales aux champs irrotationnels, ce qui correspond aux

modes réellement oscillants de l'opérateur linéaire \mathcal{A} . D'après son caractère anti-symétrique on peut en effet décomposer l'espace complet $\mathcal{W} = W^2 \times W^1$ sous la forme

$$\mathcal{W} = \ker \mathcal{A} \oplus (\ker \mathcal{A})^\perp \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \ker \mathcal{A} = \{U \in \mathcal{S} : \partial_t U = 0\} \\ (\ker \mathcal{A})^\perp = \text{Span}(\{U \in \mathcal{S} : \partial_t U = -i\omega U, \omega \neq 0\}) \end{cases} \quad (2.45)$$

où \mathcal{S} est l'ensemble des solutions du système homogène d'Ampère-Faraday (2.6).

Si la source est connue on peut considérer des schémas semi-discrets pour (2.6) de la forme

$$\partial_t U_h - \mathcal{A}_h U_h = -\Pi_h F \quad (2.46)$$

où $\mathcal{A}_h : \mathcal{V}_h \rightarrow \mathcal{V}_h$ est un opérateur anti-symétrique approchant \mathcal{A} sur un espace discret $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{W}$, qui pourra correspondre à (2.17) ou (2.33), et Π_h est un opérateur d'approximation sur \mathcal{V}_h qui converge vers l'identité lorsque $h \rightarrow 0$.

Dans [54] nous avons proposé un critère pour identifier des schémas de type (2.46) qui sont compatibles avec la contrainte orthogonale exprimée par les lois de Gauss, sans faire intervenir la version discrète elle-même de ces lois. En l'absence de sources, cette contrainte s'écrit $U \in (\ker \mathcal{A})^\perp$ et un analogue discret est $U_h \in (\ker \mathcal{A}_h)^\perp$, ce qui peut à nouveau s'interpréter comme l'absence de modes stationnaires relatifs à \mathcal{A}_h , suivant une décomposition de l'espace analogue à (2.45) pour cet opérateur anti-symétrique. En présence de sources, une extension naturelle de cette contrainte consiste à demander que lorsque la solution exacte ne contient pas de modes stationnaires pour \mathcal{A} , la solution approchée n'en contienne pas pour \mathcal{A}_h . On observe alors que cette contrainte sera satisfaite si l'opérateur Π_h vérifie

$$Z \in (\ker \mathcal{A})^\perp \quad \implies \quad \Pi_h Z \in (\ker \mathcal{A}_h)^\perp$$

ou de façon équivalente, \mathcal{A} étant anti-symétrique, fermé et à domaine dense, si $\Pi_h(\text{Im } \mathcal{A}) \subset \text{Im } \mathcal{A}_h$. Cette propriété peut essentiellement s'exprimer sous la forme d'un diagramme commutant.

Définition 2.1 ([54]) *Le schéma semi-discret (2.46) est dit **Gauss-compatible** sur un espace donné $\hat{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$ s'il existe un opérateur d'approximation auxiliaire $\hat{\Pi}_h : \hat{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{V}_h$ qui converge ponctuellement vers l'identité pour $h \rightarrow 0$, tel que*

$$\Pi_h \mathcal{A} = \mathcal{A}_h \hat{\Pi}_h \quad \text{sur } \hat{\mathcal{V}}, \quad (2.47)$$

où \mathcal{A} désigne l'opérateur d'évolution exact (2.5).

Typiquement, $\hat{\mathcal{V}}$ représente la régularité nécessaire à l'application des opérateurs d'approximation choisis. La relation (2.47) peut s'écrire sous la forme d'un diagramme commutant

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{V}} & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathcal{A}\hat{\mathcal{V}} \\ \hat{\Pi}_h \downarrow & & \downarrow \Pi_h \\ \mathcal{V}_h & \xrightarrow{\mathcal{A}_h} & \mathcal{V}_h \end{array} \quad (2.48)$$

qui entraîne rapidement une estimation d'erreur et des propriétés de stabilité en temps long.

Théorème 2.2 ([54], Th. 3.2) *Si le schéma semi-discret (2.46) est Gauss-compatible sur un espace $\hat{\mathcal{V}}$, alors la solution approchée vérifie*

$$\|(U_h - \hat{\Pi}_h U)(t)\| \leq \|(U_h - \hat{\Pi}_h U)(0)\| + \int_0^t \|(\Pi_h - \hat{\Pi}_h) \partial_t U(s)\| ds \quad (2.49)$$

pour toute solution $U \in \mathcal{C}^0([0, T]; \hat{\mathcal{V}})$ des équations de Maxwell temporelles (2.6).

Preuve. L'argument tient en quelques lignes et peut être donné ici. En appliquant l'opérateur Π_h au système de Maxwell (2.6) et en utilisant le diagramme commutant (2.47), on obtient

$$\partial_t \Pi_h U - \mathcal{A}_h \hat{\Pi}_h U = \Pi_h (\partial_t U - \mathcal{A}U) = -\Pi_h F = \partial_t U_h - \mathcal{A}_h U_h,$$

d'où l'on voit que $\hat{\Pi}_h U - U_h$ vérifie une équation d'évolution avec terme source $(\hat{\Pi}_h - \Pi_h)\partial_t U$,

$$\partial_t (\hat{\Pi}_h U - U_h) - \mathcal{A}_h (\hat{\Pi}_h U - U_h) = (\hat{\Pi}_h - \Pi_h)\partial_t U.$$

L'estimation (2.49) se déduit alors des propriétés de contraction du semi-groupe généré par \mathcal{A}_h . ■

On déduit immédiatement de cette estimation un résultat de stabilité en temps long, relatif aux solutions stationnaires.

Corollaire 2.2 (stabilité en temps long) *Si $\bar{U} = \bar{U}(0) \in \hat{\mathcal{V}}$ est une solution stationnaire de (2.6), alors $U_h := \hat{\Pi}_h \bar{U}$ est une solution stationnaire de (2.46). Plus important, l'estimation*

$$\|(U_h - \hat{\Pi}_h \bar{U})(t)\| \leq \|(U_h - \hat{\Pi}_h \bar{U})(0)\|, \quad t \geq 0$$

est valable pour toute donnée initiale $U_h(0) \in \mathcal{V}_h$.

Dans le cas général où l'on dispose seulement d'une source approchée F_h , il nous faut considérer un schéma semi-discret de la forme

$$\partial_t U_h - \mathcal{A}_h U_h = -F_h. \quad (2.50)$$

L'analyse précédente n'étant plus applicable, on revient au programme consistant à identifier des conditions suffisantes sous lesquelles une loi de Gauss discrète (2.41) permette de contrôler la croissance temporelle du champ E_h . On introduit alors la définition suivante dans laquelle les espaces V_h^l ne sont pas nécessairement ceux définis dans la suite (2.9), ni même des sous-espaces des V^l de (2.3).

Définition 2.3 ([52], Déf. 2.7 et 2.9) *On dira qu'une discrétisation en espace des équations de Maxwell (2.1) de la forme*

$$\begin{cases} \partial_t B_h + \operatorname{curl}_h \mathbf{E}_h = 0 \\ \partial_t \mathbf{E}_h - c^2 \operatorname{curl}_h B_h = -\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}_h \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \operatorname{curl}_h : V_h^1 \rightarrow V_h^2 \\ \mathbf{curl}_h = (\operatorname{curl}_h)^* : V_h^2 \rightarrow V_h^1 \end{cases} \quad (2.51)$$

(et des espaces V_h^l non nécessairement conformes) complétée par des lois de Gauss discrètes

$$\begin{cases} \operatorname{div}_h \mathbf{E}_h = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_h \\ f_\Omega B_h = f_\Omega B_h^0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \operatorname{div}_h : V_h^1 \rightarrow V_h^0 \\ f_\Omega : V_h^2 \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.52)$$

préserve la structure *si, avec $\mathbf{grad}_h := -(\operatorname{div}_h)^* : V_h^0 \rightarrow V_h^1$, on a les propriétés suivantes.*

— Suite exacte : la suite

$$V_h^0 \xrightarrow{\mathbf{grad}_h} V_h^1 \xrightarrow{\operatorname{curl}_h} V_h^2 \xrightarrow{f_\Omega} \mathbb{R} \quad (2.53)$$

est exacte au sens où $\mathbf{grad}_h V_h^0 = \ker \operatorname{curl}_h$ et $\operatorname{curl}_h V_h^1 = \ker(f_\Omega|_{V_h^2})$.

— Stabilité : les opérateurs apparaissant dans (2.53) vérifient des inégalités de Poincaré-Friedrichs

$$\begin{aligned} \|u\| &\leq c_P \|\mathbf{grad}_h u\|, & u &\in V_h^0 \cap (\ker \mathbf{grad}_h)^\perp \\ \|\mathbf{u}\| &\leq c_P \|\operatorname{curl}_h \mathbf{u}\|, & \mathbf{u} &\in V_h^1 \cap (\ker \operatorname{curl}_h)^\perp \\ \|u\| &\leq c_P \|f_\Omega u\|, & u &\in V_h^2 \cap (\ker f_\Omega)^\perp \end{aligned} \quad (2.54)$$

avec une constante c_P indépendante de h .

A nouveau, on notera ici la présence de l'injection canonique $\iota : \mathbb{R} \rightarrow L^2(\Omega)$ et de son adjoint f_Ω , dûs à la forme dégénérée de la loi de Gauss dans ce modèle 2D. En 3D, ces opérateurs devraient être respectivement remplacés par un gradient discret et une divergence discrète définie comme son adjoint, a priori différents de ceux apparaissant dans la définition ci-dessus.

Il est intéressant d'observer que les propriétés (2.53)-(2.54) peuvent également se formuler sur la suite discrète duale

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\iota} V_h^2 \xrightarrow{\mathbf{curl}_h} V_h^1 \xrightarrow{\text{div}_h} V_h^0.$$

D'autre part, la structure sous-jacente à cette définition apparaît peut-être plus clairement en reformulant ces propriétés sur les opérateurs composites

$$\mathcal{A}_h = c \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{curl}_h \\ \mathbf{curl}_h & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_h = \begin{pmatrix} f_\Omega & 0 \\ 0 & \text{div}_h \end{pmatrix}.$$

La propriété de suite exacte (2.53) revient alors à l'orthogonalité des noyaux, $\ker \mathcal{D}_h = (\ker \mathcal{A}_h)^\perp$, et les inégalités (2.54) reviennent à la stabilité des opérateurs composites,

$$\|Z\| \leq c_P \|\mathcal{D}_h Z\|, \quad Z \in (\ker \mathcal{D}_h)^\perp \quad \text{et} \quad \|Z\| \leq c_P \|\mathcal{A}_h Z\|, \quad Z \in (\ker \mathcal{A}_h)^\perp.$$

La définition 2.3 ayant précisé les critères de compatibilité recherchés pour les opérateurs différentiels discrets, on est en mesure d'utiliser l'équation de continuité discrète (2.42) comme un critère de compatibilité pour la source approchée. Suivant la terminologie usuelle [132], on introduit une nouvelle définition.

Définition 2.4 ([52], **Déf. 2.12**) *On dira qu'une discrétisation en espace des équations de Maxwell (2.1) de la forme (2.51)-(2.52) conserve la charge si elle préserve la structure au sens de la définition 2.3, et si les sources approchées vérifient l'équation de continuité discrète associée,*

$$\partial_t \rho_h + \text{div}_h \mathbf{J}_h = 0. \quad (2.55)$$

On est alors en mesure de démontrer deux types d'estimations : sous la seule hypothèse de conservation de la charge correspondant à la définition 2.4 (qui inclut la préservation de la structure), on dispose d'un résultat de *stabilité en temps long*, voir [52], Th. 2.14. Sous une hypothèse supplémentaire de diagramme commutant, on dispose également d'une estimation d'erreur faisant intervenir la précision des sources approchées.

Théorème 2.3 ([52], **Th. 2.15**) *Si le schéma semi-discret (2.51)-(2.52) conserve la charge au sens de la définition 2.4 et si l'opérateur d'évolution associé \mathcal{A}_h vérifie une relation de diagramme commutant (2.47) pour des opérateurs d'approximation Π_h et $\hat{\Pi}_h$, alors la solution $U_h = (cB_h, \mathbf{E}_h)^T$ de (2.51) vérifie les lois de Gauss discrètes (2.52) ainsi que l'estimation a priori*

$$\begin{aligned} \|(U_h - \Pi_h U)(t)\| \leq c_P & \left(\|\mathcal{A}_h(U_h^0 - \hat{\Pi}_h U^0)\| + \|F_h^0 - \Pi_h F^0\| + \|(R_h - \mathcal{D}_h \Pi_h U)(t)\| + \|(F_h - \Pi_h F)(t)\| \right. \\ & \left. + \|(\mathcal{A}_h(\Pi_h - \hat{\Pi}_h)U)(t)\| + \int_0^t \|\partial_t (\mathcal{A}_h(\Pi_h - \hat{\Pi}_h)U + (F_h - \Pi_h F))(s)\| ds \right) \end{aligned}$$

avec $R_h = (c f_\Omega B_h^0, \varepsilon_0^{-1} \rho_h)^T$ et $F_h = (0, \varepsilon_0^{-1} \mathbf{J}_h)^T$. Ici c_P est la constante de (2.54).

2.5 Application aux discrétisations conformes et Conga

Les résultats suivants montrent que le cadre abstrait développé dans la section précédente s'applique naturellement aux formulations mixtes conforme et Conga présentées dans les sections 2.2 et 2.3, à condition de bien choisir l'opérateur d'approximation des sources. Conformément au choix fait plus haut, on présente ici certains de nos résultats dans \mathbb{R}^2 , correspondant aux travaux présentés dans [53]. Le cas de \mathbb{R}^3 est traité dans l'article [54]. On suppose enfin que le domaine Ω ne possède pas ici de coins rentrants, de sorte que les solutions exactes peuvent être considérées régulières dans un premier temps, voir p.ex. [4, 5].

Théorème 2.4 *La discrétisation conforme (2.13) associée à une projection orthogonale du courant $\mathbf{J}_h = P_{V_h^1} \mathbf{J}$ caractérisée par (2.14) est Gauss-compatible sur l'espace produit $\hat{\mathcal{V}} = V_2^* \times (H^1(\Omega)^2 \cap V^1)$.*

L'énoncé complet de ce théorème, donné dans [53], précise les opérateurs d'approximation mis en jeu dans la définition 2.1. Ceux-ci s'écrivent

$$\Pi_h = \begin{pmatrix} P_{V_h^2} & 0 \\ 0 & P_{V_h^1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\Pi}_h = \begin{pmatrix} P_{V_h^2} & 0 \\ 0 & \pi_h^{\text{curl}} \end{pmatrix}$$

où π_h^{curl} désigne l'interpolation canonique des éléments d'arête. Les propriétés d'approximation de ces opérateurs permettent d'explicitier l'estimation a priori (2.49), sous la forme

$$\begin{aligned} \|(B - B_h)(t)\| + \|(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h)(t)\| &\lesssim \|B_h(0) - P_{V_h^2} B(0)\| + \|\mathbf{E}_h(0) - \pi_h^{\text{curl}} \mathbf{E}(0)\| \\ &\quad + h^m \left(|B(0)|_m + \int_0^t |\partial_t B(s)|_m ds \right) + h^{m'} \left(|\mathbf{E}(0)|_{m'} + \int_0^t |\partial_t \mathbf{E}(s)|_{m'} ds \right) \end{aligned}$$

pour $0 \leq m \leq p$, $1 \leq m' \leq p$, et avec une constante indépendante de h et t .

Théorème 2.5 *La discrétisation Conga (2.30) associée à un courant approché discontinu $\mathbf{J}_h \in \tilde{V}_h^1$ défini par les relations*

$$\langle \mathbf{J}_h, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \langle \mathbf{J}, \mathcal{P}_h^1 \boldsymbol{\varphi} \rangle, \quad \boldsymbol{\varphi} \in \tilde{V}_h^1, \quad (2.56)$$

i.e., $\mathbf{J}_h = (\mathcal{P}_h^1)^ \mathbf{J}$, est Gauss-compatible sur l'espace produit $\hat{\mathcal{V}} := V_2^* \times (H^1(\Omega)^2 \cap V^1)$.*

On observera que le calcul du courant approché est ici *local*, en effet la projection \mathcal{P}_h^1 l'est, ainsi que l'inversion de la matrice de masse dans l'espace \tilde{V}_h^1 . L'énoncé complet de ce théorème donné dans [53] précise les opérateurs d'approximation mis en jeu dans la définition 2.1. Ils s'écrivent

$$\Pi_h = \begin{pmatrix} P_{V_h^2} & 0 \\ 0 & (\mathcal{P}_h^1)^* \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\Pi}_h = \begin{pmatrix} P_{V_h^2} & 0 \\ 0 & \pi_h^{\text{curl}} \end{pmatrix}$$

où π_h^{curl} désigne à nouveau l'interpolation canonique des éléments d'arête. Les propriétés d'approximation de ces opérateurs permettent d'explicitier l'estimation a priori (2.49), sous la forme

$$\begin{aligned} \|(B - B_h)(t)\| + \|(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h)(t)\| &\lesssim \|B_h(0) - P_{V_h^2} B(0)\| + \|\mathbf{E}_h(0) - \pi_h^{\text{curl}} \mathbf{E}(0)\| \\ &\quad + h^m \left(|B(0)|_m + \int_0^t |\partial_t B(s)|_m ds \right) + h^{m'} \left(|\mathbf{E}(0)|_{m'} + \int_0^t (|\partial_t \mathbf{E}(s)|_{m'}) ds \right) \end{aligned}$$

pour $0 \leq m \leq p$, $1 \leq m' \leq p - 1$, et avec une constante indépendante de h et t .

Notre analyse unifiée permet ici de retrouver des ordres de convergence connus pour les schémas par éléments finis conformes (voir p.ex. [107]) ou discontinus ([80]). En revanche, les propriétés de stabilité en temps long garanties par ces estimations n'étaient jusqu'à présent établies que pour des méthodes conformes.

Lemme 2.5 *La discrétisation conforme (2.13) associée aux lois de Gauss discrètes (2.52) définies par*

$$(\operatorname{div}_h)^* := -\mathbf{grad} : V_h^0 \rightarrow V_h^1 \quad (2.57)$$

voir (2.9), préserve la structure au sens de la définition 2.3.

Lemme 2.6 *La discrétisation Conga (2.30) associée aux lois de Gauss discrètes (2.52) définies par*

$$\begin{cases} \mathbf{grad}_h : (V_h^0 \times \tilde{V}_h^1) \ni (\phi, \tilde{\mathbf{u}}) \mapsto \mathbf{grad} \phi + (I - \mathcal{P}_h^1) \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{V}_h^1 \\ \operatorname{div}_h := -(\mathbf{grad}_h)^* : \tilde{V}_h^1 \rightarrow (V_h^0 \times \tilde{V}_h^1) \end{cases} \quad (2.58)$$

voir (2.9), préserve la structure au sens de la définition 2.3.

On observe qu'avec l'opérateur (2.57) apparaissant dans l'analyse du cas conforme, la loi de Gauss discrète (2.52) prend la forme faible standard des éléments finis

$$-\langle \mathbf{E}_h(t), \mathbf{grad} \phi \rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} \langle \rho_h(t), \phi \rangle, \quad \phi \in V_h^0. \quad (2.59)$$

Sa forme est moins standard dans le cas de la discrétisation Conga : avec (2.58), elle prend la forme

$$-\langle \mathbf{E}_h(t), \mathbf{grad} \phi + (I - \mathcal{P}_h^1) \tilde{\mathbf{u}} \rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} \langle \rho_h(t), \phi \rangle \quad (\phi, \tilde{\mathbf{u}}) \in V_h^0 \times \tilde{V}_h^1. \quad (2.60)$$

2.6 Application au couplage avec une méthode particulière

On considère maintenant le cas où les sources sont données par une méthode particulière sous la forme de N (macro) particules de positions $\mathbf{x}_\kappa(t)$ et vitesses $\mathbf{v}_\kappa(t) = \mathbf{x}'_\kappa(t)$, $\kappa = 1, \dots, N$, poussées en avant le long de courbes intégrales données. Associant à chaque macro-particule une charge q_κ et une fonction de forme ζ_ε de rayon $\varepsilon \geq 0$ (soit la mesure de Dirac si $\varepsilon = 0$, soit une régularisation si $\varepsilon > 0$, voir p.ex. [96]), on définit les densités de charge et de courant correspondantes comme

$$\rho_N(t, \mathbf{x}) := \sum_{\kappa=1}^N q_\kappa \zeta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\kappa(t)) \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_N(t, \mathbf{x}) := \sum_{\kappa=1}^N q_\kappa \mathbf{v}_\kappa(t) \zeta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\kappa(t)). \quad (2.61)$$

Comme $\mathbf{v}_\kappa(t) = \mathbf{x}'_\kappa(t)$, on vérifie qu'elles satisfont une équation de continuité exacte $\partial_t \rho_N + \operatorname{div} \mathbf{J}_N = 0$, valable au sens faible dans le cas de particules ponctuelles.

Théorème 2.6 *Soit $\varepsilon > 0$. Les discrétisations conforme (2.13) et Conga (2.30), associées aux lois de Gauss discrètes (2.52) définies par les opérateurs respectifs (2.57) et (2.58), conservent la charge au sens de la définition 2.4 lorsque les sources discrètes sont définies à partir de (2.61) par*

$$\rho_h(t) := P_{V_h^0} \rho_N(t) \in V_h^0 \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_h(t) := P_{V_h^1} \mathbf{J}_N(t) \in V_h^1 \quad (2.62)$$

pour la discrétisation conforme (2.13), et

$$\rho_h(t) := P_{V_h^0} \rho_N(t) \in V_h^0 \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_h(t) := (\mathcal{P}_h^1)^* \mathbf{J}_N(t) \in \tilde{V}_h^1 \quad (2.63)$$

pour la discrétisation Conga (discontinue) (2.30).

Ici $P_{V_h^0}$ et $P_{V_h^1}$ étant les projections L^2 sur des espaces conformes dans H^1 et $H(\text{curl})$, leur application implique la résolution d'un système global, à la différence de l'approximation $(\mathcal{P}_h^1)^*$ dont l'application est locale à chaque maille comme on l'a constaté sur (2.56).

Dans l'article [49] nous avons proposé une implémentation d'ordre élevé de ces opérateurs appliqués à des particules régulières, dans le cadre de schémas discrétisant la suite duale (2.4), et vérifié leurs propriétés de stabilité.

Pour étendre ces résultats au cas de particules ponctuelles, il est agréable de considérer une discrétisation en temps des solveurs Maxwell. Avec un schéma explicite saute-mouton, par exemple, la méthode conforme (2.13) calcule des champs $(B_h^{n+1/2}, \mathbf{E}_h^n) \in V_h^2 \times V_h^1$ suivant

$$\begin{cases} B_h^{n+\frac{1}{2}} - B_h^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \text{curl } \mathbf{E}_h^n = 0 & \text{(dans } V_h^2) \\ \langle \mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n, \boldsymbol{\varphi} \rangle - c^2 \Delta t \langle B_h^{n+\frac{1}{2}}, \text{curl } \boldsymbol{\varphi} \rangle = -\frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \langle \mathbf{J}_h^{n+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{\varphi} \rangle & \boldsymbol{\varphi} \in V_h^1 \end{cases} \quad (2.64)$$

et la méthode Conga (2.30) calcule $(B_h^{n+1/2}, \mathbf{E}_h^n) \in V_h^2 \times \tilde{V}_h^1$ suivant

$$\begin{cases} B_h^{n+\frac{1}{2}} - B_h^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \text{curl } \mathcal{P}_h^1 \mathbf{E}_h^n = 0 & \text{(dans } V_h^2) \\ \langle \mathbf{E}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h^n, \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \rangle - c^2 \Delta t \langle B_h^{n+\frac{1}{2}}, \text{curl } \mathcal{P}_h^1 \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \rangle = -\frac{\Delta t}{\varepsilon_0} \langle \mathbf{J}_h^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \rangle & \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \tilde{V}_h^1. \end{cases} \quad (2.65)$$

On a montré dans [48] qu'un courant $\mathbf{J}_h^{n+1/2}$ obtenu par projection orthogonale dans l'espace conforme V_h^1 d'une moyenne temporelle du courant particulaire,

$$\langle \mathbf{J}_h^{n+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \left\langle \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{J}_N(\tau) \frac{d\tau}{\Delta t}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle = \sum_{\kappa=1}^N q_\kappa \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{v}_\kappa(\tau) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_\kappa(\tau)) \frac{d\tau}{\Delta t}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in V_h^1, \quad (2.66)$$

était bien défini et vérifiait l'équation de continuité discrète appropriée, i.e.,

$$\langle \mathbf{J}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{grad } \phi \rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} \left\langle \frac{1}{\Delta t} (\rho_h^{n+1} - \rho_h^n), \phi \right\rangle, \quad \phi \in V_h^0$$

où $\langle \rho_h^n, \phi \rangle = \langle \rho_N(t^n), \phi \rangle$. De même, un courant discontinu $\mathbf{J}_h^{n+1/2}$ obtenu par l'approximation $(\mathcal{P}_h^1)^*$,

$$\langle \mathbf{J}_h^{n+\frac{1}{2}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \rangle = \left\langle \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{J}_N(\tau) \frac{d\tau}{\Delta t}, \mathcal{P}_h^1 \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \right\rangle = \sum_{\kappa=1}^N q_\kappa \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{v}_\kappa(\tau) \cdot (\mathcal{P}_h^1 \tilde{\boldsymbol{\varphi}})(\mathbf{x}_\kappa(\tau)) \frac{d\tau}{\Delta t}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \tilde{V}_h^1 \quad (2.67)$$

permet de vérifier l'équation de continuité discrète (2.55) correspondant à la formulation Conga, i.e.,

$$\langle \mathbf{J}_h^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{grad } \phi + (I - \mathcal{P}_h^1) \tilde{\mathbf{u}} \rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} \left\langle \frac{1}{\Delta t} (\rho_h^{n+1} - \rho_h^n), \phi \right\rangle, \quad (\phi, \tilde{\mathbf{u}}) \in V_h^0 \times \tilde{V}_h^1.$$

On peut préciser que la raison pour laquelle les produits (2.66) et (2.67) sont bien définis (et stables par rapport aux trajectoires des particules) est que les fonctions test $H(\text{curl})$ ont des composantes tangentielles continues sur les arêtes du maillage. Enfin, lorsque les trajectoires sont polynômiales par morceaux, il est possible d'évaluer exactement ces produits en utilisant quelques points de Gauss par maille traversée, ce qui est également décrit en détails dans [48].

2.7 Lien avec les discrétisations DG standard

On peut montrer qu'en deux dimensions, la discrétisation Conga proposée dans la section 2.3 coïncide avec la formulation DG à flux centrés (non dissipatifs) étudiée par exemple dans [80]. L'argument est assez simple pour être reproduit ici. On utilise la notation classique ([35]) pour les sauts tangentiels et les moyennes de part et d'autre d'une arête e du maillage, i.e.

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e := (\mathbf{n}_e^- \times \mathbf{u}|_{T^-} + \mathbf{n}_e^+ \times \mathbf{u}|_{T^+})|_e \quad \text{et} \quad \{\!\!\{ \mathbf{u} \}\!\!\}_e := \frac{1}{2}(\mathbf{u}|_{T^-} + \mathbf{u}|_{T^+})|_e \quad \text{pour } e \in \mathcal{E}_h \setminus \mathcal{E}_h^B \quad (2.68)$$

s'il s'agit d'une arête intérieure (séparant deux mailles $T^\pm = T^\pm(e)$ de normales sortantes \mathbf{n}_e^\pm), et

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_e := (\mathbf{n}_e^- \times \mathbf{u}|_{T^-})|_e \quad \text{et} \quad \{\!\!\{ \mathbf{u} \}\!\!\}_e := (\mathbf{u}|_{T^-})|_e \quad \text{pour } e \in \mathcal{E}_h^B. \quad (2.69)$$

s'il s'agit d'une arête de bord (portée par une seule maille $T^- = T^-(e)$ de normale sortante \mathbf{n}_e^-). Pour un champ scalaire u les définitions sont formellement les mêmes, avec la convention qu'en 2D le produit $\mathbf{n} \times u$ désigne le vecteur $(n_y u, -n_x u)^t$. Les opérateurs rotationnels apparaissant dans les discrétisations DG par flux centrés s'écrivent alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \text{curl}_h^{\text{DG}} \mathbf{u}, v \rangle = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{u}, \mathbf{curl} v \rangle_T - \sum_{e \in \mathcal{E}_h \setminus \mathcal{E}_h^B} \langle \{\!\!\{ \mathbf{u} \}\!\!\}, \llbracket v \rrbracket \rangle_e \\ \langle \mathbf{curl}_h^{\text{DG}} v, \mathbf{u} \rangle = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle v, \mathbf{curl} \mathbf{u} \rangle_T - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \langle \{\!\!\{ v \}\!\!\}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \rangle_e \end{array} \right. \quad \text{pour } \mathbf{u} \in \tilde{V}_h^1, v \in V_h^2. \quad (2.70)$$

En utilisant le fait que la projection conforme \mathcal{P}_h^1 moyenne les degrés de liberté d'arêtes de l'espace de Nédélec (2.11), on calcule alors

$$\begin{aligned} \langle \text{curl} \mathcal{P}_h^1 \mathbf{u}, v \rangle &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\langle \mathcal{P}_h^1 \mathbf{u}, \mathbf{curl} v \rangle_T + \langle \mathbf{n} \times \mathcal{P}_h^1 \mathbf{u}, v \rangle_{\partial T}) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\langle \mathbf{u}, \mathbf{curl} v \rangle_T + \langle \mathbf{n} \times \{\!\!\{ \mathbf{u} \}\!\!\}, v \rangle_{\partial T \setminus \partial \Omega}) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{u}, \mathbf{curl} v \rangle_T - \sum_{e \in \mathcal{E}_h \setminus \mathcal{E}_h^B} \langle \{\!\!\{ \mathbf{u} \}\!\!\}, \llbracket v \rrbracket \rangle_e \\ &= \langle \text{curl}_h^{\text{DG}} \mathbf{u}, v \rangle \end{aligned}$$

d'où l'on déduit l'équivalence annoncée, i.e., $\text{curl}_h^{\text{DG}} = \text{curl} \mathcal{P}_h^1$ sur \tilde{V}_h^1 . Un calcul élémentaire à base de formules de Green permettant de vérifier la dualité $\mathbf{curl}_h^{\text{DG}} = (\text{curl}_h^{\text{DG}})^*$, notre analyse établit la correction spectrale de la discrétisation basée sur les opérateurs DG par flux centrés en 2D (2.70), observée numériquement [89] mais qui ne semblait pas démontrée jusqu'à présent.

D'autre part, qu'on soit en 2D ou en 3D, il est possible de voir l'approximation compatible du courant (2.63), $\mathbf{J}_h = (\mathcal{P}_h^1)^* \mathbf{J}_N$, comme une correction locale de la projection standard

$$\mathbf{J}_h^{\text{nc}} = P_{\tilde{V}_h^1} \mathbf{J}_N$$

implémentée habituellement dans les schémas discontinus. L'exposant "nc" signifie ici "non-compatible" dans la mesure où cette approximation ne vérifie a priori ni les hypothèses de Gauss-compatibilité, ni l'équation de continuité discrète établie dans le cas du schéma non-conforme.

En effet, en désignant pour chaque maille T par $\varphi_{T,\lambda}$, $\lambda \in \Lambda^1(T)$, une base des polynômes de \tilde{V}_h^1 sur T , et en observant que l'espace conforme V_h^1 est un sous-espace de \tilde{V}_h^1 par construction, on voit qu'il est possible de représenter la projection conforme \mathcal{P}_h^1 par une matrice \mathbf{P} vérifiant

$$\mathcal{P}_h^1 \varphi_{T,\lambda} = \sum_{T' \in \mathcal{T}_h, \gamma \in \Lambda^1(T')} \mathbf{P}_{(T,\lambda),(T',\gamma)} \varphi_{T',\gamma}.$$

Les moments "compatibles" $m_{T,\lambda}(\mathbf{J}_N) := \langle \mathbf{J}_N, \mathcal{P}_h^1 \varphi_{T,\lambda} \rangle$ (déterminant le courant (2.63)) sont alors aisément calculables à partir des moments standards (non-compatibles) $m_{T,\lambda}^{\text{nc}}(\mathbf{J}_N) := \langle \mathbf{J}_N, \varphi_{T,\lambda} \rangle$, via les formules locales

$$m_{T,\lambda}(\mathbf{J}_N) = \sum_{T',\gamma} \mathbf{P}_{(T,\lambda),(T',\gamma)} m_{T',\gamma}^{\text{nc}}(\mathbf{J}_N). \quad (2.71)$$

En particulier, les vecteurs \mathbf{J} et \mathbf{J}^{nc} contenant les coefficients des courants discontinus \mathbf{J}_h et \mathbf{J}_h^{nc} vérifient la relation

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{M} \mathbf{J}^{\text{nc}}$$

où \mathbf{M} représente la matrice de masse (diagonale par blocs) associée à cette base de \tilde{V}_h^1 . Ces corrections sont donc locales, de plus leur calcul est élémentaire : si les bases locales $\varphi_{T,\lambda}$ sont définies par restrictions des bases duales des degrés de liberté d'arête, les coefficients non nuls de la matrice \mathbf{P} valent simplement $\frac{1}{2}$ pour les degrés de liberté d'arêtes, et 1 pour les degrés de liberté intérieurs [[52]].

Chapitre 3

Etude théorique et numérique de quelques modèles réduits

Liste de publications

Le contenu de ce chapitre s'appuie sur les travaux suivants :

- [[8]] M. Badsì, M. Campos Pinto and B. Desprès, A minimization formulation of a bi-kinetic sheath, *Kinetic and related models* 9, 2016
- [[70]] F. Da Silva, M. Campos Pinto, B. Desprès and S. Heurax, Stable explicit coupling of the Yee scheme with a linear current model in fluctuating magnetized plasmas, *Journal of Computational Physics* 295, 2015
- [[90]] S. Heurax, F. da Silva, T. Ribeiro, B. Desprès, M. Campos Pinto, J. Jacquot, E. Faudot, S. Wengerowsky, L. Colas and L. Lu, Simulation as a tool to improve wave heating in fusion plasmas, *Journal of Plasma Physics* 81, 2015
- [[47]] M. Campos Pinto and B. Desprès, Constructive formulations of resonant Maxwell's equations, (hal-01278860), under revision for SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2016

3.1 Gaines cinétiques dans un plasma électrostatique

Les gaines de plasma sont des phénomènes d'auto-régulation au cours desquels une paroi absorbante voit son potentiel électrique varier de façon à équilibrer les flux d'électrons et d'ions provenant du plasma. En général cette variation est négative, l'équilibre étant assuré par une accélération des ions (positifs) et un ralentissement des électrons. En effet, la grande légèreté relative de ces derniers fait que dans un plasma globalement neutre en équilibre thermique, dans lequel on supposera que les densités des particules chargées sont maxwelliennes dans l'espace des phases,

$$f_s(x, v) = \left(\frac{m_s}{2\pi k_B T} \right)^{d/2} \exp \left(-\frac{m_s v^2}{2k_B T} \right), \quad s = i \text{ ou } e,$$

les électrons possèdent une vitesse caractéristique $v_e^* = \left(\frac{k_B T}{m_e} \right)^{1/2}$ supérieure à celle des ions, comme l'illustre la figure 3.1. Le flux de charges négatives quittant le plasma ne pouvant rester longtemps supérieur à celui des charges positives, il faut qu'un mécanisme d'auto-régulation se mette en place pour

équilibrer ces flux. En pratique, ce mécanisme se manifeste sous la forme d'une chute du potentiel sur la paroi et de la mise en place d'un champ électrique dirigé vers la paroi. Sur cette couche limite dont l'épaisseur ne dépasse pas quelques longueurs de Debye (la distance caractéristique des phénomènes d'écrantage des charges dans le plasma), on observe alors que le plasma se charge positivement, comme on peut l'attendre au regard de la loi de Gauss.

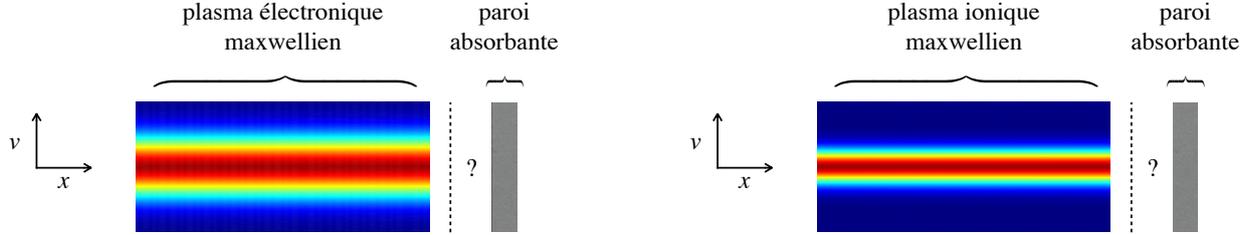


FIGURE 3.1 – Allure des densités électronique et ionique dans l'espace des phases (x, v) pour un plasma globalement neutre et maxwellien, à distance d'une paroi absorbante située sur la droite. L'échelle en vitesse est ici arbitraire, mais la même pour les deux espèces. Plus légers, les électrons ont une mobilité supérieure aux ions de sorte qu'en l'absence de phénomène d'auto-régulation aux parois une charge positive se développerait rapidement à l'intérieur du plasma. La gaine désigne la zone proche de la paroi dans laquelle le plasma perd son caractère neutre et homogène, de façon à équilibrer les flux de charges sortantes.

L'analyse classique fait apparaître une propriété importante suivant laquelle, dans un modèle simplifié monocinétique, les ions doivent pénétrer dans la gaine avec une vitesse u_i supérieure ou égale à leur vitesse caractéristique,

$$u_i \geq v_i^* = \left(\frac{k_B T}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

de façon cohérente avec le rôle régulateur de la gaine décrit plus haut. Cette propriété est connue sous le nom de critère de Bohm[58], et il en existe une version cinétique [120, 126], selon laquelle la distribution en vitesse des ions entrant dans la gaine doit vérifier l'inégalité

$$\frac{\int_0^\infty v^{-2} f_i(v) dv}{\int_0^\infty f_i(v) dv} \leq \frac{1}{(v_i^*)^2}. \quad (3.2)$$

Dans le cadre de la thèse de Mehdi Badsì [7], dirigée par Bruno Després et moi-même, nous avons proposé [8] un modèle cinétique uni-dimensionnel capable de reproduire les principaux traits de ce phénomène, notamment dans le but de

- préciser le rôle (dans ce modèle) des critères de Bohm fluide (3.1) et cinétique (3.2),
- déterminer une caractérisation simple du potentiel "flottant" à la paroi.

En effet, ces questions n'avaient jusqu'à présent pas reçu de réponses entièrement satisfaisantes à nos yeux, malgré plusieurs travaux existant dans la littérature mathématique, voir p.ex. [102, 79] et les travaux récents [83, 84] portant sur une modélisation fluide du plasma au voisinage de la paroi.

Dans notre modèle, les densités ioniques et électroniques sont des solutions stationnaires d'équations de Vlasov écrites dans un domaine adimensionné $[0, 1] \times \mathbb{R}$, les bornes $x = 0$ et $x = 1$ représentant respectivement un point à l'intérieur du plasma et la paroi absorbante. Désignant par $\mu = m_e/m_i < 1$

la masse relative des électrons, elles prennent la forme

$$\begin{cases} v\partial_x f_i - \phi'(x)\partial_v f_i = 0 \\ v\partial_x f_e + \frac{1}{\mu}\phi'(x)\partial_v f_e = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

et sont couplées à une équation de Poisson déterminant le potentiel électrostatique ϕ ,

$$-\varepsilon^2\phi''(x) = \int (f_i + f_e) dv. \quad (3.4)$$

Ici $\varepsilon < 1$ représente la longueur de Debye relative au domaine considéré, sa valeur devant caractériser la taille de la couche limite au voisinage de $x = 1$. On ajoute à ces équations une contrainte de flux neutre

$$\int v(f_i + f_e) dv = 0 \quad (3.5)$$

qu'on pourra voir comme une conséquence directe de l'équation d'Ampère en régime stationnaire, et une condition de neutralité en $x = 0$, exprimant le fait que ce point n'est pas dans la gaine,

$$\int (f_i + f_e)(x = 0) dv = 0. \quad (3.6)$$

A ce système on ajoute des conditions aux bords : pour le potentiel, des conditions de type Dirichlet

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(1) = \phi_w \quad (3.7)$$

où la valeur en 0 est arbitraire et où ϕ_w désigne le potentiel à la paroi. Devant résulter du phénomène d'auto-régulation, sa valeur est une inconnue du problème. Enfin, on spécifie des conditions entrantes pour les densités ioniques et électroniques,

$$\begin{cases} f_i(0, v) = f_i^{\text{in}}(v), & v > 0 \\ f_i(1, v) = 0, & v < 0 \\ f_e(0, v) = f_e^{\text{in}}(v) := n_0\sqrt{\mu}\exp\left(-\frac{\mu v^2}{2}\right), & v > 0 \\ f_e(1, v) = \alpha f_e(1, -v), & v < 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Ici $0 \leq \alpha < 1$ est un paramètre de ré-émission des électrons à la paroi (qu'on peut supposer nul dans une première analyse), et n_0 est une densité de référence liée à la quantité totale d'électrons entrant dans la gaine. La forme choisie pour la distribution entrante f_e^{in} correspond à l'hypothèse classique d'une distribution maxwellienne pour des électrons situés loin des parois. Enfin, nous ne spécifions pas pour l'instant la fonction f_i^{in} décrivant la distribution en vitesse des ions entrant dans la gaine, notamment pour pouvoir dégager des critères sur cette distribution. Les questions qu'on se pose sont en effet les suivantes :

- peut-on caractériser le potentiel au mur ϕ_w d'une façon qui permette de le calculer à partir des paramètres physiques μ , ε et α ?
- peut-on identifier des conditions sur f_i^{in} telles qu'il existe une solution non triviale ($\phi \neq 0$) au problème (3.3)-(3.8) ci-dessus ?

Pour répondre à ces questions nous avons commencé par supposer connu un potentiel ϕ strictement décroissant, de façon à pouvoir exprimer la valeur des densités f_i et f_e par une méthode des

caractéristiques consistant à calculer $f_i(x, v) = f_i^{\text{in}}(\hat{v}_i(x, v))$ et $f_e(x, v) = f_e^{\text{in}}(\hat{v}_e(x, v))$, où $\hat{v}_i(x, v)$ et $\hat{v}_e(x, v)$ sont des vitesses à l'origine reliés à (x, v) par des trajectoires caractéristiques solutions de

$$\begin{cases} v_i'(t) = -\phi'(x_i(t)) \\ x_i'(t) = v_i(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_e'(t) = \frac{1}{\mu}\phi'(x_e(t)) \\ x_e'(t) = v_e(t). \end{cases}$$

En utilisant le fait que ces trajectoires possèdent les invariants $\frac{1}{2}v_e^2 - \frac{1}{\mu}\phi(x_e)$ et $\frac{1}{2}v_i^2 + \phi(x_i)$, on obtient

$$f_i(x, v) = \begin{cases} f_i^{\text{in}}(\sqrt{v^2 + 2\phi(x)}) & \text{si } v \geq \sqrt{-2\phi(x)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$f_e(x, v) = \begin{cases} f_e^{\text{in}}(\sqrt{v^2 - \frac{2}{\mu}\phi(x)}) & \text{si } v \geq -\sqrt{\frac{2}{\mu}(\phi(x) - \phi_w)} \\ \alpha f_e^{\text{in}}(\sqrt{v^2 - \frac{2}{\mu}\phi(x)}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On déduit de ces expressions la forme explicite des densités macroscopiques $n_s(x) = \int_{\mathbb{R}} f_s(x, v) dv$, ainsi que des flux $\gamma_s(x) = \int_{\mathbb{R}} v f_s(x, v) dv = \gamma_s(0)$. Les contraintes (3.5) et (3.6) exprimant la neutralité des flux et de la charge en $x = 0$ nous conduisent alors à deux relations scalaires faisant intervenir f_i^{in} , n_0 et ϕ_w , mais pas la fonction ϕ elle-même :

$$\begin{cases} \int_0^\infty v f_i^{\text{in}}(v) dv = n_0 \frac{1 - \alpha}{\sqrt{\mu}} e^{\phi_w} \\ \int_0^\infty f_i^{\text{in}}(v) dv = n_0 \left(\sqrt{2\pi} - (1 - \alpha) \int_{\sqrt{-2\phi_w}}^\infty e^{-\frac{v^2}{2}} dv \right). \end{cases} \quad (3.9)$$

On a alors le résultat suivant.

Théorème 3.1 *Sous la condition nécessaire et suffisante*

$$\frac{\int_0^\infty v f_i^{\text{in}}(v) dv}{\int_0^\infty f_i^{\text{in}}(v) dv} < \sqrt{\frac{2}{\pi\mu} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}}, \quad (3.10)$$

le système (3.9) possède une unique solution $(n_0, \phi_w) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*$.

En particulier, la valeur du potentiel au mur est définie de façon unique par une relation implicite de la forme $a(\phi_w) = b$ avec a strictement croissante, de sorte qu'elle peut être calculée à partir des paramètres physiques α , μ , et de f_i^{in} la distribution en vitesse des ions entrant.

Le potentiel au mur étant ainsi déterminé, le système (3.3)-(3.8) peut se mettre sous la forme d'une équation de Poisson non-linéaire

$$-\varepsilon^2 \phi''(x) = -\mathcal{U}'(\phi(x))$$

avec $\mathcal{U}(\psi) := \int_0^\infty v \sqrt{v^2 - 2\psi} f_i^{\text{in}}(v) dv + n_0 (\sqrt{2\pi} e^\psi - (1 - \alpha) \int_{\sqrt{-2\phi_w}}^\infty v \sqrt{v^2 + 2\psi} e^{-\frac{v^2}{2}} dv)$ et les conditions au bord (3.7). L'étude de cette équation peut alors se faire par une approche variationnelle où l'on cherche les minimiseurs de la fonctionnelle

$$J_\varepsilon(\phi) := \int_0^1 \varepsilon^2 \frac{|\phi'(x)|^2}{2} + \mathcal{U}(\phi(x)) dx. \quad (3.11)$$

On prouve alors le résultat suivant.

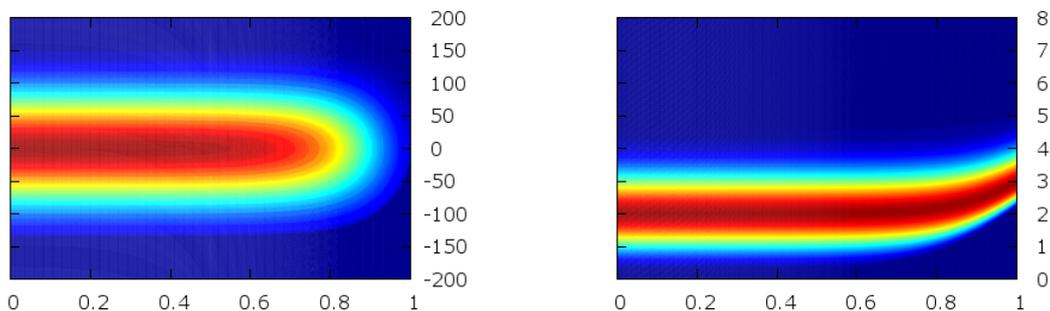


FIGURE 3.2 – Résultats numériques obtenus par Mehdi Badsı : distributions électronique et ionique au voisinage de d’une paroi parfaitement absorbante ($\alpha = 0$) située en $x = 1$, pour une longueur de Debye (normalisée) $\varepsilon = 0.1$. La différence des échelles en vitesse traduit la grande mobilité relative des électrons, et on observe que dans la couche limite les électrons sont bien repoussés et les ions accélérés.

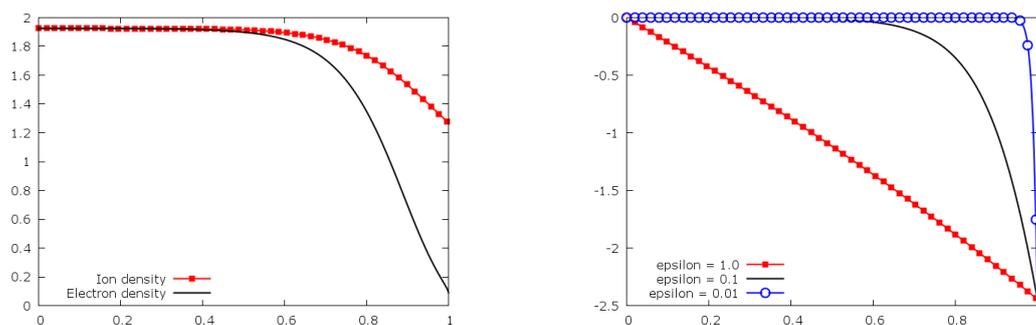


FIGURE 3.3 – Résultats numériques obtenus par Mehdi Badsı : à gauche, les densités macroscopiques des ions et des électrons correspondant aux mêmes paramètres que dans la figure 3.2. A droite, plusieurs potentiels électrostatique correspondant à différentes valeurs du paramètre ε représentant la longueur de Debye dans ce modèle adimensionné.

Théorème 3.2 Si la distribution d’ions entrant f_i^{in} vérifie les conditions (3.10) et

$$\frac{\int_0^\infty v^{-2} f_i^{\text{in}}(v) dv}{\int_0^\infty f_i^{\text{in}}(v) dv} < \frac{\left(\sqrt{2\pi} + (1 - \alpha) \int_{\sqrt{-2\phi_w}}^\infty v^{-2} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \right)}{\left(\sqrt{2\pi} - (1 - \alpha) \int_{\sqrt{-2\phi_w}}^\infty e^{-\frac{v^2}{2}} dv \right)}, \quad (3.12)$$

alors le système (3.3)-(3.8) possède une unique solution f_i, f_e, ϕ .

Le membre de droite de (3.12) étant supérieur à 1, nous constatons que cette condition est plus faible que la condition classique (3.2), en raison de l’adimensionnement qui entraîne ici $v_i^* = 1$. Cette solution présente les traits caractéristiques d’une couche limite au voisinage de $x = 1$, et reproduit les principaux phénomènes physiques d’une gaine électrostatique tels que nous les avons décrits plus haut. Les simulations numériques obtenues par Mehdi Badsı [7] à l’aide d’une méthode de gradient, obtenue en discrétisant le problème de minimisation de la fonctionnelle (3.11), valident ces conclusions d’un point de vue quantitatif. Nous en reproduisons certains dans les figures 3.2 et 3.3.

3.2 Propagation d'ondes par FDTD dans un plasma magnétisé

La réflectométrie est une technique consistant à propager des ondes électromagnétiques à hautes fréquences (~ 35 GHz) dans un plasma et à en détecter la partie réfléchie, afin d'en déduire des cartes de densité du plasma ainsi sondé (voir figure 3.4).

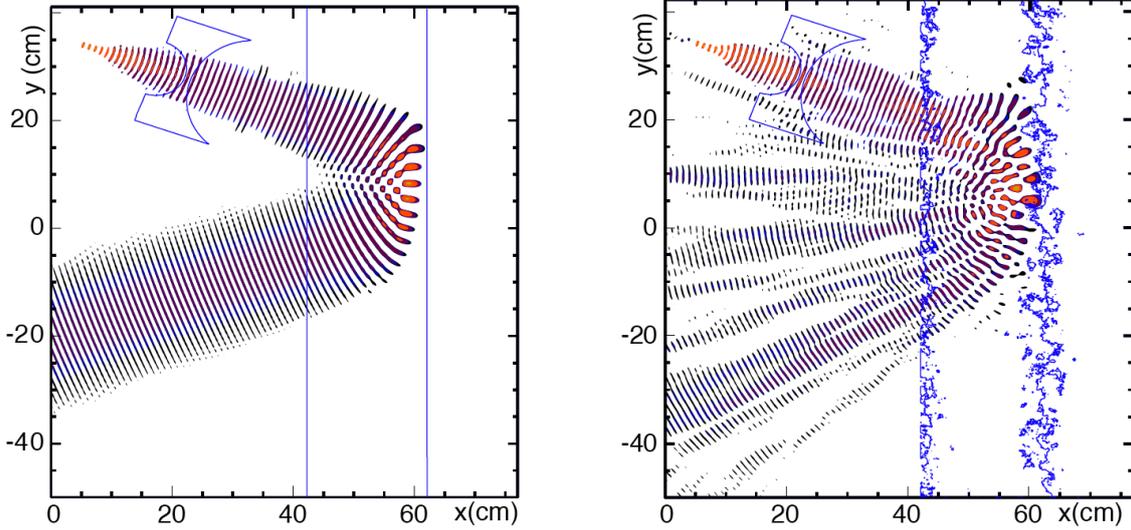


FIGURE 3.4 – Allure d'une onde électromagnétique émise par une antenne et réfléchi par un plasma électronique dont la densité est indiquée par ses lignes de niveau en bleu. Sur la figure de gauche la densité de plasma est une fonction régulière croissante en x , sur celle de droite elle est marquée par de fortes oscillations caractéristiques des plasmas turbulents présents dans les tokamaks.

Pour en réaliser des simulations numériques en présence d'un champ magnétique intense, les physiciens utilisent un modèle simplifié dans lequel on se donne

- la partie dominante B_0 du champ magnétique, stationnaire et souvent constante,
- la densité électronique du plasma $N_e(x)$, considérée ici comme stationnaire sur la durée de la simulation.

Les inconnues étant le champ électromagnétique variable (E, H) et la densité de courant électronique J induite par le déplacement des charges, on considère alors le problème linéarisé

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \partial_t E = \nabla \wedge H - J \\ \mu_0 \partial_t H = -\nabla \wedge E \\ \partial_t J = \varepsilon_0 \omega_p^2 E + \omega_c b \wedge J \end{cases} \quad (3.13)$$

où $\omega_p(\mathbf{x}) := \sqrt{\frac{q_e^2 N_e(\mathbf{x})}{m \varepsilon_0}}$, $\omega_c(\mathbf{x}) := \frac{q_e |B_0(\mathbf{x})|}{m_e}$ et $b(\mathbf{x}) := -\frac{B_0(\mathbf{x})}{|B_0(\mathbf{x})|}$ désignent respectivement la pulsation plasma, la pulsation cyclotronique et le vecteur unitaire porteur du champ magnétique dominant.

L'approche standard [137] pour discrétiser ces équations consiste à partir du schéma FDTD (Finite Differences Time Domain) proposé par Yee [138] pour les équations de Maxwell dans le vide ($J = 0$). Le domaine de calcul étant divisé en cubes réguliers de taille h , les composantes x , y et z des champs E et H sont discrétisées sur des grilles décalées comme représenté figure 3.5, de façon à pouvoir approcher les différentes dérivées mises en jeu dans le rotationnel par des différences finies centrées. Le schéma

de Yee prend alors la forme

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{\Delta t}(E^{n+1} - E^n) = RH^{n+\frac{1}{2}} \\ \frac{\mu_0}{\Delta t}(H^{n+\frac{1}{2}} - H^{n-\frac{1}{2}}) = -R^t E^n \end{cases} \quad (3.14)$$

où R est la matrice représentant l'approximation du rotationnel par différences finies centrées sur les faces, et R^t sa transposée, correspondant aux différences finies centrées sur les arêtes. On note

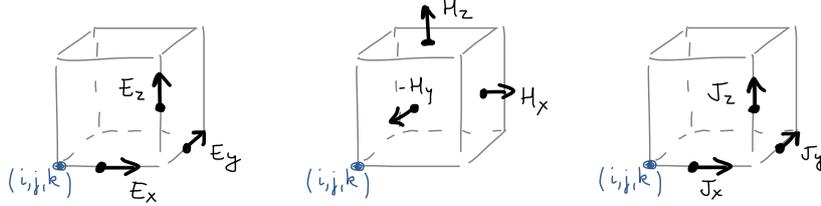


FIGURE 3.5 – Localisation des noeuds pour la discrétisation des composantes des champs E et H (à gauche et au centre) dans le schéma de Yee sur grilles décalées. À droite, localisation des noeuds utilisés pour la densité de courant J dans les simulations de réflectométrie.

que la discrétisation en temps est également décalée, de façon à approcher les dérivées en temps par des différences finies également centrées. Ce choix a l'avantage de préserver exactement une pseudo-énergie au cours du temps, à savoir la quantité $\tilde{\mathcal{E}}^n := \mathcal{E}^n - \Delta t \langle E^n, RH^{n-1/2} \rangle_h$ où $\mathcal{E}^n := \varepsilon_0 \|E^n\|_h^2 + \mu_0 \|H^{n-1/2}\|_h^2$ est l'énergie quadratique de la solution discrète. En observant que $|\langle E^n, RH^{n-1/2} \rangle| \leq \frac{c}{2} \|R\|_h \mathcal{E}^n$ entraîne $\mathcal{E}^n (1 - \frac{c\Delta t}{2} \|R\|_h) \leq \tilde{\mathcal{E}}^n$, on déduit de cette conservation exacte que le schéma est stable en temps long dès lors que

$$c\Delta t < 2/\|R\|_h = h/\sqrt{3}, \quad (3.15)$$

abstraction faite du traitement des conditions aux bords.

Pour étendre ce schéma au cas d'un courant non nul, il est naturel de faire apparaître ce courant au second membre de la première équation (d'Ampère) dans (3.14). On discrétise donc les composantes de J sur les mêmes noeuds que celles de E , et aux instants demi-entiers. Ce choix entraîne une discrétisation de la troisième équation de (3.13) par une différence finie en temps centrée sur les instants entiers, ce qui donne lieu au schéma suivant

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{\Delta t}(E^{n+1} - E^n) = RH^{n+\frac{1}{2}} - J^{n+\frac{1}{2}} \\ \frac{\mu_0}{\Delta t}(H^{n+\frac{1}{2}} - H^{n-\frac{1}{2}}) = -R^t E^n \\ \frac{1}{\Delta t}(J^{n+\frac{1}{2}} - J^{n-\frac{1}{2}}) = \varepsilon_0 \omega_p^2 E^n + \omega_c b \wedge \frac{1}{2}(J^{n+\frac{1}{2}} + J^{n-\frac{1}{2}}). \end{cases} \quad (3.16)$$

Ici la troisième équation est implicite en $J^{n+\frac{1}{2}}$, mais on peut la rendre explicite de la façon suivante. En déduisant du fait que b est un vecteur unitaire la relation

$$(b \wedge)^3 = -(b \wedge), \quad (3.17)$$

on vérifie que $(I - \theta b \wedge)^{-1} = I + \frac{\theta}{1+\theta^2}(b \wedge) + \frac{\theta^2}{1+\theta^2}(b \wedge)^2$. L'équation implicite sur J , mise sous la forme $J^{n+\frac{1}{2}} = W^n + \theta b \wedge J^{n+\frac{1}{2}}$, peut alors se réécrire comme $J^{n+\frac{1}{2}} = (I + \frac{\theta}{1+\theta^2}(b \wedge) + \frac{\theta^2}{1+\theta^2}(b \wedge)^2)W^n$.

En principe, le schéma explicite résultant de cette approche est encore stable sous une condition CFL adéquate. En effet, l'analyse esquissée pour le schéma de Yee peut s'étendre au système (3.16),

en observant que la pseudo-énergie $\tilde{\mathcal{E}}^n := \mathcal{E}^n - \Delta t \langle E^n, (RH^{n-1/2} - J^{n-1/2}) \rangle_h$ est conservée de façon exacte, avec $\mathcal{E}^n := \varepsilon_0 \|E^n\|_h^2 + \mu_0 \|H^{n-1/2}\|_h^2 + \frac{1}{\varepsilon_0} \|\frac{J^{n-1/2}}{\omega_p}\|_h^2$ l'énergie quadratique de la solution discrète. Un argument algébrique basé sur la majoration $|\langle E^n, J^{n-1/2} \rangle| \leq \|\omega_p\|_{L^\infty} \|E^n\|_h \|J^{n-1/2}\|_h$ montre alors que le schéma (3.16) est stable sous la condition

$$\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{12c^2}{h^2} + \|\omega_p\|_{L^\infty}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 1.$$

Il est d'ailleurs possible d'améliorer cette condition : en discrétisant le courant aux instants entiers, on retrouve la condition de stabilité du schéma de Yee (3.15), qui a l'avantage de ne pas dépendre des valeurs maximales de la densité électronique.

Si cette approche peut sembler satisfaisante, elle souffre néanmoins d'une faiblesse qui finit par apparaître lorsque la densité électronique N_e présente de forts gradients (comme cela se produit dans des plasmas turbulents) et que les simulations sont très longues (de l'ordre de quelques milliers, voire dizaines de milliers d'itérations), sous la forme d'une croissance exponentielle des solutions numériques, caractéristiques d'une instabilité du schéma. L'origine de cette instabilité est alors à chercher dans le fait que la résolution formelle de l'équation implicite sur J n'est valide que lorsque le produit vectoriel *effectivement utilisé* dans le schéma (3.16) vérifie la relation (3.17).

En effet, l'utilisation de grilles décalées dans la discrétisation des composantes du champ J fait qu'il n'est pas possible d'utiliser le produit vectoriel exact (ponctuel) dans la troisième équation (3.16). Le choix communément fait consiste à utiliser une formule centrée pour approcher le produit vectoriel. Ainsi, on pose

$$\begin{aligned} (b \wedge_h J)_x|_{i+\frac{1}{2},j,k} &:= b_y \{J_z\}_{i+\frac{1}{2},j,k} - b_z \{J_y\}_{i+\frac{1}{2},j,k} \\ (b \wedge_h J)_y|_{i,j+\frac{1}{2},k} &:= b_z \{J_x\}_{i,j+\frac{1}{2},k} - b_x \{J_z\}_{i,j+\frac{1}{2},k} \\ (b \wedge_h J)_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}} &:= b_x \{J_y\}_{i,j,k+\frac{1}{2}} - b_y \{J_x\}_{i,j,k+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

où les accolades désignent des moyennes calculées sur les quatre noeuds voisins (représentés figure 3.6), par exemple $\{J_z\}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{4} (J_z|_{i,j,k-1/2} + J_z|_{i,j,k+1/2} + J_z|_{i+1,j,k-1/2} + J_z|_{i+1,j,k+1/2})$. C'est ce produit vectoriel qui est utilisé dans la version explicite du schéma (3.16). Le problème est alors que le produit (3.18) ne saurait satisfaire la relation clef (3.17), en effet sa portée augmente à chaque itération. En d'autres termes, la version explicite (et programmée) du schéma (3.16) n'est pas équivalente à sa version implicite sur laquelle porte l'analyse de stabilité. On comprend alors que des instabilités numériques puissent se déclencher pour ce schéma, et ceci d'autant plus vite que la densité N_e est plus turbulente.

Pour résoudre ce problème, on a proposé avec Bruno Després un nouveau schéma numérique dans lequel le produit vectoriel moyenné (3.18) était remplacé par un produit vectoriel *groupé*. Ayant choisi un motif $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{\pm 1\}^3$, on définit ce dernier par les relations

$$\begin{aligned} (b \wedge_h J)_x|_{i+\frac{\alpha}{2},j,k} &:= b_y J_z|_{i,j,k+\frac{\gamma}{2}} - b_z J_y|_{i,j+\frac{\beta}{2},k} \\ (b \wedge_h J)_y|_{i,j+\frac{\beta}{2},k} &:= b_z J_x|_{i+\frac{\alpha}{2},j,k} - b_x J_z|_{i,j,k+\frac{\gamma}{2}} \\ (b \wedge_h J)_z|_{i,j,k+\frac{\gamma}{2}} &:= b_x J_y|_{i,j+\frac{\beta}{2},k} - b_y J_x|_{i+\frac{\alpha}{2},j,k}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ce produit est bien local, au sens où la matrice de l'opérateur $J \rightarrow b \wedge_h J$ est diagonale par bloc (voir figure 3.6), et il vérifie bien la propriété clef (3.17). En particulier, le schéma explicite correspondant est cette fois équivalent à sa version implicite (3.16), et on s'attend à obtenir un schéma parfaitement stable sous une condition CLF appropriée. Cette approche a été mise en oeuvre dans un code développé par Filipe Da Silva (IST, Lisbonne) et Stéphane Heuraux (IJL, Nancy) [70, 90] et les résultats numériques

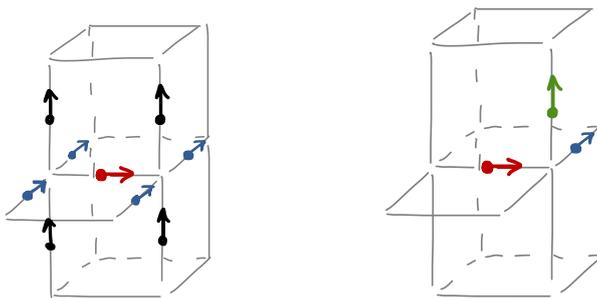


FIGURE 3.6 – Stencils (noeuds de J) utilisés pour la composante x du produit vectoriel $b \wedge_h J$ dans le cas du produit vectoriel moyenné (3.18) (à gauche) et dans le cas du produit vectoriel groupé (3.19) (à droite), correspondant au choix $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, 1, 1)$. Pour le produit groupé, le stencil est en fait le même dans le calcul des trois composantes, de sorte que la matrice de l'opérateur $J \rightarrow b \wedge_h J$ est diagonale par bloc.

ont permis de valider la stabilité de notre schéma sur des profils électroniques très turbulents et des simulations de l'ordre du million d'itérations, voir figure 3.7.

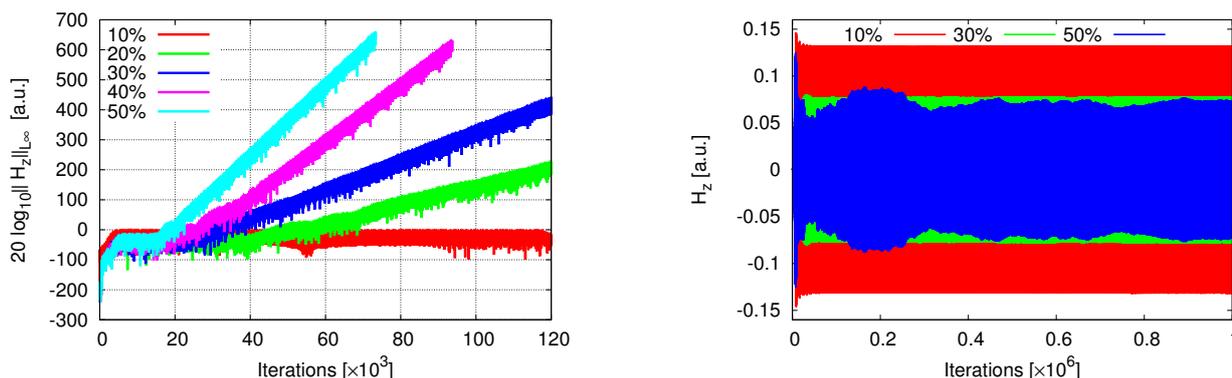


FIGURE 3.7 – Amplitude du champ H approché calculé par le schéma standard (à gauche) et par le nouveau schéma (à droite). La couleur des courbes correspond à la proportion des turbulences dans la densité électronique, indiquée en légende. On notera que les amplitudes sont tracées en échelle logarithmique sur la figure de gauche, et que les instabilités sont d'autant plus fortes que le niveau de turbulence est élevé. Sur la figure de droite, l'absence d'instabilités est mis en évidence par l'échelle linéaire et la durée des simulations, de l'ordre de 10 fois plus longues.

3.3 Résonances hybrides dans un plasma magnétisé

En plus de servir à effectuer des mesures de densité comme nous l'avons vu dans la section 3.2, les ondes électromagnétiques jouent un rôle important dans le chauffage des plasmas de fusion. Les phénomènes de résonances, notamment, sont utilisés pour transmettre aux particules chargées l'énergie portée par les ondes. Un modèle simplifié permettant de décrire ces phénomènes peut être obtenu à partir du système linéarisé (3.13), correspondant à l'interaction de l'onde onde avec un plasma

électronique (les ions étant supposés immobiles en première approximation), plongé dans un champ magnétique dominant B_0 . En considérant que les composantes de l'onde oscillent à une pulsation ω imposée par l'antenne ($X(t, \mathbf{x}) = e^{-i\omega t} X(\mathbf{x})$), et en éliminant le champ H au moyen de la deuxième équation, le système devient

$$\begin{cases} \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \wedge \nabla \wedge E + i\omega\varepsilon_0 E = J \\ -i\omega J - \omega_c b \wedge J = \varepsilon_0 \omega_p^2 E \end{cases} \quad (3.20)$$

où l'on rappelle que les pulsations plasma $\omega_p = \omega_p(\mathbf{x})$ et cyclotronique $\omega_c = \omega_c(\mathbf{x})$ caractérisent respectivement la densité électronique et l'intensité du champ magnétique dominant. Comme plus haut, il est possible d'inverser l'opérateur $(i\omega I + \omega_c b \wedge)$ et d'exprimer J en fonction de E . Dans la configuration classique où l'orientation du champ dominant est supposée constante, $b = e_z$, on arrive à l'équation

$$\nabla \wedge \nabla \wedge E - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \underline{\underline{\varepsilon}}_\omega E = 0,$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}_\omega = \underline{\underline{\varepsilon}}_\omega(\mathbf{x})$ désigne le tenseur diélectrique du plasma froid [136, 81], donné par

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_\omega(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & i \frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ -i \frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Si l'on suppose de plus que les différents paramètres ne dépendent que de x , la direction de propagation de l'onde, on peut chercher des solutions dépendant de cette variable uniquement. On obtient alors deux problèmes découplés sur l'intervalle $\Omega =]-1, 1[$. D'une part, une équation scalaire portant sur la composante E_z parallèle au champ B_0 , souvent désignée sous le terme d'onde *ordinaire* (mode O) par les physiciens,

$$(\partial_x)^2 E_z + \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} E_z = 0. \quad (3.22)$$

Pour cette composante, le plasma est un milieu propagatif dans les zones où $\omega_p^2(x) = \frac{q_e^2}{m_e \varepsilon_0} N_e(x) < \omega^2$. La région où $\omega_p^2(x) = \omega^2$ est appelée zone de *coupure* [128, 76], l'équation d'Airy $u'' - xu = 0$ pouvant alors servir de prototype pour décrire finement la transition entre la zone propagative et la zone évanescence.

D'autre part, un système portant sur les composantes orthogonales E_x, E_y désignées sous le terme d'onde *extraordinaire* (mode X), dans lequel intervient le bloc supérieur gauche du tenseur diélectrique (3.21),

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -(\partial_x)^2 E_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha(x) & i\delta(x) \\ -i\delta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}\right) \\ \delta = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}\right). \end{cases} \quad (3.23)$$

En éliminant formellement la première composante au profit de la deuxième, ce système conduit à l'équation de Budden [33, 136]

$$-(\partial_x)^2 E_y + \left(\frac{\delta^2}{\alpha} - \alpha\right) E_y = 0 \quad (3.24)$$

à laquelle les physiciens associent deux types de résonances. La résonance *cyclotron* $\omega = \omega_c(x)$ correspondant aux pôles des coefficients α et δ , et la résonance *hybride* $\omega^2 = \omega_c^2(x) + \omega_p^2(x)$, correspondant aux zéros du coefficient α . Dans la configuration considérée ici (et dans d'autres, voir [74])

les pôles $\omega = \omega_c$ ne posent en fait pas de problème. Un simple calcul donne en effet

$$\frac{\delta^2}{\alpha} - \alpha = \frac{\omega^2 \omega_c^2 - (\omega^2 - \omega_p^2)^2}{c^2(\omega^2 - \omega_c^2 - \omega_p^2)}$$

de sorte que les résonances cyclotrons ne sont pas associées à de réelles singularités. La présence de résonances hybrides, en revanche, pose plusieurs difficultés. En utilisant comme prototype l'équation de Whittaker $u'' + (\frac{1}{x} - \frac{1}{4})u = 0$ pour lesquelles on dispose de solutions exactes explicites, on peut en effet montrer [75] qu'au voisinage d'un zéro de α l'équation (3.24), assortie de conditions aux limites standard du type $E'_y(\pm 1) \mp i\lambda E_y(\pm 1) = f_{\pm}$, possède au moins deux solutions a priori distinctes. De plus ces solutions ne s'annulent pas forcément en ce point, de sorte que $E_x = -i\frac{\delta}{\alpha}E_y$ présente une singularité en $\frac{1}{x}$, non intégrable localement.

Une façon de mieux comprendre la nature des résonances hybrides consiste à prendre en compte la faible friction entre les électrons et les ions que nous avons jusque là supposés immobiles, en ajoutant un terme dissipatif dans le système (3.13) où la troisième équation devient

$$\partial_t J = \varepsilon_0 \omega_p^2 E + \omega_c b \wedge J - \nu J,$$

le petit paramètre ν décrivant le taux de collisions entre les électrons et le bain d'ions environnant. Pour des raisons physiques ce paramètre doit être positif, néanmoins il est possible de considérer également des valeurs négatives lors de l'analyse mathématique. En reportant ce terme dans les calculs on arrive à une version modifiée du système (3.23) dans lequel les coefficients du plasma s'écrivent

$$\alpha^\nu = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{\tilde{\omega} \omega_p^2}{\omega(\tilde{\omega}^2 - \omega_c^2)}\right) \quad \text{et} \quad \delta^\nu = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega(\tilde{\omega}^2 - \omega_c^2)}\right), \quad \tilde{\omega} = \omega + i\nu.$$

En particulier, α^ν ne peut plus s'annuler pour des valeurs réelles de ω et l'équation (3.24) redevient bien posée [6]. Conformément au principe d'absorption limite [123] le problème résonnant peut alors être vu comme une limite singulière $\nu \rightarrow 0^+$ du cas dissipatif, qu'il peut être agréable de reformuler sous la forme d'un problème du premier ordre en réintroduisant le champ magnétique,

$$\begin{cases} i\omega B_z - \partial_x E_y = 0 \\ -\alpha^\nu E_x - i\delta^\nu E_y = 0 \\ -i\omega \partial_x B_z + i\delta^\nu E_x - \alpha^\nu E_y = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Cette approche a été suivie dans [75], où les auteurs ont considéré des coefficients simplifiés

$$\alpha^\nu = \alpha + i\nu \quad \text{et} \quad \delta^\nu = \delta \quad (3.26)$$

et le cas générique où la fonction α possédait un zéro isolé en $0 \in \Omega$. Ils ont alors justifié le principe d'absorption limite et quantifié de façon fine la singularité de la solution $E^+ := \lim_{\nu \rightarrow 0^+} E^\nu \notin L_{\text{loc}}^1$ et $B^+ := \lim_{\nu \rightarrow 0^+} B^\nu$. De plus ils ont montré que la quantité d'énergie transmise aux ions par une onde résonnante était strictement positive,

$$\mathcal{Q}(E^+) = \lim_{\nu \rightarrow 0^+} \nu \int_{\Omega} |E^\nu|^2 = \lim_{\nu \rightarrow 0^+} \nu \int_{\Omega} |E_x^\nu|^2 > 0.$$

Dans l'article [47] nous avons étudié plusieurs caractérisations des solutions résonnantes de (3.24) qui semblent appropriées au développement de méthodes numériques. En particulier, nos formulations permettent de compléter (3.24) en des problèmes bien posés, qui contiennent chacun l'information de la limite $\nu \rightarrow 0^+$ sans faire intervenir les solutions dissipatives elles-mêmes.

A l'origine de ce travail, Bruno Després était inspiré par un principe de comparaison utilisé en théorie des équations hyperboliques pour établir des conditions d'entropies sur les solutions discontinues. Dans le contexte du système des plasmas froids (3.25), ce principe l'a conduit à chercher des pseudo-solutions sur le modèle des *solutions manufacturées* utilisées dans la validation de certaines méthodes numériques. Ici, il s'agit de fonctions explicites $F_x^\nu, F_y^\nu, C_z^\nu$ vérifiant

$$\begin{cases} i\omega C_z^\nu - \partial_x F_y^\nu = q^\nu \\ -\alpha^\nu F_x^\nu - i\delta^\nu F_y^\nu = 0 \\ -i\omega \partial_x C_z^\nu + i\delta^\nu F_x^\nu - \alpha^\nu F_y^\nu = g^\nu \end{cases} \quad (3.27)$$

avec les coefficients simplifiés (3.26) et des seconds membres choisis de telle sorte que les limites $F_y^\nu \rightarrow F_y^+$ et $C_z^\nu \rightarrow C_z^+$, ainsi que $q^\nu \rightarrow q^+$ et $g^\nu \rightarrow g^+$, pour $\nu \rightarrow 0^+$, soient valables dans L^2 et triviales à calculer. En dimension 1, on trouve essentiellement deux types de telles solutions, dont les principales caractéristiques reproduisent celles des solutions de (3.24) :

- des solutions manufacturées *régulières*, où le champ C_z est continu et non nul en 0,
- des solutions manufacturées *singulières*, où le champ F_y ne s'annule pas en 0.

Au vu de (3.27), les solutions du premier type auront a priori une composante F_x intégrable. Ce ne sera pas le cas des solutions du deuxième type, et leur composante C_z sera a priori discontinue en 0. Ainsi, on peut considérer comme spécimen de solution manufacturée singulière une fonction de la forme

$$F_y^\nu := \frac{i}{\delta} = F_y^+, \quad (3.28)$$

ce qui entraîne

$$F_x^\nu := -\frac{1}{\alpha + i\nu} \rightarrow F_x^+ = -\frac{1}{\alpha}, \quad (3.29)$$

la convergence ayant lieu presque partout dans Ω . Pour vérifier la troisième équation de (3.27) avec une fonction g^ν de carré uniformément intégrable, on a ensuite posé

$$C_z^\nu := \frac{\delta(0)}{\omega r} \left(\frac{1}{2} \log(r^2 x^2 + \nu^2) - i \arctan\left(\frac{rx}{\nu}\right) \right) \rightarrow C_z^+ = \frac{\delta(0)}{\omega r} \left(\log(|rx|) - i \frac{\pi}{2} \text{sign}(rx) \right) \quad (3.30)$$

avec $r := \alpha'(0) \neq 0$. La convergence a ici lieu dans $L^2(\Omega)$, et on observe que le signe de la partie imaginaire de C_z^+ garde la mémoire de la limite $\nu \rightarrow 0^+$. Le principe de comparaison évoqué plus haut conduit alors à évaluer l'énergie dissipée par la différence entre les solutions exactes et manufacturée, via le vecteur de Poynting $\Pi^\nu := \Re((E^\nu - F^\nu) \wedge \overline{(B^\nu - C^\nu)})$ dont la divergence vérifie

$$\nabla \cdot \Pi^\nu - \Re\left(q^\nu \overline{(B^\nu - C^\nu)}_z - (E^\nu - F^\nu)_y \overline{\left(\frac{g^\nu}{i\omega}\right)}\right) = -\frac{\nu}{\omega} |E^\nu - F^\nu|^2 \leq 0. \quad (3.31)$$

En utilisant le fait que les solutions régulières E_y^ν et B_z^ν possèdent des sous-suites convergentes dans L^2 on en déduit que l'inégalité passe à la limite, ce qui entraîne une relation dissipative de la forme

$$\mathcal{J} := \int_{\Omega} \Re((E_y^+ - kF_y^+) \overline{(B_z^+ - kC_z^+)}) \varphi' + \int_{\Omega} \Re\left(kq^+ \overline{(B^+ - kC^+)}_z - (E^+ - kF^+)_y \overline{\left(\frac{kg^+}{i\omega}\right)}\right) \varphi \geq 0$$

où $k \in \mathbb{C}$ est un degré de liberté complexe et $\varphi \geq 0$ une fonction test positive. Il est alors naturel d'écrire les équations d'Euler-Lagrange pour la fonctionnelle $\mathcal{J} = \mathcal{J}(E^+, B^+, k)$ associée à des contraintes correspondant à l'équation (3.24). Dans [[47]] nous avons montré que ces relations caractérisent entièrement la solution résonnante, sous la forme d'un système linéaire à 5 équations, dont une

équation scalaire. La solution de ce système contient alors, via la valeur de k , l'intensité du chauffage résonnant $\mathcal{Q}(E^+)$.

Il est intéressant de noter qu'une deuxième formulation, sensiblement plus simple car ne faisant intervenir que 3 équations dont une scalaire, peut être obtenue par une variante. A nouveau, on compare les solutions dissipatives avec les solutions manufacturées, mais à la place de (3.31) on calcule

$$\nabla \cdot (E^\nu \wedge C^\nu - F^\nu \wedge B^\nu) = (E_x^\nu C_z^\nu - F_y^\nu B_z^\nu)' = \left(q^\nu B_z^\nu - \frac{g^\nu}{i\omega} E_y^\nu \right).$$

Bien que l'interprétation physique de ce terme ne soit pas immédiate, les propriétés de convergence des différentes composantes de la solution permettent de passer à la limite dans une formulation intégrale

$$\int_{\Omega} (E_y^+ C_z^+ - F_y^+ B_z^+) \varphi' dx = \int_{\Omega} \left(q^+ B_z^+ - \frac{g^+}{i\omega} E_y^+ \right) \varphi dx \quad (3.32)$$

où φ est une fonction régulière arbitraire. On en déduit le problème suivant, où l'on suppose à nouveau que α possède une racine isolée en 0, à l'intérieur de l'intervalle $\Omega =]-1, 1[$ (si $\alpha'(0) = 0$ la singularité est plus forte encore et le problème demeure ouvert).

Problème 3.1 *Trouver $(E_y, B_z) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ vérifiant :*

i) *le problème limite (3.24) au sens faible,*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (i\omega B_z \varphi_1 + E_y \varphi_1') dx = 0, & \forall \varphi_1 \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \left(i\omega B_z \varphi_2' + \left(\frac{\delta^2}{\alpha} - \alpha \right) E_y \varphi_2 \right) dx = 0, & \forall \varphi_2 \in H_0^1(\Omega), \quad \varphi_2(0) = 0, \end{cases}$$

ii) *des conditions aux bords décrivant la présence d'une antenne*

$$i\omega B_z(-1) + i\lambda E_y(-1) = f_- \quad \text{et} \quad i\omega B_z(1) - i\lambda E_y(1) = f_+,$$

au sens des distributions,

iii) *une relation intégrale (3.32) associée à une solution manufacturée singulière telle que (3.28)-(3.30), et à une fonction test $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $\varphi(0) \neq 0$.*

Ici la restriction de la deuxième équation variationnelle aux fonctions tests s'annulant en 0 est nécessaire à l'intégrabilité du produit $\frac{1}{\alpha} E_y \varphi_2$, et grâce à l'inégalité de Hardy elle est aussi suffisante. On observe alors que si E_y et φ_2 sont approchés par des éléments finis de type \mathbb{P}_1 , l'absence de la fonction test associée au noeud $x = 0$ empêchera a priori le système discret d'être carré, défaut qui rappelle évidemment le manque d'unicité pour l'équation (3.24). Dans ce contexte, le rôle joué par la relation intégrale (3.32) est clair, et il est naturel de penser que son introduction permettra de retrouver l'unicité perdue. On a en effet le résultat suivant.

Théorème 3.3 ([47]) *Pour tout $(f_-, f_+) \in \mathbb{C}^2$, il existe une unique solution (E_y, B_z) au problème 3.1, qui coïncide avec la limite $(E_y^+, B_z^+) = \lim_{\nu \rightarrow 0^+} (E_y^\nu, B_z^\nu)$ des solutions dissipatives de (3.25).*

En dimension 2 nous avons étendu cette étude en construisant des solutions manufacturées dont la forme semble compatible d'une part avec les phénomènes connus en 1D, d'autre part avec certaines solutions singulières observées dans des méta-matériaux [23]. Sous des hypothèses naturelles sur la singularité des solutions exactes ces fonctions permettent d'écrire de nouvelles formulations pour le problème limite, dont le caractère bien posé reste toutefois à démontrer.

Enfin, ces travaux ont été poursuivis lors du stage de M2 d'Anouk Nicolopoulos [116], qui a démontré que le système du problème 3.1, reformulé sur une décomposition de la solution en une partie régulière (à déterminer) et une autre singulière (fournie par une solution manufacturée), faisait intervenir un opérateur de Fredholm d'indice 0. Anouk Nicolopoulos a également mis en oeuvre deux schémas numériques, basés soit directement sur la formulation proposée dans le problème 3.1, soit sur la décomposition en partie régulière et singulière. Dans les deux cas, la qualité de ses résultats a établi la validité de cette approche (voir figure 3.8), ainsi que sa pertinence dans le cadre des applications numériques.

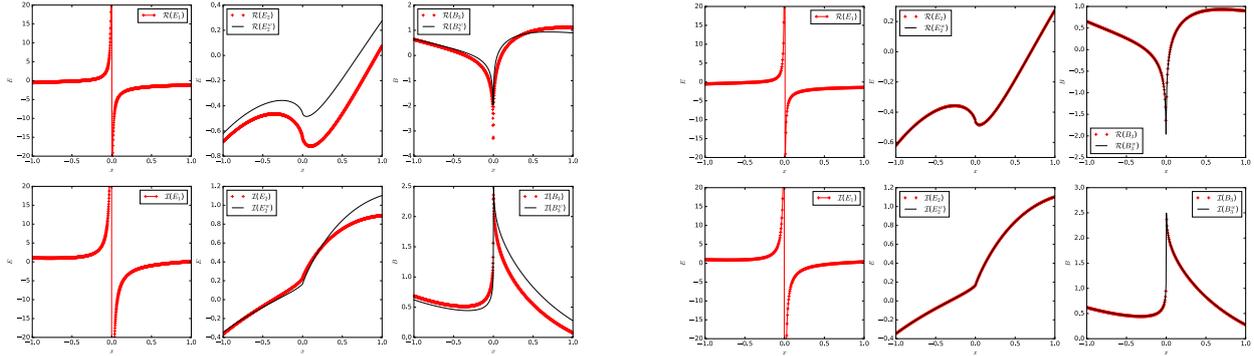


FIGURE 3.8 – Simulation numérique de l'équation de Budden (3.24) en 1D réalisée par Anouk Nicolopoulos, pour des coefficients particuliers $\alpha(x) = -x$ et $\delta(x) = \sqrt{1 - x/4 + x^2}$ (équation de Whittaker) donnant lieu à une solution exacte connue (tracée ici en trait noir), qui présente une singularité en 0. A gauche, le calcul est réalisé avec une méthode naïve pour régulariser localement la singularité (utilisant un petit paramètre dont la valeur est manifestement mal choisie ici), tandis qu'à droite le schéma numérique discrétise la nouvelle formulation du problème 3.1, bien posée.

Perspectives

Mes recherches se situant à l'interface entre les mathématiques et la physique des plasmas, les suites naturelles aux travaux présentés ici peuvent se répartir entre : la poursuite d'objectifs non encore pleinement réalisés d'une part, l'extension de certains outils développés ici à des problèmes voisins d'autre part, et enfin la recherche de nouveaux problèmes de physique pour lesquels l'apport de l'analyse numérique est susceptible d'apporter un éclairage fécond.

L'amélioration de la précision des codes particuliers entre dans la première catégorie. Comme on l'a vu, les méthodes telles que PIC (Particle-In-Cell) sont parmi les plus populaires en physique des plasmas, notamment en raison de leur efficacité en hautes dimensions comparée à celle des méthodes sur grilles (Eulériennes ou semi-Lagrangiennes). Elles souffrent cependant d'un niveau important de "bruit numérique" caractérisé par des oscillations importantes sur les densités transportées. Dans ce cadre, les méthodes LTPIC (Linearly-Transformed PIC) et FBL (Forward-Backward Lagrangian) présentées dans ce mémoire semblent offrir un cadre agréable pour améliorer la qualité de ces densités via une exploitation locale des données calculées par le solveur particulière. La précision de ces méthodes d'approximation ayant été validée sur des problèmes simples, l'étape naturelle consiste à présent à étudier leur efficacité dans le débruitage de simulations particulières de plus grandes tailles. Ces travaux ont en fait déjà démarré dans le cadre d'un projet Eurofusion mené sur la plate-forme logicielle Selalib sur laquelle je programme régulièrement. Développée en partenariat entre le CEA, l'INRIA, l'IPP (Institut de Physique des Plasmas) à Garching (Allemagne), l'IRMA à Strasbourg, l'IRMAR à Rennes et le LJLL à Paris, cette plateforme permet à des mathématiciens, physiciens et informaticiens d'implémenter et d'utiliser de façon collaborative des méthodes numériques propres à la simulation Lagrangienne et semi-Lagrangienne des plasmas, ainsi que des cas-tests et des outils de diagnostic.

En parallèle, il me semble naturel d'étudier l'extension des discrétisations non-conformes compatibles à de nouveaux problèmes. Mes résultats ayant permis d'identifier de nouveaux schémas de type Galerkin discontinus préservant la structure des équations de Maxwell, induisant ainsi de bonnes propriétés de stabilité et de conservation, j'envisage d'en étendre l'application à d'autres problèmes, notamment fluides et MHD. Des études plus approfondies des propriétés numériques de ces schémas sont également prévues, à court ou moyen terme, et avec des physiciens du Max Planck-IPP à Garching nous avons le projet d'appliquer ces méthodes de discrétisation compatibles discontinues à la modélisation numérique de réflectomètres plasmas, destinés à mesurer la densité du plasma dans les tokamaks.

Enfin, je compte poursuivre mes travaux sur la modélisation des ondes électro-magnétiques, menés récemment avec Bruno Després dans le cadre du projet ANR Chrome et en vue d'améliorer les méthodes de simulation du chauffage résonant dans les plasmas de tokamaks. Ce projet se mènera de façon naturelle en collaboration avec des physiciens des plasmas, et il ne fait aucun doute que de nouveaux problèmes se présenteront au cours de ces échanges, qui susciteront de nouvelles questions intéressantes. Il s'inscrit également dans le cadre de la thèse d'Anouk Nicolopoulos qui débute en ce moment sur de nouveaux modèles constructifs pour la propagation d'ondes résonantes dans les plasmas magnétisés.

Bibliographie

- [1] J.-C. Adam, A. Gourdin Serveniére, J.-C. Nédélec, and P.-A. Raviart. Study of an implicit scheme for integrating Maxwell's equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 22 :327–346, 1980.
- [2] D.N. Arnold, R.S. Falk, and R. Winther. Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications. *Acta Numerica*, 15 :1–155, 2006.
- [3] D.N. Arnold, R.S. Falk, and R. Winther. Finite element exterior calculus : from Hodge theory to numerical stability. *Bull. Amer. Math. Soc.(NS)*, 47(2) :281–354, 2010.
- [4] F. Assous and P. Ciarlet, Jr. Quelques résultats sur la régularité en temps des équations de Maxwell instationnaires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 327(8) :719–724, 1998.
- [5] F. Assous, P. Ciarlet, Jr, and E. Sonnendrücker. Resolution of the Maxwell equations in a domain with reentrant corners. *M2AN. Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 32(3) :359–389, 1998.
- [6] A. Back, T. Hattori, S. Labrunie, J.R. Roche, and P. Bertrand. Electromagnetic wave propagation and absorption in magnetised plasmas : variational formulations and domain decomposition. *M2AN. Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 49(5) :1239–1260, 2015.
- [7] M. Badsì. *Etude mathématique et simulations numériques de modèles de gaines bi-cinétiques (in french)*. PhD thesis, UPMC - Université Paris 6 Pierre et Marie Curie, 2016.
- [8] M. Badsì, M. Campos Pinto, and B. Després. A minimization formulation of a bi-kinetic sheath. *Kinetic and related models*, 9(4) :621–656, 2016.
- [9] R. Barthelmé, P. Ciarlet, Jr, and E. Sonnendrücker. Generalized formulations of Maxwell's equations for numerical Vlasov-Maxwell simulations. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 17(5) :657–680, 2007.
- [10] J.T. Beale. On the accuracy of vortex methods at large times. In *Computational fluid dynamics and reacting gas flows (Minneapolis, MN, 1986)*, pages 19–32. Springer, New York, 1988.
- [11] J.T. Beale and A. Majda. Vortex methods. II. Higher order accuracy in two and three dimensions. *Mathematics of Computation*, 39(159) :29–52, 1982.
- [12] M. Bergdorf, G.-H. Cottet, and P. Koumoutsakos. Multilevel adaptive particle methods for convection-diffusion equations. *Multiscale Modeling & Simulation*, 4(1) :328–357, 2005.
- [13] M. Bergdorf and P. Koumoutsakos. A Lagrangian particle-wavelet method. *Multiscale Modeling & Simulation*, 5(3) :980–995, 2006.
- [14] N. Besse, F. Filbet, M. Gutnic, I. Paun, and E. Sonnendrücker. An adaptive numerical method for the Vlasov equation based on a multiresolution analysis. In *Numerical Mathematics and Advanced Applications. ENUMATH 2001*, pages 437–446, 2003.

- [15] D. Boffi. Fortin operator and discrete compactness for edge elements. *Numerische Mathematik*, 87(2) :229–246, 2000.
- [16] D. Boffi. Compatible Discretizations for Eigenvalue Problems. In *Compatible Spatial Discretizations*, volume 142 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 121–142. Springer New York, 2006.
- [17] D. Boffi. Finite element approximation of eigenvalue problems. *Acta Numerica*, 19 :1–120, 2010.
- [18] D. Boffi, F. Brezzi, and M. Fortin. *Mixed finite element methods and applications*, volume 44 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, 2013.
- [19] D. Boffi, F. Brezzi, and L. Gastaldi. On the convergence of eigenvalues for mixed formulations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV*, 25(1-2) :131–154 (1998), 1997.
- [20] D. Boffi, F. Brezzi, and L. Gastaldi. On the problem of spurious eigenvalues in the approximation of linear elliptic problems in mixed form. *Mathematics of Computation*, 69 :121–140, 2000.
- [21] D. Boffi, A. Buffa, and L. Gastaldi. Convergence analysis for hyperbolic evolution problems in mixed form. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 20(4) :541–556, 2013.
- [22] D. Boffi, P. Fernandes, L. Gastaldi, and I. Perugia. Computational Models of Electromagnetic Resonators : Analysis of Edge Element Approximation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 36(4) :1264–1290, 1999.
- [23] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, and X. Claeys. Radiation condition for a non-smooth interface between a dielectric and a metamaterial. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 23(9) :1629–1662, 2013.
- [24] J.P. Boris. Relativistic plasma simulation-optimization of a hybrid code. In *Fourth Conf Num Sim Plasmas, 1970*. Proc. Fourth Conf. Num. Sim. Plasmas, 1971.
- [25] A. Bossavit. Whitney forms : a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. In *Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education - Reviews, IEE Proceedings A*, pages 493–500, 1988.
- [26] A. Bossavit. Solving Maxwell equations in a closed cavity, and the question of 'spurious modes'. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2) :702–705, 1990.
- [27] A. Bossavit. *Computational electromagnetism : variational formulations, complementarity, edge elements*. Academic Press, 1998.
- [28] A. Bottino and E. Sonnendrücker. Monte Carlo particle-in-cell methods for the simulation of the Vlasov-Maxwell gyrokinetic equations. *Journal of Plasma Physics*, 81 :435810501, 2015.
- [29] S.C. Brenner, F. Li, and L.Y. Sung. Nonconforming Maxwell eigensolvers. *Journal of Scientific Computing*, 40(1-3) :51–85, 2009.
- [30] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, 2010.
- [31] K. Brix, M. Campos Pinto, and W. Dahmen. A multilevel preconditioner for the interior penalty discontinuous Galerkin method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(5) :2742–2768, 2008.
- [32] K. Brix, M. Campos Pinto, W. Dahmen, and R. Massjung. Multilevel preconditioners for the interior penalty discontinuous Galerkin method. II. Quantitative studies. *Communications in Computational Physics*, 5(2-4) :296–325, 2009.
- [33] K.G. Budden. *Radio Waves in the Ionosphere*. Cambridge University Press, 1966.
- [34] A. Buffa, P. Houston, and I. Perugia. Discontinuous Galerkin computation of the Maxwell eigenvalues on simplicial meshes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 204(2) :317–333, 2007.

-
- [35] A. Buffa and I. Perugia. Discontinuous Galerkin Approximation of the Maxwell Eigenproblem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(5) :2198–2226, 2006.
- [36] A. Buffa, G. Sangalli, and R. Vázquez. Isogeometric analysis in electromagnetics : B-splines approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(17) :1143–1152, 2010.
- [37] O. Buneman and G. Kooyers. Computer Simulation of the Electron Mixing Mechanism in Ion Propulsion. *AIAA Journal*, 1 :2525–2528, 1963.
- [38] M. Campos Pinto. *Développement et analyse de schémas adaptatifs pour les équations de transport*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2005.
- [39] M. Campos Pinto. Adaptive semi-Lagrangian schemes for Vlasov equations. In Etienne Emmrich and Petra Wittbold, editors, *Analytical and Numerical Aspects of Partial Differential Equations*, pages 69–114. Walter de Gruyter, 2009.
- [40] M. Campos Pinto. How to predict accurate wavelet grids in adaptive semi-Lagrangian schemes ? *ESAIM : Proceedings*, 29 :43–57, 2009.
- [41] M. Campos Pinto. Towards smooth particle methods without smoothing. *Journal of Scientific Computing*, 65 :54–82, 2015.
- [42] M. Campos Pinto. Constructing exact sequences on non-conforming discrete spaces. *Comptes Rendus Mathématique*, 354(7) :691–696, 2016.
- [43] M. Campos Pinto. Structure-preserving conforming and nonconforming discretizations of mixed problems. [⟨hal-01471295⟩](#), 2017.
- [44] M. Campos Pinto, J.A. Carrillo, F. Charles, and Y.P. Choi. Convergence of a linearly transformed particle method for aggregation equations. [⟨arXiv :1507.07405⟩](#), 2015.
- [45] M. Campos Pinto and F. Charles. From particle methods to hybrid semi-Lagrangian schemes. [⟨hal-01385676⟩](#), 2016.
- [46] M. Campos Pinto and F. Charles. Uniform Convergence of a Linearly Transformed Particle Method for the Vlasov–Poisson System. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 54(1) :137–160, 2016.
- [47] M. Campos Pinto and B. Després. Constructive formulations of resonant Maxwell’s equations. [⟨hal-01278860⟩](#), 2016.
- [48] M. Campos Pinto, S. Jund, S. Salmon, and E. Sonnendrücker. Charge conserving fem-pic schemes on general grids. *C.R. Mécanique*, 342(10-11) :570–582, 2014.
- [49] M. Campos Pinto, M. Lutz, and M. Mounier. Electromagnetic PIC simulations with smooth particles : a numerical study. *ESAIM : Proc.*, 53 :133–148, 2016.
- [50] M. Campos Pinto and M. Mehrenberger. Convergence of an adaptive semi-Lagrangian scheme for the Vlasov-Poisson system. *Numerische Mathematik*, 108(3) :407–444, 2008.
- [51] M. Campos Pinto, M. Mounier, and E. Sonnendrücker. Handling the divergence constraints in Maxwell and Vlasov–Maxwell simulations. *Applied Mathematics and Computation*, 272 :403–419, 2016.
- [52] M. Campos Pinto and E. Sonnendrücker. Compatible Maxwell solvers with particles I : conforming and non-conforming 2D schemes with a strong Ampere law. [⟨hal-01303852⟩](#), 2016.
- [53] M. Campos Pinto and E. Sonnendrücker. Compatible Maxwell solvers with particles II : conforming and non-conforming 2D schemes with a strong Faraday law. [⟨hal-01303861⟩](#), 2016.

- [54] M. Campos Pinto and E. Sonnendrücker. Gauss-compatible Galerkin schemes for time-dependent Maxwell equations. *Mathematics of Computation*, 85 :2651–2685, 2016.
- [55] M. Campos Pinto, E. Sonnendrücker, A. Friedman, D.P. Grote, and S.M. Lund. Noiseless Vlasov–Poisson simulations with linearly transformed particles. *Journal of Computational Physics*, 275(C) :236–256, 2014.
- [56] S. Caorsi, P. Fernandes, and M. Raffetto. On the convergence of Galerkin finite element approximations of electromagnetic eigenproblems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(2) :580–607 (electronic), 2000.
- [57] M. Cessenat. *Mathematical methods in electromagnetism*, volume 41 of *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996.
- [58] F. Chen. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Volume 1 : Plasma Physics. Plenum Press, New York and London, second edition edition, 1984.
- [59] A.J. Chorin. Numerical study of slightly viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 57(4) :785–796, 1973.
- [60] S.H. Christiansen and R. Winther. Smoothed projections in finite element exterior calculus. *Mathematics of Computation*, 77 :813–829, 2008.
- [61] P. Ciarlet, Jr and S. Labrunie. Numerical analysis of the generalized Maxwell equations (with an elliptic correction) for charged particle simulations. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 19(11) :1959–1994, 2009.
- [62] A. Cohen. *Numerical analysis of wavelet methods*, volume 32 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2003.
- [63] A. Cohen and B. Perthame. Optimal Approximations of Transport Equations by Particle and Pseudoparticle Methods. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 32(3) :616–636, 2000.
- [64] S. Colombi and C. Alard. A “metric” semi-Lagrangian Vlasov-Poisson solver. Submitted, 2016.
- [65] C.J. Cotter, J. Frank, and S. Reich. The remapped particle-mesh semi-Lagrangian advection scheme. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 133(622) :251–260, 2007.
- [66] G.-H. Cottet. Artificial Viscosity Models for Vortex and Particle Methods. *Journal of Computational Physics*, 127 :299–308, 1996.
- [67] G.-H. Cottet and P.-A. Raviart. Particle methods for the one-dimensional Vlasov-Poisson equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, pages 52–76, 1984.
- [68] G.H. Cottet and P. Koumoutsakos. *Vortex Methods : Theory and Practice*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [69] N. Crouseilles, T. Respaud, and E. Sonnendrücker. A forward semi-Lagrangian method for the numerical solution of the Vlasov equation. *Computer Physics Communications*, 180(10) :1730–1745, 2009.
- [70] F. Da Silva, M. Campos Pinto, B. Després, and S. Heuraux. Stable explicit coupling of the Yee scheme with a linear current model in fluctuating magnetized plasmas. *Journal of Computational Physics*, 295 :24–45, 2015.
- [71] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*, volume 61 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.
- [72] J. Dawson. One-Dimensional Plasma Model. *Physics of Fluids*, 5(4) :445–459, 1962.
- [73] J. Denavit. Numerical Simulation of Plasmas with Periodic Smoothing in Phase Space. *Journal of Computational Physics*, 9 :75–98, 1972.

-
- [74] B. Després, L.-M. Imbert-Gérard, and O. Lafitte. Singular solutions for the plasma at the resonance. [⟨hal-01097364⟩](#), 2014.
- [75] B. Després, L.-M. Imbert-Gérard, and R. Weder. Hybrid resonance of Maxwell’s equations in slab geometry. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 101(5) :623–659, 2014.
- [76] R. Dumont. Waves in plasmas. In *M2 lecture notes*, pages 1–117. CEA, IRFM F-13108 Saint-Paul-lez-Durance, France., 2011.
- [77] A. Ern and J.-L. Guermond. Finite Element Quasi-Interpolation and Best Approximation . [⟨hal-01155412v2⟩](#), 2015.
- [78] M.W. Evans, F.H. Harlow, and E. Bromberg. The Particle-in-Cell Method for Hydrodynamic Calculations. Technical Report LAMS-2139, Los Alamos Laboratory, 1957.
- [79] M. Feldman, S.-Y. Ha, and M. Slemrod. A Geometric Level-Set Formulation of a Plasma-Sheath Interface. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 178(1) :81–123, 2005.
- [80] L. Fezoui, S. Lanteri, S. Lohrengel, and S. Piperno. Convergence and stability of a discontinuous Galerkin time-domain method for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39(6) :1149–1176, 2005.
- [81] J.P. Freidberg. *Plasma physics and fusion energy*. Cambridge : Cambridge University Press, 2007.
- [82] X. Garbet, Y. Idomura, L. Villard, and T.H. Watanabe. TOPICAL REVIEW : Gyrokinetic simulations of turbulent transport. *Nuclear Fusion*, 50(4) :043002, 2010.
- [83] D. Gérard-Varet, D. Han-Kwan, and F. Rousset. Quasineutral limit of the Euler-Poisson system for ions in a domain with boundaries. *Indiana University Mathematics Journal*, 62(2) :359–402, 2013.
- [84] D. Gérard-Varet, D. Han-Kwan, and F. Rousset. Quasineutral limit of the Euler-Poisson system for ions in a domain with boundaries II. *Journal de l’École Polytechnique. Mathématiques*, 1 :343–386, 2014.
- [85] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations – Theory and Algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [86] V. Grandgirard, Y. Sarazin, X. Garbet, G. Dif-Pradalier, Ph. Ghendrih, N. Crouseilles, G. Latu, E. Sonnendrücker, N. Besse, and P. Bertrand. GYSELA, a full-f global gyrokinetic Semi-Lagrangian code for ITG turbulence simulations. In *Theory of Fusion Plasmas : Joint Varenna-Lausanne International Workshop. Proceedings held at Varenna*, pages 100–111. Association Euratom-CEA, CEA/DSM/DRFC CEA-Cadarache, France, 2006.
- [87] V. Grandgirard, Y. Sarazin, X. Garbet, G. Dif-Pradalier, Ph. Ghendrih, N. Crouseilles, G. Latu, E. Sonnendrücker, N. Besse, and P. Bertrand. Computing ITG turbulence with a full-f semi-Lagrangian code. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13 :81–87, 2008.
- [88] J.S. Hesthaven and T. Warburton. Nodal High-Order Methods on Unstructured Grids. *Journal of Computational Physics*, 181(1) :186–221, 2002.
- [89] J.S. Hesthaven and T. Warburton. High-order nodal discontinuous Galerkin methods for the Maxwell eigenvalue problem. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 362(1816) :493–524, 2004.
- [90] S. Heuraux, F. da Silva, T. Ribeiro, B. Després, M. Campos Pinto, J. Jacquot, E. Faudot, S. Wengerowsky, L. Colas, and L. Lu. Simulation as a tool to improve wave heating in fusion plasmas. *Journal of Plasma Physics*, 81(05) :435810503, 2015.

- [91] R. Hiptmair. Nonconforming mixed discretization of second order elliptic problems. Report TUM M9404, 1994.
- [92] R. Hiptmair. Canonical construction of finite elements. *Mathematics of Computation*, 68(228) :1325–1346, 1999.
- [93] R. Hiptmair. Finite elements in computational electromagnetism. *Acta Numerica*, 11 :237–339, 2002.
- [94] R. Hiptmair. Maxwell’s Equations : Continuous and Discrete. In A Bermúdez de Castro and A Valli, editors, *Computational Electromagnetism, Lecture Notes in Math., Vol. 2148*, pages 1–58. Springer International Publishing, Switzerland, 2015.
- [95] R.W. Hockney and J.W. Eastwood. *Computer simulation using particles*. Taylor & Francis, Inc, Bristol, PA, USA, 1988.
- [96] G.B. Jacobs and J.S. Hesthaven. High-order nodal discontinuous Galerkin particle-in-cell method on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 214(1) :96–121, 2006.
- [97] G.B. Jacobs and J.S. Hesthaven. Implicit–explicit time integration of a high-order particle-in-cell method with hyperbolic divergence cleaning. *Computer Physics Communications*, 180(10) :1760–1767, 2009.
- [98] P. Koumoutsakos. Inviscid Axisymmetrization of an Elliptical Vortex. *Journal of Computational Physics*, 138 :821–857, 1997.
- [99] A.B. Langdon and C.K. Birdsall. *Plasma Physics via Computer Simulation*. Taylor & Francis, New York, 2005.
- [100] A. Leonard. Vortex methods for flow simulation. *Journal of Computational Physics*, 37 :289–335, 1980.
- [101] A. Magni and G.-H. Cottet. Accurate, non-oscillatory, remeshing schemes for particle methods. *Journal of Computational Physics*, 231(1) :152–172, 2012.
- [102] P.-H. Maire. *Etablissement et comparaison de modèles fluides pour un plasma faiblement ionisé quasi-neutre. Détermination des conditions aux limites à la paroi*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1996.
- [103] C.G. Makridakis and P. Monk. Time-discrete finite element schemes for Maxwell’s equations. *RAIRO Modél Math Anal Numér*, 29(2) :171–197, 1995.
- [104] P.J. Mardahl and J.P. Verboncoeur. Charge conservation in electromagnetic PIC codes ; spectral comparison of Boris/DADI and Langdon-Marder methods. *Computer Physics Communications*, 106(3) :219–229, 1997.
- [105] B. Marder. A method for incorporating Gauss’ law into electromagnetic PIC codes. *Journal of Computational Physics*, 68(1) :48–55, 1987.
- [106] P. Monk. A mixed method for approximating Maxwell’s equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, pages 1610–1634, 1991.
- [107] P. Monk. Analysis of a Finite Element Method for Maxwell’s Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29(3) :714–729, 1992.
- [108] P. Monk. An analysis of Nédélec’s method for the spatial discretization of Maxwell’s equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 47(1) :101–121, 1993.
- [109] P. Monk. *Finite Element Methods for Maxwell’s Equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, University of Delaware, Newark, 2003.

-
- [110] P. Monk and L Demkowicz. Discrete compactness and the approximation of Maxwell's equations in \mathbb{R}^3 . *Mathematics of Computation*, 70 :507–523, 2001.
- [111] C.-D. Munz, P. Omnes, R. Schneider, E. Sonnendrücker, and U. Voß. Divergence Correction Techniques for Maxwell Solvers Based on a Hyperbolic Model. *Journal of Computational Physics*, 161(2) :484–511, 2000.
- [112] C.-D. Munz, R. Schneider, E. Sonnendrücker, and U. Voss. Maxwell's equations when the charge conservation is not satisfied. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 328(5) :431–436, 1999.
- [113] R.D. Nair, J.S. Scroggs, and F.H.M. Semazzi. A forward-trajectory global semi-Lagrangian transport scheme. *Journal of Computational Physics*, 190(1) :275–294, 2003.
- [114] J.-C. Nédélec. Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numerische Mathematik*, 35(3) :315–341, 1980.
- [115] J.-C. Nédélec. A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numerische Mathematik*, 50(1) :57–81, 1986.
- [116] A. Nicolopoulos. Formulations Variationnelles des Equations de Maxwell (in french). Master's thesis, UPMC - Université Paris 6 Pierre et Marie Curie, 2016.
- [117] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [118] P.-A. Raviart. An analysis of particle methods. In *Numerical methods in fluid dynamics (Como, 1983)*, pages 243–324. Lecture Notes in Mathematics, Berlin, 1985.
- [119] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems. In *Mathematical aspects of finite element methods, Lecture Notes in Math., Vol. 606*, pages 292–315. Springer, Berlin, 1977.
- [120] K.U. Riemann. The Bohm criterion and sheath formation. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 24 :493–518, 1991.
- [121] A. Robert. A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. *Atmosphere-Ocean*, 19(1) :35–46, 1981.
- [122] J.S. Sawyer. A Semi-Lagrangian Method of Solving the Vorticity Advection Equation. *Tellus*, 15(4) :336–342, 1963.
- [123] J.R. Schulenberg and C.H. Wilcox. The limiting absorption principle and spectral theory for steady-state wave propagation in inhomogeneous anisotropic media. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 41 :46–65, 1971.
- [124] Selalib. Semi-Lagrangian Library. <http://selalib.gforge.inria.fr/>.
- [125] E. Sonnendrücker, J.R. Roche, P. Bertrand, and A. Ghizzo. The semi-Lagrangian method for the numerical resolution of the Vlasov equation. *Journal of Computational Physics*, 149(2) :201–220, 1999.
- [126] P.C. Stangeby. *The Plasma Boundary of Magnetic Fusion Devices*. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2000.
- [127] A. Staniforth and J. Côté. Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models-a review. *Monthly weather review*, 119 :2206–2223, 1991.
- [128] T.H. Stix. *The theory of plasma waves*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1962.

- [129] A. Stock, J. Neudorfer, R. Schneider, C. Altmann, and C.-D. Munz. Investigation of the Purely Hyperbolic Maxwell System for Divergence Cleaning in Discontinuous Galerkin based Particle-In-Cell Methods. In *COUPLED PROBLEMS 2011 IV International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering*, 2011.
- [130] M.L. Stowell and D.A. White. Discretizing Transient Current Densities in the Maxwell Equations. In *ICAP 2009*, 2009.
- [131] J. Strain. 2D Vortex Methods and Singular Quadrature Rules. *Journal of Computational Physics*, 124(1) :131–145, 1996.
- [132] J. Villasenor and O. Buneman. Rigorous charge conservation for local electromagnetic field solvers. *Computer Physics Communications*, 69(2-3) :306–316, 1992.
- [133] B. Wang, G.H. Miller, and P. Colella. A Particle-In-Cell method with adaptive phase-space remapping for kinetic plasmas. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33 :3509–3537, 2011.
- [134] T. Warburton and M. Embree. The role of the penalty in the local discontinuous Galerkin method for Maxwell’s eigenvalue problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(25-28) :3205–3223, 2006.
- [135] D.A. White, J.M. Koning, and R.N. Rieben. Development and application of compatible discretizations of Maxwell’s equations. In *Compatible Spatial Discretizations*, pages 209–234. Springer, New York, 2006.
- [136] R.B. White and F.F. Chen. Amplification and absorption of electromagnetic waves in overdense plasmas. *Plasma Physics*, 16 :565–587, 1974.
- [137] L. Xu and N. Yuan. FDTD Formulations for Scattering From 3-D Anisotropic Magnetized Plasma Objects. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 5(1) :335–338, 2006.
- [138] K.S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(3) :302–307, 1966.
- [139] K. Yosida. *Functional analysis*, volume 123 of *Classics in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 1995.
- [140] S. Zaglmayr. *High order finite element methods for electromagnetic field computation*. PhD thesis, Universität Linz, Diss, 2006.