



Contribution à l'étude du comportement de structures libres, rigides, élancées, glissantes et basculantes sous séisme

Charlie Mathey

► To cite this version:

Charlie Mathey. Contribution à l'étude du comportement de structures libres, rigides, élancées, glissantes et basculantes sous séisme. Autre. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2016. Français. NNT : 2016CLF22679 . tel-01487056

HAL Id: tel-01487056

<https://theses.hal.science/tel-01487056>

Submitted on 10 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : DU 2679
EDSPIC : 747

Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand
École Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur

Thèse

de doctorat de l'Université Blaise Pascal

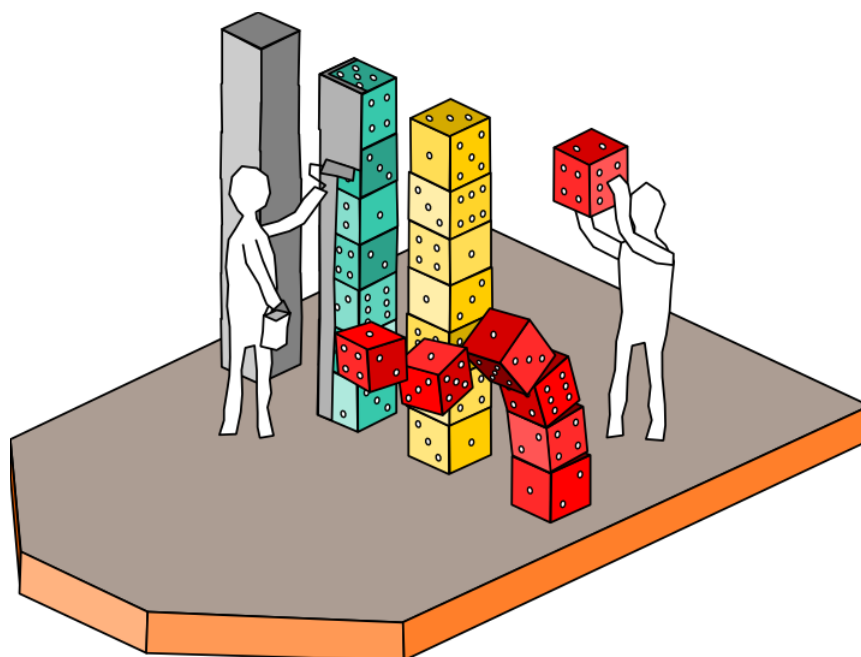
Doctorat de Génie Civil

sur

Contribution à l'étude du comportement de structures libres, rigides, élancées, glissantes et basculantes sous séisme

Response of rigid slender blocks under seismic excitation

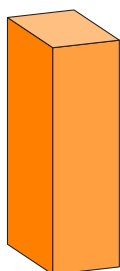
par Charlie Mathey



soutenue publiquement le mardi 15 mars 2016 à Saclay

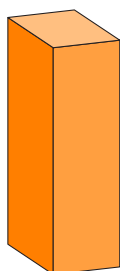
devant le jury composé de :

L. Baillet	directeur de thèse
D. Clair	encadrant
C. Feau	encadrant
M. Fogli	directeur de thèse
G. Jaquet-Richardet	rapporteur et président du jury
N. Makris	rapporteur
I. Politopoulos	examineur



Sommaire

Sommaire	iii
Index des notations	iv
Définitions	1
1 Introduction	3
Partie I : Construction d'un modèle mécanique déterministe	
2 Analyse des hypothèses de modélisation du mouvement de blocs rigides	11
3 Modélisation du comportement de blocs à la géométrie imparfaite	35
Partie II : Campagne expérimentale	
4 Étude expérimentale du basculement de blocs rigides sous excitation sismique	57
5 Discussion	89
Partie III : Analyse fiabiliste	
6 Position du problème	95
7 Formulation du problème de fiabilité	101
8 Conclusions et perspectives de recherche	125
Annexes	
A Post-traitement des signaux	129
B Rappels de théorie des probabilités	137
Bibliographie	140
Index des notions	145
Table des figures	146
Liste des tableaux	148
Table des matières	149
Résumé et <i>abstract</i>	154



Index des notations

Généralités

- — notation quelconque
- $\nabla \bullet$ — valeur juste avant l'impact
- $\Delta \bullet$ — valeur juste après l'impact

Objets quelconques

- B — borélien à préciser
- h — application à préciser
- z — réel à préciser
- n et m — entiers à préciser
- M — point de l'espace à préciser
- Z — variable aléatoire à préciser
- $\mathbf{q}$ — quaternion à préciser
- E — événement à préciser
- D — domaine à préciser

Références internes

- $(\bullet)$ — référence à une équation
- $[\bullet]$ — référence à un tableau
- $\langle \bullet \rangle$ — référence à une figure
- $\mathfrak{n}$ — référence à un chapitre

Notations mathématiques

- $|$ — opérateur de probabilité conditionnelle
- $\circ$ — opérateur de composition de fonctions
- $\propto$ — opérateur de proportionnalité
- $\Leftrightarrow$ — opérateur d'équivalence de deux propositions
- $\Rightarrow$ — opérateur d'implication de deux propositions
- $\sim$ — opérateur d'équivalence par passage à la limite
- $[\bullet, \bullet]$ — intervalle continu
- $[[\bullet, \bullet]]$ — intervalle discret
- $\langle \bullet, \bullet \rangle$ — produit scalaire euclidien canonique

$\wedge$	produit vectoriel standard
$\overrightarrow{\bullet}$	vecteur (au sens spatial)
$x \rightarrow \mathbf{x}$	vecteur (au sens algébrique)
$\bullet^T$	opérateur de transposition
$\text{dir}(\bullet)$	direction d'un vecteur (<i>vecteur normé</i>)
$ \bullet $	valeur absolue (<i>réel positif</i>)
$\ \bullet\ $	norme euclidienne canonique (<i>réel positif</i>)
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers
$\mathbb{R}$	ensemble des réels
$\mathbb{R}_+$	ensemble des réels positifs ou nuls
$\mathbb{C}$	ensemble des complexes
$\backslash$	opérateur de restriction d'ensemble
$\mathcal{C}^n$	continuité à l'ordre n
$d\bullet$	quantité infinitésimale de $\bullet$
$e^\bullet$	notation de la fonction exponentielle
i	unité imaginaire complexe
$\mathbb{I}_a(b)$	fonction indicatrice (<i>parfois improprement appelée « fonction caractéristique »</i>)
$\delta_a(b)$	distribution de Dirac
$\text{sgn}(\bullet)$	fonction signe
$\text{Supp}(\bullet)$	support de la fonction $\bullet$ (<i>ensemble des antécédents à l'image non-nulle</i>)
$\text{Def}(\bullet)$	domaine de définition de la fonction $\bullet$
$d(\bullet, \bullet)$	distance entre deux ensembles (<i>longueur</i>)
$(\bullet_n)$	suite des $\bullet_n$
$\bullet^{[M]}$	réduction d'un champ au point M
$\bullet^{(X)}$	composante dans l'axe X de $\bullet$
$\text{Ent}(z)$	partie entière de z
$\bullet^{(n)}$	valeur de la grandeur $\bullet$ au pas de temps n
$\hat{\bullet}$	estimateur de Monte-Carlo l'application $\bullet$ avec n tirages (<i>application</i>)
$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$	1 ^{ère} , 2 ^{ème} et 3 ^{ème} bases complexes de l'espace des quaternions
$\star$	produit de quaternions
$\otimes$	produit matriciel
$\mathcal{R}_q$	bijection de l'espace des rotations vers l'espace des quaternions unitaire
$\mathcal{R}$	matrice de rotation
$\varphi[\bullet]$	densité de la loi gaussienne standard
$\Phi[\bullet]$	fonction de répartition de la loi gaussienne standard (<i>ou fonction d'erreur standard</i>)
$\mathbb{H}_{[1]}$	espace des quaternions unitaires

Grandeurs usuelles

τ	temps
δT	pas de temps de calcul (<i>durée</i>)
λ	pulsation
$\mathbf{u}$	déplacement (<i>origine et référentiel sous-entendus</i>)
$\mathbf{v}$	vitesse de translation (<i>référentiel sous-entendu</i>)
$\mathbf{a}$	accélération de translation (<i>référentiel sous-entendu</i>)
$\mathbf{\Lambda}$	vitesse de rotation (<i>référentiel sous-entendu</i>)
$\mathbf{\Theta}$	accélération de translation (<i>référentiel sous-entendu</i>)
$\Delta \mathbf{u}$	incrément de déplacement (<i>référentiel sous-entendu, vecteur déplacement</i>)

$\Delta \mathbf{r}$ ———— incrément de rotation (*référentiel sous-entendu, vecteur rotation*)

Géométrie d'un bloc

b ———— demi-largeur du bloc (*longueur*)
 h ———— demi-hauteur du bloc (*longueur*)
 R ———— demi-diagonale du bloc (*longueur*)
 e ———— élanement du bloc (b/h) (*sans unité*)
 p ———— inertie homogénéisée du bloc de Housner (*sans unité*)
 r ———— coefficient de restitution de moment cinétique du modèle de Housner (*sans unité*)
 α ———— angle d'élanement du bloc en valeur absolue
 r ———— coefficient de restitution de moment cinétique du modèle de Housner (*sans unité*)
 s ———— coefficient de restitution d'impact (ou de rebond) (*sans unité*)
 $\tilde{\alpha}$ ———— $\pm$ l'angle d'élanement du bloc selon le point d'appuis
 θ ———— angle entre la position du bloc et sa position d'équilibre stable (*angle algébrique*)
 $\dot{\theta}$ ———— vitesse angulaire du bloc
 $\ddot{\theta}$ ———— accélération angulaire du bloc
 $\hat{\theta}_0$ ———— angle initial du bloc par rapport à la position verticale
 r ———— coefficient de restitution de moment angulaire lors d'un impact
 $\delta^{\text{diag.}}$ ———— défaut "horizontal" du modèle de bloc (*longueur*)
 $\delta_n^{\text{long.}}$ ———— défaut "vertical" du modèle de bloc au point n (*longueur*)

m ———— masse du bloc
 g ———— accélération de la gravité
 $\mathbb{J}_{[M]}^{(X)}$ ———— inertie du bloc dans la direction X réduite au point M
 $L_{[M]}^{(X)}$ ———— moment cinétique du bloc dans la direction X réduite au point M
 $\mathcal{J}_{[M]}$ ———— tenseur d'inertie du bloc réduit au point M (*référentiel convectif*)

Mécanique

$\mathbf{F}$ ———— force de contact
 $\mathbf{M}$ ———— moment de contact
 π ———— percussion
 μ ———— moment de percussion
 $\mathbf{I}$ ———— impulsion de contact
 ξ ———— longueur de pénétration au point de contact
 $\dot{\xi}$ ———— vitesse de pénétration au point de contact
 $\bullet^{(N)}$ ———— composante normale de $\bullet$ (*vecteur normal sous-entendu*)
 $\bullet^{(T)}$ ———— composante tangentielle de $\bullet$ (*vecteur normal sous-entendu*)
 $\bullet^{\text{int.}}$ ———— $\bullet$ correspondant au point de contact "intérieur"
 $\bullet^{\text{ext.}}$ ———— $\bullet$ correspondant au point de contact "extérieur"
 K ———— raideur de contact
 C ———— amortissement de contact
 β ———— coefficient d'amortissement
 μ ———— coefficient d'adhérence

μ^0	coefficient de glissement
$\mathcal{H}$	critère sur le déplacement vertical des pieds (<i>longueur</i>)
$\mathcal{H}_0$	seuil sur le déplacement vertical des pieds (<i>longueur</i>)
H	déplacement vertical d'un pied (<i>longueur</i>)

$\Lambda^{(\bullet)}$	vitesse de rotation autour de l'axe $\bullet$
ε	fonction coût, ou d'erreur
R	fonction «modèle mécanique»
S	fonction «séisme»

Sismique

v_{sol}	vitesse du sol
$v_{\text{glis.}}$	vitesse de glissement
γ	accélération du sol
$\gamma^{\text{N-S}}$	accélération du sol dans la direction Nord – Sud
$\gamma^{\text{E-W}}$	accélération du sol dans la direction Est – Ouest
$\gamma^{\text{gr.}}$	accélération minimale du sol suffisante pour initier le basculement du bloc

Campagne expérimentale

A	accélération
Ω	vitesse de rotation convective
A_t	accélération de consigne
A_r	accélération réellement exercée
A_m	accélération mesurée
A_m^*	accélération mesurée, moyennée puis filtrée
Ω_r	vitesse de rotation convective réellement effectuée
Ω_m	vitesse de rotation convective mesurée
Ω_c	vitesse de rotation convective calculée

$100 \neq$	série de 100 essais à consignes différentes
$100 \approx$	série de 100 essais à consignes identiques

$\tau^{\text{Div.}}$	instant de divergence entre deux trajectoires
$\tau^{\text{Ar.}}$	instant de d'arrêt d'une trajectoire

$\sigma_{\text{th.}}$	écart-type de l'accélération de consigne
-----------------------	--

Probabilité et Fiabilité

p	dimension de l'espace (<i>entier</i>)
Ω	univers (<i>ensemble abstrait</i>)
ω	événement (<i>abstrait</i>)
$\mathcal{F}$	tribu d'événements
$\mathbb{P}$	mesure de probabilité
$(\Omega, \mathcal{F})$	espace probabilisable
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	espace de probabilité

$\mathbf{Y}$ et $\mathbf{Z}$	variable aléatoire multidimensionnelle à préciser
Y_n et Z_n	variable aléatoire d'indice n de $\mathbf{Y}$ ou $\mathbf{Z}$
y et z	réalisation de la variable aléatoire multidimensionnelle $\mathbf{Y}$ ou $\mathbf{Z}$
y_n et z_n	réalisation de la variable aléatoire d'indice n de $\mathbf{Y}$ ou $\mathbf{Z}$
$\mathbf{X}$	variable aléatoire multidimensionnelle gaussienne standard
X_n	variable aléatoire d'indice n de $\mathbf{X}$
$\mathbf{x}$	réalisation de la variable aléatoire multidimensionnelle $\mathbf{X}$
x_n	réalisation de la variable aléatoire d'indice n de $\mathbf{X}$
$\mathbf{U}$	variable aléatoire multidimensionnelle uniforme sur $[0, 1]$
U_n	variable aléatoire d'indice n de $\mathbf{U}$
$\mathbf{u}$	réalisation de la variable aléatoire multidimensionnelle $\mathbf{U}$
u_n	réalisation de la variable aléatoire d'indice n de $\mathbf{U}$
$\mathcal{B}_p$	tribu borélienne de $\mathbb{R}^p$
$\mathbb{E}[\bullet]$	espérance de $\bullet$
$\sigma[\bullet]$	écart-type de $\bullet$
$c_v[\bullet]$	coefficient de variation de $\bullet$
$\nabla \bullet$	gradient de $\bullet$ (<i>fonction</i>)
$\nabla^2 \bullet$	hessienne de $\bullet$ (<i>fonction</i>)
β_C	indice de Cornell
$\beta_{R.E.}$	indice de Rosenblueth et Esteva
$\beta_{H.L.}$	indice de Hasofer et Lind
β_c	indice conventionnel
$\Phi[\bullet]$	fonction d'erreur de Gauss
$0_{\mathbb{R}^p}$	origine de $\mathbb{R}^p$ (<i>vecteur nul</i>)
$\mathbf{x}^*$	point de fonctionnement (<i>vecteur de $\mathbb{R}^p$</i>)
g	fonction d'état limite
G_n	application partielle associée à g en y_n
Γ	fonction d'état limite composée
Γ^L	approximation au premier ordre de la fonction d'état limite
Γ^Q	approximation au deuxième ordre de la fonction d'état limite
$\mathbf{C}^{(\Gamma)}$	courbures de Γ au point de fonctionnement
E_s	événement de sécurité (<i>ou ensemble des éléments élémentaires de sécurité</i>)
E_f	événement de défaillance (<i>ou ensemble des éléments élémentaires de défaillance</i>)
E	E_f en notation allégée
D_s	domaine de sécurité (<i>ou ensemble des réalisations de sécurité</i>)
D_f	domaine de défaillance (<i>ou ensemble des réalisations de défaillance</i>)
D	D_f en notation allégée
Δ_s	domaine de sécurité dans l'espace des variables gaussiennes standard
Δ_f	domaine de défaillance dans l'espace des variables gaussiennes standard
Δ	<i>idem</i> en notation allégée

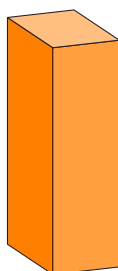
Δ_f^L	approximation au premier ordre du domaine de défaillance dans l'espace des variables gaussiennes standard
Δ_f^Q	approximation au deuxième ordre du domaine de défaillance dans l'espace des variables gaussiennes standard
P_f	probabilité de défaillance (<i>équivalent de $\mathbb{P}(E_f)$</i>)
p_f	approximation numérique de la probabilité de défaillance
P_f^L	approximation de la probabilité de défaillance par FORM
P_f^Q	approximation de la probabilité de défaillance par SORM
$p_\bullet$	loi de la variable aléatoire $\bullet$
$p_\bullet$	densité de la loi de la variable aléatoire $\bullet$
$\alpha_\bullet$	coefficient de rejet de l'algorithme de Métropolis-Hasting
$m_\bullet$	moyenne de la variable aléatoire $\bullet$
$C_\bullet$	matrice de covariance de la variable aléatoire $\bullet$
ψ	fonction de répartition de la loi gaussienne standard sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$
$\mathcal{T}$	transformation de Rosenblatt
u	marge de sécurité (<i>variable aléatoire</i>)

Signaux sismiques

Z	accélération sismique (<i>processus aléatoire</i>)
T	durée totale du séisme (<i>durée</i>)
$\bar{T}$	support de l'excitation sismique (<i>intervalle de temps</i>)
W	processus sismique aléatoire normé
L	enveloppe du séisme (<i>fonction scalaire du temps</i>)
$\mathcal{R}_\bullet$	fonction d'autocorrélation du processus $\bullet$
$\mathcal{S}_\bullet$	densité spectrale de puissance bilatérale de $\bullet$
Λ_c	pulsation de coupure
$\bar{\Lambda}$	support de la DSP (<i>intervalle de pulsation</i>)
N	ordre de la partition de $\bar{\Lambda}$ (<i>entier pair</i>)
$\bar{M}_n$	maille n de la N -partition (<i>intervalle de pulsation</i>)
$\Delta\lambda$	pas de la N -partition (<i>pulsation</i>)
U_W et V_W	mesures stochastiques orthogonales centrées associées à W
Z_N	N -approximation de Z (<i>processus aléatoire</i>)
W_N	N -approximation de W (<i>processus aléatoire</i>)
E_{exc}	Z_N écrit sous la forme d'une fonction d'un vecteur aléatoire Y_{exc} (<i>processus aléatoire</i>)
$\mathcal{S}_{C.P.}$	densité spectrale de puissance bilatérale de Clough et Penzien
S_0	intensité du bruit blanc de $\mathcal{S}_{C.P.}$ (<i>en $m^2 s^{-3}$</i>)
λ_g et λ_f	accélérations modales de $\mathcal{S}_{C.P.}$ (<i>en $rad s^{-1}$</i>)
ξ_g et ξ_f	amortissements modaux de $\mathcal{S}_{C.P.}$ (<i>sans unité</i>)

Acronymes

crv	—————	<i>convected rotational velocity</i> , vitesse de rotation convective
<i>et al.</i>	—————	<i>et alius</i> , parmi d'autres
mi	—————	<i>main impact</i> , impact dans l'axe principal
<i>i.e.</i>	—————	<i>id est</i> , c'est-à-dire
cf.	—————	<i>confer</i> , se reporter à



Définitions

Non-encastrement :

signifie qu'il n'existe pas de liaison permanente entre la structure étudiée et le support sur lequel elle repose. Sous certaines conditions, il est alors possible que la structure décolle du support, et qu'il n'y ait temporairement plus aucune interaction de contact. Le non-encastrement ne fait aucune supposition sur la présence ou l'absence de certains mécanismes de contact spécifiques. En particulier, il est vraisemblable qu'il existe des forces de frottement ou d'attraction qui maintiennent la structure ancrée lors de très faibles sollicitations. [Anglais : *Free-standing*]

Rigidité (pour une structure) :

c'est une notion idéale. Dans la pratique, tout assemblage d'atomes présente nécessairement un certain degré de souplesse. La plupart du temps, on considère qu'une structure est rigide dès lors que les phénomènes d'oscillation propre, c'est-à-dire l'oscillation de la structure résultant par exemple d'un choc, ont une fréquence très supérieure aux fréquences caractéristiques des phénomènes que l'on cherche à observer. En toute rigueur, une telle définition ne garantit pas que la souplesse (même très petite) des structures réelles soit sans influence sur les comportements observés. En pratique, la plupart des cas étudiés permettent de faire l'hypothèse de rigidité. [Anglais : *Rigidity*]

Élancement :

c'est une considération purement géométrique. Pour les structures de la forme d'un cylindre de révolution, ou d'un prisme à base carrée, le coefficient d'élancement est défini de façon évidente comme le rapport entre la hauteur et la taille de sa base. Pour des géométries moins idéales, on peut définir par extension un coefficient d'élancement pour chaque direction de basculement. [Anglais : *Slenderness*]

Basculement (mouvement de...) :

est un mouvement de rotation autour d'un point fixe. Pour les structures qui sont étudiées ici, plus l'angle de basculement par rapport à la position stable est important et plus la propension de la structure à basculer davantage augmente. Le fait de basculer jusqu'à l'angle maximum possible (souvent 90°) ou, par extension, de dépasser un critère sur l'angle de basculement, est appelé renversement (*overturning*). À l'inverse, le fait que le mouvement de basculement existe et soit non-nul est appelé soulèvement (*lifting*). [Anglais : *Rocking*]

Probabilité :

se comprend couramment comme une fraction du hasard au sein de laquelle une chose est réalisée. Cette définition commune est mathématiquement formalisée grâce à Kolmogorov à partir de la théorie de la mesure. Si cette théorie ne vous est pas familière, vous êtes invité.e à explorer l'annexe **B** avant d'entamer la 3ème partie de ce document. [Anglais : *Probability*]



Introduction

L'actualité nous le rappelle périodiquement : les séismes peuvent provoquer l'effondrement de nombreux bâtiments, mettant en péril de nombreuses vies et provoquant la destruction de nombreux édifices ou installations. Les études post-sismiques montrent souvent que les bâtiments effondrés ne respectaient pas les recommandations ou normes parasismiques, soit dès la conception, soit dans la réalisation. Les édifices bien construits, pour la plupart, résistent effectivement aux agressions sismiques. Le dimensionnement parasismique, basé principalement sur une hypothèse de comportement linéaire des structures (donc sur une hypothèse de petits déplacements), a ainsi montré son efficacité.

Une part spécifique des études menées en génie parasismique concerne également les structures pour lesquelles l'hypothèse de linéarité du comportement ne peut s'appliquer. Il s'agit des structures libres, c'est-à-dire non ancrées, simplement posées à même le sol. Lors d'un séisme, de telles structures sont en effet susceptibles de se renverser, de glisser, voire, dans les cas les plus graves, de devenir des objets "missiles" pouvant blesser des personnes ou détériorer du matériel lors d'un impact.

De nombreuses constructions, ou de nombreux dispositifs peuvent être considérés comme des structures libres. Bien entendu, on pense tout d'abord aux constructions historiques [1] : les temples, les colonnes, les obélisques... Pour l'anecdote, on peut signaler que les premières mesures de l'intensité des séismes étaient réalisées en observant le renversement des pierres tombales dans les cimetières, considérées comme des structures libres. D'autres cas d'études, moins intuitifs, sont aussi traités par une représentation de structure libres : on peut par exemple relever des études sur les ensembles rocheux en équilibre [2], ou, de façon plus concrète, la stabilité d'équipements industriels comme ceux de la figure <1.1> [3].

De façon plus spécifique, l'industrie de l'atome peut s'intéresser au mouvement des structures libres pour s'assurer de la sûreté de l'entreposage et l'empilement de containers, par exemple dans le cadre du stockage de déchets de démantèlement des installations nucléaires. Typiquement, les premiers prototypes de colis primaires (qui seront stockés dans un colis secondaire en béton) de déchets nucléaires de moyenne activité et de durée de vie longue prévus à Cigéo <1.2> sont de bons exemples de structures rigides et élancées.

La compréhension du mouvement de structures libres présente donc *a minima* des intérêts de protection du patrimoine culturel, des intérêts économiques et industriels et des intérêts de sûreté. Certes, il serait généralement possible de réduire le risque simplement en ancrant chaque structure au sol. Mais, d'une part, il peut exister des cas où un ancrage est techniquement impossible et, d'autre part, il existe inévitablement des moments où des structures ou des équipements sont non-ancrés comme, par exemple, lors des opérations de maintenance qui sont effectuées sur les installations industrielles.

Le comportement fortement non linéaire de ce type de structure sous séisme est cependant délicat à appréhender, à la fois d'un point de vue numérique et expérimental. Numériquement, cela impose de disposer d'algorithmes traitant des grands déplacements et des grandes rotations. En outre, ce type de comportement présente une grande sensibilité aux conditions initiales et aux perturbations. Ce que l'on appelle communément « l'effet papillon » est ostensible dans le mouvement d'une structure libre. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'on considère un jet de dé comme aléatoire puisque la multitude d'impacts intervenant lors du mouvement rend sa trajectoire extrêmement difficile à prédire.

Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse fait suite à des études menées entre 2004 et 2007 au sein d'une action conjointe entre le CEA et EDF. Dans le cadre de cette étude, une campagne d'essais sismiques sur table vibrante avait été menée sur des blocs parallélépipédiques en acier massif possédant quatre “points” d'appuis libres de se mouvoir par rapport à la table vibrante. Différents élançements avaient été considérés, permettant d'obtenir des comportements pour lesquels le glissement était prépondérant (cas des faibles élançements), des comportements pour lesquels le basculement était prépondérant (cas des grands élançements) et des comportements mettant “en concurrence” les deux mécanismes. Les principales conclusions auxquelles cette étude a abouti étaient :

1. que malgré le soin apporté à la réalisation des blocs, dont la géométrie et l'homogénéité étaient en théorie parfaites, d'inévitables défauts persistaient conduisant à un comportement 3D des blocs, même sous excitation unidirectionnelle ou lors d'essais de lâcher plans ;
2. que la souplesse des appuis influence significativement le comportement dynamique des blocs.

La figure (1.3)¹ présente deux résultats d'essais qui permettent d'illustrer ces conclusions. Il s'agit des vitesses de rotation convectives (crv) mesurées dans les axes principal, transverse et longitudinal pendant un essai de lâcher sur un bloc d'élançement 7 sur appuis souples (figure (1.3a)) et sur appuis “rigides” (*i.e.* pieds usinés dans la masse, figure (1.3b)). La présence de composantes non nulles de la vitesse de rotation convective dans les axes transverse et longitudinal traduit le comportement 3D des blocs. En outre, bien que dans l'axe principal, sur l'intervalle de temps considéré, les écarts entre les deux comportements ne soient pas significatifs, il n'en est pas de même dans les axes transverse et longitudinal. On observe que les différences entre les évolutions temporelles sont symptomatiques du type d'appuis. Dans le cas d'appuis souples, ces évolutions sont similaires à une oscillation sinusoïdale amortie (figure (1.3a)) ce qui n'est pas le cas lorsque les appuis sont rigides (figure (1.3b)). Bien que cela n'apparaisse pas sur la figure, mais l'on peut s'en douter, sur le “long terme”, le mouvement général s'en trouve affecté. En particulier, nous avons observé que la dissipation globale d'énergie était plus rapide pour le bloc sur appuis rigides que pour le bloc sur appuis souples.

À l'époque, l'interprétation de ces essais avait été conduite en ayant recours à des “outils” linéaires classiques, à savoir en imposant des valeurs de raideur et d'amortissement différentes à chacun pied pour rendre compte du comportement 3D. Une telle modélisation s'est avérée capable de représenter correctement le mouvement en petits déplacements (mouvements n'occasionnant pas de soulèvement des pieds) mais incapable de représenter le mouvement en grands déplacements. En outre, les valeurs des paramètres retenues ne semblaient pas raisonnables, à savoir que les disparités de raideurs obtenues étaient trop importantes pour pouvoir être justifiées d'un point de vue physique.

1. Le chapitre 8 donnera un guide de lecture de ce type de courbe et montrera tout ce que l'on peut en extraire. À cette étape de l'argumentation, le lecteur doit seulement retenir que le mouvement hors-plan (c'est-à-dire le mouvement dans les axe transverse et longitudinal) des blocs à pieds souples ressemble à un sinus amorti tandis que le mouvement des blocs à pieds rigide est plus complexe et de plus grande amplitude. Ainsi, la rigidité influe fortement sur le mouvement hors-plan, ou de façon équivalente, le mouvement hors-plan est caractéristique de la rigidité.



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)



(g)

Photographies issues de [3]

Figure 1.1 – Exemples de dispositifs industriels que l'on peut considérer comme des structures libres



© Copyright Ph. Demail pour l'Agence nationale pour la gestion des déchets radioactifs (ANDRA)

Figure 1.2 – Prototypes de colis primaires et secondaires pour les matières radioactives de moyenne activité et de durée de vie longue pour le projet Cigéo

Le travail de cette thèse s'inscrit dans la continuité de cette étude. Il vise principalement à obtenir un modèle numérique qui soit représentatif en ayant pour objectif de répondre à la problématique suivante :

❓ Dans quelle mesure le mouvement hors-plan identifié lors d'essais de lâcher de structures rigides élancées influence-t-il leur probabilité de renversement sous excitation sismique ? ❓

Pour faciliter l'étude, nous nous sommes focalisés sur le comportement de blocs élancés, parallélépipédiques en acier massif dont les pieds ont été usinés dans la masse, c'est-à-dire dont le comportement lors d'un essai de lâcher est similaire au comportement présenté à la figure (1.3b). Pour ce type de comportement, c'est le phénomène de basculement qui est prépondérant vis-à-vis du glissement, ce qui ne signifie pas qu'il en soit exclu.

Pour répondre à la problématique, un "piège" dans lequel on pourrait tomber serait de se lancer immédiatement dans un calcul statistique en postulant d'éventuels défauts source d'un comportement 3D. Mais, cela va sans dire, la méthode statistique la plus perfectionnée ne pourra pas donner un résultat juste si elle utilise un modèle qui représente mal la réalité. C'est pourquoi, avant toute considération probabiliste, nous avons cherché à mettre au point un modèle numérique capable de reproduire le mouvement de basculement d'un bloc rigide.

Ce mémoire est organisé en trois parties. Les deux premières parties ont fait l'objet de deux articles qui ont été soumis à des revues à comité de lecture.

La première partie est consacrée à la mise au point du modèle numérique. Pour ce faire, le principe a été d'identifier et de décrire des phénomènes répétables

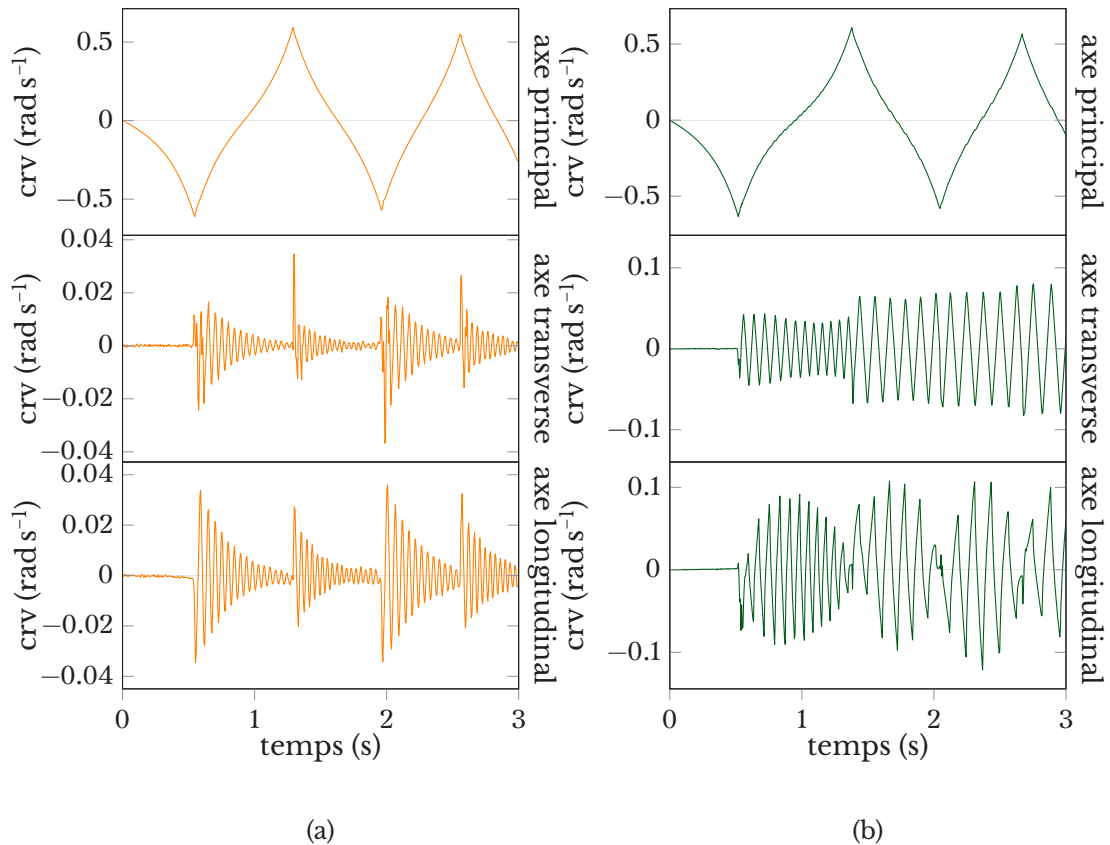


Figure 1.3 – Vitesses de rotation convectives (crv) mesurées dans les axes principal, transverse et longitudinal pendant un essai de lâcher sur un bloc d'élanement 7 (1.3a) sur appuis souples et (1.3b) sur appuis "rigides" (pieds usinés dans la masse)

survenant lors des essais de lâcher, à savoir des essais pour lesquels il n'y a pas de source d'excitation extérieure qui vienne perturber le mouvement. Le comportement décrit a été expliqué par une asymétrie permanente du bloc, et plus particulièrement par des défauts de géométrie au niveau des pieds. Un modèle numérique de bloc rigide muni de 2 points de contact par pieds nommé *8 asymmetrical contact points model* (8ACP) a été proposé. La position exacte de ces points de contact étant *a priori* inconnue, un algorithme d'optimisation évolutionniste a alors été utilisé pour déterminer les paramètres géométriques (ainsi que les paramètres mécaniques du modèle) qui permettent de reproduire au mieux le comportement hors-plan durant la partie reproductible. Cette procédure d'optimisation a aussi permis d'identifier les paramètres les plus influents sur les résultats du modèle, et donc d'en donner une formulation plus simple. Ce modèle a ensuite permis d'étudier l'influence marginale des défauts de géométrie sur la stabilité du bloc en comparant statistiquement le résultat de 2000 simulations de ce modèle aux simulations d'un modèle sans défaut de géométrie. Il a alors été établi que, numériquement, de tels défauts rendaient le bloc enclin à basculer pour des niveaux de séisme modérés (de l'ordre de g/e , g étant l'accélération de la gravité et e l'élanement du bloc).

Compte tenu de la sensibilité avérée de ce type de structure aux conditions initiales et à différentes perturbations, quelles soient expérimentales ou numériques, la seconde partie de ce mémoire concerne la validation statistique du modèle 8ACP sous excitation dynamique. Pour ce faire, une campagne d'essais a été réalisée au CEA en 2014 par Charlie Mathey, Sandra Vasic, Jordan Simon, Michel le Corre et Martial Mahé avec l'aide de Alain le Maoult, Pierre-Étienne Charbonnel et Cyril Feau. Durant celle-ci, des séries de cent essais ont été réalisées simulta-

nément sur 4 blocs rigides, élançés, simplement posés sur une table vibrante. Il s'agissait de quatre séries de :

1. cent essais unidirectionnels sous excitation aléatoire,
2. cent essais unidirectionnels de “répétabilité”, c'est-à-dire avec un même signal d'accélération,
3. cent essais bidirectionnels sous excitation aléatoire,
4. cent essais tridirectionnels sous excitation aléatoire.

Seuls les résultats correspondant aux deux premières séries seront décrits et interprétés dans le cadre de ce mémoire. Les résultats correspondant aux deux autres séries méritent encore du travail d'interprétation. Pour mener à bien les comparaisons essais / calculs, différents indicateurs ont été spécifiquement développés dans ce travail. Ainsi, malgré les incertitudes expérimentales nous avons montré une bonne adéquation entre les résultats du modèle numérique et les résultats expérimentaux.

Dans un contexte fiabiliste, les temps de calculs de ce genre de modèle numérique étant trop important, la troisième partie du mémoire est consacrée à l'application de la méthode des *Subset Simulations* pour évaluer la probabilité de défaillance de blocs sous séisme en réduisant le nombre d'appels au code de calculs mécaniques.

première partie

CONSTRUCTION D'UN MODÈLE MÉCANIQUE DÉTERMINISTE

Dans cette partie, le comportement basculant d'un bloc rigide est analysé.

Dans un premier chapitre, il sera question des différentes techniques et hypothèses de modélisation. On présentera tout d'abord le fonctionnement du modèle canonique de Housner, qui permet de décrire le comportement de basculement d'un bloc rigide élané à partir d'un seul degré de liberté et d'une équation de transition uniquement, au prix d'hypothèses de comportement très fortes. On analysera ensuite ce que la littérature scientifique propose pour relâcher chaque hypothèse, et le cas échéant ce que cela apporte en terme de complexité de modélisation.

Dans un second chapitre, on justifiera la construction du modèle de bloc rigide utilisé dans ce travail de thèse. Tout d'abord, on décrira le comportement 3D reproductible identifié lors d'essais de lâcher plans, puis comment celui-ci a été expliqué par une relaxation partielle de l'hypothèse de ponctualité des appuis : chaque pied – positionné aux angles de la base du bloc – est modélisé par deux points de contact, ce qui permet de prendre en compte les défauts d'usinage de la maquette. Enfin, on cherchera à identifier numériquement l'influence marginale de notre hypothèse de modélisation sur la stabilité d'un bloc élané sous séisme.



Analyse des hypothèses de modélisation du mouvement de blocs rigides



2.1 Le modèle de Housner

Le modèle proposé par George W. Housner en 1963, dans l'article fondateur de ce domaine de recherche [4] servira de point de départ pour notre analyse. Par des hypothèses fortes tant sur le bloc que sur le support, Housner est capable de mettre en place une équation du mouvement du bloc, et de s'en servir pour déterminer un critère de chute. Par égard à ses hypothèses, on peut nommer ce modèle *Solid Rocking Motion* (SRM).

De nombreux papiers ultérieurs, sur lesquels nous reviendrons, compléteront ou remettront en cause certains aspects du modèle.

Ce modèle considère un bloc rigide, en appui ponctuel sur un de ses sommets (voir figure 2.1). Le mouvement est supposé se réaliser dans le plan $(\vec{y}, \vec{z})$ sur un support rigide.

Le mouvement global est constitué de nombreuses phases d'appui successives sur un pied, puis sur l'autre. Lors d'une de ces phases, le point de contact entre le bloc et le support est supposé absolu : d'une part, on suppose l'adhérence parfaite, il n'y a pas de vitesse relative suivant l'axe horizontal ; et d'autre part, on suppose que le contact est permanent (lorsqu'un point est en contact, il reste en contact ; en particulier, ne rebondit pas) et instantané (la transition entre une phase de non contact et une phase de contact est de durée nulle), il n'y a pas de vitesse relative suivant l'axe vertical.

Durant une phase de basculement, c'est-à-dire « tant qu'il n'y a pas d'impact », l'équation du mouvement peut s'écrire facilement avec un degré de liberté. Les seules forces s'appliquant sur le bloc sont son poids et la résultante du support.

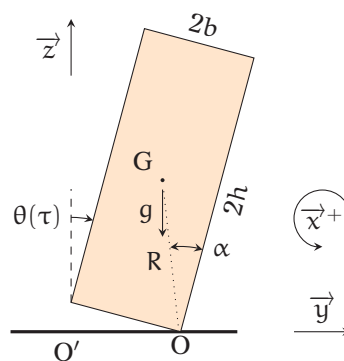


Figure 2.1 – Représentation du modèle de bloc de Housner

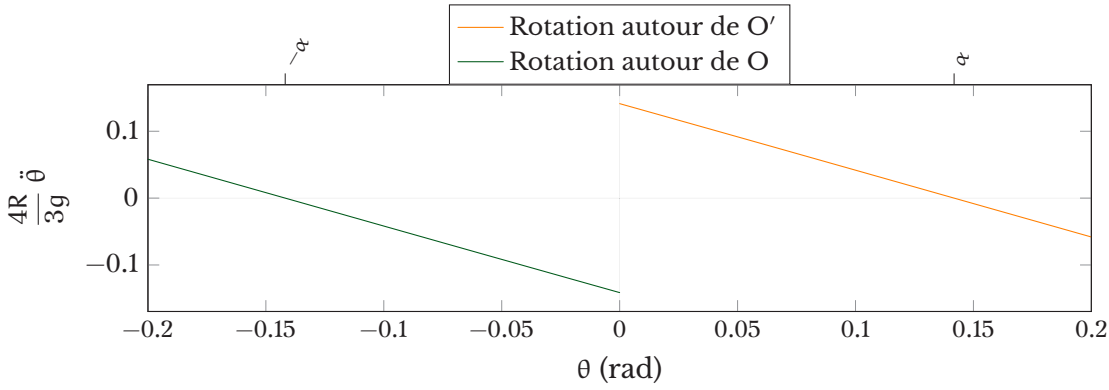


Figure 2.2 – Exemple de relation accélération/angle pour $h/b = 7$ (cf. équation (2.4))

Les équations du mouvement

Équation du mouvement durant une phase

Puisque le point O (ou O' selon les cas) est fixe, on peut poser l'équation d'équilibre en moment selon $\vec{x}$ réduit en ce point. La contribution de la résultante du support s'annule, puisque cette force est appliquée au point de réduction.

$$\mathbb{J}_{[O]}^{(\vec{x})} \ddot{\theta} = -m g \langle \overrightarrow{GO}, \vec{y} \rangle \quad (2.1)$$

Le produit scalaire se résout aisément en introduisant la variable $\tilde{\alpha} = \alpha \operatorname{sgn}(\theta)$:

$$\mathbb{J}_{[O]}^{(\vec{x})} \ddot{\theta} = -m g R \sin(\theta - \tilde{\alpha}) \quad (2.2)$$

En faisant l'hypothèse d'un bloc symétrique, homogène, et de forme parallélépipédique, on détermine la valeur du coefficient d'inertie à partir de la diagonale $R = \sqrt{h^2 + b^2}$:

$$\mathbb{J}_{[O']}^{(\vec{x})} = \frac{4}{3} m R^2 \quad (2.3)$$

L'équation différentielle ainsi simplifiée devient :

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4R} \sin(\theta - \tilde{\alpha}) \quad (2.4)$$

Housner propose alors une hypothèse de grand élanement ($b/h \ll 1$), qui pourrait se traduire par :

$$\alpha \ll 1 \quad (2.5)$$

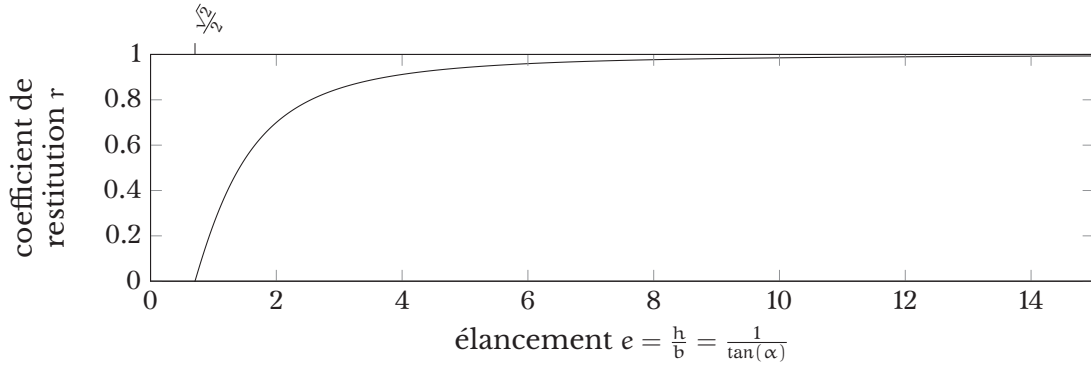
De plus, notons qu'en valeur absolue l'angle θ est de l'ordre de α ou plus petit (sinon, le bloc va vraisemblablement se renverser rapidement). Ceci permet alors de linéariser l'équation (2.4) :

$$\ddot{\theta} - \frac{3g}{4R} \theta = -\frac{3g}{4R} \tilde{\alpha} \quad (2.6)$$

L'équation (2.6) s'intègre facilement sur une phase en proposant deux conditions initiales, par exemple $\theta_0 = \theta(\tau = 0)$ et $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(\tau = 0)$ représentant l'angle θ et sa dérivée à un instant $\tau = 0$ défini arbitrairement :

$$\theta(\tau) = -\tilde{\alpha} + (\tilde{\alpha} + \theta_0) \cosh\left(\frac{\sqrt{3} g \tau}{2\sqrt{R}}\right) + \frac{2 \dot{\theta}_0 \sqrt{R}}{\sqrt{3} g} \sinh\left(\frac{\sqrt{3} g \tau}{2\sqrt{R}}\right) \quad (2.7)$$

Pour déterminer le mouvement non plus sur une phase mais globalement, il reste à définir l'effet d'un changement de phase, c'est-à-dire le résultat d'un impact.

Figure 2.3 – Évolution du coefficient de restitution r selon l'élancement

Mécanisme de transition entre deux phases de mouvement

À partir de l'hypothèse d'impact instantané, on suppose que le sommet impactant devient instantanément centre de rotation. Housner propose alors de considérer la conservation du moment cinétique dans l'axe $\vec{x} : L^{(\vec{x})}$. Supposons que le point O vienne impacter le support. On peut calculer cette grandeur avant impact autour du centre de rotation O' (équation (2.8a)) et après impact autour du nouveau centre de rotation O (équation (2.8b)). On ajoute l'équation de changement de point (équation (2.8c)) et l'équation de conservation au cours de l'impact, par exemple en O (équation (2.8d)). On notera $\nabla \bullet$ et $\Delta \bullet$ respectivement la valeur des différentes grandeurs juste avant l'impact et juste après l'impact.

$$\nabla L_{[O']}^{(\vec{x})} = \mathbb{J}_{[O']}^{(\vec{x})} \nabla \dot{\theta} \quad (2.8a)$$

$$\Delta L_{[O]}^{(\vec{x})} = \mathbb{J}_{[O]}^{(\vec{x})} \Delta \dot{\theta} \quad (2.8b)$$

$$\nabla L_{[O']}^{(\vec{x})} = \Delta L_{[O]}^{(\vec{x})} - 2 b m R \nabla \dot{\theta} \sin(\alpha) \quad (2.8c)$$

$$\nabla L_{[O]}^{(\vec{x})} = \Delta L_{[O]}^{(\vec{x})} \quad (2.8d)$$

En admettant que les inerties $\mathbb{J}_{[O]}^{(\vec{x})}$ et $\mathbb{J}_{[O']}^{(\vec{x})}$ soient égales, ce qui est vrai si le bloc est symétrique et homogène, on déduit des quatre équations (2.8) une relation sur les vitesses de rotation :

$$\mathbb{J}_{[O]}^{(\vec{x})} \Delta \dot{\theta} = \mathbb{J}_{[O]}^{(\vec{x})} \nabla \dot{\theta} - 2 b m R \nabla \dot{\theta} \sin(\alpha) \quad (2.9)$$

En combinant les équations (2.3) et (2.9) et en considérant que $\text{blocB} = R \sin(\alpha)$, il est possible d'exprimer la vitesse après impact à partir d'un coefficient de restitution r :

$$r = \frac{\Delta \dot{\theta}}{\nabla \dot{\theta}} = 1 - \frac{3}{2} (\sin(\alpha))^2 \quad (2.10)$$

Ce coefficient de restitution, représenté sur la figure (2.3), s'exprime comme étant une fonction de l'angle d'élancement α uniquement.

Le mouvement du bloc est alors complètement défini, lors de chaque phase de mouvement successive avec l'équation (2.7), et la continuité du mouvement étant assurée par l'équation (2.10).

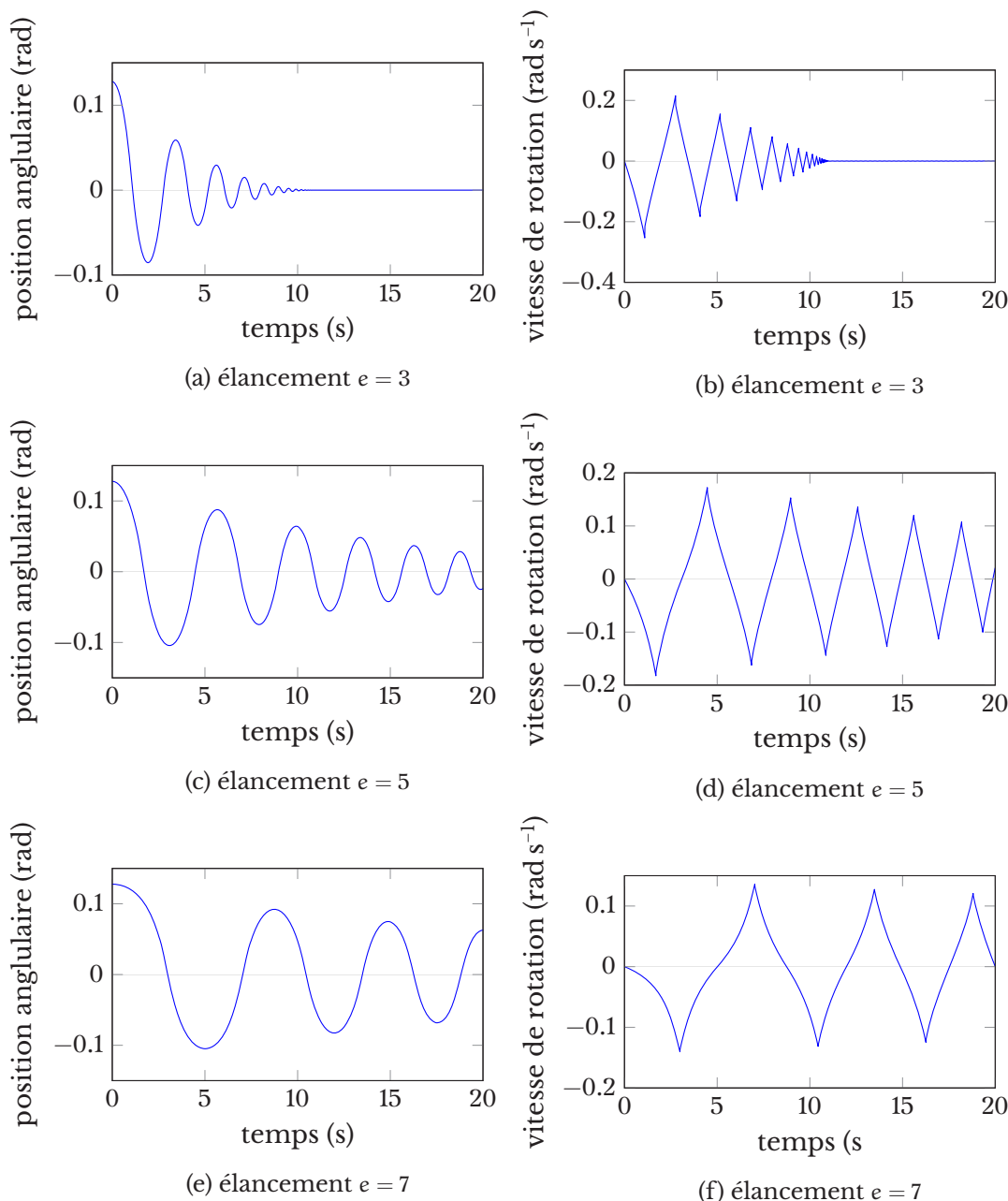


Figure 2.4 – **Résultats du modèle de Housner.** Les paramètres m , g , b sont arbitrairement fixés respectivement à 1 kg, 1 m s^{-2} et 1 m. L'angle θ_0 vaut $0,9 \times \arctan(\frac{1}{7})$.

Les résultats du modèle de Housner

Dans toute la suite du chapitre, ainsi qu'au chapitre 7, les équations du modèle de Housner sont résolues avec la méthode des différences centrées avec un pas de temps de $\delta T = 1 \times 10^{-5} \text{ s}$. Ce pas de temps est suffisamment petit pour ne pas introduire trop de dépendance au pas de temps.

Le comportement d'un bloc de Housner Le modèle de Housner définit un mouvement de bloc oscillant à partir de deux conditions initiales, par exemple la vitesse et l'angle initiaux. La figure 2.4 présente le résultat du modèle de Housner pour trois blocs d'élanement e différent, où les paramètres m , b et g sont fixés.

La décroissance « en triangle » de la vitesse de rotation est très caractéristique du modèle de Housner, et se retrouve mathématiquement comme suit. Nommons

(τ_n) la suite des instants d'impact, et $(\nabla \dot{\theta}_n)$ la suite des vitesses de rotation juste avant l'impact. On peut calculer par récurrence la valeur du rang $n+1$ de (τ_n) à partir de l'équation (2.7), en posant $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = \nabla \dot{\theta}_n$, $\tau = \tau_n + \tau'$ et $p = \sqrt{\frac{3g}{4R}}$:

$$\theta(\tau_n + \tau') = \tilde{\alpha} (\cosh(p\tau') - 1) + \frac{\Delta \dot{\theta}_n}{p} \sinh(p\tau') \quad (2.11)$$

La résolution de $\theta(\tau_{n+1}) = 0$ donne :

$$\tau_{n+1} - \tau_n = \frac{\operatorname{argcosh} \left(1 + \frac{2 (\Delta \dot{\theta}_n)^2}{p^2 \alpha^2 - (\Delta \dot{\theta}_n)^2} \right)}{p} \quad (2.12)$$

Lorsque $\Delta \dot{\theta}_n$ devient négligeable devant $p\alpha$, on peut simplifier $\tau_{n+1} - \tau_n$ par l'identité remarquable $\operatorname{argcosh}(1 + 2x^2) = 2 \operatorname{argsinh}(|x|)$:

$$\operatorname{argcosh} \left(1 + \frac{2 (\Delta \dot{\theta}_n)^2}{p^2 \alpha^2} \right) = 2 \operatorname{argsinh} \left(\frac{|\Delta \dot{\theta}_n|}{p\alpha} \right) \underset{\Delta \dot{\theta}_n \rightarrow 0}{\sim} 2 \frac{|\Delta \dot{\theta}_n|}{p\alpha} \quad (2.13)$$

On arrive à la relation :

$$\tau_{n+1} \underset{\Delta \dot{\theta}_n \rightarrow 0}{\sim} \tau_n + \frac{2 \Delta \dot{\theta}_n}{p^2 \alpha} \quad (2.14)$$

La récurrence sur $(\nabla \dot{\theta}_n)$ est directement donnée par la relation de Housner. Et si l'on admet qu'au cours d'une même phase la vitesse de rotation juste après l'impact n est l'exacte opposée de la vitesse de rotation juste avant l'impact $n+1$ (pas de perte d'énergie durant la chute libre) :

$$\nabla \dot{\theta}_{n+1} = -\Delta \dot{\theta}_n = -r \nabla \dot{\theta}_n \quad (2.15)$$

Un point de l'enveloppe de la vitesse de rotation au moment de l'impact aura pour coordonnées $(\tau_i, \nabla \dot{\theta}_n)$. Le coefficient directeur de la droite joignant deux points successifs est donc :

$$\frac{|\nabla \dot{\theta}_{n+1}| - |\nabla \dot{\theta}_n|}{\tau_{n+1} - \tau_n} \underset{\nabla \dot{\theta}_n \rightarrow 0}{\sim} \frac{3g\alpha(1-r)}{8R} \quad (2.16)$$

Lorsque $\nabla \dot{\theta}_n$ devient suffisamment petit, le coefficient directeur tend vers une constante, il en résulte naturellement la forme triangulaire de l'enveloppe. Ceci justifie aussi le fait qu'il existe un instant τ_∞ au-delà duquel le bloc n'oscille plus, que l'on peut prédire approximativement à partir de la vitesse de rotation juste avant un impact choisi arbitrairement :

$$\tau_\infty = \tau_n + |\nabla \dot{\theta}_n| \left(\frac{8R}{3g\alpha(1-r)} \right) \quad (2.17)$$

Comparaison du modèle avec un essai réel

De nombreuses comparaisons entre le modèle de Housner et des essais ont été publiées [5, 6, 7]. Nous allons aussi comparer ce modèle avec les essais réalisés au CEA en 2007.

Le CEA a testé des blocs d'acier de forme parallélépipédique rectangle de différents élanements. Ceux-ci étaient montés sur des pieds amovibles qui permettent

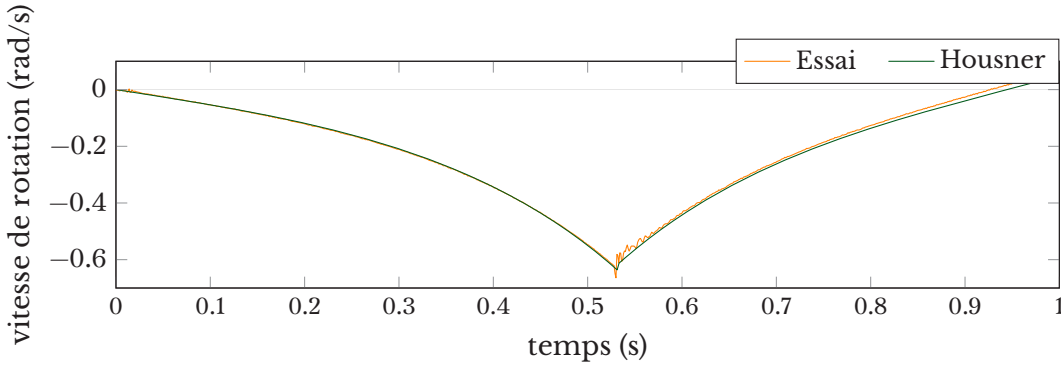


Figure 2.5 – Validation de la méthode permettant de retrouver θ sur un bloc d'élan-
cement $e = 7$

de les isoler électriquement du support, ceci permettant d'observer les évolutions temporelles des appuis. Des capteurs de vitesse de rotation ont été placés sur trois faces. Puisque ces capteurs sont fixés sur le bloc, ils se déplacent en même temps que lui, et donc le référentiel de mesure est le référentiel non-fixe du bloc. Ce référentiel n'est évidemment pas galiléen. On nomme alors ces vitesses de rotation « convectives » et on les notera crv (pour *convected rotational velocity*).

Utiliser le modèle Housner implique de connaître l'angle du bloc à l'instant initial. Celui-ci n'est pas donné par les capteurs. On peut l'estimer en utilisant l'équation (2.7). Si on place l'instant τ_0 au moment où le bloc commence son mouvement (soit $\dot{\theta}(\tau_0) = 0$), l'équation en vitesse de rotation est :

$$\dot{\theta}(\tau) = \frac{\sqrt{3} g (\tilde{\alpha} + \theta_0)}{2\sqrt{R}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3} g (\tau - \tau_0)}{2\sqrt{R}}\right) \quad (2.18)$$

Il n'est néanmoins pas aisé de déterminer l'instant τ_0 sur les résultats expérimentaux, nous avons donc deux inconnues à déterminer.

La figure (2.5) compare la première phase de mouvement d'un essai et du modèle de Housner pour un bloc d'élanement 7 dont l'angle initial a été retrouvé par la méthode qui vient d'être présentée. On peut noter que la phase de chute avant l'impact est parfaitement retrouvée, ce qui semble indiquer que les angle et instant initiaux aient été correctement obtenus. On constate de plus un léger décrochement qui s'amorce pendant la phase post-impact qui débute à $\tau = 0,53$ s, malgré la justesse de la première phase.

La figure (2.6) présente les résultats des essais pour des mouvements de lâcher superposés aux résultats du modèle de Housner avec les conditions initiales adaptées. D'autres résultats à ce sujet sont disponibles dans le rapport d'interprétation des essais [8].

Comme l'on pouvait s'y attendre plus l'élanement du bloc est important, et donc plus on se place dans le cadre des hypothèses de Housner, plus le résultat du modèle semble juste. En effet, le modèle donne de bons résultats pendant 10 s pour les élanements 7 et 5, mais il est moins pertinent lorsque l'élanement diminue à 4, et est carrément faux pour un élanement 2. Ainsi, ces essais montrent que le modèle de Housner est une bonne approximation du mouvement autour de l'axe principal de blocs élanés.

On peut être surpris par le résultat de l'essai avec un bloc d'élanement 7. Cette courbe expérimentale – qui suit parfaitement le modèle de Housner sur une dizaine de secondes, puis qui subit une rupture de pente et conserve plus de vitesse de rotation que le modèle – est très caractéristique des résultats obtenus durant la campagne pour cet élanement. Puisque ce phénomène est répété, on ne peut pas raisonnablement l'expliquer par une anomalie expérimentale telle qu'un mauvais

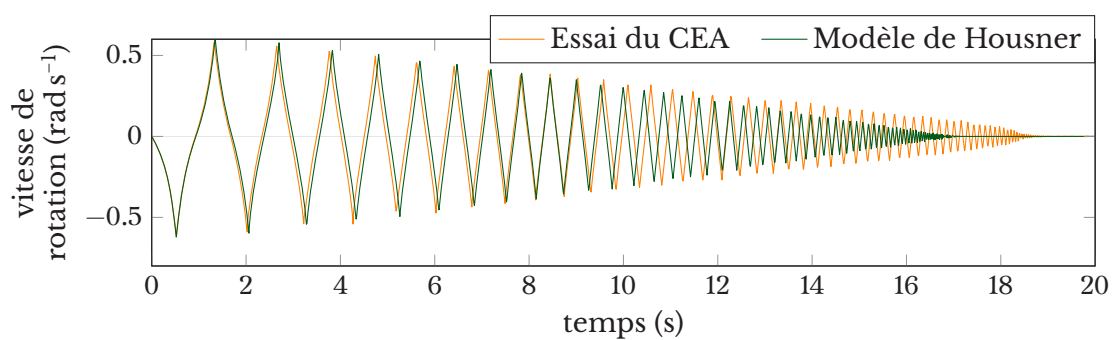
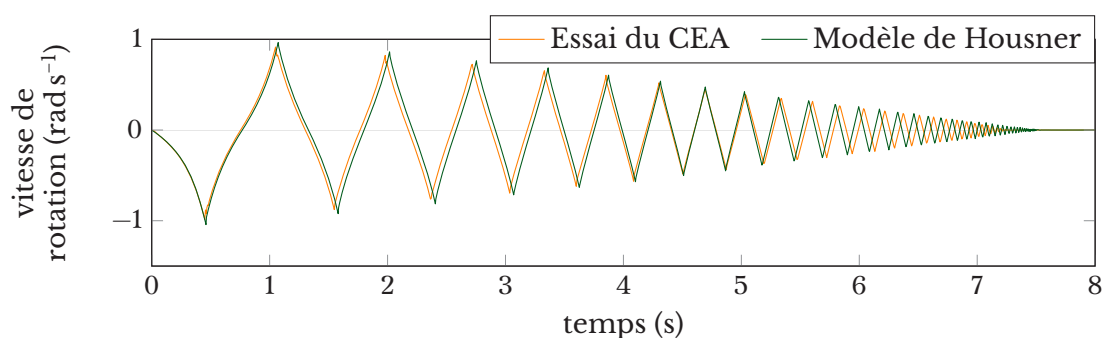
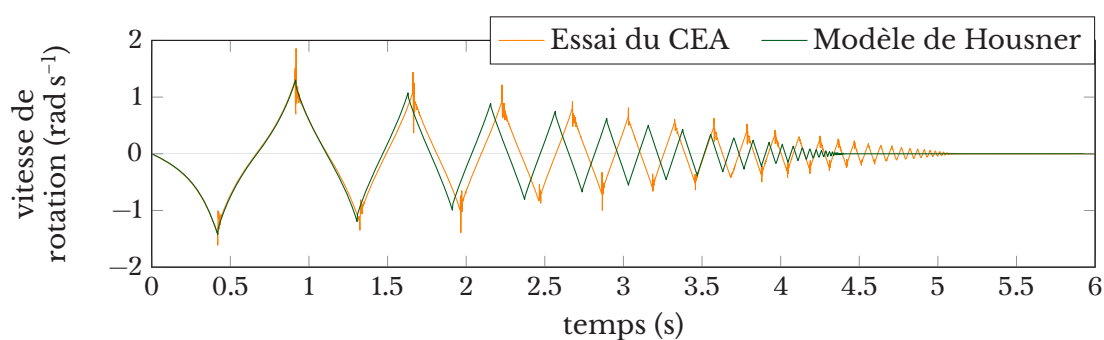
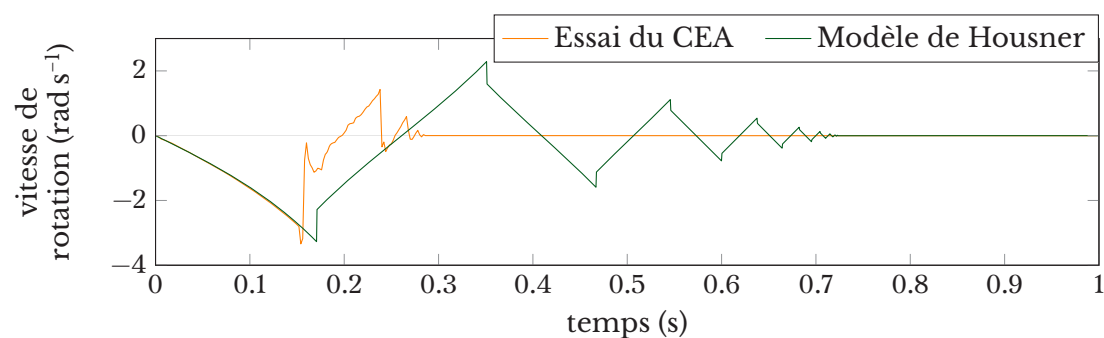

(a) élanement $e = 7$

(b) élanement $e = 5$

(c) élanement $e = 4$

(d) élanement $e = 2$

Figure 2.6 – Comparaison du modèle de Housner avec la campagne d'essais du CEA de 2007

rebond. On rappelle que la décroissance prévue par le modèle n'a pas de changement de pente.

Récapitulatif et commentaire des hypothèses du modèle de Housner

Le modèle qui vient d'être présenté requiert un grand nombre d'hypothèses. On peut les classer en deux types : les hypothèses phénoménologiques, qui simplifient ou négligent un aspect de la physique, et les hypothèses géométriques, qui permettent de simplifier les expressions mathématiques.

Les hypothèses phénoménologiques

- H1** Le bloc est considéré comme un solide rigide. Les déformations internes du bloc ne sont donc pas prises en compte, et les phénomènes tels que les déformations locales à l'impact (poinçonnement) ou la propagation d'ondes dans le bloc sont négligés. Cette hypothèse est particulièrement utile et permet de réduire le problème à 6 degrés de liberté.
- H2** Le support est considéré comme un plan rigide. La déformation locale à l'impact est négligée, et la dissipation d'énergie est supposée être celle d'un impact purement inélastique, calculée selon l'équation (2.10).
- H3** Le mouvement est supposé 2D. Ceci suppose que le bloc réel 3D est en permanence en appui sur 2 pieds, et que toute l'énergie cinétique est contenue dans le mouvement de rotation autour de l'axe principal. Ceci simplifie le problème de trois degrés de liberté : on retire la translation dans la profondeur et les deux rotations hors-plan.
- H4** Le contact est supposé ponctuel. Ceci permet de considérer la réaction du support comme une force et non comme une intégrale de pression.
- H5** Le contact est supposé absolu. Dans la direction normale au support, on néglige le décollement, et dans la direction tangente, on suppose une adhérence complète. Ceci permet de ramener le problème à une seule inconnue en rotation.
- H6** L'impact est supposé instantané. Lorsque le bloc termine une phase de mouvement et vient percuter le support, il suffit d'appliquer une relation instantanée pour caractériser la conséquence sur le mouvement sans avoir à réaliser de calcul intégral durant le temps de contact.
- H7** L'impact est supposé purement inélastique. On peut alors déterminer la relation d'impact avec un bilan d'énergie.

Les simplifications géométriques

- Ha** Le bloc est supposé être de forme prismatique.
- Hb** La masse est supposée homogènement répartie.
- Hc** Le bloc est supposé symétrique.
- Hd** Le bloc est élané.

Les hypothèses géométriques permettent de simplifier grandement les calculs mais ne changent pas la nature du problème. Dans la suite, nous allons étudier la conséquence sur les modèles de la relaxation des hypothèses phénoménologiques.

2.2 Le perfectionnement des problématiques du contact

De nombreux auteurs mettent naturellement en cause la capacité du modèle d'Housner à représenter correctement la réalité à cause de ses trop fortes hypothèses. La plupart en proposent alors un adoucissement que nous allons présenter ici.

Remise en cause de l'immobilité du contact

Si on remet en cause l'hypothèse d'immobilité du contact, un sommet sera libre de se déplacer tangentiellement sur le support, et sera donc soumis au frottement. Comme il est précisé dans [9], le frottement n'est pas un simple phénomène mais une collection variée de problèmes chimiques, mécaniques voire même électriques qui ne peuvent que difficilement être apprivoisés par de simples expériences. Dans le cas de notre étude, ce macrophénomène est particulièrement délicat à apprécier puisque :

- le contact est tantôt adhérent, tantôt glissant ;
- les surfaces entrent en contact par un impact vif ;
- l'échelle de temps du contact est variable, parfois très courte pour des microrebonds, parfois prolongée sur quelques secondes ;
- l'état des surfaces est délicat à apprécier, et l'historique de leur chargement aussi (usure...).

Les lois historiques du frottement

D'après l'ouvrage [10], le frottement a historiquement été expliqué suivant cinq lois :

1. La force de frottement est proportionnelle à la force normale de contact :

$$\|\mathbf{F}^{(T)}\| \propto \|\mathbf{F}^{(N)}\| \quad (2.19)$$

où $\mathbf{F}$ est la force de contact, et où les notations $\bullet^{(N)}$ et $\bullet^{(T)}$ désignent les projections selon l'axe et dans le plan tangent au contact.

2. Le coefficient de frottement est indépendant de la surface de contact.
3. Le coefficient de frottement statique (d'adhérence) μ est plus grand que le coefficient de frottement dynamique (de glissement) μ^0 .
4. Le coefficient de glissement est indépendant de la vitesse de glissement.
5. En cas de mouvement relatif, la force de frottement exercée par le solide 1 sur le solide 2 agit dans la même direction que la vitesse de glissement, selon le sens opposé à la vitesse relative du solide 2 par rapport au solide 1 :

$$\mathbf{F}^{(T)}(1 \rightarrow 2) = -\mu \|\mathbf{F}^{(N)}\| \text{dir}(\mathbf{v}_{\text{glis.}}(2/1)) \quad (2.20)$$

Les deux premières lois, mises en évidence par Amontons dès la fin du XVII^{ème} siècle, semblent aujourd'hui encore globalement valides. Certaines expériences ont néanmoins montré que sous certains chargements très importants, la proportionnalité de l'équation (2.19) était mise en défaut, notamment parce que la surface des éléments pouvait plastifier localement. La troisième loi est déduite des expériences d'Euler : si les coefficients étaient identiques, lorsqu'une brique est posée sur un plan incliné à la limite du glissement, son accélération tangentielle devrait être quasiment nulle et le mouvement à peine perceptible. Ceci n'est généralement pas observé : lorsque le mouvement s'initie, la force de frottement semble chuter. La quatrième loi a été mise en défaut par de nombreuses expériences, la plupart sont expliquées et commentées dans [10]. [11] précise que, dans certains cas particuliers, notamment lorsque la vitesse de glissement est relativement faible, l'hypothèse est relativement correcte. Enfin, la cinquième loi est généralement acceptée lorsque les surfaces de contact ne présentent pas de particularités hétérotropes, et lorsque la cinétique du système n'a pas de direction préférentielle (ex : une roue frottante).

La plupart des lois de frottement utilisent ce formalisme avec un coefficient de frottement liant les efforts normal et tangentiel.

La loi de frottement de Coulomb

La loi de Coulomb est la plus simple et la plus classique des lois de frottement basée sur les règles précédentes. Elle utilise deux paramètres, un coefficient de frottement statique constant, appelé aussi coefficient d'adhérence μ^0 et un coefficient de frottement dynamique constant, appelé aussi coefficient de glissement μ . On distingue donc deux phases, une phase adhérente où la vitesse relative au point de contact est nulle, et une phase de glissement, où justement, la vitesse de glissement est non nulle. Un contact adhérent reste adhérent tant que l'effort tangentiel $\mathbf{F}^{(T)}$ transmis par la liaison frottante reste strictement inférieur à la limite suivante :

$$\|\mathbf{F}^{(T)}\| < \mu^0 \mathbf{F}^{(N)} \quad (2.21)$$

Le mécanisme de frottement ne permet pas dans ce cas de déterminer immédiatement l'effort transmis par la liaison, mais impose le non-glissement. Lorsque le contact est glissant, la force de contact est celle de la 5^{ème} loi historique :

$$\mathbf{F}^{(T)}(1 \rightarrow 2) = -\mu \|\mathbf{F}^{(N)}\| \text{dir}(\mathbf{v}_{\text{glis.}}(2/1)) \quad (2.22)$$

Cette loi, la plus simple possible, peut être jugée suffisante pour des modélisations simples, telle que des barres d'acier rigides [12].

La loi de frottement d'Andreaus

D'autres lois beaucoup moins simples ont été utilisées dans des problèmes de bloc, pour l'exemple, on peut citer celle de [13]. Première complexité, la force tangentielle $\mathbf{F}^{(T)}$ n'est pas directement calculée à partir de la force normale, mais est dirigée par une force cible $\mathbf{F}_{\text{targ.}}^{(T)}$ et s'en rapproche à une vitesse déterminée par :

$$\frac{d\|\mathbf{F}^{(T)} - \mathbf{F}_{\text{targ.}}^{(T)}\|}{d\tau} = 1 - e^{-\delta \frac{\|s - s_R\|}{b}} \quad (2.23)$$

où δ est un paramètre gérant la vitesse de convergence, s et s_R sont la longueur sur laquelle le contact a été glissant et une longueur de glissement de référence, et b , un paramètre de dimension du bloc.

La seconde complexité réside dans la loi de la force cible. Celle-ci est déterminée proportionnellement à la force normale $\mathbf{F}^{(N)}$ par deux paramètres :

$$\mathbf{F}_{\text{targ.}}^{(T)} = \mathbf{F}^{(N)} \tan(\phi_1 + \phi_2) \quad (2.24)$$

ϕ_1 représente la contribution des macro-aspérités, et peut se calculer à partir d'un angle de frottement initial ϕ_0 , d'un paramètre d'enveloppe c , d'une variable de compression C_n et d'une variable de relaxation C_s :

$$\phi_1 = \phi_0 e^c C_n C_s \quad (2.25a)$$

ϕ_2 représente la contribution des micro-aspérités et se calcule à partir d'un angle initial ϕ_r , de la vitesse de glissement $\dot{s}$ et d'une vitesse de glissement de référence $\dot{s}_R$:

$$\phi_2 = \phi_r e^{-\frac{\dot{s}}{\dot{s}_R}} \quad (2.25b)$$

Cette loi pourrait être bien plus proche de la physique de contact mais l'auteur ne présente pas explicitement le raisonnement qui la met en place. De plus, le nombre de paramètres à caractériser par des essais, ainsi que les protocoles associés à chacun d'eux rendent son utilisation difficile en pratique. D'autres lois partagent cette complexité ; celle-ci est présentée ici à titre d'exemple pour montrer que toute recherche de lois plus spécifique entraîne bien souvent une caractérisation – souvent compliquée – d'un nombre plus ou moins important de paramètres, sans garantir *a priori* une amélioration des prédictions.

La remise en cause de l'inélasticité absolue de l'impact

L'hypothèse d'impact purement inélastique permet à Housner de déterminer la quantité d'énergie qui est dissipée à chaque impact, en écrivant simplement la conservation de la quantité de mouvement en changeant de centre de rotation. Si le choc était un tant soit peu élastique, une certaine quantité d'énergie serait transmise lors de ce changement de centre de rotation sous forme de déformation dans le matériau. Sa prise en compte peut-être importante, car cette énergie stockée pourrait éventuellement être réinjectée dans le mouvement. En somme, l'hypothèse d'impact purement inélastique justifie le mécanisme que Housner met en place pour dissiper l'énergie dans son modèle, avec le coefficient r défini par l'équation (2.10).

Lorsque l'on compare le résultat du modèle de Housner avec des essais en laboratoire (voir par exemple la figure (2.6)), le mouvement ne correspond pas exactement. Notamment, la durée du mouvement n'est pas toujours bien établie. Certains auteurs proposent de résoudre ce problème en modifiant « au mieux » le coefficient de restitution r (par exemple, [14]). Lipscombe et Pellegrino expliquent dans [15] que modifier la valeur de r revient implicitement à faire une hypothèse d'élasticité de l'impact. Ainsi, si l'impact n'est plus forcément purement inélastique, le sommet impactant rebondira avec une certaine vitesse. D'après eux, il est alors plus pertinent de relâcher des degrés de liberté. Si l'on considère que le contact entre le bloc et le sol est instantané, la dynamique s'exprime sous forme de percussion.

L'expression de l'impact sous forme intégrée

Lors de l'impact, les forces de contact sont très grandes, et surviennent durant un temps très court. Les capteurs de forces ne sont pas forcément adaptés pour les mesurer (ils peuvent modifier le comportement), et il est donc difficile de déterminer l'évolution dans le temps de la force de réaction. Néanmoins, si l'on accepte de se passer de la connaissance en tout instant de ces efforts, on peut comprendre l'effet global de l'impact avec la théorie classique du choc.

Les actions sont traitées sous forme d'impulsion. On définit l'impulsion élémentaire $d\mathbf{I}$ comme étant le produit de la force $\mathbf{F}$ par la durée élémentaire $d\tau$:

$$d\mathbf{I} = \mathbf{F}d\tau \quad (2.26)$$

L'impulsion intégrée correspond à l'intégrale d'une impulsion entre deux instants :

$$\mathbf{I} = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathbf{F}d\tau \quad (2.27)$$

Soit, dans un repère galiléen ou en mouvement continu par rapport à un repère galiléen, un solide rigide, animé d'une vitesse de rotation Ω , doté d'un centre de gravité G , se déplaçant à une vitesse linéaire $\mathbf{v}_{[G]}$, de masse m et d'inertie $\mathbb{J}_{[G]}^{(\text{dir}(\Omega))}$; les équations fondamentales de la dynamique pour une force $\mathbf{F}$ appliquée en un point M quelconque à ce solide se transposent alors sous forme impulsive en :

$$\int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathbf{F}d\tau = m (\mathbf{v}_{[G]}(\tau_b) - \mathbf{v}_{[G]}(\tau_a)) \quad (2.28a)$$

$$\int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathbf{F} \wedge \overrightarrow{MG} d\tau = \mathbb{J}_{[G]}^{(\text{dir}(\Omega))} (\Omega(\tau_b) - \Omega(\tau_a)) \quad (2.28b)$$

Lorsque les instants τ_a et τ_b sont suffisamment proches pour que l'on puisse négliger le déplacement du point M , mais suffisamment espacés pour qu'il y ait une variation sensible des vitesses de rotation Ω et/ou linéaire $\mathbf{v}_{[G]}$, on dit que le

solide a subi une percussion caractérisée par le vecteur de percussion π :

$$\pi = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathbf{F} d\tau \quad (2.29)$$

Dans ce cas, on peut considérer que le point M est un point fixe, et définir le moment de percussion μ :

$$\mu_{[G]} = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathbf{F} d\tau \wedge \overrightarrow{MG} \quad (2.30)$$

Ainsi, lorsqu'un solide rigide impacte une surface rigide en un ou plusieurs points M, les équations de la dynamique sous forme impulsive peuvent s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_M \pi = m \left(\mathbf{v}_{[G]}(\Delta\tau) - \mathbf{v}_{[G]}(\nabla\tau) \right) \\ \sum_M \mu_{[G]} = \mathbb{J}_{[G]}^{(\text{dir}(\Omega))} \left(\Omega(\Delta\tau) - \Omega(\nabla\tau) \right) \end{array} \right. \quad (2.31)$$

où les symboles $\nabla\bullet$ et $\Delta\bullet$ désignent respectivement les valeurs juste avant et juste après l'impact.

Imaginons le solide précédent impactant une surface rigide. L'objectif consiste, connaissant $\mathbf{v}_{[G]}(\nabla\tau)$ et $\Omega(\nabla\tau)$, à déterminer $\mathbf{v}_{[G]}(\Delta\tau)$ et $\Omega(\Delta\tau)$. Lorsque π ou $\mu_{[G]}$ prennent une valeur non-nulle, puisque l'on renonce à connaître *a priori* la valeur de la percussion, il est nécessaire de faire des hypothèses de comportement pour lever l'indétermination. Nous allons décrire les différentes façons de représenter un comportement élastique linéaire.

La démarche qui va être présentée peut être appliquée pour un modèle 3D, et nous proposons ainsi les équations dans les 3 axes. Le repère est noté $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, et l'axe $\vec{z}$ correspond à la normale d'impact.

Hypothèses dans la direction normale au plan d'impact

La première proposition, parfois connue comme la loi de Newton, consiste à faire une hypothèse directement sur les vitesses linéaires incidentes et de rebond dans la direction normale au contact $\vec{z}$. Il s'agit d'introduire un coefficient de proportionnalité s appelé coefficient de restitution, ou parfois de rebond (à ne pas confondre avec celui que l'on note r défini dans le cadre du modèle de Housner à partir de la rotation). Ce coefficient s est compris entre 0 et 1. Ainsi :

$$\langle \mathbf{v}_{[M]}(\Delta\tau), \vec{z} \rangle = -s \langle \mathbf{v}_{[M]}(\nabla\tau), \vec{z} \rangle \quad (2.32a)$$

Une proposition alternative, appelée loi de Poisson, suppose l'existence de deux phases distinctes entre le début et la fin de l'impact τ_a et τ_b . Durant la première phase, dite de compression, le point impactant va s'enfoncer dans le support jusqu'à atteindre une vitesse normale nulle à un instant τ_c ; ceci suppose alors l'existence d'une percussion de compression $\nabla\pi$. Puis, durant la phase de rebond, le point impactant va être repoussé par le support jusqu'à décoller ; ceci met en jeu une percussion de rebond $\Delta\pi$. L'hypothèse de Poisson consiste à appliquer le coefficient de restitution s aux percussions et non aux vitesses :

$$\langle \Delta\pi, \vec{z} \rangle = -s \langle \nabla\pi, \vec{z} \rangle \quad (2.32b)$$

Hypothèses dans la direction tangente au plan d'impact

Lipscombe et Pellegrino utilisent, pour leur modèle d'impact présenté dans [15], la loi de Newton dans la direction normale et font trois propositions pour lever l'indétermination dans la direction tangente.

1. Un impact mou dans la direction tangente : le point impactant rebondira avec une vitesse tangente nulle :

$$\langle \mathbf{v}_{[M]}(\Delta\tau), \vec{x} \rangle = \langle \mathbf{v}_{[M]}(\Delta\tau), \vec{y} \rangle = 0 \quad (2.33a)$$

2. Utiliser le même coefficient de restitution dans les directions normale et tangente, avec pour différence que la vitesse ne change pas de sens dans la direction tangente :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{v}_{[M]}(\Delta\tau), \vec{x} \rangle = s \langle \mathbf{v}_{[M]}(\nabla\tau), \vec{x} \rangle \\ \langle \mathbf{v}_{[M]}(\Delta\tau), \vec{y} \rangle = s \langle \mathbf{v}_{[M]}(\nabla\tau), \vec{y} \rangle \end{cases} \quad (2.33b)$$

3. L'application de la loi de frottement de Coulomb directement aux percussions. Si on nomme d'une part $\pi^{(N)} = \langle \pi, \vec{z} \rangle$ la percussion normale et d'autre part $\pi^{(T)} = \|\vec{z} \wedge \pi \wedge \vec{z}\|$ la percussion tangentielle :

$$\pi^{(T)} = \mu \pi^{(N)} \quad (2.33c)$$

Aucune de ces trois propositions ne semble à première vue totalement satisfaisante. Supposer l'adhérence totale, dans tous les cas, est trop réducteur. Puis supposer un coefficient de restitution identique dans les deux directions, si cela paraît élégant, traduit par un unique paramètre deux phénomènes de dissipation forts différents (un écart entre une phase de compression et une phase de rebond dû, entre autre, à de la plasticité locale ; et un amortissement de la vitesse dû notamment au frottement). Enfin, si l'utilisation de la loi de Coulomb semble la proposition la plus juste, et c'est d'ailleurs celle que choisissent les auteurs, la traduction faite par l'équation (2.33c) n'est pas correcte. Il faudrait, plutôt que de considérer l'impulsion sur le temps de choc dans son ensemble, poser le calcul sur différents intervalles de temps prenant en compte les phases d'adhérence et de glissement. Une résolution plus juste serait celle disponible dans le manuel [16].

Le comportement d'un modèle impulsif de bloc

Un bloc défini sous forme impulsif pourrait garder jusqu'au premier impact la même équation différentielle que celle du modèle de Housner, qui une fois linéarisée et résolue donne l'équation (2.7). Puis, en autorisant une certaine élasticité ($s \neq 0$), le sommet impactant va rebondir avec une vitesse plus ou moins importante ; le sommet opposé décollera aussi en continuant le mouvement de basculement, et les deux points d'appuis seront alors en vol ; ceci définit une phase de vol libre. On perd ainsi la condition cinématique proposée par Housner supposant qu'à chaque instant, un pied au moins reste en contact avec le sol, et on libère par conséquent au moins un degré de liberté.

Pour simplifier l'écriture, nous nous limiterons à présenter le comportement d'un modèle 2D effectuant une phase de vol libre.

Pendant les phases de vol libre, la seule force s'appliquant au solide est son poids. On écrit alors facilement les équations de la dynamique :

$$\left\langle \frac{d\mathbf{v}_{[G]}}{d\tau}, \vec{y} \right\rangle = 0 \quad (2.34a)$$

$$\left\langle \frac{d\mathbf{v}_{[G]}}{d\tau}, \vec{z} \right\rangle = -g \quad (2.34b)$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = 0 \quad (2.34c)$$

Lorsque le bloc impacte le support, on applique les équations d'impact élastique pour déterminer la nouvelle vitesse du point matériel M. On peut prouver dans un cas simple que les phases de vol s'atténuent jusqu'à s'annuler. Considérons

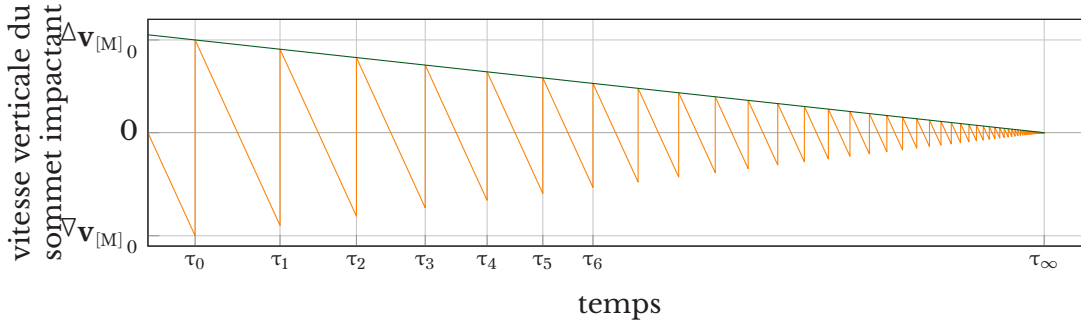


Figure 2.7 – Exemple de successions de microrebonds pour une balle en translation verticale avec $s = 0,9$

une balle sphérique infiniment rigide soumise à son poids propre, sans vitesse de rotation ni vitesse linéique initiale. Pour chaque rebond, on considère que la balle impacte le sol à l'instant τ_n avec une vitesse $\nabla \mathbf{v}_{[M]n}$ dirigée uniquement selon la normale d'impact. On considère le mécanisme d'impact de Newton défini à l'équation (2.32a). La vitesse de rebond vaut donc :

$$\Delta \mathbf{v}_{[M]0} = -e \nabla \mathbf{v}_{[M]0} \quad (2.35)$$

La balle subit un mouvement de translation, on peut donc appliquer l'équation (2.34b) directement sur le point d'impact. Ainsi, la balle soumise à son poids propre atteindra le sol avec une vitesse $\nabla \mathbf{v}_{[M]1}$ s'écrivant :

$$\nabla \mathbf{v}_{[M]1} = -\Delta \mathbf{v}_{[M]0} = e \nabla \mathbf{v}_{[M]0} \quad (2.36a)$$

à un instant τ_1 tel que :

$$\tau_1 - \tau_0 = \frac{2 \|\Delta \mathbf{v}_{[M]0}\|}{g} \quad (2.36b)$$

On pourra appliquer les mêmes équations aux impacts suivants, si bien qu'au final, l'enveloppe de la vitesse du sommet impactant est une droite de coefficient :

$$\frac{\nabla \mathbf{v}_{[M]n+1} - \nabla \mathbf{v}_{[M]n}}{\tau_{n+1} - \tau_n} = \frac{g(1-s)}{2} \quad (2.37)$$

Les rebonds deviendront de plus en plus rapprochés. Leur nombre tend vers l'infini, mais l'amplitude sera nulle au bout d'une durée :

$$\tau_\infty - \tau_0 = \frac{2}{g(1-s)} \|\nabla \mathbf{v}_{[M]0}\| \quad (2.38)$$

Ce comportement est représenté sur la figure (2.7). Lorsque le cas est moins idéal, par exemple lorsque le solide n'est pas en translation mais subit aussi une rotation, et lorsque le moment de percussion n'est pas nul, les équations (2.36) sont légèrement plus difficiles à poser. Néanmoins, en faisant l'hypothèse que le solide impacte le support à chaque rebond au même point M (ce qui peut être justifié tant que le contact est réalisé en un point anguleux), le solide cesse de rebondir au bout d'une durée finie.

Le modèle peut alors s'écrire avec quatre équations. D'une part, l'équation (2.7) lorsque le bloc est en appui continu sur un pied. Lorsque le sommet libre impacte le support, on applique les équations de choc. On peut par exemple utiliser une des équations (2.32) et une des équations (2.33). Le bloc va alors subir une succession de chocs et de phases de vol durant lesquelles on applique les équations (2.34). Si la période du mouvement principal est assez longue, ces phases de vol vont s'atténuer jusqu'à devenir de durée nulle. On applique alors à nouveau l'équation du modèle de Housner.

Si l'on veut utiliser des lois d'impact plus complexes que celles proposées aux équations (2.32) ou (2.33), la transition entre la phase de microrebonds et la phase de contact prolongé est plus délicate à déterminer.

La remise en cause de l'instantanéité de l'impact

On peut vouloir approfondir la loi d'impact et ne plus la traiter comme instantanée, par exemple, pour lui donner une plus grande justification physique, ou bien pour pouvoir traiter plus facilement certains phénomènes complexes comme le frottement. Dès lors, on ne résout plus la physique de l'impact simplement par une variation de vitesse mais bien comme une loi de force continue définie sur toute la durée, supposée non-négligeable, de l'impact, que l'on notera $F(\tau)$.

La modélisation d'un contact non permanent s'effectue classiquement par les deux méthodes des multiplicateurs de Lagrange et de la pénalisation. L'utilisation des multiplicateurs de Lagrange impose une non-pénétration du corps impactant à travers la surface du support. Il est alors délicat de décrire la valeur des forces de façon continue durant tout le temps de l'impact. C'est pourquoi la plupart des lois proposées s'écrivent avec un formalisme de pénalisation.

Dans un premier temps, nous nous limitons à décrire la loi de force normale au contact $F^{(N)}(\tau)$, définie comme positive lorsqu'elle provoque la séparation des corps. Un important travail de bibliographie a été réalisé dans [17], qui propose de nombreux modèles de lois de contact. Nous nous limitons ici à la description des modèles rencontrés dans le cadre de problèmes de blocs. Nous allons étudier en détail trois lois :

- La loi simple et classique de Kelvin–Voigt ;
- la loi de Hunt et Crossley, principale alternative à la précédente ;
- un exemple de loi plus complexe, la loi d'Andreas.

La loi de contact de Kelvin–Voigt

La loi d'impact la plus simple et la plus classique (utilisée par exemple dans [7]) peut être constituée par un terme de raideur linéaire et un terme d'amortissement visqueux linéaire. Cette loi d'impact est très comparable au modèle de matériau de Kelvin–Voigt si bien qu'elle porte parfois son nom. Tant que les deux corps s'impactant sont séparés, la force de liaison est nulle. Dès lors que le contact s'initie, et puisque l'on utilise un mécanisme de pénalisation, le corps impactant va pénétrer le support, et on peut définir une longueur de pénétration ξ ; la force qu'un des corps exerce sur l'autre est alors équivalente à celle d'un ressort linéaire de raideur K en parallèle avec un amortisseur visqueux linéaire C comme représenté sur la figure (2.8b). L'équation de la force peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} F^{(N)}(\tau) = 0 & \text{si } \xi(\tau) < 0 \\ F^{(N)}(\tau) = K\xi(\tau) + C\dot{\xi}(\tau) & \text{si } \xi(\tau) \geq 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Si l'on estime que le temps d'impact reste court, et que la variation de vitesse est essentiellement due à l'action des forces d'impact, on peut négliger les autres forces (poids...) et intégrer l'équation du mouvement. On définit l'instant initial au début du contact, si bien que $\xi(\tau = 0) = 0$, et on notera la vitesse d'impact $\dot{\xi}(\tau = 0) = \nabla_{\mathbf{v}^{(N)}}$. Appliquons cette loi à une boule de masse m . La loi d'impact est alors équivalente à la loi d'oscillation libre du matériau linéaire avec les conditions aux limites précédentes. Pour un amortissement sous-critique, la résolution classique donne un régime pseudo-sinusoidal :

$$\xi(\tau) = \frac{\nabla_{\mathbf{v}^{(N)}}}{A} e^{-B\tau} \sin(A\tau) \quad (2.40a)$$

avec :

$$A = \frac{\sqrt{4Km - C^2}}{2m} \quad \text{et} \quad B = -\frac{C}{2m} \quad (2.40b)$$

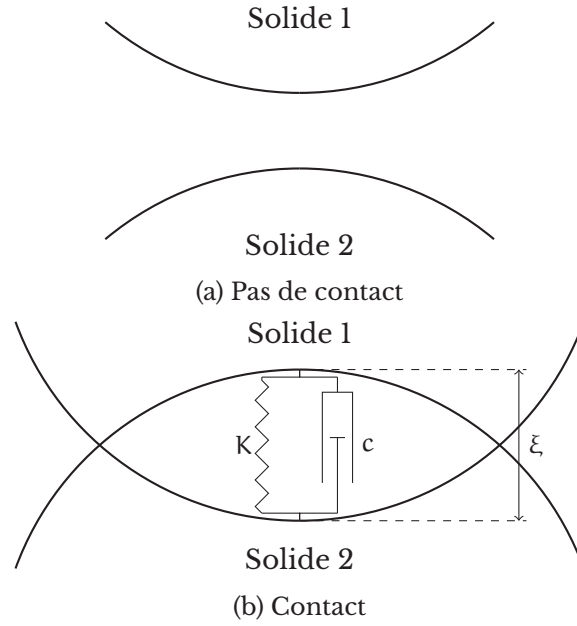


Figure 2.8 – Représentation « élémentaire » de la loi d'impact de Kelvin–Voigt

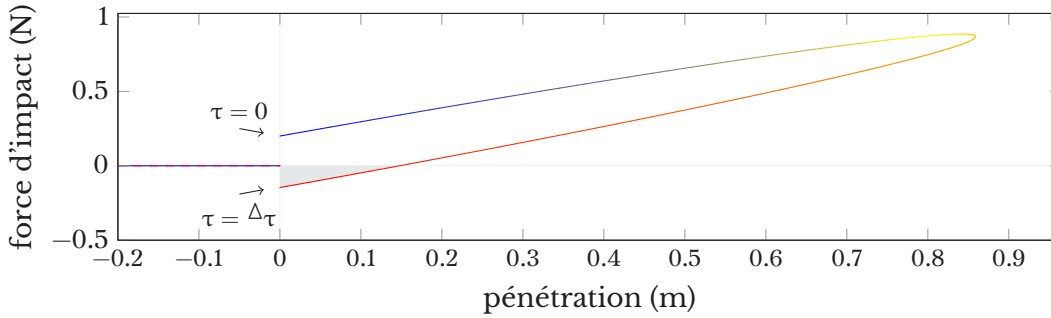


Figure 2.9 – Représentation de la loi de Kelvin–Voigt dans le plan force/pénétration. Le défilement des couleurs représente le défilement du temps. $A = 1 \text{ s}^{-1}$ $B = 0,1 \text{ s}^{-1}$ $m = 1 \text{ kg}$

On dérive facilement l'expression pour déterminer la force d'impact :

$$\mathbf{F}^{(N)}(\tau) = \frac{\nabla_{\mathbf{V}^{(N)}}}{A} e^{-B\tau} ((B^2 - A^2) \sin(A\tau) - 2AB \cos(A\tau)) \quad (2.40c)$$

Dans ce régime, on utilise souvent la notion d'amortissement réduit β , compris entre 0 et 1, défini à partir des paramètres précédents tels que :

$$\beta = \frac{C}{2\sqrt{Km}} \quad (2.41)$$

On peut représenter le comportement de cette loi dans le plan force/pénétration comme réalisé sur la figure <2.9>.

On calcule facilement l'instant $\Delta\tau$ auquel le corps quitte le support selon l'équation (2.40a) :

$$\Delta\tau = \frac{\pi}{A} \quad (2.42)$$

On peut alors déterminer la vitesse de rebond $v\Delta = \dot{\xi}(t=t\Delta)$:

$$\Delta_{\mathbf{v}^{(N)}} = -\nabla_{\mathbf{v}^{(N)}} e - \frac{B\pi}{A} \quad (2.43)$$

Le coefficient de restitution s , au sens de Newton (voir l'équation (2.32a)) s'écrit donc :

$$s = e^{-\frac{C\pi}{\sqrt{4Km - C^2}}} \quad (2.44)$$

Il ne dépend que des paramètres de la loi d'impact K et C ainsi que de la masse m du corps. Entre autres choses, il ne dépend pas de la vitesse d'impact $\nabla_{\mathbf{v}^{(N)}}$.

Des auteurs comme Hunt et Crossley mettent en avant plusieurs problèmes de cette loi (voir [18]). Le premier se voit très bien sur la figure <2.9> : la loi est discontinue. Lorsque le corps impacte le support à $\tau = 0$ ainsi que lorsqu'il décolle à $\tau = \Delta\tau$, la force effectue un saut. D'une part ceci peut sembler délicat d'un point de vue théorique, et d'autre part l'intégration numérique de la loi peut s'en trouver difficile.

Le deuxième problème est représenté en grisé sur la figure. Juste avant que le corps impactant ne décolle (lorsque $C\tau = \arctan(\frac{2AB}{A^2-B^2})$), la force de répulsion est négative, c'est-à-dire que la force a tendance à rapprocher les corps plutôt qu'à les éloigner. À moins d'imaginer un corps « collant », cette particularité est difficile à concevoir. On peut alors proposer de déplacer l'instant de décollement au moment où la force devient nulle et non au moment où la pénétration devient nulle. Le différentiel en terme d'énergie se quantifie par l'aire grisée. Cette modification du modèle de référence est par exemple effectuée dans [19].

De nombreux autres modèles construits à partir d'éléments rhéologiques simples existent. En combinant en série ou en parallèle des raideurs parfaites et des visco-amortissement parfaits, on peut résoudre certains défauts au prix d'un plus grand nombre de paramètres à identifier. Citons sans entrer dans le détail les modèles dits de Maxwell ou de Zener, bien décrits dans [17].

Loi d'impact de Hunt et Crossley

La loi de Hunt et Crossley proposée dans [18] évite les deux problèmes cités précédemment. Elle s'écrit toujours comme un terme de raideur et un terme d'amortissement mais ceux-ci ne sont pas linéaires.

Les auteurs proposent un terme de raideur en $K\xi^z$. En effet, les travaux de Hertz ont mis en évidence que la force de contact de deux sphères pouvait se modéliser par une loi de ce type où $z = \frac{3}{2}$; dans d'autres travaux, on montre par exemple que le contact entre deux surfaces planes devrait s'écrire avec $z = 1$. En dehors des cas à géométrie idéale, ils proposent l'utilisation d'un coefficient de linéarité de la raideur z indéterminé, dépendant de la géométrie du corps impactant et du support au voisinage du point de contact.

Pour pallier aux discontinuités présentées précédemment, le terme d'amortissement proposé est proportionnel à la pénétration (il sera donc nul aux moments de l'impact et du décollement). Pour simplifier l'écriture, on définit le terme dissipatif par rapport au terme de raideur, ce qui donne : $C(K\xi^z)\dot{\xi}$.

La loi complète s'écrit donc :

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{(N)}(\tau) = 0 & \text{si } \xi(\tau) < 0 \\ \mathbf{F}^{(N)}(\tau) = K\xi^z + C(K\xi^z)\dot{\xi} & \text{si } \xi(\tau) \geq 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

La loi se représente graphiquement comme une « goutte d'eau », et la figure <2.10> montre bien que la quantité d'énergie dissipée — proportionnelle à l'aire contenue dans la trajectoire représentée — n'est pas proportionnelle à la vitesse.

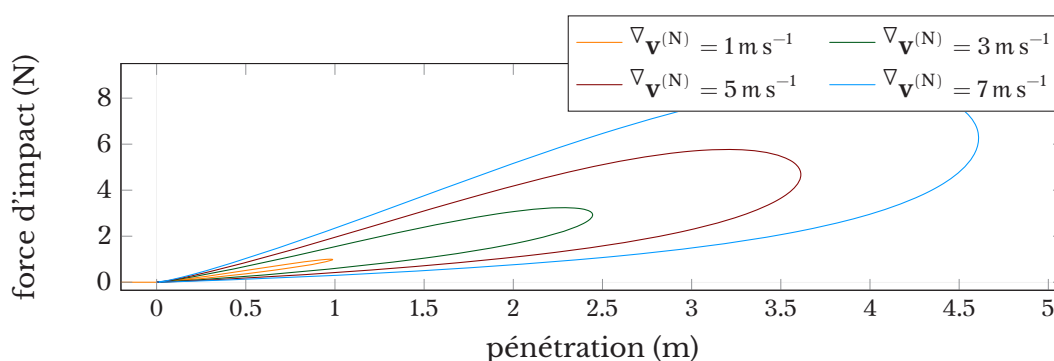


Figure 2.10 – Représentation de la loi de Hunt et Crossley dans le plan force/pénétration. $K/m = 1 \text{ N kg}^{-1} \text{ m}^{-1}$ $C = 0,2 \text{ s m}^{-1}$ $z = 1,2$

Au contraire, à faible vitesse, la dissipation est très faible, mais elle devient plus conséquente à forte vitesse.

En faisant quelques hypothèses et linéarisations simplificatrices, les auteurs montrent que, quelle que soit la valeur de z , le coefficient de restitution de type Newton peut se calculer comme :

$$s = 1 - \frac{2C}{3} \nabla_{\mathbf{v}^{(N)}} \quad (2.46)$$

D'après [20], on peut correctement modéliser le comportement de sphères d'acier par une loi de ce type, en utilisant pour le coefficient $\frac{2C}{3}$ une valeur comprise entre 0,08 et 0,32 s m^{-1} . Cette loi d'impact semble donc proposer de nombreux avantages et représenter le phénomène d'impact d'une façon bien plus intéressante que ne le fait la loi de Kelvin-Voigt.

Lorsque l'on teste cette loi en l'appliquant à un bloc soumis à un essai de lâcher, on se rend compte que la forme du mouvement global est bien retrouvée. On note par ailleurs que ce mouvement est constitué d'une succession de petits rebonds, bien visibles sur les courbes, que l'on ne retrouve pas sur les résultats expérimentaux. Seul pour un coefficient très fort ($C = 0,45$), à la limite de ce qui est proposé par Goldsmith, le bloc arrive, à la toute fin du mouvement (c'est-à-dire juste avant le prochain impact), à être presque immobilisé. On en conclut donc que si cette loi est bien adaptée, d'après la littérature, au traitement des impacts seuls (par exemple, lors des calculs de balistique) elle est bien moins adaptée à notre problème où le point impactant reste en contact prolongé.

À moins de définir deux lois, une pour l'instant d'impact, et une autre pour le contact prolongé, il semble peu réaliste d'utiliser la loi de Hunt. Mais l'utilisation de deux lois risque de poser un problème de cohérence : le mécanisme physique gérant impact et contact semble à première vue le même, et chercher à le modéliser par deux lois serait difficile à justifier physiquement ; et quand bien même nous le ferions, il ne semble pas simple de déterminer l'instant de transition entre le mécanisme d'impact et celui de contact prolongé.

La loi de contact hystérétique d'Andraeus

Il existe de nombreuses lois plus complexes, dont certaines ont été utilisées dans des problèmes de blocs rigides basculants. À titre d'exemple, nous allons présenter la loi d'Andraeus.

Une loi de contact très particulière a été proposée dans [13] pour traiter un problème de bloc rigide. La force est comprise entre deux bornes, déterminées à partir de deux raideurs choisies. Ces bornes sont d'autant plus éloignées que l'enfoncement est grand, et ainsi, la dissipation augmente avec l'enfoncement de

façon complexe et non proportionnelle à la vitesse d'impact. La loi impose de plus un lissage de la force au cours du temps. Pour cela, on calcule d'abord une force cible $F^{(N)}(\tau)_{\text{cible}}$, qui ne sera pas la force de contact appliquée, mais vers laquelle la force appliquée va tendre selon une exponentielle décroissante.

Ainsi la force se calcule de la façon suivante :

- on détermine deux bornes pour la force, $F_{\min}^{(N)}$ et $F_{\max}^{(N)}$, qui dépendent de l'enfoncement ξ . Ces fonctions bornes sont définies par trois paramètres : deux raideurs initiales, $K_{\min}$ et $K_{\max}$, et un enfoncement maximum $\xi_{\max}$:

$$F_{\min}^{(N)}(\xi) = K_{\min} \frac{\xi_{\max}}{\xi_{\max} - \xi} \xi \quad (2.47a)$$

$$F_{\max}^{(N)}(\xi) = K_{\max} \frac{\xi_{\max}}{\xi_{\max} - \xi} \xi \quad (2.47b)$$

- lorsque l'enfoncement augmente, la force tend vers sa borne maximum, et lorsque l'enfoncement se réduit, la force tend vers sa borne minimum. Avec nos notations :

$$F_{\text{cible}}^{(N)}(\tau) = F_{\min}^{(N)}(\xi(\tau)) \quad \text{lorsque} \quad \dot{\xi}(\tau) < 0 \quad (2.48)$$

$$F_{\text{cible}}^{(N)}(\tau) = F_{\max}^{(N)}(\xi(\tau)) \quad \text{lorsque} \quad \dot{\xi}(\tau) \geq 0$$

- La force effectivement appliquée $F^{(N)}$ se rapproche de la force cible selon le mécanisme suivant¹ :

$$\frac{dF^{(N)}(\tau)}{d\tau} = \beta \times \left| \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} \right| \times \frac{1}{\xi_{\max} - \xi} \times (F_{\text{cible}}^{(N)}(\tau) - F(\tau)) \quad (2.49)$$

L'équation (2.49) est élégante, la force tend vers sa cible en se rapprochant d'elle avec une vitesse proportionnelle :

- à l'écart entre sa cible et sa position actuelle,
- à la vitesse d'enfoncement,
- à un facteur quantifiant la proximité de l'enfoncement maximum (si on en est proche, il faut faire varier la force rapidement pour permettre un changement de vitesse à temps),
- à un paramètre d'amortissement β *ad hoc*.

L'équation (2.49) mise sous forme discrétisée donne :

$$F^{(N)\langle n+1 \rangle} - F^{(N)\langle n \rangle} = \beta \frac{|\xi^{(n+1)} - \xi^{(n)}|}{\xi_{\max} - \xi^{(n+1)}} \times (F_{\text{cible}}^{(N)\langle n \rangle} - F^{(N)\langle n \rangle}) \quad (2.50a)$$

On peut simplifier l'équation en utilisant un paramètre γ :

$$F^{(N)\langle n+1 \rangle} - F^{(N)\langle n \rangle} = \gamma (F_{\text{cible}}^{(N)\langle n \rangle} - F^{(N)\langle n \rangle}) \quad \text{avec} \quad \gamma = \beta \frac{|\xi^{(n+1)} - \xi^{(n)}|}{\xi_{\max} - \xi^{(n+1)}} \quad (2.50b)$$

On remarque que le paramètre γ est très petit lorsque le pas de temps est petit. L'article utilise alors un équivalent avec une exponentielle :

$$\gamma \rightarrow 1 - e^{-\gamma} \quad (2.50c)$$

Ainsi la force au pas de temps suivant tend vers :

$$F^{(N)\langle n+1 \rangle} = F^{(N)\langle n \rangle} + (1 - e^{-\gamma}) (F_{\text{cible}}^{(N)\langle n \rangle} - F^{(N)\langle n \rangle}) \quad (2.50d)$$

Tout ceci se simplifie et l'équation devient :

$$F^{(N)\langle n+1 \rangle} = F_{\text{cible}}^{(N)\langle n \rangle} + (F^{(N)\langle n \rangle} - F_{\text{cible}}^{(N)\langle n \rangle}) e^{-\beta \frac{|\xi^{(n+1)} - \xi^{(n)}|}{\xi_{\max} - \xi^{(n+1)}}} \quad (2.51)$$

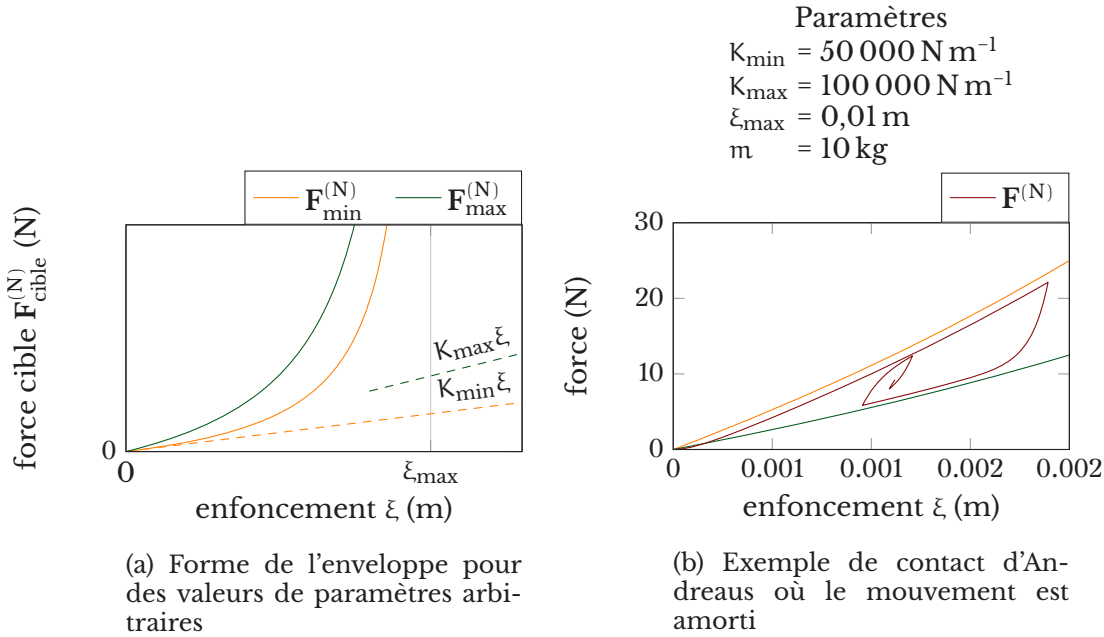


Figure 2.11 – Illustration du comportement de la loi de contact d'Andraeus

La figure (2.11a) présente la forme des deux lois de raideur “cibles” $F_{\min}^{(N)}(\xi(\tau))$ et $F_{\max}^{(N)}(\xi(\tau))$, quelles que soient les valeurs précises des paramètres $K_{\min}$, $K_{\max}$ et $\xi_{\max}$. La figure (2.11b) illustre le comportement d'une masse posée sur une surface, dont la force d'appui s'équilibre selon le mécanisme de contact d'Andraeus. La forme de la courbe est intéressante, et montre d'une part que la dissipation croît fortement avec l'enfoncement, et d'autre part que l'effort à l'instant initial est continu. Ces caractéristiques sont des points appréciables, comme on l'a expliqué ci-avant. On peut néanmoins critiquer ce modèle sur plusieurs points :

- l'utilisation de deux raideurs est difficilement justifiable, et ces paramètres peuvent difficilement être déduits des essais ;
- la force effectivement appliquée n'est pas aussi simple à calculer que la force cible, si bien que le mouvement final est très difficile à apprécier analytiquement. En particulier, il sera compliqué de déduire un coefficient de rebond de façon analytique ;
- lors de l'impact, la force en fonction de l'enfoncement démarre avec une valeur nulle et une dérivée nulle ; à l'inverse, à la limite du décollement, la force est dirigée vers $F_{\min}^{(N)}$, avec une valeur strictement positive. Ainsi, au voisinage de $\xi = 0$, le mécanisme provoque une dissipation négative. Ceci provoque un accroissement de l'énergie lorsque les coefficients de rebond sont proches de 1.

La remise en cause de la ponctualité du contact

La plupart des modèles de bloc utilisent des contacts ponctuels, c'est-à-dire des modèles où le contact est représenté par des efforts réduits en un seul point. Une des rares alternatives a été proposée par Winkler [7], dans un modèle où le contact est surfacique et où chaque unité de surface contribue à l'effort général par une loi rhéologique simple.

Récemment, Chatzis et Smyth [21] ont comparé le comportement de deux modèles de bloc, l'un aux appuis ponctuels dénommé *Concentrated Spring Model* et son équivalent surfacique selon la méthode de Winkler. Globalement, les deux modèles présentent les mêmes caractéristiques.

1. Ce mécanisme n'est pas explicite dans [13], mais l'intégration de ses équations permet de remonter à l'équation différentielle.

2.3 Les autres problématiques

La remise en cause de l'hypothèse de rigidité du bloc

Les trois manifestations de la rigidité

L'hypothèse de rigidité permet de réduire le problème à seulement six degrés de liberté. Cette hypothèse générale permet trois simplifications qui peuvent être analysées séparément.

Tout d'abord, la rigidité permet de considérer les masses comme fixes dans le repère du bloc, et par conséquent d'utiliser des coefficients d'inertie constants. Pour la plupart des cas d'application, les ordres de grandeurs et de la raideur des matériaux, et de l'élanement et du poids de la structure permettent d'affirmer que le champ de déplacement interne dû aux efforts appliqués sur le bloc n'est pas d'une amplitude à même de modifier significativement l'inertie globale.

La seconde problématique est liée aux déformations de contact. Au voisinage des points d'appui, les forces en présence sont potentiellement grandes, en particulier lors des impacts. Des déformations locales des surfaces de contact, même si l'inertie varie peu, peuvent influencer sur l'intensité ou la direction des forces de réaction et modifier le mouvement de façon significative.

Enfin, la dernière problématique est celle du stockage d'énergie sous forme d'onde au sein du matériau. Lors du basculement du bloc, l'énergie est au préalable contenue dans le mouvement de rotation ; lors de l'impact, une partie de cette énergie peut potentiellement être transformée sous forme d'une onde de compression au sein du matériaux. Elle peut alors être soit dissipée en chaleur, soit retransmise au mouvement global de bloc, en particulier si le retour de l'onde arrive à l'endroit d'un point d'appui actuellement en contact. Il est alors possible que le retour d'onde ait une influence significative sur le mouvement global.

Les déformations de contact

Les déformations de contact dues à la force entre le bloc et le support sont de deux ordres :

- des déformations élastiques, qui ont lieu durant la durée du contact, et qui s'annulent rapidement une fois le contact perdu ;
- des déformations plastiques pouvant générer des l'endommagement et des fractures générant ainsi une usure.

La quantification des déformations élastiques ne peut être que numérique. En effet, il n'est pas simple de mesurer des déformations durant une si courte durée.

En revanche, numériquement, on peut estimer la déformation des matériaux et comparer le comportement global d'un bloc absolument rigide à celui d'un bloc très légèrement souple au voisinage des points de contact. Ce travail, nous semble-t'il, mériterait encore d'être effectué.

Les déformations plastiques, elles, peuvent dans une certaine mesure être observées expérimentalement. En réalisant un très grand nombre d'essais identiques, on peut étudier l'effet de l'usure des pieds, et donc des déformations plastiques. À notre connaissance, ce type de résultats n'existe pas encore dans la littérature. Durant ce travail de thèse, une campagne expérimentale comprenant plus de 400 essais, dont 100 essais aussi identiques que possible, a été réalisée. Il n'a pas été observé de modification significative du comportement due à l'usure des pieds. Les résultats de cette campagne sont détaillés dans le chapitre **A**.

L'effet des ondes durant l'impact

Lipscombe et Pellegrino posent dans [15], cette question de l'effet des ondes de compression sur le mouvement global, et proposent d'appliquer le principe dégagé par Werner Goldsmith dans [20], qui pourrait être traduit par :

Élancement h/b	Durée du contact (ms)	Période fondamentale (ms)
1	180	16
2	240	35
4	520	140
8	1600	500

Table 2.1 – Durée du contact et période fondamentale des blocs de Lipscombe et Pellegrino

« L'hypothèse de corps rigide est pertinente dès que la durée de la collision est suffisamment longue pour permettre plusieurs réflexions des ondes provoquées par l'impact. »

Ces auteurs extraient alors de leurs résultats expérimentaux les durées de collision et les mettent en regard des périodes fondamentales de leurs blocs, c'est-à-dire un aller-retour de l'onde de première harmonique. L'article ne précise pas la forme du mode propre, mais compte tenu des matériaux et de la géométrie, il s'agit probablement du premier mode de flexion. Le tableau 2.1 montre que les durées de contact permettent pour chaque bloc au moins trois retours d'onde. Lipscombe et Pellegrino concluent alors que l'hypothèse de rigidité est valable. L'article ne précise pas la façon dont cette durée est mesurée.

La remise en cause du mouvement plan

La dernière hypothèse à éliminer est le mouvement plan. La plupart des comportements explicités ci-avant restent valables en 3D. Les calculs sont souvent plus compliqués à poser, mais globalement, les difficultés présentées restent les mêmes. En plus de celles-ci, un nouveau problème se pose : les trois rotations vont être délicates à appréhender. L'algorithme d'intégration du mouvement prend donc une importance supplémentaire.

Nous avons choisi d'utiliser l'algorithme de Simo décrit dans [22] qui a la particularité, en l'absence de forces extérieures, de conserver exactement le moment dynamique linéaire – la quantité de mouvement – et angulaire, et de garantir que la dissipation soit toujours positive, ceci tant que les équations de comportement sont continues.

Le repérage des rotations par des quaternions unitaires

Un quaternion est un nombre hypercomplexe, défini comme une combinaison linéaire à coefficients réels de quatre quaternions unités : 1, $\underline{i}$, $\underline{j}$ et $\underline{k}$. Nommons $\underline{q}$ et $\underline{q}'$, deux quaternions définis par :

$$\begin{aligned}\underline{q} &= a1 + b\underline{i} + c\underline{j} + d\underline{k} \\ \underline{q}' &= a'1 + b'\underline{i} + c'\underline{j} + d'\underline{k}\end{aligned}\tag{2.52}$$

L'algèbre des quaternions est particulière, dans laquelle l'addition est simplement définie par :

$$\underline{q} + \underline{q}' = (a + a')1 + (b + b')\underline{i} + (c + c')\underline{j} + (d + d')\underline{k}\tag{2.53}$$

Elle ne pose pas de problèmes particuliers, on la notera alors simplement +. La multiplication est elle partiellement anticommutative. Pour mettre cette particularité en relief, on notera la multiplication de quaternions $\star$. Le produit des composantes unitaires est effectué de la sorte :

$$\begin{array}{llll} 1 \star 1 = 1 & \underline{i} \star 1 = \underline{i} & \underline{j} \star 1 = \underline{j} & \underline{k} \star 1 = \underline{k} \\ 1 \star \underline{i} = \underline{i} & \underline{i} \star \underline{i} = -1 & \underline{j} \star \underline{i} = -\underline{k} & \underline{k} \star \underline{i} = \underline{j} \\ 1 \star \underline{j} = \underline{j} & \underline{i} \star \underline{j} = \underline{k} & \underline{j} \star \underline{j} = -1 & \underline{k} \star \underline{j} = -\underline{i} \\ 1 \star \underline{k} = \underline{k} & \underline{i} \star \underline{k} = -\underline{j} & \underline{j} \star \underline{k} = \underline{i} & \underline{k} \star \underline{k} = -1 \end{array}\tag{2.54}$$

Si on note q_0 et $\mathbf{q}$, les composantes entières et complexes de $\underline{\mathbf{q}}$ telles que :

$$\begin{aligned} q_0 &= a \\ \mathbf{q} &= (b, c, d) \end{aligned} \quad (2.55)$$

alors l'opération $\underline{\mathbf{q}} \star \underline{\mathbf{q}}'$ est commutative si et seulement si $\mathbf{q}$ et $\mathbf{q}'$ sont colinéaires. Cette particularité est intéressante puisque la composition de rotations autour d'un axe de l'espace est elle aussi commutative si et seulement si les deux axes sont colinéaires. On utilise alors la notation précédente pour simplifier la multiplication :

$$\underline{\mathbf{q}} \star \underline{\mathbf{q}}' = \begin{vmatrix} q_0 & \mathbf{q} \\ q'_0 & \mathbf{q}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_0 q'_0 - \langle \mathbf{q}, \mathbf{q}' \rangle \\ q_0 \mathbf{q}' + q'_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \wedge \mathbf{q}' \end{vmatrix} \quad (2.56)$$

On appelle quaternion unitaire un quaternion dont la norme est égale à 1 :

$$\|\underline{\mathbf{q}}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{q_0^2 + \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle} = 1 \quad (2.57)$$

L'ensemble des quaternions unitaires est noté $\mathbb{H}_{[1]}$.

Il existe une bijection $\mathcal{R}_q$ entre les rotations de l'espace et les quaternions unitaires, permettant d'utiliser le produit de quaternions comme équivalent d'une composition de rotation. À une rotation d'angle θ autour d'un axe unitaire orienté $\vec{e}$, on associe le quaternion $\underline{\mathbf{q}}$ tel que :

$$\mathcal{R}_q: \theta \vec{e} \xrightarrow{\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}_{[1]}} \underline{\mathbf{q}} = \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{e} \end{vmatrix} \quad (2.58)$$

On peut démontrer que la matrice de rotation $\mathcal{R}$ associée au quaternion $\underline{\mathbf{q}}$ est telle que :

$$\mathcal{R} = 2 \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - \frac{1}{2} & bc - ad & bd + ca \\ bc + ad & a^2 + c^2 - \frac{1}{2} & cd - ab \\ bd - ac & cd + ab & a^2 + d^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Repérer les rotations par des quaternions a entre autres l'avantage de résoudre le problème de « blocage de cardan » (ou *gimbal lock*) qui peut survenir avec l'utilisation des angles d'Euler et qui peut être délicat à gérer numériquement. En effet, il peut arriver, avec l'utilisation des angles d'Euler, que deux axes de rotation se superposent quasiment. Dans ce cas, le système d'équations perd un degré de liberté et le mouvement se bloque.

Fonctionnement de l'algorithme Au pas de temps n , la position du centre de gravité est représentée par un vecteur $\mathbf{u}^{(n)}$, sa vitesse par un vecteur $\mathbf{v}^{(n)}$ et son accélération par un vecteur $\mathbf{A}^{(n)}$; la rotation est représentée par un quaternion unitaire $\underline{\mathbf{q}}^{(n)}$, la vitesse de rotation instantanée par un vecteur $\Omega^{(n)}$ dont la norme est proportionnelle à la vitesse de rotation et dont la direction correspond à l'axe instantané de rotation (orienté), et l'accélération de rotation par un vecteur $\Theta^{(n)}$. On utilise dans l'algorithme un quaternion temporaire $\underline{\mathbf{q}}'^{(n)}$.

L'algorithme explicite utilisé conserve la quantité de mouvement et la quantité de rotation quelle que soit la durée de l'incrément de temps δT . Il peut se décomposer en 4 étapes, comme résumé dans [23] :

Étape 0 On suppose connues les valeurs de toutes les grandeurs au pas de temps n .

Étape 1 Calcul de l'incrément du vecteur de rotation (dans le repère convectif) et de l'incrément de déplacement du centre de gravité à partir de leurs dérivées :

$$\Delta \mathbf{u}^{(n+1)} = \delta T \mathbf{v}^{(n)} + \frac{\delta T^2}{2} \mathbf{A}^{(n)} \quad (2.60a)$$

$$\Delta \mathbf{r}^{(n+1)} = \delta T \Omega^{(n)} + \frac{\delta T^2}{2} \Theta^{(n)} \quad (2.60b)$$

Étape 2 Calcul de la nouvelle position et de la nouvelle matrice de rotation :

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n)} + \Delta \mathbf{u}^{(n+1)} \quad (2.61a)$$

$$\underline{\mathbf{q}}'^{(n+1)} = \underline{\mathbf{q}}^{(n)} \star \mathcal{R}_q \left(\left\| \Delta \mathbf{r}^{(n+1)} \right\|, \text{dir} \left(\Delta \mathbf{r}^{(n+1)} \right) \right) \quad (2.61b)$$

On normalise le quaternion ainsi obtenu :

$$\underline{\mathbf{q}}^{(n+1)} = \frac{\underline{\mathbf{q}}'^{(n+1)}}{\left\| \underline{\mathbf{q}}'^{(n+1)} \right\|} \quad (2.61c)$$

On peut alors déduire la matrice de rotation $\mathcal{R}^{(n+1)}$ pour le pas $n+1$ en appliquant l'équation (2.59) à $\underline{\mathbf{q}}^{(n+1)}$. À la fin de cette étape, on dispose donc de la nouvelle position de chacun des points du système.

Étape 2 bis Calcul de la force $\mathbf{F}$ et du moment $\mathbf{M}$ appliqués au bloc au pas $n+1$ selon la loi de contact choisie à partir des valeurs des variables spatiales au pas de temps n . Les vecteurs $\mathbf{F}^{(n+\frac{1}{2})}$ et $\mathbf{M}_{[G]}^{(n+\frac{1}{2})}$ représentent la force et le moment réduit au centre de gravité au demi-pas de temps, et sont calculés dans le repère fixe. La valeur des efforts au demi-pas de temps est approchée la par moyenne des efforts aux pas de temps suivant et précédent :

$$\mathbf{F}^{(n+\frac{1}{2})} = \frac{\mathbf{F}^{(n)} + \mathbf{F}^{(n+1)}}{2} \quad (2.62a)$$

$$\mathbf{M}_{[G]}^{(n+\frac{1}{2})} = \frac{\mathbf{M}_{[G]}^{(n)} + \mathbf{M}_{[G]}^{(n+1)}}{2} \quad (2.62b)$$

Étape 3 Calcul des nouvelles vitesses par application de la conservation des moments dynamiques :

$$\mathbf{v}^{(n+1)} = \mathbf{v}^{(n)} + \frac{\delta T}{m} \mathbf{F}^{(n+\frac{1}{2})} \quad (2.63a)$$

$$\Omega^{(n+1)} = \left(\mathcal{R}^{(n+1)} \otimes \mathcal{J}_{[G]} \right)^{-1} \left(\mathcal{R}^{(n+1)} \otimes \mathcal{J}_{[G]} \Omega^{(n)} + \delta T \mathbf{M}_{[G]}^{(n+\frac{1}{2})} \right) \quad (2.63b)$$

Notons que la vitesse de rotation instantanée Ω et le tenseur d'inertie $\mathcal{J}_{[G]}$ sont définis dans le repère convectif (et donc, le tenseur d'inertie $\mathcal{J}_{[G]}$ est constant au cours du temps) alors que les efforts $\mathbf{F}$ et $\mathbf{M}_{[G]}$ ainsi que la vitesse linéique $\mathbf{v}$ sont définis dans le repère fixe.

Étape 4 Calcul des nouvelles accélérations par application du principe fondamental de la dynamique :

$$\mathbf{A}^{(n+1)} = \frac{\mathbf{F}^{(n+\frac{1}{2})}}{m} \quad (2.64a)$$

$$\Theta^{(n+1)} = \mathcal{J}_{[G]}^{-1} \left(\mathbf{M}_{[G]}^{(n+\frac{1}{2})} - \Omega^{(n+1)} \wedge \mathcal{J}_{[G]} \Omega^{(n+1)} \right) \quad (2.64b)$$

Les différentes hypothèses de comportement ont été présentées, et leurs conséquences sur les techniques de modélisations ont été décrites. Il reste à observer le mouvement expérimental et à construire un modèle capable de reproduire ce comportement observé. C'est l'objet du chapitre suivant.



Modélisation du comportement de blocs à la géométrie imparfaite

Chapitre
Article :
3
Modèle

Ce chapitre est la transcription d'un article intitulé *Behavior of rigid blocks with geometrical defects under seismic motion : an experimental and numerical study*, en cours de review.

L'article est composé de trois parties importantes. Tout d'abord, une partie de la campagne expérimentale réalisée en 2007 par Cyril Feau et Stéphane Poupin du CEA est décrite dans la section 3.3. Un comportement particulier y est identifié et la section 3.4 explique comment celui-ci est expliqué par une hypothèse de contact non ponctuel, dans un modèle appelé 8ACP. Enfin, la section 3.5 montre comment est quantifiée l'influence de cette hypothèse sur la stabilité d'un modèle de bloc rigide.

Article

Principaux résultats et explication succincte de l'article

Résultat intéressant de la campagne d'essai de 2007

Une campagne expérimentale appelée GlisBasc a été réalisée par le CEA en 2007. Le comportement de blocs parallélépipédiques rectangles d'élancement 2, 4, 5 et 7 a été étudié lors d'essais dynamiques. Des essais au marteaux de choc, des essais de lâcher, des essais sous sollicitation sinusoïdale et des essais sous excitation sismique ont été réalisés. Cyril Feau a proposé des premiers éléments d'interprétation de la campagne dans le rapport [8]. En particulier, il observe un comportement 3D lors des essais de lâcher, particulièrement marqué dans le mouvement des blocs d'élancement 7. La figure (3.2c) présente l'orientation des axes lors d'un essai de lâcher. Le mouvement est dit plan lorsqu'il a lieu uniquement autour de l'axe principal.

Comm.

Par un nouveau post-traitement réalisé dans le cadre de ce travail de thèse, dont un apport principal est l'identification d'un défaut de position angulaire des capteurs de vitesse de rotation (plus d'informations dans l'annexe A), la répétabilité de ce mouvement hors plan a pu être identifiée. La figure (3.3) montre les résultats de 8 essais de lâcher réalisés avec le même bloc et permettent d'identifier certaines caractéristiques. La figure principale (3.3a) présente le mouvement dans son ensemble, sur toute la durée de l'essai et autour de chaque axe. On note en préambule que le mouvement hors-plan n'est pas présent dès le début de l'essai mais qu'il apparaît lors du premier « impact principal¹ » (ou *main impact*, mi).

Fiabilité

Premièrement, les figures (3.3c) et (3.3d) zooment sur les rotations autour des axes transverse et longitudinal et observent que la première oscillation, entre le premier et le second mi, présente une forme particulière. Durant cette durée d'en-

Formu-
lation

1. Un impact principal est défini comme le phénomène qui provoque un extremum local de la vitesse de rotation autour de l'axe principal. en première approximation, ceci correspond à un impact avec le support lorsque l'on fait abstraction du mouvement hors-plan.

Conclusion

viron 1 s, la répétabilité du mouvement est très forte : à la fois la forme, l'amplitude et la phase de l'oscillation sont fidèlement reproduites à chaque essai. Ceci met en évidence que l'initiation du mouvement hors-plan a une cause déterministe.

Ensuite, les figures <3.3l>, <3.3m> et <3.3n> montrent que l'oscillation hors-plan (autours des axes transverse et longitudinal) est synchrone avec une légère perturbation de mouvement autour de l'axe principal. Ceci semble révéler une influence croisée entre le mouvement autour de chaque axe. Ainsi, même si le mouvement dans l'axe principal semble celui qui pilote la stabilité, correctement représenter celui-ci pourrait demander de bien comprendre le mouvement hors-plan. Ceci justifie pourquoi on va chercher à proposer un modèle capable de le reproduire fidèlement.

La construction du modèle de bloc rigide

Puisque le mouvement hors-plan semble être initié par une cause déterministe, et que cette cause semble indépendante d'une part, de l'endroit exact du support où est réalisé l'essai et d'autre part, de l'angle de lâcher exact, il a été décidé de représenter la cause du mouvement hors-plan par une asymétrie permanente du bloc. Des premières pistes consistant à utiliser un modèle 3D à la géométrie parfaite mais dont les paramètres de contact étaient différents pour chaque point d'appuis ont été écartées : certes, elles permettaient de retrouver l'existence d'un mouvement hors-plan, mais celui-ci ne présentait pas la même « forme » d'oscillation.

Le modèle proposé a donc une géométrie imparfaite. Un premier modèle de bloc rigide à la géométrie imparfaite muni de 4 points d'appuis non-coplanaires appelé 4ACP (pour *4 Asymetrical Contact Points*) a été étudié. Ses résultats n'ont pas été commentés dans l'article qui suit. Nous proposons d'expliquer dans la section 3.8 de ce chapitre pourquoi la mise en place d'un modèle à huit points de contact nous a semblé nécessaire.

Ainsi, le contact entre le support et un pied du modèle 8ACP (pour *8 Asymetrical Contact Points*) est représenté par deux points d'appuis, dont la position approximative est précisée sur la figure <3.2b>. Puisque nous attribuons cette asymétrie à un défaut de fabrication, nous ne pouvons pas connaître *a priori* la position précise de ces points. Celle-ci est déterminée par un algorithme d'optimisation qui cherche à minimiser l'écart entre le mouvement hors-plan expérimental très reproductible (entre le premier et le deuxième mi) et le mouvement hors-plan prédit par le modèle. Cet algorithme propose aussi une valeur des paramètres mécaniques de contact, raideur, amortissement, frottement, de chaque point d'appuis. Bien que l'algorithme puisse modifier environ 60 paramètres, son utilisation a montré que l'on pouvait réduire ce nombre à 14. En particulier, ceci a montré que le défaut de géométrie seul, sans appliquer d'asymétrie dans les paramètres de contact, est capable de reproduire fidèlement le mouvement observé. La figure <3.4> compare le résultat expérimental avec la prédiction du modèle ainsi calibré.

L'influence marginale de cette hypothèse de défaut géométrique

En comparant la prédiction de notre modèle, appelé *8 Asymetrical Contact Point* (8ACP), à celle d'un modèle symétrique, avec un seul point de contact par pied, mais toutes choses égales par ailleurs appelé *4 Symetrical Contact Point* (4SCP), il est possible de quantifier l'influence de cette seule hypothèse géométrique. La figure <3.8> présente la réponse des deux modèles face à une accélération sismique artificielle 2D. Cette seule réalisation ne permet pas de statuer quant à la stabilité.

Cette simulation a donc été répétée avec 2000 signaux artificiels 2D construits à partir d'une même DSP mais avec des PGA différents. La figure <3.9> présente les résultats de cette comparaison. La figure <3.9a> est un nuage de points où chaque point représente le résultat d'une simulation : l'axe des abscisses représente le PGA et l'axe des ordonnées représente le maximum au cours du temps du déplacement vertical des points de contacts. Plus le séisme est fort, plus le point est vers la

droite, et plus le bloc a basculé, plus le point est vers le haut. La figure <3.9b> représente l'estimation par noyau des résultats de la figure <3.9a>. Chaque paire de courbe correspond à la classe de résultats repérés par les bandes verticales colorées. L'échelle des ordonnées est sectionnée, et la partie du haut correspond aux blocs qui se sont renversés.

Sur ces deux figures, on remarque que les deux modèles se comportent globalement de la même façon : à bas niveau de séisme, les blocs n'initient pas leur basculement du tout, alors qu'à haut niveau de séisme, les blocs se renversent quasiment tous. Dans la gamme des séismes de niveau modéré, en particulier dans la classe repérée par la première bande verticale, le modèle 8ACP est beaucoup plus instable que le modèle 4SCP. En effet, à ce niveau, le modèle 4SCP ne prédit presque aucun basculement alors qu'un nombre non négligeable de simulations ont prédit un basculement important, voire même un renversement. On montre alors que remettre en cause l'hypothèse de ponctualité des contacts ne modifie pas dans son ensemble la stabilité d'un bloc sous séisme, mais augmente légèrement le nombre d'occurrences de renversement lors de séismes d'un niveau proche de la limite de basculement.

3.1 Introduction

The dynamic response of free standing rigid blocks has always been an important research field in earthquake engineering. Motivation for this research comes, amongst others, from archeology and historical seismology (estimation of earthquake intensities), cultural heritage protection (earthquake behavior of structures such ancient Greek and Roman temples [1]) and equipment response of critical facilities such as hospitals and high risk industrial facilities (*e.g.* nuclear power plants). Therefore, a lot of work has been published on the behavior of slender rigid blocks, dealing mainly with ideal blocks (*i.e.* prismatic, homogeneous and symmetric). Despite the apparent simplicity of this kind of structures, impact and friction nonlinearities may result in extremely sensitive response, as highlighted in [24, 25].

The present work focuses on the influence of small geometrical defects on the behavior of slender rigid blocks. The ultimate goal is to investigate their stability under seismic excitation, by using an accurate analytical model taking into account geometrical imperfections. To this end, an experimental and analytical study on the response of non-perfect slender blocks was undertaken. A comprehensive experimental campaign was carried out on one of the shake tables of the French *Commissariat à l'Énergie Atomique*. The tested model was a massive steel block with common manufacturing quality. Release, free oscillations tests as well as shake table tests revealed a non-negligible out-of-plane motion even in the case of apparently plane initial conditions or excitations. Similar release tests have been carried out by others, for example by Lipscombe and Pellegrino [15], to assess the accuracy of usual 2D models, by Purvance *et al.* [2] to study the free motion of odd shape structures like rocks and by Peña *et al.* [6], to calibrate numerical models of granite stones. The issue of out-of-plane motion is not discussed in those references. Other researchers studied the three-dimensional (3D) response of rigid bodies experimentally and/or analytically. The analytical models in these references assume perfectly symmetric blocks and do not address the issue of "spurious" motion due to geometrical defects.

The paper is organized as follows. For the sake of completeness and for a better understanding of the novel contribution of this work, section 3.2 presents a brief review of previous work which was the starting point for our study. In particular the model of rocking of a rigid block established by Housner in the 60's and Ishiyama's overturning criteria under seismic excitations are presented. Section 3.3 presents the experimental set-up and the main results. The characteristics of the observed complex three-dimensional (3D) motion, during the release tests, are thoroughly examined. This motion exhibits a piecewise repetitive pat-

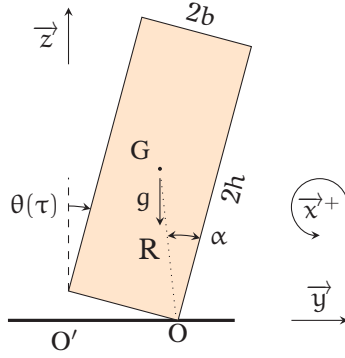


Figure 3.1 – **Geometry and parameters of Housner's rigid block model.** $2b$ and $2h$ are the width and height of the block, R and α the diagonal dimension and the angle of slenderness, $\theta(\tau)$ is the tilt angle of the block at time τ , O and O' are the contact points, G is the mass center and g is the acceleration of gravity.

tern which will be used to calibrate the analytical model in section 3.4. The above complex behavior can be explained only if an asymmetric model is considered.

Section 3.4 presents such a model. Particular attention was devoted to the calibration methodology to match the experimentally observed in-plane and out-of-plane motions. Eventually, the effects of variations of the calibrated parameter values on the response are investigated through an empirical sensitivity analysis.

Using the above analytical model, section 3.5 investigates the stability of this block when subjected to earthquake excitations. Since in practice small defects are not known, the stability of the symmetrical model is compared to the stability of the asymmetrical one, when subjected to 2000 pairs of artificial seismic horizontal signals. The results are also compared to the usual stability criteria stated in section 3.2.

3.2 Brief review of previous work

One of the most frequently used models is Housner's model [4], schematized in Figure (3.1). It considers a symmetric homogeneous rigid block in pure two-dimensional (2D) motion and assumes that the impact is instantaneous, non-elastic and occurs only along the edges of the block orthogonal to the plane of motion (O and O' in Figure (3.1)). Furthermore, sticking contact conditions are assumed *i.e.* there is no sliding of the contact points, and simultaneous uplift of points O and O' is excluded.

Under these assumptions and in the case of free oscillations, the rotation angle $\theta(\tau)$ at time τ verifies the following second order differential equation :

$$\ddot{\theta}(\tau) = \frac{3g}{4R} \sin(\theta(\tau) - \tilde{\alpha}) \quad (3.1)$$

where R is the diagonal dimension, α the characteristic angle of slenderness, g is the acceleration of gravity and $\tilde{\alpha} = \pm\alpha$ depending on whether the body is rotating around point O or point O' (see Figure (3.1)). After impact, the angular velocity decreases. This decrease depends on a restitution coefficient r , which depends on geometry only, and is determined by the conservation of angular momentum :

$$\dot{\theta}(\tau^{\text{after impact}}) = r\dot{\theta}(\tau^{\text{before impact}}) \quad \text{with} \quad r = 1 - \frac{3}{2} (\sin(\alpha))^2 \quad (3.2)$$

For any initial conditions such as $|\theta(\tau = 0)| < \alpha$ and $\dot{\theta}(\tau = 0) = 0$ (initial release conditions), it can be shown, by integrating equation (3.1), that each impact, which corresponds to a change of the center of rotation of the block, corresponds also to

a local maximum of the time history of $\dot{\theta}(\tau)$. This result will be used in the sequel to interpret the experimental results.

To represent more accurately the behavior of a rocking block, several authors proposed more refined models relaxing some of Housner's assumptions. Aslam *et al.* [14] considered a non-fixed value of r while Lipscombe and Pellegrino [15] proposed models which focus, mainly, on energy dissipation during impact. Sliding between the block and its support is taken into account in some models like in Shenton and Jones [26], Konstantinidis and Makris [27], Zhang and Brogliato [28]. Stoianovici and Hurmuzlu [12] showed that Coulomb's friction law can, in fact, be used for rigid block problems. Winkler [7] and Andreus and Cassini [13] used a force-penetration law instead of instantaneous contact, while Spanos and Koh [29] dealt with base stiffness.

Amongst others, the two dimensional (2D) motion of asymmetric bodies has been studied by Purvance *et al.* [2], and Shi *et al.* [30], whereas 3D motion of assumed symmetric bodies has been investigated in Konstantinidis and Makris [31], Chatzis and Smyth [21] and Zulli *et al.* [32].

Regarding stability criteria that can be used by practitioners (predicting overturning occurrence without numerical simulations), a major contribution is certainly that of Housner [4]. He proposed criteria for the overturning of rigid bodies, based on the response of his model, subjected to simple pulses such as a half sine. These pulses can be considered as an approximation of the maximum peaks of real seismic signals. A similar methodology which considers different block models or pulses is used in Makris and Roussos [33]. Regarding harmonic ground pulses, in general, a unified approach is proposed by Kounadis [34].

Without any assumption on the excitation signal, Ishiyama proposed two criteria based on ground acceleration $\gamma(\tau)$ and velocity $\mathbf{v}_{\text{sol}}(\tau)$ [35]. The first criterion is a necessary condition to initiate rocking whereas the second criterion is a necessary overturning condition. In the case of a rectangular rigid body (figure 3.1), these criteria read :

$$\max_{\tau \in [0, T]} (|\gamma(\tau)|) \geq \frac{b}{h} g = \gamma^{\text{gr}}. \quad (3.3a)$$

$$\max_{\tau \in [\tau_*, T]} (|\mathbf{v}_{\text{sol}}(\tau)|) \geq 0.4 \times \sqrt{\frac{8gR}{3} \frac{1 - \cos(\alpha)}{(\cos(\alpha))^2}} \quad (3.3b)$$

where $[0, T]$ is the time period of interest and τ_* is the first instant the ground acceleration exceeds the rocking threshold γ^{gr} . that is :

$$\tau_* = \min_{\tau \in [0, T]} (\tau, |\gamma(\tau)| \geq \gamma^{\text{gr}}) \quad (3.4)$$

Despite their empirical determination, due to their simplicity, Ishiyama's criteria are widely used by practitioners as well as by some standards [36]. Sometimes, as demonstrated, even in the original paper of Ishiyama, or in the case of two directional multiple pulses excitation [37], these criteria, especially criterion (3.3b) may fail. Nevertheless, they are, in general, conservative. This is, also, confirmed by the results presented in section 3.5, where Ishiyama's criteria and Housner's model are compared to the proposed analytical model.

3.3 Experimental campaign

Experimental set up

In order to gain further insight into the dynamic response of rigid blocks and to validate a numerical model, a two phase experimental campaign was carried out. The first phase was limited to release tests. These are free oscillations tests after an initial tilt of the block. The advantage of this kind of tests is that they can be repeated many times for any initial tilt angle. Therefore, they provide useful

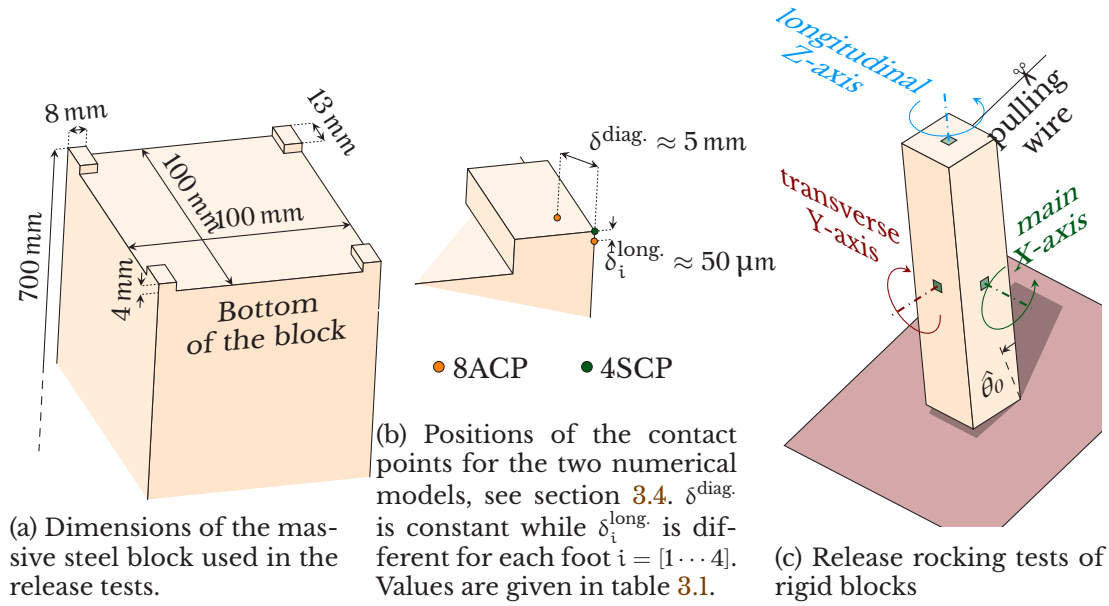


Figure 3.2 – Geometry of the experimental and numerical blocks

information on the details of the dynamic response, including 3D effects, and thus are well suited to validate analytical models.

The second phase consisted of a series of shake table tests. Only the results of the first phase will be presented herein. The results of the second phase will be presented in a future paper. To impose the initial conditions during the release tests, (i) the block was tilted by pulling its top with a steel wire. The tangent of the imposed tilt angle $\hat{\theta}_0$ was measured with a displacement sensor and (ii) the wire was cut releasing the block, letting it free to oscillate on a rigid floor (figure (3.2c)).

A massive steel block with a slenderness of 7 (10 cm × 10 cm × 70 cm), of about 54 kg was manufactured to be used for these tests. This high slenderness is chosen to avoid sliding, in accordance with Housner's assumptions. Four 13 mm × 8 mm × 4 mm feet were machined monolithically with the block (figure (3.2a)). This monolithic feet-block assembly has been preferred to bolted or welded connections to obtain a block with as little uncertainty as possible with respect to the actual stiffness of its supports.

To measure 3D motion, Greenbaum *et al.* [38] recently proposed a videometric method able to monitor three rotations and three translation displacements. In this work the block was instrumented with three angular velocity sensors (range : $\pm 200^\circ \text{s}^{-1}$, accuracy : $\pm 0,01^\circ \text{s}^{-1}$) mounted on the center of three faces of the block (green patches in Figure (3.2c)). These sensors measure the angular velocities in the convected frame which follows the rotation of the block. It is worth noting that these quantities are the direct output of the algorithm used in section 3.4 to solve numerically the equations of motion in the case of large rotations. Therefore, the comparison between analytical and experimental results will be made on the basis of these quantities, called convected rotational velocities (crv). Actually, even if the rotational velocities' measures are not enough to track uniquely the motion of the body, an analytical model which matches much better than others the observed complex rotational records can be considered as a satisfactory model.

For the sake of readability, only the results of eight tests are presented. However, the observed characteristics of the response are confirmed by a series of other similar tests also.

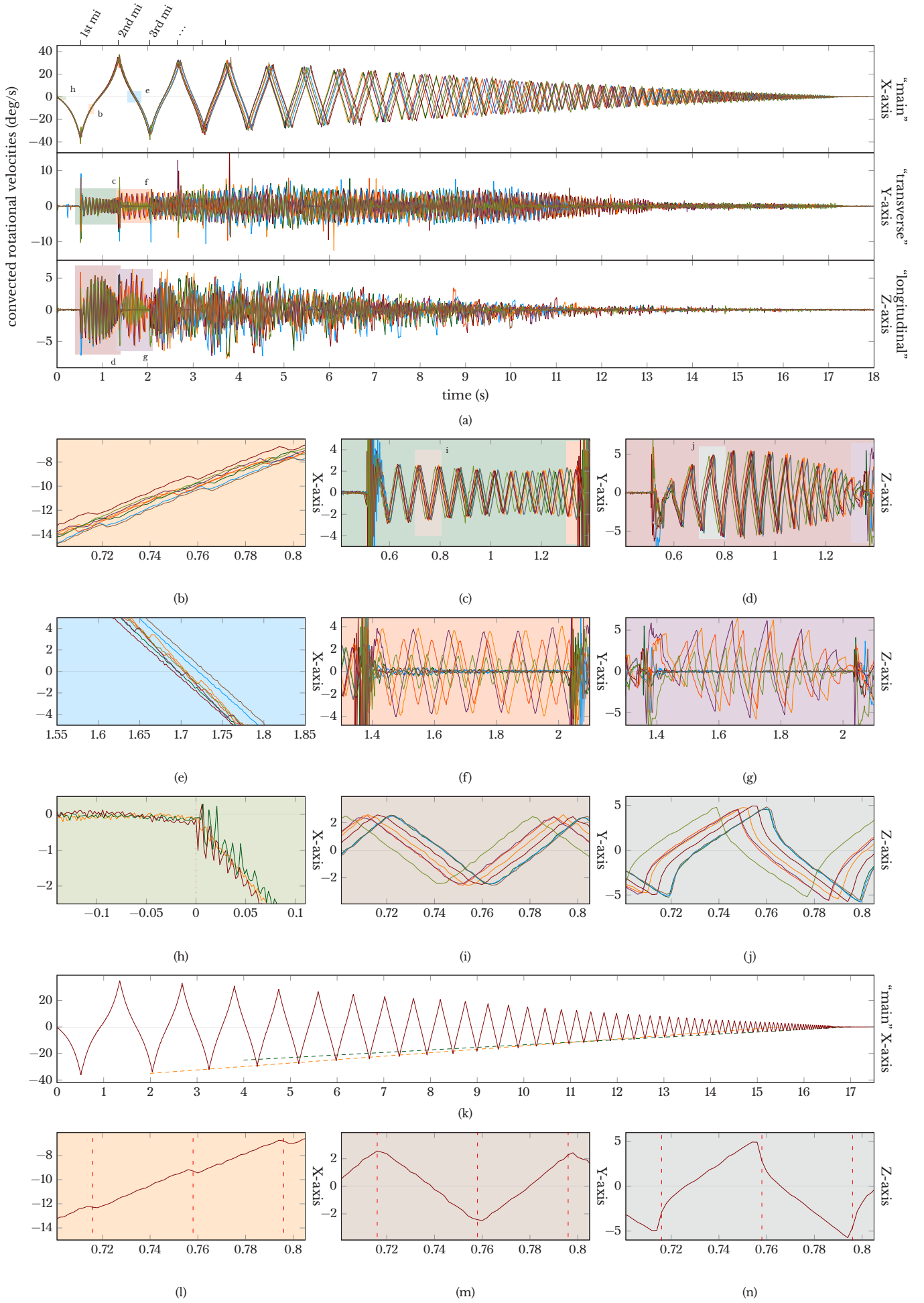


Figure 3.3 – **Experimental results of eight runs.** For all figures, abscissae are the time s and ordinates are the convected rotational velocities (deg/s) around the specified axis.

(3.3a) : Global results of the 8 runs.

(3.3b) to (3.3g) : Zoom in on Figure (3.3a) focusing on the quasi-periodical 3D pattern.

(3.3h) : Detection of the zero-time for 3 runs, the vertical dotted line corresponds to $\tau = 0$.

(3.3i) and (3.3j) : Zoom in on Figures (3.3c) and (3.3d).

(3.3k) : Approximation of the amplitude decay rates around the main axis for one run.

(3.3l), (3.3m) and (3.3n) : The same as (3.3b), (3.3i) and (3.3j) focusing on one run.

Description of the motion

This section discusses, on a phenomenological basis, the experimental results shown in Figure [3.3](#).

This is an important step for the determination of a numerical model. For a numerical model to be accurate, it should be able to reproduce the phenomena observed during the tests and especially the observed out of plane motion.

In fact, despite a lot of care to obtain pure 2D motion, in addition to the rotation velocity around the main axis, non-negligible rotation velocities around the transverse and longitudinal axes are also measured. The maximum crv around these two axes is about 10 % that around the main axis. In the authors' opinion, this unexpected out-of-plane motion must not be neglected *a priori*. Hence, the underlying origin of this 3D response must be identified and taken into account, especially for the study of the stability of such structures under seismic excitation.

To describe the experimental results, the notion of main impact (mi) is used. As already mentioned in section [3.2](#) when presenting Housner's model, a main impact (mi) is defined as an impact which corresponds to a local maximum of the time history of the crv around the main X-axis (figure [3.3a](#)).

The pulling wire was not instrumented, so the time synchronization of the results is carried out indirectly by looking at the main axis curve. Cutting the wire gives rise to a stress wave. When this wave reaches the block, the slope of the crv changes abruptly and a high frequency oscillatory response is recorded. Hence, the effective instant of release can be detected (figure [3.3h](#)). Nevertheless, it can be noticed that all runs are time-shifted in the early stages of motion (*e.g.* Figure [3.3i](#)) by around $\pm 0,01$ s. This may be explained by slight differences of the initial angles $\hat{\theta}_0$, which are not exactly the same for each run, resulting in a slight shift of the first main impact.

The time-histories of the crvs of all runs reveal some common features :

- Between the first and the second mi, depicted on Figure [3.3a](#), the crvs around the secondary axes show a quasi-identical, complex, out-of-plane motion (see Figures [3.3c](#) and [3.3d](#)). This pattern will be discussed in detail later on.
- Between the 2nd and the 6th mi (until 4,5 s), a similar pattern is repeated “quasi-periodically”. Actually, the time duration between two main impacts is not constant but diminishes with time, since the oscillations amplitude around the main axis decreases. Furthermore, the amplitude differences between different runs are more pronounced than at the beginning. This behavior is demonstrated comparing Figures [3.3c](#) and [3.3f](#), and [3.3d](#) and [3.3g](#).
- For times beyond 5 s, the identification of the pattern is more difficult since the time interval between two main impacts becomes shorter. It is worth noting that during this phase the ratios of the amplitudes of crvs around the secondary axes to that around the main axis reach their maximum value, about 25 %.
- The out-of-plane motion is significantly reduced and nearly stops far before the end of the main motion. Hence, at the final stage of the response, the blocks exhibit a quasi-2D behavior.

According to Housner's model, assuming in plane motion, the decay of the peaks of angular velocity is linear. At a first glance, one could think that this also stands for the main crv in the present case. However, a careful look at Figure [3.3k](#) reveals that two slightly different amplitude decay rates can be identified. The first one corresponds to large amplitude oscillations and the other one to small amplitude oscillations. It turns out the crossing point of these two slopes coincides, approximately, with the end of the out-of-plane response.

Regarding the response between the first and the second mis, the following observations can be made :

- The crv around the transverse axis (figure <3.3c>) has a quasi-constant, slightly convex envelope, and varies linearly between positive and negative values (figure <3.3i>).
- The crv around the longitudinal axis (figure <3.3d>), after a first peak quasi-concomitant with the main impact, exhibits a highly concave envelope which is almost equal to zero at the beginning and at the end of the interval. The crv varies from positive to negative values, following a curve composed of two segments (figure <3.3j>).
- The crv measured around the main axis is not smooth. A slight “sawtooth” pattern is superposed to the main curve (figure <3.3b>) which disappears in some runs between the second and the third mis (figure <3.3e>).

Figures <3.3l>, <3.3m> and <3.3n> reveal a correlation between the three components of the angular velocity. Actually, the peaks of the three components are concomitant. Moreover, the aforementioned sawtooth pattern of the crv around the main axis disappears only when the out-of-plane motion stops (figures <3.3e>, <3.3f> and <3.3g>). This observation demonstrates the inter-dependence between the out-of-plane and in plane motions. Therefore, as already mentioned, the question of the influence of this inter-dependence on the earthquake response of rigid blocks arises and must be investigated.

Requirements for the numerical model

An accurate numerical model should be able to reproduce the observed experimental response. As already mentioned, this response can be summarized in three main phases : (i) a 3D repeatable pattern (*i.e.* the same for each run) which appears to be quasi-periodic during the first 6 second à 7 second mis, (ii) a 3D part that seems to be more or less erratic and, (iii) eventually a quasi-2D behavior.

Given that all runs show a quasi-identical 3D motion until the second mi, the numerical model should predict, with high accuracy, the crvs during this time interval. Moreover, the above repeatable response suggests that the initiation of the out-of-plane motion has a deterministic cause, which is the same for all runs. Since the block was not placed exactly on the same spot before each test, the authors assume that the 3D behavior is induced by an asymmetry of the block itself and not by local defects of its support plate.

3.4 Numerical model

First, this section presents the basic assumptions of the numerical model and the methods which have been used for the analytical study. Then, an evolutionary optimization algorithm is used to determine the values of the parameters of the model by comparison with the experimental results. Eventually, a comparison between the model and the experimental results is presented.

Rigid 3D body model

To carry out comprehensive series of analyses such as Monte Carlo simulations, a simple and costly effective model should be used. Therefore the block is assumed to be infinitely rigid and its motion can be described by only three translation and three rotation variables.

Lipscombe and Pellegrino [15] solved the rigid model equations theoretically, detecting the exact impact instants. In the present work, the differential equations of motion are integrated using the algorithm of Simo and Tarnó [39]. Actually, rigid blocks may exhibit large rotations, and description by means of Euler’s angles may lead to the gimbal-lock problem. To avoid this problem, Simo’s algorithm deals with large rotations using unit quaternions (also known as *versors*). Moreover, it uses the conservation of momentum instead of Newton’s law of motion as its main equation. Thus, the algorithm maintains the total momentum constant, unconditionally, for any time-step and despite the large rotations ; an ability not

present in Newmark's explicit algorithms. Finally, the natural outputs of Simo's algorithm are convected rotational velocities, which are also the quantities measured experimentally.

Contact non-linearities

The four feet of the block are not modeled explicitly but are represented as nodes. Impact and friction are modeled by the penalty method [9, 40]. Nevertheless, in this case, penalty parameters are not purely numerical artifices used to impose contact conditions. Instead, they reflect physical, local flexibility and dissipation of the feet that are not taken into account by the rigid body model of the block. For each node, the contact force $\mathbf{F}$ is computed from a penetration length ξ , its time derivative $\dot{\xi}$ and the sliding velocity $\mathbf{v}_{\text{glis.}}$ (relative tangential velocity between the support and the node). In the following, superscripts $\bullet^{(N)}$ and $\bullet^{(T)}$ denote respectively the normal and the tangential components with respect to the support plate.

In the present case, the problem of contact is quite complex since contact points can both impact the plate support instantaneously with a moderate velocity (between 0,01 and 10 m s⁻¹) and remain in contact for some time. Actually, in the literature, different laws exist to describe these two phenomena [18].

In this work, the Kelvin-Voigt law is used for the normal contact force component, with a small modification to avoid tensile force (when $\xi \approx 0$ and $\dot{\xi} < 0$). It uses two parameters, a normal stiffness $K^{(N)}$ and a normal viscous damping $C^{(N)}$:

$$\text{if } \xi \geq 0 \quad \mathbf{F}^{(N)} = \max K^{(N)} \xi + C^{(N)} \dot{\xi}, 0 \quad (3.5a)$$

$$\text{if } \xi < 0 \quad \mathbf{F}^{(N)} = 0 \quad (3.5b)$$

Regarding friction, this model uses Coulomb's law with a static friction coefficient μ^0 and a dynamic friction coefficient μ .

$$\text{if } \|\mathbf{v}_{\text{glis.}}\| = 0 \quad \|\mathbf{F}^{(T)}\| > \mu^0 \mathbf{F}^{(N)} \quad (3.6a)$$

$$\text{if } \|\mathbf{v}_{\text{glis.}}\| > 0 \quad \mathbf{F}^{(T)} = -\mu \mathbf{F}^{(N)} \frac{\mathbf{v}_{\text{glis.}}}{\|\mathbf{v}_{\text{glis.}}\|} \quad (3.6b)$$

where $\|\bullet\|$ denotes the usual Euclidean norm on $\mathbb{R}^3$.

The discontinuity of Coulomb's law is usually regularized with an artificial stiffness $K^{(T)}$ and damping $C^{(T)}$. In this study, both stiffness and damping parameters corresponds to physical properties of the feet. Hence, their values will be set up based on an optimization procedure to fit the experimental results instead of choosing artificial very high values. In the case of a stiffness penalty regularization the algorithm is based, classically, on the elastoplastic analogy and a radial return mapping as in [40]. This algorithm is, in essence, the same as in [17]. In the case of both stiffness and damping penalties, a similar radial return mapping is used. At each time-step, first, a trial friction force corresponding to a sticking condition is considered. Then, if this trial force exceeds Coulomb's sliding threshold, both the friction force amplitude and the contact point position are updated. The interested reader can find more details on the specific integration algorithm of the impact-friction law, in the case of both stiffness and damping penalties in [41].

Defects

As already mentioned, the observed out-of-plane motion can be explained only by introducing some defects in the model or eccentricities of the initial conditions. At the early stages of this study, several possible explanations were considered for a rigid body resting on four contact points only. These comprise out of plane initial angle of the pulling wire, mass eccentricity, unequal stiffness and/or

damping values of the four feet, different friction coefficients for each foot, different contact normal directions at each foot (i.e. it has been assumed that though the four contact points lie on the same plane the base plate is not perfectly flat). Combinations of these possible scenarios have also been investigated. However, these models failed to adequately represent, qualitatively and quantitatively, the complex behavior of the experimental block. In particular, they were not able to represent the transition between the 3D and the quasi-2D motions observed at the end of the records and described in section 3.3. That is why, the numerical model was enriched by introducing four supplemental contact points (one supplemental contact point per foot, Figure 3.2b). This eight asymmetric contact points (8ACP) model is an effort to account, in a simplified fashion, for inevitable defects at the individual foot level, due to its finite size.

As shown in Figure 3.2b, this model considers four external contact points at the four corners of the block and four internal contact points located on the two bisectors of the lower face of the block.

The four internal points are assumed to belong to the same plane. To reduce the number of parameters to be identified, the horizontal position of these points along the two bisectors is defined by a single parameter δ^{diag} . The vertical distance of each external point from the four internal points is defined by the parameter δ_i^{long} , i being the number of the corner. It turns out that the identified values of these parameters are such that, during the motion, the exterior points are in contact with the base plate when the block tilt angle is big, whereas, the interior points are in contact with the support plate when the block is slightly tilted.

Parameter identification

The above geometrical defects, though large enough to cause a non-negligible out-of-plane motion, are too small to be measured by usual instruments. Moreover, the values of the penalty parameters (normal and tangential stiffness and damping for each contact point) are not known *a priori*. Therefore the values of these parameters have been determined through an optimization procedure by means of an evolutionary algorithm [42].

This algorithm minimizes an error or cost function which is a measure of the divergence between the results given by a numerical model, itself defined by a set of parameters called “chromosome”, and a reference. In the present case, the numerical model is the above model of the block with defects and the reference is the experimentally recorded response of a release test (Run 01). At each iteration, called “generation”, the best chromosomes are used to create the new chromosomes that have to be tested. In [43], this technique was applied to find the optimal parameters of a contact model in a similar case (large number of parameters and highly non-linear cost function). A lot of development in the field of numerical optimization is still going on (e.g. [44]). For the problem in hand, the definition of the cost function is not an easy task and should be carried out empirically guided by the specificity of the physical processes and engineering judgment. In the present case, the evolutionary algorithm focuses on the “quasi-periodically” repeated out-of-plane motion (first two bullets in the description of the experimental results in section 3.3). Therefore, the main effort is concentrated to reproduce accurately the response of the block until the second mi. Amongst others, the cost function accounts for :

- the duration between the first two main impacts,
- the envelopes of the crv signals, measured around the transverse and longitudinal axes, clipped between the two first main impacts ,
- the Fourier spectra of the same crvs signals, which give relevant informations about both the frequency content and the pattern of the out-of-plane motion (e.g. linear or bilinear oscillations in Figures 3.3i and 3.3j).

The resulting error function is not presented here because it cannot be expressed in a simple closed form. Furthermore, it should be acknowledged that there

is not a unique possible choice of the cost function. Several other cost functions could have been envisaged. The important point is not the precise form of the error norm but whether the so determined parameters' values give satisfactory results. Actually, as it will be shown in the sequel, the chosen cost function leads to a good agreement between the analytical and experimental results.

Initially, there were 54 parameters processed by the optimization algorithm. Actually, there are six physical properties parameters per contact point (the tangential and normal stiffness and damping constants and the static and sliding coefficients of friction), five geometrical parameters ($\delta_i^{\text{long.}}$ for $i = [1 \dots 4]$ and $\delta^{\text{diag.}}$) and the initial tilt angle $\hat{\theta}_0$.

Reducing the number of parameters

Monitoring of the evolution of the best chromosomes for some generations reveals that certain parameters evolve in a similar fashion. For instance, this is the case for the stiffness of the four contact points. Using this observation, the number of parameters was reduced as follows in order to speed up the convergence of the evolutionary algorithm.

First, two sets of parameters of physical properties are considered, one for all internal contact points (subscript $\bullet_{\text{int.}}$) and another for all external contact points (subscript $\bullet_{\text{ext.}}$). The normal $K^{(N)}$ and tangential stiffness $K^{(T)}$ are assumed to have the same value for internal and external contact points. Hence :

$$\begin{cases} K^{(T)}_{\text{int.}} = K^{(T)}_{\text{ext.}} = K^{(T)} \\ K^{(N)}_{\text{int.}} = K^{(N)}_{\text{ext.}} = K^{(N)} \end{cases} \quad (3.7)$$

The viscous damping parameters, $C^{(T)}$ and $C^{(N)}$, are respectively defined by the critical damping ratios $\beta^{(T)}_{\text{int.}}$, $\beta^{(T)}_{\text{ext.}}$, $\beta^{(N)}_{\text{int.}}$ and $\beta^{(N)}_{\text{ext.}}$:

$$\begin{cases} C^{(T)}_{\text{int.}} = 2\beta^{(T)}_{\text{int.}} \sqrt{K^{(T)} m} \\ C^{(T)}_{\text{ext.}} = 2\beta^{(T)}_{\text{ext.}} \sqrt{K^{(T)} m} \\ C^{(N)}_{\text{int.}} = 2\beta^{(N)}_{\text{int.}} \sqrt{K^{(N)} m} \\ C^{(N)}_{\text{ext.}} = 2\beta^{(N)}_{\text{ext.}} \sqrt{K^{(N)} m} \end{cases} \quad (3.8)$$

where m is the mass of the block (54 kg). Moreover, the same critical damping ratio is used in the tangential and normal directions whereas different values are assigned to internal and external contact points.

$$\begin{cases} \beta^{(T)}_{\text{int.}} = \beta^{(N)}_{\text{int.}} = \beta_{\text{int.}} \\ \beta^{(T)}_{\text{ext.}} = \beta^{(N)}_{\text{ext.}} = \beta_{\text{ext.}} \end{cases} \quad (3.9)$$

Regarding the friction coefficients, there is no distinction between static and dynamic friction coefficients, but different values are considered for internal, $\mu_{\text{int.}}$ and external, $\mu_{\text{ext.}}$ contact points.

Finally, the 8ACP model requires six contact parameters, five geometrical defect parameters, and one initial condition. Hence, the chromosome is a vector with 12 components. The numerical analysis was carried out with a time step $\delta T = 10^{-5}$ s, and the chromosome shown in table 3.1 was retained after 250 generations of 40 chromosomes (around 10 000 simulations). This chromosome results in the lowest value of the cost function after a large number of iterations. The employed method is heuristic and does not provide any proof that the given set of parameters corresponds to the absolute minimum of the cost function.

The number of significant digits in this table corresponds to the precision required to have no significant changes in the response of the numerical model if a variation of the same order of magnitude is considered, separately for each parameter, while the others remain unchanged.

1. The signals used in these representations correspond to two mediocre results (and not to a result and the actual reference) in order to better understand the process graphically.

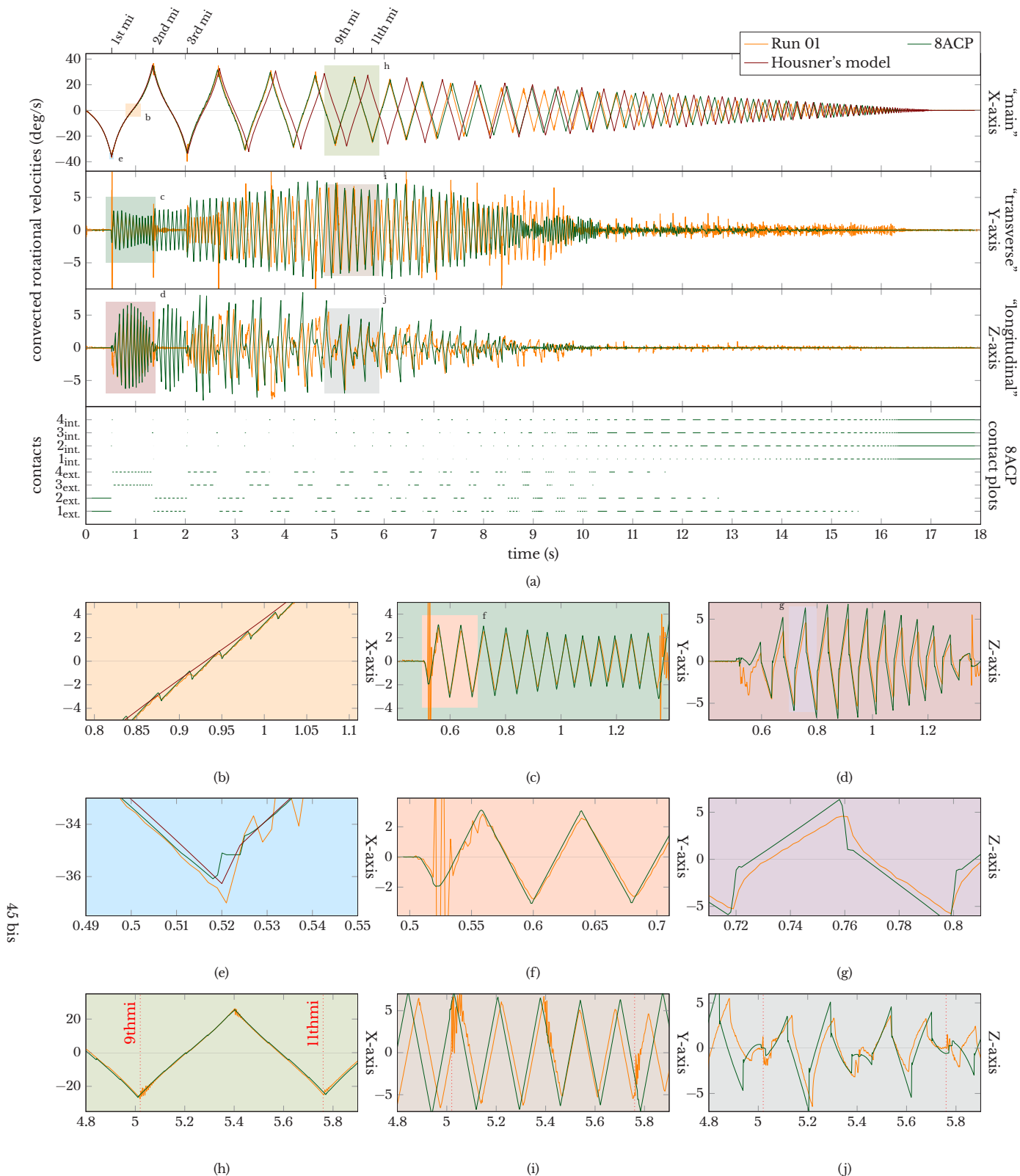


Figure 3.4 – Comparison between numerical and experimental results of a release test. For all Figures, abscissae are the time (s) and ordinates are the convected rotational velocities (deg/s) around the axis written on the left. Housner's model is only presented around the main axis.

(3.4a) : global results and contact indicis plot.

(3.4b) to (3.4e) and (3.4h) to (3.4j) : Zoom in on Figure (3.4a).

(3.4f) and (3.4g) : Zoom in on Figures (3.4c) and (3.4d).

(3.4h) to (3.4j) : the vertical red lines represent the main impacts.

Parameter	Value	Parameter	Value
$\kappa^{(N)}$	$6 \times 10^7 \text{ N m}^{-1}$	$\delta_1^{\text{long.}}$	0,010 mm
$\kappa^{(T)}$	$5 \times 10^7 \text{ N m}^{-1}$	$\delta_2^{\text{long.}}$	0,040 mm
$\beta_{\text{int.}}$	0,15	$\delta_3^{\text{long.}}$	0,092 mm
$\beta_{\text{ext.}}$	0,18	$\delta_4^{\text{long.}}$	0,058 mm
$\mu_{\text{int.}}$	0,30	$\delta_{\text{diag.}}$	6,0 mm
$\mu_{\text{ext.}}$	0,25	$\hat{\theta}_0$	0,1170 rad

Table 3.1 – **Optimal parameter values** found by the evolutionary algorithm by comparison with the first experimental run, using a time-step for the numerical integration equal to $\delta T = 10^{-5} \text{ s}$.

Comparison between experimental and analytical results

Figure (3.4) shows the experimental and numerical crvs as well as the crv around the main axis of Housner’s 2D model . In addition to the crvs, the contact time-histories for each point of the 8ACP model are shown (a line is drawn as long as a point remains in contact).

Figure (3.4a) also confirms that, as expected, Housner’s model gives a good approximation of the main (in plane) motion.

As already mentioned in section 3.3, the analytical model should be able to reproduce accurately the response between the first and the second main impacts which was quasi-identical for all runs. The proposed analytical model meets this requirement. In fact :

- The transverse motion is well reproduced (figure (3.4c)). The numerical and experimental motions follow the same sawtooth like pattern, share the same slightly convex envelope and have the same frequency and phase. One can notice that the experimental transverse motion which starts, “surprisingly”, 0,02 s before the mi (see at 0,51 s in Figure (3.4f)), is accurately represented by the model. The plot showing the time-histories of the contact indices gives an explanation to this phenomenon (contact plots of Figure (3.4a)). Actually, it can be seen that the motion around the transverse axis (Y) is initiated by the transition between adjacent, exterior and interior contact points (transition from $1_{\text{ext.}}$ and $2_{\text{ext.}}$ to $1_{\text{int.}}$ and $2_{\text{int.}}$). Then, a higher amplitude rocking motion starts when transition from contact point $3_{\text{ext.}}$ and $4_{\text{ext.}}$ occurs. A similar interpretation can be made for the motion around the longitudinal axis (Z) (figure (3.4d)). However, the fact that the first experimental peak, at 0,55 s, is not predicted by the model must be acknowledged. Moreover, the crv around this axis is slightly overestimated by the numerical model (3.4g))
- The “sawtooth” pattern of the main motion (figure (3.4b)) is accurately reproduced. It has the same frequency as the motion around the axis Y and Z, and the amplitudes of the oscillations are the same for the numerical and experimental motions. Of course, Housner’s 2D model cannot predict this particularity which is due to the existence of a secondary, out-of-plane motion.

After the second mi, the experimental and numerical time-histories may diverge more. Nevertheless, this divergence is within the range of variability of the results of the various runs of the experimental campaign (figure (3.3a)). In particular, the quasi-periodicity of the pattern described in the previous section is well reproduced between the second and the sixth mi. Furthermore, the instant of transition between the 3D behavior and the quasi-2D behavior is also well reproduced.

A very good correlation between the numerical and experimental time-histories can also be noticed between the ninth and eleventh main impacts (figures (3.4h) to (3.4j)). This holds for the three axis simultaneously, demonstrating that the underlying physics are well represented by the analytical model.

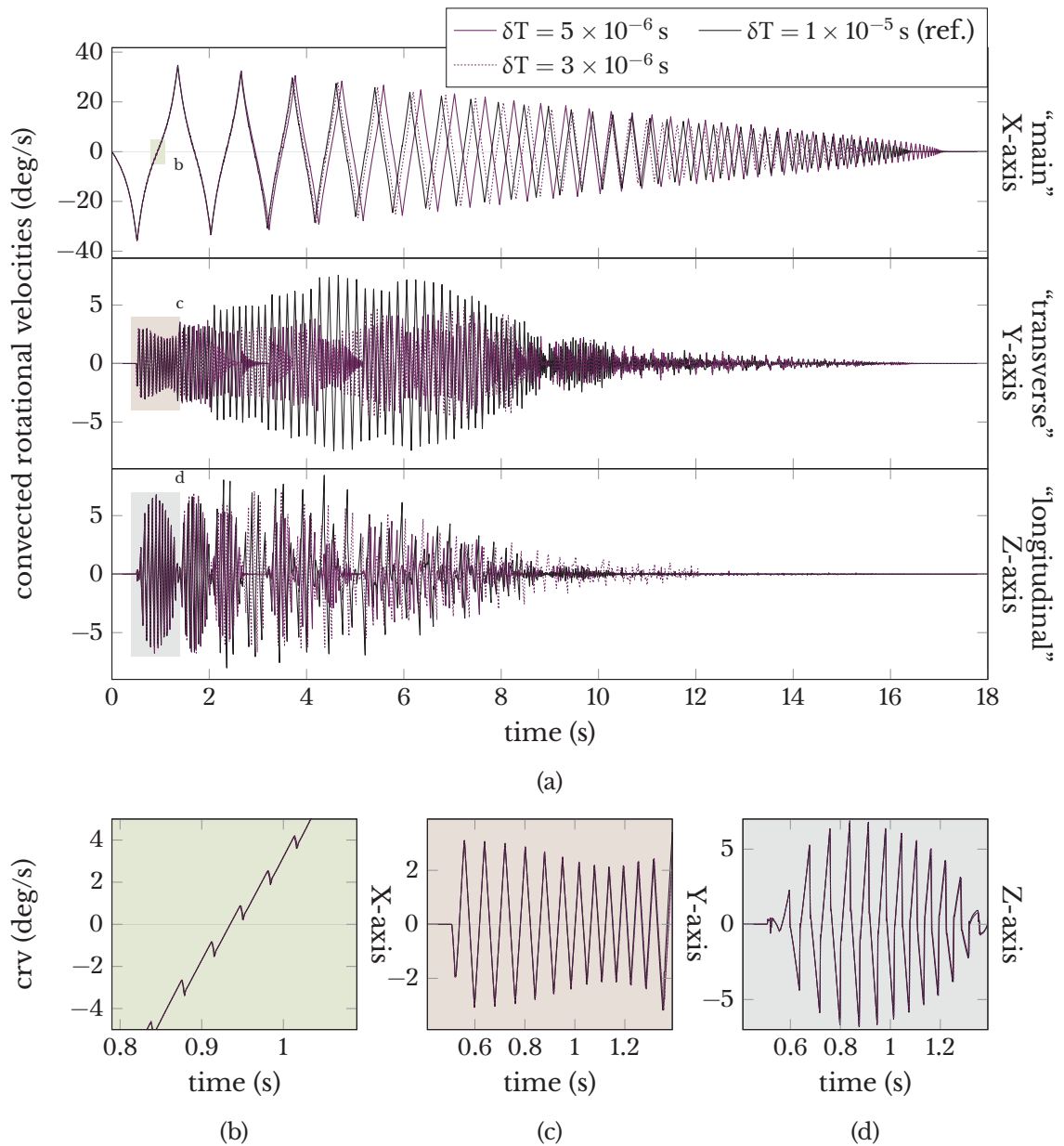


Figure 3.5 – **Sensitivity to the time-step.** For all figures, abscissae are the time (s) and ordinates are the convected rotational velocities (deg/s) measured around the axis written on the left.

⟨3.5b⟩ to ⟨3.5d⟩ : zoom in on Figure ⟨3.5a⟩.

Empirical sensitivity analysis

As mentioned previously in the introduction, the rigid block rocking motion is well-known to be very sensitive to small variations of the experimental or numerical conditions. Although not statistically representative, because of the small number of runs studied, the experimental variability presented in Figure ⟨3.3⟩ gives a rough estimate of the expected level of the model's variability. To gain insight into the sensitivity of the numerical model, an empirical sensitivity analysis was carried out. The results of this analysis are shown in Figure ⟨3.7⟩, ⟨3.6⟩ and ⟨3.5⟩. They correspond to :

- the results obtained with the optimal values of the model's parameters (see table 3.1), taking into account three different values of the time-step used for the numerical integration (see Figure ⟨3.5⟩);
- the results obtained with the initial angle given in table 3.1 and the original

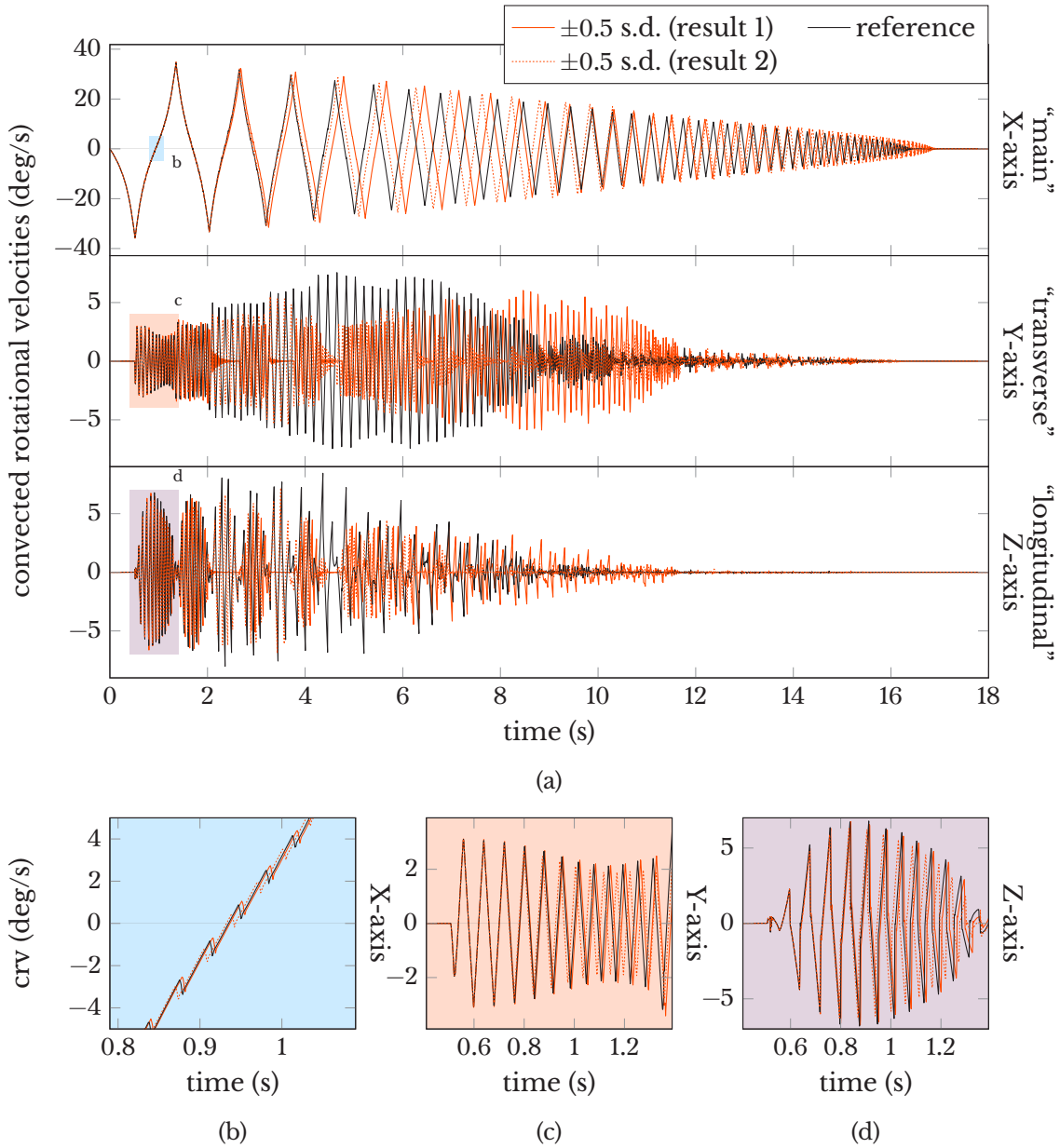


Figure 3.6 – **Sensitivity to the values of physical parameters.** For all figures, abscissae are the time (s) and ordinates are the convected rotational velocities (deg/s) measured around the axis written on the left.

(3.6b) to (3.6d) : zoom in on Figure (3.6a).

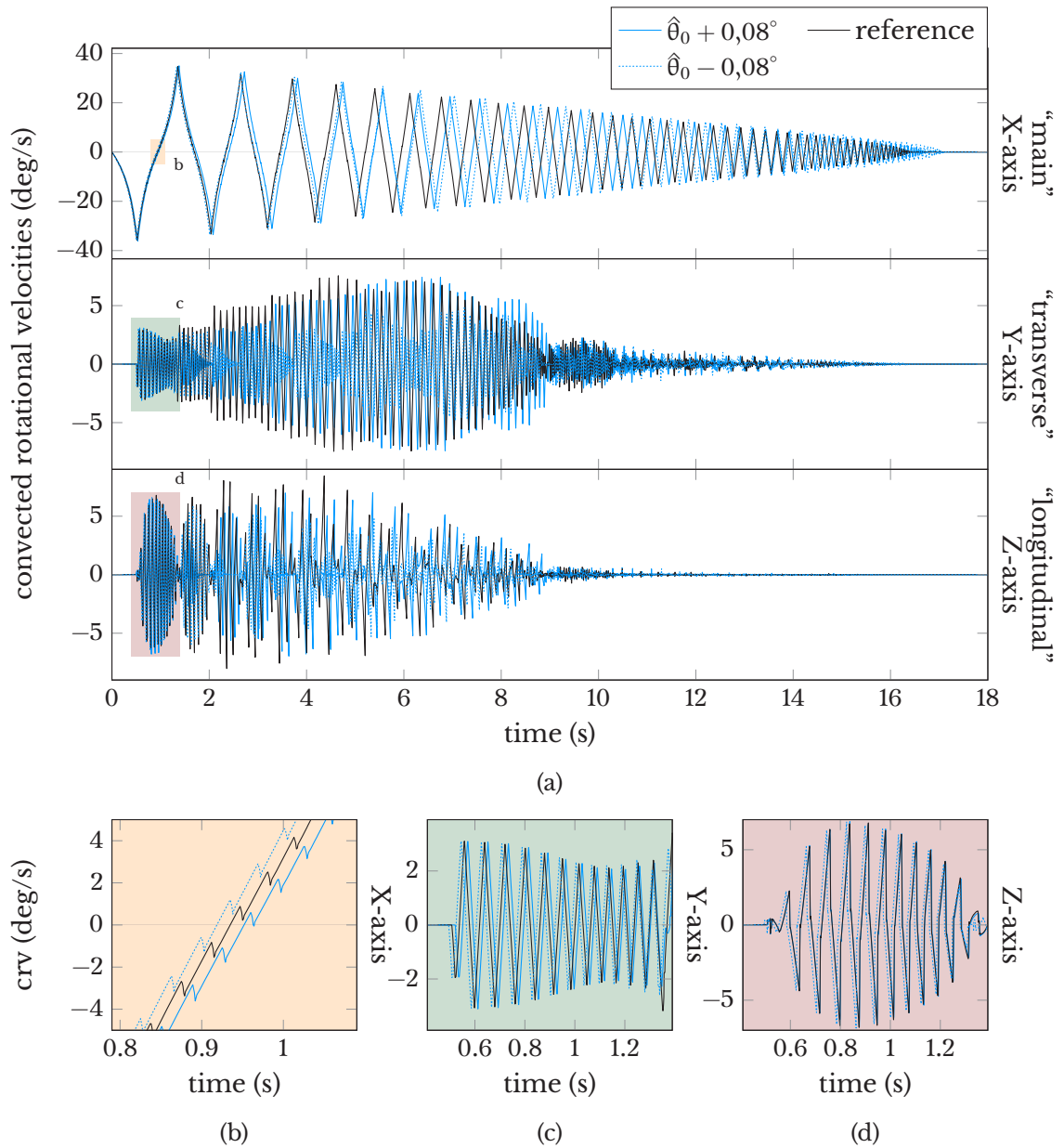


Figure 3.7 – **Sensitivity to the initial tilt angle.** For all figures, abscissae are the time (s) and ordinates are the convected rotational velocities (deg/s) measured around the axis written on the left.

(3.7b) to (3.7d) : zoom in on Figure (3.7a).

time step, taking into account some variations on the model's parameters. For each reference parameter given in table 3.1, a variation of $\pm 0,5$ of the last significant digit (s.d.) is randomly considered. In Figure (3.6), two results of calculations are presented, each one corresponding to a chromosome with 11 modified parameters (e.g. : $K^{(N)} = 6 \times 10^7 \text{ N m}^{-1} \rightarrow K^{(N)} = 6 \pm 0,5 \times 10^7 \text{ N m}^{-1}$);

- the results obtained with the optimal values of the model's parameters (see table 3.1), taking into account different release angles which correspond to a retention wire pulled 1 mm more or less. In fact, these values, which correspond to an angle variation of $\pm 0,08^\circ$, seem realistic considering the experimental conditions (see Figure (3.7)).

For this kind of problem, the well-known sensitivity of the response to the time step does not allow us to obtain convergent analytical results for the whole duration of interest, with a reasonable computational cost. Therefore, the time-step can be viewed as a source of uncertainty. As expected, this empirical analysis shows that reducing the time step does not alter the early stages of the motion (Figures (3.5b) to (3.5d)), but induces significant changes only after several main impacts. The resulting variability seems to be within the range of experimental variability.

Regarding the sensibility of the numerical model to the parameters' values, the induced variability of the analytical results remains within the range of the experimental variability (Figure (3.3)). This observation justifies the number of significant digits retained in the parameters' values given in table 3.1.

Finally, the variability on the initial release angle induces only a slight shift in time of the global response, similar to that observed during the experimental campaign (Figure (3.3c)).

3.5 Statistical study of stability under seismic excitation

To gain a better insight into the influence of geometrical defects on the stability of a slender rigid block subjected to seismic excitations, a statistical numerical study was carried out. In addition to the asymmetrical model presented in section 3.4, a symmetrical model with only four exterior contact points (figure (3.2b)), more likely to be used by practitioners, was considered. Its parameters (stiffness, damping ratios and friction coefficient) are given in table 3.1. The results of this model, called the four Symmetrical Contact Points (4SCP) model, were compared to those given by the asymmetrical model with defects (8ACP).

Several simulations were carried out using different artificial signals. These have been obtained as realizations of a zero-mean stationary Gaussian process modulated by a function of time. The power spectral density (PSD) used for the underlying stationary Gaussian process is the Kanai-Tajimi spectral model [45] in which the frequency and the damping ratio were taken equal to 2,95 Hz and 55 % respectively. These values lead to a PSD close to the PSD corresponding to the spectrum of Eurocode 8 for medium soil conditions [46]. This process was simulated using an algorithm based on the spectral representation of second-order stationary random processes [47]. The used modulation function is of the form $\tau^u e^{-v\tau}$ [48], where u and v were selected so that the total duration T is about 10 s and the duration of maximum amplitude oscillations is about 3,5 s ($u = 2$ and $v \approx 1.26$).

2000 pairs of accelerograms, $\gamma^{N-S}(\tau)$ and $\gamma^{E-W}(\tau)$, were generated in the two horizontal directions and scaled so that their peak values varied from 0,01 g to 0,5 g.

Figure (3.8) shows a sample of the bidirectional excitation signals and the numerical results which correspond to the asymmetrical (8ACP) and symmetrical (4SCP) models. In the upper subfigure the rocking thresholds are also presented. The remaining subfigures illustrate the divergence of the earthquake responses of a rigid block, due to different modeling assumptions. Of course, in the case of

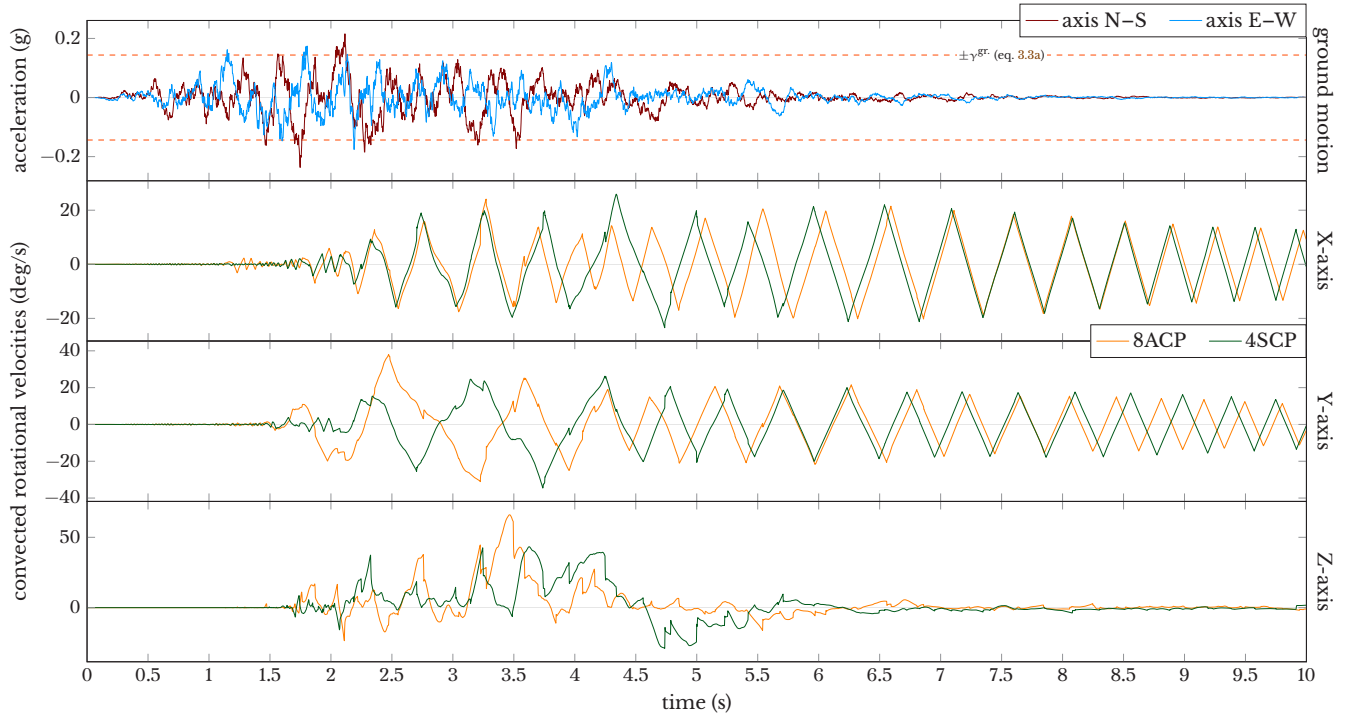
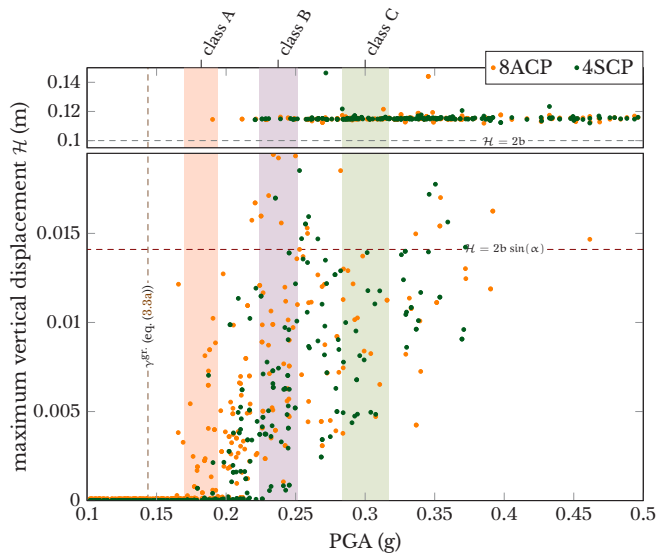
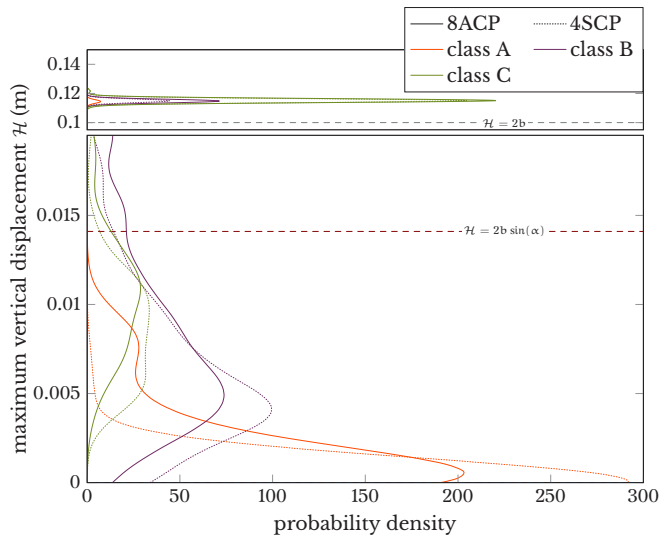


Figure 3.8 – Sample of realizations of the bidirectional excitation signals and analytical results corresponding to the asymmetrical and symmetrical models



(a) Scatter plots of the stability index for the two analytical models according to the PGA. 350 points are displayed.



(b) Probability density function of the stability index for the two analytical models. The solid line refers to the 8ACP model and the dotted line to the 4SCP model.

Figure 3.9 – Evolution of the maximum exterior contact point vertical displacement as function of the PGA

a bidirectional excitation, the notions of main and transversal axes do not make sense, that is why they are noted X and Y in the figure.

To obtain a statistical estimate of how these defects influence the response of a rigid block under seismic excitations, we considered as a relevant index of rocking amplitude and even overturning, the maximum of the vertical displacement of the external contact points $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \max_{\tau \in [0, T]} \left(\max_{i \in 1 \dots 4} (H_{i_{\text{ext}}}(\tau)) \right) \quad (3.10)$$

where $H_{i_{\text{ext}}}(\tau)$ is the vertical displacement of the exterior point i at time τ .

This index can be compared to the value $2b \sin(\alpha)$, which corresponds to the vertical displacement of one of the two contact points of Housner's model, when $|\theta(\tau)| = \alpha$ (figure <3.1>). This value is a necessary threshold for toppling.

The results of the empirical statistical study are shown in Figure <3.9>. The left part <3.9a> presents the scatter plot of the maximum vertical displacement versus the peak ground acceleration (PGA) of the two-directional excitation, defined as :

$$\text{PGA} = \max_{\tau \in [0, T]} \left(\sqrt{(\gamma^{N-S}(\tau))^2 + (\gamma^{E-W}(\tau))^2} \right) \quad (3.11)$$

For the sake of better readability, only 350 randomly chosen points are displayed. Moreover, the intermediate portion of the vertical axis is not shown because of the considerable range of possible values of the maximum vertical displacement. In fact, when a block has overturned, the vertical displacement of at least one contact point has necessarily exceeded the threshold $2b$.

Figure <3.9b> shows the probability density functions (PDF) for three classes of PGA (A : 0,170 g à 0,194 g, B : 0,223 g à 0,251 g, C : 0,283 g à 0,317 g). Each one contains 350 pairs of accelerograms. These classes are shown by the three strips of color in Figure <3.9a>. The same colors are used for the plot of the PDFs in Figure <3.9b>. The solid and dotted lines correspond to the 8ACP and 4SCP models respectively. It may be observed that the responses of the two models are different, especially for the first class. This class corresponds to weak excitation levels, yet, higher than the theoretical PGA which induces rocking motion ($\approx 0,144$ g). Higher contact point vertical displacement values, $\mathcal{H}$, are obtained and even overturning is possible in the case of the asymmetrical model, contrary to the case of the symmetrical model. One possible explanation is that the effective base width of the 8ACP model is smaller than that of the 4ACP and thus implies a higher effective slenderness. A similar result was observed in an example treated in [17] where a four corner modal results in a more stable response than a distributed Winkler-like compliance contact model. In fact, the 8ACP model could be thought as a very particular case of the Winkler model, where contact compliance is distributed only over the feet area which may be not flat. Even more, this distributed flexibility is discretized with only two points per foot. Both, the 8ACP model presented here and the Winkler model in [17], increase the apparent slenderness and are more prone to rocking and toppling.

Table 3.2 compares the predictions according to Ishiyama's criteria to the analytical results of this study for both models. Green and orange cells correspond to the 4SCP and 8ACP models respectively. The first column on the left presents the number of signals for which Ishiyama's criteria predict that the block does not move, could rock or could overturn. The three remaining columns present the behavior given by the analytical results. For instance, the orange cell at the bottom of the second column shows that amongst the 1717 signals which according to Ishiyama could have lead to overturning, 235 did not move the block at all. Ishiyama's criteria are established for one-directional excitations and plane motions. To apply them in the case of a bi-directional excitation, $\gamma(\tau)$ and $\mathbf{v}_{\text{sol}}(\tau)$ will be taken as the square root of the sum of the square (SRSS) of the ground acceleration and

		Results of 3D numerical simulations :		
		stay still	rock	overturn
Ishiyama's equations prediction for a 2D perfect block :	stay still	343 (16,2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
	343 (16,2 %)	343 (16,2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
	rock	53 (2,5 %)	4 (0,2 %)	0 (0 %)
	eq. (3.3a)	57 (2,7 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
	57 (2,7 %)	57 (2,7 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
	overturn	235 (11,1 %)	446 (21,1 %)	1036 (48,9 %)
	eq. (3.3a) (3.3b)	410 (19,4 %)	351 (16,6 %)	956 (45,2 %)
	1717 (81,2 %)			

Table 3.2 – Comparison between Ishiyama's criteria and the results of the numerical models.

velocity respectively :

$$\gamma(\tau) = \sqrt{\gamma^{N-S}(\tau)^2 + \gamma^{E-W}(\tau)^2} \quad (3.12)$$

The results in Table 3.2 show that, in general, the 8ACP model is more prone to rocking and overturning than the symmetrical flawless model. It is also noticed that Ishiyama's criteria are conservative. Actually, as already mentioned, these criteria, which are not theoretically proven, are considered to be necessary but not sufficient conditions. These results are in agreement with the authors' experience from past analytical studies on overturning of rigid blocks. In fact, they never met a case of overturning which could not have been predicted by Ishiyama's overturning criterion.

3.6 Conclusion

This work investigated the experimental and analytical response of a slender rigid block. First, a series of release tests with an initial in plane tilt angle were carried out. Despite the apparently in plane initial conditions, a 3D response was observed. The main features of the out of plane motion were reproduced for all release tests. Therefore, special care was given to a thorough description of the quasi-periodic 3D behavior exhibited during the tests. Then, a numerical model of an asymmetrical rigid block with geometrical defects was proposed. In this model, eight contact points are considered in an effort to represent, as simply as possible, the transition between a 3D behavior and a quasi-2D behavior, observed experimentally. The 12 parameters of the numerical model have been determined using an evolutionary algorithm. The analytical results show that the proposed model reproduces the essential features of the experimental 3D response, despite the well-known sensitivity of this kind of problems to small variations of the experimental conditions or numerical parameters.

Finally, to gain a better insight into the influence of geometrical defects on the stability of slender rigid blocks subjected to seismic excitations, a statistical numerical study was carried out, considering the proposed asymmetrical model and a model without defects. More than 2000 responses of each model were calculated considering bidirectional excitations, with peak ground accelerations varying from 0,01 to 0,5 g. It is found that the model with defects is more prone to rocking and overturning than the model without defects. In particular, the two models lead to significantly different responses in the case of excitation levels slightly higher than the theoretical threshold of the PGA which induces rocking motion. It turns out that, under such excitations, the asymmetrical block exhibits higher rocking, yet it may overturn, contrary to the block without defects.

The validity of the proposed analytical model was further investigated by its comparison with a series of seismic tests of similar slender blocks, carried out on the shake tables of the *Commissariat à l'Énergie Atomique*, France. The outcome of this study will be the subject of a paper which will be published shortly.

3.7 Acknowledgement

The authors would like to thank Alain Le Maoult from the *Commissariat à l'Énergie Atomique* for fruitful discussions.

3.8 Résultats du modèle intermédiaire 4ACP

Rappelons tout d'abord les trois caractéristiques qui ont été observées lors des essais de lâcher :

1. un mouvement hors-plan réalisant un comportement complexe bien déterminé, que l'on pourrait qualifier de motif (*pattern*), entre le premier et le deuxième *main impact* (voir Figures <3.3c> et <3.3d>). Sur cet intervalle de temps, le mouvement est parfaitement reproductible.
2. un mouvement hors-plan durant lequel le motif précédent est répété avec une amplitude qui varie à chaque *main impact*.
3. une décroissance du mouvement hors plan avant la décroissance du mouvement dans le plan.

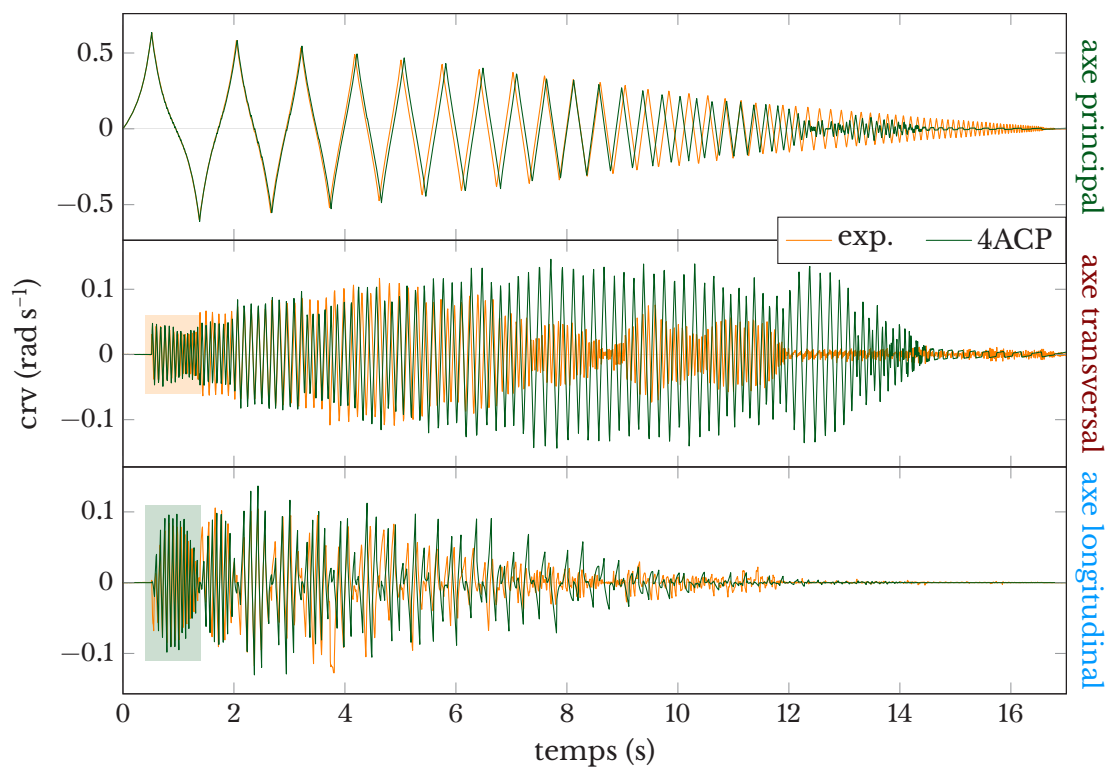
D'après nous, un bon modèle de basculement de bloc rigide devrait au moins être capable de reproduire ces caractéristiques.

Le modèle 4ACP que nous avons mis en place est constitué uniquement des 4 points de contact dit « extérieurs ». La procédure d'optimisation décrite précédemment permet de déterminer les paramètres de géométrie ainsi que les paramètres mécaniques du modèle. La figure <3.10> présente les résultats du modèle 4ACP avec les paramètres optimisés.

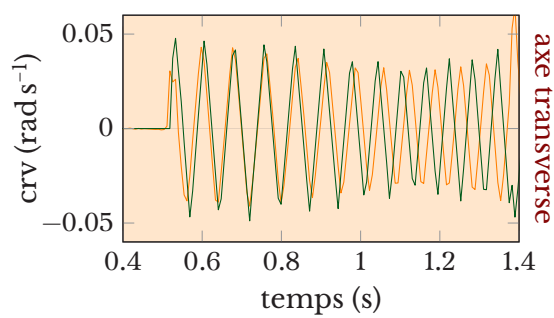
On observe sur les figures <3.10b> et <3.10c> que le modèle 4ACP est suffisant pour retrouver le motif complexe entre le premier et le deuxième *main impact*, mais qu'il prédit alors un mouvement hors plan de trop grande amplitude durant la suite du mouvement. De plus, les mouvements hors-plan et dans le plan prédits par le modèle 4ACP s'arrêtent exactement en même temps, et la décroissance du mouvement autour de l'axe principal semble s'accélérer contrairement à ce qui a été identifié lors des essais.

Le fait que le modèle représente mal la fin du mouvement signifie que le modèle représente mal le comportement de petit basculement autour de la position d'équilibre. Dans le cadre d'essais de lâcher, ceci ne pose pas trop de problèmes car le petit basculement a lieu à la fin de l'essai. Mais nous avons l'intuition qu'un tel modèle ne saurait pas correctement représenter un essai sismique, lorsque le bloc démarre en position d'équilibre.

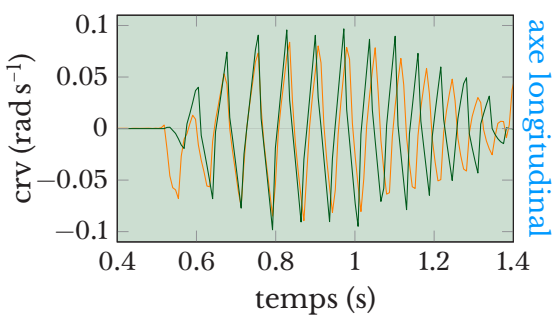
Le bloc soumis à un essai de lâcher semble, durant la fin du mouvement, se comporter davantage comme un modèle symétrique que comme le modèle 4ACP. Ainsi, nous proposons le modèle 8ACP qui se comporte comme un modèle symétrique lors de petits basculements autour de la position d'équilibre et garde le même comportement que le modèle 4ACP lors de grands basculements.



(a)



(b)



(c)

Figure 3.10 – Résultats du modèle 4ACP

deuxième partie

CAMPAGNE EXPÉRIMENTALE

Dans cette partie, la campagne expérimentale réalisée en 2014 est décrite et ses résultats interprétés.

Dans un premier chapitre, nous présentons sous la forme d'un article les objectifs, les résultats et les principales interprétations de la campagne expérimentale.

Dans un second chapitre, nous reviendrons sur les difficultés expérimentales et les limites de la campagne. Nous proposerons aussi une quantification de la répétabilité obtenue lors de ces essais.



Étude expérimentale du basculement de blocs rigides sous excitation sismique

Ce chapitre est la transcription d'un article intitulé *Experimental and numerical analysis of variability in the response of a slender rigid block under seismic excitation*, en cours de *review*.

Présentation synthétique de l'article

Objectifs et réalisation de la campagne expérimentale

Le modèle 8ACP, proposé dans la partie précédente, a été développé et validé pour des essais de lâcher. Sa représentativité dans un mouvement de basculement sous séisme n'est pas établie pour au moins deux raisons :

- le comportement du modèle lors du mouvement du support n'a pas été étudié ;
- la représentation de l'initiation du mouvement par le modèle à partir de la position d'équilibre n'a pas été étudiée.

La campagne GlisBasc 2 a donc pour objectif de valider le modèle sur ces deux points.

La validation du modèle a lieu en deux temps. Tout d'abord, pour chaque essai considéré individuellement, les trajectoires mesurées expérimentalement sont comparées aux trajectoires simulées par le calcul. Ensuite, les résultats sont considérés comme des familles de réalisations d'un processus.

Sur les quatre séries d'essais réalisées, deux séries seront particulièrement analysées, d'une part, une série de 100 essais dont les accélérations de consignes sont des réalisations distinctes d'un processus aléatoire donné, qui sera notée $100 \neq$, et d'autre part une série de 100 essais dont les accélérations de consigne sont identiques, qui sera notée $100 \approx$. Afin d'étudier des grandeurs statistiques du mouvement au cours du temps, il nous semble nécessaire d'utiliser des signaux de consignes stationnaires. Ainsi, les variations des grandeurs statistiques relatives au mouvement-réponse des blocs seront imputables au comportement de basculement et non à des variations statistiques de l'accélération de consigne.

Chaque essai est réalisé simultanément sur quatre blocs, dont trois sont instrumentés de façons identiques et dont les résultats seront exploités dans la suite.

Une discussion concernant les limites de la campagne d'essais sera proposée dans le chapitre 5.

Outils de post-traitement et d'analyse des résultats numériques et expérimentaux

Deux outils spécifiques ont été développés afin de permettre de comparer les résultats expérimentaux obtenus à ceux fournis par les modèles mécaniques pro-



posés.

Tout d'abord, en considérant que le comportement de basculement de bloc rigide est particulièrement sensible aux perturbations, on s'attend à ce que l'écart entre deux trajectoires ne fasse qu'augmenter au cours du temps. Dans ce cas, la grandeur pertinente pour comparer deux trajectoires qui démarrent dans un même état (par exemple la trajectoire mesurée expérimentalement et une trajectoire calculée par un modèle) est la durée pendant laquelle les deux trajectoires restent « proches », en un certain sens à préciser.

La méthode proposée définit deux trajectoires comme similaires tant que l'écart entre les deux trajectoires n'a pas dépassé une distance définie par l'équation (4.1). Cette distance est représentée sur la figure (4.4). L'indicateur de divergence prend aussi en compte l'éventuel bruit des trajectoires grâce au paramètre τ^* , et il est alors complètement défini dans l'équation (4.2).

Ensuite, pour comparer les 100-échantillons de trajectoires au delà de l'instant de divergence, une visualisation par déciles est proposée. Elle consiste à représenter pour chaque pas de temps les déciles des résultats, comme le ferait un histogramme à pas variable. Ceci permet alors de tracer une approximation de la distribution des résultats au cours du temps. La figure (4.6) présente la visualisation par déciles du 100-échantillon de trajectoires expérimentales 100 $\neq$ ainsi que 5 de ses trajectoires. On y observe que la visualisation par déciles peut induire en erreur : les déciles évoluent horizontalement alors que les trajectoires brutes ont un mouvement d'oscillation. Pour mieux comprendre la distribution des résultats, on propose de visualiser en plus les déciles d'une approximation de l'énergie mécanique du bloc définie par la formule (4.3)

Mise à jour et vérification des paramètres mécaniques

Les modèles mécaniques ont été décrits dans la partie précédente. Puisque les blocs ont été ré-usinés dans la masse pour GlisBasc 2 de sorte à disposer de pieds de la même géométrie (voir Figure (4.1a)), les défauts de géométrie de la partie précédente ne sont plus valables. En conséquence, de nouveaux essais de lâcher ont été réalisés pour chaque bloc, tout d'abord avant la campagne, puis à la moitié de la campagne, et enfin après la campagne, de sorte à vérifier l'invariance du comportement hors-plan permettant de déterminer la valeur des défauts de géométrie.

Les valeurs des paramètres retenues pour les blocs 1 et 2 sont indiquées dans le tableau [4.1].

Description et analyse des résultats

concernant l'initiation du mouvement

Deux types de résultats sont analysés. Le comportement de basculement expérimental est comparé à la prédiction du modèle symétrique et sans défauts, "naïf", 4SCP et du modèle avec défauts 8ACP. La figure (4.8) représente sur le même graphe les trajectoires numériques et expérimentales, en portant l'accent sur l'initiation du basculement lors du pic d'accélération. Son observation mène à deux résultats majeurs :

1. le modèle 4SCP, symétrique et sans défaut, minimise grandement l'accumulation de vitesse rotation lors du pic d'accélération initial ; ou de façon équivalente, le mouvement expérimental des blocs accumule davantage d'énergie sous forme de vitesse de rotation que la prédiction "naïve" du modèle 4SCP,
2. le modèle 8ACP, asymétrique et avec défauts, est très sensible aux conditions initiales, ce qui provoque parfois une instabilité lors de l'initiation du mouvement. Cette instabilité n'a jamais été observée expérimentalement. Lorsque cette instabilité est évitée, le modèle retrouve avec précision l'accumulation de vitesse de rotation.

concernant la poursuite du mouvement

Les comportements expérimentaux et numériques durant les 30 s de l'essai sont étudiés. La figure (4.9) présente la fonction de répartition des instants de divergence entre différentes séries de trajectoires. Au sens de l'instant de divergence, les résultats du modèle 8ACP avec les paramètres du bloc 1 sont plus proches des résultats expérimentaux du bloc 1 :

- que les résultats numériques du modèle 4SCP,
- que les résultats expérimentaux d'un autre bloc supposé identique soumis simultanément à la même accélération sismique.

Les résultats numériques et expérimentaux sont représentés sous forme de déciles sur les figures (4.14) à (4.19). L'étude des résultats de la série 100 $\approx$ montre que face au signal choisi, le comportement d'ensemble des blocs expérimentaux peut être scindé en trois intervalles de temps correspondant à trois niveaux de variabilité différents. Ces trois phases sont correctement retrouvées par le modèle, ce qui tend à montrer que celui-ci est capable de correctement représenter la variabilité du comportement, même au-delà de l'instant de divergence. En remarquant que le bloc 2 a un comportement qui est moins affecté par la présence de défauts, l'étude de la série 100 $\neq$ montre que lorsque les blocs sont en mouvement et sont soumis à un signal sismique 1D de faible amplitude, la présence de défauts semble augmenter la dissipation d'énergie et ainsi permettre au bloc de s'immobiliser plus tôt.

Interprétation en terme de stabilité

Les résultats précédents semblent montrer simultanément, d'une part que la présence de défauts de géométrie augmente la quantité de vitesse de rotation accumulée lors du pic initial (ce qui rend le bloc plus enclin à se renverser), et d'autre part que le caractère asymétrique de la surface de contact augmente la dissipation d'énergie lors du mouvement de basculement (ce qui rend le bloc moins enclin à se renverser). Il n'est alors pas intuitif de déterminer si la conjonction des deux phénomènes a globalement un impact positif ou négatif sur le renversement.

On propose alors un modèle nommé 4SCP*, basé sur le modèle 4SCP, et qui modifie uniquement la position des points de contact de sorte à augmenter l'élanement apparent de la structure. Ceux-ci sont alors positionnés au même endroit que les pieds intérieurs du modèle 8ACP. La géométrie de ce modèle est donc symétrique, et ne requiert qu'un seul paramètre de défaut : δ^{diag} (voir Figure (4.1b)). La figure (4.11) montre que cette correction d'élanement permet de retrouver la bonne accumulation de vitesse de rotation lors de l'initiation du mouvement, et, compte-tenu des résultats précédents, il devrait être plus instable lors de la suite du mouvement. On suppose donc que ce modèle est plus enclin à se renverser que les modèles 4SCP et 8ACP, et est donc vraisemblablement plus enclin à se renverser qu'un bloc expérimental. Il pourrait alors constituer un modèle majorant pour estimer de la probabilité de renversement d'un bloc réel.

On évalue cette assertion en soumettant les trois modèles à un même échantillon de signaux sismiques artificiels. Les figures (4.12) et (4.13) présentent un indicateur de basculement en fonction du PGA de l'excitation. On peut observer alors que le modèle 4SCP* se renverse pour un niveau plus faible que les deux autres seulement si l'excitation est unidirectionnelle.

4.1 Introduction

A free structure placed on the ground without anchoring is likely to rock or overturn during an earthquake. The slenderer the structure is, the greater the risk of overturning. Thus, columns of ancient temples, gravestones or stacking containers are all structures that may be concerned by this type of risk.

The numerical modeling of the rocking behavior of structures under seismic motion is a quite challenging task, since this problem includes several difficulties,

due to the large displacements and rotations and also to impact and friction nonlinearities which cause the responses of these structures to be extremely sensitive to small perturbations [25]. Thus Yim *et al.* [24] demonstrated numerically that it was not judicious to study the seismic behavior of such a structure through the use of a single excitation instance. A statistical study is necessary to understand the behavior of a rigid body under dynamic excitation. This sensitivity is not only numerical; it is also experimental. Nevertheless various studies have shown that, depending on the type of solicitation and the nature of the bodies in contact, it is possible to demonstrate a certain degree of repeatability in behavior. For example, Wong et Tso [49] studied in detail the behavior of a rigid slender structure under unidirectional sinusoidal excitation. Several permanent schemes were experimentally observed and compared more or less successfully with the results of numerical simulations. Considering rectangular-based solid blocks composed of different materials, ElGawady *et al.* [50] showed that free rocking or release tests, performed on various types of supports, could evince a certain repeatability in the main motion axis, although only when the foundation was rigid. More recently, Mathey *et al.* [51] showed, for release tests on a rigid foundation using a slender rectangular cuboid block having small geometrical defects, that both in-plane and out-of-plane movements exhibited some repeatability over a limited period. Conversely, Mouzakis *et al.* [52] showed that the out-of-plane movement of a cylindrical structure with a circular base subjected to 1D seismic tests was barely repeatable. Peña *et al.* [6] obtained experimental movement repeatability over a relatively long period during rocking tests performed on rectangular-based blocks under harmonic acceleration, and poorer repeatability under random acceleration.

In the present article, the authors are concerned with assessing the aptitude of a numerical model to represent, over time, the dynamic behavior of an imperfect slender rigid block subjected to seismic excitations. The paper follows directly from article [51], in which they studied the influence of small geometric defects on the seismic behavior of this type of structure. To this end, the authors proposed a numerical model of an asymmetrical block which was propped up on the rocking test base. They showed numerically, using Monte-Carlo simulations, that for some levels of bidirectional synthetic excitation (*i.e.* excluding vertical acceleration) the geometrical defects rendered this type of block more prone to overturning than a perfectly symmetrical block. These results tend to confirm the experimental results reported by Purvance *et al.* [2], who showed that non-ideal structures (having non-cubic forms and imperfect contact surfaces) subjected to varying unidirectional seismic excitations exhibited greater overturning fragility than an ideal-geometry structure.

To assess the representativity of the model developed in [51], from both a deterministic and statistical point of view with respect to time, a series of experiments was carried out on 3 experimental blocks using a unidirectional shaking table belonging to CEA Saclay. First, the experimental blocks, arranged on the same shaking table, were subjected to 100 seismic acceleration signals for a duration of 30 s, representing a zero-mean stationary Gaussian process defined by Kanaï-Tajimi power spectral density [45]. This signal choice ensures that a variation over time in the statistical characteristics of a block's response cannot be linked to a variation in the statistical characteristics of the excitation, but must be imputed to the structure itself, whether it be numerical or experimental. Next, repeatability tests were performed, *i.e.* the 3 experimental blocks were subjected to 100 times the same realization of the stationary process. Theoretically, this type of test is more discriminating for the model since, by minimizing the excitation variability (which in theory is null) it becomes possible to assess more specifically the "intrinsic quality" of the model as regards its aptitude to represent a given real behavior. In practice, these tests showed a repeatability level comparable to that obtained during tests performed by Peña *et al.* [6].

This paper comprises 8 sections. In the second section the experimental cam-

paign is presented in detail. Next, in the third section, we present the various indicators which were specifically developed for this study to compare the calculations with the test results. The numerical models are presented in the fourth section, and compared with the experimental results in sections 5 and 6. Finally, an extensive numerical study is presented in section 7, with the aim of confirming, at a larger scale and for synthetic signals which are more “representative” of real earthquakes, the previous statistical results.

4.2 Experimental campaign

Test equipment

The tests carried out in this study were performed using three solid steel blocks, identical within manufacturing tolerances. The dimensions of these blocks are given in figure 4.1a. The blocks were rectangular cuboids of slenderness 6,9, each with four cuboid feet machined from the solid metal. Note that for reasons of space, only the results concerning the first two blocks will be detailed here.

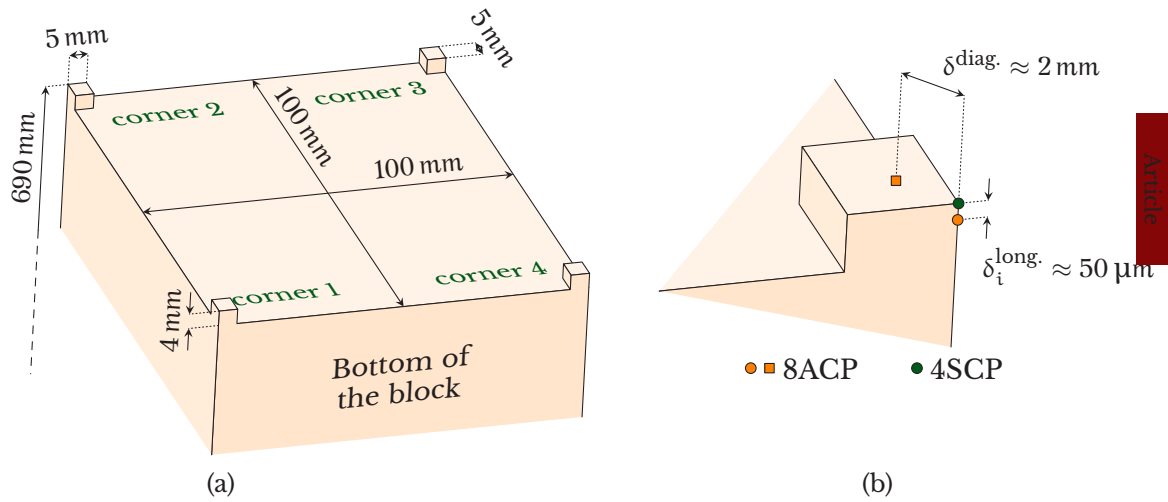


Figure 4.1 – Geometry of the numerical and experimental blocks:

4.1a: Theoretical block dimensions and angle numbering.

4.1b: Contact point positions for the numerical models and defect order of magnitude.

The blocks were instrumented with convective rotational velocity sensors (measuring the velocity around the axes of the block’s mobile reference frame, called *crv* and notated Ω). These sensors have a measurement range of $\pm 200^\circ \text{s}^{-1}$ and an accuracy of $\pm 0,01^\circ \text{s}^{-1}$. The movement of the blocks was observed around the three axes of the chosen convective reference frame. The acquisition of acceleration and rotational velocity measurements was performed at 1000 Hz, with an anti-aliasing filter set to 500 Hz.

Release tests

Before performing the dynamic tests on the shaking table, release tests were carried out for each block. These tests consisted of positioning and maintaining the blocks immobile, balanced on two feet (in an unstable state), then releasing them to allow a free rocking movement. The tests enabled us to determine the characteristics of the numerical models used in the study, applying the methodology proposed by Mathey *et al.*[51]. For space reasons, the results of these tests are not presented in this article; nevertheless, section 4.4 will present the values obtained for the numerical model parameters.

Shaking table tests

To assess the representativity of the numerical models, from both the deterministic point of view and that of statistical analysis under dynamic excitation, two series of 100 tests were performed simultaneously on the three blocks placed on the Vésuve unidirectional shaking table at CEA Saclay.

In, the first series of tests, the blocks were subjected to 100 different acceleration signals, each one generated by the random process defined in the following paragraph. In the rest of this paper, this series of tests will be referred to by the symbol $\neq$.

In the second test series, the blocks were subjected 100 times to the same signal, chosen from among those used previously. These repeatability tests are more discriminating for the numerical models, since they minimize excitation variability. They therefore enable a specific evaluation of the “intrinsic quality” of a model as regards its aptitude to represent a given real behavior. In this study, we will refer to this series using the symbol $\approx$.

Note that before each test the blocks were repositioned manually along a line marked on the shaking table in order to guarantee the closest possible angular conditions and initial position from one test to another (see Figure 4.2).

Dynamic excitation characteristics In order to study the behavior of a block over time, we chose to use unidirectional stationary seismic excitation signals which were perpendicular to two lateral faces of the block (see Figure 4.2). Each signal is a realization, truncated over a time interval of 30 s, of a zero mean stationary Gaussian process defined by Kanai-Tajimi power spectral density with a characteristic frequency of 2,95 Hz and a damping coefficient of 55 %.

In general two types of behavior can be envisaged, depending on the value of the standard deviation $\sigma_{th.}$ of the process. For a theoretical standard deviation, evaluated empirically as $\sigma_{th.} \leq 0,05 \text{ g}$, most realizations do not achieve the acceleration limit which would enable rocking to be initiated. Indeed, the acceleration level required to enable a perfect block of slenderness 6,9 to initiate a rocking movement is $\gamma^{gr.} = 1/6,9 \text{ g} \approx 0,145 \text{ g}$ ([4] and Figure 4.7a). Furthermore, it has been observed that if the standard deviation of the realizations is $\sigma_{th.} \geq 0,03 \text{ g}$, all the blocks that have initiated a rocking movement overturn rapidly (after a few “*main impacts*” (mi)), which does not enable their behavior to be studied over time. Note that a *main impact* occurs in the case of unidirectional excitation when the block angle about the main axis becomes null (see figure 4.2), which is identified as a local extremum of the convective rotational velocity about this same axis.

To overcome this difficulty we considered, for each excitation signal, the concatenation of a deterministic trigonometric pulse and a truncated realization of the stationary process defined above. The pulse provides the blocks with an unbalanced initial condition (non-null angle and rotational velocity) before they are solicited by the random excitation. This pulse is modeled by a truncated sinusoidal signal, over one period, of amplitude 0,2 g and a duration of 0,4 s. This amplitude is sufficient to initiate rocking in the blocks. The duration is however sufficiently short for the blocks not to overturn. The standard deviation of the process was chosen to be $\sigma_{th.} = 0,02 \text{ g}$ so that the blocks remain in motion for a relatively long period without overturning. Note, however, that the amplitude of the 100 realizations generated for the tests is so low that the maxima, in absolute values (peak ground acceleration (PGA)), never exceeded 0,10 g. As a consequence, a block which becomes totally immobile during a test cannot in theory resume its rocking movement.

Theoretical, real, measured and calculated signals In practice, there are two challenges to performing and analyzing this type of experiment. The first comes from the servo-control of the shaking tables, which does not allow a target acceleration signal to be reproduced with accuracy. The second comes from the

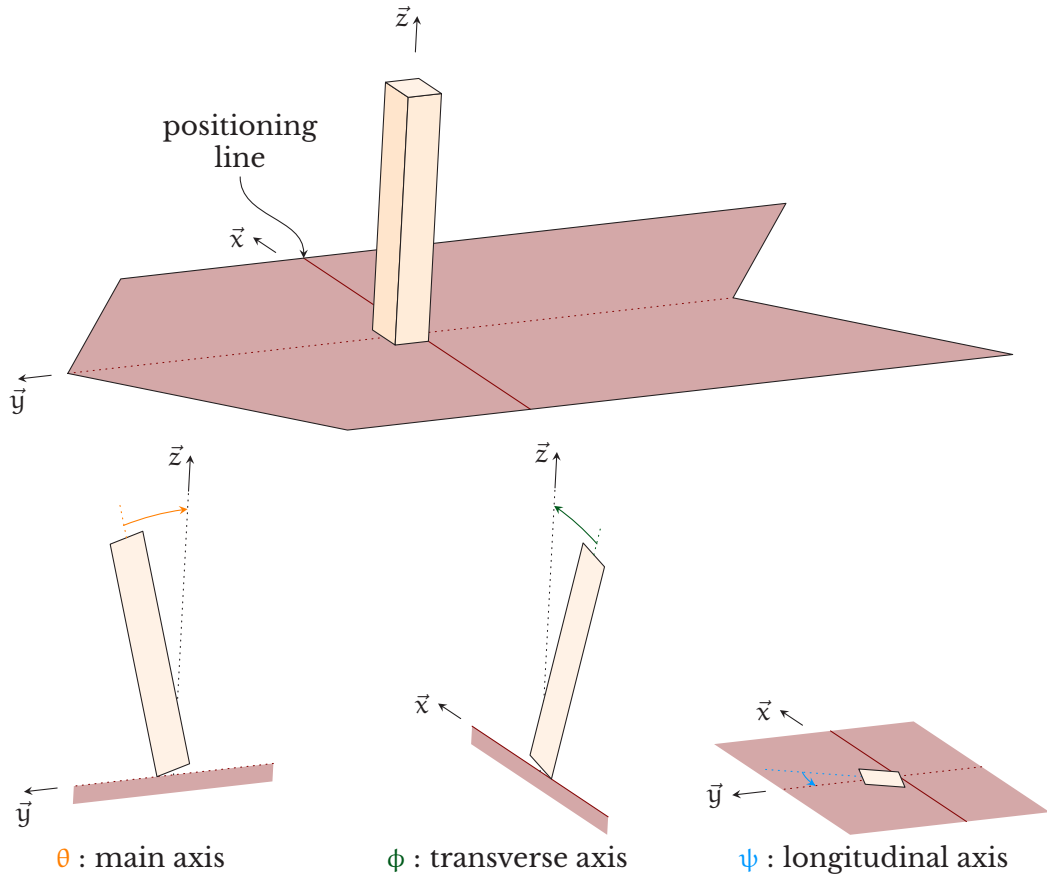


Figure 4.2 – Angle notation conventions

accelerometers, which inevitably produce noisy signals. Thus, for clarity's sake, we distinguish:

- the target accelerations A_t which correspond to the signals generated by the procedure described in the previous paragraph;
- the accelerations really generated by the table A_r . Hypothetically, these are the accelerations experienced by the blocks;
- the accelerations measured by the sensors A_m .

First of all, let us stipulate that instant 0 of these signals was chosen to be easily identifiable from the raw measurements. Since the table is displacement controlled, instant $\tau_0 = 0$ s is defined as the instant at which the displacement of the table with respect to its initial position attains 10 mm, during the first pulse.

To improve the accuracy of the acceleration measurements, 4 sensors were placed on the shaking table. For each realization r of an excitation signal, with $r \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$, the 4 measurements ${}_r A_m^i$, $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ are averaged, and the resulting signal is filtered by a windowed “Low Pass Filter Impulse Response” numerical filter, with as its parameters $F_s = 1000$ Hz, $F_c = 55$ Hz, order = 200 and a “Flat-top” type window. These averaged signals, filtered and denoted ${}_r A_m^*$ will be used as input data for the numerical models.

Figure 4.3a presents in graphs 1 and 2 five realizations of these signals, and in graphs 3 et 4 the means and standard deviations of two series of realizations (series $100 \approx$ and series $100 \neq$). In this figure, we can observe that the standard deviation at $\tau < 0$ is non-null, which highlights residual measurement noise, persisting despite appropriate numerical processing to reduce it. We can also observe high-amplitude spikes in the acceleration (for example at $\tau = 0,55$ s in zoom A, figure 4.3b). These are due to shock waves produced by the impacts of the blocks on the table during their movement. This phenomenon is also visible in zoom B (figure 4.3c). However, the curve of series $100 \neq$ presents higher-frequency content

than that of series 100 $\approx$, which is more regular. This difference can be explained by the fact that in series 100 $\approx$, from one test to another, the block movements are almost identical during the first seconds, since the accelerations experienced by the blocks are also nearly identical. The impacts of the blocks on their base occur at approximately the same moment for all the tests. This is evinced by the wide peaks on the curve representing the standard deviation of the measured acceleration signals. Conversely, since the signals of series 100 $\neq$ are constructed differently, the block movements are also different from one test to another, even in the first few seconds. The impacts of the blocks thus occur at different moments for each test, giving rise to measurement perturbations which are more evenly spread over time for series 100 $\neq$, to such an extent that the standard deviation of the measured signals largely exceeds the target standard deviation $\sigma_{th.} = 0,02\text{ g}$ throughout the duration of the test.

Still in zoom B, it can be observed that the standard deviation of the measured signal in series 100 $\approx$ is higher than the standard deviation of the residual measurement noise even away from the above-mentioned spikes. However, the target accelerations of this part are identical, since $\tilde{r}A_t = \frac{r}{1}A_t$, $r \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$. This highlights the experimental difficulty in exactly reproducing a given target signal.

To conclude, let us note that a notation similar to that used for accelerations was used to distinguish real rotational velocities $r\Omega_r$, their measured values $r\Omega_m$, and the rotational velocities calculated by the various numerical models $r\Omega_c$. Furthermore, to distinguish the crv of the different axes, these are notated $\Omega^{(\theta)}$ for the main axis, $\Omega^{(\phi)}$ for the transverse axis and $\Omega^{(\psi)}$ for the longitudinal axis (see Figure 4.2).

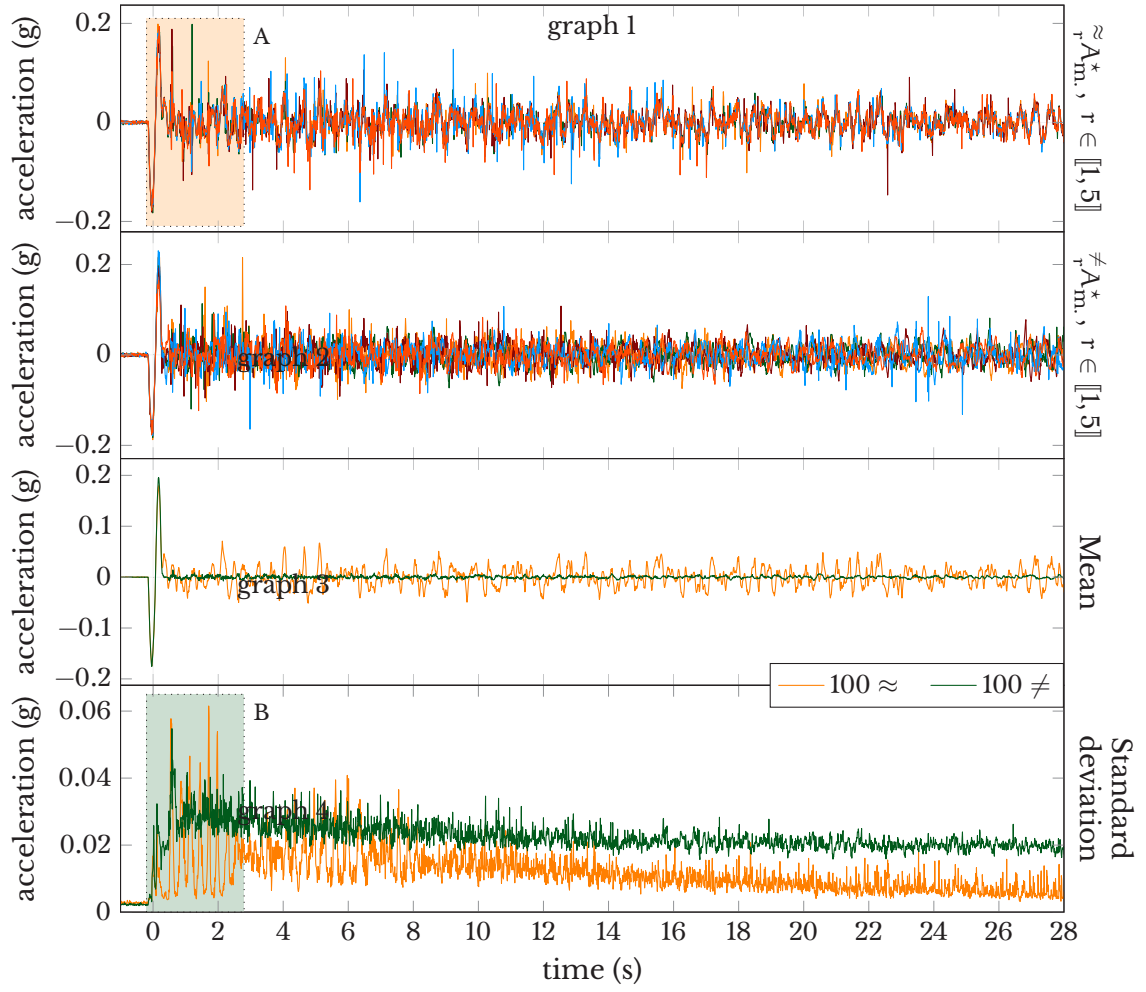
4.3 Methodology and statistical analysis tools

In the present study, two strategies are implemented to compare the experimental and numerical responses of the blocks. The first strategy consists of comparing the numerical and experimental responses for each test. This enables the assessment of the model's capacity to accurately reproduce the movement of a block subjected to a given acceleration signal. The second strategy consists of considering the 100 numerical results and the 100 experimental results as two distinct 100-samples. In this case, the statistical indicators for each sample are compared. For these two strategies, various indicators were developed; they are presented in the following section.

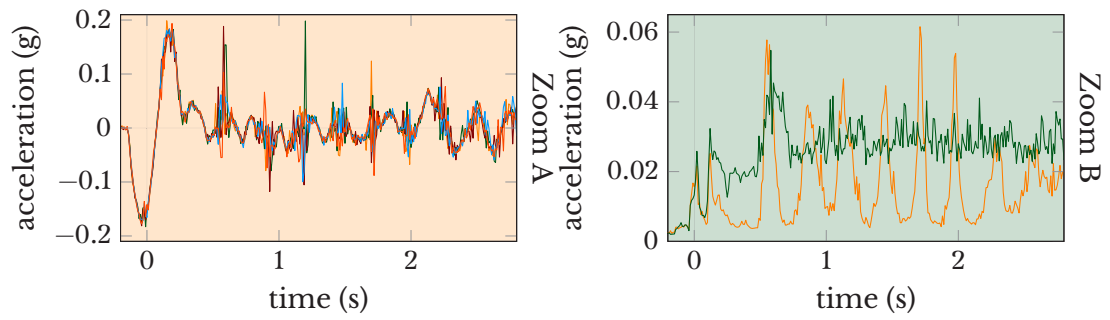
Time concordance indicator for the two trajectories

The dynamic behavior of a free standing rigid block under seismic excitation is very sensitive to small perturbations. Indeed, the studies carried out within the framework of this article show that as soon as the gap between two movements becomes significant (e.g. the movements of two different blocks under the same seismic excitation, or the experimental movement of a block and its numerical simulation), this gap grows rapidly over time and the movements diverge. A relevant value to compare two movements is thus the moment at which the gap between two representative trajectories of these movements becomes significant, that is to say the instant noted $\tau^{Div.}$ after which these trajectories diverge.

Let f et g be two trajectories defined for $\tau \in [\tau_0, T] = I$. The authors propose to consider as significant the gap between f and g at instant t_1 when there is no intersection between that ellipse centered on $(t_1, f(t_1))$ and of half-axes $\Delta\tau$ et $\Delta\Omega$ (in the time – rotational velocity about the main axis plane) and the graph of g . Parameters $\Delta\tau$ and $\Delta\Omega$ were chosen empirically in order to discriminate correctly between two trajectories. The values considered are $\Delta\Omega = 0,03\text{ rad s}^{-1}$ and $\Delta\tau = 0,04\text{ s}$. Figure 4.4 enables the size of the ellipse to be visualized with respect to the amplitude of the studied signals. Thus, the gap between f and g will be considered



(a)



(b)

(c)

Figure 4.3 – Table acceleration signals: all plots are of measured signals.

4.3a graph 1: 5 acceleration measurements of the 100-sample $100 \approx$.4.3a graph 2: 5 acceleration measurements of the 100-sample $100 \neq$.4.3a graph 3: means of the two 100-sample $100 \approx$ and $100 \neq$.4.3a graph 4: standard deviations of the 100-sample $100 \approx$ and $100 \neq$.

4.3b and 4.3c: zooms of figure 4.3a.

as being significant at instant t_1 if:

$$\#(t_2) \in I, \sqrt{\left(\frac{f(t_1) - g(t_2)}{\Delta\Omega}\right)^2 + \left(\frac{t_1 - t_2}{\Delta\tau}\right)^2} \leq 1 \quad (4.1)$$

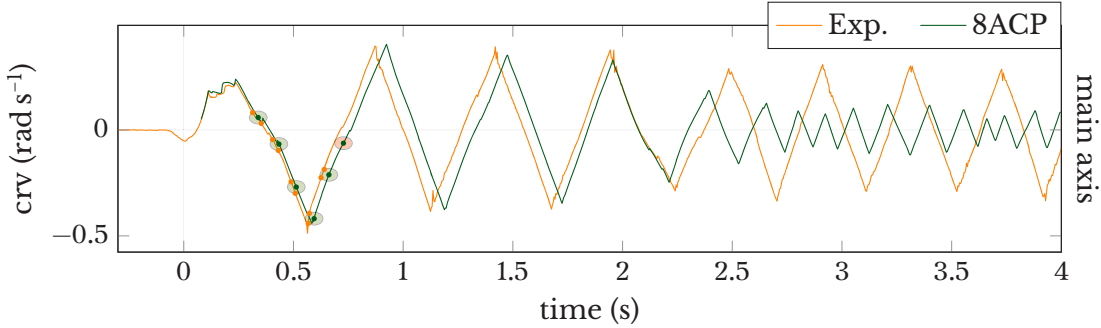


Figure 4.4 – **Illustration of the calculation method for the instant of divergence:** for $\Delta\Omega = 0,03 \text{ rad s}^{-1}$ and $\Delta\tau = 0,04 \text{ s}$. The ellipses represent the tolerance area proposed by equation 4.1. When an ellipse centered on the green curve intersects the orange curve (the intersections are materialized by orange points), the gap is not considered as being significant.

However, noise and the effect of impacts on the measurements are likely to introduce, for some isolated time steps, a large discrepancy between the compared trajectories. At these instants, the above equation will incorrectly indicate that the gap is significant, and the definition of the instant of divergence $\tau^{\text{Div.}}$ should preclude this problem. To do this, we introduce duration τ^* , corresponding to several sensor sampling periods ($\tau^* = 5\delta T = 5 \text{ ms}$), and we define the instant of divergence as the first instant τ for which the gap between f and g is significant for every instant t_1 of $[\tau, \tau + \tau^*]$:

$$\tau_{\Delta\Omega, \Delta\tau, \tau^*}^{\text{Div.}}(f, g) = \min_{\tau \in I} \tau, \left\{ \#(t_1, t_2) \in ([\tau, \tau + \tau^*] \times I), \sqrt{\left(\frac{f(t_1) - g(t_2)}{\Delta\Omega}\right)^2 + \left(\frac{t_1 - t_2}{\Delta\tau}\right)^2} \leq 1 \right\} \quad (4.2)$$

Statistical indicators of n-samples

Before describing precisely the statistical indicators used in this study, let us note that they are greatly affected by trajectories for which the blocks overturn. Consequently, all the indicators will be conditional on the fact that the trajectories did not lead to overturning. However, to be exhaustive, the tests in which the blocks overturned will be indicated in the figures presenting comparisons between the experimental and numerical results. Furthermore, given that the standard indicators – mean and standard deviation – do not enable a sufficiently accurate comparison of the samples, specific indicators were developed and are presented in the following paragraphs.

Representation by “deciles” of the crv The distribution of the crv values, and more generally of the realizations of a random process at a given moment, is properly represented by a fixed-pitch histogram (Figures 4.5a and 4.5b). It is however not simple to follow the variation over time of such a histogram in a single figure. By contrast, using a variable-pitch histogram (Figure 4.5c), organized for example into ten intervals, each containing 10 % of the occurrences, makes it easy to trace its variation over time, as shown in Figure 4.6a. Note that in such a graph, the smaller the interval size, the larger the occurrence density. In the following, we will use the term “deciles” to refer to this visualization.

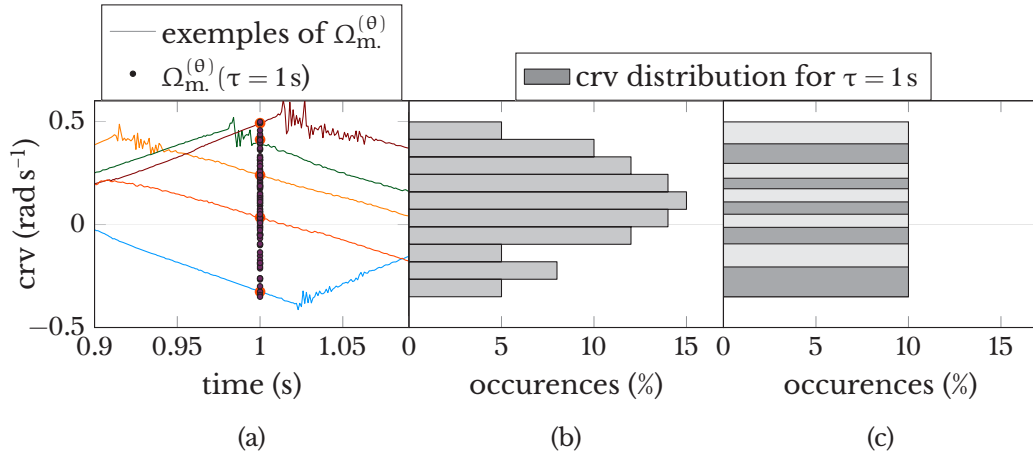


Figure 4.5 – Illustration of decile arrangement for a time step of $\tau = 1$ s.

4.5a: the traces are 5 examples of rotational velocity; the points on these lines mark the value of the rotational velocity at $\tau = 1$ s, and the crosses represent the rotational velocity value of the other 95 signals at $\tau = 1$ s.

4.5b: fixed-pitch histogram of the rotational velocity sample at $\tau = 1$ s .

4.5c: variable-pitch histogram of the rotational velocity sample at $\tau = 1$ s .

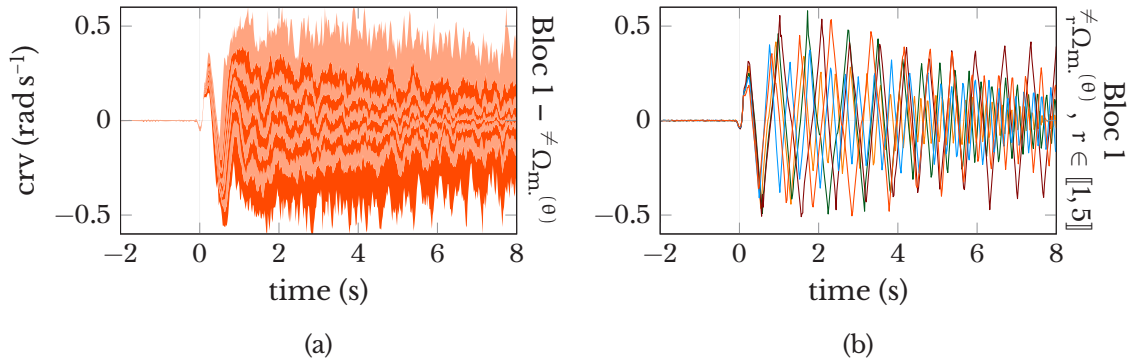


Figure 4.6 – Comparison between a decile representation and a trajectory representation of rotational velocities

4.6a: Decile representation of rotational velocities.

4.6b: Trajectory representation of rotational velocities.

Decile representation of energy A decile visualization of the rotational velocities may give rise to an error. Counter-intuitively, the deciles “evolve” horizontally (see Figure 4.6a) whereas the signals oscillate between extreme negative and positive values (see Figure 4.6b). A block can be included in a decile close to 0 because i) it oscillates with a small amplitude (or is motionless) or ii) it oscillates with a large amplitude but this instant corresponds to an oscillation node (or a “zero”). In order to distinguish between these two possibilities, a solution is to consider an envelope of the rotational velocity.

The value which most directly envelopes the rotational velocity is mechanical energy. It is simple to identify this energy through numerical calculation. Experimentally, however, given the measurement resources available, only an approximation is possible.

When a block movement satisfies the hypotheses of Housner’s one degree of freedom model [4], we can easily express the energy measurement from the an-

gular position θ of the block and its derivative:

$$\begin{aligned} E &= E_{p.p.} + E_{c.r.} + E_{c.t.} \\ &= mgR (\theta - \tilde{\alpha}) + m(h^2 + b^2)\dot{\theta}^2/6 + m(R\dot{\theta})^2/2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

where E , $E_{p.p.}$, $E_{c.r.}$ and $E_{c.t.}$ are approximations of mechanical energy, potential weight energy, kinetic rotational energy and kinetic translation energy, respectively; $\tilde{\alpha}$ is the algebraic slenderness angle ($\tilde{\alpha} = \pm \arctan(b/h)$); h , b and R are the half-height, width and diagonal of the block, and m is the mass of the block.

Thus, under the hypothesis that the movement of the experimental blocks is plane, we can express the rotational velocity $\dot{\theta}(\tau)$ as the measurement of the rotational velocity sensor on the main axis $\Omega_m^{(\theta)}(\tau)$, and angle $\theta(\tau)$ as the integral of $\dot{\theta}(\tau)$. In the experimental measurements it can be noted that the rotational velocity on the transverse axis is around 5 times lower than on the main axis. From an energy point of view, since the rotational velocity is squared, the transverse axis represents only 1/25th of the energy, and it thus seems legitimate to discount it.

Nevertheless, due to measurement noise and out-of-plane movement, the determination of $\theta(\tau)$ by integrating $\dot{\theta}(\tau)$ drifts after a few impacts. To remedy this, the angle is reinitialized at each impact to $\theta(\tau_{\text{impact}}) = 0$. At the end of the movement, when there is no longer any identifiable impact, the slight drift of the angle can no longer be corrected. This leads to a slight energy drift, which is visible in the experimental results in Figures 4.16 and 4.19.

Proportion of blocks still in motion over time Since the imposed signals do not theoretically allow the blocks to resume motion once they have become motionless, the number of motionless blocks increases with time. This number is a relevant indicator, which can be used to test the model's aptness.

A block is defined as being motionless once its rotational velocity about the main axis becomes and remains negligible. As with indicator τ^{Div} , in order to reduce perturbations due to measurement noise, we consider that a block has ceased moving once its rotational velocity on the main axis remains limited to interval $[-\Delta\Omega, +\Delta\Omega]$, or else it exceeds these limits for a duration of less than τ^* .

$$\tau_{\Delta\Omega, \tau^*}^{\text{Ar}}(f) = \min_{\tau \in I} \tau, \{ \forall t_1 \in [\tau, T] \exists t_2 \in [t_1, t_1 + \tau^*], |f(t_2)| \in [-\Delta\Omega, +\Delta\Omega] \} \quad (4.4)$$

The values of $\Delta\Omega$ et τ^* retained for this criterion are identical to those used for indicator τ^{Div} . (see section 4.3).

4.4 8ACP and 4SCP models

In this section we present two numerical models, which are compared to the experimental results. These models were developed in article [51] to represent release tests on slender rigid blocks, highlighting out-of-plane movements of non-negligible amplitude. For space reasons, these models will not be presented in detail in the present article, but to summarize, in both cases the experimental solid steel blocks are modeled by a rigid body whose movement equation is resolved by Simo's algorithm [22]. This algorithm maintains the total momentum constant, unconditionally, for any time-step and despite the large rotations. Moreover, the natural outputs of Simo's algorithm are convected rotational velocities, which are also the quantities measured experimentally. The four feet of the block are not modeled explicitly but are represented as nodes. Impact and friction are modeled by the penalty method [9]. Nevertheless, in this case, penalty parameters are not purely numerical artifices used to impose contact conditions. Instead, they reflect physical, local flexibility and dissipation of the feet that are not taken into account by the rigid body model of the block.

In article [51], as well as in the present paper, out-of-plane movement is attributed to the inevitable geometrical defects caused, at the scale of a foot, by the

manufacturing process. In order to account as simply as possible for these defects, an eight-asymmetric-contact-points model (8ACP) is considered. As shown in Figure 4.1b, this model considers four external contact points at the four corners of the block (round symbol in the figure) and four internal contact points located on the two bisectors of the lower face of the block (square symbol). The 8ACP model requires six contact parameters (two identical normal and tangential stiffness coefficients $\kappa^{(N)}$ and $\kappa^{(T)}$ for each contact point; a damping coefficient $\beta_{\text{int.}}$ for the four “interior” contact points and another $\beta_{\text{ext.}}$ for the four “exterior” ones) and five geometrical defect parameters (one $\delta^{\text{diag.}}$ parameter and four $\delta_i^{\text{long.}}$, $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ parameters). The values of these parameters are determined from the reproducible movement evinced by the release tests, through an optimization procedure by means of an evolutionary algorithm [42].

The second model used is a four-symmetric-contact-points model having only 4 contact points and noted 4SCP (see figure 4.1b). It is the model which would probably be used in the absence of data concerning the geometrical defects (values and spatial distribution). The parameters used for this model correspond to those of the “exterior” contact points in the 8ACP model.

The values used in this study, after an optimization step, are shown in table 4.1. In the following, it will be seen that experimental block 1 has more marked out-of-plane behavior than experimental block 2; the table shows that it is not the absolute value of the defects which determines the magnitude of the out-of-plane movement, but rather their spatial distribution.

Parameter	Each block	Parameter	Block 1	Block 2	Block sym.
$\kappa^{(N)}$	$6,7 \times 10^7 \text{ N m}^{-1}$	$\delta_1^{\text{long.}}$	$-19 \mu\text{m}$	$70 \mu\text{m}$	$0 \mu\text{m}$
$\kappa^{(T)}$	$7,0 \times 10^7 \text{ N m}^{-1}$	$\delta_2^{\text{long.}}$	$5 \mu\text{m}$	$20 \mu\text{m}$	$0 \mu\text{m}$
$\beta_{\text{int.}}$	15 %	$\delta_3^{\text{long.}}$	$-19 \mu\text{m}$	$120 \mu\text{m}$	$0 \mu\text{m}$
$\beta_{\text{ext.}}$	8 %	$\delta_4^{\text{long.}}$	$9 \mu\text{m}$	$40 \mu\text{m}$	$0 \mu\text{m}$
$\mu_{\text{int.}}$	0,300	$\delta^{\text{diag.}}$	$2,0 \text{ mm}$	$3,1 \text{ mm}$	—
$\mu_{\text{ext.}}$	0,317				

(a) Mechanical parameters of the models. These are the same for each block.

Note: The parameters of block 2 are given for information purposes. The article will not present numerical simulation results for this block, due to space reasons.

(b) Geometrical parameters of the models. Each block has its own set of parameters.

Table 4.1 – Model parameters

4.5 Representativity of the models subjected to sinusoidal pulses

Considering the excitations applied, which as mentioned above are the concatenation of a deterministic pulse and the truncation of the realizations of a stationary random process, it appears necessary to dissociate the study of movement initiation linked to a sinusoidal pulse (this section) from the study of the rocking movement subjected to stationary excitation (following section).

Experimental variability

The experimental results regarding the initiation of block movement under sinusoidal pulses are presented in Figure 4.7. Figure 4.7a presents the rotational velocities of blocks 1 and 2 undergoing the same seismic acceleration, and Figure 4.7b shows 5 realizations $\approx \Omega_m^{(\theta)}$ corresponding to the same theoretical acceleration. Figure 4.7b shows that the blocks exhibit different behavior from the moment of the first mi, which occurs at $\tau \approx 0,1\text{s}$. It can be noted that following this mi, the block experiences numerous “micro-impacts”, visible from the small jolts at almost constant velocity just after the impact. However, block 2 has a more regular behavior, closer to that of a perfect block, following this first mi. Figure 4.7b

shows that these particularities are quite repeatable, and thus characteristic of each block, which leads us to suppose that they are produced by geometrical defects. To be clear, the authors define a “micro-impact” as an irregularity observed in the movement measurements, independent of measurement errors, and which could be the result of at least three mechanisms: i) quasi-instantaneous rebounds during which no foot touches the ground, ii) transitions between two contact points in low-amplitude rotational movement about the transverse axis and iii) rapid slip-stick transitions.

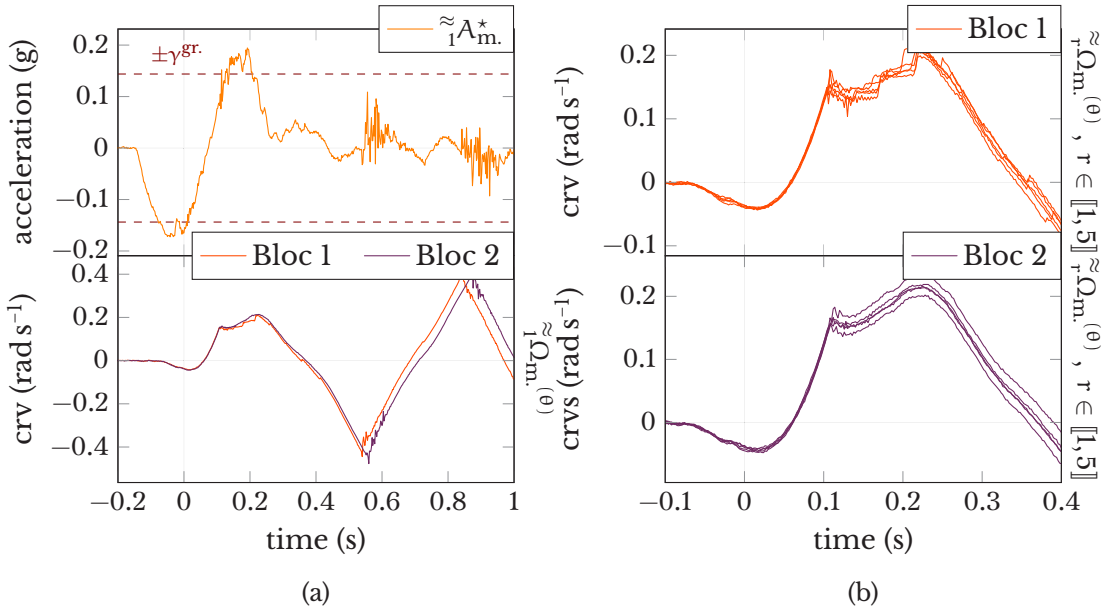


Figure 4.7 – Experimental results for movement initiation:

4.7a top: Measured acceleration.

4.7a bottom: Comparison of rotational velocity between block 1 and block 2 under specified acceleration.

4.7b top: Rotational velocities of block 1 for 5 tests of the 100 $\approx$ series.

4.7b bottom: Rotational velocities of block 2 for 5 tests of the 100 $\approx$ series.

Representativity of 4SCP and 8ACP models

Figure 4.8 shows the trajectories calculated using models 8ACP and 4SCP for the same seismic acceleration and for null initial conditions, in velocity and angular position. For comparison purposes, the measured rotational velocity for experimental block 1 is also shown. The reference calculations for the 8ACP and 4SCP models were performed considering that the excitation started at instant $\tau'_0 = -2$ s. However, in order to illustrate the sensitivity to initial conditions and measurement noise of this type of calculation, a complementary result is presented. It corresponds to the result of a calculation performed assuming that the excitation started at instant $\tau'_0 = -2,1$ s.

Representativity of the 4SCP model The response of the symmetrical model to trigonometric pulses (green unbroken trace in Figure 4.8) brings to light two particularities:

- It can only represent behavior without the “micro-impacts” after the 1st impact at $\tau = 0,12$ s, and is therefore not capable of representing the behavior of block 1.
- It greatly minimizes the amount of energy received by the block on the initial pulse. This effect seems significant, but should be considered while taking into account the fact that the pulse is slightly stronger than the theoretical acceleration required to lift the block off the ground γ^{gr} . A small

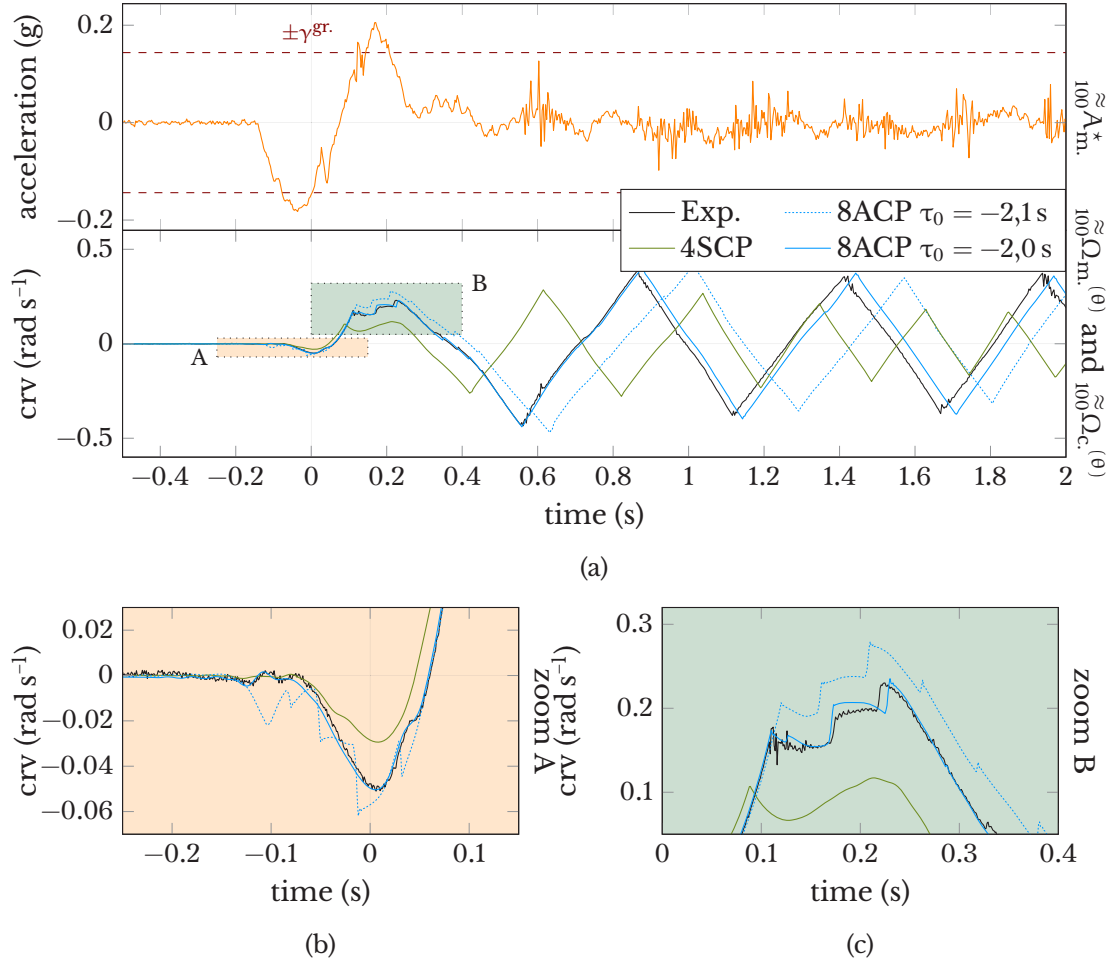


Figure 4.8 – **Comparison between numerical and experimental results when movement is initiated.** Two results are given for the 8ACP model in order to highlight the sensitivity to initial conditions.

4.8a top: Acceleration measured during the test and theoretical rocking acceleration.

4.8a bottom: Rotational velocity of the different models experimental reference.

4.8b and 4.8c: zooms of figure 4.8a.

variation between the experimental and numerical trajectories during this pulse leads therefore to a large variation between the trajectories in the rest of the movement.

Representativity of the 8ACP model The 8ACP model, loaded with the parameters corresponding to block 1, finds the correct accumulation of rotational velocity for the impact at $\tau = 0,12$ s. It also correctly represents the succession of micro-impacts (see zoom B, Figure 4.8c).

We can note, however, that numerically the initial positioning of the model is non-trivial. Indeed, taking into account the estimated geometrical defect values (see Table 4.1 and Figure 4.1b), at rest the block can only be supported by 3 contact points. Of these three points, two are diagonally opposed and necessarily in contact. Dynamically, in the phase prior to the pulse, the third contact point can vary depending on the excitation to which the model is subjected, due to measurement noise. Thus the initiation of movement following the pulse can, randomly, be:

- gentle and regular if the movement starts with 2 points in contact beforehand (continuous line in zoom A, Figure 4.8b),
- disorderly if it starts with a micro-impact (dotted line), which will result in

a significant modification of the rest of the movement after the pulse. Let us note that the experimental movement is always regular at its initiation. In this phase of the movement, the instability of the numerical behavior is thus one of the limits of the 8ACP model, caused by the geometry defined by discrete points and amplified by measurement noise.

Summary In conclusion we can say that a symmetrical model is unsatisfactory for this type of excitation, since it greatly underestimates the energy accumulated by the block during the initial pulse, which leads to an underestimation of the amplitude of the rest of the movement. The 8ACP model can provide a correct estimation of the beginning of the movement, but is very sensitive to measurement noise when rocking is initiated.

4.6 Representativity of models subjected to random excitations

This section concerns the study of the representativity of numerical models subjected to random excitations, using the indicators defined in section 4.3. However, in order not to include in the analysis errors produced when movement is initiated (see the results of the previous section), this study was performed whilst imposing non-null initial conditions on the numerical calculations. To this end, the initial instant τ'_0 of the simulation was chosen as being equal to $\tau'_0 = \tau_0 + 0,08$ s. Thus, at this instant, the blocks were necessarily supported by two feet. Furthermore, this duration of 0,08 s was chosen sufficiently short for the initial conditions to be determined under the hypothesis of plane movement in the main axis.

Initial conditions for numerical calculations

For the sake of simplicity, initial positions and angular velocities are considered as null in the transverse and longitudinal axes (figure 4.2). In the main axis, for each realization r , $r \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$, the initial angular velocity is taken as equal to the measured value ${}_r\Omega_{m.}^{(\theta)}(\tau'_0)$. The initial angle is obtained by integrating ${}_r\Omega_{m.}^{(\theta)}(\tau'_0)$ calculated between the start of acquisition (incorrectly noted $\tau = -\infty$) and τ'_0 .

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} {}_r\theta(\tau'_0) \\ {}_r\phi(\tau'_0) \\ {}_r\psi(\tau'_0) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\tau'_0} {}_r\Omega_{m.}^{(\theta)}(\tau) d\tau \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} & \Omega_c(\tau = \tau'_0) = \begin{vmatrix} {}_r\dot{\theta}(\tau'_0) \\ {}_r\dot{\phi}(\tau'_0) \\ {}_r\dot{\psi}(\tau'_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}_r\Omega_{m.}^{(\theta)}(\tau'_0) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Note that due to experimental uncertainties (measurement noise, manual positioning of the blocks on the table, etc.) each of these initial conditions is, in absolute terms, random. In the present case, as shown by equation 4.5, only the variability of the main axis is taken into account in the numerical calculations. We will come back to this in the interpretation section.

Temporal concordance of numerical and experimental trajectories

The temporal concordance of the numerical and experimental trajectories is assessed using the instant of divergence $\tau^{\text{Div.}}$ which was defined in section 4.3. This indicator being evaluated on the 100-sample scale, it is a random variable. The results are therefore presented in the form of a graph representing the probability of exceeding of $\tau^{\text{Div.}}$; that is to say $\tau \rightarrow P(\tau^{\text{Div.}} > \tau)$.

To obtain reference values, the experimental trajectories of the three different blocks were first compared using indicator $\tau^{\text{Div.}}$. Then indicator $\tau^{\text{Div.}}$ was calculated from the block 1 experimental results and its predictions given by models 8ACP and 4SCP.

Since the order of magnitude of the maxima of the random signal realizations ($< 0,1$ g) is smaller than the maximum initial pulse (0,2 g), it is legitimate to wonder if the effect of random signals on the blocks' responses is negligible compared to that of the pulse. To conclude, we therefore propose to evaluate the marginal

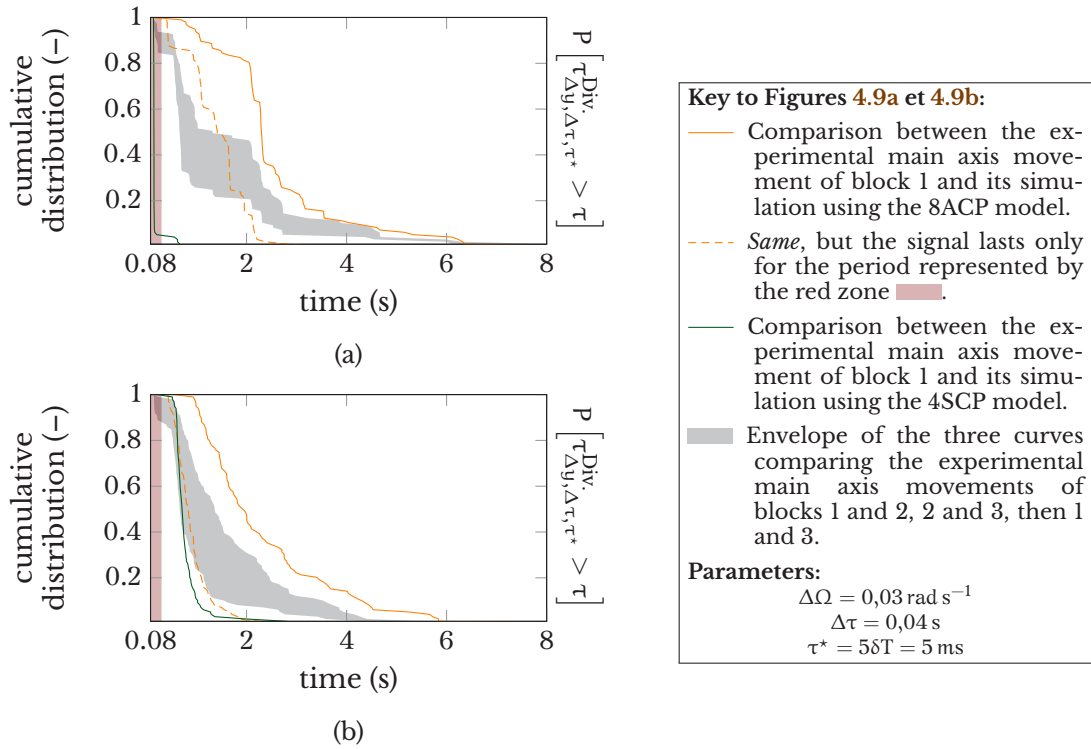
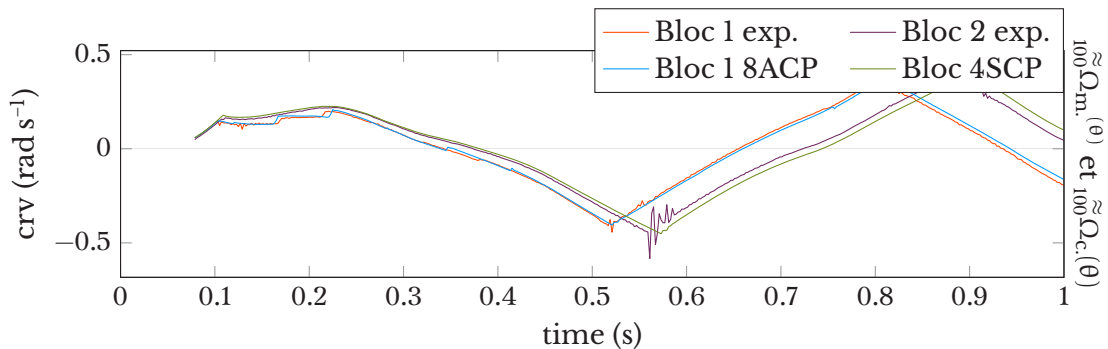


Figure 4.9 – Instants of divergence, trajectory by trajectory:

4.9a: Distribution of the instant of divergence $\tau_{\Delta\Omega, \Delta\tau, \tau^*}^{\text{Div.}}$ for series 100 $\approx$.
 4.9b: Distribution of the instant of divergence $\tau_{\Delta\Omega, \Delta\tau, \tau^*}^{\text{Div.}}$ for series 100 $\neq$.

Figure 4.10 – Comparison of experimental and numerical results when the calculation initiates at $\tau = \tau'_0$.

effect of the random signals on the estimation of $P(\tau^{\text{Div.}} > \tau)$. To this end, the block 1 experimental results and the numerical simulation results corresponding to the post-pulse free movement of the 8ACP model are compared using indicator $\tau^{\text{Div.}}$.

Figure 4.9 presents this set of results. In general, it appears that the variation in $P(\tau^{\text{Div.}} > \tau)$ is more regular for the 100-sample $100 \neq$ than for the 100-sample $100 \approx$. This illustrates the expected dependency of this indicator with respect to the signal. This will be covered in detail in the following paragraphs.

Disparities in experimental results between the different blocks The gray area in Figure 4.9 represents the envelope of three curves corresponding to the estimations of $\tau^{\text{Div.}}$ with the experimental results (i) for block 1 and block 2; (ii) for block 2 and block 3; (iii) for block 1 and block 3. This results provides a reference value: the time necessary for experimental trajectories of two experimental blocks, subjected to the same real acceleration ${}_r A_r(\tau)$, to diverge significantly. Thus it appears that beyond 7 s, all the experimental trajectories have diverged.

Disparities in experimental results and predictions of different models The estimations of $P(\tau^{\text{Div.}} > \tau)$, evaluated from the numerical results of models 8ACP or 4SCP on the one hand and the experimental results for the block on the other hand, correspond respectively to the orange and green solid lines in Figure 4.9. These estimations show that divergence between the experimental results and those of the 4SCP symmetrical model occurs very rapidly, despite the initial conditions imposed at instant τ'_0 (equation 4.5).

Figure 4.10, which presents the crvin the main axis of experimental blocks 1 and 2, as well as those of models 8ACP and 4SCP, shows that the previous result is due to the fact that model 4SCP does not predict the “micro-impacts” which occur between 0,1 and 0,22 s, unlike model 8ACP. Thus it appears that, as expected, model 4SCP is relevant in representing the behavior of a block having less transverse movement, like block 2.

Finally, Figure 4.9 also shows that for test series $100 \neq$, model 8ACP almost exactly predicts the experimental behavior of block 1 for at least 1 s, in half the cases for 2 s and sometimes up to 5,5 s. In the case of series $100 \approx$, divergence between the trajectories of model 8ACP and block 1 occurs principally between 2 and 2,2 s.

Disparities between experimental results and post-pulse free movement Additionally, given the chosen nature of the acceleration signals, the influence of the energy supplied by the sinusoidal pulse on the estimation of $P(\tau^{\text{Div.}} > \tau)$ was studied. To this end, 100 numerical calculations were performed using the 8ACP model, considering accelerations ${}_r A_{\text{sin}}$, $r \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$ defined by:

$$\begin{aligned} {}_r A_{\text{sin}}(\tau) &= {}_r A_m^*(\tau) & , \tau \in [\tau'_0, 0,2] \text{ (interval in red in Figure 4.9)} \\ {}_r A_{\text{sin}}(\tau) &= 0 & , \tau \in [0,2, T] \end{aligned} \quad (4.6)$$

It is to be noted that in τ'_0 , the initial conditions applied for the numerical calculations are those defined by equation 4.5. The estimation of $P(\tau^{\text{Div.}} > \tau)$ evaluated from the numerical and experimental results is traced by the dotted line in Figure 4.9. Thus, for the two test series $100 \neq$ and $100 \approx$, it appears that the instant of divergence between the experimental results and the free movement is on the whole 1 to 2 seconds earlier than the instant of divergence corresponding to the random excitation results. It is thus established that the initial energy supplied by the sinusoidal pulse contributes only weakly to the prediction capacity of model 8ACP estimated in the previous paragraph. The chosen accelerations are thus relevant in studying the capacity of the model to predict the behavior of a block subjected to a 1D seismic excitation.

Summary The comparison of these three case studies enables us to conclude that under random excitation, despite acceleration measurement uncertainties,

the numerical 8ACP model provides an estimation of the movement of block 1 which is more accurate than that provided by an identical specimen (blocks 2 and 3, identical within manufacturing tolerances).

Statistical suitability

To test statistically the suitability of the models, we consider the 100-samples corresponding respectively to the experimental movements of block 1 and block 2, to the responses of model 8ACP with the block 1 parameters (defects: see Table 4.1; initial conditions: see Eq. (4.5)), and to the responses of model 4SCP with the same initial conditions as those applied to model 8ACP. For each case, the 100-samples considered are $100 \neq$ and $100 \approx$.

Since some excitation realizations led to the numerical or experimental blocks' overturning, the first post-processing step was to identify these overturning events. We recall that the comparison indicators are conditional on the fact that the trajectories did not cause the blocks to overturn. Thus, the overturning instants and test numbers are reported in Figures 4.14 and 4.18. Note that there were no numerical or experimental overturns for series $100 \approx$. Shown in the same Figures are (i) the mean, (ii) the standard deviation and (iii) the deciles (from the procedure indicated in section 4.3) corresponding to the following values: (a) rotational velocity about the main axis, (b) rotational velocity about the transverse axis and (c) energy (calculated according to the procedure explained in section 4.3). In addition, the Figures show the variation over time in the proportion of blocks in movement (as presented in section 4.3). Superimposed on the curves relating to sample $100 \neq$ are the traces of realizations which correspond to the same test $r = 100$. The results for the $100 \neq$ samples are shown in Figures 4.14, 4.15 and 4.16, and those for the $100 \approx$ series are shown in Figures 4.17, 4.18 and 4.19. We recall that the axes are indicated in Figure 4.2. The principal interpretations of these results are presented in the following paragraphs.

Differences between the experimental results of block 1 and block 2 For these two series of excitations, two major differences in experimental behavior can be noted between block 1 and block 2: block 2 has less out-of-plane movement than block 1, and takes longer to become motionless. In the graph of experimental block 2 in Figure 4.15, the first and last deciles appear during the first mi; the second and penultimate deciles appear during the second mi, and the other deciles barely appear. This indicates that block 2 exhibits out-of-plane behavior between the 1st and the 2nd impact in less than 20 % of the tests, and between the 2nd and the 3rd in less than 40 % of the tests. However, the 10 deciles appear from the first *main impact* (mi) for block 1, which means that the block had out-of-plane behavior from the first impact in at least 80 % of the tests. This observation holds for the standard deviation: the 3rd graph in Figure 4.15 shows that the rotational velocity in the transverse axis of block 2 has a lower standard deviation than the rotational velocity of block 1 over the first 7 seconds. These considerations remain valid for the 100 tests of the same theoretical acceleration (see Figure 4.18).

Block 2 also seems to be less stable. The average energy of the blocks in the $100 \neq$ series (see Figure 4.16) shows that blocks 1 and 2 receive on the whole the same amount of energy from the sinusoidal pulse. However, in the seconds following the pulse, the energy of block 2 wanes less quickly. As a corollary, this phenomenon is also present in the proportion of motionless blocks; it can be observed in Figure 4.14 that block 2 generally ceases moving later than block 1. This observation also applies to the deciles of the rotational velocity about the main axis (see Figure 4.14): the various bands converge towards zero earlier for block 1 than for block 2. In addition, it can be noted that block 2 overturned 4 times, whereas block 1 overturned only once, although this is not statistically significant. This result should be understood (from a statistical point of view) on average for various realizations of the process under consideration. It can indeed be noted that in the

case of the acceleration chosen for the ($100 \approx$) repeatability tests, block 2 generally became motionless sooner (see Figure 4.18).

Capacity of model 8ACP to represent the experimental movement of block 1
Variability in the results for series $100 \neq$ is regular over time. The mean, standard deviation and maximum values of the rotational velocity in the main movement axis of block 1 are correctly found by model 8ACP. The proportion of blocks becoming motionless over time is also quite well identified.

For the series $100 \approx$, the variability of movement in the main axis for block 1 can be broken down into three phases (see Figure 4.17):

- between 0 and 2 seconds, very low variability,
- from 2 to 9 seconds, moderate variability,
- from 9 seconds to the end, strong variability of the same order as that for the results of series $100 \neq$.

Each transition is signaled by a sudden increase in standard deviation or a marked divergence of the deciles. The existence of these three phases, the transition instants between these phases and the values of the mean and standard deviations in each of the phases are well identified by model 8ACP. These aspects are also clearly visible in terms of energy (see Figure 4.19). However, the proportion of blocks becoming motionless with time is not perfectly retrieved by the model (see Figure 4.18). Furthermore, it can be noted that the first transition, at $\tau = 2$ s, corresponds to a particular instant of divergence between the trajectories (see Figure 4.9a). In the third phase, the mean of the rotational velocities in the main axis is nil (see Figure 4.17), and the variability of these trajectories is quite similar to that of the trajectories of series $\neq$.

Concerning rotational velocity in the transverse axis, the model largely underestimates variability in the first seconds. The authors attribute this mainly to the initial condition on ψ described in equation 4.5. This equation is not very realistic, since experimentally the blocks are placed manually on the shaking table. Thus, if experimentally the mean crv measured about the transverse axis is nil for the duration of the test, it requires 3 s for series $100 \approx$ and 1 s for $100 \neq$ for the mean crv predicted by the model to become nil. We can consider that at the end of this time the average behavior of the transverse movement is no longer influenced by the initial state.

Differences between the predictions of models 4SCP and 8ACP As regards the one hundred theoretically different signals ($100 \neq$), the movement of the symmetrical block predicted by the model 4SCP is statistically different from that predicted by model 8ACP. First of all, this model predicts many more overturns (12 overturns, see Figure 4.14). In Figure 4.16, the energy of model 4SCP is overall greater than that of model 8ACP, throughout the duration of the test. Similarly, in Figure 4.14, the 4SCP blocks remain in motion longer than the 8ACP blocks.

Of course, the symmetrical model predicts no movement in the transverse axis, since the seismic excitation applied to the model of the block is 1D and perfectly aligned with the block's axis (see Figure 4.2).

With respect to the one hundred theoretically identical signals ($100 \approx$), the results of the two models are still statistically different. The symmetrical block continues to acquire more energy and rotational velocity in the main axis than the 8ACP block under a sinusoidal pulse, but they dissipate more quickly than those of the 8ACP block. This can also be observed for rotational velocity, energy and the proportion of motionless blocks. In particular, it can be seen in Figure 4.19 that for the interval 4 s to 5 s, the experimental variability of the movements of block 1 is low, whereas the energy of the blocks is particularly high (this is less the case for block 2). This particularity is correctly retrieved by model 8ACP, but not at all by the symmetrical model, which predicts that the block can already come to rest (see Figure 4.15).

4.7 Discussion regarding the effect of taking defects into account in overturning prediction

Summary of test interpretations

In this article, the behavior of two blocks has been described: block 1, whose out-of-plane behavior is very marked (despite 1D excitation or an in-plane release test), and block 2, whose out-of-plane behavior exists, but is more limited. The behavior of two numerical block models has also been described: that of model 8ACP, containing defects identified from release tests on block 1, and whose out-of-plane behavior is very similar to that of experimental block 1; and that of symmetrical model 4SCP, which has no out-of-plane behavior in the context of uni-directional excitation.

A. During the initial pulse, experimental blocks 1 and 2 receive the same amount of energy, and their velocity before the first impact is similar. This experimental energy level does not appear to depend on out-of-plane behavior. However, the flawless symmetrical model underestimate this energy level, whereas the asymmetrical model with defects is capable of retrieving the correct level (when the defects do not provoke instability at the initial instant). Not accounting for defects can thus lead to an underestimation of the initial energy level, and then to an underestimation of the number of overturn occurrences.

B. For the rest of the movement, in series 100 $\neq$, block 2 (which has less out-of-plane movement) comes to rest later than block 1. Similarly, the symmetrical block model (which obviously has less out-of-plane movement) comes to rest later than model 8ACP. The authors consider therefore that once the rocking movement is engaged, out-of-plane movement will tend to provoke a greater dissipation of energy (doubtless due to the multiple impacts which are generated), and thus contributes to faster immobilization in the case of unidirectional excitation. Not accounting for out-of-plane movement can thus lead to an underestimation of the number of overturn occurrences.

Test series 100 $\approx$ shows that the conclusion of the previous paragraph should be understood in a statistical sense; that is, when the block is subjected to several realizations of a random process. Indeed, in the case of the realization used for this series of tests, block 1 and model 8ACP, which are more prone to out-of-plane movement than block 2 and model 4SCP, came to rest later.

Paragraphs A and B above show that taking geometrical defects into account when movement is initiated leads to behavior which is more prone to overturning than an ideal model, whereas taking geometrical defects into account during the rest of the movement (for 1D low-level stationary excitation) leads to behavior which is less likely to cause overturning than an ideal model. Thus it is not intuitive to know beforehand whether considering geometrical defects enables the prediction of behavior which is more prone to overturning.

Purvance *et al.* [2] express the intuition that a block whose contact surface is imperfect, and which is therefore in contact with the base through numerous contact points, reacts in the same way as a more slender ideal block. Figure 4.11 presents the trajectory predicted by a symmetrical model without defects, whose base is reduced by $2 \times \delta^{\text{diag.}}$, subjected to the sinusoidal pulse. This model is denoted 4SCP* and the value of $\delta^{\text{diag.}}$ corresponds to that of block 1. The figure shows that such a model correctly retrieves the block 1 rotational velocity level at $\tau = 0,12$ s. With respect to considerations A and B, model 4SCP* could predict a number of overturn occurrences which provides an upper bound to that predicted by models 8ACP and 4SCP. This model would also have the advantage of only requiring a single deductible release test geometrical parameter.

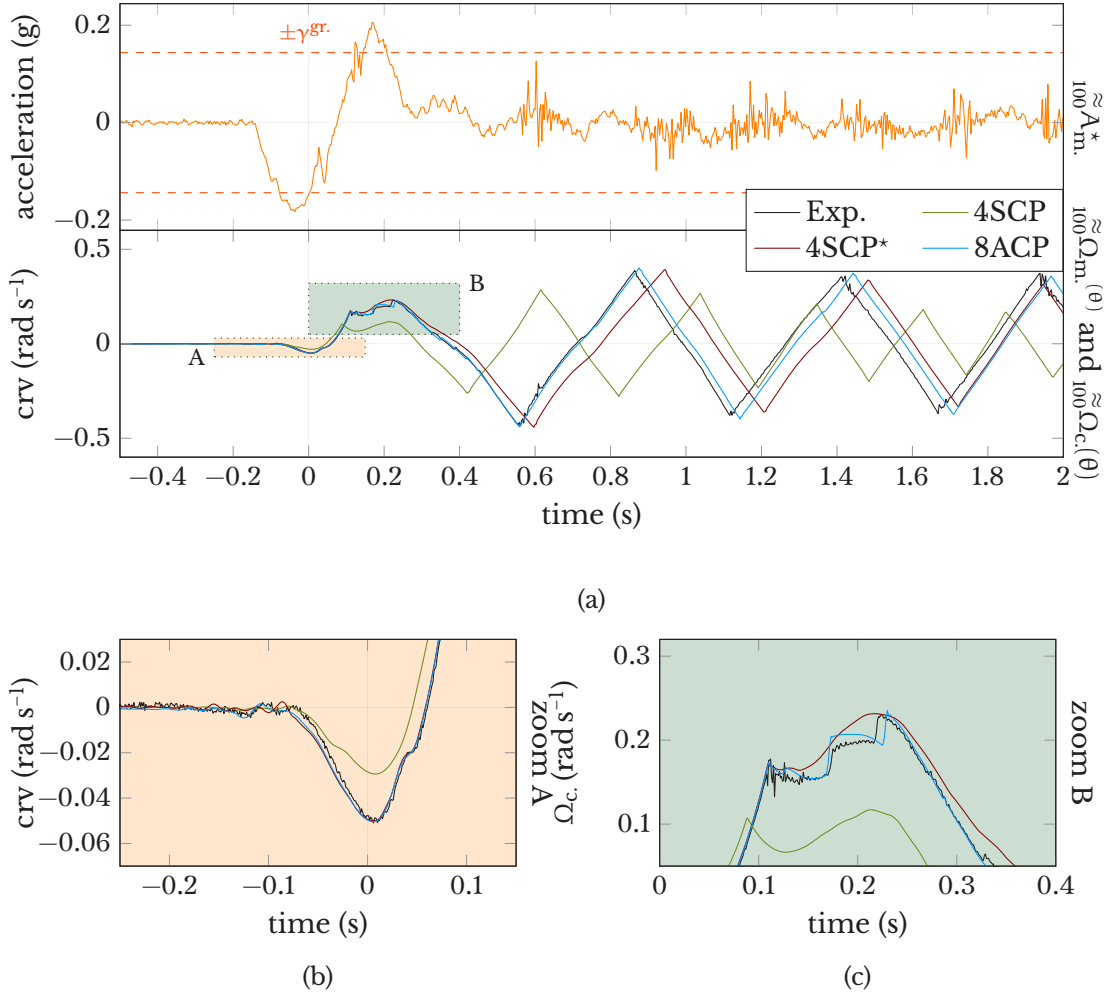


Figure 4.11 – Comparison between numerical and experimental results at movement initiation.

4.11a top: Acceleration measured during the test and theoretical overturning acceleration.

4.11a bottom: Rotational velocity of the different models and experimental reference.

4.11b and 4.11c: zooms of Figure 4.11a.

Validation of an upper-bound model 4SCP*

To validate the hypothesis of an upper bound model, 1000 numerical simulations were performed using 3 models:

- Model 8ACP with the parameters identified for block 1,
- Model 4SCP with ideal geometrical parameters,
- Model 4SCP*, corresponding to model 4SCP with a base width reduced by $2 \times \delta^{diag}$.

For this study, each excitation signal is a truncated realization of a zero-mean stationary Gaussian process defined by a Kanai-Tajimi power spectral density with a characteristic frequency of 2,95 Hz and a damping coefficient of 55 %, multiplied by the standardized envelope $\tau^2 \times e^{-1.26\tau}$. The numerical results are presented in the form of a scatter plot in Figures 4.12 and 4.13, respectively for 1D and 2D excitation.

In Figure 4.12, the ordinate shows the signal PGA, and the abscissa shows the maximum vertical displacement over time of the feet $\mathcal{H}$ for each of the three mod-

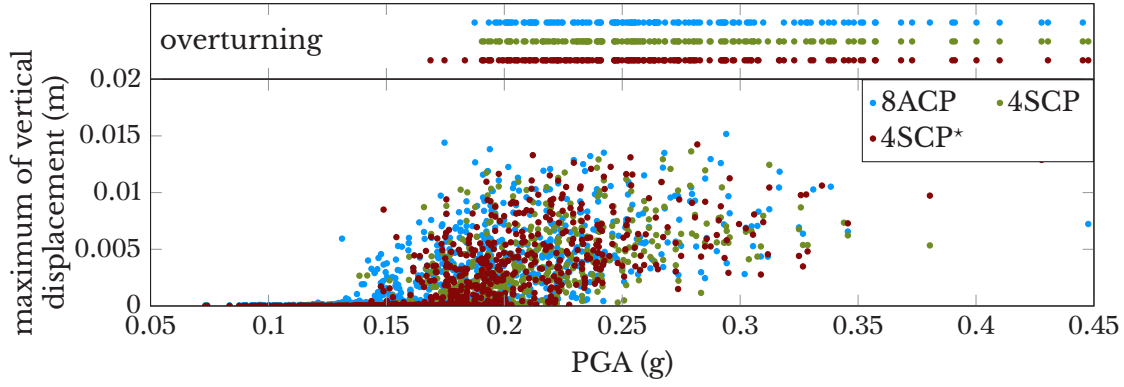


Figure 4.12 – Statistical numerical comparison of the three block models subjected to 1D excitation.

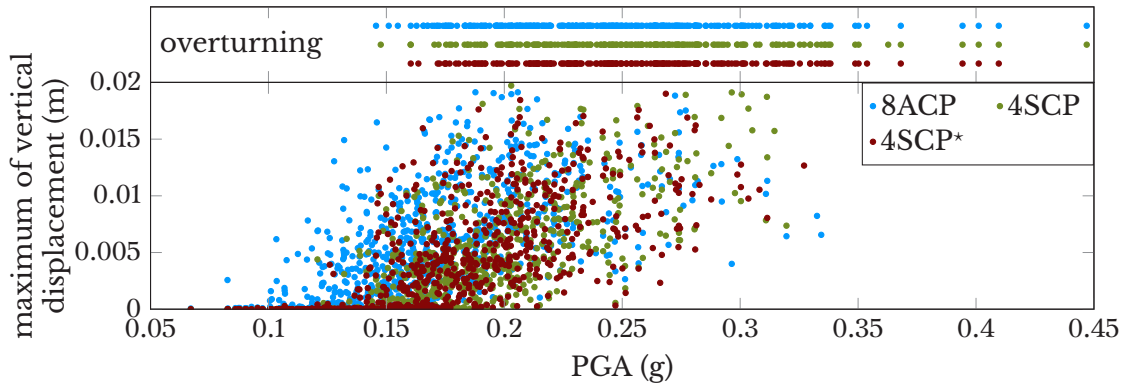


Figure 4.13 – Statistical numerical comparison of the three block models subjected to 2D excitation.

els:

$$\mathcal{H} = \max_{\tau \in [0, T]} \left(\max_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket} (H_{i_{\text{ext}}}(\tau)) \right) \quad (4.7)$$

where $H_{i_{\text{ext}}}(\tau)$ is the vertical displacement of foot i_{ext} at instant τ .

The results shown in Figure 4.12 show that overall, for this type of random 1D process, block overturns estimated by models 4SCP and 8ACP start to occur at a PGA of 0,18 g, whereas model 4SCP* is likely to overturn with a seismic PGA signal equal to 0,16 g. Under these hypotheses, the use of the 4SCP* symmetrical model with slenderness correction proposes an upper bound for overturning probability.

To determine whether this conclusion can be extended to a 2D seismic excitation, numerical calculations were performed with signals whose N-S and E-W projections are two independent realizations of the previous process. Figure 4.13 shows the results of 2000 calculations. It can immediately be seen that model 4SCP* predicts overturns for greater PGA than the two other models. This model therefore does not bound 2D seismic events. Furthermore, the conclusion is that advanced in the authors' previous article [51], that model 8ACP predicts more low-level overturns than model 4SCP.

4.8 Conclusion

The aim of this article has been to assess the capacity of a numerical model to represent, over time, the dynamic behavior of an imperfect rigid slender block subjected to seismic excitations. To this end, a series of experiments was performed, using a shaking table at CEA/Saclay, on 3 solid steel rigid blocks subjected

to 2 samples of 100 unidirectional seismic accelerations. First the blocks were subjected to 100 stationary zero-mean Gaussian signals, defined by low-level Kanaï-Tajimi power spectral density (standard deviation: $\sigma_{th.} = 0,02g$) preceded by an initial pulse to initiate movement. Then the blocks were subjected to 100 times the same theoretical acceleration corresponding to one of the realizations of the first series. These tests were analyzed and compared with two numerical models, one with symmetrical geometry (model 4SCP) and the other with asymmetrical geometry (model 8ACP), with the aim of reproducing out-of-plane behavior identified both during release tests and unidirectional seismic tests. To perform these analyses, various indicators were specifically developed and are presented in the article.

Despite experimental uncertainties related to the control of the shaking table and inevitable measurement errors, and to the initial conditions of the blocks, the experimental results highlight a good reproducibility of block movement initiation following the sinusoidal pulse to which they were subjected. Thus it was observed that movement initiation was characteristic of block defects, as was the out-of-plane movement exhibited during the release tests. Furthermore, under unidirectional acceleration, these tests showed that a block whose defect spatial distribution induces a generally limited out-of-plane movement (block 2 in our case, see Table 4.1) dissipates less energy during its movement than a block whose imperfections give rise to a major planarity defect (the case of block 1).

The numerical simulations corroborated these observations. In addition, they enabled a better comprehension of the dynamic behavior of the blocks, by showing:

- that on receiving a pulse, a perfect block acquires less energy than a block with a defect. In the present case, this was explained numerically by the fact that a block with a non-null defect $\delta^{diag.}$ behaves, when set into motion by an excitation at its base, like a flawless block of greater slenderness;
- that, counter-intuitively, model 8ACP enables the prediction of the movement of a real steel block for a greater length of time than an experiment performed on a supposedly identical block;
- that despite experimental uncertainties the statistical match between the 8ACP model's results and the experimental results was relatively good, both in terms of mean and standard deviation and in terms of the distribution of the crv and energy over time;
- that a flawless symmetrical model with a realistic slenderness correction, deduced from release tests, can provide an upper bound for overturn probability for 1D excitations in the block axis, but not for 2D excitations.

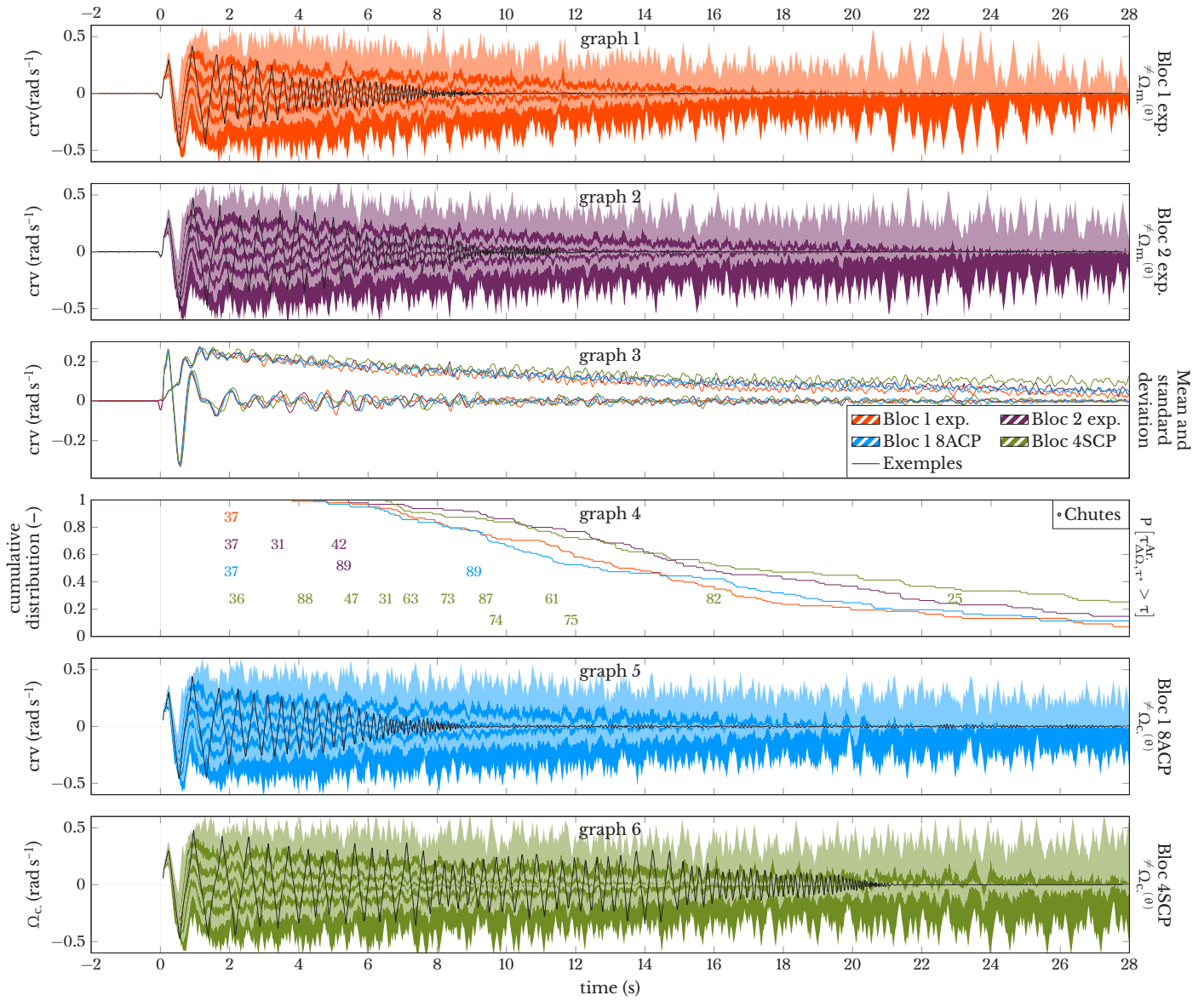


Figure 4.14 – Comparison of rotational velocities in the main axis for 100 tests with theoretically different accelerations (100 $\neq$):

- 4.14 graph 1: Deciles of measured experimental rotational velocity for block 1.
- 4.14 graph 2: Deciles of measured experimental rotational velocity for block 2.
- 4.14 graph 3: Means and standard deviations of the four 100-samples presented.
- 4.14 graph 4: Proportion of blocks in motion over time.
- 4.14 graph 5: Deciles of numerical rotational velocity calculated using model 8ACP.
- 4.14 graph 6: Deciles of numerical rotational velocity calculated using model 4SCP.

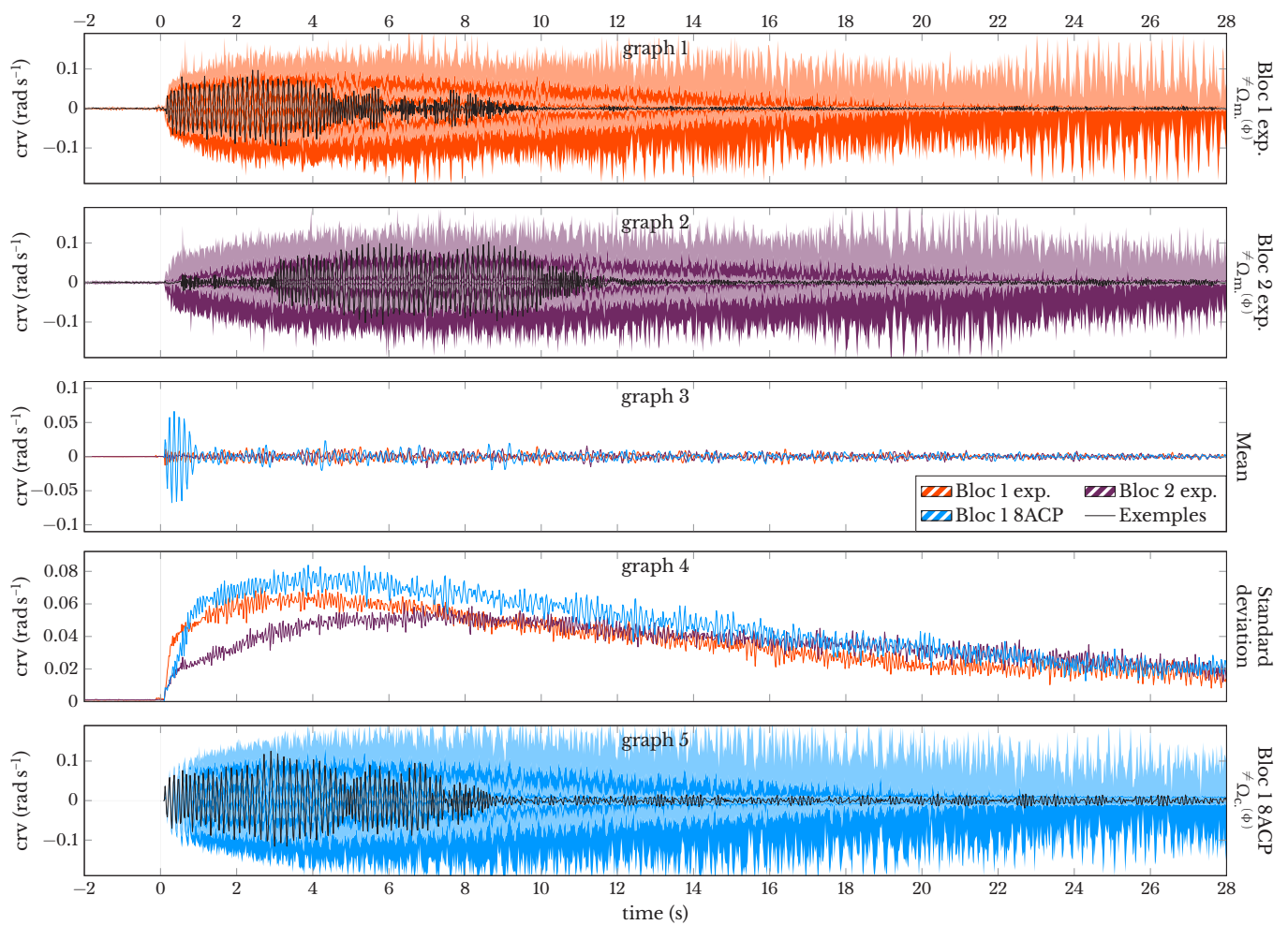


Figure 4.15 – Comparison of rotational velocities in the transverse axis for 100 tests with theoretically different accelerations (100 $\neq$):

4.15 graph 1: Deciles of measured experimental rotational velocity for block 1.

4.15 graph 2: Deciles of measured experimental rotational velocity for block 2.

4.15 graph 3: Means of the three 100-samples presented.

4.15 graph 4: Standard deviations of the three 100-samples presented.

4.15 graph 5: Deciles of numerical rotational velocity calculated using model 8ACP.

Note: it is not relevant to study the movement about the transverse axis for model 4SCP; in this ideal case there is strictly no movement.

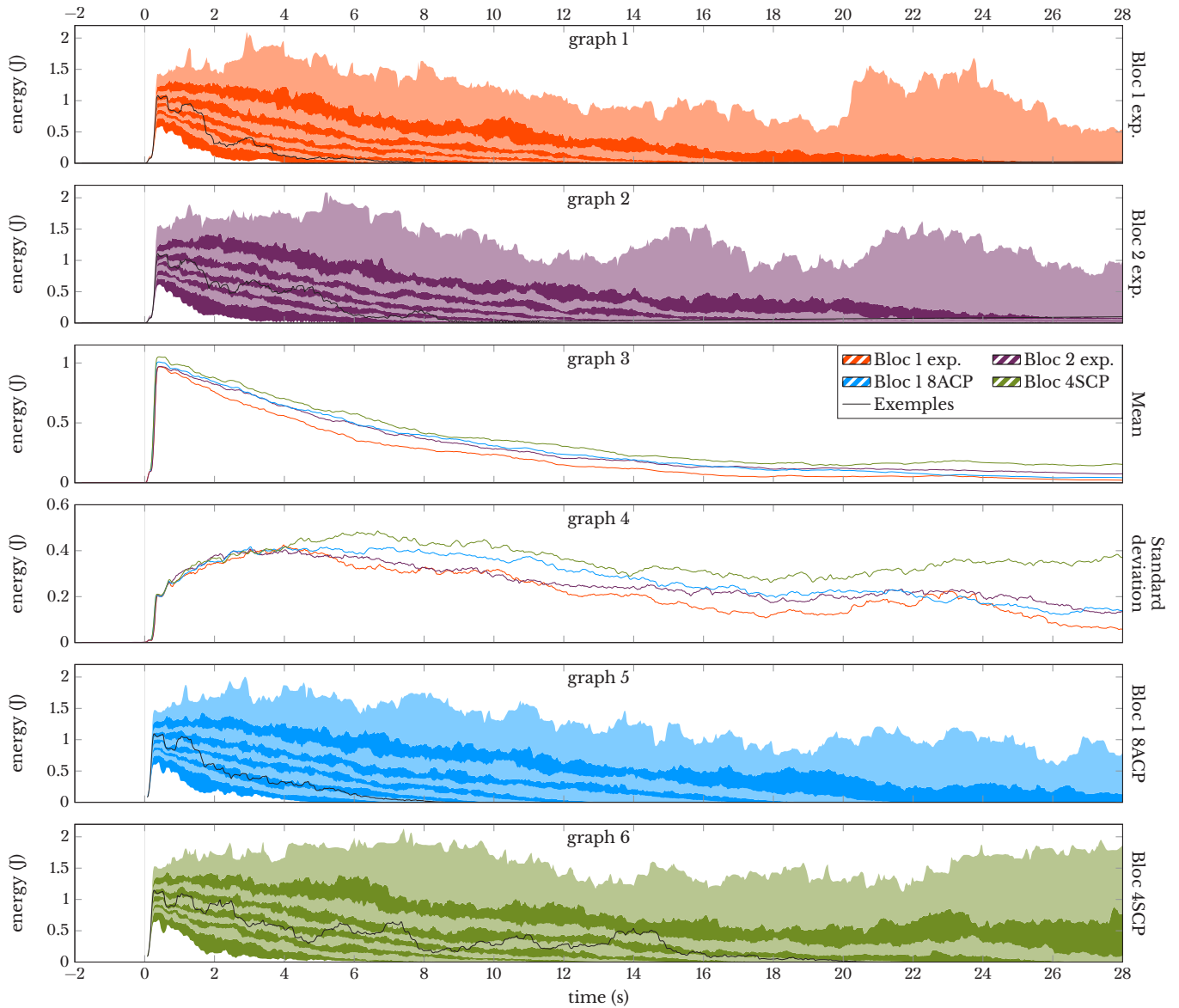


Figure 4.16 – Energy comparison for the 100 tests with theoretically different accelerations (100 $\neq$):

- 4.16 graph 1: Deciles of experimental energy for block 1.
- 4.16 graph 2: Deciles of experimental energy for block 2.
- 4.16 graph 3: Means of the four 100-samples presented.
- 4.16 graph 4: Standard deviations of the four 100-samples presented.
- 4.16 graph 5: Deciles of energy calculated using model 8ACP.
- 4.16 graph 6: Deciles of energy calculated using model 4SCP.

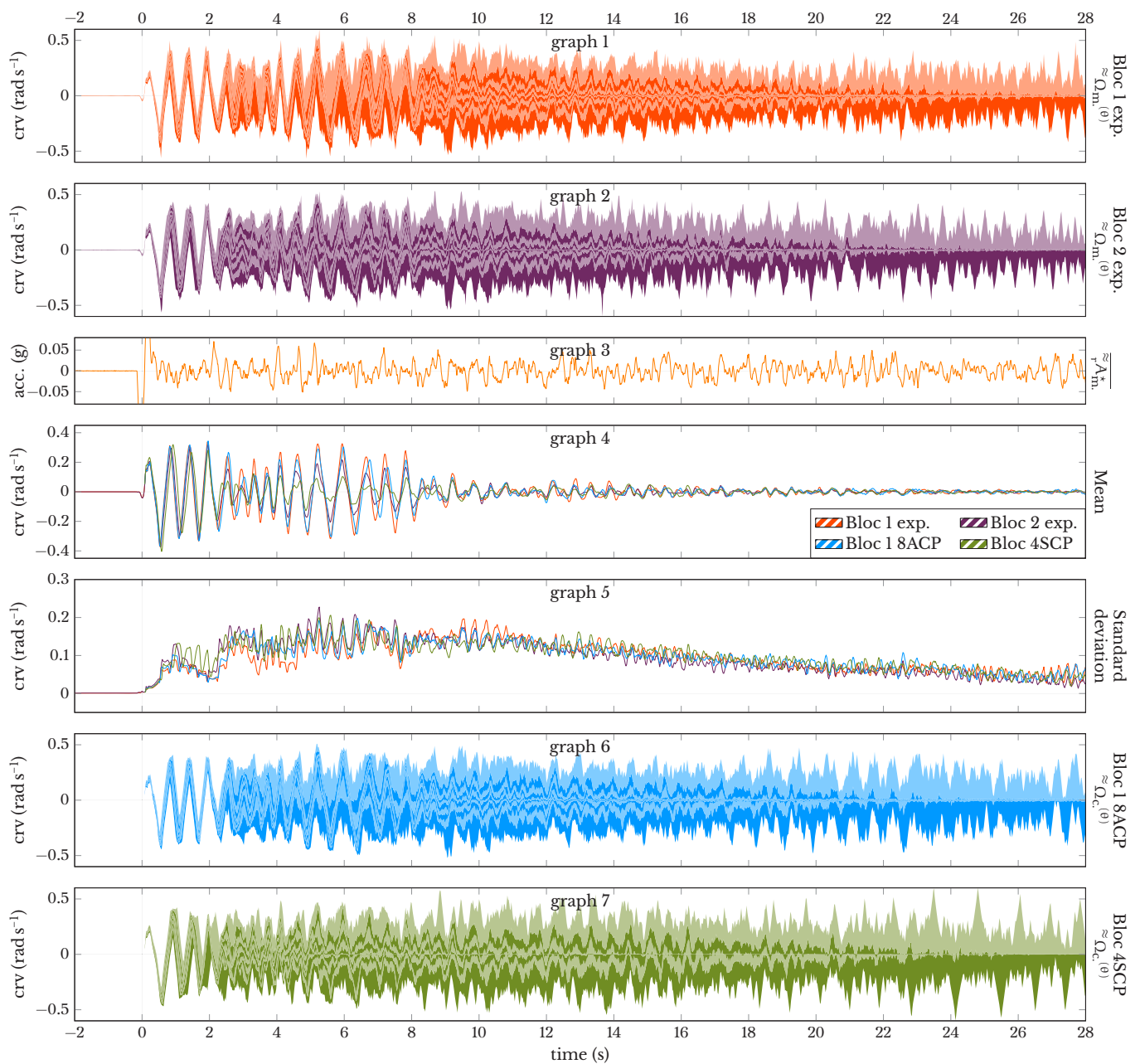


Figure 4.17 – Comparison of rotational velocities in the main axis for the 100 tests with theoretically identical accelerations ($100 \approx$):

- 4.17 graph 1: Deciles of experimental rotational velocity for block 1.
- 4.17 graph 2: Deciles of experimental rotational velocity for block 2.
- 4.17 graph 3: Mean of the 100 measured accelerations.
- 4.17 graph 4: Means of the four 100-samples presented.
- 4.17 graph 5: Standard deviations of the four 100-samples presented.
- 4.17 graph 6: Deciles of rotational velocity calculated using model 8ACP.
- 4.17 graph 7: Deciles of rotational velocity calculated using model 4SCP.

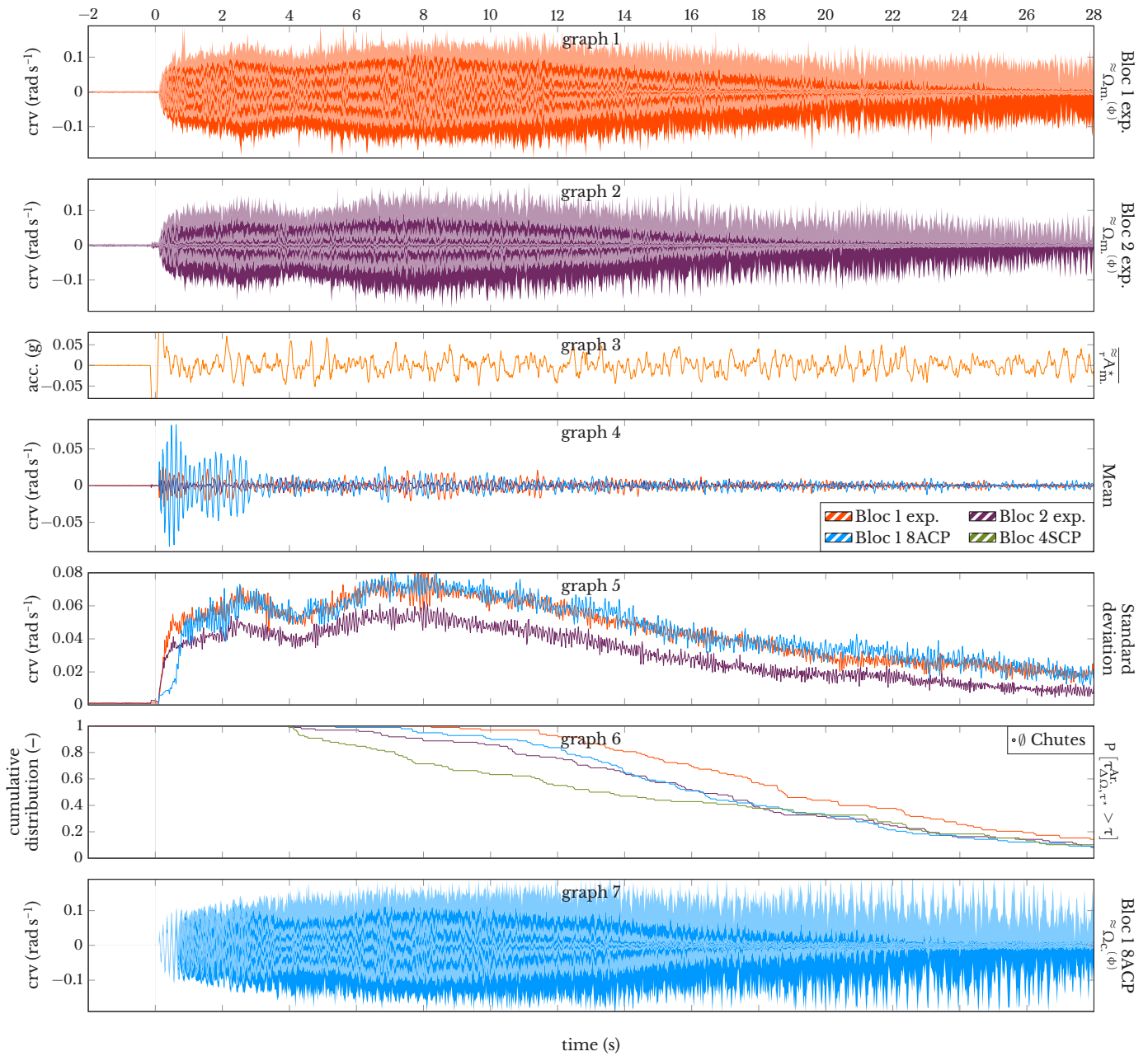


Figure 4.18 – Comparison of rotational velocities in the transverse axis for the 100 tests with theoretically identical accelerations ($100 \approx$):

- 4.18 graph 1: Deciles of experimental rotational velocity for block 1.
- 4.18 graph 2: Deciles of experimental rotational velocity for block 2.
- 4.18 graph 3: Mean of the 100 measured accelerations.
- 4.18 graph 4: Means of the four 100-samples presented.
- 4.18 graph 5: Standard deviations of the four 100-samples presented.
- 4.18 graph 6: Proportion of blocks in motion over time.
- 4.18 graph 7: Deciles of rotational velocity calculated using model 8ACP.

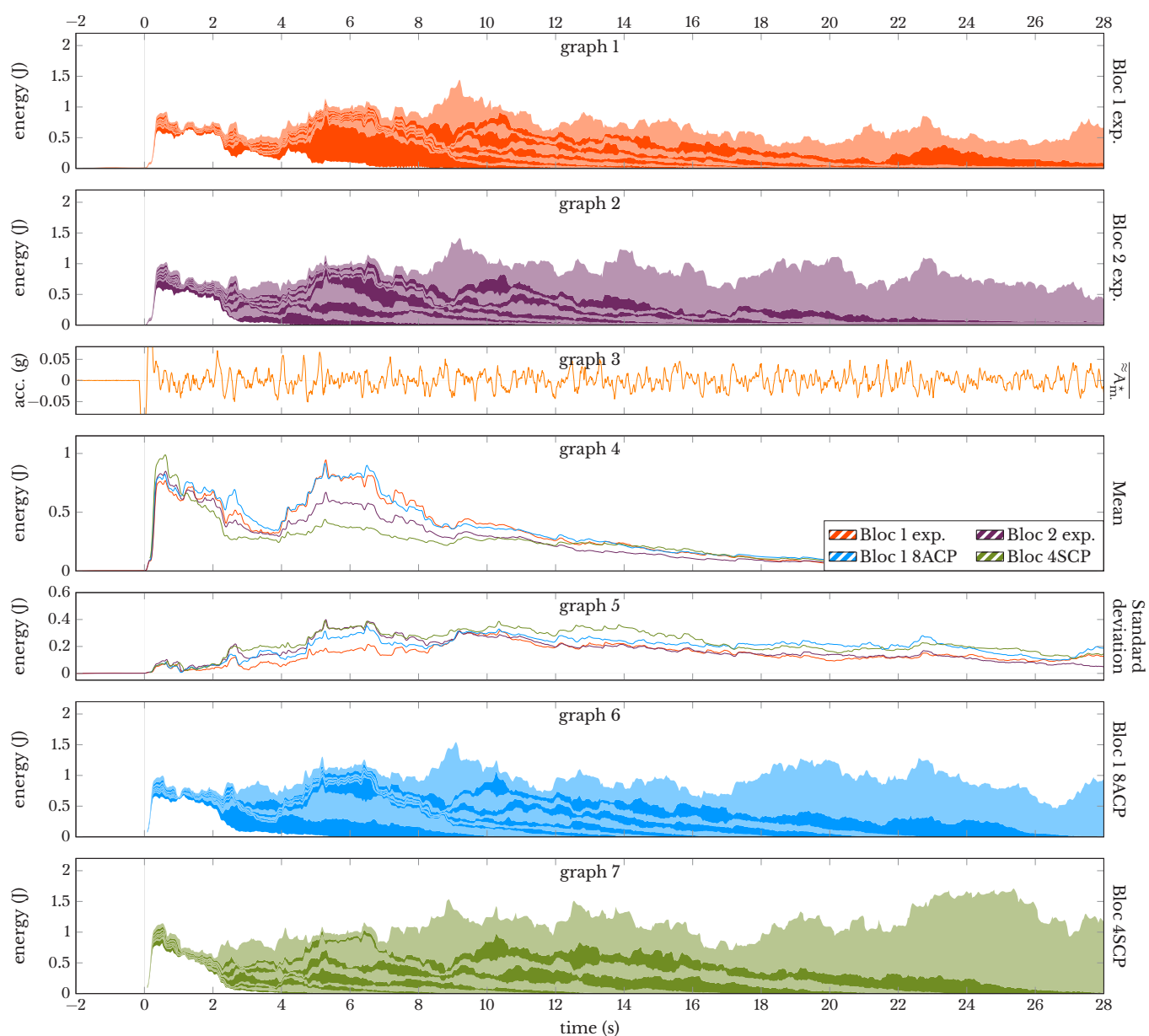


Figure 4.19 – Energy comparison for the 100 tests with theoretically identical accelerations (100 ≈):

- 4.19 graph 1: Deciles of experimental energy for block 1.
- 4.19 graph 2: Deciles of experimental energy for block 2.
- 4.19 graph 3: Mean of the 100 measured accelerations.
- 4.19 graph 4: Means of the four 100-samples presented.
- 4.19 graph 5: Standard deviations of the four 100-samples presented.
- 4.19 graph 6: Proportion of blocks in motion over time.
- 4.19 graph 7: Deciles of energy calculated using model 8ACP.



Discussion

Les résultats décrits dans les deux articles précédents méritent encore d'être discutés. Leur format obligeant à la concision, nous proposons dans ce chapitre deux commentaires supplémentaires.

Tout d'abord, il sera question de la propagation des erreurs expérimentales de la campagne de 2014. Nous tâcherons de référencer les différentes sources d'erreur ou d'approximation, et la façon dont elles se propagent.

Ensuite, nous reviendrons sur la reproductibilité des essais de basculement de blocs rigide et élancés sous un signal sismique déterminé.

5.1 Propagation des erreurs expérimentales

Durant la campagne expérimentale, plusieurs sources d'incertitudes viennent compliquer l'étape d'analyse, la figure (5.1) essaie de synthétiser les différentes sources d'incertitudes et les partis pris d'interprétation. On peut en particulier observer les limites suivantes :

- (1) Le contrôle de la table n'est pas parfait, le système d'asservissement n'est pas capable de suivre exactement un sinus (voir par ex. le signal $A_m^*(\tau)$ de la Figure 4.7a).
- (2) La table filtre naturellement les hautes fréquences. La fonction de transfert n'est pas uniforme.
- (3) Les mesures des capteurs d'accélération sont polluées par un bruit de mesure (voir l'écart-type à $\tau < 0$ sur la figure 3.8).
- (4) Lorsque les blocs impactent la table, une onde de choc se propage et est reçue par les capteurs d'accélération (voir les pics sur l'écart-type pour le cas 100 $\approx$ lorsque les pics sont synchrones : $0 < \tau < 2$).
- (5) Les blocs sont équipés de capteurs très précis dans les axes principal et transversal (le bruit de fond est négligeable, voir l'écart-type à $\tau < 0$ sur la figure 4.17) mais l'axe longitudinal est équipé de capteurs moins performants, cette donnée est plus difficilement exploitable.
- (6) Le bloc est usiné avec des tolérances usuelles. L'état de surface des appuis n'est pas idéal.
- (7) Le bloc n'est pas repositionné rigoureusement au même endroit sur la table (± 1 cm). L'état de surface de cette dernière n'est ni idéal, ni identique pour chaque essai.
- (8) Le bloc est repositionné à la main entre chaque essai. Un défaut d'alignement de $\pm 2^\circ$ est vraisemblable.
- (9) Le choix des paramètres du modèle repose sur une procédure d'optimisation dont la vitesse de convergence est inconnue et dont l'unicité de la solution

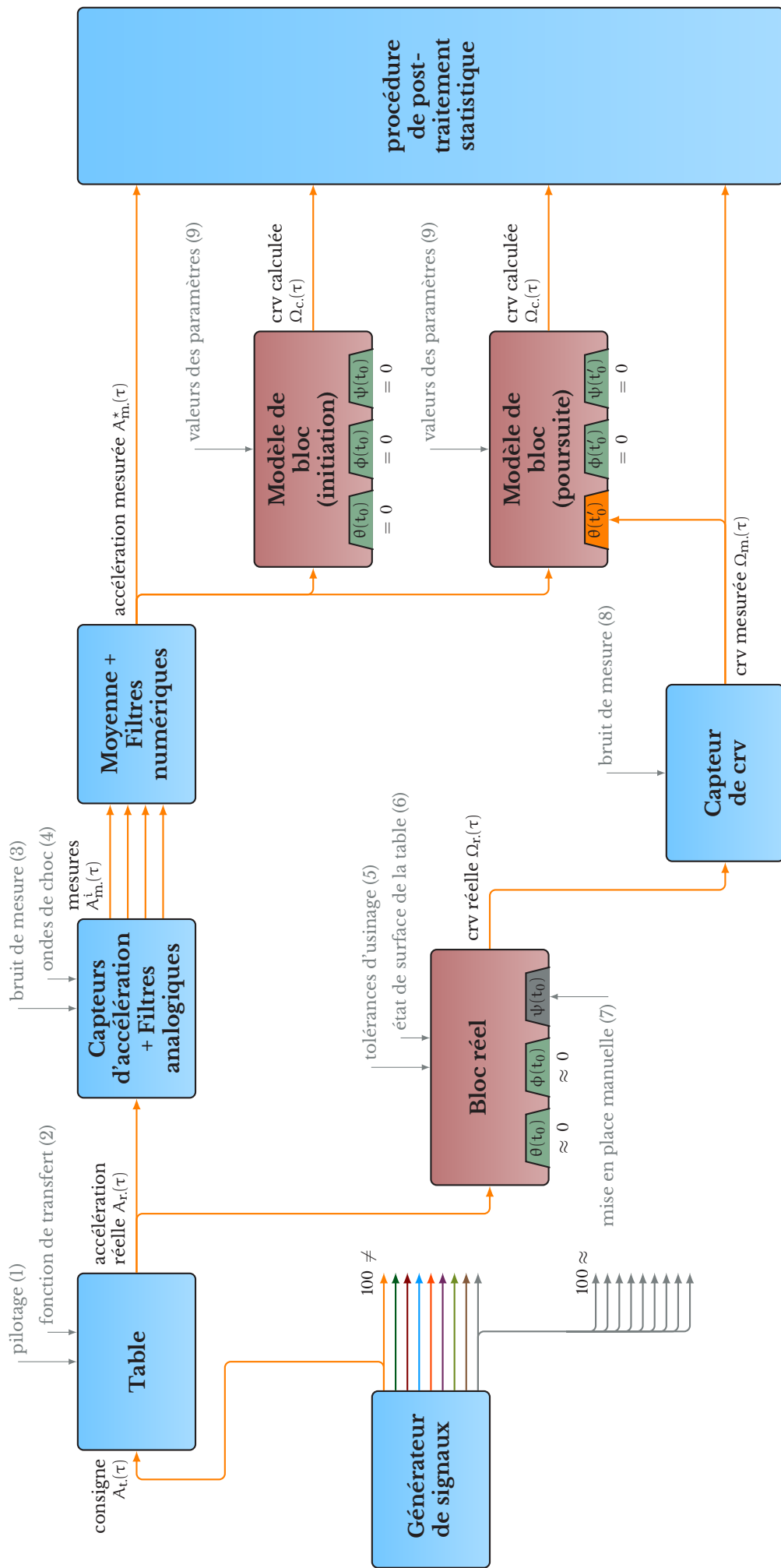


Figure 5.1 – Propagation de l'information dans la campagne GlisBasc 2

n'est pas assurée. La précision sur ces paramètres peut encore être améliorée en augmentant le nombre d'itérations de la procédure d'optimisation.

Cent consignes d'accélération A_t ont été générées selon la même procédure et avec le même niveau. Le contrôleur de la table vibrante et l'asservissement du dispositif altèrent l'accélération réellement exercée sur le bloc A_r . En particulier, le délai d'ouverture des servo-vannes perturbe les maxima d'accélération (voir par ex. le signal $A_m^*(\tau)$ de la Figure 4.7a) (1) et l'inertie de la table filtre les hautes fréquences (2). Ce signal ressenti par le bloc n'est pas le même que celui mesuré par les capteurs, en effet, les mesures sont polluées par des bruits de mesures (voir l'écart-type à $\tau < 0$ sur la figure 3.8) (3) et par les ondes résultants des impacts des blocs sur le support (voir les pics sur l'écart-type pour le cas 100 $\approx$ lorsque les pics sont synchrones : $0 < \tau < 2$) (4). Pour compenser ce problème, 4 capteurs d'accélération ont été disposés de chaque côté de la table vibrante. Les différentes mesures A_m^i sont moyennées puis filtrées, ce qui donne un signal A_m^* plus propre.

Le bloc expérimental ressent l'accélération A_r . Son mouvement Ω_r n'est pas exactement celui d'un bloc prismatique rigide parfait pour au moins deux raisons : d'une part, la géométrie du bloc est connue dans la limite des tolérances d'usinage (5) et d'autre part parce que ni la planéité de la table ni son état de surface ne sont pas connus avec une grande précision (6). Par ailleurs, on note que le bloc est remis en position entre chaque essai à la main : on peut supposer (à l'imprécision sur la géométrie près) que les angles θ et ϕ du bloc en position initiale sont très proches de 0 mais l'incertitude l'angle ψ pourrait vraisemblablement atteindre $\pm 2^\circ$ (7). Le mouvement mesuré Ω_m est lui aussi pollué par un bruit, assez faible pour les capteurs autour des axes principal et transverse (voir l'écart-type à $\tau < 0$ sur la figure 4.17) (8).

L'accélération A_m^* pilote le mouvement des modèles numériques de blocs Ω_c . Deux types de simulation ont été effectuées : i) pour étudier l'initiation du mouvement face au pic initial, la position initiale du bloc est supposée parfaite ($\theta = \phi = \psi = 0$) ; et ii) pour étudier la poursuite du mouvement, l'angle θ est choisi en calculant l'intégrale du mouvement dans l'axe principal :

$$\theta(\tau'_0) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\tau'_0} \Omega_{m.}^{axe\ ppal} d\tau \quad (5.1)$$

Ceci fait l'hypothèse que l'angle θ n'est fonction que du mouvement dans l'axe principal, et donc que le mouvement transverse est négligeable jusqu'à τ'_0 (ce qui semble confirmé pour le bloc 1 par la figure 4.15). On rappelle aussi que les paramètres du modèle 8ACP sont choisis par une procédure d'optimisation (9).

Enfin, la moyenne filtrée des accélérations mesurées A_m^* , la vitesse de rotation mesurée Ω_m et la vitesse de rotation calculée Ω_c sont post-traitées statistiquement pour en déduire des moyennes, des écart-types et des déciles, au cours du temps. Un échantillon de 100 essais donne une bonne estimation des premiers moments statistiques mais peut être insuffisant pour une analyse plus approfondie.

5.2 Répétabilité observée sur la série d'essais

La revue bibliographique proposée à la section 4.1 met en évidence un problème de répétabilité des expériences sur des blocs rigides.

Plusieurs travaux ont montré qu'en fonction du type de sollicitation et de la nature des corps en contact, il est possible d'exhiber un certain niveau de répétabilité dans le comportement. Par exemple, Wong et Tso [49] ont étudié en détail le comportement d'une structure rigide élancée sous excitation sinusoïdale unidirectionnelle. Plusieurs régimes permanents ont été expérimentalement observés et confrontés avec plus ou moins de succès à des résultats de simulations numériques. En considérant des blocs massifs à base rectangulaire, composés de différents matériaux, ElGawady *et al.* [50] ont montré que les essais de basculement libre (ou de lâcher), réalisés sur des supports de natures différentes, peuvent présenter une certaine répétabilité dans l'axe principal du mouvement, uniquement

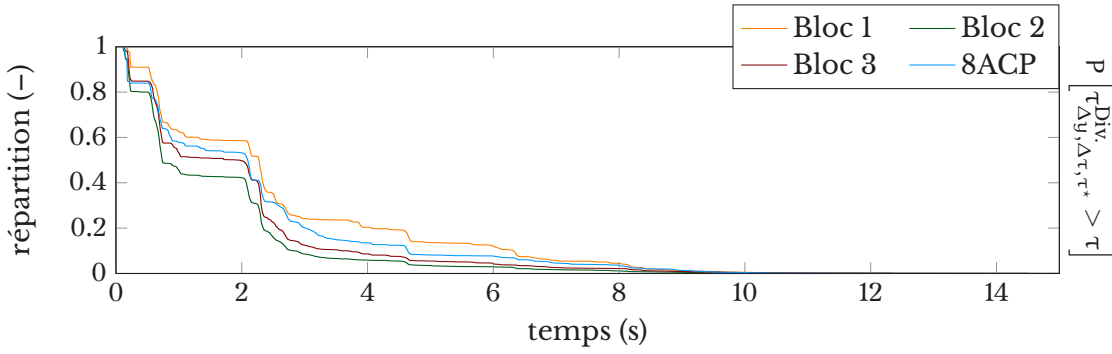


Figure 5.2 – Quantification de la répétabilité des expériences de la série 100 $\approx$

lorsque la fondation est rigide. À l'inverse, Mouzakis *et al.* [52] ont montré que le mouvement hors-plan d'une structure cylindrique à base circulaire soumise à des essais sismiques 1D est peu répétable. Peña *et al.* [6] ont obtenu une répétabilité du mouvement expérimental sur une période assez longue lors d'essais de basculement de blocs à base rectangulaire sous accélération harmonique, et une moins bonne répétabilité sous accélération aléatoire.

Nous nous proposons donc quantifier la répétabilité de notre campagne. Bien entendu, nous nous limiterons à la série de cent essais 100 $\approx$ pour laquelle les signaux de consigne sont identiques. On utilisera pour cela l'indicateur de temps avant divergence $\tau^{\text{Div.}}$ défini à la section 4.3. Pour chaque paire de résultats $\approx_n \Omega_m^{(\theta)}$ et $\approx_m \Omega_m^{(\theta)}$, avec $n \neq m$, on détermine :

$$\tau_{\Delta\Omega, \Delta\tau, \tau^*}^{\text{Div.}} \left(\approx_n \Omega_m^{(\theta)}, \approx_m \Omega_m^{(\theta)} \right)$$

où les valeurs de $\Delta\Omega$, $\Delta\tau$ et τ^* sont celles du chapitre 4.

Quatre 100-échantillons de résultats sont considérés : les résultats expérimentaux concernant chacun des blocs, et les résultats numériques du modèle 8ACP alimenté avec les paramètres du bloc 1. Puisqu'il y a cent signaux pour chaque échantillon, il y a 4950 paires de signaux. La figure 5.2 présente la fonction de répartition du 4950-échantillon de l'instant de divergence.

On observe assez peu de variations entre les résultats des quatre échantillons considérés. Cette figure permet d'établir que, pour le signal choisi, notre protocole expérimental permet d'obtenir une très bonne répétabilité durant 0,8 s, une répétabilité moyenne durant 2,1 s, et une répétabilité partielle jusqu'à 6 à 8 s. Cette durée est du même ordre de grandeur que celle observables sur les figures de l'article de Peña *et al.* [6].

Ces courbes présentent toutes deux décroissance «à-pic» aux deux même instants. Ceci semble témoigner de la grande influence du signal sur la durée durant laquelle l'expérience est considérée comme répétable.

Si l'on compare cette courbe de répétabilité à la figure 4.9a, on note que la durée pendant laquelle la campagne est répétable est plus courte que la durée pendant laquelle le modèle permet une bonne comparaison avec l'expérience.

troisième partie

ANALYSE FIABILISTE

Cette partie vise à proposer une formalisation du problème de bloc rigide basculant sous séisme d'un point de vue fiabiliste.

Dans le premier chapitre, nous rappelons et expliquons les principales considérations qui permettent de poser un problème fiabiliste. Il s'agit d'une part d'une fonction d'état limite déterministe exprimant la conjonction d'un modèle mécanique, d'un critère de d'évaluation et d'un seuil de défaillance ; et d'autre part d'un modèle de variable aléatoire multidimensionnelle. À partir de ces deux éléments, on peut exprimer analytiquement la probabilité de défaillance.

Dans le second chapitre, nous présentons tout d'abord la formalisation analytique du problème de bloc rigide. Dans un second temps, nous tâchons de calculer la probabilité de défaillance à l'aide de la méthode des *Subset Simulations*. Nous proposons de vérifier que cette méthode fonctionne pour un problème approché en comparant les résultats qu'elle fournit aux résultats obtenus avec une méthode de Monte-Carlo directe.



Position du problème

En cas d'incompréhension, le lecteur pourra utilement se référer à l'annexe définissant certaines notions fondamentales de la théorie des probabilités.

6.1 Les données du problème

Les données de base de tout problème fiabiliste sont un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un couple (Y, g) formé d'une variable aléatoire (éventuellement vectorielle, et de grande dimension) $Y = (Y_1, \dots, Y_p)^T$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et d'une fonction g appelée « fonction d'état limite ». Les variables aléatoires scalaires $Y_1, \dots, Y_p$ regroupées dans le vecteur aléatoire Y modélisent les paramètres incertains du modèle mécanique à étudier.

La variable aléatoire Y est définie par sa loi P_Y sur $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_p)$, laquelle est supposée admettre une densité p_Y par rapport à la mesure de Lebesgue dy sur $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_p)$ (*i.e.* $P_Y(dy) = p_Y(y) dy$), où $\mathcal{B}_p$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}^p$.

La fonction d'état limite associée à chaque réalisation des variables aléatoires la balance entre une grandeur de charge, ou de sollicitation S et une grandeur de capacité, ou de résistance R par exemple :

$$g(y) = R(y) - S(y) \quad \text{ou} \quad g(y) = \frac{S(y)}{R(y)}, \quad R(y) > 0 \quad (6.1)$$

Dans tout ce qui suit, on se place dans le premier cas $g(y) = R(y) - S(y)$; la fonction $g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ classe les événements, regroupant d'un côté ceux qui conduisent à un état « fiable » ($g(y) > 0$) dans « l'événement de sécurité » E_s et ceux qui conduisent à un état « défaillant » ($g(y) \leq 0$) dans « l'événement de défaillance » E_f . E_s et E_f sont donc définis par :

$$E_s = \{\omega \in \Omega, g(Y(\omega)) > 0\} \quad \text{et} \quad E_f = \{\omega \in \Omega, g(Y(\omega)) \leq 0\} \quad (6.2)$$

et vérifient :

$$E_s \cup E_f = \Omega \quad \text{et} \quad E_s \cap E_f = \emptyset \quad (6.3)$$

À ces deux éléments sont associés les « domaine de sécurité » D_s et « domaine de défaillance » D_f du modèle, tels que :

$$D_s = \{y \in \mathbb{R}^p, g(y) > 0\} \quad \text{et} \quad D_f = \{y \in \mathbb{R}^p, g(y) \leq 0\} \quad (6.4)$$

et vérifient :

$$D_s \cup D_f = \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad D_s \cap D_f = \emptyset \quad (6.5)$$

Pour des raisons évidentes, Y et g sont contraints de respecter :

$$\text{Supp}(p_Y) \subset \text{Def}(g) \quad (6.6)$$

où $\text{Supp}(\bullet)$ et $\text{Def}(\bullet)$ désignent respectivement le support et le domaine de définition.

6.2 L'objectif fondamental

Résoudre un problème de fiabilité, c'est, une fois définis les événements de sécurité E_s et de défaillance E_f (c'est-à-dire une fois le modèle mécanique posé et un critère de défaillance choisi) et une fois connue la densité p_Y de Y (c'est-à-dire une fois les conditions aléatoires choisies), réaliser le calcul des probabilités $\mathbb{P}(E_s)$ et $\mathbb{P}(E_f)$, appelées respectivement « probabilité de sécurité » et « probabilité de défaillance » du système. Ces deux grandeurs sont données par :

$$\mathbb{P}(E_s) = \int_{Y \in D_s} p_Y(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(E_f) = \int_{Y \in D_f} p_Y(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (6.7)$$

et vérifient :

$$\mathbb{P}(E_s) = 1 - \mathbb{P}(E_f) \quad (6.8)$$

En raison de (6.8), on ne s'intéresse généralement qu'à $\mathbb{P}(E_f)$, que l'on notera P_f , et que l'on peut réécrire sous la forme :

$$P_f = \mathbb{P}(E_f) = \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p} \mathbb{I}_{D_f}(\mathbf{y}) p_Y(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (6.9)$$

où $\mathbb{I}_{D_f}(\bullet)$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble D_f .

En dehors de quelques cas de référence, on ne sait pas calculer de façon exacte l'intégrale (6.9). On opère alors numériquement, le plus souvent (dès que $p > 3$) en ayant recours à une méthode de Monte-Carlo. Il existe de très efficaces méthodes de ce type dans la littérature ([53][54]).

Rappelons un cas particulier célèbre où le calcul exact est possible : celui où, d'une part, la variable aléatoire vectorielle Y est gaussienne, de moyenne $\mathbf{m}_Y$ et de matrice de covariance $\mathbf{C}_Y$ et, d'autre part, la fonction d'état limite g est affine, de la forme :

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p, \quad g(\mathbf{y}) = a_0 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{m}_Y \rangle; \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^p, \quad a_0 \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas, D_f est un demi-espace et un simple calcul donne :

$$P_f = \Phi \left[-\frac{a_0 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{m}_Y \rangle}{\langle \mathbf{C}_Y \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{1/2}} \right] \quad (6.10)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi gaussienne standard sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$.

6.3 Formulation standard du problème

Dans la démarche fiabiliste classique, on reformule souvent le problème avec des variables gaussiennes standards. Pour cela, on s'appuie sur un résultat bien connu du calcul des probabilités [55], [56] qui précise que, sous certaines conditions que nous supposerons satisfaites ici, on peut toujours construire une transformation régulière $\mathcal{T}$ telle que, si $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)$ est une variable aléatoire gaussienne standard à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, alors on a les égalités en loi :

$$\mathbf{Y} = \mathcal{T}(\mathbf{X}) \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{Y}) \quad (6.11)$$

Supposons cette transformation construite ; les événements de sécurité et de défaillance peuvent s'écrire en fonction de $\mathbf{X}$:

$$E_s = \{\omega \in \Omega, \Gamma(\mathbf{X}(\omega)) > 0\} \quad \text{et} \quad E_f = \{\omega \in \Omega, \Gamma(\mathbf{X}(\omega)) \leq 0\} \quad (6.12)$$

où $\Gamma: \mathbf{x} \xrightarrow{\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}} \Gamma(\mathbf{x}) = (g \circ \mathcal{T})(\mathbf{x})$ est la transformée par $\mathcal{T}$ de la fonction d'état limite g . Les images correspondantes des domaines de sécurité et de défaillance s'écrivent quant à elles :

$$\Delta_s = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, \Gamma(\mathbf{x}) > 0\} \quad (6.13a)$$

$$\Delta_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, \Gamma(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (6.13b)$$

On procède maintenant au changement de variable $\mathbf{y} = \mathcal{T}(\mathbf{x})$ (licite, car $\mathcal{T}$ est régulière) dans l'intégrale (6.9). La probabilité de défaillance prend la forme :

$$P_f = \mathbb{P}(E_f) = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p} \mathbb{I}_{\Delta_f}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (6.14)$$

dans laquelle la densité de probabilité $p_{\mathbf{x}}$ de la variable aléatoire gaussienne standard multidimensionnelle $\mathbf{X}$ s'écrit, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$:

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2}} \quad (6.15a)$$

avec

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \quad (6.15b)$$

L'expression (6.14) représente la formulation standard du problème fiabiliste. Le chapitre 7 détaille la façon dont nous avons construit la formulation standard du problème de renversement de bloc rigide – c'est-à-dire nos choix de variables aléatoires $\mathbf{Y}$ (et par conséquent la transformation $\mathcal{T}$) et notre choix de fonction d'état limite (et donc le domaine Δ_f).

Déterminer la probabilité de défaillance, c'est trouver la valeur de cette intégrale. Ceci est souvent fait en utilisant la méthode de Monte-Carlo standard, parfois appelée « méthode directe ». Il s'agit dans cette méthode de réécrire la valeur de l'intégrale comme l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathbf{Z} = \mathbb{I}_{\Delta_f}(\mathbf{X})$.

$$P_f = \mathbb{E}[\mathbf{Z}] \quad , \quad \mathbf{Z} = \mathbb{I}_{\Delta_f}(\mathbf{X}) \quad (6.16)$$

Il est alors possible, en échantillonnant $\mathbf{Z}$ et en utilisant l'estimateur empirique standard de l'espérance mathématique, d'obtenir un estimateur convergeant, non biaisé et efficace de P_f .

Il est possible dans certains cas d'améliorer la vitesse de convergence du calcul de l'espérance en cherchant une autre variable réelle du second ordre $\mathbf{Z}'$ telle que :

$$\mathbb{E}[\mathbf{Z}'] = \mathbb{E}[\mathbf{Z}] = P_f \quad (6.17a)$$

$$\sigma^2[\mathbf{Z}'] < \sigma^2[\mathbf{Z}] \quad (6.17b)$$

et dépendant d'une variable aléatoire de loi autre que $\mathbf{Y}$, mais liée à $\mathbf{Y}$; où σ^2 est la variance.

On peut notamment citer les cinq méthodes suivantes répondant à ce double objectif ([53], [54]) : la méthode basée sur l'emploi d'une variable de contrôle, la méthode basée sur une technique de conditionnement, la méthode basée sur l'emploi de variables antithétiques, la méthode basée sur une technique de stratification et la technique basée sur une technique d'échantillonnage préférentiel. À celles-ci, on peut ajouter deux méthodes particulièrement adaptées à la recherche de probabilité de défaillance très petites : la méthode basée sur une technique de simulation directionnelle et la méthode basée sur la technique des *Subset Simulation* [57]. Nous décrirons et utiliserons la dernière dans le chapitre 7.

6.4 Méthodes d'approximation analytico-numériques

Marge, facteur de marge et indices associés

Marge de sécurité

Soient S une grandeur de sollicitation (effort appliqué à la structure, charge de fonctionnement, quantité de perturbation...) et R une grandeur de résistance (contrainte limite élastique, contrainte limite de rupture, déformation maximale

admissible...) qui peuvent être vues comme deux variables aléatoires. La marge de sécurité (ou performance), notée U , définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeur dans $\mathbb{R}$ s'écrit ici :

$$U = R - S \quad (6.18)$$

et on a :

$$E_s = \{\omega \in \Omega, U(\omega) > 0\} \quad \text{et} \quad E_f = \{\omega \in \Omega, U(\omega) \leq 0\} \quad (6.19)$$

Certains indices fiabilistes simples peuvent être définis à partir des variables R et S et U . On peut par exemple citer le facteur de sécurité moyen [58] (ou central) défini par :

$$\frac{\mathbb{E}[R]}{\mathbb{E}[S]} \quad (6.20)$$

On peut également citer un indice plus élaboré, l'indice de Cornell [59, 58] basé l'hypothèse d'indépendance entre R et S (l'indépendance entre la sollicitation et la résistance est souvent une hypothèse pertinente) défini comme le rapport entre la moyenne et l'écart-type de la marge de sécurité :

$$\beta_C = \frac{\mathbb{E}[U]}{\sigma[U]} = \frac{\mathbb{E}[R] - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\sigma[R]^2 + \sigma[S]^2}} \quad (6.21a)$$

Si R et S sont en outre supposées gaussiennes, alors cet indice est lié à la probabilité de défaillance par la relation :

$$P_f = \Phi[-\beta_C] \quad (6.21b)$$

Si R et S ne sont pas gaussienne, cette relation n'est bien entendu plus valable, mais est quelquefois utilisée comme approximation « grossière » de P_f dans certaines situations.

Facteur de marge

Soient S une grandeur de sollicitation (effort appliqué à la structure, charge de fonctionnement, quantité de perturbation...) et R une grandeur de résistance (contrainte limite élastique, contrainte limite de rupture, déformation maximale admissible...), toutes deux considérées comme des variables aléatoires indépendantes. À ces deux variables aléatoires est associée la marge de sécurité (ou performance) suivante :

$$u = \ln \frac{R}{S} \quad (6.22)$$

qui est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, l'indice fiabiliste est l'indice de Rosenblueth et Esteva [60] défini par :

$$\beta_{R.E.} = \frac{\ln \mathbb{E}[R] - \ln \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\left(\frac{\sigma[R]}{\mathbb{E}[R]}\right)^2 + \left(\frac{\sigma[S]}{\mathbb{E}[S]}\right)^2}} \quad (6.23)$$

Indice de Hasofer–Lind

Dans le cadre d'un problème de fiabilité ramené en variables aléatoires normales standards, l'indice de Hasofer et Lind [61, 56] se définit comme la distance entre l'origine $0_{\mathbb{R}^p}$ de $\mathbb{R}^p$ et le domaine de défaillance Δ_f :

$$\beta_{H.L.} = d(0_{\mathbb{R}^p}, \Delta_f) \quad (6.24a)$$

Concrètement, il s'agit de trouver l'élément $\mathbf{x}^*$ de $\mathbb{R}^p$ appelé « point de fonctionnement » ou *design point* (point de conception) qui vérifie :

$$\beta_{H.L.} = \|\mathbf{x}^*\| = \min_{\mathbf{x} \in \Delta_f} (\|\mathbf{x}\|) \quad (6.24b)$$

La détermination de ce point peut rarement être effectuée de façon analytique. Dans les applications pratiques, on est conduit à l'emploi d'algorithmes d'optimisation. Plusieurs choix sont possibles pour ce type de problème : des algorithmes basés sur des méthodes primales (gradient projeté, gradient réduit...) ou duales (lagrangienne classique, lagrangienne généralisée...) ou encore des algorithmes moins élaborés mathématiquement mais qui donnent la plupart du temps de bons résultats, comme l'algorithme de Rackwitz ou certaines métaheuristiques.

Lorsque $\mathbf{Y}$ est gaussienne, de moyenne $\mathbf{m}_Y \in \mathbb{R}^p$ et de matrice de covariance $\mathbf{C}_Y \in \mathbb{R}^{p \times p}$, et lorsque Γ est affine, de la forme : $g(\mathbf{y}) = a_0 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle$; alors Δ_f est un demi-espace bordé par l'hyperplan $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p, a_0 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = 0\}$. Un calcul simple montre alors que la probabilité de défaillance et l'indice $\beta_{H.L.}$ sont liés par la relation :

$$P_f = \Phi \left[-\frac{a_0 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{m}_Y \rangle}{\langle \mathbf{C}_Y \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{1/2}} \right] = \Phi[-\beta_{H.L.}] \quad (6.25)$$

Lorsque Γ n'est pas affine, la relation (6.25) ne tient plus. Dans ce cas, par référence à cette formule, et dans la mesure où l'on peut déterminer P_f d'une autre façon (par exemple par une méthode de Monte-Carlo), on définit un indice de fiabilité conventionnel β_c tel que :

$$P_f = \Phi[-\beta_c] \quad (6.26)$$

On retrouve naturellement $\beta_c = \beta_{H.L.}$ lorsque Γ est affine. Dans tous les cas, l'intérêt de ces indices réside dans le fait qu'ils gardent une valeur intelligible même pour des niveaux de probabilité de défaillance extrêmement bas.

Approximation par les méthodes FORM et SORM

Approximation au premier ordre : FORM

La méthode FORM, pour *First Order Reliability Method* [61, 56, 62] simplifie le domaine D_f en un demi-espace Δ_f^L défini ainsi. Soit l'application Γ^L l'application affine tangente à Γ au point de fonctionnement. On peut donc l'écrire :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, \quad \Gamma^L(\mathbf{x}) = \Gamma(\mathbf{x}^*) + \langle \nabla \Gamma(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \quad (6.27)$$

où $\nabla \Gamma(\mathbf{x}^*)$ est le gradient de Γ au point $\mathbf{x}^*$. On suppose bien entendu que le point de fonctionnement $\mathbf{x}^*$ est ici unique et que $\nabla \Gamma$ existe en ce point. Le demi-espace de remplacement Δ_f^L est alors défini par :

$$\Delta_f^L = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p, \Gamma^L(\mathbf{x}) \leq 0 \right\} \quad (6.28)$$

Par suite, en utilisant Δ_f^L à la place de D_f dans l'équation (6.14), une approximation de la probabilité de défaillance est donnée par :

$$P_f^L = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p} \mathbb{I}_{\Delta_f^L}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (6.29)$$

Un simple calcul montre que cette approximation a pour expression :

$$P_f^L = \Phi \left[-\frac{\Gamma(\mathbf{x}^*) - \langle \nabla \Gamma(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* \rangle}{\|\nabla \Gamma(\mathbf{x}^*)\|} \right] \quad (6.30)$$

soit :

$$P_f^L = \Phi[-\beta_{H.L.}] \quad (6.31)$$

avec ici $\Gamma(\mathbf{x}^*) = 0$.

Approximation au deuxième ordre : SORM

Raffinement de la méthode précédente, cette méthode [63, 56] consiste à remplacer la fonction d'état limite Γ par son application quadratique tangente Γ^Q en $\mathbf{x}^*$, telle que :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, \quad \Gamma^Q(\mathbf{x}) = \Gamma(\mathbf{x}^*) + \langle \nabla \Gamma(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 \Gamma(\mathbf{x}^*) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \quad (6.32)$$

où $\Gamma(\mathbf{x}^*) = 0$ et $\nabla^2 \Gamma(\mathbf{x}^*)$ est la hessienne de Γ au point $\mathbf{x}^*$ (on suppose bien entendu ici que cette hessienne existe), puis à remplacer le domaine de défaillance Δ_f par le domaine :

$$\Delta_f^Q = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p, \Gamma^Q(\mathbf{x}) \leq 0 \right\} \quad (6.33)$$

La probabilité de défaillance P_f est alors approximée par la probabilité :

$$P_f^Q = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p} \mathbb{I}_{\Delta_f^Q}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (6.34)$$

Il est rare que l'on puisse analytiquement calculer cette probabilité, mais on trouve dans la littérature plusieurs approximations [56]. On peut citer ici par exemple une approximation asymptotique proposée par Breitung [64] :

$$P_f^Q \sim \Phi[-\beta_{H.L.}] \prod_{i=1}^{p-1} \left(1 - \beta_{H.L.} \mathbf{C}_i^{(\Gamma)} \right)^{-1/2} \quad (\beta_{H.L.} \rightarrow +\infty) \quad (6.35)$$

où les $\mathbf{C}_i^{(\Gamma)}$, $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ sont les courbures principales de Γ au point de fonctionnement, chacune supposée vérifier $|\beta_{H.L.} \mathbf{C}_i^{(\Gamma)}| < 1$. On peut également citer une amélioration de cette approximation proposée par Hohenbichler [65] :

$$P_f^Q \sim \Phi[-\beta_{H.L.}] \prod_{i=1}^{p-1} \left(1 - \frac{\varphi[\beta_{H.L.}]}{\Phi[-\beta_{H.L.}]} \mathbf{C}_i^{(\Gamma)} \right)^{-1/2} \quad (\beta_{H.L.} \rightarrow +\infty) \quad (6.36)$$

où $\varphi[\bullet]$ est la densité de la loi gaussienne standard sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$.



Formulation du problème de fiabilité

Pour réaliser l'étude fiabiliste, il convient dans un premier temps de choisir les paramètres incertains du modèle mécano-numérique mis en œuvre pour décrire le comportement dynamique du bloc, puis, dans un second temps, une fois ce choix arrêté, de se donner une modélisation probabiliste de type vecteur aléatoire de cette famille de paramètres.

Conformément aux notations introduites dans le paragraphe 6.1, nous désignons par p le nombre de paramètres incertains, par $Y_1, \dots, Y_p$ leurs modèles probabilistes et par $\mathbf{Y}$ le vecteur aléatoire p -dimensionnel regroupant ces p variables aléatoires scalaires : $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)^T$.

Dans notre problème, les paramètres aléatoires Y_k sont de deux types : les paramètres externes liés à l'excitation sismique, et plus précisément à la représentation choisie du modèle stochastique de cette excitation (7.1), et les paramètres internes liés au modèle mécanique lui-même (*i.e.* à l'exclusion de l'excitation sismique). Les premiers, supposés en nombre p_{ext} , sont notés $Y_1^{\text{ext}}, \dots, Y_{p_{\text{ext}}}^{\text{ext}}$ et regroupés dans le vecteur aléatoire p_{ext} -dimensionnel $\mathbf{Y}_{\text{ext}} = (Y_1^{\text{ext}}, \dots, Y_{p_{\text{ext}}}^{\text{ext}})^T$; les seconds, supposés en nombre p_{int} , sont notés $Y_1^{\text{int}}, \dots, Y_{p_{\text{int}}}^{\text{int}}$ et regroupés dans le vecteur aléatoire p_{int} -dimensionnel $\mathbf{Y}_{\text{int}} = (Y_1^{\text{int}}, \dots, Y_{p_{\text{int}}}^{\text{int}})^T$. Par suite, le vecteur aléatoire $\mathbf{Y}$ s'écrit :

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_{\text{ext}}^T, \mathbf{Y}_{\text{int}}^T)^T \quad (7.1)$$

où les dimensions de $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}_{\text{int}}$ et $\mathbf{Y}_{\text{ext}}$ vérifient : $p = p_{\text{ext}} + p_{\text{int}}$.

7.1 Choix et caractérisation probabiliste des paramètres aléatoires externes

Les composantes de l'accélération sismique selon chaque axe (Nord-Sud, Est-Ouest et vertical) sont supposées être des processus aléatoires indépendants du même type. Les accélérations dans les deux directions horizontales ont les mêmes caractéristiques. L'accélération verticale est pondérée par un coefficient 2/3 comme il est d'usage en parasismique [66].

Modèle retenu de l'excitation sismique

Le modèle probabiliste retenu pour l'accélération sismique unidirectionnelle est classique, il s'agit d'un processus gaussien stationnaire centré pondéré par une enveloppe déterministe. Le modèle s'écrit ainsi :

$$Z(\tau) = L(\tau) W(\tau), \quad \forall \tau \in \bar{T} \quad (7.2)$$

où $\bar{T} = [0, T]$, $0 < T < +\infty$, T désignant la durée totale du séisme, $L: \tau \xrightarrow{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+} L(\tau)$ est une fonction déterministe continue, presque partout $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de support $\bar{T}$ (c'est-à-dire telle que $L(\tau) > 0$, $\forall \tau \in \bar{T}$ et $L(\tau) = 0$, $\forall \tau \in \mathbb{R} \setminus \bar{T}$), et $W = (W(\tau))$, $\tau \in \mathbb{R}$ est un

processus à valeurs dans $\mathbb{R}$, indexé sur $\mathbb{R}$ (i.e. $\tau \in \mathbb{R}$), défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, du second ordre, gaussien, stationnaire, centré, à trajectoires continues, continu en moyenne d'ordre deux. Un tel processus est donc complètement défini par sa fonction d'autocorrélation :

$$\mathcal{R}_W: u \xrightarrow{\mathbb{R}} \mathcal{R}_W(u) = \mathbb{E}[W(\tau + u) W(\tau)]$$

ou, ce qui est équivalent dans le cas stationnaire centré, par sa densité spectrale de puissance (DSP) :

$$\mathcal{S}_W: \lambda \xrightarrow{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+} \mathcal{S}_W(\lambda)$$

ces deux fonctions étant liées par les relations de Kintchine :

$$\mathcal{S}_W(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{u \in \mathbb{R}} \mathcal{R}_W(u) e^{-i\lambda u} du \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_W(u) = \int_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathcal{S}_W(\lambda) e^{i\lambda u} d\lambda \quad (7.3)$$

Dans cette étude, la donnée de base concernant ce processus est sa DSP bilatérale $\mathcal{S}_W$ supposée être à support compact $\bar{\Lambda} = [-\Lambda_c, \Lambda_c]$, $0 \leq \Lambda_c < +\infty$, Λ_c étant la pulsation de coupure. Cette DSP sera donc telle que $\mathcal{S}_W(\lambda) > 0$, $\forall \lambda \in \bar{\Lambda}$ et $\mathcal{S}_W(\lambda) = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \bar{\Lambda}$. Dans ces conditions, la seconde relation de (7.3) peut se réécrire :

$$\mathcal{R}_W(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda \in \bar{\Lambda}} \mathcal{S}_W(\lambda) e^{i\lambda u} d\lambda \quad (7.4)$$

Notons que toutes les grandeurs aléatoires considérées dans ce chapitre (variables aléatoires, processus...) sont supposées définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Il résulte de tout ce qui précède que $Z = (Z(\tau), \tau \in \bar{T})$ est un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexé sur $\bar{T}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, du second ordre, gaussien, centré, non stationnaire, à trajectoires continues, continu en moyenne d'ordre deux, de fonction d'autocorrélation

$$\mathcal{R}_Z: (\tau_1, \tau_2) \xrightarrow{\bar{T} \times \bar{T} \rightarrow \mathbb{R}} \mathcal{R}_Z(\tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}[Z(\tau_1) Z(\tau_2)]$$

telle que :

$$\mathcal{R}_Z(\tau_1, \tau_2) = L(\tau_1) L(\tau_2) \mathcal{R}_W(\tau_1 - \tau_2), \quad \forall (\tau_1, \tau_2) \in \bar{T} \times \bar{T} \quad (7.5)$$

Choix d'une représentation pour le processus W

Pour le processus gaussien stationnaire centré $W = (W(\tau), \tau \in \mathbb{R})$, nous adopterons sa représentation spectrale. La construction d'une telle représentation est détaillée par exemple dans [67][47]. Nous nous contenterons ici d'en rappeler l'expression qui s'écrit, $\forall \tau \in \mathbb{R}$:

$$W(\tau) = \sum_{k=1}^N \int_{\lambda \in \bar{M}_k} \cos(\lambda \tau) U_W(d\lambda) + \sin(\lambda \tau) V_W(d\lambda) \quad (7.6)$$

où :

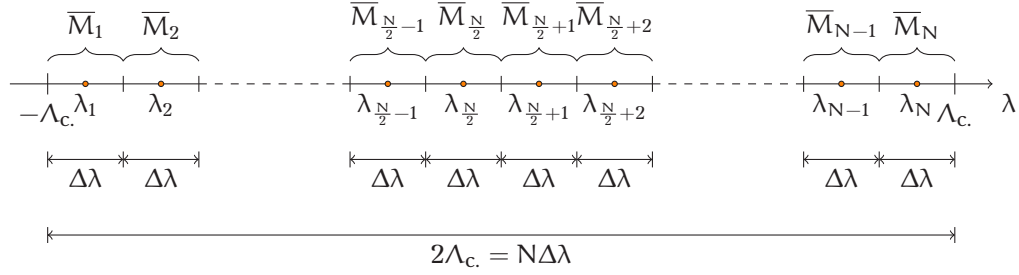
1. les $(\bar{M}_k)_{k \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ sont les mailles de la N -partition régulière de $\bar{\Lambda} = [-\Lambda_c, \Lambda_c]$ choisie pour construire la représentation de W , ces mailles étant telles que :

$$\bar{M}_k = \left[\lambda_k - \frac{\Delta\lambda}{2}, \lambda_k + \frac{\Delta\lambda}{2} \right], \quad \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (7.7)$$

où $\Delta\lambda$ est le pas constant de la partition et λ_k est le centre de la maille $\bar{M}_k$:

$$\lambda_k = -\Lambda_c + \left(k - \frac{1}{2} \right) \Delta\lambda = (2k - 1 - N) \frac{\Delta\lambda}{2} \quad (7.8)$$

$$\Delta\lambda = \frac{2\Lambda_c}{N} \quad (7.9)$$

Figure 7.1 – Illustration du partitionnement de $\bar{\Lambda}$

2. l'ordre de la partition, l'entier N , est choisi pair, comme on le comprend sur la figure 7.1.
3. U_W et V_W sont les mesures stochastiques orthogonales centrées associées à W , dont les propriétés peuvent être trouvées dans [67][47].

On notera au passage que la représentation (7.6) de W est exacte et ne dépend pas de N (*i.e.* est indépendante de la partition choisie de $\bar{\Lambda}$).

Construction d'une N -approximation de la représentation spectrale de W

En supposant N grand et en exploitant les propriétés des mesures stochastiques U_W et V_W , on obtient la N -approximation suivante de la représentation (7.6) :

$$W_N(\tau) = \sqrt{\Delta\lambda} \sum_{k=1}^N \sqrt{S_W(\lambda_k)} (Y_{1,k} \cos(\lambda_k \tau) + Y_{2,k} \sin(\lambda_k \tau)) \quad (7.10)$$

dans laquelle $(Y_{1,k}, Y_{2,k})_{k \in [1, N]}$ sont N couples indépendants de variables aléatoires gaussiennes standards indépendantes (c'est-à-dire que les $2N$ variables aléatoires $Y_{1,1}, \dots, Y_{1,N}, Y_{2,1}, \dots, Y_{2,N}$ sont des copies indépendantes d'une variable aléatoire gaussienne standard scalaire).

Le processus $W_N = (W_N(\tau), \tau \in \mathbb{R})$ ainsi construit possède les propriétés suivantes :

1. Il est gaussien, stationnaire, centré, continu en moyenne d'ordre deux.
2. Sa fonction d'autocorrelation $\mathcal{R}_{W_N} : u \xrightarrow{\mathbb{R}} \mathbb{R} \mathcal{R}_{W_N}(u) = \mathbb{E}[W_N(\tau + u)W_N(\tau)]$ s'écrit :

$$\mathcal{R}_{W_N}(u) = \Delta\lambda \sum_{k=1}^N S_W(\lambda_k) \cos(\lambda_k u), \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (7.11)$$

3. Sa « densité » spectrale $\mathcal{S}_{W_N} : \lambda \xrightarrow{\bar{\Lambda}} \mathbb{R}_+ \mathcal{S}_{W_N}(\lambda)$ est le peigne de Dirac défini par :

$$\mathcal{S}_{W_N}(\lambda) = \frac{\Delta\lambda}{4\pi} \sum_{k=1}^N S_W(\lambda_k) \left(\delta_{-\frac{\lambda_k}{2\pi}} \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right) + \delta_{\frac{\lambda_k}{2\pi}} \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right) \right), \quad \forall \lambda \in \bar{\Lambda} \quad (7.12)$$

où $\delta_z()$ est la distribution de Dirac au point z .

4. Il est presque sûrement à trajectoires continues.

Représentation approchée correspondante de Z et choix de ses paramètres

Soit $Z_N = (Z_N(\tau), \tau \in \bar{T})$ le processus obtenu en remplaçant W par W_N dans (7.2). D'après (7.10), il s'écrit :

$$Z_N(\tau) = \sqrt{\Delta\lambda} L(\tau) \sum_{k=1}^N \sqrt{S_W(\lambda_k)} (Y_{1,k} \cos(\lambda_k \tau) + Y_{2,k} \sin(\lambda_k \tau)) \quad (7.13)$$

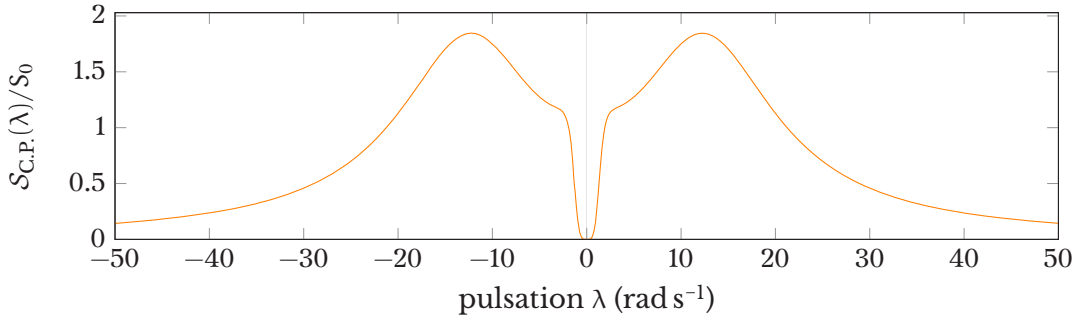


Figure 7.2 – Graphe de la DSP de Clough et Penzien [68] pour un sol dur normalisée par S_0

Ce processus est la représentation approchée de Z associée à la représentation approchée W_N de W . C'est cette représentation approchée de Z que nous adopterons dans les applications pratiques comme modèle probabiliste de l'accélération sismique. Comme nous pouvons l'observer, elle dépend de trois paramètres : la densité spectrale de puissance S_W du processus gaussien stationnaire centré sous-jacent W , l'ordre N de la N -partition régulière du support $\bar{\Lambda}$ de S_W , et la fonction de pondération (ou enveloppe) L .

Choix de la densité spectrale de puissance S_W

Pour cette densité spectrale de puissance, nous utiliserons le modèle suivant :

$$S_W = S_{C.P.} \mathbb{I}_{\bar{\Lambda}}(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (7.14)$$

où $S_{C.P.}$ est la densité spectrale de puissance de Clough et Penzien [68] donnée par :

$$S_{C.P.}(\lambda) = S_0 \frac{\lambda_g^4 + 4\lambda_g^2 \xi_g^2 \lambda^2}{(\lambda_g^2 - \lambda^2)^2 + 4\xi_g^2 \lambda_g^2 \lambda^2} \times \frac{\lambda^4}{(\lambda_f^2 - \lambda^2)^2 + 4\xi_f^2 \lambda_f^2 \lambda^2}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (7.15)$$

Cette densité spectrale de puissance présente un avantage essentiel sur celle de Kanaï-Tajimi [45] : la densité spectrale de puissance du déplacement sismique qui lui est associée est définie et localement intégrable à l'origine.

Le tableau [7.1] donne des valeurs typiques des paramètres modaux λ_g , ξ_g , λ_f et ξ_f pour trois types de sol. Dans la suite, les applications numériques sont faites en utilisant le sol « dur ».

Table 7.1 – Paramètres des filtres de sol pour le spectre de Clough et Penzien

sol	λ_g (rad s ⁻¹)	ξ_g (-)	λ_f (rad s ⁻¹)	ξ_f (-)
dur ¹	15,0	0,6	1,5	0,6
moyen	10,0	0,4	1,0	0,6
souple	5,0	0,2	0,5	0,6

Pour l'intensité S_0 du bruit blanc sous-jacent, plusieurs valeurs seront considérées.

Choix du support spectral $\bar{\Lambda}$

Le support spectral $\bar{\Lambda} = [-\Lambda_c, \Lambda_c]$ est choisi de telle sorte qu'il supporte la quasi-totalité de l'énergie spectrale du processus W .

1. (cf. Figure (7.2))

Pratiquement, cela revient à choisir pour Λ_c un arrondi au supérieur de la solution minimale de l'inéquation en Λ :

$$\frac{\int_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathcal{S}_{C.P.}(\lambda) d\lambda - \int_{\lambda \in [-\Lambda, \Lambda]} \mathcal{S}_{C.P.}(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathcal{S}_{C.P.}(\lambda) d\lambda} \leq \epsilon_1 \quad (7.16)$$

où ϵ_1 est un réel positif petit à choisir. Notons que, du fait de la parité de $\mathcal{S}_{C.P.}$, (7.16) peut se réécrire :

$$\frac{\int_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \mathcal{S}_{C.P.}(\lambda) d\lambda - \int_{\lambda \in [0, \Lambda]} \mathcal{S}_{C.P.}(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \mathcal{S}_{C.P.}(\lambda) d\lambda} \leq \epsilon_1 \quad (7.17)$$

Nous avons choisi de prendre $\epsilon_1 = 0,01$ et on trouve alors :

$$\Lambda_c = 650 \text{ rad s}^{-1} \quad (7.18)$$

Choix de l'ordre N

Le choix de l'ordre N est fondamental car il a une incidence directe sur la qualité de l'approximation W_N de W . Pour effectuer ce choix, procède comme suit.

La pulsation de coupure étant connue à ce stade, on calcule à l'aide d'une méthode numérique très précise l'intégrale :

$$\tilde{\sigma}^2 = \int_{\lambda \in [-\Lambda_c, \Lambda_c]} \mathcal{S}_{C.P.}(\lambda) d\lambda = 2 \int_{\lambda \in [0, \Lambda_c]} \mathcal{S}_{C.P.}(\lambda) d\lambda \quad (7.19)$$

On calcule ensuite la valeur $\tilde{\sigma}_N^2$ de cette même intégrale, mais calculée à l'aide cette fois de la méthode du point milieu basée sur la N-partition de $\bar{\Lambda}$ définie précédemment. On obtient :

$$\tilde{\sigma}_N^2 = \Delta\lambda \sum_{k=1}^N \mathcal{S}_{C.P.}(\lambda_k) \quad (7.20)$$

soit encore, en tenant compte de (7.8) et (7.9) :

$$\tilde{\sigma}_N^2 = \frac{2\Lambda_c}{N} \sum_{k=1}^N \mathcal{S}_{C.P.}\left(\Lambda_c \cdot \left(\frac{2k-1}{N} - 1\right)\right) \quad (7.21)$$

On choisit alors pour valeur de N le plus petit entier pair, vérifiant l'inéquation :

$$\frac{|\tilde{\sigma}_N^2 - \tilde{\sigma}^2|}{\tilde{\sigma}^2} \leq \epsilon_2 \quad (7.22)$$

où ϵ_2 est un autre réel positif petit à choisir.

Nous avons choisi de prendre $\epsilon_2 = 0,001$, ce qui conduit à la valeur suivante de N :

$$N = 500 \quad (7.23)$$

Choix de la fonction de modulation L

Nous avons adopté une fonction de modulation ayant pour expression :

$$L(\tau) = \alpha \tau^\beta e^{-\gamma\tau} \mathbb{I}_{\bar{T}}(\tau) , \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad (7.24)$$

où nous rappelons que $\bar{T} = [0, T]$ est l'intervalle temporel d'activité sismique et T la durée totale du séisme.

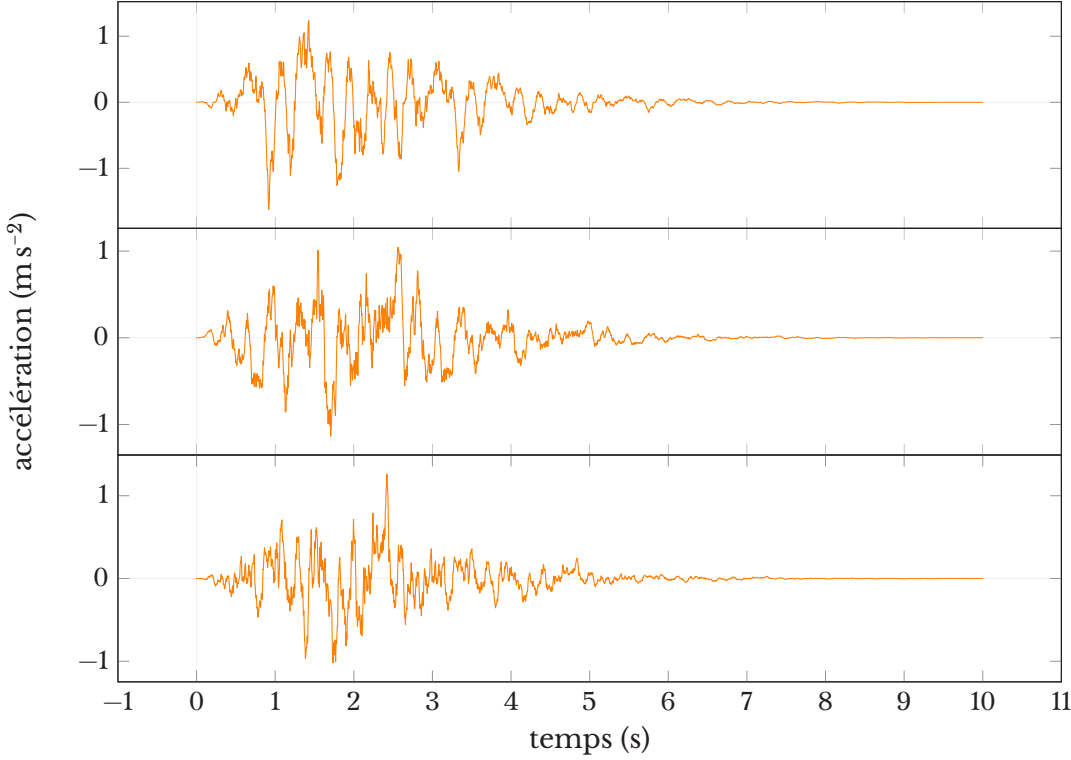


Figure 7.3 – Exemples de signaux générés par notre procédure pour $S_0 = 0,005 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$

Dans (7.24), β et γ sont deux réels > 0 fixés aux valeurs suivantes :

$$\beta = 2 \quad \text{et} \quad \gamma = 1,25 \text{ s}^{-1} \quad (7.25)$$

et α est un réel > 0 choisi de façon à normer l'enveloppe L . Cette fonction a été normée à 1 pour les composantes horizontales et à $2/3$ pour la composante verticale. On a donc, respectivement, pour ces deux types de composantes :

$$\alpha = \frac{1}{\max_{\tau \in \bar{T}} (\tau^\beta e^{-\gamma\tau})} \approx 2,84 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{2}{3 \max_{\tau \in \bar{T}} (\tau^\beta e^{-\gamma\tau})} \approx 1,89, \quad \forall T \geq 1,6 \text{ s} \quad (7.26)$$

Tous les paramètres de l'excitation sismique $Z_N = (Z_N(\tau), \tau \in \bar{T})$, $\bar{T} = [0, T]$, ayant été fixés, celle-ci est entièrement caractérisée. Notons que d'après (7.13), ce processus peut encore s'écrire, $\forall \tau \in \bar{T}$:

$$Z_N(\tau) = E_{\text{exc}}(\tau, \mathbf{Y}_{\text{exc}}) \quad (7.27)$$

où :

- (a) $\mathbf{Y}_{\text{exc}}$ est le vecteur aléatoire gaussien standard défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{2p}$, regroupant l'ensemble des variables aléatoires gaussiennes standards définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, présentes dans la représentation (7.13) de Z_N :

$$\mathbf{Y}_{\text{exc}} = (Y_{1,1}, \dots, Y_{1,N}, Y_{2,1}, \dots, Y_{2,N})^T \quad (7.28)$$

- (b) E_{exc} est une application de $\bar{T} \times \mathbb{R}^{2p}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, $\forall (\tau, \mathbf{y}) \in \bar{T} \times \mathbb{R}^{2p}$:

$$E_{\text{exc}}(\tau, \mathbf{y}) = \sqrt{\Delta\lambda} L(\tau) \sum_{k=1}^N \sqrt{S_W(\lambda_k)} (y_{1,k} \cos(\lambda_k \tau) + y_{2,k} \sin(\lambda_k \tau)) \quad (7.29)$$

$\mathbf{y} = (y_{1,1}, \dots, y_{1,N}, y_{2,1}, \dots, y_{2,N})^T$ désignant ici l'élément générique de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{2p}$.

C'est désormais sous la forme (7.27) que nous considérerons le processus Z_N . Observons que le vecteur Y_{exc} n'est autre que le vecteur aléatoire Y^{ext} défini dans l'introduction de ce chapitre (formule (7.1)) :

$$Y_{\text{exc}} = Y^{\text{ext}} \quad (7.30)$$

La figure <7.3> présente des exemples de signaux sismiques (*i.e.* de trajectoires simulées du processus Z_N) générés à l'aide de la relation (7.27) (la remarque de la section 7.3).

7.2 Choix et caractérisation probabiliste des paramètres aléatoires internes

Le vecteur aléatoire modélisant les paramètres mécaniques incertains est composé des paramètres identifiés lors de l'élaboration du modèle (3.4). Il nous faut alors déterminer la loi conjointe de l'ensemble de ces paramètres, ou au moins leurs lois marginale et leur structure de dépendance. Pour estimer ces grandeurs, nous disposons de deux sources d'information :

- les paramètres identifiés par le post-traitement des essais ; on dispose d'un résultat obtenu lors de la première campagne et de 3 résultats issus de la seconde campagne,
- l'intuition de l'ingénieur-e, qui permet d'obtenir les ordres de grandeur habituels des paramètres et le bon sens qui permet, par exemple, d'intuiter l'étendue de leur domaine de variation, ou de distinguer ceux susceptibles d'être corrélés de ceux qui ne le sont pas.

Pour notre étude, nous disposons d'une poignée de valeurs numériques déduites des essais. Ceci n'est absolument pas suffisant pour déterminer des lois de variables aléatoires ni leur corrélation.

Face à ce manque d'information, nous avons jugé plus sage de ne pas adopter de modélisation probabiliste pour les paramètres incertains du modèle mécanique. Nous les avons donc supposé déterministes en leur affectant pour valeurs celles obtenues pour l'emploi de la technique d'identification structurale évoquée dans la première partie, identification réalisée à partir de résultats expérimentaux.

7.3 Vecteur des paramètres aléatoires

Compte tenu de la conclusion de la section précédente, le vecteur des paramètres aléatoires Y défini par (7.1) se réduit au seul vecteur Y^{ext} :

$$Y = Y^{\text{ext}} \quad (7.31)$$

Or, d'après (7.30), $Y_{\text{exc}} = Y^{\text{ext}}$. Nous avons donc en définitive, d'après (7.28) :

$$Y = Y_{\text{exc}} = (Y_{1,1}, \dots, Y_{1,N}, Y_{2,1}, \dots, Y_{2,N})^T \quad (7.32)$$

Le vecteur des paramètres aléatoires est donc un vecteur gaussien standard défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, avec $p = 2N$.

Remarque : Simulation du processus Z_N

Compte tenu de (7.27) et (7.31), le processus $Z_N = Z_N(\tau), \tau \in \bar{T}$ peut se réécrire, $\forall \tau \in \bar{T}$:

$$Z_N(\tau) = E_{\text{exc}}(\tau, Y) \quad (7.33)$$

avec E_{exc} l'application définie par (7.29).

Une ω -trajectoire (*i.e.* ω -réalisation), $\omega \in \Omega$, de Z_N est la fonction déterministe :

$$Z_N(\bullet, \omega) : \tau \xrightarrow{\bar{T}} \mathbb{R} \rightarrow Z_N(\tau, \omega) = E_{\text{exc}}(\tau, Y(\omega)) \quad (7.34)$$

où $Y(\omega)$ est la réalisation de Y associées à ω .

Simuler une ω -trajectoire de Z_N c'est donc tirer un élément ω dans Ω et lui associer l'application $Z_N(\bullet, \omega) = (Z_N(\tau, \omega), \tau \in \bar{T})$. Par suite, simuler un M -échantillon de trajectoires de Z_N , c'est tirer indépendamment M éléments $\omega_m, m \in \llbracket 1, M \rrbracket$ dans Ω et associer à chaque ω_m l'application :

$$Z_N(\bullet, \omega_m) = (Z_N(\tau, \omega_m), \tau \in \bar{T}) \quad (7.35)$$

avec :

$$Z_N(\tau, \omega_m) = E_{\text{exc}}(\tau, Y(\omega_m)) \quad (7.36)$$

où $Y(\omega_m)$ est la réalisation de Y associée à l'élément ω_m de Ω .

Simuler un M -échantillon de trajectoires de Z_N revient ainsi à simuler M réalisations $(Y(\omega_m), m \in \llbracket 1, M \rrbracket)$ de Y et à associer à chaque réalisation $Y(\omega_m)$ de Y l'application (7.35)–(7.36)

Dans tout ce qui suit, on utilisera les notations suivantes :

$$Z_N(\bullet, \omega_m) = z_N^m(\bullet) \quad (7.37)$$

$$Y(\omega_m) = \mathbf{y}^m \quad (7.38)$$

Dans ces conditions, un M -échantillon de trajectoires de Z_N sera noté :

$$\{z_N^m(\bullet), m \in \llbracket 1, M \rrbracket\} \quad (7.39)$$

avec, $\forall m \in \llbracket 1, M \rrbracket$:

$$z_N^m(\bullet) = \{z_N^m(\tau), \tau \in \bar{T}\} \quad (7.40)$$

et où :

$$z_N^m(\tau) = E_{\text{exc}}(\tau, \mathbf{y}^m) \quad (7.41)$$

7.4 Fonction d'état limite

Les appuis du bloc étant numérotés de 1 à 4, soit $H_{i,\text{ext}} = (H_{i,\text{ext}}(\tau), \tau \in \bar{T})$ le processus aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexé sur $\bar{T} = [0, T]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, représentant le déplacement vertical² de l'appui n° i . Ce processus est lié au processus excitation $Z_N = (Z_N(\tau), \tau \in \bar{T})$ par une relation de la forme :

$$H_{i,\text{ext}}(\tau) = \mathbb{H}_i(Z_N(\tau)) \quad (7.42)$$

où, $\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par le modèle mécanique.

Tenant compte de (7.33) et posant :

$$h_i = \mathbb{H}_i \circ E_{\text{exc}} \quad (7.43)$$

l'égalité (7.42) peut se réécrire, $\forall \tau \in \bar{T}$:

$$H_{i,\text{ext}}(\tau) = h_i(\tau, \mathbf{Y}) \quad (7.44)$$

où h_i est une application de $\bar{T} \times \mathbb{R}^p$ ($p = 2N$) dans $\mathbb{R}$ telle que, $\forall (\tau, \mathbf{y}) \in \bar{T} \times \mathbb{R}^p$:

$$h_i(\tau, \mathbf{y}) = \mathbb{H}_i(E_{\text{exc}}(\tau, \mathbf{y})) \quad (7.45)$$

avec $E_{\text{exc}}(\tau, \mathbf{y})$ donné par (7.29).

Soit $\mathbb{H}_{\text{max}}$ la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\mathbb{H}_{\text{max}} = \max_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket} \left(\max_{\tau \in \bar{T}} (H_{i,\text{ext}}(\tau)) \right) = \max_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket} \left(\max_{\tau \in \bar{T}} (h_i(\tau, \mathbf{y})) \right) \quad (7.46)$$

2. Paradoxalement, ce processus n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ puisque le modèle mécano-numérique 8ACP prévoit la possibilité d'un déplacement vertical négatif lorsque le point d'appui pénètre le support.

Cette variable aléatoire représente le maximum du déplacement vertical du bloc au niveau de ses appuis au cours de son mouvement entre les instants $\tau = 0$ et $\tau = T$. On peut observer qu'elle ne dépend que de la variable aléatoire p -dimensionnelle $\mathbf{Y}$. Notant $\mathcal{H}$ cette dépendance, on a :

$$\mathbb{H}_{\max} = \mathcal{H}(\mathbf{Y}) \quad (7.47)$$

où $\mathcal{H}$ est la fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ telle que, $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$:

$$\mathcal{H}(\mathbf{y}) = \max_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket} \left(\max_{\tau \in \overline{T}} (h_i(\tau, \mathbf{y})) \right) \quad (7.48)$$

Soit $\mathcal{H}_0$ une hauteur limite fixée, au delà de laquelle le mouvement du bloc est supposé être « défaillant » (hauteur seuil prise égale à $\mathcal{H}_0 = 0,01 \text{ m}$). La fonction d'état limite associée à ce critère de défaillance est alors la fonction $g: \mathbf{y} \xrightarrow{\mathbb{R}^p} \mathbb{R} g(\mathbf{y})$, telle que, $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$:

$$\mathcal{H}(\mathbf{y}) = \mathcal{H}_0 - g(\mathbf{y}) \quad (7.49)$$

7.5 Formulation du problème fiabiliste

L'événement de défaillance et le domaine de défaillance relatifs au critère de défaillance considéré ici s'écrivent respectivement :

$$E_f = \{\omega \in \Omega : g(\mathbf{Y}(\omega)) \leq 0\} \quad (7.50)$$

$$D_f = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p : g(\mathbf{y}) \leq 0\} \quad (7.51)$$

Par suite la probabilité de défaillance s'écrit :

$$P_f = \mathbb{P}(E_f) = \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p} \mathbb{I}_{D_f}(\mathbf{y}) p_Y(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (7.52)$$

où p_Y est la densité de probabilité de la variable aléatoire gaussienne standard p -dimensionnelle $\mathbf{Y}$.

Pour le passage à la formulation standard, le problème est très simple ici car, du fait de la représentation adoptée du processus excitation, la variable aléatoire p -dimensionnelle $\mathbf{Y}$ est déjà gaussienne standard. Par conséquent, l'application $\mathcal{T}$ qui permet de transformer $\mathbf{Y}$ en une variable aléatoire p -dimensionnelle $\mathbf{X}$ (section 6.3) n'est autre que l'application identité $1_{\mathbb{R}}^p: \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ et on a alors dans ce cas :

$$\Gamma = g \Rightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, \Gamma(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_0 - \mathcal{H}(\mathbf{x}) \quad (7.53)$$

$$\Delta_f = D_f \Rightarrow \Delta_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : g(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (7.54)$$

$$E_f = \{\omega \in \Omega : \mathcal{H}_0 - \mathcal{H}(\mathbf{X}(\omega)) \leq 0\} \quad (7.55)$$

$$P_f = \mathbb{P}(E_f) = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p} \mathbb{I}_{\Delta_f}(\mathbf{x}) p_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (7.56)$$

où :

- (a) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$ est l'élément générique de $\mathbb{R}^p$;
- (b) $d\mathbf{x} = x_1 \dots x_p$ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_p)$;
- (c) $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{\frac{p}{2}}, X_{\frac{p}{2}+1}, \dots, X_p)^T$ est une variable aléatoire gaussienne standard vectorielle de dimension paire $p = 2N$, avec : $X_1 = Y_{1,1}, \dots, X_{\frac{p}{2}} = Y_{1,N}, X_{\frac{p}{2}+1} = Y_{2,1}, \dots, X_p = Y_{2,N}$
- (d) p_X est la densité de probabilité de $\mathbf{X}$, d'expression donnée par (6.15a).

Tout le problème est maintenant d'évaluer l'intégrale (7.56) à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo appropriée. Malgré le soin apporté lors de la conception du modèle pour le garder simple et d'exécution numérique rapide, il n'était clairement pas possible d'utiliser la méthode de Monte-Carlo standard qui aurait nécessité un nombre d'appels au modèle trop important (plusieurs millions) pour atteindre une précision convenable. Nous nous sommes alors tournés vers une méthode de Monte-Carlo mieux adaptée à ce type de problème. Nous nous sommes alors tournés vers une méthode de Monte-Carlo mieux adaptée à ce type de problèmes : la méthode dite des *Subset Simulations*, spécialement conçue pour le calcul des probabilités d'événements rares (cas de E_f) et réputée pour sa grande efficacité et son caractère peu chronophage. Dans la section suivante, que terminera ce chapitre, cette méthode est exposée dans le détail. Nous présenterons ensuite quelques résultats d'une comparaison entre cette dernière et la méthode de Monte-Carlo standard. Puisque le modèle raffiné 8ACP que nous proposons est très chronophage, le test a été effectué avec le modèle de Housner. Par manque de temps, nous n'avons malheureusement pas pu appliquer la méthode des *Subset Simulations* au modèle 8ACP.

7.6 Calcul de la probabilité de défaillance par la méthode des *Subset Simulations*

Exposé de la méthode

Rappelons qu'il s'agit de calculer la probabilité P_f donnée par (7.56), que nous réécrivons sous la forme suivante afin d'alléger les notations :

$$P_f = \mathbb{P}(E) = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p} \mathbb{I}_\Delta(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (7.57)$$

où nous avons posé :

$$E = E_f = \{\omega \in \Omega : \Gamma(\mathbf{X}(\omega)) \leq 0\} \quad (7.58)$$

$$\Delta = \Delta_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \Gamma(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (7.59)$$

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_0 - \mathcal{H}(\mathbf{x}(\omega)), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p \quad (7.60)$$

et nous rappelons que nous sommes ici dans le cas particulier où :

$$\Gamma = g \quad (7.61)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (7.62)$$

$$p_{\mathbf{X}} = p_{\mathbf{Y}} \quad (7.63)$$

et où donc P_f peut aussi s'écrire (formulation initiale), toujours en notations allégées :

$$P_f = \mathbb{P}(E) = \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p} \mathbb{I}_\Delta(\mathbf{x}) p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (7.64)$$

avec :

$$E = E_f = \{\omega \in \Omega : g(\mathbf{Y}(\omega)) \leq 0\} \quad (7.65)$$

$$\Delta = \Delta_f = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p : \Gamma(\mathbf{y}) \leq 0\} \quad (7.66)$$

$$g(\mathbf{y}) = \mathcal{H}_0 - \mathcal{H}(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \quad (7.67)$$

où $p_{\mathbf{Y}}$, et donc $p_{\mathbf{X}}$, est la densité de la loi gaussienne standard sur $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_p)$.

L'exposé qui suit est basé sur la formulation (7.57) de P_f .

Soit n un entier ≥ 2 et soit $\{E_1, \dots, E_n\}$ une n -famille d'éléments de $\mathcal{F}$ (une n -famille d'événements) tels que :

$$E_n \subset E_{n-1} \subset \dots \subset E_2 \subset E_1 \quad (7.68)$$

avec :

$$E_n = E \quad (7.69)$$

D'après (7.68) :

$$E_n = \bigcap_{i=1}^n E_i \quad (7.70)$$

D'où, d'après (7.64), (7.69) et (7.70) :

$$P_f = \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) \quad (7.71)$$

Par conditionnements successifs, et en observant que $\bigcap_{i=1}^k E_i = E_k, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on obtient :

$$\begin{aligned} P_f &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) \\ &= \mathbb{P}\left(E_n \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} E_i\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(E_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} E_i\right) \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} E_i\right) \\ &= \mathbb{P}(E_n \mid E_{n-1}) \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} E_i\right) \\ &= \mathbb{P}(E_n \mid E_{n-1}) \mathbb{P}\left(E_{n-1} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-2} E_i\right)\right) \\ &= \mathbb{P}(E_n \mid E_{n-1}) \mathbb{P}\left(E_{n-1} \mid \bigcap_{i=1}^{n-2} E_i\right) \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} E_i\right) \\ &= \mathbb{P}(E_n \mid E_{n-1}) \mathbb{P}(E_{n-1} \mid E_{n-2}) \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} E_i\right) \\ &= \mathbb{P}(E_n \mid E_{n-1}) \mathbb{P}(E_{n-1} \mid E_{n-2}) \dots \mathbb{P}(E_2 \mid E_1) \mathbb{P}(E_1) \end{aligned}$$

et donc :

$$P_f = \mathbb{P}(E_1) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(E_{i+1} \mid E_i) \quad (7.72)$$

On ramène ainsi le calcul de P_f à celui de n probabilités, toutes beaucoup plus grandes que P_f .

Deux questions se posent alors :

1. L'événement $E_n = E$ étant donné (c'est l'événement de défaillance connu), comment choisir les événements $E_1, \dots, E_{n-1}$ ordonnés par l'inclusion (7.68) ?
2. Comment calculer les différentes probabilités figurant dans la formule (7.72) ?

Choix des événements auxiliaires $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$

Observons que le domaine de défaillance (7.66) peut se réécrire :

$$\Delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, h(\mathbf{x}) \geq 1\} \quad (7.73a)$$

où h est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ telle que, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$:

$$h(\mathbf{x}) = 1 - \Gamma(\mathbf{x}) \quad (7.73b)$$

Avec cette nouvelle expression de Δ , l'événement de défaillance s'écrit :

$$E = (\mathbf{X} \in \Delta) = \{\omega \in \Omega, \mathbf{X}(\omega) \in \Delta\} = \{\omega \in \Omega, h(\mathbf{X}(\omega)) \geq 1\} = (h(\mathbf{X}) \geq 1) \quad (7.74)$$

avec $h(\mathbf{X}) = h \circ \mathbf{X}$.Soient $z_1, \dots, z_n$, n réels tels que :

$$0 < z_1 < \dots < z_{n-1} < z_n = 1 \quad (7.75)$$

et $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, n boréliens de $\mathbb{R}^p$ définis par :

$$\Delta_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, h(\mathbf{x}) \geq z_i\}, i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (7.76)$$

Alors, on a :

$$\Delta = \Delta_n \subset \Delta_{n-1} \subset \dots \subset \Delta_2 \subset \Delta_1 \quad (7.77)$$

et les événements $E_1, \dots, E_n$ définis pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par :

$$E_i = (\mathbf{X} \in \Delta_i) = \{\omega \in \Omega, \mathbf{X}(\omega) \in \Delta_i\} = \{\omega \in \Omega, h(\mathbf{X}(\omega)) \geq z_i\} = \{h(\mathbf{X}) \geq z_i\} \quad (7.78)$$

vérifient :

$$E = E_n \subset E_{n-1} \subset \dots \subset E_2 \subset E_1 \quad (7.79)$$

Ce sont donc de bons candidats pour la méthode. Ils sont complément déterminés par le choix des réels z_i dans le respect de la contrainte (7.75), choix que l'on effectue en général en ajoutant à cette contrainte une condition sur la valeur de chaque probabilité intervenant dans la factorisation (7.72) et qui conduit à la mise en œuvre d'une procédure d'apprentissage.

Notons, pour en terminer avec cette question, que l'écriture (7.73a) du domaine de défaillance couvre la quasi-totalité des situations fiabilistes rencontrées dans la pratique. On pourra, pour s'en persuader, consulter la référence [57].

Calcul de la probabilité $\mathbb{P}(E_1)$

Soit P_1 cette probabilité, telle que :

$$P_1 = \mathbb{P}(E_1) = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p} \mathbb{I}_{\Delta_1}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\Delta_1}(\mathbf{X})] \quad (7.80)$$

avec :

$$\Delta_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, h(\mathbf{x}) \geq z_1\} \quad (7.81)$$

Pour effectuer ce calcul d'intégrale, on peut par exemple utiliser la méthode de Monte-Carlo standard, ou encore avoir recours à une méthode de Monte-Carlo évoluée. En utilisant la méthode de Monte-Carlo standard, P_1 s'obtient via le m_1 -estimateur :

$$\hat{P}_{1,m_1} = \frac{1}{m_1} \sum_{k=1}^{m_1} \mathbb{I}_{\Delta_1}(\mathbf{X}^k) \quad (7.82)$$

où $(\mathbf{X}^k)_{k \in \llbracket 1, m_1 \rrbracket}$, $m_1 \in \mathbb{N}$, est un m_1 -échantillon de copies indépendantes du vecteur gaussien standard p -dimensionnel $\mathbf{X}$. Un tel estimateur a pour moyenne, variance, et coefficient de variation, respectivement :

$$\mathbb{E}[\hat{P}_{1,m_1}] = P_1 \quad (7.83a)$$

$$\sigma^2[\hat{P}_{1,m_1}] = \frac{P_1(1-P_1)}{m_1} \quad (7.83b)$$

$$c_v[\hat{P}_{1,m_1}] = \frac{\sigma[\hat{P}_{1,m_1}]}{\mathbb{E}[\hat{P}_{1,m_1}]} = \sqrt{\frac{1-P_1}{m_1 P_1}} \quad (7.83c)$$

et permet d'obtenir la m_1 -approximation suivante de P_1 :

$$p_{1,m_1} = \frac{1}{m_1} \sum_{k=1}^{m_1} \mathbb{I}_{\Delta_1}(\mathbf{x}^k) \quad (7.84)$$

où $(\mathbf{x}^k)_{k \in \llbracket 1, m_1 \rrbracket}$, $m_1 \in \mathbb{N}$, est un m_1 -échantillon numérique de réalisations indépendantes simulées de $\mathbf{X}$.

Observons que, d'après (7.83c), et en notant $\text{Ent}(z)$ du réel z :

$$m_1 = \text{Ent} \left(\frac{1-P_1}{c_v^2[\hat{P}_{1,m_1}] P_1} \right) \quad (7.85)$$

Par conséquent, si l'on a une idée de l'ordre de grandeur de la probabilité P_1 à calculer, en se fixant *a priori* la valeur du coefficient de variation de l'estimation visée, on peut trouver simplement par (7.85) la taille m_1 de l'échantillon des réalisations de $\mathbf{X}$ à simuler. Par exemple, pour $P_1 = 10^{-4}$ et $c_v[\hat{P}_{1,m_1}] = 10^{-1}$, il faudra prendre $m_1 \approx 10^6$.

Calcul des probabilités $(\mathbb{P}[E_{i+1} | E_i])_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$

Pour le calcul des probabilités conditionnelles $(\mathbb{P}(E_{i+1} | E_i))_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$, il est nécessaire de connaître, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, la densité de la loi de $\mathbf{X}$ conditionnellement à l'occurrence de E_i (c'est-à-dire de la loi conditionnelle de $\mathbf{X}$ sachant E_i), qui est une densité sur $\mathbb{R}^n$, notée $p_{\mathbf{X}}(\bullet | E_i)$, telle que, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$:

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} | E_i) = \frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\mathbb{P}[E_i]} \mathbb{I}_{\Delta_i}(\mathbf{x}) \quad (7.86)$$

Si la $(n-1)$ -famille $(p_{\mathbf{X}}(\bullet | E_i))_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ est connue, on aura, en effet, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et en notant $\mathbf{X}_i$ une variable aléatoire p -dimensionnelle continue de densité $p_{\mathbf{X}}(\bullet | E_i)$:

$$P_{i+1} = \mathbb{P}(E_{i+1} | E_i) = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p} \mathbb{I}_{\Delta_{i+1}}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} | E_i) d\mathbf{x} = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\Delta_{i+1}}(\mathbf{X}_i)] \quad (7.87)$$

Pour évaluer les probabilités $(P_{i+1})_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ ci-dessus, on pourrait être tenté d'utiliser une méthode de Monte-Carlo classique. Par exemple, en ayant recours à la méthode standard, ces probabilités seraient estimées via les estimateurs :

$$\hat{P}_{i+1, m_{i+1}} = \frac{1}{m_{i+1}} \sum_{k=1}^{m_{i+1}} \mathbb{I}_{\Delta_{i+1}}(\mathbf{X}_i^k), i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad (7.88)$$

et par suite approximées par :

$$p_{i+1, m_{i+1}} = \frac{1}{m_{i+1}} \sum_{k=1}^{m_{i+1}} \mathbb{I}_{\Delta_{i+1}}(\mathbf{x}_i^k), i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad (7.89)$$

où les $(\mathbf{X}_{i+1}^k)_{k \in \llbracket 1, m_{i+1} \rrbracket}$ et les $(\mathbf{x}_{i+1}^k)_{k \in \llbracket 1, m_{i+1} \rrbracket}$ sont respectivement des copies indépendantes et des réalisations indépendantes simulées de la variable aléatoire p -dimensionnelle $\mathbf{X}_i$, et m_{i+1} est un entier > 0 .

Pour simuler les $n-1$ échantillons numériques $(\mathbf{x}_{i+1}^k)_{k \in \llbracket 1, m_{i+1} \rrbracket}, i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, une voie naturelle (et très générale) est l'emploi de techniques d'acceptation/rejet. Cependant, compte tenu du caractère conditionnel des lois des variables aléatoires $(\mathbf{X}_{i+1})_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$, les probabilités de rejet attachées à ces techniques sont généralement très élevées, notamment en grande dimension, de sorte que cette approche ne sera pas efficace dans la pratique.

On dispose heureusement d'une solution de remplacement beaucoup plus satisfaisante, qui est le recours à des algorithmes de simulation basés sur les méthodes MCMC (*Markov Chain Monte-Carlo methods*). Ces dernières permettent de ramener le problème de la simulation d'une variable aléatoire (scalaire ou vectorielle) de loi donnée à celui de la simulation d'une chaîne de Markov stationnaire (ou asymptotiquement stationnaire) irréductible, apériodique, réversible et ergodique, ayant pour loi invariante la loi de la variable aléatoire cible. Elles conduisent ainsi à des algorithmes récursifs (du fait du caractère markovien de la chaîne) qui possèdent en outre l'avantage d'être quasiment insensibles à la dimension des variables aléatoires à simuler (et donc de l'intégrale à calculer).

De nombreux ouvrages traitent de ces méthodes. On en trouvera notamment un exposé détaillé dans [69]. Nous utilisons ici l'une des plus connues et probablement des plus fréquemment employées dans la pratique : la méthode de Metropolis-Hasting.

a) Méthode de Metropolis-Hasting et algorithme de simulation associé Cette méthode étant abondamment traitée dans la littérature ([70][71][69][53]), nous y

renvoyons le lecteur intéressé et nous nous limiterons ici à en préciser la formulation dans le cas qui nous concerne. Nous en déduirons ensuite l'algorithme de simulation qui en résulte dans ce cas.

Rappelons que, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, il s'agit de construire une chaîne de Markov stationnaire (ou asymptotiquement stationnaire) irréductible, apériodique, réversible et ergodique ayant pour loi invariante la loi cible $p_X(\mathbf{x} | E_i) d\mathbf{x}$, où $d\mathbf{x}$ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_p)$, $\mathbf{x}$ l'élément générique de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbf{x} \xrightarrow{\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+} p_X(\mathbf{x} | E_i)$ la densité conditionnelle gaussienne donnée par (7.86).

Soit un noyau markovien sur $\mathbb{R}^p$ de densité $\mathbf{y} \xrightarrow{\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+} p_i(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = p'_i(\mathbf{y} | \mathbf{z})$ facilement simulable pour tout $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$ (c'est-à-dire que pour tout $\mathbf{z}$ fixé dans $\mathbb{R}^p$, la variable aléatoire p -dimensionnelle continue de densité $p_i(\mathbf{z}, \bullet) = p'_i(\bullet | \mathbf{z})$ est facile à simuler), et soit α_i la fonction de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ dans $[0, 1]$, telle que :

$$\forall (\mathbf{z}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p; \alpha_i(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \min \left(\frac{p_X(\mathbf{y} | E_i) p'_i(\mathbf{z} | \mathbf{y})}{p_X(\mathbf{z} | E_i) p'_i(\mathbf{y} | \mathbf{z})}, 1 \right) \quad (7.90a)$$

soit encore, d'après (7.86) :

$$\forall (\mathbf{z}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p; \alpha_i(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \min \left(\frac{p_X(\mathbf{y}) \mathbb{I}_{\Delta_i}(\mathbf{y}) p'_i(\mathbf{z} | \mathbf{y})}{p_X(\mathbf{z}) \mathbb{I}_{\Delta_i}(\mathbf{z}) p'_i(\mathbf{y} | \mathbf{z})}, 1 \right) \quad (7.90b)$$

Soit maintenant $\mathbf{Z}_i^1$ une variable aléatoire p -dimensionnelle distribuée selon la loi cible $p_X(\mathbf{x} | E_i) d\mathbf{x}$ et, pour tout entier strictement positif k , $\mathbf{Y}_i^k$ une variable aléatoire p -dimensionnelle de densité $p'_i(\bullet | \mathbf{Z}_i^k)$ (densité instrumentale affectée au calcul de $\mathbb{P}[E_{i+1} | E_i]$). Alors, la chaîne de Markov $(\mathbf{Z}_i^k)_{k \geq 1}$ de schéma récurrent :

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_i^1 & \text{distribuée suivant la loi } p_X(\mathbf{x} | E_i) d\mathbf{x} \\ \mathbf{Z}_i^{k+1} = \begin{cases} \mathbf{Y}_i^k & \text{avec probabilité } \alpha_i(\mathbf{Z}_i^k, \mathbf{Y}_i^k) \\ \mathbf{Z}_i^k & \text{avec probabilité } 1 - \alpha_i(\mathbf{Z}_i^k, \mathbf{Y}_i^k) \end{cases} \end{cases}, k \geq 1 \quad (7.91)$$

est stationnaire, irréductible, apériodique, réversible, ergodique et sa probabilité invariante (c'est-à-dire la loi de la variable aléatoire $\mathbf{Z}_i^k$, pour tout $k \geq 1$) est la loi cible $p_X(\mathbf{x} | E_i) d\mathbf{x}$.

Une version quelque peu différente, mais plus intéressante en pratique, de ce résultat est la suivante. Soit $\mathbf{z}_i^1$ un point de Δ_i et, pour tout $k \geq 1$, $\mathbf{Y}_i^k$ la même variable aléatoire p -dimensionnelle que précédemment. Alors, la chaîne de Markov :

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_i^1 & = \mathbf{z}_i^1 \\ \mathbf{Z}_i^{k+1} = \begin{cases} \mathbf{Y}_i^k & \text{avec probabilité } \alpha_i(\mathbf{Z}_i^k, \mathbf{Y}_i^k) \\ \mathbf{Z}_i^k & \text{avec probabilité } 1 - \alpha_i(\mathbf{Z}_i^k, \mathbf{Y}_i^k) \end{cases} \end{cases}, k \geq 1 \quad (7.92)$$

n'est pas stationnaire mais est asymptotiquement stationnaire. Par conséquent, il existe un rang $k_0 > 1$ à partir duquel cette chaîne est approximativement stationnaire et peut raisonnablement être considérée comme stationnaire. La chaîne stationnaire $(\mathbf{Z}_i^k)_{k \geq k_0}$ est alors irréductible, apériodique, réversible, ergodique et a pour probabilité invariante la loi cible $p_X(\mathbf{x} | E_i) d\mathbf{x}$.

On notera que les états $\mathbf{Z}_i^k, k \geq 1$, des chaînes de Markov définies par les schémas récurrents (7.91) et (7.92) ne sont pas indépendants.

Les schémas (7.91) et (7.92) représentent deux formulations possibles de la méthode de Metropolis-Hasting dans le cas qui nous intéresse. Nous en déduisons immédiatement l'algorithme de simulation suivant pour la chaîne $(\mathbf{Z}_i^k)_{k \geq 1}$:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_i^1 \\ \mathbf{z}_i^{k+1} = \mathbf{y}_i^k \mathbb{I}_{[0, \alpha_i(\mathbf{z}_i^k, \mathbf{y}_i^k)]}(\mathbf{u}_i^k) + \mathbf{z}_i^k \mathbb{I}_{[\alpha_i(\mathbf{z}_i^k, \mathbf{y}_i^k), 1]}(\mathbf{u}_i^k) \end{cases}, k \geq 1 \quad (7.93)$$

avec $\mathbf{z}_i^1$ un point de Δ_i et où, $\forall k \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$:

- $\mathbf{y}_i^k$ est une réalisation d'une variable aléatoire p -dimensionnelle $\mathbf{Y}_i^k$ de loi $p'_i(\mathbf{y} | \mathbf{z}_i^k) d\mathbf{y}$;
- u_i^k est une réalisation d'une variable aléatoire scalaire U_i^k uniforme sur $[0, 1]$.

Pour le choix de $\mathbf{z}_i^1$, on a deux possibilités. Soit on prend une réalisation d'une variable aléatoire p -dimensionnelle distribuée selon la loi cible $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} | E_i) d\mathbf{x}$, et dans ce cas la chaîne se trouve directement dans son régime stationnaire, soit on prend un point quelconque dans Δ_i et on laisse défilier l'algorithme jusqu'à atteinte du régime stationnaire, solution que l'on adopte en général. Dans ce cas, le $\mathbf{z}_i^1$ que l'on fait figurer dans l'algorithme est la première réalisation simulée de l'état de la chaîne dans le régime stationnaire détecté (si le temps d'atteinte k_0 de ce régime a été correctement détecté, $\mathbf{z}_i^1$ peut en effet être assimilé, avec une bonne approximation, à une réalisation de l'état $\mathbf{Z}_i^{k_0}$ de la chaîne, qui est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ distribuée selon la probabilité invariante de cette dernière, c'est-à-dire selon la loi cible $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} | E_i) d\mathbf{x}$.

Concernant le choix de la densité instrumentale : $\mathbf{y} \rightarrow p'_i(\mathbf{y} | \mathbf{z})$, on pourra prendre soit une densité gaussienne sur $\mathbb{R}^p$ centrée en $\mathbf{z}$, soit une densité uniforme sur un pavé de $\mathbb{R}^p$ (*i.e.* un p -hyperparallélépipède rectangle) centrée en $\mathbf{z}$ également. Dans le premier cas il faudra alors fixer la valeur de la matrice de covariance (un choix classique étant de prendre cette matrice diagonale afin de diminuer le nombre des paramètres à évaluer). Dans le second, il faudra se donner la longueur de chaque arête du pavé (un choix possible, mais pas toujours judicieux, étant de prendre un pavé cubique, ce qui ramène le nombre des paramètres à évaluer à un). Notons que dans ces deux cas la densité instrumentale vérifie $p'_i(\mathbf{y} | \mathbf{z}) = p'_i(\mathbf{z} | \mathbf{y})$, et par suite le coefficient $\alpha_i(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ donné par (7.90a) ou (7.90b) se simplifie en :

$$\alpha_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \min \left(\frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{y} | E_i)}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{z} | E_i)}, 1 \right) = \min \left(\frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{y}) \mathbb{I}_{\Delta_i}(\mathbf{y})}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{z}) \mathbb{I}_{\Delta_i}(\mathbf{z})}, 1 \right) \quad (7.94)$$

La pratique de ce type de méthode montre toutefois que la qualité de l'algorithme est plus dépendante de la valeur des paramètres de la densité instrumentale que de cette densité (*i.e.* de son type) elle-même.

Notons enfin que dans cet algorithme, il n'est nul besoin de calculer la probabilité $\mathbb{P}[E_i] = \mathbb{P}[\mathbf{X} \in \Delta_i]$ car cette grandeur disparaît dans le rapport figurant dans la formule (7.94), ce qui ne serait pas le cas, par exemple, si l'on voulait simuler directement une variable aléatoire de loi $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} | E_i) d\mathbf{x}$, comme cela est fait notamment pour le calcul direct des probabilités $\mathbb{P}[E_{i+1} | E_i]$ par la méthode de Monte-Carlo standard.

b) Calcul de $\mathbb{P}[E_{i+1} | E_i]$ Nous appuyant sur les propriétés de la chaîne de Markov $(\mathbf{Z}_i^k)_{k \geq 1}$ définie par (7.91) ou (7.91), et notamment sur le fait qu'elle est ergodique et a pour probabilité invariante la loi $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} | E_i) d\mathbf{x}$, il est facile de montrer que la variable aléatoire :

$$\hat{P}_{i+1, m_{i+1}} = \frac{1}{m_{i+1}} \sum_{k=1}^{m_{i+1}} \mathbb{I}_{\Delta_{i+1}}(\mathbf{Z}_i^k) \quad (7.95)$$

est un (m_{i+1}) -estimateur non biaisé et consistant de la probabilité $P_{i+1} = \mathbb{P}[E_{i+1} | E_i]$, que sa loi tend vers une loi gaussienne lorsque m_{i+1} tend vers l'infini (théorème central limite) et que la suite $(\hat{P}_{i+1, m_{i+1}})_{m_{i+1} \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers P_{i+1} (loi forte des grands nombres). Par conséquent, cet estimateur possède les mêmes propriétés statistiques que l'estimateur classique obtenu en ayant recours à un (m_{i+1}) -échantillon de copies indépendantes d'une variable aléatoire distribuée selon la loi $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} | E_i) d\mathbf{x}$, comme celui présenté en introduction de ce paragraphe (formule (7.88)). On peut également montrer, moyennant quelques approximations [57], que le coefficient de variation de $\hat{P}_{i+1, m_{i+1}}$ a pour expression :

$$c_v[\hat{P}_{i+1, m_{i+1}}] = \sqrt{\frac{1 - P_{i+1}}{m_{i+1} P_{i+1}}} (1 + a_{i+1}) \quad (7.96)$$

où α_{i+1} est un coefficient réel > -1 que l'on peut estimer statistiquement et qui traduit la dépendance entre les états de la chaîne (*i.e.* les variables aléatoires $\mathbf{Z}_i^k, k \geq 1$).

Partant de cet estimateur, une (m_{i+1}) -approximation de la probabilité $P_{i+1} = \mathbb{P}[E_{i+1} | E_i]$ s'en déduit par :

$$p_{i+1, m_{i+1}} = \frac{1}{m_{i+1}} \sum_{k=1}^{m_{i+1}} \mathbb{I}_{\Delta_{i+1}}(\mathbf{z}_i^k) \quad (7.97)$$

où $(\mathbf{z}_i^k)_{k \in \llbracket 1, m_{i+1} \rrbracket}$ est une (m_{i+1}) -réalisation de la chaîne $(\mathbf{Z}_i^k)_{k \in \llbracket 1, m_{i+1} \rrbracket}$, obtenue à l'aide de l'algorithme (7.93).

Calcul de la probabilité de défaillance P_f

Compte tenu de (7.72), (7.80) et (7.87), la probabilité de défaillance s'écrit :

$$P_f = P_1 \prod_{i=1}^{n-1} P_{i+1} \quad (7.98)$$

Posons :

$$m = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \quad (7.99)$$

$$\hat{p}_{f,m} = \hat{p}_{1,m_1} \prod_{i=1}^{n-1} \hat{p}_{i+1, m_{i+1}} \quad (7.100)$$

On montre alors que $\hat{p}_{f,m}$ est un estimateur biaisé, asymptotiquement sans biais et consistant de P_f , qui vérifie en outre, pour des m_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, suffisamment grands :

$$\left| \mathbb{E} \left[\frac{\hat{p}_{f,m} - P_f}{P_f} \right] \right| \leq \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \leq i}}^n c_v[\hat{p}_{i,m_i}] c_v[\hat{p}_{j,m_j}] \quad (7.101a)$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{\hat{p}_{f,m} - P_f}{P_f} \right)^2 \right] \leq \sum_{i,j=1}^n c_v[\hat{p}_{i,m_i}] c_v[\hat{p}_{j,m_j}] \quad (7.101b)$$

où les $c_v[\hat{p}_{i,m_i}]$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont donnés par les équations (7.83c) et (7.96).

Par suite, une m -approximation numérique de P_f , notée $p_{f,m}$, s'obtient par :

$$p_{f,m} = p_{1,m_1} \prod_{i=1}^{n-1} p_{i+1, m_{i+1}} = \prod_{i=1}^n p_{i, m_i} \quad (7.102)$$

où les p_{i, m_i} , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont donnés par (7.84) et (7.97).

Comparaison méthode de Monte-Carlo standard / méthode des *Subset Simulations*

Nous présentons dans ce paragraphe quelques résultats d'une comparaison menée sur le modèle de Housner entre la méthode de Monte-Carlo standard et la méthode des *Subset Simulations*. Le choix du modèle de Housner plutôt que du modèle plus complet développé dans cette thèse pour effectuer cette comparaison tient au caractère très chronophage de ce dernier, qui aurait induit pour la méthode de Monte-Carlo standard des temps de calcul incompatibles avec la durée allouée à cette partie de l'étude.

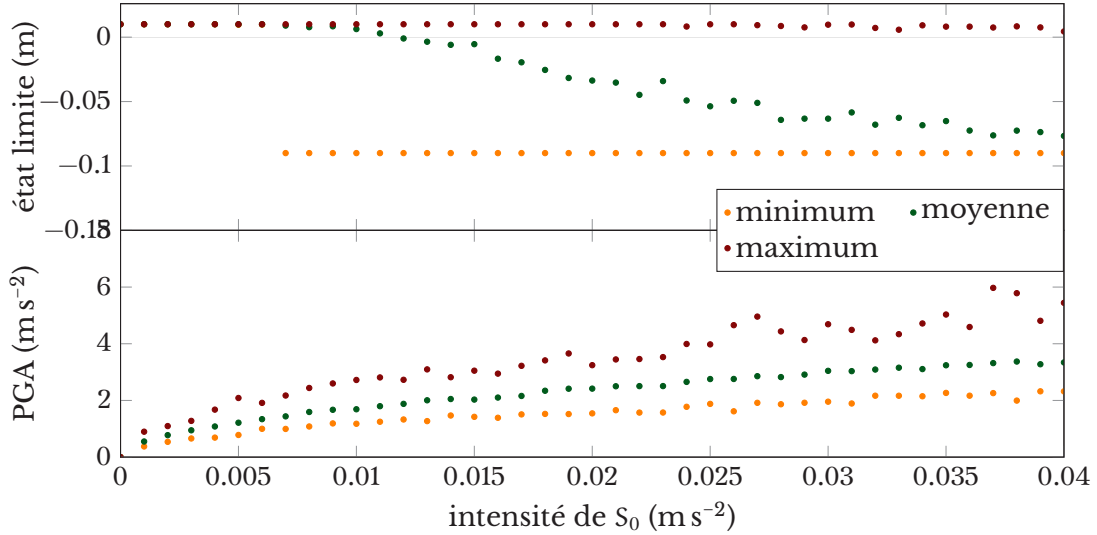


Figure 7.4 – Évolution des valeurs extrémales et moyennes du PGA et de la fonction d'état limite en fonction de S_0 pour un 1000-échantillon de réalisations simulées de l'accélération sismique

Retour sur la formulation fiabiliste

Comme nous sommes ici dans le cas particulier où $g =$ et $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ nous resterons ici sur la formulation fiabiliste initiale (7.52) simplifiée en la formulation (7.64) que nous rappelons ci-dessous :

$$P_f = \mathbb{P}(E) = \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p} \mathbb{I}_D(\mathbf{x}) p_Y(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

avec :

$$\begin{aligned} E &= E_f = \{\omega \in \Omega : g(\mathbf{Y}(\omega)) \leq 0\} \\ \Delta &= \Delta_f = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p : (\mathbf{y}) \leq 0\} \\ g(\mathbf{y}) &= \mathcal{H}_0 - \mathcal{H}(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

où l'application $\mathcal{H} = (\mathcal{H}(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p)$ est déterminée par le modèle de Housner, et donc aussi la fonction d'état limite $g = (g(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p)$. Rappelons que l'application $\mathcal{H}$, définie par (7.48), donne, pour tout τ fixé dans $\mathbb{R}^p$, le maximum du déplacement vertical du bloc au niveau de ses appuis au cours du mouvement entre les instants $\tau = 0$ et $\tau = T$, et que sa valeur maximal admissible $\mathcal{H}_0$ a été fixée à la valeur $\mathcal{H}_0 = 0,01$ m.

On notera que dans cette application l'accélération sismique (gaussienne), est unidirectionnelle et agit horizontalement. Tous ses caractéristiques sont connues (section 7.1) à l'exception de sa durée T et son intensité S_0 . Pour le paramètre T , nous avons fixé une fois pour toutes sa valeur à $T = 10$ s. Pour S_0 , nous avons retenu plusieurs valeurs et réalisé une étude paramétrique basée sur ces valeurs, avec pour observables de cette étude le PGA (*Peak Ground Acceleration*, soit ici le maximum en valeur absolue de l'accélération) et la valeur de la fonction d'état limite, grandeur évaluées à partir d'un 1000-échantillon numérique simulé de l'accélération. La figure (7.4) montre l'évolution de ces observables en fonction des valeurs retenues de S_0 . On peut observer que la première valeur de S_0 pour laquelle le bloc a atteint un état défaillant est $S_0 = 0,007 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$. Suite à cette analyse paramétrique, nous avons choisi d'effectuer la comparaison par les trois valeurs suivantes de S_0 : $S_0 = 0,005 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$, $S_0 = 0,010 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$ et $S_0 = 0,015 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$.

À la fonction d'état limite g , on associe les applications partielles en $y_k, k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ notées G_k , telles que :

$$G_k : y_k \xrightarrow{\mathbb{R}} \mathbb{R} G_k(y_k) = g((y_1^r, \dots, y_{k-1}^r, y_k, y_{k+1}^r, \dots, y_p^r)^T)$$

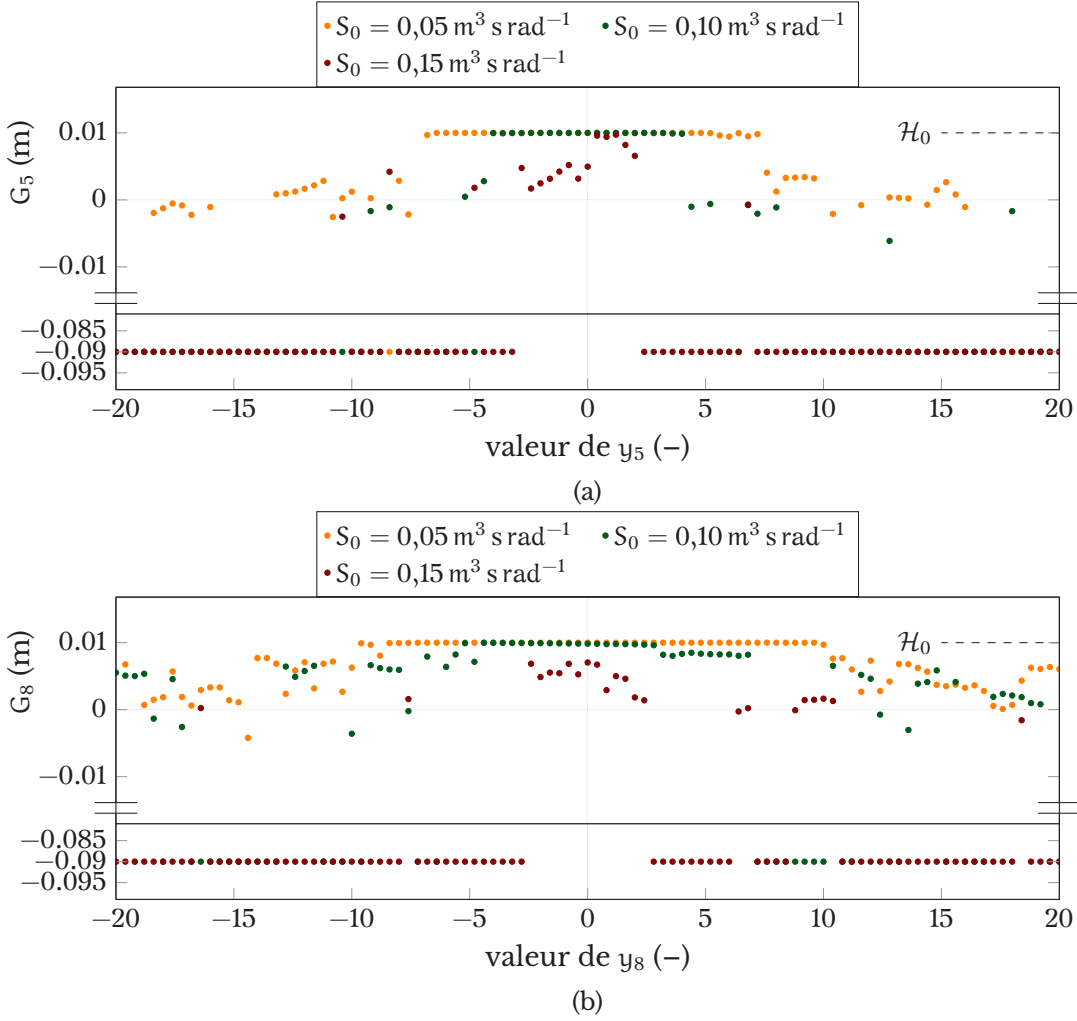


Figure 7.5 – Graphe des applications partielles associées à g en y_5 et en y_8

où $\mathbf{y}^r = (y_1^r, \dots, y_p^r)^\top$ est une réalisation simulée quelconque de la variable aléatoire $\mathbf{Y}$.

La figure <7.5> présente les graphes des applications partielles G_5 et G_8 . Cette figure montre que quel que soit le niveau du séisme, on peut distinguer deux zones de l'espace des $\mathbf{y}$. Proche de 0 le bloc ne bouge pas du tout (*i.e.* $\mathcal{H}(\mathbf{y}) = 0$, si bien que $g(\mathbf{y}) = \mathcal{H}_0 = 0,01\text{m}$). En dehors de cette zone, le bloc a un mouvement de basculement (*i.e.* $\mathcal{H}(\mathbf{y}) > 0$, et donc $g(\mathbf{y}) < \mathcal{H}_0$) qui provoquera éventuellement un renversement $g(\mathbf{y}) < 0$.

L'existence de ces deux zones est une particularité du modèle de Housner. En effet, le critère (3.3a) est une condition nécessaire de basculement du modèle de Housner :

$$\mathcal{H}(\mathbf{y}) > 0 \Rightarrow \text{PGA}(\mathbf{y}) = \max_{\tau \in \overline{\mathbf{T}}} (|\mathbf{E}_{\text{exc}}(\tau, \mathbf{y})|) \geq \gamma^{\text{gr}} \quad , \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \quad (7.103)$$

où $\mathbf{E}_{\text{exc}}(\bullet, \mathbf{y})$ est la réalisation du processus aléatoire modélisant l'accélération sismique associé à la réalisation $\mathbf{y}$ et γ^{gr} une valeur déterministe de la dimension d'une accélération dépendant uniquement de la géométrie du bloc. Dans le cas de notre étude, il conviendrait de remplacer la valeur 0 par son approximation numérique.

Pour chaque application G_k , la taille de la zone où $G_k(y_k) = \mathcal{H}_0$ dépend fortement de la valeur de la pulsation associée à la composante Y_k et légèrement de la réalisation $\mathbf{y}^r$ tirée, tandis que la position de cette zone vis-à-vis de 0 dépend

S_0	$P_{f.,M}$	M
$0,005 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$	$3,5149 \times 10^{-5}$	$5,121 \times 10^5$
$0,010 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$	0,030 428	$1,029 \times 10^5$
$0,015 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$	0,2234	38 900

Table 7.2 – Synthèse des résultats obtenus avec la méthode de Monte-Carlo standard

fortement de la réalisation $\mathbf{y}^r$.

On remarque sans surprise que la taille de la zone où $G_k(\mathbf{y}_k) = \mathcal{H}_0$ est d'autant plus grande que S_0 est petit (elle n'existe même pas pour $S_0 = 0,015 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$). Dans le cadre de nos trois applications numériques avec $S_0 \geq 0,005 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$, la présence de cet « hyper-plateau » ne nous a pas posé beaucoup de problèmes, mais nous soupçonnons que celui-ci poserait des problèmes pour des valeurs plus petites de S_0 . Si l'on souhaite s'en affranchir, la méthode que nous proposerions serait de définir et d'utiliser une fonction d'état limite g' telle que :

$$\begin{aligned} \text{si } |g(\mathbf{y}) - \mathcal{H}_0| &\leq \epsilon_{\text{num.}} & g'(\mathbf{y}) &= g(\mathbf{y}) + z(\gamma^{\text{gr.}} - \text{PGA}(\mathbf{y})) \\ \text{si } |g(\mathbf{y}) - \mathcal{H}_0| &> \epsilon_{\text{num.}} & g'(\mathbf{y}) &= g(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (7.104)$$

où $\epsilon_{\text{num.}}$ représente l'approximation numérique de la valeur 0 permise par le système de traitement automatisé de données utilisé, $\gamma^{\text{gr.}}$ est l'accélération limite des équations (3.3a) et (7.103), $\text{PGA}(\mathbf{y})$ est le maximum de l'accélération du séisme construit à partir de la réalisation $\mathbf{y}$ et z est un coefficient dimensionnel positif indéterminé. Compte tenu de (7.103), il est simple de montrer que les fonctions g et g' ont pour toute valeur de $\mathbf{y}$ le même signe :

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p, \text{sgn}(g'(\mathbf{y})) = \text{sgn}(g(\mathbf{y})) \quad (7.105)$$

et par conséquent, que le choix de g' plutôt que g ne modifie pas la probabilité de défaillance recherchée.

Le graphe de la fonction g' ne présente pas, lui, cet « hyper-plateau » au voisinage de $0_{\mathbb{R}^p}$.

Les résultats fournis par la méthode de Monte-Carlo standard

Soit U la performance fiabiliste du modèle mécano-probabiliste considéré relativement au critère de défaillance retenu telle que :

$$U = g\mathbf{Y} = \mathcal{H}_0 - \mathcal{H}\mathbf{Y} \quad (7.106)$$

C'est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour chaque niveau de séisme, nous avons effectué une procédure de Monte-Carlo standard. Les figures (7.6a), (7.7a), et (7.8a) présentent la convergence de l'estimation de la probabilité de défaillance P_f selon la taille M croissante du M-échantillon considéré. Les aires claires autour de chaque courbe correspondent aux intervalles de confiance à 95 %. On constate que les 500 000 tirages effectués pour le calcul à $S_0 = 0,005 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$ ne permettent pas encore la convergence de l'estimation.

La taille finale de l'échantillon M et la l'estimation correspondante de la probabilité de défaillance sont indiquées dans la table [7.2].

Les fonctions de répartitions de la performance fiabiliste associée aux M -échantillons, où M correspond à la taille finale indiquée dans la table [7.2], sont tracées sur les figures (7.6b), (7.6c), (7.7b), et (7.8b). On remarque que cette fonction de répartition est très abrupte, et que la probabilité $\mathbb{P}_g(\mathbf{Y}) = \mathcal{H}_0$ n'est pas de infinitésimale, voire est même grande.

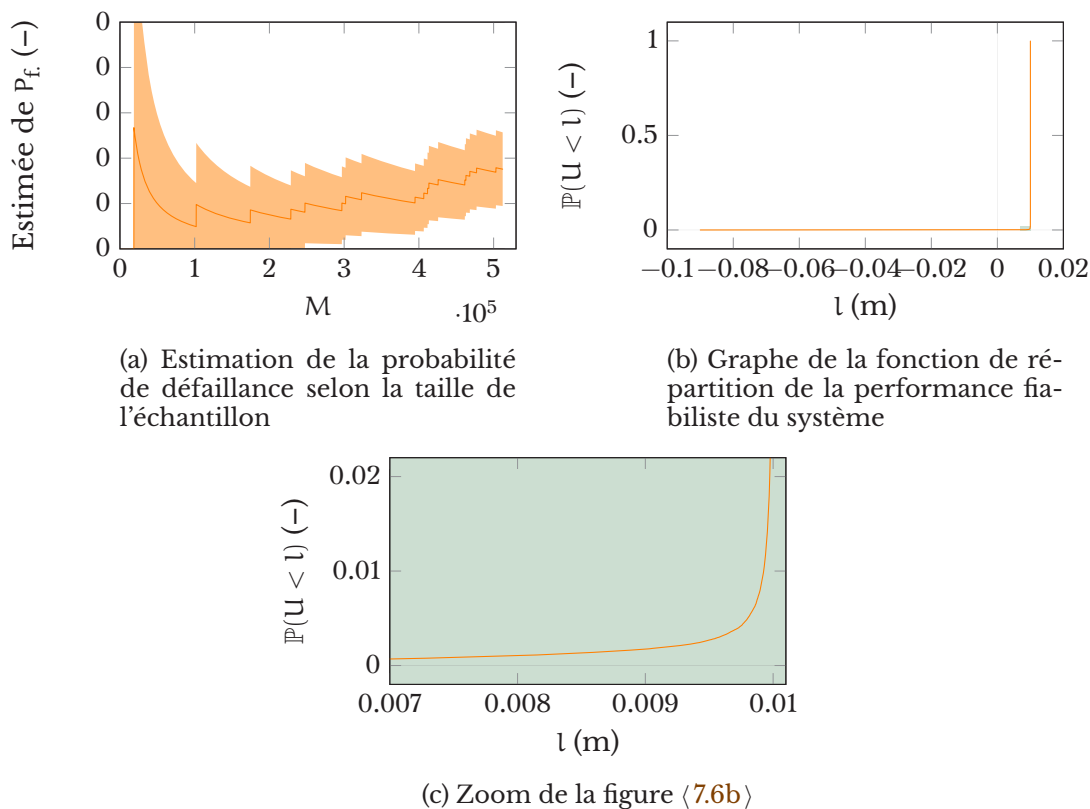


Figure 7.6 – Résultats de Monte Carlo pour $S_0 = 0,005 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$

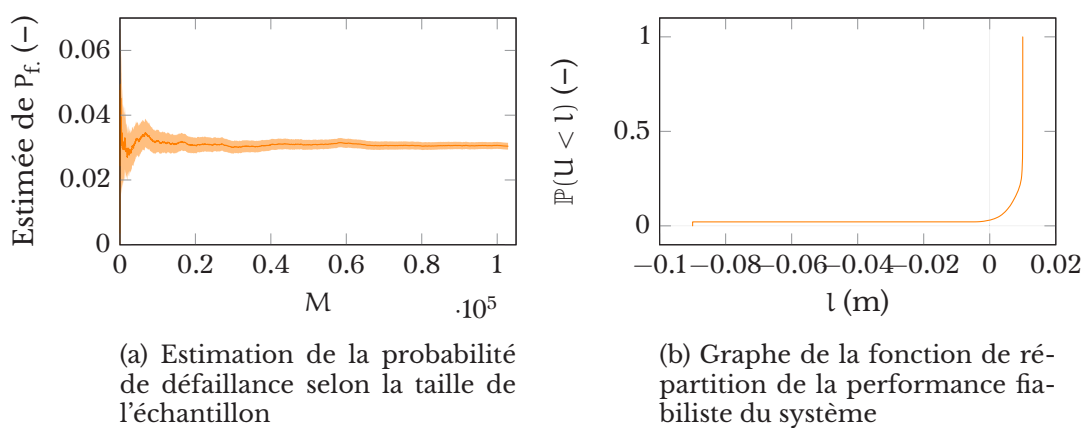
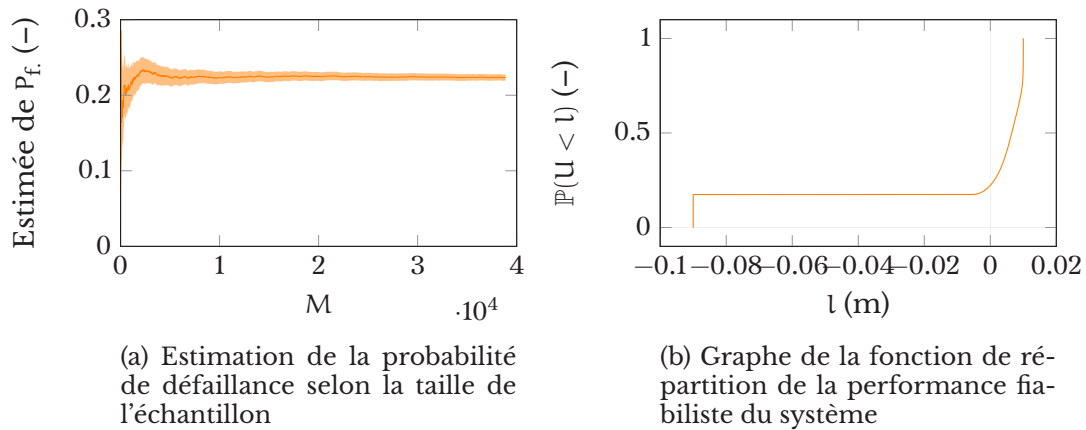


Figure 7.7 – Résultats de Monte Carlo pour $S_0 = 0,01 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$

Figure 7.8 – Résultats de Monte Carlo pour $S_0 = 0,015 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$

Résultats fournis par la méthode de *Subset Simulations*

Calculer avec les *Subset Simulations* n'est original que pour des très faibles probabilités ; dans le cas contraire, on risque de n'avoir qu'une seule phase de calcul, ce qui revient à réaliser une méthode de Monte-Carlo standard. Dans la suite, la méthode des *Subset Simulations* est appliquée seulement à la situation pour laquelle $S_0 = 0,005 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$.

Les implémentations classiques de la méthode des *Subset Simulations* fixent le nombre de réalisations m par itération. C'est le cas du logiciel FERUM (*Finite Element Reliability Using Matlab*, [72]) que nous avons utilisé. Pour chaque itération i , 1000 réalisations des variables aléatoires sont tirées et autant de calculs effectués. Plutôt que de fixer *a priori* les z_i et de mesurer les probabilités intermédiaires, ce sont les probabilités qui sont fixées à 10 % et les z_i qui sont mesurés.

Dix calculs indépendants avec la méthode des *Subset Simulations* ont été réalisés. Les probabilités de défaillance $p_{f,(SS)}$, ainsi que les coefficients de variation $c_v[\hat{P}_{f,(SS)}]$ calculés par FERUM sont indiquées dans le tableau [7.3].

On remarque que le coefficient de variation empirique de la probabilité de défaillance de ce 10-échantillon, notée $\hat{c}_{v10,(SS)}$ est bien supérieure à ce qui est prévu par la méthode des *Subset Simulations*. Ce grand coefficient de variation peut peut-être s'expliquer parce qu'il est calculé sur un échantillon de taille petite taille : 10.

On note cependant que les deux estimations de P_f : $p_{f,M,MCS}$ et $p_{f,10,SS}$ sont du même ordre de grandeur.

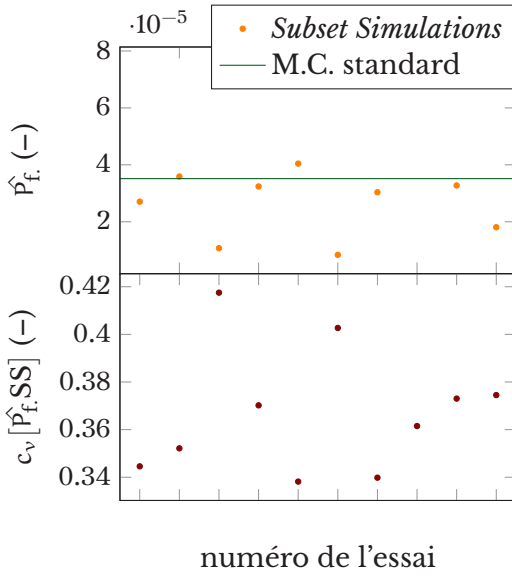
Comparaison entre les estimations des $\mathbb{P}[E_i | E_{i-1}]$ par la méthode de Monte-Carlo standard et ceux obtenus par la méthode de Métropolis–Hasting

La procédure des *Subset Simulation* suppose le calcul de probabilités intermédiaires $\mathbb{P}[E_i | E_{i-1}]$. Celles-ci sont déterminées par la méthode de Métropolis–Hasting, à l'aide d'un 1000-échantillon de réalisation de $g(Y)$ bien choisi.

Nous nous proposons de comparer les estimations de ces probabilités intermédiaires obtenues par la méthode de Métropolis–Hasting à l'estimation obtenue par le M-échantillon

La table [7.4] présente les résultats partiels de 5 calculs de la probabilité de défaillance du modèle où $S_0 = 0,005 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$ par la méthode des *Subset Simulation*. Chaque case correspond à la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[E_i | E_{i-1}]$, avec z_i et z_{i-1} donnés en haut à droite et en haut à gauche. La première ligne correspond à la valeur proposée par les *Subset Simulations* — qui vaut par construction 10 % excepté pour le dernier pas — et la seconde à l'estimation de cette valeur par la méthode de Monte-Carlo standard avec un échantillon de 500 000 calculs.

Ces comparaisons sont aussi représentées sur la figure <7.9>. La surface cor-



(a) Illustration graphique des résultats de la table [7.3b]

	$P_{f,(SS)}$	$c_v[\hat{P}_{f,(SS)}]$
	$2,7064 \times 10^{-5}$	0,3446
	$3,5900 \times 10^{-5}$	0,3521
	$1,0700 \times 10^{-5}$	0,4175
	$3,2400 \times 10^{-5}$	0,3702
	$4,0436 \times 10^{-5}$	0,3382
	$8,3670 \times 10^{-6}$	0,4027
	$3,0370 \times 10^{-5}$	0,3398
	$7,4766 \times 10^{-5}$	0,3615
	$3,2752 \times 10^{-5}$	0,3730
	$1,8073 \times 10^{-5}$	0,3745
Moy _{10,(SS)}	$3,2528 \times 10^{-5}$	0,3666
É-T _{10,(SS)}	$1,9212 \times 10^{-5}$	0,0278
C V _{10,(SS)}	0,5906	0,0759
$P_{f,M}$	$3,5149 \times 10^{-5}$	

(b) Estimation de la probabilité de défaillance et du coefficient de variation obtenus par 10 calculs successifs de par la méthode des *Subset Simulations*; moyennes, écarts-type et coefficients de variation sur ce 10-échantillon; et comparaison avec le résultat obtenu par la méthode de Monte-Carlo standard

Table 7.3 – Synthèse des résultats obtenus avec la méthode des *Subset Simulations*

respond à l'estimation par la méthode de Monte-Carlo standard avec le même échantillon, la ligne verte correspond à l'isovaleur $\mathbb{P}[E_i | E_{i-1}] = 10\%$ et la ligne grise sa projection normale sur le plan $z = 0$, et les traits verticaux correspondent aux résultats partiels obtenus avec les 1000-échantillons construits avec l'algorithme de Métropolis-Hasting. Comme indiqué sur la figure (7.9b), les traits rouges et oranges signifient que la probabilité déterminée par les *Subset Simulations* est plus petite que celle déterminée par la méthode Monte-Carlo standard : le trait rouge correspond à la valeur déterminée par les *Subset Simulations* et le complément orange montre la valeur trouvée par la méthode de Monte-Carlo standard. Les traits rouges et bleus signifient que la probabilité déterminée par les *Subset Simulations* est plus grande que celle déterminée par la méthode Monte-Carlo standard : le trait rouge correspond à la valeur déterminée par la méthode de Monte-Carlo standard et le complément bleu montre la valeur trouvée par les *Subset Simulations*.

Globalement, malgré la forme de la surface $z = \mathbb{P}[g(\mathbf{x}) < x | g(\mathbf{x}) < y]$, les valeurs obtenues par les *Subset Simulations* sont proches de ce qui est déterminé par la méthode de Monte-Carlo standard. L'algorithme de Métropolis-Hasting permet donc de retrouver assez fidèlement les probabilités intermédiaires. Ceci se remarque même au voisinage de $x = z_{i-1} \approx 0.01$ et $y = z_i \geq 0.05$ où la surface est très pentue.

$100 \times z_0$	$100 \times z_1$	$100 \times z_2$	$100 \times z_3$	$100 \times z_4$	$100 \times z_5$
$+\infty$	0,999 90	0,992 81	0,853 24	0,458 94	0

SS	10 %	10 %	10 %	10 %	27,064 %
MCS	8,07 %	12,7 %	13,3 %	15,6 %	16,7 %

(a)

$100 \times z_0$	$100 \times z_1$	$100 \times z_2$	$100 \times z_3$	$100 \times z_4$	$100 \times z_5$
$+\infty$	0,999 93	0,992 47	0,847 00	0,372 35	0

SS	10 %	10 %	10 %	10 %	35,900 %
MCS	8,79 %	11,3 %	13,2 %	10,8 %	25,0 %

(b)

$100 \times z_0$	$100 \times z_1$	$100 \times z_2$	$100 \times z_3$	$100 \times z_4$	$100 \times z_5$
$+\infty$	0,999 94	0,991 51	0,837 52	0,462 68	0

SS	10 %	10 %	10 %	10 %	10,700 %
MCS	4,39 %	20,8 %	13,6 %	17,4 %	16,22 %

(c)

$100 \times z_0$	$100 \times z_1$	$100 \times z_2$	$100 \times z_3$	$100 \times z_4$	$100 \times z_5$
$+\infty$	0,999 94	0,993 97	0,742 69	0,278 96	0

SS	10 %	10 %	10 %	10 %	32,400 %
MCS	4,39 %	12,7 %	7,21 %	10,1 %	41,9 %

(d)

$100 \times z_0$	$100 \times z_1$	$100 \times z_2$	$100 \times z_3$	$100 \times z_4$	$100 \times z_5$
$+\infty$	0,999 96	0,993 82	0,832 77	0,323 41	0

SS	10 %	10 %	10 %	10 %	40,436 %
MCS	9,87 %	11,6 %	10,1 %	8,47 %	32,4 %

(e)

$100 \times z_0$	$100 \times z_1$	$100 \times z_2$	$100 \times z_3$	$100 \times z_4$	$100 \times z_5$	$100 \times z_6$
$+\infty$	0,999 95	0,993 24	0,856 82	0,449 38	0,062 54	0

SS	10 %	10 %	10 %	10 %	10 %	83,670 %
MCS	9,45 %	11,3 %	12,85 %	14,5 %	20,1 %	85,7 %

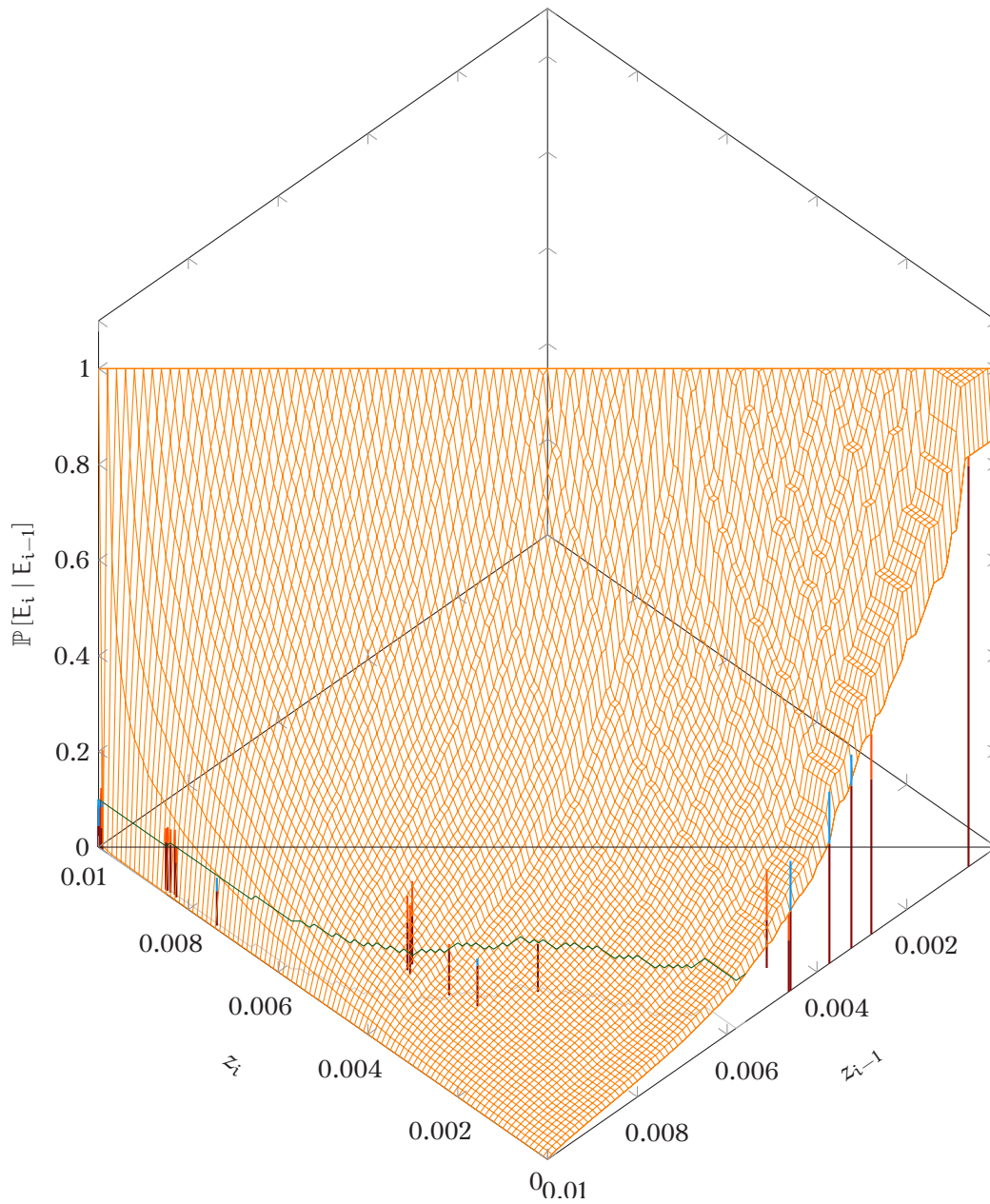
(f)

$$100 \times z_{i-1} \qquad 100 \times z_i$$

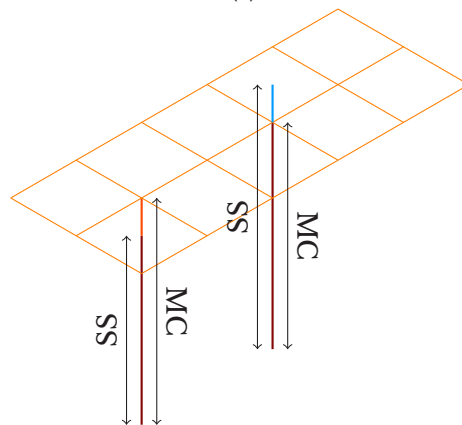
$$\mathbb{P}[(U < z_i) \mid (U < z_{i-1})]$$

(g)

Table 7.4 – Comparaison entre les estimations des $\mathbb{P}[E_i \mid E_{i-1}]$ par la méthode de Monte-Carlo standard et ceux obtenus par la méthode de Métropolis–Hasting. Chaque case correspond à la probabilité que la performance fiabiliste soit inférieure à z_i sachant qu'elle est inférieure à z_{i-1} , [7.4g].



(a)



(b) Légende de la figure <7.9a>

Figure 7.9 – Estimation par Monte-Carlo direct de la surface $z = \mathbb{P}[g(\mathbf{x}) < x | g(\mathbf{x}) < y]$ et résultats partiels de la méthode des *Subset Simulations*



Conclusions et perspectives de recherche

Dans le cadre de ce travail de thèse, nous sommes intéressés au comportement de basculement de structures rigides simplement posées au sol lorsqu'elles sont soumises à un séisme. Pour simplifier l'étude, nous avons concentré notre attention sur les structures élancées de forme parallélépipédique rectangle. Nous avons commencé par analyser le comportement de basculement libre — sans sollicitation sismique — d'un « bloc » d'élancement 7 en acier massif. L'instrumentation originale de l'expérience, avec des capteurs de vitesse de rotation convective, a permis d'observer lors d'un essai de lâcher plan, pour lequel on s'attend intuitivement à un mouvement plan, un mouvement hors-plan complexe et reproductible. Nous avons alors proposé un modèle, nommé *8 Asymmetrical Contact Points* (8ACP) qui permet d'expliquer ce comportement par un défaut géométrique au niveau des contacts avec le support. Nous avons ensuite réalisé une campagne expérimentale de grande ampleur comprenant plus de 400 essais réalisés sur 4 blocs "identiques" simultanément. Deux séries d'essais ont été particulièrement exploitées : une série de 100 essais sismiques unidirectionnels avec 100 consignes différentes et une autre de 100 essais sismiques unidirectionnels avec 100 consignes identiques. Ceci a permis d'identifier un comportement statistique face à deux niveaux de variabilité de l'entrée. Nous avons ensuite comparé le comportement du modèle 8ACP à celui observé expérimentalement, ce qui a permis de statuer sur la validité du modèle proposé. Une fois le modèle validé, nous avons réalisé une formalisation probabiliste du problème de stabilité d'un bloc rigide élancé sous séisme. Enfin, nous avons appliqué, au modèle de bloc d'Housner, la méthode des *Subset Simulations* pour évaluer la probabilité de défaillance sous séisme.

Ainsi, lors de ce travail, nous avons montré :

1. Que lors d'essais de lâcher de blocs parallélépipédiques en apparence symétriques et homogènes, un mouvement hors-plan complexe peut être observé. La « forme temporelle » du mouvement est très dépendante de la rigidité du bloc, et en particulier des appuis (chapitre 3).
2. Que du fait de la géométrie des blocs (base carrée avec 4 appuis) ce mouvement hors-plan a présenté un haut degré de reproductibilité durant un intervalle de temps compris entre le premier et le deuxième *main impact* (chapitre 3).
3. Qu'il n'est pas possible de représenter correctement le mouvement hors-plan observé expérimentalement sur un bloc très rigide (en acier dont 4 pieds sont usinés dans la masse) simplement en jouant sur des raideurs d'appuis ou sur des coefficients d'amortissement (chapitre 3).
4. Qu'un modèle à 4 points d'appuis comportant des défauts de géométrie est capable de représenter correctement le comportement présentant un haut degré de reproductibilité mais qu'il n'est pas suffisant pour représenter un essai de lâcher dans son ensemble (chapitre 3).

5. Qu'un modèle à 8 points d'appuis, incluant des défauts de géométrie, est capable de reproduire très correctement le mouvement observé expérimentalement lors d'essais de lâcher (chapitre 3).
6. Qu'un bloc non symétrique est plus enclin au renversement qu'un bloc symétrique, pour des niveaux de séisme modérés (de l'ordre de g/e , g étant l'accélération de la gravité et e l'élancement du bloc) (chapitres 3 et 4).
7. Que l'accumulation de vitesse de rotation observée expérimentalement sur un bloc rigide, initialement immobile, en position d'équilibre et soumis à un pic d'accélération est plus importante que celle prédite par un modèle « naïf », symétrique et sans défaut de géométrie. En revanche, cette accumulation est correctement retrouvée par le modèle 8ACP ainsi que par un modèle symétrique qui prend en compte un défaut d'élancement apparent (chapitre 4).
8. Que le modèle 8ACP peut présenter une certaine instabilité aux conditions initiales lors de l'initiation du mouvement de basculement (chapitre 4).
9. Que dans une simulation s'affranchissant des problèmes présentés aux considérations 7 et 8, le mouvement calculé par le modèle 8ACP permet de représenter le mouvement expérimental :
 - a) pendant une durée plus longue que ne peut le faire le modèle symétrique sans défaut ;
 - b) de façon contre-intuitive, pendant une durée plus longue que le mouvement d'un bloc expérimental posé simultanément sur la table vibrante (chapitre 4).
10. Que le mouvement expérimental d'un bloc présentant un mouvement hors-plan important s'amortit plus vite. Nous expliquons ceci par le fait que le mouvement hors-plan conduit à de nombreux petits impacts qui augmentent donc la dissipation d'énergie au cours du temps (chapitre 4).
11. Qu'un modèle symétrique prenant en compte un défaut de géométrie augmentant l'élancement apparent donne une estimation majorée de la propension d'un bloc au renversement lors d'un séisme unidirectionnel, mais que cette estimation n'est pas majorante face à un séisme bidirectionnel (chapitre 4).
12. Que le modèle 8ACP permet de retrouver correctement le niveau de variabilité observée expérimentalement, et ceci que la variabilité de l'excitation soit très forte (signaux sismiques différents) ou très faible (signaux sismiques expérimentaux aussi identiques que possible) ; dans les deux cas, la variabilité du mouvement du bloc est correctement retrouvée au cours du temps (chapitre 4).
13. Que la méthode des *Subset Simulations* peut être appliquée à ce type de structure pour résoudre le problème de fiabilité (chapitre 7).

Malgré ces résultats, on regrette de ne pas avoir eu le temps de lancer des calculs de fiabilité avec le modèle 8ACP. Ceci aurait sans doute demandé peu de temps supplémentaire, et aurait permis de boucler le fil conducteur de ce travail. Ceci aura appris au candidat doctorant une certaine frustration, causée par le fait qu'en sciences, il devient parfois plus important de rendre les travaux à l'heure que de les rendre "terminés".

Permettons-nous l'exégèse de la conclusion 9b. Admettons que l'on cherche à représenter le mouvement d'un bloc posé sur la table vibrante. Malgré tout le soin apporté lors de la campagne expérimentale, nous obtenons le résultat étonnant que le mouvement d'un bloc « identique »¹ posé « avec précision » juste à côté du bloc considéré est une moins bonne prédiction que le résultat du calcul du modèle numérique simple mais bien paramétré. Ce type de résultat témoigne de la mauvaise reproductibilité et de la grande sensibilité du mouvement de basculement

1. Les guillemets ne signifient pas un regret concernant notre manipulation mais plutôt l'acceptation que celle-ci ne pouvait pas, de fait, atteindre une précision assez grande.

de bloc rigide. Dans ce genre de problème, on peut être découragé (et à raison) de proposer un modèle prédictif, et se résigner à prendre des marges et proposer des mécanismes de dimensionnement très conservatifs. Mais à partir de résultats expérimentaux présentant certaines invariances, on peut parfois comprendre certains mécanismes et proposer un modèle capable de reproduire le résultat expérimental. Ceci ne permet en aucun cas de le prévoir (puisque l'on ne pourrait pas déterminer la valeur des paramètres *a priori*), mais peut permettre de l'imiter. C'est encore plus utile lorsque, comme dans notre cas, le modèle paramétré une seule fois permet de reproduire statistiquement un échantillon de comportements expérimentaux.

Certes, le résultat qui en ressort n'est pas forcément applicable en l'état à un problème industriel : rares sont les blocs parallélépipédiques, homogènes, non encastrés au sol et qui demandent une étude de résistance au séisme... mais cette démarche a montré qu'il n'était pas illusoire de chercher à comprendre finement les caractéristiques d'un comportement aussi complexe que celui des corps basculants. En effet, nous nous posions au début de la thèse la question de savoir si le comportement hors-plan que l'on avait observé, et que l'on ne comprenait pas encore, avait une influence sur la stabilité. À cette question, la thèse apporte une méthode de réponse qui elle-même peut servir d'inspiration pour l'analyse du comportement complexe de certaines structures similaires comme, par exemple, les dispositifs industriels présentés à la figure (1.1).

À la suite de ce travail, les structures que nous proposerions d'étudier en premier sont celles qui ajoutent une seule difficulté à l'exercice. Il pourrait s'agir d'une structure qui laisse plus de place au glissement, soit parce que l'état de surface est plus lisse, soit parce que sa géométrie est moins élancée. Il pourrait aussi s'agir d'une structure moins rigide et qui laisse la place au stockage d'une quantité d'énergie sous forme de déformation interne. Il pourrait enfin s'agir d'un assemblage de plusieurs blocs rigides interagissant ensemble.

D'autre part, l'étude que nous avons faite n'est pas totalement complète. Au delà des résultats numériques qui ne demandent que davantage de temps de calcul, un aspect important mériterait d'être encore travaillé. Le modèle proposé pour étudier la probabilité de défaillance pêche dans la définition des variables aléatoire correspondant aux aspects mécaniques. Peu de campagnes expérimentales contiennent assez d'essais pour réaliser une caractérisation mécanique probabiliste ; lorsqu'elles en contiennent assez, tous les essais ne sont pas systématiquement exploités. Il conviendrait, je pense, de prévoir pour la plupart des campagnes expérimentales l'objectif de cette caractérisation statistique des grandeurs mécaniques.



Post-traitement des signaux

Mesurer le mouvement de structures libres soumises au glissement et au basculement est une tâche compliquée. Puisque la structure n'est pas encadrée, le moindre effort peut la faire bouger. Concrètement, la réaction du fil d'un capteur de déplacement est suffisante pour faire basculer un bloc que l'on aurait posé en équilibre sur deux pieds. La plupart des essais qui ont été réalisés avant cette campagne utilisent des méthodes de mesure sans contact ; le mouvement du bloc peut même être tout simplement suivi par chrono-photographie. Aujourd'hui, le traitement numérique des images permet un suivi des six degrés de liberté d'un bloc avec une seule caméra.

La particularité de la campagne GlisBasc est d'avoir utilisé comme mesure principale des capteurs de vitesse de rotation militaires particulièrement précis. D'une part, la grandeur principale n'est plus un déplacement mais une dérivée du déplacement : la vitesse de rotation, ceci met donc en valeur des mouvements de fréquence élevée ; et d'autre part, la précision des capteurs utilisés permet de repérer des amplitudes de mouvement très faibles. Pour ces deux raisons, les essais ont mis en évidence que, malgré des conditions expérimentales visant à obtenir un comportement plan, le mouvement des blocs avait un composante hors-plan. Ce mouvement 3D avait déjà été globalement observé, mais pas encore étudié en détail.

Le protocole expérimental a induit des pollutions sur les signaux mesurés. La première étape consiste donc à trier sur les signaux les composantes dues aux erreurs expérimentales des composantes réellement dues aux mouvement hors-plan. Quatre corrections ont été apportées aux signaux bruts :

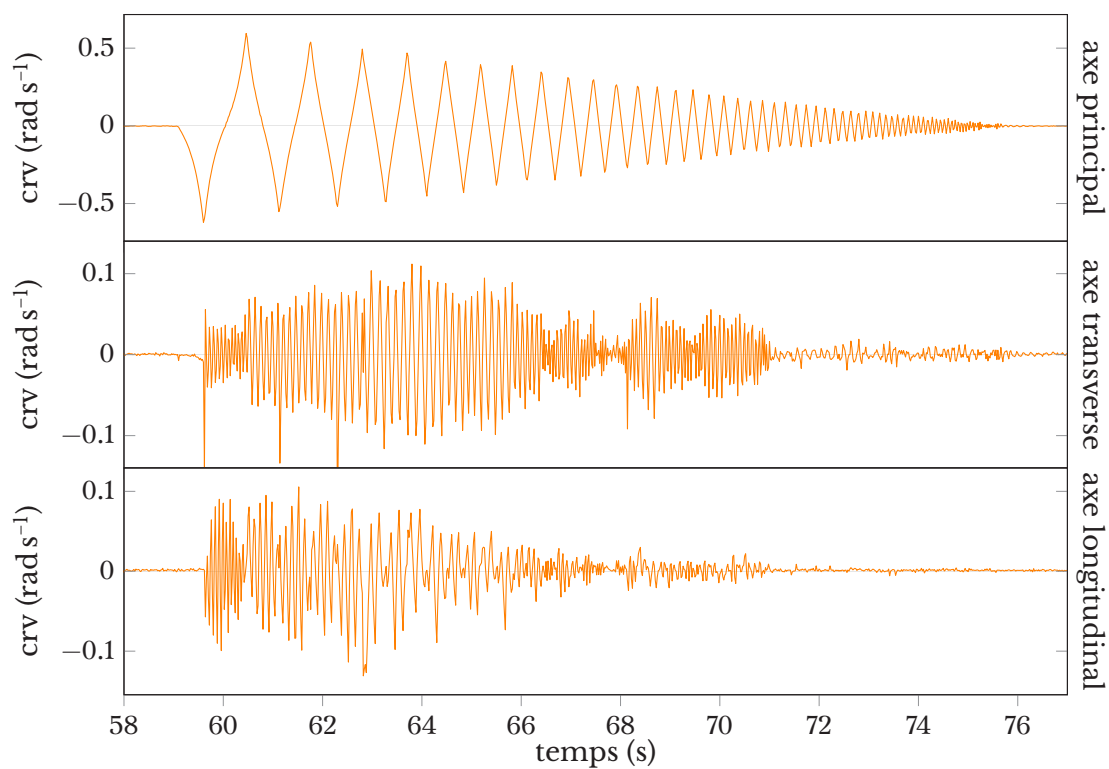
- le filtrage de signal brut,
- la correction des composantes continues,
- la correction des défauts angulaires de positionnement des capteurs de vitesse de rotation,
- le recalage de l'axe des temps.

Les signaux bruts sont présentés sur la figure [A.1](#).

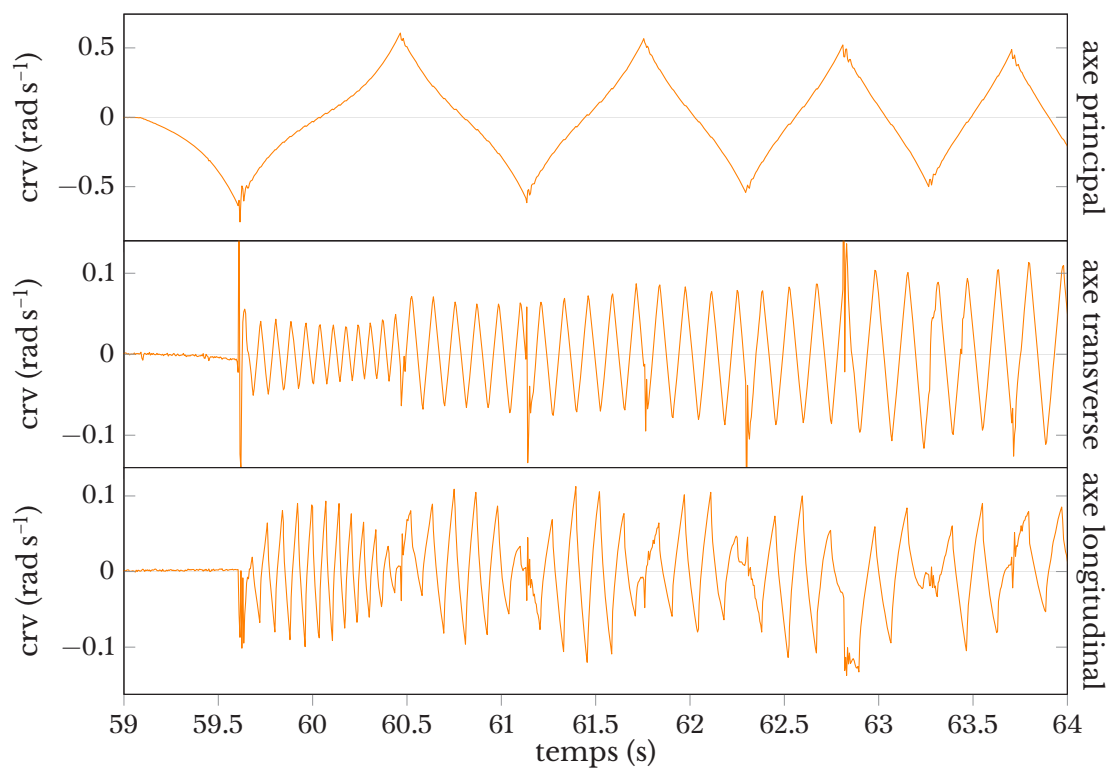
A.1 Le filtrage des signaux

Les mesures de vitesses de rotation sont polluées par un bruit de mesure qui se visualise bien lorsque le bloc est immobile. De plus lors des impacts du bloc avec le support, des ondes de chocs perturbent légèrement les signaux.

La figure [A.2](#) présente le résultat d'un filtrage utilisé dans cette partie. Il s'agit d'un fenêtrage uniforme, avec une fenêtre de 2×5 ms. On observe que l'amplitude des pics dans l'axe principal ou dans les axes transverse et longitudinal n'est pas particulièrement affectée. La comparaison des vitesses de rotation entre les différents modèles et l'expérience montera au chapitre **3** que l'amplitude des pics

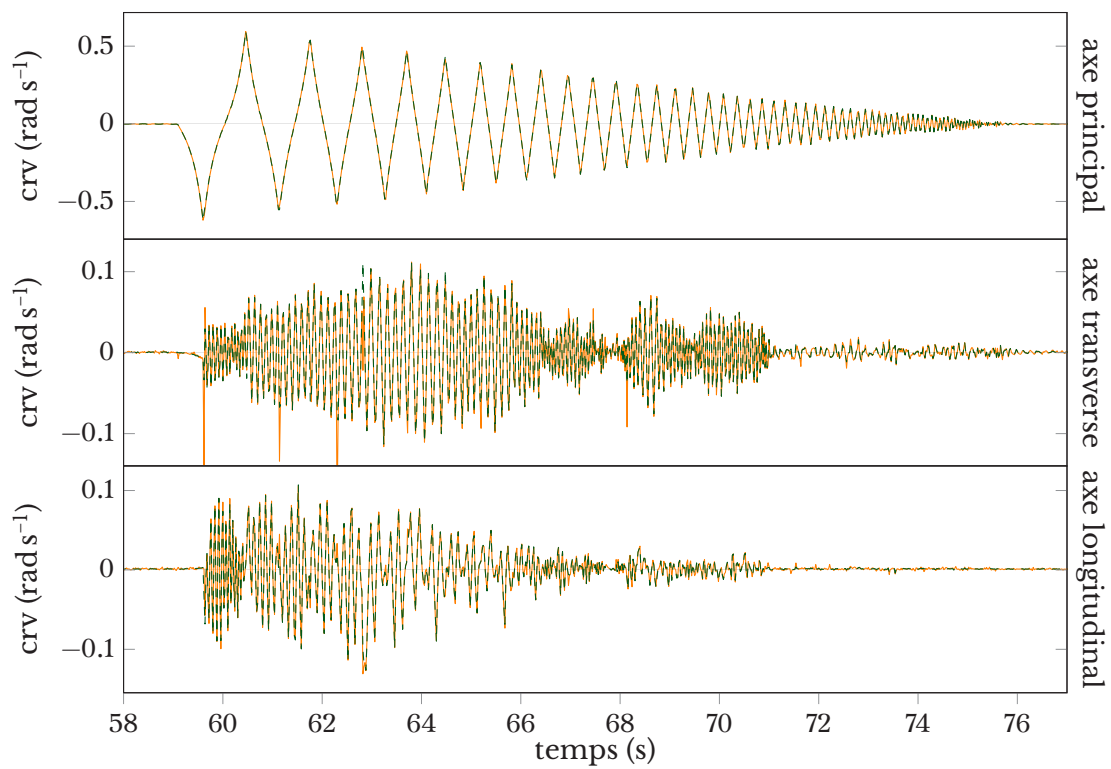


(a)

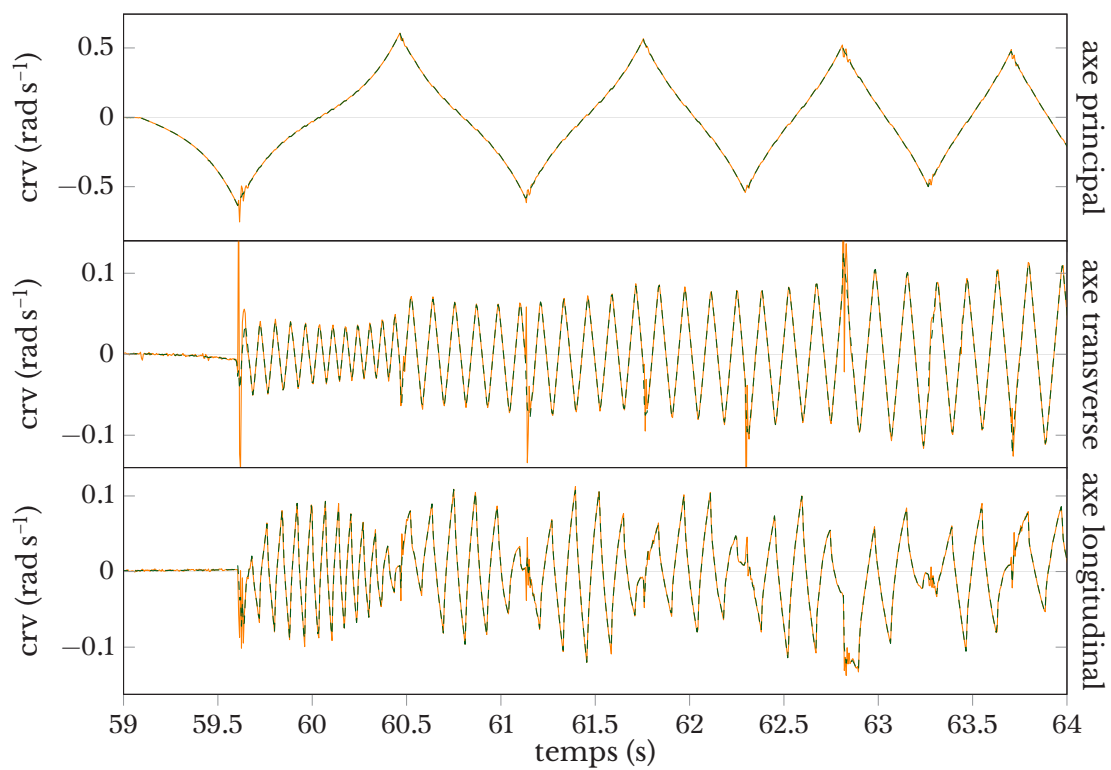


(b)

Figure A.1 – Signaux bruts des vitesses de rotation convectives



(a)



(b)

Figure A.2 – Effet du filtre sur les signaux

numériques surestime légèrement l'amplitude des pics expérimentaux. Cette sur-estimation ne pourra donc pas être attribuée à ce filtre.

A.2 La correction des composantes continues

De façon générale, un capteur perd son calibrage au cours du temps. Certes, avant chaque campagne d'essai, il est d'usage de refaire les zéros. Mais le temps de réaliser les essais le capteur peut s'être dérégler. Il est alors nécessaire de supprimer la composante continue du signal.

Dans le cas où les processus étudiés sont à moyenne nulle, il suffit tout simplement de retrancher au signal sa moyenne calculée sur un temps suffisamment long. Les vitesses de rotation d'un bloc basculant, du fait de la composition des rotations, n'est pas un processus à moyenne nulle même si le bloc démarre et s'arrête dans la même position d'équilibre.

La seule difficulté est de penser à faire le zéro non pas en retranchant la moyenne sur le signal entier, mais sur une partie de signal correspondant à une durée pendant laquelle le bloc était immobile. En pratique, l'acquisition a été lancée environ 10 s avant d'effectuer la mise en position des blocs. Tous les signaux ont pu être tarés sur une plage d'au moins 5 s soit 5000 points.

La figure <A.3> montre que les zéros étaient déjà relativement bien calibrés.

A.3 La correction des défauts angulaires de positionnement des capteurs

La suite de notre étude utilisera avec précision les mesures de vitesses de rotations autour des axes transverse et longitudinal, afin d'attribuer le mouvement mesuré à des défauts du bloc. À cette étape du post-traitement, il s'agit de vérifier que les signaux mesurés ne sont plutôt dus à un défaut de positionnement du capteur. Soit $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère orthonormé parfait associé au bloc en mouvement. Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ le repère formé par les axes des capteurs, qui par hypothèse est fixe par rapport à $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, et proche de ce même repère. On note $\Omega^{(\bullet)}$ les différentes vitesses de rotations. On peut exprimer les vitesses de rotation mesurées par rapport aux vitesses idéales :

$$\begin{aligned}\Omega^{(\vec{u})} &= \cos(b_{11})\Omega^{(\vec{x})} + \sin(b_{12})\Omega^{(\vec{y})} + \sin(b_{13})\Omega^{(\vec{z})} \\ \Omega^{(\vec{v})} &= \sin(b_{21})\Omega^{(\vec{x})} + \cos(b_{22})\Omega^{(\vec{y})} + \sin(b_{23})\Omega^{(\vec{z})} \\ \Omega^{(\vec{w})} &= \sin(b_{31})\Omega^{(\vec{x})} + \sin(b_{32})\Omega^{(\vec{y})} + \cos(b_{33})\Omega^{(\vec{z})}\end{aligned}\tag{A.1}$$

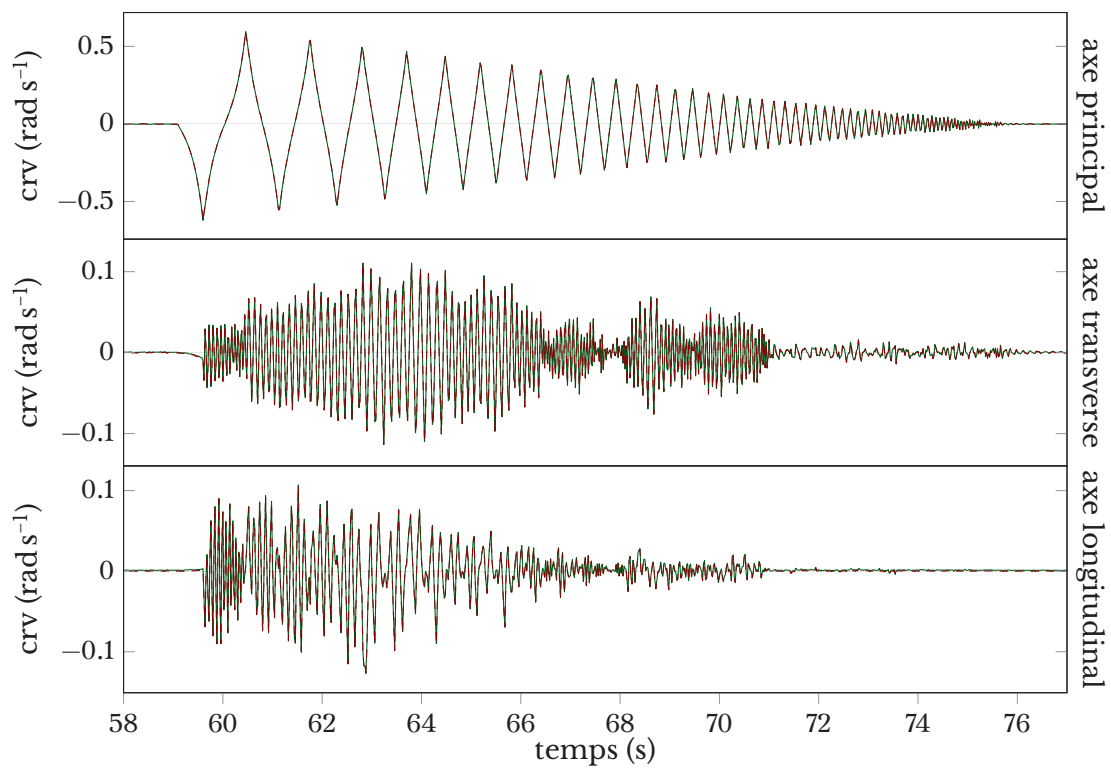
où les $b_{\bullet}$ des angles proches de 0. Puisque la vitesse de rotation autour l'axe principal est un ordre de grandeur au dessus de celles autour des axes transverse et longitudinaux, on se permet de simplifier l'équation (A.1), puis de la linéariser au premier ordre en :

$$\begin{aligned}\Omega^{(\vec{u})} &= \Omega^{(\vec{x})} \\ \Omega^{(\vec{v})} &= \Omega^{(\vec{y})} + b_{21}\Omega^{(\vec{x})} \\ \Omega^{(\vec{w})} &= \Omega^{(\vec{z})} + b_{31}\Omega^{(\vec{x})}\end{aligned}\tag{A.2}$$

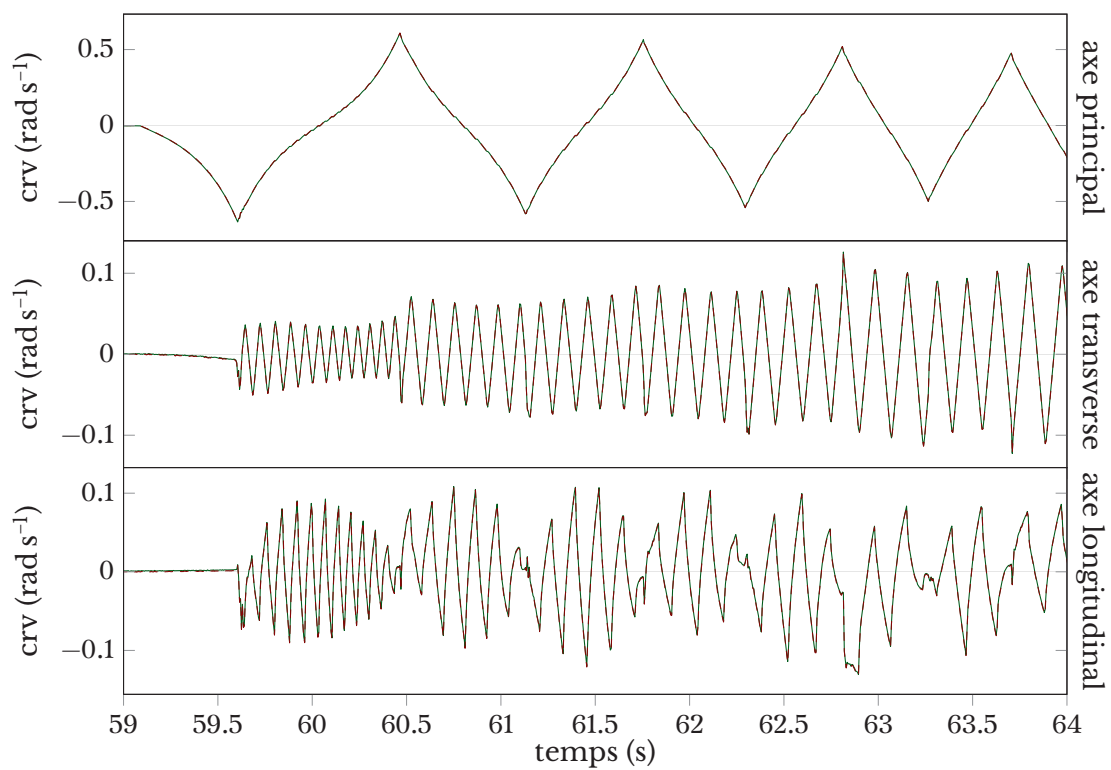
On cherche alors à déterminer b_{21} et b_{31} . Pour cela, on fait l'hypothèse que durant un intervalle de temps I – entre le lâché et le premier impact – le bloc a un mouvement plan. Sur cet intervalle, $\Omega^{(\vec{y})}(\tau) = \Omega^{(\vec{z})}(\tau) = 0$. On utilise alors les fonctions d'erreur :

$$\varepsilon_{\vec{v}} : b_{21} \xrightarrow{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+} \int_{\tau \in I} \left(\Omega^{(\vec{v})} - b_{21}\Omega^{(\vec{u})} \right)^2 d\tau \quad \varepsilon_{\vec{w}} : b_{31} \xrightarrow{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+} \int_{\tau \in I} \left(\Omega^{(\vec{w})} - b_{31}\Omega^{(\vec{u})} \right)^2 d\tau \tag{A.3}$$

La trajectoire de ces fonctions pour le signal traité dans cette partie est tracé sur la figure <A.5>. On constate qu'il existe un minimum global, et que le graphe au voisinage de celui-ci est régulier. Une procédure d'optimisation détermine donc

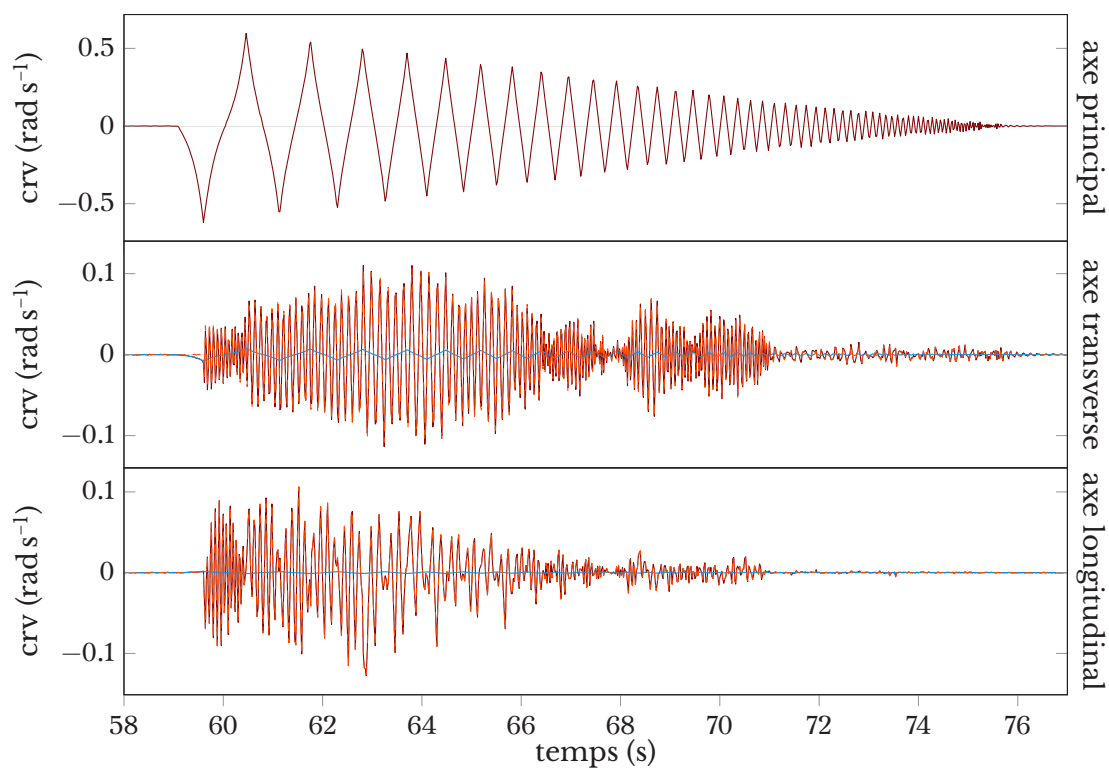


(a)

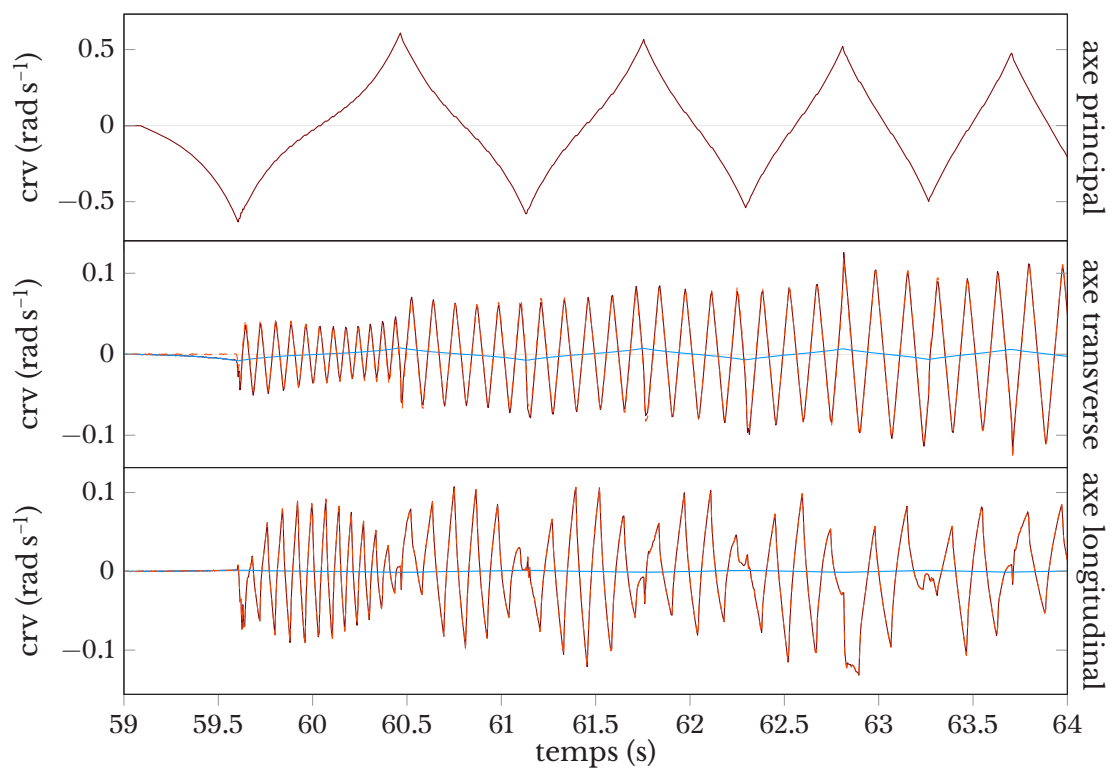


(b)

Figure A.3 – Effet de la tare sur les signaux



(a)



(b)

Figure A.4 – Effet de la correction d'angle

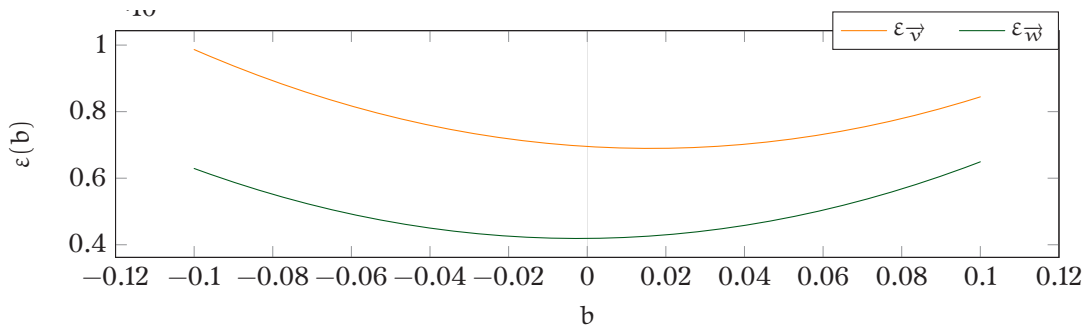


Figure A.5 – Représentation de $\varepsilon_{\vec{v}}$ et $\varepsilon_{\vec{w}}$ en fonction du facteur de correction b pour l'essai 1

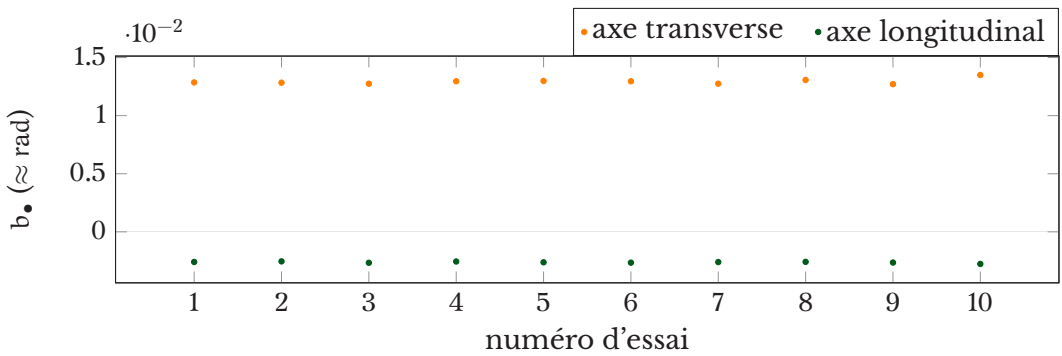


Figure A.6 – Valeur des facteurs de correction b pour chaque essai

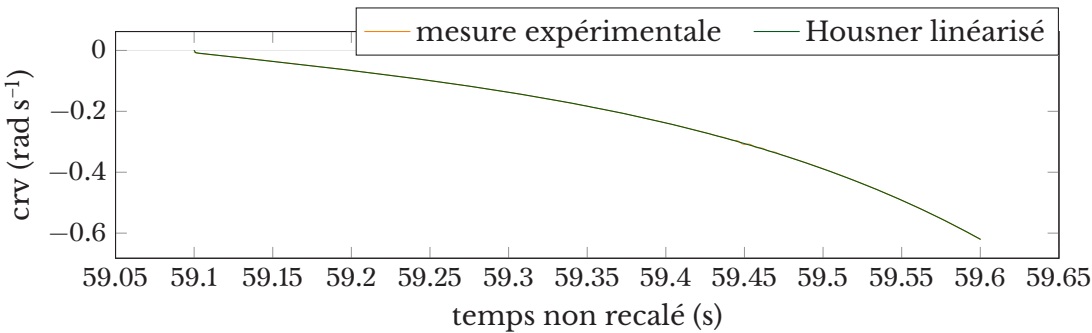


Figure A.7 – Comparaison entre la mesure et le mouvement idéal de Housner linéarisé entre le lâché et le premier impact

aisément les valeurs de b_{21} et b_{31} . Sur les dix essais réalisés avec le bloc, les valeurs des $b_{\bullet}$ sont très proches, comme le montre la figure (A.6). Ceci est cohérent avec le fait que l'on attribue ce phénomène à un défaut de positionnement du capteur : puisque les capteurs n'ont pas été décollés entre les essais, on s'attend à ce que le biais soit constant entre deux essais.

On remarque que le défaut de positionnement est d'environ 0,01 rad, soit de l'ordre du degré. Ceci est compatible avec le système de collage utilisé et la précision attendue.

A.4 Le calcul de l'instant initial

La dernière étape est la détermination de l'instant 0. Ceci est réalisé par comparaison avec le modèle de Housner linéarisé pour le mouvement le basculement

libre mono-directionnel de structures parfaites. L'équation du mouvement entre deux impacts est :

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4R} (\theta - \tilde{\alpha}) \quad (\text{A.4a})$$

Cette équation différentielle se résout simplement en proposant les conditions initiales $\theta(\tau = 0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(\tau = 0) = \dot{\theta}_0$:

$$\theta(\tau) = -\tilde{\alpha} + (\theta_0 + \tilde{\alpha}) \cosh\left(\frac{\sqrt{3g}}{2\sqrt{R}}\tau\right) + \frac{2\dot{\theta}_0}{\sqrt{3g}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3g}}{2\sqrt{R}}\tau\right) \quad (\text{A.4b})$$

On cherche l'instant initial τ_0 de l'essai de lâcher. On note donc le temps mesuré τ et on note τ' le temps recalé tel que $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(\tau' = 0) = 0$ et $\tau = \tau' + \tau_0$. L'équation (A.4b) devient :

$$\theta(\tau) = -\tilde{\alpha} + (\theta_0 + \tilde{\alpha}) \cosh\left(\frac{\sqrt{3g}}{2\sqrt{R}}(\tau - \tau_0)\right) \quad (\text{A.5a})$$

qui se dérive en :

$$\dot{\theta}(\tau) = (\theta_0 + \tilde{\alpha}) \frac{\sqrt{3g}}{2\sqrt{R}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3g}}{2\sqrt{R}}(\tau - \tau_0)\right) \quad (\text{A.5b})$$

Ces deux équations décrivent le mouvement idéal jusqu'au premier impact. On définit donc la fonction d'erreur :

$$\varepsilon_{\text{tps}}: (\tau_0, \theta_0) \xrightarrow{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \mathbb{R}_+} \int_{\tau \in I} \left(\Omega^{(\vec{u})}(\tau) - \dot{\theta}(\tau) \right)^2 d\tau \quad (\text{A.6})$$

qui mesure l'écart entre le mouvement mesuré et le mouvement idéal de Housner linéarisé muni des conditions initiales τ_0 et θ_0 . La minimisation de cette fonction d'erreur permet d'obtenir τ_0 et donc τ' . La figure (A.7) présente compare le mouvement mesuré au mouvement idéal de Housner linéarisé avec les bonnes conditions initiales. On observe que la comparaison est pertinente, ce qui témoigne donc de la justesse de cette méthode de détermination de l'instant initial. Par souci de clarté, en dehors de cette annexe, le temps recalé est noté τ et non τ' .



Rappels de théorie des probabilités

B.1 Bref rappel sur les variables aléatoires

Pour modéliser une expérience aléatoire, on définit un ensemble abstrait Ω , appelé « univers » ou « référentiel », « espace d'échantillonnage » ou encore « espace fondamental », qui regroupe l'ensemble des issues possibles de l'expérience. On note ω les éléments de Ω , appelés « épreuves » « événements élémentaires ».

On définit une tribu (ou σ -algèbre, voir définition 1) sur Ω que l'on notera $\mathcal{F}$. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés « événements » et $\mathcal{F}$ « tribu d'événements ». Les deux éléments Ω et $\emptyset$ de $\mathcal{F}$ sont respectivement appelés « événement certain » et « événement impossible ».

Définition 1 :

σ -algèbre ou tribu

Soit Ω l'espace d'échantillonnage considéré ci-dessus, et soit $\mathcal{F}$ une famille de parties de Ω . On dit que $\mathcal{F}$ est une tribu (ou une σ -algèbre) si :

1. Ω et $\emptyset$ appartiennent à $\mathcal{F}$;
2. $\mathcal{F}$ est stable par réunion et intersection dénombrables, c'est-à-dire si, pour toute famille dénombrable $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{F}$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{F}$;
3. $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire si, pour tout élément E de $\mathcal{F}$, alors $E^c \in \mathcal{F}$, où E^c désigne le complémentaire de E dans Ω .

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé « espace mesurable » ou « espace probabilisable ».

B.2 Mesure de probabilité

On définit une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, notée $\mathbb{P}$, qui vérifie les axiomes de Kolmogorov (définition 2). En terme simplistes, on pourrait dire que la probabilité mesure la taille d'une partie de Ω , ou d'un élément de $\mathcal{F}$.

Un espace probabilisable muni d'une mesure de probabilité, ici le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, est appelé « espace de probabilité ».

Rappelons deux points de terminologie :

- Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et A un élément de $\mathcal{F}$. On dit alors que A est $\mathbb{P}$ -négligeable si $\mathbb{P}(A) = 0$.
- Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{P}(\omega)$ une propriété faisant intervenir des éléments ω de Ω . On dit alors que $\mathcal{P}$ est vraie $\mathbb{P}$ -presque sûrement si l'ensemble $A_0 = \{\omega \in \Omega, \mathcal{P}(\omega) \text{ est fausse}\}$ est $\mathbb{P}$ -négligeable. On observe

Définition 2 :

Mesure de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probablisable et soit $\mathbb{P}$ une application de $\mathcal{F}$ dans $[0, 1]$. On dit que $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité, ou plus simplement une probabilité, si :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (et donc $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$) ;
2. $\mathbb{P}$ est σ -additive, autrement dit vérifie, pour toute suite d'éléments $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}$ deux-à-deux disjoints :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E_n) \quad (\text{B.1})$$

que l'ensemble $A_1 = \{\omega \in \Omega, \mathcal{P}(\omega) \text{ est vraie}\}$ vérifie : $A_0 \cup A_1 = \Omega, A_0 \cap A_1 = \emptyset$ et donc $\mathbb{P}(A_1) = 1 - \mathbb{P}(A_0) = 1$. C'est pour cela qu'une propriété vraie presque sûrement est dite vraie en probabilité 1.

B.3 Variables aléatoires

Dans le cadre de cette étude, nous ne considérons que des variables aléatoires (définition 3) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, avec $n > 1$, laissant de côté les cas des variables aléatoires discrètes ou à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, qui ne posent d'ailleurs pas de problèmes particuliers.

Définition 3 :

Variable aléatoire vectorielle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit $\mathcal{B}_n$ la tribu de Borel de $\mathbb{R}^n$ (i.e. la tribu engendrée par les pavés ouverts de $\mathbb{R}^n$). On dit que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ si :

1. Y est une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$:

$$Y: \omega \xrightarrow{\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n} Y(\omega) \quad (\text{B.2})$$

2. Y est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$, autrement dit vérifie :

$$\forall B \in \mathcal{B}_n, Y^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, Y(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \quad (\text{B.3})$$

On note :

$$Y: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \xrightarrow{\text{mes.}} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n) \quad (\text{B.4})$$

Deux variables aléatoires X et Y sont dites $\mathbb{P}$ -presque sûrement égales lorsque l'ensemble $A_0 = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \neq Y(\omega)\}$ est $\mathbb{P}$ -négligeable : $\mathbb{P}(A_0) = 0$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la probabilité utilisée, on se limitera à écrire presque sûrement égales.

Soit $\mathcal{T}_Y = \{Y^{-1}(B), B \in \mathcal{B}_n\}$ la tribu engendrée par Y . Alors, d'après (B.3), $\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{F}$.

Soient $(Y_j, j = [1, n])$ les coordonnées de la variable aléatoire Y . Ce sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeur dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$, où $\mathcal{B}_1$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Une telle variable aléatoire est appelée « variable aléatoire vectorielle n -dimensionnelle » ou « variable aléatoire n -dimensionnelle » ou encore « vecteur aléatoire n -dimensionnel ». Si $n = 1$, elle est dite « réelle » ou « scalaire ».

Pour tout ω fixé dans Ω , $Y(\omega)$ est appelée une ω -réalisation de la variable aléatoire Y , que l'on note généralement par une lettre minuscule : $Y(\omega) = \mathbf{y}_\omega$, ou $Y(\omega) = \mathbf{y}$ lorsque qu'aucune confusion n'est à craindre. Tirer une réalisation de Y , c'est « choisir au hasard » un élément ω de Ω et lui associer la ω -réalisation correspondante $Y(\omega) = \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ de Y .

B.4 Loi d'une variable aléatoire

La loi d'une variable aléatoire est une mesure de probabilité que indique comment se répartissent les valeurs de cette variable aléatoire sur son domaine de variation.

Définition 4 :

loi d'une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeur dans $\mathbb{R}^n$:

$$Y: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \xrightarrow{\text{mes.}} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$$

On appelle loi de Y , et on note P_Y , la mesure image de $\mathbb{P}$ par Y : $P_Y = Y(\mathbb{P})$.

C'est donc une probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ qui vérifie :

$$\forall B \in \mathcal{B}_n, P_Y(B) = \mathbb{P}(Y^{-1}(B)) \quad (\text{B.5})$$

Pour tout B dans $\mathcal{B}_n$, l'événement $Y^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, Y(\omega) \in B\}$, élément de $\mathcal{F}$ (par mesurabilité de Y), est noté $Y \in B$, de sorte que (B.5) peut encore s'écrire :

$$\forall B \in \mathcal{B}_n, P_Y(B) = \mathbb{P}(Y \in B) \quad (\text{B.6})$$

Si la loi P_Y de Y est connue, on note :

$$Y: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \xrightarrow{\text{mes.}} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, P_Y)$$

B.5 Densité d'une loi

Définition 5 :

Densité d'une loi

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi P_Y sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. On dit que la loi P_Y admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue dy sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ s'il existe une fonction p_Y de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}^n$, telle que :

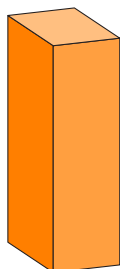
$$\forall B \in \mathcal{B}_n, P_Y(B) = \int_{y \in B} p_Y(y) dy \quad (\text{B.7a})$$

Dans la définition précédente, la relation (B.7a) peut être remplacée par la suivante :

$$P_Y(dy) = p_Y(y) dy \quad (\text{B.7b})$$

La densité p_Y est encore appelée « densité de la probabilité de Y ». Cette densité vérifie :

$$\int_{y \in \mathbb{R}^n} p_Y(y) dy = 1 \quad (\text{B.8})$$



Bibliographie

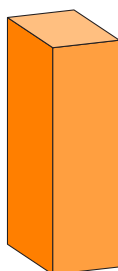
- [1] Nicos Makris. A half-century of rocking isolation. *EARTHQUAKES AND STRUCTURES*, 7(6) :1187–1221, 2014.
- [2] Matthew D Purvance, Abdolrasool Anooshehpour, and James N Brune. Freestanding block overturning fragilities : Numerical simulation and experimental validation. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 37(5) :791–808, 2008.
- [3] A Dar, D Konstantinidis, and WW El-Dakhkhni. Seismic qualification of rocking objects in canadian nuclear power plants. In *Proceedings of Tenth U.S. National Conference on Earthquake Engineering*, 2014.
- [4] G Housner. The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 53(2) :403–417, 1963.
- [5] Peter Russell Lipscombe. *Dynamics of rigid block structures*. PhD thesis, University of Cambridge, 1990.
- [6] F Peña, F Prieto, PB Lourenço, A Campos Costa, and JV Lemos. On the dynamics of rocking motion of single rigid-block structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 36(15) :2383–2399, 2007.
- [7] Tibor Winkler, Kimiro Meguro, and Fumio Yamazaki. Response of rigid body assemblies to dynamic excitation. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 24(10) :1389–1408, 1995.
- [8] C Feau. Étude des phénomènes de glissement et basculement de blocs d’acier soumis au séisme. Technical Report DEN/DANS/DM2S/SEMT/EMSI/RT/07-012/A, Commissariat à l’énergie atomique et aux énergies alternatives, 2007.
- [9] JT Oden and JAC Martins. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 52(1) :527–634, 1985.
- [10] Desmond F Moore. *Principles and applications of tribology*, volume 1. Pergamon Press Oxford, 1975.
- [11] Ernest Rabinowicz. *Friction and wear of materials*, volume 2. Wiley New York, 1965.
- [12] Dan Stoianovici and Yildirim Hurmuzlu. A critical study of the applicability of rigid-body collision theory. *Journal of engineering mechanics*, 63(2) :307–316, 1996.
- [13] U Andreaus and P Casini. On the rocking-uplifting motion of a rigid block in free and forced motion : influence of sliding and bouncing. *Acta mechanica*, 138(3-4) :219–241, 1999.

- [14] M Aslam, WG Godden, and DT Scalise. Rocking and overturning response of rigid bodies to earthquake motions : A report of an analytical and experimental study on the rocking and overturning response of rigid blocks to simultaneous horizontal and vertical accelerations. Technical report, University of California, Berkeley, 11 1978.
- [15] PR Lipscombe and S Pellegrino. Free rocking of prismatic blocks. *Journal of engineering mechanics*, 119(7) :1387–1410, 1993.
- [16] JP Brossard. Mécanique générale - dynamique : théorie classique du choc. *Techniques de l'ingénieur*, TIB110DUO.(a1668), 1997.
- [17] V Acary and B Brogliato. Coefficients de restitution et efforts aux impacts. Technical report, INRIA, 2004.
- [18] KH Hunt and FRE Crossley. Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. *Journal of Applied Mechanics*, 42 :440–445, 1975.
- [19] Ioannis N Psycharis and Paul C Jennings. Rocking of slender rigid bodies allowed to uplift. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 11(1) :57–76, 1983.
- [20] W Goldsmith. *Impact*. Edward Arnold, London, 1960.
- [21] MN Chatzis and AW Smyth. Modeling of the 3d rocking problem. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(4) :85–98, 2012.
- [22] JC Simo and N Tarnow. The discrete energy-momentum method. conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 43(5) :757–792, 1992.
- [23] Ioannis Politopoulos. Sur l'application de quelques algorithmes en dynamique non-linéaire. Technical Report DEN/DANS/DM2S/SEMT/EMSI/RT/05-037/A, Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives, 2005.
- [24] Chik-Sing Yim, Anil K Chopra, and Joseph Penzien. Rocking response of rigid blocks to earthquakes. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 8(6) :565–587, 1980.
- [25] ManYong Jeong, Kohei Suzuki, and Solomon Yim. Chaotic rocking behavior of freestanding objects with sliding motion. *Journal of sound and vibration*, 262(5) :1091–1112, 2003.
- [26] Harry W Shenton III and Nicholas P Jones. Base excitation of rigid bodies. ii : Periodic slide-rock response. *Journal of engineering mechanics*, 117(10) :2307–2328, 1991.
- [27] Dimitrios Konstantinidis and Nicos Makris. Seismic response analysis of multidrum classical columns. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 34(10) :1243–1270, 2005.
- [28] Hongjian Zhang, Bernard Brogliato, and Caishan Liu. Study of the planar rocking-block dynamics with coulomb friction : critical kinetic angles. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 8(2) :021002, 2013.
- [29] Pol D Spanos and Aik-Siong Koh. Analysis of block random rocking. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 5(3) :178–183, 1986.
- [30] Baoping Shi, Abdolrasool Anooshehpour, Yuehua Zeng, and James N Brune. Rocking and overturning of precariously balanced rocks by earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 86(5) :1364–1371, 1996.
- [31] Dimitrios Konstantinidis and Nicos Makris. The dynamics of a rocking block in three dimensions. In *Proceedings of the 8th HSTAM International Congress on Mechanics*, pages 12–14, 2007.

- [32] Daniele Zulli, Alessandro Contento, and Angelo Di Egidio. 3d model of rigid block with a rectangular base subject to pulse-type excitation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(6) :679–687, 2012.
- [33] Nicos Makris and Yiannis Roussos. Rocking response and overturning of equipment under horizontal pulse-type motions. Technical report, Pacific Earthquake Engineering Research Center, 1998.
- [34] AN Kounadis. Parametric study in rocking instability of a rigid block under harmonic ground pulse : A unified approach. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 45 :125–143, 2013.
- [35] Y Ishiyama. Motions of rigid bodies and criteria for overturning by earthquake excitations. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 10(5) :635–650, 1982.
- [36] MJN Priestley, BJ Davidson, GD Honey, DC Hopkins, RJ Martin, G Ramsey, JV Vessey, and JH Wood. Seismic design of storage tanks. *Recommendations of a study group of the New Zealand National Society for Earthquake Engineering*, 17, 1986.
- [37] WT Fielder, LN Virgin, and RH Plaut. Experiments and simulation of overturning of an asymmetric rocking block on an oscillating foundation. *European journal of mechanics. A. Solids*, 16(5) :905–923, 1997.
- [38] Raphael JY Greenbaum, Andrew W Smyth, and Manolis N Chatzis. Monocular computer vision method for the experimental study of three-dimensional rocking motion. *Journal of Engineering Mechanics*, page 04015062, 2015.
- [39] Juan Carlos Simo and Kachung Kevin Wong. Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(1) :19–52, 1991.
- [40] Djordje Perić and DRJ Owen. Computational model for 3-d contact problems with friction based on the penalty method. *International journal for numerical methods in engineering*, 35(6) :1289–1309, 1992.
- [41] Charlie Mathey. *Étude du comportement sous séisme de blocs rigides (may be modified)*. PhD thesis, Université de Clermont-Ferrand, 2016.
- [42] David B Fogel. An introduction to simulated evolutionary optimization. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 5(1) :3–14, 1994.
- [43] Søren Emil Sørensen, Michael Rygaard Hansen, Morten Kjeld Ebbesen, and Ole Ø Mouritsen. Implicit identification of contact parameters in a continuous chain model. *Modeling, Identification and Control (Online Edition)*, 32(1) :1–15, 2011.
- [44] Jean-Laurent Duchaud, Sami Hlioui, François Louf, and Mohamed Gabsi. Electrical machine optimization using a kriging predictor. In *International Conference on Electrical Machines and Systems*, 2014.
- [45] YK Lin and Yan Yong. Evolutionary kanai-tajimi earthquake models. *Journal of engineering mechanics*, 113(8) :1119–1137, 1987.
- [46] PE Pinto and I. Vanzi. Base isolation : reliability for different design criteria. Tenth world conference on earthquake engineering, 1992.
- [47] Serge M Prigarin. *Spectral models of random fields in Monte Carlo methods*. VSP, 2001.
- [48] PG Mertens and A Preumont. Improved generation and application of artificial time-histories and psd functions. In *Proceedings of SMiRT*, volume 14, 1997.
- [49] CM Wong and WK Tso. Steady state rocking response of rigid blocks part 2 : Experiment. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 18(1) :107–120, 1989.

- [50] Mohamed A ElGawady, Quincy Ma, John W Butterworth, and Jason Ingham. Effects of interface material on the performance of free rocking blocks. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 40(4) :375–392, 2011.
- [51] Charlie Mathey, Cyril Feau, Ioannis Politopoulos, David Clair, Laurent Baillet, and Michel Fogli. Behavior of rigid blocks with geometrical defects under seismic motion : an experimental and numerical study. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2016. ege.2773.
- [52] HP Mouzakis, IN Psycharis, DY Papastamatiou, PG Carydis, C Papantopoulos, and C Zambas. Experimental investigation of the earthquake response of a model of a marble classical column. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 31(9) :1681–1698, 2002.
- [53] Reuven Y Rubinstein and Dirk P Kroese. *Simulation and the Monte Carlo method*, volume 707. John Wiley & Sons, 2011.
- [54] Christian Robert and George Casella. *Monte Carlo statistical methods*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [55] Murray Rosenblatt. Remarks on a multivariate transformation. *The annals of mathematical statistics*, pages 470–472, 1952.
- [56] Ove Ditlevsen and Henrik O Madsen. *Structural reliability methods*, volume 178. Wiley New York, 1996.
- [57] Siu-Kui Au and James L Beck. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16(4) :263–277, 2001.
- [58] Henri Procaccia and Patrick Morilhat. *Fiabilité des structures des installations industrielles : théorie et applications de la mécanique probabiliste*. Éd. Eyrolles, 1996.
- [59] C Allin Cornell. A probability-based structural code*. In *ACI Journal Proceedings*, volume 66. ACI, 1969.
- [60] E Rosenblueth and L Estevea. Reliability basis for some mexican codes. *ACI Special Publication*, 31, 1972.
- [61] AM Hasofer, NC (Niels Christian) Lind, and University of Waterloo. Solid Mechanics Division. *An exact and invariant first-order reliability format*. University of Waterloo, Solid Mechanics Division,, 1973.
- [62] R Rackwitz. *Practical Probabalistic Approach to Design : By R. Rackwitz*. Technical University of Munich, Institut fur Bauingenieurwesen III, 1976.
- [63] Bernd Fiessler, Rudiger Rackwitz, and Hans-Joachim Neumann. Quadratic limit states in structural reliability. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 105(4) :661–676, 1979.
- [64] Karl Breitung. Asymptotic approximations for multinormal integrals. *Journal of Engineering Mechanics*, 110(3) :357–366, 1984.
- [65] M Hohenbichler, S Gollwitzer, W Kruse, and R Rackwitz. New light on first- and second-order reliability methods. *Structural safety*, 4(4) :267–284, 1987.
- [66] Prestandard FEMA. Commentary for the seismic rehabilitation of buildings. *FEMA-356, Federal Emergency Management Agency, Washington, DC*, 2000.
- [67] Vitalii Ogorodnikov. *Numerical modelling of random processes and fields : algorithms and applications*.
- [68] Ray W Clough and Joseph Penzien. Dynamics of structures. Technical report, 1975.
- [69] Christian P Robert. *Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov*. Economica, 1996.

- [70] George Fishman. *Monte Carlo : concepts, algorithms, and applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [71] J-M Hammersley, D-C Handscomb, and Françoise Rostand. *methodes de monte-carlo.[les]*. 1964.
- [72] J.-M. Bourinet, C. Mattrand, and V. Dubourg. A review of recent features and improvements added to ferum software. In *Proc. of the 10th International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR'09)*, Osaka, Japan, 2009.



Index des notions

$\emptyset$

σ -algèbre ————— voir tribu

$\mathcal{B}$

basculement ————— 1

$\mathcal{D}$

défaut
de positionnement des capteurs 120
géométrique ————— 36

$\mathcal{E}$

élancement ————— 1
encastrement ————— 1
espace
de probabilité ————— 123
probabilisable ————— 123
événement ————— 123
élémentaire ————— 123
certain ————— 123
impossible ————— 123

$\mathcal{F}$

fonction d'état limite ————— 87

$\mathcal{I}$

indice de fiabilité
conventionnel ————— 91
de Hasofer–Lind ————— 90

$\mathcal{M}$

marge de sécurité ————— 90
Monte-Carlo (méthode de) ————— 89

$\mathcal{P}$

$\mathbb{P}$ -négligeable ————— 123
 $\mathbb{P}$ -presque sûrement vrai ————— 123
point de fonctionnement ————— 90
post-traitement
des familles de résultats ————— 57
des résultats bruts ————— 119
probabilité ————— 124
de défaillance ————— 88
de sécurité ————— 88
problème fiabiliste
représentation standard du... — 89

$\mathcal{R}$

renversement ————— voir basculement
rigidité ————— 1

$\mathcal{S}$

soulèvement ————— voir basculement
Subset Simulations ————— 101

$\mathcal{T}$

tribu ————— 123

$\mathcal{V}$

variable aléatoire ————— 124
coordonnées d'une... ————— 124
loi d'une... ————— 125
densité de la... ————— 125
réalisation d'une... ————— 124
vitesse de rotation convective — 16

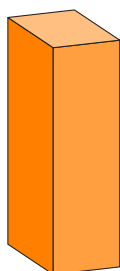
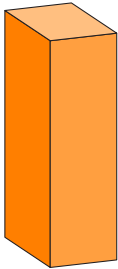


Table des figures

1.1 Exemples de dispositifs industriels que l'on peut considérer comme des structures libres	5
1.2 Prototypes de colis primaires et secondaires pour les matières radioactives de moyenne activité et de durée de vie longue pour le projet Cigéo	6
1.3 Vitesses de rotation convectives (crv) mesurées dans les axes principal, transverse et longitudinal pendant un essai de lâcher sur un bloc d'élan- cement 7 (1.3a) sur appuis souples et (1.3b) sur appuis "rigides" (pieds usinés dans la masse)	7
2.1 Représentation du modèle de bloc de Housner	11
2.2 Exemple de relation accélération/angle pour $h/b = 7$ (cf. équation (2.4))	12
2.3 Évolution du coefficient de restitution r selon l'élan- cement	13
2.4 Résultats du modèle de Housner	14
2.5 Validation de la méthode permettant de retrouver θ sur un bloc d'élan- cement $e = 7$	16
2.6 Comparaison du modèle de Housner avec la campagne d'essais du CEA de 2007	17
2.7 Exemple de successions de microrebonds pour une balle en translation verticale avec $s = 0,9$	24
2.8 Représentation « élémentaire » de la loi d'impact de Kelvin-Voigt	26
2.9 Représentation de la loi de Kelvin-Voigt dans le plan force/pénétration	26
2.10 Représentation de la loi de Hunt et Crossley dans le plan force/pénétration	28
2.11 Illustration du comportement de la loi de contact d'Andreas	30
3.1 Geometry and parameters of Housner's rigid block model	38
3.2 Geometry of the experimental and numerical blocks	40
3.3 Experimental results of eight release tests	40 bis
3.4 Comparison between numerical and experimental results of a release test	45 bis
3.5 Sensitivity to the time-step	47
3.6 Sensitivity to the values of physical parameters	48
3.7 Sensitivity to the initial tilt angle	49
3.8 Sample of realizations of the bidirectional excitation signals and analy- tical results corresponding to the asymmetrical and symmetrical models	50 bis
3.9 Evolution of the maximum exterior contact point vertical displacement as function of the PGA	50 bis
3.10 Résultats du modèle 4ACP	54
4.1 Géométries des blocs numériques et expérimentaux de GlisBasc 2	61
4.2 Convention de notation des angles	63
4.3 Accélérations de table mesurée lors de GlisBasc 2	65
4.4 Illustration de la méthode de calcul de l'instant de divergence par ellipses	66
4.5 Illustration de la construction des déciles	67

4.6	Comparaison entre une représentation brute et une représentation par déciles de la crv	67
4.7	Résultats expérimentaux à propos de l'initiation du mouvement	70
4.8	Résultats numériques à propos de l'initiation du mouvement	71
4.9	Répartition des instants de divergence des trajectoires	73
4.10	Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques lorsque le calcul commence à $\tau = \tau'_0$	73
4.11	Résultats numériques avec le modèle 4SCP* à propos de l'initiation du mouvement	78
4.12	Comparaison statistique des modèles 8ACP, 4SCP et 4SCP* selon un indicateur de basculement face à une excitation 1D	79
4.13	Comparaison statistique des modèles 8ACP, 4SCP et 4SCP* selon un indicateur de basculement face à une excitation 2D	79
4.14	Comparaison des crv dans l'axe principal pour la série d'essais 100 $\neq$	82
4.15	Comparaison des crv dans l'axe transverse pour la série d'essais 100 $\neq$	83
4.16	Comparaison des énergies pour la série d'essais 100 $\neq$	84
4.17	Comparaison des crv dans l'axe principal pour la série d'essais 100 $\approx$	85
4.18	Comparaison des crv dans l'axe transverse pour la série d'essais 100 $\approx$	86
4.19	Comparaison des énergies pour la série d'essais 100 $\approx$	87
5.1	Propagation de l'information dans la campagne GlisBasc 2	90
5.2	Quantification de la répétabilité des expériences de la série 100 $\approx$	92
7.1	Illustration du partitionnement de $\bar{\Lambda}$	103
7.2	Graphe de la DSP de Clough et Penzien [68] pour un sol dur normalisée par S_0	104
7.3	Exemples de signaux générés par notre procédure pour $S_0 = 0,005 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$	106
7.4	Évolution des valeurs extrémales et moyennes du PGA et de la fonction d'état limite en fonction de S_0 pour un 1000-échantillon de réalisations simulées de l'accélération sismique	117
7.5	Graphe des applications partielles associées à g en y_5 et en y_8	118
7.6	Résultats de Monte Carlo pour $S_0 = 0,005 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$	120
7.7	Résultats de Monte Carlo pour $S_0 = 0,01 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$	120
7.8	Résultats de Monte Carlo pour $S_0 = 0,015 \text{ m}^3 \text{ s rad}^{-1}$	121
7.9	Estimation par Monte-Carlo direct de la surface $z = \mathbb{P}[g(\mathbf{x}) < x \mid g(\mathbf{x}) < y]$ et résultats partiels de la méthode des <i>Subset Simulations</i>	124
A.1	Signaux bruts des vitesses de rotation convectives	130
A.2	Effet du filtre sur les signaux	131
A.3	Effet de la tare sur les signaux	133
A.4	Effet de la correction d'angle	134
A.5	Représentation de ε_{∇} et $\varepsilon_{\nabla\bar{\nabla}}$ en fonction du facteur de correction b pour l'essai 1	135
A.6	Valeur des facteurs de correction b pour chaque essai	135
A.7	Comparaison entre la mesure et le mouvement idéal de Housner linéarisé entre le lâché et le premier impact	135



Liste des tableaux

2.1	Durée du contact et période fondamentale des blocs de Lipscombe et Pellegrino	32
3.1	Optimal parameter values found by the evolutionary algorithm by comparison with the first experimental run, using a time-step for the numerical integration equal to $\delta T = 10^{-5}$ s.	46
3.2	Comparison between Ishiyama's criteria and the results of the numerical models.	52
4.1	Paramètres mécaniques des modèles numériques de blocs	69
7.1	Paramètres des filtres de sol pour le spectre de Clough et Penzien	104
7.2	Synthèse des résultats obtenus avec la méthode de Monte-Carlo standard	119
7.3	Synthèse des résultats obtenus avec la méthode des <i>Subset Simulations</i> . .	122
7.4	Comparaison entre les estimations des probabilités intermédiaires par la méthode de Monte-Carlo standard et ceux obtenus par la méthode de Métropolis–Hasting	123

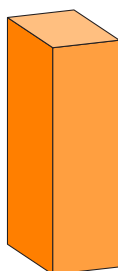


Table des matières

Sommaire	iii
Index des notations	iv
Définitions	1
1 Introduction	3
 Partie I : Construction d'un modèle mécanique déterministe	
2 Analyse des hypothèses de modélisation du mouvement de blocs rigides	11
2.1 Le modèle de Housner	11
Les équations du mouvement	12
Les résultats du modèle de Housner	14
2.2 Le perfectionnement des problématiques du contact	18
Remise en cause de l'immobilité du contact	19
La remise en cause de l'inélasticité absolue de l'impact	21
La remise en cause de l'instantanéité de l'impact	25
La remise en cause de la ponctualité du contact	30
2.3 Les autres problématiques	31
La remise en cause de l'hypothèse de rigidité du bloc	31
La remise en cause du mouvement plan	32
3 Modélisation du comportement de blocs à la géométrie imparfaite	35
Résultat intéressant de la campagne d'essai de 2007	35
La construction du modèle de bloc rigide	36
L'influence marginale de cette hypothèse de défaut géométrique	36
3.1 Introduction	37
3.2 Brief review of previous work	38
3.3 Experimental campaign	39
Experimental set up	39
Description of the motion	41
Requirements for the numerical model	42
3.4 Numerical model	42
Rigid 3D body model	42
Contact non-linearities	43
Defects	43
Parameter identification	44
Reducing the number of parameters	45
Comparison between experimental and analytical results	46
Empirical sensitivity analysis	47

3.5	Statistical study of stability under seismic excitation	50
3.6	Conclusion	52
3.7	Acknowledgement	53
3.8	Résultats du modèle intermédiaire 4ACP	53

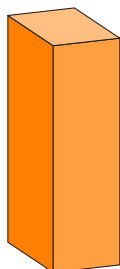
Partie II : Campagne expérimentale

4	Étude expérimentale du basculement de blocs rigides sous excitation sismique	57
	Objectifs et réalisation de la campagne expérimentale	57
	Outils de post-traitement et d'analyse des résultats numériques et expérimentaux	57
	Mise à jour et vérification des paramètres mécaniques	58
	Description et analyse des résultats	58
	Interprétation en terme de stabilité	59
4.1	Introduction	59
4.2	Experimental campaign	61
	Test equipment	61
	Release tests	61
	Shaking table tests	62
4.3	Methodology and statistical analysis tools	64
	Time concordance indicator for the two trajectories	64
	Statistical indicators of n-samples	66
4.4	8ACP and 4SCP models	68
4.5	Representativity of the models subjected to sinusoidal pulses	69
	Experimental variability	69
	Representativity of 4SCP and 8ACP models	70
4.6	Representativity of models subjected to random excitations	72
	Initial conditions for numerical calculations	72
	Temporal concordance of numerical and experimental trajectories	72
	Statistical suitability	75
4.7	Discussion regarding the effect of taking defects into account in overturning prediction	77
	Summary of test interpretations	77
	Validation of an upper-bound model 4SCP*	78
4.8	Conclusion	79
5	Discussion	89
5.1	Propagation des erreurs expérimentales	89
5.2	Répétabilité observée sur la série d'essais	91

Partie III : Analyse fiabiliste

6	Position du problème	95
6.1	Les données du problème	95
6.2	L'objectif fondamental	96
6.3	Formulation standard du problème	96
6.4	Méthodes d'approximation analytico-numériques	97
	Marge, facteur de marge et indices associés	97
	Indice de Hasofer–Lind	98
	Approximation par les méthodes FORM et SORM	99
7	Formulation du problème de fiabilité	101
7.1	Choix et caractérisation probabiliste des paramètres aléatoires externes	101
	Modèle retenu de l'excitation sismique	101
	Choix d'une représentation pour le processus W	102

Construction d'une N-approximation de la représentation spectrale de W	103
Représentation approchée correspondante de Z et choix de ses paramètres	103
7.2 Choix et caractérisation probabiliste des paramètres aléatoires internes	107
7.3 Vecteur des paramètres aléatoires	107
7.4 Fonction d'état limite	108
7.5 Formulation du problème fiabiliste	109
7.6 Calcul de la probabilité de défaillance par la méthode des <i>Subset Simulations</i>	110
Exposé de la méthode	110
Comparaison méthode de Monte-Carlo standard / méthode des <i>Subset Simulations</i>	116
 8 Conclusions et perspectives de recherche	 125
 Annexes	
A Post-traitement des signaux	129
A.1 Le filtrage des signaux	129
A.2 La correction des composantes continues	132
A.3 La correction des défauts angulaires de positionnement des capteurs	132
A.4 Le calcul de l'instant initial	135
B Rappels de théorie des probabilités	137
B.1 Bref rappel sur les variables aléatoires	137
B.2 Mesure de probabilité	137
B.3 Variables aléatoires	138
B.4 Loi d'une variable aléatoire	139
B.5 Densité d'une loi	139
 Bibliographie	 140
Index des notions	145
Table des figures	146
Liste des tableaux	148
Table des matières	149
Résumé et <i>abstract</i>	154



Résumé / Abstract

Dans le cadre des études relatives à la sûreté sismique des installations industrielles, on est amené à se préoccuper de la stabilité de structures libres (des équipements, des containers, des fûts...) posées à même le sol. De nombreuses méthodes ont permis d'établir des critères de sûreté réputés conservatifs, sans qu'il soit besoin de représenter finement le comportement dynamique de l'objet. Dans le cadre de cette thèse, on a cherché à analyser la capacité de prédiction par des modèles numériques du mouvement de corps rigides libres soumis à des séismes impliquant impacts et glissements. Pour cela, on s'est appuyé sur deux campagnes expérimentales qui ont été menées au laboratoire EMSI du CEA/Saclay sur des blocs parallélépipédiques en acier, élancés et disposant de 4 appuis non ponctuels usinés avec des tolérances standards.

Dans un premier temps, des essais de lâcher (bloc immobile en appuis sur deux pieds, puis lâché sans source d'excitation extérieure), souvent analysés dans la littérature comme un mouvement plan, ont fait apparaître un mouvement 3D reproductible dans les premiers instants consécutifs au lâcher. L'analyse fine de ce mouvement a permis, d'une part, de conclure qu'il était dû à des défauts de géométrie des pieds et, d'autre part, d'élaborer un modèle numérique représentatif incluant ces défauts.

Dans un second temps, il a été question d'étudier l'aptitude du modèle numérique à représenter le comportement dynamique au cours du temps d'un bloc rigide élancé non idéal soumis à des excitations sismiques. Les blocs ont été soumis à 100 réalisations d'un processus stationnaire (essais de variabilité) puis 100 fois à la même accélération (essais de répétabilité). D'un point de vue statistique, et malgré les incertitudes expérimentales, ce travail a permis d'exhiber une bonne adéquation entre les résultats des modèles numériques et les résultats expérimentaux. En outre, il a permis de quantifier la durée au-delà de laquelle une prédiction du comportement ne peut plus être considérée comme pertinente.

Pour finir, on s'est attaché à appliquer des outils classiques de fiabilité au problème de bloc rigide soumis à des séismes, ainsi que la méthode récente des *Subset Simulations*.

Mots clefs : bloc rigide, basculement, renversement, séisme, défaut, fiabilité

In the field of nuclear safety, the stability of free standing structures like containers, barrels or electronical devices is considered to be an important matter. Until now, the literature written on the subject presents some stability criteria known to be conservative without needing to represent in detail the object behavior.

This thesis attempts to analyse the capacity numerical models have to predict the behavior of blocks submitted to seismic acceleration, with impacts and friction. To this effect, two experimental campaigns were carried out in the EMSI laboratory (CEA Saclay, France) on slender massive prismatic steel blocks, with 4 machined (*i.e.* non-ideal) feet.

First of all, release tests (the block is in an unsteady position on 2 feet, kept still with a wire, then the wire is cut and the block is released without any ground motion) are usually analysed as a plane motion. Our experiments have shown a reproducible out-of-plane (3D) motion during the first seconds of the release. A detailed analysis highlighted the fact that this 3D motion is induced by geometrical defects on the block feet, and allowed us to build an accurate numerical model of this behavior.

The ability of this numerical model to match the dynamic behavior of a non-ideal rigid slender block has been questioned. In a second campaign, 4 blocks were subjected on the one hand to 100 realisations of a stationary process, and on the other hand 100 times to the same excitation. This accounts for an analysis of the variability of two 100-samples of results obtained under two different input variability levels. From a statistical point of view, despite experimental uncertainties this article demonstrates a good agreement between numerical and experimental results.

Finally, some classical tools of reliability were applied to the rocking block problem, as well as a newer method called Subset Simulation.

Keywords : rigid block, rocking, overturning, earthquake, defect, reliability