



HAL
open science

Prédiction robuste du comportement vibratoire des redresseurs sectorisés désaccordés

Jonathan Philippe

► **To cite this version:**

Jonathan Philippe. Prédiction robuste du comportement vibratoire des redresseurs sectorisés désaccordés. Autre. Université de Lyon, 2016. Français. NNT : 2016LYSEC020 . tel-01486187

HAL Id: tel-01486187

<https://theses.hal.science/tel-01486187>

Submitted on 9 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE DE MÉCANIQUE DE LYON (UCBL/INSA/ECL)

par

Jonathan PHILIPPE

**Prédiction du comportement vibratoire des redresseurs
sectorisés désaccordés**

Présentée et soutenue publiquement le 27 juin 2016, devant le jury d'examen :

E. JACQUELIN, Professeur, LBMC, Univ. Claude Bernard de Lyon,	Président du jury
S. COGAN, Chargé de Recherche CNRS, FEMTO-ST, Univ. de Franche-Comté,	Rapporteur
J.-C. GOLINVAL, Professeur, LTAS, Univ. de Liège,	Rapporteur
M. GRUIN, Ingénieur de Recherche, SAFRAN AIRCRAFT ENGINES,	Examineur
L. BLANC, Maître de Conférences, LTDS, École Centrale de Lyon,	Co-encadrant
F. THOUVEREZ, Professeur, LTDS, École Centrale de Lyon,	Directeur de thèse

Remerciements

J'adresse en premier lieu mes profonds remerciements à mon directeur de thèse, Fabrice Thouverez, pour ses précieux conseils, les choix d'orientation qui ont toujours été d'une grande valeur, sa confiance et sa bienveillance. Je remercie aussi sincèrement Laurent Blanc ; notre collaboration sur les aspects aussi bien théoriques qu'expérimentaux de ces travaux, les échanges et les discussions que nous avons eus dans ce cadre ont été très formateurs pour moi. Je remercie également toute l'équipe D2S pour son accueil lors de mes brefs passages à Lyon.

Au sein de la société Safran Aircraft Engines, je tiens tout particulièrement à remercier Marion Guin pour son soutien sans faille, son engagement dans mes travaux, sa disponibilité et son encadrement qui ont incontestablement alimenté ma motivation et stimulé ma créativité. Je remercie aussi toute l'équipe des méthodes mécaniques avancées qui m'a chaleureusement accueilli durant mes trois années de recherche.

Je remercie vivement Éric Jacquelin qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de mon jury. Je remercie aussi sincèrement Jean-Claude Golinval et Scott Cogan pour avoir accepté de rapporter ce mémoire.

J'adresse mes profonds remerciements à ma famille, mes parents, ma sœur Alyson et mon frère Alexandre dont les encouragements et l'affection ne sont pas étrangers à la réussite de ces travaux de recherche. Une pensée également à mes amis, en particulier Florent et Julien, qui me supportent depuis plus de dix ans. Enfin, un grand merci à Julie qui partage ma vie et qui m'a donné la joie d'être l'heureux papa d'une petite Gabrielle.

MERCI !

Résumé

Les différentes structures composant les moteurs aéronautiques requièrent des analyses dynamiques afin de prédire leur durée de vie. Pour des raisons d'allègement, les roues aubagées fixes de turbomachines, appelées redresseurs, sont conçus comme des ensembles de secteurs comportant plusieurs aubes. Cette architecture rompt la symétrie cyclique empêchant l'application des méthodes numériques l'exploitant. De plus, les dispersions géométriques et matériaux génèrent un désaccordage involontaire impliquant des zones de forte densité modale, dans lesquelles est observée une amplification de la réponse vibratoire, accrue par le caractère monobloc, et donc peu amorti, des secteurs.

Une méthodologie statistique de prédiction du niveau vibratoire d'un secteur de redresseur désaccordé aléatoirement est développée ici. La modélisation des incertitudes est basée sur une approche paramétrique de la théorie probabiliste : des paramètres matériaux aléatoires suivant une loi uniforme sont associés à différentes parties du secteur. Une expansion de Karhunen-Loève permet de réduire le champ stochastique à un petit nombre de variables aléatoires et donc de diminuer les temps de calcul. Les modes stochastiques sont ensuite projetés sur ces espaces aléatoires par le biais de deux méthodes d'interpolation non-intrusives. La première est basée sur une projection sur une base du chaos polynomial tandis que la deuxième est une méthode de régression non-paramétrique (méthode MARS).

Afin d'appliquer les deux méthodes de calcul à un modèle industriel, une méthode de double synthèse modale est appliquée permettant de diviser le temps de calcul des modes par un facteur d'environ 300. La sous-structuration adoptée s'adapte à la méthode de modélisation des incertitudes et s'avère robuste vis-à-vis du désaccordage. De plus, les deux méthodes permettent d'obtenir des résultats prédictifs en termes de moments statistiques tout en réduisant les temps de calculs. Enfin, la méthodologie est validée expérimentalement puisque l'enveloppe vibratoire numérique encadre la réponse fréquentielle expérimentale au niveau de la zone des modes d'intérêt. Une stratégie de positionnement des jauges de déformation est proposée à partir d'une distribution statistique des déplacements maximaux à mi-hauteur de veine sur une plage fréquentielle donnée.

Mots clés : turbomachines, roues aubagées, redresseurs, désaccordage ; vibrations, durée de vie ; simulation numérique, robustesse ; incertitudes, Karhunen-Loève, chaos polynomial, MARS ; réduction de modèles, double synthèse modale

Abstract

Aircraft engine components necessitate extensive dynamical analyses in order to obtain life cycle prediction. In order to lighten the structure, turbomachinery stator bladed disks, called stator vanes, are designed as a set of multiple blades clusters. This architecture implies a loss of cyclic symmetry condition and prevents the use of numerical methods using it. Moreover, geometric dispersions and materials defaults generate an involuntary mistuning involving high modal density areas, in which is observed an amplification of the vibratory response, enhanced by the monobloc character - and hence low damped - of stator vanes.

A statistical methodology for predicting the vibratory level of a randomly mistuned industrial stator vanes is developed here. Uncertainties modelization is based on a parametric approach of the probability theory : material random parameters following a uniform distribution are associated with different cluster's parts. A Karhunen-Loeve expansion reduces the stochastic field to a small number of random variables and therefore reduces the computation time. Stochastic modes are then projected on these random spaces through two non-intrusive methods of interpolation. The first is based on a projection on a polynomial chaos basis while the second is non-parametric regression method (MARS method).

In order to implement both numerical methods to an industrial model, a double modal synthesis method is applied to divide the calculation time of modes by a factor around 300. The sub-structuring way adopted fits the uncertainties modelization method and is robust towards mistuning. Moreover, both methods yield predictive results in terms of statistical moments while reducing computation time. Finally, the methodology is experimentally validated because the numerical vibratory envelope frames the experimental frequency response at the area of the modes of interest. A positioning strategy of strain gauges is proposed based on a statistical distribution of the maximum displacements in vein halfway over a given frequency range.

Keywords : turbomachinery, bladed disks, stator vanes, mistuning ; vibrations, life cycle ; numerical simulation, robustness ; uncertainties, Karhunen-Loève, polynomial chaos, MARS ; model reduction, double modal synthesis

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	v
Abstract	vii
Table des matières	ix
Introduction	1
I Dynamique des roues aubagées	5
1 Présentation d'une turbomachine aéronautique	6
1.1 Typologie des turbomachines aéronautiques	6
1.2 Principe de fonctionnement d'une turbomachine aéronautique	6
1.3 Sources d'excitation dans les turbomachines	8
2 Modélisation des roues aubagées	10
2.1 Caractéristiques des structures à symétrie cyclique	10
2.2 Influence du désaccordage sur la dynamique des roues aubagées	14
3 Cas des redresseurs sectorisés	17
3.1 Étude phénoménologique numérique d'un secteur de redres-	
seur industriel	17
3.2 Influence du désaccordage sur la dynamique des redresseurs . .	19
3.3 Problématique de positionnement de jauges de déformation . .	21
4 Conclusion	22
II Méthodes de modélisation de paramètres incertains	25
1 Généralités sur les méthodes de modélisation de paramètres incertains	26
2 Construction des lois de probabilité	27
2.1 Rappels sur la théorie des probabilités	27
2.2 Principe du maximum d'entropie	29
2.3 Représentation par les chaos polynomiaux	30
2.4 Réduction des champs stochastiques	33
3 Solveurs stochastiques	34
3.1 Méthodes d'échantillonnage	35
3.2 Méthode des perturbations	36

3.3	Méthode spectrale des éléments finis stochastiques	36
4	Stratégie adoptée et application au cas d'un redresseur simplifié . . .	37
4.1	Présentation du redresseur simplifié	37
4.2	Modélisation des incertitudes	39
4.3	Résultats sur les réponses forcées stochastiques du redresseur simplifié	42
5	Conclusions sur la modélisation des paramètres incertains	54
III Méthodes d'interpolations de surfaces stochastiques		57
1	Généralités sur les méthodes d'interpolation de surfaces	58
2	Interpolation des fonctions de répartition inverse par identification non-intrusive des coefficients du chaos	59
2.1	Théorie des méthodes non-intrusives d'identification des coef- ficients du chaos	59
2.2	Application numérique d'identification des coefficients du chaos par régression au cas d'un secteur de redresseur simplifié . . .	65
3	Interpolation des fonctions de répartition inverse par Régression Mul- tivariable par Splines Adaptatives	75
3.1	Description théorique de la méthode MARS	75
3.2	Application de la méthode MARS au cas d'un redresseur sim- plifié	79
4	Conclusions sur les méthodes d'interpolations de surface	87
IV Méthodes de réduction des modèles éléments-finis par synthèse mo- dale		89
1	Présentation générale des méthodes de synthèse modale	90
2	Méthodes classiques de synthèse modale	91
2.1	Mise en équation du problème dynamique	91
2.2	Méthodes de synthèse modale à interfaces fixes	92
2.3	Méthodes de synthèse modale à interfaces libres	96
2.4	Conclusion sur les méthodes classiques de réduction	103
3	Réduction de la base des modes d'interface	104
3.1	Condensation statique de Guyan	104
3.2	Corrélation des modes statiques	105
3.3	Analyse modale des matrices réduites statiques	106
4	Applications des méthodes de réductions à un modèle simplifié et industriel	107
4.1	Application sur un modèle académique simple	107
4.2	Application sur un modèle industriel de redresseur	111
5	Influence du désaccordage sur la double synthèse modale	115
6	Bilan des méthodes de sous-structuration	120

V	Application de la méthodologie stochastique proposée à un modèle de secteur de redresseur industriel	125
1	Présentation de la méthodologie retenue et modalités d'application au secteur de redresseur industriel	126
2	Validation de la méthodologie par la comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux	127
2.1	Présentation des essais de caractérisation modale d'un secteur de redresseur	127
2.2	Corrélation entre les essais expérimentaux et les calculs numériques	129
2.3	Caractérisation de l'enveloppe des réponses fréquentielles obtenues en essais	131
3	Prise en compte des conditions aux limites et d'un chargement aérodynamique simplifiés	136
4	Stratégie de positionnement des jauges de déformation	140
5	Conclusions de l'application de la méthodologie au modèle industriel .	142
	Conclusion et perspectives	145
	Bibliographie	149
	Publications personnelles	161
	Table des figures	163
	Liste des tableaux	169
A	Algorithme itératif de Savitzky-Golay	171
B	Articles non détaillés dans ce mémoire	175
1	A simplified method to predict the average vibratory response of mistuned clustered stator vanes	175
2	Vibratory behavior prediction of a mistuned clustered stator vane : non-intrusive stochastic methods	175

Introduction

Contexte industriel et scientifique

Entre les objectifs fixés par l'Advisory Council for Aviation Research and innovation in Europe (ACARE) [ACA16], l'émergence de nouveaux marchés aéronautiques et la concurrence rude entre les motoristes, les industriels aéronautiques doivent proposer des produits toujours plus innovants, tout en respectant les normes de certifications, afin de rester sur le devant de la scène internationale. Ces innovations se traduisent par une modification des moteurs dont le but est d'optimiser les performances et la fiabilité tout en réduisant l'impact environnemental et les coûts de fabrication. Ces améliorations entraînent généralement une complexification des phénomènes mécaniques induits et donc de leur modélisation numérique. Il est alors nécessaire de développer des outils numériques adéquats afin d'améliorer la modélisation du comportement dynamique des systèmes mécaniques et donc augmenter la prédiction de la durée de vie d'un moteur.

Le dimensionnement dynamique des structures composant les moteurs aéronautiques nécessite l'implémentation de modèles numériques précis permettant d'améliorer la prédiction du comportement vibratoire et de comprendre les phénomènes physiques mis en jeu. La caractérisation de l'amplitude vibratoire d'une structure permet de déterminer les contraintes associées et donc de détecter un amorçage éventuel de fissuration par fatigue [NP99]. Des modèles locaux sont développés dans ce mémoire afin de prédire le comportement des roues aubagées en particulier, contrairement à des modèles de dynamique d'ensemble dont le but est plutôt de caractériser les interactions entre les différents éléments du système réel. Les roues aubagées, fixes ou mobiles, ont *a priori* des propriétés de symétrie cyclique qui permettent de réduire les temps de calcul modal en considérant le comportement dynamique d'un seul secteur. Le comportement de la roue complète peut alors être reconstruit à partir d'une décomposition en série de Fourier [Tho79, VO85, Wil79]. Cette méthode améliore la précision des résultats grâce à la forte réduction des temps de calcul, permettant ainsi de raffiner les maillages. Néanmoins, cette méthode n'est pas applicable dans le cas où la roue aubagée est désaccordée ou sectorisée.

D'une part, les tolérances dimensionnelles de fabrication et les défauts matériaux introduisent des incertitudes que le modèle numérique à symétrie cyclique ne peut pas prendre en compte. Ces incertitudes sont à l'origine du désaccordage aléatoire

des roues aubagées, empêchant ainsi d’appliquer la répétabilité d’un secteur composé d’une seule aube par la méthode de symétrie cyclique. Le désaccordage entraîne également un effet de localisation sur la réponse vibratoire des roues aubagées en concentrant l’énergie de déformation sur un nombre réduit d’aubes [DH69, Ewi69, Whi66]. Le niveau vibratoire peut alors augmenter de plus de 200% [CP97].

D’autre part, la sectorisation des roues aubagées, telles les redresseurs du compresseur haute-pression, rompt la symétrie cyclique (cf. Fig. 1.a). Cette architecture monobloc est proposée par les concepteurs puisqu’elle permet de réduire la masse de la structure par rapport à une structure assemblée [Nun05]. En revanche, l’assemblage confère des propriétés amortissantes à la structure, due à la friction inter-aubes, que le caractère monobloc ne permet pas de retrouver. La réponse vibratoire d’un redresseur monobloc par secteur est alors amplifiée par rapport à celle d’un redresseur assemblé. De plus, la sectorisation laisse également apparaître des zones de forte densité modale (cf. Fig. 1.a), qui sont extrêmement sensibles au désaccordage, et complexifient donc la prédiction du comportement vibratoire d’un secteur de redresseur [Sal11, LDD+06, PLS+06].

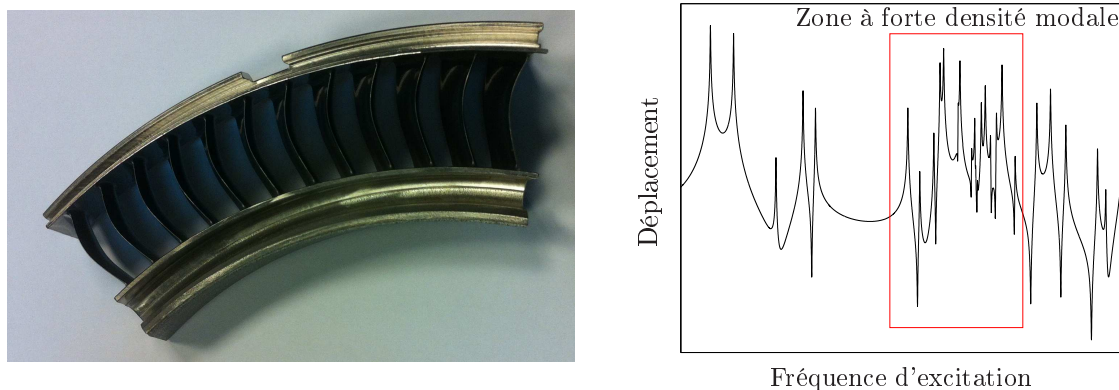


FIGURE 1 – a. Secteur d’un redresseur industriel b. Réponse fréquentielle

Enjeux de l’étude

L’objectif de ces travaux est de prédire de manière robuste le comportement vibratoire d’un secteur de redresseur désaccordé afin de proposer un positionnement optimal robuste de jauges de déformation dans le cadre d’essais, qu’ils soient partiels ou complets, au sol ou en vol. La méthodologie développée doit donc permettre de s’adapter aux différentes situations expérimentales, aussi bien en termes de conditions limites que d’excitation mécanique, acoustique ou aérodynamique. Ce positionnement doit permettre de capter le maximum de déformation d’un secteur de redresseur quelconque, dont le désaccordage est inconnu, avec une probabilité maximale.

Cette thèse fait suite à celle soutenue par A.C. Sall en 2011 [Sal11]. La première thèse a permis de mettre en évidence les problèmes de désaccordage présentés ci-dessus. Une méthode intrusive reprenant la Méthode des Éléments Finis Stochastiques Spectraux (MEFSS) basée sur le chaos polynomial a été développée [Des00, GS91]. Les dispersions du modèle sont modélisées par deux variables aléatoires suivant une loi gaussienne et pilotant le module d'Young des aubes selon un motif de désaccordage donné. Les conclusions de ces travaux ont permis d'identifier différentes perspectives d'amélioration qui ont fait l'objet d'une étude approfondie dans ce mémoire.

L'une des améliorations possibles consiste à améliorer la prise en compte des incertitudes liées aux tolérances de fabrication et aux défauts des matériaux utilisés. Plusieurs approches sont possibles avec des méthodes basées sur les théories probabilistes [Pue04, MU49], telles que les méthodes paramétriques [GS91, Sal11] et non-paramétriques [Soi86, CLS04, Mba09], et celles qui ne le sont pas telles que la méthode des intervalles [Des00]. Si l'approche probabiliste paramétrique est préférée, le choix des paramètres incertains doit être judicieux et réduit afin de maintenir un niveau d'incertitude du système représentatif et de réduire les temps de calcul. Des méthodes basées sur l'analyse en composantes principales [BPS14] pourront alors être développées pour réduire le nombre de variables aléatoires associées aux paramètres incertains. Le second axe d'amélioration concerne le caractère intrusif de la méthode des éléments finis stochastiques spectraux. Une approche non-intrusive, basée sur l'interpolation d'hypersurfaces de réponse liées aux modes stochastiques [Nou09, BSL04, Fri91], constitue une perspective intéressante puisqu'elle permet de développer une méthode en marge des codes commerciaux mais à partir des résultats générés par ceux-ci. Enfin, il est nécessaire de développer une méthode de réduction des modèles éléments-finis qui s'adapte au mieux à la modélisation stochastique en termes de sous-structuration et de traçabilité des paramètres incertains considérés [JB68, BH71, BbJT12], afin de pouvoir appliquer une telle méthodologie à un modèle industriel. Une caractérisation modale expérimentale d'un secteur de redresseur industriel, à partir d'un essai partiel, permettrait de valider les méthodologies mises en place.

Organisation du document

Ce document s'articule autour de cinq chapitres. Le premier chapitre présente l'architecture et le fonctionnement des turboréacteurs ainsi que les différentes sources d'excitation présentes dans le moteur. La dynamique des roues aubagées, et notamment celle des redresseurs, est ensuite introduite afin de présenter les outils numériques de conception dynamique associés et de mettre en évidence l'influence du désaccordage.

Le deuxième chapitre présente les méthodes de modélisation de l'incertitude dans les systèmes étudiés. Dans un premier temps, les différentes méthodes existantes dans la littérature sont comparées. Puis, les méthodes de construction de lois de

probabilité, de réduction de champ stochastique et résolution associées sont décrites, dans le cas d'une approche probabiliste. Enfin, la stratégie adoptée et son application à un modèle simplifié de secteur de redresseur sont présentées.

Le troisième chapitre s'intéresse aux méthodes d'interpolation d'hypersurfaces stochastiques. L'objectif est d'obtenir une expression analytique des modes propres stochastiques de la structure, par le biais d'une approche non-intrusive, à partir de la modélisation des incertitudes du chapitre précédent. Deux méthodes sont alors proposées puis testées et validées sur le modèle simplifié d'un secteur de redresseur.

Le quatrième chapitre est consacré aux méthodes de réduction des modèles éléments-finis. Après une brève présentation de l'intérêt que présente la réduction des modèles éléments finis, quelques méthodes classiques de réduction sont explicitées. Des méthodes de réduction de la base des modes d'interface sont ensuite proposées. Puis, les différentes méthodes sont testées sur un modèle simplifié de secteur de redresseur ainsi que sur un modèle industriel. Enfin, l'influence du désaccordage sur la précision des résultats obtenus par la méthode de sous-structuration retenue est caractérisée sur le modèle industriel.

Ce mémoire s'achève sur le cinquième chapitre qui présente l'application industrielle de la méthodologie retenue. Une validation expérimentale de la méthode numérique est d'abord proposée avant de proposer une méthodologie de positionnement optimal des jauges de déformation, basée sur une distribution statistique des déplacements maximaux.

Chapitre I

Dynamique des roues aubagées

Ce chapitre présente le contexte industriel de cette thèse. Il présente le fonctionnement des turbomachines aéronautiques et les différentes sources d'excitations auxquelles ils sont soumis. La dynamique des roues aubagées, et notamment celle des redresseurs, est ensuite introduite afin de présenter les outils numériques de conception dynamique associés et de mettre en avant l'importance de l'influence du désaccordage.

Sommaire

1	Présentation d'une turbomachine aéronautique	6
1.1	Typologie des turbomachines aéronautiques	6
1.2	Principe de fonctionnement d'une turbomachine aéronautique	6
1.3	Sources d'excitation dans les turbomachines	8
2	Modélisation des roues aubagées	10
2.1	Caractéristiques des structures à symétrie cyclique	10
2.2	Influence du désaccordage sur la dynamique des roues aubagées	14
3	Cas des redresseurs sectorisés	17
3.1	Étude phénoménologique numérique d'un secteur de redresseur industriel	17
3.2	Influence du désaccordage sur la dynamique des redresseurs .	19
3.3	Problématique de positionnement de jauges de déformation .	21
4	Conclusion	22

1 Présentation d'une turbomachine aéronautique

1.1 Typologie des turbomachines aéronautiques

Les turbomachines aéronautiques sont les organes propulseurs de la majorité des aéronefs civils et militaires. L'objectif de ces machines est de fournir une force de poussée permettant à l'avion d'atteindre une vitesse suffisante et d'entrer en sustentation. Il existe deux grandes catégories de turbomachines aéronautiques, les turbopropulseurs et les turbo réacteurs. Les premières sont principalement utilisées dans un cadre militaire pour des avions destinés au support logistique tandis que les secondes sont principalement utilisées dans un cadre civil, pour des avions de ligne ou d'affaires, et militaire, pour des avions supersoniques. Ces deux types de moteurs se distinguent principalement par la présence sur les seuls turbo réacteurs d'un carénage autour de l'hélice principale, appelée fan ou soufflante (cf. Fig. I.1).



FIGURE I.1 – Turbo réacteur CFM Leap-1A destiné à la propulsion des Airbus A319/320/321 [Saf16]

1.2 Principe de fonctionnement d'une turbomachine aéronautique

L'architecture des turbo réacteurs a beaucoup évolué depuis leur création. Cependant, le principe de fonctionnement global reste le même avec trois phases. Dans un premier temps, l'air admis est accéléré et comprimé par le compresseur avant de pénétrer dans la chambre de combustion. Puis l'injection du carburant permet d'enflammer le mélange, provoquant une réaction fortement exothermique. Enfin, les gaz produits par la combustion sont éjectés dans la turbine puis par une tuyère

à l'arrière du moteur. Une partie de l'énergie dégagée par l'éjection des gaz assure l'entraînement de la turbine, actionnant ainsi le compresseur car tous deux sont liés par un arbre commun, tandis que l'autre partie sert à propulser l'avion par principe d'action-réaction. La poussée axiale du moteur se définit par le produit du débit massique à l'intérieur du réacteur et de la différence de vitesse entre les flux entrants et sortants.

Les premiers turboréacteurs étaient qualifiés de moteurs « simple corps » puisque l'ensemble compresseur-turbine formait un même ensemble cinématique. De nos jours, la majorité des turboréacteurs sont composés de plusieurs « corps », entraînés à des vitesses différentes, afin d'augmenter leur efficacité et donc réduire les consommations. Les moteurs « double corps » sont donc composés de deux corps distincts : le corps basse pression, noté BP et le corps haute pression noté HP. Le corps BP est généralement constitué d'une soufflante d'un compresseur BP, appelé booster et d'une turbine BP, tous reliés par un arbre BP. Le corps HP, commun à tous les types de turbomachines, est constitué d'un compresseur HP et d'une turbine HP, reliés par un arbre HP (cf. Fig. I.2).

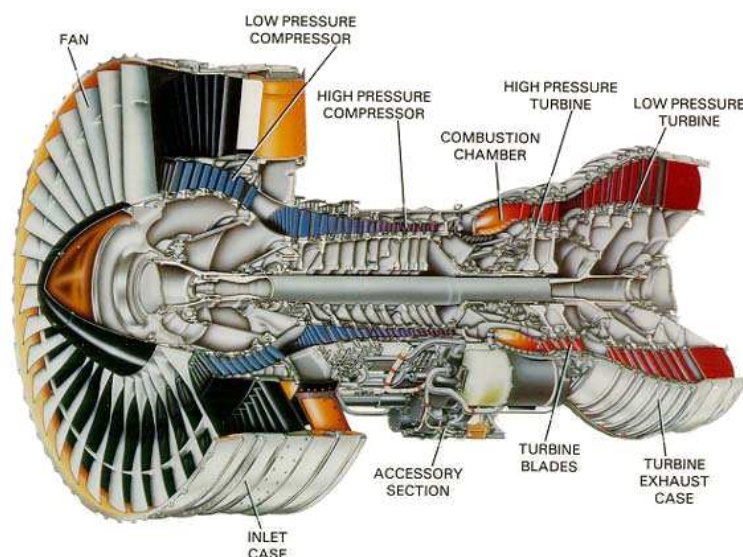


FIGURE I.2 – Coupe axiale d'un turboréacteur [Sal11]

La présence d'un fan permet de diviser le flux d'air admis en deux parties, améliorant ainsi le rendement du moteur et diminuant son bruit. Le flux d'air chaud, appelé flux « primaire », est destiné aux parties internes du moteur (compresseurs, chambre de combustion puis turbines), tandis que le flux d'air froid, appelé flux « secondaire » contourne le moteur par sa périphérie et ne subit qu'une accélération (cf. Fig. I.3).

Les flux d'air chaud et froid sont éjectés du moteur par une tuyère permettant l'augmentation de la vitesse des flux d'air. La séparation du flux d'air chaud et d'air froid permet de ne brûler qu'une partie de l'air admis provoquant ainsi une diminution de la consommation de carburant. Ainsi, le taux de dilution, correspondant au

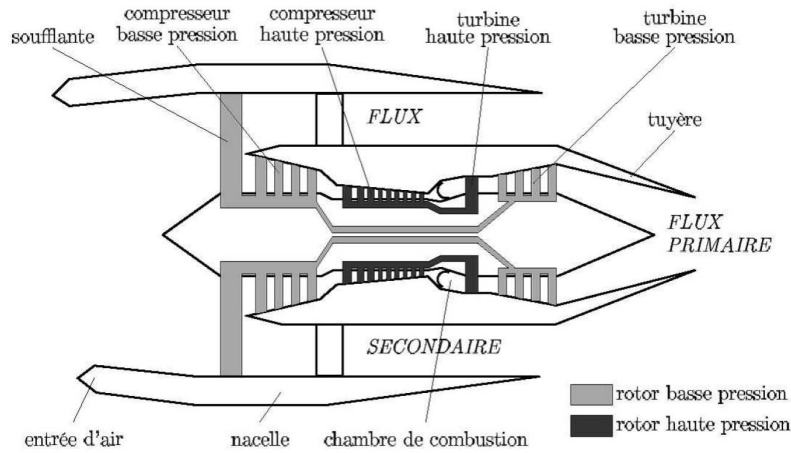


FIGURE I.3 – Schéma simplifié d'un turboréacteur double corps double flux [Par15]

rapport entre la masse d'air froid et la masse d'air chaud, est directement lié à la consommation de carburant. L'enjeu des motoristes aéronautiques est d'optimiser ce taux afin d'obtenir la poussée voulue tout en minimisant la consommation de carburant. Ceci implique de parvenir à optimiser les différents organes pour augmenter les performances du moteur. Ces modifications se traduisent par un allègement de la structure et une amplification du chargement aérodynamique pour augmenter la poussée. À titre d'exemple, le nombre d'aubes des roues aubagées est diminué, leur masse est optimisée, et les jeux axiaux sont réduits afin de limiter les fuites aérodynamiques.

Ce mémoire s'intéresse particulièrement au cas des roues aubagées fixes du compresseur haute pression, appelées redresseurs. Le compresseur HP est la partie du corps HP qui comprime l'air avant la chambre de combustion. Il est composé de plusieurs étages successifs dont la section diminue au fur et à mesure que l'air se rapproche de la chambre de combustion. Ce rétrécissement de volume permet de comprimer l'air. Chaque étage est composé d'une roue aubagée mobile, appartenant au rotor, et d'une roue aubagée fixe, appartenant au stator. La roue mobile propulse l'air vers l'aval du compresseur, en provoquant un flux hélicoïdal de la masse d'air. La roue fixe permet de redresser le flux afin d'obtenir un meilleur rendement aérodynamique lors du passage à l'étage suivant, figure I.4.

L'allègement des pièces et l'augmentation des chargements aérodynamiques nécessitent des analyses dynamiques précises afin d'estimer au mieux la durée de vie des différents organes du moteur. Il est alors nécessaire d'avoir une connaissance approfondie des phénomènes d'excitation présents dans les turbomachines aéronautiques.

1.3 Sources d'excitation dans les turbomachines

Les roues aubagées, qu'elles soient mobiles ou fixes, sont soumises à des excitations statiques et vibratoires multiples et complexes. Les principales sources de vi-

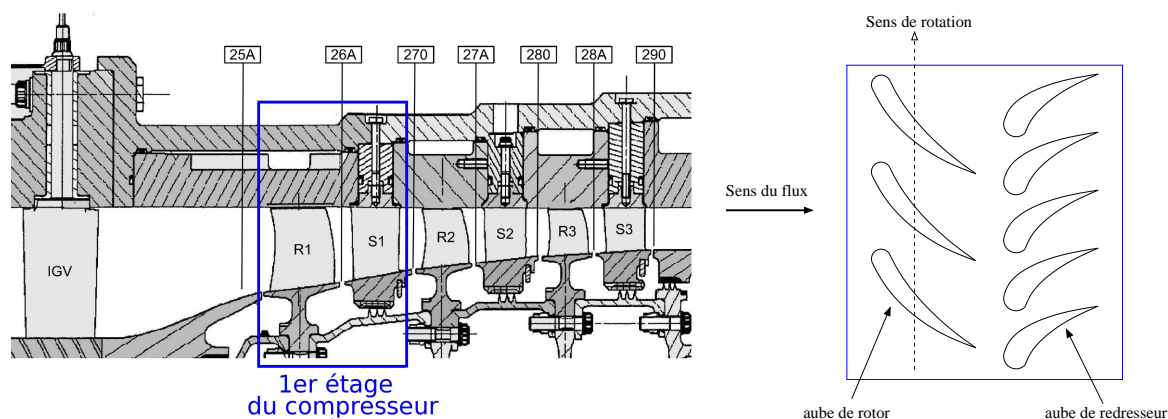


FIGURE I.4 – a. Coupe axiale du redresseur Create (figure de gauche) - b. Développement circulaire d'un étage du compresseur (figure de droite) [Sal11]

brations dans les turbomachines sont d'origine aérodynamique. Elles se manifestent au travers de deux problématiques majeures, les phénomènes de réponse forcée et les phénomènes auto-entretenus [Cal02].

Les excitations forcées vues par les roues mobiles (respectivement les redresseurs) proviennent des sillages générés par les redresseurs (respectivement les roues mobiles) situés en amont ou en aval par réflexion. Il s'agit ici d'excitations stationnaires dont la fréquence dépend de la fréquence de passage des aubes de la roue située en amont ou en aval. Ce sont donc des excitations synchrones de la vitesse de rotation du rotor. Ces excitations sont généralement les mieux maîtrisées lors de la phase de conception. Les excitations aérodynamiques auto-entretenuës [MI96], telles que les phénomènes asynchrones dus à la vibration du fluide et d'une aube à l'unisson, les instabilités de flottement [HKT06] dues à un amortissement aérodynamique « négatif » supérieur à l'amortissement structural ou encore les instabilités de pompage [Gou05, RW96], sont très dangereuses et éprouvantes pour les structures. Ces phénomènes tendent à devenir plus importants avec l'allègement des organes mécaniques et l'augmentation du chargement aérodynamique et sont parfois mal maîtrisés.

Il existe également des sources d'excitation d'origine mécanique occasionnelles, mais pouvant s'avérer dangereuses pour l'intégrité de la machine. D'une part, l'ingestion de corps étrangers (oiseaux, glace,...) implique des phénomènes transitoires (chocs) très violents pouvant provoquer la perte d'une aube, générant ainsi des balourds de grande ampleur. D'autre part, la réduction des jeux entre le carter les aubes des roues aubagées mobiles laisse apparaître de nouvelles problématiques telles que les phénomènes de contact rotor-stator entraînant une réponse vibratoire non-linéaire [Par15].

Dans le cadre de cette thèse, seule la réponse forcée d'un redresseur sectorisé soumis à une excitation aérodynamique synchrone de type sillage en présence de désaccordage sera étudiée. Les non-linéarités induites par le contact entre le redres-

seur et le carter ne sont pas dues à la réduction des jeux mais aux conditions de fixations. Ces non-linéarités et le phénomène de flottement ne seront pas prises en compte.

Cette section nous a permis de décrire les principes de fonctionnement d'un turboréacteur et les différentes sources d'excitation auxquelles il peut être soumis. La prochaine section s'intéresse au cas particulier des roues aubagées, qui constituent un composant majeur des turbomachines, et notamment à la modélisation leur comportement dynamique.

2 Modélisation des roues aubagées

Le dimensionnement en fatigue des composants de turbomachines tels que les roues aubagées passe nécessairement par leur analyse dynamique. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, l'application du principe fondamental de la dynamique à un système mécanique discrétisé donne :

$$[M]\ddot{\mathbf{u}} + ([C] + [G])\dot{\mathbf{u}} + ([K] + [N] + [P])\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (\text{I.1})$$

avec $[M]$ la matrice de masse, $[C]$ la matrice d'amortissement, $[G]$ la matrice gyroscopique, $[K]$ la matrice de raideur élastique, $[N]$ la matrice d'assouplissement centrifuge et $[P]$ la matrice d'accélération angulaire. Le vecteur \mathbf{u} désigne les degrés de liberté associées à un champ de déplacement cinématiquement admissible, \mathbf{F} le vecteur des forces d'excitation aérodynamiques synchrones généralisées. Les matrices gyroscopique et d'assouplissement centrifuge sont nulles dans le cas des redresseurs puisqu'il s'agit de roues fixes. Les forces non-linéaires de contact ne sont pas prises en compte dans cette étude.

En considérant une roue aubagée parfaitement accordée, l'étude dynamique en symétrie cyclique d'un seul secteur suffit pour reconstruire le comportement dynamique de la roue complète grâce à une décomposition en série de Fourier circonférentielle des champs de déplacements. Cette méthode permet de diminuer considérablement les temps de calcul ou d'augmenter leur précision en considérant un maillage plus fin.

2.1 Caractéristiques des structures à symétrie cyclique

Les structures dites à symétrie cyclique sont constituées de N secteurs identiques répétés autour d'un axe de symétrie (cf. Fig. I.5). Ces structures possèdent des propriétés mathématiques qui permettent d'exprimer le champ de déplacement de n'importe quel secteur \mathbf{u}_j à partir de celui d'un seul secteur par une transformation de Fourier discrète [Sla95, SMB, Tho79, Wil79, Hen80, VO85] :

$$\mathbf{u}_j = \tilde{\mathbf{u}}_0^0 + \sum_{k=1}^K \left(\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\cos} \cos(jk\alpha) + \tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\sin} \sin(jk\alpha) \right) + (-1)^j (\text{mod}(N, 2) - 1) \tilde{\mathbf{u}}_0^{N/2} \quad (\text{I.2})$$

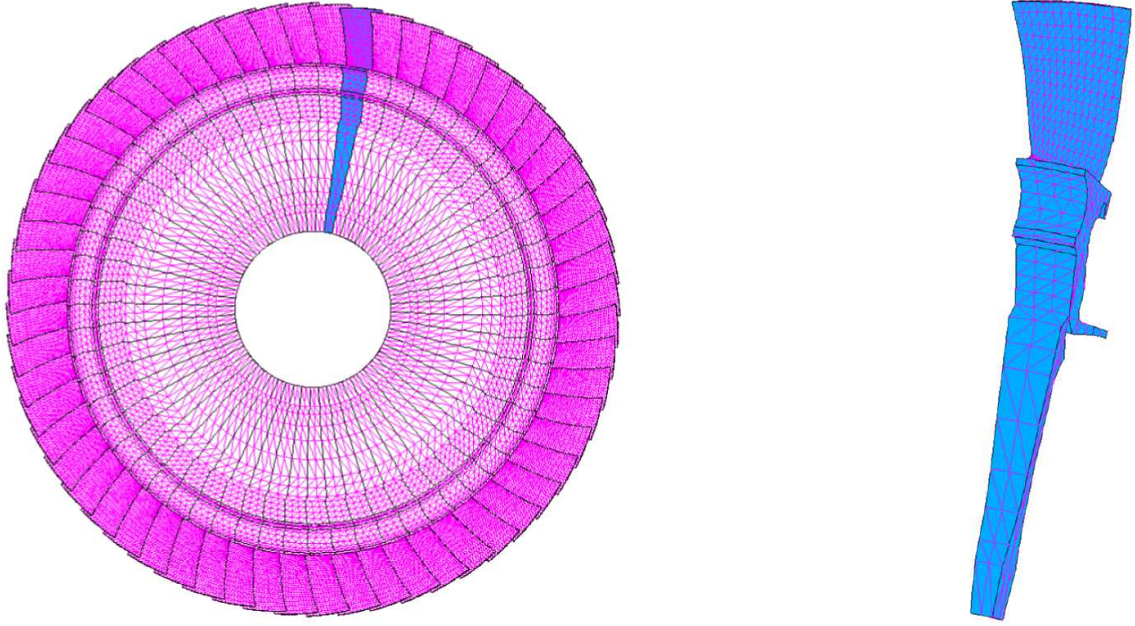


FIGURE I.5 – Roue aubagée et son secteur de référence [Gru12]

où $\alpha = 2\pi/N$ correspond à l'étendue angulaire d'un secteur, $[\tilde{\mathbf{u}}_0] = [\tilde{\mathbf{u}}_0^0, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\cos}, \tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\sin}, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_0^{N/2}]$ aux composantes cycliques du champ de déplacement du secteur de référence et K vaut :

$$K = \begin{cases} \frac{N}{2} - 1 & \text{si } N \text{ est pair} \\ \frac{N-1}{2} & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

Dans la suite de ce paragraphe, N est supposé pair. L'écriture en base cyclique de la formulation matricielle de l'équation de mouvement définie par l'équation (I.1) pour un système non amorti, i.e. $[C] = [0]$, donne :

$$\forall k = 0, \dots, \frac{N}{2}, [\tilde{M}]^k \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_0^k + [\tilde{K}]^k \tilde{\mathbf{u}}_0^k = \mathbf{F}_0^k \quad (\text{I.4})$$

où $[\tilde{M}]$ et $[\tilde{K}]$ correspondent respectivement à la matrice de masse et de raideur du secteur de référence en base cyclique, $\tilde{\mathbf{u}}_0$ est le vecteur de déplacement du secteur de référence en base cyclique et \mathbf{F}_0 est le vecteur de forces extérieures appliquées au secteur de référence en base cyclique. A chaque sous-système k correspondent des conditions aux limites de continuité entre les degrés de liberté situés à la frontière droite ${}^d\tilde{\mathbf{u}}_0$ et ceux situés à la frontière gauche ${}^g\tilde{\mathbf{u}}_0$ (cf. Fig. I.6) :

$$\begin{cases} {}^g\tilde{\mathbf{u}}_0^0 = {}^d\tilde{\mathbf{u}}_0^0 & \text{si } k = 0 \\ \begin{bmatrix} {}^g\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\cos} \\ {}^g\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\sin} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^d\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\cos} \\ {}^d\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,\sin} \end{bmatrix} & \text{si } k = 1, \dots, K \\ {}^g\tilde{\mathbf{u}}_0^{N/2} = -{}^d\tilde{\mathbf{u}}_0^{N/2} & \text{si } k = \frac{N}{2} \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

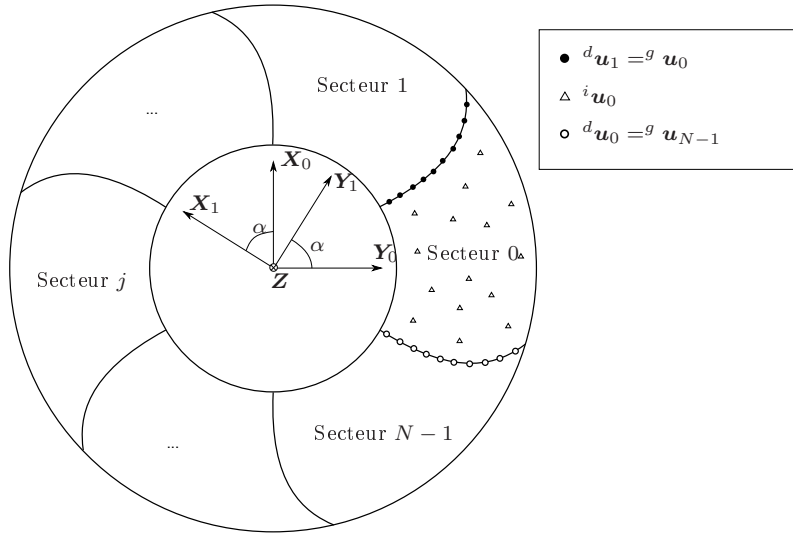


FIGURE I.6 – Schéma de définition des degrés de liberté frontières sur le secteur de référence [Par15]

Il suffit alors de résoudre le problème aux valeurs propres associées aux différentes harmoniques k pour obtenir les propriétés modales de la structure :

$$\forall k = 0 \dots \frac{N}{2}, \left([\tilde{K}]^k - \omega^2 [\tilde{M}]^k \right) \tilde{\phi}_0^k = \mathbf{0} \quad (\text{I.6})$$

La résolution de ce problème aux valeurs propres est réelle pour les harmoniques $k = 0$ ou $k = N/2$ et de dimension n , où n correspond au nombre de degrés de liberté du secteur de référence. Pour les autres harmoniques, le système de dimension $2n$ correspondant à l'identification de la composante cos et sin de la $k^{\text{ème}}$ harmonique. Les solutions sont alors dites *dégénérées* et comportent des fréquences propres doubles associées à deux vecteurs propres orthogonaux.

Dans le cas d'une roue aubagée à $N = 36$ aubes, les modes dits *non-dégénérés* sont obtenus par les harmoniques $k = 0$ et $k = 18$. Le premier, appelé « mode à 0 diamètre nodal », correspond à une vibration en phase de toutes les aubes (cf. Fig. I.7 à gauche) tandis que le second, appelé « mode à 18 diamètre nodaux », correspond à une vibration des aubes en opposition de phase (cf. Fig. I.7 à droite). Un exemple de mode dégénéré est illustré figure I.8. Il s'agit d'un mode à 2 diamètre nodaux ($k = 2$) possédant deux déformées propres orthogonales.

La résolution de ces problèmes aux valeurs propres permet de générer un diagramme des fréquences en fonction du nombre de diamètres (cf. Fig. I.9). Ce graphe permet de caractériser les déformées modales qui sont associées aux fréquences et ainsi de mettre en évidence deux grandes familles de modes. Les familles de modes dont les fréquences propres évoluent en fonction du nombre de diamètres (petit nombre de diamètres) correspondent à des modes d'ensemble avec une manifestation claire de la souplesse du disque. Les familles de modes dont les fréquences propres sont ne dépendent pas du nombre de diamètres (grand nombre de diamètres) correspondent plutôt à des modes de vibration d'aubes.

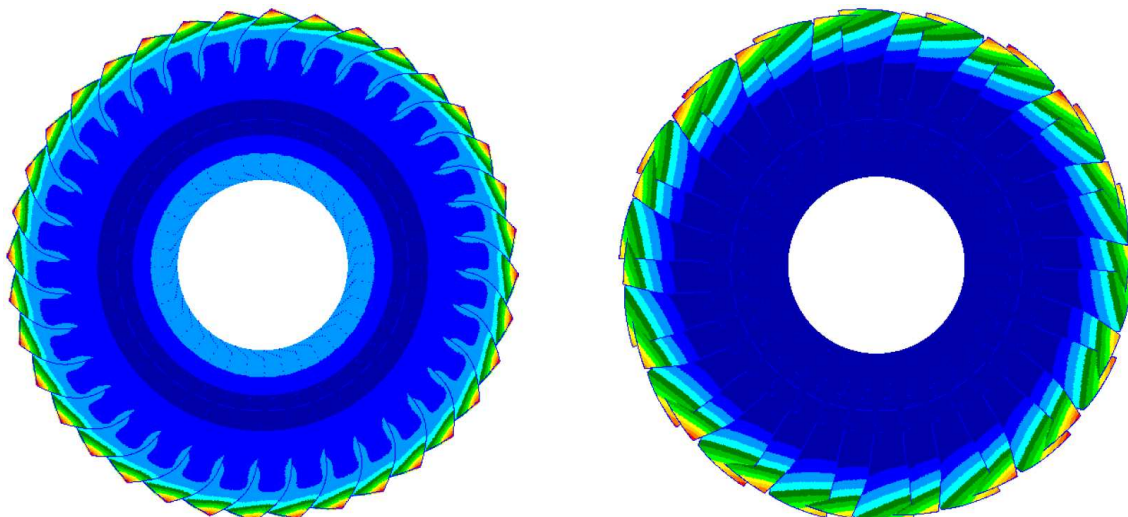


FIGURE I.7 – Déformées de modes non dégénérés : $k = 0$ à gauche et $k = 18$ à droite [Lax07]

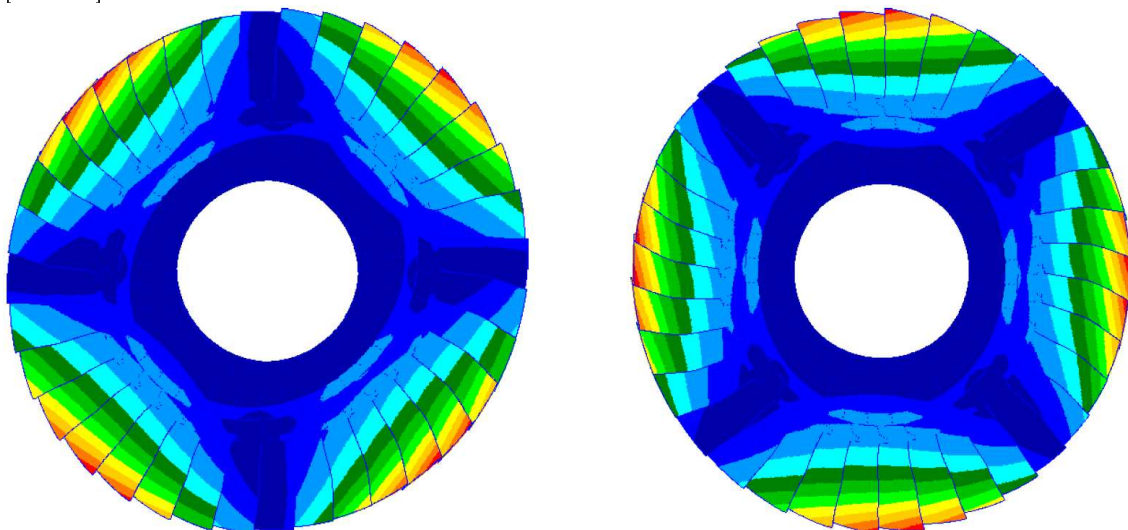


FIGURE I.8 – Déformées de modes dégénérés : $k = 2$ [Lax07]

La déformée globale du système peut ensuite être reconstruite à partir de toutes les harmoniques calculées. Il est alors possible de générer un diagramme de Campbell (cf. Fig. I.10) qui représente les fréquences propres de la structure en fonction de la vitesse de rotation du moteur.

Il y est ajouté certaines droites d'excitation moteur. Elles correspondent à la fréquence d'excitation réelle du chargement aérodynamique, synchrone à la vitesse de rotation du moteur et proportionnelle au nombre d'obstacles vues par la roue au cours d'une rotation moteur. Dans le cas d'une roue mobile (resp. roue fixe), il s'agit alors du nombre d'aubes formant la première roue fixe (resp. roue mobile) en amont voire la deuxième roue fixe en amont (resp. roue mobile) et la première roue fixe en aval (resp. roue mobile). Les coïncidences entre les fréquences des modes et les ordres d'excitation moteur sont des zones potentiellement dangereuses (croix

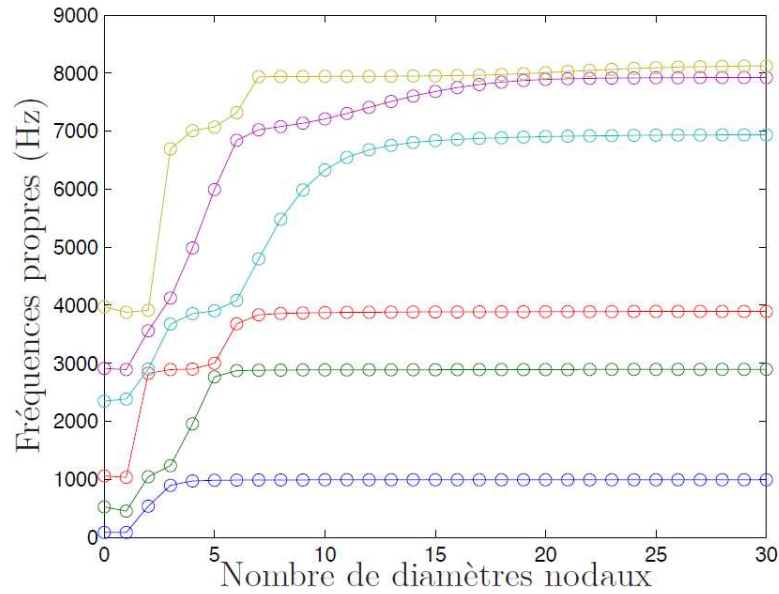


FIGURE I.9 – Évolution des fréquences propres de la roue aubagée en fonction du nombre de diamètres nodaux [Gru12]

rouges), notamment si la zone correspond à un régime moteur de fonctionnement (zone entre les traits bleus) et si le mode croisé dont le mode à diamètres est égal à l'ordre d'excitation moteur (cf. Fig. I.11 représentant un diagramme ZigZag [Sin13]). Le digramme « Fréquences / nombres de diamètres nodaux » permet d'identifier la famille de mode qui est la plus susceptible de répondre au niveau de la coïncidence.

2.2 Influence du désaccordage sur la dynamique des roues aubagées

Le paragraphe précédent présente une méthodologie de calcul permettant de réduire les temps de calcul lorsqu'une structure vérifie les hypothèses de symétrie cyclique. Une parfaite symétrie entre chaque secteur est une condition nécessaire à son application. Dans la réalité, il existe de petites variations géométriques (angle d'attaque, épaisseur, congés de raccordement, longueur corde,...) et/ou matériaux (module d'Young, masse volumique, anisotropie,...) dues aux procédés de fabrication. Le désaccordage involontaire est un phénomène qui peut radicalement changer le comportement vibratoire d'une roue aubagée désaccordée par rapport au cas accordé. Il est donc important de développer des modèles qui prennent en compte le désaccordage d'une structure afin de minimiser les écarts entre résultats expérimentaux et numériques et donc augmenter la fiabilité et la prédictibilité des modélisations numériques. Il existe deux principales sources de désaccordage involontaire dans les systèmes type roues aubagées :

- le désaccordage mécanique relatif aux dispersions matériaux et géométriques, principalement dues aux tolérances de fabrication.

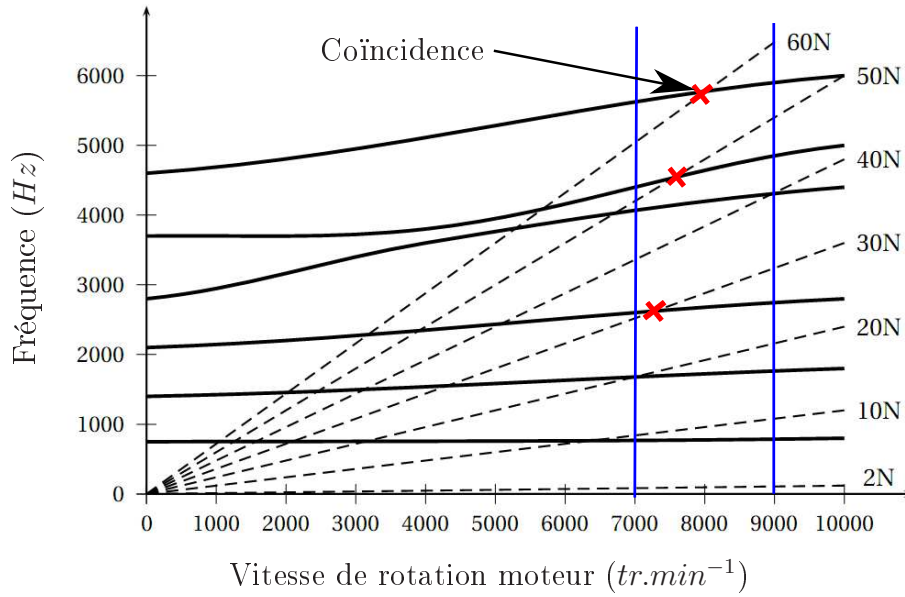


FIGURE I.10 – Diagramme de Campbell [Sal11]

- le désaccordage aérodynamique dû aux différences entre les efforts aérodynamiques extérieurs qui s'appliquent, d'une aube à l'autre, en termes d'amplitude et de phase.

Dans le cadre de cette thèse, le désaccordage aérodynamique [LEJS07] n'est pas pris en compte. En effet, cette étude s'intéresse principalement à l'impact du désaccordage sur le comportement modal des secteurs de redresseur, c'est la raison pour laquelle uniquement le désaccordage mécanique est considéré.

Le désaccordage involontaire possède un impact plus ou moins important sur le comportement modal selon la configuration de la roue aubagée. Wagner [Wag66], Dye et Henry [DH69], et Ewins [Ewi69, Ewi73] ont été parmi les premiers à considérer le désaccordage et ont mis en avant le fait que certaines aubes possédaient une amplitude de réponse plus forte que les autres pour une excitation périodique donnée. Cela signifie que certains modes possèdent une localisation énergétique [Pie88, KP97a, KP97b] au niveau de certaines aubes, rompant la représentation par modes à diamètres, et pouvant entraîner une amplification de la réponse maximale observable. Ainsi la réponse d'une roue désaccordée peut être supérieure à celle observée dans le cas accordé. C'est ce qu'illustre la figure I.12 de Castanier et Pierre [CP97, CP06], en montrant que l'amplitude de la réponse d'une roue mobile désaccordée peut être multiplié par un facteur 3 selon le taux de désaccordage aléatoire considéré.

Whitehead [Whi98] évalue le taux maximal d'amplification τ_N de la réponse vibratoire dû au désaccordage en fonction du nombre de pales N de la roue aubagée :

$$\tau_N = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{N}) \quad (\text{I.7})$$

Lorsque le taux de désaccordage augmente, l'amplification semble tendre vers

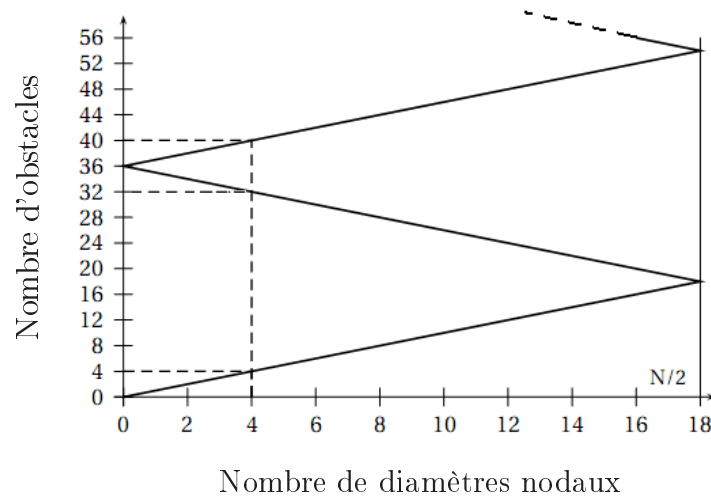


FIGURE I.11 – Diagramme ZigZag [Sal11]

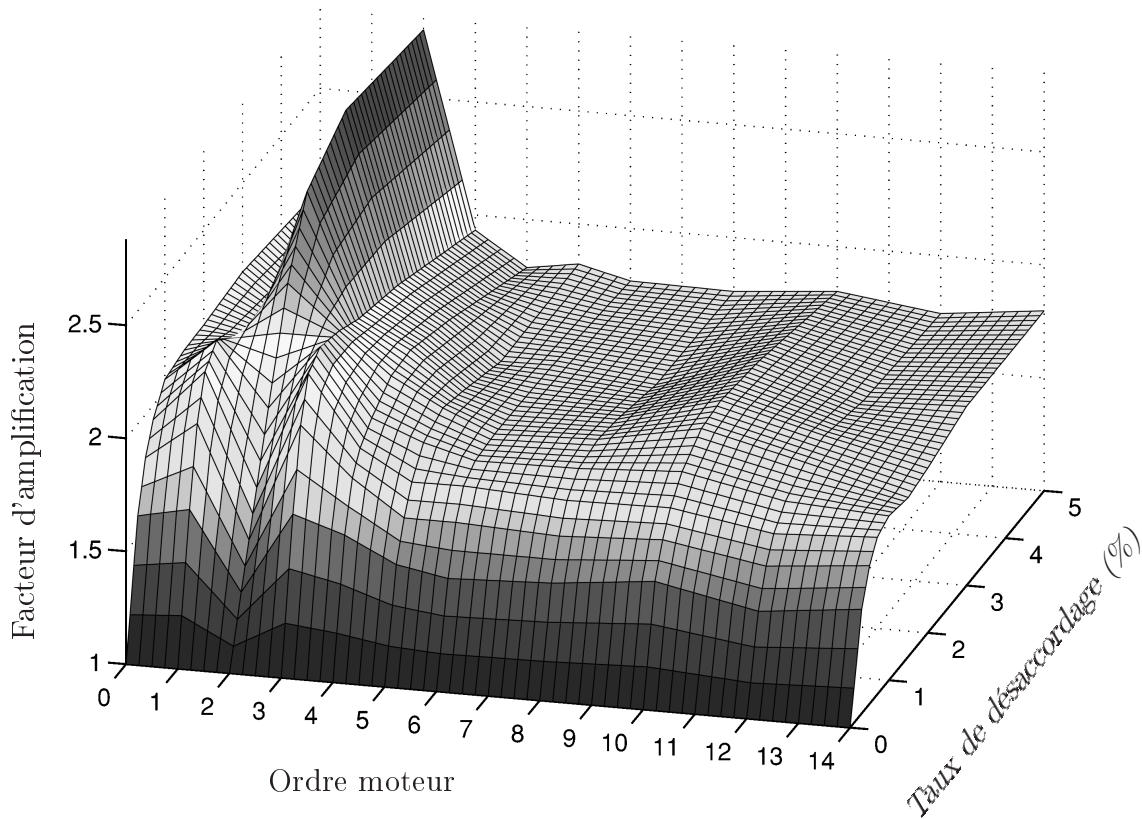


FIGURE I.12 – Évolution de l'amplification de la réponse dynamique d'une roue aubagée mobile selon le taux de désaccordage [CP06]

une valeur limite de 70% qui peut être recherchée lors de la conception d'une roue aubagée. En effet, l'introduction d'un désaccordage volontaire, qui consiste à modifier une ou plusieurs aubes afin d'obtenir un taux de désaccordage élevé permet de maîtriser et de prédire l'amplitude de la réponse et donc de ne plus subir l'impact

du désaccordage involontaire [CP02, CLRGM03, LCP04, Mba09, Caz14].

Cette section nous a permis de détailler les propriétés mathématiques liées à la dynamique des roues aubagées et d'introduire la notion de désaccordage. La section suivante s'intéresse à la problématique particulière de la dynamique des redresseurs sectorisés et notamment à l'influence importante du désaccordage sur ce type de structure.

3 Cas des redresseurs sectorisés

3.1 Étude phénoménologique numérique d'un secteur de redresseur industriel

Dans le cadre de cette thèse, les redresseurs sont sectorisés. Ils sont donc constitués de plusieurs secteurs monoblocs d'aubes indépendants les uns des autres, en considérant un carter indéformable et l'absence de contacts inter-secteurs. Ces pièces ne tournent pas et ne sont pas soumises aux effets d'assouplissement centrifuge, gyroscopique et d'accélération angulaire. Les matrices associées sont donc nulles $[G] = [N] = [P] = [0]$. De plus, l'onde de vibration ne peut plus se propager de manière cyclique puisqu'elle est réfléchiée par les bords des redresseurs. La symétrie cyclique ne peut alors plus être considérée, impliquant une réponse modale du redresseur bien plus complexe puisqu'elle ne se présente plus sous la forme de modes à diamètres nodaux. Ainsi, les coïncidences, mises en avant par le diagramme de Campbell, présentant un risque plus important, ne peuvent plus être identifiées par le diagramme ZigZag.

De plus, la sectorisation des redresseurs laisse apparaître des zones de fortes densité modale (cf. Sec. I.3) regroupées par famille de modes, telle que les modes d'ensemble et les modes de flexion et de torsion d'aubes, au niveau des diagrammes de Campbell ne permettant pas d'identifier précisément expérimentalement les modes susceptibles de réagir pour une excitation donnée. Il est donc nécessaire de développer une méthodologie numérique robuste qui permette de répondre à cette problématique, notamment en prenant en compte l'influence du désaccordage, introduite dans le paragraphe suivant.

La figure I.13 montre un secteur de redresseur de compresseur haute pression. Il est composé de douze aubes reliées entre elles par deux viroles. Une analyse modale a été faite dans le cas où le secteur est parfaitement accordé et aucune condition limite n'est prise en compte. Le temps de calcul nécessaire est de l'ordre de l'heure pour un modèle de cette taille sans post-traitement pour le calcul des contraintes avec un code commercial. La figure I.14 présente l'évolution des premières fréquences propres normalisées des modes élastiques en fonction du numéro de mode. Les modes de corps rigides ne sont donc pas tracés sur cette figure. Les résultats ont été normalisés par rapport à la septième fréquence propre élastique, correspondant au premier mode de torsion d'aubes.

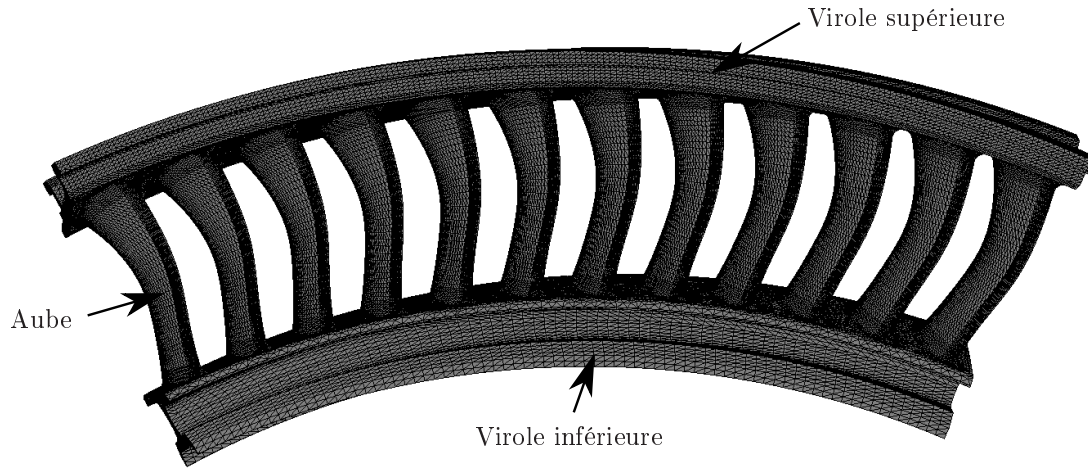


FIGURE I.13 – Secteur de redresseur industriel

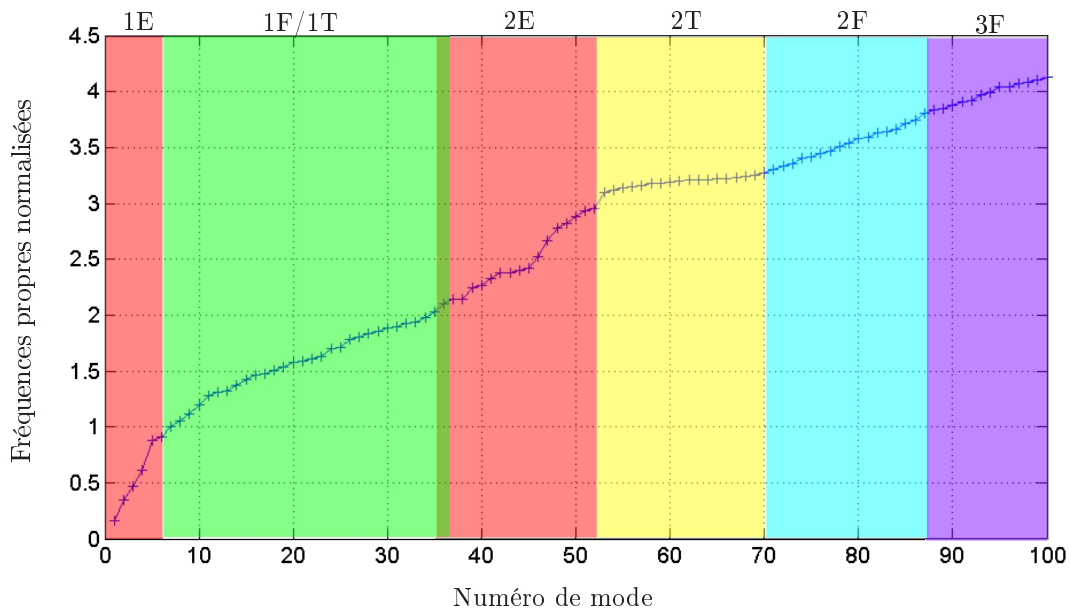


FIGURE I.14 – Évolution de la fréquence propre normalisée en fonction du numéro de mode

La figure I.14 met en avant des zones de fortes densités modales, notamment avec la présence d'une vingtaine de mode 2T compris dans une bande fréquentielle large d'environ 4% autour de la fréquence moyenne. Ces zones sont essentiellement composées de modes de flexion (1F/2F/3F) et de torsion (1T/2T) d'aubes. La zone 1F/1T laisse même apparaître des modes qui couplent la flexion et la torsion d'aubes comme l'illustre la figure I.15. Les modes d'ensemble (1E/2E) correspondent à des modes couplant des mouvements d'aubes et de viroles (cf. Fig. I.16). La distinction des modes peut s'effectuer en utilisant des critères énergétiques en comparant l'énergie de déformation d'une aube du secteur à celle d'une aube seule par exemple.

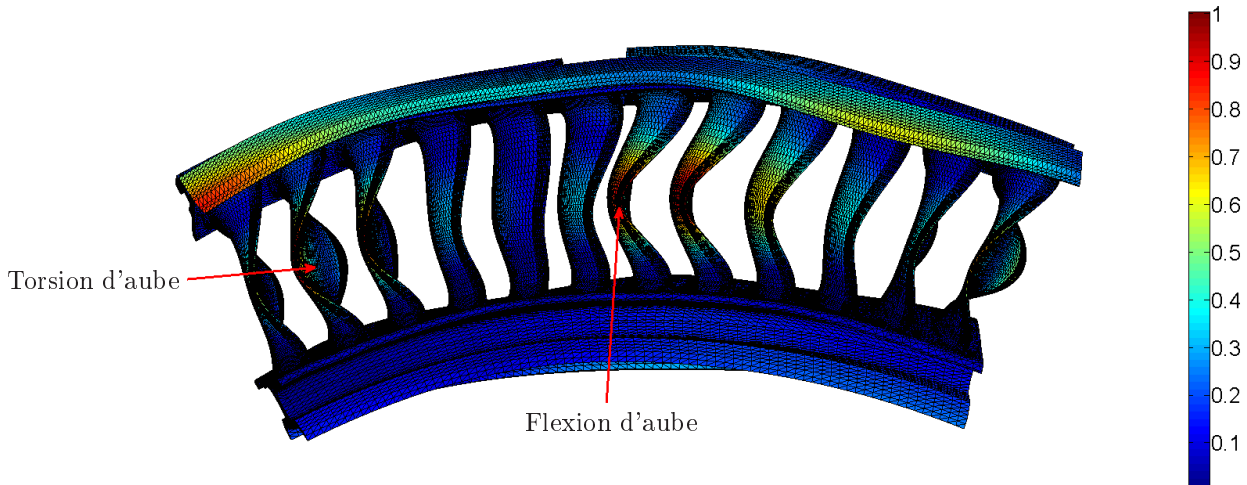


FIGURE I.15 – Déformée propre du 16^{ème} mode élastique présentant de la flexion (1F) et de la torsion (1T) d'aube

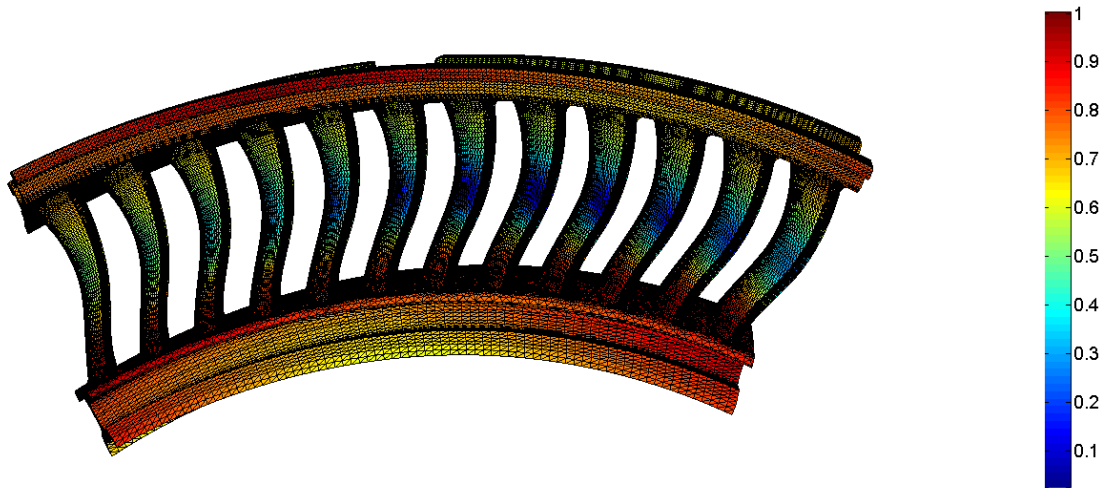


FIGURE I.16 – Déformée propre du 2^{ème} mode élastique correspondant à un mode d'ensemble

3.2 Influence du désaccordage sur la dynamique des redresseurs

Ce paragraphe s'intéresse à l'influence du désaccordage sur la dynamique des redresseurs sectorisés. Afin de l'observer sur un cas concret, le redresseur industriel présenté figure I.13 est désaccordé et soumis à un chargement périodique quelconque. Le désaccordage est paramétrique et modélisé par une variation de $\pm 5\%$ du module d'Young de chaque aube et de chaque virole autour de sa valeur moyenne. La variation des modules d'Young est une modélisation globale du désaccordage de la structure. Elle est généralement suffisante puisqu'elle permet de recalibrer la plupart des essais expérimentaux [NAG15]. La réponse forcée est ensuite calculée pour plusieurs situations de désaccordage.

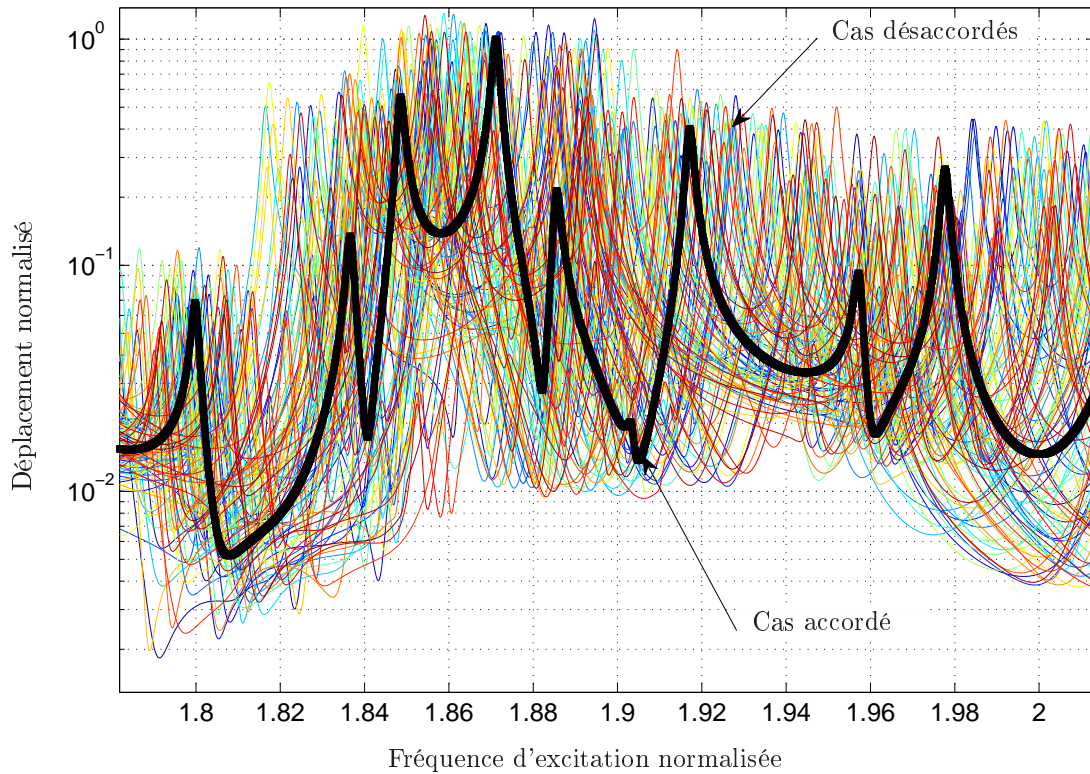


FIGURE I.17 – Réponses fréquentielles pour différents cas de désaccordage

La figure I.17 présente la réponse forcée au niveau du milieu du bord de fuite de l'une des aubes pour 101 situations de désaccordage (courbes colorées), dont le cas accordé (courbe noire). La plage d'excitation considérée correspond à une partie représentative de la bande modale correspondant aux premiers modes de flexion et de torsion d'aubes. Les résultats ont été normalisés par rapport à la fréquence propre associée au premier mode de torsion d'aubes pour les fréquences d'excitation et par rapport à niveau maximum du cas accordé sur cette plage de fréquence pour les déplacements.

Cette figure met en avant l'importante variabilité de la réponse forcée d'une situation de désaccordage à l'autre, aussi bien en termes de « positionnement » fréquentiel des résonances que d'amplitude, malgré le peu de configurations considérées. Les résonances observées peuvent présenter une amplification de plus de 50% selon le cas de désaccordage par rapport au cas accordé. Les valeurs observées sont bien inférieures à celle de Castanier et Pierre [CP06] mais peuvent être expliquées par l'attache du pied et de la tête d'aube à deux viroles ayant tendance à rigidifier l'ensemble. La prédiction du comportement vibratoire d'un secteur de redresseur soumis aux tolérances d'usinage, et donc présentant un désaccordage involontaire inconnu, ne peut être faite en considérant uniquement le modèle numérique accordé. Ceci confirme bien la nécessité de prendre en compte les incertitudes liées au processus de fabrication lors de la modélisation du comportement dynamique du secteur de redresseur, d'autant que la littérature est plutôt orientée vers les roues aubagées mobiles.

3.3 Problématique de positionnement de jauges de déformation

Ce paragraphe s'intéresse à la problématique de positionnement des jauges de déformation sur le secteur de redresseur lors d'essais expérimentaux, qui permettent de vérifier la conformité du modèle numérique de la structure. Le diagramme de Haigh (cf. Fig. I.18) est l'un des outils utilisés lors de la conception, il permet de définir la contrainte alternée σ_a admissible pour un nombre de cycle donné en fonction de la contrainte statique σ_s à partir des modélisations de Goodman [Goo99], de Soderberg ou encore de Gerber, pour un matériau donné.

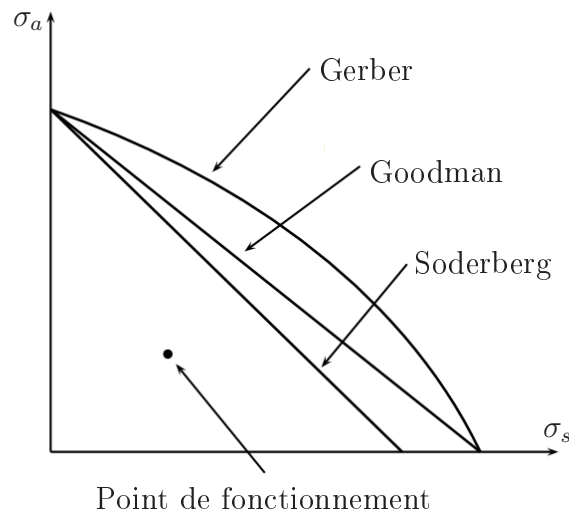


FIGURE I.18 – Diagramme de Haigh [Sal11]

L'espace sous la courbe définit l'ensemble des points de fonctionnement possibles pour une structure. Lors de la conception des secteurs de redresseur, ce diagramme est généré et recalé pour chaque mode numérique du modèle accordé. Lors des essais, les contraintes statiques et alternées sont monitorées afin de déterminer le point de fonctionnement pour chaque mode expérimental. Ce point est ensuite reporté sur les différents diagrammes de Haigh, associés à chaque mode, afin de quantifier l'écart à la limite pour chaque mode excité. Dans l'optique d'une diminution des coûts liés aux essais mais également de la réduction de l'intrusivité liée au collage des jauges et des fils, il n'est pas possible de placer une jauge de déformation sur chaque aube du secteur de redresseur. Il est alors nécessaire de déterminer un placement objectif de la jauge, voire des deux jauges, afin de prédire de manière robuste l'écart à la limite.

Le paragraphe précédent a permis de mettre en avant l'importance de l'influence du désaccordage sur les niveaux de déplacements et donc sur les niveaux de contraintes du secteur de redresseur. De plus, le monitoring du point de fonctionnement lors des essais est dépendant du placement de la jauge de déformation. Il est alors possible d'observer des niveaux très inférieurs ou supérieurs à ceux attendus numériquement

selon le désaccordage involontaire de la structure. En effet, les modes numériques du modèle accordé et expérimentaux n'étant globalement pas corrélés, le report du point de fonctionnement sur les différents diagrammes de Haigh perd de son sens puisque ceux-ci sont calés en se basant sur les modes calculés numériquement. De plus, la contrainte admissible au niveau de la zone d'observation dépend de la contrainte maximale sur l'ensemble de la structure pour un mode donné. Il est alors important de ne pas dépasser cette contrainte au niveau de la zone d'observation afin de s'assurer que la contrainte à rupture n'est pas atteinte au niveau de la zone, non monitorée, où la contrainte est maximale. Cependant, lorsque la structure est désaccordée, la déformée modale est altérée et la zone de contrainte maximale peut être différente. Il est alors possible d'observer une contrainte alternée supérieure à celle admissible sans atteindre le niveau de rupture puisque la contrainte maximale globale n'est pas atteinte.

L'objectif de cette thèse est donc de développer une modélisation qui prenne en compte les incertitudes afin de prédire statistiquement les zones de contrainte maximale les plus probables. Cette méthodologie devra permettre de déterminer une distribution statistique des niveaux maximaux de chaque aube liés au désaccordage du secteur de redresseur. Le placement de(s) la jauge(s) de déformation, basé sur cette répartition, devra permettre de monitorer les zones de contrainte maximale.

4 Conclusion

Ce premier chapitre a permis d'introduire les problématiques industrielles liées aux roues aubagées dans les turbomachines destinées à la propulsion d'aéronefs. Dans un premier temps, le principe de fonctionnement d'un turboréacteur est détaillé puis les différentes sources de vibrations associées sont présentées. Les excitations, majoritairement d'origine aérodynamique, subies par les roues aubagées ont un impact important sur leur comportement dynamique. La particularité des structures à symétrie cyclique est ensuite introduite ainsi que la méthode de réduction associée aux propriétés physiques de ces structures. La méthode de symétrie cyclique basée sur une décomposition harmonique de la réponse a été présentée. Cette méthode repose sur la répétitivité exacte d'un secteur autour d'un axe de révolution, ce qui ne permet pas de l'appliquer au cas des redresseurs sectorisés à cause de la rupture de symétrie présente entre chaque secteur. Une propagation cyclique de l'onde de déformation ne peut alors pas être considérée. Le désaccordage des roues aubagées est également présenté et son influence sur leur comportement dynamique est explicitée. Ce phénomène lié aux dispersions matériaux et géométriques a tendance à fortement amplifier la réponse dynamique et localiser l'énergie sur une ou plusieurs aubes en particulier, complexifiant la prédiction du comportement dynamique des roues aubagées. Enfin, la problématique liée aux redresseurs sectorisés a été abordé en mettant en avant les zone de forte densité modale liée à la sectorisation, et la forte influence du désaccordage sur les réponses dynamiques. Ces phénomènes complexifient la prédiction du comportement dynamique des redresseurs et l'utilisation

des outils classiques de conception.

Ce chapitre a donc permis de mettre en avant les problématiques industrielles liées à la sectorisation des redresseurs, et notamment l'importance de développer une méthodologie qui permette de prendre en compte les incertitudes liées au process de fabrication afin de prédire, de manière robuste, le comportement dynamique des redresseurs sectorisés en présence de désaccordage. Le chapitre suivant s'intéresse à la modélisation de ces incertitudes.

Chapitre II

Méthodes de modélisation de paramètres incertains

Ce chapitre s'intéresse aux méthodes de modélisation de l'incertitude dans les systèmes mécaniques. Dans un premier temps, les différentes méthodes présentes dans la littérature sont comparées. Puis, les méthodes de construction de lois de probabilité, de réduction de champs stochastiques et résolution associées sont décrites, dans le cas d'une approche probabiliste. Enfin, la stratégie adoptée et son application à un modèle simplifié de secteur de redresseur sont présentées.

Sommaire

1	Généralités sur les méthodes de modélisation de paramètres incertains	26
2	Construction des lois de probabilité	27
2.1	Rappels sur la théorie des probabilités	27
2.2	Principe du maximum d'entropie	29
2.3	Représentation par les chaos polynomiaux	30
2.4	Réduction des champs stochastiques	33
3	Solveurs stochastiques	34
3.1	Méthodes d'échantillonnage	35
3.2	Méthode des perturbations	36
3.3	Méthode spectrale des éléments finis stochastiques	36
4	Stratégie adoptée et application au cas d'un redresseur simplifié	37
4.1	Présentation du redresseur simplifié	37
4.2	Modélisation des incertitudes	39
4.3	Résultats sur les réponses forcées stochastiques du redresseur simplifié	42
5	Conclusions sur la modélisation des paramètres incertains	54

1 Généralités sur les méthodes de modélisation de paramètres incertains

La construction de modèles plus pertinents nécessitent d'accélérer les temps de calcul en optimisant l'utilisation de la puissance de calcul disponible ou encore de détailler les modélisations physiques en prenant en compte, par exemple, l'incertitude de certains paramètres. Il existe deux grandes catégories de méthodes de modélisation d'incertitude, les méthodes stochastiques basées sur les théories probabilistes et les méthodes non-stochastiques qui ne le sont pas. Puel [Pue04] a répertorié et détaillé la plupart des méthodes existantes concernant la modélisation des incertitudes. Ces catégories sont explicitées ci-après.

Les méthodes stochastiques reposent sur les théories probabilistes. La méthode la plus connue est celle de Monte Carlo développée par Metropolis et Ulam [MU49] à la fin des années 1940. Parmi les méthodes stochastiques, il existe également la méthode des perturbations synthétisée par Laplace, Tisserand et Poincaré [LT90] à la fin du 19^{ème} siècle et la méthode spectrale proposée par Ghanem et Spanos [AGPRH14]. Ces méthodes sont qualifiées de paramétriques puisque l'aléa porte sur des paramètres identifiés du modèle. La difficulté est donc d'identifier correctement les paramètres incertains ainsi que leur loi de probabilité. Certains ont tenté d'identifier ces paramètres par le biais d'essais de caractérisation d'essais adéquats [JPC01, JPC02, PLS+06, LTS+07, ML93]. D'autres méthodes ont également fait leur apparition ces dernières années comme les méthodes non-paramétriques [Soi86, Soi94, Soi00, CLS04, NAG14] et commencent à être utilisées. Ces méthodes permettent d'introduire directement l'aléa dans les matrices généralisées du modèle sans passer par l'identification des paramètres incertains afin d'obtenir une modélisation plus globale de l'incertitude.

Les méthodes non-stochastiques reposent sur des théories complexes à mettre en œuvre en bureaux d'études. Elles ne seront pas explicitées dans ce document. Les travaux de Shannon [Sha48] repris par Klir [Kli91] ont donné naissance à la théorie généralisée de l'information qui considère l'information perçue d'un système comme incertaine. Moore [Moo79] a introduit la théorie des intervalles basée sur l'introduction d'un intervalle qui englobe toutes les possibilités sans définir explicitement de variabilité sur les paramètres. Dessombz [DTLJ01, Des00] a proposé une application de cette théorie à la dynamique des structures. La théorie des ensembles flous, introduite par Zadeh [Zad65], considère différents niveaux de vérité pour une proposition. Ben-Haim et Elishakoff [BhE90, VCBH02] ont développé les modèles convexes d'incertitude ou *info-gap models*. Cette théorie consiste à introduire une notion de *lacune* d'information entre ce qui est connu et ce qui devrait l'être. Toutes ces théories ont été développées en marge des théories probabilistes afin de pallier les problèmes de modélisation des systèmes présentant de fortes non-linéarités rencontrés par les méthodes stochastiques. Cependant, outre la complexité théorique des méthodes non-stochastiques, il est difficile de rattacher la cause de l'incerti-

tude aux paramètres du modèle étudié. Dans le cadre des redresseurs sectorisés, la modélisation du désaccordage peut donc s'avérer complexe.

Une approche probabiliste paramétrique est détaillée, implémentée et testée sur un modèle de redresseur simplifié dans la suite de ce chapitre.

2 Construction des lois de probabilité

La première étape de la modélisation des incertitudes consiste à construire les lois de probabilités associées aux paramètres incertains. La modélisation retenue est paramétrique et chacun des paramètres incertains identifiés sera piloté par une variable aléatoire de densité de probabilité à définir.

2.1 Rappels sur la théorie des probabilités

2.1.1 Définition d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire Ξ est une application définie sur un espace probabilisé $(\Theta, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ à valeurs dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \Xi : \theta &\rightarrow \Xi(\theta) \\ \Theta &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \tag{II.1}$$

où Θ est l'ensemble des événements θ élémentaires, appelé également univers. \mathcal{T} est l'ensemble de toutes les parties de \mathbb{R} (événements) qui permettent de définir une mesure de probabilité, appelé également tribu de Θ . \mathcal{P} correspond à la loi de probabilité sur (Θ, \mathcal{T}) . Il s'agit ici d'une application mesurable, c'est-à-dire que $\forall B \in \mathcal{B}, \Xi^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, avec \mathcal{B} tribu de \mathbb{R} . Ainsi, $\forall \theta \in \Theta$ fixé, $\Xi(\theta) \in \mathbb{R}$ est une réalisation de la variable aléatoire Ξ .

Dans la suite de ce document, par souci de simplification, il est fait abstraction de l'espace probabilisé $(\Theta, \mathcal{T}, \mathcal{P})$. La variable aléatoire $\Xi(\theta)$ est alors notée Ξ .

La fonction de répartition $F_{\Xi}(\xi)$ de la variable aléatoire Ξ est définie par :

$$\begin{aligned} F_{\Xi} : \xi &\rightarrow F_{\Xi}(\xi) &= \text{Prob}\{\Xi \leq \xi\} &= P_{\Xi}(B_{\xi}) &= \int_{B_{\xi}} P_{\Xi}(d\tilde{\xi}) \\ \mathbb{R} &\rightarrow [0; 1] \end{aligned} \tag{II.2}$$

où $B_{\xi} = \{\Xi, \Xi \leq \xi\} \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$.

Lorsque la fonction de répartition F_{Ξ} est dérivable, on a :

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow p_{\Xi}(\xi) = \frac{dF_{\Xi}(\xi)}{d\xi} \\ \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{II.3}$$

Comme $P_{\Xi}(d\xi) = dF_{\Xi}(\xi)$, on a alors $P_{\Xi}(d\xi) = p_{\Xi}(\xi)d\xi$, où $p_{\Xi}(\xi)$ est la densité de probabilité de la loi P_{Ξ} par rapport à $d\xi$. Dans la suite de ce document, toutes les variables aléatoires sont supposées admettre une densité de probabilité $p_{\Xi}(\xi)$

Le support \mathcal{S}_{Ξ} d'une loi de probabilité est l'ensemble tel que :

$$\forall B \notin \mathcal{S}_{\Xi} \subset \mathbb{R}, P_{\Xi}(B) = 0 \quad (\text{II.4})$$

2.1.2 Moments d'une loi de probabilité

Les moments d'une loi de probabilité sont des indicateurs statistiques rendant compte de la dispersion d'une variable aléatoire. Les moments d'ordre r d'une variable aléatoire Ξ , lorsqu'ils existent, sont définis par :

$$m_{\Xi,r} \hat{=} \int_{\mathcal{S}_{\Xi}} \xi^r p_{\Xi}(\xi) d\xi = \mathbb{E}[\Xi^r] \quad (\text{II.5})$$

En général, il est préférable de travailler avec des moments réduits ou encore centrés réduits tels que :

1 - l'espérance m_{Ξ} , correspondant à la moyenne, est définie par :

$$\mu_{\Xi} = \mathbb{E}[\Xi] = \int_{\mathcal{S}_{\Xi}} \xi p_{\Xi}(\xi) d\xi = m_{\Xi,1} \quad (\text{II.6})$$

L'unité de la moyenne est identique à celle de la grandeur moyennée.

2 - la variance V_{Ξ} ou l'écart-type $\sigma_{\Xi} = V_{\Xi}^{1/2}$, est définie par :

$$V_{\Xi} = \sigma_{\Xi}^2 = \mathbb{E}[(\Xi - \mu_{\Xi})^2] = \int_{\mathcal{S}_{\Xi}} (\xi - \mu_{\Xi})^2 p_{\Xi}(\xi) d\xi = m_{\Xi,2} - \mu_{\Xi}^2 \quad (\text{II.7})$$

Ces moments d'ordre 2 permettent de quantifier l'écart à la moyenne. L'unité de l'écart-type est identique à celle de la moyenne.

3 - le coefficient de dissymétrie γ_{Ξ} ou asymétrie [Hal14], est définie par :

$$\gamma_{\Xi} = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\Xi - \mu_{\Xi}}{\sigma_{\Xi}} \right)^3 \right] = \int_{\mathcal{S}_{\Xi}} \left(\frac{\xi - \mu_{\Xi}}{\sigma_{\Xi}} \right)^3 p_{\Xi}(\xi) d\xi \quad (\text{II.8})$$

Ce moment d'ordre 3, sans unité, est le premier paramètre de forme. Il permet de quantifier l'asymétrie de la loi de probabilité. Un coefficient positif indique une distribution décalée à gauche de la médiane et un coefficient négatif une distribution décalée à droite de la médiane.

4 - le kurtosis β_{Ξ} [zen14], est définie par :

$$\beta_{\Xi} = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\Xi - \mu_{\Xi}}{\sigma_{\Xi}} \right)^4 \right] = \int_{\mathcal{S}_{\Xi}} \left(\frac{\xi - \mu_{\Xi}}{\sigma_{\Xi}} \right)^4 p_{\Xi}(\xi) d\xi \quad (\text{II.9})$$

Ce moment d'ordre 4, sans unité, est le deuxième paramètre de forme. Il permet de quantifier « l'aplatissement » de la loi de probabilité. Plus le coefficient est élevé, moins la courbe est « aplatie » .

Le tableau II.1 répertorie les moments usuels pour les lois de probabilités les plus classiques. Les différents paramètres sont tels que $\mu \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction gamma Γ est définie par :

$$\Gamma : \xi \rightarrow \int_{\mathbb{R}_+} t^{\xi-1} e^{-t} dt \quad (\text{II.10})$$

Lois	Support	Densité	Moyenne	Écart-type	Asymétrie	Kurtosis
Uniforme	$[a; b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$	0	$\frac{9}{5}$
Normale	\mathbb{R}	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\mu_{\Xi}}{\sigma}\right)^2}$	μ	σ	0	3
Laplace	\mathbb{R}	$\frac{1}{2b} e^{-\frac{ \xi-\mu }{b}}$	μ	$b\sqrt{2}$	0	6
Gamma	\mathbb{R}_+	$\xi^{\alpha-1} \frac{\beta^{\alpha} e^{-\beta\xi}}{\Gamma(\alpha)}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}$	$\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$	$\frac{3(\alpha+2)}{\alpha}$

TABLE II.1 – Premiers moments statistiques de quelques lois de probabilités

2.2 Principe du maximum d'entropie

La théorie de l'information développée par Shannon [Sha48] permet de définir une entropie d'information $S(p_{\Xi})$ associée à une variable aléatoire Ξ de loi $p_{\Xi}(\xi)d\xi$:

$$S(p_{\Xi}) = - \int_{\mathbb{R}} p_{\Xi}(\xi) \log(p_{\Xi}(\xi)) d\xi \quad (\text{II.11})$$

Cette entropie permet d'estimer le niveau d'incertitude de la variable aléatoire. En effet, plus l'entropie sera élevée, plus la variabilité sera importante. Cette définition est similaire à l'entropie thermodynamique définie dans le second principe.

Ainsi, lorsque la densité de probabilité p_{Ξ} est inconnue, elle peut être construite à partir du principe de maximum d'entropie, théorie formalisée par Jaynes [Jay63] en 1956. Ce principe permet de maximiser la variabilité d'une variable aléatoire en tenant compte des contraintes associées telles que le support $\mathcal{S}_{\Xi} = \mathbb{K} \subset \mathbb{R}$, la moyenne μ_{Ξ} , l'écart-type σ_{Ξ} ou encore le fait que la somme des probabilités soit égale à 1. Cette dernière constituant la contrainte principale doit être vérifiée quelle que soit la loi que l'on cherche à construire :

$$\int_{\mathcal{S}_{E_i}} p_{E_i}(e_i) de_i = 1 \quad (\text{II.12})$$

Le problème de maximisation qui en résulte peut donc être résolu simplement comme un problème d'optimisation sous contraintes en utilisant les multiplicateurs de Lagrange. La méthode de calcul est détaillée section II.4.2.1 dans le cadre de l'application au redresseurs sectorisés.

2.3 Représentation par les chaos polynomiaux

2.3.1 Construction d'une loi indirecte par le chaos

Le paragraphe précédent permet de déterminer une densité de probabilité en utilisant une approche directe, c'est-à-dire en s'appropriant l'information disponible pour modéliser l'incertitude. Ce paragraphe propose de générer une loi de probabilité de manière indirecte, c'est-à-dire en construisant une application déterministe f définie par :

$$f : \xi \rightarrow f(\xi) = x \quad (\text{II.13})$$

Ainsi, la variable aléatoire X s'écrit :

$$X = f(\Xi) \quad (\text{II.14})$$

où Ξ est une variable aléatoire de loi continue connue $P_{\Xi}(d\xi) = p_{\Xi}(\xi)d\xi$.

L'objectif est donc maintenant d'identifier cette fonction déterministe f . Par exemple, la variable aléatoire X représente une fréquence propre et Ξ le module d'Young d'une structure. Il est supposé que la variable aléatoire X est une variable aléatoire du second ordre, c'est-à-dire que le moment d'ordre 2 existe. Il s'avère que cette hypothèse n'est pas si restrictive puisqu'elle sera toujours vérifiée dans le cas de notre étude. Il en résulte donc que :

$$E[X^2] < +\infty \Leftrightarrow E[X^2] < +\infty \Leftrightarrow \int_{\mathcal{S}_{\Xi}} f(\xi)^2 p_{\Xi}(\xi) d\xi < +\infty \quad (\text{II.15})$$

La fonction f appartient donc à l'espace de Lebesgue H défini par :

$$H = \mathcal{L}_{p_{\Xi}(\xi)d\xi}^2(\mathbb{R}) = \left\{ \xi \rightarrow f(\xi) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\mathcal{S}_{\Xi}} f(\xi)^2 p_{\Xi}(\xi) d\xi < +\infty \right\} \quad (\text{II.16})$$

Cet espace est muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Xi}$ défini par :

$$\forall (f, g) \in H^2, \langle f, g \rangle_{\Xi} = \int_{\mathcal{S}_{\Xi}} f(\xi)g(\xi)p_{\Xi}(\xi)d\xi = E[f(\Xi)g(\Xi)] \quad (\text{II.17})$$

H étant un espace de Lebesgue, il est également un espace de Hilbert de dimension infinie. Il peut donc être munie d'une base hilbertienne $\{\psi_k \in H, k \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, chaque fonction de H peut être approchée par une suite infinie dénombrable de fonctions :

$$\forall f \in H, X = f(\Xi) = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} f_{\alpha} \psi_{\alpha}(\Xi) \quad (\text{II.18})$$

Les fonctions constituant la base hilbertienne sont appelées fonctions du chaos. Les polynômes sont principalement utilisés comme fonctions de base, d'où l'appellation de chaos polynomial [Wie38]. L'orthogonalité des polynômes étant dépendante

du produit scalaire associé à l'espace de Hilbert considéré, elle dépend donc également de la densité de probabilité $p_{\Xi}(\xi)$. Les polynômes retenus seront donc différents d'une loi à l'autre. Le tableau II.2 présente les polynômes usuels retenus en fonction de la loi de probabilité.

Loi de probabilité	Polynôme	Support	Mesure
Normale	Hermite	$] -\infty; +\infty[$	$p_{\Xi}(\xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$
Uniforme	Legendre	$[-1; 1]$	$p_{\Xi}(\xi) = \frac{1}{2}$
Gamma	Laguerre	$[0; +\infty[$	$p_{\Xi}(\xi) = e^{-\xi}$
Beta (α, β)	Jacobi	$[a; b]$	$p_{\Xi}(\xi) = (1 - \xi)^{\alpha}(1 + \xi)^{\beta}$

TABLE II.2 – Exemples de probabilité et polynômes associés

Cette modélisation permet d'obtenir une fonction analytique de la fonction de répartition inverse $X = F_X^{-1}(\xi)$ de X qui dépend de la fonction de répartition inverse $\Xi = F_{\Xi}^{-1}(v)$ de Ξ , où Υ est une variable aléatoire uniforme de densité de probabilité $p_{\Upsilon}(v) = \mathbf{1}_{[0;1]}(v)$. Il est donc possible de générer des réalisations indépendantes $(X^{(1)}, \dots, X^{(\nu)})^t$, sans connaître la densité de probabilité, à partir des réalisations $(\Xi^{(1)}, \dots, \Xi^{(\nu)})^t$ de la variable Ξ . De plus, elle permet d'obtenir les quatre premiers moments statistiques par les formules suivantes à partir des coefficients du chaos :

$$\mu_X = f_0 \quad (\text{II.19})$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} f_{\alpha}^2 \quad (\text{II.20})$$

$$\gamma_X = \frac{1}{\sigma_X^3} \sum_{i=1}^{P-1} \sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^{P-1} E[\psi_i \psi_j \psi_k] f_i f_j f_k \quad (\text{II.21})$$

$$\beta_X = \frac{1}{\sigma_X^4} \sum_{i=1}^{P-1} \sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^{P-1} \sum_{l=1}^{P-1} E[\psi_i \psi_j \psi_k \psi_l] f_i f_j f_k f_l \quad (\text{II.22})$$

2.3.2 Généralisation au cas multidimensionnel

Le paragraphe précédent présente la théorie de la représentation d'une loi de probabilité X par le chaos polynomial dans le cas où cette loi dépendrait d'une seule variable aléatoire Ξ . Cette théorie peut être généralisée au cas multidimensionnel, c'est-à-dire au cas où la loi de probabilité de X dépend d'un champ stochastique de taille finie $M : \Xi = (\Xi_1, \dots, \Xi_M)^t$. Dans ce cas, l'approximation d'une fonction quelconque de H par une suite infinie de polynômes s'écrit :

$$\forall f \in H^M, X = f(\Xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \Psi_n(\Xi) \quad (\text{II.23})$$

où les polynômes Ψ_n vérifient,

$$\forall (\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_M^{(n)})^t \in \mathbb{N}^M, \exists n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \Psi_n(\Xi) = \prod_{m=1}^M \psi_{\alpha_m^{(n)}}(\Xi_m) \quad (\text{II.24})$$

où l'espace H^M est défini par

$$H^M = \{(\xi_1, \dots, \xi_M) \rightarrow f(\xi_1, \dots, \xi_M) : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}, \\ \int_{S_{\Xi}} f(\xi_1, \dots, \xi_M)^2 p_{\Xi_1}(\xi_1) \dots p_{\Xi_M}(\xi_M) d\xi_1 \dots d\xi_M < +\infty\} \quad (\text{II.25})$$

2.3.3 Troncature et convergence de l'approximation par la méthode des chaos

Les deux paragraphes précédents présentent la théorie qui permet d'approximer n'importe quelle fonction de H^M par une suite infinie de polynômes. Comme il n'est pas possible d'identifier l'infinité de coefficients du chaos f_n , il est nécessaire de tronquer cette suite à un ordre N fixé correspondant au degré polynomial maximal souhaité. L'équation (II.23) devient donc :

$$\forall f \in H^M, X_{(N)} = f(\Xi) = \sum_{n=0}^P f_n \Psi_n(\Xi) \quad (\text{II.26})$$

où les polynômes Ψ_n sont définis par :

$$\text{Soit } \mathbb{A}^N = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{N}^M / \sum_{m=1}^M \alpha_m \leq N \right\} ; \\ \forall n = 1 \dots \text{Card}(\mathbb{A}^N), \Psi_n(X) = \prod_{m=1}^M \Psi_{\alpha_m^{(n)}}(\Xi_m) \quad (\text{II.27})$$

et où le nombre de polynômes P dépend de la dimension stochastique M et du degré polynomial de troncature N :

$$P = \frac{(N+M)!}{N!M!} \quad (\text{II.28})$$

Pour rappel, « Card » correspond au cardinal d'un ensemble soit le nombre total d'éléments de cet ensemble.

Lorsqu'une troncature est appliquée, il en résulte une erreur résiduelle, due à l'écart entre la solution tronquée et la solution réelle, et donc due aux coefficients d'ordre supérieur non-estimés. Il est alors important d'estimer l'erreur due à la

troncature de sorte à pouvoir évaluer la convergence de la solution en fonction de l'ordre de troncature N . L'erreur est définie par :

$$Err_X(N) = \frac{\|X - X^{(N)}\|^2}{\|X\|^2} \quad (\text{II.29})$$

Cette équation peut être explicitée en considérant que :

$$\begin{aligned} \|X - X^{(N)}\|^2 &= E \left[(X - X^{(N)})^2 \right] = \left\langle \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n \Psi_n(\Xi), \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n \Psi_n(\Xi) \right\rangle_{\Xi} \\ &= \sum_{n_1=N+1}^{+\infty} \sum_{n_2=N+1}^{+\infty} f_{n_1} f_{n_2} \langle \Psi_{n_1}(\Xi), \Psi_{n_2}(\Xi) \rangle_{\Xi} \\ &= \sum_{n_1=N+1}^{+\infty} \sum_{n_2=N+1}^{+\infty} f_{n_1} f_{n_2} \delta_{n_1 n_2} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n^2 = \|X\|^2 - \sum_{n=0}^N f_n^2 \quad (\text{II.30}) \end{aligned}$$

L'erreur peut donc s'écrire sous la forme :

$$Err_X(N) = 1 - \frac{\sum_{n=0}^N f_n^2}{\|X\|^2} = 1 - \frac{\sum_{n=0}^N f_n^2}{m_{X,2}} \quad (\text{II.31})$$

Cette formule permet ainsi d'évaluer l'erreur due à la troncature en fonction des coefficients du chaos calculés. Le calcul des coefficients du chaos est explicité dans les paragraphes II.3.3 et III.2 pour certains cas.

2.4 Réduction des champs stochastiques

Un champ stochastique est une famille de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité. Ce champ permet de rendre compte d'une quantité aléatoire bien plus complexe faisant souvent référence à un processus stochastique spatial et/ou temporel. La dimension du champ stochastique d'un problème peut contenir plusieurs millions de variables aléatoires, ce qui n'est pas supporté par les moyens de calcul actuels. Il est donc nécessaire de générer de nouvelles variables aléatoires dont la loi de probabilité est liée à celles des premières variables. Une nouvelle fois, la loi de probabilité est construite de manière indirecte en fonction de lois existantes connues.

La méthode la plus couramment utilisée est l'expansion de Karhunen-Loève [BPS14, MK14], notamment proposée par Ghanem et Spanos [GS91]. Cette méthode est également connue sous le nom d'Analyse en Composantes Principales (ACP) ou Proper Orthogonal Decomposition (POD). D'autres méthodes telles que l'Expansion Optimal Linear Estimation (EOLE) présentée par Li et Der Kiureghian [LK93] ou l'Orthogonal Series Expansion (OSE) [ZE94] existent. Ces méthodes sont basées sur la covariance des variables aléatoires mais diffèrent par leur méthode de résolution. Wold a également développé une méthode itérative, la régression des moindres carrés partiels (PLS) [WRWD84, Wol01] couplant une méthode de régression itérative et l'analyse en composantes principales.

Expansion de Karhunen-Loève

L'expansion de Karhunen-Loève est basée sur l'utilisation des covariances des variables aléatoires de loi connue constituant le champ stochastique pour créer de nouvelles variables aléatoires indépendantes les unes des autres. Le nouveau champ stochastique est alors tronqué en conservant les variables aléatoires présentant la plus grande variabilité. La première étape de l'expansion consiste à expliciter la matrice de covariance \mathcal{R} associée aux variables aléatoires de départ Ξ :

$$[\mathcal{R}_\Xi] = [(\sigma_{\Xi_i \Xi_j})_{i,j=1..M_d}] \quad (\text{II.32})$$

avec,

$$\sigma_{\Xi_i \Xi_j} = \text{Cov}(\Xi_i, \Xi_j) = \int_{\mathcal{S}_{\Xi_i}} \int_{\mathcal{S}_{\Xi_j}} (\xi_i - \mu_{\Xi_i}) (\xi_j - \mu_{\Xi_j}) p_{\Xi_i}(\xi_i) p_{\Xi_j}(\xi_j) d\xi_i d\xi_j \quad (\text{II.33})$$

où M_d est le nombre de variables aléatoires initial et \mathcal{S}_{Ξ_i} l'univers associé à la variable aléatoire Ξ_i . Une fois la matrice de covariance construite, il suffit de calculer ses valeurs propres λ_k , classées par ordre décroissant. Les vecteurs propres \mathbf{c}_k conservés sont ceux associés aux valeurs propres telles que :

$$\frac{\sum_{k=1}^M \lambda_k}{\sum_{k=1}^{M_d} \lambda_k} > p \quad (\text{II.34})$$

où p est une valeur comprise entre 0 et 1, qui définit le pourcentage d'information à conserver. Le champ stochastique est donc réduit à M variables aléatoires indépendantes. Les nouvelles variables aléatoires \mathbf{Z} sont donc définies par :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_M \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1 \quad \dots \quad \mathbf{c}_M]^t \begin{bmatrix} \Xi_1 \\ \vdots \\ \Xi_{M_d} \end{bmatrix} = [C]^t \Xi \quad (\text{II.35})$$

Il est important de noter que les lois de probabilité suivies par ces nouvelles variables aléatoires peuvent s'avérer très complexes, notamment lorsque les variables aléatoires de départ ne sont pas gaussiennes. La densité de probabilité associée $p_{\mathbf{Z}}(\zeta_1, \dots, \zeta_M)$ peut ne pas être explicite. Malgré cela, cette méthode permet de générer des variables aléatoires indépendantes, dont l'intérêt est explicité dans le paragraphe III.2.2.2.

3 Solveurs stochastiques

Une fois que les lois de probabilité de nos paramètres incertains ont été explicitées, il existe différents solveurs stochastiques permettant de générer des données d'intérêt telles que les moments, les enveloppes ou encore les quantiles ; autant de grandeurs statistiques qui permettent d'améliorer la robustesse du dimensionnement des pièces mécaniques.

Parmi les méthodes stochastiques, il existe la méthode de linéarisation stochastique, ou la méthode des moments, qui ont l'inconvénient d'être intrusives et dont la convergence ne peut être contrôlée. Il existe également la méthode des perturbations (cf. Sec. II.3.2) qui consiste à « perturber » la solution autour de sa valeur moyenne. Cette méthode est intrusive et ne permet pas de contrôler la convergence. Les deux méthodes les plus utilisées aujourd'hui sont la méthode de Monte Carlo (cf. Sec. II.3.1) et la méthode spectrale (cf. Sec. II.3.3).

3.1 Méthodes d'échantillonnage

Les méthodes d'échantillonnage, dont la plus connue est celle de Monte Carlo [MU49, Bau58, BH02, KR08], consiste à effectuer un très grand nombre R de calculs déterministes en faisant varier les paramètres incertains suivant une loi de probabilité donnée. À partir des calculs réalisés, il est possible d'en extraire plusieurs grandeurs statistiques empiriques telles que la moyenne $\hat{\mu}_X$, l'écart-type $\hat{\sigma}_X$, le coefficient de dissymétrie $\hat{\gamma}_X$, le kurtosis $\hat{\beta}_X$ ou encore les quantiles $\hat{Q}_X^{(p)}$.

$$\hat{\mu}_X = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R X^{(r)} \quad (\text{II.36})$$

$$\hat{\sigma}_X = \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R (X^{(r)} - \hat{\mu}_X)^2} \quad (\text{II.37})$$

$$\hat{\gamma}_X = \frac{R}{(R-1)(R-2)} \frac{\sum_{r=1}^R (X^{(r)} - \hat{\mu}_X)^3}{\hat{\sigma}_X^3} \quad (\text{II.38})$$

$$\hat{\beta}_X = \frac{R(R+1)}{(R-1)(R-2)(R-3)} \frac{\sum_{r=1}^R (X^{(r)} - \hat{\mu}_X)^4}{\hat{\sigma}_X^4} - \frac{3}{(R-2)(R-3)} \quad (\text{II.39})$$

$$\hat{Q}_X^{(p)} = X^{(\lfloor Rp \rfloor)} \quad (\text{II.40})$$

où R correspond au nombre de choix aléatoires, $X^{(r)}$ aux résultats classés par ordre croissant, p au pourcentage du quantile et $\lfloor Rp \rfloor$ à la partie entière de produit $p \times R$. Les grandeurs empiriques $\hat{\mu}_X$, $\hat{\sigma}_X$, $\hat{\gamma}_X$, $\hat{\beta}_X$ et $\hat{Q}_X^{(p)}$ sont des estimateurs sans biais des grandeurs théoriques respectives μ_X , σ_X , γ_X , β_X et $Q_X^{(p)}$. A chacune de ces grandeurs empiriques, il est possible d'associer un intervalle de confiance incluant la grandeur théorique :

$$P \left(\mu_X \in \left[\hat{\mu}_X - z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\sqrt{R}}; \hat{\mu}_X + z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\sqrt{R}} \right] \right) = 1 - \alpha \quad (\text{II.41})$$

$$P \left(\sigma_X^2 \in \left[\frac{(R-1)\hat{\sigma}_X^2}{\nu_{1-\alpha/2}}; \frac{(R-1)\hat{\sigma}_X^2}{\nu_{\alpha/2}} \right] \right) = 1 - \alpha \quad (\text{II.42})$$

$$P \left(Q_X^{(p)} \in [X^{(I)}; X^{(J)}] \right) = 1 - \alpha \quad (\text{II.43})$$

avec :

$$I = \lfloor Rp - \sqrt{Rp(1-p)}z_{1-\alpha/2} \rfloor \quad (\text{II.44})$$

$$J = \lfloor Rp + \sqrt{Rp(1-p)}z_{1-\alpha/2} \rfloor + 1 \quad (\text{II.45})$$

où α est un nombre réel compris entre 0 et 1 correspondant au degré d'erreur autorisé. Le réel $1 - \alpha$ correspond au pourcentage de confiance autorisé. $z_{1-\alpha/2}$ correspond à la valeur de la loi normale centrée réduite inverse en $1 - \alpha/2$ si $R > 30$. Dans le cas contraire, $z_{1-\alpha/2}$ correspond à la valeur de la loi de Student inverse de paramètre $R - 1$. $\nu_{1-\alpha/2}$ et $\nu_{\alpha/2}$ correspondent à la valeur de la loi du χ^2 inverse respectivement en $1 - \alpha/2$ et $\alpha/2$.

Ces intervalles de confiance mettent en avant la convergence en \sqrt{R} de la méthode de Monte Carlo, ce qui est très faible. Il existe néanmoins des méthodes capables d'améliorer la convergence telles que l'échantillonnage en Latin Hypercube ou l'échantillonnage orthogonal [MBC79]. La méthode de Monte Carlo reste à ce jour la méthode la plus utilisée pour sa fiabilité et sa robustesse. Les principaux avantages de cette méthode résident dans le fait que sa convergence est indépendante de la dimension stochastique du problème, qu'elle est massivement parallélisable et non intrusive. Néanmoins, elle peut tout de même s'avérer très coûteuse en termes de temps de calcul. Cette méthode sert de référence dans la suite de ce document.

3.2 Méthode des perturbations

La méthode des perturbations [LBM86, ML93, He00] est basée sur le développement en série de Taylor des paramètres de sortie X en fonction des M paramètres incertains $\Xi = (\Xi_1, \dots, \Xi_M)^t$:

$$X = \mu_X + \sum_{i=1}^M \frac{\partial X}{\partial \Xi_i}(0) \Xi_i + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{\partial^2 X}{\partial \Xi_i \partial \Xi_j}(0) \Xi_i \Xi_j + \dots \quad (\text{II.46})$$

Les coefficients de cette somme correspondent à la moyenne et aux dérivées partielles de la solution exacte, qui n'est pas connue. Ils sont donc déterminés en étudiant les variations de la solution autour de la position moyenne. Généralement, la solution approximée est tronquée à l'ordre 1 ou 2.

Cette méthode a été testée sur un redresseur simplifié en deux dimensions et validée lorsque la virole des redresseurs est très raide, découplant ainsi les mouvements de chaque aube. Ces travaux ont été présentés lors d'un colloque international [PTBG14] (cf. Annexe B.1). Ces travaux avaient permis d'établir une description synthétique des modes propres approximés.

3.3 Méthode spectrale des éléments finis stochastiques

L'approche spectrale de la méthode des éléments finis stochastiques [AGPRH14, Nou09, BI81, BSL04, Ber05, NBA10] consiste à approximer les modes propres d'une structure par une suite tronquée de polynômes du chaos [Wie38, SAJH10] :

$$\mathbf{\Omega}(\Xi) = \sum_{n=0}^P \boldsymbol{\omega}_n \Psi_n(\Xi) \quad (\text{II.47})$$

$$[\Phi(\Xi)] = \sum_{n=0}^P [\phi_n] \Psi_n(\Xi) \quad (\text{II.48})$$

où $\mathbf{\Omega}$ est le vecteur de variables aléatoires associées aux pulsations propres du système, $\boldsymbol{\omega}_n$ le vecteur de coefficients du chaos associé à l'approximation de $\mathbf{\Omega}$, $[\Phi]$ la matrice de variables aléatoires associées aux vecteurs propres, $[\phi]_n$ la matrice de coefficients du chaos associée à l'approximation de $[\Phi]$, Ψ_n les polynômes du chaos et Ξ le vecteurs de variables aléatoires modélisant l'aléa des paramètres géométriques, matériaux ou modaux.

Ces modes stochastiques sont ensuite insérés directement dans l'équation homogène d'équilibre dynamique (problème aux valeurs propres) :

$$([K(\Xi)] - \Omega_k^2 [M(\Xi)]) \Phi_k = 0 \quad (\text{II.49})$$

où $[K(\Xi)]$ et $[M(\Xi)]$ sont respectivement les matrices incertaines de raideur et de masse, Ω_k et Φ_k sont respectivement les variables aléatoires associées à la pulsation propre et au vecteur propre du $k^{\text{ème}}$ mode. Il s'agit alors d'effectuer une analyse modale stochastique [Des00, Sal11, STBJ12] en projetant l'équation sur chacun des polynômes de la base du chaos. Cette méthode est très intrusive puisqu'elle doit être intégrée directement dans le code effectuant l'analyse modale. En revanche, le calcul des deux premiers moments statistiques est immédiat (cf. Eq. (II.22)).

4 Stratégie adoptée et application au cas d'un redresseur simplifié

4.1 Présentation du redresseur simplifié

Cette section s'intéresse à l'application du développement théorique des parties précédentes à la structure particulière d'un secteur de redresseur simplifié : un redresseur composé de cinq aubes liées par une virole inférieure et une virole supérieure est donc considéré. La structure est modélisée par un treillis 2D de poutres simplifiées de type Euler-Bernoulli à 147 nœuds comme le montre la figure II.1.

Afin de modéliser la différence de moment quadratique entre les aubes et les viroles, un facteur de couplage $C_{A/V}$ entre le module d'Young moyen des viroles E_{vir} et le module d'Young moyen des aubes E_{aube} est introduit :

$$E_{vir} = C_{A/V} E_{aube}. \quad (\text{II.50})$$

La variabilité du modèle est principalement due aux dispersions matériaux et géométriques. L'incertitude du modèle peut alors se porter sur une multitude de

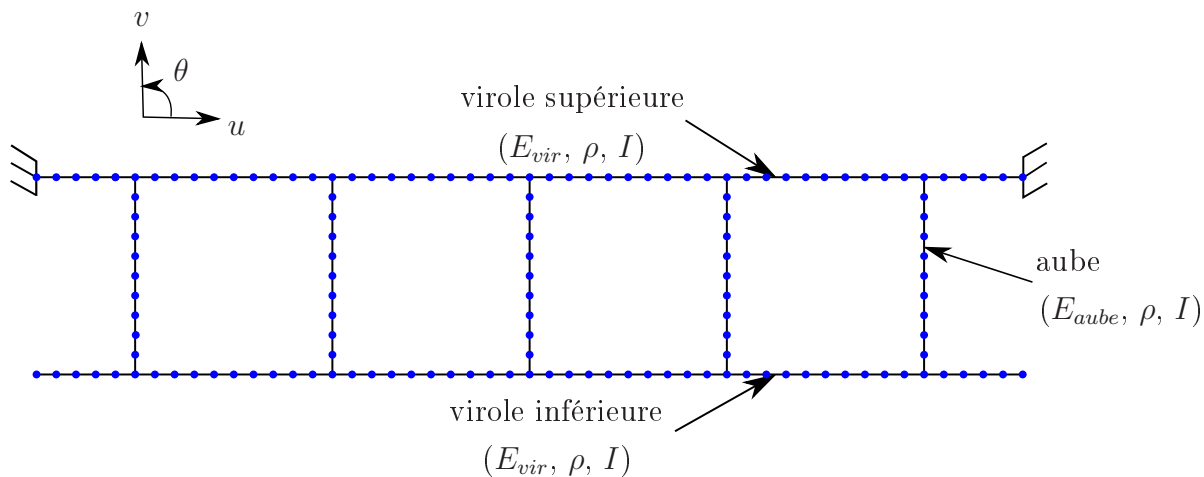


FIGURE II.1 – Modèle simplifié d'un secteur de redresseur

paramètres tels que le module d'Young, la masse volumique, la longueur, l'épaisseur et la hauteur ; sur autant de poutres élémentaires qu'il en existe dans le modèle. Dans la suite du document, le module d'Young moyen est noté E_μ , qu'il soit associé à une virole ou une aube.

Le principe fondamental de la dynamique est appliqué à ce redresseur en admettant directement une réponse harmonique de pulsation ω . Le système considéré n'est pas amorti. Le problème aux valeurs propres s'écrit :

$$\left([\tilde{K}] - \omega^2 [\tilde{M}] \right) \tilde{U} = \mathbf{F} \quad (\text{II.51})$$

où $[\tilde{K}]$ et $[\tilde{M}]$ sont respectivement les matrices incertaines de raideur et de masse, \mathbf{F} le vecteur force considéré, déterministe, et \tilde{U} le vecteur incertain de déplacements. Les matrices incertaines de raideur et de masse forment un champ stochastique discret constitué de variables aléatoires associées aux paramètres incertains d'entrée. Le vecteur incertain de déplacements forme également un champ stochastique discret qu'il faut évaluer en fonction des variables aléatoires d'entrée.

Cependant, cette modélisation de l'incertitude implique une taille de champ stochastique conséquente et n'est pas du tout applicable numériquement. Il est donc nécessaire d'effectuer une première réduction du champ stochastique afin de le rendre numériquement utilisable. En appliquant une première fois l'expansion de Karhunen-Loève avec une matrice de covariance adaptée, il est possible de réduire le champ aux simples variables aléatoires associées au module d'Young de chaque aube et chaque virole. Ainsi, une variable aléatoire Ξ_i de loi inconnue est introduite pour caractériser les dispersions géométriques et matériaux en pilotant le module d'Young E_i de chaque aube et chaque virole.

4.2 Modélisation des incertitudes

4.2.1 Construction de la loi de probabilité des variables aléatoires associées au module d'Young

Le modèle simplifié explicité précédemment possède des paramètres incertains dont la loi de probabilité est inconnue. Dans un premier temps, la maximisation de l'entropie va permettre d'expliciter ces lois en utilisant l'information connue, soit :

- le module d'Young moyen E_μ
- le pourcentage de variation fixé E_σ tel que :

$$\forall i, \mathcal{S}_{E_i} = [E_\mu(1 - E_\sigma); E_\mu(1 + E_\sigma)] \subset \mathbb{R}_+^* \quad (\text{II.52})$$

Ainsi, E_i est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} de densité de probabilité $p_{E_i}(e_i) \in \mathcal{C}_{ad}$, où \mathcal{C}_{ad} est un l'espace de fonction vérifiant :

$$\mathcal{C}_{ad} = \{e_i \rightarrow p_{E_i}(e_i) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \mathcal{S}_{E_i} = [E_\mu(1 - E_\sigma); E_\mu(1 + E_\sigma)], \\ \mu_{E_i} = E_\mu \text{ et } \int_{\mathcal{S}_{E_i}} p_{E_i}(e_i) de_i = 1\} \quad (\text{II.53})$$

La maximisation de l'entropie revient donc à identifier la fonction $p_{E_i}(e_i) \in \mathcal{C}_{ad}$ qui maximise l'équation (II.11). Il s'agit donc d'un problème d'optimisation sous contrainte d'égalité qui se ramène à la maximisation du lagrangien $\mathcal{L}(p_{E_i})$ associé :

$$\mathcal{L}(p_{E_i}) = - \underbrace{\int_{\mathcal{S}_{E_i}} p_{E_i}(e_i) \ln(p_{E_i}(e_i)) de_i}_{\text{Entropie (cf. Eq. (II.11))}} \\ + \lambda_0 \left(\underbrace{\int_{\mathcal{S}_{E_i}} p_{E_i}(e_i) de_i - 1}_{\int_{\mathcal{S}_{E_i}} p_{E_i}(e_i) de_i = 1} \right) + \lambda_1 \left(\underbrace{\int_{\mathcal{S}_{E_i}} e_i p_{E_i}(e_i) de_i - E_{aube}}_{\mu_{E_i} = E_\mu} \right) \quad (\text{II.54})$$

où λ_0 et λ_1 sont des multiplicateurs de Lagrange. La résolution de ce nouveau problème d'optimisation sans contrainte permet d'identifier la loi de probabilité de E_i . Il s'agit ici d'une loi uniforme sur le support \mathcal{S}_{E_i} :

$$p_{E_i}(e_i) = \frac{1}{2E_\mu E_{var}} \mathbb{1}_{\mathcal{S}_{E_i}}(e_i) \quad (\text{II.55})$$

Afin de simplifier les équations suivantes, la variable aléatoire E_i est centrée puis normalisée afin de se ramener à une variable aléatoire Ξ_i de loi uniforme classique :

$$\Xi_i = \frac{E_i - E_\mu}{E_\mu E_\sigma} \quad (\text{II.56})$$

La nouvelle variable aléatoire Ξ_i suit alors une loi uniforme sur le support $\mathcal{S}_{\Xi_i} = [-1; 1]$:

$$p_{\Xi_i}(\xi_i) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1;1]}(\xi_i) \quad (\text{II.57})$$

La variabilité du modèle est ainsi modélisée par une incertitude du module d'Young de chaque aube et virole. Les variables aléatoires associées suivent une loi uniforme dont le support est fixé par le module d'Young moyen E_μ . $E_\mu = E_{aube}$ s'il s'agit d'une variable aléatoire associée à une aube et $E_\mu = E_{vir} = E_{aube} C_{A/V}$ si elle est associée à une virole. Le pourcentage de variation est fixé E_σ .

4.2.2 Réduction du champ stochastique par une expansion de Karhunen-Loève

Une première expansion de Karhunen-Loève a permis de modéliser la variabilité du système par un nombre fini et limité de variables aléatoires. Néanmoins, la taille de ce champ stochastique dépend linéairement du nombre d'aubes par secteur de redresseur. Il ne s'agit pas d'un inconvénient pour la méthode de Monte Carlo puisque la dimension stochastique n'a pas d'influence en termes de convergence et donc de temps de calcul. En revanche, son influence n'est pas négligeable lors d'une modélisation par le chaos polynomial puisque le nombre de coefficients du chaos à calculer dépend directement de la taille du champ stochastique (cf. Eq. (II.28)). Il serait donc intéressant de parvenir, une nouvelle fois, à réduire le nombre de variables aléatoires. Pour cela, l'expansion de Karhunen-Loève est appliquée une seconde fois en utilisant les propriétés des secteurs de redresseur pour générer la matrice de covariance.

Mathématiquement, l'idée est de parvenir à générer de nouvelles variables aléatoires tout en conservant un maximum de variabilité. Pour cela, les propriétés physiques et matériaux d'un secteur de redresseur vont permettre d'émettre des hypothèses sur la covariance des variables aléatoires existantes. Dans le cadre des redresseurs sectorisés, l'idée est de considérer que :

- 1 - la raideur des aubes est d'autant plus corrélée qu'elles sont spatialement proches. En effet, la corrélation des propriétés matériaux, telle que la raideur, tend à diminuer avec la distance, ce qui peut se traduire par l'introduction d'une loi linéaire décroissante ou d'une loi exponentielle décroissante :

$$\sigma_{\Xi_i \Xi_j} = \max(1 - \alpha|i - j|, 0) \quad (\text{II.58})$$

$$\sigma_{\Xi_i \Xi_j} = \max(1 - e^{-\alpha|i-j|}) \quad (\text{II.59})$$

où $\alpha > 0$ est un coefficient relatif à la souplesse des viroles et les indices i et j sont relatifs aux aubes. Le coefficient α sera d'autant plus faible que la virole est souple. En effet, lorsque les viroles sont très raides, il y a peu de couplage énergétique entre les aubes. Il est donc nécessaire de conserver un maximum d'information, et donc de variables aléatoires, pour maintenir un niveau de variabilité équivalent.

- 2 - le raidissement des viroles impliquant le découplage du comportement des aubes permet également de formuler une seconde hypothèse. En effet, les caractéristiques de raideur des viroles peuvent être considérées indépendantes de celles des aubes. Le module d'Young associé aux viroles est alors décorrélié de celui associé aux aubes :

$$\sigma_{\Xi_a \Xi_v} = 0 \quad (\text{II.60})$$

où l'indice a correspond à l'indice i relatif à une virole et v à l'indice j relatif à une aube.

Lorsque la matrice de covariance est générée, il suffit d'appliquer la méthode décrite dans la paragraphe II.2.4 afin de générer les nouvelles variables aléatoires $\mathbf{Z} = [C]^t \Xi$. Où $[C]^t$ est la matrice des vecteurs propres assemblés de la matrice de covariance $[\mathcal{R}_\Xi]$, dont les valeurs propres associées prennent les valeurs les plus élevées, ce qui permet de conserver un maximum de variabilité. Il est important de noter que les nouvelles variables aléatoires suivent une loi de probabilité complexe dont la densité de probabilité ne peut être explicitée analytiquement. Néanmoins, la fonction de répartition inverse étant connue (cf. Eq. (II.35)), il est possible de générer facilement des réalisations indépendantes $(Z(\theta^{(1)}), \dots, Z(\theta^{(\nu)}))$ à partir des réalisations indépendantes $(\Xi(\theta^{(1)}), \dots, \Xi(\theta^{(\nu)}))$.

4.2.3 Modélisation des modes stochastiques

Les lois de probabilité des paramètres incertains d'entrée sont entièrement décrites. Ce paragraphe s'intéresse maintenant à l'expression des modes stochastiques qui vont permettre d'évaluer les déplacements $\tilde{\mathbf{U}}$.

La première méthode consiste à estimer les premiers moments des variables associées aux modes propres stochastiques par la méthode de Monte Carlo (cf. Sec. II.3.1). Il suffit alors d'effectuer un certain nombre d'analyses modales déterministes pour différentes réalisations du vecteur de variables aléatoires Ξ . Cependant, aucune forme analytique de la densité de probabilité associée ne peut être calculée et surtout, le temps de calcul peut croître très rapidement selon la taille des matrices de masse et de raideur. Cette méthode sera tout de même appliquée pour sa précision et sa robustesse afin de servir de référence.

La deuxième méthode consiste à approximer la variable aléatoire associée aux modes propres $\mathbf{\Omega}$ et $[\Phi]$ par une suite tronquée de polynômes du chaos (cf. Eq. (II.26)). Afin de généraliser les équations, l'ensemble des modes propres stochastiques sera modélisé par la matrice de variables aléatoires $[X] = [\mathbf{\Omega} \ [\Phi]^t]^t = :$

$$[X] = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}^t \\ [\Phi] \end{bmatrix} \sum_{n=0}^P [f_n] \Psi_n(\Xi) \quad (\text{II.61})$$

où Ξ est le vecteur de variables aléatoires modélisant l'incertitude des paramètres d'entrée. Lorsque celles-ci suivent une loi uniforme, les polynômes du chaos ψ associés

sont les polynômes de Legendre (cf. Tab. II.2). Les polynômes de Legendre univariés (une seule variable) sont issus des équations de Legendre qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{df}{dx} \right) + n(n+1)f = 0 \text{ avec } f(1) = 1. \quad (\text{II.62})$$

Il existe également différentes formules dont celle de Bonnet qui explicite une relation de récurrence :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)\psi_{n+1}(\xi) &= (2n+1)\xi\psi_n(\xi) - n\psi_{n-1}(\xi) \\ \text{avec } \psi_0(\xi) &= 1 \text{ et } \psi_1(\xi) = \xi \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

Ces polynômes sont ensuite normalisés par rapport au produit scalaire :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \langle \psi_i, \psi_j \rangle_{\Xi} = \frac{2}{2i+1} \delta_{ij} \quad (\text{II.64})$$

où δ_{ij} représente le coefficient de Kronecker. Les polynômes multivariés (plusieurs variables) sont ensuite obtenus par la relation définie par l'équation (II.27).

La projection sur une base du chaos permet d'obtenir une forme analytique de la fonction de répartition inverse des modes propres stochastiques. Cette fonction permet donc de générer un très grand nombre de tirages déterministes sans avoir à effectuer d'analyses modales, qui peuvent être très coûteuses en termes de temps de calcul. De plus, le calcul des premiers moments est immédiat (cf. Sec. II.3.3). La principale difficulté réside dans le calcul des coefficients du chaos.

Une première méthode permet de les calculer par une approche spectrale appliquée aux cas des maillages éléments finis par Ghanem et Spanos [GS91] puis appliquée au cas spécifique des secteurs de redresseur par Sall [Sal11]. Cette méthode utilise la propriété d'orthonormalité des polynômes du chaos. Cependant, le produit scalaire dépend de la densité de probabilité des variables aléatoires d'entrée (cf. Eq. (II.17)), il en est donc de même pour les polynômes qui forment la base du chaos. Or, lorsque la densité de probabilité n'est pas explicite, il n'est pas possible de générer la base de polynômes associée à ces lois de probabilité. Ainsi, lorsqu'une expansion de Karhunen-Loève est effectuée sur des variables aléatoires uniformes Ξ , les variables aléatoires résultantes \mathcal{Z} n'étant pas uniformes, il n'est pas possible d'utiliser les polynômes de Legendre, ni aucune autre base de polynômes connue. D'autres méthodes de calcul des coefficients du chaos ont donc été développées dans le chapitre III, elles sont basées sur techniques d'interpolation d'hypersurface.

4.3 Résultats sur les réponses forcées stochastiques du redresseur simplifié

La modélisation adoptée a été définie dans les paragraphes précédents. Elle est maintenant exploitée au redresseur simplifié présenté dans le paragraphe II.4.1. Le

module d'Young moyen des aubes est fixé à $E_{aube} = 290GPa$ et la variation à $E_{\sigma} = 5\%$.

4.3.1 Distribution fréquentielle des modes du redresseur simplifié en fonction de facteur de couplage aubes-viroles

Dans un premier temps, la distribution modale (les trente premières fréquences propres) du redresseur accordé simplifié est observée afin de mettre en avant l'influence du facteur de couplage entre les aubes et les viroles (cf. Eq. (II.50)), en prenant les valeurs $C_{A/V} = 1$, $C_{A/V} = 10$ ou $C_{A/V} = 100$. Le premier facteur de couplage $C_{A/V} = 1$ correspond au cas où les viroles sont aussi souples que les aubes. Ce cas n'est pas très réaliste mais pourrait le devenir dans le cadre d'une réduction forte de la matière des viroles afin de réduire la masse de ces dernières. Le deuxième facteur de couplage $C_{A/V} = 10$ est beaucoup plus réaliste puisqu'il est assez proche de celui observé sur les secteurs de redresseur industriels des turboréacteurs. Le troisième facteur de couplage $C_{A/V} = 100$ correspond au cas où les viroles sont très raides. Dans l'industrie, il est possible de retrouver ce genre de facteur pour des secteurs de redresseur assemblés au sein de turbomachines non destinées à la propulsion, et dont la réduction des masses non tournantes n'est pas une priorité.

Les figures II.2 et II.3 présentent respectivement les premières fréquences propres et quelques déformées propres du secteur de redresseur pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 1$. Dans ce cas, il apparaît que le couplage entre les aubes et les viroles est très important, il n'est pas possible de distinguer des modes propres relatifs uniquement au mouvement des aubes. En effet, au niveau de la zone de forte densité modale des modes 16 à 19 autour de 63Hz, qui est supposé être composée de modes de flexion d'aubes (1F), la contribution énergétique modale des viroles reste très importante (mode 19). Ce cas, non réaliste, pourrait remettre en question les hypothèses nécessaires à la construction de la matrice de covariance de l'expansion de Karhunen-Loève à cause du fort couplage aubes/viroles (cf. Sec. II.4.2.2).

Les figures II.4 et II.5 présentent respectivement les premières fréquences propres et quelques déformées propres du secteur de redresseur pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 10$. Ce cas laisse apparaître trois zones de forte densité modale. La première, des modes 7 à 11 autour de 63Hz (cf. mode 9), correspond aux premiers modes de flexion d'aube (1F); la deuxième, des modes 17 à 22 autour de 165Hz (cf. mode 20), correspond aux deuxièmes modes de flexion d'aube (2F) et la troisième, après le mode 27 autour de 330Hz (cf. mode 29), correspond aux troisièmes modes de flexion d'aube (3F). Les modes de ces zones laissent tout de même apparaître une déformation des viroles mais dont la contribution énergétique est bien plus faible que dans le cas précédent $C_{A/V} = 1$. Les autres modes correspondent à des modes d'ensemble (mode 3 de la Fig. II.5).

Les figures II.6 et II.7 présentent respectivement les premières fréquences propres et quelques déformées propres du secteur de redresseur pour un facteur de couplage

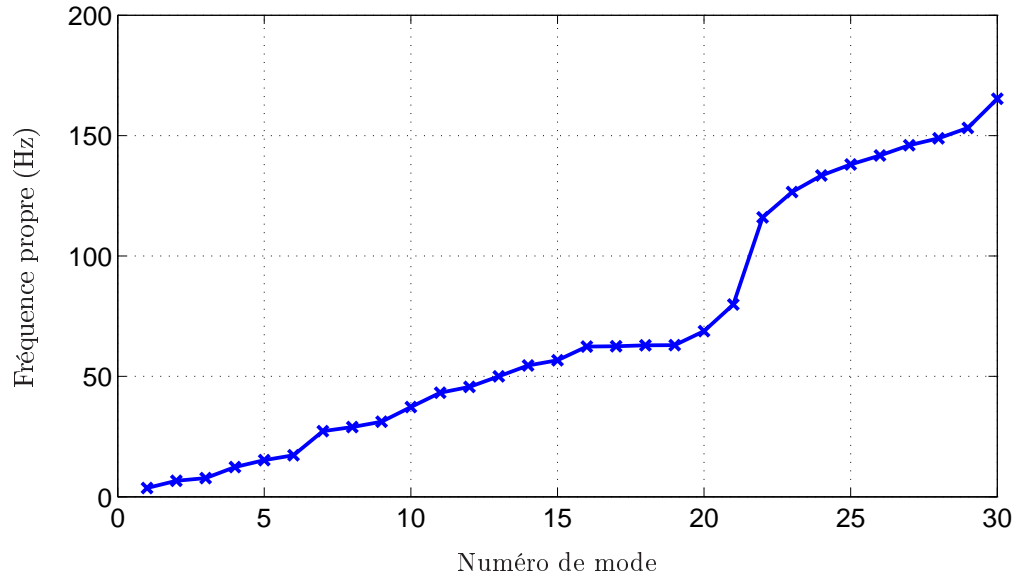


FIGURE II.2 – Premières fréquences propres du secteur de redresseur simplifié pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 1$

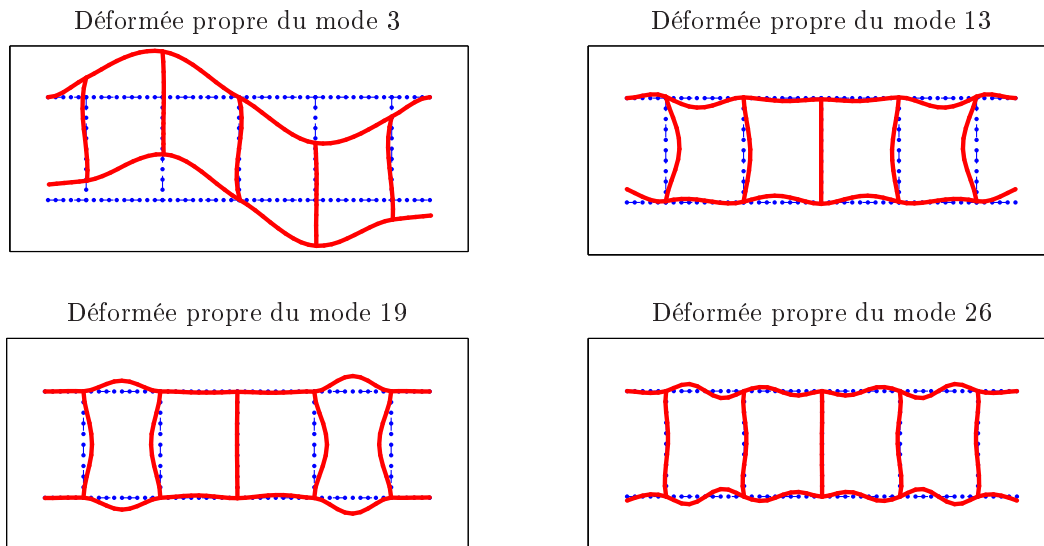


FIGURE II.3 – Quelques déformées propres du secteur de redresseur simplifié pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 1$

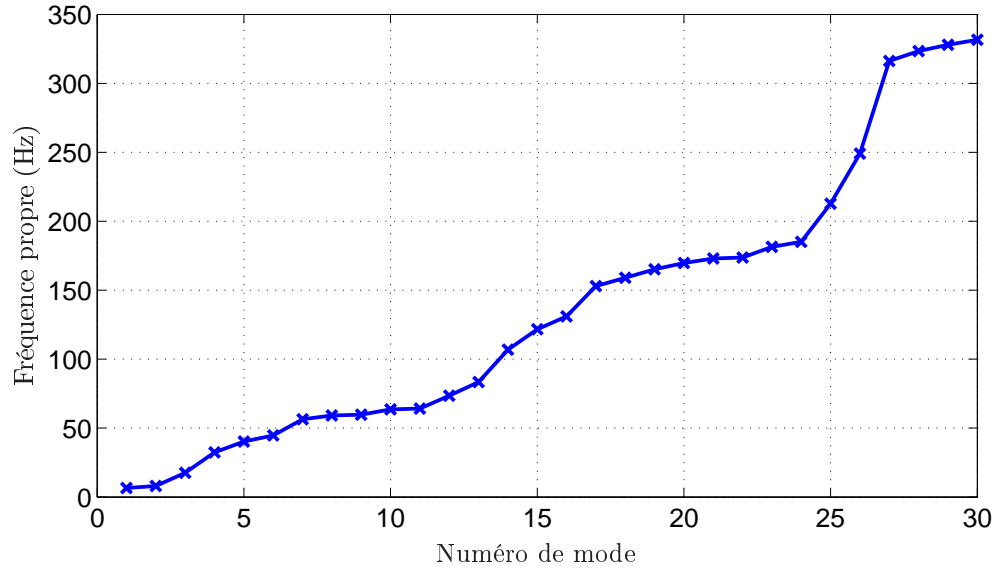


FIGURE II.4 – Premières fréquences propres du secteur de redresseur simplifié pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 10$

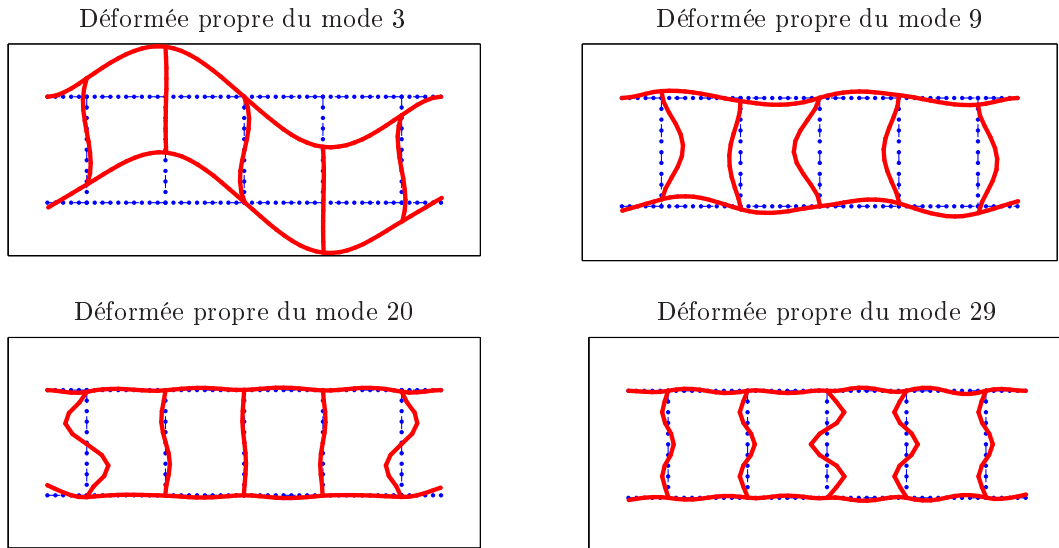


FIGURE II.5 – Quelques déformées propres du secteur de redresseur simplifié pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 10$

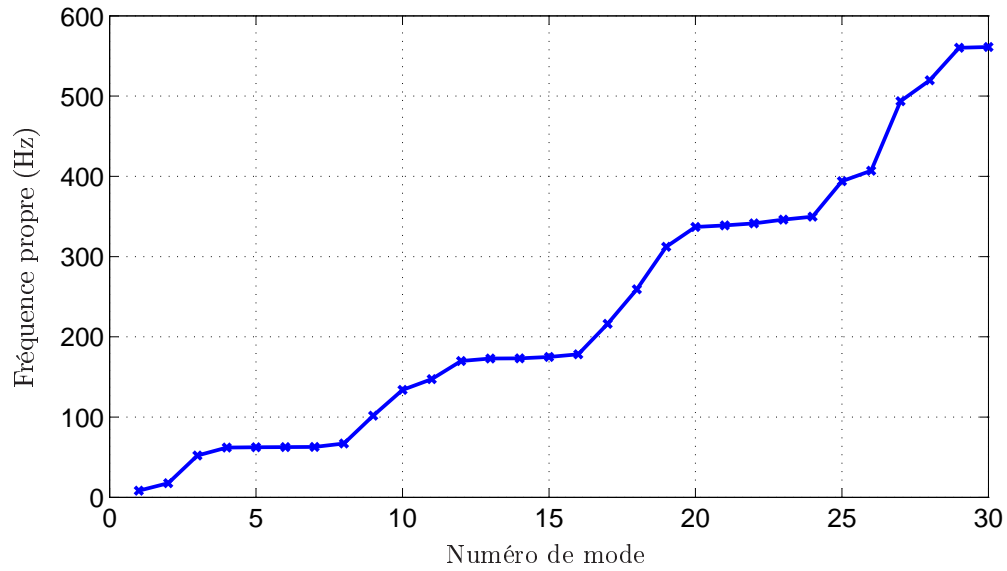


FIGURE II.6 – Premières fréquences propres du secteur de redresseur simplifié pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 100$

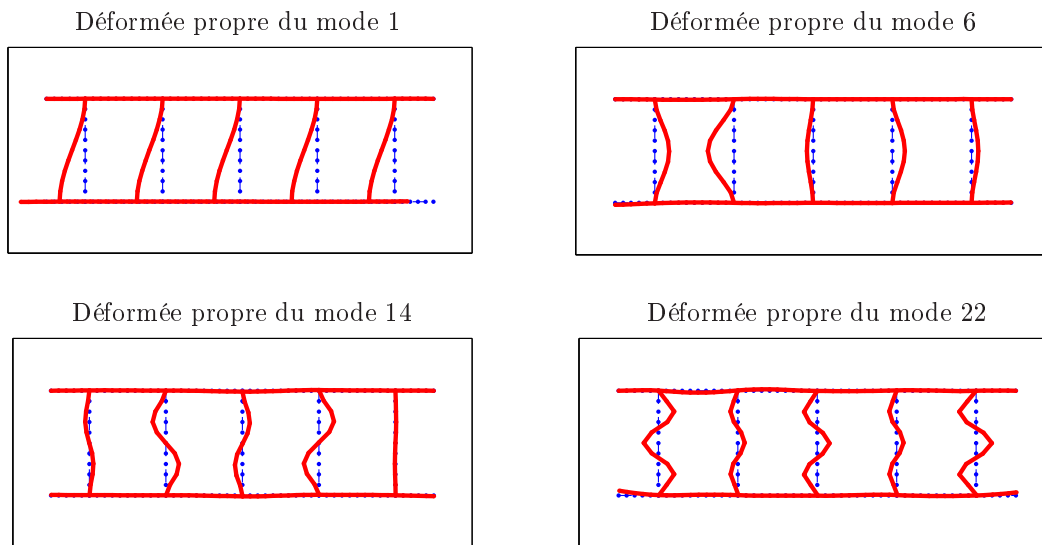


FIGURE II.7 – Quelques déformées propres du secteur de redresseur simplifié pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 100$

$C_{A/V} = 100$. Ce dernier cas laisse apparaître quatre zones de forte densité modale bien définies. En effet, d'une part l'écart fréquentiel des ces zones est très faible avec cinq modes ayant une variation fréquentielle inférieure à 3% et d'autre part, l'extrême rigidité de la virole laisse apparaître très peu de modes d'ensemble. Les quatre zones de forte densité modale correspondent à des modes de flexion d'aube de type 1F à 4F. La déformation des viroles correspondant à des modes est quasi-inexistante à cause de la rigidité de la virole. Le couplage inter-aubes est donc très limité ce qui peut poser quelques difficultés lors de la réduction de la dimension stochastique puisque les variables aléatoires associées au module d'Young des aubes sont déjà quasi-indépendantes.

4.3.2 Influence de l'expansion de Karhunen-Loève sur la réponse forcée

La variabilité du module d'Young des aubes et des viroles est maintenant introduite afin d'observer l'influence du désaccordage sur la réponse forcée. Dans un même temps, le champ stochastique initial X est réduit par une expansion de Karhunen-Loève et les résultats sont comparés à ceux obtenus sans modification du champ de départ, afin de vérifier le maintien de la variabilité malgré la réduction appliquée.

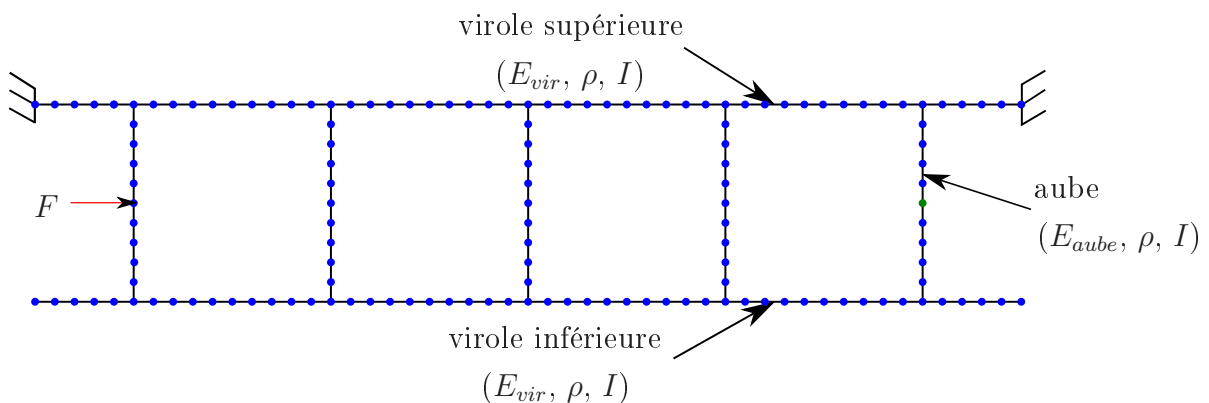


FIGURE II.8 – Modèle simplifié d'un secteur de redresseur

La réponse forcée stochastique \mathbf{U} est calculée en appliquant un effort normal unitaire déterministe F au centre de la première aube (cf. Fig. II.8, aube la plus à gauche) puis reconstruite à partir du calcul des modes stochastiques ($\mathbf{\Omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{N_m})^t$, $[\Phi] = (\Phi_1, \dots, \Phi_{N_m})$) en introduisant un amortissement visqueux $\eta = 0.1\%$:

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{N_m} \frac{\Phi_k^t \Phi_k}{\omega_k^2 + 2j\eta\omega_k\omega - \omega^2} F \quad (\text{II.65})$$

où N_m correspond à la troncature modale soit le nombre de modes conservés pour décrire le mouvement du système, j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$ et ω la pulsation d'excitation. La variabilité de \mathbf{U} est pilotée par la variabilité de $\mathbf{\Omega}$ et de $[\Phi]$, pilotée elle-même par la variabilité de Ξ si l'expansion de Karhunen-Loève n'est pas appliquée ou Z si elle l'est.

Les résultats présentés ci-après correspondent à la moyenne, à l'écart-type, au minimum et au maximum de l'amplitude du déplacement normal (mouvement de flexion) stochastique du milieu de la cinquième aube (point vert de la figure II.8). Ces grandeurs statistiques ont été générées en utilisant la méthode de Monte Carlo (cf. Sec. II.3.1) pour 50 000 réalisations. Ce nombre de réalisation est suffisant pour obtenir une bonne estimation des grandeurs observées, l'augmenter ne permet pas d'améliorer significativement la convergence des résultats. L'erreur faite sur l'estimation de ces grandeurs est donc de l'ordre de 0.5%. Les résultats concernant les autres degrés de liberté ne sont pas présentés puisqu'ils sont analogues à ceux ci-après.

Différentes matrices de covariance ont été générées afin d'évaluer l'influence de leur construction sur la variabilité des déplacements stochastiques du système. Elles ont été générées en utilisant une loi de décroissance linéaire (cf. Eq. (II.59)) dont on a fait varier le coefficient α afin d'établir également la corrélation avec le coefficient de couplage $C_{A/V}$. Dans tous les cas, le nombre de variables retenues correspond à une information supérieure à 95%, $p = 0.95$ (cf. Eq. (II.34)). Les trois cas considérés sont les suivants :

- 1 - $\alpha_1 = 0.10$. Les sept variables de départ sont réduites à seulement quatre après le calcul des valeurs propres associées à cette matrice de covariance. La réduction de la dimension du champ stochastique est assez efficace puisque le nombre de variables aléatoires a presque été divisé par deux.
- 2 - $\alpha_2 = 0.25$. Les sept variables de départ sont réduites à cinq après le calcul des valeurs propres associées à cette matrice de covariance.
- 3 - $\alpha_3 = 0.40$. Les sept variables de départ sont réduites à six après le calcul des valeurs propres associées à cette matrice de covariance. La réduction de la dimension stochastique n'est pas très efficace dans ce cas, elle correspondrait donc plutôt bien aux cas où le facteur de couplage est élevé

Ces trois cas de réduction sont maintenant appliqués à la modélisation du secteur de redresseur simplifié pour les trois cas de facteurs de couplage considérés et comparés au cas où l'expansion de Karhunen-Loève (réf.) n'a pas été faite, qui constitue la référence puisque la variabilité du modèle est maximale.

Les figures II.9, II.10 et II.11 présentent respectivement le cas où le couplage inter-aubes par les viroles est très élevé $C_{A/V} = 1$, celui dont le couplage est réaliste $C_{A/V} = 10$, et celui dont les viroles sont très raides $C_{A/V} = 100$. Elles illustrent la moyenne, l'écart-type, le minimum et le maximum du déplacement stochastique respectivement situés en haut à gauche, en haut à droite, en bas à gauche et en bas à droite de chaque figure. Les courbes noires représentent le cas où l'expansion de Karhunen-Loève n'est pas appliquée (réf.), les vertes celui où la matrice de covariance a été générée en posant $\alpha_1 = 0.10$, les bleues en posant $\alpha_1 = 0.25$ et les rouges en posant $\alpha_1 = 0.40$.

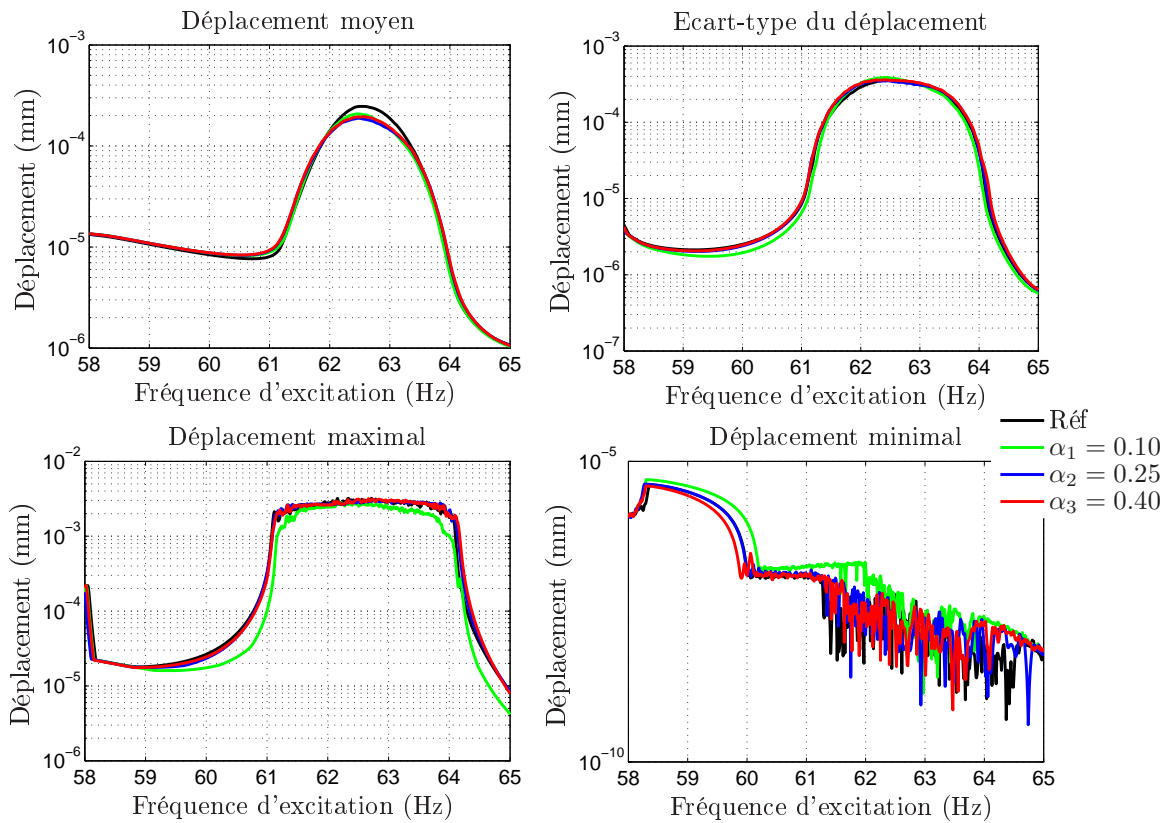


FIGURE II.9 – Réponse forcée stochastique du milieu de la cinquième aube pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 1$ pour différentes valeurs de coefficient de décroissance

La figure II.9 illustre le fait que la variabilité est plutôt bien conservée dans le cas où $\alpha_2 = 0.25$ et $\alpha_3 = 0.40$. En effet, les déplacements maximaux et minimaux sont très similaires à ceux de référence. Un petit écart est observé au niveau des déplacements moyens impliquant une légère différence quant à la loi de probabilité suivie par les déplacements. Cependant, la problématique industrielle n'est pas de trouver une distribution réaliste de la répartition des déplacements stochastiques mais plutôt d'évaluer l'enveloppe de ceux-ci. L'impact de la différence sur les déplacements moyens est donc moins important que celui sur des déplacements minimaux et maximaux. La variabilité du cas où $\alpha_1 = 0.10$ est également assez bien conservée, notamment en termes de moyenne et d'écart-type, mais la perte de variabilité au niveau des extrema ne peut être négligée à cause de l'effet non conservatif de l'évaluation des maxima pour certaines fréquences d'excitation, d'autant qu'il s'agit d'un critère déterminant lors du dimensionnement de la pièce.

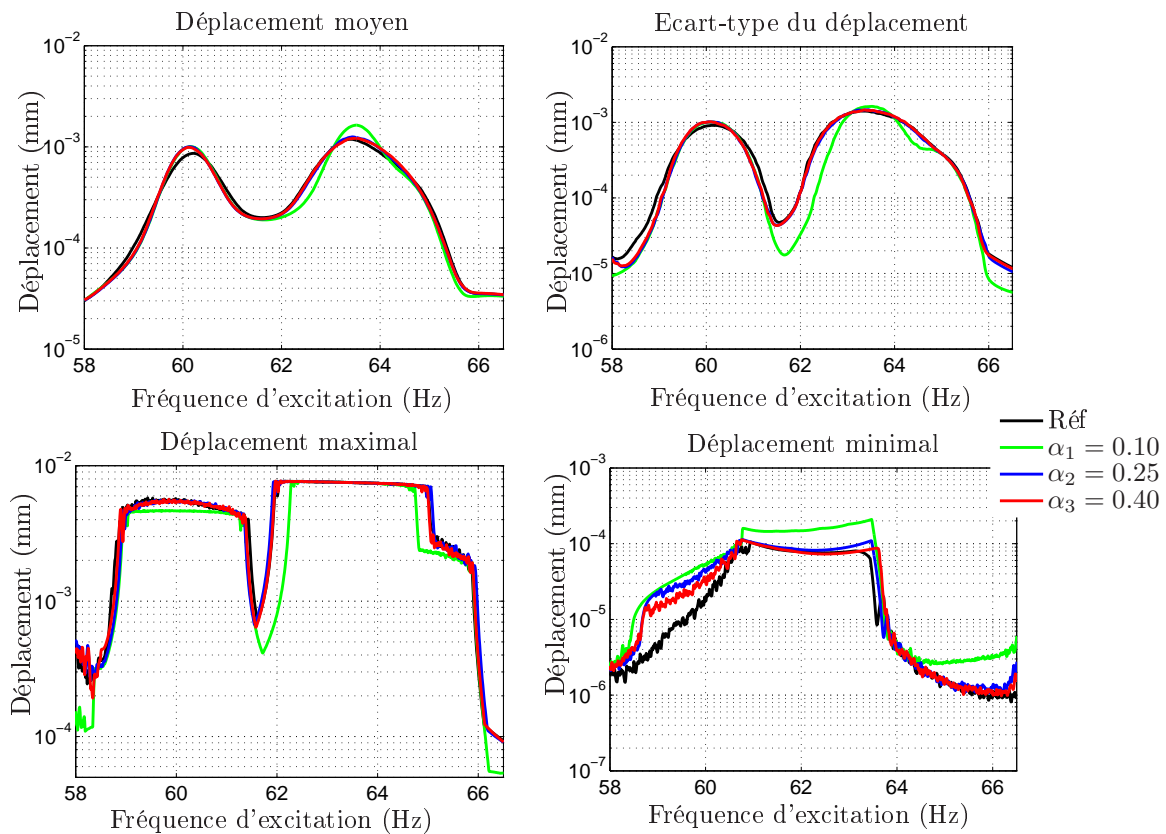


FIGURE II.10 – Réponse forcée stochastique du milieu de la cinquième aube pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 10$ pour différentes valeurs de coefficient de décroissance

La figure II.10 illustre le fait que la variabilité est également bien conservée dans le cas où $\alpha_2 = 0.25$ et $\alpha_3 = 0.40$. En effet, les résultats sont très similaires à ceux de référence, notamment en termes de moyenne, d'écart-type et surtout de maximum. Il existe tout de même un écart au niveau des déplacements minimaux mais l'intérêt moindre qu'ils présentent au moment du dimensionnement de la pièce permet de ne

pas en tenir compte, même si la réduction du champ stochastique a un effet non conservatif. En ce qui concerne le cas où $\alpha_1 = 0.10$, la variabilité n'est conservée ni en termes de conservation des maxima, ni en termes de « largeur » des zones de fort niveau. En effet, le domaine de variabilité des fréquences propres associées à des mouvements de flexion d'aubes passe de l'intervalle [62Hz ; 65Hz] à l'intervalle [62.3Hz ; 64.7Hz] soit une perte de l'ordre de 20%, ce qui n'est pas négligeable. Cette perte de variabilité est bien plus importante que celle observée dans le cas où $C_{A/V} = 1$, ce qui confirme notre hypothèse affirmant que plus la virole est raide, plus le coefficient α doit être élevé.

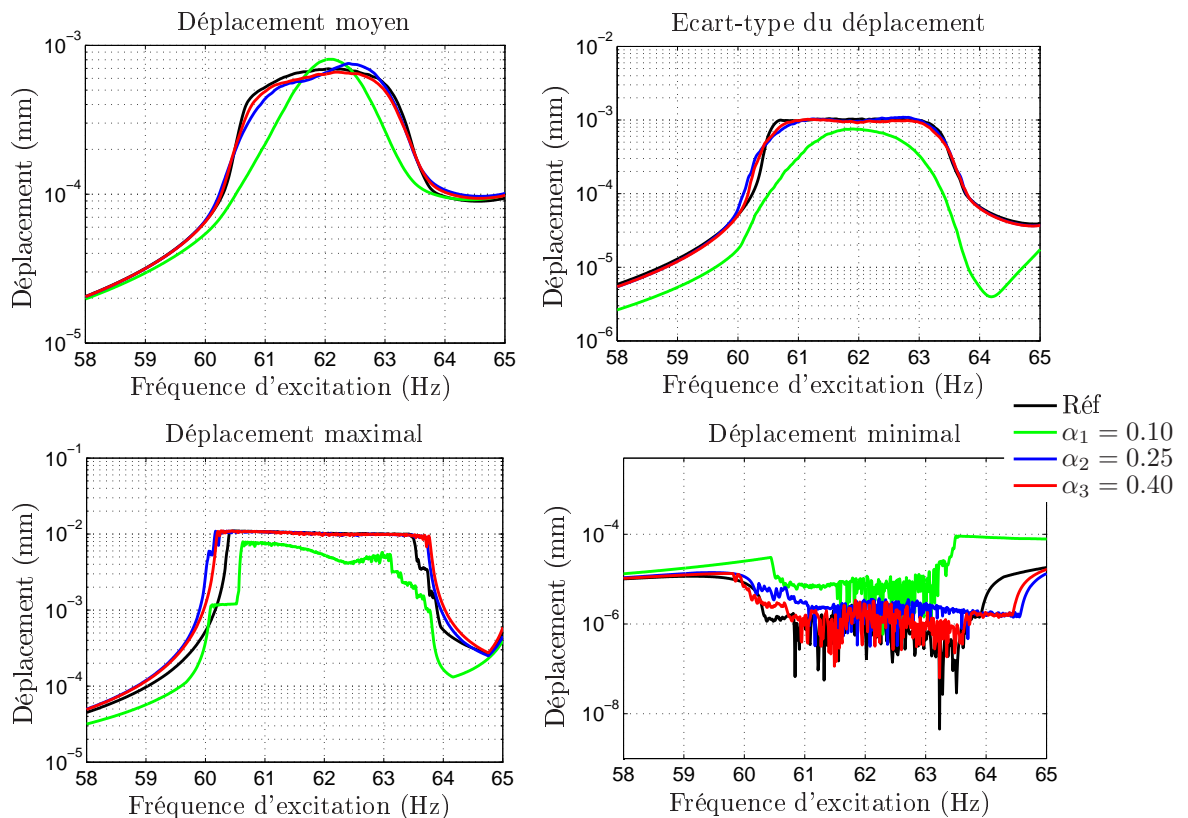


FIGURE II.11 – Réponse forcée stochastique du milieu de la cinquième aube pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 100$ pour différentes valeurs de coefficient de décroissance

Contrairement aux figures précédentes, la figure II.11 met en avant des différences entre les résultats des quatre cas. Plus le coefficient de décroissance α est élevé, meilleure est la corrélation entre les déplacements stochastiques obtenus suite à une expansion de Karhunen-Loève et ceux de référence, validant une nouvelle fois notre hypothèse affirmant que plus la virole est raide, plus le coefficient α doit être élevé. Concernant le cas où $\alpha_1 = 0.10$, les résultats empiriques ne respectent aucune tendance peu importe la grandeur statistique observée. Les résultats des deux autres cas restent de bonne qualité, surtout en termes de moyenne et d'écart-type et d'évaluation des extrema. Le principal écart à la référence est dû à

une augmentation de l'ordre de 17% de la variabilité des fréquences propres, mais cet écart est de moindre impact sur le dimensionnement de la pièce à cause de son caractère conservatif.

Ainsi, malgré le dernier cas de construction de la matrice de covariance $\alpha_3 = 0.40$ présentant une réduction de la dimension stochastique assez faible (passage de sept à six variables aléatoires), il n'est pas possible de recréer parfaitement la variabilité initiale. Cela est dû au fait que dans ce cas très précis où les viroles sont très raides, le couplage entre les aubes est quasi-inexistant et le secteur de redresseur peut donc être assimilé à un assemblage d'aubes indépendantes dès que l'on s'écarte du cas accordé [PTBG14]. Il est alors très difficile de retrouver la variabilité de départ sans associer une variable aléatoire au module d'Young de chaque aube. Néanmoins, la dimension du champ stochastique peut tout de même être réduite puisque les variables aléatoires associées au module d'Young des viroles peuvent être supprimés. En effet, ces dernières n'ont strictement aucune influence sur la variabilité des modes stochastiques d'intérêt, c'est-à-dire les modes relatifs au mouvement des aubes. La figure II.12 illustre cette affirmation en présentant les mêmes grandeurs statistiques que les figures précédentes dans le cas où les sept variables aléatoires sont présentes (Dim. 7 - courbes noires) et le cas où seules les cinq variables relatives au module d'Young des aubes sont conservées (Dim 5 - courbes rouges). Il est important de noter que cette remarque n'est pas valable pour des facteurs de couplage plus faible.

Finalement, la loi de décroissance linéaire utilisée pour générer la matrice de covariance lors de l'expansion de Karhunen-Loève permet d'obtenir d'excellents résultats, c'est-à-dire maintenir un bon niveau de variabilité du système tout en réduisant la dimension du champ stochastique de départ. Le coefficient de décroissance $\alpha_2 = 0.25$ semble être le meilleur compromis réduction/variabilité pour un modèle simplifié à cinq aubes, lorsque le facteur de couplage est suffisamment faible $C_{A/V} \ll 100$. En effet, elle permet de passer de sept à cinq variables aléatoires, soit une réduction de près de 30% sans perdre de variabilité. Les secteurs de redresseur industriel possédant généralement plus de cinq aubes, le pouvoir de réduction de cette méthode peut possiblement être augmenté (cf. Chap. V). Lorsque le coefficient de couplage devient trop important et qu'il n'est plus possible de réduire la dimension stochastique au moyen d'une expansion de Karhunen-Loève, les variables aléatoires associées aux viroles peuvent être supprimées car elles n'apportent aucune information supplémentaire de variabilité pour les modes stochastiques associées au mouvement des aubes. De plus, les secteurs de redresseur sont composés de viroles dont le facteur de couplage peut être estimé autour de 10. C'est pour cela que seul le cas $C_{A/V} = 10$ est retenu dans la suite de ce document.

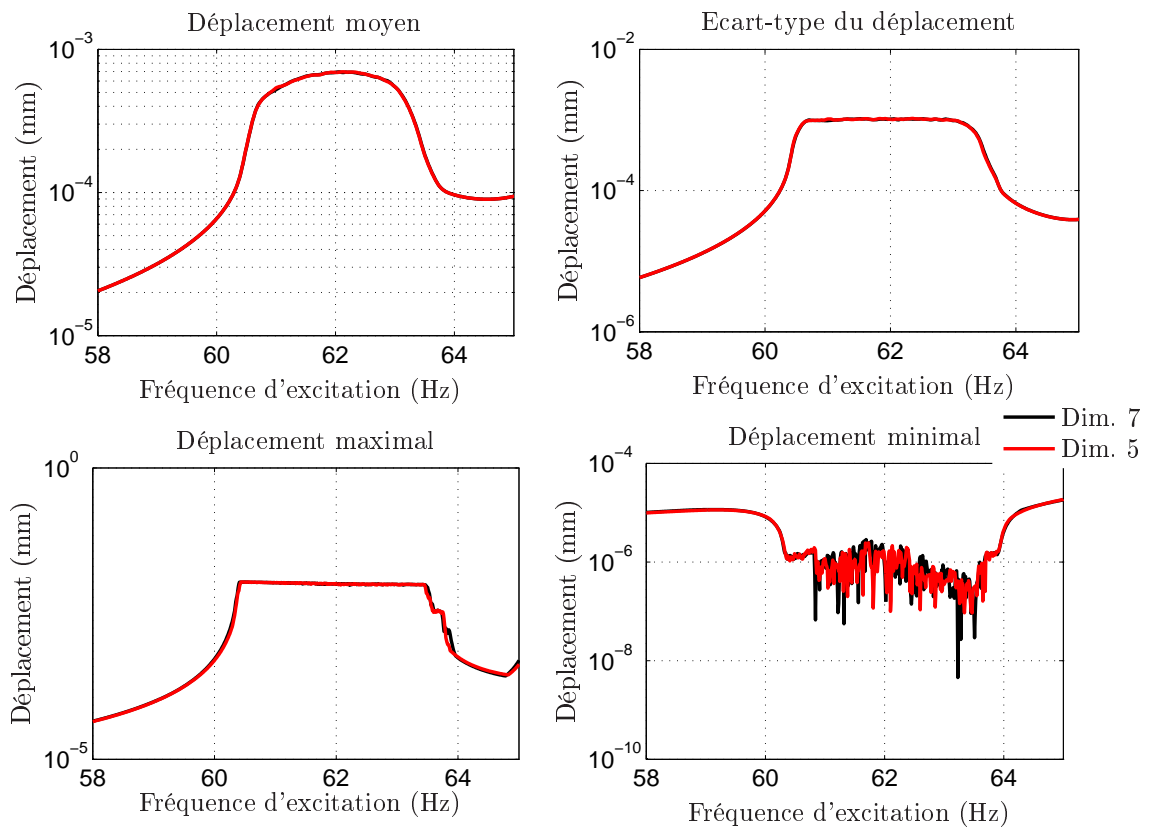


FIGURE II.12 – Réponse forcée stochastique du milieu de la cinquième aube pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 100$ pour différentes dimensions stochastiques

5 Conclusions sur la modélisation des paramètres incertains

Les enjeux industriels actuels nécessitent des modélisations physiques beaucoup plus précises afin d'améliorer la robustesse du dimensionnement des pièces mécaniques, notamment la prise en compte des incertitudes liées à la qualité des matériaux utilisés et aux procédés de fabrication. Il existe de nombreuses théories qui permettent de prendre en compte l'aléa dans les modélisations mécaniques telles que les méthodes stochastiques basées sur la théorie des probabilités. Ce sont ces méthodes qui ont été détaillées dans ce chapitre puis appliquées au cas d'un secteur de redresseur simplifié, et plus spécifiquement les approches paramétriques.

La première étape a donc été d'identifier les paramètres responsables de l'incertitude du modèle et de réduire le champ stochastique associé afin de se ramener à un nombre de paramètres numériquement viable. Il a donc été choisi de modéliser l'incertitude du secteur de redresseur par l'introduction de variables aléatoires associées au module d'Young de chaque aube et de chaque virole. Ces variables suivent une loi uniforme qui a pu être identifiée par la méthode de maximisation de l'entropie.

La seconde étape consiste à générer les modes propres stochastiques par la méthode de Monte Carlo, qui a l'avantage d'être fiable, robuste, non-intrusive et qui ne dépend pas de la dimension stochastique mais qui peut s'avérer très coûteuse en termes de temps de calcul à cause des nombreuses analyses modales à effectuer. Ils peuvent également être générés par la méthode des éléments finis stochastiques spectraux qui permet d'obtenir une forme analytique de la fonction de répartition inverse mais qui a l'inconvénient d'être intrusive, de ne pas être applicable si les lois de probabilités n'ont pas de densité de probabilité explicite et qui peut s'avérer coûteuse en termes de temps de calcul si la dimension stochastiques est trop élevée.

Afin de pallier ce problème de dimension stochastique, une expansion de Karhunen-Loève a été appliquée afin de diminuer le nombre de variables aléatoires du système. La matrice de covariance associée a été construite en formulant des hypothèses basées sur la géométrie d'un secteur de redresseur. Les résultats montrent que le niveau de variabilité du système peut être conservé tout en réduisant la dimension stochastique si le facteur de couplage entre les aubes et les viroles est suffisamment faible, ce qui est le cas des secteurs de redresseur industriel. Cependant, les nouvelles variables aléatoires ne possèdent pas de densité de probabilité explicite empêchant ainsi la génération des polynômes du chaos associés à ces lois et donc l'utilisation de la méthode des éléments finis stochastiques spectraux.

Finalement, il est nécessaire de développer une méthode permettant d'estimer la fonction de répartition inverse autre que celle des éléments finis stochastiques spectraux. Le prochain chapitre III présente des méthodes permettant d'interpoler cette fonction par son évaluation en quelques points déterministes, c'est-à-dire pour différentes réalisations des variables aléatoires. Il est également nécessaire d'appliquer des méthodes de réduction du modèle éléments finis industriel afin de diminuer

le temps de calcul des différentes analyses modales nécessaires à l'application de la méthode de Monte Carlo mais également à l'application des différentes méthodes d'interpolation. Le chapitre IV présente les différentes méthodes de synthèse modale existantes ainsi que leur application, adaptée à la prise en compte de l'incertitude, sur un modèle de secteur de redresseur simplifié et sur un modèle industriel.

Chapitre III

Méthodes d'interpolations de surfaces stochastiques

Ce chapitre s'intéresse aux méthodes d'interpolation de surface afin d'obtenir une expression analytique des modes propres stochastiques en fonction des paramètres incertains. Ce chapitre propose deux méthodes très différentes pour approximer ces surfaces de réponse. La première est basée sur une interpolation par une base du chaos polynomial, tandis que la seconde est basée sur une interpolation par des fonctions linéaires ou cubiques, continues par morceaux. Le contenu théorique de chaque méthode est d'abord détaillé, puis elles sont testées sur le modèle simplifié de secteur de redresseur.

Sommaire

1	Généralités sur les méthodes d'interpolation de surfaces . . .	58
2	Interpolation des fonctions de répartition inverse par identification non-intrusive des coefficients du chaos	59
2.1	Théorie des méthodes non-intrusives d'identification des coefficients du chaos	59
2.2	Application numérique d'identification des coefficients du chaos par régression au cas d'un secteur de redresseur simplifié . . .	65
3	Interpolation des fonctions de répartition inverse par Régression Multivariée par Splines Adaptatives	75
3.1	Description théorique de la méthode MARS	75
3.2	Application de la méthode MARS au cas d'un redresseur simplifié	79
4	Conclusions sur les méthodes d'interpolations de surface . .	87

1 Généralités sur les méthodes d'interpolation de surfaces

Ce chapitre s'intéresse au calcul des modes stochastiques par une identification analytique approximée de leur fonction de répartition inverse. L'objectif est donc d'introduire des méthodes d'interpolation de surfaces multivariées, c'est-à-dire dépendantes de plusieurs variables aléatoires descriptives.

Les méthodes classiques d'interpolation font intervenir des fonctions polynômes qui permettent d'approximer n'importe quelle fonction à plusieurs variables de carré intégrable (cf. Sec. II.2.3.1). Dans le cadre d'une application statistique, il s'agit alors d'une approximation par les chaos polynomiaux. L'identification des coefficients associés à ce développement en chaos peut être faite de manière intrusive en insérant la forme de la solution souhaitée directement dans le modèle mécanique [GS91], ou de manière non-intrusive en se basant sur des réalisations déterministes de la solution exacte [Nou09]. La précision des surfaces générées dépend de l'ordre de troncature, i.e. du degré polynomial maximal considéré et donc de la capacité des polynômes de bas degré à reproduire une discontinuité ou encore des hyperplans (cf. Sec. III.2.2.1).

Il existe des méthodes basées sur une interpolation polynomiale permettant d'optimiser la prise en compte des difficultés précédentes. La difficulté liée à la gestion des discontinuités peut être résolue par un découpage adapté, en amont, du domaine de définition en introduisant une condition de continuité C^0 entre les différents sous-domaines. Le problème d'identification se traduit alors par la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité aux frontières, conduisant à l'introduction de multiplicateurs de Lagrange [Zie89]. Ce problème est généralement résolu par la méthode du gradient conjugué, la méthode de Newton [Ded06] ou de quasi-Newton lorsque la matrice hessienne est approximée [Dai13]. Dans le cadre de cette étude, cette méthode est difficilement applicable dans la mesure où l'emplacement des discontinuités n'est pas prédictible.

Il est également possible de minimiser l'effet oscillant des polynômes aux bornes d'un domaine de définition en introduisant une fraction rationnelle de polynômes, permettant ainsi de contrôler le comportement asymptotique de la solution. Il s'agit des approximants de Padé [Pad99] qui ont été appliqués aux polynômes de Legendre univariés [Mat00] et bivariés [Mat07] par Matos. Dans un premier temps, l'utilisation des approximants de Padé nécessite d'identifier les coefficients du chaos à un ordre de troncature supérieur puis, de calculer les coefficients des fractions rationnelles à partir des coefficients précédents identifiés. Cette méthode est difficilement généralisable à une dimension stochastique supérieure à deux et nécessite d'augmenter l'ordre de troncature de départ. Le nombre de calculs déterministes à effectuer peut alors devenir important et les temps de calcul croître rapidement.

D'autres ont été développées et ne se basent pas sur une forme spécifique de la surface de réponse. Il s'agit des méthodes de régression non paramétriques. Cer-

taines méthodes sont basées sur l'utilisation de polynômes interpolés au voisinage de certains points déterministes à partir d'une régression par les moindres carrés pondérés, il s'agit des fonctions de lissage Loess [CDG88] et noyaux multidimensionnels [WJ95]. D'autres sont basées sur l'utilisation des splines, telles que la méthode Triogram [HKS98] et les splines de régression [Eub99], ou sur l'utilisation adaptative des splines telles que les méthodes polyMARS [SHKT97] et MARS [Fri91] (Régression par Splines Adaptatives Multivariées). Cette dernière méthode est particulièrement intéressante puisqu'elle permet d'obtenir une solution analytique approximée continue de la fonction de répartition inverse d'une variable aléatoire à partir de plusieurs variables descriptives, et de modéliser les discontinuités qui pourraient apparaître. En revanche, cette méthode peut s'avérer coûteuse en termes de temps de calcul.

Les méthodes qui semblent produire ou qui ont produit les meilleurs résultats sont présentés dans ce chapitre. Dans un premier temps ce chapitre détaille la théorie de certaines méthodes d'identification des coefficients du chaos, en particulier la méthode de projection et de régression, avant d'appliquer la méthode de régression sur un modèle simplifié de secteur de redresseur. Dans un second temps, la théorie de la méthode de régression par splines adaptatives multivariées est présentée puis appliquée au même modèle simplifié afin de comparer les deux méthodes.

2 Interpolation des fonctions de répartition inverse par identification non-intrusive des coefficients du chaos

2.1 Théorie des méthodes non-intrusives d'identification des coefficients du chaos

Cette section s'intéresse à l'interpolation des fonctions de répartition inverses des modes stochastiques $[X] = f(\Xi)$ par l'identification des coefficients du chaos $[f_n]$. Il est rappelé que les applications à plusieurs variables f de carré intégrable, i.e. $E[f^2] < +\infty$ peuvent être approximées par une suite tronquée de polynômes du chaos Ψ_n .

$$\forall f \in H^M, [X_{(N)}] = f(\Xi) = \sum_{n=0}^P [f_n] \Psi_n(\Xi) \quad (\text{III.1})$$

où P dépend de l'ordre de troncature N correspondant au degré polynomial maximal et du nombre de la dimension stochastique M , c'est-à-dire la taille du vecteur Ξ (cf. Eq. (II.28)). Les polynômes du chaos associés aux lois uniformes sont les polynômes de Legendre normalisés. Afin de simplifier l'écriture des équations mathématiques, chaque variable aléatoire X_{ij} de $[X]$ sera noté X .

Ghanem et Spanos [GS91] proposent d'identifier les coefficients du chaos par la méthode des éléments finis stochastiques spectraux (cf. Sec. II.3.3). Cependant, cette

méthode est très intrusive et ne permet pas d'effectuer une réduction de Karhunen-Loève (cf. Sec. II.2.4) préalable afin de réduire la dimension stochastique du problème, à cause de la définition non-explicite des nouveaux polynômes du chaos. Il existe également des méthodes non-intrusives [Ber05], telles que les méthodes de collocation, de projection et de régression, qui permettent d'identifier les coefficients du chaos par l'évaluation de la fonction de répartition inverse $X = [X^{(1)}, \dots, X^{(\nu)}]^t$ pour un nombre fini ν de réalisations déterministes du champ de variable aléatoire de départ $[\Xi] = [\Xi^{(1)}, \dots, \Xi^{(\nu)}]$.

- La méthode de collocation consiste à calculer P réalisations de X et imposer la stricte égalité entre ces réalisations et la solution approchée $X_{(N)}$. Cette méthode présente l'avantage, *a priori*, d'être peu coûteuse en termes de temps de calcul puisque peu de réalisations déterministes sont nécessaires. Cependant, elle nécessite la résolution d'un système linéaire dont la taille dépend de P , qui peut être mal conditionné selon le choix des réalisations. De plus, la méthode est peu robuste puisque la solution approchée dépend extrêmement du choix des réalisations. Elle n'est donc pas détaillée dans la suite de ce document.
- La méthode de régression consiste à calculer ν réalisations de X et minimiser l'écart quadratique entre ces réalisations et la solution approchée $X_{(N)}$.
- La méthode de projection consiste à utiliser les propriétés orthonormales des polynômes du chaos en projetant la variable aléatoire X sur chacun des polynômes du chaos et calculer les intégrales correspondantes par une quadrature de Gauss.

Parmi les différentes méthodes existantes décrites précédemment, les méthodes de projection [Smo63, HW08, EB09] et de régression sont présentées dans les paragraphes suivants.

2.1.1 Méthodes d'identification des coefficients du chaos par projection

Dans un premier temps, la méthode d'identification par une projection consiste à projeter la variable aléatoire X sur chacun des polynômes du chaos Ψ_n de la base du chaos, ce qui permet d'isoler chacun des coefficients du chaos f_n grâce à la propriété d'orthonormalité des polynômes, i.e. $\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle_{\Xi} = \delta_{nm}$:

$$\forall n = 1..P, f_n = \langle X, \Psi_n \rangle_{\Xi} = \int_{\mathcal{S}_{\Xi}} x(\xi) \Psi_n(\xi) d\xi = E[X \Psi_n(\Xi)] \quad (\text{III.2})$$

Le calcul des coefficients du chaos f_n se réduit donc au calcul d'une intégrale à M variables d'intégration. L'expression analytique des fonctions à intégrer n'étant pas connue, il est nécessaire d'approximer numériquement cette intégrale en discrétisant le support d'intégration \mathcal{S}_{Ξ} . Il existe trois types de méthodes numériques pour calculer une intégrale.

- 1 - Les méthodes d'échantillonnage, telles que la méthode de Monte Carlo (cf. Sec. II.3.1), qui ne présentent pas grand intérêt ici puisque l'objectif de ce chapitre est de parvenir à obtenir une forme analytique de la fonction de répartition inverse des modes stochastiques en utilisant une méthode censée nécessiter moins de calculs déterministes que la méthode de Monte Carlo.
- 2 - Les secondes consistent, dans un premier temps, à discrétiser le domaine d'intégration \mathcal{S}_{Ξ} en un nombre fini de sous-espaces s_{Ξ}^k , puis d'interpoler la fonction à intégrer sur chacun de ces sous-espaces par un polynôme p_k défini par les formules de Newton-Cotes [Dem06]. Cette approximation permet ensuite de calculer analytiquement l'intégrale en utilisant les fonctions approximées. Lorsque le degré de l'interpolation polynomiale est fixé, on retrouve les méthodes usuelles telles que la méthode du point médian pour un degré 0, la méthode des trapèzes pour un degré 1 ou la méthode de Simpson pour un degré 2 :

$$\int_{\mathcal{S}_{\Xi}} x(\boldsymbol{\xi})\Psi_n(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} = \sum_k \int_{s_{\Xi}^k} x(\boldsymbol{\xi})\Psi_n(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} \approx \sum_k \int_{s_{\Xi}^k} p_k(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} \quad (\text{III.3})$$

Dans le cas présent, ces méthodes ne sont pas applicables puisque le nombre d'évaluations de la fonction à intégrer dépend fortement du degré d'interpolation considéré, et surtout de la dimension stochastique du problème. En effet, le nombre d'évaluation de X dépend linéairement du nombre de sous-espaces s_{Ξ}^k et du degré d'interpolation choisi. Or, le nombre de sous-espaces doit être suffisamment important pour obtenir une précision correcte sur la valeur de l'intégrale. De plus, ce nombre de sous-espaces est d'autant plus grand que la dimension stochastique M du problème est importante, avec une évolution en puissance de M . L'utilisation de ces méthodes est donc rédhibitoire lorsque la dimension stochastique est trop grande.

- 3 - Les troisièmes sont les quadratures de Gauss qui consistent à approximer la valeur numérique d'une intégrale par une somme pondérée des évaluations de la fonction à intégrer en un certain nombre de points prédéfinis (cf. Eq. (III.4)). Ces points sont réels, distincts, uniques et correspondent aux racines de polynômes orthogonaux associés au produit scalaire considéré, et donc aux densités de probabilité des variables aléatoires Ξ . Dans le cas des lois uniformes, les polynômes considérés sont ceux de Legendre. Il s'agit alors de quadrature de Gausse-Legendre. Le choix degré r du polynôme pour le calcul de ses racines dépend du type de fonctions à intégrer, puisque la quadrature est exacte lorsqu'il s'agit d'un polynôme de degré maximal $2r - 1$.

$$\int_{\mathcal{S}_{\Xi}} x(\boldsymbol{\xi})\Psi_n(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} = \sum_{k_1}^{N+1} \dots \sum_{k_M}^{N+1} \varpi_{k_1} \dots \varpi_{k_M} x(\varsigma_{k_1}, \dots, \varsigma_{k_M})\Psi_n(\varsigma_{k_1}, \dots, \varsigma_{k_M}) \quad (\text{III.4})$$

Le vecteur $\boldsymbol{\varsigma} = (\varsigma_1, \dots, \varsigma_{N+1})^t$ correspond aux $N + 1$ racines du polynôme de Legendre univarié de degré $N + 1$. Le degré $N + 1$ du polynôme a été choisi

car la fonction à intégrer peut être assimilée à un polynôme de degré $2N$. En effet, Ψ_n est un polynôme de degré maximal N et on cherche à approximer X par une $X^{(N)}$, un polynôme de degré N . Le produit de ces deux fonctions, constituant ainsi la fonction à intégrer, peut donc être assimilé à un polynôme de degré $2N$. Le vecteur $\varpi = (\varpi_1, \dots, \varpi_{N+1})^t$ correspond aux pondérations de Gauss associées à chaque racine et est obtenu par :

$$\varpi_k = \frac{2}{(1 - \zeta_k^2) \psi'_{N+1}(\zeta_k)^2} \quad (\text{III.5})$$

où ψ'_{N+1} désigne la dérivée du polynôme de Legendre, à une seule variable, de degré $N+1$. Cette méthode semble également impossible à appliquer lorsque la dimension stochastique M du problème est trop grande puisque le nombre d'évaluations déterministes des fonctions à intégrer est de $(N+1)^M$.

Finalement, aucune des deux dernières méthodes proposées précédemment ne semblent applicables en raison d'un nombre excessivement élevé d'évaluations déterministes des fonctions à intégrer. L'obtention des coefficients du chaos est donc très coûteuse en termes de temps de calcul, voire impossible si la dimension stochastique du problème est trop importante. Cependant, il existe la quadrature de Smolyak basée sur celle de Gauss qui permet de diminuer le nombre de calculs déterministes tout en conservant un niveau de précision équivalent. Le calcul des coefficients du chaos f_n se ramène alors à la somme :

$$\forall n = 1..p, f_n = E[X\Psi_n] = \sum_{q=\max(0, N+1-M)}^N \sum_{r=1}^{\text{card}(\mathbb{L}_q)} (-1)^{N+q} \binom{M-1}{N-q} I_{\mathbb{L}_q(r)}^n(X) \quad (\text{III.6})$$

où l'espace \mathbb{L}_q est défini par :

$$\mathbb{L}_q = \{(N_1, \dots, N_M) \in \mathbb{N}^{*M} / \sum_{j=1}^M N_j = M + q\} \quad (\text{III.7})$$

où $I_{\mathbb{L}_q(r)}^n(X)$ est défini par :

$$I_{\mathbb{L}_q(r)}^n(X) = \sum_{k_1=1}^{N_1} \dots \sum_{k_M=1}^{N_M} \left(\prod_{j=1}^M \varpi_{k_j} \right) X(\zeta_{k_1}^{(1)}, \dots, \zeta_{k_M}^{(M)}) \Psi_n(\zeta_1^{(k_1)}, \dots, \zeta_M^{(k_M)}) \quad (\text{III.8})$$

La valeur $\zeta_{k_j}^{(l)}$ correspond à la $k_j^{\text{ème}}$ racine du polynôme du chaos de degré N_l et ϖ_{k_j} au poids de Gauss associé à cette racine.

Cette quadrature permet de réduire fortement le nombre de calculs déterministes nécessaires à l'évaluation d'une intégrale à plusieurs variables d'intégration, lorsque la dimension stochastique $M > 2$ du problème est grande. Le tableau III.1 illustre cette réduction en présentant le nombre de réalisations nécessaires pour une quadrature de Gauss et de Smolyak. Le rapport indique le pourcentage de calculs nécessaires

par la quadrature de Smolyak par rapport à celle de Gauss.

Méthode		Gauss	Smolyak	Rapport
N=1	M=1	2	2	100%
	M=2	4	5	125%
	M=5	32	11	34%
	M=10	1 024	21	0.02%
N=2	M=1	3	3	100%
	M=2	9	13	144%
	M=5	243	61	25.1%
	M=10	59 049	221	$3.7 \times 10^{-3}\%$
N=3	M=1	4	4	100%
	M=2	16	29	181%
	M=5	1 024	241	25%
	M=10	$\sim 10^6$	1581	$1.5 \times 10^{-3}\%$
N=4	M=1	5	5	100%
	M=2	25	53	212%
	M=5	3 125	781	25%
	M=10	$\sim 10^7$	8 761	$9.0 \times 10^{-4}\%$
N=5	M=1	6	6	100%
	M=2	36	89	247%
	M=5	7 776	2 203	28%
	M=10	$\sim 6 \times 10^7$	40 405	$6.7 \times 10^{-4}\%$

TABLE III.1 – Comparaison des quadratures de Gauss et de Smolyak en termes de nombre d'évaluations déterministes nécessaires [HW08]

Finalement, la méthode de projection permet d'identifier les coefficients du chaos en les exprimant sous une forme intégrale, qui peut être résolue par la quadrature de Smolyak. Cette quadrature permet de calculer une valeur numérique approximée d'une intégrale à plusieurs variables en limitant le nombre d'évaluations de la fonction à intégrer. Crestaux [Cre11] a développé une méthode de cubature adaptative pour la projection non-intrusive permettant de réduire de manière itérative la base du chaos et donc, de réduire encore le nombre de calculs déterministes.

Les résultats issus de l'application de la méthode de projection par quadrature de Smolyak au modèle simplifié du secteur de redresseur ne sont pas présentés dans la suite de ce chapitre. En effet, les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants en termes de précision lorsque la dimension stochastique est supérieure à $M > 2$ [PTBG15] (cf. Annexe B.2). De plus, toute la théorie de la projection est basée sur l'orthonormalité des polynômes du chaos. Cependant, lorsqu'une expansion de Karhunen-Loève est appliquée afin de réduire la taille du champ stochastique de départ, et ainsi le nombre de calculs déterministes nécessaires, les polynômes de Legendre ne sont ni orthonormaux, ni orthogonaux au sens du nouveau produit scalaire, défini par la

densité de probabilité des nouvelles variables (cf. Sec. II.4.2.3). La projection sur chaque polynôme du chaos ne permet donc plus d'isoler les coefficients $[f]$ du chaos mais d'obtenir P combinaisons linéaires de ceux-ci. L'identification des coefficients nécessite alors la résolution d'un système linéaire du type $[\Lambda][f] =$ dont la matrice $[\Lambda] = [\lambda_{ij}] = [\langle \Psi_i, \Psi_j \rangle_{\mathbf{Z}}]$ est inconnue, puisque le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{Z}}$ associé aux variables aléatoires \mathbf{Z} n'est pas explicite.

2.1.2 Méthode d'identification des coefficients du chaos par régression

La deuxième méthode non-intrusive d'identification des coefficients du chaos se base sur la minimisation, par la méthode des moindres carrés, de l'erreur quadratique entre la solution approximée $X_{(N)}$ et la solution exacte X en certains points déterministes du système. Cela se traduit par la résolution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \min\{\mathcal{E}\} &= \min \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} \left(X^{(i)} - X_{(N)}^{(i)} \right)^2 \right\} = \\ &= \min \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} \left(X^{(i)} - \sum_{n=1}^P f_n \Psi_n(\Xi^{(i)}) \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

où ν représente le nombre de calculs déterministes effectués et $\Xi^{(i)}$ la valeur du vecteur des variables aléatoires pour la $i^{\text{ème}}$ réalisation. Afin de minimiser l'expression \mathcal{E} , il est nécessaire de calculer les coefficients du chaos adéquats, ce qui revient à la résolution du système linéaire :

$$\forall n = 1..M, \quad \frac{\partial E}{\partial f_n} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu} \Psi_n(\Xi^{(i)}) \left(X^{(i)} - \sum_{n=1}^P f_n \Psi_n(\Xi^{(i)}) \right) = 0. \quad (\text{III.10})$$

Sa mise sous forme matricielle donne :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\nu} \Psi_1(\Xi^{(i)})\Psi_1(\Xi^{(i)}) & \cdots & \sum_{i=1}^{\nu} \Psi_1(\Xi^{(i)})\Psi_P(\Xi^{(i)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{\nu} \Psi_P(\Xi^{(i)})\Psi_1(\Xi^{(i)}) & \cdots & \sum_{i=1}^{\nu} \Psi_P(\Xi^{(i)})\Psi_P(\Xi^{(i)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_P \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\nu} X^{(i)}\Psi_1(\Xi^{(i)}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{\nu} X^{(i)}\Psi_P(\Xi^{(i)}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Cette méthode d'identification n'est pas basée sur la propriété d'orthonormalité des polynômes du chaos. Ceci implique que la base polynomiale du chaos peut être choisie arbitrairement puisqu'il n'est plus nécessaire de tenir compte des produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\xi}$ ou $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{Z}}$. Cette méthode est donc applicable quelles que soient les lois de probabilité des variables aléatoires ξ ou \mathbf{Z} . Cependant, cette méthode

nécessite de résoudre un système linéaire dont la dimension peut devenir importante selon le degré N de la troncature et la dimension stochastique M . Le nombre de calculs déterministes doit être suffisant pour assurer le bon conditionnement du système. Ainsi, le nombre d'évaluations peut vite devenir important, d'autant que la convergence et la précision des résultats sont directement liées à ce nombre de réalisations déterministes.

2.2 Application numérique d'identification des coefficients du chaos par régression au cas d'un secteur de redresseur simplifié

Il s'agit maintenant d'appliquer la méthode d'identification des coefficients du chaos par régression à la structure particulière d'un secteur de redresseur simple. Un redresseur composé de cinq aubes liées par une virole inférieure et une virole supérieure est donc considéré. La structure est modélisée par un treillis de poutres de type Euler-Bernoulli à 147 nœuds comme le montre la figure III.1. Le modèle est identique à celui du chapitre précédent (cf. Sec. II.4.1).

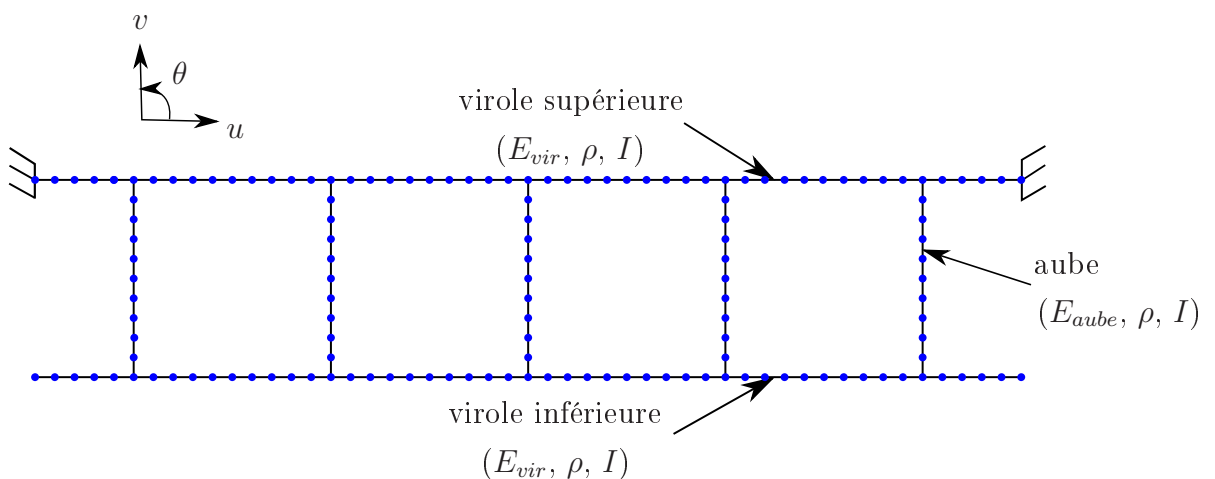


FIGURE III.1 – Modèle simplifié d'un secteur de redresseur

L'incertitude du modèle est modélisée par l'introduction de sept variables aléatoires $\Xi = [\Xi_1, \dots, \Xi_7]^t$ pilotant la variabilité du module d'Young de chaque aube et chaque virole. Le module d'Young moyen des aubes est fixé à $E_{aube} = 290GPa$, la variation à $E_\sigma = 5\%$ et le facteur de couplage à $C_{A/V} = 10$ (cf. Eq. (II.50)). Afin de diminuer les temps de calcul, les analyses modales déterministes sont effectuées sur une base réduite de Craig-Bampton (cf. Sec. IV.2.2.1) construite à partir des trente premiers modes internes de viroles, des dix premiers modes internes d'aubes et des trente modes statiques d'interface, après étude de convergence.

Dans un premier temps, les modes propres stochastiques sont calculés à partir des variables aléatoires de départ Ξ . Quelques résultats, tels que les surfaces de réponse et les réponses forcées, sont observés et comparés à ceux obtenus par une résolution

de Monte Carlo. Puis, les modes propres stochastiques sont calculés à partir des variables aléatoires \mathbf{Z} devenues indépendantes suite à l'expansion de Karhunen-Loève. Le nombre de variables aléatoires n'est pas réduit afin de s'affranchir des erreurs dues à la réduction du nombre de variables aléatoires. Ceci permet donc de mettre en évidence l'avantage de l'expansion de Karhunen-Loève quant à la régularisation des surfaces de réponse.

2.2.1 Résultats par la méthode de régression sur les modes propres stochastiques calculés à partir du champ stochastique Ξ de départ

Ce paragraphe présente les résultats obtenus lors du calcul des modes stochastiques à partir des variables aléatoires Ξ . Dans un premier temps, quelques surfaces de réponse sont tracées pour différents ordres de troncature N et comparées à celles théoriques. Dans un second temps, la réponse forcée stochastique du secteur de redresseur est présentée afin d'obtenir une vision globale des résultats issus du calcul des modes stochastiques.

Les figures III.2 et III.3 présentent respectivement la 61^{ème} coordonnée modale, de la base réduite de Craig-Bampton, du 8^{ème} mode et la 91^{ème} coordonnée modale, dans la même base, du 9^{ème} mode. Les modes considérés appartiennent à la zone de forte densité modale correspondant aux premiers modes de flexion d'aubes (1F - cf. Fig.II.4). Les coordonnées modales tracées correspondent à la participation modale du premier mode de flexion de la première aube (la plus à gauche) et de la quatrième (aube centrale). Ces coordonnées modales ont été choisies car elles sont parmi les plus susceptibles d'avoir une forte amplitude pour les modes considérés et d'avoir les plus fortes variations selon la configuration de désaccordage. Ces deux figures illustrent chacune la surface déterministe à approximer (référence) et les surfaces approximées pour des degrés de troncature $N = 3$, $N = 5$ et $N = 7$, respectivement situées en haut à gauche, en haut à droite, en bas à gauche et en bas à droite. Les surfaces tracées correspondent à la variation des variables aléatoires Ξ_4 et Ξ_6 associées respectivement au module d'Young de la deuxième et de la quatrième aube, les autres variables sont fixées à 0.

Le tableau III.2 répertorie le nombre de coefficients du chaos P à identifier ainsi que le nombre d'évaluations déterministes ν à effectuer afin d'obtenir un résultat convergé, en fonction de l'ordre de troncature N . En moyenne, il est nécessaire d'effectuer un nombre de réalisations égal à treize fois le nombre de coefficients du chaos à déterminer pour une dimension stochastique $M = 7$. Ce rapport a tendance à augmenter avec la dimension stochastique. Il est important de noter que le nombre d'évaluations peut vite devenir rédhibitoire comparé à celui nécessaire pour la méthode de Monte Carlo dès que l'ordre de troncature est important, d'où l'intérêt de réduire le nombre de variables aléatoires par une expansion de Karhunen-Loève.

La surface déterministe de la figure III.2 laisse apparaître une forte discontinuité autour du point (0.5;0.5) qu'il est impossible de reproduire avec des polynômes de bas degré en raison de leur propriété de régularité. Ce sont des fonctions de classe infinie $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^M)$. Il est nécessaire de monter le degré de troncature à $N = 7$

Troncature	P	ν
$N = 3$	120	1 560
$N = 5$	792	10 296
$N = 7$	3 432	41 184

TABLE III.2 – Nombre d'évaluations déterministes nécessaires pour l'identification des coefficients du chaos par régression sans expansion de Karhunen-loève, selon l'ordre de troncature

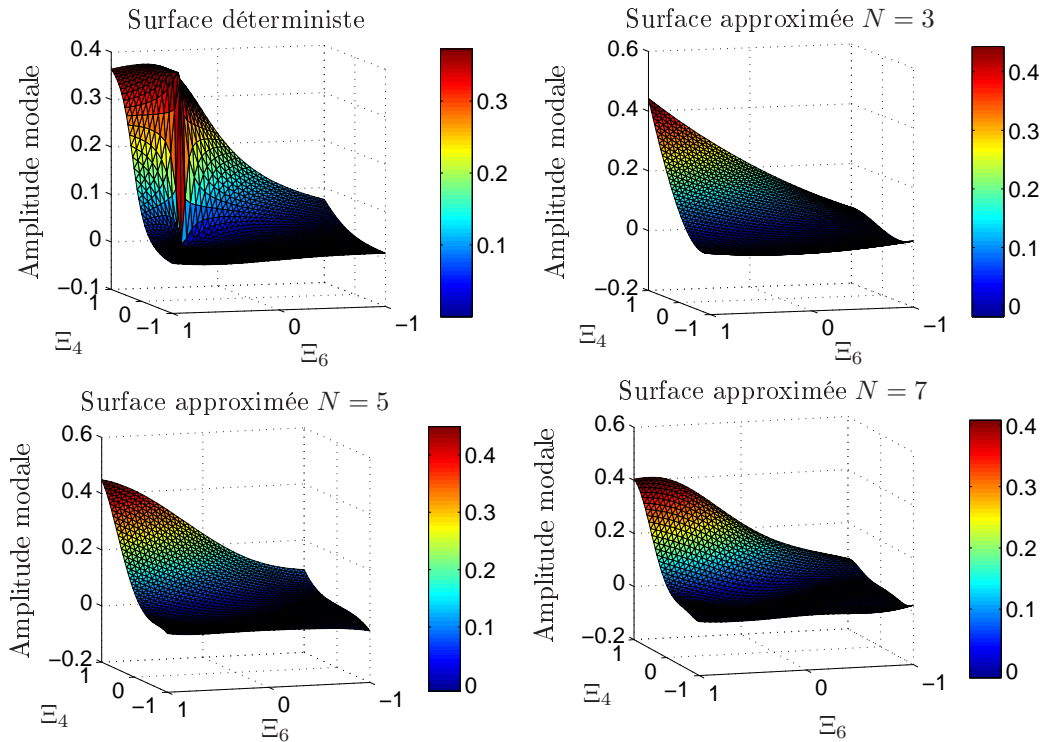


FIGURE III.2 – Surfaces de réponse déterministe et approximées par la méthode de régression, de la fonction de répartition inverse de 61^{ème} composante modale du 8^{ème} mode en fonction des variables aléatoires Ξ_4 et Ξ_6

afin d'obtenir une surface approximée correcte, sans pour autant parvenir à recréer la discontinuité. De plus, il y a une surestimation ou sous-estimation des valeurs de la fonction de répartition inverse proche de la discontinuité, avec une approximation à 0.4 au point (1; 1) pour un ordre de troncature de $N = 7$ au lieu des 0.36 attendus, soit une surestimation de l'ordre de 10%.

La surface déterministe de la figure III.3 laisse de nouveau apparaître une forte discontinuité autour du point (0.5; 0.5). L'augmentation du degré de troncature permet de nouveau d'obtenir une surface approximée correcte mais elle ne permet toujours pas de reproduire la discontinuité et surtout elle laisse apparaître un phénomène d'oscillation au niveau des bornes du domaine de définition. Ce phénomène, appelé effet de Runge [Die68], est dû au caractère fortement oscillant des polynômes

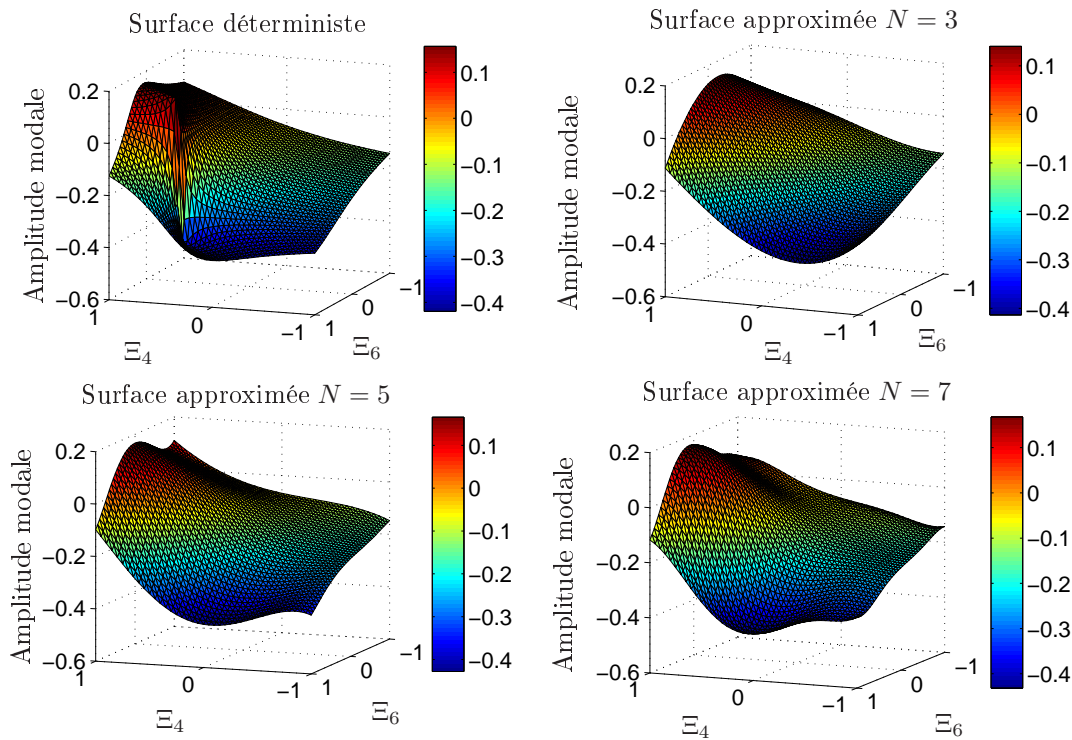


FIGURE III.3 – Surfaces de réponse déterministe et approximées par la méthode de régression de la fonction de répartition inverse de 91^{ème} composante modale du 9^{ème} mode en fonction des variables aléatoires Ξ_4 et Ξ_6

de degrés élevés. En effet, la troncature de la suite infinie de polynômes à un ordre fini ne permet de compenser les oscillations des polynômes de bas degré par celles des polynômes de degré supérieur. Le phénomène de Runge est analogue au phénomène de Gibbs [Gib98] observé lors de la décomposition en séries de Fourier d'une fonction périodique non régulière. À titre d'exemple, l'approximation en série de Fourier de la fonction périodique carré laisse apparaître une irrégularité au niveau des discontinuités (cf. Fig. III.4). Le problème d'estimation de la fonction de répartition inverse au niveau des bornes du domaine de définition vient donc s'ajouter à celui de l'estimation au niveau des discontinuités.

Les observations précédentes sont faites pour une variation de deux variables aléatoires tandis que les autres sont fixées. Le problème de dimension complexifie l'interpolation avec une discontinuité « mobile » vis-à-vis des autres variables aléatoires. Il est difficile de prédire l'emplacement de la discontinuité en fonction de l'ensemble des variables et donc d'adapter la méthode d'identification par régression en découpant de domaine de définition en sous-espaces adaptés et en imposant une simple condition de continuité \mathcal{C}^0 au niveau des interfaces.

Afin de mesurer l'impact global de l'effet de Runge et l'absence de modélisation des discontinuités, quelques grandeurs statistiques de réponse forcée stochastique ont été tracées figure III.5. La réponse forcée stochastique \mathbf{U} est calculée en appliquant

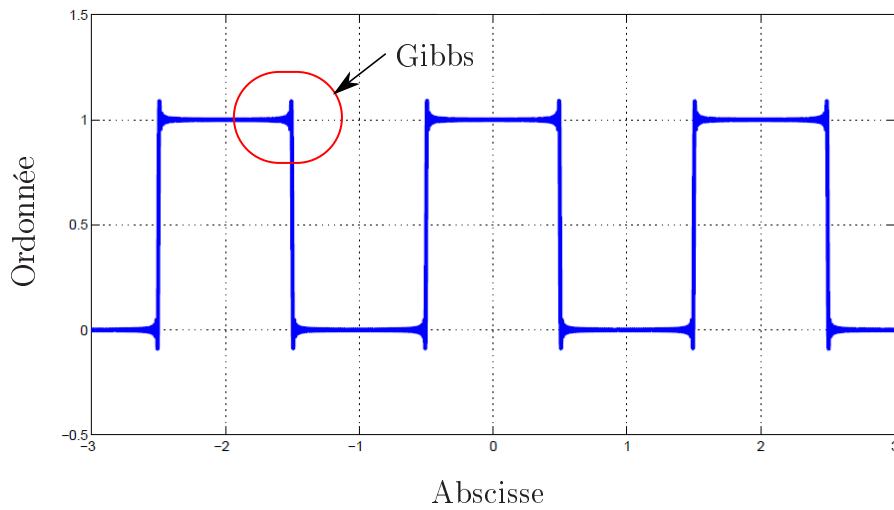


FIGURE III.4 – Phénomène de Gibbs observé par l’approximation en série de Fourier à 144 harmoniques d’une fonction carrée [Bla16]

un effort normal unitaire déterministe F au centre de la première aube (cf. Fig. II.1, aube la plus à gauche) puis reconstruite à partir du calcul des modes stochastique ($\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_{N_m})^t$, $[\Phi] = (\Phi_1, \dots, \Phi_{N_m})$) en introduisant un amortissement visqueux $\eta = 0.1\%$:

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{N_m} \frac{\Phi_k^t \Phi_k}{\omega_k^2 + 2j\eta\omega_k\omega - \omega^2} F \quad (\text{III.12})$$

où N_m correspond à l’ordre de troncature modale soit le nombre de modes conservés pour décrire le mouvement du système, j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$ et ω la pulsation d’excitation. La variabilité de \mathbf{U} est pilotée par la variabilité de Ω et de $[\Phi]$, pilotée elle-même par la variabilité de Ξ .

Les résultats présentés par la figure III.5 correspondent à la moyenne, l’écart-type, l’asymétrie, le kurtosis, le minimum et le maximum de l’amplitude du déplacement normal (mouvement de flexion) stochastique du milieu de la cinquième aube (point vert de la figure II.8), respectivement situés en haut à gauche, en haut à droite, au milieu à gauche, au milieu à droite, en bas à gauche et en bas à droite de la figure. Ces grandeurs statistiques ont été générées en utilisant la méthode de Monte Carlo (cf. Sec. II.3.1) pour 50 000 réalisations. L’erreur faite sur l’estimation de ces grandeurs est de l’ordre de 0.5%. Les résultats concernant les autres degrés de liberté ne sont pas présentés puisqu’ils sont analogues.

Les courbes noires de référence représentent le déplacement stochastique obtenu à partir des modes propres stochastiques calculés par Monte Carlo. Les courbes vertes, bleues et rouges correspondent au déplacement stochastique obtenu à partir de la fonction de répartition inverse approximée des modes stochastiques pour un ordre de troncature de $N = 3$, $N = 5$ et $N = 7$ respectivement. La corrélation entre les diffé-

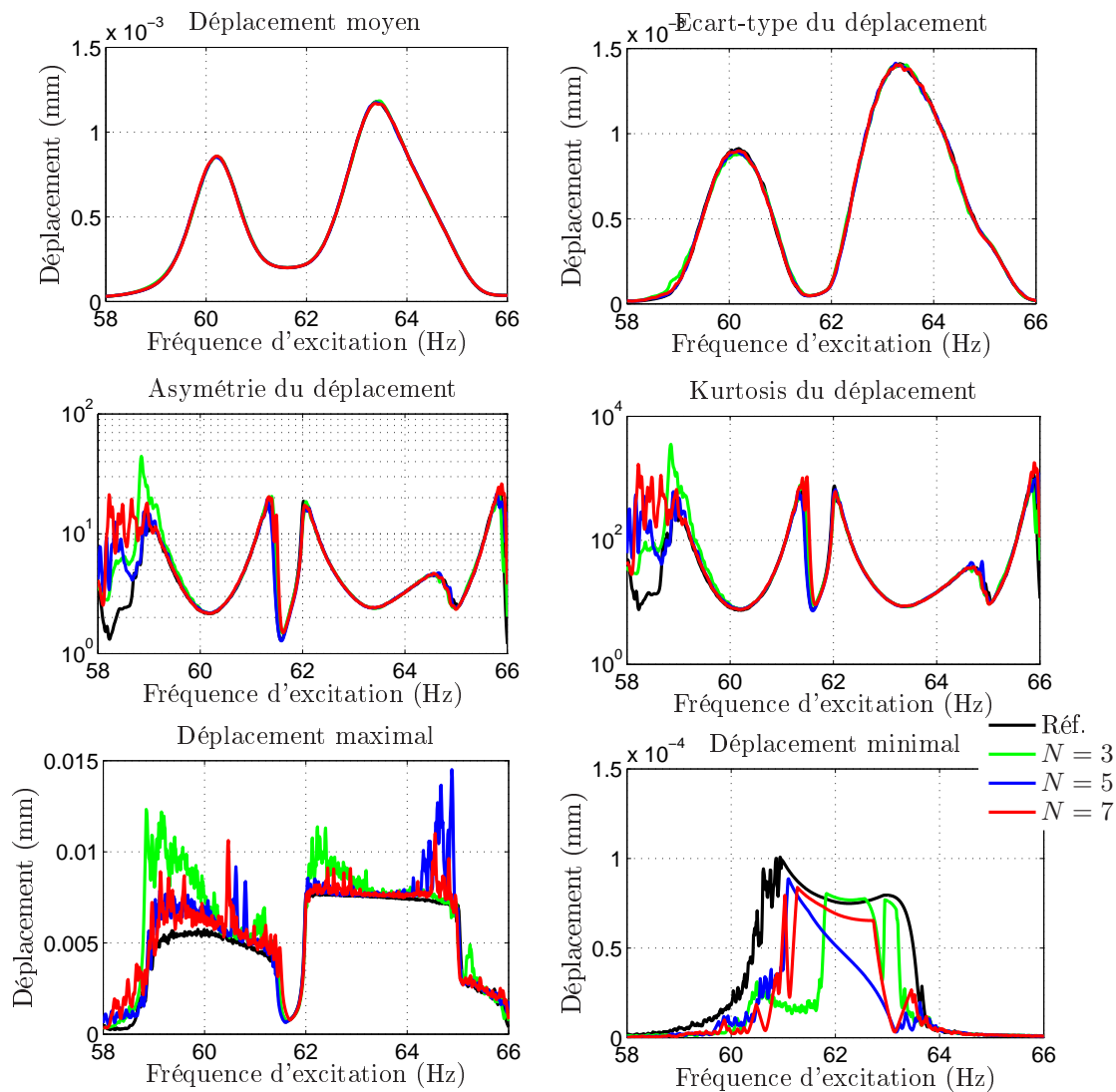


FIGURE III.5 – Réponse forcée stochastique $U(\Xi)$ du milieu de la cinquième aube approximée par méthode de régression pour différents ordres de troncature N

rentes courbes est excellente en termes de moyenne et d'écart-type du déplacement. La corrélation est également de bonne qualité en termes d'asymétrie et de kurtosis du déplacement, notamment pour une troncature d'ordre $N = 5$. Les valeurs positives de l'asymétrie illustrent une répartition des déplacements plutôt inférieure à la moyenne. De plus, les valeurs élevées de kurtosis sont représentatives d'une distribution des déplacements plutôt dense au niveau des petits déplacements mais la présence de très grands déplacements est fréquente. Ces deux résultats sont cohérents avec une forte densité des déplacements bien inférieurs à la moyenne (résonances rares à une fréquence donnée). En revanche, la corrélation n'est pas de bonne qualité en termes de déplacements extrémaux. En effet, il y a une large surestimation des déplacements maximaux et une large sous-estimation des déplacements minimaux pour certaines fréquences d'excitation, avec un écart relatif pouvant atteindre plus de 100% de la valeur théorique quelque soit l'ordre de troncature. Les résultats sont

conservatifs mais ne permettent pas d'optimiser significativement le dimensionnement du secteur de redresseur. Ces différences sont dues à l'effet de Runge observé lors de l'approximation des fonctions de répartition inverse des modes stochastiques, et surtout à la mauvaise estimation des surfaces au niveau des discontinuités.

2.2.2 Résultats de la méthode de régression sur les modes propres stochastiques calculés à partir du champ stochastique \mathbf{Z} transformé par l'expansion de Karhunen-Loève

Ce paragraphe s'intéresse aux résultats équivalents à ceux du paragraphe précédent pour le calcul des modes stochastiques à partir des variables aléatoires \mathbf{Z} , issues de l'expansion de Karhunen-Loève des variables Ξ . L'intérêt de l'expansion de Karhunen-Loève dans ce paragraphe n'est pas de réduire la dimension stochastique mais d'observer l'impact de la diagonalisation des variables aléatoires (cf. Sec. II.2.4). Les figures III.6 et III.7 présentent respectivement la 61^{ème} coordonnée modale, de la base réduite de Craig-Bampton, du 8^{ème} mode et la 91^{ème} coordonnée modale, dans la même base, du 9^{ème} mode. Les modes considérés appartiennent à la zone de forte densité modale correspondante aux premiers modes de flexion d'aubes (1F - cf. Fig.II.4). Les coordonnées modales tracées correspondent à la participation modale du premier mode de flexion de la première (aube la plus à gauche) et quatrième (aube centrale) aube respectivement. Ces deux figures illustrent chacune la surface déterministe à approximer et donc de référence et les surfaces approximées pour des degrés de troncature $N = 3$, $N = 5$ et $N = 7$, respectivement située en haut à gauche, en haut à droite, en bas à gauche et en bas à droite. Les surfaces tracées correspondent à la variation des variables aléatoires Z_1 et Z_2 correspondant aux variables présentant la plus forte variabilité. La première correspond à une variation globale quasi-uniforme du module d'Young des aubes, tandis que la deuxième correspond à une variation linéaire symétrique du module d'Young par rapport à l'aube centrale. Les autres variables sont fixées à zéro.

La surface déterministe de la figure III.6 ne laisse plus apparaître de discontinuité. L'expansion de Karhunen-Loève permet donc de régulariser les surfaces de réponse, s'adaptant mieux à l'interpolation polynomiale. Cependant, il existe toujours des erreurs d'approximation, notamment au niveau des surfaces approximées d'ordre $N = 3$ et $N = 5$. Ce mode est assez similaire au 9^{ème} mode (cf. fig. II.5), où le phénomène de coulage aube/viole n'est pas négligeable. De plus, la composante observée correspond au premier mode de flexion de l'aube la plus à gauche. Cette aube est plus sujette à la variabilité des caractéristiques des viroles (effets de bords) et la surface de réponse associée à la composante observée est plus susceptible d'avoir une variabilité fortement dépendante des variables associées au module d'Young des viroles, qui ont été considérées indépendantes lors de la construction de la matrice de covariance. Dans ce cas, la transformation de Karhunen-Loève considérée ne permet pas d'atténuer l'interaction forte entre certaines variables, d'où la difficulté d'approximation. D'autre part, l'effet de Runge est toujours présent, notamment lorsque

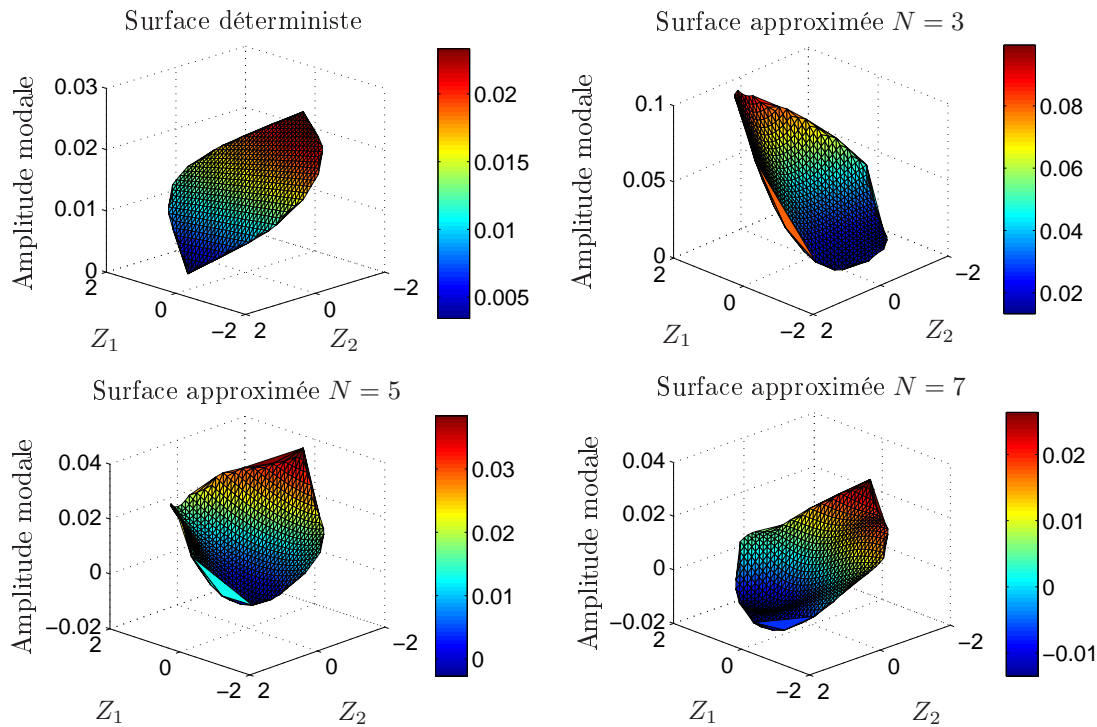


FIGURE III.6 – Surfaces de réponse déterministe et approximées par la méthode de régression de la fonction de répartition inverse de $61^{\text{ème}}$ composante modale du $8^{\text{ème}}$ mode en fonction des variables aléatoires Z_1 et Z_2

l'ordre de troncature est élevé.

De nouveau, la surface déterministe de la figure III.7 ne laisse plus apparaître de discontinuité. Les interpolations sont d'excellente qualité quel que soit le degré de troncature. Le découplage des variables est extrêmement efficace pour ce mode.

Afin de mesurer l'impact global de la régularisation des surfaces de réponse, les grandeurs statistiques d'une réponse forcée stochastique, explicitées dans la section précédente (cf. Sec. III.2.2.1) ont été tracées figure III.8.

Les courbes noires de référence représentent le déplacement stochastique obtenu à partir des modes propres stochastiques calculés par Monte Carlo. Les courbes vertes, bleues et rouges correspondent au déplacement stochastique obtenu à partir de la fonction de répartition inverse approximée des modes stochastiques pour un ordre de troncature de $N = 3$, $N = 5$ et $N = 7$ respectivement. La corrélation entre les différentes courbes est excellente en termes de moyenne et d'écart-type du déplacement. La corrélation est également de bonne qualité en termes d'asymétrie et de kurtosis du déplacement. En revanche, les déplacements approximés extrêmes, bien que conservatifs, présentent encore des écarts importants par rapport à ceux de référence. Dans ce cas, c'est l'ordre de troncature $N = 3$ qui permet d'obtenir les meilleurs résultats avec une représentation assez fidèle en termes de maximum sur la

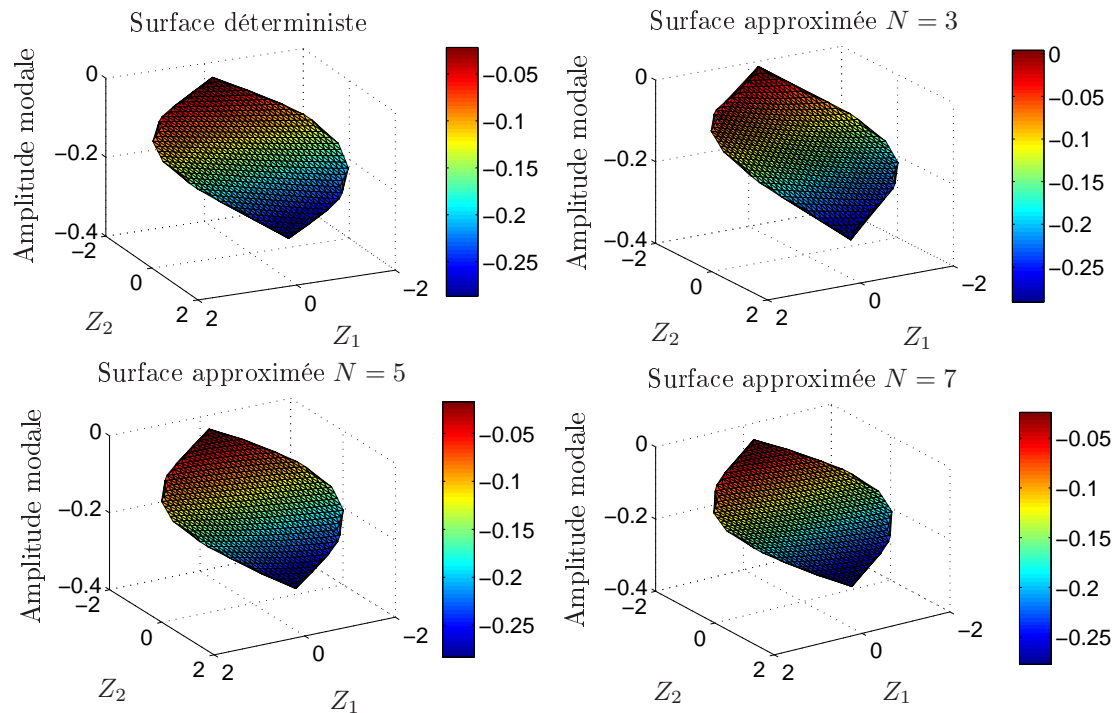


FIGURE III.7 – Surfaces de réponse déterministe et approximées par la méthode de régression de la fonction de répartition inverse de 91^{ème} composante modale du 9^{ème} mode en fonction des variables aléatoires Z_1 et Z_2

plage d'excitation allant de 62 à 64Hz. Les écarts les plus importants pour cet ordre de troncature se situent dans la plage d'excitation allant de 59 à 60Hz correspondant à la plage de variation du 8^{ème} mode. Cette observation est cohérente avec le résultat obtenu Fig. III.6 puisque l'aube observée se situe au « bord » du secteur de redresseur et rencontre donc la même problématique en termes d'approximation de surface de réponse que la première aube.

2.2.3 Conclusions sur la méthode d'identification des coefficients du chaos par régression

La méthode de régression permet d'identifier les coefficients du chaos par la minimisation de l'erreur quadratique entre la solution approximée et la solution exacte en un nombre fini de réalisations déterministes. La précision de cette méthode dépend à la fois de l'ordre de troncature considéré et du nombre de calculs déterministes effectués. Ce nombre de calculs est d'autant plus grand que le nombre de variables descriptives et l'ordre de troncature sont élevés, pénalisant ainsi la méthode avec des temps de calcul trop importants comparés à ceux de Monte Carlo. De plus, la méthode ne permet pas d'approximer correctement des surfaces présentant de fortes discontinuités, à cause de l'extrême régularité des polynômes, ainsi que les plans à cause des propriétés oscillantes des polynômes et donc l'apparition de l'effet de Runge. La méthode de régression semble donc plus adaptée après transformation des

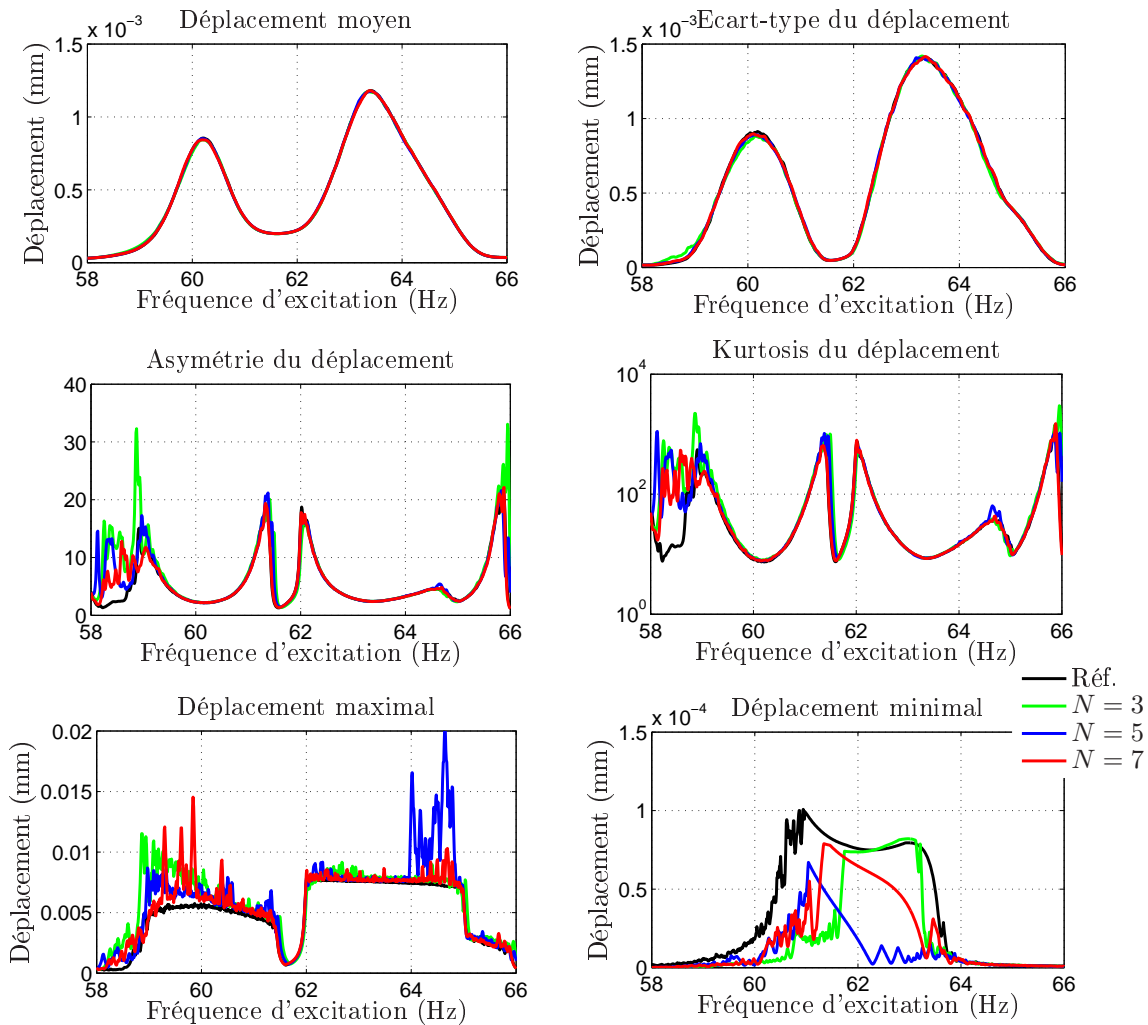


FIGURE III.8 – Réponse forcée stochastique $U(\mathbf{Z})$ du milieu de la cinquième aube approximée par méthode de régression pour différents ordres de troncature N

variables aléatoires de départ par l'expansion de Karhunen-Loève, qui a tendance à lisser les surfaces de réponse. Néanmoins, la méthode de régression donne des résultats de très bonne qualité en termes de moments statistiques de la réponse forcée quelque soit l'espace de variables descriptives. Les résultats sur les réponses forcées extrémales sont assez similaires avec une amélioration locale, à faible ordre de troncature, pour les surfaces décrites par les variables aléatoires issues de l'expansion de Karhunen-Loève. En effet, les résultats pour le degré de troncature $N = 3$ sont assez satisfaisants au niveau de la réponse forcée maximale dans la zone d'excitation correspondant à des modes de flexion d'aube peu couplés avec les viroles. En revanche, la zone d'excitation correspondant à des modes de flexion d'aube fortement couplés avec les viroles ne présente pas d'améliorations particulières, traduisant une forte interaction entre les variables d'aubes et de viroles, non prise en compte par l'expansion de Karhunen-Loève lors de la création de la matrice de covariance. L'écart sur les déplacements minimaux est également dû à la méthode de résolution qui favorise

naturellement la minimisation de l'erreur quadratique des valeurs les plus élevées. Une méthode de pondération augmentant le poids des valeurs les plus faibles ou l'application d'une échelle logarithmique permettrait de pallier cette problématique. En revanche, le système à résoudre deviendrait non-linéaire augmentant ainsi les temps de calcul. Cette solution perd donc de son intérêt, d'autant plus que les valeurs minimales ne sont pas utiles au dimensionnement des redresseurs. L'objectif de la section suivante est donc d'introduire une nouvelle méthode d'interpolation qui permettrait de prendre en compte les fortes discontinuités des surfaces de réponses par une discrétisation adaptée automatiquement du domaine de variation.

3 Interpolation des fonctions de répartition inverse par Régression Multivariée par Splines Adaptatives

La section précédente a permis de mettre en avant le fait que l'interpolation par régression polynomiale avait certaines limites quant à la prise en compte de discontinuités ou de fortes variations de la surface de réponse. Il existe d'autres méthodes, plus souples, qui permettent d'adapter la forme de la solution en fonction des données, il s'agit des méthodes de régression non paramétrique. La méthode retenue dans cette section est la Régression Multivariée par Splines Adaptatives, connue sous le nom de méthode « MARS ».

3.1 Description théorique de la méthode MARS

La méthode MARS est une méthode de régression non paramétrique qui permet d'obtenir un estimateur \hat{X} de X formé de splines de régression multivariées de façon adaptative. Elle est basée sur le partitionnement récursif de l'espace \mathcal{S}_{Ξ} ou \mathcal{S}_Z en sous régions disjointes pour lesquelles est définie une fonction de base approximant au mieux la réponse sur ce sous-domaine :

$$\hat{X} = g(\Xi) = \sum_{n=1}^N a_n B_n(\Xi) \quad (\text{III.13})$$

où les fonctions $B_n(\Xi)$ sont des fonctions simples, souvent des polynômes de degré 1 ou 3, définies sur un sous domaine $s_{\Xi}^n \subset \mathcal{S}_{\Xi}$ et a_n sont les coefficients à déterminer. Les sous domaines sont définis afin de minimiser l'erreur de la solution approximée. Le pouvoir de cette méthode est de parvenir à trouver les discontinuités de manière itérative d'une surface à approximer, uniquement si elles existent. La construction de la base par la méthode MARS s'effectue en deux étapes, la première est une phase additive qui va générer les premières fonctions de bases à partir des discontinuités détectées, puis s'ensuit une phase d'élimination qui va supprimer les fonctions de base introduisant une « fausse » discontinuité. La première phase est décrite par

l'Alg. 1, dans le cas où les fonctions de base sont linéaires.

Algorithm 1 Phase additive - Construction des fonctions de base

```

 $B_1(\Xi) \leftarrow 1_{\mathcal{S}_\Xi}(\Xi)$ 
 $N \leftarrow 1$ 
while  $N \leq N_{max}$  do
   $lof^* \leftarrow \infty$ 
  for  $n \leftarrow 1 : N$  do
    for  $m \notin \{m(k, n) / 1 \leq k \leq K_n\}$  do
      for  $t \in \{\Xi_m^{(r)} / B_n(\Xi^{(r)}) > 0\}$  do
         $g \leftarrow \sum_{i=1}^{N-1} a_i B_i(\Xi) + a_{N+1} B_n(\Xi) [+(\Xi_m - t)]_+ + a_{N+2} B_n(\Xi) [-(\Xi_m - t)]_+$ 

         $lof \leftarrow \min_{a_1, \dots, a_{N+2}} LOF(g, \lambda)$ 
        if  $lof < lof^*$  then
           $lof^* \leftarrow lof$ 
           $n^* \leftarrow n$ 
           $m^* \leftarrow m$ 
           $t^* \leftarrow t$ 
        end if
      end for
    end for
  end for
   $B_{N+1}(\Xi) = B_{n^*} [+(\Xi_{m^*} - t^*)]_+$ 
   $B_{N+2}(\Xi) = B_{n^*} [-(\Xi_{m^*} - t^*)]_+$ 
   $N \leftarrow N + 2$ 
end while

```

La première étape de cette phase est d'introduire la fonction indicatrice sur le domaine de définition des variables Ξ . Cette fonction constitue le point de départ de la phase additive et ne peut être supprimée. Puis s'ensuit l'étape de construction des autres fonctions de bases, la plus longue en termes de temps de calcul, qui est composée de quatre boucles imbriquées :

- 1 - La première boucle porte sur le nombre de fonctions présentes dans la base. L'utilisateur définit un nombre de fonctions maximal N_{max} qui ne peut être dépassé. Tant que ce nombre n'est pas atteint, l'algorithme continue de générer des fonctions. En général, $N_{max} = \max(21; 2M + 1)$, où M correspond à la dimension stochastique du problème.
- 2 - La deuxième boucle est une itération sur le nombre de fonctions de bases déjà générées. Elle permet de générer de nouvelles fonctions à partir des précédentes (fonctions parents) et donc d'introduire des fonctions de base à plusieurs variables découplées.
- 3 - La troisième boucle sur le nombre de variables aléatoires M descriptives du modèle. Elle permet de sélectionner une variable descriptive en particulier en

s'assurant que cette variable appartienne à l'ensemble :

$$\{m(k, n) / 1 \leq k \leq K_n\}, \quad (\text{III.14})$$

qui correspond à l'ensemble des indices de variables présentes dans la fonction de base B_n , où n est définie par la boucle précédente. Le cardinal de cet ensemble ne peut excéder la valeur K_n définie par l'utilisateur et correspondant au degré d'interaction maximal entre les variables d'une même fonction de base. Le degré d'interaction correspond au nombre maximal de variables aléatoires différentes par fonctions de base. K_n est donc une valeur ne pouvant excéder logiquement la dimension stochastique M .

4 - La dernière boucle balaie l'ensemble des valeurs prises par la variable sélectionnée Ξ_m vérifiant la condition $B_n(\Xi^{(r)}) > 0$.

Deux nouvelles fonctions de base :

$$B_{N+1}(\Xi) = B_n(\Xi)[+(\Xi_m - t)]_+ \quad (\text{III.15})$$

$$B_{N+2}(\Xi) = B_n(\Xi)[-(\Xi_m - t)]_+ \quad (\text{III.16})$$

sont alors générées pour chaque itération des trois dernières boucles, où la fonction $[\cdot]_+$ est définie par :

$$x \rightarrow [x]_+ = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Ces fonctions viennent compléter la description de la fonction $g(\Xi)$. Le vecteur de coefficient $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{N+2})^t$ est alors calculé afin de minimiser l'erreur quadratique normalisée :

$$LOF(g, \lambda) = \frac{\sum_{r=1}^{\nu} (X^{(r)} - g(\Xi^{(r)}))^2}{\nu \left(1 - \frac{(N+2) + \lambda(N+1)}{\nu}\right)^2} \quad (\text{III.18})$$

où $X^{(r)}$ correspond aux réalisations déterministes de X et λ un paramètre de lissage compris généralement entre 2 et 4 [Fri91].

Enfin, les deux fonctions de base retenues sont celles qui minimisent le plus la fonction LOF une fois que toutes les fonctions parents (boucle 2), les indices de variables aléatoires (boucle 3) et l'ensemble des réalisations déterministes (boucle 4) ont été balayés. L'opération est ensuite répétée jusqu'à ce que le nombre de fonctions de base maximal ait été atteint (boucle 1). La deuxième phase de la méthode consiste à supprimer d'éventuelles fonctions de base qui introduiraient une discontinuité inexistante. Cette phase est décrite par l'Alg. 2.

La première étape de cette seconde phase consiste à minimiser la fonction LOF (cf. Eq. (III.18)) en fonction du vecteur de coefficients $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{N_{max}})^t$. L'erreur globale par rapport aux évaluations déterministes constitue le point de départ

Algorithm 2 Phase soustractive - Suppression de certaines fonctions de base

```

 $I^* = \{1, \dots, N_{max}\}$ 
 $K^* \leftarrow I^*$ 
 $lof^* \leftarrow \min_{a_i, i \in I^*} LOF(\sum_{i \in I^*} a_i B_i(\Xi), \lambda)$ 
for  $N \leftarrow N_{max} : 2$  do
   $b \leftarrow \infty$ 
   $L \leftarrow K^*$ 
  for  $n \leftarrow 2 : N$  do
     $K \leftarrow L/m$ 
     $lof \leftarrow \min_{a_k, k \in K} LOF(\sum_{k \in K} a_k B_k(\Xi), \lambda)$ 
    if  $lof < b$  then
       $b \leftarrow lof$ 
       $K^* \leftarrow K$ 
    end if
    if  $lof < lof^*$  then
       $lof^* \leftarrow lof$ 
       $J^* \leftarrow K$ 
    end if
  end for
end for

```

de cette seconde phase. L'algorithme est composé de deux boucles portant sur le nombre de fonctions de base générées avec un indilage en triangle. A chaque étape, l'erreur globale va être calculée en supprimant une ou plusieurs fonctions de base et comparée à celle de départ. Si elle est diminuée, les fonctions de base concernées peuvent être supprimées.

La méthode MARS permet d'obtenir un estimateur \hat{X} de notre variable X à partir des variables descriptives Ξ . La surface obtenue est continue et composée de fonctions linéaires ou cubiques définies par morceaux. Cette méthode permet, en théorie, de modéliser plus précisément les discontinuités et les plans (pas d'effet de Runge). Friedman [Fri91, Fri93] a amélioré ces algorithmes afin de minimiser les temps de calcul en ne considérant plus l'intégralité des évaluations déterministes mais un échantillon représentatif, et en introduisant des critères d'arrêt sur l'erreur globale permettant d'arrêter la construction de fonctions de base si l'erreur est en dessous d'un certain niveau (utile pour les surfaces simples du type hyperplan). Cette méthode peut s'avérer très coûteuse en termes de temps de calcul à cause des nombreuses boucles imbriquées, notamment si le nombre d'évaluations déterministes et surtout le nombre de surfaces à générer sont importants. Dans le cadre de cette étude, le nombre de surfaces à approximer dépend du nombre de modes retenu et de la taille de la base réduite des degrés de liberté, ce qui revient à l'estimation d'environ 4 200 surfaces pour le modèle simplifié et plus de 200 000 pour le modèle industriel défini section V.

3.2 Application de la méthode MARS au cas d'un redresseur simplifié

Il s'agit maintenant d'appliquer la méthode d'identification des coefficients du chaos par la méthode de régression multivariée par splines adaptatives à la structure particulière d'un secteur de redresseur simplifié. Les conditions d'application sont identiques au cas précédent (cf. Sec. III.2.2).

Dans un premier temps, les modes propres stochastiques sont calculés à partir des variables aléatoires de départ Ξ . Quelques résultats, tels que les surfaces de réponse et les réponses forcées, sont observés et comparés à ceux obtenus par une résolution de Monte Carlo. Puis, les modes propres stochastiques sont calculés à partir des variables aléatoires Z devenues indépendantes suite à l'expansion de Karhunen-Loève. Le nombre de variables aléatoires n'est pas réduit afin de mesurer le second intérêt de l'expansion de Karhunen-Loève, soit la régularisation des surfaces de réponse.

3.2.1 Résultats de la méthode MARS sur les modes propres stochastiques calculés à partir du champ stochastique Ξ de départ

Ce paragraphe présente les résultats obtenus lors du calcul des modes stochastiques à partir des variables aléatoires Ξ en utilisant la méthode MARS. Dans un premier temps, quelques surfaces de réponse sont tracées pour différents nombres d'échantillons ν et comparées à celles théoriques. Dans un second temps, la réponse forcée stochastique du secteur de redresseur est présentée afin d'obtenir une vision globale des résultats issus du calcul des modes stochastiques.

Les figures III.9 et III.10 présentent de nouveau la 61^{ème} coordonnée modale, de la base réduite de Craig-Bampton, du 8^{ème} mode et la 91^{ème} coordonnée modale, dans la même base, du 9^{ème} mode. Ces deux figures illustrent chacune la surface déterministe à approximer et donc de référence et les surfaces approximées pour différents nombres d'échantillons $\nu_1 = 1560$, $\nu_2 = 10296$ et $\nu_3 = 41184$, respectivement située en haut à gauche, en haut à droite, en bas à gauche et en bas à droite. Ces valeurs correspondent au nombre d'échantillons nécessaire à la convergence de la méthode de régression pour les ordres de troncature, $N = 3$, $N = 5$ et $N = 7$ respectivement (cf. Tab. III.2). Elles ont été retenues afin de comparer les deux méthodes d'interpolation pour un même nombre de réalisations déterministes. Les fonctions de base retenues sont de forme cubique et la taille de cette base ne peut excéder 21 fonctions. Les surfaces tracées correspondent à la variation des variables aléatoires Ξ_4 et Ξ_6 associées respectivement au module d'Young de la deuxième et de la quatrième aube, les autres variables sont fixées à 0.

La figure III.9 illustre le fait que la méthode de MARS ne permet pas de représenter correctement la discontinuité au niveau du point (0.5;0.5). En revanche, les tendances globales sont mieux respectées avec la suppression de l'effet de Runge au niveau des zones planes et la réduction des zones surévaluées. De plus, le nombre d'échantillons déterministes ne semble pas avoir un impact important sur la forme générale de la surface de réponse. La méthode MARS semble donc converger très

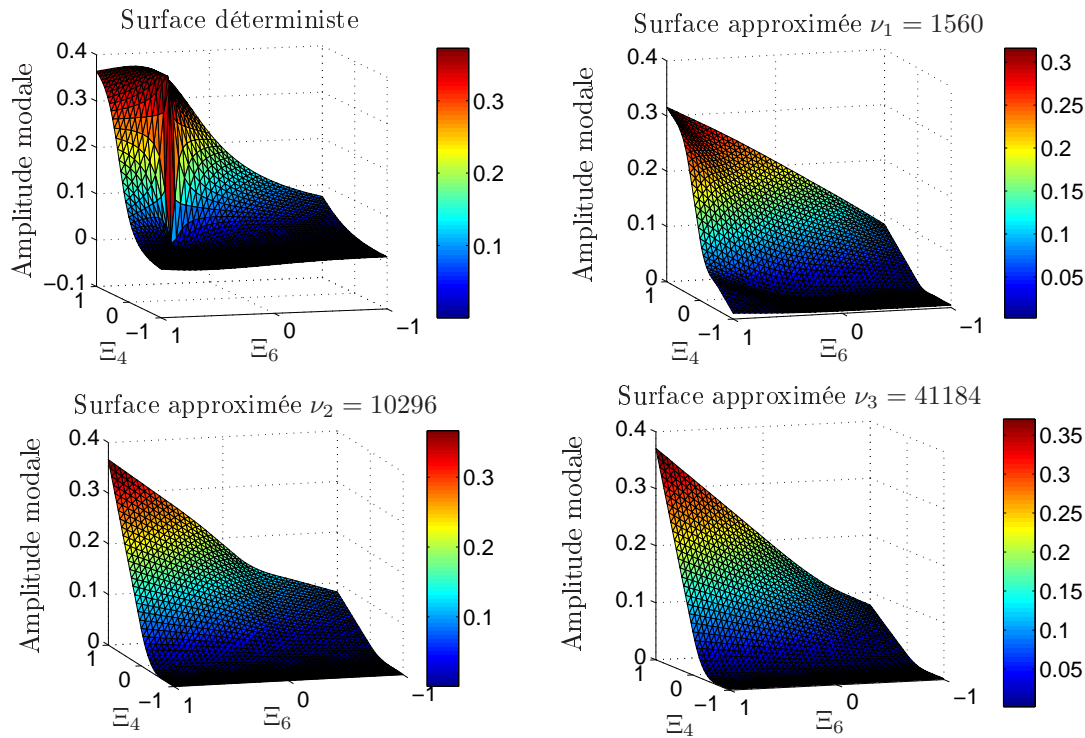


FIGURE III.9 – Surfaces de réponse déterministe et approximées par la méthode MARS de la fonction de répartition inverse de 61^{ème} composante modale du 8^{ème} mode en fonction des variables aléatoires Ξ_4 et Ξ_6

rapidement avec peu d'évaluations déterministes.

La figure III.10 permet d'appuyer les observations faites dans le cadre de la figure III.9. La forte discontinuité n'est pas représentée mais la forme globale de la réponse est très similaire à la surface déterministe. De plus, l'effet de Runge est supprimé, les surévaluations amoindries et la convergence de la solution est atteinte rapidement.

Afin de mesurer l'impact global de l'interpolation des surfaces de réponse par la méthode MARS, quelques grandeurs statistiques de réponse forcée stochastique ont été tracées figure III.11. La réponse forcée stochastique \mathbf{U} est calculée en appliquant un effort normal unitaire déterministe F au centre de la première aube (cf. Fig. II.1, aube la plus à gauche) puis reconstruite à partir du calcul des modes stochastiques ($\mathbf{\Omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{N_m})^t$, $[\Phi] = (\Phi_1, \dots, \Phi_{N_m})$) en introduisant un amortissement visqueux $\eta = 0.1\%$ (cf. Eq. (III.12)).

Les résultats présentés figure III.11 correspondent à la moyenne, l'écart-type, l'asymétrie, le kurtosis, le maximum et le minimum de l'amplitude du déplacement normal (mouvement de flexion) stochastique du milieu de la cinquième aube (point vert de la Fig. II.8), respectivement situés en haut à gauche, en haut à droite, au milieu à gauche, au milieu à droite, en bas à gauche et en bas à droite de la figure. Ces grandeurs statistiques ont été générées en utilisant la méthode de Monte Carlo (cf. Sec. II.3.1) pour 50 000 réalisations. L'erreur faite sur l'estimation de ces grandeurs

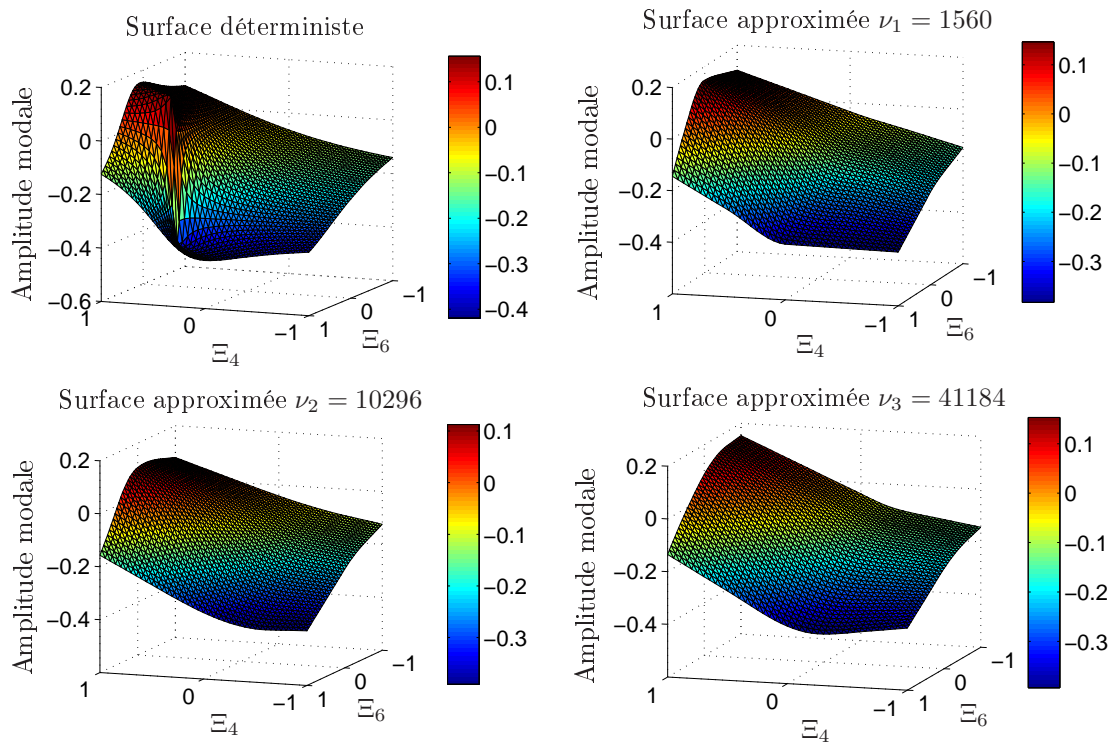


FIGURE III.10 – Surfaces de réponse déterministe et approximées par la méthode MARS de la fonction de répartition inverse de 91^{ème} composante modale du 9^{ème} mode en fonction des variables aléatoires Ξ_4 et Ξ_6

est donc de l'ordre de 0.5%. Les résultats concernant les autres degrés de liberté ne sont pas présentés puisqu'ils sont analogues à ceux ci-après.

Les courbes noires de référence représentent le déplacement stochastique obtenu à partir des modes propres stochastiques calculés par Monte Carlo. Les courbes vertes, bleues et rouges correspondent au déplacement stochastique obtenu à partir de la fonction de répartition inverse approximée des modes stochastiques pour un nombre d'échantillons de $\nu_1 = 1560$, $\nu_2 = 10296$ et $\nu_3 = 41184$ respectivement. La corrélation entre les différentes courbes est excellente en termes de moyenne et d'écart-type du déplacement. La corrélation est également de bonne qualité en termes d'asymétrie et de kurtosis du déplacement. Les valeurs positives de l'asymétrie illustrent une répartition des déplacements plutôt inférieure à la moyenne. De plus, les valeurs élevées de kurtosis sont représentatives d'une distribution des déplacements plutôt dense au niveau des petits déplacements, mais la présence de très grands déplacements est fréquente. Ces deux résultats sont cohérents avec une forte densité des déplacements bien inférieurs à la moyenne (résonances rares à une fréquence donnée). En revanche, la corrélation n'est pas de bonne qualité en termes de déplacements extrémaux. En effet, il y a une large surestimation des déplacements maximaux et une large sous-estimation des déplacements minimaux pour certaines fréquences d'excitation, avec un écart relatif pouvant atteindre près de 80% de la valeur théorique quelque soit

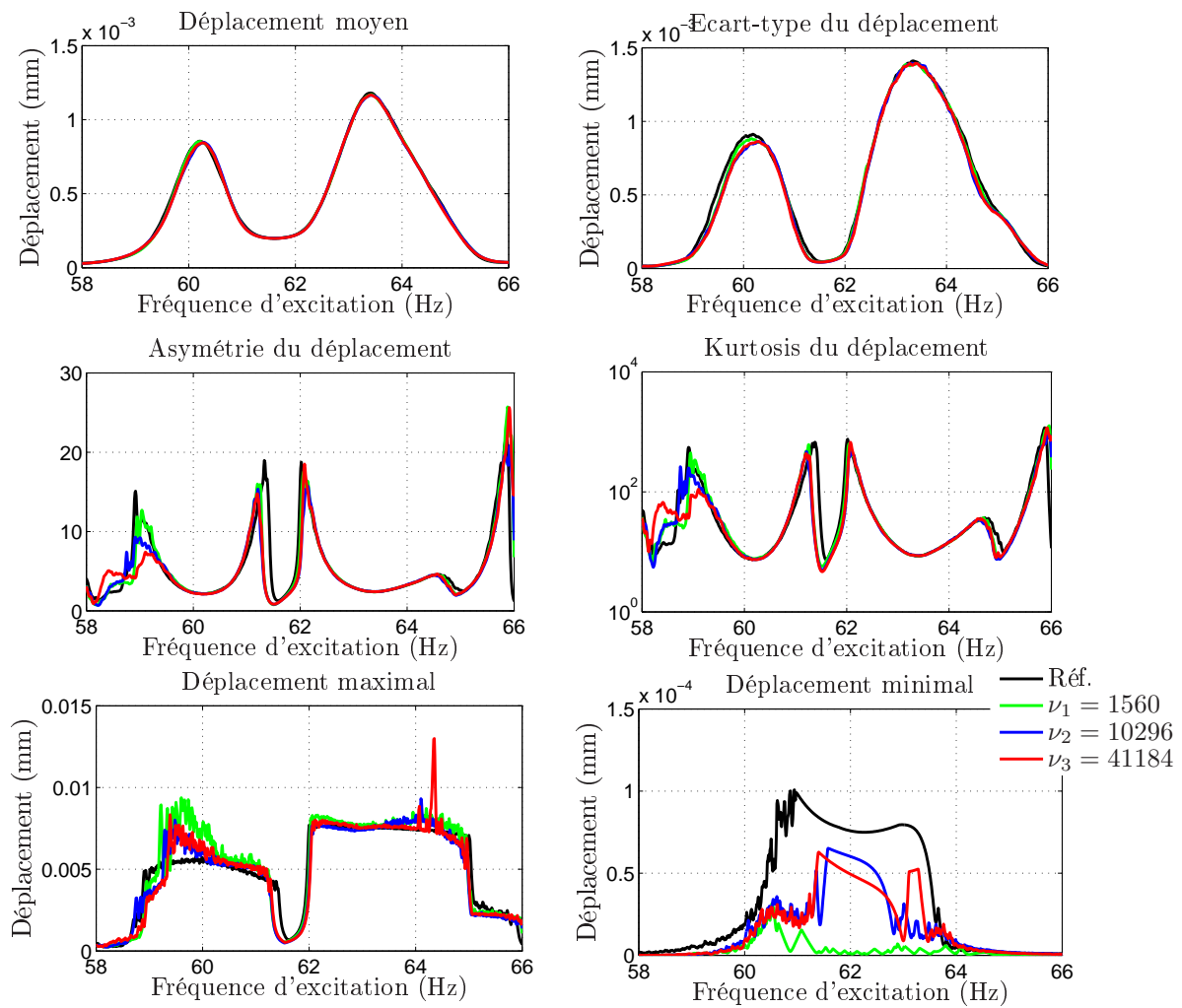


FIGURE III.11 – Réponse forcée stochastique $U(\Xi)$ du milieu de la cinquième aube approximée par la méthode MARS pour différents ordres de troncature N

le nombre d'évaluations déterministes. Les résultats sont tout de même plus précis que ceux obtenus par la méthode d'interpolation par régression mais la méthode MARS nécessite un temps de calcul bien plus long. En effet, deux à dix secondes sont nécessaires pour générer une surface de réponse en fonction du nombre d'évaluations déterministes retenues soit trois à douze heures pour l'ensemble des surfaces de ce modèle contre quelques minutes pour la méthode de régression. Néanmoins, ce temps de calcul peut être réduit en parallélisant le calcul ou en ordonnant le choix des évaluations déterministes (quadrillage du domaine de définition, racines des polynômes de Legendre,...).

3.2.2 Résultats de la méthode MARS sur les modes propres stochastiques calculés à partir du champ stochastique \mathbf{Z} transformé par l'expansion de Karhunen-Loève

Ce paragraphe s'intéresse aux résultats équivalents à ceux du paragraphe précédent pour le calcul des modes stochastiques à partir des variables aléatoires \mathbf{Z} , issues de l'expansion de Karhunen-Loève des variables $\mathbf{\Xi}$. Les figures III.12 et III.13 présentent respectivement la 61^{ème} coordonnée modale, de la base réduite de Craig-Bampton, du 8^{ème} mode et la 91^{ème} coordonnée modale, dans la même base, du 9^{ème} mode. Ces deux figures illustrent chacune la surface déterministe à approximer (en haut à gauche) et donc de référence et les surfaces approximées pour trois paramétrages, p_1 , p_2 et p_3 , différents de la méthode MARS. Le paragraphe précédent (cf. III.3.2.1) a permis de mettre en avant la convergence rapide de la méthode MARS en termes de nombres d'évaluations déterministes et la section précédente (cf. III.2.2.2) a permis de démontrer la régularité des surfaces de réponses dépendantes des variables de Karhunen-Loève \mathbf{Z} . La première surface (en haut à droite) est approximée par des fonctions de base linéaires pour un nombre d'évaluations $\nu_1 = 1560$, la seconde surface (en bas à gauche) est approximée par des fonctions de base cubiques pour un nombre d'évaluations $\nu_1 = 1560$, et la troisième surface (en bas à droite) est approximée par des fonctions de base linéaires pour un nombre d'évaluations $\nu_4 = 3120$. Les surfaces tracées correspondent à la variation des variables aléatoires Z_1 et Z_2 correspondantes aux variables présentant la plus forte variabilité. La première correspond à une variation globale quasi-uniforme du module d'Young des aubes, tandis que la deuxième correspond à une variation linéaire symétrique du module d'Young par rapport à l'aube centrale. Les autres variables sont fixées à zéro.

Les conclusions sont très similaires à celles obtenues par la méthode de régression puisque l'approximation présente des défauts quelque soit le paramétrage de la méthode. En effet, ce mode est assez similaire au 9^{ème} mode (cf. fig. II.5), où le phénomène de couplage aube/virole n'est pas négligeable. De plus, la composante observée correspond au premier mode de flexion de l'aube la plus à gauche. Cette aube est plus sujette à la variabilité des caractéristiques des viroles (effets de bords) et la surface de réponse associée à la composante observée est plus susceptible d'avoir une variabilité fortement dépendante des variables associées au module d'Young des viroles, qui ont été considérées indépendantes lors de la construction de la matrice de covariance. Dans ce cas, la transformation de Karhunen-Loève considérée ne permet pas d'atténuer l'interaction forte entre certaines variables, d'où la difficulté d'approximation.

La figure III.13 montre que les interpolations sont de bonne qualité voire même excellente pour le paramétrage p_3 de la méthode. Le découplage des variables est extrêmement efficace pour ce mode.

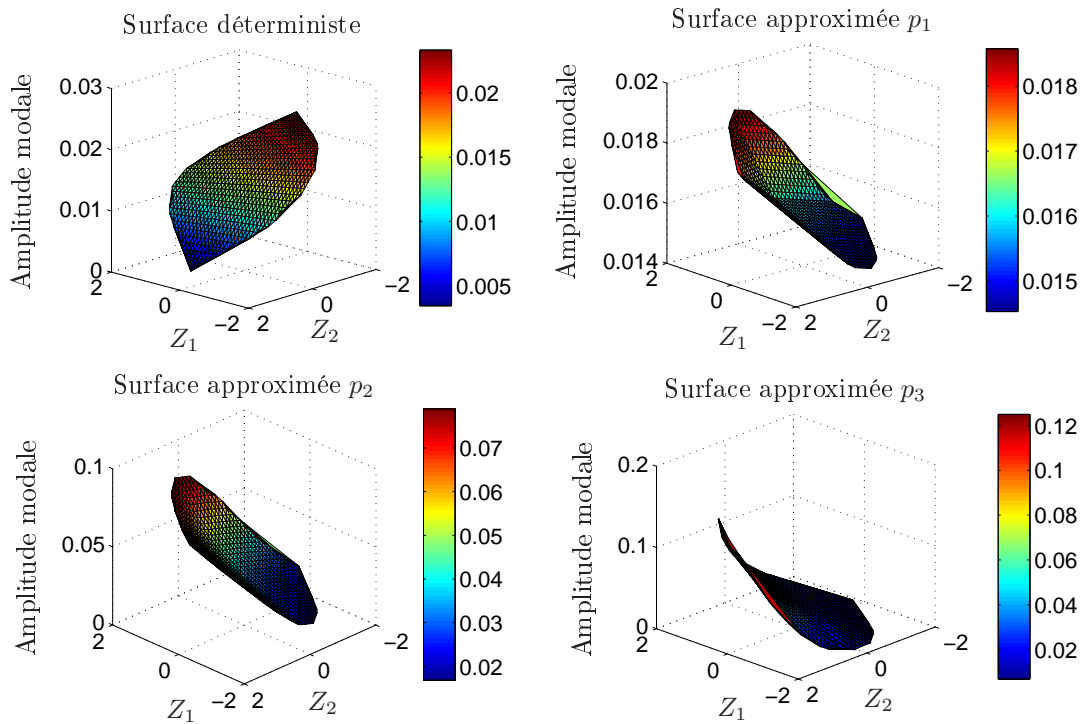


FIGURE III.12 – Surfaces de réponse, déterministe et approximées par la méthode MARS, de la fonction de répartition inverse de 61^{ème} composante modale du 8^{ème} mode en fonction des variables aléatoires Z_1 et Z_2

Afin de mesurer l'impact global de l'interpolation de la méthode MARS des surfaces régularisées, quelques grandeurs statistiques de réponse forcée stochastique ont été tracées figure III.14. La réponse forcée stochastique \mathbf{U} est calculée en appliquant un effort normal unitaire déterministe F au centre de la première aube (cf. Fig. II.1, aube la plus à gauche) puis reconstruite à partir du calcul des modes stochastique ($\mathbf{\Omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{N_m})^t$, $[\Phi] = (\Phi_1, \dots, \Phi_{N_m})$) en introduisant un amortissement visqueux $\eta = 0.1\%$ (cf. Eq. (III.12)).

Les courbes noires de référence représentent le déplacement stochastique obtenu à partir des modes propres stochastiques calculés par Monte Carlo. Les courbes vertes, bleues et rouges correspondent au déplacement stochastique obtenues à partir de la fonction de répartition inverse approximée des modes stochastiques pour les paramètres p_1 , p_2 et p_3 respectivement. La corrélation entre les différentes courbes est excellente en termes de moyenne et d'écart-type du déplacement. La corrélation est également de bonne qualité en termes d'asymétrie et de kurtosis du déplacement mais également en termes de déplacements extrémaux, notamment pour le paramétrage p_1 dont la surévaluation ne dépasse pas les 30%.

3.2.3 Conclusion sur la méthode d'interpolation par la méthode MARS

La méthode MARS permet d'obtenir une forme analytique de la fonction de répartition inverse d'une variable aléatoire qui s'exprime par la somme de fonctions de

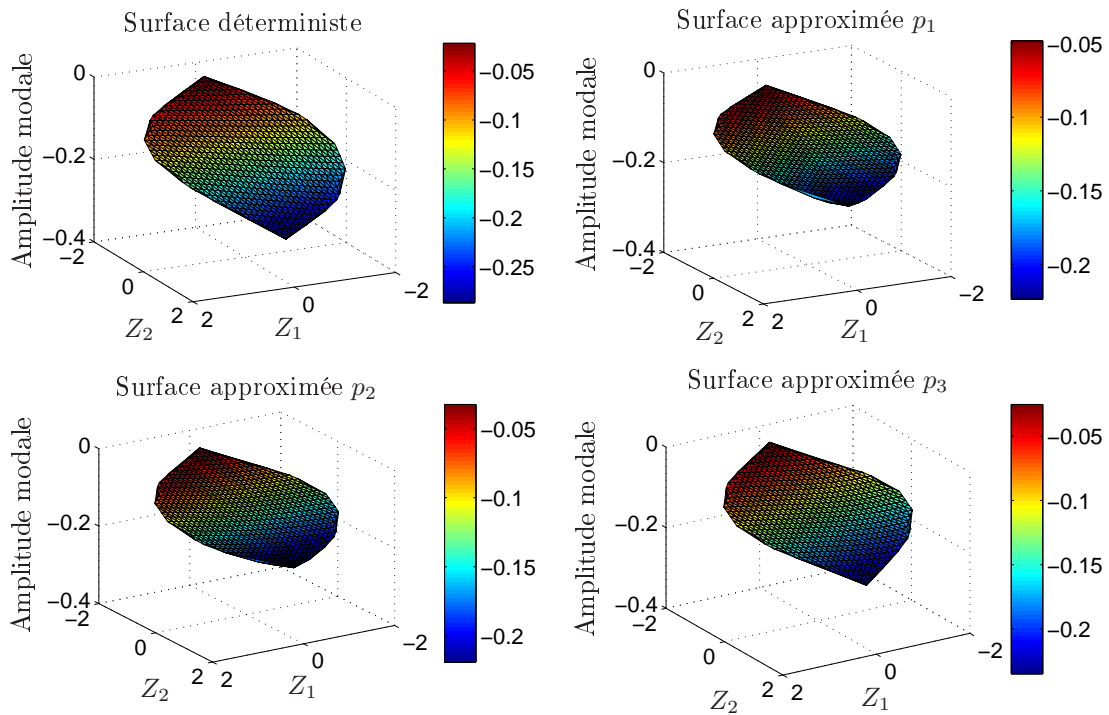


FIGURE III.13 – Surface de réponse, déterministe et approximées par la méthode MARS, de la fonction de répartition inverse de $91^{\text{ème}}$ composante modale du $9^{\text{ème}}$ mode en fonction des variables aléatoires Z_1 et Z_2

base linéaires ou cubiques continues par morceaux. La précision de cette méthode est directement liée au nombre d'évaluations déterministes du système et de la forme choisie des fonctions de base. Malgré la possibilité de définir des zones de rupture lors de la construction des fonctions de base, la méthode ne permet pas de modéliser les fortes discontinuités. Elle permet tout de même de s'affranchir de l'effet de Runge présent lors d'une interpolation par une base du chaos polynomial. Néanmoins, la méthode MARS donne des résultats de très bonne qualité en termes de moments statistiques de la réponse forcée quelque soit l'espace de variables descriptives. Les résultats sur les réponses forcées extrémales sont également de très bonne qualité pour les surfaces décrites par les variables aléatoires issues de l'expansion de Karhunen-Loève. En effet, les résultats pour le paramétrage p_1 sont satisfaisants au niveau de la réponse forcée maximale quelle que soit la fréquence d'excitation avec un écart réduit à seulement 30% alors qu'il pouvait atteindre plus de 100% avec la méthode d'interpolation précédente. La méthode MARS semble donc plus prédictive que la méthode d'interpolation par projection sur une base du chaos polynomial mais présente des temps de calcul plus longs, qui peuvent croître très rapidement si le nombre de surfaces à approximer et le nombre de réalisations déterministes sont trop importants.

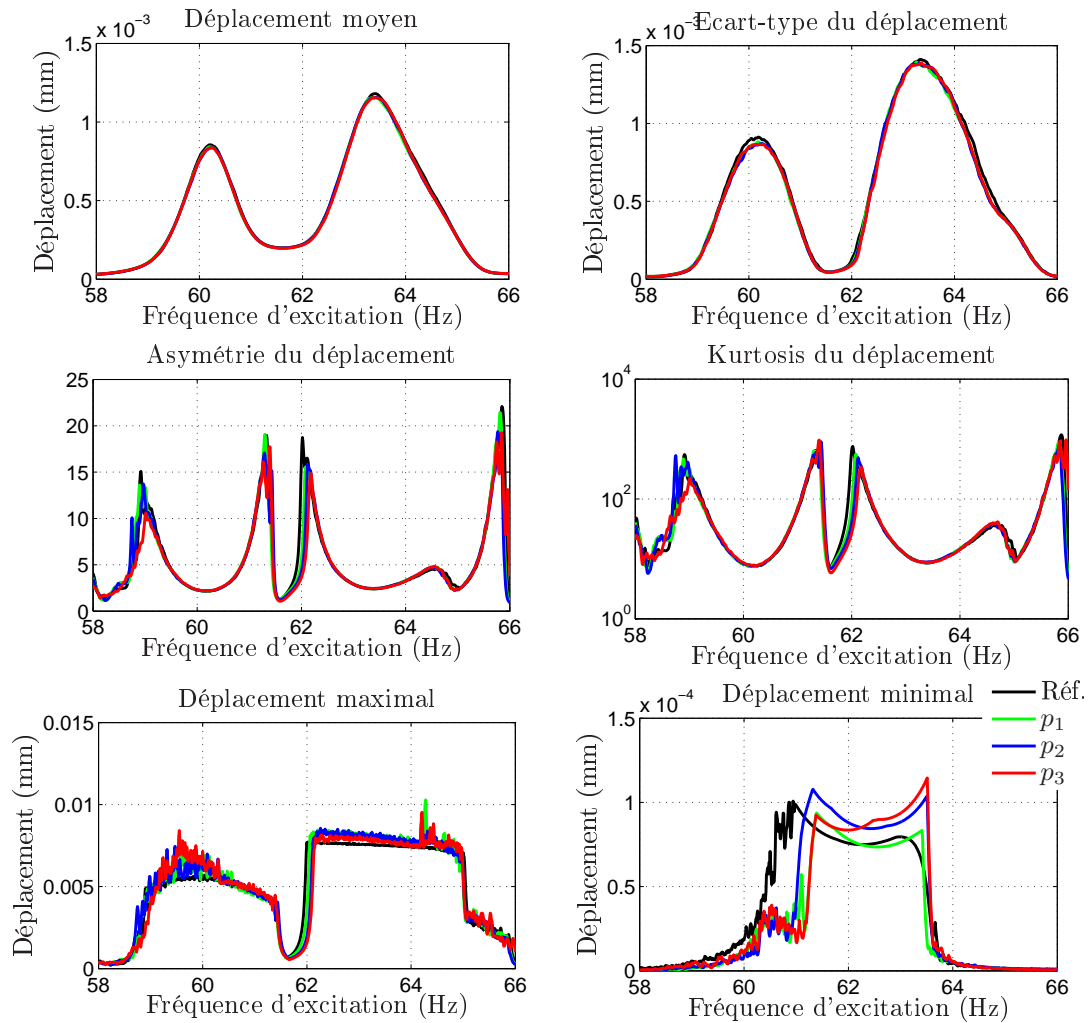


FIGURE III.14 – Réponse forcée stochastique $U(\mathbf{Z})$ du milieu de la cinquième aube approximée par méthode de régression pour différents ordres de troncature N

4 Conclusions sur les méthodes d'interpolations de surface

Le chapitre précédent a permis de proposer une modélisation des incertitudes en définissant le module d'Young des aubes et des viroles comme paramètres variables. L'objectif de ce chapitre a donc été de définir une forme analytique de la surface de réponse des modes propres stochastiques dépendante de la variabilité des paramètres incertains. Ces surfaces représentent la fonction de répartition inverse des modes propres stochastiques. Ce chapitre propose deux méthodes très différentes pour approximer ces surfaces de réponse. Dans un premier temps, le contenu théorique de chaque méthode a été détaillé. Puis, elles ont été testées sur un modèle simplifié de secteur de redresseur, et comparées par rapport à la solution déterministe, lorsqu'il s'agissait de comparer directement les surfaces de réponses, et par rapport à la solution calculée par la méthode de Monte Carlo, lorsqu'il s'agissait de comparer les réponses fréquentielles.

La première méthode a consisté à projeter ces surfaces sur une base du chaos polynomial et d'identifier les coefficients du chaos par minimisation de l'erreur quadratique entre la solution réelle et approximée pour différentes évaluation déterministes. Cette méthode de régression est non intrusive et l'identification des coefficients est très rapide. Elle permet d'obtenir de très bons résultats en termes de moments statistiques sur la réponse forcée. En revanche, les résultats sur les valeurs extrémales sont assez mitigés, notamment lorsque les variables descriptives n'ont pas été transformées par l'expansion de Karhunen-Loève, avec un écart pouvant atteindre plus de 100% par rapport à la valeur de référence. Dans le cas où les surfaces dépendent des variables descriptives initiales Ξ , cet écart est provoqué par la difficulté d'approximer les fortes discontinuités observables, ce qui a pour effet de surévaluer la réponse (également une des conséquences de l'effet de Runge). Dans le cas où les surfaces dépendent des variables descriptives transformées par Karhunen-Loève Z , cet écart est provoqué par les discontinuités provoquées par l'interaction entre les variables associées au module d'Young des viroles et celles associées au module d'Young des aubes, que la matrice de covariance considérée ne permet pas de lisser.

La deuxième méthode consiste à projeter ces surfaces sur une base de fonctions linéaires ou cubiques, linéaires par morceaux et de minimiser l'écart entre la solution réelle et approximée pour différentes évaluation déterministes. Cette méthode, connue sous le nom de Régression Multivariée par Splines Adaptatives (MARS), est également non intrusive mais la construction de la base de fonctions peut s'avérer coûteuse en termes de temps de calcul. Elle permet d'obtenir d'excellents résultats en termes de moments statistiques sur la réponse forcée. Les résultats sur les valeurs extrémales sont également corrects, notamment lorsque les variables descriptives ont été transformées par l'expansion de Karhunen-Loève, avec un écart maximal pouvant être réduit à près de 30% par rapport à la valeur de référence. La méthode ne permet pas de représenter fidèlement les fortes discontinuités mais la forme globale des surfaces est de meilleure qualité que celle obtenue par la méthode précédente.

Finalement, les deux méthodes permettent d'obtenir une prédiction de l'enveloppe vibratoire du secteur de redresseur considéré pour des temps de calculs réduits, avec un avantage de la méthode MARS en termes de précision et un avantage conséquent en termes de temps de calcul pour la méthode d'interpolation par une base du chaos polynomial. La convergence de Monte Carlo étant extrêmement lente dans le cas de l'approximation des valeurs extrêmes, les courbes associées aux déplacements extrémaux sont plus bruitées que celles associées aux moments statistiques. Un algorithme de Savitzky-Golay [SG64] itératif a donc été mis en place dans la suite de ce mémoire afin de lisser ces courbes (cf. Annexe A). De plus, ces deux méthodes nécessitent un nombre plus ou moins important d'analyses modales déterministes pour générer les surfaces. Le prochain chapitre (cf. Sec. IV) s'intéresse donc aux méthodes de réduction des modèles éléments-finis par synthèse modale, afin de réduire le temps de calcul des analyses modales. Cette perspective est d'autant plus intéressante qu'elle permet également d'approximer les surfaces en base réduite et donc d'en diminuer le nombre, réduisant ainsi le temps de calcul nécessaire à générer l'ensemble des surfaces.

Chapitre IV

Méthodes de réduction des modèles éléments-finis par synthèse modale

Ce chapitre est consacré aux méthodes de synthèse modale. Après une brève présentation de l'intérêt que présente la réduction des modèles éléments finis, quelques méthodes classiques de synthèse modale sont présentées. Puis, des méthodes de réduction de la base des modes d'interface sont proposées pour pallier la problématique liée à la taille de cette base. Les différentes méthodes sont ensuite testées sur un modèle de secteur de redresseur simplifié ainsi que sur un modèle industriel. La double synthèse modale permet d'obtenir d'excellents résultats avec un fort pouvoir de réduction. Elle est également robuste face à la prise en compte du désaccordage.

Sommaire

1	Présentation générale des méthodes de synthèse modale . . .	90
2	Méthodes classiques de synthèse modale	91
2.1	Mise en équation du problème dynamique	91
2.2	Méthodes de synthèse modale à interfaces fixes	92
2.3	Méthodes de synthèse modale à interfaces libres	96
2.4	Conclusion sur les méthodes classiques de réduction	103
3	Réduction de la base des modes d'interface	104
3.1	Condensation statique de Guyan	104
3.2	Corrélation des modes statiques	105
3.3	Analyse modale des matrices réduites statiques	106
4	Applications des méthodes de réductions à un modèle simplifié et industriel	107
4.1	Application sur un modèle académique simple	107
4.2	Application sur un modèle industriel de redresseur	111
5	Influence du désaccordage sur la double synthèse modale .	115
6	Bilan des méthodes de sous-structuration	120

1 Présentation générale des méthodes de synthèse modale

La caractérisation modale d'une structure nécessite la discrétisation du milieu continu en un nombre fini d'éléments afin de rendre les analyses numériques possibles. La structure étudiée est alors discrétisée en un certain nombre de nœuds reliés les uns aux autres afin de former un maillage d'éléments (tétraédrique, hexagonal,...). En trois dimensions, chaque nœud possède trois degrés de liberté de translation. La convergence du modèle est directement liée au maillage de la structure. Par conséquent, les structures complexes rencontrées dans les cas industriels peuvent faire intervenir plusieurs centaines de milliers voire quelques millions de degrés de liberté. Les moyens de calcul actuels permettent de gérer de tels modèles mais pour des coûts de calcul très élevés. Dans ce contexte particulier où de nombreux calculs déterministes sont nécessaires pour permettre l'utilisation des méthodes stochastiques, il est primordial de parvenir à réduire la taille des modèles pour diminuer les temps de calculs.

Depuis les années soixante, de nombreuses méthodes de réduction modale ont été développées [Bes06, Bat08]. Ces méthodes permettent d'obtenir des résultats précis en diminuant considérablement la taille des modèles et les temps de calcul. Deux grands types de méthodes de synthèse modale classique sont distingués : les méthodes à interfaces fixes et les méthodes à interfaces libres.

Hurty [Hur60, Hur65] est le premier à s'intéresser aux méthodes à interfaces fixes. Les sous-structures sont analysées en faisant intervenir les modes à interfaces fixes et les déformées statiques définies à partir du déplacement unitaire des degrés de liberté de frontière entre les sous-structures. Craig et Bampton [JB68] ont d'ailleurs poursuivi ces travaux. Leur méthode est d'ailleurs la plus connue et la plus utilisée à ce jour pour sa précision et sa robustesse. Gladwell [Gla64] propose une méthode de substitution modale, également basée sur les modes encastés. Benfield et Hruda [BH71] vont ensuite généraliser cette méthode. Les méthodes de substitution modale sont souvent utilisées pour étudier l'influence de sous-structures annexes sur la structure principale.

L'autre famille de méthodes de synthèse modale qui repose sur l'utilisation des modes libres a été initiée par Goldman [Gol69] et Hou [Hou69]. Ces travaux ont été repris par MacNeal [Mac71], Martinez [MCGM84] et, Craig et Chang [JC76, JC77]. Ces méthodes sont basées sur l'approximation des modes libres non conservés en prenant en compte une matrice de flexibilité résiduelle. Ces travaux diffèrent principalement au niveau de la méthode de raccordement des sous-structures. Certains considèrent une cohérence aux interfaces en termes de déplacements, d'autres en termes d'efforts ou encore les deux. Rubin [Rub75] a développé une amélioration de la méthode de MacNeal en proposant une approximation au second ordre de la flexibilité résiduelle.

La plupart des méthodes de synthèse modale présentent l'inconvénient d'avoir une base réduite dont la taille dépend du nombre de nœuds aux interfaces. La

réduction de la base constituée des modes d'interface a fait l'étude de quelques travaux [JC77, Bd90, ZCP04]. Par exemple, la méthode de double synthèse modale [Jez78, Jez85, Set90, Bes06, BbJT12] développée par Jezequel consiste à introduire des modes de branches pour représenter les degrés de liberté frontière.

Ce chapitre introduira quelques méthodes classiques de synthèse modale puis présentera différentes méthodes de réduction de la base des modes d'interface avant de terminer par l'application de ces méthodes sur un modèle simplifié et un modèle industriel. L'influence du désaccordage sur la méthode retenue est également étudiée afin de prouver sa robustesse.

2 Méthodes classiques de synthèse modale

2.1 Mise en équation du problème dynamique

La structure étudiée est discrétisée pour obtenir les matrices de raideur $[K]$, de masse $[M]$ et d'amortissement $[D]$. Le principe fondamental de la dynamique permet d'obtenir l'équation différentielle suivante :

$$[M]\ddot{\mathbf{U}} + [D]\dot{\mathbf{U}} + [K]\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (\text{IV.1})$$

où \mathbf{F} correspond au vecteur force d'excitation appliquée à la structure et \mathbf{U} au vecteur déplacements associés aux degrés de liberté de la structure. Dans la suite du document, la matrice d'amortissement $[D]$ est supposée nulle et la réponse et l'excitation seront supposées harmoniques de pulsation ω . L'équation de mouvement devient donc :

$$([K] - \omega^2[M])\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (\text{IV.2})$$

La résolution de l'équation homogène permet d'obtenir les modes propres de la structure. Afin d'appliquer les différentes méthodes de réduction décrites ci-après, la structure globale est séparée en N sous-structures (SS).

Les matrices de masse $[m]$ et de raideur $[k]$ ainsi que le vecteur déplacement \mathbf{u} de chaque sous-structures sont alors réordonnées afin d'isoler les degrés de liberté frontières (indiqué Σ) des degrés de liberté intérieurs (indiqué I). Les conditions limites et forces extérieures sont appliquées aux degrés de liberté (indiqué Γ). La figure IV.1 présente un exemple de sous-structuration et illustre la notation adoptée pour la répartition des degrés de liberté.

$$[k] = \begin{bmatrix} [k_{II}] & [k_{I\Sigma}] \\ [k_{\Sigma I}] & [k_{\Sigma\Sigma}] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

$$[m] = \begin{bmatrix} [m_{II}] & [m_{I\Sigma}] \\ [m_{\Sigma I}] & [m_{\Sigma\Sigma}] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_\Sigma \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

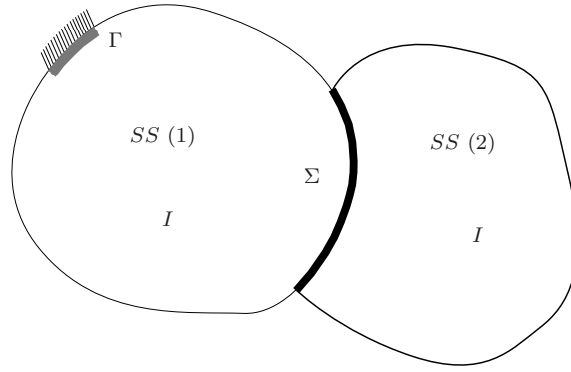


FIGURE IV.1 – Modèle de sous-structures

Les différentes méthodes de synthèse modale nécessitent généralement le calcul des modes propres de chaque sous-structure en encastrant ou en laissant libre les degrés de liberté d'interface. La troncature aux premiers modes propres permet de créer une nouvelle base dont la taille est réduite par rapport à la base réelle composée de tous les degrés de liberté. Puis, une correction statique vient enrichir cette nouvelle base réduite afin de prendre en compte le mouvement réel des interfaces. Les méthodes de synthèse modale permettent donc de projeter le mouvement d'un corps élastique sur une base réduite composée des « directions principales » du mouvement. Les sections suivantes détaillent les développements théoriques de certaines méthodes de synthèse modale.

2.2 Méthodes de synthèse modale à interfaces fixes

Cette section s'intéresse aux méthodes à interfaces fixes. La méthode de Craig-Bampton [JB68] est la plus utilisée dans l'industrie pour sa robustesse. La méthode de Benfield-Hruda [BH71] permet d'améliorer la réduction de Craig-Bampton par substitution modale. Le développement théorique de ces deux méthodes est présenté dans les paragraphes suivants.

2.2.1 Méthode de Craig-Bampton

La méthode de Craig-Bampton [JB68] nécessite le calcul de deux types de modes :

- **les modes internes contraints**, notés $[\Phi_c]$, qui correspondent aux modes propres de la sous-structure dont l'interface avec les autres sous-structures a été encastrée. Les conditions limites initiales de la structure complète sont conservées ;
- **les modes statiques**, notés $[\Psi_s]$, qui correspondent aux déformées statiques de la sous-structure en imposant un déplacement unitaire sur un degré de liberté (ddl) frontière et en encastrant les ddls frontières restants. Les modes statiques sont donc obtenus en résolvant le problème statique suivant :

$$\begin{bmatrix} [k_{II}] & [k_{I\Sigma}] \\ [k_{\Sigma I}] & [k_{\Sigma\Sigma}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi_s] \\ [I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_\Sigma \end{bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

En isolant $[\Psi_s]$ dans la première ligne du système, il advient :

$$[\Psi_s] = -[k_{II}]^{-1}[k_{I\Sigma}] \quad (\text{IV.7})$$

où \mathbf{F}_Σ représente le vecteur des efforts au niveau de l'interface dus à la sous-structure connexe.

La matrice de passage de la base réduite à la base réelle de chaque sous-structure est donc décrite par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_c] & [\Psi_s] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \mathbf{u}_\Sigma \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

où \mathbf{q}_c correspond aux coefficients modaux associés aux modes propres contraints. En imposant l'égalité des déplacements des degrés de liberté frontières reliant chaque sous-structure, la matrice $[T_{CB}]$ permet le passage de la base réduite à la base réelle de la structure complète :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I^{(1)} \\ \mathbf{u}_I^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_I^{(N)} \\ \mathbf{U}_\Sigma \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} [\Phi_c^{(1)}] & [0] & \dots & [0] & [\Psi_s^{(1)}] \\ [0] & [\Phi_c^{(2)}] & \ddots & \vdots & [\Psi_s^{(2)}] \\ \vdots & \ddots & \ddots & [0] & \vdots \\ [0] & \dots & [0] & [\Phi_c^{(N)}] & [\Psi_s^{(N)}] \\ [0] & [0] & \dots & [0] & [I] \end{bmatrix}}_{[T_{CB}]} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_c^{(1)} \\ \mathbf{q}_c^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_c^{(N)} \\ \mathbf{U}_\Sigma \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_{CB}} \quad (\text{IV.9})$$

où \mathbf{U}_Σ regroupe l'ensemble des degrés de liberté frontières et \mathbf{Q}_{CB} correspond au vecteur des coordonnées modales dans la base réduite. Les modes statiques $[\Psi_s]$ ont été réordonnés en conservant la concordance avec les degrés de liberté frontières. Les matrices réduites de masse $[M_{CB}]$ et de raideur $[K_{CB}]$ peuvent alors être obtenues.

$$[M_{CB}] = [T_{CB}]^t [M] [T_{CB}] = \begin{bmatrix} [m_c^{(1)}] & [0] & \dots & [0] & [m_{cs}^{(1)}]^t \\ [0] & [m_c^{(2)}] & \ddots & \vdots & [m_{cs}^{(2)}]^t \\ \vdots & \ddots & \ddots & [0] & \vdots \\ [0] & \dots & [0] & [m_c^{(N)}] & [m_{cs}^{(N)}]^t \\ [m_{cs}^{(1)}] & [m_{cs}^{(2)}] & \dots & [m_{cs}^{(N)}] & [m_s] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

$$[K_{CB}] = [T_{CB}]^t [K] [T_{CB}] = \begin{bmatrix} [k_c^{(1)}] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & [k_c^{(N)}] & [0] \\ [0] & \dots & [0] & [k_s] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

La taille de la base réduite est directement liée à la troncature de la base des modes internes de chaque sous-structure et au nombre de degrés de liberté aux interfaces. La méthode de Craig-Bampton est la plus couramment utilisée pour sa convergence rapide, sa robustesse et sa stabilité. En effet, une troncature importante de la base des modes internes permet d'obtenir de très bons résultats sur les premiers modes

de la structure complète. En revanche, un découpage inapproprié de la structure laissant apparaître un nombre important de degrés de liberté aux interfaces peut être un facteur limitant des performances de la méthode en termes de temps de calcul. La méthode de Benfield-Hruda présentée dans le paragraphe suivant propose d’obtenir une réduction qui ne dépend pas du nombre de degrés de liberté aux interfaces par substitution des modes statiques.

2.2.2 Méthode de Benfield-Hruda

La méthode de Benfield-Hruda [BH71] est très similaire à la méthode de Craig-Bampton. La principale différence réside dans l’identification de sous-structures (SS) maîtres et esclaves pour la projection des modes statiques. Il s’agit d’une substitution modale. De nouveau, cette méthode nécessite le calcul de deux types de modes :

- **les modes internes**, notés $[\Phi]$, qui correspondent aux modes propres de la sous-structure dont l’interface avec les autres sous-structures est encastrée s’il s’agit d’une interface esclave et libre ou chargée s’il s’agit d’une interface maître. Les conditions limites initiales de la structure complète sont conservées ;
- **les modes statiques**, notés $[\Psi_s]$, qui correspondent aux déformées statiques de la sous-structure obtenues en imposant un déplacement unitaire sur un ddl frontière esclave et en encastrant les ddls frontières esclaves restants. Ces modes statiques sont identiques à ceux obtenus en résolvant le problème statique de la méthode de Craig-Bampton (cf. Eqs. (IV.6) et (IV.7)).

Lors de la construction de la matrice de passage $[T_{BH}]$, il est nécessaire de discerner deux cas.

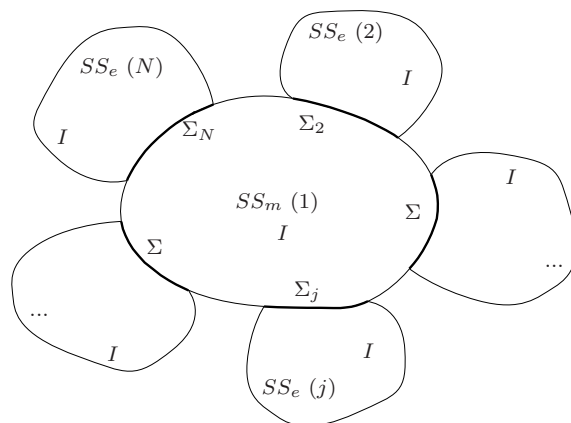


FIGURE IV.2 – Assemblage « parallèle » des sous-structures

Le premier cas consiste à considérer une sous-structure maître (indicée m) à laquelle viennent se lier plusieurs sous-structures esclaves (indicées e). Il s’agit d’un assemblage « parallèle » (cf. Fig. IV.2). En considérant que la sous-structure n°1 est

maître, la matrice de passage est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_m^{(1)} \\ \mathbf{u}_e^{(2)} \\ \mathbf{u}_e^{(3)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_e^{(N)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} [\Phi^{(1)}] & [0] & [0] & \dots & [0] \\ [\Psi_s^{(2)}][\Phi_{\Sigma_2}^{(1)}] & [\Phi_I^{(2)}] & [0] & \dots & [0] \\ [\Psi_s^{(3)}][\Phi_{\Sigma_3}^{(1)}] & [0] & [\Phi_I^{(3)}] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & [0] \\ [\Psi_s^{(N)}][\Phi_{\Sigma_N}^{(1)}] & [0] & \dots & [0] & [\Phi_I^{(N)}] \end{bmatrix}}_{[T_{BH}]} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_m^{(1)} \\ \mathbf{q}_e^{(2)} \\ \mathbf{q}_e^{(3)} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_e^{(N)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_{BH}} \quad (\text{IV.12})$$

où \mathbf{Q}_{BH} correspond au vecteur des coordonnées modales dans la base réduite. Les modes internes $[\Phi_{\Sigma_j}^{(1)}]$ correspondent aux déformées modales de la sous-structure maître (1) à l'interface avec la sous-structure esclave (j).

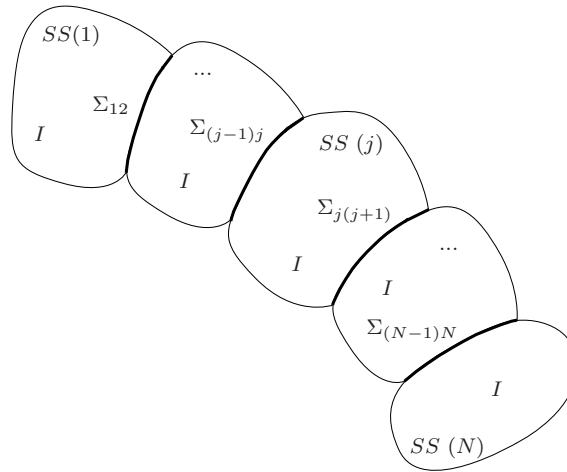


FIGURE IV.3 – Assemblage « série » des sous-structures

Le second cas consiste à considérer un assemblage « série », c'est-à-dire que chaque sous-structure est esclave de la précédente et maître de la suivante (cf. Fig. IV.3). En considérant un assemblage « en cascade » la sous-structure (1) à la sous-structure (N), la matrice de passage est la suivante :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{u}^{(3)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(N)} \end{bmatrix} = \\
& \underbrace{\begin{bmatrix} [\Phi^{(1)}] & [0] & [0] & \dots & [0] \\ [\Psi_s^{(2)}][\Phi_{\Sigma_{12}}^{(1)}] & [\Phi_I^{(2)}] & [0] & \dots & [0] \\ [\Psi_s^{(3)}][\Psi_s^{(2)}][\Phi_{\Sigma_{12}}^{(1)}] & [\Psi_s^{(3)}][\Phi_{\Sigma_{23}}^{(2)}] & [\Phi_I^{(3)}] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & [0] \\ [\Psi_s^{(N)}] \dots [\Psi_s^{(2)}][\Phi_{\Sigma_{12}}^{(1)}] & [\Psi_s^{(N)}] \dots [\Psi_s^{(3)}][\Phi_{\Sigma_{23}}^{(2)}] & \dots & [\Psi_s^{(N)}][\Phi_{\Sigma_{(N-1)N}}^{(N-1)}] & [\Phi_I^{(N)}] \end{bmatrix}}_{[T_{BH}]} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(1)} \\ \mathbf{q}^{(2)} \\ \mathbf{q}^{(3)} \\ \vdots \\ \mathbf{q}^{(N)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_{BH}}
\end{aligned} \tag{IV.13}$$

Les matrices réduites de masse $[M_{BH}]$ et de raideur $[K_{BH}]$ peuvent alors être obtenues par les relations :

$$[M_{BH}] = [T_{BH}]^t [M] [T_{BH}] \tag{IV.14}$$

$$[K_{BH}] = [T_{BH}]^t [K] [T_{BH}] \tag{IV.15}$$

La taille de la base réduite ne dépend que de la troncature de la base des modes internes de chaque sous-structure. Le rapport de réduction peut donc être très important et les temps de calculs considérablement réduits. Cependant, la précision des résultats peut être grandement altérée lors de la projection des modes statiques des sous-structures esclaves sur la base des modes internes des sous-structures maîtres. En effet, si la déformation en condition libre des interfaces maîtres n'est pas cohérente avec celle des modes statiques, la perte d'information relative à la déformation des sous-structures esclaves peut être importante.

2.3 Méthodes de synthèse modale à interfaces libres

Contrairement aux méthodes à interfaces fixes qui reposent sur une base de modes contraints aux interfaces et de modes de déformées statiques, ces méthodes reposent sur une base de modes libres aux interfaces et une correction relative à la flexibilité résiduelle [Mac71]. L'idée est, dans un premier temps, de considérer chacune des sous-structures comme des structures indépendantes chargées aux interfaces :

$$\left[\begin{bmatrix} [k_{II}] & [k_{I\Sigma}] \\ [k_{\Sigma I}] & [k_{\Sigma\Sigma}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [m_{II}] & [m_{I\Sigma}] \\ [m_{\Sigma I}] & [m_{\Sigma\Sigma}] \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_\Sigma \end{bmatrix} = \mathbf{F} \tag{IV.16}$$

La première étape consiste à calculer les premiers modes propres de chacune des sous-structures en maintenant les interfaces libres, soit $\mathbf{F}_\Sigma^{(j)} = 0$. La base modale

obtenue est considérée comme normalisée par rapport à la matrice de masse :

$$[\Phi]^t[m][\Phi] = I \quad (\text{IV.17})$$

$$[\Phi]^t[k][\Phi] = [\Omega] = \text{diag}(\omega_{i,i=1..n}^2) \quad (\text{IV.18})$$

où ω représente la pulsation propre de la sous-structure et n le nombre total de modes, soit la taille des matrices de masse et de raideur. La matrice des modes propres constitue donc la matrice de passage de la base modale vers la base réelle :

$$\mathbf{u} = [\Phi]\mathbf{q} \quad (\text{IV.19})$$

Cette base modale est ensuite tronquée pour réduire la taille de la base. Les modes propres sont donc différenciés entre les modes $[\Phi_k]$ qui sont conservés et les modes $[\Phi_a]$ qui ne sont pas considérés et qui seront donc approximés via la flexibilité résiduelle. Il en résulte :

$$\mathbf{u} = [\Phi_k]\mathbf{q}_k + [\Phi_a]\mathbf{q}_a \quad (\text{IV.20})$$

La mise sous forme matricielle en différenciant les degrés de liberté internes et frontières donne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_{k,I}] & [\Phi_{a,I}] \\ [\Phi_{k,\Sigma}] & [\Phi_{a,\Sigma}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{q}_a \end{bmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

La deuxième étape consiste à approximer le second membre de l'équation (IV.20) qui correspond aux modes haute fréquence. A plus basses fréquences, l'effet dynamique de ces modes peut être négligé. On se place alors dans le cas d'une réponse pseudo-statique. L'équation (IV.16) devient :

$$[k]\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (\text{IV.22})$$

Si la structure est non-contrainte et qu'elle possède des modes de corps rigides, la matrice de raideur $[k]$ est non-inversible. Dans un premier temps, la résolution de l'équation (IV.22) est décrite dans le cas d'une structure contrainte. Puis des méthodes d'approximation seront développées dans le cas d'une structure non-contrainte.

Cas d'une structure contrainte : la solution de l'équation (IV.22) donne :

$$\mathbf{u} = [k]^{-1}\mathbf{F} = [R]\mathbf{F} \quad (\text{IV.23})$$

où $[R]$ est la matrice de flexibilité. L'idée est de décomposer le déplacement \mathbf{u} comme la somme de la contribution modale des modes conservés et des modes approximés :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_a = [\Phi_k]\mathbf{q}_k + [\Phi_a]\mathbf{q}_a = \begin{bmatrix} [\Phi_k] & [\Phi_a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{q}_a \end{bmatrix} \quad (\text{IV.24})$$

En insérant l'équation (IV.24) dans l'équation (IV.22) et en multipliant à gauche par $[\Phi]^t = ([\Phi_k] [\Phi_a])^t$, il en résulte :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [\Phi_k]^t \\ [\Phi_a]^t \end{bmatrix} [k] \begin{bmatrix} [\Phi_k] & [\Phi_a] \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} [\Omega_k] & [0] \\ [0] & [\Omega_a] \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{q}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_k]^t \\ [\Phi_a]^t \end{bmatrix} \mathbf{F} \quad (\text{IV.25})$$

En isolant \mathbf{q}_k dans la première ligne de l'équation précédente, il advient :

$$\mathbf{q}_k = [\Omega_k]^{-1} [\Phi_k]^t \mathbf{F} \quad (\text{IV.26})$$

L'expression de \mathbf{u}_k se ramène à :

$$\mathbf{u}_k = [\Phi_k] \mathbf{q}_k = [\Phi_k] [\Omega_k]^{-1} [\Phi_k]^t \mathbf{F} = [R_k] \mathbf{F} \quad (\text{IV.27})$$

En combinant les équations (IV.23), (IV.24) et (IV.27), il est possible d'obtenir une expression de \mathbf{u}_a :

$$\mathbf{u}_a = [\Phi_a] \mathbf{q}_a = \mathbf{u} - \mathbf{u}_k = [R] \mathbf{F} - [R_k] \mathbf{F} = ([k]^{-1} - [\Phi_k] [\Omega_k]^{-1} [\Phi_k]^t) \mathbf{F} = [R_a] \mathbf{F} \quad (\text{IV.28})$$

\mathbf{u} s'écrit alors :

$$\mathbf{u} = [\Phi_k] \mathbf{q}_k + [R_a] \mathbf{F} \quad (\text{IV.29})$$

L'écriture sous forme matricielle donne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_{k,I}] & [R_{a,I\Sigma}] \\ [\Phi_{k,\Sigma}] & [R_{a,\Sigma\Sigma}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{F}_\Sigma \end{bmatrix} \quad (\text{IV.30})$$

Rubin [Rub75] a proposé une amélioration de cette méthode en proposant une approximation des modes hautes fréquences au second ordre.

Cas d'une structure non-contrainte : l'existence de la matrice R définie précédemment repose sur l'inversibilité de la matrice de raideur $[k]$. L'idée est d'imposer une condition sur les efforts appliqués aux interfaces afin de supprimer l'influence des modes de corps rigides. Pour cela, la déformation de la structure est décomposée comme la somme d'une déformation due aux modes de corps rigides \mathbf{u}_r et d'une déformation due aux modes élastiques de la structure \mathbf{u}_e :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_e = [\Phi_r] \mathbf{q}_r + [\phi_e] \mathbf{q}_e \quad (\text{IV.31})$$

où $[\Phi_r]$ sont les modes de corps rigides et $[\Phi_m]$ sont les modes élastiques. En substituant l'équation (IV.31) dans l'équation (IV.16) et en multipliant à gauche par $[\Phi]^t$, il en résulte :

$$-\omega^2 \mathbf{q}_r = [\Phi_r]^t \mathbf{F} \quad (\text{IV.32})$$

$$([\Omega_e] - \omega^2 [I]) \mathbf{q}_e = [\Phi_e]^t \mathbf{F} \quad (\text{IV.33})$$

Ainsi, pour supprimer les effets de corps rigides, il suffit de soustraire les forces d'inertie \mathbf{F}_r dues aux modes de corps rigides. Or, d'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\mathbf{F}_r = -\omega^2 [m] \mathbf{u}_r = -\omega^2 [m] [\Phi_r] \mathbf{q}_r \quad (\text{IV.34})$$

En combinant les équations (IV.32) et (IV.34), il en résulte :

$$\mathbf{F}_r = [m] [\Phi_r] [\Phi_r]^t \mathbf{F} \quad (\text{IV.35})$$

Les forces d'excitation impliquant uniquement des modes élastiques sont donc définis par :

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F} - \mathbf{F}_r = ([I] - [m] [\Phi_r] [\Phi_r]^t) \mathbf{F} = [A] \mathbf{F} \quad (\text{IV.36})$$

Afin de déterminer la déformée statique de la structure soumise à la force \mathbf{F}_e , il est nécessaire de contraindre la structure pour supprimer les modes de corps rigides. Il suffit donc de contraindre quelques degrés de liberté de la structure en annulant les lignes et les colonnes correspondantes de la matrice de raideur $[k]$. La matrice de raideur contrainte est notée $[k_c]$. La déformée de la structure contrainte \mathbf{u}_c a donc pour solution :

$$\mathbf{u}_c = [k_c]^{-1} \mathbf{F}_e = [R_c] [A] \mathbf{F} \quad (\text{IV.37})$$

où $[R_c]$ est la matrice de flexibilité contrainte. Afin d'obtenir la déformée de la structure non-contrainte, il suffit maintenant de rajouter la déformation due aux modes de corps rigides :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + [\Phi_r] \mathbf{p}_r \quad (\text{IV.38})$$

où \mathbf{p}_r est le vecteur de participation modale des modes de corps rigides à la déformation statique \mathbf{u} de la structure. Afin de déterminer ce vecteur, il suffit de rendre la déformée statique \mathbf{u} orthogonale aux modes de corps rigides par rapport à la matrice de masse $[m]$:

$$[\Phi_r]^t [m] \mathbf{u} = 0 \quad (\text{IV.39})$$

En substituant \mathbf{u} par son expression équation (IV.38), il advient :

$$[\Phi_r]^t [m] \mathbf{u}_c + [\Phi_r]^t [m] [\Phi_r] \mathbf{p}_r = 0 \quad (\text{IV.40})$$

Ce qui permet d'obtenir l'expression de \mathbf{p}_r :

$$\mathbf{p}_r = -[\Phi_r]^t [m] \mathbf{u}_c \quad (\text{IV.41})$$

Et d'obtenir la forme générale du déplacement \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c - [\Phi_r][\Phi_r]^t[m]\mathbf{u}_c = ([I] - [\Phi_r][\Phi_r]^t[m])\mathbf{u}_c = [A]^t\mathbf{u}_c = ([A]^t[R_c][A])\mathbf{F} \quad (\text{IV.42})$$

Il suffit donc d'appliquer la méthode détaillée dans le cas de la structure contrainte en posant :

$$[R] = [A]^t[R_c][A] \quad (\text{IV.43})$$

où la matrice $[A]$ s'exprime par :

$$[A] = [I] - [m][\Phi_r][\Phi_r]^t \quad (\text{IV.44})$$

A ce stade, la déformée de chaque sous-structure peut être exprimée comme une combinaison linéaire de modes propres et la matrice de flexibilité résiduelle. En ce qui concerne l'assemblage, il existe différentes méthodes telles que celle de MacNeal ou de Craig-Chang, détaillées par la suite.

2.3.1 Méthode de MacNeal

La méthode de MacNeal [Mac71] consiste à exprimer la matrice d'efforts appliqués aux interfaces \mathbf{F}_Σ en fonction des coordonnées modales \mathbf{q}_k et du déplacement des degrés de liberté frontières \mathbf{u}_Σ en résolvant la seconde équation du système de l'équation (IV.30) :

$$\mathbf{F}_\Sigma = [R_{a,\Sigma\Sigma}]^{-1}(\mathbf{u}_\Sigma - [\Phi_{k,\Sigma}]\mathbf{q}_k) \quad (\text{IV.45})$$

Il en résulte le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_\Sigma \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} [\Phi_{k,I}] - [R_{a,I\Sigma}][R_{a,\Sigma\Sigma}]^{-1}[\Phi_{k,\Sigma}] & [R_{a,I\Sigma}][R_{a,\Sigma\Sigma}]^{-1} \\ [0] & [I] \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} [\Phi_{McN}] & [\Psi_{McN}] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \mathbf{u}_\Sigma \end{bmatrix} \quad (\text{IV.46})$$

La matrice de passage obtenue est similaire à celle obtenue via la méthode de Craig-Bampton. En imposant l'égalité des déplacements des degrés de libertés frontières reliant chaque sous-structure, la matrice $[T_{McN}]$ permet le passage de la base modale réduite à la base réelle de la structure complète :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I^{(1)} \\ \mathbf{u}_I^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_I^{(N)} \\ \mathbf{U}_\Sigma \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} [\Phi_{McN}^{(1)}] & [0] & \dots & [0] & [\Psi_{McN}^{(1)}] \\ [0] & [\Phi_{McN}^{(2)}] & \ddots & \vdots & [\Psi_{McN}^{(2)}] \\ \vdots & \ddots & \ddots & [0] & \vdots \\ [0] & \dots & [0] & [\Phi_{McN}^{(N)}] & [\Psi_{McN}^{(N)}] \\ [0] & [0] & \dots & [0] & [I] \end{bmatrix}}_{[T_{McN}]} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_k^{(1)} \\ \mathbf{q}_k^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_k^{(N)} \\ \mathbf{U}_\Sigma \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_{McN}} \quad (\text{IV.47})$$

Comme pour la méthode de Craig-Bampton, la taille de la base réduite est directement liée à la troncature de la base des modes internes de chaque sous-structure et au nombre de degrés de liberté aux interfaces. La méthode de MacNeal permet d'obtenir de très bons résultats en termes de précision et de rapidité de convergence. En revanche, un découpage de la structure inapproprié laissant apparaître un nombre important de degrés de liberté aux interfaces peut être un facteur limitant des performances de la méthode en termes de temps de calcul. De plus, la nécessité d'inverser la matrice de raideur de chaque sous-structure peut s'avérer très coûteux en termes de temps de calcul et de mémoire vive. Il est donc préférable de mettre en œuvre des algorithmes d'inversion tels que l'inversion par blocs, qui s'adapte parfaitement dans ce cas.

2.3.2 Méthode de Craig-Chang

Contrairement aux autres méthodes présentées précédemment, la méthode de Craig-Chang [JC76, JC77] assure la compatibilité des sous-structures à la fois en termes de déplacements mais également en termes d'efforts. Dans un premier temps, la méthode est décrite dans le cadre de deux sous-structures (exposants (1) et (2)), puis généralisée à N sous-structures.

Cas de deux sous-structures : l'équation (IV.30) appliquée aux interfaces des deux sous-structures donne :

$$\mathbf{u}_\Sigma^{(1)} = [\Phi_{k,\Sigma}^{(1)}] \mathbf{q}_k^{(1)} + [R_{a,\Sigma\Sigma}^{(1)}] \mathbf{F}_\Sigma^{(1)} \quad (\text{IV.48})$$

$$\mathbf{u}_\Sigma^{(2)} = [\Phi_{k,\Sigma}^{(2)}] \mathbf{q}_k^{(2)} + [R_{a,\Sigma\Sigma}^{(2)}] \mathbf{F}_\Sigma^{(2)} \quad (\text{IV.49})$$

La compatibilité des deux sous-structures en termes de déplacement et d'efforts implique :

$$\mathbf{u}_\Sigma^{(1)} = \mathbf{u}_\Sigma^{(2)} \quad (\text{IV.50})$$

$$\mathbf{F}_\Sigma^{(1)} = -\mathbf{F}_\Sigma^{(2)} \quad (\text{IV.51})$$

En combinant les équations (IV.48), (IV.49), (IV.50) et (IV.51), il en résulte :

$$\mathbf{F}_\Sigma^{(1)} = \left([R_{a,\Sigma\Sigma}^{(1)}] + [R_{a,\Sigma\Sigma}^{(2)}] \right)^{-1} \left([\Phi_{k,\Sigma}^{(2)}] \mathbf{q}_k^{(2)} - [\Phi_{k,\Sigma}^{(1)}] \mathbf{q}_k^{(1)} \right) \quad (\text{IV.52})$$

$$\mathbf{F}_\Sigma^{(2)} = \left([R_{a,\Sigma\Sigma}^{(1)}] + [R_{a,\Sigma\Sigma}^{(2)}] \right)^{-1} \left([\Phi_{k,\Sigma}^{(1)}] \mathbf{q}_k^{(1)} - [\Phi_{k,\Sigma}^{(2)}] \mathbf{q}_k^{(2)} \right) \quad (\text{IV.53})$$

En substituant les équations (IV.52) et (IV.53) dans l'équation de mouvement réduite :

$$([\Omega_k] - \omega^2 [I]) \mathbf{q}_k = [\Phi_k]^t \mathbf{F}_\Sigma \quad (\text{IV.54})$$

Il advient :

$$\left([\Omega_k^{(1)}] - \omega^2[I]\right) \mathbf{q}_k^{(1)} = [\Phi_k^{(1)}]^t \left([R_{a,\Sigma\Sigma}^{(1)}] + [R_{a,\Sigma\Sigma}^{(2)}]\right)^{-1} \left([\Phi_{k,\Sigma}^{(2)}] \mathbf{q}_k^{(2)} - [\Phi_{k,\Sigma}^{(1)}] \mathbf{q}_k^{(1)}\right) \quad (\text{IV.55})$$

$$\left([\Omega_k^{(2)}] - \omega^2[I]\right) \mathbf{q}_k^{(2)} = [\Phi_k^{(2)}]^t \left([R_{a,\Sigma\Sigma}^{(1)}] + [R_{a,\Sigma\Sigma}^{(2)}]\right)^{-1} \left([\Phi_{k,\Sigma}^{(1)}] \mathbf{q}_k^{(1)} - [\Phi_{k,\Sigma}^{(2)}] \mathbf{q}_k^{(2)}\right) \quad (\text{IV.56})$$

L'équation de mouvement de la structure complète est donc définie comme suit :

$$\left[\begin{array}{cc} [k^{(d1)}] & [k^{(12)}] \\ [k^{(21)}] & [k^{(d2)}] \end{array} - \omega^2[I] \right] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k^{(1)} \\ \mathbf{q}_k^{(2)} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{IV.57})$$

avec :

$$[k^{(di)}] = [\Omega_k^{(i)}] + [\Phi_k^{(i)}]^t \left([R_{a,\Sigma\Sigma}^{(i)}] + [R_{a,\Sigma\Sigma}^{(j)}]\right)^{-1} [\Phi_k^{(i)}] \quad (\text{IV.58})$$

$$[k^{(ij)}] = [k_{CC}^{(ji)}]^t = -[\Phi_k^{(i)}]^t \left([R_{a,\Sigma\Sigma}^{(i)}] + [R_{a,\Sigma\Sigma}^{(j)}]\right)^{-1} [\Phi_k^{(j)}] \quad (\text{IV.59})$$

Généralisation au cas de N sous-structures : les matrices réduites de masse M_{CC} et de raideur K_{CC} pour la méthode de Craig-Chang sont les suivantes :

$$[M_{CC}] = [I] \quad (\text{IV.60})$$

$$[K_{CC}] = \begin{bmatrix} [k^{(d1)}] & [k^{(12)}] & \dots & [k^{(1N)}] \\ [k^{(21)}] & [k^{(d2)}] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & [k^{((N-1)N)}] \\ [k^{(N1)}] & \dots & [k^{(N(N-1))}] & [k^{(dN)}] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.61})$$

avec :

$$[k^{(di)}] = [\Omega_k^{(i)}] + [\Phi_k^{(i)}]^t \sum_{j=1}^N \left(\left([R_{a,\Sigma\Sigma}^{(i)}] + [R_{a,\Sigma\Sigma}^{(j)}]\right)^{-1} \right) [\Phi_k^{(i)}] \quad (\text{IV.62})$$

$$[k^{(ij)}] = [k_{CC}^{(ji)}]^t = -[\Phi_k^{(i)}]^t \left([R_{a,\Sigma\Sigma}^{(i)}] + [R_{a,\Sigma\Sigma}^{(j)}]\right)^{-1} [\Phi_k^{(j)}] \quad (\text{IV.63})$$

Comme dans le cadre de la méthode de Benfield-Hruda, la taille de la base réduite ne dépend que de la troncature de la base des modes internes calculés pour chaque sous-structure, ce qui présente un avantage évident en termes de temps de calcul. Cependant, le calcul de la flexibilité résiduelle nécessite l'inversion de la matrice de raideur pour chaque sous-structure, ce qui peut présenter certains inconvénients en termes de temps de calcul et de mémoire vive. De plus, la traçabilité du module

d'Young de chaque sous-structure n'est pas explicite. En effet, les matrices réduites de chaque sous-structure ne dépendent pas uniquement du module d'Young associé à cette sous-structure mais également de celui associé aux sous-structures voisines. Ceci risque donc de complexifier le couplage avec les méthodes stochastiques non-intrusives, qui nécessite des calculs de modes propres pour un très grand nombre de configurations de désaccordage différentes.

2.4 Conclusion sur les méthodes classiques de réduction

Les méthodes de synthèse modale classique ont une formulation de base assez similaire puisqu'elles font intervenir deux types de modes, à savoir les modes internes encastrés ou libres et des modes d'interfaces caractérisant le comportement statique des sous-structures. Il est possible de caractériser chacune des méthodes en fonction du temps de calcul de la matrice de passage et du temps de calcul des modes propres à partir des matrices réduites.

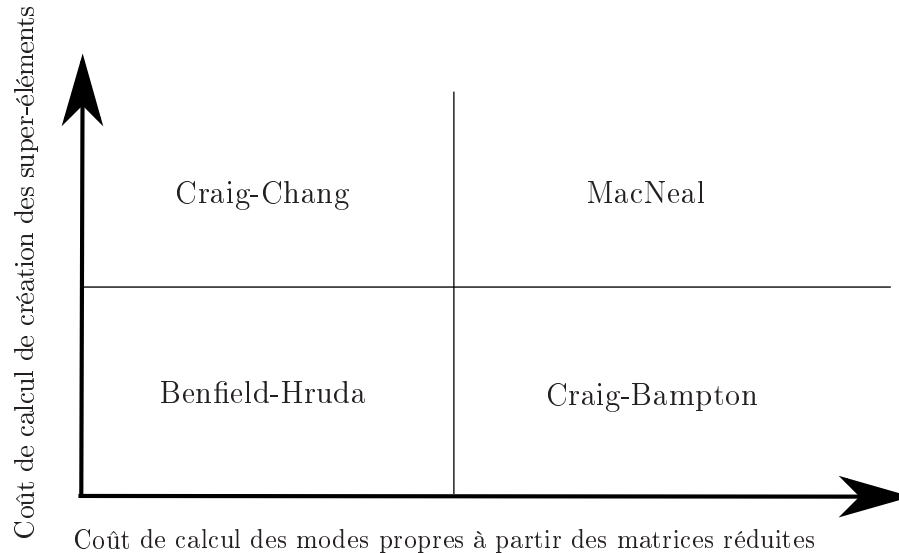


FIGURE IV.4 – Classification des méthodes de réduction en fonction des temps de calcul caractéristiques

La figure IV.4 illustre une caractérisation théorique pour les quatre méthodes développées. La matrice de passage nécessite un temps de calcul plus long dans le cadre des méthodes à interfaces libres, à cause du calcul de la matrice de flexibilité résiduelle qui nécessite l'inversion de la matrice de raideur de chaque sous-structure. Les méthodes à interfaces fixes semblent donc être plus avantageuses lors de la première phase de réduction qui consiste à déterminer la matrice de passage de la base réduite à la base réelle. Lors de la deuxième phase qui consiste à calculer les modes propres de la structure assemblée, les méthodes de Craig-Bampton et de MacNeal nécessitent un temps de calcul plus long, que les méthodes de Benfield-Hruda et de Craig-Chang, en raison de la présence explicite des modes d'interfaces au sein de la matrice de passage.

Théoriquement, la méthode de Benfield-Hruda semble être la plus avantageuse

en termes de temps de calcul. Néanmoins, la comparaison en termes de coûts numériques n'est pas suffisante. Il est également nécessaire de confronter ce gain de temps à l'erreur induite par la méthode afin de quantifier l'intérêt réel de la méthode. Cette analyse fait l'objet d'une section ultérieure de ce chapitre.

3 Réduction de la base des modes d'interface

La section précédente a mis en avant la limite des méthodes de réduction de Craig-Bampton et de MacNeal. En effet, ces deux méthodes ont en commun le fait d'avoir une base réduite dépendante du nombre de degrés de liberté aux interfaces. Or, dans le cas des redresseurs sectorisés, le découpage en sous-structures peut faire apparaître des interfaces dont la taille totale peut atteindre plusieurs dizaines de milliers de degrés de liberté, ce qui pénalise les méthodes de synthèse modale classiques. L'objectif de cette section est donc de parvenir à réduire la taille de la base modale constituée par les modes d'interface.

La réduction de cette base a fait l'objet de plusieurs travaux tels que ceux de Craig et Chang [JC77] repris par la suite par Zhang, Castanier et Pierre [ZCP04]. Différentes méthodes sont ainsi proposées telles que la condensation statique de Guyan [Guy64] des interfaces, la corrélation des modes propres ou encore la synthèse modale des matrices réduites de masse et de raideur associées aux modes d'interface. Ces trois méthodes sont détaillées par la suite.

3.1 Condensation statique de Guyan

La première méthode est de considérer certains nœuds de l'interface, esclaves des autres nœuds de cette même interface. L'idée est de projeter le mouvement des nœuds d'interface sur quelques nœuds seulement. Cela revient à condenser statiquement la matrice de raideur $[k]$ à l'interface des deux sous-structures tel que :

$$[k][T_G] = \begin{bmatrix} [k_{II}] & [k_{I\Sigma}] \\ [k_{\Sigma I}] & [k_{\Sigma\Sigma}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi_G] \\ [I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_\Sigma \end{bmatrix} \quad (\text{IV.64})$$

soit

$$[\Psi_G] = -[k_{II}]^{-1}[k_{I\Sigma}] \quad (\text{IV.65})$$

où $[\Psi_G]$ représente les vecteurs statiques de condensation de Guyan, l'indice I les nœuds frontières maîtres, l'indice Σ les nœuds de frontières esclaves sur lesquels est projetée la déformation des nœuds maîtres et $[T_G]$ est la matrice de passage permettant de réduire à nouveau les matrices réduites de masse et de raideur.

La réduction de la base des modes statiques dépend donc du choix de l'utilisateur. C'est le nombre de nœuds esclaves qui détermine le pouvoir de réduction de cette méthode. Il est important de noter que la condensation statique n'est pas un réel problème pour une analyse modale puisqu'il s'agit ici de réduire la base de modes qui rendent compte de la déformée statique de la structure. Des méthodes permettant de

choisir les nœuds maîtres ont été développées afin d'optimiser la réduction modale [BCF92]

3.2 Corrélation des modes statiques

La seconde méthode consiste à considérer que certains modes statiques apportent la même information de déformation de la sous-structure et qu'il n'est donc pas judicieux de conserver la totalité de la base. L'idée est de calculer la corrélation entre tous les modes statiques et de créer une nouvelle base réduite en conservant uniquement les modes statiques dont la corrélation est maximale.

Soit $(\mathbb{R}^{n_s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{[A]})$ un espace préhilbertien. La matrice $[A]$ correspond à la mesure de cette espace. Il s'agit d'une matrice symétrique définie positive. n_s correspond à la taille de la base des modes statiques. Le produit scalaire entre les vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{Y} est défini par :

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{[A]} = \mathbf{X}^t [A] \mathbf{Y} \quad (\text{IV.66})$$

La matrice de corrélation $[R_A]$ des modes statiques est définie par :

$$[R_A] = \text{Mat} [\langle \boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_j \rangle_{[A], i,j=1..N_s}] = \text{Mat} [(\boldsymbol{\psi}_i^t [A] \boldsymbol{\psi}_j)_{i,j=1..N_s}] \quad (\text{IV.67})$$

Il suffit maintenant de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres $([\Lambda], [V])$ de la matrice de corrélation $[R_A]$ et de conserver uniquement les modes d'intérêt.

Choix de la matrice de mesure $[A]$: il est possible de choisir plusieurs matrices de pondération. Il est assez courant d'utiliser la matrice identité $[I]$, ce qui revient à considérer le produit scalaire usuel. Néanmoins, dans ce cas, la corrélation des modes statiques est calculée sans tenir compte de la géométrie de la structure. Il est donc plus difficile de choisir les modes statiques appropriés qui rendront compte de la déformée statique de la structure.

Dans la pratique, il est donc plus judicieux de choisir la matrice de raideur $[K]$ ou la matrice de masse $[M]$ de la structure. Les matrices de corrélation obtenues dans ce cas sont donc :

$$[R_M] = [m_s] \quad (\text{IV.68})$$

$$[R_K] = [k_s] \quad (\text{IV.69})$$

où $[m_s]$ est la matrice réduite de masse due aux modes statiques obtenue dans l'équation (IV.10) et $[k_s]$ celle de raideur obtenue dans l'équation (IV.11).

Les vecteurs propres $[V]$ conservés sont ceux dont les valeurs propres $[\Lambda]$ sont les plus faibles pour la corrélation par rapport à la matrice de raideur et les plus importantes pour la corrélation par rapport à la matrice de masse. Il suffit ensuite

d'appliquer la matrice de passage $[T_R]$ suivante aux matrices réduites obtenues via les méthodes de Craig-Bampton ou MacNeal :

$$[T_R] = \begin{bmatrix} [I^{(1)}] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & [0] & [I^{(N)}] & [0] \\ [0] & \dots & [0] & [V] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.70})$$

Le pouvoir de réduction de cette méthode dépend du nombre de nouveaux modes statiques conservés. La réduction peut alors être très intéressante car elle est directement proportionnelle au rapport du nombre de modes statiques initiaux par le nombre de modes statiques conservés. L'inconvénient de cette méthode réside dans le calcul de la matrice de corrélation qui ne tient compte que de la matrice de raideur ou de la matrice de masse. Quelque soit la méthode utilisée, la matrice de corrélation ne contient pas l'intégralité des propriétés de la structure.

3.3 Analyse modale des matrices réduites statiques

La troisième méthode consiste à effectuer une analyse modale des matrices réduites relatives aux modes statiques $[m_s]$ et $[k_s]$ obtenues dans les équations (IV.10) et (IV.10). Cela revient à résoudre le système suivant :

$$([k_s] - \omega^2[m_s]) \mathbf{v}_m = 0 \quad (\text{IV.71})$$

Les vecteurs propres $[V_m]$ conservés sont ceux dont les valeurs propres associées sont de l'ordre des fréquences propres conservées des sous-structures. En effet, Craig et Chang montrent que plus la différence entre les fréquences propres statiques et dynamiques est importante, plus la contribution en termes de déformation est faible. Il suffit ensuite d'appliquer la matrice de passage $[T_m]$ suivante aux matrices réduites obtenues via les méthodes de Craig-Bampton ou MacNeal :

$$[T_m] = \begin{bmatrix} [I^{(1)}] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & [0] & [I^{(N)}] & [0] \\ [0] & \dots & [0] & [V_m] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.72})$$

Cette méthode permet d'obtenir une nouvelle base des modes statiques, nommés modes de branches par Jezequel [Jez85, BbJT12, Bes06] qui tient compte de l'intégralité des propriétés de la structure puisqu'elle fait intervenir les matrices de masse et de raideur. La combinaison de cette réduction avec la synthèse modale de Craig-Bampton est couramment nommée double synthèse modale. De plus, comme pour la méthode précédente, la réduction est directement proportionnelle au rapport du nombre de modes statiques initiaux par le nombre de modes statiques conservés. Il semble que cette méthode permette, *a priori*, de réduire fortement le modèle initial sans trop altérer la précision des résultats.

4 Applications des méthodes de réductions à un modèle simplifié et industriel

Cette section présente les résultats obtenus lors de l'application des différentes méthodes présentées précédemment. Les méthodes ont d'abord été testées sur un modèle académique simple en deux dimensions avant d'être testées sur un modèle de redresseur industriel.

4.1 Application sur un modèle académique simple

Les méthodes classiques ont donc d'abord été appliquées à un modèle simplifié. Le modèle est le même que celui de la section II.4.1, soit un secteur de redresseur en deux dimensions à 5 aubes. Le tout est modélisé comme un treillis de poutres Euler-Bernoulli comportant 147 nœuds. Les deux nœuds aux extrémités de la virole supérieure sont encastrés soit un total de 435 degrés de liberté actifs.

Afin de faciliter l'intégration de la méthode de réduction dans la méthode stochastique retenue, la structure a été découpée en isolant les aubes et les viroles, comme le montre la figure IV.5. Ce découpage permet de créer des matrices réduites pour chaque sous-structure qui dépendent uniquement du module d'Young associé à cette sous-structure. L'introduction du désaccordage est donc facilitée puisqu'il suffit de multiplier chaque matrice réduite de raideur par un coefficient pour désaccorder la structure complète.

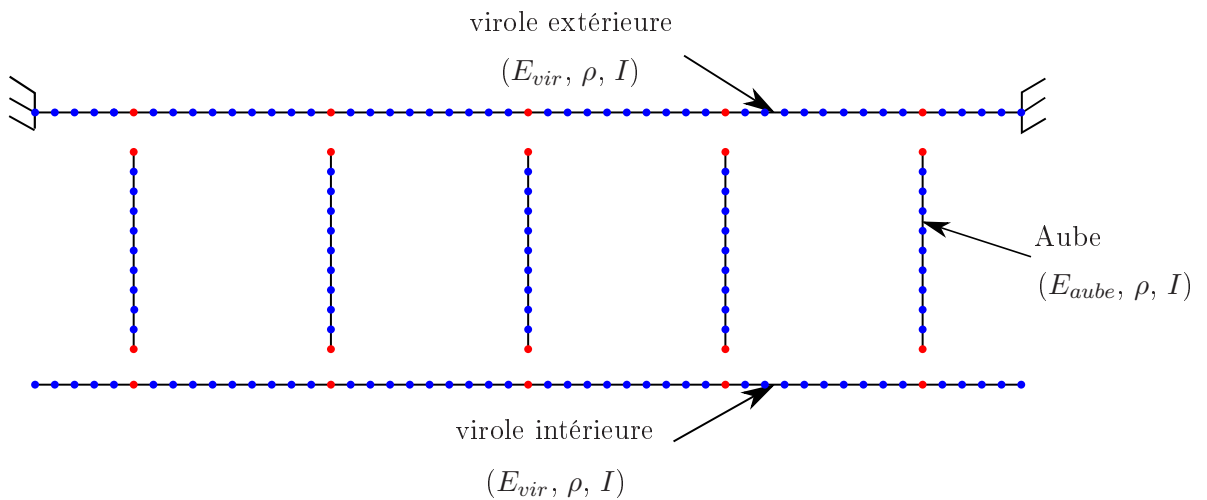


FIGURE IV.5 – Découpage du secteur de redresseur simplifié

Les points bleus représentent les nœuds intérieurs de chaque sous-structure tandis que les points rouges représentent les nœuds frontières. Puisque la structure complète comptabilise 30 degrés de libertés frontières, les méthodes de réduction de la base de modes statiques ne seront pas testées.

Ce découpage a tendance à découpler complètement le mouvement des aubes. La modélisation des modes d'interface est donc primordiale afin d'assurer un couplage

correct des aubes au travers de la virole et donc de garantir de bons résultats. Cela implique que le facteur de couplage entre l'aube et la virole $C_{A/V}$ peut avoir une importance certaine selon la méthode de réduction choisie. Les quatre méthodes ont donc été testées pour trois valeurs de couplage différentes : 1, 10 et 100.

Pour chacune des méthodes, les trente premiers modes internes de virole et les dix premiers modes internes d'aube ont été conservés. Ceci implique une base réduite de 110 modes pour les méthodes de Benfield-Hruda et de Craig-Chang, soit une réduction de 75%. Les méthodes de Craig-Bampton et de MacNeal comptent 30 modes statiques supplémentaires, soit une base réduite de 140 modes et une réduction de 68%.

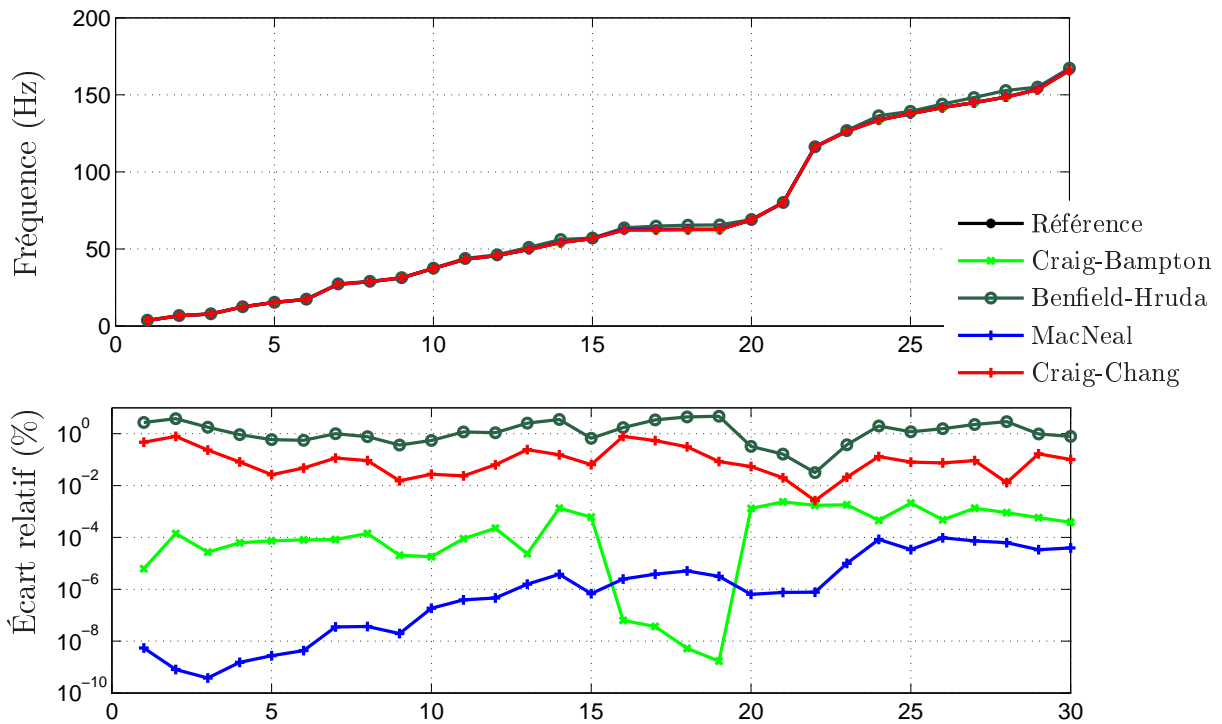


FIGURE IV.6 – Fréquences propres du secteur de redresseur simplifié selon la méthode de réduction pour le facteur de couplage $C_{A/V} = 1$

La figure IV.6 présente les trente premières fréquences propres de la structure pour chaque méthode de réduction ainsi que l'écart relatif par rapport à un calcul sans réduction pour $C_{A/V} = 1$. Les méthodes de réduction de Craig-Bampton et de MacNeal présentent les meilleurs résultats avec un écart relatif respectif inférieur à $2.5 \times 10^{-3}\%$ et à $10^{-4}\%$. La méthode de Craig-Chang permet d'obtenir de bons résultats avec un écart maximal inférieur à 1%. En revanche la méthode de Benfield-Hruda ne permet pas d'obtenir les résultats attendus avec un écart pouvant atteindre 5%.

La figure IV.7 présente les trente premières fréquences propres de la structure pour chaque méthode de réduction ainsi que l'écart relatif par rapport à un calcul sans réduction pour $C_{A/V} = 10$. De nouveau, les méthodes de réduction de Craig-Bampton

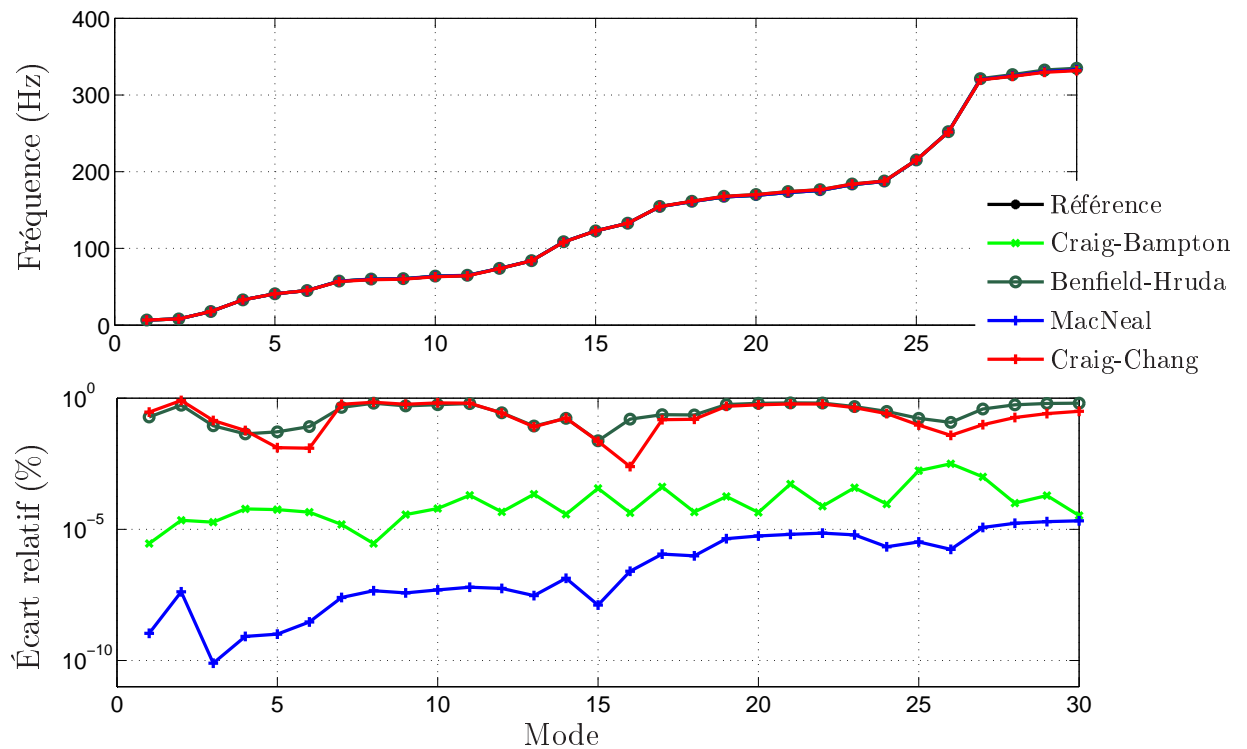


FIGURE IV.7 – Fréquences propres du redresseur simplifié selon la méthode de réduction pour le facteur de couplage $C_{A/V} = 10$

et de MacNeal présentent les meilleurs résultats avec un écart relatif respectif inférieur à $3.5 \times 10^{-3}\%$ et à $2.5 \times 10^{-5}\%$. La méthode de Craig-Chang permet également d'obtenir de bons résultats avec un écart maximal inférieur à 0.9%. Dans ce cas, la méthode de Benfield-Hruda permet d'obtenir des résultats similaires à ceux de Craig-Chang avec un écart maximal inférieur à 0.9%.

La figure IV.8 présente les trente premières fréquences propres de la structure pour chaque méthode de réduction ainsi que l'écart relatif par rapport à un calcul sans réduction pour $C_{A/V} = 100$. De nouveau, les méthodes de réduction de Craig-Bampton et de MacNeal présentent les meilleurs résultats avec un écart relatif respectif inférieur à $3.5 \times 10^{-3}\%$ et à $10^{-4}\%$. Dans ce cas, la méthode de Benfield-Hruda permet également d'obtenir de très bons résultats avec un écart relatif de l'ordre de 0.2%. Les résultats de la méthode de Craig-Chang sont similaires aux deux cas précédents avec un écart inférieur à 1.1%.

Le facteur de couplage n'influe pas ou que très peu sur les méthodes de Craig-Bampton, MacNeal et Craig-Chang. En revanche, son impact sur la méthode de Benfield-Hruda est important avec un écart relatif maximal compris entre 0.2% et 5% selon le facteur de couplage. Plus la virole est souple, moins les résultats sont bons. Cela intervient lors de la projection des modes statiques d'aube sur les modes internes de viroles. En effet, ces deux types de modes ne sont pas compatibles en termes de déplacements. Ceci implique que la contribution des modes statiques

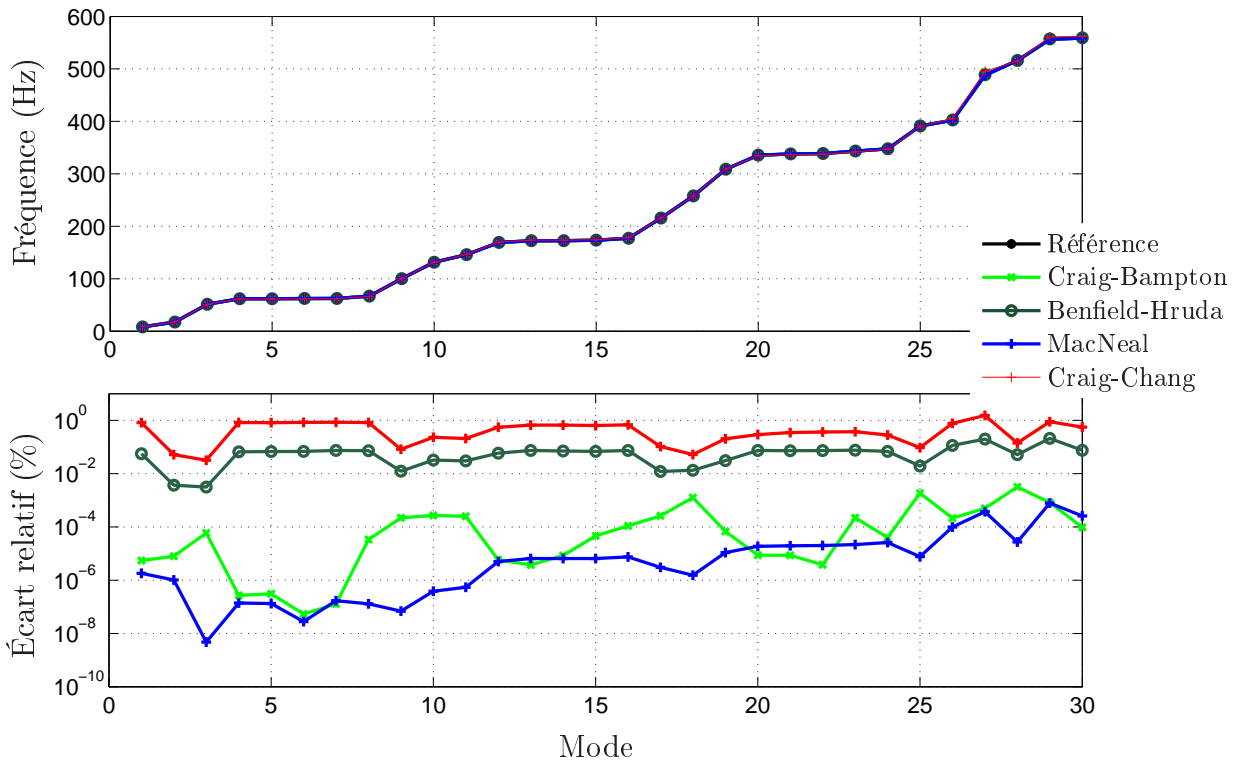


FIGURE IV.8 – Fréquences propres du redresseur simplifié selon la méthode de réduction pour le facteur de couplage $C_{A/V} = 100$

d'aube est amoindrie lors de la projection raidissant ainsi la structure. Le fait que les résultats s'améliorent lorsque la virole raidit provient du fait que le couplage énergétique des aubes diminue avec une virole plus raide. La projection des modes statiques, qui permet justement de coupler les aubes au travers de la virole, aura donc une importance moindre sur les résultats finaux si la virole est raide.

Il est également important de noter que les écarts des méthodes de Benfield-Hruda et de Craig-Chang sont maximaux au niveau des paliers de modes. Ces méthodes sont donc sensibles aux zones de forte densité modale, alors qu'il s'agit précisément des zones d'intérêt.

Finalement, les méthodes de Craig-Bampton et de MacNeal sont incontestablement celles qui produisent les meilleurs résultats. Elles sont également indépendantes du facteur de couplage et des zones de forte densité modale. Néanmoins, elles présentent l'inconvénient de faire intervenir un grand nombre de modes statiques pénalisant leur pouvoir de réduction. La méthode de Craig-Chang donne des résultats satisfaisants mais imprécis au niveau des zones de forte densité modale. La méthode de Benfield-Hruda ne fonctionne correctement que si le facteur de couplage est important, or celui des redresseurs industriels tend à être plutôt faible (cf. Sec. IV.4.2).

La comparaison des différentes méthodes de réduction a été établie selon les résultats en fréquences. Une seconde analyse a donc été faite pour les comparer selon les vecteurs propres obtenus grâce au Critère d'Assurance Modale (MAC)

normalisé par rapport à la matrice de masse $[M]$:

$$MAC(\tilde{\phi}_i, \phi_j) = \frac{(\tilde{\phi}_i^t[M]\phi_j)^2}{(\tilde{\phi}_i^t[M]\tilde{\phi}_i)(\phi_j^t[M]\phi_j)} = (\tilde{\phi}_i^t[M]\phi_j)^2 \quad (\text{IV.73})$$

où $\tilde{\phi}_i$ sont les vecteurs propres obtenus en utilisant les méthodes de réduction, ϕ_j ceux de référence obtenus sans effectuer de synthèse modale. Tous les vecteurs propres sont normalisés par rapport à la matrice de masse. Dans l'ensemble, la matrice de MAC obtenue est diagonale avec une corrélation (coefficients diagonaux) supérieure à 99% voire de 100% pour les méthodes de Craig-Bampton et de MacNeal.

Il est important de noter que les résultats présentés comparent les méthodes de réduction alors que la taille des bases réduites ne sont pas identiques. La différence des résultats pourraient donc provenir du fait que les bases réduites de Craig-Bampton et de MacNeal sont plus riches que celles de Benfield-Hruda et Craig-Chang. Une seconde étude a donc été faite en enrichissant les bases réduites de Benfield-Hruda et de Craig-Chang de modes internes dans le but d'obtenir des bases réduites de même taille pour toutes les méthodes. Néanmoins, cela n'a pas considérablement amélioré les résultats. Il a donc été choisi de présenter les résultats avec des bases réduites différentes pour insister sur le fait que le principal avantage des méthodes de Benfield-Hruda et de Craig-Chang, dont la taille de la base réduite ne dépend pas du nombre de nœuds d'interface, implique un défaut de précision non négligeable.

4.2 Application sur un modèle industriel de redresseur

Les méthodes de réduction ont ensuite été testées sur un modèle de redresseur industriel. Il s'agit d'un redresseur comportant onze aubes (cf. Fig. IV.9). Le découpage isole les aubes et les viroles en sous-structures indépendantes. La séparation est effectuée au niveau du congé de raccordement entre les aubes et les viroles. Le maillage comporte 217 291 nœuds dont 11 229 nœuds frontières.

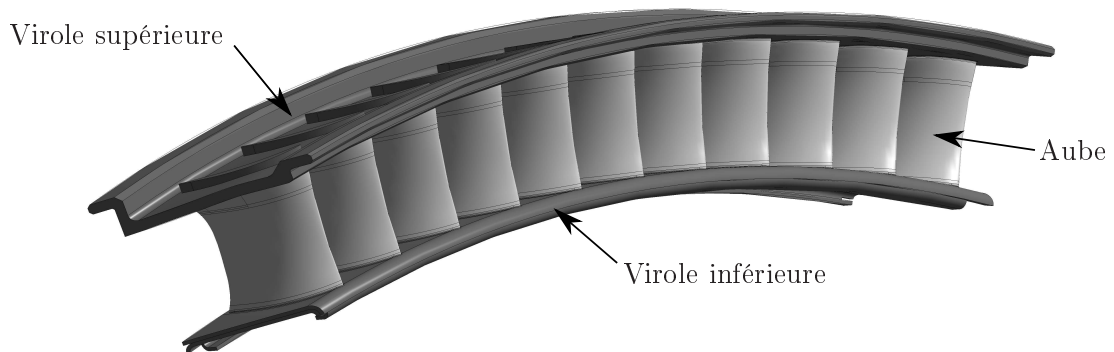


FIGURE IV.9 – Secteur de redresseur industriel

Les modes propres de la structure complète, sans sous-structuration, ont d'abord été calculés par un code éléments finis commercial (Samcef), qui sert de référence. La comparaison, entre les résultats obtenus par les différentes méthodes de réduction proposées et ceux obtenus par le logiciel commercial, a été faite pour les cinquante premiers modes. Les fréquences propres ont été normalisées par rapport à la 14^{ème} fréquence propre qui correspond au premier mode de flexion d'aubes.

Dans un premier temps, seuls les résultats des méthodes de Craig-Bampton, Benfield-Hruda, MacNeal et Craig-Chang sont présentés. Dans tous les cas, les deux cents premiers modes internes de virole et les cinquante premiers modes internes d'aube ont été conservés. Ceci implique une base réduite de 950 modes pour les méthodes de Benfield-Hruda et de Craig-Chang soit une réduction d'environ 99.9%. Les méthodes de Craig-Bampton et de MacNeal comptent 33 687 modes statiques supplémentaires, ce qui implique une base réduite comportant 34 637 modes, soit une réduction d'environ 94.7%.

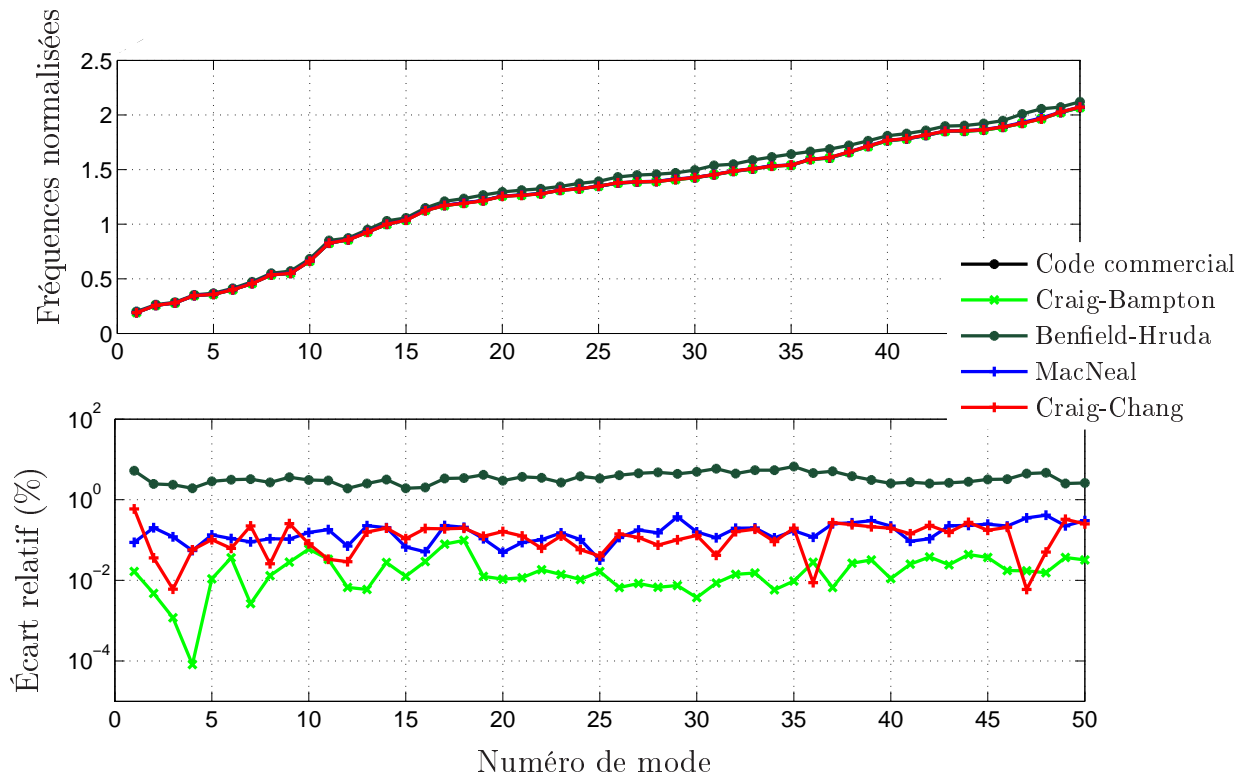


FIGURE IV.10 – Fréquences propres du secteur de redresseur industriel selon la méthode de réduction

La figure IV.10 présente les cinquante premières fréquences propres de la structure pour chaque méthode de réduction ainsi que l'écart relatif par rapport au calcul de référence.

La méthode de Craig-Bampton fonctionne parfaitement avec un écart inférieur à 0.1%. Les méthodes de MacNeal et de Craig-Chang présentent des résultats similaires en termes de convergence avec un écart inférieur à 0.5%. En revanche, la méthode de Benfield-Hruda ne permet pas d'obtenir de bons résultats avec un écart

pouvant aller jusque 7%. Ceci est dû au fait que les viroles semblent être assez souples sur ce redresseur, ce qui pose problème pour cette méthode comme l'a montré la section IV.4.1.

A priori, la méthode la plus efficace semble être la méthode de Craig-Chang dont le pouvoir de réduction atteint les 99.9% tout en conservant une précision sur les fréquences propres correcte avec un écart moyen de l'ordre de 0.2%. Néanmoins, cette méthode présente l'inconvénient de faire intervenir à plusieurs reprises des inversions de matrices, rendant le traçabilité du module d'Young de chaque structure complexe et, par conséquent, son intégration au sein d'une méthode stochastique. Bien que les résultats soient satisfaisants, la méthode de MacNeal présente de moins bons résultats que celle de Craig-Bampton pour le même pouvoir de réduction. De plus, elle fait intervenir plusieurs inversions de matrices à grandes dimensions, alourdissant la démarche. La méthode de Craig-Bampton est donc privilégiée.

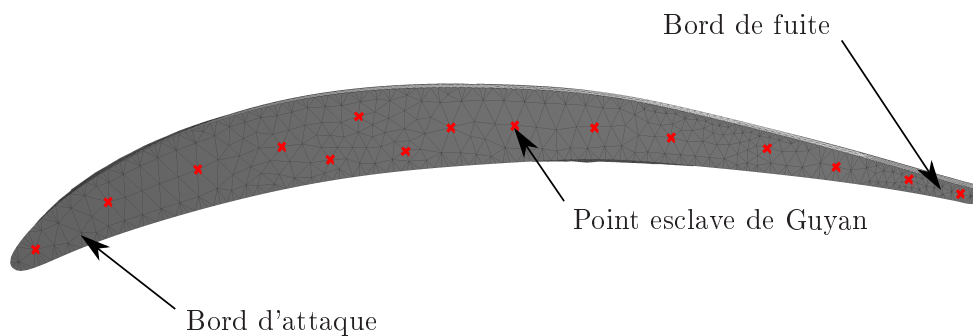


FIGURE IV.11 – Positionnement des points esclaves de Guyan

Les méthodes de réduction de la base des modes d'interface sont appliquées à la méthode de Craig-Bampton, avec pour objectif de réduire considérablement la base constituée de 33 687 modes statiques. Pour la méthode de condensation statique de Guyan, 15 nœuds par interface (cf. Fig. IV.11) soit un total de 330 nœuds frontières ont été conservés. La base des modes statiques a donc été réduite à 990 modes, ce qui porte la taille de la base réduite à 1 940 modes, soit une réduction de 99.7%. Pour les méthodes de corrélation par rapport à la matrice de masse, de corrélation par rapport à la matrice de raideur et de synthèse modale, 1 000 modes statiques ont été conservés, ce qui porte la taille de la base réduite à 1950 modes, soit une réduction de 99.7%.

La figure IV.12 illustre les résultats obtenus pour chacune des méthodes des réduction de modes d'interface. Les méthodes de condensation statique de Guyan et de corrélation par rapport à la matrice de masse ne donnent pas les résultats attendus. La perte d'information due à la troncature de la base des modes statiques rend la structure beaucoup plus raide. En ce qui concerne la méthode de corrélation par

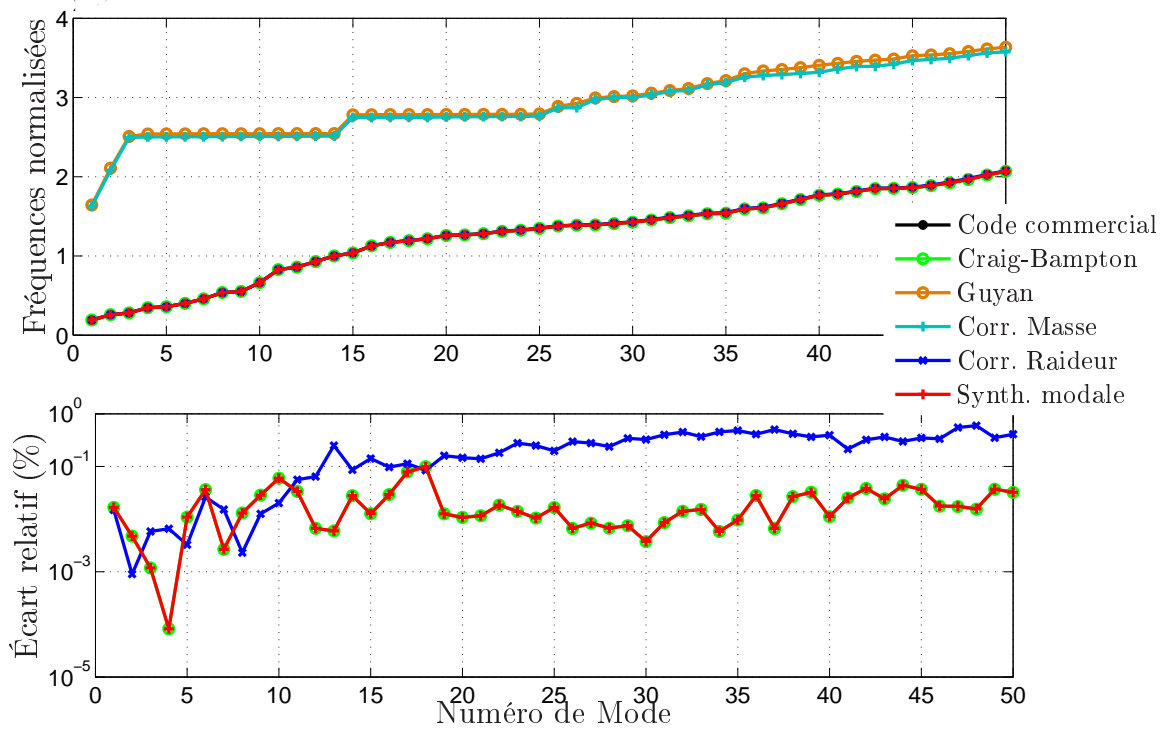


FIGURE IV.12 – Fréquences propres du secteur de redresseur industriel selon la méthode de réduction des modes d’interface

rapport à la matrice de masse, le fait d’utiliser la matrice de masse comme matrice de pondération n’est pas très judicieux car cette dernière rend plutôt compte d’un mouvement dynamique alors que les modes approximés sont statiques.

La méthode de réduction par corrélation par rapport à la matrice de raideur donne, quant à elle, de très bons résultats avec un écart inférieure à 0.6%. Cependant, la précision semble rapidement s’altérer lorsque la fréquence augmente.

La méthode de synthèse modale produit d’excellents résultats. En effet, les résultats obtenus sont identiques à ceux produits par la méthode de Craig-Bampton alors que la taille de la base réduite a été divisée par plus de 17 entre les deux méthodes. L’écart observé est principalement dû à la troncature de la base des modes internes. Il est donc possible de diminuer encore la taille de la base réduite en diminuant le nombre de modes statiques afin d’identifier le nombre de modes statiques minimal à conserver sans altérer la qualité des résultats. Cependant, la matrice de passage de cette double synthèse modale dépend des modes $[V_m]$ et donc de la matrice de raideur $[k_s]$ (cf. Eq. (IV.71)). Or, cette matrice dépend du module d’Young de l’ensemble des sous-structures. Par conséquent, les modes $[V_m]$ sont influencés par la situation de désaccordage considérée et doivent être recalculés lorsqu’une nouvelle configuration est considérée. Afin de ne pas compromettre l’intérêt de cette méthode par l’augmentation des temps de calcul due à la génération systématique de la nouvelle matrice de passage $[T_m]$, cette dernière est supposée constante quelque soit la situation de désaccordage. Cette hypothèse est vérifiée dans la section suivante.

5 Influence du désaccordage sur la double synthèse modale

La double synthèse modale (DSM) est maintenant appliquée à un modèle de redresseur plus récent (cf. Fig.IV.13). Elle a été comparée à une analyse standard du modèle complet composé de trois millions de degrés de liberté et une synthèse modale de Craig-Bampton classique. La pièce est maillée par 552 973 éléments tétraédriques en degré deux explicite pour un nombre total de 913 077 nœuds. La convergence de ce maillage est vérifiée en termes fréquentiels, de déplacements et de contraintes. Aucune condition limite n'est appliquée sur ce secteur dans le cadre de l'étude présentée par la suite. Néanmoins, l'application de conditions limites au niveau de la virole supérieure n'altère pas les conclusions de cette étude.

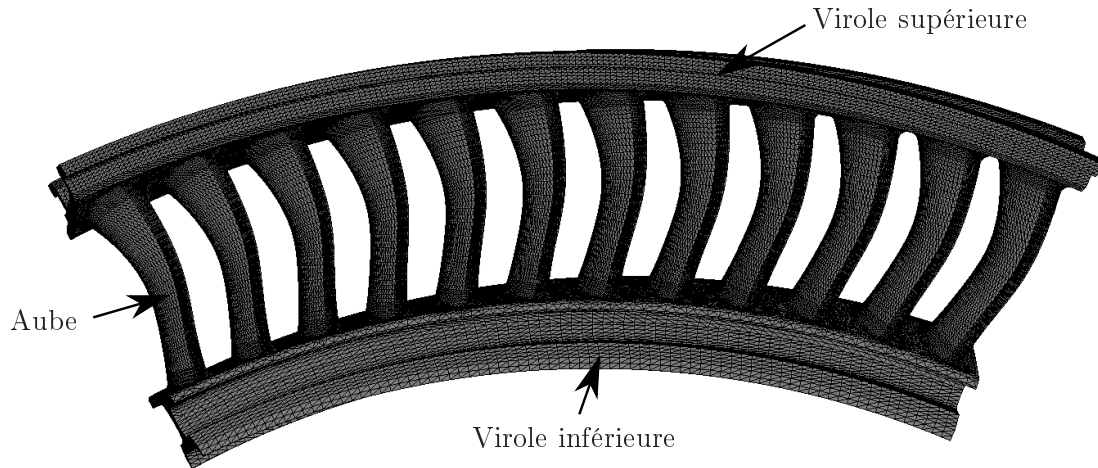


FIGURE IV.13 – Secteur de redresseur industriel maillé

Dans un premier temps, l'influence de la troncature de la base des modes statiques est étudiée en comparant la méthode de Craig-Bampton et la double synthèse modale. Cette comparaison permet de s'affranchir de la troncature de la base des modes internes et donc valider l'hypothèse supposant la matrice de passage $[T_s] = [T_{CB}][T_m]$ constante quelque soit le motif de désaccordage. Ainsi, les cent premiers modes élastiques ont été calculés pour cent un motifs de désaccordage en utilisant les deux méthodes de sous-structuration précédemment citées. Le désaccordage n'excède pas une variation de 5% du module d'Young de chaque aube et virole. La matrice de passage $[T_s]$ est également considérée constante et égale à celle du cas accordé quelque soit le motif de désaccordage.

La figure IV.14 présente les écarts relatifs entre les fréquences propres calculées par la méthode de Craig-Bampton et la double synthèse modale pour les cas (c_1) et (c_2) du tableau IV.1. Un diagramme en boîte est calculé pour chaque motif de désaccordage. Les traits rouges correspondent à l'écart relatif médian, les boîtes bleues au premier et troisième quartile des écarts relatifs, et les traits discontinus noirs aux écarts relatifs minimaux et maximaux.

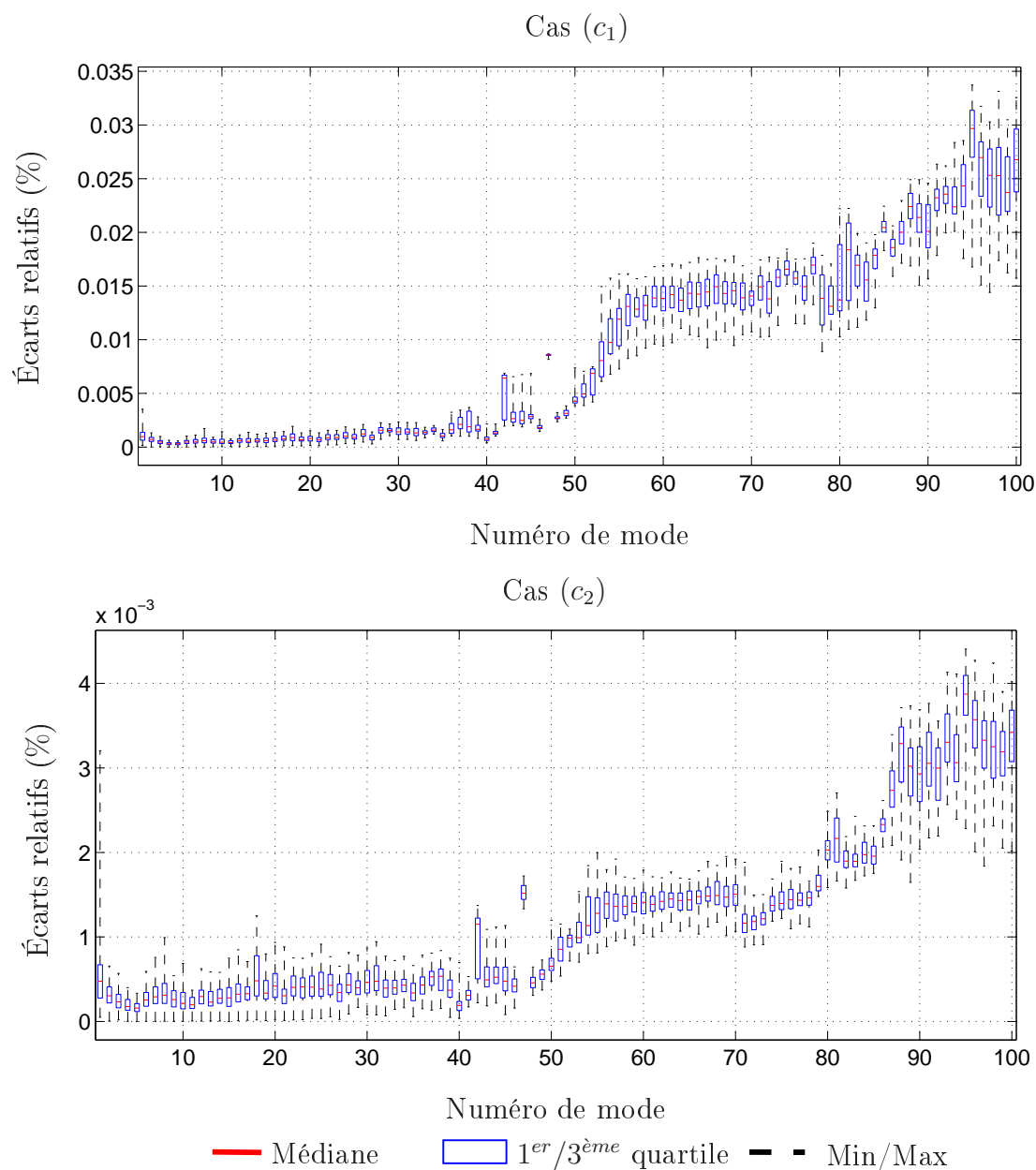


FIGURE IV.14 – Écart relatifs statistiques entre les fréquences propres calculées via la méthode de Craig-Bampton et la double synthèse modale pour les cas (c_1) et (c_2) (cf. Tab. IV.1)

Ce graphe montre que la précision des résultats dépend bien de la troncature de la base des modes statiques. En effet, le fait de doubler le nombre de modes statiques permet de diviser l'écart relatif entre les fréquences d'un facteur 10. De plus, le désaccordage ne semble pas avoir un impact préjudiciable sur la double synthèse modale puisque les écarts relatifs minimum et maximum sont très proches. Ainsi, l'hypothèse supposant la matrice de passage $[T_s]$ constante quelque soit le motif de désaccordage semble être validée.

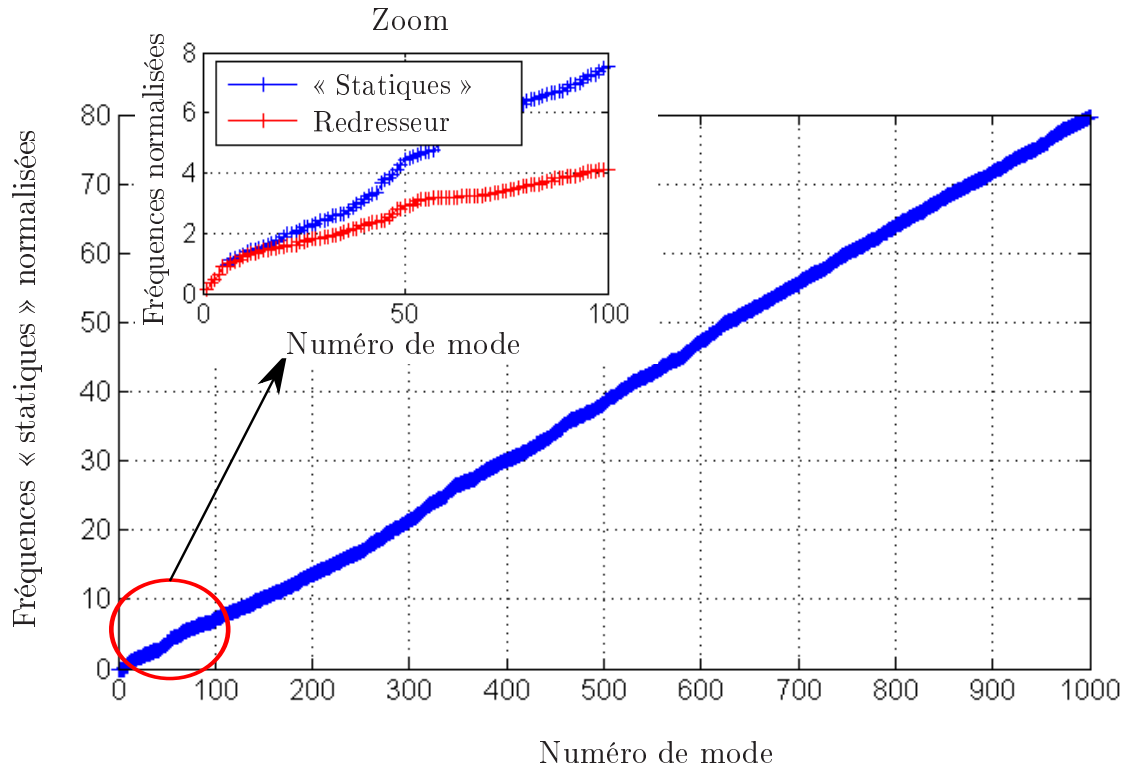


FIGURE IV.15 – Évolution des fréquences propres "statiques" élastiques normalisées en fonction du numéro de mode

Physiquement, la validation de cette hypothèse peut être expliquée par l'absence de zone de forte densité modale dans l'évolution des fréquences propres « statiques » (cf. Fig. IV.15). En effet, l'évolution quasi-linéaire de fréquences propres implique une très faible dépendance au désaccordage. De plus, une comparaison est faite entre les fréquences propres « statiques » et celles du modèle complet. Il en ressort que les six premières sont très similaires et correspondent à des modes d'ensemble qui sont peu ou pas influencés par l'effet du désaccordage.

Dans un second temps, les cent premiers modes élastiques du modèle complet ont d'abord été calculés pour cent un motifs de désaccordage, dont le cas accordé. Ensuite, ils ont été calculés en utilisant la double synthèse modale, en retenant n_p modes internes de virole, n_a modes internes d'aube et n_s modes statiques, et en conservant la matrice de passage $[T_s]$ du cas accordé quelque soit le motif de désaccordage. n_p , n_b et n_s ont été choisis pour que tous les modes internes et statiques

Cas	Modèle complet	Craig-Bampton	Double synthèse modale			
			(a)	(b)	(c ₁)	(c ₂)
N	/	10	2	5	10	10/20
n_v	/	200	40	125	200	200
n_a	/	100	15	30	100	100
n_s	/	41 000	130	250	500	1 000
Taille total (ddls)	3.10^6	43 600	390	860	2 100	2 600
Facteur de réduction	1	69	7 700	3 500	1 400	1 150
Tps de calcul ¹	90min	20min	0.5s	1.5s	10s	20s
Facteur de réduction temporel	1	4.5	11 000	2 700	540	270

TABLE IV.1 – Quatre cas de troncature de modes de la double synthèse modale

n'excèdent pas $N \times f_{max}$ où f_{max} correspond à la 100^{ème} fréquence propre élastique du modèle complet (cf. Tab. IV.1).

La figure IV.16 présente les écarts relatifs entre les cent premières fréquences propres élastiques du modèle complet et celles obtenues par double synthèse modale pour les quatre cas de troncature modale définis par le tableau IV.1. Elle montre donc que les résultats sont très précis, notamment pour les cas (c₁) et (c₂) avec un écart relatif globalement inférieur à 1% alors que le temps de calcul a été respectivement divisé par 540 et 270. De plus, il apparaît que les fréquences propres semblent converger en termes de troncature des modes statiques puisque les écarts relatifs diminuent peu en doublant le nombre de modes statiques.

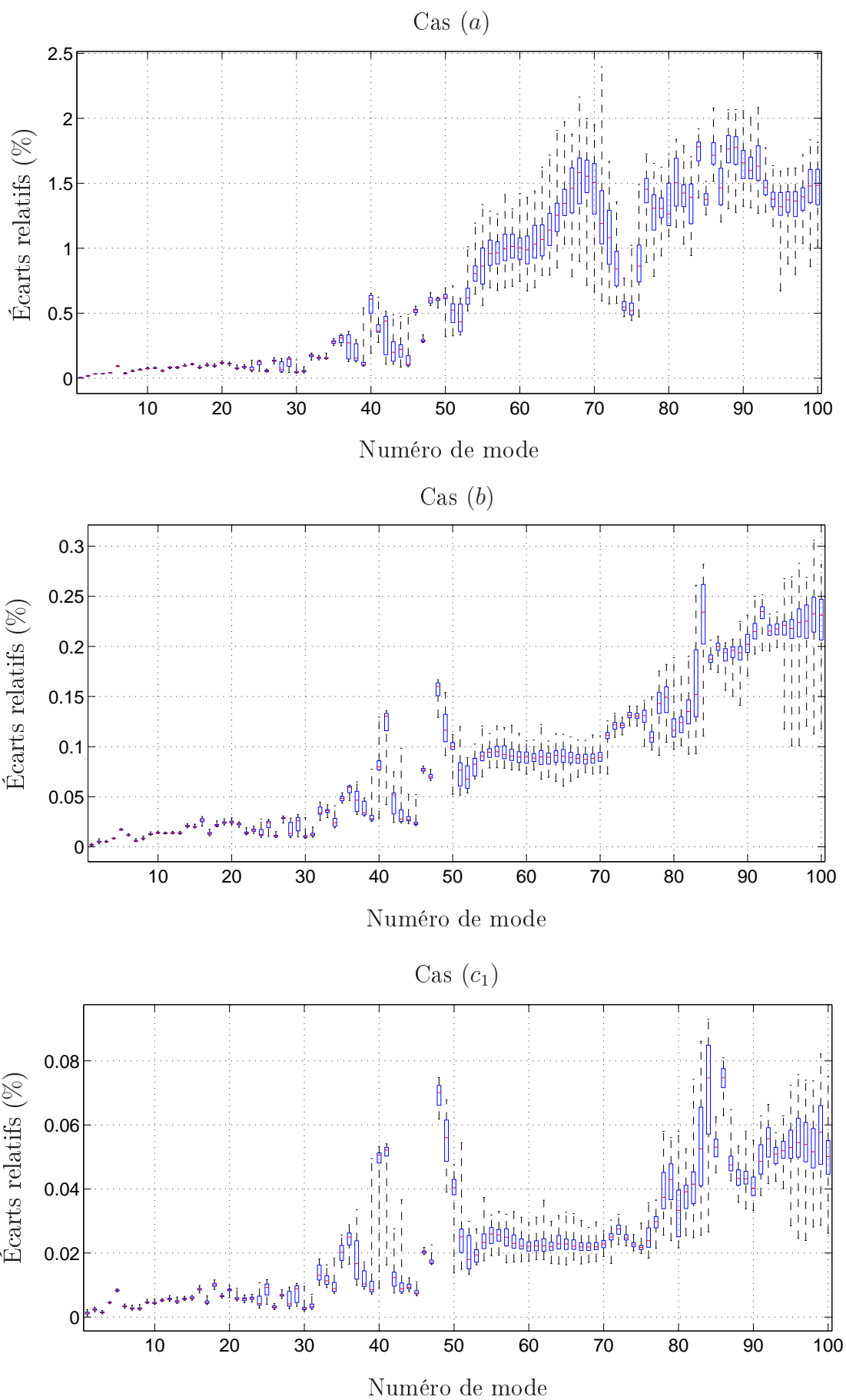
Afin de comparer les déformées propres, la corrélation est en utilisant la forme du Critère d'Assurance Modale (MAC) non normalisé par rapport à la matrice de masse :

$$Mac(\phi_i, \phi_j) = \frac{(\phi_i^t \phi_j)^2}{\|\phi_i\|^2 \|\phi_j\|^2} \quad (IV.74)$$

Où ϕ_i correspond à la $i^{\text{ème}}$ déformée propre. Comme attendu, la matrice de MAC est diagonale et est très proche de la matrice identité.

La figure IV.17 présente les corrélations statistiques entre les déformées modales du modèle complet et celles obtenues par double synthèse modale pour les cas (c₁) et (c₂). Elle montre que les déformées modales sont très similaires avec une corrélation globalement supérieure à 0.99. En effet, moins d'1% des corrélations sont inférieures

1. Puissance de calcul : Processeur cadencé à 3.20-GHz



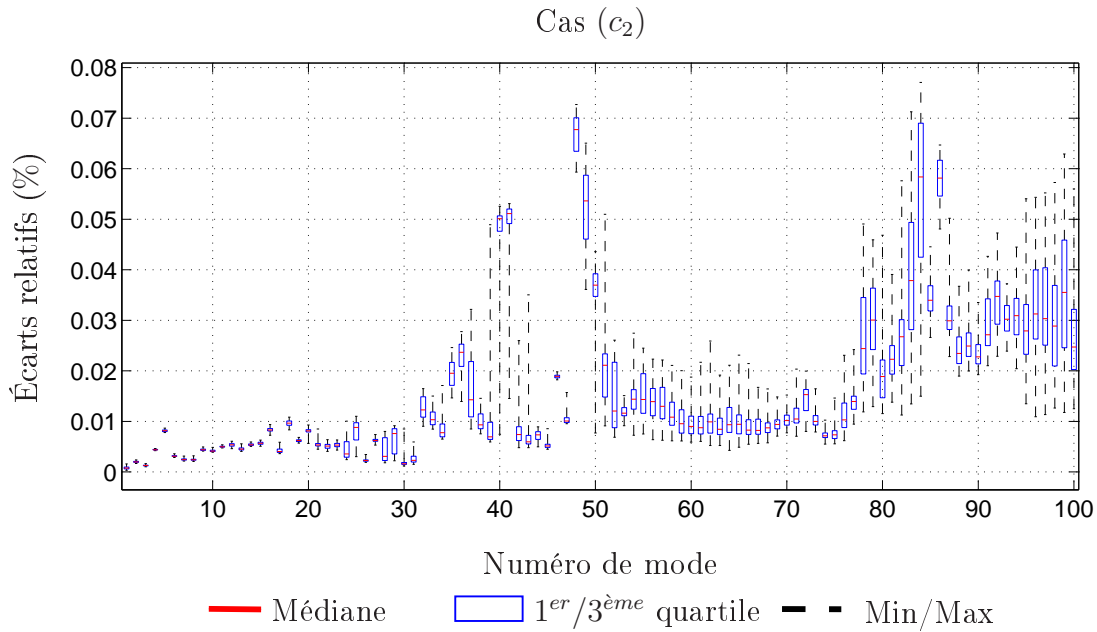


FIGURE IV.16 – Écarts relatifs statistiques entre les fréquences propres du modèle complet et celles obtenues par double synthèse modale pour différents cas (cf. Tab. IV.1)

à 0.99 (cf. Fig. IV.18) et seulement une dizaine de modes ont une corrélation inférieure à 0.9. Néanmoins, le MAC permet de valider le fait que deux vecteurs sont strictement identiques mais la corrélation peut très vite diminuer si ces derniers sont légèrement différents, ce qui signifie qu’une mauvaise corrélation n’implique pas forcément de mauvais résultats. Ainsi, les déformées du 39^{ème} mode obtenues par le modèle complet et par double synthèse modale ont été tracées (cf. Fig. IV.19) pour le motif de désaccordage dont la corrélation était la plus mauvaise, soit une corrélation inférieure à 0.5. Les résultats ont été normalisés par le déplacement maximal du modèle complet afin de se ramener à une échelle comparable. Il en ressort que les deux déformées modales sont très similaires malgré la mauvaise corrélation.

Finalement, la double synthèse modale permet d’obtenir d’excellents résultats tout en réduisant considérablement les temps de calcul. Ainsi, cette méthode permet de générer un très grand nombre de calculs déterministes sans accroître fortement les temps de calcul puisqu’elle permet de générer des dizaines de milliers de calculs en quelques jours au lieu de plusieurs mois voire quelques années.

6 Bilan des méthodes de sous-structuration

De nombreuses méthodes ont été présentées au cours de cette section. Les méthodes classiques de Craig-Bampton, Benfield-Hruda, MacNeal et Craig-Chang ont été testées sur un modèle simple de secteur de redresseur en deux dimensions puis

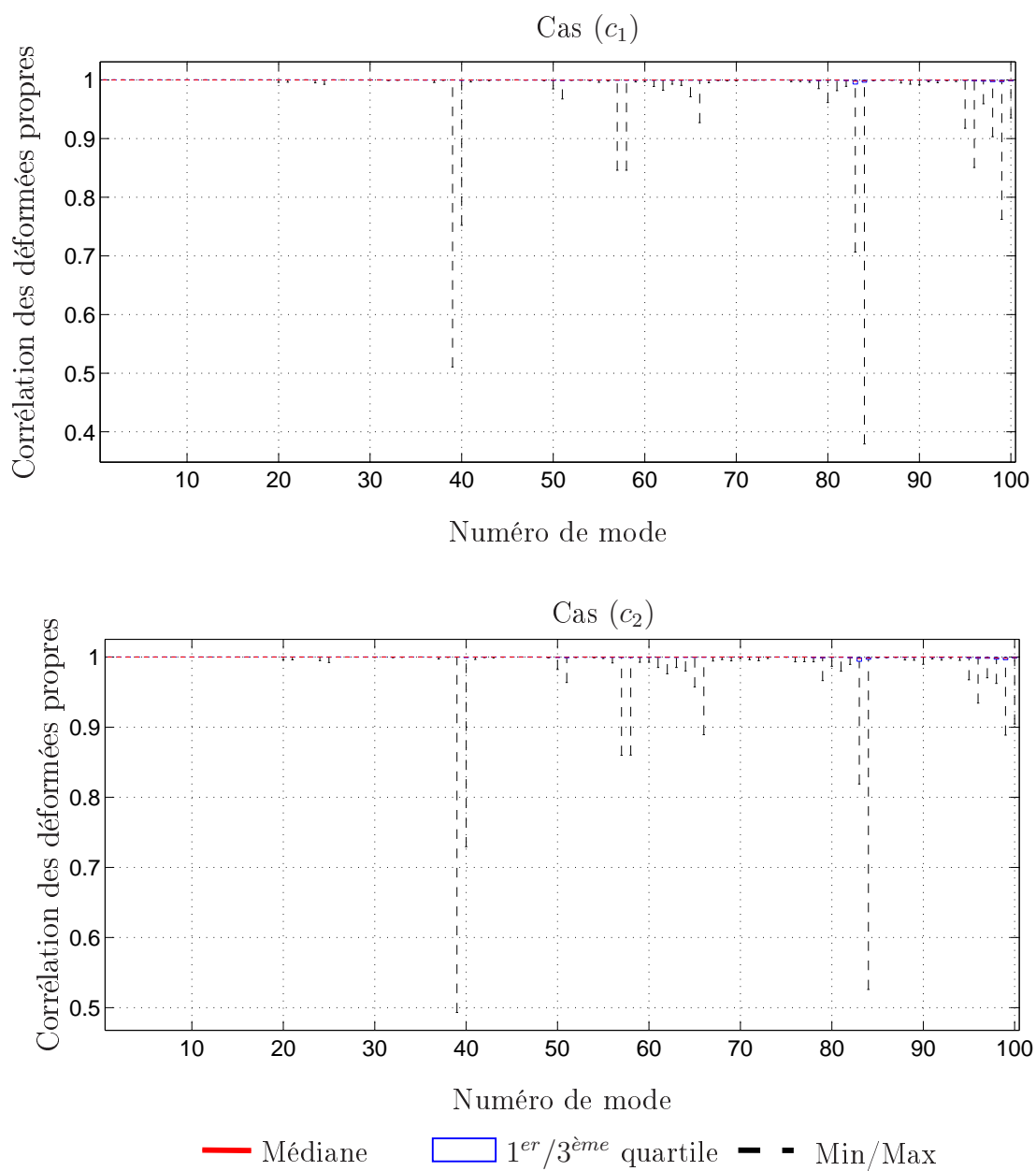


FIGURE IV.17 – Corrélations statistiques entre les déformées modales du modèle complet et celles obtenues par double synthèse modale pour les cas (c_1) et (c_2)

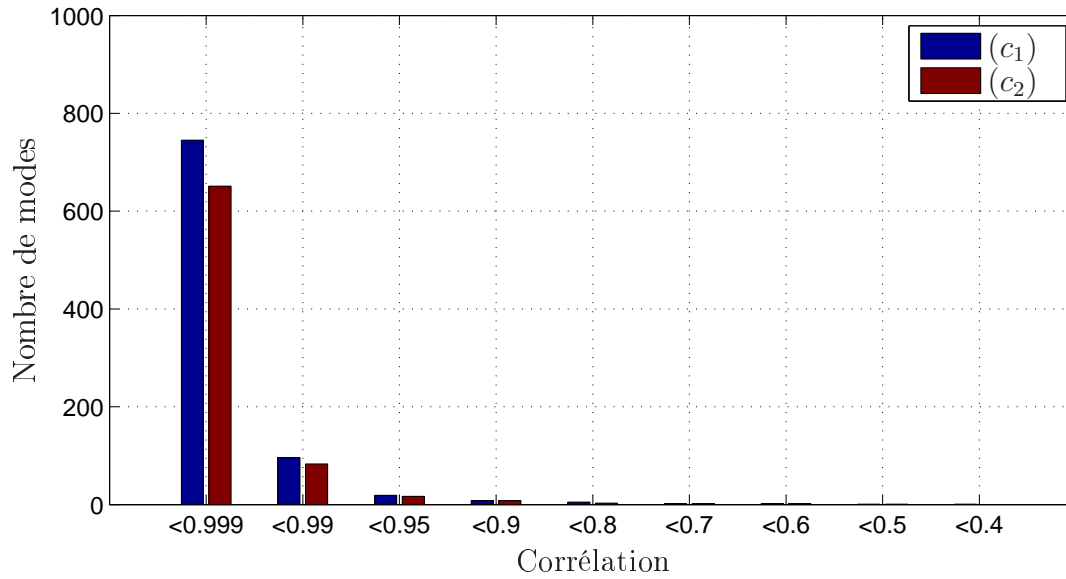


FIGURE IV.18 – Nombre de déformées modales dont la corrélation est inférieure à un certain niveau

sur une modèle de redresseur industriel.

La méthode de Craig-Bampton est celle qui a produit les meilleurs résultats quelque soit le modèle. Néanmoins, la réduction de cette méthode n'est pas optimale puisque sa base réduite est composée de modes statiques dont la taille est directement liée au nombre de degrés de liberté situés au niveau des interfaces. La méthode de Benfield-Hruda n'a pas donné les résultats escomptés à cause de la perte d'information due à la projection des modes statiques des sous-structures esclaves sur les modes internes des sous-structures maîtres. La méthode de MacNeal produit de très bons résultats mais souffre du même inconvénient que la méthode de Craig-Bampton, à savoir la dépendance de la taille de sa base réduite en fonction du nombre de nœuds aux interfaces. A cela s'ajoute la nécessité d'inverser un certain nombre de matrices de grandes dimensions. La méthode de Craig-Chang produit également de bons résultats avec un fort pouvoir de réduction. Cependant, sa complexité de mise en œuvre rend difficile son intégration au sein d'une méthode stochastique.

Dans le but d'améliorer la méthode de Craig-Bampton, différentes méthodes permettant la réduction de la base modale liée aux modes statiques d'interface ont été testées. Parmi celles présentées, seules les méthodes de réduction par pondération par rapport à la matrice de raideur, et de synthèse modale des matrices de modes statiques ont produit de bons résultats. Cependant, la première méthode semble présenter des problèmes de convergence à haute fréquence. En revanche, la seconde méthode produit des résultats identiques à la méthode classique de Craig-Bampton.

Finalement, la méthode de Craig-Bampton couplée à une synthèse modale des matrices réduites de modes statiques de masse et de raideur semble être la meilleure

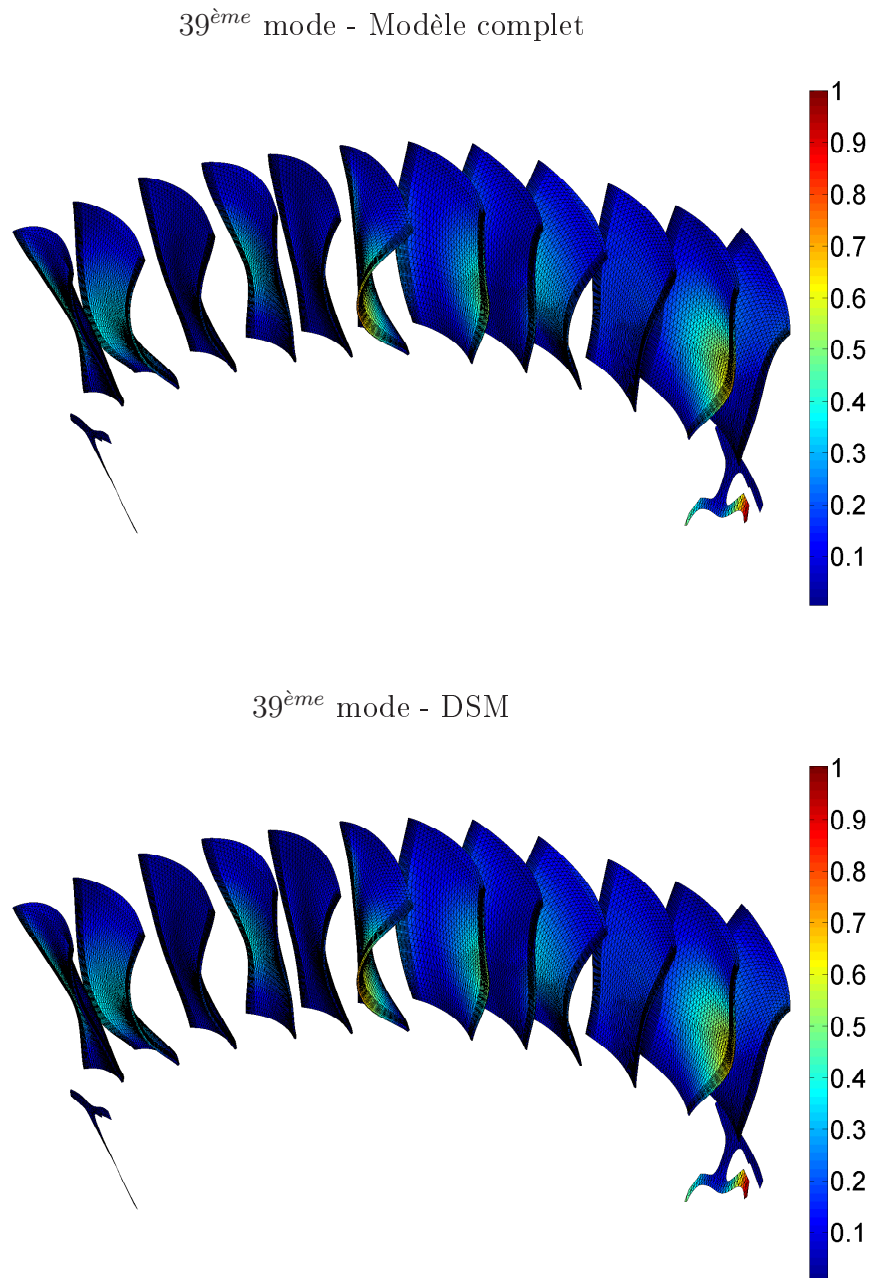


FIGURE IV.19 – Déformées du 39^{ème} mode du motif de désaccordage présentant la plus mauvaise corrélation

méthode de réduction pour l'application considérée. Elle permet d'obtenir les résultats les plus précis, tout en ayant un pouvoir de réduction proche de celui des méthodes de Benfield-Hruda et Craig-Chang, et sa mise en œuvre est extrêmement simple. Elle devrait donc permettre d'effectuer un grand nombre d'analyses modales en peu de temps comme le requiert les méthodes stochastiques. Il faut tout de même noter que la traçabilité du module d'Young de chaque sous-structure est perdue lors de la synthèse modale des matrices des modes statiques. Il est donc nécessaire d'effectuer quelques hypothèses fortes, mais vérifiées, lors de l'intégration de cette méthode au sein de la méthode stochastique.

Chapitre V

Application de la méthodologie stochastique proposée à un modèle de secteur de redresseur industriel

Ce chapitre présente l'application industrielle des méthodologies retenues. La méthode numérique est appliquée puis elle est validée expérimentalement. Une méthodologie de positionnement optimal des jauges de déformation, basée sur une distribution statistique des déplacements maximaux, est ensuite proposée.

Sommaire

1	Présentation de la méthodologie retenue et modalités d'application au secteur de redresseur industriel	126
2	Validation de la méthodologie par la comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux	127
2.1	Présentation des essais de caractérisation modale d'un secteur de redresseur	127
2.2	Corrélation entre les essais expérimentaux et les calculs numériques	129
2.3	Caractérisation de l'enveloppe des réponses fréquentielles obtenues en essais	131
3	Prise en compte des conditions aux limites et d'un chargement aérodynamique simplifiés	136
4	Stratégie de positionnement des jauges de déformation . . .	140
5	Conclusions de l'application de la méthodologie au modèle industriel	142

1 Présentation de la méthodologie retenue et modalités d'application au secteur de redresseur industriel

Les chapitres précédents ont permis de développer une méthodologie alternative à la méthode de Monte Carlo qui permet d'obtenir une caractérisation statistique du comportement dynamique d'un secteur de redresseur en des temps de calcul réduits. La première étape de cette méthodologie est d'introduire une variable aléatoire uniforme pilotant le module d'Young de chaque aube et chaque virole. Ces variables sont ensuite transformées par une expansion de Karhunen-Loève puis leur nombre est réduit afin de ne conserver que les variables aléatoires présentant un maximum de variabilité. La seconde étape de cette méthodologie consiste à réduire le modèle éléments finis par une double synthèse modale afin d'effectuer un très grand nombre d'analyses modales en des temps de calcul réduits d'une part, et de diminuer le nombre de surfaces stochastiques à approximer d'autre part. La dernière étape consiste à calculer les surfaces de réponse stochastiques par la méthode de Régression Multivariée par Splines Adaptatives (MARS) ou par la méthode de projection sur une base du chaos polynomial dont les coefficients sont identifiés par une méthode de régression.

L'objet de ce chapitre est d'appliquer cette méthodologie au cas d'un secteur de redresseur industriel. Le modèle retenu est présenté dans la section IV.5. Il s'agit d'un secteur constitué de douze aubes reliées par deux viroles (cf. Fig.IV.13).

Les résultats présentés dans ce chapitre permettent de comparer les deux méthodes d'interpolation par rapport à la méthode de Monte Carlo classique. Cette dernière sert de référence car elle correspond au cas où tous les modes propres calculés sont exacts car ils sont obtenus directement à partir d'une analyse modale et non pas à partir d'une surface de réponse approximée. Les variables uniformes ont une variation de 5% autour de la valeur moyenne du module d'Young de chaque aube et de chaque virole. L'expansion de Karhunen-Loève est appliquée sur ces variables en construisant la matrice de covariance à partir d'une loi de décroissance linéaire dont le coefficient est fixé à $\alpha = 0.10$ et en conservant 90% de l'information soit $p = 0.9$ (cf. Secs. II.2.4, II.4.2.2 et Eq. (II.34)). Cette expansion permet de réduire le champ stochastique à une dimension cinq, soit trois variables liées à la variation du module d'Young des aubes et deux à celle du module d'Young des viroles. Le modèle éléments-finis est ensuite réduit par la méthode de double synthèse modale en conservant 200 modes internes de viroles, 100 modes internes d'aubes et 500 modes statiques (cf. Sec IV.5). Cette synthèse permet de passer de près de trois millions de degrés de liberté en base réelle à seulement 2 100 degrés de liberté en base réduite, soit une division du temps de calcul par un facteur de plus de 300 pour une analyse modale isolée. Enfin, les surfaces de réponse stochastiques des modes propres de la structure sont approximées, dans un premier temps, par la méthode de projection sur une base du chaos polynomial dont l'ordre de troncature est fixé au degré $N = 5$,

puis par la méthode MARS en conservant les mêmes évaluations déterministes nécessaires à la convergence de la méthode précédente et en utilisant des fonctions de base cubiques. Finalement, les moments statistiques des réponses fréquentielles sont calculés à partir de 50 000 réalisations de Monte Carlo des modes stochastiques obtenus à partir d'une analyse modale directe réduite par double synthèse modale d'une part (référence) et des deux types de surfaces approximées d'autre part (Chaos polynomial et MARS) :

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{N_m} \frac{\Phi_k^t \Phi_k}{\omega_k^2 + 2j\eta\omega_k\omega - \omega^2} F \quad (\text{V.1})$$

où N_m correspond à l'ordre de troncature modale. La variabilité de \mathbf{U} est pilotée par la variabilité de $\mathbf{\Omega}$ et de $[\Phi]$.

Afin de valider la méthodologie numérique, celle-ci est comparée à des résultats expérimentaux obtenus à partir d'une identification modale d'un secteur de redresseur industriel semblable au modèle numérique mais dont le désaccordage involontaire est inconnu et non caractérisé. Il est évident que le désaccordage involontaire de secteur de redresseur expérimental ne permet pas d'obtenir une bonne corrélation avec le modèle numérique accordé. Une fois la méthodologie validée, une stratégie de positionnement des jauges de déformation est proposée.

2 Validation de la méthodologie par la comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux

Cette première section s'intéresse à la validation expérimentale de la méthodologie numérique développée précédemment. Dans un premier temps, l'essai expérimental est présenté puis une corrélation entre les résultats expérimentaux et ceux du modèle numérique accordé est effectuée.

2.1 Présentation des essais de caractérisation modale d'un secteur de redresseur

Le secteur de redresseur expérimental est suspendu à une potence pas des élastiques afin de s'affranchir de conditions aux limites le plus souvent difficiles à maîtriser. Le secteur peut alors être considéré comme entièrement libre en dehors de ses modes de suspension à très basse fréquence. La virole inférieure est excitée par un pot vibrant piézoélectrique dont le signal est un bruit blanc. Ce type de signal permet d'exciter une large bande de fréquence et donc de diminuer les temps d'acquisition par rapport à une excitation en sinus de fréquence variable. Des cibles réfléchissantes sont collés au niveau de l'extrados des bords d'attaque et de l'intrados des bords de fuite de chaque aube. Afin de capter les premiers modes de flexion et de torsion d'aubes, ces derniers sont positionnés à mi-hauteur (cf. Fig. V.2.1).

Des cibles supplémentaires ont également été positionnés au niveau de l'extrados de l'aube 12 et de l'intrados de l'aube 1, ainsi que sur la virole inférieure.

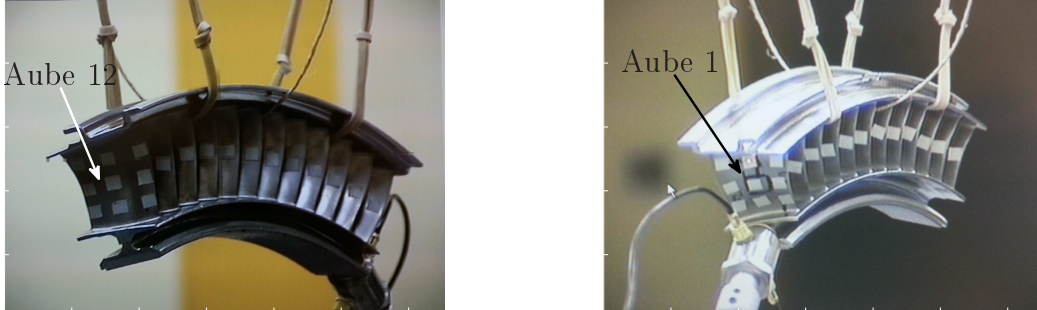


FIGURE V.1 – Montage expérimental vu du bord d'attaque (à gauche) et du bord de fuite (à droite)

Un vibromètre laser à balayage permet de déterminer la vitesse de vibration des points de mesure par effet Doppler. Une identification modale est alors faite à partir de la transformée de Fourier discrète du signal temporel, intégrée par rapport à la pulsation d'excitation pour obtenir les déplacements $u^{(e)}$. Il est alors possible de déterminer les pulsations propres expérimentales $\omega_k^{(e)}$, les amortissements modaux expérimentaux $\eta_k^{(e)}$ et les résidus modaux expérimentaux $r_k^{(e)}$ [DS83] :

$$u^{(e)}(\omega) = \sum_{k=1}^{n_f} \frac{r_k^{(e)}}{\omega_k^{(e)2} + j\eta_k^{(e)}\omega_k^{(e)}\omega - \omega^2} \quad (\text{V.2})$$

où ω représente la pulsation d'excitation et n_f le nombre de modes identifiés. Un exemple d'identification est présenté par la figure V.2 (courbe bleue). Il correspond à la réponse fréquentielle du milieu du bord d'attaque de la deuxième aube (deuxième aube la plus à droite en vue du bord d'attaque). Les fréquences d'excitation sont normalisées par rapport à la septième fréquence propre élastique du modèle numérique accordé et le déplacement est normalisé par rapport au déplacement maximal sur la bande de fréquence d'excitation.

La réponse fréquentielle calculée à partir de l'identification modale présente quelques différences par rapport à celle numérique, notamment à haute fréquence. En effet, certains modes, très proches d'un point de vue fréquentiel, sont difficilement identifiables. Ils le sont notamment d'autant plus que ces modes sont également amortis par l'air ambiant. Un essai dans une chambre à vide aurait probablement pu permettre d'améliorer l'identification modale car les modes sont plus discernables les uns des autres [GBA⁺16]. Les résultats obtenus sont comparés au modèle numérique accordé dans le paragraphe suivant.

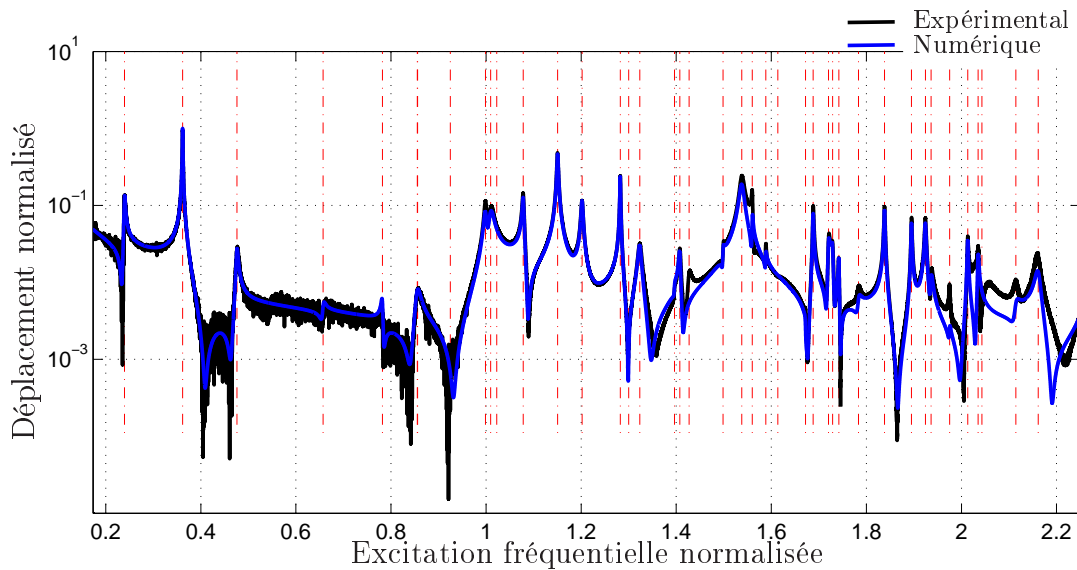


FIGURE V.2 – Réponse fréquentielle numérique (courbe bleue) reconstruite à partir de l'identification modale de la réponse fréquentielle expérimentale (courbe noire)

2.2 Corrélation entre les essais expérimentaux et les calculs numériques

Ce paragraphe présente quelques résultats de corrélation entre les essais expérimentaux et les calculs numériques. Dans un premier temps, les fréquences propres des deux modèles sont comparées.

La figure V.3 compare les fréquences propres du modèle expérimental (courbe rouge) et du modèle numérique accordé (courbe bleue). Il apparaît que les tendances d'évolution sont très similaires malgré l'écart observé. D'une part, cet écart est dû à l'impact important du désaccordage sur ce type de structure (cf. Sec. I.3.2). D'autre part, la présence de certains modes expérimentaux ne semble pas être présents dans le modèle numérique, tels que les modes 7 et 8 (cf. Fig. V.4). L'absence de ces modes a tendance à décaler la courbe vers la gauche

La figure V.4 présente le critère d'assurance modal (MAC) entre les résidus numériques et expérimentaux. Les résidus numériques sont obtenus en reproduisant la même excitation expérimentale et en projetant les résultats des points de mesure sur la direction du laser. Une pseudo-diagonale semble émerger de cette figure mais la corrélation excède rarement 0.8. Ceci peut être expliqué par la forte influence du désaccordage sur les modes de mouvement d'aubes. En effet, les premiers modes qui correspondent à des modes d'ensemble (1E) sont peu voire pas du tout influencés par le désaccordage. Ces modes seront donc utilisés pour recalibrer notre modèle numérique. La corrélation entre le second mode numérique et expérimental atteint près de 0.9 et la déformée correspondante est quasiment un déplacement uniforme des deux viroles (cf. Fig. V.3). Ainsi, le module d'Young moyen des aubes peut être

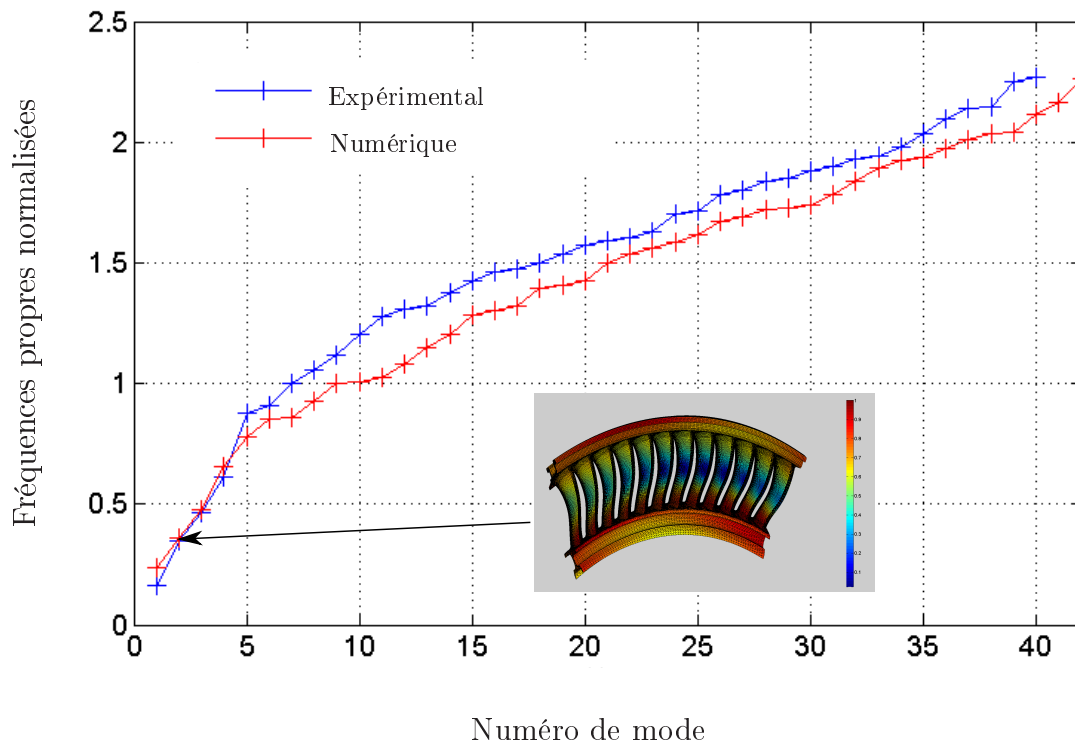


FIGURE V.3 – Évolution des modes numériques et expérimentaux en fonction du numéro de mode

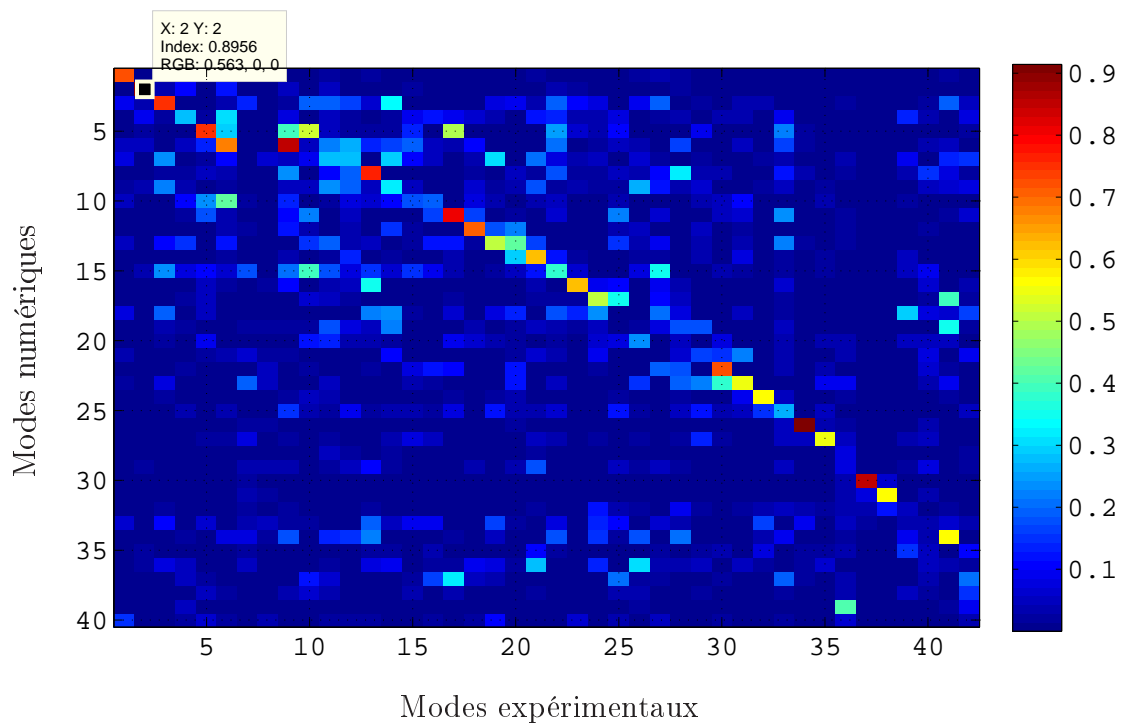


FIGURE V.4 – Critères d'assurance modale (MAC) entre les déformées numérique et expérimentale

recalé afin que les deuxièmes fréquences propres élastiques, expérimentale et numérique, soient égales. Le prochain chapitre s'intéresse à la capacité de la méthodologie développée à générer une enveloppe vibratoire qui engloberait la réponse vibratoire expérimentale.

2.3 Caractérisation de l'enveloppe des réponses fréquentielles obtenues en essais

Ce paragraphe présente les résultats obtenus par les différentes méthodes d'interpolation décrites section V.1 dans le cadre d'une reconstitution numérique de l'essai expérimental effectué précédemment. Le calcul des moments statistiques des réponses fréquentielles par les trois méthodes (Monte Carlo, Chaos Polynomial et MARS) est obtenu en appliquant une excitation identique à celle produite en essais. L'amortissement modal minimal expérimental est considéré comme amortissement modal de l'ensemble des modes numériques. Les résultats présentés correspondent à l'amplitude du déplacement du degré de liberté correspondant au patch situé au niveau du milieu du bord d'attaque de l'aube 7, côté extradados, projeté selon la direction du laser. Ceci permettra de comparer les enveloppes obtenues par les méthodes numériques avec la réponse fréquentielle expérimentale.

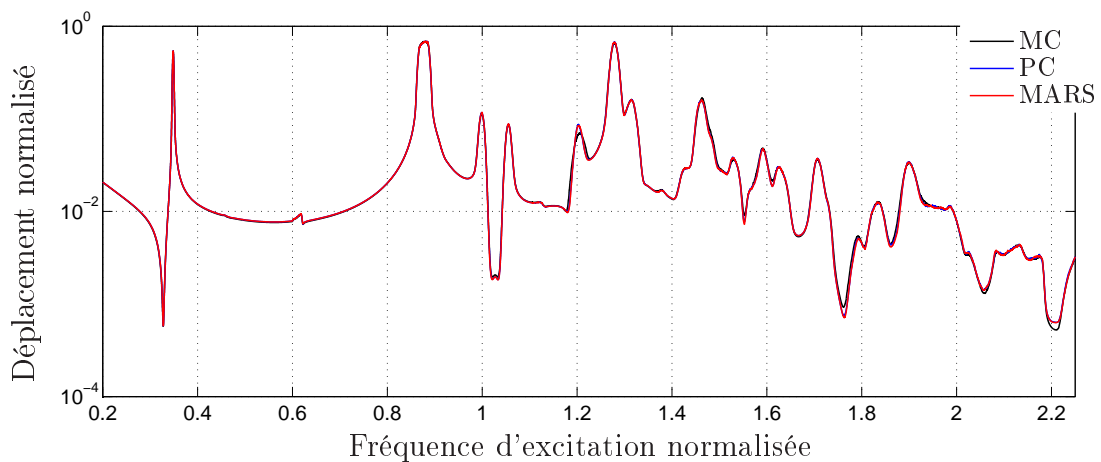


FIGURE V.5 – Réponse fréquentielle moyenne, projetée selon la direction du laser, du bord d'attaque de l'aube 7 du secteur de redresseur industriel soumis à une excitation équivalente à celle expérimentale

La figure V.5 présente la réponse fréquentielle moyenne normalisée. Les fréquences d'excitation sont normalisées par rapport à la septième fréquence propre élastique du modèle numérique accordé et les déplacements par rapport au même déplacement maximal de la figure V.2. Ces références de normalisation sont conservées pour toutes les figures suivantes. La courbe noire a été obtenue par Monte Carlo (MC), la bleue par chaos polynomial (PC) et la rouge par la méthode MARS (MARS). Ce code couleur est respecté dans la suite de ce paragraphe. Les résultats sont d'excellente

qualité comparée à la courbe de référence. En effet, les écarts sont très faibles ($< 1\%$) voire inexistantes pour la majorité des fréquences d'excitation.

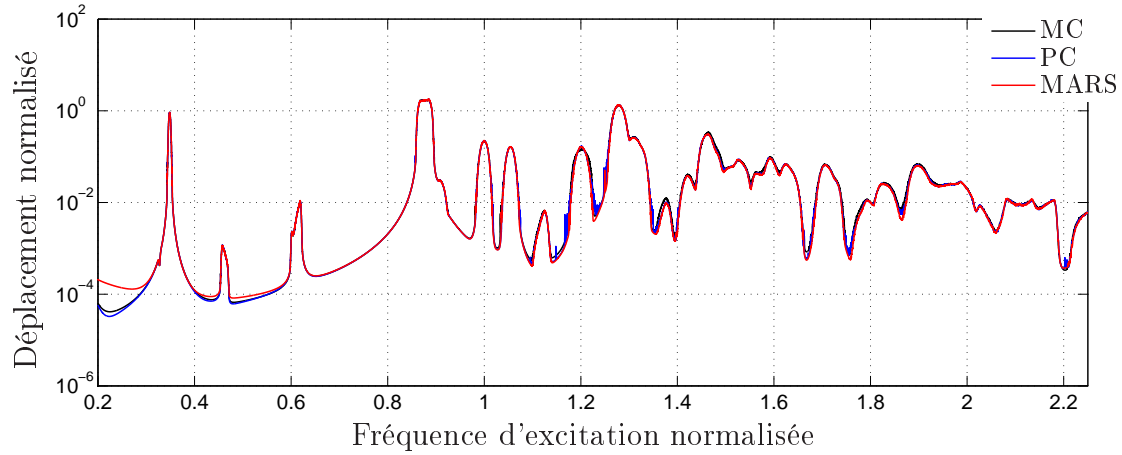


FIGURE V.6 – Écart-type de la réponse fréquentielle, projetée selon la direction du laser, du bord d'attaque de l'aube 7 du secteur de redresseur industriel soumis à une excitation équivalente à celle expérimentale

La figure V.6 présente l'écart-type de la réponse fréquentielle normalisée. Les résultats sont globalement de bonne qualité, voire d'excellente qualité pour les fréquences d'excitation dont l'écart-type est élevé. La méthode d'interpolation par chaos polynomial est plus oscillante que la méthode MARS à faible écart-type. Néanmoins, ces zones présentent un intérêt moindre puisqu'elles présentent une variabilité plus faible.

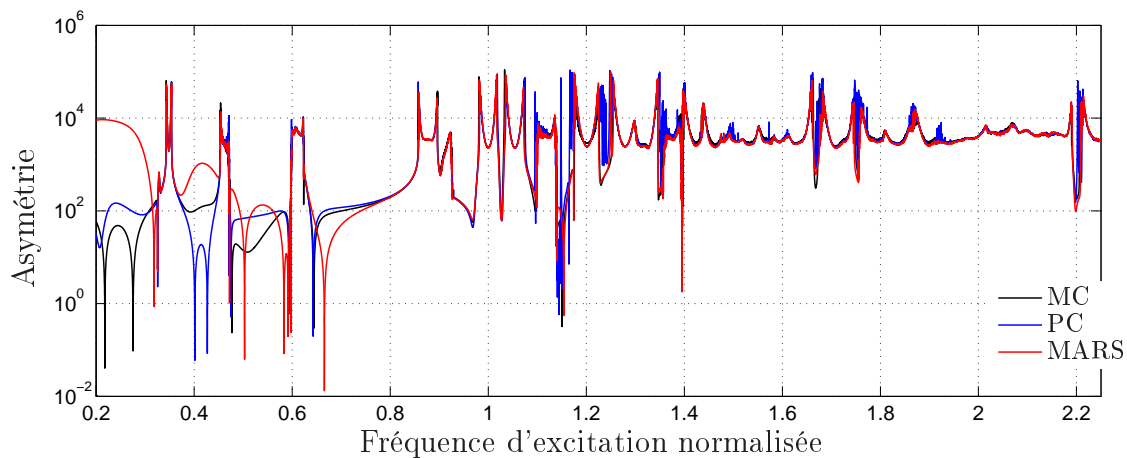


FIGURE V.7 – Asymétrie de la réponse fréquentielle, projetée selon la direction du laser, du bord d'attaque de l'aube 7 du secteur de redresseur industriel soumis à une excitation équivalente à celle expérimentale

La figure V.7 présente l'asymétrie de la réponse fréquentielle normalisée. Les valeurs positives de l'asymétrie indiquent une distribution décalée plus dense autour des valeurs de déplacements inférieurs à la médiane et une queue de distribution étalée vers les hautes valeurs de déplacements. Cette observation implique une distribution dense autour d'une valeur moyenne faible de déplacements mais pouvant présenter, dans de rares cas, des valeurs bien supérieures à la moyenne correspondant aux résonances. L'asymétrie est d'autant plus importante que l'écart est important en raison de l'expression cubique de l'asymétrie. De plus, les résultats obtenus par la méthode du chaos polynomial sont bruités contrairement à ceux obtenus par la méthode MARS. Ceci est probablement dû à la difficulté d'évaluer les valeurs extrémales lors de l'interpolation des surfaces de réponse. En effet, une surévaluation locale de la surface de réponse peut ne pas être perçue lors de l'échantillonnage de Monte Carlo et donc être retranscrite ou non lors de l'évaluation des moments statistiques de la réponse fréquentielle. La méthode MARS permet donc d'obtenir une meilleure approximation de l'asymétrie que la méthode du chaos polynomial, notamment à haute fréquence.

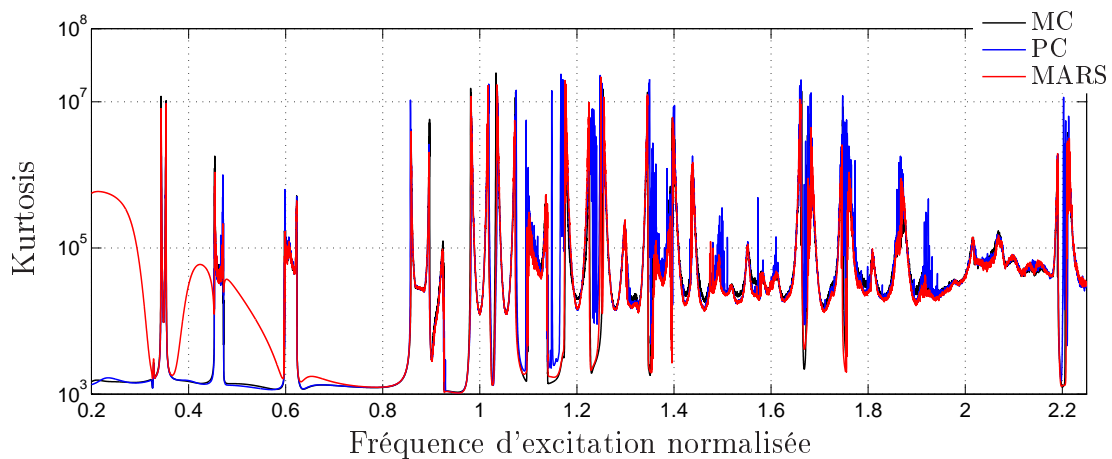


FIGURE V.8 – Kurtosis de la réponse fréquentielle, projetée selon la direction du laser, du bord d'attaque de l'aube 7 du secteur de redresseur industriel soumis à une excitation équivalente à celle expérimentale

La figure V.8 présente le kurtosis de la réponse fréquentielle normalisée. La méthode MARS permet encore d'obtenir une meilleure évaluation du kurtosis que la méthode du chaos polynomial à haute fréquence. En effet, la courbe bleue a un niveau de bruit bien plus élevé que la rouge à haute fréquence, qui peut être expliqué par les mêmes raisons produisant des résultats d'asymétrie bruités. Les très hautes valeurs de kurtosis mettent en avant le caractère leptokurtique de la distribution des déplacements, ce qui signifie une queue de distribution épaisse impliquant des valeurs anormales fréquentes, il s'agit ici des résonances.

La figure V.9 présente l'enveloppe théorique de la réponse fréquentielle. Les traits

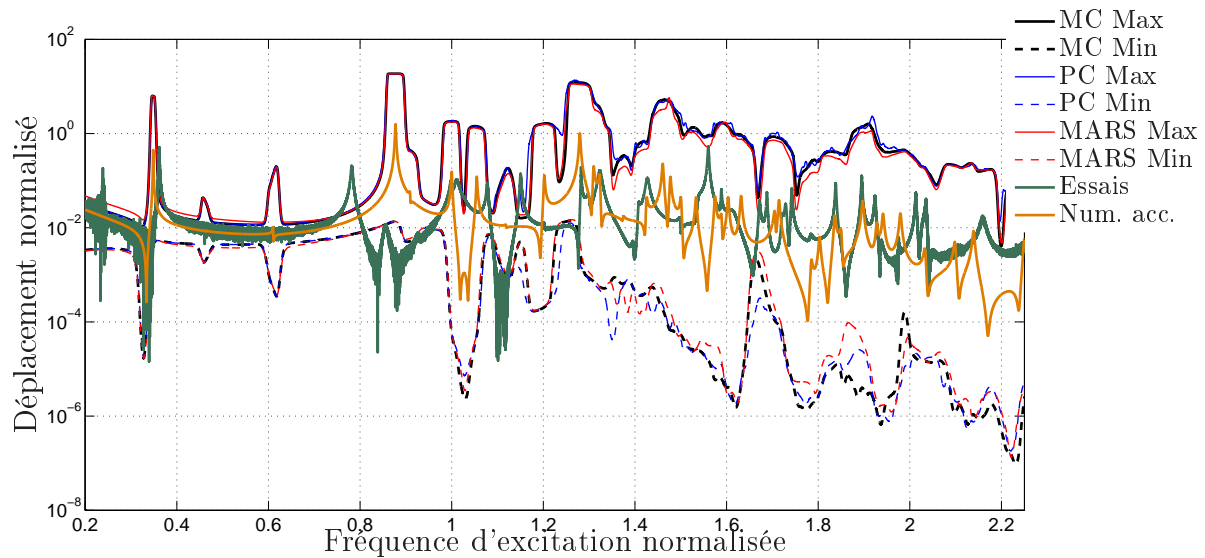


FIGURE V.9 – Enveloppe de la réponse fréquentielle, projetée selon la direction du laser, du bord d’attaque de l’aube 7 du secteur de redresseur industriel soumis à une excitation équivalente à celle expérimentale

pleins noirs, bleus et rouges représentent l’enveloppe maximale tandis que les traits discontinus représentent l’enveloppe minimale. La courbe orange correspond à la réponse fréquentielle numérique du cas accordé tandis que la verte représente la réponse fréquentielle expérimentale. Afin de prendre en compte le bruit associé à l’acquisition des données, présent notamment à basse fréquence, une variable aléatoire qui peut être obtenue expérimentalement a été ajoutée à l’expression numérique de la réponse forcée. Ainsi, la réponse fréquentielle expérimentale est globalement incluse dans l’enveloppe. La modélisation ne permet pas d’envelopper tous les modes, tels que ceux situés autour de la fréquence normalisée 0.75 et 1.15, et présente quelques difficultés à englober les antirésonances à basse fréquence. Il est important de préciser que les écarts entre le modèle numérique et expérimental sont indépendants de la méthodologie d’interpolation des surfaces de réponses des modes propres stochastiques, puisque la méthode de Monte Carlo ne permet pas d’envelopper l’intégralité de la réponse fréquentielle expérimentale.

La modélisation des incertitudes peut alors être remise en cause puisque le désaccordage n’est pas seulement dû aux incertitudes liées au matériau mais également et principalement dû aux tolérances géométriques de fabrication (épaisseur variable, angle d’attaque,...). La présence de l’abradable au niveau de la virole inférieure peut notamment expliquer les différences observées à basse fréquence.

L’introduction de la variabilité du module d’Young n’est donc pas suffisante pour obtenir une modélisation complète de l’ensemble des incertitudes, à basse fréquence. Néanmoins, elle semble suffisante à plus haute fréquence et peut donc être validée, d’autant que cette zone constitue la zone d’intérêt puisqu’elle correspond aux modes de flexion et de torsion d’aubes. De plus, cette modélisation permet d’utiliser la méthode de double synthèse modale en conservant la traçabilité du module d’Young

		Monte Carlo	Chaos polynomial	MARS
Analyses modales	nb.	50 000	2 252	2 252
	tps.	6 jours	7h	7h
Interpolation	nb.	/	210 000	210 000
	tps.	/	12h	4.2 jours
Total	tps.	6 jours	19h	4.5 jours

TABLE V.1 – Temps de calcul nécessaire pour générer les surfaces de réponse des modes stochastiques selon la méthode utilisée

de chaque sous-structure.

La figure V.9 permet également de mettre en avant l'intérêt des méthodes d'interpolation dont les tendances sont très similaires à celle de Monte Carlo. Les deux méthodes donnent des résultats équivalents et permettent toutes deux d'encadrer la réponse fréquentielle expérimentale au même titre que la méthode de Monte Carlo avec des temps de calcul réduits (cf. Tab. V.1).

Le tableau V.1 récapitule les temps de calcul nécessaires à obtenir les 50 000 modes propres utilisés lors du calcul statistique des réponses fréquentielles. Les méthodes d'interpolation permettent de diminuer les temps de calcul par rapport à la méthode de Monte Carlo d'un facteur plus ou moins important. La méthode du chaos polynomial est bien plus rapide que les deux autres avec un facteur de réduction de l'ordre de sept par rapport à la méthode de Monte Carlo (pour un processeur cadencé à 3.20GHz). La méthode MARS semble moins intéressante en termes de temps de calcul mais il est important de noter qu'une fois que les surfaces ont été calculées, l'obtention des modes propres ne dure quelques minutes voire quelques secondes. Le facteur de gain de temps est donc d'autant plus grand que le nombre d'évaluations de Monte Carlo est important.

Cette section a permis de valider expérimentalement la modélisation des incertitudes retenues qui consiste à faire varier uniquement et de manière indépendante le module d'Young de chaque aube et de chaque virole. En effet, cette modélisation permet d'envelopper numériquement la majeure partie de la réponse fréquentielle expérimentale, notamment au niveau de la zone d'intérêt constituée des premiers modes de flexion et de torsion d'aubes. De plus, elle a permis de mettre en avant l'intérêt des méthodes d'interpolation de surface de réponse aussi bien en termes de précision sur les grandeurs statistiques, notamment la méthode MARS qui est assez précise sur les quatre premiers moments statistiques, qu'en termes de puissance de calcul, notamment la méthode de régression qui présente des temps de calcul bien inférieurs aux deux autres méthodes. La prochaine section s'intéresse à la problématique de positionnement optimal des jauges de déformation lorsque le secteur est soumis à un effort aérodynamique simplifié.

3 Prise en compte des conditions aux limites et d'un chargement aérodynamique simplifiés

Ce paragraphe reprend les calculs présentés dans la section V.2.3 en prenant en compte des conditions limites et un chargement aérodynamique simplifiés. Afin de modéliser des conditions aux limites équivalentes à celles appliquées lors du montage du secteur de redresseur dans le moteur, les deux lignes de contact B et C, de la figure V.10, de la virole supérieure subissent un blocage axial et radial. Le mouvement azimutal est supprimé par le blocage des degrés de liberté normaux à la surface A de la figure V.10. Le carter est supposé indéformable et aucune condition de non-interpénétration n'est prise en compte dans ce modèle.

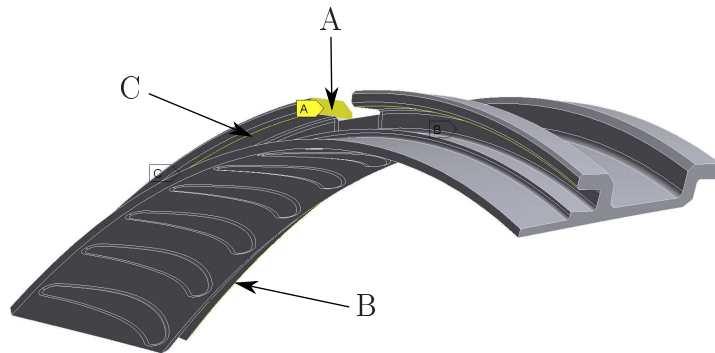


FIGURE V.10 – Représentation des conditions aux limites appliquées à la virole supérieure du secteur de redresseur

L'excitation aérodynamique est modélisée par une force unitaire dont la direction est normale du plan moyen de l'extrados et de l'intrados de chaque aube et uniformément répartie selon ce même plan. Cette force est orientée de l'intrados vers l'extrados. Aucun déphasage n'est admis d'une aube à l'autre afin de modéliser une excitation moteur du type zéro diamètre nodal. Ainsi, toutes les aubes sont excitées de la même manière que ce soit en termes d'amplitude ou en termes de phase. La plage d'excitation correspond aux zones des modes de flexion et de torsion d'aubes. La réponse fréquentielle correspond à l'amplitude du déplacement normal en un point.

La figure V.11 présente la réponse fréquentielle moyenne normalisée. Les fréquences d'excitation sont normalisées par rapport à la septième fréquence propre élastique du modèle numérique accordé et les déplacements par rapport au même déplacement maximal de la figure V.2. Ces références de normalisation sont conservées pour toutes les figures suivantes. La courbe noire a été obtenue par Monte Carlo (MC), la bleue par chaos polynomial (PC) et la rouge par la méthode MARS (MARS). La courbe verte (MC+KL) a été obtenue par la méthode de Monte Carlo

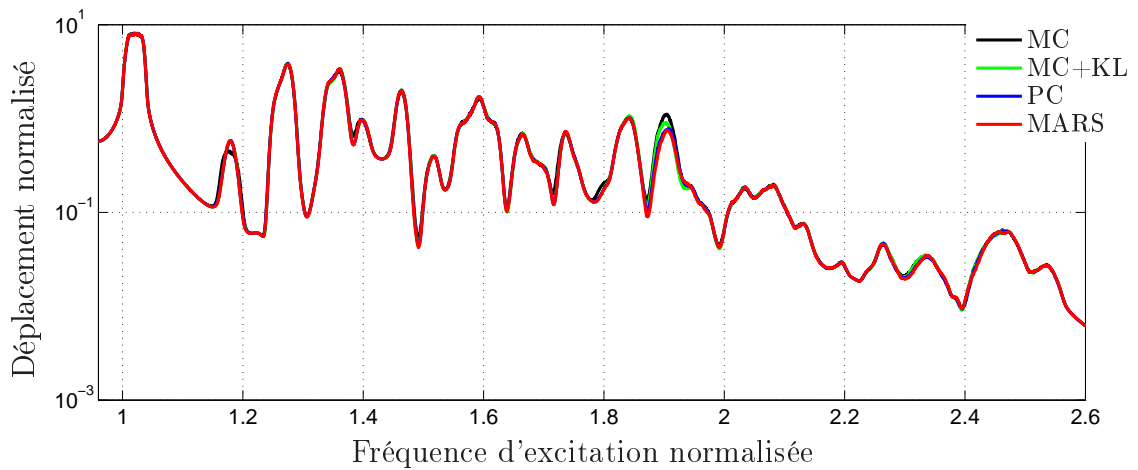


FIGURE V.11 – Réponse fréquentielle moyenne normale du bord d'attaque de l'aube 7, du secteur de redresseur industriel dans des conditions proches à celles du moteur

en utilisant les variables transformées par l'expansion de Karhunen-Loève afin de différencier l'écart introduit par l'expansion et celui introduit par l'interpolation. Ce code couleur est respecté dans la suite de ce paragraphe. Les résultats sont d'excellente qualité comparée à la courbe de référence. En effet, les écarts sont très faibles ($< 1\%$) voire inexistantes pour la majorité des fréquences d'excitation. Le principal écart se situe autour de la fréquence d'excitation normalisée 1.9 et dû en partie à l'expansion de Karhunen-Loève puisque la courbe noire et verte ne se superposent pas parfaitement.

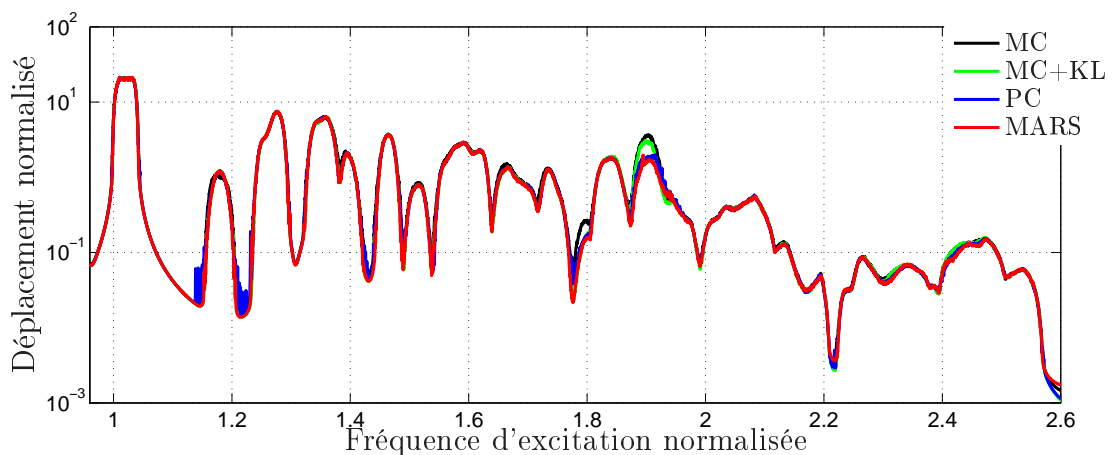


FIGURE V.12 – Écart-type de la réponse fréquentielle normale du bord d'attaque de l'aube 7, du secteur de redresseur industriel dans des conditions proches à celles du moteur

La figure V.12 présente l'écart-type de la réponse fréquentielle normalisée. Les résultats sont globalement d'excellente qualité. L'écart observé au niveau de la fré-

quence d'excitation normalisée 1.9 est uniquement dû à l'interpolation tandis que celui observé au niveau de 1.8 est uniquement dû à l'expansion. La méthode d'interpolation par le chaos polynomial est plus oscillante que la méthode MARS à faible écart-type comme l'a déjà montré la figure V.6. Néanmoins, ces zones présentent un intérêt moindre puisqu'elles présentent une variabilité plus faible.

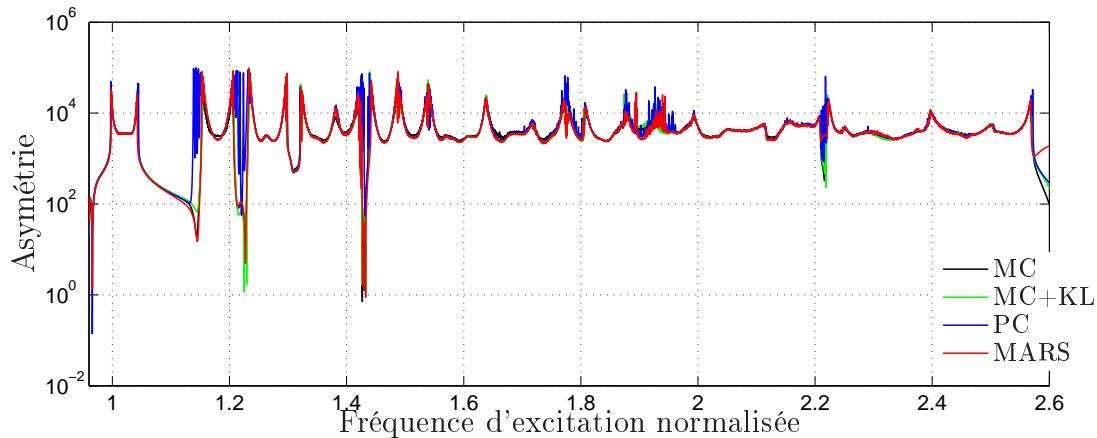


FIGURE V.13 – Asymétrie de la réponse fréquentielle normale du bord d'attaque de l'aube 7, du secteur de redresseur industriel dans des conditions proches à celles du moteur

La figure V.13 présente l'asymétrie de la réponse fréquentielle normalisée. Les valeurs de l'asymétrie restent positives et les tendances sont similaires à celles observées sur la figure V.7. De plus, l'expansion de Karhunen-Loève semble avoir un impact moindre sur ce moment statistique par rapport à celui produit par l'interpolation.

La figure V.14 présente le kurtosis de la réponse fréquentielle normalisée. Bien que les résultats soient bruités, la méthode MARS permet encore d'obtenir une meilleure évaluation du kurtosis que la méthode du chaos polynomial. En effet, la courbe bleue a un niveau de bruit bien plus élevé que la rouge. L'impact de l'introduction de l'expansion de Karhunen-Loève est également moindre que celui produit par l'interpolation des surfaces de réponse.

La figure V.15 présente l'enveloppe théorique de la réponse fréquentielle. Les traits pleins noirs, verts, bleus et rouges représentent l'enveloppe maximale tandis que les traits discontinus représentent l'enveloppe minimale. La courbe noire marquée correspond à la réponse fréquentielle numérique du cas accordé tandis que toutes les courbes fines colorées correspondent à la réponse fréquentielle numérique pour cent cas de désaccordage aléatoire, calculée par un code éléments-finis commercial. Les méthodologies développées permettent d'encadrer de manière satisfaisante les réponses fréquentielles du secteur de redresseur désaccordé aléatoirement. Les ré-

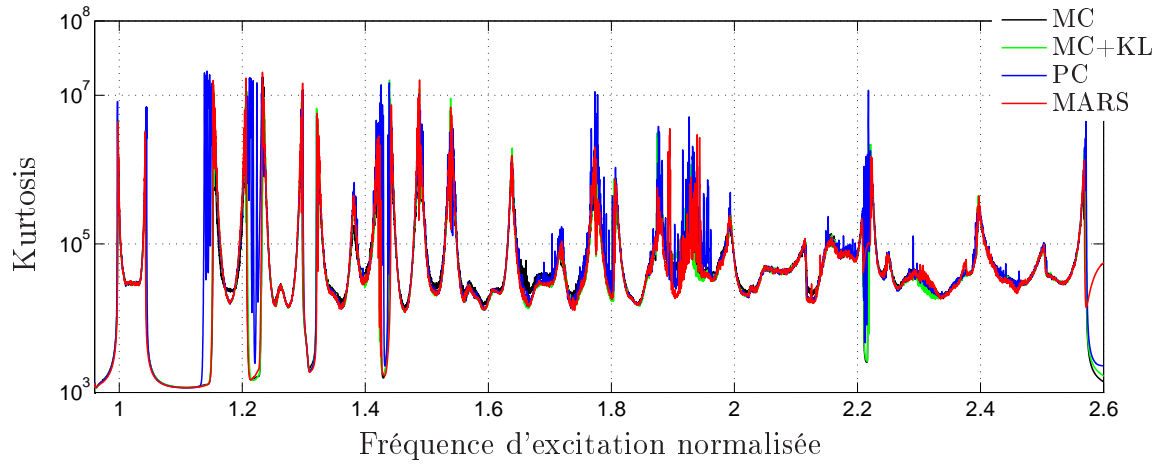


FIGURE V.14 – Kurtosis de la réponse fréquentielle normale du bord d'attaque de l'aube 7, du secteur de redresseur industriel dans des conditions proches à celles du moteur

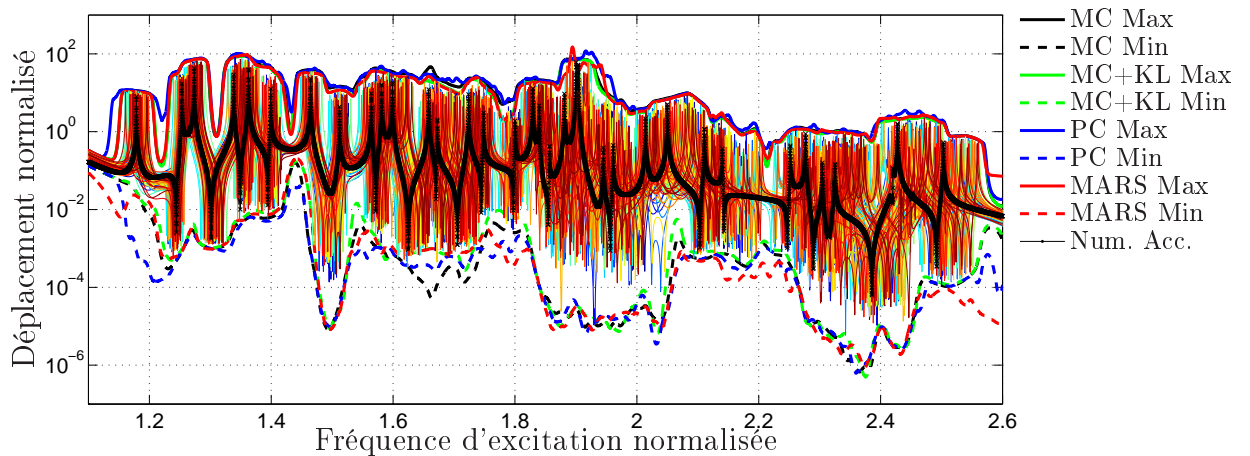


FIGURE V.15 – Enveloppe de la réponse fréquentielle normale du bord d'attaque de l'aube 7, du secteur de redresseur industriel dans des conditions proches à celles du moteur

sultats maximaux de la méthode MARS sont très similaires à ceux de la méthode de Monte Carlo couplée à l'expansion de Karhunen-Loève. La méthode MARS est donc plus prédictive que la méthode du chaos polynomial puisque l'écart à la référence (courbe noire) est majoritairement dû à l'introduction de l'expansion de Karhunen-Loève et non à l'interpolation des surfaces. Ceci peut également expliquer la légère sous-évaluation, observée sur la figure V.9, de l'enveloppe maximale calculée par la méthode MARS. En contrepartie, la méthode MARS n'est pas conservatrice contrairement à la méthode du chaos polynomial. De plus, la méthode MARS nécessite des temps de calcul bien supérieurs à ceux de la méthode du chaos polynomial avec une interpolation environ huit fois plus longue (cf. Tab.V.1).

Cette section a permis de mettre en avant l'intérêt des méthodes d'interpolation de surface de réponse lorsque le secteur de redresseur en conditions réelles, c'est-à-dire soumis à des conditions limites proches de celles observées à l'intérieur du compresseur et à un chargement aérodynamique simplifié. Le prochain paragraphe propose un positionnement des jauges de déformation en fonction de la distribution des déplacements maximaux.

4 Stratégie de positionnement des jauges de déformation

Ce paragraphe propose un positionnement optimal des jauges à partir d'une distribution de l'amplitude des déplacements maximaux normaux situés au niveau du milieu du bord d'attaque et du bord de fuite de toutes les aubes, en supposant qu'un déplacement maximal en milieu d'aube implique une contrainte maximale en tête et en pied d'aube pour les modes de flexion d'aubes, notamment au niveau du bord de fuite ou d'attaque pour les modes de torsion d'aubes. Pour chaque situation de désaccordage, le déplacement maximal est identifié sur la plage d'excitation correspondant à la zone des premiers modes de flexion et de torsion d'aubes, soit la plage de fréquences normalisées [1.3; 2.6]. Des estimateurs de la médiane ($\hat{Q}_{u_{max}}^{50\%}$), du premier ($\hat{Q}_{u_{max}}^{25\%}$) et du troisième ($\hat{Q}_{u_{max}}^{75\%}$) quartile, du quantile à 0.1% ($\hat{Q}_{u_{max}}^{0.1\%}$) et à 99.9% ($\hat{Q}_{u_{max}}^{99.9\%}$) sont alors calculés à partir de la distribution des 50 000 déplacements maximaux.

La figure V.16 présente la distribution des déplacements maximaux du milieu du bord d'attaque de toutes les aubes. Les diagrammes noirs correspondent à la distribution obtenue par la méthode de Monte Carlo (MC), les bleus à celle obtenue par la méthode du chaos polynomial et les rouges à celle obtenue par la méthode MARS. Les croix représentent la médiane, les traits épais à l'espacement inter-quartile et les traits fins à l'espacement inter-quantiles ($\hat{Q}_{u_{max}}^{0.1\%} - \hat{Q}_{u_{max}}^{99.9\%}$). Il apparaît que le choix le plus judicieux serait un placement des jauges de déformations au niveau de la tête ou du pied des aubes 1 et/ou 2. En effet, elles présentent le déplacement maximum mais surtout, plus de 50% des déplacements maximaux observés sur ces deux aubes sont supérieurs à 75% des déplacements maximaux observés sur l'aube 3, et plus

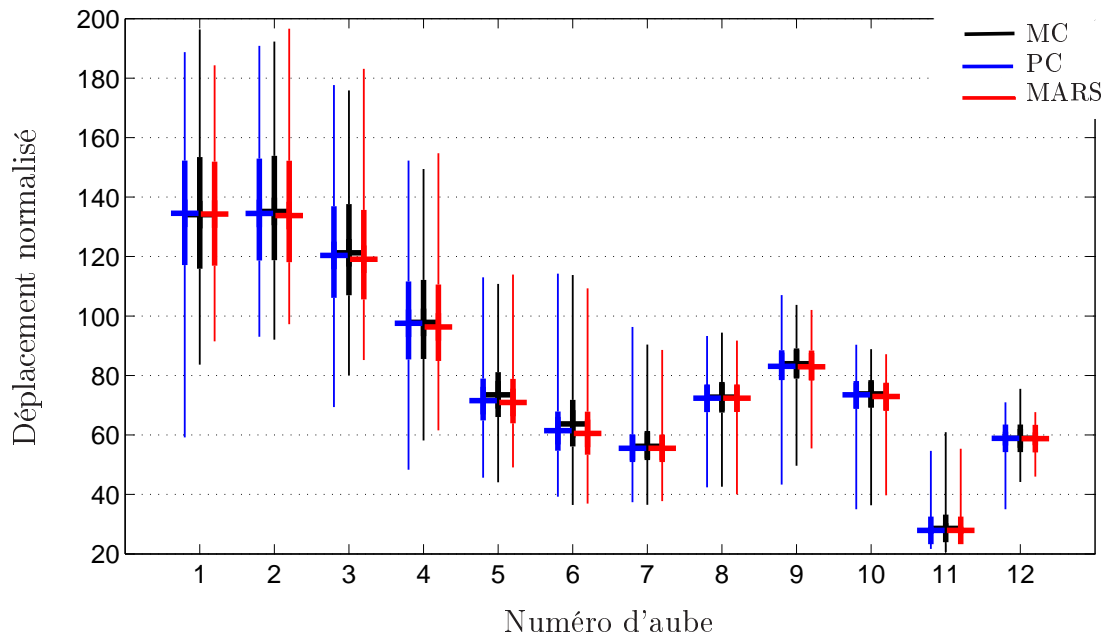


FIGURE V.16 – Distribution des déplacements maximaux du bord d'attaque de chaque aube

de 75% des déplacements maximaux observés sur ces deux aubes sont supérieurs à 75% des déplacements maximaux observés sur l'aube 4 et 100% des déplacements maximaux observés sur les aubes 5 à 12.

De plus, les résultats sont très similaires quelle que soit la méthode utilisée, notamment au niveau des médianes et des quartiles. La méthode du chaos polynomial et de MARS sont donc fiables en ce qui concerne la prédiction des quantiles.

La figure V.17 présente la distribution des déplacements maximaux du milieu du bord de fuite de toutes les aubes. Le code couleur et la forme des traits sont identiques à la figure précédente. En se positionnant au niveau des bords de fuite, le choix le plus judicieux se porte sur la tête ou le pied de l'aube 6. En comparant uniquement les résultats de Monte Carlo, ce choix est largement justifié puisque 75% des déplacements maximaux observés sur l'aube 6 sont supérieurs à près de 75% des déplacements maximaux observés sur toutes les autres aubes, et le déplacement maximal global est également observé sur cette aube. En comparant les résultats obtenus par la méthode du chaos polynomial et de MARS, ce choix est également justifié puisque il est toujours vrai que 75% des déplacements maximaux observés sur l'aube 6 sont supérieurs à près de 75% des déplacements maximaux observés sur toutes les autres aubes, même si le déplacement maximal global est observé sur l'aube 3. Bien que les méthodes d'interpolation présentent des écarts plus ou moins négligeables par rapport à la méthode de Monte Carlo, le choix du positionnement des jauges reste robuste quelle que soit la méthode.

Les méthodologies développées ont permis de définir un positionnement optimal des jauges pour une excitation aérodynamique déterministe non déphasée donnée,

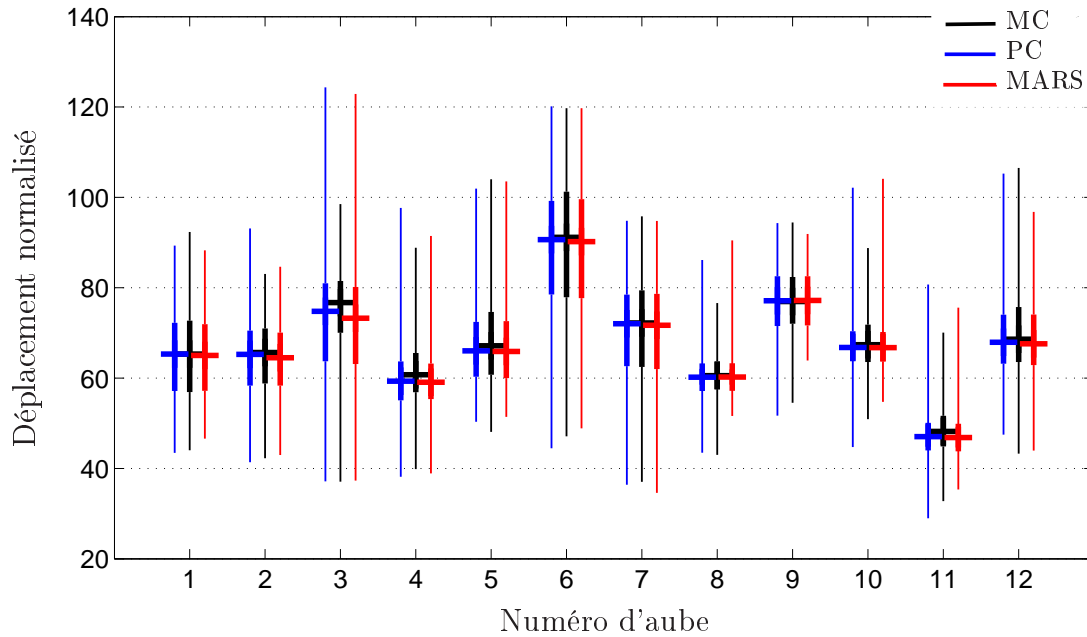


FIGURE V.17 – Distribution des déplacements maximaux du bord de fuite de chaque aube

en accord avec celui défini par la méthode de Monte Carlo.

5 Conclusions de l'application de la méthodologie au modèle industriel

Ce chapitre a présenté l'application de la méthodologie stochastique proposée par l'ensemble des chapitres précédents à un modèle industriel de secteur de redresseur.

Une première partie a permis de valider expérimentalement la méthodologie numérique proposée. Dans un premier temps, une caractérisation modale a été faite sur un secteur de redresseur industriel afin de mettre en avant les écarts entre le modèle expérimental et le modèle numérique accordé, aussi bien en termes de fréquences propres que de déformées propres. Puis, une seconde approche visant à envelopper la réponse fréquentielle expérimentale a été proposée afin de valider l'approche numérique. Ainsi, la modélisation des incertitudes par la seule variabilité du module d'Young des aubes et des viroles permet de générer une enveloppe vibratoire qui englobe de manière satisfaisante la réponse fréquentielle expérimentale au niveau de la zone d'excitation correspondante aux modes de flexion et de torsion d'aubes, qui constitue la zone d'intérêt. À plus basse fréquence, quelques écarts sont observés entre l'enveloppe numérique et la réponse expérimentale, notamment au niveau des antirésonances, résultant potentiellement d'un manque de variabilité numérique dû à la non prise en compte des variabilités locales de la géométrie. Cette analyse a également permis de mettre en avant la prédictibilité des deux méthodes stochastiques proposées, la méthode du chaos polynomial et la méthode MARS, concernant

les moments statistiques et les enveloppes puisque les résultats sont très similaires à ceux obtenus par la méthode de référence (Monte Carlo).

Une seconde partie a permis de définir une stratégie de positionnement des jauges de déformation sur le secteur de redresseur. Cette stratégie est basée sur une distribution statistique des déplacements maximaux en milieu d'aube, sur une plage d'excitation donnée, à partir de plusieurs situations de désaccordage. Cette distribution permet de définir des quantiles d'intérêt pour chacune des aubes et de prendre une décision d'instrumentation adéquate. En effet, il est possible d'évaluer la probabilité que le maximum de déformation se situe sur une aube et donc d'évaluer la probabilité de capter ce maximum pour une situation de désaccordage inconnue. Ainsi, cette stratégie a permis de proposer un positionnement d'une jauge de déformation, au niveau du bord de fuite, en pied ou en tête de la sixième aube du secteur de redresseur industriel. De plus, il est important de noter que ce choix ne dépend pas de la méthodologie adoptée, ce qui démontre leur robustesse.

Conclusions et perspectives

Cette étude, réalisée en collaboration avec la société Safran Aircart Engines, s'intéresse à la prise en compte du désaccordage dans les redresseurs sectorisés dont l'impact sur la dynamique est important. Elle a donc pour objectif l'implémentation d'un outil permettant de prédire de façon robuste le comportement vibratoire d'un redresseur sectorisé en présence de désaccordage, afin de déterminer une stratégie fiable de positionnement des jauges de déformation dans le cadre d'essais moteur.

Conclusions

Dans un premier temps, un modèle phénoménologique représentant la structure complexe d'un secteur de redresseur a été implémenté afin de s'affranchir des temps de calcul liés aux modèles industriels dont le nombre de degrés de liberté est important. Pour modéliser l'aléa lié aux tolérances géométriques de fabrication et aux défauts matériaux, une approche probabiliste paramétrique a été retenue en introduisant des variables aléatoires pour piloter le module d'Young de chaque aube et chaque virole. La variation du module d'Young ne permet pas de représenter une variabilité locale dans une aube ou une virole. En effet, cette variabilité entraîne la modification des fréquences propres des aubes et des viroles sans en modifier la déformée propre. Il est important de noter que cette remarque est valable dans le cas où seule l'aube ou la virole est considérée puisque les déformées propres globales du secteur sont modifiées lorsque les propriétés d'une aube changent. Afin de conserver une représentativité physique des modules d'Young (strictement positifs), le support a été réduit à un support compact et la loi associée a été construite à partir du principe de maximum d'entropie. Les variables aléatoires introduites sont donc uniformes et centrées autour de la valeur nominale des modules d'Young.

Le nombre important de variables aléatoires introduites a ensuite dû être réduit afin de rendre la modélisation des incertitudes applicable à une méthode de calcul plus performante que celle de Monte Carlo, dont la convergence ne dépend pas du nombre de variables aléatoires, en termes de temps de calcul. Le champ stochastique initial est donc réduit par une expansion de Karhunen-Loève, dont la matrice de covariance est construite en se basant sur des hypothèses liées à l'architecture de la structure. L'application sur le modèle simplifié a montré que cette méthode permet de réduire le nombre de variables aléatoires tout en conservant la même variabilité.

Lorsque la modélisation des incertitudes est définie, le calcul des modes propres stochastiques a fait l'objet d'une étude approfondie, l'objectif étant d'obtenir une forme analytique de la fonction de répartition inverse en fonction des variables descriptives. Deux méthodes ont alors été proposées.

La première est basée sur la projection de la fonction à approximer sur une base du chaos polynomial et l'identification des coefficients associés par la minimisation de l'erreur quadratique entre la solution réelle et approximée. Cette méthode permet d'obtenir de bons résultats sur les premiers moments statistiques tout en réduisant fortement les temps de calcul. En revanche l'estimation des valeurs extrémales présente des écarts parfois importants avec la valeur de référence en raison de la difficulté à approximer les discontinuités que peut présenter la surface de réponse.

La seconde méthode est basée sur la projection de la fonction à approximer sur une base composée de fonctions linéaires ou cubiques continues par morceaux dont la construction est itérative et dont la minimisation de l'erreur est similaire à la précédente. Cette méthode est plus prédictive que la méthode précédente mais le temps de calcul des surfaces de réponse peut se révéler prohibitif si le nombre de surfaces ou le nombre d'évaluations déterministes sont trop importants. Dans les deux cas, il est nécessaire d'effectuer un certain nombre d'évaluations déterministes des modes propres pour différentes situations de désaccordage afin d'obtenir une approximation convergée.

Afin d'appliquer les méthodologies développées au modèle industriel, il a été nécessaire de développer une méthode de réduction de modèles éléments-finis adaptée à l'application stochastique. Plusieurs méthodes ont été testées seule la méthode de double synthèse modale présente le meilleur compromis entre les temps de calcul et la précision tout en s'adaptant à la contrainte imposée par la modélisation stochastique. Cette méthode est basée sur la méthode de synthèse modale de Craig-Bampton pour laquelle les matrices réduites de masse et de raideur associées aux modes statiques d'interface subissent une seconde synthèse modale, permettant ainsi de réduire la base des modes statiques. Cette méthode permet de diviser le temps de calcul d'une analyse modale par un facteur de l'ordre de 300 sur le modèle industriel considéré, en considérant une sous-structuration adaptée à la modélisation stochastique, c'est-à-dire un découpage de la structure au niveau du congé de raccordement entre les aubes et les viroles. De plus, il apparaît que le désaccordage ne semble pas influencer sur la précision des résultats de cette méthode puisque les résultats obtenus sont similaires sur les deux types de redresseurs industriels considérés.

Finalement, les méthodologies développées précédemment ont été appliquées au cas du secteur de redresseur industriel. Une première partie a permis de valider expérimentalement la méthode de modélisation des incertitudes, mais également les méthodologies de calcul associées puisque les enveloppes vibratoires prédites encadrent la réponse fréquentielle expérimentale au niveau de la zone d'excitation fréquentielle correspondante aux premiers modes de flexion et de torsion d'aubes. Une

seconde partie a permis de mettre en avant une stratégie robuste de positionnement des jauges de déformation à partir des distributions des déplacements maximaux de chaque aube, calculées à partir de plusieurs réalisations des modes propres stochastiques pour différentes situations de désaccordage. Les deux méthodes d'interpolation de surface donnent des résultats équivalents à celle de Monte Carlo, référente, permettant ainsi de garantir un choix robuste quelle que soit la méthode utilisée.

Les travaux menés dans cette thèse ont ainsi permis de développer un outil numérique capable de prédire l'enveloppe vibratoire d'un secteur de redresseur en présence de désaccordage. Cet outil pourra être utilisé par le concepteur afin d'estimer les niveaux vibratoires maximaux d'un secteur de redresseur quelque soit le motif de désaccordage mais également de définir un positionnement optimal des jauges de déformation dans le cadre d'un essai moteur.

Perspectives

Ces différents résultats ouvrent de nouvelles perspectives de recherche. Les quatre axes d'amélioration possibles sont l'élaboration d'une modélisation mécanique plus réaliste, le développement de nouvelles fonctions de l'outil numérique implémenté, l'optimisation de certains aspects numériques et l'amélioration de la validation expérimentale.

Dans un premier temps, afin d'améliorer le modèle proposé, il serait intéressant d'introduire des champs de pression aérodynamiques bien plus réalistes que ceux proposés puisque la stratégie de positionnement des jauges dépend de l'excitation considérée. Ainsi, l'idée serait d'interpoler un champ de pression mesuré sur une aube en essai sur le maillage numérique, d'introduire un déphasage numérique inter-aubes afin de modéliser le caractère tournant de l'excitation ou encore d'introduire une variable aléatoire liée à l'excitation aérodynamique afin de prendre en compte l'incertitude liée à la variabilité du champ de pression [ZSCG15]. Un couplage aéroélastique permettant de réévaluer le champ de pression en fonction de la déformation induite constituerait également une perspective intéressante [CCMB12].

Une autre voie d'amélioration du modèle serait de modéliser les conditions limites du secteur de redresseur de façon plus réaliste en prenant en compte la souplesse du carter par un lit de ressorts elliptiques mais également les non-linéarités de contact entre la virole supérieure et le carter. La prise en compte des effets amortissants et assouplissants du frottement par rapport au blocage considéré des degrés de liberté permettrait d'obtenir une meilleure prédiction des niveaux vibratoires.

Il serait également intéressant d'améliorer la construction de la matrice de covariance afin d'intégrer les variables aléatoires liées au module d'Young des viroles, permettant ainsi de régulariser les surfaces de réponse des modes stochastiques sur l'ensemble des variables aléatoires. Un autre point serait d'intégrer plus de paramètres incertains avant la transformation par l'expansion de Karhunen-Loève afin d'améliorer la modélisation des incertitudes et prendre en compte la variation lo-

cale des paramètres géométriques. L'application à des matériaux non-homogènes [LGP⁺15] constitue également une perspective intéressante.

Dans un second temps, afin d'améliorer la fonctionnalité de l'outil numérique, il serait intéressant d'améliorer la prédiction des valeurs extrémales à partir de la théorie des valeurs extrêmes [Gne43, HWW85, EKM97, RT01, FHR04], basée sur l'évaluation de la probabilité d'obtenir une valeur supérieure (resp. inférieure) à la valeur maximale obtenue (resp. minimale). Cette théorie permet donc d'obtenir une expression analytique de la fonction de répartition aux niveaux des valeurs extrêmes, appelée fonction de survie. Ceci permettrait ainsi d'obtenir un estimateur plus robuste des valeurs extrémales dont l'intervalle de confiance est connu.

Un autre axe d'amélioration de l'outil serait de tester et éventuellement implémenter d'autres méthodes d'interpolation de surface qui permettraient d'obtenir une meilleure prédiction des valeurs extrémales tout en réduisant les temps de calcul. En effet, il existe d'autres méthodes de régression paramétrique qui n'ont pas pu être testées mais qui pourrait répondre à la problématique posée [Van05].

De plus, ces travaux se focalisent sur la réponse fréquentielle du système, c'est-à-dire une fois que le régime stationnaire est établi. Il serait donc intéressant d'observer les résultats pendant le régime transitoire.

Dans un troisième temps, il serait intéressant d'améliorer les aspects numériques de résolution. Bien que la parallélisation du calcul des analyses modales déterministes ait été implémentée dans le cadre de ces travaux, le calcul des surfaces de réponse approximées des modes stochastiques par la méthode MARS ne l'a pas été. Cette perspective d'évolution permettrait de diminuer fortement les temps de calcul de cette méthode et donc venir concurrencer la méthode de projection sur une base du chaos polynomial sur ce point.

Enfin, il serait intéressant de scanner le secteur de redresseur expérimental afin d'en reconstruire numériquement la géométrie réelle, et de vérifier la corrélation entre les modes numériques de la géométrie reconstruite et les modes expérimentaux. Les écarts observés permettraient de mettre en évidence l'influence des propriétés géométriques par rapport à celle des propriétés matériaux [NAG15].

Un essai partiel sur un secteur de redresseur soumis à des conditions limites réalistes et muni de jauges de déformations sur chaque aube permettrait également de valider la stratégie de positionnement des jauges de déformation.

Bibliographie

- [ACA16] Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe. <http://www.acare4europe.com>, 2016. [Online]. (cf. page 1)
- [AGPRH14] M. ARNST, R. GHANEM, E. PHIPPS et J. RED-HORSE : Reduced chaos expansions with random coefficients in reduced-dimensional stochastic modeling of coupled problems. *International for Numerical Methods in Engineering*, 97(5):352–376, 2014. (cf. pages 26 et 36)
- [Bat08] A. BATAILLY : *Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbomachines aéronautiques en configuration non-accidentelle*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, Décembre 2008. (cf. page 90)
- [Bau58] W. BAUER : The Monte Carlo method. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 6(4):438–451, 1958. (cf. page 35)
- [BbJT12] D. BRIZARD, S. BESSET, L. JEZEQUEL et B. TROCLET : Determinantal method for locally modified structures. Application to the vibration damping of a space launcher. *Computational Mechanics*, 50:631–644, 2012. (cf. pages 3, 91, et 106)
- [BCF92] N. BOUHADDI, S. COGAN et R. FILLOD : Dynamic substructuring by Guyan condensation selection of the master dof. volume 1, pages 321–333, 1992. 10th International Modal Analysis Conference. (cf. page 105)
- [Bd90] F. BOURQUIN et F. D'HENNEZEL : Numerical study of an intrinsic component mode synthesis method. Rapport technique, INRIA, 1990. (cf. page 91)
- [Ber05] M. BERVEILLER : *Éléments finis stochastiques : approches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont II, Octobre 2005. (cf. pages 36 et 60)
- [Bes06] S. BESSET : *Optimisation du comportement vibro-acoustique des structures à l'aide d'une synthèse modale généralisée*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, Novembre 2006. (cf. pages 90, 91, et 106)
- [BH71] W. A. BENFIELD et R. F. HRUDA : Vibration analysis of substructures by component mode substitution. *AIAA journal*, 9(7):1255–1261, 1971. (cf. pages 3, 90, 92, et 94)
- [BH02] K. BINDER et D. W. HEERMANN : *Monte Carlo simulation in statistical physics*. Springer ; 4th, enlarged edition, 2002. (cf. page 35)

- [BhE90] Y. BEN-HAIM et I. ELISHAKOFF : *Convex models of uncertainty in applied mechanics*. Elsevier, 1990. (cf. page 26)
- [BI81] G. B. BEACHER et T. S. INGRA : Stochastic FEM in settlement predictions. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 114:449 – 462, 1981. (cf. page 36)
- [Bla16] E. BLANCO : Traitement du signal. Rapport technique, Cours de l'École Centrale de Lyon, 2016. (cf. pages 69 et 164)
- [BPS14] W. BETZ, I. PAPAIOANNOU et D. STRAUB : Numerical methods for the discretization of random fields by means of the Karhunen-Loève expansion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 271:109–129, 2014. (cf. pages 3 et 33)
- [BSL04] M. BERVEILLER, B. SUDRET et M. LEMAIRE : Comparison of methods for computing the response coefficients in stochastic finite element analysis. Barcelona (Spain), 2004. In Proc. AsRANETS 2. (cf. pages 3 et 36)
- [Cal02] S. CALLOT : *Analyse des mécanismes macroscopiques produits par les interactions rotor/stator dans les turbomachines*. Thèse de doctorat, École Centrale Lyon, 2002. (cf. page 9)
- [Caz14] J. De CAZENOVE : *Développement des méthodes numériques et expérimentales pour la certification vibratoire des disques aubagés monoblocs*. Thèse de doctorat, ENSMM, Juin 2014. (cf. page 17)
- [CCMB12] J. De CAZENOVE, S. COGAN, M. MBAYE et M. BERTHILLIER : Forced response prediction of a mistuned bladed disk in the presence of aeroelastic coupling and model uncertainties. *10th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, pages 281–291, 2012. (cf. page 147)
- [CDG88] X. S. CLEVELAND, S. J. DELVIN et E. GROSSE : Regression by local fitting : methods, properties, and computing. *Journal of econometrics*, 37:87–114, 1988. (cf. page 59)
- [Cia98] P. G. CIARLET : *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Dunod Paris, 1998. (cf. page 172)
- [CLRGM03] B. K. CHOI, J. LENTZ, A. J. RIVAS-GUERRA et M. P. MIGNOLET : Optimization of intentional mistuning patterns for the reduction of the forced response effects of unintentional mistuning : Formulation and assessment. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, pages 125–131, 2003. (cf. page 17)
- [CLS04] E. CAPIEZ-LERNOUT et C. SOIZE : Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed disks. *Journal of Engineering for gas Turbines and Power - Transactions of the ASME*, 126(3):610–618, 2004. (cf. pages 3 et 26)

- [CP97] M. P. CASTANIER et C. PIERRE : Consideration on the benefits of intentional blade mistuning for the forced response of turbomachinery rotors. *Analysis and design issues for modern aerospace vehicles*, pages 419–425, 1997. (cf. pages 2 et 15)
- [CP02] M. P. CASTANIER et C. PIERRE : Using intentional mistuning in the design of turbomachinery rotors. *AIAA Journal*, pages 2077–2086, 2002. (cf. page 17)
- [CP06] M. P. CASTANIER et C. PIERRE : Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration : Status and emerging directions. *Journal of Propulsion and Power*, 22, 2006. (cf. pages 15, 16, 20, et 163)
- [Cre11] T. CRESTAUX : *Méthode adaptative d'intégration multi-dimensionnelle et sélection d'une base de polyômes de chaos*. Thèse de doctorat, Paris XIII, 2011. (cf. page 63)
- [Dai13] Y.-H. DAI : A perfect example for the BFGS method. *Mathematical programming*, 138:501–530, 2013. (cf. page 58)
- [Ded06] J.-D. DEDIEU : *Points fixes, Zéros et la Méthode de Newton*. *Mathématiques et Applications*. Springer Verlag, 2006. (cf. page 58)
- [Dem06] J.-P. DEMAILLY : *Analyse et équations différentielles*. EDP Sciences, 2006. (cf. page 61)
- [Des00] O. DESSOMBZ : *Analyse dynamique des structures comportant des paramètres incertains*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, Décembre 2000. (cf. pages 3, 26, et 37)
- [DH69] R. C. F. DYE et T. A. HENRY : Vibration amplitudes of compressor blades resulting from scatter in blade natural frequencies. *ASME Journal of Engineering for Power*, 91(3):182–188, 1969. (cf. pages 2 et 15)
- [Die68] J. DIEUDONNÉ : *Calcul infinitésimal*. Hermann, 1968. (cf. page 67)
- [DS83] J. E. J. DENNIS et R. B. SCHNABEL : Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. *Englewood Cliffs*, 1983. (cf. page 128)
- [DTLJ01] O. DESSOMBZ, F. THOUVEREZ, J.-P. LAÏNÉ et L. JEZEQUEL : Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite element methods. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5):949–968, 2001. (cf. page 26)
- [EB09] M. ELRED et J. BURKARDT : Comparison of non-intrusive polynomial chaos and stochastic collocation methods for uncertainty quantification. *AIAA journal*, 2009. (cf. page 60)
- [EKM97] P. EMBRECHTS, C. KLÜPPELBERG et T. MIKOSCH : *Modeling extremal events*. Birkhäuser, 1997. (cf. page 148)
- [Eub99] R. L. EUBANK : *Nonparametric regression and spline smoothing*. Marcel Dekker Inc., 1999. (cf. page 59)

- [Ewi69] D. J. EWINS : The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks. *Journal of Sound and Vibration*, 9(1):65–72, 1969. (cf. pages 2 et 15)
- [Ewi73] D. J. EWINS : Vibration characteristics of bladed disc assemblies. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 15(3):165–186, 1973. (cf. page 15)
- [FHR04] M. FALK, J. HÜSLER et R. REISS : *Laws of small numbers : Extremes and rare events*. Springer, 2004. (cf. page 148)
- [Fri91] J. H. FRIEDMAN : Multivariate Adaptive Regression Splines. *The annals of statistics*, 19(1):1–68, 1991. (cf. pages 3, 59, 77, et 78)
- [Fri93] J. H. FRIEDMAN : Fast mars. Rapport technique, Department of Statistics, Stanford University, 1993. (cf. page 78)
- [GBA⁺16] C. GIBERT, L. BLANC, P. ALMEIDA, X. LEBLANC, J.-P. OUSTY, F. THOUVEREZ et J.-P. LAÏNÉ : Modal tests and analysis of a radial impeller at rest : Influence of surrounding air on damping. Copenhagen (Denmark), 2016. In Proc. ASME TurboExpo. (cf. page 128)
- [Gib98] J. W. GIBBS : *Fourier series*. Nature, 1898. (cf. page 68)
- [Gla64] G. M. L. GLADWELL : Branch modes analysis of vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1:41–59, 1964. (cf. page 90)
- [Gne43] B. GNEDENKO : Sur la distribution limite du terme maximum d’une série aléatoire. *The annals of Mathematics*, 44:423–453, 1943. (cf. page 148)
- [Gol69] R. L. GOLDMAN : Vibration analysis by dynamic partitioning. *AIAA journal*, 7(6):1152–1154, 1969. (cf. page 90)
- [Goo99] J. GOODMAN : *Mechanics Applied to Engineering*. Longman, Green and Company, 1899. (cf. page 21)
- [Gou05] N. GOURDAIN : *Simulation numérique des phénomènes de décollement tournant dans les compresseurs axiaux*. Thèse de doctorat, École Centrale Lyon, Octobre 2005. (cf. page 9)
- [Gru12] M. GRUIN : *Dynamique non-linéaire d’une roue de turbine basse pression soumise à des excitations structurales d’un turbo-réacteur*. Thèse de doctorat, École Centrale Lyon, Février 2012. (cf. pages 11, 14, et 163)
- [GS91] R. GHANEM et P. SPANOS : *Stochastic finite elements : A spectral approach*. Springer-Verlag, 1991. (cf. pages 3, 33, 42, 58, et 59)
- [Guy64] R. J. GUYAN : Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA journal*, 3(2):380, 1964. (cf. page 104)
- [Hal14] P. HALL : *Skewness*. Wiley StatsRef : Statistics Reference Online, 2014. (cf. page 28)

- [He00] J. H. HE : A new perturbation technique which is also valid for large parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 229(5):1257–1263, 2000. (cf. page 36)
- [Hen80] R. HENRY : Calcul des fréquences et modes des structures répétitives circulaires. *Journal de Mécanique appliquée*, 4:61–82, 1980. (cf. page 10)
- [HKS98] M. H. HANSEN, C. KOOPERBERG et S. SARDY : Triograms models. *Journal of the American Statistical Association*, 93(441):101–119, 1998. (cf. page 59)
- [HKT06] K. C. HALL, R. R. KIELB et J. P. THOMAS : Unsteady aerodynamics, aeroacoustics and aeroelasticity of turbomachines. *Kluwer Academic Pub*, 2006. (cf. page 9)
- [Hou69] S. N. HOU : Review of modal synthesis techniques and a new approach. *Shock and Vibration Bulletin*, 40(4):25–39, 1969. (cf. page 90)
- [Hur60] W. C. HURTY : Vibration of structural systems by component mode synthesis. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 86(4):51–70, 1960. (cf. page 90)
- [Hur65] W. C. HURTY : Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA journal*, 3(4):678–685, 1965. (cf. page 90)
- [HW08] F. HEISS et V. WINSCHERL : Likelihood approximation by numerical integration on sparse grids. *journal of Econometrics*, 2008. (cf. pages 60, 63, et 169)
- [HWW85] J. R. M. HOSKING, J. R. WALLIS et E. F. WOOD : Estimation of the generalized extreme value distribution by the method of probability-weighted moments. *Technometrics*, 27:251–261, 1985. (cf. page 148)
- [Jay63] E. T. JAYNES : *Information theory and statistical mechanics*. 1963. (cf. page 29)
- [JB68] R. R. CRAIG JR. et M. C. C. BAMPTON : Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA journal*, 6(7):1313–1319, 1968. (cf. pages 3, 90, et 92)
- [JC76] R. R. CRAIG JR. et C. J. CHANG : Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis. *AIAA journal*, 14(11):1633–1635, 1976. (cf. pages 90 et 101)
- [JC77] R. R. CRAIG JR. et C. J. CHANG : Substructure coupling for dynamic analysis and testing. Rapport technique, NASA, 1977. (cf. pages 90, 91, 101, et 104)
- [Jez78] L. JEZEQUEL : *Synthèse de l'amortissement par sous-structuration expérimentale*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon, Juillet 1978. (cf. page 91)

- [Jez85] L. JEZEQUEL : *Synthèse modale : Théorie et extensions*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon, Novembre 1985. (cf. pages 91 et 106)
- [JPC01] J. JUDGE, C. PIERRE et S. L. CECCIO : Experimental validation of mistuning identification techniques and vibration predictions in bladed disks. pages 87–98, Madrid (Spain), 2001. (cf. page 26)
- [JPC02] J. JUDGE, C. PIERRE et S. L. CECCIO : Mistuning identification in bladed disks. 2002. (cf. page 26)
- [Kli91] G. KLIR : Generalized information theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 40:127–142, 1991. (cf. page 26)
- [KP97a] M. J. KRUSE et C. PIERRE : An experimental investigation of vibration localization in bladed disks, part i : Free response. *Journal of Mechanical Engineering Science*, page ASME, 1997. (cf. page 15)
- [KP97b] M. J. KRUSE et C. PIERRE : An experimental investigation of vibration localization in bladed disks, part ii : Forced response. *Journal of Mechanical Engineering Science*, page ASME, 1997. (cf. page 15)
- [KR08] D. P. KROESE et R. Y. RUBINSTEIN : *Simulation and the Monte Carlo method*, volume 707. Wiley-interscience, 2008. (cf. page 35)
- [Lax07] D. LAXALDE : *Étude d’amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages*. Thèse de doctorat, École Centrale Lyon, 2007. (cf. pages 13 et 163)
- [LBM86] W. K. LIU, T. BELYTSCHKO et A. MANI : Random field finite elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 23(10): 1831–1845, 1986. (cf. page 36)
- [LCP04] S.-H. LIM, M. P. CASTANIER et C. PIERRE : Intentional mistuning design space reduction based on vibration energy flow in bladed disks. June 2004. (cf. page 17)
- [LDD⁺06] J.-P. LOMBARD, J. DUPREUX, C. DUPONT, F. GARCIN et S. BAUMHAUER : Mistuning phenomena on bladed disks : Industrial methods and applications. volume 5, pages 809–819, may 2006. (cf. page 2)
- [LEJS07] D. LUCOR, C. ENAUX, H. JOURDREN et P. SAGAUT : Stochastic design optimization : Application to reacting flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:5047–5062, 2007. (cf. page 15)
- [LGP⁺15] V. LUCAS, J.-C. GOLINVAL, S. PAQUAY, V.-D. NGUYEN, L. NOELS et L. WU : A stochastic computational multiscale approach : Application to MEMS resonators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 294:141–167, 2015. (cf. page 148)
- [LK93] C. C. LI et A. DER KIUREGHIAN : Optimal discretization of random fields. *Journal of Engineering Mechanics*, 119:1136–1154, 1993. (cf. page 33)

- [LT90] P.-S. LAPLACE et F.-F. TISSERAND : *Traité de mécanique céleste*. Editions Jacques Gabay, 1990. (cf. page 26)
- [LTS⁺07] D. LAXALDE, F. THOUVEREZ, J.-J. SINOÛ, J.-P. LOMBARD et S. BAUMHAUER : Mistuning identification and model updating of an industrial blisk. *International Journal of Rotating Machinery*, 17289, 2007. (cf. page 26)
- [Mac71] R. H. MACNEAL : A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1:581–601, 1971. (cf. pages 90, 96, et 100)
- [Mat00] A. C. MATOS : Recursive computation of Padé-Legendre approximants and some acceleration properties. *Numerische Mathematik*, 89(3), 2000. (cf. page 58)
- [Mat07] A. C. MATOS : Multivariate Frobenius-Padé approximants : properties and algorithms. *Journal of Computational Applied Mathematics*, 202: 548–572, 2007. (cf. page 58)
- [Mba09] M. MBAYE : *Conception robuste en vibration et aéroélasticité des roues aubagées de turbomachines*. Thèse de doctorat, UPEM, Octobre 2009. (cf. pages 3 et 17)
- [MBC79] M. D. MACKAY, R. J. BECKMAN et W. J. CONOVER : A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2):239–245, 1979. (cf. page 36)
- [MCGM84] D. R. MARTINEZ, T. G. CARNE, D. L. GREGORY et A. K. MILLER : Combined experimental/analytical modeling using component mode synthesis. pages 140–152, 1984. (cf. page 90)
- [MI96] J. G. MARSHALL et M. IMREGUN : A review of aeroelasticity methods with emphasis on turbomachinery applications. *Journal of Fluids and Structures*, 10(3):237–267, 1996. (cf. page 9)
- [MK14] T. MELINK et J. KORELC : Stability of Karhunen-Loève expansion for the simulation of Gaussian stochastic fields using Galerkin scheme. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 37:7–15, 2014. (cf. page 33)
- [ML93] M. P. MIGNOLET et C. C. LIN : The combined closed form-perturbation approach to the analysis of mistuned bladed disks. *Journal of Turbomachinery*, 115:771–787, 1993. (cf. pages 26 et 36)
- [Moo79] R. M. MOORE : Methods and applications of interval analysis. Rapport technique, Studies in Applied Mathematics (SIAM), 1979. (cf. page 26)
- [MU49] N. METROPOLIS et S. ULAM : The monte carlo method. *Journal of the American Association*, 44:335–341, 1949. (cf. pages 3, 26, et 35)
- [NAG14] F. NYSSSEN, M. ARNST et J.-C. GOLINVAL : Modeling of uncertainties in bladed disks using a nonparametric approach. Buffalo (New

- York), 2014. ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. (*cf. page 26*)
- [NAG15] F. NYSSSEN, M. ARNST et J.-C. GOLINVAL : Experimental modal identification of mistuning in academic blisk and comparison with the blades geometry vibrations. Montreal (Canada), 2015. In Proc. ASME TurboExpo. (*cf. pages 19 et 148*)
- [NBA10] L. NECHAK, S. BERGER et E. AUBRY : Robust analysis of uncertain dynamic systems : combination of the Centre Manifold and polynomial chaos theories. *WSEAS Transactions on systems*, 9(4):386 – 395, 2010. (*cf. page 36*)
- [Nou09] A. NOUY : Recent developments in spectral stochastic methods for the numerical solution of stochastic partial differential equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16:251–285, 2009. (*cf. pages 3, 36, et 58*)
- [NP99] M. NAUDIN et J.-M. PUGNET : Vibrations et contraintes alternées dans les turbomachines. Rapport technique, Techniques de l'ingénieur, 1999. (*cf. page 1*)
- [Nun05] M. E. NUNN : Aero engine improvements through linear friction welding. Belfast (Northern Ireland), August 2005. International Conference on Innovation and Integration in Aerospace Sciences. (*cf. page 2*)
- [Pad99] H. PADE : Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle. *ASENS*, 16:395–426, 1899. (*cf. page 58*)
- [Par15] M.-O. PARENT : *Prédiction de la stabilité en contact rotor-stator dans les turboréacteurs d'avion*. Thèse de doctorat, École Centrale Lyon, Mars 2015. (*cf. pages 8, 9, 12, et 163*)
- [Pie88] C. PIERRE : Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *Journal of Sound and Vibration*, 126(3):485–502, 1988. (*cf. page 15*)
- [PLS+06] F. PICHOT, D. LAXALDE, J.-J. SINOÛ, F. THOUVEREZ et J.-P. LOMBARD : Mistuning identification for industrial blisks based on the best achievable eigenvector. *Computers and Structures*, 84:2033–2049, November 2006. (*cf. pages 2 et 26*)
- [PTBG14] J. PHILIPPE, F. THOUVEREZ, L. BLANC et M. GRUIN : A simplified method to predict the average vibratory response of mistuned clustered stator vanes. Dusseldorf (Germany), 2014. In Proc. ASME TurboExpo. (*cf. pages 36 et 52*)
- [PTBG15] J. PHILIPPE, F. THOUVEREZ, L. BLANC et M. GRUIN : Vibratory behavior prediction of a mistuned clustered stator vane : non-intrusive stochastic methods. Montreal (Canada), 2015. In Proc. ASME TurboExpo. (*cf. page 63*)

- [Pue04] G. PUEL : *Sur une théorie des méconnaissances en dynamique des structures*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, Décembre 2004. (cf. pages 3 et 26)
- [RT01] R. REISS et M. THOMAS : *Statistical analysis of extreme values*. Birkhäuser, Basel, 2001. (cf. page 148)
- [Rub75] S. RUBIN : Improved component-mode representaton for structural dynamic analysis. *AIAA journal*, 13(8):995–1006, 1975. (cf. pages 90 et 98)
- [RW96] W. REISS et M. WALBAUM : Initiation and propagation of flow instabilities in multi-stage axial compressors. page 30, 1996. (cf. page 9)
- [Saf16] Médiathèque de communication externe safran. <https://mediatheque-communication.safran>, 2016. [Intranet Safran]. (cf. pages 6 et 163)
- [SAJH10] D. SASRI, L. AZRAR, A. JEBBOURI et A. EL HAMI : Component mode synthesis and polynomial chaos expansions for stochastic frequency functions of large linear fe models. *Computers and Structures*, 2010. (cf. page 36)
- [Sal11] A. C. SALL : *Comportement dynamique d'un redresseur de turbomachine aéronautique : effets du désaccordage*. Thèse de doctorat, École Centrale Lyon, Décembre 2011. (cf. pages 2, 3, 7, 9, 15, 16, 21, 37, 42, et 163)
- [Set90] D. SETIO : *Synthèse modale des structures assemblées. Extension aux cas non-linéaires et dissipatifs*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, Décembre 1990. (cf. page 91)
- [SG64] A. SAVITZKY et M. J. E. GOLAY : Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. *Analytical Chemistry*, 8(36):1627–1639, 1964. (cf. pages 88 et 171)
- [Sha48] C. E. SHANNON : A mathematical theory of communication. *Bell System Technology Journal*, 27:379–423,623–656, 1948. (cf. pages 26 et 29)
- [SHKT97] C. J. STONE, J. HANSEN, M. H. KOOPERBERG et Y. K. TRUONG : Polynomial splines and their tensor products in extended linear modeling. *The annals of statistics*, 25(4):1371–1470, 1997. (cf. page 59)
- [Sin13] M. SINGH : History of evolution, progress and application of safe diagram for tuned and mistuned systems. 2013. (cf. page 14)
- [Sla95] J. C. SLATER : Modelling, analysis, and design of bladed disks for alleviation of high cycle fatigue in gas turbine engines. *AFOSR EFRP Final Report, Bollong Air Force Base*, 1995. (cf. page 10)
- [SMB] J. C. SLATER, G. R. MINKIEWICZ et A. J. BLAIR : Forced response of bladed disk assemblies - a survey. *The Shock and Vibration Digest*, 31. (cf. page 10)

- [Smo63] S. SMOLYAK : Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. *Soviet Mathematics Doklady*, 4:240–243, 1963. (cf. page 60)
- [Soi86] C. SOIZE : Modélisation probabiliste du flou structural en dynamique linéaire des systèmes mécaniques complexes. *La Recherche Aéronautique*, 5:337–362, 1986. (cf. pages 3 et 26)
- [Soi94] C. SOIZE : Vibration damping in low-frequency range due to structural complexity - a model based on the theory of fuzzy structures and model parameters estimation. *Computers and Structures*, 58(5):901–915, 1994. (cf. page 26)
- [Soi00] C. SOIZE : A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3):277–294, 2000. (cf. page 26)
- [STBJ12] A. C. SALL, F. THOUVEREZ, L. BLANC et P. JEAN : Stochastic behaviour of mistuned stator vane sectors : An industrial application. *Shock and Vibration*, 19(5):1041 – 1050, 2012. (cf. page 37)
- [Tho79] D. L. THOMAS : Dynamics of rotationnally periodic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(1):81–102, 1979. (cf. pages 1 et 10)
- [Van05] N. VANDAL : La régression non paramétrique multidimensionnelle : Théorie et application à une étude portant sur la densité mammaire. Rapport technique, Faculté des études supérieures de l'Université de Laval, Québec, 2005. (cf. page 148)
- [VCBH02] P. VINOT, S. COGAN et Y. BEN-HAIM : Reliability of structural dynamic models based on info-gap models. pages 1057–1063, Los Angeles (California), 2002. Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference. (cf. page 26)
- [VO85] R. VALID et R. OHAYON : Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétrie cyclique. *La Recherche aéronautique*, 4:251–263, 1985. (cf. pages 1 et 10)
- [Wag66] J. T. WAGNER : Coupling of turbomachinery blade vibrations through the rotor. *American Society of Mechanical Engineers*, 1966. (cf. page 15)
- [Whi66] D. S. WHITEHEAD : Effect of mistuning on the vibration of turbomachine blades induced by wakes. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 8(1):15–21, 1966. (cf. page 2)
- [Whi98] D. S. WHITEHEAD : The maximum factor by which forced vibration of blades can increase due to mistuning. *Journal of engineering for gas turbines and power*, 1998. (cf. page 15)
- [Wie38] N. WIENER : The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4):897–936, 1938. (cf. pages 30 et 36)

- [Wil79] S. J. WILDHEIM : Excitation of rotationnally periodic structures. *Journal of Applied Mechanics*, 46(4):878–882, 1979. (cf. pages 1 et 10)
- [WJ95] M. P. WAND et M. C. JONES : *Kernel smoothing*. Chapman & Hall, 1995. (cf. page 59)
- [Wol01] S. WOLD : PLS-regression : a basic tool of chenometrics. *Chenometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 58(2):109–130, 2001. (cf. page 33)
- [WRWD84] S. WOLD, A. RUHE, H. WOLD et W. J. DUNN : The collinearity problem in linear regression. the partial least squares (pls) approach to generalized inverses. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 5(3):735–743, 1984. (cf. page 33)
- [Zad65] L. A. ZADEH : Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965. (cf. page 26)
- [ZCP04] G. ZHANG, M. P. CASTANIER et C. PIERRE : Efficient component mode synthesis with a new interface reduction method. 2004. (cf. pages 91 et 104)
- [ZE94] J. ZHANG et B. ELLINGWOOD : Orthogonal series expansions of random fields in reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 120:2660–2677, 1994. (cf. page 33)
- [zen14] M. ZENGA : *Kurtosis*. Wiley StatsRef : Statistics Reference Online, 2014. (cf. page 28)
- [Zie89] W. P. ZIEMER : *Weakly differentiable functions : Sobolev spaces and functions of bounded variation*. Springer, 1989. (cf. page 58)
- [ZSCG15] A. ZOU, E. SAURET, J.-C. CHASSAING et Y. T. GU : Stochastic analysis of a radial-inflow turbine in the presence of parametric uncertainties. Auckland (New-Zeland), 2015. The 6th International Conference on Computational Methods (ICCM2015). (cf. page 147)

Publications personnelles

- [1] J. Philippe, F. Thouverez, L. Blanc and M. Gruin : *Numerical application of double modal synthesis to an industrial mistuned clustered stator vane and experimental validation*, In Proceedings of the ASME Turbo Expo, Seoul, South Korea, June 13-17, 2016
- [2] J. Philippe, F. Thouverez, L. Blanc and M. Gruin : *Vibratory Behavior Prediction of a Mistuned Clustered Stator Vane : Non-Intrusive Stochastic Methods*, In Proceedings of the ASME Turbo Expo, Montreal, Canada, June 15-19, 2015
- [3] J. Philippe, F. Thouverez, L. Blanc and M. Gruin : *A simplified method for predicting the average vibratory response of mistuned clustered stator vanes*, In Proceedings of the ASME Turbo Expo, Düsseldorf, Germany, June 16-20, 2014
- [4] J. Philippe, F. Thouverez, L. Blanc and M. Gruin : *Vibratory behavior prediction of mistuned stator vane clusters : An industrial application*, Computers and Structures (soumis)

Table des figures

1	a. Secteur d'un redresseur industriel b. Réponse fréquentielle	2
I.1	Turboréacteur CFM Leap-1A destiné à la propulsion des Airbus A319/320/321 [Saf16]	6
I.2	Coupe axiale d'un turboréacteur [Sal11]	7
I.3	Schéma simplifié d'un turboréacteur double corps double flux [Par15]	8
I.4	a. Coupe axiale du redresseur Create (figure de gauche) - b. Développement circonférentiel d'un étage du compresseur (figure de droite) [Sal11]	9
I.5	Roue aubagée et son secteur de référence [Gru12]	11
I.6	Schéma de définition des degrés de liberté frontières sur le secteur de référence [Par15]	12
I.7	Déformées de modes non dégénérés : $k = 0$ à gauche et $k = 18$ à droite [Lax07]	13
I.8	Déformées de modes dégénérés : $k = 2$ [Lax07]	13
I.9	Évolution des fréquences propres de la roue aubagée en fonction du nombre de diamètres nodaux [Gru12]	14
I.10	Diagramme de Campbell [Sal11]	15
I.11	Diagramme ZigZag [Sal11]	16
I.12	Évolution de l'amplification de la réponse dynamique d'une roue aubagée mobile selon le taux de désaccordage [CP06]	16
I.13	Secteur de redresseur industriel	18
I.14	Évolution de la fréquence propre normalisée en fonction du numéro de mode	18
I.15	Déformée propre du 16 ^{ème} mode élastique présentant de la flexion (1F) et de la torsion (1T) d'aube	19
I.16	Déformée propre du 2 ^{ème} mode élastique correspondant à un mode d'ensemble	19
I.17	Réponses fréquentielles pour différents cas de désaccordage	20
I.18	Diagramme de Haigh [Sal11]	21
II.1	Modèle simplifié d'un secteur de redresseur	38
II.2	Premières fréquences propres du secteur de redresseur simplifié pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 1$	44

II.3	Quelques déformées propres du secteur de redresseur simplifié pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 1$	44
II.4	Premières fréquences propres du secteur de redresseur simplifié pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 10$	45
II.5	Quelques déformées propres du secteur de redresseur simplifié pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 10$	45
II.6	Premières fréquences propres du secteur de redresseur simplifié pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 100$	46
II.7	Quelques déformées propres du secteur de redresseur simplifié pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 100$	46
II.8	Modèle simplifié d'un secteur de redresseur	47
II.9	Réponse forcée stochastique du milieu de la cinquième aube pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 1$ pour différentes valeurs de coefficient de décroissance	49
II.10	Réponse forcée stochastique du milieu de la cinquième aube pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 10$ pour différentes valeurs de coefficient de décroissance	50
II.11	Réponse forcée stochastique du milieu de la cinquième aube pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 100$ pour différentes valeurs de coefficient de décroissance	51
II.12	Réponse forcée stochastique du milieu de la cinquième aube pour un facteur de couplage $C_{A/V} = 100$ pour différentes dimensions stochastiques	53
III.1	Modèle simplifié d'un secteur de redresseur	65
III.2	Surfaces de réponse déterministe et approximées par la méthode de régression, de la fonction de répartition inverse de 61 ^{ème} composante modale du 8 ^{ème} mode en fonction des variables aléatoires Ξ_4 et Ξ_6	67
III.3	Surfaces de réponse déterministe et approximées par la méthode de régression de la fonction de répartition inverse de 91 ^{ème} composante modale du 9 ^{ème} mode en fonction des variables aléatoires Ξ_4 et Ξ_6	68
III.4	Phénomène de Gibbs observé par l'approximation en série de Fourier à 144 harmoniques d'une fonction carrée [Bla16]	69
III.5	Réponse forcée stochastique $U(\Xi)$ du milieu de la cinquième aube approximée par méthode de régression pour différents ordres de troncature N	70
III.6	Surfaces de réponse déterministe et approximées par la méthode de régression de la fonction de répartition inverse de 61 ^{ème} composante modale du 8 ^{ème} mode en fonction des variables aléatoires Z_1 et Z_2	72
III.7	Surfaces de réponse déterministe et approximées par la méthode de régression de la fonction de répartition inverse de 91 ^{ème} composante modale du 9 ^{ème} mode en fonction des variables aléatoires Z_1 et Z_2	73

III.8	Réponse forcée stochastique $U(\mathbf{Z})$ du milieu de la cinquième aube approximée par méthode de régression pour différents ordres de troncature N	74
III.9	Surfaces de réponse déterministe et approximées par la méthode MARS de la fonction de répartition inverse de 61 ^{ème} composante modale du 8 ^{ème} mode en fonction des variables aléatoires Ξ_4 et Ξ_6 .	80
III.10	Surfaces de réponse déterministe et approximées par la méthode MARS de la fonction de répartition inverse de 91 ^{ème} composante modale du 9 ^{ème} mode en fonction des variables aléatoires Ξ_4 et Ξ_6 .	81
III.11	Réponse forcée stochastique $U(\Xi)$ du milieu de la cinquième aube approximée par la méthode MARS pour différents ordres de troncature N	82
III.12	Surfaces de réponse, déterministe et approximées par la méthode MARS, de la fonction de répartition inverse de 61 ^{ème} composante modale du 8 ^{ème} mode en fonction des variables aléatoires Z_1 et Z_2 .	84
III.13	Surface de réponse, déterministe et approximées par la méthode MARS, de la fonction de répartition inverse de 91 ^{ème} composante modale du 9 ^{ème} mode en fonction des variables aléatoires Z_1 et Z_2 .	85
III.14	Réponse forcée stochastique $U(\mathbf{Z})$ du milieu de la cinquième aube approximée par méthode de régression pour différents ordres de troncature N	86
IV.1	Modèle de sous-structures	92
IV.2	Assemblage « parallèle » des sous-structures	94
IV.3	Assemblage « série » des sous-structures	95
IV.4	Classification des méthodes de réduction en fonction des temps de calcul caractéristiques	103
IV.5	Découpage du secteur de redresseur simplifié	107
IV.6	Fréquences propres du secteur de redresseur simplifié selon la méthode de réduction pour le facteur de couplage $C_{A/V} = 1$	108
IV.7	Fréquences propres du redresseur simplifié selon la méthode de réduction pour le facteur de couplage $C_{A/V} = 10$	109
IV.8	Fréquences propres du redresseur simplifié selon la méthode de réduction pour le facteur de couplage $C_{A/V} = 100$	110
IV.9	Secteur de redresseur industriel	111
IV.10	Fréquences propres du secteur de redresseur industriel selon la méthode de réduction	112
IV.11	Positionnement des points esclaves de Guyan	113
IV.12	Fréquences propres du secteur de redresseur industriel selon la méthode de réduction des modes d'interface	114
IV.13	Secteur de redresseur industriel maillé	115

IV.14	Écarts relatifs statistiques entre les fréquences propres calculées via la méthode de Craig-Bampton et la double synthèse modale pour les cas (c_1) et (c_2) (cf. Tab. IV.1)	116
IV.15	Évolution des fréquences propres "statiques" élastiques normalisées en fonction du numéro de mode	117
IV.16	Écarts relatifs statistiques entre les fréquences propres du modèle complet et celles obtenues par double synthèse modale pour différents cas (cf. Tab. IV.1)	120
IV.17	Corrélations statistiques entre les déformées modales du modèle complet et celles obtenues par double synthèse modale pour les cas (c_1) et (c_2)	121
IV.18	Nombre de déformées modales dont la corrélation est inférieur à un certain niveau	122
IV.19	Déformées du 39 ^{ème} mode du motif de désaccordage présentant la plus mauvaise corrélation	123
V.1	Montage expérimental vu du bord d'attaque (à gauche) et du bord de fuite (à droite)	128
V.2	Réponse fréquentielle numérique (courbe bleue) reconstruite à partir de l'identification modale de la réponse fréquentielle expérimentale (courbe noire)	129
V.3	Évolution des modes numériques et expérimentaux en fonction du numéro de mode	130
V.4	Critères d'assurance modale (MAC) entre les déformées numérique et expérimentale	130
V.5	Réponse fréquentielle moyenne, projetée selon la direction du laser, du bord d'attaque de l'aube 7 du secteur de redresseur industriel soumis à une excitation équivalente à celle expérimentale	131
V.6	Écart-type de la réponse fréquentielle, projetée selon la direction du laser, du bord d'attaque de l'aube 7 du secteur de redresseur industriel soumis à une excitation équivalente à celle expérimentale	132
V.7	Asymétrie de la réponse fréquentielle, projetée selon la direction du laser, du bord d'attaque de l'aube 7 du secteur de redresseur industriel soumis à une excitation équivalente à celle expérimentale	132
V.8	Kurtosis de la réponse fréquentielle, projetée selon la direction du laser, du bord d'attaque de l'aube 7 du secteur de redresseur industriel soumis à une excitation équivalente à celle expérimentale	133
V.9	Enveloppe de la réponse fréquentielle, projetée selon la direction du laser, du bord d'attaque de l'aube 7 du secteur de redresseur industriel soumis à une excitation équivalente à celle expérimentale	134
V.10	Représentation des conditions aux limites appliquées à la virole supérieure du secteur de redresseur	136

V.11	Réponse fréquentielle moyenne normale du bord d'attaque de l'aube 7, du secteur de redresseur industriel dans des conditions proches à celles du moteur	137
V.12	Écart-type de la réponse fréquentielle normale du bord d'attaque de l'aube 7, du secteur de redresseur industriel dans des conditions proches à celles du moteur	137
V.13	Asymétrie de la réponse fréquentielle normale du bord d'attaque de l'aube 7, du secteur de redresseur industriel dans des conditions proches à celles du moteur	138
V.14	Kurtosis de la réponse fréquentielle normale du bord d'attaque de l'aube 7, du secteur de redresseur industriel dans des conditions proches à celles du moteur	139
V.15	Enveloppe de la réponse fréquentielle normale du bord d'attaque de l'aube 7, du secteur de redresseur industriel dans des conditions proches à celles du moteur	139
V.16	Distribution des déplacements maximaux du bord d'attaque de chaque aube	141
V.17	Distribution des déplacements maximaux du bord de fuite de chaque aube	142
A.1	Exemple de lissage d'une courbe représentant les déplacements maximaux d'un degré de liberté en fonction de la fréquence d'excitation .	173

Liste des tableaux

II.1 Premiers moments statistiques de quelques lois de probabilités	29
II.2 Exemples de probabilité et polynômes associés	31
III.1 Comparaison des quadratures de Gauss et de Smolyak en termes de nombre d'évaluations déterministes nécessaires [HW08]	63
III.2 Nombre d'évaluations déterministes nécessaires pour l'identification des coefficients du chaos par régression sans expansion de Karhunen- loève, selon l'ordre de troncature	67
IV.1 Quatre cas de troncature de modes de la double synthèse modale . . .	118
V.1 Temps de calcul nécessaire pour générer les surfaces de réponse des modes stochastiques selon la méthode utilisée	135

Annexe A

Algorithme itératif de Savitzky-Golay

Cette annexe détaille l'algorithme de Savitzky-Golay [SG64] et l'utilisation qui en est faite dans le cadre de cette thèse. Cette méthode permet de lisser une courbe à partir d'une moyenne glissante pondérée sur une fenêtre de largeur $2l + 1$:

$$\bar{y}_i = \sum_{k=-l}^l b_k y_{i+k} \quad (\text{A.1})$$

où y_i correspond à l'ordonnée du point i de la courbe à lisser, \bar{y}_i à la nouvelle valeur de l'ordonnée du point i de la courbe lissée et $\mathbf{b} = [b_{-l}, \dots, b_l]^t$ aux coefficients de pondération.

Les coefficients de pondérations sont calculés à partir de l'interpolation des points de la fenêtre de lissage par un polynôme :

$$P(z) = \sum_j a_j z^j \quad (\text{A.2})$$

avec

$$z = \frac{x - \bar{x}}{h} \quad (\text{A.3})$$

où x correspond à l'abscisse, \bar{x} à la moyenne des abscisses sur l'intervalle $[x_{i-l}; x_{i+l}]$ et h le pas d'échantillonnage soit la distance entre deux points voisins.

Soit F la fonction vectorielle définie par :

$$F : \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} P(z_{-l}) \\ \vdots \\ P(z_l) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Sa matrice jacobienne s'écrit :

$$[J] = \left[\frac{\partial P}{\partial a_j}(z_{i+k}) \right] = \begin{bmatrix} 1 & z_{-l} & \dots & z_{-l}^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_l & \dots & z_l^d \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Le système à résoudre se ramène à :

$$[J]\mathbf{a} = \mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} y_{i-l} \\ \vdots \\ y_{i+l} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Il s'agit d'un système linéaire contraint qui possède une pseudo-solution correspondant à l'équation normale [Cia98] :

$$[J]^t[J]\mathbf{a} = [J]^t\mathbf{y}_i \quad (\text{A.7})$$

Ce qui permet d'identifier les coefficients du polynôme P :

$$\mathbf{a} = ([J]^t[J])^{-1}[J]^t\mathbf{y}_i \quad (\text{A.8})$$

Les coefficients de pondérations $\mathbf{b} = [b_{-l}, \dots, b_l]^t$ correspondent à la première ligne de la matrice $([J]^t[J])^{-1}[J]^t$ puisque :

$$\bar{y}_i = P(z_0) = P(0) = a_0 \quad (\text{A.9})$$

Les autres lignes nous informe sur les dérivées successives de la courbe lissée. Si le pas d'échantillonnage est constant, les coefficients \mathbf{b} le sont également.

Lorsque la courbe est lissée, il est possible d'itérer cet algorithme en effectuant un nouveau lissage de la courbe générée à partir des ordonnées maximales (resp. minimales) entre la courbe de départ et la courbe lissée afin de converger vers la courbe maximale (resp. minimale) lissée. Une illustration de ce lissage itératif est présenté figure A.1. Le lissage est effectué par un polynôme de degré $d = 3$, une demi-largeur de fenêtre de lissage $l = 5$ et 30 itérations.

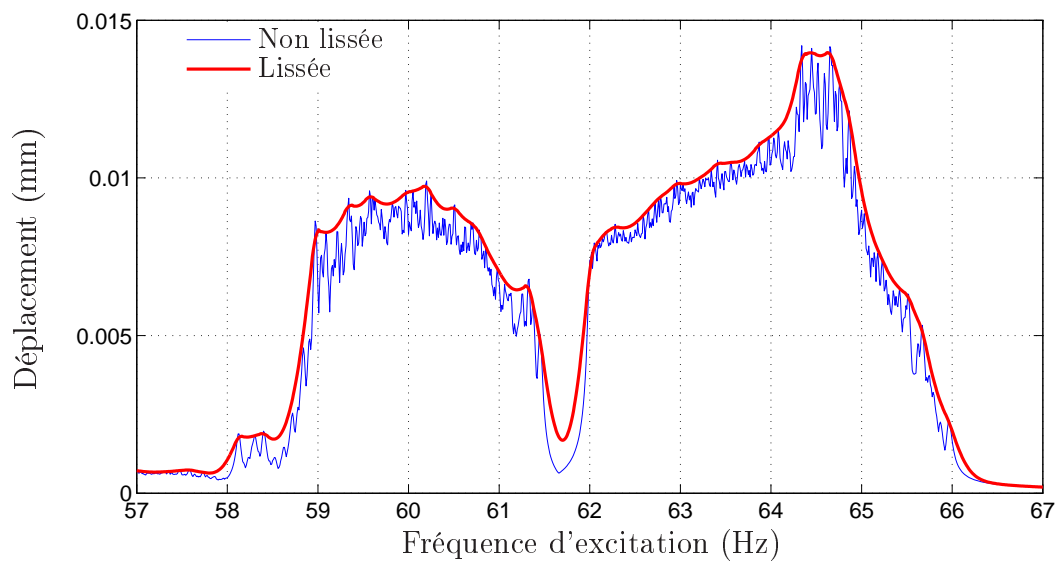


FIGURE A.1 – Exemple de lissage d'une courbe représentant les déplacements maximaux d'un degré de liberté en fonction de la fréquence d'excitation

Annexe B

Articles non détaillés dans ce mémoire

- 1 A simplified method to predict the average vibratory response of mistuned clustered stator vanes
- 2 Vibratory behavior prediction of a mistuned clustered stator vane : non-intrusive stochastic methods

GT2014-25210

A SIMPLIFIED METHOD FOR PREDICTING THE AVERAGE VIBRATORY RESPONSE OF MISTUNED CLUSTERED STATOR VANES

Jonathan Philippe^{a,b,*}, Fabrice Thouverez^a, Laurent Blanc^a, Marion Gruin^b

(a) École Centrale de Lyon, Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes
36, avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully Cedex, France

(b) SAFRAN Snecma, 77550 Moissy-Cramayel, France

Email : Jonathan.Philippe@centraliens-lyon.net

ABSTRACT

The role of stator vanes is to straighten the air flow on each stage of axial compressors. They are so subject to dynamically fluctuating high pressure loads. Furthermore, monobloc clustered designs have been developed to facilitate the manufacturing process and reduce costs, but they result in the loss of cyclic symmetry properties and very low structural damping. This makes it more difficult to predict vibratory behavior, when taking high modal density and extreme sensitivity to mistuning into account, and even more essential to ensure structural strength in the context of fatigue. In most cases, mistuning due to geometrical and material tolerances is unknown. Here, an analytical method has been developed to predict the average vibratory response of a clustered stator vane in which the Young modulus of certain blades is associated with a random variable mimicking the mistuning effect. This method is based on a linear approximation of the evolution of eigenfrequencies as a function of a random variables, as eigenvectors are almost constant, and a dynamic flexibility matrix reconstruction strategy. This method was tested on a simplified stator vane model based on a 2D Euler-Bernoulli beam lattice. The results are quite accurate when pressure is uniformly distributed on the “blades” and when the ferrule to blade stiffness ratio is high. This approach provides a simple model that can be used in the first stages of design as it allows fast simulation with a large number of random variables and with good approximation of the average vibratory response.

NOMENCLATURE

$C_{F/B}$ Ferrule/blade coupling factor
 E Young modulus
 F Excitation force vector
 I Area moment of inertia
 K Stiffness matrix
 M Mass matrix
 S Dynamical flexibility matrix
 U Displacements vector
 X Vector of random variables
 x Random variable
 Φ_j Eigenvector
 ρ Mass per unit volume
 ω Angular frequency

Subscript

b_j Random variable of the blade associated with the j^{th} mode
 i i^{th} random variable
 j j^{th} mode

Superscript

(c) Particular mistuned structure case
 t Transposed matrix
 $-$ Perfectly tuned structure case
 \sim Approximate quantity
 $*$ Conjugate matrix

*Address all correspondence to this author.

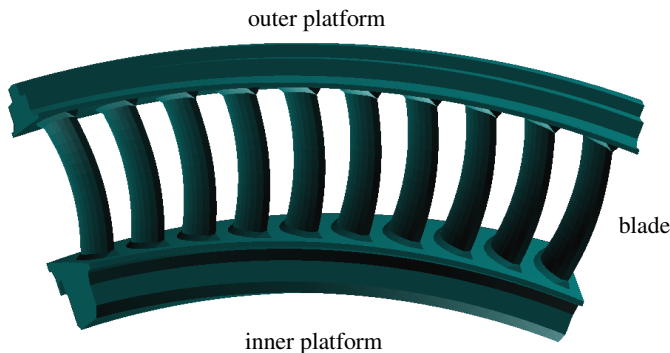


FIGURE 1. 10-blade stator vane cluster [2]

INTRODUCTION

In accordance with the objectives of the Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe from 2020 to 2050 [1], the aeronautical industry must achieve drastic reductions in fuel consumption. Among other things, this results in reducing the weight of mechanical parts while increasing their level of reliability. The sectorisation of stator vanes into several multi-blade clusters is one of the innovative solutions proposed by aircraft engine manufacturers (Fig. 1). The vibratory behavior of a monobloc clustered stator vane is studied in this paper.

This new architecture combined with the quest for mass gains implies the emergence of new design issues. First, sectorisation induces a loss of cyclic symmetry properties and very high modal density. The consequences are that it is no longer possible to compute a full 360° cluster vane using the model of a single blade cluster to which cyclic symmetry conditions are applied, as it results in greatly increased computation costs. Moreover, structure response is highly amplified by mistuning [3]. This is all the more critical as the lack of inter-cluster contact friction degrades the damping of the structure.

All these new properties make the vibratory response of a stator vane cluster very difficult to predict. Indeed, uncertainties on each blade of a cluster, such as dimensional tolerances and material defaults, must be considered to study the behavior of the vibratory response. Moreover, computational limits prevent the use of a classical Monte Carlo method [4–6]. That is why it is necessary to develop a method capable of robustly predicting the response of a mistuned stator vane cluster while minimizing computational time.

Statistical methods have already been explored in the past. These methods can be sorted into two categories: non-stochastic methods [7], such as the interval analysis [8, 9] or convex models of uncertainties [10], and stochastic methods [11] for which physical uncertainties are modeled by random variables, for example the well-known Monte Carlo method and the stochastic finite elements method [2, 12, 13]. This paper is based on the stochastic finite elements perturbation method developed by

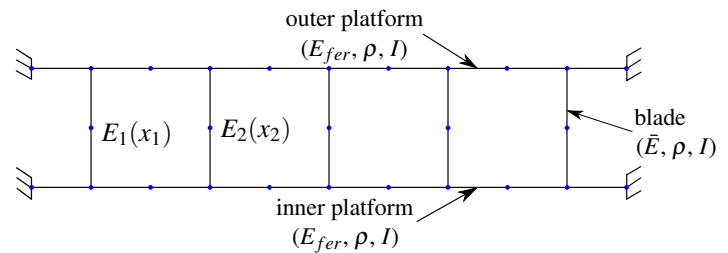


FIGURE 2. 2D model of a stator vane cluster

Baecher and Ingra in 1981 [14]. Here, it is adapted to analyzing high modal density systems complicated by modal reorderings as a function of random variables.

In the first part, a phenomenological study is presented to justify the modeling hypotheses and explain the expected advantages of this method. The second part describes theoretical aspects of the perturbation method while the last part presents the numerical results for a simple 2D model and provides an explanation of the method's limitations.

PHENOMENOLOGICAL STUDY

The method proposed in this paper was developed on the basis of the observations made on the evolution of eigenmodes according to the mistuning variation of a simple model of a stator vane cluster.

Description of the system

The stator vane cluster is composed of five blades linked by the upper and the lower ferrules, each modeled by a 2D Euler-Bernoulli beam as shown in Fig. 2. The structure contains twenty-three nodes. Two random standard uniform variables (x_1, x_2) , taking value in the space $[-1; 1]^2$, are introduced to describe the variation of the Young modulus of the first two blades (Eqn. (1) & Eqn. (2)):

$$E_1(x_1) = \bar{E}(1 + E_\sigma x_1), \quad (1)$$

$$E_2(x_2) = \bar{E}(1 + E_\sigma x_2). \quad (2)$$

\bar{E} represents the average Young modulus of the first two blades and the constant Young modulus of the three others. E_σ corresponds to the maximal variation of the Young modulus of the first two blades. A coupling factor $C_{F/B}$ between the Young modulus of the ferrules E_{fer} and the blades is introduced to simulate the difference of the area moment of inertia of the associated beams, as shown in Eqn. (3):

$$E_{fer} = C_{F/B} \bar{E}. \quad (3)$$

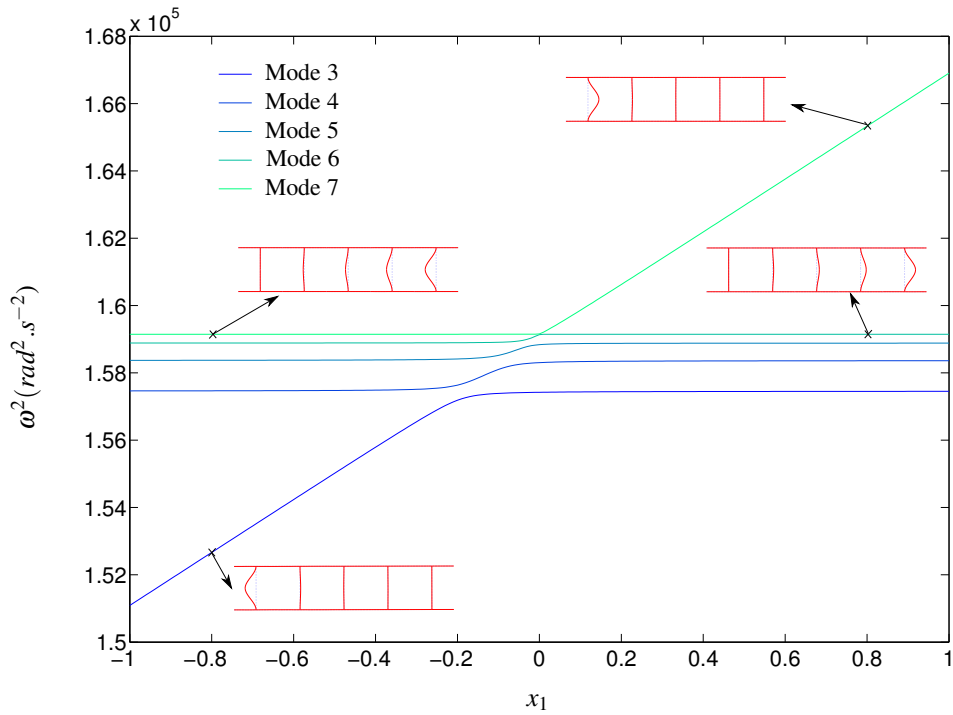


FIGURE 3. Evolution of squared angular frequencies according to x_1

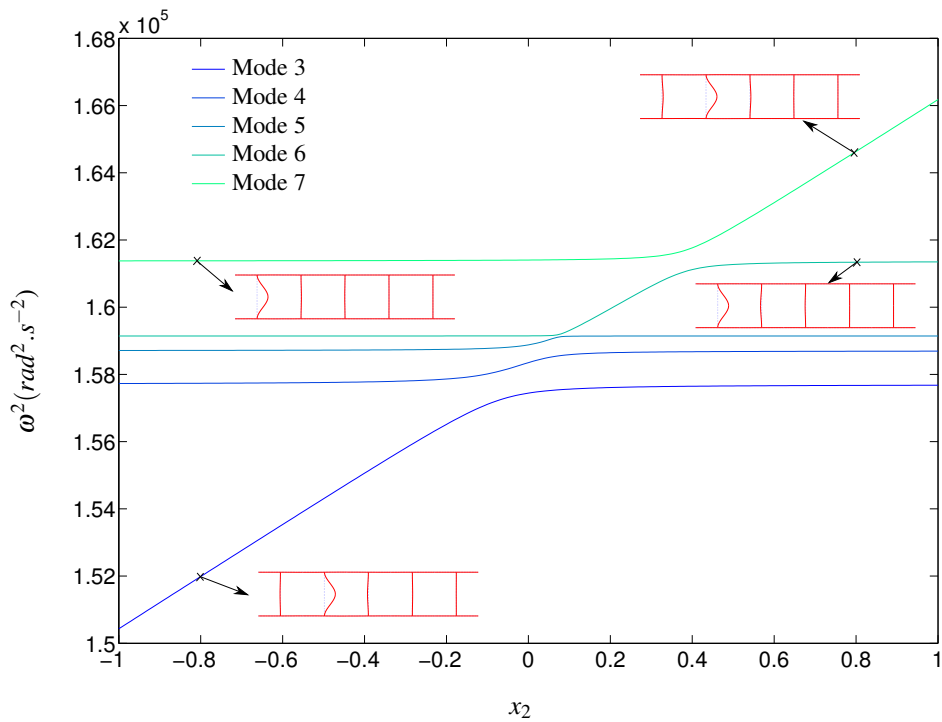


FIGURE 4. Evolution of squared angular frequencies according to x_2

Observations from numerical experiments

The aim is to observe the evolution of eigenmodes according to several values of the random variables x_1 and x_2 . Modal simulations are carried out for different values of (x_1, x_2) . The cluster is assumed to be made of steel and the coupling factor $C_{F/B}$ is about 100. The evolution of the squared angular frequency of modes 3 to 7 is plotted according to the first variable x_1 , as shown in Fig. 3. x_2 is assumed to be equal to 0.

First, the third mode is associated with the mode shape of the first blade when x_1 is negative. Then, the seventh mode is associated with the mode shape of the first blade when x_1 is positive. It is assumed that there the mode shape is transferred from the third mode to the seventh mode through intermediate modes. This assumption implies that the squared eigenfrequency associated with the mode shape of the first blade has a linear evolution whereas the others seem to be constant. Figure 4, which represents the squared angular frequencies of modes 3 to 7 as a function of x_2 assuming that x_1 is equal to 0.3, was plotted to validate these assumptions.

Figure 4 suggests that variable x_i associated with the i^{th} blade seems to be linked to the mode shape of this blade. More importantly, the squared angular frequency associated with the shape of the i^{th} blade seems to have a linear variation only as a function of the associated variable. Finally, Fig. 5 represents the Modal Assurance Criterion (MAC), defined by Eqn. (4) to compare eigenvectors for two mistuned configurations - x_1 and x_2 are equal to 0.3 and -0.8, respectively, for the first configuration, and to -0.7 and 0.2 for the second one. The observations made on this figure lead to assuming that the eigenvectors are almost constant whatever the mistuned configuration of a cluster.

$$MAC = \frac{(\Phi_1^T M \Phi_2)^2}{(\Phi_1^T M \Phi_1)(\Phi_2^T M \Phi_2)} = (\Phi_1^T M \Phi_2)^2 \quad (4)$$

M represents the mass matrix of the system, Φ_i represents the mass normalized eigenvectors that are compared.

Assumptions

Regarding the evolution of the squared angular frequencies, all these observations lead to the assumption of Eqn. (5), if the eigenmode corresponds to a blade mode and Eqn. (6) otherwise. Simultaneously, the mode shapes are assumed constant whatever the type of mode, as presented in Eqn. (7):

$$\tilde{\omega}_j^2 = \alpha_j x_{bj} + \beta_j, \quad (5)$$

$$\tilde{\omega}_j^2 = \omega_j^2, \quad (6)$$

$$\tilde{\Phi}_j = \Phi_j, \quad (7)$$

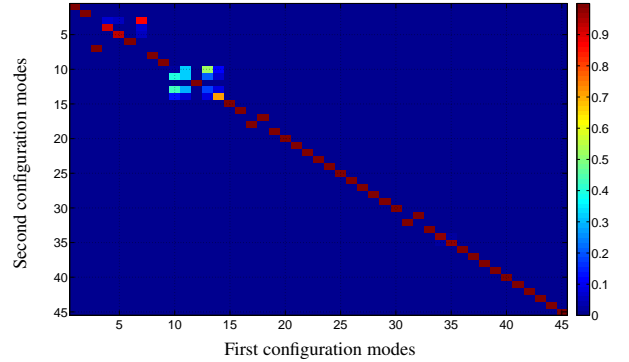


FIGURE 5. MAC between eigenvectors for two configurations

where $\tilde{\omega}$ represents the approximate angular frequency, $\tilde{\Phi}$ the approximate mode shape, the subscript j corresponds to the j^{th} mode, the subscript bj corresponds to the subscript of the random variable describing the evolution of the Young modulus of the blade associated with the j^{th} mode, α and β are the parameters of the linear evolution of several squared angular frequencies.

This phenomenological study leads to making several general assumptions: very low energy transfer between blades through the ferrule allowing the assumption that blade modes only behave according to the associated variable thus greatly simplifying the modeling of the structure. The next part describes the theoretical aspects used to extract the unknown parameters in Eqn. (5) and the approach used to implement this new method.

THEORETICAL ASPECTS OF THE STOCHASTIC FINITE ELEMENTS PERTURBATION METHOD

The aim of this part is to determine the parameters highlighted in Eqn. (5) and to compute the analytical average response of the system.

Modes approximation

Here, a n -blade stator vane cluster is considered, as shown in Fig. 2. A random standard uniform variable x_i is introduced on each blade, introducing uncertainty on the associated Young modulus, as shown in Eqn. (8):

$$E_i(x_i) = \bar{E}(1 + E_{var}x_i). \quad (8)$$

Equation (8) drives the stiffness matrix as shown in Eqn. (9):

$$\tilde{K} = \bar{K} + \sum_{i=1}^n K_i x_i, \quad (9)$$

where \bar{K} is the stiffness matrix of a tuned stator vane cluster and K_i is the stiffness matrix associated with the i^{th} blade dependent on the Young modulus E_i .

Assuming that the mode shapes are constant and mass normalized, as shown in Eqn. (7), it is possible to determine the parameters of the linear variation of the squared angular frequencies (Eqn. (5)) using the Rayleigh quotient, as shown in Eqn. (10):

$$\tilde{\omega}_j^2 = \frac{\tilde{\Phi}_j^t \tilde{K} \tilde{\Phi}_j}{\tilde{\Phi}_j^t \tilde{M} \tilde{\Phi}_j} = \frac{\Phi_j^t \tilde{K} \Phi_j}{\Phi_j^t M \Phi_j} = \Phi_j^t \tilde{K} \Phi_j, \quad (10)$$

where subscript j corresponds to the j^{th} mode. Substituting Eqn. (9) in Eqn. (10) leads to Eqn. (11):

$$\tilde{\omega}_j^2 = \Phi_j^t (\bar{K} + \sum_{i=1}^n K_i x_i) \Phi_j = \bar{\omega}_j^2 + \sum_{i=1}^n \Phi_j^t K_i \Phi_j x_i, \quad (11)$$

where $\bar{\omega}_j$ corresponds to the angular frequency of the j^{th} mode if the stator vane is perfectly tuned. Equation (11) can be simplified by taking into account the assumption that the mode associated with the b_j^{th} blade only depends on the random variable x_{b_j} . This assumption leads to Eqn. (12):

$$\sum_{i=1}^n \Phi_j^t K_i \Phi_j x_i = \begin{cases} \Phi_j^t K_{b_j} \Phi_j x_{b_j} & \text{if } j^{th} \text{ mode is a blade mode,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (12)$$

A linear approximation of the squared angular frequencies is obtained by introducing Eqn. (12) in Eqn. (11), as shown in Eqn. (13):

$$\tilde{\omega}_j^2 = \bar{\omega}_j^2 + \begin{cases} \Phi_j^t K_{b_j} \Phi_j x_{b_j} & \text{if } j^{th} \text{ mode is a blade mode,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (13)$$

However, the first part emphasises that assumptions are valid only when no tuning occurs. Thus the mode shapes used in Eqn. (12) must be calculated under this condition. Moreover, when the structure is perfectly tuned, it is impossible to link an

angular frequency to the mode shape of a particular blade. Therefore it is advisable to compute the reference angular frequency for a mistuned stator vane cluster and apply an adjustment, as shown in Eqn. (14):

$$\tilde{\omega}_j^2 = \omega_j^{(c)2} + \Phi_j^{(c)t} K_{b_j} \Phi_j^{(c)} (x_{b_j} - x_{b_j}^{(c)}). \quad (14)$$

if the j^{th} mode corresponds to the shape of b_j^{th} blade. In Eqn. (14), superscript (c) corresponds to the results in a particular known case of mistuned stator vane cluster.

Dynamical flexibility matrix

Now that an approximation of the modes of the structure has been performed, it is possible to build the dynamical flexibility matrix defined as the reciprocal dynamical stiffness matrix linking displacement vector U to excitation force vector F , as shown in Eqn. (15).

$$U = SF \quad (15)$$

Eqns. (5), (6) and (7) are used to simplify the expression of Eqn. (16). Hysteretic damping is introduced in the expression of the dynamical flexibility matrix S :

$$S = \sum_{j=1}^m \frac{\Phi_j \Phi_j^t}{(1 + i\eta)(\alpha_j x_{b_j} + \beta_j) - \omega^2}. \quad (16)$$

where m is the number of modes considered, Φ_j are the mass normalized mode shapes of the structure, i is the imaginary number, η is the hysteretic damping and ω is the angular frequency of the forced response.

Analytic average response

Now the expression has been simplified and expressed by Eqn. (16), it is possible to compute the average response of the system. Initially, the squared dynamical flexibility matrix is expressed by Eqn. (17):

$$SS^* = \sum_{j=1}^m \frac{(\Phi_j \Phi_j^t)^2}{(\alpha_j x_{b_j} + \beta_j - \omega^2)^2 + \eta^2 (\alpha_j x_{b_j} + \beta_j)^2} + \sum_{j=1}^m \frac{2\Phi_j \Phi_j^t}{((\alpha_j x_{b_j} + \beta_j - \omega^2)^2 + \eta^2 (\alpha_j x_{b_j} + \beta_j)^2)} + \sum_{k=j+1}^m \frac{\Phi_k \Phi_k^t}{((\alpha_k x_{b_k} + \beta_k - \omega^2)^2 + \eta^2 (\alpha_k x_{b_k} + \beta_k)^2)}. \quad (17)$$

To obtain the amplitude of the dynamical flexibility matrix, the square root of the expression in Eqn. (17) should be computed. Nevertheless, since the aim of the method is to obtain the average response analytically, it is impossible to compute the integral, contrary to Eqn. (17). The average of the squared amplitude of the dynamical flexibility matrix $\langle SS^* \rangle$ defined by Eqn. (18), is therefore computed:

$$\langle SS^* \rangle = \frac{1}{2^n} \int_{[-1;1]^n} SS^* dX, \quad (18)$$

where $X = (x_1, \dots, x_n)$ is the vector of random variables.

APPLICATIONS

Now that the theoretical aspects have been described, the method is tested on a simple 2D model of a clustered stator vane. The model is the same as that presented in the phenomenological study, except that a random standard uniform variable is introduced for each blade. Therefore a five-blade clustered stator vane modeled as a 2D Euler-Bernoulli beam lattice is considered. The Young modulus of each blade obeys a random standard uniform law, as shown in Eqn. (8).

First results

First, the average squared dynamical flexibility matrix is computed by assuming the coupling factor $C_{F/B}$ in Eqn. (3) is equal to 100. The air pressure profile is assumed to be uniformly spread on each blade. In accordance with finite element formalism, this assumption leads to a normal unit force applied in the middle of each blade.

Figure 6 represents the comparison between the average normal squared displacement of the node located in the middle of the second blade computed by the new method (blue dotted line) and by the reference Monte Carlo method (black line). 50,000 random samples for each frequency step were used for the Monte Carlo method. The excitation frequency range corresponds to the eigenfrequencies of the first blade modes.

This figure shows that the average squared response obtained by the new method is very close to that obtained using the Monte Carlo method. The variations observed in the latter stem from an excessively low number of random samples, but the computation resources did not allow going beyond this number. Indeed, several days were necessary for the Monte Carlo method compared with only a few minutes for the new method on the same computer. The results presented here were also valid for other blades.

The assumptions made during the formulation of this new method were then validated in this particular case. Nevertheless, the conditions given in the model are very specific and it would

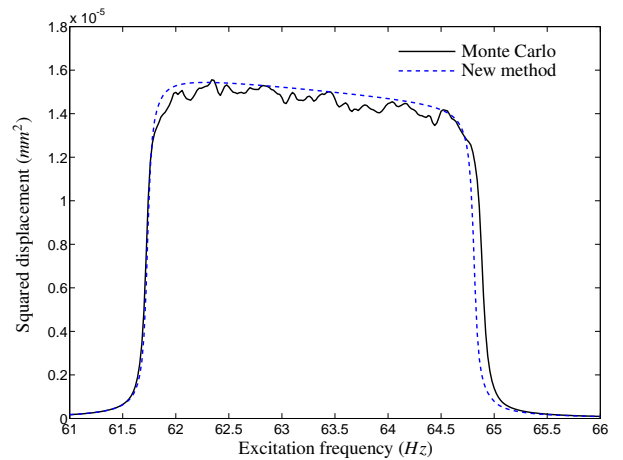


FIGURE 6. Average normal displacement of the second blade ($C_{F/B} = 100$)

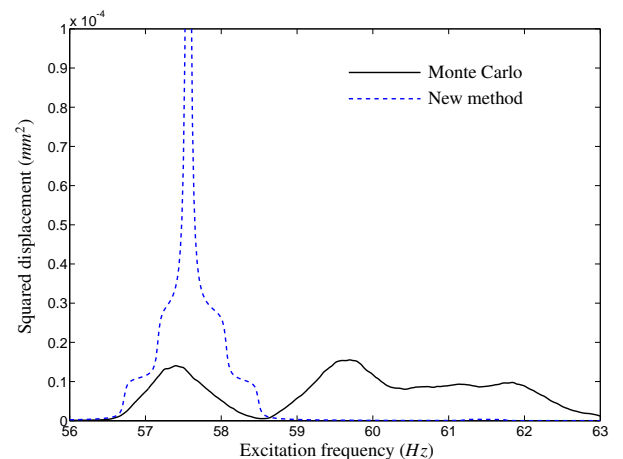


FIGURE 7. Average normal displacement of the second blade ($C_{F/B} = 10$)

be interesting to test the method for a lower blade/ferrule coupling factor and for a non-uniform pressure profile.

Blade/ferrule coupling factor influence

One of the most important assumptions is that each blade reacts independently of each other, but if the blade/ferrule coupling factor is too low, this assumption is no longer valid. The same test as in the previous subsection was performed made with a blade/ferrule coupling factor equal to 10 in Fig. 7 and equal to 1 in Fig. 8.

When observing these two new figures, it is clear that the

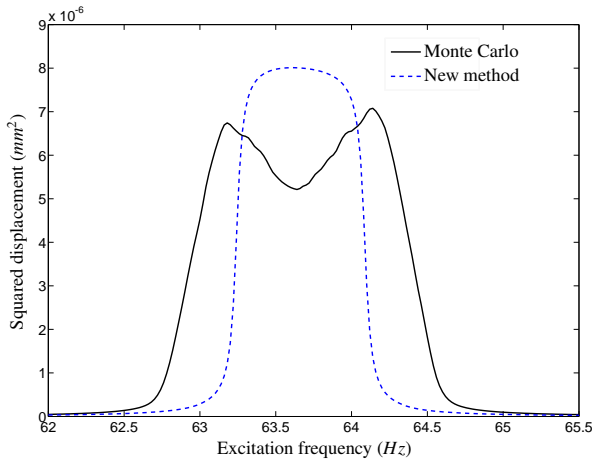


FIGURE 8. Average normal displacement of the second blade ($C_{F/B} = 1$)

blade/ferrule coupling factor has a non-negligible impact on the quality of the results. The assumption incriminated here is that the mode associated with the shape of a blade is only guided by the variable associated with that blade but if the blade/ferrule coupling factor is too low, certain blade/ferrule coupled modes emerge, which contradicts the initial assumption.

Pressure profile influence

It is now interesting to test the accuracy of this method for a non-uniform pressure profile. A test was performed by applying a normal excitation force as in Eqn. (19):

$$f_i = 0.25(i - 1)F_0, \quad (19)$$

where f_i is the force applied in the middle of the i^{th} blade, i is the subscript of the i^{th} blade and F_0 is a unit force.

Figure 9 presents the average squared normal response in the middle of the first blade (full line) and that of the third blade (dotted line). The approximation with the new method is still good for the third blade but not for the first one, i.e. when the pressure on the blade is null. In this new method, blade modes are independent of each other. Nevertheless, when the cluster is tuned, the vibration of one blade induces the vibration of its neighbors. This phenomenon is not taken into account by this new method, so the vibration of the four last blades barely induces the vibration of the first one. In practice, the computation of the average response takes the tuned case into account, which explains the difference between the Monte Carlo method and the new method for the first blade.

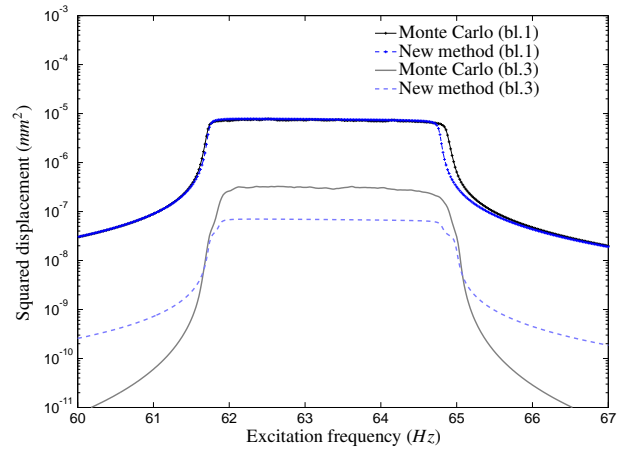


FIGURE 9. Average normal displacement of the first/third blade for a non-uniform pressure profile

However, this difference is not really a fundamental problem for two reasons. The first is that the level of response for a blade for which the applied pressure is almost null is very low compared to the other blades. Therefore there is no possibility of the maximum level of vibration being located on that blade. The second is that for an industrial case, there is hardly any possibility of the pressure profile not being uniformly spread over the clustered stator vane. Thus the method implemented is valid whatever the pressure profile.

CONCLUSION

With the emergence of new design issues due to the sectorisation and weight reduction of stator vanes, new computation methods must be implemented to reduce computation times, since the loss of cyclic symmetry requires taking into account the mistuning of the structure to correctly predict its vibratory response.

A phenomenological study was performed on a stator vane cluster modeled as 2D Euler-Bernoulli lattice beams. Random standard uniform variables were introduced to describe the evolution of the Young modulus of several blades. This study highlighted the linear behavior of the squared angular frequencies of modes associated with the blade shape and the almost constant behavior of all the modes according to the variables.

This method allowed predicting the average squared response of a clustered stator vane well whatever the mistuning pattern or pressure profile applied on the blades. Nevertheless, the blade/ferrule coupling factor must be high or low to obtain accurate results. This method presents the advantage of being extremely fast compared with the Monte Carlo method - at least 1000 times faster for the same computation resources. Computa-

tion time was linearly dependent on the number of random variables, thus it was not necessary to restrict it. The last advantage, though not the least, was that the average response was obtained by an analytical computation of the integral, meaning that it was not necessary to use the Monte Carlo method, thus leading to a substantial decrease in computation time.

Finally, it would be interesting to test this method on a real industrial case. Nevertheless, a comparison of the response obtained by this new method with the Monte Carlo method is not possible due to the computation time needed for a modal study of an entire cluster and the high number of samples required for the Monte Carlo method. Certain reduction methods such as the Craig-Bampton [15] and Benfield-Hruda [16] methods would be useful for reducing the computation time of a modal study.

ACKNOWLEDGMENT

Thanks go to SAFRAN Snecma for its technical and financial support. This work takes place in the framework of the MAIA mechanical research and technology program sponsored by CNRS, ONERA and SAFRAN.

REFERENCES

- [1] Advisory council for aviation research and innovation in europe. [Online].
- [2] Sall, A. C., Thouverez, F., Blanc, L., and Jean, P., 2012. "Stochastic behaviour of mistuned stator vane sectors: An industrial application". *Shock and Vibration*, **19**(5), pp. 1041 – 1050.
- [3] Pierre, C., and Cha, P. D., 1989. "Strong mode localization in nearly periodic disordered structures". *AIAA Journal*, **27**(2), pp. 227 – 241.
- [4] Bauer, W., 1958. "The Monte Carlo method". *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **6**(4).
- [5] Blinder, K., and Heermann, D. W., 2002. *Monte Carlo simulation in statistical physics*. Springer; 4th, enlarged edition.
- [6] Kroese, D. P., and Rubinstein, R. Y., 2008. *Simulation and the Monte Carlo method, 2nd Edition*. Wiley.
- [7] Klir, G., 1991. "Generalized information method". *Fuzzy sets and systems*, **40**, pp. 127 – 142.
- [8] Dessombz, O., Thouverez, F., Lainé, J. P., and Jézéquel, L., 2001. "Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite elements methods". *Journal of Sound and Vibration*, **239**, pp. 949 – 968.
- [9] Moore, R. M., 1979. "Methods and applications of interval analysis". *Studies in Applied Mathematics*.
- [10] Ben-Haim, Y., and Elishakoff, I., 1990. *Convex models of uncertainty in applied mechanics*. Elsevier.
- [11] Berveiller, M., Sudret, B., and Lemaire, M., 2004. "Comparison of methods for computing the response coefficients in stochastic finite element analysis". In Proc. AsRANETS 2.
- [12] Ghanem, R., and Spanos, P., 1991. *Stochastic finite elements : A spectral approach*. Springer-Verlag.
- [13] Nechak, L., Berger, S., and Aubry, E., 2010. "Robust analysis of uncertain dynamic systems : combination of the Centre Manifold and polynomial chaos theories". *WSEAS Transactions on systems*, **9**(4), pp. 386 – 395.
- [14] Beacher, G. B., and Ingra, T. S., 1981. "Stochastic FEM in settlement predictions". *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, **114**, pp. 449 – 462.
- [15] Craig, R., and Bampton, M., 1968. "Coupling of substructures for dynamic analysis". *AIAA Journal*, **6**, pp. 1313 – 1319.
- [16] Benfield, W., and Hruda, R., 1971. "Vibration analysis of structures by component mode substitution". *AIAA Journal*, **9**, pp. 1255 – 1261.

GT2015-42358

VIBRATORY BEHAVIOR PREDICTION OF A MISTUNED CLUSTERED STATOR VANE: NON-INTRUSIVE STOCHASTIC METHODS

Jonathan Philippe^{a,b,*}; Fabrice Thouverez^a, Laurent Blanc^a, Marion Gruin^b

(a) École Centrale de Lyon, Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes
36, avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully Cedex, France

(b) SAFRAN Snecma, 77550 Moissy-Cramayel, France

Email : Jonathan.Philippe@centraliens-lyon.net

ABSTRACT

The role of stator vanes is to straighten the air flow on each stage of axial compressors. They are so subject to dynamically fluctuating high pressure loads. Furthermore, monobloc clustered designs have been developed to facilitate manufacturing process and reduce costs, but they result in loss of cyclic symmetry properties and very low structural damping. This makes it more difficult to predict vibratory behavior, when taking high modal density and extreme sensitivity to mistuning into account, and even more essential to ensure structural strength in the context of fatigue. In most cases, mistuning due to geometrical and material tolerances is unknown. Here, a non-intrusive spectral stochastic method has been developed to predict the vibratory behavior of a clustered stator vane in which the Young modulus of some blades is associated with a random variable representing the mistuning effect. This method is based on a stochastic modal analysis which consists in projecting eigenfrequencies and modes shapes on a polynomial chaos basis. Computation of spectral coefficients is performed through non intrusive ways - making the method applicable to any problem - as Smolyak projection or regression by least square method. These two methods are compared based on criteria of computations costs, accuracy, robustness and convergence. These methods have been tested on a simplified stator vane model - based on a 2D Euler-Bernoulli beams assembly. Regression method provides rather accurate results unlike Smolyak projection whatever the initial configura-

tions of the problem. Computation costs are reasonable but could increase really fast according to polynomial degree and stochastic dimension. Thus, regression method is an accurate, robust and fast enough method to predict the vibratory behavior of a mistuned clustered stator vane.

NOMENCLATURE

$C_{P/B}$	Platform/blade coupling factor
E	Young modulus
F	Excitation force vector
I	Area moment of inertia
K	Stiffness matrix
M	Mass matrix
S	Dynamical flexibility matrix
U	Displacements vector
X	Random variables vector
x	Random variable
Φ	Eigenvector
Ψ	Legendre polynomial
ρ	Mass per unit volume
ω	Angular frequency
Superscript	
T	Transposed matrix
$-$	Mean value
\sim	Approximate quantity

*Address all correspondence to this author.

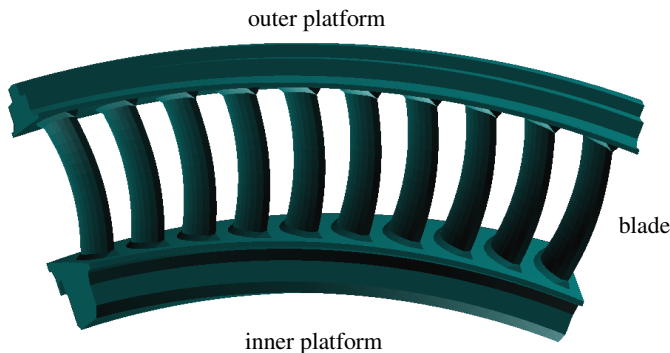


FIGURE 1. 10-blade stator vane cluster [2]

INTRODUCTION

In accordance with the objectives of the Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe from 2020 to 2050 [1], the aeronautical industry must achieve drastic reductions in fuel consumption. Among other things, this results in reducing the weight of mechanical parts while increasing their level of reliability. The sectorisation of stator vanes into several multi-blade clusters is one of the innovative solutions proposed by aircraft engine manufacturers (Fig. 1). The vibratory behavior of a monobloc clustered stator vane is studied in this paper.

This new architecture combined with the quest for mass gains implies the emergence of new design issues. First, sectorisation induces a loss of cyclic symmetry properties and very high modal density. The consequences are that it is no longer possible to compute a full 360° cluster vane using the model of a single blade cluster to which cyclic symmetry conditions are applied, because it results in greatly increased computation costs. Moreover, structural response is highly amplified by mistuning [3]. This is all the more critical as the lack of inter-cluster contact friction degrades the damping of the structure.

All these new properties make the vibratory response of a stator vane cluster very difficult to predict. Indeed, uncertainties on each blade of a cluster, such as dimensional tolerances and material defaults, must be considered to study the behavior of the vibratory response. Moreover, computational limits prevent the use of a classical Monte Carlo method [4–6]. That is why it is necessary to develop a method capable of robustly predicting the response of a mistuned stator vane cluster while minimizing computation time.

Statistical methods have already been explored in the past. These methods can be sorted into two categories. Firstly, non-stochastic methods [7], such as the interval analysis [8, 9] or convex models of uncertainties [10]. Secondly, stochastic methods [11] for which physical uncertainties are modeled by random variables, for example the well-known Monte Carlo method and the stochastic finite elements method [2, 12–15].

This paper is based on the spectral stochastic finite elements

method. Non-intrusive approaches are used and compared such as collocation, projection and regression methods. The first part describes theoretical aspects of the non-intrusive spectral method while the last part presents the numerical results for a simple 2D model.

THEORETICAL ASPECTS

Spectral stochastic finite elements method consist in projecting required output variables on an orthogonal polynomial chaos basis, developed by Wiener [16, 17]. Polynomials making this basis up depend on random variables representing uncertainties of input parameters. The non-intrusive approach allows to generate an algorithm which does not depend on the studied system. Indeed, only results on requested output variables for some deterministic setup are necessary.

Polynomial chaos

Let us consider some mechanical system whose m input parameters present uncertainties. Each one of the m uncertain parameters E_i follow a uniform law centered on the mean \bar{E}_i and with a maximal percentage variability $E_{i,\sigma}$ (Eqn. (1)):

$$E_i \sim \mathcal{U}(\bar{E}_i(1 - E_{i,\sigma}), \bar{E}_i(1 + E_{i,\sigma})). \quad (1)$$

In order to simplify the method, a change of variable is made to get m uniform random variables x_i centered on zero taking values into $[-1; 1]$ (Eqn. (2)):

$$x_i \sim \mathcal{U}(-1, 1). \quad (2)$$

Eqn. (3) gives the relation between introduced variables:

$$E = \bar{E}(1 + E_\sigma^T X). \quad (3)$$

Where $E = (E_1, \dots, E_m)^T$ is the uncertain input parameters vector, $\bar{E} = (\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_m)^T$ is the mean values vector, $E_\sigma = (E_{1,\sigma}, \dots, E_{m,\sigma})^T$ is the maximal percentage variability vector and $X = (x_1, \dots, x_m)^T$ is random variables vector.

The idea is to approximate required output variable Y projecting it on Wiener's homogeneous chaos [16] (Eqn. (4)). The solution Y needs to be \mathcal{C}^1 on the compact $[-1; 1]^m$ to get a good approximation \tilde{Y} .

$$\tilde{Y}(X) = \sum_{k=1}^p y_k \Psi_k(X) \quad (4)$$

y_k are the chaos coefficients to be determined and p is the number of chaos polynomials. p depends on the stochastic dimension m and the polynomial degree n (Eqn. (5)):

$$p = \frac{(n+m)!}{n! m!}. \quad (5)$$

Ψ_k are the chaos polynomials. In this case, it corresponds to Legendre polynomials which characterize uniform distribution.

Computation of chaos coefficients

This section presents methods to compute chaos coefficients (Eqn. (4)) through a non-intrusive approach. Classical mathematical tools allowing this computations are:

- collocation method,
- projection method,
- regression method.

Collocation method consists in considering that the approximate solution is equal to the exact solution for p patterns where p is the number of chaos coefficients. Some tests show that the method is extremely fast but is also extremely dependent on the choice of deterministic computations and too much restrictive. That is why it is not presented in this paper. Subsequently, only both last methods are presented and compared.

Projection method This method [11] consists in projecting the exact solution Y on each of the p chaos polynomial Ψ_k . The orthogonal property of chaos polynomials allows to easily pick the corresponding chaos coefficient out (Eqn. (6)):

$$\begin{aligned} \forall k = 1..p, y_k &= \frac{\langle Y, \Psi_k \rangle}{\langle \Psi_k, \Psi_k \rangle} \\ &= \frac{1}{\|\Psi_k\|^2} \int_{[-1;1]^m} Y(X) \Psi_k(X) dX = \frac{I(Y\Psi_k)}{\|\Psi_k\|^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

The problem is now to compute the numerator of Eqn. (6) whereas the exact solution Y is not known. A discrete method has to be implemented to compute this integral such as rectangle method, trapezoidal rule, gaussian quadratures, Simpson's rule and so on. But all these methods require n^m deterministic computations - where m is the stochastic dimension and n the polynomial degree - which is excessive. Gauss-Legendre quadrature adapted by Smolyak [18–20] is more suited to the problem. The integral is so defined by Eqn. (7):

$$\begin{aligned} \forall k = 1..p, \\ I(Y\Psi_k) &= \sum_{q=\max(0, n+1-m)}^n \sum_{r=1}^{\text{card}(L_q)} (-1)^{n+q} \binom{m-1}{n-q} J^{L_q(r)}(Y\Psi_k), \\ \text{with } L_q &= \left\{ (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m / \sum_{j=1}^m i_j = m+q \right\} \text{ and} \quad (7) \\ J^{L_q(r)} &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m=1}^{n_m} \left(\prod_{j=1}^m \omega_{i_j} \right) Y(x_1^{(i_1)}, \dots, x_m^{(i_m)}) \Psi_k(x_1^{(i_1)}, \dots, x_m^{(i_m)}). \end{aligned}$$

$x_j^{(i_j)}$ corresponds to the i_j^{th} root of Legendre polynomial of degree n_j and ω_{i_j} to the gaussian quadrature weights associated to this root.

Smolyak projection requires a fixed number of deterministic computations relieving the problem of convergence and reasonable compared to classical discrete method. Moreover, computation is a simple combination of basic operations such as additions and multiplications. Nevertheless, this method imposes strict conditions about the choice of deterministic computations which might distort the results.

Regression method This method is based on the minimization by the least square method of the error between the approximate solution \tilde{Y} and the exact one Y (Eqn. (8)):

$$\begin{aligned} \min\{E\} &= \min \left\{ \sum_{i=1}^R (Y^{(i)} - \tilde{Y}^{(i)})^2 \right\} = \\ &= \min \left\{ \sum_{i=1}^R (Y^{(i)} - \sum_{j=1}^p y_j \Psi_j(X^{(i)}))^2 \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

R represents the number of deterministic computations and $X^{(i)}$ the random variables vector corresponding to the i^{th} configuration.

This method is really simple to implement and the choice of deterministic computations is free. Nevertheless, it is necessary to solve a linear system involving a matrix inversion whose dimension depends on the number of chaos polynomials p and which might be singular. Moreover, the accuracy of results depends on the number of deterministic computations R which can become very important to get converged results.

Post-processing

These two methods are tested and compared to a Monte-Carlo method which is the reference. The comparison is based

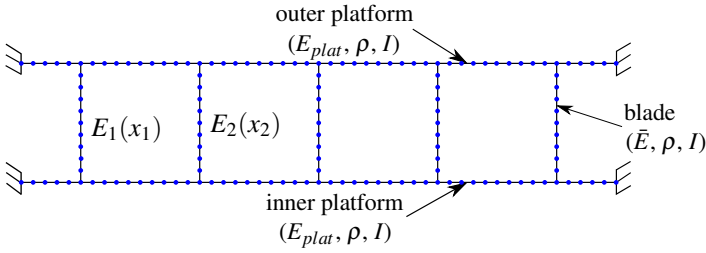


FIGURE 2. 2D model of a stator vane cluster

on the accuracy of the two first statistical moments, the mean and the standard deviation. Due to the orthogonal property of chaos polynomials, these moments can be easily obtained through Eqn. (9) for the mean and Eqn. (10) for the standard deviation.

$$\bar{Y} = E[\tilde{Y}] = \int_{[-1;1]^m} \tilde{Y}(X) dX = y_1 \quad (9)$$

$$\sigma_{\tilde{Y}} = \sqrt{\text{Var}[\tilde{Y}]} = \sqrt{\int_{[-1;1]^m} \tilde{Y}(X)^2 dX - E[\tilde{Y}]^2} = \sqrt{\sum_{i=2}^p y_i^2} \quad (10)$$

APPLICATION AND RESULTS

In order to compare Smolyak projection and regression method, eigenfrequencies and eigenshapes of a mistuned clustered stator vane are approximated and compared to a Monte Carlo method which is the reference.

Description of the system

The stator vane cluster is composed of five blades linked by the outer and the inner platforms - each modeled by 2D Euler-Bernoulli beam as shown in Fig. 2. The structure contains 143 nodes. Some random uniform variables (x_i) - taking value in the space $[-1; 1]$ - are introduced to describe the variation of some blades' Young modulus (Eqn. (11)):

$$E_i(x_i) = \bar{E}(1 + E_{\sigma}x_i). \quad (11)$$

\bar{E} represents the average Young modulus. E_{σ} corresponds to the maximal variation percentage of blades Young modulus. A coupling factor $C_{P/B}$ between platforms Young modulus E_{plat} and the blades' Young modulus is introduced to simulate the difference of area moment of inertia of associated beams, as shown in Eqn. (12):

$$E_{plat} = C_{P/B}\bar{E}. \quad (12)$$

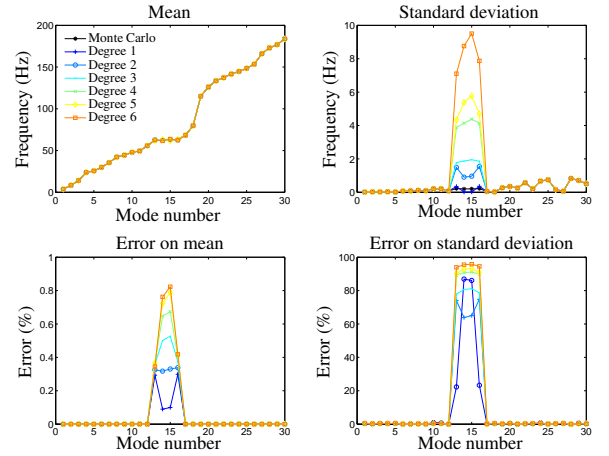


FIGURE 3. First statistical moments of eigenfrequencies by Smolyak projection

Eigenmodes approximation

In order to summarize results, stochastic dimensions of one and two ($m = 1$ & $m = 2$) are not presented here because both methods perfectly work in these cases and are less interesting than the case of stochastic dimension of five ($m = 5$). Comparison is made for the thirty first modes. Coupling factor is fixed to $C_{P/B} = 1$ because it better corresponds to industrial stator vanes. Only the displacement associated to mass normalized mode shape on the first blade is presented in this paper but results are similar for all other nodes. Eigenmodes first statistical moments (mean and standard deviation) are compared for several polynomial degrees in order to estimate the one from which convergence is reached.

Smolyak projection method results Firstly, Smolyak projection of eigenfrequencies is studied for polynomial degree from one to six (colored lines) and compared to Monte-Carlo results which is the reference (black line). Fig. 3 shows results on the eigenfrequencies mean (top-left corner), the eigenfrequencies standard deviation (top-right corner) and the associated errors (bottom).

On the one hand, eigenfrequencies mean is well approximated whatever the polynomial degree with an error lower than 1%. On the other hand, Smolyak standard deviations highly differ from Monte-carlo's ones, especially on the frequency plateau being characteristic of the high modal density (blades modes). This difference is typical of a dispersal around the mean frequency more important for Smolyak projection than Monte-Carlo method.

Moreover, the error increases with the polynomial degree. First, response surface to approximate is included in a 5D space

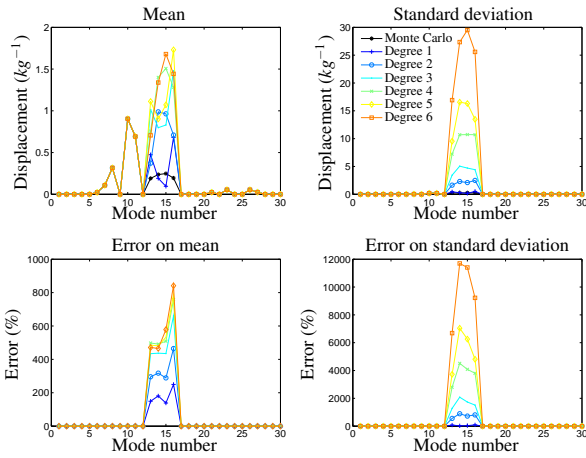


FIGURE 4. First statistical moments of eigenshapes by Smolyak projection

and is subject to strong fluctuation. Then, the choice of deterministic computations is very strict for Smolyak projection and so greatly constrains the solution. So the higher the polynomial degree, the higher the wavering of the polynomial solution. This implies that a highly constrained interpolation is subject to high fluctuation, especially on the boundaries of the compact, impacting the standard deviation a lot. Thus, the approximation of eigenfrequencies is not accurate whatever the polynomial degree.

Secondly, Smolyak projection of eigenshapes is studied for polynomial degree from one to six (colored lines) and compared to Monte-Carlo results which is the reference (black line). Fig. 4 shows results on the eigenshapes mean (top-left corner), the eigenshapes standard deviation (top-right corner) and the associated errors (bottom).

Mode shape approximation is even worse than frequencies' one. Neither the mean nor the standard deviation are accurate with an error much higher than 100%. Once again, the higher the polynomial degree, the higher the error which highlights the fluctuating solution hypothesis. This wavering is the Runge phenomenon.

More simulations have been made changing the coupling factor, boundaries conditions, Young modulus variation range but no improvement of results has been noticed. Finally, Smolyak projection method does not provide accurate results when stochastic dimension increases. The strict choice of deterministic computations tends to skew the approximated solution. So the solution is highly wavering on the boundaries making it useless.

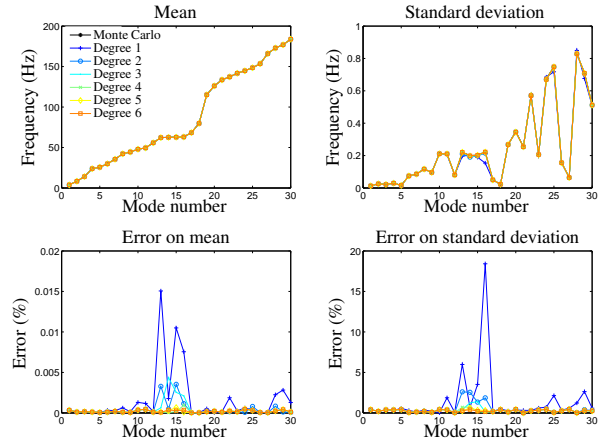


FIGURE 5. First statistical moments of eigenfrequencies by regression

Regression method results Thirdly, regression of eigenfrequencies is studied for polynomial degree from one to six (colored lines) and compared to Monte-Carlo results which is the reference (black line). Fig. 5 shows results on the eigenfrequencies mean (top-left corner), the eigenfrequencies standard deviation (top-right corner) and the associated errors (bottom).

In this case, first statistical moments correlation is excellent for both means with an error lower than 0.02% and standard deviations with an error lower than 1%. Moreover, a convergence of results is observed when polynomial degree increases since the error goes from more than 15% to less than 1% for the sixteenth mode. Thus, regression method provides much better results than Smolyak projection at this stage.

Fourthly, regression of eigenshapes is studied for polynomial degree from one to six (colored lines) and compared to Monte-Carlo results which is the reference (black line). Fig. 6 shows results on the eigenshapes mean (top-left corner), the eigenshapes standard deviation (top-right corner) and the associated errors (bottom).

Once again, results are satisfactory for both mean with an error lower than 2% and standard deviation with an error lower than 10%, and results convergence is highlighted by increasing the polynomial degree. Nevertheless, the higher the polynomial degree, the lower the accuracy benefit so increasing too much the polynomial degree does not seem necessary especially as it influences the number of deterministic computations a lot.

More simulations have been made changing the coupling factor, boundaries conditions, Young modulus variation range and results remain similar. Finally, regression method seems to provide accurate results compared to Smolyak projection method. Nevertheless, accuracy depends on polynomial degree.

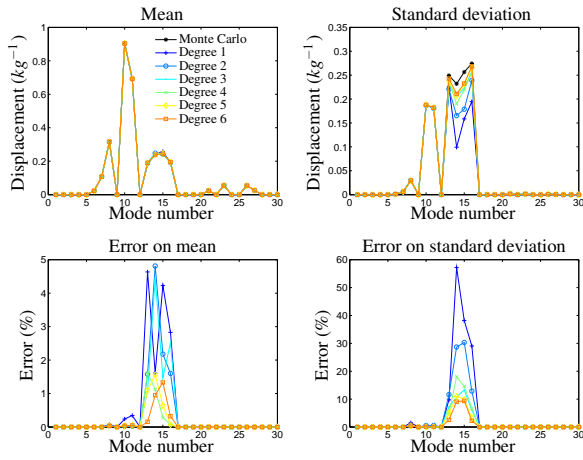


FIGURE 6. First statistical moments of eigenshapes by regression

Degree	Smolyak	Regression	Monte-Carlo
1	11	66	50,000
2	61	168	
3	241	616	
4	781	1,260	
5	2,203	3,528	
6	5,593	4,158	

TABLE 1. Number of deterministic computations

Regression depends on a matrix inversion whose dimension depends on the polynomial degree. The number of deterministic computations is so impacted to have both a non-singular matrix and a converged computation.

Computation costs comparison Tab. 1 illustrates the number of deterministic computations to perform by Smolyak projection method and regression method to have converged results according to the polynomial degree. Regression method is much more accurate than Smolyak projection method but requires more deterministic computations. This ratio decreases with the polynomial degree. It is so necessary to wisely choose the polynomial degree to get accurate results without increasing computation costs a lot. However, computation costs remain much lower than Monte Carlo method.

Dynamical flexibility matrix

The aim of this paper being to predict the vibratory response of a mistuned clustered stator vane, it would be interesting to get

the approximated dynamical flexibility matrix. But, its gradient is too high around resonance to be approximated by polynomial functions. That is why it would be wiser to approximate eigenmodes which have smoother variations in a first time and build the dynamical flexibility matrix from eigenmodes approximation in a second time.

The dynamical flexibility matrix is defined as the reciprocal dynamical stiffness matrix linking displacement vector U to excitation force vector F as shown in Eqn. (13):

$$U = SF = (K - \omega^2 M)^{-1} F. \quad (13)$$

Where U is the displacement vector, F is the force vector, K is the stiffness matrix, M is the mass matrix, ω is the excitation frequency and S is expressed by Eqn. (14):

$$S(X) = \sum_{j=1}^m \frac{\Phi_j(X) \Phi_j'(X)}{(1 + i\eta) \omega_j^2(X) - \omega^2}. \quad (14)$$

Where m is the number of considered modes, (Φ_j, ω_j) are the mass normalized modes of the structure, X is the random uniform variables vector, i is the imaginary number, η is the hysteretic damping and ω is the angular frequency of the forced response. Introducing $(\tilde{\Phi}_j, \tilde{\omega}_j)$ instead of (Φ_j, ω_j) in Eqn. (14) leads to the approximated solution $\tilde{s}(X)$.

It is now enough to post-process results computing statistical outputs such as the mean, the standard deviation, quantiles, extreme values and so on. Analytic computation of these outputs being extremely complicated, they are got through Monte-Carlo method. Despite it is necessary to resort to Monte-Carlo method, no modal analysis is required to compute the dynamical flexibility for a mistuned configuration.

Results on frequency response Figs. 7 & 8 illustrates the frequency response of the first blade subject to a unit normal force. Polynomial degree is fixed to 5 which seems to be a good compromise between accuracy and computation costs. Modal truncation has been made to one hundred first modes and 50,000 samples have been computed for both methods. Excitation frequency range corresponds to the first modal plateau corresponding to first flexural blades modes. Fig. 7 shows the mean (μ) and the mean added to the standard deviation (σ) for both regression method (blue lines) and classical Monte-Carlo method (dark lines). Fig. 8 presents envelopes of the frequency response (minimum and maximum values) for both regression method (green lines) and classical Monte-Carlo method (dark

Configuration	$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$
1	$X^{(1)} = (0, 0, 0, 0, 0)$
2	$X^{(2)} = (-3.5\%, +1\%, +5\%, -0.5\%, +3\%)$
3	$X^{(3)} = (+5\%, -5\%, +5\%, -5\%, +5\%)$

TABLE 2. Mistuned configurations

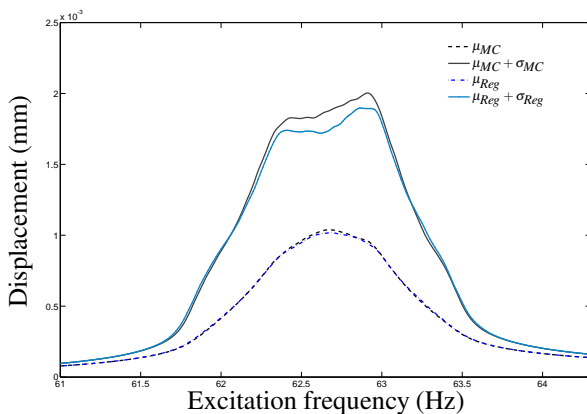


FIGURE 7. Frequency response statistical moments of the first blade subject to a unit normal force

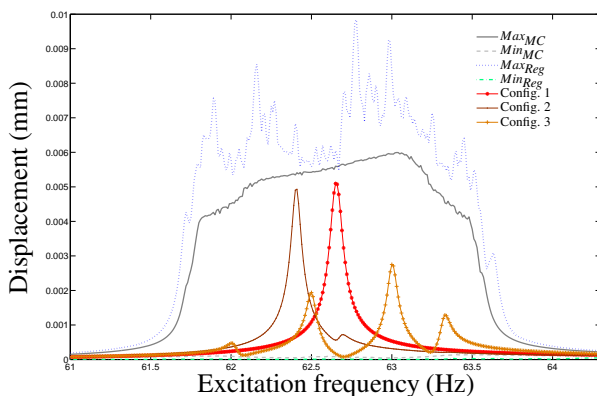


FIGURE 8. Frequency response envelope of the first blade subject to a unit normal force

lines). Three arbitrary known cases (Tab. 2) have been plotted (red lines).

Results are rather good concerning mean and standard deviation. The maximal envelope is a bit higher than the reference because of the approximation of modes by polynomial functions. Indeed, solution approximations are not good on the boundaries because of the wavering effect of polynomial functions. Thus, it

would be interesting to improve post-processing using extreme values theory [21]. However, three cases are inside the envelope and show that frequency response and so vibratory levels may be really different according to mistuning.

Computation costs Furthermore, around twenty minutes are necessary to compute this frequency response function from approximated modes by regression method against more than five hours for classical Monte-Carlo method with the same computation power (3.20GHz processor). As soon as modes have been approximated the regression method is around fifteen times faster than a classical Monte-Carlo method.

CONCLUSION

With the emergence of new design issues due to the sectorisation and weight reduction of stator vanes, new computation methods must be implemented to reduce computation times, since the loss of cyclic symmetry requires taking the mistuning of the structure into account to correctly predict its vibratory response.

Spectral stochastic finite elements methods using a non-intrusive approach provide various results. Smolyak projection method does not provide accurate results because of a too much constrained choice of deterministic computations. However, regression methods provide excellent results whatever initial conditions (coupling factor, boundary conditions...).

This method has the advantage to be simple to implement but might present convergence problems if the number of deterministic computations is not sufficient. This method is extremely fast compared to the classical Monte-Carlo method but computation costs could increase a lot according to the stochastic dimension and the polynomial degree.

Finally, it would be interesting to test this method on a real industrial case. Nevertheless, a comparison of the response obtained by this new method with the Monte Carlo method is not possible due to the computation time needed for a modal study of an entire cluster and the high number of samples required for the Monte Carlo method. Certain reduction methods such as the Craig-Bampton [22] and Benfield-Hruda [23] methods would be useful for reducing the computation time of a modal study. It would be also interesting to study intentional mistuning behavior effect on this prediction method, putting a different average Young modulus on each blade [24].

ACKNOWLEDGMENT

Thanks go to SAFRAN Snecma for its technical and financial support. This work takes place in the framework of the MAIA mechanical research and technology program sponsored by CNRS, ONERA and SAFRAN.

REFERENCES

- [1] Advisory council for aviation research and innovation in europe. [Online].
- [2] Sall, A. C., Thouverez, F., Blanc, L., and Jean, P., 2012. “Stochastic behaviour of mistuned stator vane sectors: An industrial application”. *Shock and Vibration*, **19**(5), pp. 1041 – 1050.
- [3] Pierre, C., and Cha, P. D., 1989. “Strong mode localization in nearly periodic disordered structures”. *AIAA Journal*, **27**(2), pp. 227 – 241.
- [4] Bauer, W., 1958. “The Monte Carlo method”. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **6**(4).
- [5] Blinder, K., and Heermann, D. W., 2002. *Monte Carlo simulation in statistical physics*. Springer; 4th, enlarged edition.
- [6] Kroese, D. P., and Rubinstein, R. Y., 2008. *Simulation and the Monte Carlo method, 2nd Edition*. Wiley.
- [7] Klir, G., 1991. “Generalized information method”. *Fuzzy sets and systems*, **40**, pp. 127 – 142.
- [8] Dessombz, O., Thouverez, F., Lainé, J. P., and Jézéquel, L., 2001. “Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite elements methods”. *Journal of Sound and Vibration*, **239**, pp. 949 – 968.
- [9] Moore, R. M., 1979. “Methods and applications of interval analysis”. *Studies in Applied Mathematics*.
- [10] Ben-Haim, Y., and Elishakoff, I., 1990. *Convex models of uncertainty in applied mechanics*. Elsevier.
- [11] Berveiller, M., Sudret, B., and Lemaire, M., 2004. “Comparison of methods for computing the response coefficients in stochastic finite element analysis”. In Proc. AsRANETS 2.
- [12] Ghanem, R., and Spanos, P., 1991. *Stochastic finite elements : A spectral approach*. Springer-Verlag.
- [13] Nechak, L., Berger, S., and Aubry, E., 2010. “Robust analysis of uncertain dynamic systems : combination of the Centre Manifold and polynomial chaos theories”. *WSEAS Transactions on systems*, **9**(4), pp. 386 – 395.
- [14] Beacher, G. B., and Ingra, T. S., 1981. “Stochastic FEM in settlement predictions”. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, **114**, pp. 449 – 462.
- [15] Philippe, J., Thouverez, F., Blanc, L., and Gruin, M. “A simplified method for predicting the average vibratory response of mistuned clustered stator vanes”. ASME TurboExpo 2014 Dusseldorf (Germany).
- [16] Wiener, N., 1938. “The homogeneous chaos”. *American Journal of Mathematics*, **60**, pp. 897–936.
- [17] Sasri, D., Azrar, L., Jebbouri, A., and Hami, A. E., 2010. “Component mode synthesis and polynomial chaos expansions for stochastic frequency functions of large linear fe models”. *Computers and Structures*.
- [18] Smolyak, S., 1963. “Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions”. *Soviet Mathematics Doklady*, **4**, pp. 240–243.
- [19] Heiss, F., and Winschel, V., 2008. “Likelihood approximation by numerical integration on sparse grids”. *Journal of Econometrics*.
- [20] Elred, M., and Burkardt, J., 2009. “Comparison of non-intrusive polynomial chaos and stochastic collocation methods for uncertainty quantification”. *AIAA journal*.
- [21] Reiss, R., and Thomas, M., 2001. *Statistical analysis of extreme values*. Birkhäuser, Basel.
- [22] Craig, R., and Bampton, M., 1968. “Coupling of substructures for dynamic analysis”. *AIAA Journal*, **6**, pp. 1313 – 1319.
- [23] Benfield, W., and Hrudá, R., 1971. “Vibration analysis of structures by component mode substitution”. *AIAA Journal*, **9**, pp. 1255 – 1261.
- [24] Castanier, M., and Pierre, C., 2002. “Using intentional mistuning in the design of turbomachinery rotors”. *AIAA Journal*, **40**, pp. 2077 – 2086.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

M. J-C. GOLINVAL

Professeur - Université de Liège - LTAS - Quartier Polytech 1 - allée de la découverte
B-4000 LIEGE 1 - Belgique

et de

M. S. COGAN

Chargé de Recherche HDR - Université de France-Comté - FEMTO-ST
Département Mécanique Appliquée - 24 chemin de l'Epitaphe - 25000 BESANCON

Monsieur PHILIPPE Jonathan

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 10 juin 2016

P/Le directeur de l'E.C.L.
La directrice des Etudes

