Spécialisation du pseudo-groupe de Malgrange et irréductibilité

Damien Davy

▶ **To cite this version:**

Damien Davy. Spécialisation du pseudo-groupe de Malgrange et irréductibilité. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de Rennes, 2016. Français. NNT : 2016REN1S098 . tel-01491008

HAL Id: tel-01491008
https://theses.hal.science/tel-01491008

Submitted on 16 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANNÉE 2016

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et applications

École doctorale MATISSE

présentée par

Damien Davy

préparée à l'unité de recherche 6625 du CNRS : IRMAR
Institut de Recherche Mathématique de Rennes
UFR de Mathématiques

Spécialisation du pseudo-groupe de Malgrange et irréductibilité

Thèse soutenue à Rennes
le 13 décembre 2016

devant le jury composé de :

David Blásquez Sanz / Profesor Asociado – Universidad Nacional de Colombia sede Medellín / examinateur

Guy Casale / Maître de conférences – Université de Rennes 1 / directeur de thèse

Dominique Cerveau / Professeur – Université de Rennes 1 / directeur de thèse

Lucia Di Vizio / Directrice de recherches – CNRS, Université de Versailles Saint Quentin / rapportrice

Charlotte Hardouin / Maître de conférence – Université Paul Sabatier (Toulouse) / examinatrice

Yousuke Ohyama Professor – Tokushima University / rapporteur

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier Guy Casale pour avoir été mon directeur de thèse. Sa patience, son implication et sa disponibilité m'ont permis de faire cette thèse dans de très bonnes conditions. Il m'a aussi permis de faire un très beau séjour en Colombie... pour faire des maths bien entendu !

Je remercie Dominique Cerveau pour avoir été, je le cite, "la caution administrative", donc merci pour les autographes mais aussi pour les conseils lors des répétitions.

Je remercie également Lucia DiVizio et Yousuke Ohyama pour avoir accepté de rapporter ma thèse. Lucia DiVizio a eu une lecture très attentive, ce qui m'a permis de corriger des erreurs et imprécisions, et Yousuke Ohyama m'a apporté des explications et indications me permettant d'éclaircir certains points.

Je remercie Charlotte Hardouin de permettre ma soutenance en acceptant d'être membre de mon jury de thèse. David Blásquez Sanz m'a accueilli chaleureusement à Medellín, nous y avons eu des discussions très enrichissantes, c'est un plaisir de le retrouver en tant que membre de mon jury et je l'en remercie.

Le laboratoire de L'IRMAR est un lieu où il fait bon vivre et où l'on peut assister à de nombreux exposés. S'il peut fonctionner ainsi, c'est notamment grâce à l'ensemble du personnel administratif, ainsi que les agents d'entretien, les bibliothécaires et les informaticiens (l'humour d'Olivier Garot n'enlève rien à son efficacité). Je tiens à remercier en particulier Marie-Aude Verger pour son grand soutient et nos discussions au cours de nos trajets communs, mais aussi Marie-Annick Paulmier pour son aide logistique dans les années pré-thèse, ainsi que Xhensila Lachambre pour l'impression.

Parmi les enseignants-chercheurs, je tiens à saluer les habitants de ce qu'ils appellent la zone tribale : Mark Baker, Frank Loray, Frédéric Touzet (dont je squatte le bureau actuellement), Jean-Marie Lions (qui y a séjourné). Je remercie Bertold Wiest pour m'avoir permis d'enseigner dans les meilleurs dispositions et en profite pour saluer le voisin de pallier : Christophe Dupont.

Mes années de thèse ont été ponctuées de séminaires et de groupes de travail entre doctorants, je les ai trouvés vraiment funs et ils me manqueront. Je remercie les organisateurs et les participants pour la qualité de leurs exposés.

Je salue tous les compagnons de la grande tablée du RU et les remercie pour leur patience à la fin des repas : Arnaud, Néstor, Ophélie, Charles, Tristan, Tristan (celui de Salomé), Salomé, Vincent, Axel, Olivier, Mac, Basile, Coralie, Gwezheneg, Quentin, Alexandre et Alexandre, Yvan, Pierre-Yves, Renan, Jean-Phi, Marine, Adrien, Federico, Christian, Andrès, Maria, Cyril, Blandine, Hélène et Hélène, Julie, Richard, Kodjo, Gabriel, Elise, Romain, Türkü, Mohammed, Florian, Thiago, Camille et tous les autres

Un salut aux coincheurs et autres joueurs du midi, aux joueurs de foot, de volley, de frisbee (qui rappelons-le ne se joue ni avec les dents, ni avec le nez).

Je tiens aussi à remercier Axel, Olivier et Vincent pour leur aide ces derniers jours ; Vincent, Ophélie, Charles et Pierre-Yves pour les travaux manuels ; Ophélie, Tristan et

Charles pour les randonnées rennaises malgré le brouillard qui tombe un peu trop automatiquement.

D'ailleurs, merci à Manu, Manu et Mymy, leur persévérance dans leur bêtise m'aura donné du temps.

Merci à Charles pour avoir éveillé ma curiosité (en tout bien tout honneur !) et à très vite pour un maffé !

Merci à mes deux co-bureaux pour les grandes (ou moins grandes) discussions, Arnaud pour ton efficacité et pour ton attention, Néstor pour ta tranquillité, ton humour et ta bonne humeur communicative.

Remontons dans le temps, merci à Aurore et Quentin auprès de qui j'ai trouvé la motivation pour faire des maths. J'en profite pour saluer les autres compères : Mickaël, Gwenn, Valentin, Floriane, Stéphane, Savinien, Tiphaine. Également, un salut à Noémie et Simon.

Je souhaite remercier ma famille pour leur soutient propre à chacun(e) notamment durant cette dernière année riche en émotions mais pauvre en sommeil : Cécile pour la relecture et les plus que nombreuses discussions qui m'ont permis de m'aérer l'esprit, Carine pour m'avoir encouragé et redonné confiance, ma maman pour sa patience à toute épreuve et sa confiance, mon papa pour avoir cru en moi et pour m'avoir si souvent prêter main forte. Merci également à Annie et Thierry leur aide a été précieuse, surtout ces derniers mois.

Pour terminer, merci à Gauthier de me permettre de redevenir un gosse et de n'utiliser que les voyelles de l'alphabet, vivement la suite ! Merci à ma chérie pour m'avoir porté et supporté durant toutes ses années. Ton humour, tes bons petits plats et tes talents de bricoleuse ne cessent de me surprendre.

Je suis heureux et me rend compte à quel point je suis bien entouré. Je vous kiffe tous !

Table des matières

Introduction **7**

1 Théorie de Galois différentielle linéaire **17**
1.1 Fibrés principaux et groupoïdes 17
1.1.1 Définitions 17
1.1.2 G-fibré 19
1.1.3 Groupoïde 20
1.2 Distribution principale 24
1.2.1 Définitions 24
1.2.2 Distribution induite sur un G-fibré 26
1.2.3 Distribution induite sur un groupoïde 27
1.3 Les groupes de Galois 27
1.4 Extension de Picard Vessiot 29
1.5 Le groupoïde de Galois 31
1.5.1 Les trois définitions du groupoïde de Galois 31
1.5.2 Équivalence des trois définitions 37
1.6 Le résultat de spécialisation 40

2 Pseudo-groupe de Malgrange **43**
2.1 Le fibré principal des repères d'une variété 43
2.1.1 La structure différentielle 43
2.1.2 La structure principale 46
2.1.3 Compatibilité 49
2.2 Espace des jets d'application d'une variété dans une autre 50
2.3 Le groupoïde 53
2.4 Les prolongements 54
2.4.1 Relèvements de morphismes 54
2.4.2 Relèvements de champs de vecteurs 55
2.5 Le pseudo-groupe de Malgrange 57

3 Pseudo-groupe de Malgrange partiel **63**
3.1 Le fibré principal des repères partiels d'une variété 63
3.2 Espace des jets d'application partielle 65
3.3 Le groupoïde 67
3.4 Les prolongements 67
3.4.1 Relèvements de morphismes 67
3.4.2 Relèvements de champs de vecteurs 68
3.5 Le pseudo-groupe de Malgrange partiel 69
3.6 Le résultat de spécialisation 70

4 Equations différentielles du second ordre **73**
4.1 Irréductibilité des équations du second ordre 73
4.1.1 Irréductibilité d'une équation 73
4.1.2 Polynôme de dimension différentielle 74
4.1.3 Conséquence sur le calcul du pseudo-groupe de Malgrange 76
4.1.4 Conséquence sur l'irréductibilité d'une équation différentielle 77
4.2 Applications aux équations de Painlevé 78
4.3 Calcul des pseudo-groupes de Malgrange 81

5 Confluence of q-difference equations **83**
5.1 Fibered dynamical systems 83
5.1.1 The fibered frames bundle 84
5.1.2 Prolongation of dominant morphism and vector fields 85
5.1.3 The space $R(M/B)$ is a principal bundle over M. 85
5.1.4 Compatibility of the differential and principal structures 85
5.1.5 The fibers automorphism pseudogroup 85
5.1.6 Malgrange pseudogroups 86
5.2 A specialisation and a confluence theorem 88
5.2.1 The specialisation theorem 88
5.2.2 The confluence theorem 89
5.2.3 Corollaries about Malgrange pseudogroups of discrete Painlevé equations 89

6 Annexe **91**
6.1 Sous-variétés minimales tangentes 91
6.2 Un théorème de X. Gomez-Mont 93
6.3 Un théorème de P. Bonnet 94
6.4 Un théorème d'E. Amerik et F. Campana 96

Bibliographie **97**

Introduction

Un bref survol du contexte

Le développement de la théorie de Galois des équations différentielles linéaires commence avec Emile Picard et Ernest Vessiot à la fin du XIX^{e} siècle en adaptant les idées de la théorie de Galois des équations polynomiales (voir [33] et [41]). Il s'agit notamment de déterminer à partir d'un objet algébrique ou géométrique si une solution d'une équation peut être exprimée à l'aide de solutions d'équations plus simples. L'objet en question est "le" groupe de Galois qui n'est défini qu'au choix d'un système fondamental de solutions près ou au choix de conditions initiales. Un système différentiel linéaire (E) est décrit géométriquement par une connexion $\mathcal{D}$ sur un fibré principal. Le choix d'un point Y_0 de ce fibré correspond au choix de conditions initiales pour un système fondamental de solutions. Le groupe de Galois en un point Y_0 de la connexion $\mathcal{D}$ associée à un système différentiel linéaire (E) sera noté $Gal(\mathcal{D}, Y_0)$ ou $Gal((E), Y_0)$. Au milieu du XX^{e} siècle, Ellis Robert Kolchin formalise cette théorie des équations différentielles linéaires en termes d'extensions de corps et établit l'équivalence entre la résolubilité "du" groupe de Galois et la résolubilité par quadratures de l'équation lorsque le corps des constantes est algébriquement clos. (voir [21])

Quand l'équation contient des paramètres, l'exemple suivant montre que les groupes de Galois changent drastiquement en fonction de la valeur donnée au paramètre :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t_0}{x} y \qquad (E_{t_0})$$

Les groupes de Galois sont

- $Gal((E_{t_0}), (t_0, x_0, y_0)) = \mathbb{C}^*$ si $t_0 \notin \mathbb{Q}$
- $Gal((E_{t_0}), (t_0, x_0, y_0)) = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ si $t_0 = p/q$ où $(p, q) = 1$

Leurs dimensions valent donc 1 pour t_0 dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ et 0 pour t_0 dans $\mathbb{Q}$. Nous dirons qu'une affirmation est vraie généralement ou sur un ensemble général si elle vraie sur une intersection dénombrable d'ouverts de Zariski dense alors que génériquement signifiera sur un ouvert de Zariski dense. Dans ces termes, les dimensions des groupes de Galois $Gal((E_{t_0}), (t_0, x_0, y_0))$ sont généralement les mêmes et cette valeur maximise la dimension de tous les groupes de Galois. Lawrence Goldman a montré dans [17] que ce fait est vrai pour toute famille d'équations différentielles. Plus récemment Yves André a généralisé ces résultats de spécialisation en utilisant une approche tannakienne dans [2].

Etudier un système différentiel linéaire consiste à étudier les systèmes matriciels de la forme $Y' = A(x)Y$ pour $A \in GL(n, \mathbb{C}(x))$. Un analogue discret consiste à regarder les équations

$$\tau_h Y = A(x)Y$$

où $\tau_h(Y(x)) = Y(x+h)$. Ces équations sont appelées équations linéaires aux différences. S'il existe un système aux différences

$$\tau_h Y = A(x,h)Y \qquad (E_h)$$

avec $A \in \mathbb{C}(x,h)$ telle que $A(x,h) = Id + hB(x) + o(h)$, nous dirons que la famille (E_h) conflue vers le système différentiel

$$Y' = B(x)Y \qquad (E'_0)$$

Les analogues de ces équations pour l'opérateur $\sigma_q(Y)(x) = Y(qx)$ sont appelés équations aux q-différences. Une étude systématique de ces équations, aux différences et aux q-différences, a été initiée par Carmichael, Birkhoff et Adams en démontrant l'existence de systèmes fondamentaux de solutions (voir [14]). La théorie de Galois des équations linéaires aux différences a été développée par C.H.Franke dans [16]. La généralisation de Y.André dans [2] citée ci-dessus donne en particulier des résultats de confluence. Ces théorèmes peuvent être utilisés pour obtenir une borne sur le groupe de Galois d'une équation différentielle obtenue par confluence d'une famille d'équations aux différences.

Les idées d'une théorie de Galois pour les équations différentielles non linéaires sont données par Jules Drach [15] et E. Vessiot [41]. Parallèlement, dans les leçons de Stockholm [32] Paul Painlevé donne une définition de l'irréductibilité d'une équation différentielle qui sera formalisée par Keiji Nishioka [26]. Il tente ensuite de montrer l'irréductibilité de la première des équations qui portent aujourd'hui son nom en calculant son "groupe de rationnalité de J. Drach". C'est vers la fin du XX$^{\text{e}}$ siècle que K. Nishioka puis Hiroshi Umemura démontrent réellement l'irréductibilité de cette équation. L'irréductibilité des équations de P. Painlevé pour des valeurs génériques des paramètres est maintenant connue (voir [26], [28], [39], [42], [43]) mais les preuves sont très spécialisées à ces équations et difficilement généralisables. Notamment, elles ne font pas appel à une théorie de Galois des équations différentielles non linéaires.

Pour élaborer une telle théorie, il faudra attendre la fin du XX$^{\text{e}}$ siècle avec les travaux de H.Umemura [38] qui reprend les idées de J.Drach et E.Vessiot. Indépendamment, Bernard Malgrange donne une théorie équivalente dans [24]. L'objet que B.Malgrange associe à un feuilletage est un pseudo-groupe. Il est important de noter que ce pseudo-groupe est intrinsèquement défini à partir du feuilletage. Il ne dépend ni du choix de conditions initiales ni du choix d'une extension de corps comme en dépendent les groupes de Galois de la théorie classique.

Pour étudier l'irréductibilité et le pseudo-groupe de Malgrange d'une équation différentielle ordinaire (E), nous regardons le champ de vecteurs X associé à cette équation sur l'espace des phases M paramétré par les variables dépendantes et indépendantes. Le pseudo-groupe de Malgrange de l'équation, noté $Mal(X)$ ou $Mal(E)$ est grosso modo le pseudo-groupe algébrique des transformations locales holomorphes de M engendré par X. Pour une équation donnée, la détermination du pseudo-groupe de Malgrange est très difficile. Guy Casale dans [10], Frank Loray et Serge Cantat dans [6] puis G. Casale et Jacques-Arthur Weil dans [8] ont respectivement calculé le pseudo-groupe de Malgrange des équations de Painlevé P_I, P_{VI} et $P_{\text{II}}(0)$ (ces équations sont données dans la section (4.2)).

Les éléments du pseudo-groupe de Malgrange d'un champ de vecteurs X préservent la forme temps et le champ X. G. Casale montre dans [11] que si le pseudo-groupe de Malgrange d'une équation différentielle d'ordre 2 est l'ensemble des transformations qui préservent la forme temps, le champ associé à l'équation et une 3-forme alors cette équation est irréductible.

Concernant les analogues discrets, nous étudierons un système dynamique $\Phi : M \dashrightarrow M$. L'espace des phases M est une variété algébrique et Φ est une application rationnelle dominante. Le pseudo-groupe de Malgrange est l'enveloppe algébrique de Φ, il décrit la structure géométrique la plus riche invariante par Φ. Sa définition et les premiers exemples sont donnés dans [9] et dans [19].

Principales questions abordées

Nous savons par [28] que la deuxième équation de Painlevé

$$y'' = 2y^3 + xy + \gamma \qquad (P_{\text{II}}(\gamma))$$

est irréductible. Nous nous demandons si ce résultat peut être démontré directement avec la connaissance de l'irréductibilité de $P_{\text{II}}(0)$ en une valeur générale du paramètre γ. Cette question se traduit en terme de variation de la croissance du pseudo-groupe de Malgrange de notre équation en fonction des paramètres. La croissance du pseudo-groupe de Malgrange de $P_{\text{II}}(0)$ est connue grâce à [8], nous verrons les conséquences que nous pouvons en tirer sur la croissance des pseudo-groupes de Malgrange des autres équations de la famille $P_{\text{II}}(\gamma)$. Ces questions seront abordées dans le cadre général des équations différentielles non-linéaires dans la section 3.6. Nous appliquerons ce résultat à l'étude des équations de Painlevé dans le chapitre 4.

Nous chercherons ensuite si la croissance du pseudo-groupe de Malgrange détermine ce pseudo-groupe. Dans un cas général, ceci est faux comme le montre l'exemple des équations différentielles linéaires (sans paramètres) pour lesquelles la croissance est constante, égale à la dimension du groupe de Galois plus 1. Nous verrons les conséquences sur l'irréductibilité.

Dans le cadre des systèmes dynamiques discrets, nous cherchons à montrer un analogue du résultat de spécialisation et de confluence d'Y.André dans le cadre des équations non-linéaires. Considérons l'exemple de l'équation de Painlevé II discrète

$$dP_{\text{II}}(a,b,c) : x(n+1) + x(n-1) = \frac{(a+bn)x(n)+c}{1-x(n)^2}.$$

Pour $\epsilon \in \mathbb{C}^*$, $t = n\epsilon$ et en renormalisant les variables et paramètres, cette équation conflue vers la deuxième équation de Painlevé quand ϵ tend vers 0. Nous chercherons à utiliser la connaissance du pseudo-groupe de Malgrange de P_{II} et la confluence pour étudier le pseudo-groupe de Malgrange de dP_{II}. Nous nous poserons ces questions dans un cadre plus général.

Présentation des résultats

Théorie de Galois d'équations linéaires

Nous entamons le chapitre 1 par quelques rappels de géométrie différentielle et algébrique sur les fibrés principaux P sous l'action d'un groupe algébrique linéaire G. Le groupoïde des isométries de P, noté $Iso(P)$, est l'ensemble des bijections G-équivariantes entre fibres de P. Nous verrons que ce dernier est isomorphe au quotient $(P \times P)/G$. Ces rappels peuvent être trouvés dans [5], [23], [27] et [36]. Nous donnons des résultats standards de la théorie de Galois différentielle linéaire sous un point de vue géométrique, *i.e.* nous étudions des variétés minimales tangentes à une distribution principale. Ces variétés minimales tangentes sont génériquement des fibrés principaux dont les groupes structuraux sont les groupes de Galois. Sous l'hypothèse que la distribution domine la base, ce

qui correspond au cas du corps des constantes réduit à $\mathbb{C}$, nous retrouvons que les groupes de Galois sont conjugués. Nous faisons ensuite le lien avec le point de vue algébrique des extensions de Picard-Vessiot qui peut être trouvé dans [13] et [40] en observant que généralement, le corps des fractions d'une variété minimale tangente est une extension de Picard-Vessiot.

Nous allons définir un objet qui est intrinsèque à la distribution $\mathcal{D}$ et qui ne dépendra pas de conditions initiales. Cet objet est une sous-variété du groupoïde des isométries du fibré principal que nous appellerons le groupoïde de Galois de la distribution et noterons $Gal(\mathcal{D})$. Nous en verrons plusieurs définitions. La première que nous évoquons se situe dans le contexte d'une distribution qui domine la base. C'est le groupoïde des isométries d'une réduction minimale du fibré principal. Nous donnons ensuite trois autres définitions sans cette hypothèse de domination, à savoir :

- $\mathcal{G}^a$ la plus petite sous-variété tangente à la distribution qui est un groupoïde au-dessus d'un ouvert
- $\mathcal{G}^b$ la sous-variété minimale tangente à la distribution contenant l'identité du groupoïde,
- et $\mathcal{G}^c$ la sous-variété des isométries conservant les intégrales premières rationnelles de la distribution.

Nous montrons :

Théorème 1.5.16. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale sur un fibré principal P de base B et de groupe G. Les trois définitions du groupoïde de Galois de la distribution sont équivalentes, i.e. $\mathcal{G}^a = \mathcal{G}^b = \mathcal{G}^c$. Cette sous-variété de $Iso(P)$ sera notée $Gal(\mathcal{D})$.*

En particulier cet objet est défini pour une distribution principale sans hypothèse d'intégrabilité. Cet élargissement de la théorie classique est en fait un cas particulier de la généralisation donnée par Y.André dans [2] exprimé à l'aide de groupoïdes plutôt que de groupes. Puis nous établissons la compatibilité avec la toute première définition où nous supposons que la distribution domine la base.

Proposition 1.5.18. *Soient $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale sur un fibré principal P de base B de groupe G et V une sous-variété minimale tangente à la distribution. Si V domine la base B, alors le groupoïde de Galois est égal à $\overline{(V \times V)/G}$, l'adhérence de Zariski de l'image du produit $V \times V$ dans $Iso(P)$. Sous les mêmes hypothèses, et en notant $Iso(V)$ le quotient du produit $V \times V$ sous l'action diagonale du groupe de Galois associé à V, alors le groupoïde de Galois est birationnellement équivalent à $Iso(V)$.*

Une fois ces définitions posées, nous allons pouvoir comparer les groupoïdes de Galois d'équations à paramètres avant et après spécialisation. Plus précisément, nous regardons d'un côté le spécialisé en une valeur des paramètres du groupoïde de Galois d'une telle équation et d'un autre côté le groupoïde de Galois de cette équation spécialisée en cette valeur des paramètres. Grâce à la définition de $\mathcal{G}^a$ nous montrons que le premier contient le deuxième. Un théorème de P. Bonnet [3] nous permet de montrer qu'il y a égalité pour une valeur générale des paramètres.

Théorème 1.6.3. *Soient $\rho : B \to S$ un morphisme surjectif lisse entre deux variétés lisses, $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale sur un fibré principal $p : P \to B$, de groupe structural G qui est tangente aux fibres du morphisme ρ. Supposons que les fibres de la composition $\rho \circ p$ sont connexes. Alors pour tout $q \in S$ où cela a un sens :*

- $\dim_S(Gal(\mathcal{D})) \geq \dim_{\mathbb{C}}(Gal(\mathcal{D}_q))$
- $Gal(\mathcal{D}_q) \subset Gal(\mathcal{D})|_{P_q \times P_q}$

De plus, pour un $q \in S$ général,

- $\dim_S(Gal(\mathcal{D})) = \dim_{\mathbb{C}}(Gal(\mathcal{D}_q))$
- $Gal(\mathcal{D}_q) = Gal(\mathcal{D})|_{P_q \times P_q}$

Nous retrouvons en particulier le résultat de spécialisation de L. Goldman [17].

Théorie de Galois d'équations non linéaires

Dans le chapitre 2 nous utilisons les résultats démontrés au premier chapitre pour simplifier la définition du pseudo-groupe de Malgrange. Pour étudier un champ de vecteurs X sur une variété M, nous construisons une suite de fibrés principaux R_kM pour $k \in \mathbb{N}$. Plus précisément, ces espaces sont des espaces de jets d'ordre k de biholomorphismes de $(\mathbb{C}^m, 0)$ dans M (voir [12],[24] et pour les espaces des jets en eux-mêmes voir [31]). Ils ont les propriétés suivantes :

- ce sont des fibrés principaux,
- le champ X se relève canoniquement en un champ invariant que nous appelons R_kX.

D'après le chapitre précédent, nous obtenons une suite de groupoïdes de Galois $Gal_k(X)$, dans $J_k^*(M, M)$ le groupoïde des isométries de R_kM.

En utilisant le théorème d'involutivité générique de B. Malgrange pour les pseudo-groupes algébriques, nous montrons :

Proposition 2.5.7. *Soit X un champ de vecteurs rationnel sur une variété lisse M. Le pseudo-groupe de Malgrange de X défini dans [24] coïncide avec la limite projective de notre suite de groupoïdes $(Gal_k(X))_k$.*

En particulier, en utilisant la première des trois définitions données dans le cadre linéaire, nous obtenons que le pseudo-groupe de Malgrange est la clôture de Zariski des flots du champ de vecteurs X dans l'espace des jets de biholomorphismes locaux de M dans M qui s'identifie à $J^*(M, M)$, la limite projective des $J_k^*(M, M)$.

Dans la deuxième partie, nous suivons les mêmes étapes en effectuant les modifications nécessaires à l'oubli des paramètres. Nous définissons le fibré des repères des fibres d'un morphisme $R_k(M/S)$. Ils sont appelés repères partiels. La structure de fibré principal de ces espaces découle de la même manière que dans la première partie. Nous pouvons leur associer des groupoïdes $J_k^*(M/S, M/S)$ et relever les champs de vecteurs tangents aux fibres du morphisme sur ceux-ci et ainsi définir les groupoides de Galois $Gal_k(X/S)$.

Le pseudo-groupe de Malgrange partiel d'un champ de vecteurs tangent aux fibres du morphisme est la limite projective de la suite des groupoïdes de Galois. Etant donné un champ de vecteurs tangent aux fibres d'un morphisme, le résultat principal de spécialisation porte sur la comparaison entre d'un côté, son pseudo-groupe de Malgrange partiel restreint à une fibre du morphisme et d'un autre, le pseudo-groupe de Malgrange de la restriction du champ de vecteurs à cette même fibre. Ce résultat est une application directe du résultat de spécialisation donné dans le chapitre 1 et dit que le premier objet contient le deuxième avec égalité sur une fibre générale :

Théorème 3.6.1. *Soit $\rho : M \to S$ un morphisme lisse entre deux variétés lisses dont les fibres sont connexes. Si X est un champ de vecteurs rationnel sur M tangent aux fibres du morphisme ρ, alors pour tout $q \in S$ où ça a un sens :*

- $\dim_S(Gal_k(X/S)) \geq \dim_{\mathbb{C}}(Gal_k(X_q))$
- $Gal_k(X_q) \subset Gal_k(X/S)|_{R_kM_q \times R_kM_q}$

De plus, pour un $q \in S$ général,

- $\dim_S(Gal_k(X/S)) = \dim_{\mathbb{C}}(Gal_k(X_q))$
- $Gal_k(X_q) = Gal_k(X/S)|_{R_kM_q \times R_kM_q}$

Dans [22], E. Kolchin a donné un analogue du polynôme de Hilbert dans le cadre de l'algèbre différentielle. C'est le polynôme de dimension différentielle. Le résultat d'E. Kolchin dans notre contexte donne :

Corollaire 4.1.6. *Soit X un champ de vecteurs rationnel sur une variété lisse M. Il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[x]$ tel que :*

- *il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $P(k) = dim(Gal_k(X))$*
- $\deg(P) = d \leq \dim(M)$ *et le polynôme P peut s'écrire sous la forme* $P(k) = \sum_{0 \leq i \leq d} a_i \binom{k+i}{i}$ *où* $a_i \in \mathbb{Z}$
- *le coefficient a_d est le degré de transcendance différentiel de $\mathbb{C}(Mal(X))$ sur $\mathbb{C}$*

Nous pouvons parler de croissance du pseudo-groupe de Galois d'un champ de vecteurs en terme de degré de son polynôme de dimension différentielle. Un tel pseudo-groupe est à croissance linéaire, quadratique, etc, si son polynôme de dimension différentielle est de degré 1, 2, etc. Dans le cas où le champ de vecteurs est à paramètres, la connaissance de la croissance du pseudo-groupe de Malgrange du champ en une valeur spéciale des paramètres donne une borne inférieure sur la croissance du pseudo-groupe de Malgrange du champ en une valeur générale des paramètres. C'est une conséquence directe du théorème de spécialisation 3.6.1. Dans le chapitre suivant nous verrons que le pseudo-groupe de Malgrange d'un champ de vecteurs donné par une équation différentielle du second ordre est à croissance au plus quadratique.

Théorème 4.1.8. *Soit $\rho : M \to S$ un morphisme lisse entre deux variétés irréductibles lisses dont les fibres sont connexes. Soit X un champ de vecteurs rationnel sur M tangent aux fibres du morphisme ρ. S'il existe $q_0 \in S$ tel que le pseudo-groupe de Malgrange de la restriction (X_{q_0}) à M_{q_0} soit à croissance de degré d alors pour $q \in S$ général le pseudo-groupe de Malgrange de (X_q) est au moins à croissance de degré d.*

Applications aux équations de Painlevé

Les équations de Painlevé sont des équations différentielles du second ordre vérifiant la propriété de Painlevé : en dehors d'un ensemble fini de points Σ de $\mathbb{C}$, les solutions locales de l'équation peuvent se prolonger méromorphiquement suivant n'importe quel lacet évitant Σ. L'ensemble des singularités Σ ne dépend pas des conditions initiales. Ces singularités sont dites non-mobiles. Painlevé et ses élèves ont déterminé toutes les équations du second

ordre ayant cette propriété. Parmi celle-ci, six familles n'ont pu être intégrées en utilisant les fonctions usuelles.

Dans le chapitre 3 nous appliquons les résultats de spécialisation aux équations différentielles du second ordre à paramètres, en particulier aux équations de Painlevé, pour en déduire des résultats d'irréductibilité. Pour décrire ce chapitre nous nous appuyons sur l'exemple suivant de la famille d'équations donnée de la deuxième équation de Painlevé :

$$y'' = 2y^3 + xy + \gamma \qquad (P_{\text{II}}(\gamma))$$

Nous commençons par reprendre la définition de Nishioka-Umemura d'une équation irréductible. Nous utiliserons le résultat pouvant être trouvé dans [11] qui donne une condition suffisante sur le pseudo-groupe de Malgrange pour qu'une équation différentielle soit irréductible :

Proposition 4.1.12. *Si le pseudo-groupe de Malgrange d'une équation différentielle du second ordre est le pseudo-groupe des transformations qui préservent la forme temps, le champs associé à l'équation et une* 3*-forme, alors l'équation est irréductible.*

A ce stade, si nous voulions utiliser directement cette proposition pour montrer l'irréductibilité de $P_{\text{II}}(\gamma)$ il nous faudrait calculer le pseudo-groupe de Malgrange de cette équation *i.e.* du champ de vecteurs $Y_{\text{II}}(\gamma) = \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + (2y^3 + xy + \gamma)\frac{\partial}{\partial z}$. Ce n'est pas chose aisée. Le pseudo-groupe de Malgrange de $P_{\text{II}}(0)$ a été calculé dans [8]. C'est le pseudo-groupe d'applications préservant $Y_{\text{II}}(0)$, la forme temps dx et la 3-forme $dx \wedge dy \wedge dz$:

$$\{\phi \in J^*(M,M) \mid \phi^* dx = dx,\ \phi^* Y_{\text{II}}(0) = Y_{\text{II}}(0),\ \phi^* dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz\}$$

C'est là qu'intervient le résultat de spécialisation du chapitre précédent qui permet de montrer pour les équations différentielles d'ordre 2 :

Corollaire 4.1.13. *Soient S une variété, $(E_q) : y'' = F(x, y, y', q)$ une équation différentielle à paramètres dans S. Si le champ de vecteurs préserve une* 3*-forme et s'il existe $q_0 \in S$ tel que le pseudo-groupe de Malgrange de (E_{q_0}) soit à croissance quadratique alors pour $q \in S$ général le pseudo-groupe de Malgrange est le pseudo-groupe des transformations qui préservent la forme temps dx, le champs associé à l'équation et la* 3*-forme $dx \wedge dy \wedge dz$.*

Ce corollaire utilise la classification de Cartan des pseudo-groupes algébriques de transformations de $\mathbb{C}^2$ (voir [7]). Nous pouvons conclure sur l'irréductibilité de l'équation $P_{\text{II}}(\gamma)$ pour une valeur générale du paramètre γ.

Dans l'avant dernière section de ce chapitre, nous donnons le détail des changements de variables des équations de Painlevé qui permettent de passer de l'une à l'autre par spécialisation. Les champs de vecteurs Y_J associés aux équations de Painlevé préservent tous une 3-forme sur $\mathbb{C}^3$ que nous noterons $dvol$. Ceci implique l'inclusion :

$$Mal(Y_J) \subset \{\phi \in J^*(M,M) \mid \phi^* dx = dx,\ \phi^* Y_J = Y_J,\ \phi^* dvol = dvol\}$$

Pour une valeur générale des paramètres, nous déterminons exactement le pseudo-groupe de Malgrange des équations de Painlevé.

Théorème 4.2.4. *Pour $J = \text{I}, \text{II}, \text{III}, \text{IV}, \text{V}, \text{VI}$ et pour des paramètres généraux, nous avons l'égalité*

$$Mal(Y_J) = \{\phi \in J^*(M,M) \mid \phi^* dx = dx,\ \phi^* Y_J = Y_J,\ \phi^* dvol = dvol\}$$

et P_J est irréductible.

Confluence des équations aux q-différences

Soient B une variété algébrique irréductible lisse et $\sigma : B \dashrightarrow B$ une application rationnelle dominante. Il lui correspond un corps aux différences de fonctions rationnelles $(\mathbb{C}(B), \sigma^*)$. Soient une variété algébrique irréductible lisse M, une projection $\tau : M \to B$ et un relèvement $\Phi : M \dashrightarrow M$ de σ rationnel dominant. L'équation aux différences associée à ces données est l'équation $y \circ \sigma = \Phi \circ y$ sur les sections locales holomorphes de τ, $y : U \to M$, $U \subset B$.

Afin de définir le pseudo-groupe de Malgrange d'une équation discrète, nous adaptons les définitions données dans le cadre différentiel :

- $R(M/B)$ est le fibré principal des repères dans les fibres de τ
- $J^*(M/B, M/B)$ est le groupoïde associé dont les éléments sont les applications formelles $(M_b, p) \to (M_{b'}, q)$ d'une fibre de τ sur une autre

Le pseudo-groupe de Malgrange $Mal(\Phi/B)$ est grosso modo le sous-pseudo-groupe algébrique de $J^*(M/B, M/B)$ engendré par Φ. En considérant les jets d'ordre $k \in \mathbb{N}$ de tous les éléments de $Mal(\Phi/B)$ en tous leurs points de définition, nous obtenons une variété algébrique de dimension finie notée $Mal_k(\Phi/B)$. Comme dans le cas des champs de vecteurs, nous donnons trois définitions de $Mal_k(\Phi/B)$. L'équivalence de ces définitions se démontre en étudiant la manière dont s'organisent les clôtures de Zariski des orbites de Φ et la variation de leurs dimensions. D'après un résultat d'Ekaterina Amerik et Frédéric Campana ([1]), les clôtures de Zariski de ces orbites forment les fibres d'une application rationnelle. Nous prouvons la "semi-continuité" de la dimension des clôtures de Zariski des orbites en recopiant la preuve de P. Bonnet dans ce contexte.

Confluence et spécialisation

Soit $B \dashrightarrow S$ une application rationnelle invariante par Φ. Nous pouvons choisir une valeur $q \in S$ et considérer la restriction du système dynamique $\Phi_q : M_q \dashrightarrow M_q$ au-dessus de $\sigma_q : B_q \dashrightarrow B_q$. L'avis général est que le comportement dynamique de Φ_q pour une valeur particulière $q \in S$ doit être plus simple que celui obtenu sur une fibre générale. C'est le théorème de spécialisation :

Théorème 5.2.1. *Dans cette situation,* $\dim Mal_k(\Phi_q/B_q) \leq \dim_S Mal_k(\Phi/B)$ *avec égalité pour* $q \in S$ *général.*

Comme dans le cas des champs de vecteurs, ce théorème se démontre en utilisant les trois définitions ci-dessus et les analogues des théorèmes de P. Bonnet montrés par E. Amerik et F. Campana. Le deuxième théorème concerne les champs de vecteurs obtenus par limite continue (confluence) d'un système dynamique discret. Nous nous plaçons dans le contexte suivant : S est de dimension 1 et près d'un point spécial $q_0 \in S$, nous pouvons écrire $\Phi_q = Id + (q - q_0)X + o(q - q_0)$; Id est l'application identité de M_{q_0} et X est un champ de vecteurs rationnel sur M_{q_0}. Nous montrons que le comportement du système dynamique de X est plus simple que celui de Φ. C'est le théorème de confluence :

Théorème 5.2.3. *Dans cette situation,* $\dim Mal_k(X/B_{s_0}) \leq \dim_S Mal_k(\Phi/B)$

Applications aux équations de Painlevé discrètes

Une équation de Painlevé discrète est une application birationnelle Φ de $\mathbb{C}^2 \times \mathscr{C} \times S$ fibrée au-dessus d'un automorphisme de $\mathscr{C} \times S$ paramétrée par la variable indépendante

n dans la courbe $\mathscr{C}$ et les paramètres a dans l'espace des paramètres S. L'espace $\mathscr{C} \times S$ peut être non compact. Formellement, l'équation aux différences de courbes invariantes paramétrées par n est l'équation aux différences. En suivant [34], deux propriétés doivent être respectées pour que Φ soit appelée "une équation de Painlevé discrète" :

1. Elle doit avoir la propriété de confinement des singularités. Il existe une compactification M des fibres de $\mathbb{C}^2 \times \mathscr{C} \times S \to \mathscr{C} \times S$ telle que Φ peut être étendu comme un biholomorphisme de M.

2. Elle doit dégénérer sur une équation différentielle de Painlevé. Il existe une déformation $\widetilde{M}$ de M au-dessus de $\mathbb{C}$ et une déformation $\widetilde{\Phi}$ de Φ telles que pour $\epsilon \in \mathbb{C}^*$, $(\widetilde{M}_\epsilon, \widetilde{\Phi}_\epsilon)$ est birationnelle à (M, Φ) et en 0 nous avons un développement de Taylor $\widetilde{\Phi}_\epsilon = Id + \epsilon X + o(\epsilon)$ où X est un champ de vecteurs sur $\widetilde{M}_0$ dont les trajectoires paramétrées par un ouvert de $\mathscr{C}$ sont les fonctions transcendantes de Painlevé et tel que $a \in S \to X(a)$ recouvre les équations de Painlevé $P_J(\gamma)$ pour $J \in \{\text{I}, \text{II}, \text{III}, \text{IV}, \text{V}, \text{VI}\}$ fixé et des paramètres génériques γ. Ce champ de vecteurs est appelé la limite continue de Φ.

Un exemple : l'équation de Painlevé ii discrète

Considérons l'application rationnelle dominante :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\text{II}} : & \mathbb{C}^6 & \longrightarrow & \mathbb{C}^6 \\ & \begin{bmatrix} n \\ x \\ y \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} n+1 \\ -y + \frac{(a+bn)x+c}{1-x^2} \\ x \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} . \end{array}$$

Les courbes analytiques invariantes paramétrées par n sont solutions de ce qui est appelé l'équation de Painlevé II discrète.

$$dP_{\text{II}}(a,b,c) : x(n+1) + x(n-1) = \frac{(a+bn)x(n)+c}{1-x(n)^2}.$$

Cette équation dégénère sur la deuxième équation de Painlevé. Pour $\epsilon \in \mathbb{C}^*$, le changement de variables $t = n\epsilon$, $f = y/\epsilon$, $g = (x-y)/\epsilon^2$, $\alpha = (a-2)/\epsilon^4$, $\beta = (b-\epsilon^2)/\epsilon^4$ et $\gamma = c/\epsilon^3$ peut être utilisé pour obtenir une famille triviale $\Phi_{\text{II}}(\epsilon)$ d'applications rationnelles dominantes au-dessus de $\mathbb{C}^*$ avec une fibre spéciale qui dégénère en 0. Un calcul direct donne

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\text{II}}(\epsilon) : & \mathbb{C}^6 & \longrightarrow & \mathbb{C}^6 \\ & \begin{bmatrix} t \\ g \\ f \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} t \\ g \\ f \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 2f^3 + tf + \gamma \\ g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + o(\epsilon) . \end{array}$$

duquel nous obtenons la confluence de la famille $\Phi_{\text{II}}(\alpha, \beta, \gamma, \epsilon)$ sur le champ de vecteurs $Y_{\text{II}}(\gamma) = \frac{\partial}{\partial t} + g\frac{\partial}{\partial f} + (2f^3 + tf + \gamma)\frac{\partial}{\partial g}$ dont les trajectoires paramétrées par t sont solutions de la deuxième équation de Painlevé $P_{\text{II}}(\gamma) : \frac{d^2 f}{dt^2} = tf + 2f^3 + \gamma$.

Grâce à [8] nous connaissons le pseudo-groupe de Malgrange de $Y_{\text{II}}(0)$ et par le théorème (4.1.10) nous connaissons le pseudo-groupe de Malgrange de $Y_{\text{II}}(\gamma)$ pour des valeurs générales de γ. C'est le pseudo-groupe d'invariance de la forme temps dt et de la 2-forme fermée $\iota_{Y_{\text{II}}(\gamma)}dt \wedge df \wedge dg$. Les principaux théorèmes (5.2.1) et (5.2.3) peuvent être utilisés pour déterminer le pseudo-groupe de Malgrange de $\Phi_{\text{II}}(a,b,c)$. Notons $\tau : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$; $(n,x,y) \mapsto n$ et $\omega = dx \wedge dy$ la 2-forme sur les fibres de τ,

$$Mal(\Phi_{\text{II}}/\mathbb{C}(n)) = \{\varphi : (\tau^{-1}(n),p) \to (\tau^{-1}(n'),q) | (n,n') \in \mathbb{C}^2, \varphi^*\omega = \omega\}.$$

Le pseudo-groupe de Malgrange des équations de Painlevé discrètes

Pour chaque groupe de Weyl affine W il existe une famille de dimension finie d'équations de Painlevé discrètes $dP_W(a)$. Chacune de ces équations préserve une 2-forme ω de rang maximal le long des fibres ([35]). Du théorème (5.2.3) et de la classification de Cartan des pseudo-groupes, il vient :

Théorème 5.2.4. *Pour tout groupe de Weyl affine W et pour des valeurs générales des paramètres a*

$$Mal(dP_W(a)/\mathscr{C}) = \{\varphi : (M_n,p) \to M_{n'},q) | (n,n') \in \mathscr{C}^2, \varphi^*\omega = \omega\}.$$

Chapitre 1

Théorie de Galois différentielle linéaire

Nous commençons par quelques rappels de géométrie différentielle et algébrique sur les fibrés principaux et les groupoïdes que nous pouvons trouver dans [36], [5], [27] et [23] en donnant quelques preuves que nous jugeons intéressantes. Puis nous présentons les groupes de Galois d'une distribution d'un point de vue géométrique, le point de vue algébrique pouvant être trouvé dans [13] et [40]. Nous donnons ensuite plusieurs définitions du groupoïde de Galois d'une distribution et montrons leur équivalence. Nous terminons par le résultat de spécialisation. Dans ce texte, les variétés algébriques seront supposées quasi-projectives lisses et les groupes seront supposés algébriques affines.

1.1 Fibrés principaux et groupoïdes

Nous introduisons les objets sur lesquels nous travaillerons. Nous commençons par les fibrés principaux puis construisons les G-fibrés à partir de ces fibrés et les extensions de groupes structuraux de fibrés principaux. Nous rappelons les définitions de fibrés vectoriels et de fibrés en grassmanniennes. Le point important est la construction du groupoïde des isométries d'un fibré principal.

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1. *Soient B et P deux variétés algébriques, G un groupe algébrique affine. Supposons la variété P munie d'une action algébrique du groupe G, donnée par le morphisme de variétés algébriques noté :*

$$\begin{array}{rccc} S: & P\times G & \longrightarrow & P \\ & (x,g) & \longmapsto & x.g =: S_g(x) \end{array}$$

La variété P est un fibré principal de base B et de groupe G si :

- *il existe une application $p : P \longrightarrow B$ surjective lisse,*
- *l'application*

$$\begin{array}{rccc} \mu: & P\times G & \longrightarrow & P\times_B P \\ & (x,g) & \longmapsto & (x,x.g) \end{array}$$

  est bien définie et est un isomorphisme.

Si V est un sous-ensemble de B alors nous définissons P_V par $p^{-1}(V)$.

Notons en particulier que si V est un ouvert ou un fermé de Zariski de B alors P_V est encore un fibré principal et $\mu|_{P_V \times G}$ est encore un isomorphisme. Dans les chapitres suivants, l'action du groupe structural sur son fibré principal sera une action par composition à la source, c'est pourquoi nous avons choisi de la noter S.

Exemple 1.1.2. *Le fibré trivial $P = B \times G$ est un fibré principal pour l'action de G par multiplication.*

Dans ce texte nous considérerons toujours le fibré $B \times G \to B$ comme principal sous la multiplication à droite.

Exemple 1.1.3. *Soit M une variété lisse de dimension m. Nous notons*

$$R_1M := \{\ell : \mathbb{C}^m \to T_xM \text{ linéaire inversible, } x \in M\}$$

l'espace des repères d'ordre 1 de M. La projection $R_1M \to M$ et l'action du groupe $GL(m, \mathbb{C})$ à droite sur R_1M par composition à la source donnent une structure de fibré principal à R_1M qui sera détaillée dans la suite.

Proposition 1.1.4. *Soit $p : P \to B$ un morphisme de variétés. Supposons que P est muni d'une action algébrique d'un groupe algébrique G et que le morphisme p est G-invariant.*

L'application $p : P \to B$ est un fibré principal si et seulement s'il est localement isotrivial, i.e. pour tout $a \in B$, il existe un ouvert de Zariski $U \subset B$ contenant a et un revêtement non ramifié $V \to U$ tel que $P \times_U V \to V$ est isomorphe au fibré trivial $G \times V \to V$.

Dans ces conditions, B est le quotient géométrique de P par son groupe structural. Ces résultats peuvent être trouvés dans [5].

Corollaire 1.1.5. *Si P est un fibré principal de base B de groupe structural G, alors il existe un ouvert affine B_0 tel que P_{B_0} soit aussi affine.*

Démonstration. Commençons par énoncer un fait qui peut être trouvé dans [36] :

Fait : Si M et N sont deux variétés telles que N est affine et telles qu'il existe un revêtement $M \to N$, alors M est affine.

Maintenant, par la proposition (1.1.4), il existe un ouvert $B_0 \subset B$ qui peut être supposé affine et un revêtement non ramifié $V \to B_0$ tels que le produit fibré $P \times_{B_0} V$ soit isomorphe au fibré trivial $G \times V$. D'une part, la projection $P \times_{B_0} V \to P_{B_0}$ est aussi un revêtement non ramifié (voir [36]). D'autre part, le fait nous dit que la variété V est affine. Puisque G est affine, le produit fibré $P \times_{B_0} V$ est aussi affine. De nouveau dans [36], il est montrer l'existence d'une variété W qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & P \times_{B_0} V \\ & \searrow & \downarrow \\ & & P_{B_0} \end{array}$$

de telle sorte que $W \to P \times_{B_0} V$ soit un revêtement et que $W \to P_{B_0}$ soit un revêtement galoisien non ramifié. Le fait implique que la variété W est affine. En quotientant W par le groupe de Galois du revêtement, nous obtenons une variété affine qui est isomorphe à P_{B_0}. □

1.1.2 G-fibré

Définition 1.1.6. *Soient P un fibré principal de groupe structural G et M une variété munie d'une action algébrique du groupe G. Ce groupe G agit sur le produit $P \times M$ diagonalement à droite. Le G-fibré associé, s'il existe, est le quotient noté $P[M]$ du produit $P \times M$ sous l'action diagonale de G tel que l'application quotient $q : P \times M \to P[M]$ fasse de $P \times M$ un fibré principal de base $P[M]$ de groupe structural G.*

En reprenant les notations de la définition, remarquons que si G agit à gauche sur M alors l'action diagonale à droite est donnée par $(x, y).g := (x.g, g^{-1}.y)$. En notant B la base du fibré principal P, remarquons aussi que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} P \times M & \longrightarrow & B \\ {\scriptstyle q}\downarrow & \nearrow & \\ P[M] & & \end{array}$$

et que le G-fibré $P[M]$ est un fibré sur B de fibres isomorphes à M.

Une condition qui nous sera utile pour assurer l'existence d'un G-fibré est donnée par la proposition de [36] suivante :

Proposition 1.1.7. *Soit $P \to B$ un fibré principal de groupe structural G, et M une variété munie d'une action de G. Supposons que pour tout ensemble fini F inclus dans M, il existe un ouvert affine de M qui contienne F. Alors le G-fibré $P[M]$ existe.*

Notons que si M est quasi-projective alors elle vérifie la condition de la proposition. Comme les variétés rencontrées sont supposées quasi-projectives, il sera aisé de voir que les G-fibrés existent.

1.1.2.1 Fibré vectoriel

Soient P un fibré principal de groupe structural G et E un espace vectoriel sur lequel le groupe G agit à gauche. Le G-fibré $P[E]$ est appelé le fibré vectoriel associé à P.

Exemple 1.1.8. *Soit M une variété de dimension m. Le groupe linéaire $GL(m, \mathbb{C})$ agit à droite par composition à la source sur R_1M et agit à gauche sur $\mathbb{C}^m$. L'espace tangent TM est le fibré vectoriel $R_1M[\mathbb{C}^m]$.*

1.1.2.2 Fibré en grassmannienne

Notons $G(d, m)$ la grassmannienne des sous-espaces de dimension d de $\mathbb{C}^m$. Le groupe $GL(m, \mathbb{C})$ agit naturellement à gauche sur cette variété.

Définition 1.1.9. *Soient M une variété de dimension m et $d \leq m$ un entier. Le $GL(m, \mathbb{C})$-fibré $G(d, TM) := R_1M[G(d, m)]$ est appelé le fibré en grassmannienne des sous-espaces de dimension d.*

Le fibré en grassmannienne des sous-espaces de dimensions d sur une variété M s'obtient aussi en quotientant la variété $\{\ell : \mathbb{C}^d \to T_xM$ linéaire injective, $x \in M\}$ par le groupe $GL(d, \mathbb{C})$ qui agit par composition à la source.

Soit $f : M \to N$ un isomorphisme. Nous définissons l'application $df : G(d, TM) \to G(d, TN)$ de telle sorte que le diagramme commute

$$\begin{array}{ccc} \{\ell : \mathbb{C}^d \to T_xM \text{ linéaire injective, } x \in M\} & \xrightarrow{df\circ .} & \{\ell : \mathbb{C}^d \to T_xy \text{ linéaire injective, } y \in N\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(d, TM) & \xrightarrow{\qquad df \qquad} & G(d, TN) \end{array} \tag{1.1}$$

Cette application est bien définie puisque la composition au but par df passe au quotient sous l'action de $GL(d, \mathbb{C})$ qui, rappelons-le, agit par composition à la source. C'est un isomorphisme d'inverse df^{-1}. Si f est seulement supposée être un morphisme de rang supérieur ou égal à d, alors nous pouvons tout de même en déduire une application $df : G(d, TM) \dashrightarrow G(d, TN)$ qui sera rationnelle.

Soient P un fibré principal de groupe structural G et $g \in G$. Ce qui précède s'applique à l'isomorphisme $S_g : P \to P$. Ainsi, le groupe G agit sur le fibré en grassmannienne par composition au but :

$$\begin{array}{ccc} G \times G(d, TP) & \longrightarrow & G(d, TP) \\ (g, \ell) & \longmapsto & dS_g \circ \ell \end{array}$$

1.1.2.3 Extension et réduction d'un G-fibré

Soient G un groupe algébrique, H un sous-groupe algébrique et P un fibré principal de groupe H. Ce groupe H agit naturellement à gauche sur le groupe G. Le H-fibré $P[G]$ existe bien puisque les groupes sont supposés affines (voir (1.1.7)). Dans cet exemple de H-fibré, nous disposons d'une structure supplémentaire : le groupe G agit sur lui-même à droite. Il agit ainsi sur le produit $P \times G$ sur le membre de droite, et finalement agit sur $P[G]$ à droite puisque cette action commute avec l'action diagonale de H. Cette action fait du H-fibré $P[G]$ un fibré principal de groupe structural G.

Définition 1.1.10. *En reprenant les notations précédentes, le H-fibré $P[G]$ est appelé l'extension du fibré P de groupe H au groupe G. A l'inverse, un fibré principal $\tilde{P}$ de groupe G est dit réductible au fibré principal P de groupe H avec $H < G$ si $P[G] = \tilde{P}$.*

1.1.3 Groupoïde

Voici la définition de groupoïde dont la définition ensembliste peut être trouvée dans [23].

Définition 1.1.11. *Un groupoïde algébrique est la donnée*

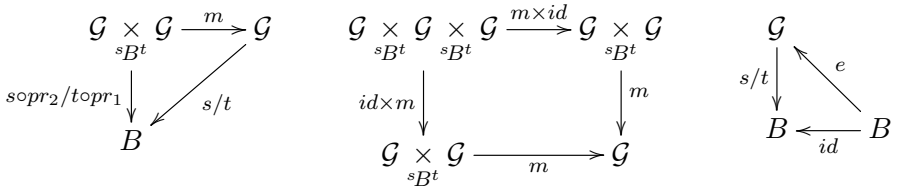
- *de deux variétés $\mathcal{G}$ et B appelées respectivement le groupoïde et la base*
- *de deux morphismes de variétés s, $t : \mathcal{G} \to B$ appelés respectivement source et but*
- *d'un morphisme de variétés $e : B \to \mathcal{G}$ appelé identité*
- *en notant $\mathcal{G} \underset{{}_sB^t}{\times} \mathcal{G}$ le produit fibré de $\mathcal{G} \xrightarrow{s} B$ et $\mathcal{G} \xrightarrow{t} B$, d'un morphisme de variétés appelé composition partielle*

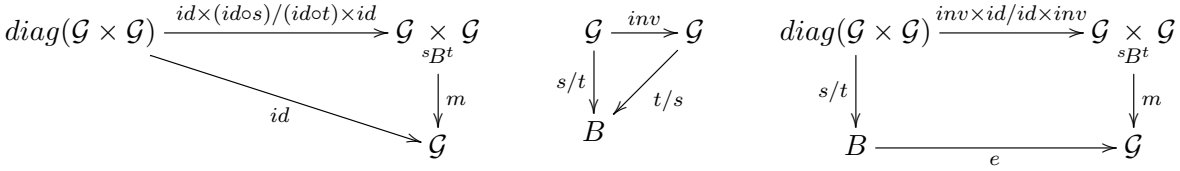
$$\begin{array}{rccc} m : & \mathcal{G} \underset{{}_sB^t}{\times} \mathcal{G} & \to & \mathcal{G} \\ & (x, y) & \mapsto & x \circ y \end{array}$$

- *d'un morphisme de variétés appelé inverse*

$$\begin{array}{rccc} inv: & \mathcal{G} & \to & \mathcal{G} \\ & x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

de telle sorte que les diagrammes commutent :





Exemple 1.1.12. *Si M est une variété, alors $M \times M$ est un groupoïde de base M d'applications associées :*

- *Si $pr_i : M \times M \to M$ est la projection sur la i-ème composante alors $s = pr_1$ et $t = pr_2$.*
- *L'identité est la diagonale de $M \times M$*
- *La composition partielle est*

$$\begin{array}{rccc} m: & (M\times M) \underset{{}_sM^t}{\times} (M\times M) & \longrightarrow & M\times M \\ & ((y,z),(x,y)) & \longmapsto & (x,z) \end{array}$$

- *L'inversion est*

$$\begin{array}{rccc} inv: & M\times M & \to & M\times M \\ & (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$$

Les sous-groupoïdes de $M \times M$ sont les relations d'équivalence.

Définition 1.1.13. *Soit $p : P \to B$ un fibré principal de groupe structural G. Le groupoïde ensembliste $Iso(P)$ associé est la donnée, pour tout $(b, b') \in B^2$, de l'ensemble des bijections G-équivariantes de la fibre P_b dans la fibre $P_{b'}$ et des applications :*

- *source et but qui associent à une telle bijection $P_b \to P_{b'}$ respectivement b et b'*
- *identité qui à $b \in B$ associe $id_{P_b} : P_b \to P_b \in Iso(P)$*
- *composition partielle qui, à deux bijections G-équivariantes vérifiant que la fibre de départ de l'une est la fibre d'arrivée de l'autre, associe leur composition*
- *inversion qui associe à une bijection G-équivariante son inverse*

Pour $(x, y) \in P^2$, il existe un unique élément de $Iso(P)$ qui envoie x sur y, il est noté ϕ_{xy}. En effet, si l'application ϕ_{xy} existe elle doit vérifier $\phi_{xy}(x.g) = y.g$. Ceci donne l'unicité. Pour montrer l'existence, définissons l'application ϕ_{xy} par $\phi_{xy}(x.g) := y.g$. Elle est bien définie puisque le groupe G agit simplement sur chaque fibre de $P \to B$. Elle est définie sur toute la fibre passant par x car l'action est de plus transitive sur chaque fibre. Cette construction donne bien l'existence d'un tel élément de $Iso(P)$. Le lemme suivant confère à $Iso(P)$ une structure algébrique.

Lemme 1.1.14. *Soit P un fibré principal. Le groupoïde ensembliste $Iso(P)$ est muni d'une structure de variété de telle sorte que l'application*

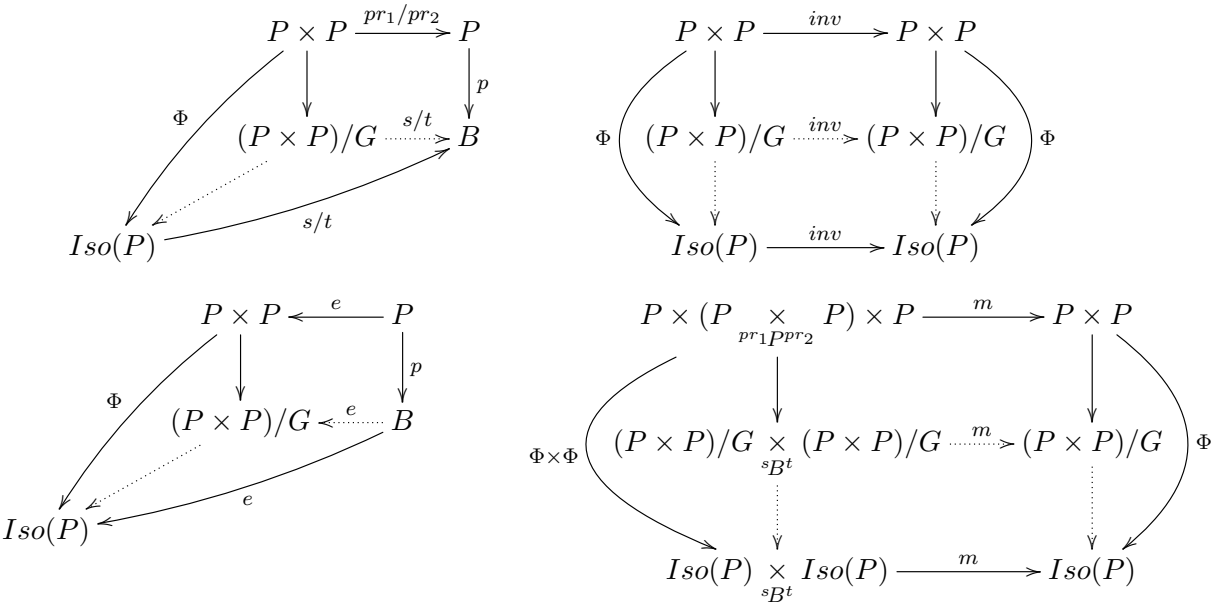
$$\begin{array}{rccc} \Phi : & P \times P & \to & Iso(P) \\ & (x, y) & \mapsto & \phi_{xy} \end{array}$$

soit un morphisme de groupoïde algébrique. Plus précisément Φ est le quotient par l'action diagonale de G.

Cette application donne une bijection entre les relations d'équivalence de $P \times P$ stables sous l'action diagonale du groupe G et les sous-groupoïdes de $Iso(P)$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'application Φ est un morphisme de groupoïde ensembliste. Ensuite, le groupe G agit diagonalement à droite sur $P \times P$ de la manière suivante : si $(x, y) \in P^2$ et $g \in G$, alors $(x, y).g := (x.g, y.g)$. L'application Φ est donc G-équivariante. Plus précisément, elle induit une bijection, de l'ensemble quotient $(P \times P)/G$ vers $Iso(P)$.

Le fibré P est supposé quasi-projectif. La proposition (1.1.7) nous dit que le quotient géométrique $(P \times P)/G$ existe. Un tel quotient étant catégorique, nous en déduisons des morphismes s, t, e, m et inv faisant de $(P \times P)/G$ un groupoïde algébrique. Cette structure se transporte à $Iso(P)$. Ceci se lit sur les diagrammes commutatifs suivants en notant que les flèches "pleines" sont les applications existantes et les flèches "en pointillé" sont les applications déduites :



Après transport de la structure algébrique, toutes les flèches sont algébriques. Le morphisme Φ devient un morphisme surjectif de groupoïde algébrique et son noyau est l'identité de $P \times P$, *i.e.* l'image de P par le morphisme identité. La dernière assertion du lemme est une conséquence directe de la première. □

Le groupoïde algébrique $Iso(P)$ dispose d'une structure semblable à celle du fibré principal P, et plus important pour la suite, il y a une certaine correspondance entre des sous-groupoïdes de $Iso(P)$ et les sous-fibrés de P :

Lemme 1.1.15. *Soit P un fibré principal de base B, de groupe structural G. Notons $Iso(P)_{s=t}$, la sous-variété de $Iso(P)$ donnée par l'image réciproque de la diagonale de $B \times B$ par le morphisme $Iso(P) \xrightarrow{s\times t} B \times B$.*

i) L'évaluation d'un élément de $Iso(P)$ en un point de P est algébrique :

$$\begin{array}{rcl} Iso(P) \underset{sB}{\times} P & \longrightarrow & P \\ (\phi, x) & \longmapsto & \phi(x) \end{array}$$

ii) La variété $Iso(P)_{s=t}$ est un fibré en groupe au-dessus de la base B. De plus, chaque fibre est isomorphe au groupe G, où un tel isomorphisme dépend du choix d'un point de P.

iii) Le fibré en groupe $Iso(P)_{s=t}$ agit sur $Iso(P)$ au-dessus de B à droite en composant à la source. Ce groupoïde fibre en fibré principal au-dessus de B par le but. De plus, chaque fibre de l'application but est isomorphe au fibré P, où l'isomorphisme dépend du choix d'un point de P.

iv) A chaque sous-groupoïde $\mathcal{G}$ de $Iso(P)$ vérifiant que $\mathcal{G} \overset{s\times t}{\to} B \times B$ est surjectif, il peut être associé un sous-fibré principal $P_{\mathcal{G}}$ de P isomorphe à n'importe laquelle des fibres de $t : \mathcal{G} \to B$. Un tel sous-fibré n'est défini qu'à translation près par le groupe G, mais quel que soit le choix, il vérifie $Iso(P_{\mathcal{G}}) = \mathcal{G}$. Les groupes structuraux associés sont eux conjugués.

Démonstration. i) L'identification de $Iso(P)$ à $(P \times P)/G$ permet de voir que l'évaluation revient à la projection de $(P \times P)/G \underset{sB}{\times} P$ sur le deuxième des trois facteurs.

ii) La variété $Iso(P)_{s=t}$ hérite de la composition partielle de $Iso(P)$:

$$\begin{array}{rccl} m : & Iso(P)_{s=t} \times_B Iso(P)_{s=t} & \longrightarrow & Iso(P)_{s=t} \\ & (\phi_{x,x.g}, \phi_{x,x.h}) & \longmapsto & \phi_{x,x.g} \circ \phi_{x,x.h} = \phi_{x,x.g.h} \end{array}$$

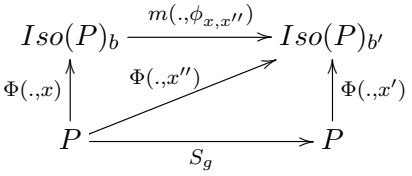
qui en fait un fibré en groupe au-dessus de B. Ensuite, notons $Iso(P)_{bb}$ la fibre de $Iso(P)_{s=t} \to B$ au point $b \in B$ et choisissons $x \in P_b$. Rappelons que μ est l'isomorphisme du fibré principal P et Φ est le morphisme défini dans le lemme ci-dessus, alors $\Phi \circ \mu(x, .) : G \to Iso(P)_{bb}$ est un isomorphisme de variété. C'est de plus un morphisme de groupe puisqu'il commute à la composition partielle et à la loi de composition de G.

iii) L'action de $Iso(P)_{s=t}$ sur $Iso(P)$ est elle aussi héritée de la composition partielle de $Iso(P)$ et il vient l'isomorphisme :

$$\begin{array}{rccl} id \times m : & Iso(P) \underset{sB}{\times} Iso(P)_{s=t} & \longrightarrow & Iso(P) \underset{sBt}{\times} Iso(P) \\ & (\phi_{x,y}, \phi_{x,x.g}) & \longmapsto & (\phi_{x,y}, \phi_{x,y.g}) \end{array}$$

ce qui fait de $Iso(P) \overset{t}{\to} B$ un fibré en fibrés principaux. Ensuite, notons $Iso(P)_b$ la fibre de $Iso(P) \overset{t}{\to} B$ au point $b \in B$ et choisissons $x \in P_b$. Alors $\Phi(., x) : P \to Iso(P)_b$ est un isomorphisme de variété. C'est de plus un morphisme de fibré principal puisqu'il commute à μ et $id \times m$.

iv) Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupoïde. Choisissons $x \in P$, $b \in B$ tels que $p(x) = b$. L'isomorphisme $\Phi(.,x) : P \to Iso(P)_b$ permet d'obtenir un sous-fibré principal $P_{\mathcal{G}}$ de P isomorphe à la fibre de $\mathcal{G}$ en b. Maintenant, si $x' \in P$ et $b' \in B$ sont un autre choix alors, comme par hypothèse $\mathcal{G} \overset{s\times t}{\to} B \times B$ est surjectif, il existe $x'' \in P$, $g \in G$ tels que $x' = x''.g$ et $\phi_{x,x''} \in \mathcal{G}$. La commutativité du diagramme



permet de voir que le sous-fibré $P'_{\mathcal{G}}$ défini à partir de l'isomorphisme $\Phi(.,x')$ est le translaté du fibré $P_{\mathcal{G}}$ par g.

Montrons ensuite l'égalité $Iso(P_{\mathcal{G}}) = \mathcal{G}$ en reprenant les notations du paragraphe précédent. La restriction de Φ à $P_{\mathcal{G}} \times P_{\mathcal{G}}$ a son image dans $\mathcal{G}$ puisque si $y, z \in P_{\mathcal{G}}$, alors par définition $\phi_{y,x}, \phi_{z,x} \in \mathcal{G}$, donc $\phi_{y,z} = \phi_{y,x} \circ \phi_{z,x}^{-1} \in \mathcal{G}$. Cette restriction passe ensuite au quotient sous l'action diagonale du groupe structural de $P_{\mathcal{G}}$, ce qui donne une injection de $Iso(P_{\mathcal{G}})$ dans $\mathcal{G}$. De plus ces deux groupoïdes se surjectent sur B par le but et les fibres associées sont isomorphes à $P_{\mathcal{G}}$. Il s'ensuit donc que l'injection entre ces deux groupoïdes est un isomorphisme.

Enfin, nous avons vu que les fibrés principaux $P_{\mathcal{G}}$ et $P'_{\mathcal{G}}$ de groupe structural respectif H et H' vérifient $P'_{\mathcal{G}} = P_{\mathcal{G}}.g$. Il vient alors : $H' = g.H.g^{-1}$.

□

1.2 Distribution principale

1.2.1 Définitions

Une distribution sur une variété est une famille de sous-espaces vectoriels de même dimension de l'espace tangent. Nous donnons la définition avec les grassmanniennes. Ceci nous permet de donner un caractère algébrique aux distributions.

Définition 1.2.1. *Soit P une variété algébrique. Rappelons que $G(d, TP)$ désigne le fibré en grassmannienne des sous-espaces de dimension d. Une distribution $\mathcal{D}$ de rang d au-dessus d'un ouvert de P est une section du fibré $G(d, TP) \to P$ sur cet ouvert. La distribution est rationnelle si la section est rationnelle.*

Exemple 1.2.2. *L'ensemble des sous espaces de dimension* 1 *engendré par un champ de vecteurs rationnel sur une variété P est une distribution rationnelle. En effet, notons m la dimension de la variété P et $X : P \dashrightarrow TP$ le champ de vecteurs rationnel. Nous avons déjà vu dans l'exemple (1.1.3) que $TP = R_1P[\mathbb{C}^m]$. La projection $\mathbb{C}^m \to G(1, m)$ induit la projection $TP \to G(1, TP)$. La composition du champ X et de cette projection nous donne une distribution rationnelle $P \dashrightarrow G(1, TP)$.*

Dans la définition suivante, quand nous dirons qu'un champ de vecteurs X est inclus dans une distribution $\mathcal{D}$, ceci signifiera que la distribution engendrée par le champ X est incluse dans $\mathcal{D}$.

Définition 1.2.3. *Soient P un fibré principal de base B, de groupe structural G et $\mathcal{D}$ une distribution.*

- *La distribution $\mathcal{D}$ est dite principale si elle est G-équivariante. En rappelant que pour $g \in G$, S_g désigne l'action de g et que dS_g est l'application déduite sur les fibrés en grassmannienne (voir (1.1)), cela signifie que le diagramme commute :*

$$\begin{array}{ccc} G(d,TP) & \xrightarrow{dS_g} & G(d,TP) \\ \mathcal{D}\uparrow & & \uparrow\mathcal{D} \\ P & \xrightarrow[S_g]{} & P \end{array}$$

- *Elle est dite intégrable si pour tous champs de vecteurs $X, Y : P \dashrightarrow TP$ tels que $X \subset \mathcal{D}$ et $Y \subset \mathcal{D}$ nous avons $[X,Y] \subset \mathcal{D}$*

- *La distribution domine la base si pour $x \in P$ générique l'image de $\mathcal{D}_x$ par l'application tangente $d_x p : T_x P \to T_x B$ est $T_x B$.*

Notons qu'une distribution $\mathcal{D}$ est principale si et seulement si pour tout champ de vecteurs X tel que $X \subset \mathcal{D}$ et pour tout $g \in G$, $dS_g.X \subset \mathcal{D}$.

Définition 1.2.4. *Soient P un fibré principal et π la projection naturelle $TP \to P$. La suite exacte $P \xrightarrow{p} B \to 0$ induit la suite exacte tangente :*

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow TP \xrightarrow{dp\times\pi} TB \times_B P \longrightarrow 0$$

où le noyau V de $dp \times \pi$ est appelé le tangent vertical. Une connexion est une distribution $\mathcal{D}$ qui est un supplémentaire du tangent vertical : $T_x P = V_x \oplus \mathcal{D}_x$. Elle est aussi appelée tangent horizontal.

Remarquons qu'une connexion domine la base.

Lemme 1.2.5. *Soit P un fibré principal de base B. Une section rationnelle $\nabla : TB \times_B P \dashrightarrow TP$ de la suite exacte définie précédemment engendre une connexion rationnelle.*

Démonstration. Notons m la dimension du fibré principal P et d la dimension de sa base B. La section rationnelle ∇ régulière sur un ouvert O de B induit le morphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} f : R_1 O \times_O P_O & \longrightarrow & \{\ell : \mathbb{C}^d \to T_x P \text{ linéaire injective}, x \in P\} \\ (h,x) & \longmapsto & \nabla \circ h \end{array}$$

Remarquons que la composition de ce morphisme au but par l'application tangente $dp \times \pi$, où π est la projection naturelle $TP \to P$, est l'identité de $R_1 O \times_O P_O$. Le quotient de $R_1 B \times_B P$ par l'action du groupe $GL(d,\mathbb{C})$ par composition à la source est isomorphe à P. Le morphisme f induit une distribution rationnelle $\mathcal{D} : P \dashrightarrow G(d,TP)$ régulière sur P_O en passant au quotient de part et d'autre par le groupe $GL(d,\mathbb{C})$. La composition au but par l'application tangente $dp \times \pi$ passe aussi au quotient et nous obtenons l'application $dp \times \pi \circ \mathcal{D} : P \dashrightarrow G(d,TB) \times_B P$ où cette fois-ci dp désigne l'application définie en (1.1). Le fait que cette application soit bien définie implique que la distribution $\mathcal{D}$ domine la base. Ainsi, pour $x \in P$ générique, $T_x P = V_x + \mathcal{D}_x$. Le fait que la distribution soit de rang d, la dimension de la base B, nous dit que cette somme est directe. La distribution $\mathcal{D}$ est une connexion.

□

Exemple 1.2.6. *Soit $P = \mathbb{C} \times GL(m, \mathbb{C})$ le fibré principal trivial de base $B = \mathbb{C}$ et de groupe structural $G = GL(m, \mathbb{C})$ avec $m \in \mathbb{N}$. Nous noterons x les points de $\mathbb{C}$ et (y_{ij}) les points de $GL(m, \mathbb{C})$. Par commodité, nous noterons alors $P = \mathbb{C}_x \times GL(m, \mathbb{C})_{(y_{ij})}$. Si $A \in GL(m, \mathbb{C}(x))$, alors $\nabla(\frac{d}{dx}, (y_{ij})) = \frac{\partial}{\partial x} + \sum A_{ij}(x) y_{jk} \frac{\partial}{\partial y_{ik}}$ est une section rationnelle $GL(m, \mathbb{C})$-équivariante de $TP \to TB \times_B P = T\mathbb{C}_x \times GL(m, \mathbb{C})$. D'ailleurs, une section rationnelle $GL(m, \mathbb{C})$-équivariante s'écrit nécessairement sous cette forme.*

1.2.2 Distribution induite sur un G-fibré

La structure de G-fibré étant donnée, regardons maintenant les distributions issues des fibrés principaux. Donnons-nous un fibré principal P de dimension n de groupe structural G, une variété M de dimension m munie d'une action du groupe G et un entier $d \leq n$. L'injection $TP \times M \hookrightarrow T(P \times M)$ induit l'injection ensembliste $G(d, TP) \times M \hookrightarrow G(d, T(P \times M))$.

Fait : Cette injection est un morphisme.

En effet les injections des repères $R_1P \times R_1M \to R_1(P \times M)$ et des grassmanniennes $G(d, n) \times \{0\}^m \to G(d, n + m)$ induisent l'injection $R_1P \times R_1M \times G(d, n) \times \{0\}^m \hookrightarrow R_1(P \times M) \times G(d, n + m)$. Il vient un morphisme $R_1P \times R_1M \times G(d, n) \times \{0\}^m \to G(d, T(P \times M))$ en composant cette injection avec le passage au quotient sous l'action du groupe $GL(n+m, \mathbb{C})$. L'injection attendue s'obtient en quotientant le morphisme précédent sous l'action diagonale du groupe produit $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(m, \mathbb{C})$.

Fort de cette injection, nous pouvons maintenant déduire la distribution rationnelle $\mathcal{D}(P[M])$ sur le G-fibré $G(d, T(P[M]))$ à partir d'une distribution rationnelle $\mathcal{D}$ de rang d sur le fibré P. En effet, reprenons la notation $q : P \times M \to P[M]$ de l'application quotient de la définition (1.1.6) et considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} G(d, TP) \times M & \hookrightarrow & G(d, T(P \times M)) & \xrightarrow{dq} & G(d, T(P[M])) \\ & \nwarrow^{\mathcal{D} \times id} & \downarrow & & \downarrow \quad \nearrow_{\mathcal{D}(P[M])} \\ & & P \times M & \xrightarrow{\quad q \quad} & P[M] \end{array}$$

L'égalité $dq \circ (\mathcal{D} \times id)(x, y) = dq \circ (\mathcal{D} \times id)(x.g, y.g)$ pour $(x, y, g) \in P \times M \times G$ permet de factoriser la distribution par q et d'obtenir l'application rationnelle $\mathcal{D}(P[M])$ notée en "pointillé" sur le diagramme. Cette nouvelle distribution rationnelle est intégrable si la distribution rationnelle $\mathcal{D}$ est intégrable. Si G est un sous-groupe d'un groupe H, alors la distribution rationnelle $\mathcal{D}(P[H])$ est principale sur l'extension $P[H]$.

De la même manière nous déduisons une section rationnelle $\nabla(P[M])$ sur $P[M]$ d'une section rationnelle ∇ sur P en factorisant par q.

$$\begin{array}{ccc} TB \times_B P \times M & \xrightarrow{\nabla \oplus 0} & T(P \times M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ TB \times_B P[M] & \xrightarrow[\nabla(P[M])]{} & T(P[M]) \end{array}$$

Si $\mathcal{D}$ est la connexion rationnelle engendrée par ∇ (voir 1.2.5), alors $\mathcal{D}(P[M])$ est la connexion rationnelle engendrée par $\nabla(P[M])$.

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $GL(m, \mathbb{C})$ le groupe structural du fibré principal P. Une section rationnelle $GL(m, \mathbb{C})$-équivariante de $TP \to TB \times_B P$ induit une dérivée covariante sur les fibrés vectoriels associés.

Exemple 1.2.7. *Reprenons l'exemple (1.2.6). Soit $A \in GL(m, \mathbb{C}(x))$. Sur le fibré principal trivial $P = \mathbb{C}_x \times GL(m, \mathbb{C})_{(y_{ij})}$, la section $\nabla(\frac{d}{dx}, (y_{ij})) = \frac{\partial}{\partial x} + \sum A_{ij}(x) y_{jk} \frac{\partial}{\partial y_{ik}}$ induit la section $\nabla(P[\mathbb{C}^m]) : (\frac{d}{dx}, (y_i) \mapsto \sum A_{ij}(x) y_j \frac{\partial}{\partial y_i}$ sur $P[\mathbb{C}^m] = \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}^m_{(y_i)}$.*

Définition 1.2.8. *Soient $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle et principale sur un fibré principal P de groupe structural G, H un sous-groupe de G et $\tilde{\mathcal{D}}$ une distribution rationnelle et principale sur un fibré principal $\tilde{P}$ de groupe structural H. Le couple $(P, \mathcal{D})$ est dit réductible au couple $(\tilde{P}, \tilde{\mathcal{D}})$ si $\tilde{P}[G] = P$ et $\tilde{\mathcal{D}}(\tilde{P}[G]) = \mathcal{D}$.*

1.2.3 Distribution induite sur un groupoïde

Soit P un fibré principal. La structure de groupoïde algébrique sur $Iso(P)$ a été donnée de telle sorte qu'elle soit isomorphe à celle du quotient de $P \times P$ sous l'action diagonale du groupe structural. Pour induire une distribution principale de P sur $Iso(P)$, nous reprenons l'idée ci-dessus. Il y a deux façons d'induire une telle distribution : par la source ou par le but. Nous utilisons alors l'injection $G(k, TP) \times P \hookrightarrow G(k, T(P \times P))$ ou l'injection $P \times G(k, TP) \hookrightarrow G(k, T(P \times P))$:

Définition 1.2.9. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale de rang d sur un fibré principal P.*

- *Les distributions rationnelles $\mathcal{D}^s : P \times P \dashrightarrow G(d, T(P \times P))$ et $\mathcal{D}^s : Iso(P) \dashrightarrow G(d, T(Iso(P)))$ sont définies en faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} G(d,TP) \times P & \hookrightarrow & G(d, T(P \times P)) & \xrightarrow{d\Phi} & G(d, T(Iso(P))) \\ & \searrow^{\mathcal{D} \times id} & \downarrow \uparrow \mathcal{D}^s & & \downarrow \uparrow \mathcal{D}^s \\ & & P \times P & \xrightarrow{\Phi} & Iso(P) \end{array}$$

- *Les distributions rationnelles $\mathcal{D}^t : P \times P \dashrightarrow G(d, T(P \times P))$ et $\mathcal{D}^t : Iso(P) \dashrightarrow G(d, T(Iso(P)))$ sont définies en faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} P \times G(d,TP) & \hookrightarrow & G(d, T(P \times P)) & \xrightarrow{d\Phi} & G(d, T(Iso(P))) \\ & \searrow^{id \times \mathcal{D}} & \downarrow \uparrow \mathcal{D}^t & & \downarrow \uparrow \mathcal{D}^t \\ & & P \times P & \xrightarrow{\Phi} & Iso(P) \end{array}$$

1.3 Les groupes de Galois

Du point de vue des extensions de corps, un groupe de Galois d'une équation est l'ensemble des automorphismes différentiels d'une extension de Picard-Vessiot du corps de base. De notre point de vue géométrique, un groupe de Galois d'une distribution est le stabilisateur d'une sous-variété minimale tangente à cette distribution dont la définition est donnée ci-dessous. Ces deux définitions coïncident. Nous retrouvons dans cette section certaines de ses propriétés. En supposant que la distribution domine la base, nous terminons par le résultat de réductibilité du fibré principal de départ à une sous-variété minimale tangente à la distribution qui est un fibré principal dont le groupe structural est un groupe de Galois.

Définition 1.3.1. *Soient M une variété irréductible, $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle sur M et M_0 une sous-variété irréductible de M. La variété minimale tangente $V(\mathcal{D}, M_0)$ est la plus petite sous-variété de M vérifiant les deux conditions suivantes :*

- $M_0 \subset V(\mathcal{D}, M_0)$
- $\mathcal{D}_x \subset T_x V(\mathcal{D}, M_0)$ *pour tout point* x *de* $V(\mathcal{D}, M_0)$ *là où ça a un sens*

Nous donnons quelques propriétés des variétés minimales tangentes en annexe en utilisant notamment un théorème de P. Bonnet.

Lemme 1.3.2. *Soient P un fibré principal de groupe structural G et $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle et principale. Soient $g \in G$, $x \in P$ tel que $\mathcal{D}$ est bien définie en x et $V(\mathcal{D}, x)$ la sous-variété minimale tangente contenant x, alors $V(\mathcal{D}, x).g = V(\mathcal{D}, x.g)$.*

Démonstration. L'isomorphisme de P, S_g, envoie un fermé sur un fermé. Donc la variété $V(\mathcal{D}, x).g$ est fermée et contient le point $x.g$. Cette variété $V(\mathcal{D}, x).g$ est tangente à la distribution puisque que cette dernière est principale. Par minimalité, il en découle l'inclusion $V(\mathcal{D}, x.g) \subset V(\mathcal{D}, x).g$. Pour l'inclusion inverse, de la même manière que précédemment, nous obtenons l'inclusion $V(\mathcal{D}, x.g.g^{-1}) \subset V(\mathcal{D}, x.g).g^{-1}$, qui induit l'inclusion voulue $V(\mathcal{D}, x).g \subset V(\mathcal{D}, x.g)$ en multipliant à droite par g. □

La conséquence de ce lemme est que le groupe G agit sur l'ensemble des sous-variétés minimales tangentes. La définition de groupe de Galois qui suit vient alors naturellement.

Définition 1.3.3. *Soient $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale et x un point dans le domaine de $\mathcal{D}$. Le groupe de Galois $Gal(\mathcal{D}, x)$ de la distribution $\mathcal{D}$ en x est le stabilisateur de la sous-variété minimale tangente $V(\mathcal{D}, x)$ sous l'action du groupe structural G : $Gal(\mathcal{D}, x) := \{g \in G$ tels que $V(\mathcal{D}, x).g \subset V(\mathcal{D}, x)\}$.*

En faisant l'hypothèse que la distribution domine la base, nous obtenons que les groupes de Galois sont conjugués.

Proposition 1.3.4. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale sur un fibré principal de groupe structural G, alors :*

i) Le groupe de Galois $Gal(\mathcal{D}, x)$ est un sous-groupe algébrique de G qui est égal à l'ensemble $\{g \in G$ tels que $V(\mathcal{D}, x).g = V(\mathcal{D}, x)\}$.

ii) Soient x, x' deux points du fibré et $g \in G$ tels que $x' = x.g$, alors : $Gal(\mathcal{D}, x) = g.Gal(\mathcal{D}, x').g^{-1}$

iii) Si de plus la distribution domine la base alors tous les groupes de Galois sont conjugués entre eux.

Démonstration. i) La première assertion provient du fait que le groupe de Galois est le stabilisateur d'une sous-variété fermée. Voir [4](p 52).

ii) Soit $h \in Gal(\mathcal{D}, x')$, alors

$$\begin{aligned} V(\mathcal{D}, x).g.h &= V(\mathcal{D}, x').h \quad \text{par le lemme (1.3.2)} \\ &\subset V(\mathcal{D}, x') \quad \text{par définition de } h \\ &\subset V(\mathcal{D}, x).g \quad \text{par le lemme (1.3.2)} \end{aligned}$$

Donc $g.h.g^{-1} \in Gal(\mathcal{D}, x)$. Nous obtenons l'inclusion $g.Gal(\mathcal{D}, x').g^{-1} \subset Gal(\mathcal{D}, x)$. L'inclusion inverse vient du même calcul en échangeant les rôles de x et x'.

iii) Le lemme (6.1.6) nous dit que les sous-variétés minimales tangentes dominent la base. Si V et V' sont deux variétés minimales tangentes alors il existe une fibre de $P \to B$ qui soit d'intersection non vide avec chacune d'elles. Notons x un point contenu dans la première intersection et $x.g$ un point contenu dans la deuxième. Le lemme (6.1.6) nous dit aussi que les sous-variétés minimales tangentes forment une partition du fibré P au-dessus d'un ouvert de la base. Ainsi $V = V(\mathcal{D}, x)$ et $V' = V(\mathcal{D}, x.g)$. Le point précédent conclut ce troisième point.

□

Lemme 1.3.5. *Soit $p : P \to B$ un fibré principal de groupe structural G muni d'une distribution $\mathcal{D}$ rationnelle, principale et qui domine TB. Notons $\tilde{\mathcal{D}}$ la restriction de $\mathcal{D}$ à une sous-variété minimale tangente $V = V(\mathcal{D}, x)$. Alors il existe un ouvert O de la base B tel que :*

- *$V_O \to O$ est un fibré principal de groupe structural $Gal(\mathcal{D}, x)$*
- *le couple $(P_O, \mathcal{D})$ est réductible au couple $(V_O, \tilde{\mathcal{D}})$.*

Démonstration. Fait : Il existe un ouvert O' de B tel que $V_{O'}$ est une variété lisse.

Pour montrer ce fait, remarquons d'une part que si V est lisse en un point y, alors elle est lisse sur $V_{p(y)}$. En effet, prenons $g \in G$ vérifiant $y.g \in V$. Comme $y.g \in V.g$, et que V et $V.g$ sont soit distincts soit égaux par le lemme (6.1.6), il vient $V = V.g$. Donc $dS_g T_y V = T_{y.g} V$. Autrement dit V est lisse au point $y.g$. D'autre part, l'ensemble des points lisses forment un ouvert de V qui domine la base puisque V domine elle-même la base par le lemme (6.1.6). La variété V est alors lisse sur chaque fibre contenant un de ces points ce qui montre le fait.

Le théorème de lissité générique donne l'existence d'un ouvert $O \subset O'$ de la base tel que $V_O \to O$ est lisse. Enfin, le morphisme $\tilde{\mu} : V_O \times Gal(\mathcal{D}, x) \longrightarrow V_O \times_O V_O$ est surjectif, car, comme il a été vu ci-dessus, si $y \in V_O$ et $g \in G$ vérifient $y.g \in V_O$ alors $g \in Gal(\mathcal{D}, x)$. C'est même un isomorphisme puisque μ en est un.

Il reste maintenant à montrer la réductibilité. La restriction de l'action $V_O \times G \longrightarrow P_O$ est invariante sous l'action diagonale du groupe de Galois. En passant au quotient par cette action diagonale, il vient le morphisme $V_O[G] \to P_O$ qui s'avère être bijectif. Il est donc birationnel. Comme de plus la variété P_O est lisse, par le théorème principal de Zariski, c'est un isomorphisme (voir [37] p 78-85). Enfin, les distributions $\mathcal{D}$ et $\tilde{\mathcal{D}}(V_O[G])$ sont principales et coïncident sur V_O qui domine O, elles coïncident donc partout.

□

Nous savons que les sous-variétés minimales tangentes forment une partition du fibré principal. Sous l'hypothèse de domination nous pouvons voir en annexe que ce lemme implique que cette partition est un feuilletage. Grâce au théorème de X. Gomez-Mont, nous pouvons voir que les feuilles s'arrangent entre elles pour former les fibres d'une application rationnelle.

1.4 Extension de Picard Vessiot

Nous rappelons ici le point de vue algébrique en terme d'extensions de corps différentiels et donnons le lien avec le point de vue géométrique que nous adoptons dans ce texte. Dans cette section, $(k, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ désigne un corps différentiel qui est une extension de type fini sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. Le corps des constantes C_k est le corps $\mathbb{C}$.

Définition 1.4.1. *Un système d'opérateurs différentiels linéaires sur le corps différentiel $(k, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ est un ensemble de m opérateurs différentiels de la forme $\partial_i - A_i$ où les A_i sont dans $gl_n(k)$*

Exprimons ces données dans le langage des fibrés à connexions.

- Pour la structure de fibré, nous nous donnons une variété affine lisse B vérifiant $k = \mathbb{C}(B)$ et le fibré principal trivial $P = B \times Gl(n, \mathbb{C}) \to B$.
- Munissons ce fibré principal de la section $\nabla : TB \times_B P \dashrightarrow TP$, associée au système d'opérateurs différentiels linéaires $\{\partial_i - A_i\}_i$. C'est à dire, sachant que les dérivations ∂_i sur le corps k induisent des champs de vecteurs rationnels notés aussi ∂_i sur B, cette section est définie par $\nabla(\partial_i, Y) = \partial_i + \sum_{jkl} A_{i,jk} Y_{kl} \frac{\partial}{\partial Y_{jl}}$.

Le rôle du corps de rupture en théorie de Galois différentielle est joué par les extensions de Picard Vessiot et le groupe de Galois de l'extension sera un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{C})$.

Définition 1.4.2. *Une extension de Picard Vessiot associée au système d'opérateurs différentiels linéaires $\{\partial_i - A_i\}_i$ est une extension différentielle $(K, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ du corps $(k, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ vérifiant :*

- *$K = k(Z_{ij})$ où les Z_{ij} sont les coefficients d'une matrice Z vérifiant $\partial_i Z = A_i Z$ pour tout i. Cette matrice Z est appelée système fondamental de solutions.*
- *le corps des constantes de K est encore $\mathbb{C}$, i.e. $C_K = C_k = \mathbb{C}$.*

Proposition 1.4.3. *Soit $(k, \partial_1, \ldots, \partial_m)$ un corps différentiel muni du système d'opérateurs différentiels linéaires $\{\partial_i - A_i\}_i$ dont le corps des constantes est $\mathbb{C}$. Notons respectivement P, B et ∇ le fibré principal trivial, sa base et la section associés. Et notons $\mathcal{D}$ la connexion induite par la section ∇. Pour x général dans P, la sous-variété minimale tangente $V = V(\mathcal{D}, x)$ domine la base B et dans ces conditions $\mathbb{C}(V)$ est une extension de Picard Vessiot.*

Démonstration. Le théorème (6.3.2) de P.Bonnet et la proposition (6.3.3) appliqués à la base B et à la distribution $\widetilde{\mathcal{D}}$ induite par les champs de vecteurs ∂_i nous donnent une application rationnelle dominante $\pi : B \dashrightarrow N$ telle que pour tout b dans un ensemble général $\widetilde{E} \subset B$ la clôture d'une fibre contenant b soit une sous-variété minimale tangente de $\widetilde{\mathcal{D}}$ et telle que $\mathbb{C}(N)$ soit exactement le sous-corps de $\mathbb{C}(B)$ formé par les intégrales premières de la distribution. Dit autrement, le sous-corps $\mathbb{C}(N)$ est le sous-corps des constantes de $(k, \partial_1, \ldots, \partial_m)$. Or, par hypothèse, ce sous-corps est le corps des complexes $\mathbb{C}$. Il s'ensuit alors que la variété N est réduite à un point et donc que pour tout b dans l'ensemble général $\widetilde{E}$, la sous-variété minimale tangente $V(\widetilde{\mathcal{D}}, b)$ est B. Notons maintenant E l'image réciproque de l'ensemble général $\widetilde{E}$ par la projection $P \to B$. Cet ensemble est lui aussi général. Ce qui précède implique que pour tout point x de E, la sous-variété minimale tangente $V(\mathcal{D}, x)$ domine la base B. En effet, comme l'adhérence de son image dans B est tangente à la distribution $\widetilde{\mathcal{D}}$ et comme elle contient un point b de l'ensemble $\widetilde{E}$, cette adhérence contient alors $V(\widetilde{\mathcal{D}}, b)$ qui, par ce qui précède, est la base B.

Maintenant que nous savons qu'il en existe, prenons V une sous-variété minimale tangente à $\mathcal{D}$ qui domine la base B. Nous savons par le lemme (6.1.2) que la variété V est irréductible et que si O est un ouvert de la base sur lequel la distribution $\mathcal{D}$ est bien définie

alors l'idéal I associé à V_O est différentiel maximal. Pour obtenir la première condition de la définition (1.4.2), désignons par $\overline{Y_{ij}}$ l'image de Y_{ij} dans le quotient $\mathcal{O}(P_O)/I$. Ainsi, $\mathbb{C}(V) = \mathbb{C}(V_O) = Frac(\mathcal{O}(P_O)/I) = \mathbb{C}(B)(\overline{Y_{ij}})$. De plus, puisque l'idéal I est différentiel, il vient $\partial_i \overline{Y} = A_i \overline{Y}$. Il nous reste la deuxième condition. En appliquant le théorème (6.1.4) à la variété V et à la restriction de la distribution $\mathcal{D}$ à V, il vient pour x général dans V : $V(\mathcal{D}, x) = V$. Le théorème (6.3.2) et la proposition appliqués cette fois-ci à la variété V et à la restriction de la distribution $\mathcal{D}$ à V nous donnent une application rationnelle dominante $\pi : V \dashrightarrow N$ dans laquelle $\mathbb{C}(N)$ est le sous-corps des intégrales premières et tel que les clôtures des fibres générales soient des sous-variétés minimales tangentes. Ce qui précède nous dit que V est l'une de ces clôtures de fibre et donc que le corps des constantes $\mathbb{C}(N)$ est finalement $\mathbb{C}$.

□

1.5 Le groupoïde de Galois

Rappelons nous que le groupe de Galois d'une distribution principale qui domine la base du fibré principal P n'est défini qu'à conjugaison près. Dans la suite, les distributions dépendront de paramètres. L'exemple de l'équation différentielle $y' = \frac{t}{x} y$ donnée en introduction nous montre que le groupes de Galois peut changer drastiquement en fonction des paramètres. Dans ce cadre, nous voudrions comparer des objets intrinsèques à ces distributions avant et après spécialisation en une valeur du paramètre pour en déduire des résultats d'irréductibilité.

Rappelons d'une part que le lemme (1.3.5) nous dit qu'une sous-variété minimale tangente qui domine la base est génériquement un sous-fibré de P de groupe structural : son groupe de Galois. D'autre part le lemme (1.1.15) donne une correspondance entre classe de sous-fibrés de P sous l'action du groupe structural qui dominent la base et sous-groupoïdes de $Iso(P)$. Dans le cas d'une variété minimale tangente qui domine la base, nous obtenons un sous-groupoïde de $Iso(P)$ au-dessus d'un ouvert de la base qui contient tous les groupes de Galois. Un tel objet est défini sans faire de choix sur des conditions initiales ou sur le choix d'une extension de corps différentiel contrairement aux groupes de Galois. Le groupoïde de Galois est l'adhérence de Zariski de cet objet. Il est à noter cependant que le groupoïde de Galois n'est en général pas un groupoïde.

Dans cette section, nous en donnons plusieurs définitions dans lesquelles l'hypothèse de domination de la base n'est pas requise. Nous montrons l'équivalence entre toutes ces définitions en utilisant un théorème de P. Bonnet que nous avons déjà utilisé dans la section précédente. Il est déjà donné en annexe et nous le redonnons ici :

Théorème 6.3.2. *(voir [3]) Soit $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle sur une variété irréductible P. Il existe une variété irréductible N, une application rationnelle dominante $\pi : P \dashrightarrow N$ et un ensemble général E tels que pour tout $x \in E$, $\overline{\pi^{-1}(\pi(x))} = V(\mathcal{D}, x)$.*

1.5.1 Les trois définitions du groupoïde de Galois

Pour présenter ces trois définitions de groupoïde de Galois d'une distribution principale sur un fibré principal P, il est commode d'utiliser la correspondance donnée dans la section (1.1.3) entre relations d'équivalence de $P \times P$ stables sous l'action du groupe structural et sous-groupoïdes de $Iso(P)$. Rappelons qu'elle est donnée par le morphisme $\Phi : P \times P \to Iso(P)$. Par ailleurs, il sera régulièrement nécessaire de se restreindre à des ouverts de la base. Si U est un tel ouvert, si $\mathcal{G}$ est une sous-variété de $Iso(P)$ et si $\mathcal{R}$ est une sous-variété

de $P \times P$, alors les restrictions respectives à cet ouvert seront notées $\mathcal{G}|_{U\times U}$ et $\mathcal{R}|_{U\times U}$, autrement dit : $\mathcal{G}|_{U\times U} := \mathcal{G} \cap (s \times t)^{-1}(U \times U)$ et $\mathcal{R}|_{U\times U} := \mathcal{R} \cap (s \times t)^{-1}(U \times U)$.

1.5.1.1 Définition algébrique

Voici la définition du groupoïde de Galois en tant que sous-variété minimale tangente qui soit un groupoïde au-dessus d'un ouvert :

Définition 1.5.1. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale sur un fibré principal P de groupe structural G et de base B. Le groupoïde de Galois, noté ici $\mathcal{G}^a$, est la plus petite sous-variété de $Iso(P)$ qui est tangente à la distribution induite $\mathcal{D}^t$ et telle qu'il existe un ouvert $U^a \subset B$ tel que :*

(1) $\mathcal{D}^t \subset T\mathcal{G}^a$

(2) la restriction $\mathcal{G}^a|_{U^a\times U^a}$ est un sous-groupoïde de $Iso(P_{U^a})$

Afin de voir que cette variété est bien définie, donnons la définition d'une sous-variété minimale tangente de $P \times P$ qui soit une relation d'équivalence au-dessus d'un ouvert. Nous allons montrer que l'existence de l'une est équivalente à l'existence de l'autre, puis que cette deuxième variété est bien définie.

Définition 1.5.2. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale sur un fibré principal P de groupe structural G et de base B. La variété $\mathcal{R}^a$ est la plus petite sous-variété de $P \times P$ qui est tangente à la distribution induite $\mathcal{D}^t$ et telle qu'il existe un ouvert $U^a \subset B$ tel que :*

(1) $\mathcal{D}^t \subset T\mathcal{R}^a$

(2) la restriction $\mathcal{R}^a|_{U^a\times U^a}$ est une relation d'équivalence de $P_{U^a} \times P_{U^a}$

Lemme 1.5.3. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale. En supposant que les variétés associées $\mathcal{G}^a$ et $\mathcal{R}^a$ existent, alors $\mathcal{G}^a = \Phi(\mathcal{R}^a)$ et $\Phi^{-1}(\mathcal{G}^a) = \mathcal{R}^a$.*

Démonstration. Grâce à la correspondance donnée par Φ, il suffit de montrer que la variété $\mathcal{R}^a$ est stable sous l'action diagonale à droite du groupe structural G. Soit $g \in G$. L'action diagonale de g est notée Δ_g. Montrons que la sous-variété $\Delta_g(\mathcal{R}^a)$ vérifie les deux conditions de la définition (1.5.2). Notons e l'identité de $P \times P$. C'est donc la diagonale de $P \times P$. La sous-variété $\Delta_g(\mathcal{R}^a)$ la contient car $e = \Delta_g(e) \subset \Delta_g(\mathcal{R}^a)$. Ensuite, le fait que l'action diagonale commute avec l'inversion et la composition partielle de $P \times P$, ajouté au fait que $inv(\mathcal{R}^a) \subset \mathcal{R}^a$ et $m\left(\mathcal{R}^a \underset{sPt}{\times} \mathcal{R}^a\right) \subset \mathcal{R}^a$ nous donne les inclusions $inv \circ \Delta_g(\mathcal{R}^a) = \Delta_g \circ inv(\mathcal{R}^a) \subset \Delta_g(\mathcal{R}^a)$ et $m\left(\Delta_g(\mathcal{R}^a) \underset{sPt}{\times} \Delta_g(\mathcal{R}^a)\right) = \Delta_g \circ m\left(\mathcal{R}^a \underset{sPt}{\times} \mathcal{R}^a\right) \subset \Delta_g(\mathcal{R}^a)$. Elle vérifie donc la condition (2). Montrons qu'elle vérifie (1). La distribution induite étant invariante sous l'action du groupe structural, nous avons l'inclusion $\mathcal{D}^t = d\Delta_g.\mathcal{D}^t \subset d\Delta_g.T\mathcal{R}^a = T(\Delta_g(\mathcal{R}^a))$. Ensuite, en appelant la minimalité de $\mathcal{R}^a$, il vient l'inclusion $\mathcal{R}^a \subset \Delta_g(\mathcal{R}^a)$. Donc pour tout $g \in G$, $\Delta_{g^{-1}}(\mathcal{R}^a) \subset \mathcal{R}^a$. Ceci donne la stabilité recherchée. □

Faisons un petit rappel avant de voir que la variété $\mathcal{R}^a$ est bien définie :

Lemme 1.5.4. *Soient A un anneau, K une partie multiplicative de A, $K^{-1}A$ le localisé et I un idéal de $K^{-1}A$. Alors $(I \cap A)K^{-1}A = I$. Dans l'autre sens, si J est un idéal de A, alors $(JK^{-1}A) \cap A \supset J$.*

Démonstration. Nous montrons seulement $(I \cap A)K^{-1}A \supset I$. Si $f \in I \subset K^{-1}A$, alors $f = \sum_i \frac{a_i}{k_i}$ où $a_i \in A$ et $k_i \in K$. Ainsi, $f = \frac{1}{\prod_i k_i}((\prod_i k_i)f) \in (I \cap A)K^{-1}A$. □

Lemme 1.5.5. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale sur un fibré principal P de base B de groupe G. La sous-variété $\mathcal{R}^a$ de $P \times P$ est bien définie.*

Démonstration. Par le corollaire (1.1.5), il existe un ouvert affine B_0 de la base B tel que le fibré P_{B_0} soit aussi affine. Cet ouvert peut être pris de telle sorte que la distribution soit régulière sur P_{B_0}. Le premier objectif est de définir un idéal d'un anneau localisé qui aura les propriétés voulues sur le produit $P_{B_0} \times P_{B_0}$. Notons alors $K := \mathcal{O}(P_{B_0}) \underset{\mathcal{O}(B_0)}{\otimes} \mathbb{C}(B)$ l'anneau des fonctions régulières sur P_{B_0} localisé en les fonctions régulières de l'ouvert affine B_0 de la base et notons $L := K \underset{\mathbb{C}}{\otimes} K$ l'anneau des fonctions régulières de $P_{B_0} \times P_{B_0}$ localisé en les fonctions régulières de l'ouvert B_0 par la source et par le but. Regardons les idéaux I de L vérifiant :

(i) L'idéal $\mathcal{I}(e_{B_0})$ de L associé à l'identité e_{B_0} de $P_{B_0} \times P_{B_0}$ contient I

(ii) $inv^*(I) \subset I$ et $m^*(I) \subset I \underset{{}_sK^t}{\otimes} 1 + 1 \underset{{}_sK^t}{\otimes} I$

(iii) Pour tout X champ de vecteurs de $\mathcal{D}^t$, $X(I) \subset I$

Si I_1 et I_2 sont deux tels idéaux de L, c'est-à-dire qui vérifient (i), (ii) et (iii), alors l'idéal $I_1 + I_2$ vérifie encore (i). De plus inv^*, m^* et l'action d'un champ de vecteurs X étant additifs, il vient que $I_1 + I_2$ vérifie aussi (ii) et (iii). Par noethérianité, il existe alors un idéal maximal, à nouveau noté I, vérifiant les trois conditions ci-dessus. Notons $M := \mathcal{V}(I \cap \mathcal{O}(P_{B_0} \times P_{B_0}))$ la sous-variété de $P_{B_0} \times P_{B_0}$ correspondant à cet idéal I.

Le deuxième objectif est maintenant de montrer que son adhérence $\overline{M}$ est la sous-variété de $P \times P$ recherchée, c'est-à-dire qu'elle domine $B \times B$, qu'elle vérifie (1), (2) et qu'elle est minimale.

- L'inclusion $I \cap \mathcal{O}(P_{B_0} \times P_{B_0}) \subset \mathcal{I}(e_{B_0})$ donne directement que M contient l'identité sur $P_{B_0} \times P_{B_0}$ et donc que $\overline{M}$ domine $B \times B$.

- Le but ici est de voir que la stabilité de l'idéal I sous inv^* et m^* perdure en n'inversant qu'une seule fonction régulière de B_0. L'idéal I est engendré par des éléments $f_1, \ldots, f_n$, qui par le lemme (1.5.4), peuvent être pris dans l'anneau $\mathcal{O}(P_{B_0} \times P_{B_0})$. L'idéal I vérifiant (ii), il existe des éléments α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, δ_{ij} dans l'anneau localisé L tels que $m^*(f_i) = \sum_j \alpha_{ij} f_j \underset{K}{\otimes} \beta_{ij} + \gamma_{ij} \underset{K}{\otimes} \delta_{ij} f_j$. Il existe un multiple commun $k \in \mathcal{O}(B_0)$ des dénominateurs de tous ces éléments, c'est-à-dire, pour tout i, j, les éléments α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, δ_{ij} sont contenus dans l'anneau $\mathcal{O}(P_{B_0} \times P_{B_0})\left(\frac{1}{k} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} 1, 1 \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \frac{1}{k}\right)$. Cet anneau a de plus la particularité d'être stable sous les morphismes inv^* et m^* puisque l'anneau $\mathcal{O}(P_{B_0} \times P_{B_0})$ l'est et que $inv^*\left(\frac{1}{k} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} 1\right) = 1 \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \frac{1}{k}$, $inv^*\left(1 \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} 1$, $m^*\left(\frac{1}{k} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} 1\right) = \left(\frac{1}{k} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} 1\right) \underset{K}{\otimes} \left(1 \underset{\mathbb{C}}{\otimes} 1\right)$ et $m^*\left(1 \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \frac{1}{k}\right) = \left(1 \underset{\mathbb{C}}{\otimes} 1\right) \underset{K}{\otimes} \left(1 \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \frac{1}{k}\right)$. Il vient alors la stabilité recherchée : en posant $I' = I \cap \mathcal{O}(P_{B_0} \times P_{B_0})\left(\frac{1}{k} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} 1, 1 \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \frac{1}{k}\right)$, alors $inv^*(I') \subset I'$ et $m^*(I') \subset I' \underset{\mathcal{O}_{P_{B_0}}(\frac{1}{k})}{\otimes} 1 + 1 \underset{\mathcal{O}_{P_{B_0}}(\frac{1}{k})}{\otimes} I'$. Autrement dit, la sous-variété M de P_{B_0} est stable par inversion et par composition

partielle au-dessus de l'ouvert $B_0 - \{k = 0\}$, donc son adhérence $\overline{M}$ dans P vérifie la condition (2) avec cet ouvert.

- La condition (iii) donne que, restreinte au-dessus de l'ouvert B_0, la distribution $\mathcal{D}^t$ est tangente à la sous-variété M. Cette condition étant fermée, il vient donc que la distribution est tangente à son adhérence, *i.e.* $\overline{M}$ vérifie (1).

- Il reste enfin la minimalité. Donnons-nous une sous-variété N' de $P \times P$ vérifiant (1) et (2) en notant O' l'ouvert de la base correspondant à la condition (1) et montrons que cette sous-variété contient $\overline{M}$. L'intersection $N = N' \cap \overline{M}$ vérifie elle aussi ces deux conditions où l'ouvert correspondant à la condition (1) est l'intersection $O' \cap (B_0 - \{k = 0\})$. Notons N_{B_0} la restriction de N à l'ouvert affine $P_{B_0} \times P_{B_0}$ et $J := \mathcal{I}(N_{B_0})$ l'idéal associé. L'inclusion des sous-variétés $N_{B_0} \subset M$ implique l'inclusion inverse des idéaux associés $(I \cap \mathcal{O}(P_{B_0} \times P_{B_0})) \subset J$. Ainsi, grâce au lemme (1.5.4), il vient $I = (I \cap \mathcal{O}(P_{B_0} \times P_{B_0}))L \subset JL$. Or, tout comme l'idéal I, l'idéal JL de l'anneau localisé L vérifie aussi les conditions (i), (ii) et (iii). La maximalité de I implique $I = JL$. Ceci ajouté au lemme (1.5.4) donne l'inclusion $J \subset (JL \cap \mathcal{O}(P_{B_0} \times P_{B_0})) = I \cap \mathcal{O}(P_{B_0} \times P_{B_0})$. En revenant aux sous-variétés associées, il vient l'inclusion inverse $M \subset N_{B_0}$. Puis en passant aux adhérences, il vient $\overline{M} \subset \overline{N_{B_0}} \subset N$. Finalement, nous avons montré l'égalité $\overline{M} = N$, ce qui donne l'inclusion $\overline{M} \subset N'$ escomptée.

□

1.5.1.2 Définition topologique

Voici la définition de groupoïde de Galois en tant que sous-variété minimale tangente.

Définition 1.5.6. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale sur un fibré principal P. Le groupoïde de Galois, noté ici $\mathcal{G}^b$, est la plus petite sous-variété de $Iso(P)$ qui est tangente à la distribution induite $\mathcal{D}^t$ et qui contient l'identité. Autrement dit, en reprenant les notations de la définition (6.1.1), $\mathcal{G}^b := V(\mathcal{D}^t, e)$.*

Le lemme (6.1.2) nous dit que cette variété minimale tangente est bien définie et qu'elle est irréductible. De plus, comme précédemment, il lui correspond une sous-variété minimale tangente de $P \times P$ qui sera elle aussi bien définie grâce au lemme (6.1.2).

Définition 1.5.7. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale sur un fibré principal P. La variété $\mathcal{R}^b$, est la plus petite sous-variété de $P \times P$ qui est tangente à la distribution induite $\mathcal{D}^t$ et qui contient l'identité. Autrement dit, en reprenant les notations de la définition (6.1.1), $\mathcal{R}^b := V(\mathcal{D}^t, e)$.*

De la même manière que dans la preuve du lemme (1.5.5), nous pouvons montrer que cette variété est invariante sous l'action diagonale et correspond par Φ au groupoïde de Galois :

Lemme 1.5.8. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale, alors les variétés minimales tangentes associées vérifient $\mathcal{G}^b = \Phi(\mathcal{R}^b)$ et $\Phi^{-1}(\mathcal{G}^b) = \mathcal{R}^b$.*

1.5.1.3 Définition avec les intégrales premières

Pour cette dernière définition, le groupoïde de Galois d'une distribution est l'ensemble des applications de fibre à fibre G-équivariantes qui préservent les niveaux des intégrales premières de la distribution :

Définition 1.5.9. *Soient $\mathcal{D}$ une distribution principale sur un fibré principal P, $(H_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille génératrice de $\mathbb{C}(P)^{\mathcal{D}}$. Soient U un ouvert de P sur lequel les applications H_i sont bien définies et $Iso(U)$ l'image de $U\times U$ par la projection $\Phi : P\times P\to Iso(P)$. Le groupoïde de Galois, noté $\mathcal{G}^c$ est la clôture de Zariski de l'ensemble $\{\phi\in Iso(U)\mid \forall i,\ H_i\circ\phi = H_i\}$.*

Cette définition demande de faire un choix parmi les intégrales premières de la distribution. Nous allons définir une sous-variété de $P\times P$ qui lui correspond. Nous allons montrer qu'elle est intrinsèque à la distribution, qu'elle est invariante sous l'action diagonale du groupe structural et que son image par Φ est le groupoïde de Galois. Commençons par rappeler la définition d'intégrale première maximale donnée en annexe :

Définition 6.3.1. *Soient $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle sur une variété irréductible P, N une variété irréductible et $\pi : P \dashrightarrow N$ une application rationnelle dominante. L'application π est une intégrale première maximale si $\pi^*\mathbb{C}(N) = \mathbb{C}(P)^{\mathcal{D}}$.*

Voici la définition de la sous-variété dont nous avons parlé :

Définition 1.5.10. *Soient $\mathcal{D}$ une distribution principale sur un fibré principal P, $\pi : P \dashrightarrow N$ une intégrale première maximale de la distribution et P° le domaine de définition de π. La sous-variété $\mathcal{R}^c$ de $P\times P$ est la clôture de Zariski du produit fibré associé, i.e. $\mathcal{R}^c := \overline{P^\circ\times_N P^\circ}$. Cette clôture sera aussi notée $P\times_N P$.*

Dans cette définition nous avons dû choisir une intégrale première maximale de la distribution. Nous donnons deux lemmes qui seront utiles pour montrer que la sous-variété définie est intrinsèque à la distribution et ne dépend pas de l'intégrale première maximale choisie. Ces lemmes seront aussi utiles dans la preuve de l'équivalence des trois définitions dans la section suivante puis dans le théorème de spécialisation qui est donné en fin de chapitre.

Lemme 1.5.11. *Soient $f : M\to N$ un morphisme dominant avec N une variété irréductible et O un ouvert dense de M. Il existe un ouvert $W\subset N$ tel que pour tout $y\in W$, $f^{-1}(y)\cap O$ est un ouvert dense de $f^{-1}(y)$.*

Démonstration. Soient n la dimension de la variété N, $(M_i)_{i\in I}$ l'ensemble des composantes irréductibles de M, $(M_i)_{i\in J}$ l'ensemble des composantes irréductibles de M qui dominent N et $N_0 = N - \bigcup_{i\in I-J} f(M_i)$. Soit $i\in J$ et m_i la dimension de M_i. L'ensemble $M_i - O$ est de dimension $m_i - 1$ car O est un ouvert dense. Une fibre générique de la restriction $f|_{M_i}$ est de dimension pure $m_i - n$ et la dimension d'une fibre générique de la restriction $f|_{M_i-O}$ est $m_i - 1 - n$. Autrement dit, il existe un ouvert $W_i\subset N_0$ tel que pour tout $y\in W_i$, le complémentaire de $f|^{-1}_{M_i}(y)\cap O$ dans $f|^{-1}_{M_i}(y)$ est de dimension $m_i - 1 - n$ et tel que $f|^{-1}_{M_i}(y)$ est de dimension pure $m_i - n$. Donc pour tout $y\in W_i$, $f|^{-1}_{M_i}(y)\cap O$ est dense dans $f|^{-1}_{M_i}(y)$. L'ouvert $W := \bigcap_{i\in J} W_i\subset N_0$ est l'ouvert recherché puisque pour tout $y\in W$, $f^{-1}(y)\cap O$ est dense dans $f^{-1}(y)$. □

Lemme 1.5.12. *Soient $f : M \dashrightarrow N$ une application rationnelle dominante entre deux variétés irréductibles et E un ensemble général de M. Le produit fibré $E\times_N E$ est dense dans le produit fibré $M\times_N M$.*

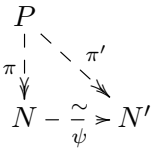
Démonstration. Fait : Notons M° le domaine de définition de f. Il existe un ensemble général $U\subset M$ tel que pour tout $x\in U$, $\{x\}\times f^{-1}(f(x))$ est inclus dans l'adhérence de Zariski de $E\times_N E$ dans $M^\circ\times_N M^\circ$. Cette adhérence est notée $\overline{E\times_N E}^{M^\circ}$.

L'ensemble E est l'intersection dénombrable d'ouverts $O_i \subset M$, $i \in \mathbb{N}$. Fixons $i \in \mathbb{N}$. Le lemme (1.5.11) appliqué au morphisme $f : M^\circ \to N$ et à l'ouvert O_i donne l'existence d'un ouvert $W_i \subset N$ tel que pour tout $y \in W_i$, $f^{-1}(y) \cap O_i$ est un ouvert dense de $f^{-1}(y)$. Pour tout $x \in U_i := f^{-1}(W_i) \cap O_i$, $f^{-1}(f(x)) \cap O_i$ est un ouvert dense de $f^{-1}(f(x))$. Notons $U = \bigcap_i U_i$. Pour tout $x \in U$, $f^{-1}(f(x)) \cap E$ est dense dans $f^{-1}(f(x))$ car une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Ainsi, pour tout $x \in U \subset E$, $\{x\} \times f^{-1}(f(x)) = \overline{\{x\} \times f^{-1}(f(x)) \cap E}^{M^\circ} \subset \overline{E \times_N E}^{M^\circ}$ ce qui montre le fait.

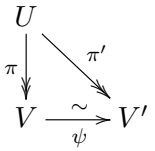
Notons maintenant $V = M^\circ \times_N M^\circ - \overline{E \times_N E}^{M^\circ}$ et montrons que cet ouvert de $M^\circ \times_N M^\circ$ est vide. Notons $pr_1 : M^\circ \times_N M^\circ \to M^\circ$ la projection sur la première coordonnée. Si $x \in pr_1(V)$ alors $\{x\} \times f^{-1}(f(x)) \not\subset \overline{E \times_N E}^{M^\circ}$. Si U est l'ensemble général donné dans le fait précédent alors par définition $pr_1(V) \cap U = \emptyset$. Si V était non vide alors $pr_1(V)$ contiendrait un ouvert de N ce qui contredirait la vacuité de son intersection avec l'ensemble général U. Donc $E \times_N E$ est dense dans $M^\circ \times_N M^\circ$ qui est lui-même dense dans $M \times_N M$ par définition. Ceci termine la preuve du lemme. □

Lemme 1.5.13. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution principale sur un fibré principal P. La sous-variété $\mathcal{R}^c$ définie en (1.5.10) ne dépend pas de l'intégrale première maximale choisie. Elle est de plus invariante sous l'action du groupe structural G de P.*

Démonstration. Soient $\pi : P \dashrightarrow N$ et $\pi' : P \dashrightarrow N'$ deux intégrales premières maximales. Aux égalités $\mathbb{C}(N) = \mathbb{C}(P)^{\mathcal{D}} = \mathbb{C}(N')$ il est associé le diagramme commutatif :



qui induit sur des ouverts convenables :



La commutativité du dernier diagramme donne l'égalité des produits fibrés $U \times_V U = U \times_{V'} U$. En appliquant le lemme (1.5.12) à π puis à π' avec l'ouvert U qui est en particulier un ensemble général, nous obtenons les égalités $P \times_N P = \overline{U \times_V U} = \overline{U \times_{V'} U} = P \times_{N'} P$. Ce qui conclue la preuve de la première assertion.

Montrons la stabilité sous l'action diagonale. Soit $g \in G$. Notons Δ_g l'action diagonale de g sur le produit $P \times P$ et montrons que $\Delta_g.\mathcal{R}^c = \mathcal{R}^c$. Soit $\pi : P \dashrightarrow N$ une intégrale première maximale de la distribution $\mathcal{D}$. Notons P° le domaine de définition de π et N' une copie de N de telle sorte que l'application $\pi \circ S_{g^{-1}}$ s'écrive $\pi \circ S_{g^{-1}} : P \dashrightarrow N'$. Nous avons l'égalité $P^\circ.g \times_{N'} P^\circ.g = \Delta_g.(P^\circ \times_N P^\circ)$. De plus l'application $\pi \circ S_{g^{-1}}$ est aussi une intégrale première maximale puisque :

$$\begin{aligned}
(\pi \circ S_g^{-1})^*\mathbb{C}(P) &= {S_{g^{-1}}}^*\mathbb{C}(P)^{\mathcal{D}} \\
&= \{f \circ S_{g^{-1}} \mid \forall X \subset \mathcal{D},\ f \in \mathbb{C}(P),\ X(f) = 0\} \\
&= \{h \in \mathbb{C}(P) \mid \forall X \subset \mathcal{D},\ X(h \circ S_g) = 0\} \\
&= \{h \in \mathbb{C}(P) \mid \forall X \subset \mathcal{D},\ dS_g.X(h) = 0\} \\
&= \mathbb{C}(P)^{\mathcal{D}} \qquad \text{car } dS_g.\mathcal{D} = \mathcal{D}
\end{aligned}$$

La non dépendance envers l'intégrale première maximale choisie nous permet d'obtenir $\mathcal{R}^c = \overline{P^\circ \times_{N'} P^\circ} = \overline{\Delta_g.P^\circ \times_N P^\circ}$. Sachant que Δ_g est un isomorphisme de $P \times P$, il vient $\mathcal{R}^c = P \times_{N'} P = R_g.P \times_N P = \Delta_g.\mathcal{R}^c$ ce qui termine la preuve. □

Nous donnons maintenant le lien entre les variétés $\mathcal{R}^c$ et $\mathcal{G}^c$ qui montre que cette dernière est intrinsèque à la distribution.

Lemme 1.5.14. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution principale sur un fibré principal P. Les variétés $\mathcal{R}^c$ et $\mathcal{G}^c$ se correspondent par la projection $\Phi : P \times P \to Iso(P)$, i.e. $\mathcal{G}^c = \Phi(\mathcal{R}^c)$ et $\Phi^{-1}(\mathcal{G}^c) = \mathcal{R}^c$.*

Démonstration. Soient $(H_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille génératrice de $\mathbb{C}(P)^{\mathcal{D}}$ et $\pi : P \dashrightarrow N$ une intégrale première maximale de la distribution. Soit U un ouvert de P sur lequel les applications H_i, π sont bien définies. Soit $Iso(U)$ l'image de $U \times U$ par Φ. Rappelons que par définition, $\mathcal{R}^c$ et $\mathcal{G}^c$ sont les clôtures respectives des ensembles $U \times_N U$ et $\{\phi \in Iso(U) \mid \forall i,\ H_i \circ \phi = H_i\}$. Commençons par montrer que ces ensembles se correspondent par Φ. Soient $(x, y) \in U^2$ et $\phi_{xy} \in Iso(U)$ l'application G-équivariante de la fibre en x dans la fibre en y telle que $\phi_{xy}(x) = y$. Les équivalences suivantes montrent la correspondance :

$$\begin{array}{lll}
(x,y) \in U \times_N U & \Leftrightarrow & \pi(x) = \pi(y) \\
& \Leftrightarrow & \pi(x.g) = \pi(y.g) \qquad \text{pour } g \in G \text{ tels que } (x.g, y.g) \in U^2 \text{ car } S_g^*\pi \\
& & \qquad\qquad \text{est aussi une intégrale première maximale} \\
& \Leftrightarrow & H_i(x.g) = H_i(y.g) \quad \text{pour tout } i \text{ et } g \in G \text{ tels que } (x.g, y.g) \in U^2 \\
& \Leftrightarrow & H_i \circ \phi_{xy} = H_i \qquad \text{pour tout } i
\end{array}$$

Nous avons l'inclusion $\Phi^{-1}(\mathcal{G}^c) \supset \mathcal{R}^c$ car $\Phi^{-1}(\mathcal{G}^c)$ est fermé et contient $U \times_N U$. Rappelons que $\mathcal{R}^c$ est stable sous l'action diagonale. La topologie sur $Iso(P)$ est la topologie quotient, donc $\Phi(\mathcal{R}^c)$ est fermé car $\Phi^{-1}\Phi(\mathcal{R}^c) = \mathcal{R}^c$ l'est. Nous avons l'inclusion $\mathcal{G}^c \subset \Phi(\mathcal{R}^c)$ car $\Phi(\mathcal{R}^c)$ est un fermé qui contient $\{\phi \in Iso(U) \mid \forall i,\ H_i \circ \phi = H_i\}$. Ceci donne l'inclusion $\Phi^{-1}(\mathcal{G}^c) \subset \mathcal{R}^c$ et termine la preuve.

□

1.5.2 Équivalence des trois définitions

Voici une proposition utile pouvant être trouvée dans [5] avant d'aborder le théorème qui donne l'équivalence des trois définitions.

Proposition 1.5.15. *Soient $p : P \to B$ un fibré principal de groupe structural G et H un sous-groupe de G. Alors le G-fibré $P[G/H]$ existe et de plus, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc}
P & \xrightarrow{\phi} & P[G/H] \\
{\scriptstyle p}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle p_{G/H}} & \\
B & &
\end{array}$$

où $\phi : P \to P[G/H]$ est un fibré principal de groupe structural H et où le morphisme $p_{G/H}$ est lisse. Si de plus H est distingué, alors $p_{G/H} : P[G/H] \to B$ est un fibré principal de groupe structural G/H.

Théorème 1.5.16. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale sur un fibré principal P de base B et de groupe G. Les trois définitions de groupoïde de Galois de la distribution sont équivalentes, i.e. $\mathcal{G}^a = \mathcal{G}^b = \mathcal{G}^c$. Cette sous-variété de $Iso(P)$ sera notée $Gal(\mathcal{D})$.*

Démonstration. Nous raisonnons sur les sous-variétés de $P \times P$ invariantes sous l'action diagonale de G qui leur correspondent par Φ, *i.e.* nous allons montrer les égalités $\mathcal{R}^a = \mathcal{R}^b = \mathcal{R}^c$. Pour ce faire, nous montrons dans l'ordre : $\mathcal{R}^b \subset \mathcal{R}^a$, $\mathcal{R}^c \subset \mathcal{R}^b$ et $\mathcal{R}^a \subset \mathcal{R}^c$.

La variété $\mathcal{R}^a$ contient la diagonale et est tangente à la distribution induite par le but $\mathcal{D}^t$, elle contient donc $\mathcal{R}^b$ par minimalité de cette dernière.

Ensuite, prenons une intégrale première maximale $\pi : P \dashrightarrow N$ de la distribution $\mathcal{D}$. Le théorème (6.3.2) et la proposition (6.3.3) nous donnent l'existence d'un ensemble général

$E \subset P$ tel que pour tout $x \in E$, $\overline{\pi^{-1}(\pi(x))} = V(\mathcal{D}, x)$. Par définition la sous-variété $\mathcal{R}^b$ contient la diagonale et est tangente à la distribution $\mathcal{D}^t$. Donc pour tout $x \in E$, $\{x\} \times V(\mathcal{D}, x) \subset \mathcal{R}^b$. Ce qui donne $E \times_N E \subset \{\{x\} \times V(\mathcal{D}, x) \mid x \in E\} \subset \mathcal{R}^b$. Grâce au lemme (1.5.12) nous obtenons $\mathcal{R}^c = \overline{E \times_N E} \subset \mathcal{R}^b$.

Il reste la dernière inclusion $\mathcal{R}^a \subset \mathcal{R}^c$ à montrer. Soit $\pi : P \dashrightarrow N$ une intégrale première maximale de la distribution $\mathcal{D}$. L'ensemble $P \times_N P$ est tangent à la distribution $\mathcal{D}^t$ puisque la distribution $\mathcal{D}$ est tangente aux fibres de π. La propriété de tangence étant une propriété fermée, il s'ensuit que la variété $\mathcal{R}^c$ est tangente à la distribution $\mathcal{D}^t$. Montrons maintenant que cette variété est aussi génériquement une relation d'équivalence pour conclure sur l'inclusion cherchée grâce à la minimalité de la variété $\mathcal{R}^a$. Commençons par nous placer sur des ouverts convenables. Soit $O \subset P$ un ouvert sur lequel l'intégrale première maximale π est bien définie et tel que son image U par la projection $P \to B$ soit un ouvert de B.

Fait : soit $(x_1, x_2, x_3) \in {P_U}^3$, il existe $g \in G^0$ la composante connexe de l'identité de G tel que $(x_1, x_2, x_3) \in O.g^3$. Soit G^0 la composante connexe de l'identité de G. Considérons le diagramme commutatif donné par la proposition (1.5.15) :

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P[G/G^0] \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \swarrow_{p_{G/G^0}} & \\ B & & \end{array}$$

où $P[G/G^0] \to B$ et $P \to P[G/G^0]$ sont des fibrés principaux dont les groupes structuraux sont respectivement G^0 et G/G^0. Plaçons nous sur le fibré principal $P \to P[G/G^0]$ et posons $U' = p_{G/G^0}^{-1}(U)$. Par commutativité du diagramme, $x_1, x_2, x_3 \in P_{U'}$. Pour $i = 1, 2, 3$, les ensembles $\{g \in G \ , \ x_i.g^{-1} \in O\}$ sont trois ouverts de G^0. Chacun d'eux est non vide grâce à la transitivité de l'action de G^0. L'irréductibilité de G^0 implique que leur intersection est non vide. Ce qui montre le fait.

Soit $(x, y, z) \in {P_U}^3$. Le fait nous donne l'existence d'un élément g du groupe G tel que $(x, y) \in (O \times O).g$ et $(y, z) \in (O \times O).g$. Soit N' une copie de N de telle sorte que l'application $\pi \circ S_{g^{-1}}$ s'écrive $\pi \circ S_{g^{-1}} : P \dashrightarrow N'$. Les lemmes (1.5.12) et (1.5.13) nous permettent de voir que $\mathcal{R}^c = \overline{O.g \times_{N'} O.g}$. Ce qui nous donne $\mathcal{R}^c \cap (O \times O).g = O.g \times_{N'} O.g$. Nous obtenons ainsi les implications

$$\begin{array}{rcl} (x, y) \in \mathcal{R}^c|_{U \times U} & \implies & \pi(x.g^{-1}) = \pi(y.g^{-1}) \\ & \implies & (x, y) \in \mathcal{R}^c|_{U \times U} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} (x, y) \in \mathcal{R}^c|_{U \times U} \text{ et } (y, z) \in \mathcal{R}^c|_{U \times U} & \implies & \pi(x.g^{-1}) = \pi(y.g^{-1}) \text{ et } \pi(y.g^{-1}) = \pi(z.g^{-1}) \\ & \implies & \pi(x.g^{-1}) = \pi(z.g^{-1}) \\ & \implies & (x, z) \in \mathcal{R}^c|_{U \times U} \end{array}$$

qui nous donnent la stabilité de la variété $\mathcal{R}^c|_{U \times U}$ par inversion et par composition partielle. Autrement dit, la variété $\mathcal{R}^c|_{U \times U}$ est une relation d'équivalence, ce qui conclut la preuve de la dernière inclusion.

□

Proposition 1.5.17. *Soient $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale sur un fibré principal P de groupe structural G et v le maximum de la dimension que peut prendre une sous-variété minimale tangente (voir (6.1.4)). Le groupoïde de Galois de la distribution est une variété irréductible de dimension* $\dim(P) + v - \dim(G)$.

Démonstration. Nous savons par la définition dite topologique que le groupoïde de Galois est la sous-variété minimale tangente à la distribution $\mathcal{D}^t$ qui contient l'identité. Le lemme (6.1.2) nous dit que cette sous-variété est irréductible. Utilisons la définition avec les intégrales premières pour le calcul de la dimension. Soit $\pi : P \dashrightarrow N$ une intégrale première maximale. Le théorème (6.3.2) et la proposition (6.3.3) nous disent que les fibres génériques sont de dimension v et que la variété N est de dimension $\dim(P) - v$. Le produit fibré $P \times_N P$ est de dimension $2\dim(P) - (\dim(P) - v) = \dim(P) + v$. Le groupoïde de Galois étant l'image de ce produit fibré par Φ, il est donc de dimension $\dim(P) + v - \dim(G)$. □

Moralement, en regardant les fibres du morphisme but, le groupoïde de Galois est la plus petite sous-variété qui contient toutes les sous-variétés minimales invariantes et donc tous les groupes de Galois. Remarquons que les fibres du morphisme source contiennent aussi toutes les sous-variétés minimales invariantes puisque le groupoïde de Galois est un groupoïde au-dessus d'un ouvert. Inversement, comme le montre la proposition suivante, sous une hypothèse de domination, nous retrouvons le groupoïde de Galois à partir d'une sous-variété minimale tangente. Au-dessus d'un ouvert, c'est le groupoïde associé au fibré principal qu'est la sous variété minimale tangente.

Proposition 1.5.18. *Soient $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale sur un fibré principal P de base B de groupe G et V une sous-variété minimale tangente à la distribution. Si V domine la base B, alors le groupoïde de Galois est égal à $\overline{(V \times V)/G}$, l'adhérence de l'image du produit $V \times V$ dans $Iso(P)$. Sous les mêmes hypothèses, et en notant $Iso(V)$ le quotient du produit $V \times V$ sous l'action diagonale du groupe de Galois associé à V, alors le groupoïde de Galois est birationnellement équivalent à $Iso(V)$.*

Démonstration. Montrons la première assertion par double inclusion. Nous allons utiliser la définition dite algébrique du groupoïde de Galois (qui était notée $\mathcal{G}^a$) pour montrer qu'il contient $\overline{(V \times V)/G}$. Soit U un ouvert de B au-dessus duquel la restriction $Gal(\mathcal{D})|_{U \times U}$ du groupoïde de Galois est un groupoïde. Pour obtenir la première inclusion, il suffit de montrer que $Gal(\mathcal{D})|_{U \times U}$ contient $(V_U \times V_U)/G$. Le théorème (6.1.4) appliqué à la variété V et à la restriction de la distribution $\mathcal{D}$ à V nous dit que pour un x général dans V, nous avons $V = V(\mathcal{D}, x)$. Or, grâce à l'hypothèse de domination de la base B par V, remarquons en premier lieu que V_U n'est pas vide, puis que V_U contient un tel x général. Ainsi, la relation d'équivalence associée au groupoïde $Gal(\mathcal{D})|_{U \times U}$ contient (x, x) car elle contient la diagonale, contient $\{x\} \times V_U$ car elle est tangente à la distribution induite par le but $\mathcal{D}^t$ et contient $V_U \times V_U$ puisque que c'est une relation d'équivalence. Ceci montre la première inclusion. Pour l'inclusion inverse, nous utilisons la définition dite topologique du groupoïde de Galois (qui était notée $\mathcal{G}^b$). La variété V dominant B, notons U un ouvert de B sur lequel V_U se surjecte. L'ensemble $(V_U \times V_U)/G$ contient la restriction de l'identité à U, donc son adhérence contient l'identité elle-même. De plus, la distribution induite $\mathcal{D}^t$ qui est tangente à $(V_U \times V_U)/G$ est aussi tangente à son adhérence puisque la condition de tangence est fermée. Ainsi, il ne nous reste plus qu'à conclure sur l'inclusion inverse par la minimalité du groupoïde de Galois.

La deuxième assertion est donnée par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \hookrightarrow & P \times P \\ \downarrow & & \downarrow \\ Iso(V) & \overset{i}{\dashrightarrow} & Iso(P) \end{array}$$

dans lequel i est injectif et dont l'image $(V \times V)/G$ est dense dans le groupoïde de Galois. □

1.6 Le résultat de spécialisation sur les groupoïdes d'équations à paramètres

Les distributions principales que nous regardons ici ne dominent pas la base du fibré principal sur lequel elles sont définies. Elles sont tangentes aux fibres d'un morphisme. Le but de cette section est de comparer la "taille" de l'intersection avec une fibre du groupoïde de Galois de la distribution et la "taille" du groupoïde de Galois de la restriction à cette même fibre de la distribution. Nommons les objets que nous regardons. La distribution $\mathcal{D}$ est définie sur le fibré $P \to B$. Elle est tangente aux fibres du morphisme lisse composé $P \xrightarrow{p} B \xrightarrow{\rho} S$, *i.e.* $d(\rho \circ p).\mathcal{D} = 0$. La variété S est appelée l'espace des paramètres. Soit $q \in S$. Nous noterons P_q la fibre en q du morphisme composé et $\mathcal{D}_q$ la restriction à P_q de la distribution $\mathcal{D}$ lorsque cela a un sens. Pour considérer le groupoïde de Galois d'une telle restriction, nous devons supposer que les fibres du morphisme composé sont connexes. Avant de donner le résultat principal, nous donnons la définition de connexions dites partielles.

Définition 1.6.1. *Soit $\rho' : P \xrightarrow{p} B \xrightarrow{\rho} S$ le morphisme composé d'un fibré principal $p : P \to B$ et d'un morphisme surjectif lisse $\rho : B \to S$. Notons $F' = ker(d\rho')$, π la projection $TP \to P$ et V le tangent vertical, i.e. le noyau de l'application $dp \times \pi : TP \to TB \times_B P$. Une connexion partielle est une distribution $\mathcal{D}$ qui est un supplémentaire du tangent vertical dans F' : $F'_x = V_x \oplus \mathcal{D}_x$.*

Lemme 1.6.2. *Reprenons les notations de la définition précédente, notons F le noyau de $d\rho$ et considérons la suite exacte tangente :*

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow F' \xrightarrow{dp\times\pi} F \times_B P \longrightarrow 0$$

Une section rationnelle $\nabla : F' \times_B P \longrightarrow F$ de cette suite donne une connexion partielle rationnelle.

Démonstration. Rappelons que le fibré en grassmannienne des sous-espaces de dimensions $d \in \mathbb{N}$ sur une variété P peut s'obtenir en quotientant la variété $\{\ell : \mathbb{C}^d \to T_xP$ linéaire injective, $x \in M\}$ par le groupe $GL(d, \mathbb{C})$ qui agit par composition à la source. Supposons que d est la dimension des fibres de $B \to S$. Une section rationnelle de la suite exacte tangente, régulière sur un ouvert O de B, induit le morphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} R_1O \times_O P_O & \dashrightarrow & \{\ell : \mathbb{C}^d \to T_xP \text{ linéaire injective}, x \in P\} \\ (h, x) & \longmapsto & \nabla \circ h \end{array}$$

En passant au quotient de part et d'autre par $GL(d, \mathbb{C})$, ce morphisme induit une distribution rationnelle sur P, régulière sur P_O et tangente aux fibres de $P \to S$. Cette distribution est de dimension d et domine chaque chaque fibre de $B \to S$. C'est une connexion partielle. □

Il n'est plus possible de définir directement le groupe de Galois d'une telle distribution. En effet, les sous-variétés minimales tangentes ne dominent plus la base du fibré, donc le groupe structural du fibré n'agit plus transitivement dessus et il n'est donc plus possible de comparer tous les groupes de Galois en utilisant l'action du groupe structural. Cependant, les trois définitions du groupoïde de Galois restent valables puisque l'hypothèse de domination n'est pas requise.

Théorème 1.6.3. *Soient $\rho : B \to S$ un morphisme surjectif lisse entre deux variétés lisses et $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale sur un fibré principal $p : P \to B$ de groupe structural G. Supposons que $\mathcal{D}$ est tangente aux fibres du morphisme ρ et que les fibres de la composition $\rho \circ p$ sont connexes. Alors pour tout $q \in S$ où cela a un sens :*

- $\dim_S(Gal(\mathcal{D})) \geq \dim_{\mathbb{C}}(Gal(\mathcal{D}_q))$
- $Gal(\mathcal{D}_q) \subset Gal(\mathcal{D})|_{P_q \times P_q}$

De plus, pour un $q \in S$ général,

- $\dim_S(Gal(\mathcal{D})) = \dim_{\mathbb{C}}(Gal(\mathcal{D}_t))$
- $Gal(\mathcal{D}_q) = Gal(\mathcal{D})|_{P_q \times P_q}$

Démonstration. Intéressons nous d'abord au cas des dimensions. Notons v l'entier du théorème (6.1.4) correspondant au maximum de la dimension de $V(\mathcal{D}, x)$ pour x dans P où cela a un sens, et rappelons qu'il est atteint sur un ensemble général E. Pour $q \in S$ où cela a un sens, notons v_q l'entier du théorème (6.1.4) correspondant au maximum de la dimension de $V(\mathcal{D}, x)$ pour $x \in P_q$. Remarquons déjà que $v_q \leq v$. Par le lemme (6.1.5), l'ensemble $F := \rho \circ p(E)$ est un ensemble général de S. Autrement dit, pour tout $q \in F$, l'ensemble $P_q \cap E$ est non vide, ce qui nous donne l'égalité $v_q = v$. Ensuite, par la proposition (1.5.17) la dimension du groupoïde de Galois de la distribution $\mathcal{D}$ est $\dim(P) + v - \dim(G)$. De même, $\dim(Gal(\mathcal{D}_q)) = \dim(P_q) + v_q - \dim(G) = \dim(P) - \dim(S) + v_q - \dim(G)$. Ceci nous donne donc $\dim(Gal(\mathcal{D})) \geq \dim(Gal(\mathcal{D}_q)) + \dim(S)$ avec égalité pour q dans l'ensemble général F.

Pour les inclusions, nous faisons appel à la définition (1.5.6) dite topologique du groupoïde de Galois. Pour $q \in S$ où ça a un sens, la sous-variété $Gal(\mathcal{D})|_{P_q \times P_q}$ est une sous-variété tangente à $\mathcal{D}_q^t$ et contient l'identité de $Iso(P_q)$, elle contient donc $Gal(\mathcal{D}_q)$ par minimalité de cette dernière. Ceci nous donne les inclusions escomptées.

Enfin, montrons les égalités en faisant appel à la définition qui utilise les intégrales premières. Soient $\mathcal{R} \subset P \times P$ la sous-variété correspondante au groupoïde de Galois de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{R}_q \subset P_q \times P_q$, $q \in S$, la sous-variété correspondante au groupoïde de Galois de $\mathcal{D}_q$. Il suffit de montrer que pour $q \in S$ général $\mathcal{R}_q = \mathcal{R} \cap P_q \times P_q$. Soit $\pi : P \dashrightarrow N$ une intégrale première maximale associée à la distribution $\mathcal{D}$. Premièrement, fixons $q \in F$. Le théorème (6.3.2) et la proposition (6.3.3) nous disent que pour tout $x \in P_q \cap E$, la fibre de la restriction $\pi|_{P_q} : P_q \dashrightarrow \overline{\pi(P_q)}$ vérifie $\overline{\pi|_{P_q}^{-1}(\pi|_{P_q}(x))} = V(\mathcal{D}, x)$ puis que cette restriction est une intégrale première de la distribution $\mathcal{D}_q$. Donc $\mathcal{R}_q = P_q \times_N P_q$. Deuxièmement, notons O un ouvert de N inclus dans l'image de π. Nous savons par le lemme (1.5.12) que $\mathcal{R} = \overline{\pi^{-1}(O) \times_O \pi^{-1}(O)}$. Le lemme (1.5.11) appliqué au morphisme $\tilde{\rho} : \mathcal{R} \to S$ et à l'ouvert dense $\pi^{-1}(O) \times_O \pi^{-1}(O)$ de $\mathcal{R}$ nous dit que pour $q \in S$ générique, $\overline{\tilde{\rho}^{-1}(q) \cap \pi^{-1}(O) \times_O \pi^{-1}(O)}$ est dense dans $\tilde{\rho}^{-1}(q)$. Autrement dit, pour $q \in S$ générique, $\overline{\pi|_{P_q}^{-1}(O) \times_O \pi|_{P_q}^{-1}(O)} = \mathcal{R} \cap P_q \times P_q$. Au final nous en déduisons que pour un $q \in S$ général, $\mathcal{R}_q = \mathcal{R} \cap P_q \times P_q$ ce qui achève la preuve du théorème.

□

Chapitre 2

Pseudo-groupe de Malgrange d'un champ de vecteurs

Nous étudions ici des champs de vecteurs sur des variétés qui ne seront plus nécessairement des fibrés principaux. L'idée consiste alors à se ramener au cas linéaire en relevant ces champs de vecteurs sur des espaces de jets. Cependant, il y a une nuance à noter. Dans le cas linéaire, le but était d'obtenir des informations sur le relevé d'un champ de vecteurs de la base d'un fibré sur le fibré lui-même. Tandis qu'ici, il s'agit de relever un champ de vecteurs de manière canonique sur un fibré canonique pour en déduire des informations sur le champ lui-même.

2.1 Le fibré principal des repères d'une variété

Considérons une variété lisse M de dimension m. Dans un premier temps, nous définissons l'ensemble des repères de M puis nous le munirons d'une structure de variété en construisant son anneau de coordonnées. Il viendra sur cet anneau une action naturelle des opérateurs différentiels de $\mathbb{C}^m$. Dans un deuxième temps, nous munirons l'ensemble des repères d'une structure de fibré principal ce qui induira une action de l'algèbre de Lie du groupe structural sur l'anneau des coordonnées. Nous verrons dans un troisième temps la compatibilité entre ces deux actions.

2.1.1 La structure différentielle

Remarquons que pour tout $p \in M$, il existe un ouvert affine U de M qui contient p et qui soit un revêtement non ramifié d'un ouvert de $\mathbb{C}^m$. Il en découle sur U un système de coordonnées dans lequel il peut être défini un germe d'application $r : (\mathbb{C}^m, 0) \to (U, p)$. Il s'écrit

$$r(\epsilon) = (\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} r_1^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, \ldots, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} r_m^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!})$$

où, pour $1 \leq i \leq m$, $r_i^\alpha \in \mathbb{C}$, $\epsilon^\alpha = \epsilon_1^{\alpha_1} \ldots \epsilon_m^{\alpha_m}$ et $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_m!$. Un germe d'application r est inversible si son déterminant jacobien ne s'annule pas : $\det(r_i^{e_j}) \neq 0$ où e_j est le multi-indice ayant 1 sur la j-ème coordonnée et 0 sur les autres. Le jet d'ordre k de l'application r est la série tronquée à l'ordre k :

$$j_k(r) := (\sum_{|\alpha| \leq k} r_1^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, \ldots, \sum_{|\alpha| \leq k} r_m^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!})$$

où pour $\alpha \in \mathbb{N}^m$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$. Dans ces conditions :

Définition 2.1.1. *Un repère d'ordre k d'une variété lisse M en $p \in M$ est le jet d'ordre k d'un germe d'application inversible $r : (\mathbb{C}^n, 0) \to (M, p)$. L'ensemble des repères d'ordre k est noté R_kM. Ces ensembles sont munis des projections pour $k \geq l$:*

$$\begin{array}{ccc} R_kM & \longrightarrow & R_lM \\ j_k(r) & \longmapsto & j_l(r) \end{array}$$

La limite projective $RM = \varprojlim R_kM$ est l'espace des repères (sous-entendu formels) sur M muni des projections :

$$\begin{array}{ccc} RM & \longrightarrow & R_kM \\ r & \longmapsto & j_k(r) \end{array}$$

Si $U \subset M$ est un revêtement non ramifié d'un ouvert de $\mathbb{C}^m$, alors l'ensemble des repères d'ordre k sur U est muni d'une structure de variété affine dont l'anneau de coordonnées est $\mathcal{O}(U)[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq m,\ \alpha \in \mathbb{N}^m,\ 1 \leq |\alpha| \leq k][1/\det(y_i^{e_j})]$. Nous allons construire le faisceau structural des repères d'une variété de manière globale et nous retrouverons la structure locale du revêtement non ramifié décrite précédemment.

Construction.

- Donnons-nous l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficient constant $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$. Nous notons $\circ$ la composition des opérateurs. Elle agit sur l'anneau de coordonnées de $\mathbb{C}^m$ par dérivation : pour $1 \leq i, j \leq m$, ∂_i est la dérivation s'annulant sur $\mathbb{C}$ vérifiant $\partial_i(\epsilon_j) = \delta_{ij}$. Notons $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]^{\leq k}$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à k.

- L'algèbre $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$ agit sur le facteur de gauche du produit tensoriel de $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_M$ par multiplication.

- Ensuite, le produit sur $\mathbb{C}[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m]$ induit un co-produit que nous noterons :

$$\begin{array}{rccc} co : & \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \\ & L & \longmapsto & \sum_i L_i^{(1)} \otimes L_i^{(2)} \end{array}$$

  où $\sum_i L_i^{(1)} \otimes L_i^{(2)}(f_1, f_2) = L(f_1.f_2)$ pour tout $(f_1, f_2) \in \mathbb{C}[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m]^2$.

  L'action de l'algèbre $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$ s'étend à la $\mathbb{C}$-algèbre $Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_M)$ grâce à ce co-produit : pour $(L, l_1, l_2) \in \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]^3$, U un ouvert affine de M et $(f_1, f_2) \in \mathcal{O}_M(U)^2$,

$$L.(l_1 \otimes f_1)(l_2 \otimes f_2) := \sum_i (L_i^{(1)} \circ l_1 \otimes f_1)(L_i^{(2)} \circ l_2 \otimes f_2)$$

- En notant K le noyau du morphisme $Sym(1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_M) \to \mathcal{O}_M$, nous noterons $\mathcal{K}$ l'idéal différentiel de l'algèbre $Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_M)$ engendré par K (différentiel signifie stable sous l'action de $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$).

- Enfin, le quotient de l'algèbre obtenu $Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_M)/\mathcal{K}$ sera localisé en jac, le faisceau d'idéaux engendré par $\det[\partial_i \otimes y_j]_{i,j}$ où $(y_1, \ldots, y_m)$ est une base de transcendance de $\mathbb{C}(M)$ sur l'ouvert de M où cette base est bien définie.

Notons π la projection des espaces des repères de M sur la variété M elle-même. Cette construction amène à définir des faisceaux sur M qui, par tiré en arrière par π, induisent les faisceaux structuraux des espaces des repères et des repères d'ordre k de M :

Définition 2.1.2. *Si M est une variété lisse, alors en gardant les notations de la construction, les faisceaux sur M associés aux espaces des repères et des repères d'ordre k de M sont définis respectivement par :*

- $\pi_*\mathcal{O}_{RM} := (Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M)/\mathcal{K})[1/jac]$
- $\pi_*\mathcal{O}_{R_kM} := (Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]^{\leq k} \otimes \mathcal{O}_M)/(\mathcal{K} \cap Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]^{\leq k} \otimes \mathcal{O}_M)))[1/jac]$

Pour $1 \leq i \leq m$, les dérivations ∂_i agissant sur $\pi_*\mathcal{O}_{RM}$ sont appelées les dérivations totales. Les faisceaux structuraux des espaces des repères et des repères d'ordre k de M sont les faisceaux engendrés par les tirés en arrière des faisceaux précédents : $\mathcal{O}_{RM} := \pi^*(\pi_*\mathcal{O}_{RM})$ et $\mathcal{O}_{R_kM} := \pi^*(\pi_*\mathcal{O}_{R_kM})$.

Munis de ces faisceaux, les espaces des repères d'ordre k deviennent des variétés irréductibles et l'application π devient un morphisme de variété qui est affine. Ceci est donné par le lemme suivant. De plus, nous retrouvons la structure locale demandée. Dans la suite, nous identifierons les faisceaux des repères $\mathcal{O}_{RM}$ et $\mathcal{O}_{R_kM}$ avec les faisceaux construits $\pi_*\mathcal{O}_{RM}$ et $\pi_*\mathcal{O}_{R_kM}$.

Lemme 2.1.3. *Soient M une variété lisse, $p \in M$ et U un ouvert de M qui contient p et qui est un revêtement non ramifié d'un ouvert de $\mathbb{C}^m$. Alors :*

- $\pi_*\mathcal{O}_{RM}(U) \simeq \mathcal{O}_M(U)[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq |\alpha|][1/\det(y_i^{e_j})]$ *et l'isomorphisme est compatible à l'action de $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]$ où l'action sur le membre de droite est donnée par $\partial_j y_i^\alpha := y_i^{\alpha+e_j}$*
- *La restriction de cet isomorphisme induit $\pi_*\mathcal{O}_{R_kM}(U) \simeq \mathcal{O}_M(U)[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq |\alpha| \leq k][1/\det(y_i^{e_j})]$*
- *Pour $k \geq l$, les applications $R_kM \to R_lM$ sont des morphismes surjectifs lisses. En particulier, l'espace des repères est une pro-variété.*

Remarquons que les dérivations ∂_i s'expriment localement par $\partial_i = \sum y_j^{\alpha+e_i} \dfrac{\partial}{\partial y_j^\alpha}$.

Démonstration. Les opérateurs différentiels agissent sur $\mathcal{O}_M(U)[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq m,\ \alpha \in \mathbb{N}^m,\ 1 \leq |\alpha|]$ de la manière suivante : $\partial^\alpha y_j^\beta := y_j^{\alpha+\beta}$ et l'action est prolongée sur l'anneau entier par le co-produit. Commençons par définir un morphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_M(U)[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq m,\ \alpha \in \mathbb{N}^m,\ 1 \leq |\alpha|] \\ & 1 \otimes P & \longmapsto & P \end{array}$$

de manière à ce qu'il soit compatible à l'action des opérateurs différentiels, *i.e.* si $L \in \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]$, $P \in \mathcal{O}_M(U)$, alors $\phi(L \otimes P) = L.\phi(1 \otimes P)$. Prolongeons ce morphisme que nous noterons encore ϕ à l'anneau $Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]) \otimes \mathcal{O}_M(U))$. Le morphisme ϕ est à nouveau compatible à l'action de $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]$ car les actions sur les deux membres sont données par le co-produit. Il en découle que le noyau de ϕ est lui-même invariant sous cette action. Remarquons que pour tout $(f, g) \in \mathcal{O}_M(U)^2$, $(1 \otimes f)(1 \otimes g) - (1 \otimes fg)$ appartient à ce noyau. Le morphisme ϕ passe au quotient par l'idéal différentiel engendré par les éléments $(1 \otimes f)(1 \otimes g) - (1 \otimes fg)$ que nous avions noté $\mathcal{K}$. Montrons que c'est un

isomorphisme. Il est surjectif. Montrons l'injectivité. Par respect du co-produit, un élément de $\mathcal{O}_{RM}(U)$ s'écrit $P = \sum_{i,\alpha,l} c_{i,\alpha,l}(\partial^{\alpha_1} \otimes y_{i_1})^{l_1} \dots (\partial^{\alpha_n} \otimes y_{i_n})^{l_n}$ pour $c_{i,\alpha,l} \in \mathbb{C}$. Il est envoyé par ϕ sur $\sum_{i,\alpha,l} c_{i,\alpha,l}(y_{i_1}^{\alpha_1})^{l_1} \dots (y_{i_n}^{\alpha_n})^{l_n}$. Si P est dans le noyau de ϕ alors pour tout i, α, l, $c_{i,\alpha,l} = 0$ puisque la famille $\{(y_{i_1}^{\alpha_1})^{l_1} \dots (y_{i_n}^{\alpha_n})^{l_n}\}$ est libre. Donc $P = 0$ et ϕ est injectif. Après inversion du déterminant dans les anneaux de départ et d'arrivée, ceci nous donne un isomorphisme compatible à l'action des opérateurs différentiels, allant de $\mathcal{O}_{RM}(U)$ vers $\mathcal{O}_M(U)[y_i^\alpha \ , \ 1 \leq i \leq m \ , \ \alpha \in \mathbb{N}^m]$.

La restriction de ϕ à $\mathcal{O}_{R_kM}(U, V)$ donne la deuxième assertion. La dernière assertion est donnée par le fait que les applications $R_kM \to R_lM$, $k \geq l$, sont données dans les anneaux de coordonnées par les injections naturelles $\mathcal{O}_M(U)[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq |\alpha| \leq l][1/\det(y_i^{e_j})] \to \mathcal{O}_M(U)[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq |\alpha| \leq k][1/\det(y_i^{e_j})]$.

□

Nous pouvons maintenant donner la structure différentielle. Rappelons que dans la construction des coordonnées $\mathcal{O}_{RM}$ de l'espace des repères il a fallu faire agir $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]$ sur lui-même. Cette action nous donne naturellement une structure différentielle sur ces coordonnées. Nous allons étendre cette structure différentielle en faisant agir l'ensemble des opérateurs différentiels de $\mathbb{C}^m$ à droite sur $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]$ et donc aussi à droite sur l'espace des repères. Cette action est donnée sur les tenseurs purs par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\![\epsilon_1, \dots, \epsilon_m]\!][\partial_1, \dots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_{RM} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{RM} \\ (P, Q \otimes f) & \longmapsto & Q \circ P|_{\epsilon=0} \otimes f \end{array}$$

Elle passe à la puissance symétrique grâce au co-produit.

Fait : Cette action passe au quotient par l'idéal différentiel $\mathcal{K}$.
Montrons ce fait. Pour éviter d'alourdir les notations, posons $A = \mathbb{C}[\![\epsilon_1, \dots, \epsilon_m]\!][\partial_1, \dots, \partial_m]$ et $A_0 = \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]$. Si U est un ouvert affine de M, alors $\mathcal{K}(U)$ est engendré par les éléments $L((1 \otimes f_1)(1 \otimes f_2) - (1 \otimes f_1 f_2))$ où $L \in A_0$ et $(f_1, f_2) \in \mathcal{O}_M(U)^2$. Si $P \in A$, il suffit de montrer que $P.L((1 \otimes f_1)(1 \otimes f_2) - (1 \otimes f_1 f_2)) \in \mathcal{K}(U)$. Or si $(g_1, g_2) \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]^2$ alors la formule de dérivation d'un produit appliquée à P puis à L nous dit qu'il existe $(P_i^1, P_i^2) \in A^2$ et $(L_i^1, L_i^2) \in A_0^2$ tels que $L \circ P(g_1 g_2) = \sum_{i,j} L_j^1 \circ P_i^1(g_1) L_j^2 \circ P_i^2(g_2)$. En évaluant ϵ en 0 cela donne $L \circ P|_{\epsilon=0}(g_1 g_2) = \sum_{i,j} L_j^1 \circ P_i^1|_{\epsilon=0}(g_1) L_j^2 \circ P_i^2|_{\epsilon=0}(g_2)$. Ainsi, il vient les égalités :

$$\begin{array}{rcl} P.L((1 \otimes f_1)(1 \otimes f_2) - (1 \otimes f_1 f_2)) & = & (\sum_{i,j} P_i^1.(L_j^1 \otimes f_1))(P_i^2.(L_j^2 \otimes f_2)) - P.(L \otimes f_1 f_2) \\ & = & \sum_{i,j} (L_j^1 \circ P_i^1|_{\epsilon=0} \otimes f_1)(L_j^2 \circ P_i^2|_{\epsilon=0} \otimes f_2) \\ & & -(L \circ P|_{\epsilon=0} \otimes f_1 f_2) \\ & = & L \circ P|_{\epsilon=0}((1 \otimes f_1)(1 \otimes f_2) - (1 \otimes f_1 f_2)) \end{array}$$

Le dernier membre de droite est dans l'idéal $\mathcal{K}(U)$ ce qui montre le fait.

2.1.2 La structure principale

Commençons par définir ce qui sera le groupe structural de l'espace des repères sur M. Il s'agit des applications formelles inversibles de $\mathbb{C}^m$ en 0 dans lui-même :

Définition 2.1.4. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble des jets d'ordre k des applications inversibles $(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ est noté Γ_k. Cet ensemble est muni de l'anneau de coordonnées :*

$$\mathcal{O}(\Gamma_k) := \mathbb{C}[z_j^\alpha, \frac{1}{\det(z_i^{e_j})},\ 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq |\alpha| \leq k]$$

Ces espaces sont munis des projections $\Gamma_k \to \Gamma_l$ pour $k \geq l$. La limite projective est l'ensemble des applications formelles inversibles $(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ noté Γ. Celui-ci est muni de l'anneau de coordonnées :

$$\mathcal{O}(\Gamma) := \mathbb{C}[z_j^\alpha, \frac{1}{\det(z_i^{e_j})},\ 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq |\alpha|]$$

En particulier, ces anneaux de coordonnées munissent l'espace des jets d'ordre k d'une structure de variété affine. Les jets d'applications peuvent être composées et inversées. Cela induit des lois de composition et d'inversion sur la variété Γ_k :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k \times \Gamma_k & \longrightarrow & \Gamma_k \\ (j_k(\gamma_1), j_k(\gamma_2)) & \longmapsto & j_k(\gamma_1 \circ \gamma_2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma_k & \longrightarrow & \Gamma_k \\ j_k(\gamma) & \longmapsto & j_k(\gamma^{-1}) \end{array}$$

Ces opérations donnent une structure de groupe à la variété Γ_k. En la faisant agir sur une algèbre de dimension finie nous allons voir que ces opérations sont algébriques et donc que Γ_k est un groupe affine. Notons $\mathbb{C}[\![\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m]\!]$ l'anneau des séries formelles en m variables et notons $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, *i.e.* $\mathfrak{m} = \bigoplus_i \epsilon_i \mathbb{C}[\![\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m]\!]$. Le groupe Γ_k agit sur $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}$ par composition à la source :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1} \times \Gamma_k & \longrightarrow & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1} \\ (f + \mathfrak{m}^{k+1}, j_k(\gamma)) & \longmapsto & f \circ \gamma + \mathfrak{m}^{k+1} \end{array}$$

Ainsi, chaque élément de Γ_k peut être vu comme un automorphisme de l'algèbre $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}$. Notons $Aut(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1})$ l'ensemble de ces automorphismes et notons $GL(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1})$ le groupe des automorphismes linéaires de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}$.

Lemme 2.1.5. *Pour tout k, muni de ces lois de composition et d'inversion, le groupe Γ_k est affine et isomorphe au groupe des automorphismes $Aut(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1})$.*

Démonstration. Nous allons montrer que le groupe Γ_k est affine en montrant justement qu'il est isomorphe au groupe des automorphismes. Commençons donc par voir que le groupe des automorphismes de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}$ est un sous-groupe affine du groupe linéaire. En effet, l'égalité d'ensembles suivante

$$Aut(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}) = \left\{ g \in GL(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}) \mid g(\epsilon_1^{\alpha_1} \ldots \epsilon_m^{\alpha_m}) = g(\epsilon_1)^{\alpha_1} \ldots g(\epsilon_m)^{\alpha_m} \right\}$$

dit, en notant $\mathbb{C}[Y_{\alpha,\beta} \mid 1 \leq |\alpha|, |\beta| \leq k][1/\det]$ l'anneau des coordonnées de $GL(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1})$, que les automorphismes sont les solutions des équations polynomiales de la forme $Y_{\alpha,\beta} - P(Y_{\delta,e_1}, \ldots, Y_{\omega,e_m}) = 0$ où e_i est le multi-indice ayant 1 sur la i-ème coordonnée et 0 sur les autres. Ceci implique en particulier que l'anneau des coordonnées de $Aut(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1})$ est isomorphe à $\mathbb{C}[\overline{Y_{\alpha,e_i}}, \frac{1}{\det(\overline{Y_{\epsilon_j,e_i}})}]$. Ensuite, notons le morphisme d'évaluation

$$\begin{array}{ccc} ev : Aut(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}) & \longrightarrow & \Gamma_k \\ g & \longmapsto & (j_k(g(\epsilon_1)), \ldots, j_k(g(\epsilon_m))) \end{array}$$

En rappelant que $\mathbb{C}[z_j^\alpha, \frac{1}{\det(z_i^{e_j})}]$ est l'anneau des coordonnées de la variété Γ_k, le morphisme d'évaluation induit le morphisme d'anneau donné par $ev^*(z_i^\alpha) = \overline{Y_{\alpha,e_i}}$. Il s'ensuit que ev est un isomorphisme de variété. Il est de plus compatible aux lois de groupes. Cela implique la commutativité des diagrammes ci dessous et achève la preuve du caractère algébrique des lois du groupe Γ_k :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k \times \Gamma_k & \xrightarrow{\quad composition \quad} & \Gamma_k \\ \downarrow{\scriptstyle ev\times ev} & & \downarrow{\scriptstyle ev} \\ Aut(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}) \times Aut(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}) & \xrightarrow[multiplication]{} & Aut(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k & \xrightarrow{\quad inversion \quad} & \Gamma_k \\ \downarrow{\scriptstyle ev} & & \downarrow{\scriptstyle ev} \\ Aut(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}) & \xrightarrow[inversion]{} & Aut(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}) \end{array}$$

□

Lemme 2.1.6. *Pour tout k, l'algèbre de Lie du groupe Γ_k est l'ensemble $\bigoplus_i \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}\partial_i$ des dérivations de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}$. L'algèbre de Lie du groupe Γ est l'ensemble $\bigoplus_i \mathfrak{m}\partial_i$ des dérivations de $\mathfrak{m}$.*

Démonstration. Par le lemme (2.1.5), il suffit de décrire l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}$ qui est un sous-groupe du groupe linéaire. L'algèbre de Lie de $GL(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1})$ est l'ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}$ dont le crochet de Lie est le commutateur. L'exponentielle qui relie ce groupe de Lie et son algèbre est notée

$$\begin{array}{rccc} \exp : End(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}) & \longrightarrow & GL(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}) \\ X & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} X^{(n)} \end{array}$$

où $X^0 = id$ et $X^{(n)} = X(X^{(n-1)})$. Le fait qu'un endomorphisme X de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}$ est une dérivation si et seulement si son exponentielle est un automorphisme donne la première assertion. Pour la deuxième assertion, il suffit de se rappeler que le groupe Γ est la limite projective des groupes $(\Gamma_k)_k$ et de remarquer que $\bigoplus_i \mathfrak{m}\partial_i$ est la limite projective de $(\bigoplus_i \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}\partial_i)_k$. □

Remarquons que l'exponentielle associée à chaque groupe de jets est donnée en composant l'exponentielle décrite ci-dessus avec le morphisme d'évaluation donné dans la preuve du lemme (2.1.5), *i.e.* si X est une dérivation, alors

$$\exp(X) \quad = \quad \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} X^{(n)}(\epsilon_1), \ldots, \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} X^{(n)}(\epsilon_1) \right)$$

Restreinte à l'ensemble des dérivations dont la partie linéaire est nilpotente, ces sommes sont finies, donc l'exponentielle est un morphisme de variété. Pour ces mêmes raisons de finitude, nous pouvons définir par la même formule l'exponentielle des dérivations de $\mathfrak{m}$

dont la partie linéaire est nilpotente. Cela donne une bijection avec le sous-groupe de Γ dont la partie linéaire est unipotente (voir [25]).

Pour munir la variété des repères d'une variété lisse M d'une structure de fibré principal, nous faisons agir le groupe Γ_k sur R_kM par composition à la source. Le groupe Γ agit de la même manière sur l'espace des repères RM. Ces actions sont notées :

$$\begin{array}{ccc} R_kM \times \Gamma_k & \longrightarrow & R_kM \\ (j_k(r), j_k(\gamma)) & \longmapsto & j_k(r \circ \gamma) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} RM \times \Gamma & \longrightarrow & RM \\ (r, \gamma) & \longmapsto & r \circ \gamma \end{array}$$

Lemme 2.1.7. *Soient k un entier et M une variété lisse. L'action du groupe Γ_k sur R_kM par composition à la source fait de R_kM un fibré principal localement trivial pour la topologie de Zariski dont M est la base et Γ_k est le groupe structural. Si U est un ouvert convenable de M, $f \in \mathcal{O}_M(U)$, $\gamma \in \Gamma_k$ et $Q \in \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]^{\leq k}$, alors l'action est donnée dans les coordonnées par $\gamma^*(Q \otimes f) = \gamma_* Q|_{\epsilon=0} \otimes f$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'égalité annoncée sur l'ouvert $U \subset M$. Il suffit de la montrer pour les monômes, *i.e.* en reprenant les notations de l'énoncé $Q = \partial^\alpha$ et $f = y^{(\beta)} = y_1^{\beta_1} \ldots y_m^{\beta_m}$. Remarquons d'abord que l'écriture d'un élément $P \in \mathbb{C}[\![\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m]\!]$ nous dit que $\partial^\alpha(P)|_{\epsilon=0} = P^\alpha$. Il vient :

$$\begin{array}{rcll} \gamma^*(\partial^\alpha \otimes y^{(\beta)})(r) & = & ((r \circ \gamma)^{(\beta)})^\alpha & \\ & = & \partial^\alpha (r \circ \gamma)^{(\beta)}|_{\epsilon=0} & \text{par la remarque précédente} \\ & = & \partial^\alpha (r^{(\beta)} \circ \gamma)|_{\epsilon=0} & \\ & = & \left(\gamma_* \partial^\alpha|_{\epsilon=0} \otimes y^{(\beta)}\right)(r) & \end{array}$$

Ensuite, si U est un revêtement non ramifié d'un ouvert de $\mathbb{C}^m$ alors le lemme (2.1.3) nous donne un isomorphisme d'anneau $\phi : \mathcal{O}_{RM}(U) \to \mathcal{O}_M(U)[y_i^\alpha, 1 \leq i \leq m, 1 \leq |\alpha|][1/\det(y_i^{e_j})]$ qui commute à l'action de $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$. La restriction de cet isomorphisme à l'ordre k nous dit que R_kU est isomorphe à $U \times \Gamma_k$. Pour montrer le lemme il suffit de montrer que cet isomorphisme est compatible avec l'action induite de Γ_k sur l'anneau de coordonnées de R_kU. Soit $\gamma \in \Gamma_k$. Montrons l'égalité $\phi \circ \gamma^* = \gamma^* \circ \phi$ sur les tenseurs purs $Q \otimes f \in \mathcal{O}_{R_kM}(U)$:

$$\begin{array}{rcll} \phi(\gamma^*(Q \otimes f)) & = & \phi(\gamma_* Q|_{\epsilon=0} \otimes f & \\ & = & \phi(\gamma_* Q|_{\epsilon=0}.(1 \otimes f)) & \\ & = & \gamma_* Q|_{\epsilon=0}.\phi(1 \otimes f) & \text{car } \phi \text{ commute à l'action de } \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \\ & = & \gamma_* Q|_{\epsilon=0}(f) & \\ & = & \gamma^*(Q(f)) & \text{par le même calcul que dans le premier paragraphe} \\ & = & \gamma^* \phi(Q \otimes f) & \end{array}$$

Les morphismes $\phi \circ \gamma^*$ et $\gamma^* \circ \phi$ sont donc égaux. □

Dans ce lemme nous venons de décrire l'action de Γ sur $\mathcal{O}_{RM}$ issue de l'action sur RM. Cette action induit une action de l'algèbre de Lie de Γ par dérivation sur $\mathcal{O}_{RM}$ que nous décrivons dans le paragraphe suivant.

2.1.3 Compatibilité

Le but ici est de voir la compatibilité des deux actions de l'algèbre de Lie du groupe Γ sur $\mathcal{O}_{RM}$ décrites dans les paragraphes précédents. Rappelons que celle issue de la structure différentielle est notée

$$\begin{array}{ccc} a : Lie(\Gamma) & \longrightarrow & End(\mathcal{O}_{RM}) \\ v & \longmapsto & (Q \otimes f \mapsto Q \circ v|_{\epsilon=0} \otimes f) \end{array}$$

L'autre action venant de la structure principale est donnée par

$$\begin{array}{ccc} b : Lie(\Gamma) & \longrightarrow & Der(\mathcal{O}_{RM}) \\ v & \longmapsto & (Q \otimes f \mapsto [Q, v]|_{\epsilon=0} \otimes f) \end{array}$$

Proposition 2.1.8. *Les deux actions coïncident et sont des anti-morphismes d'algèbre de Lie.*

Démonstration. Commençons par montrer que les deux actions coïncident sur les tenseurs purs de $\mathcal{O}_{RM}$. Rappelons que $Lie(\Gamma) = \mathfrak{m}\langle\partial_1, \ldots, \partial_m\rangle$ par (2.1.6). Si $v \in Lie(\Gamma)$ et $Q \in \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$ alors $v \circ Q|_{\epsilon=0} = 0$. Donc $Q \circ v|_{\epsilon=0} = [Q, v]|_{\epsilon=0}$. Pour montrer que les deux actions coïncident sur $\mathcal{O}_{RM}$ tout entier, il suffit de montrer que l'action a est aussi une action par dérivation. Ceci est donné directement par la définition de cette action car à partir des tenseurs purs, elle est étendue par la formule du co-produit. Ensuite l'action b est bien un anti-morphisme d'algèbre de Lie car c'est l'action déduite de l'action à gauche de Γ sur $\mathcal{O}_{RM}$. C'est aussi le cas pour a puisque nous venons de voir que ces actions coïncident. Cela peut aussi se voir par le calcul : si $(v_1, v_2) \in Lie(\Gamma)^2$ et $Q \in \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$ alors

$$\begin{array}{rcl} a([v_1, v_2]).Q & = & (Q \circ v_1 \circ v_2 - Q \circ v_2 \circ v_1)\,|_{\epsilon=0} \\ & = & ((Q \circ v_1)\,|_{\epsilon=0} \circ v_2)\,|_{\epsilon=0} - ((Q \circ v_2)\,|_{\epsilon=0} \circ v_1)\,|_{\epsilon=0}|_{\epsilon=0} \\ & = & a(v_2).a(v_1).Q - a(v_1).a(v_2).Q \\ & = & -[a(v_1, a(v_2)].Q \end{array}$$

□

2.2 Espace des jets d'application d'une variété dans une autre

Considérons deux variétés lisses M et N de dimension respective m et n. Pour tout $p \in M$, $q \in N$, il existe des ouverts affines U et V de M et N qui contiennent respectivement p et q et qui soient des revêtements non ramifiés d'ouverts de $\mathbb{C}^m$ et $\mathbb{C}^n$. Il en découle sur ces ouverts U et V des systèmes de coordonnées dans lesquels il peut être défini un germe d'application $\phi : (U, p) \to (V, q)$, il s'écrit :

$$\phi(p + \epsilon) = (\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \phi_1^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, \ldots, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \phi_m^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!})$$

où, pour $1 \leq i \leq n$, $\alpha \in \mathbb{N}^m$, $\phi_i^\alpha \in \mathbb{C}$. Un germe d'application ϕ est de rang maximal si l'un des mineurs principaux de $(\phi_i^{e_j})_{i,j}$ ne s'annule pas. Le jet d'ordre k de l'application ϕ est la série tronquée à l'ordre k :

$$j_k(\phi) := (\sum_{|\alpha| \leq k} \phi_1^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, \ldots, \sum_{|\alpha| \leq k} \phi_m^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!})$$

Dans ces conditions :

Définition 2.2.1. *Soient M et N deux variétés lisses. L'ensemble des jets d'ordre k de germe d'application de M dans N est noté $J_k(M, N)$. Si $N = M$, le sous-ensemble des jets d'ordre k de germe d'application inversibles de M dans M est noté $J_k^*(M, M)$. Ces ensembles sont munis des projections pour $k \geq l$:*

$$\begin{array}{ccc} J_k(M, N) & \longrightarrow & J_l(M, N) \\ j_k(\phi) & \longmapsto & j_l(\phi) \end{array}$$

La limite projective $J(M,N)$ est munie des projections :

$$\begin{array}{ccc} J(M,N) & \longrightarrow & M \times N \\ \phi & \longmapsto & (p, \phi(p)) \end{array}$$

Si M et N sont des revêtements non ramifiés d'ouverts de $\mathbb{C}^m$ et $\mathbb{C}^n$ alors, tout comme l'ensemble des repères d'ordre k de M, l'ensemble des jets d'ordre k de M dans N est muni d'une structure de variété affine dont l'anneau de coordonnées est $\mathcal{O}(M \times N[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq n,\ \alpha \in \mathbb{N}^m,\ 1 \leq |\alpha| \leq k]$. Dans le cas général, en suivant les mêmes étapes de construction du faisceau des repères, nous allons construire le faisceau des jets d'une variété et voir que cette construction coïncide avec le cas particulier des revêtements non ramifiés.

Construction.

- Donnons-nous tout d'abord les faisceaux des opérateurs différentiels sur une variété lisse M qui sont définis, suivant A. Grothendieck, par récurrence :

  Définition 2.2.2. *Soit M une variété lisse. Le faisceau des opérateurs différentiels sur M est défini pour U un ouvert affine de M :*

  - $\mathcal{D}_M^0(U) := \{\mathcal{O}_M(U) \to \mathcal{O}_M(U),\ \mathcal{O}_M(U)$*-linéaire*$\}$ *est l'ensemble des opérateurs de degré* 0
  - $\mathcal{D}_M^k(U) := \left\{L : \mathcal{O}_M(U) \to \mathcal{O}_M(U),\ \mathbb{C}\text{-linéaire et tel que } [L, \mathcal{D}_M^0(U)] \subset \mathcal{D}_M^{k-1}(U)\right\}$ *est l'ensemble des opérateurs de degré k*
  - *la limite inductive $\mathcal{D}_M := \varinjlim \mathcal{D}_M^k$ est l'ensemble des opérateurs différentiels*

  Lemme 2.2.3. *Si M est un revêtement non ramifié d'un ouvert de $\mathbb{C}^m$, alors le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{D}(M)$ des opérateurs différentiels sur M est isomorphe à $\mathcal{O}(M) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$ en tant qu'espace vectoriel.*

- Le faisceau $\mathcal{D}_M$ est stable par composition. Il agit sur le produit tensoriel de $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{D}_M \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_N$ sur le facteur de gauche par composition à gauche.

- Ensuite, notons $pr_1 : M \times N \to M$ et $pr_2 : M \times N \to N$ les projections respectives sur la première et la deuxième composante du produit $M \times N$. Le faisceau $\mathcal{D}_M$ est un $\mathcal{O}_M$-module puisque si U est un ouvert affine de M, $f \in \mathcal{O}_M(U)$ et $L \in \mathcal{D}_M(U)$, alors $f.L \in \mathcal{D}_M(U)$. Par suite, le tiré en arrière $pr_1^*\mathcal{D}_M$ est un $pr_1^*\mathcal{O}_M$-module. Le produit sur $\mathcal{O}_M$ induit un co-produit sur $\mathcal{D}_M$ et donc un co-produit sur $pr_1^*\mathcal{D}_M$ que nous noterons pour un ouvert affine U de $M \times N$:

$$\begin{array}{rccc} co: & pr_1^*\mathcal{D}_M(U) & \longrightarrow & pr_1^*\mathcal{D}_M(U) \otimes_{pr_1^*\mathcal{O}_M(U)} pr_1^*\mathcal{D}_M(U) \\ & L & \longmapsto & \sum_i L_i^{(1)} \otimes L_i^{(2)} \end{array}$$

  Grâce à ce co-produit, l'action des opérateurs différentiels s'étend à la puissance symétrique $Sym(pr_1^*\mathcal{D}_M \otimes_{\mathbb{C}} pr_2^*\mathcal{O}_N)$: si U est un ouvert affine de $M \times N$, $(L, l_1, l_2) \in pr_1^*\mathcal{D}_M(U)^3$ et $(f_1, f_2) \in pr_2^*\mathcal{O}_M(U)^2$, alors

$$L.(l_1 \otimes f_1)(l_2 \otimes f_2) := \sum_i (L_i^{(1)} \circ l_1 \otimes f_1)(L_i^{(2)} \circ l_2 \otimes f_2)$$

- Enfin, en notant K le noyau du morphisme $Sym(pr_1^*\mathcal{O}_M \otimes_{\mathbb{C}} pr_2^*\mathcal{O}_N) \to \mathcal{O}_{M\times N}$, l'algèbre $Sym(pr_1^*\mathcal{D}_M \otimes_{\mathbb{C}} pr_2^*\mathcal{O}_N)$ est quotienté par $\mathcal{K}$ le faisceau d'idéaux différentiel engendré par K (différentiel signifie ici stable sous l'action des opérateurs différentiels)

Notons π la projection des espaces de jets de M dans N sur la variété produit $M \times N$. Cette construction amène à définir des faisceaux sur $M \times N$ qui, par tiré en arrière par π, induisent les faisceaux structuraux des espaces des jets et des jets d'ordre k de M dans N. De manière similaire à l'espace des repères, cette construction amène à la définition suivante :

Définition 2.2.4. *Si M et N sont des variétés lisses, alors en gardant les notations de la construction, les faisceaux sur $M \times N$ associés aux espaces des jets de M dans N sont définis par :*

- $\pi_*\mathcal{O}_{J(M,N)} := Sym(pr_1^*\mathcal{D}_M \otimes_{\mathbb{C}} pr_2^*\mathcal{O}_N)/\mathcal{K}$
- $\pi_*\mathcal{O}_{J_k(M,N)} := Sym(pr_1^*\mathcal{D}_M^k \otimes_{\mathbb{C}} pr_2^*\mathcal{O}_N)/(\mathcal{K} \cap Sym(pr_1^*\mathcal{D}_M^k \otimes_{\mathbb{C}} pr_2^*\mathcal{O}_N))$

Pour $1 \leq i \leq m$, l'action de ∂_i par dérivation sur $\pi_*\mathcal{O}_{J(M,N)}$ est notée D_i. Les faisceaux structuraux des espaces des jets de M dans N sont les faisceaux engendrés par les tirés en arrière des faisceaux précédents : $\mathcal{O}_{J(M,N)} := \pi^*(\pi_*\mathcal{O}_{J(M,N)})$ et $\mathcal{O}_{J_k(M,N)} := \pi^*(\pi_*\mathcal{O}_{J_k(M,N)})$.

Munis de ces faisceaux, les espaces des jets d'ordre k deviennent des variétés irréductibles. L'application π devient un morphisme de variété qui est affine. Ceci est donné par le lemme suivant. De plus, nous retrouvons la structure locale demandée. Dans la suite, nous identifierons les faisceaux $\mathcal{O}_{J(M,N)}$ et $\mathcal{O}_{J_k(M,N)}$ avec les faisceaux $\pi_*\mathcal{O}_{J(M,N)}$ et $\pi_*\mathcal{O}_{J_k(M,N)}$.

Lemme 2.2.5. *Soient M, N deux variétés irréductibles lisses de dimension respective m, n et U un ouvert du produit $M \times N$ qui est un revêtement non ramifié d'un ouvert de $\mathbb{C}^{m+n}$. Alors :*

- *$\mathcal{O}_{J(M,N)}(U) \simeq \mathcal{O}_{M\times N}(U)[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq n,\ \alpha \in \mathbb{N}^m,\ 1 \leq |\alpha|]$ et cet isomorphisme est compatible avec l'action des opérateurs différentiels où l'action sur le membre de droite est donnée dans des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_m)$ de U par $D_i(x_j) = \delta_{ij}$ et $D_i(y^\alpha) = y^{\alpha+e_i}$.*
- *La restriction de cet isomorphisme induit $\mathcal{O}_{J_k(M,N)}(U) \simeq \mathcal{O}_{M\times N}(U)[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq m,\ \alpha \in \mathbb{N}^m,\ 1 \leq |\alpha| \leq k]$.*
- *Pour $k \geq l$ les applications $J_k(M,N) \to J_l(M,N)$ sont des morphismes surjectifs lisses. En particulier, l'espace des jets est une pro-variété.*

Remarquons que les dérivations D_i s'expriment localement par

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum y_j^{\alpha+e_i} \frac{\partial}{\partial y_j^\alpha}$$

Démonstration. La preuve est la même que celle du lemme 2.1.3. L'espace des opérateurs différentiels sur M est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à $\mathcal{O}_M(U) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$ par le lemme (2.2.3). Ils agissent sur $\mathcal{O}_{M\times N}(U)[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq m,\ \alpha \in \mathbb{N}^m,\ 1 \leq |\alpha|]$ de la manière suivante : l'action sur $pr_1^*\mathcal{O}_M(U)$ est l'action naturelle, $\partial^\alpha(y_j^\beta) = y_j^{\alpha+\beta}$, puis

l'action est étendue à l'anneau tout entier par le co-produit. Nous commençons par définir un morphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & pr_1^*\mathcal{D}_M \otimes pr_2^*\mathcal{O}_N(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{M\times N}(U)[y_i^\alpha,\, 1\leq i\leq m,\, \alpha\in\mathbb{N}^m,\, 1\leq|\alpha|] \\ & 1\otimes P & \longmapsto & P \end{array}$$

de manière à ce qu'il soit compatible à l'action des opérateurs différentiels, *i.e.* si $L \in pr_1^*\mathcal{D}_M(U)$, $P \in pr_2^*\mathcal{O}_N(U)$, alors $\phi(L\otimes P) = L.\phi(1\otimes P)$. Ce morphisme se prolonge à l'algèbre symétrique. Ce prolongement encore noté ϕ est compatible à l'action des opérateurs différentiels car les actions sur les deux membres sont données par le co-produit. En particulier, le noyau du morphisme est invariant sous cette action. Pour tout $(f_1,f_2) \in (pr_1^*\mathcal{O}_M(U))^2$ et $(h_1,h_2) \in (pr_2^*\mathcal{O}_N(U))^2$, l'élément $(pr_1^*f_1\otimes pr_2^*f_2)(pr_1^*g_1\otimes pr_2^*g_2) - (pr_1^*(f_1g_1)\otimes pr_2^*(f_2g_2))$ est dans ce noyau. Les éléments de cette forme engendrent le noyau K de $Sym(pr_1^*\mathcal{O}_M\otimes_{\mathbb{C}} 1\otimes_{\mathbb{C}} pr_2^*\mathcal{O}_N) \to \mathcal{O}_{M\times N}$. Le morphisme ϕ passe au quotient par l'idéal différentiel $\mathcal{K}$ ce qui donne un morphisme de $\mathcal{O}_{J(M,N)}$ vers $\mathcal{O}_{M\times N}(U)[y_i^\alpha,\, 1\leq i\leq n,\, \alpha\in\mathbb{N}^m,\, 1\leq|\alpha|]$. C'est un isomorphisme et l'injectivité se montre de la même manière que dans le lemme (2.1.3).

La restriction de ϕ à $\mathcal{O}_{J_k(M,N)}$ donne la deuxième assertion. La dernière assertion est donnée par le fait que les applications $J_k(M,N)\to J_l(M,N)$, $k\geq l$, sont données dans les anneaux de coordonnées par les injections naturelles $\mathcal{O}_{M\times N}(U)[y_i^\alpha,\, 1\leq i\leq m,\, 1\leq|\alpha|\leq l] \to \mathcal{O}_{M\times N}(U)[y_i^\alpha,\, 1\leq i\leq m,\, 1\leq|\alpha|\leq k]$.

□

2.3 Le groupoïde

Nous donnons trois définitions du groupoïde associé au fibré principal des repères d'ordre k d'une variété M dont la base est la variété M elle-même.

(1) En suivant les notations de la définition (1.1.13), $Iso(R_kM)$ est l'ensemble des bijections Γ_k-équivariante d'une fibre de $R_kM\to M$ dans une autre.

(2) Le produit $R_kM\times R_kM$ quotienté par l'action diagonale de Γ_k.

(3) L'espace $J_k^*(M,M)$ des jets inversibles d'ordre k de M dans M est doté des applications :

- source et but qui associent respectivement à un jet son point de départ et son point d'arrivée.
- identité qui associe à un point de M, le jet qui est l'identité sur ce point.
- de composition partielle :

$$\begin{array}{rccc} m : & J_k^*(M,M)\underset{{}_sM^t}{\times} J_k^*(M,M) & \longrightarrow & J_k^*(M,M) \\ & (j_k(\phi_1), j_k(\phi_2)) & \longmapsto & j_k(\phi_1\circ\phi_2) \end{array}$$

- d'inversion :

$$\begin{array}{rccc} inv : & J_k^*(M,M) & \longrightarrow & J_k^*(M,M) \\ & j_k(\phi) & \longmapsto & j_k(\phi^{-1}) \end{array}$$

Nous retrouvons l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & R_kM\times R_kM & \longrightarrow & Iso(R_kM) \\ & (j_k(r), j_k(s)) & \longmapsto & \phi_{j_k(r),j_k(s)} \end{array}$$

décrite dans le lemme (1.1.14) qui à deux repères d'ordre k associent l'unique bijection Γ_k-équivariante qui envoie l'un sur l'autre. Nous disposons d'une nouvelle application :

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & R_kM \times R_kM & \longrightarrow & J_k^*(M,M) \\ & (j_k(r), j_k(s)) & \longmapsto & j_k(s \circ r^{-1}) \end{array}$$

Proposition 2.3.1. *Ces trois définitions de groupoïde associé au fibré principal des repères d'ordre $k \in \mathbb{N}$ sont équivalentes : les passages au quotient des morphismes Φ et Ψ sous l'action diagonale du groupe Γ_k sont des isomorphismes de groupoïdes.*

La distribution sur $RM \times RM$ engendrée par les dérivations totales $\partial_i \otimes 1 + 1 \otimes \partial_i$ est stable sous l'action de Γ. Son image par $d\Psi$ est engendrée par les dérivations D_i issues de l'action des opérateurs différentiels (voir définition (2.2.4)).

Démonstration. Le lemme (1.1.14) montre que le passage au quotient de Φ est un isomorphisme. Le passage au quotient de Ψ est bien défini puisque pour $(s,r) \in RM^2$, $\gamma \in \Gamma$, $s \circ r^{-1} = s \circ \gamma \circ \gamma^{-1} \circ r^{-1}$. Ce quotient est surjectif puisque pour $\phi \in J^*(M,M)$, $s \in RM$, $\phi = s \circ (s^{-1} \circ \phi)$. Il est injectif puisque pour $(r, r', s, s') \in RM^4$, si $s \circ r^{-1} = s' \circ r'^{-1}$, alors en posant $\gamma = s^{-1} \circ s' = r^{-1} \circ r'$, nous avons $r' = r \circ \gamma$ et $s' = s \circ \gamma$. □

Lemme 2.3.2. *Soient k un entier et M une variété lisse. Le groupoïde des jets inversibles agit algébriquement sur l'espace des repères par composition au but :*

$$\begin{array}{rccc} J_k^*(M,M) \underset{sM}{\times} R_kM & \longrightarrow & R_kM \\ (j_k(\phi), j_k(r)) & \longmapsto & j_k(\phi \circ r) \end{array}$$

Démonstration. Ce groupoïde des jets partiels inversibles étant isomorphe à $Iso(R_kM)$, ce morphisme s'identifie à l'évaluation décrite dans le lemme (1.1.15)(i). □

2.4 Les prolongements

Nous venons de voir que l'espace des jets inversibles d'une variété est exactement le groupoïde associé à l'espace de ces repères. Dans cette section, nous allons relever canoniquement des morphismes et des champs de vecteurs d'une variété à ses repères et à ses espaces des jets. Des distributions sur ces espaces sont associés à ces relevés. Nous verrons que les distributions sur les groupoïdes des jets sont exactement les distributions induites sur ces groupoïdes par les distributions sur les repères.

2.4.1 Relèvements de morphismes

Un morphisme lisse $\phi : M \to M$ d'une variété lisse vers elle-même se relève en une application $R\phi$ de l'espace de ses repères vers lui-même par composition au but.

$$\begin{array}{rccc} R\phi : & RM & \longrightarrow & RM \\ & r & \longmapsto & \phi \circ r \end{array}$$

Nous relevons de même le morphisme en $R_k\phi$ à l'espace des repères d'ordre $k \in \mathbb{N}$.

Une autre façon de définir le relèvement $R\phi$ est de prolonger l'action de ϕ^* sur l'anneau de coordonnées de M en une action $R\phi^*$ sur l'anneau des coordonnées de l'espace des repères de M en suivant la construction de ce dernier. Le relevé $R_k\phi$ aux repères d'ordre $k \in \mathbb{N}$ suit la même construction.

- Le morphisme ϕ^* agit sur $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M$ sur le facteur de droite.

- Puis il agit sur $Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M)$ en imposant que ϕ^* reste un morphisme d'anneaux.

- Cette action passe au quotient par l'idéal différentiel $\mathcal{K}$, *i.e.* $\phi^*(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$. En effet, si U est un ouvert affine de M, rappelons-nous que $\mathcal{K}$ est différentiellement engendré par le noyau noté K d'un morphisme, qui est lui engendré pour U ouvert de M et $(f, g) \in \mathcal{O}_M(U)^2$ par $(1 \otimes f)(1 \otimes g) - (1 \otimes fg)$. Le calcul $\phi^*((1 \otimes f)(1 \otimes g) - (1 \otimes fg)) = (1 \otimes \phi^*(f))(1 \otimes \phi^*(g)) - (1 \otimes \phi^*(f)\phi^*(g))$ nous dit que $\phi^*(K) \subset K$ et puisque l'action de ϕ^* sur le facteur de droite commute avec l'action de $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$ sur le facteur de gauche, il vient l'inclusion escomptée.

Lemme 2.4.1. *Soient k un entier, M une variété lisse et $\phi : M \to M$ un morphisme lisse. Les deux manières de relever le morphisme en $R\phi$ et $R_k\phi$ aux repères et aux repères d'ordre k décrites ci-dessus coïncident. De plus ces relevés commutent aux dérivations totales, i.e. vérifient les égalités $R_{k+1}\phi^* \circ \partial_i - \partial_i \circ R_k\phi^* = 0$.*

Démonstration. Pour les distinguer notons $R^1\phi$ et $R^2\phi$ les deux relevés de ϕ décrits plus haut. Il suffit de montrer que les actions de $R^1\phi^*$ et $R^2\phi^*$ coïncident sur les tenseurs purs $\partial^\alpha \otimes y^{(\beta)}$ où $y^{(\beta)} = y^{\beta_1} \ldots y^{\beta_m}$. Nous avons pour $r \in RM$

$$\begin{aligned} R^1\phi^*(\partial^\alpha \otimes y^{(\beta)})(r) &= (\partial^\alpha \otimes y^{(\beta)})(\phi \circ r) \\ &= (y^{(\beta)}(\phi \circ r))^\alpha \\ &= (\phi^* y^{(\beta)}(r))^\alpha \\ &= (\partial^\alpha \otimes \phi^* y^{(\beta)})(r) \\ &= R^2\phi^*(\partial^\alpha \otimes y^{(\beta)})(r) \end{aligned}$$

Ces deux manières de relever ϕ coïncident. Le fait que l'action des dérivations totales commutent à l'action du relever est une conséquence directe de la construction de $R^2\phi^*$. □

Un morphisme lisse $\phi : M \to M$ peut se prolonger en une application de l'espace $J(M, M)$ vers lui-même de deux manières : par composition à la source ou par composition au but.

$$\begin{array}{ccc} J(M,M) & \longrightarrow & J(M,M) \\ \phi & \longmapsto & \phi \circ f \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} J(M,M) & \longrightarrow & J(M,M) \\ \phi & \longmapsto & f \circ \phi \end{array}$$

Les prolongements à l'espace des jets d'ordre k de germes d'application se définissent de la même manière. Ces prolongement peuvent être aussi définis en suivant la construction de l'anneau de coordonnées de $J(M, M)$.

2.4.2 Relèvements de champs de vecteurs

Nous allons décrire deux manières de relever un champ de vecteurs d'une variété M aux espaces de ses repères. La première, plus intuitive, utilise les flots holomorphes du champ de vecteurs tandis que la deuxième est algébrique. Le lemme qui suit donne la compatibilité entre ces deux manières.

Pour la première façon, donnons nous un champ de vecteurs rationnel X sur une variété lisse M. Ses flots définissent des biholomorphismes sur leurs ouverts de définition. Nous noterons $\exp(\tau X)$ le flot au temps $\tau \in \mathbb{C}$. Suivant le lemme (2.3.2), leur jet et leur jet d'ordre k agissent respectivement sur les repères et les repères d'ordre k par composition

au but. Les relevés RX et R_kX de X sont alors définis grâce à cette action. Pour $r \in RM$ tel que $r(0)$ soit dans le domaine de définition de X :

$$RX|_r := \frac{d}{d\tau} \exp(\tau X) \circ r \Big|_{\tau=0} \qquad \text{et} \qquad R_kX|_{j_k r} := \frac{d}{d\tau} j_k(\exp(\tau X) \circ r) \Big|_{\tau=0}$$

La manière algébrique de construire RX consiste à relever la dérivation X de l'anneau des coordonnées de M en une dérivation des coordonnées de l'espace des repères de M en suivant la construction de ces dernières. Le relevé en une dérivation des coordonnées de l'espace des repères d'ordre k suit la même construction.

- Ce champ de vecteurs X agit sur $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M$ sur le facteur de droite.
- Puis il agit sur $Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M)$ en imposant que X reste une dérivation, *i.e.* vérifie la règle de Leibniz.
- Cette action passe au quotient par l'idéal différentiel $\mathcal{K}$, *ie* : $X(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$. En effet, si U est un ouvert affine de M, rappelons nous que $\mathcal{K}$ est différentiellement engendré par le noyau noté K d'un morphisme, qui est lui engendré pour U ouvert de M et $(f, g) \in \mathcal{O}_M(U)^2$ par $(1 \otimes f)(1 \otimes g) - (1 \otimes fg)$. Le calcul $X((1 \otimes f)(1 \otimes g) - (1 \otimes fg)) = (1 \otimes X(f))(1 \otimes g) + (1 \otimes f)(1 \otimes X(g)) - (1 \otimes X(f)g) - (1 \otimes fX(g))$ nous dit que $X(K) \subset K$ et puisque l'action de X sur le facteur de droite commute avec l'action de $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$ sur le facteur de gauche, il vient l'inclusion escomptée.

Lemme 2.4.2. *Soient $k \in \mathbb{N}$ et X un champ de vecteurs rationnel sur une variété lisse M.*

- *Les deux manières de le relever en RX et en R_kX aux repères et aux repères d'ordre k décrites ci-dessus commutent aux dérivations totales, i.e. vérifient les égalités $R_{k+1}X \circ \partial_i - \partial_i \circ R_kX = 0$.*
- *Ces égalités caractérisent les relevés : si $X = \sum a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ dans des coordonnées locales, alors $RX = \sum_{i,\alpha} \partial^\alpha(a_i) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}$.*

Démonstration. Le fait que le relèvement utilisant les flots du champ de vecteurs vérifie les égalités $R_{k+1}X \circ \partial_i - \partial_i \circ R_kX = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que ces égalité caractérisent ce relevé est une conséquence des pages 117 à 135 de [31]. Il reste à voir que le relèvement qui suit la construction de l'anneau de coordonnées de l'espace des repères vérifie ces égalités. Or la commutativité de l'action des opérateurs différentiels et de l'action de ce relevé est dû au fait que les premiers agissent sur le membre de gauche de $\mathcal{O}_{RM}$ tandis que le deuxième agit sur le membre de droite.

□

De même, un champ de vecteurs sur une variété peut se relever à l'espace $J(M, M)$. Nous le relèverons au but et le noterons R^tX. Nous décrivons ce relevé avec la manière qui fait intervenir les flots du champ de vecteurs puis avec la manière algébrique. Reprenons le champ de vecteurs X sur la variété M et ses flots $\exp(\tau X)$. Ils agissent sur $J(M, M)$ par composition au but. Pour $\phi \in J(M, M)$ tel que son but $t(\phi)$ soit dans le domaine de définition de X :

$$R^tX|_\phi := \frac{d}{d\tau} \exp(\tau X) \circ \phi \Big|_{\tau=0}$$

Le relevé à l'espace des jets d'ordre k, noté R^t_kX, est défini de la même manière.

Ensuite, comme précédemment, la manière algébrique consiste à relever la dérivation X des coordonnées de M en une dérivation des coordonnées de l'espace des jets de M en suivant la construction de ces dernières. Voici le relèvement par le but :

- Ce champ de vecteur X agit sur $\mathcal{D}_M \otimes \mathcal{O}_M$ sur le deuxième facteur
- Puis il agit sur $Sym(\mathcal{D}_M \otimes \mathcal{O}_M)$ en imposant que X reste une dérivation, *i.e.* vérifie la règle de Leibniz
- Cette action passe au quotient par l'idéal différentiel $\mathcal{K}$, *i.e.* $X(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$. En effet, si U est un ouvert affine de M, rappelons nous que $\mathcal{K}$ est différentiellement engendré par le noyau noté K d'un morphisme, qui est lui engendré pour U ouvert de M et $(f_1, f_2, g_1, g_2) \in \mathcal{O}_M(U)^4$ par $(pr_1^* f_1 \otimes pr_2^* f_2)(pr_1^* g_1 \otimes pr_2^* g_2) - (pr_1^*(f_1 g_1) \otimes pr_2^*(f_2 g_2))$. Par le même calcul que précédemment, il vient $X(K) \subset K$ et puisque l'action de X sur le facteur de droite commute avec l'action des opérateurs différentiels sur le facteur de gauche, il vient l'inclusion escomptée.

Lemme 2.4.3. *Soit X un champ de vecteurs sur une variété lisse M. Les deux manières de le relever à l'espace $J(M, M)$ par le but sont équivalentes.*

Nous terminons cette section en faisant le lien entre ces prolongements de champs de vecteurs et les distributions sur les fibrés principaux qui induisent des distributions sur les groupoïdes associés.

Lemme 2.4.4. *Si X est un champ de vecteurs rationnel sur une variété lisse M, alors*

- *la distribution engendrée par $R_k X$ est une distribution rationnelle principale sur le fibré des repères d'ordre k.*
- *La distribution engendrée par $R_k^t X$ sur le groupoïde des jets d'ordre k est exactement la distribution induite par la distribution engendrée par $R_k X$, i.e. $R_k^t X = d\Psi.(0 + R_k X)$.*

Démonstration. Par la manière algébrique de relevé le champ de vecteurs, nous savons que la distribution $R_k X$ est rationnelle. Pour obtenir le caractère principal, il suffit de montrer que son action sur les coordonnées du fibré des repères d'ordre k commute avec l'action du groupe structural. Rappelons que ce groupe structural Γ_k agit par composition à la source sur $R_k M$. D'après le lemme (2.1.7), ceci induit une action sur le membre de gauche du produit tensoriel $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M$ engendrant $\mathcal{O}_{R_k M}$. Tandis que la distribution agit au but par dérivation sur le membre de droite. Ceci nous donne la commutativité des deux actions.

Pour la deuxième assertion, il suffit de montrer que les flots associés au champ $d\Psi.(\{0\} \oplus R_k X)$ sont les mêmes que les flots associés au champ de vecteurs $R_k^t X$. Si $(r, s) \in (R_k M)^2$ et $\phi \in J_k(M, M)$ vérifient $\phi = s \circ r^{-1}$, *i.e.* $\phi = \Psi(r, s)$ alors nous avons l'égalité $\Psi(r, \exp(\tau X) \circ s) = \exp(\tau X) \circ s \circ r^{-1} = \exp(\tau X) \circ \phi$. Ce qui montre ce que nous voulions. □

2.5 Le pseudo-groupe de Malgrange

Résumons la situation. En partant d'un champ de vecteurs rationnel X sur une variété lisse, nous avons construit pour tout $k \in \mathbb{N}$, le fibré principal des repères d'ordre k dont la base est la variété lisse de départ, le groupoïde des jets inversibles d'ordre k associé au fibré des repères d'ordre k. Puis nous avons relevé le champ de vecteurs en $R_k X$ sur l'espace des repères d'ordre k et l'avons relevé en $R_k^t X$ sur le groupoïde. Nous définissons maintenant

le groupoïde de Galois d'ordre k du champ de vecteurs X comme étant le groupoïde de Galois de la distribution engendrée par R_kX. Donnons explicitement les trois définitions de ces groupoïdes de Galois d'ordre k :

Définition 2.5.1. *Soit X un champ de vecteurs rationnel sur une variété lisse M. Reprenons les notations ci-dessus. Les trois définitions suivantes du groupoïde de Galois $Gal_k(X)$ d'ordre k sont équivalentes.*

- *Le groupoïde de Galois $Gal_k(X)$ d'ordre k est la plus petite sous-variété de $J_k^*(M,M)$ telle qu'il existe un ouvert U^a de M tel que :*
  - $R_k^t X \subset TGal_k(X)$
  - *La restriction $Gal_k(X)|_{U^a\times U^a}$ du groupoïde de Galois au-dessus de $U^a \times U^a$ est un sous-groupoïde de $J_k^*(U^a,U^a)$.*
- *Le groupoïde de Galois $Gal_k(X)$ d'ordre k est la plus petite sous-variété de $J_k^*(M,M)$ telle que :*
  - $R_k^t X \subset TGal_k(X)$
  - *$Gal_k(X)$ contient l'identité*
- *Soient $(H_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille génératrice de $\mathbb{C}(R_kM)^{R_kX}$ et U un ouvert de R_kM sur lequel les applications H_i sont bien définies. Le groupoïde de Galois d'ordre k est la clôture de Zariski de l'ensemble $\{\phi \in J_k^*(U,U) \mid \forall i\ H_i \circ \phi = H_i\}$.*

Lemme 2.5.2. *Soient X un champ de vecteurs rationnel sur une variété lisse M et $k \in \mathbb{N}$. La restriction de la projection $J_k^*(M,M) \to J_{k-1}^*(M,M)$ aux groupoïdes de Galois induit un morphisme dominant $Gal_k(X) \to Gal_{k-1}(X)$.*

Démonstration. Notons π_k la projection $J_k^*(M,M) \to J_{k-1}^*(M,M)$. Il suffit de montrer que $\overline{\pi_k(Gal_k(X))} = Gal_{k-1}(X)$. Remarquons déjà que $d\pi_k R_kX = R_{k-1}X$ puisque leurs flots sont les mêmes, à savoir : $\pi_k \circ j_k(\exp(\tau X)) = j_{k-1}(\exp(\tau X))$. Nous savons aussi que l'image de l'identité de $J_k^*(M,M)$ par π_k est l'identité de $J_{k-1}^*(M,M)$. Nous en déduisons que $\overline{\pi(Gal_k(X))}$ est une variété contenant l'identité et tangente à $R_{k-1}X$ puisque la tangence est une propriété fermée. La minimalité de $Gal_{k-1}(X)$ implique l'inclusion $\overline{\pi(Gal_k(X))} \supset Gal_{k-1}(X)$. Inversement, la variété $\pi_k^{-1}(Gal_{k-1}(X))$ contient l'identité de $J_k^*(M,M)$ et est tangente à R_kX. La minimalité de $Gal_k(X)$ implique l'inclusion $Gal_k(X) \subset \pi_k^{-1}(Gal_{k-1}(X))$. En prenant l'image par π_k de part et d'autre de l'inclusion cela donne l'inclusion $\pi_k(Gal_k(X)) \subset Gal_{k-1}(X)$ ce qui termine la preuve. □

Ce lemme permet de donner la définition suivante :

Définition 2.5.3. *Le pseudo-groupe de Malgrange $Mal(X)$ est la limite projective de la famille des groupoïdes de Galois $(Gal_k(X))_k$ d'ordre k.*

La troisième définition du groupoïde de Galois dans (2.5.1) amène à noter le pseudo-groupe de Malgrange d'un champs de vecteurs X sur une variété M de la façon suivante :

$$Mal(X) = \{\phi \in J^*(M,M) \mid \forall k \in \mathbb{N},\ \forall H \in \mathbb{C}(R_kM)^{R_kX},\ H \circ j_k(\phi) = H\}$$

Exemple 2.5.4. *Soient X, Y deux champs de vecteurs sur une variété lisse M de dimension m. Le champ Y définit m fonctions $H_i \in \mathbb{C}(R_1M)$ donnant les coordonnées de $r^*Y(0)$:*

$$j_0(r^*Y) = \sum_i H_i(j_1 r)\frac{\partial}{\partial \epsilon_i}$$

Le champ Y est invariant par X si et seulement si les m fonctions H_i sont des invariants différentiels d'ordre 1 du champ X, i.e. $\mathcal{L}_X Y = 0$ si et seulement si $R_1X(H_i) = 0$ pour tout i. En particulier, puisque $\mathcal{L}_X X = 0$, le champ X a toujours des invariants différentiels d'ordre 1.

Pour $\phi \in J^*(M,M)$, par définition des fonctions H_i, $j_0((\phi\circ r)^*Y) = \sum_i H_i(j_1(\phi\circ r))\frac{\partial}{\partial\epsilon_i}$. Ainsi $\phi^*Y = Y$ si et seulement si $H_i \circ R_1\phi = H_i$ pour tout i.

Exemple 2.5.5. *Soient X un champ de vecteurs et ω une 1-forme sur une variété lisse M de dimension m. La 1-forme définit m fonctions $H_i \in \mathbb{C}(R_1M)$ par*

$$r^*\omega = \sum H_i(j_1r)d\epsilon_i$$

La 1-forme ω est invariante par X si et seulement si les m fonctions H_i sont des invariants différentiels d'ordre 1 du champ X, i.e. $\mathcal{L}_X\omega = 0$ si et seulement si $R_1X(H_i) = 0$ pour tout i. Pour $\phi \in J^*(M,M)$, nous avons l'équivalence $\phi^*\omega = \omega$ si et seulement si $H_i \circ R_1\phi = H_i$ pour tout i.

Dans ([24]) nous trouvons une autre définition du pseudo-groupe de Malgrange d'un champ de vecteurs. Nous la donnons puis montrons que ces définitions sont équivalentes.

Définition 2.5.6. *Soit X un champ de vecteurs rationnel sur une variété lisse M. Reprenons les notations ci-dessus. Le pseudo-groupe de Malgrange G est la plus petite sous-provariété de l'espace des jets inversibles $J^*(M,M)$ associé à X qui est la limite projective d'une famille de sous-variétés $(G_k)_k \subset (J_k^*(M,M))_k$ vérifiant :*

- *La famille $(G_k)_k$ est tangente aux dérivations D_i, i.e. si G_k est définie par le faisceau d'idéaux I_k, alors $D_iI_k \subset I_{k+1}$. En suivant ([24]), G est appelée une D-sous-variété de l'espace des jets inversibles de M.*
- *Il existe un ouvert $U \subset M$ au-dessus duquel tous les G_k sont des sous-groupoïdes algébriques de $J_k^*(M,M)$. En suivant ([24]), si G vérifie ces deux premières conditions, alors Y est appelée un groupoïde de Lie.*
- *Les sous-variétés G_k sont tangentes aux relevés du champs de vecteur X, i.e. $\mathcal{D}_k^t \subset TG_k$*

Remarquons dans ([24]) que la définition de groupoïde de Lie diffère légèrement. La définition exacte est qu'une D-sous-variété G de l'espace des jets inversibles de M est un groupoïde de Lie s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel qu'au-dessus d'un ouvert, $G \cap J_k^*(M,M)$ est un groupoïde pour $k \geq n$. Mais ces deux définitions coïncident. Les opérations de composition partielle et d'inversion commutent aux projections $J_n^*(M,M) \to J_k^*(M,M)$ pour $k \leq n$. Si $G \cap J_n^*(M,M)$ est un groupoïde au-dessus d'un ouvert alors $G \cap J_k^*(M,M)$ est un groupoïde au-dessus du même ouvert pour $k \leq n$.

Proposition 2.5.7. *Soit X un champ de vecteurs rationnel sur une variété lisse M. La définition du pseudo-groupe de Malgrange de X donnée dans ([24]) coïncide avec les trois autres.*

Démonstration. Dans un premier temps nous allons montrer que le pseudo-groupe de Malgrange vérifie la troisième condition de la définition (2.5.6). Nous montrons ensuite qu'il vérifie la première. Puis nous montrons qu'il vérifie la deuxième condition. Pour montrer que l'ouvert de cette deuxième condition peut être choisi indépendamment de k nous utilisons un théorème de B.Malgrange qui est donné dans [24] dans un cadre

analytique mais qui reste valable dans un cadre algébrique. Enfin nous terminons par la minimalité.

N'importe laquelle des trois définitions (2.5.1) du groupoïde de Galois d'ordre $k \in \mathbb{N}$ nous donne la troisième condition. Ensuite notons $(N_k)_k$ la famille de faisceaux d'idéaux définissant la famille de sous-variétés de $(R_kM \times R_kM)_k$ correspondante à la famille des groupoïdes de Galois $(Gal_k(X))_k$. Par le lemme (2.4.4), pour obtenir la première condition il nous suffit de montrer que $(\partial_i \otimes 1 + 1 \otimes \partial_i)N_k \subset N_{k+1}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, décrivons N_k en utilisant la troisième définition de (2.5.1) qui fait appel aux intégrales premières du champ de vecteurs R_kX. Si U est un ouvert affine de R_kM, alors $N_k(U \times U) = \{P \otimes Q - Q \otimes P \mid (P,Q) \in \mathcal{O}_{R_kM}(U)^2 \text{ et } P/Q \in \mathbb{C}(R_kM)^{R_k\mathcal{D}}\}$. Soit $(P,Q) \in \mathcal{O}_{R_kM}(U)^2$ vérifiant $P/Q \in \mathbb{C}(R_kM)^{R_kX}$. Un petit calcul donne l'égalité

$$(Q \otimes Q)(\partial_i \otimes 1 + 1 \otimes \partial_i)(P \otimes Q - Q \otimes P) + (P \otimes Q - Q \otimes P)(\partial_i Q \otimes Q + Q \otimes \partial_i Q)) \\ = (Q\partial_i P - P\partial_i Q) \otimes Q^2 - Q^2 \otimes (Q\partial_i P - P\partial_i Q) \quad (\star)$$

Or le fait que $P/Q \in \mathbb{C}(R_kM)^{R_kX}$ et le lemme (2.4.2) caractérisant le champ de vecteurs R_kX nous donne $R_{k+1}X\partial_i(P/Q) = \partial_i R_kX(P/Q) = 0$. Ceci implique que $\frac{Q\partial_i P - P\partial_i Q}{Q^2} = \partial_i(P/Q) \in \mathbb{C}(R_{k+1}M)^{R_{k+1}\mathcal{D}}$ et donc que $(Q\partial_i P - P\partial_i Q) \otimes Q^2 - Q^2 \otimes (Q\partial_i P - P\partial_i Q) \in N_{k+1}(U \times U)$. De plus $P \otimes Q - Q \otimes P \in N_k(U \times U) \subset N_{k+1}(U \times U)$ par le lemme (2.5.2). Donc l'égalité $(\star)$ nous donne $(Q \otimes Q)(\partial_i \otimes 1 + 1 \otimes \partial_i)(P \otimes Q - Q \otimes P) \in N_{k+1}(U \times U)$. L'élément $Q \otimes Q$ n'est pas inclus dans $N_{k+1}(U \times U)$ car sinon il devrait s'annuler sur l'identité ce qui impliquerait que $Q = 0$. Le groupoïde de Galois $Gal_{k+1}(X)$ est irréductible donc l'idéal $N_{k+1}(U \times U)$ est premier. Ceci entraine que $(\partial_i \otimes 1 + 1 \otimes \partial_i)(P \otimes Q - Q \otimes P) \in N_{k+1}(U \times U)$. Ce qui donne l'inclusion recherchée et montre que la famille $(Gal_k(X))_k$ vérifie la première condition.

Pour montrer la deuxième condition nous allons construire un groupoïde de Lie puis voir qu'il coïncide avec le pseudo-groupe de Malgrange de la définition 2.5.3. Notons $\mathcal{N}$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}$ définissant le pseudo-groupe de Malgrange $Mal(X)$ de la définition 2.5.3. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $Mal(X)(k)$ la D-sous-variété de $J^*(M,M)$ qui est définie par le faisceau d'idéaux différentiel engendré par $\mathcal{N} \cap \mathcal{O}_{J^*_k(M,M)}$ (différentiel signifie ici stable sous les dérivations totales D_i). Montrons que $Mal(k)$ est un groupoïde de Lie. Commençons par voir qu'il existe un ouvert de M au-dessus duquel $Mal(X)(k) \cap J^*_k(M,M)$ est un groupoïde. Nous venons de voir dans le paragraphe précédent que $Mal(X)$ est une D-sous-variété de $J^*(M,M)$. Donc $Mal(X) \subset Mal(X)(k)$ et $Mal(X)(k) \cap J^*_k(M,M) = Mal(X) \cap J^*_k(M,M) = Gal_k(X)$. La première définition (2.5.1) dite algébrique du groupoïde de Galois d'ordre k de X nous dit que cette sous-variété de $J^*_k(M,M)$ est un groupoïde au-dessus d'un ouvert. Par la remarque précédent la proposition nous savons que $Mal(X)(k) \cap J^*_l(M,M)$ est aussi un groupoïde au-dessus de cet ouvert pour $l \leq k$. Le théorème (4.4.1[24]) nous dit $Mal(X)(k)$ est un groupoïde de Lie. Le théorème (4.5.1[24]) nous dit que l'intersection $\bigcap_k Mal(X)(k)$ est encore un groupoïde de Lie. Pour montrer que le pseudo-groupe de Malgrange $Mal(X)$ est bien un groupoïde de Lie il suffit de montrer qu'il coïncident avec cette intersection. Or pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons vu que $Mal(X) \subset Mal(X)(k)$ donc $Mal(X)$ est contenu dans l'intersection. Nous avons aussi vu pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $Mal(X)(k) \cap J^*_k(M,M) = Mal(X) \cap J^*_k(M,M)$. Cela donne l'inclusion inverse et termine la preuve pour la deuxième condition.

Il nous reste la minimalité. Si W est une pro-variété vérifiant la définition (2.5.6) alors la minimalité de W implique $W \subset Mal(X)$. Or W est la limite projective d'une famille de variété $(W_k)_k$. Si l'inclusion est stricte alors il existe un entier k tel que l'inclusion $W_k \subset Gal_k(X)$ est stricte. Mais ceci contredit la minimalité de $Gal_k(X)$. Il vient donc

$W = Mal(X)$ et entraîne que les différentes définitions du pseudo-groupe de Malgrange coïncident.

□

Chapitre 3

Pseudo-groupe de Malgrange partiel et équations différentielles à paramètres

Le cas avec paramètres peut être vu comme un cas particulier du cas sans paramètre. En effet étant donné une variété lisse, nous n'allons plus travailler sur l'espace de tous ses repères et de tous ses jets mais seulement sur des repères partiels et des jets partiels. Plus précisément, ce seront des repères et des jets dans les fibres d'un morphisme. Cette partie suit les mêmes étapes que la précédente, à savoir : nous construisons les repères et les jets partiels d'une variété puis nous relevons des champs de vecteurs sur ces espaces. Enfin, nous terminons par le résultat principal de spécialisation.

3.1 Le fibré principal des repères partiels d'une variété

Considérons $\rho : M \to S$ un morphisme lisse entre deux variétés lisses S et M de dimension respective d et $m + d$. Dans toute cette partie, nous noterons M_q la fibre du morphisme en $q \in S$. Nous définissons l'ensemble des repères de M dans les fibres de ρ. Puis, de la construction de son anneau de coordonnées découlera une action des opérateurs différentiels de $\mathbb{C}^m$. Cette action sera compatible à la structure de fibré principal dont sera aussi dotés ces repères dans les fibres.

Soit U un voisinage ouvert de $p \in M$ qui est un revêtement non ramifié d'un ouvert de $\mathbb{C}^{m+d}$. Nous avons un système de coordonnées $p = (p', q) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ dans lequel un germe d'application $r : (\mathbb{C}^m, 0) \to (U_q, p)$ dans la fibre en $q \in S$ s'écrit :

$$r(\epsilon) = (\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} r_1^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, \dots, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} r_m^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, q)$$

où, pour $1 \leq i \leq m$, $r_i^\alpha \in \mathbb{C}$. Le jet d'ordre k de l'application r dans la fibre en q est la série tronquée à l'ordre k.

Définition 3.1.1. *Soit $\rho : M \to S$ un morphisme lisse entre deux variétés lisses S et M de dimension respective d et $m + d$. Un repère d'ordre k dans les fibres de ρ en $p \in M$ est le jet d'ordre k d'un germe d'application inversible $r : (\mathbb{C}^m, 0) \to (M_q, p)$, $q \in S$. Il est aussi appelé repère partiel d'ordre k. L'ensemble des repères dans les fibres de ρ est noté $R_k(M/S)$. Ces ensembles sont munis des projections pour $k \geq l$:*

$$\begin{array}{ccc} R_k(M/S) & \longrightarrow & R_l(M/S) \\ j_k(r) & \longmapsto & j_l(r) \end{array}$$

La limite projective $R(M/S) = \varprojlim R_k(M/S)$ *est l'espace des repères dans les fibres de* ρ *(sous-entendus formels) sur* M *muni des projections :*

$$\begin{array}{ccc} R(M/S) & \longrightarrow & R_k(M/S) \\ r & \longmapsto & j_k(r) \end{array}$$

Si $U \subset M$ est un revêtement non ramifié d'un ouvert de $\mathbb{C}^{m+d}$, alors l'ensemble des repères partiels d'ordre k sur U est muni d'une structure de variété affine dont l'anneau de coordonnées est $\mathcal{O}(U)[y_i^\alpha, z_j,\ 1 \leq j \leq d,\ 1 \leq i \leq m,\ \alpha \in \mathbb{N}^m,\ 1 \leq |\alpha| \leq k][1/\det(y_i^{e_j})]$. Le faisceau structural des repères partiels se construit de la même manière que celui des repères et nous retrouvons la structure locale décrite ci-dessus. Nous donnons la définition en identifiant directement le faisceau construit sur M au faisceau structural des repères partiels.

Définition 3.1.2. *Soit* $\rho : M \to S$ *un morphisme lisse entre deux variétés lisses* S *et* M *de dimension respective* d *et* $m + d$*. Le faisceau des coordonnées des repères partiels est :*

$$\mathcal{O}_{R(M/S)} := (Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M)/\mathcal{K}[1/jac]$$

où $Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M)$ *qui a une structure de* $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$*-algèbre différentielle est quotientée par l'idéal différentiel* $\mathcal{K}$ *engendré par le noyau de* $Sym(1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_M) \to \mathcal{O}_M$ *et par les* $\partial_i \otimes \mathcal{O}_S$*. Pour,* $1 \leq i \leq m$*, les dérivations* ∂_i *agissant sur* $\mathcal{O}_{R(M/S)}$ *sont les dérivations totales. Le faisceau des repères partiels d'ordre* k *est :*

$$\mathcal{O}_{R_k(M/S)} := (Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]^{\leq k} \otimes \mathcal{O}_M)/(\mathcal{K} \cap Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]^{\leq k} \otimes \mathcal{O}_M))[1/jac]$$

L'espace des repères partiels d'ordre $k \in \mathbb{N}$ devient une variété irréductible et nous retrouvons la structure locale :

Lemme 3.1.3. *Soient* $\rho : M \to S$ *un morphisme lisse entre deux variétés lisses* S *et* M *de dimension respective* d *et* $m + d$*,* $p \in M$*,* U *un ouvert de* M *qui contient* p *et qui est un revêtement non ramifié de* $\mathbb{C}^{m+d}$*. Alors :*

- $\mathcal{O}_{R(M/S)}(U) \simeq \mathcal{O}_M(U)[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq m,\ \alpha \in \mathbb{N}^m,\ 1 \leq |\alpha|][1/\det(y_i^{e_j})]$ *et l'isomorphisme est compatible à l'action de* $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$ *où l'action sur le membre de droite est donnée par* $\partial_j y_i^\alpha := y_i^{\alpha+e_j}$ *et* $\partial_j z := 0$ *pour tout* $z \in \mathcal{O}_S(U)$*.*
- *La restriction de cet isomorphisme induit* $\mathcal{O}_{R_k(M/S)}(U) \simeq \mathcal{O}(U)[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq m,\ \alpha \in \mathbb{N}^m,\ 1 \leq |\alpha| \leq k][1/\det(y_i^{e_j})]$
- *Pour* $k \geq l$*, les applications* $R_k(M/S) \to R_l(M/S)$ *sont des morphismes surjectifs lisses. En particulier, l'espace des repères partiels est une pro-variété.*

De part leur construction, les coordonnées des repères partiels d'une variété sont dotées d'une action de $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$ sur le membre de gauche. Cette structure différentielle s'étend aux opérateurs différentiels de $\mathbb{C}^m$. L'action est donnée sur les tenseurs purs par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\![\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m]\!][\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_{R(M/S)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{R(M/S)} \\ (P, Q \otimes f) & \longmapsto & Q \circ P|_{\epsilon=0} \otimes f \end{array}$$

Pour munir la variété des repères partiels d'une variété lisse M d'une structure de fibré principal, le groupe Γ_k des jets d'ordre k d'applications inversibles de $\mathbb{C}^m$ en 0 agit sur les repères partiels $R_k(M/S)$ d'ordre k par composition à la source. Le groupe Γ agit de la même manière sur l'espace des repères $R(M/S)$. Ces actions sont notées :

$$\begin{array}{ccc} R_k(M/S)\times\Gamma_k & \longrightarrow & R_k(M/S) \\ (j_k(r), j_k(\gamma)) & \longmapsto & j_k(r\circ\gamma) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} R(M/S)\times\Gamma & \longrightarrow & R(M/S) \\ (r,\gamma) & \longmapsto & r\circ\gamma \end{array}$$

Lemme 3.1.4. *Soient k un entier et $\rho : M \to S$ un morphisme lisse entre deux variétés lisses S et M de dimension respective d et $m+d$. L'action du groupe Γ_k sur R_kM par composition à la source fait de R_kM un fibré principal localement trivial pour la topologie de Zariski dont M est la base et Γ_k est le groupe structural. Si U est un ouvert convenable de M, $f \in \mathcal{O}_{R_k(M/S)}(U)$, $\gamma \in \Gamma_k$ et $Q \in \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]^{\leq k}$, alors l'action est donnée dans les coordonnées par $\gamma_*(Q \otimes f) = \gamma_* Q|_{\epsilon=0} \otimes f$.*

Nous pouvons montrer comme dans le cas sans paramètre que la structure différentielle et la structure principale sont compatibles.

3.2 Espace des jets d'application partielle d'une variété dans une autre

Considérons deux morphismes lisses $\rho : M \to S$ et $\sigma : N \to S$ entre trois variétés lisses S, M et N de dimensions respectives d, $m+d$ et $n+d$. Nous définissons l'ensemble des jets dans les fibres de ces morphismes qui vérifient que la fibre de départ et la fibre d'arrivée sont au-dessus d'un même point de la variété S. Puis nous donnons la construction de son anneau de coordonnées.

Soient U et V des voisinages ouverts de $p_1 \in M$ et $p_2 \in N$ qui sont des revêtements non ramifiés d'ouverts de $\mathbb{C}^{m+d}$ et $\mathbb{C}^{n+d}$. Nous avons un système de coordonnées $p_1 = (p_1', q) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ et $p_2 = (p_2', q) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ dans lequel un germe d'application $\phi : (U_q, p_1) \to (V_q, p_2)$ de la fibre de ρ en $q \in S$ dans la fibre de σ en le même q s'écrit :

$$\phi(p_1' + \epsilon, q) = \Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m} \phi_1^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, \ldots, \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m} \phi_m^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, q \Big)$$

où, pour $1 \leq i \leq n$, $\alpha \in \mathbb{N}^m$, $\phi_i^\alpha \in \mathbb{C}$. Le jet d'ordre k de l'application ϕ est la série tronquée à l'ordre k. Dans ces conditions :

Définition 3.2.1. *Soient deux morphismes lisses $\rho : M \to S$ et $\sigma : N \to S$ entre trois variétés lisses S, M et N. L'ensemble des jets d'ordre k de germe d'application de M dans N dans les fibres de ρ et σ, aussi appelés jets partiels d'ordre k, est noté $J_k(M/S, N/S)$. Si $N = M$, le sous-ensemble des jets d'ordre k de germe d'applications inversibles de M dans M dans les fibres de ρ est noté $J_k^*(M/S, M/S)$. Ces ensembles sont munis des projections pour $k \geq l$:*

$$\begin{array}{ccc} J_k(M/S,N/S) & \longrightarrow & J_l(M/S,N/S) \\ j_k(\phi) & \longmapsto & j_l(\phi) \end{array}$$

La limite projective $J(M/S, N/S)$ est munie des projections :

$$\begin{array}{ccc} J(M/S,N/S) & \longrightarrow & M \times_S N \\ \phi & \longmapsto & (p, \phi(p)) \end{array}$$

Si M et N sont des revêtements non ramifiés d'ouverts de $\mathbb{C}^{m+d}$ et $\mathbb{C}^{n+d}$ alors, l'ensemble des jets partiels d'ordre k de M dans N est muni d'une structure de variété affine dont l'anneau de coordonnées est $\mathcal{O}(M) \otimes_{\mathcal{O}(S)} \mathcal{O}(N)[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq n,\ \alpha \in \mathbb{N}^m,\ 1 \leq |\alpha| \leq k]$. Le faisceau structural des jets partiels se construit de la même manière que celui des jets

et nous retrouvons la structure locale décrite ci-dessus. Nous donnons la définition en identifiant directement le faisceau construit sur $M \times_S N$ au faisceau structural des jets partiels.

Définition 3.2.2. *Soient deux morphismes lisses $\rho : M \to S$ et $\sigma : N \to S$ entre trois variétés lisses S, M et N. L'anneau des coordonnées des applications partiels (sous-entendues formelles) de M dans N est :*

$$\mathcal{O}_{J(M/S,N/S)} := Sym(pr_1^*\mathcal{D}_{M/S} \otimes_{\mathcal{O}_S} pr_2^*\mathcal{O}_N)/\mathcal{K}$$

où

- *le faisceau des opérateurs différentiels partiels $\mathcal{D}_{M/S}$ est :*
  - *pour U ouvert affine de M, $\mathcal{D}^0_{M/S}(U) := \{\mathcal{O}_M(U) \to \mathcal{O}_M(U)$, $\mathcal{O}_M(U)$-linéaire$\}$*
  - $\mathcal{D}^k_{M/S}(U) := \left\{L : \mathcal{O}_M(U) \to \mathcal{O}_M(U)\right.$, $\mathcal{O}_S$-linéaire $\left.\mid [L, \mathcal{D}^0_{M/S}(U)] \subset \mathcal{D}^{k-1}_{M/S}(U)\right\}$
  - $\mathcal{D}_{M/S} := \varinjlim \mathcal{D}^k_{M/S}$.

  en remarquant que pour un ouvert convenable U de M, $\mathcal{D}^k_{M/S}(U)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_M(U) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]^{\leq k}$ en tant qu'espace vectoriel.
- *pr_1 et pr_2 désignent les projections sur la première et la deuxième composante de $M \times_S N$*
- *$Sym(pr_1^*\mathcal{D}_{M/S} \otimes_{\mathcal{O}_S} pr_2^*\mathcal{O}_N)$ a une structure de $\mathcal{D}_{M/S}$-algèbre différentielle où les opérateurs différentiels agissent sur le membre de gauche par composition à gauche. Elle est quotientée par l'idéal différentiel $\mathcal{K}$ qui est engendré par le noyau du morphisme $Sym(pr_1^*\mathcal{O}_M \otimes_{\mathcal{O}_S} pr_2^*\mathcal{O}_N) \to \mathcal{O}_{M\times_S N}$.*

Les coordonnées des jets partiels d'ordre k de M dans N sont :

$$\mathcal{O}_{J_k(M/S,N/S)} := Sym(pr_1^*\mathcal{D}^k_M \otimes_{\mathcal{O}_S} pr_2^*\mathcal{O}_N)/(\mathcal{K} \cap Sym(pr_1^*\mathcal{D}^k_M \otimes_{\mathbb{C}} pr_2^*\mathcal{O}_N))$$

Muni de ces faisceaux, l'espace des jets partiels d'ordre k deviennent des variétés irréductibles et nous retrouvons la structure locale :

Lemme 3.2.3. *Soient deux morphismes lisses $\rho : M \to S$ et $\sigma : N \to S$ entre trois variétés lisses S, M et N de dimension respective d, $m+d$ et $n+d$, U et V des voisinages ouverts de $p_1 \in M$ et $p_2 \in N$ qui soient des revêtements non ramifiés d'ouverts de $\mathbb{C}^{m+d}$ et $\mathbb{C}^{n+d}$. Alors :*

- *$\mathcal{O}_{J(M/S,N/S)}(U \times V) \simeq \mathcal{O}_M(U) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_N(V)[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq n,\ \alpha \in \mathbb{N}^m,\ 1 \leq |\alpha|]$ et cet isomorphisme est compatible avec l'action des opérateurs différentiels.*
- *La restriction de cet isomorphisme induit $\mathcal{O}_{J_k(M/S,N/S)}(U \times V) \simeq \mathcal{O}_M(U) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_N(V)[y_i^\alpha,\ 1 \leq i \leq m,\ \alpha \in \mathbb{N}^m,\ 1 \leq |\alpha| \leq k]$.*
- *Pour $k \geq l$ les applications $J_k(M/S, N/S) \to J_l(M/S, N/S)$ sont des morphismes surjectifs lisses.*

3.3 Le groupoïde

Nous donnons trois définitions d'un sous-groupoïde du groupoïde associé au fibré principal des repères partiels d'ordre k d'une variété M dont la base est la variété M elle-même.

(1) En modifiant légèrement les notations de la définition (1.1.13), $Iso(R_k(M/S))$ est l'ensemble des bijections Γ_k-équivariantes d'une fibre de $R_k(M/S) \to M$ dans une autre et restant dans une même fibre de $R_k(M/S) \to S$.

(2) Le produit fibré $R_k(M/S) \times_S R_k(M/S)$ quotienté par l'action diagonale de Γ_k.

(3) L'espace $J_k^*(M/S, M/S)$ des jets d'applications partielles inversibles d'ordre k de M dans M qui est doté des applications source, but, identité dans les fibres, composition partielle dans les fibres et inversion dans les fibres.

Remarquons que pour retrouver exactement le groupoïde associé au fibré des repères partiels il aurait fallu permettre aux éléments de $Iso(R_k(M/S))$ de changer de fibres.

Nous retrouvons l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & R_k(M/S) \times_S R_k(M/S) & \longrightarrow & Iso(R_k(M/S)) \\ & (j_k(r), j_k(s)) & \longmapsto & \phi_{j_k(r), j_k(s)} \end{array}$$

de la section (2.3) et précédemment décrite dans le lemme (1.1.14) qui à deux repères d'ordre k associent l'unique bijection Γ_k-équivariante qui envoie l'un sur l'autre. Nous retrouvons l'application de la section (2.3) :

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & R_k(M/S) \times_S R_k(M/S) & \longrightarrow & J_k^*(M/S, M/S) \\ & (j_k(r), j_k(s)) & \longmapsto & j_k(s \circ r^{-1}) \end{array}$$

Proposition 3.3.1. *Ces trois définitions de groupoïde associé au fibré principal des repères partiels d'ordre $k \in \mathbb{N}$ sont équivalentes : les passages au quotient des morphismes Φ et Ψ sous l'action diagonale du groupe Γ_k sont des isomorphismes de groupoïdes.*

Lemme 3.3.2. *Soient k un entier et $\rho : M \to S$ un morphisme lisse. Le groupoïde des jets partiels inversibles agit algébriquement sur l'espace des repères partiels par composition au but :*

$$\begin{array}{rccc} & J_k^*(M/S, M/S) \underset{sM}{\times} R_k(M/S) & \longrightarrow & R_k(M/S) \\ & (j_k(\phi), j_k(r)) & \longmapsto & j_k(\phi \circ r) \end{array}$$

3.4 Les prolongements

Dans cette section, nous allons relever canoniquement des morphismes et des champs de vecteurs qui préservent les fibres d'un morphisme à l'espace des repères partiels de la variété de départ puis à l'espaces des jets partiels de cette variété. Des distributions sur ces espaces sont associées à ces relevés. Nous verrons que les distributions sur les groupoïdes des jets partiels sont exactement les distributions induites sur ces groupoïdes par les distributions sur les repères partiels.

3.4.1 Relèvements de morphismes

Soit $\rho : M \to S$ un morphisme lisse entre les variétés M et S de dimensions respectives $m+d$ et d. Un morphisme lisse dominant $\phi : M \to M$ préservant les fibres de ρ se prolonge

en une application de l'espace des repères partiels de M vers lui-même par composition au but $R(\phi/S) : r \mapsto \phi \circ r$.

Une autre manière de définir le relèvement $R(\phi/S)$ est de prolonger l'action de ϕ^* sur l'anneau de coordonnées de M en une action $R(\phi/S)^*$ sur l'anneau des coordonnées de l'espace des repères de M en suivant la construction de ce dernier. A savoir, ϕ^* agit sur le facteur de droite de $Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M)$ en restant un morphisme et l'action passe au quotient par l'idéal différentiel $\mathcal{K}$. De même, le morphisme ϕ se relève en $R_k(\phi/S)$ aux repères partiels d'ordre $k \in \mathbb{N}$.

Lemme 3.4.1. *Soient $\rho : M \to S$, un morphisme lisse, k un entier et $\phi : M \to M$ un morphisme lisse préservant les fibres de ρ. Les deux manières de relever le morphisme en $R(\phi/S)$ et $R_k(\phi/S)$ aux repères et aux repères d'ordre k décrites ci-dessus coïncident. De plus ces relevés commutent aux dérivations totales, i.e. vérifient les égalités $R_{k+1}(\phi/S)^* \circ \partial_i - \partial_i \circ R_k(\phi/S)^* = 0$.*

Un tel morphisme se prolonge aussi en une application de l'espace des jets partiels de M vers lui-même de deux manières : par composition à la source ou par composition au but. Nous définissons de la même manière les prolongements à l'espace des jets d'ordre k de repères ou de germes d'application.

3.4.2 Relèvements de champs de vecteurs

Soit $\rho : M \to S$ un morphisme lisse. Décrivons les deux manières de relever un champ de vecteurs rationnel X tangent aux fibres de ρ à l'espace des repères partiels de M.

(1) Les flots du champ X définissent des biholomorphismes dans les fibres de ρ sur leurs ouverts de définition. Le flot au temps $\tau \in \mathbb{C}$ est noté $\exp(\tau X)$. Suivant le lemme (3.3.2), leur jet partiel et leur jet partiel d'ordre k agissent respectivement sur les repères et les repères partiels d'ordre k par composition au but. Les relevés $R(X/S)$ et $R_k(X/S)$ de X sont alors définis grâce à cette action. Pour $r \in R(M/S)$ tel que $r(0)$ soit dans le domaine de définition de X :

$$R(X/S)|_r := \frac{d}{d\tau} \exp(\tau X) \circ r \Big|_{\tau=0} \qquad \text{et} \qquad R_k(X/S)|_{j_k r} := \frac{d}{d\tau} j_k(\exp(\tau X) \circ r) \Big|_{\tau=0}$$

(2) La dérivation X agit sur $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M$ sur le facteur de droite. Puis elle agit sur l'algèbre $Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M)$ en imposant que de rester une dérivation. Enfin elle passe au quotient par l'idéal différentiel $\mathcal{K}$.

Lemme 3.4.2. *Soient k un entier, $\rho : M \to S$ un morphisme lisse et X un champ de vecteurs rationnel sur la variété M tangent aux fibres de ρ, i.e. $d\rho.X = 0$. Les deux manières de le relever en $R(X/S)$ et en $R_k(X/S)$ aux repères partiels et aux repères partiels d'ordre k décrites ci-dessus commutent aux dérivations totales, i.e. vérifient les égalités $R_{k+1}(X/S) \circ \partial_i - \partial_i \circ R_k(X/S) = 0$. De plus, ces égalités caractérisent les relevés des champs tangents aux fibres de ρ.*

Un champ de vecteurs X tangent aux fibres d'un morphisme $\rho : M \to S$ se relève à l'espace $J(M/S, M/S)$ par la source ou par le but. Nous ne décrivons que le relèvement par le but.

(1) Reprenons les flots $\exp(\tau X)$ du champ de vecteurs X. Ils agissent sur $J(M/S, M/S)$ par composition au but. Pour $\phi \in J(M/S, M/S)$ tel que son but $t(\phi)$ soit dans le

domaine de définition de X :

$$R^t(X/S)|_\phi := \frac{d}{d\tau} \exp(\tau X) \circ \phi \Big|_{\tau=0}$$

Le relevé à l'espace des jets d'ordre k, noté $R^t_k(X/S)$, est défini de la même manière.

(2) La dérivation X agit sur $\mathcal{D}_M \otimes \mathcal{O}_M$ sur le facteur de droite. Puis elle agit sur l'algèbre $Sym(\mathcal{D}_M \otimes \mathcal{O}_M)$ en imposant que X reste une dérivation. Enfin elle passe au quotient par l'idéal différentiel $\mathcal{K}$.

Lemme 3.4.3. *Soit X un champ de vecteurs rationnel sur une variété lisse M tangent aux fibres d'un morphisme $\rho : M \to S$. Les deux manières, décrites ci-dessus, de le relever à l'espace des jets partiels par le but sont équivalentes.*

Nous terminons cette section en faisant le lien entre le prolongement d'un champ de vecteurs au fibré principal des repères partiels et le prolongement du champ de vecteurs au groupoïde associé au fibré.

Lemme 3.4.4. *Si X est un champ de vecteurs rationnel sur une variété lisse M tangent aux fibres d'un morphisme $\rho : M \to S$, alors la distribution engendrée par $R_k(X/S)$ est une distribution rationnelle principale sur le fibré des repères partiels d'ordre $k \in \mathbb{N}$. La distribution engendrée par $R^t_k(X/S)$ sur le groupoïde des jets partiels d'ordre k est exactement la distribution induite par la distribution engendrée par $R_k X$, i.e. $R^t_k X = d\Psi.(0 + R_k X)$.*

3.5 Le pseudo-groupe de Malgrange partiel

Résumons la situation. En partant d'un champ de vecteurs rationnel X sur une variété lisse M, nous avons construit pour tout k, le fibré principal des repères partiels d'ordre k dont la base est la variété lisse M, un groupoïde des jets partiels inversibles d'ordre k qui est un sous-groupoïde du groupoïde associé au fibré des repères partiels d'ordre k. Puis nous avons déduit du champ de vecteurs une distribution rationnelle principale sur le fibré des repères partiels d'ordre k et une distribution induite par la première sur le groupoïde. Nous définissons maintenant le groupoïde de Galois partiel d'ordre k du champ de vecteurs X comme étant le groupoïde de Galois de la distribution engendrée par $R_k(X/S)$. Donnons explicitement les trois définitions de ce groupoïde de Galois partiel d'ordre k :

Définition 3.5.1. *Soit X un champ de vecteurs rationnel sur une variété lisse M tangent aux fibres d'un morphisme $\rho : M \to S$. Reprenons les notations ci-dessus. Les trois définitions suivantes du groupoïde de Galois partiel $Gal_k(X/S)$ d'ordre k sont équivalentes.*

- *Le groupoïde de Galois partiel $Gal_k(X/S)$ d'ordre k est la plus petite sous-variété de $J^*_k(M/S, M/S)$ telle qu'il existe un ouvert U^a de M tel que :*
  - *$R^t_k(X/S) \subset TGal_k(X/S)$*
  - *La restriction $Gal_k(X/S)|_{U^a \times U^a}$ du groupoïde de Galois partiel au-dessus de $U^a \times U^a$ est un sous-groupoïde de $J^*_k(U^a/S, U^a/S)$.*
- *Le groupoïde de Galois partiel $Gal_k(X/S)$ d'ordre k est la plus petite sous-variété de $J^*_k(M/S, M/S)$ telle que :*
  - *$R^t_k(X/S) \subset TGal_k(X/S)$*

– *$Gal_k(X/S)$ contient l'identité*

- *Soient $(H_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille génératrice de $\mathbb{C}(R_k(M/S))^{R_k(X/S)}$ et U un ouvert de $R_k(M/S)$ sur lequel les applications H_i sont bien définies. Le groupoïde de Galois partiel d'ordre k est la clôture de Zariski de l'ensemble $\{\phi \in J_k^*(U/S, U/S) \mid \forall i,\ H_i \circ \phi = H_i\}$.*

Remarquons que le groupoïde de Galois défini dans la section (1.5) adapté à notre contexte devrait être la plus petite sous-variété de $(R_k(M/S) \times R_k(M/S))/\Gamma_k$, et non de $J_k^*(M/S, M/S) \simeq (R_k(M/S) \times_S R_k(M/S))/\Gamma_k$, vérifiant chacune des trois définitions ci-dessus. Mais le groupoïde $J_k^*(M/S, M/S)$ est un sous-groupoïde de $(R_k(M/S) \times R_k(M/S))/\Gamma_k$ tangent à $R_k^t(X/S)$ (sans être forcément minimal pour ces propriétés) et nous avons $\mathbb{C}(S) \subset \mathbb{C}(R_k(M/S))^{R_k(X/S)}$. Cette plus petite variété devrait donc être incluse dans $J_k^*(M/S, M/S)$. Les deux définitions coïncident donc.

Lemme 3.5.2. *Soient X un champ de vecteurs rationnel sur une variété lisse M et $k \in \mathbb{N}$. La restriction de la projection $J_k^*(M/S, M/S) \to J_{k-1}^*(M/S, M/S)$ aux groupoïdes de Galois induit un morphisme dominant $Gal_k(X/S) \to Gal_{k-1}(X/S)$.*

Définition 3.5.3. *Le pseudo-groupe de Malgrange partiel $Mal(X/S)$ est la limite projective de la famille des groupoïdes de Galois partiels $(Gal_k(X/S))_k$ d'ordre k.*

La troisième définition du groupoïde de Galois dans (2.5.1) amène à noter le pseudo-groupe de Malgrange partiel d'un champs de vecteurs X sur une variété M de la façon suivante :

$$Mal(X/S) = \{\phi \in J^*(M/S, M/S) \mid \forall k \in \mathbb{N}, \forall H \in \mathbb{C}(R_k(M/S))^{R_k(X/S)}, H \circ j_k(\phi) = H\}$$

3.6 Le résultat de spécialisation

Voici le résultat de spécialisation qui donne le lien entre la taille du pseudo-groupe de Malgrange partiel d'un champ de vecteurs X tangent aux fibres d'un morphisme $\rho : M \to S$ et la taille du pseudo-groupe de Malgrange de la restriction X_q de ce champ de vecteurs à la fibre M_q en $q \in S$.

Théorème 3.6.1. *Soit $\rho : M \to S$ un morphisme lisse entre deux variétés irréductibles lisses dont les fibres sont connexes. Si X est un champ de vecteurs rationnel sur M tangent aux fibres du morphisme ρ, alors pour tout $q \in S$ où ça a un sens :*

- $\dim_S(Gal_k(X/S)) \geq \dim_{\mathbb{C}}(Gal_k(X_q))$
- $Gal_k(X_q) \subset Gal_k(X/S)|_{R_kM_q \times R_kM_q}$

De plus, pour un $q \in S$ général,

- $\dim_S(Gal_k(X/S)) = \dim_{\mathbb{C}}(Gal_k(X_q))$
- $Gal_k(X_q) = Gal_k(X/S)|_{R_kM_q \times R_kM_q}$

Démonstration. La preuve consiste à appliquer le théorème (1.6.3). Il nous suffit de décrire la situation. La variété irréductible $R_k(M/S)$ est un fibré principal de base M et de groupe structural Γ_k. La distribution sur ce fibré principal, engendrée par le champ de vecteur $R_k(X/S)$, est principale, rationnelle et tangente aux fibres du morphisme $R_k(M/S) \to S$. Ensuite, la fibre $R_k(M/S)_q$ de ce morphisme en $q \in S$ est exactement l'espace $R_k(M_q)$

des repères d'ordre k de la fibre M_q. Cet espace est irréductible puisque la fibre M_q l'est par hypothèse. Puis, la restriction $R_k(X/S)_q$ du relevé du champ de vecteurs X à la fibre $R_k(M_q)$ et le relevé $R_k(X_q)$ de la restriction du champ de vecteurs X_q sur la fibre $R_k(M_q)$ sont deux champs de vecteurs construits avec les mêmes flots : les flots de la restriction X_q sur M_q. Ils sont donc égaux et leurs distributions sont donc égales. Il nous reste alors à appliquer le théorème (1.6.3) à la distribution engendrée par $R_k(X/S)$.

□

Chapitre 4

Application à l'étude d'équations différentielles du second ordre

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux équations différentielles de la forme

$$u'' = F(x, u, u')$$

où $F \in \mathbb{C}(x, u, v)$. Le pseudo-groupe de Malgrange d'une telle équation est le pseudo-groupe de Malgrange du champ de vecteurs associé : $X_F = \dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial u} + F(x, u, v)\dfrac{\partial}{\partial v}$. Dans la première partie nous donnons les définitions, notamment celle de réductibilité d'une équation différentielle du second ordre et nous donnons les conséquences des théorèmes précédents sur le pseudo-groupe de Malgrange et sur l'irréductibilité de telles équations. Dans la deuxième partie nous appliquons les résultats aux équations de Painlevé. Dans la troisième partie nous utilisons la classification des pseudo-groupes de Cartan pour obtenir les pseudo-groupes de Malgrange des équations de Painlevé.

4.1 Définitions et conséquences des résultats précédents sur l'irréductibilité des équations du second ordre

4.1.1 Irréductibilité d'une équation

L'idée ici est de savoir si les solutions d'une équation différentielle peuvent s'exprimer à l'aide de solutions d'équations "élémentaires".

Définition 4.1.1. *(Réductibilité au sens de Nishioka-Umemura) Soit f un élément d'une extension différentielle du corps $(\mathbb{C}(x); \frac{d}{dx})$. Cet élément est une solution réductible de E s'il est dans une extension différentielle K_N de $(\mathbb{C}(x), \frac{d}{dx})$ telle qu'il existe une suite d'extensions $(\mathbb{C}(x), \frac{d}{dx}) \subset K_1 \subset \ldots \subset K_N$ vérifiant :*

ou *K_i est algébrique sur K_{i-1}*

ou *$K_i = K_{i-1}(g_{pq})$ où $(g_{pq})_{pq}$ est une matrice fondamentale de solutions d'un système différentiel linéaire à coefficients dans K_{i-1}.*

ou *$K_i = K_{i-1}(g)$ où g est une solution d'une équation différentielle d'ordre 1 sur K_i.*

Remarquons que l'extension faisant appel à un système différentiel linéaire n'est pas supposée de Picard-Vessiot, il pourra être ajouté des nouvelles constantes. Remarquons

aussi que dans l'extension du troisième type, nous nous autorisons à résoudre n'importe quelle équation différentielle ordinaire non-linéaire d'ordre 1.

Une équation peut avoir une solution réductible sans que nous n'ayons aucune information sur les autres solutions :

Exemple 4.1.2. *Pour $(P,Q) \in \mathbb{C}[x,y,y']^2$, l'équation $E : y'' = P(x,y,y')y + Q(x,y,y')y'$ admet 0 pour solution réductible.*

Il nous faut alors une hypothèse de généricité sur les solutions réductibles :

Définition 4.1.3. *Une solution f de E est appelée solution générale si*

$$degtrans_{\mathbb{C}(x)}(\mathbb{C}(x,u,u')) = 2$$

Si l'équation E possède une solution réductible générale, alors E est dite réductible. Sinon elle est dite irréductible.

Exemple 4.1.4. *L'équation $E : y'' = 0$ est réductible puisqu'elle admet $u = ax + b$ comme solution réductible générale où a et b sont des constantes transcendantes sur $\mathbb{C}$. En effet E est linéaire et $\mathbb{C}(x,u,u') = \mathbb{C}(x,a,b)$. Remarquons que cette extension n'est pas de Picard Vessiot.*

4.1.2 Polynôme de dimension différentielle

Nous voulons mesurer la "taille" du pseudo-groupe de Malgrange d'un champ de vecteurs. Sa dimension est en général infinie. Nous allons regarder la suite des dimensions donnée par la filtration par les jets d'ordre fini. Commençons par regarder un exemple.

Soit U un ouvert analytique de $\mathbb{C}^2$ muni d'un système de coordonnées (u,v). L'anneau de coordonnées des applications inversibles de U vers lui-même est $\mathbb{C}[u,v,f^\alpha,g^\alpha,1/\det,\alpha \in \mathbb{N}^2]$. Son corps des fractions L est muni des deux dérivations totales $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial v}$. Ceci fait de lui un corps différentiel. Notons $L^{\leq k}$ le sous-corps de L engendré par u,v et les dérivées au plus k-ième de f et g. Le degré de transcendance de $L^{\leq k}$ sur $\mathbb{C}$ est deux fois le cardinal de $\{\alpha \in \mathbb{N}^2 \mid |\alpha| \leq k\}$ plus deux. Ceci est égal à $2(1+2+\ldots+(k+1))+2$ qui vaut $2\frac{(k+2)(k+1)}{2}+2$. Ceci peut se réécrire $2\binom{k+2}{2}+2$.

Plus généralement, Kolchin a donné dans [22] un analogue du polynôme de Hilbert dans le cadre de l'algèbre différentielle. Nous le donnons ici :

Théorème 4.1.5. *Soient $(K, D_1, \ldots, D_m)$ un corps différentiel dans lequel les dérivations D_i commutent entre elles, des éléments $\eta_1, \ldots \eta_n$ d'une extension différentielle de $(K, D_1, \ldots, D_m)$, $L = K\langle \eta_1, \ldots \eta_n \rangle$ le corps différentiel engendré par ces éléments et pour $k \in \mathbb{N}$, $L^{\leq k}$ le sous corps de L engendré par K et les dérivés au plus k-ième de ces éléments. Il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[x]$ de degré d appelé polynôme de dimension différentielle tel que :*

- *il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $P(k) = degtrans_K(L^{\leq k})$*
- *$d \leq m$ et le polynôme P peut s'écrire sous la forme $P(k) = \sum_{0 \leq i \leq d} a_i \binom{k+i}{i}$ où $a_i \in \mathbb{Z}$*
- *le degré d et le coefficient a_d ne dépendent pas de la famille $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$*
- *le coefficient a_d est le degré de transcendance différentielle de L sur K, i.e. le nombre maximal d'éléments $f_1, \ldots, f_l \in K$ tels que la famille $(D_i^k f_j)_{i,j,k}$ soit algébriquement indépendante sur K.*

Corollaire 4.1.6. *Soit X un champ de vecteurs rationnel sur une variété lisse M. Le pseudo-groupe de Malgrange de X a un polynôme de dimension différentielle $P \in \mathbb{Q}[x]$ de degré d tel que :*

- *il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $P(k) = dim(Gal_k(X))$*
- *$d \leq \dim(M)$ et le polynôme P peut s'écrire sous la forme $P(k) = \sum_{0 \leq i \leq d} a_i \binom{k+i}{i}$ où $a_i \in \mathbb{Z}$*
- *le coefficient a_d est le degré de transcendance différentiel de $\mathbb{C}(Mal(X))$ sur $\mathbb{C}$*

Démonstration. Soient $\Psi : RM \times RM \to J^*(M,M)$ l'application quotient sous l'action diagonale du groupe Γ et pour tout $1 \leq i \leq \dim(M)$, $D_i = d\Psi.(\partial_i \otimes 1 + 1 \otimes \partial_i)$ où ∂_i est la dérivation totale sur RM. Ces dérivations sont nulles sur $\mathbb{C}$. En particulier $(\mathbb{C}, D_1, \ldots, D_m)$ est un corps différentiel. Soit $U \subset M$ un revêtement d'un ouvert de $\mathbb{C}^m$. L'anneau de coordonnées de $\mathcal{O}_{M\times M}(U \times U)$ est $\mathbb{C}[x_i, y_j, z, 1 \leq i, j \leq m]$ où z est algébrique sur $\mathbb{C}[x_i, y_j, 1 \leq i, j \leq m]$. L'anneau de coordonnées de $J^*(U,U)$ est $\mathbb{C}[x_i, y_j^\alpha, z, 1/\det, 1 \leq i, j \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^m]$. Son corps des fractions $\mathbb{C}(J^*(M,M))$ est donc une extension différentielle de $(\mathbb{C}, D_1, \ldots, D_m)$ qui est différentiellement engendré par un nombre fini d'éléments.

L'idéal premier $\mathcal{N}$ associé au pseudo-groupe de Malgrange du champ de vecteurs X est un idéal différentiel par la proposition (2.5.7). Les dérivations D_i passent au quotient $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}/\mathcal{N}$. Le corps des fractions de ce quotient $\mathbb{C}(Mal(X))$ est différentiellement engendré par la classe des éléments précédents modulo $\mathcal{N}$. Le théorème (4.1.5) nous donne alors l'existence d'un polynôme de dimension différentielle.

Il reste à montrer que ce polynôme vérifie les trois propriétés données dans ce corollaire. Les deux dernières propriétés sont déjà vérifiées. L'idéal $\mathcal{N} \cap \mathcal{O}_{J_k^*(M,M)}$ contient l'idéal associé au groupoïde de Galois d'ordre $k \in \mathbb{N}$. Ces deux idéaux sont stables par la dérivation $R_k^t X$ et inclus dans l'idéal associé à l'identité de $J_k^*(M,M)$. Or nous savons que l'idéal associé au groupoïde de Galois d'ordre k est maximal pour ces propriétés. Donc ces deux idéaux sont égaux et $degtrans_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(Mal(X)^{\leq k}) = \dim(Gal_k(X))$. Ceci montre que le polynôme P vérifie la première propriété de ce corollaire.

□

Définition 4.1.7. *Soit X un champ de vecteurs sur une variété lisse M. Le pseudo-groupe de Malgrange est à croissance linéaire, resp. quadratique si son polynôme de dimension différentielle est de degré* 1, *resp.* 2.

Voici la conséquence directe des résultats de spécialisation des chapitres précédents :

Théorème 4.1.8. *Soit $\rho : M \to S$ un morphisme lisse entre deux variétés irréductibles lisses dont les fibres sont connexes. Soit X un champ de vecteurs rationnel sur M tangent aux fibres du morphisme ρ. S'il existe $q_0 \in S$ tel que le pseudo-groupe de Malgrange de la restriction (X_{q_0}) à M_{q_0} soit à croissance de degré d alors pour $q \in S$ général le pseudo-groupe de Malgrange de (X_q) est au moins à croissance de degré d.*

Démonstration. Le théorème 3.6.1 nous dit que pour $q \in S$ général

$$\dim_{\mathbb{C}}(Gal_k(X_q)) = \dim_S(Gal_k(X/S)) \geq \dim_{\mathbb{C}}(Gal_k(X_{q_0}))$$

Ceci conclut la preuve du théorème. □

4.1.3 Conséquence sur le calcul du pseudo-groupe de Malgrange

Commençons par un lemme qui donne une limite sur la croissance du pseudo-groupe de Malgrange.

Lemme 4.1.9. *Le pseudo-groupe de Malgrange d'une équation différentielle d'ordre* 2 *est au plus à croissance quadratique.*

Démonstration. Soient $u'' = F(x,u,u')$, $F \in \mathbb{C}(x,u,v)$, une équation différentielle du second ordre et $X_F = \frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial u} + F(x,u,v)\frac{\partial}{\partial v}$ le champ de vecteurs associé.

La 1-forme dx est préservée par le champ X_F : $\mathcal{L}_{X_F}dx = dx$. En se rappelant les exemples (2.5.4) et (2.5.5), nous avons l'inclusion :

$$Mal(X_F) \subset \{\phi \in J^*(\mathbb{C}^3,\mathbb{C}^3) \mid \phi^*dx = dx,\ \phi^*X_F = X_F\}$$

Soient I un ouvert analytique I de $\mathbb{C}$ et U un ouvert analytique de $\mathbb{C}^2$. Soit $\phi \in J^*(I\times U, I\times U)$. Si l'application ϕ préserve la forme dx alors elle s'écrit $(x,u,v) \to (x+c, f(x,u,v), g(x,u,v))$. Après un changement de variables analytiques en diminuant éventuellement les ouverts I et U, le champ de vecteurs Y_F se redresse en $\frac{\partial}{\partial x}$. Si ϕ préserve en plus le champ Y_F alors elle s'écrit dans les nouvelles coordonnées $(x,u,v) \to (x+c, f(u,v), g(u,v))$. Autrement dit $Mal(X_F)|_{(I\times U),(I\times U)}$ est inclus dans l'ensemble

$$E := \{\phi \in J^*(I\times U, I\times U) \mid \phi(x,u,v) = (x+c, f(u,v), g(u,v)),\ c\in\mathbb{C}, (f,g)\in J^*(U,U)^2\}$$

En se rappelant l'exemple donné dans le début de la section (4.1.2), l'ensemble des jets d'ordre $k \in \mathbb{N}$ de E est une variété analytique de dimension $2\binom{k+2}{2} + 2 + 2$.

Or, la pro-variété $Mal(X_F)|_{(I\times U),(I\times U)}$ est la limite projective des variétés analytiques $Gal_k(X_F)|_{(I\times U),(I\times U)}$ qui ont la même dimension que $Gal_k(X_F)$. L'inclusion précédente nous dit que $\dim(Gal_k(X_F)) \leq 2\binom{k+2}{2} + 4$, ce qui achève la preuve. □

Soit U un ouvert analytique de $\mathbb{C}^2$. E.Cartan a donné dans ([7]) une classification analytique des sous-pseudo-groupes de $J^*(U,U)$ définis par des invariants différentiels et qui vérifient l'hypothèse d'involutivité. Cette hypothèse est équivalente à l'hypothèse d'involutivité présente dans l'article [24] de B.Malgrange. Les théorèmes (4.2.2) et (4.3.1) de cet article appliqués à notre situation nous disent qu'il existe un ouvert $O \subset \mathbb{C}^3$ au-dessus duquel le pseudo-groupe de Malgrange vérifie cette hypothèse.

Théorème 4.1.10. *Soient (E) une équation différentielle du second ordre et X le champ de vecteurs associé. Soient O l'ouvert de $\mathbb{C}^3$ donné ci-dessus et $Vol(E)$ la clôture dans $J^*(\mathbb{C}^3,\mathbb{C}^3)$ de la variété réduite engendrée par*

$$\{\phi \in J^*(O,O) \mid \phi^*dx = dx,\ \phi^*X = X,\ \phi^*dvol = dvol\}$$

où dvol est une 3-forme. Si le champ X préserve une 3-forme et si le pseudo-groupe de Malgrange de (E) est à croissance quadratique, alors $Mal(E) = Vol(E)$.

Démonstration. La classification d'E. Cartan au-dessus d'un ouvert analytique de $\mathbb{C}^2$ aboutit à 64 sous-pseudo-groupes dont un récapitulatif est donné à la page 193. Parmi ces sous-pseudo-groupes, 31 sont de dimension fini, 26 dépendent d'une ou plusieurs fonction d'une seule variable et 7 dépendent d'une ou plusieurs fonctions de deux variables. Les 26 sous-pseudo-groupes sont à croissance linéaire. Les 7 sous-pseudo-groupes dénommés $g, g_1, g_2, g_3, g_{01}, g_{22}, g_{29}$ sont à croissance quadratique. Le sous-pseudo-groupe g est en fait

le pseudo-groupe $J^*(U,U)$. Le sous-pseudo-groupe g_1 est celui formé des applications dont le jacobien vaut 1 et aucun des 5 autres sous-pseudo-groupes n'est inclus dans g_1.

Reprenons l'intervalle I de $\mathbb{C}$ et l'ouvert analytique U de $\mathbb{C}^2$ de la preuve du lemme (4.1.9) tels que $I \times U$ est inclus dans l'ouvert O donné précédemment et dans lesquelles les éléments $\phi \in Mal(E)|_{(I\times U),(I\times U)}$ s'écrivent dans les bonnes coordonnées analytiques $\phi(x,u,v) = (x+c, f(u,v), g(u,v))$ où $c \in \mathbb{C}, (f,g) \in J^*(U,U)^2$. Quitte a faire un changement analytique dans les deux dernières coordonnées, puisque le champs X préserve une 3-forme, nous pouvons supposer que ϕ préserve la 3-forme $dx \wedge du \wedge dv$. Donc le jacobien de $(u,v) \to (f(u,v), g(u,v))$ est égale à 1. De la forme de ces éléments, nous déduisons pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\dim(Gal_k(E)) = \dim(Gal_k(E)|_{(I\times U)\times(I\times U)}) = \dim(Gal_k(E)|_{(\{x_0\}\times U)\times(\{x_0+c\}\times U)}) + 2$$

pour $x_0 \in I$ et $c \in \mathbb{C}$ tel que $x_0 + c \in I$. Or, par hypothèse, le pseudo-groupe de Malgrange de (E) est à croissance quadratique. C'est donc aussi le cas de la pro-variété analytique $Mal(E)|_{(x_0\times U)\times((x_0+c)\times U)}$.

Notons T_c la translation $(x,u,v) \to (x+c,u,v)$ pour $c \in \mathbb{C}$. La variété analytique $T_{-c} \circ Mal(E)|_{(x_0\times U)\times((x_0+c)\times U)}$ est un pseudo-groupe à croissance quadratique et dont le jacobien de ses éléments vaut 1. Par la classification d'E. Cartan, dans de bonnes coordonnées analytiques, $T_{-c} \circ Mal(E)|_{(x_0\times U)\times(x_0+c\times U)} = g_1 = T_{-c} \circ Vol|_{(x_0\times U)\times((x_0+c)\times U)}$. Il vient $Vol|_{I\times U} = \underset{x_0,c}{\cup} Vol|_{(x_0\times U)\times((x_0+c)\times U)} = \underset{x_0,c}{\cup} Mal(E)|_{(x_0\times U)\times((x_0+c)\times U)} = Mal(E)|_{I\times U}$. En particulier, les projections de $Mal(E)$ et de Vol sur l'espace des jets d'ordre $k \in \mathbb{N}$ ont même dimension. Or, Vol et ses projections sont irréductibles. L'inclusion $Mal(E) \subset Vol$ est donc une égalité car les projections sur les jets d'ordre $k \in \mathbb{N}$ des deux membres de l'inclusion sont égales.

□

Des théorème 4.1.8 et 4.1.10 il découle :

Corollaire 4.1.11. *Soient S une variété, $(E_q) : y'' = F(x,y,y',q)$ une équation différentielle à paramètre dans S. Si le champ de vecteurs associé préserve une 3-forme et s'il existe $q_0 \in S$ tel que le pseudo-groupe de Malgrange de (E_{q_0}) soit à croissance quadratique alors pour $q \in S$ général, le pseudo-groupe de Malgrange de l'équation E_q est $Vol(E_q)$.*

4.1.4 Conséquence sur l'irréductibilité d'une équation différentielle

Le lien entre réductibilité d'une équation et croissance du pseudo-groupe de Malgrange du champ de vecteurs associé est donné par G.Casale dans [10].

Proposition 4.1.12. *Soient (E) une équation différentielle du second ordre et X le champ de vecteurs associé. Si le pseudo-groupe de Malgrange de (E) est $Vol(E)$ alors (E) est irréductible.*

Du corollaire 4.1.11 et de la proposition 4.1.12 il découle :

Corollaire 4.1.13. *Soient S une variété, $(E_q) : y'' = F(x,y,y',q)$ une équation différentielle à paramètre dans S. Si le champ de vecteurs associé préserve une 3-forme et s'il existe $q_0 \in S$ tel que le pseudo-groupe de Malgrange de (E_{q_0}) soit à croissance quadratique alors pour $q \in S$ général, l'équation (E_q) est irréductible.*

Remarque. *Dans le corollaire (4.1.13), l'hypothèse de croissance sur le pseudo-groupe de Malgrange de (E_{q_0}) ne peut pas être remplacée par l'hypothèse d'irréductibilité de (E_{q_0}). En effet, l'équation $P_{\mathrm{VI}}(0,0,0,1/2)$ est irréductible mais son pseudo-groupe de Malgrange est de dimension finie.*

4.2 Applications aux équations de Painlevé

L'irréductibilité des équations de Painlevé pour des valeurs génériques des paramètres est connue (voir [26], [28], [39], [42], [43]). Les théorèmes précédents vont nous permettre de retrouver cette irréductibilité pour des valeurs générales des paramètres. Le résultat que nous retrouvons est un peu plus faible que le résultat connu mais la preuve n'est pas spécialisées aux équations de Painlevé. Voici la liste de ces équations qui peut être trouvée dans [29] :

$$u'' = 6u^2 + x \qquad (P_{\mathrm{I}})$$

$$u'' = 2u^3 + xu + \alpha \qquad (P_{\mathrm{II}}(\alpha))$$

$$u'' = \frac{u'^2}{u} - \frac{u'}{x} + \frac{\alpha u^2 + \beta}{x} + \gamma u^3 + \frac{\delta}{u} \qquad (P_{\mathrm{III}}(\alpha,\beta,\gamma,\delta))$$

$$u'' = \frac{u'^2}{2u} + \frac{3}{2}u^3 + 4xu^2 + 2(t^2-\alpha)u + \frac{\beta}{u} \qquad (P_{\mathrm{IV}}(\alpha,\beta))$$

$$u'' = \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{u-1}\right)u'^2 - \frac{u'}{x} + \frac{(u-1)^2}{x^2}\left(\alpha u + \frac{\beta}{u}\right) + \gamma\frac{u}{x} + \delta\frac{u(u+1)}{u-1} \qquad (P_{\mathrm{V}}(\alpha,\beta,\gamma,\delta))$$

$$u'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-x}\right)u'^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{u-x}\right)u' + \frac{u(u-1)(u-x)}{x^2(x-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{x}{u^2} + \gamma\frac{x-1}{(u-1)^2} + \delta\frac{x(x-1)}{(u-x)^2}\right) \qquad (P_{\mathrm{VI}}(\alpha,\beta,\gamma,\delta))$$

G. Casale puis G. Casale et J. A. Weil ont calculé le pseudo-groupe de Malgrange de l'équation P_{I} et de $P_{\mathrm{II}}(0)$:

Théorème 4.2.1.

- *Le pseudo-groupe de Malgrange de la première équation de Painlevé P_{I} est $Vol(P_{\mathrm{I}})$.*
- *Le pseudo-groupe de Malgrange de $P_{\mathrm{II}}(0)$ est $Vol(P_{\mathrm{II}}(0))$.*

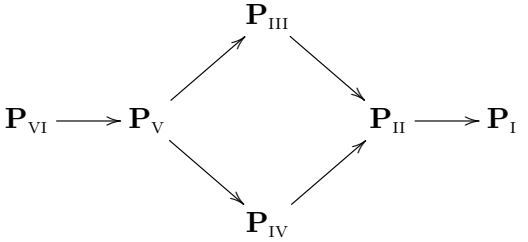
De ce théorème et du corollaire (4.1.11) il vient :

Corollaire 4.2.2. *Pour des valeurs générales du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, le pseudo-groupe de Malgrange de $P_{\mathrm{II}}(\alpha)$ est $Vol(P_{\mathrm{II}}(\alpha))$.*

Du même théorème et du corollaire 4.1.13 nous en déduisons :

Corollaire 4.2.3. *Pour des valeurs générales du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, l'équation $P_{\mathrm{II}}(\alpha)$ est irréductible.*

Pendant l'étude des équations de Painlevé, il a été découvert qu'elles dégénéraient les unes sur les autres en suivant le diagramme suivant :



Nous allons utiliser ces dégénérescences pour obtenir les mêmes résultats sur les pseudo-groupes de Malgrange et sur l'irréductibilité des autres équations de Painlevé.

Théorème 4.2.4. *Pour $J = \text{I}, \text{II}, \text{III}, \text{IV}, \text{V}, \text{VI}$ et pour des paramètres généraux, le pseudo-groupe de Malgrange de P_J est à croissance quadratique.*

Démonstration. Pour $J = \text{I}, \text{II}$, c'est le corollaire (4.2.2). Nous détaillons la preuve pour l'équation P_{III}. Pour les autres équations, la méthode reste la même. Les changements de variables qui permettent de faire dégénérer les équations de Painlevé les unes sur les autres sont donnés dans [29]. Le changement de variables qui permet de faire dégénérer P_{III} sur P_{II} est :

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4 \\ & (t, f, g, \epsilon, a) & \longmapsto & \left(1 + \epsilon^2 t, 1 + 2\epsilon f, \dfrac{2g}{\epsilon}, \tilde{\phi}(\epsilon, a)\right) \end{array}$$

où

$$\tilde{\phi}(\epsilon, a) = \left(-\frac{1}{2\epsilon^6}, \frac{2a}{\epsilon^3} + \frac{1}{2\epsilon^6}, \frac{1}{4\epsilon^6}, -\frac{1}{4\epsilon^6}\right)$$

Notons X_{II} le champ de vecteurs rationnel sur $\mathbb{C}^3 \times \{0\} \times \mathbb{C}$ associé à P_{II} et X_{III} le champ de vecteurs rationnel sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4$ associé à P_{III}. Autrement dit

$$X_{\text{II}} = \frac{\partial}{\partial t} + g\frac{\partial}{\partial f} + F_{\text{II}}(t, f, g, a)\frac{\partial}{\partial g} \quad \text{et} \quad X_{\text{III}} = \frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial u} + F_{\text{III}}(x, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta)\frac{\partial}{\partial v}$$

où

- $F_{\text{II}}(t, f, g, a) = 2f^3 + tf + a$
- $F_{\text{III}}(x, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \dfrac{v^2}{u} - \dfrac{v}{x} + \dfrac{\alpha u^2 + \beta}{x} + \gamma u^3 + \dfrac{\delta}{u}$

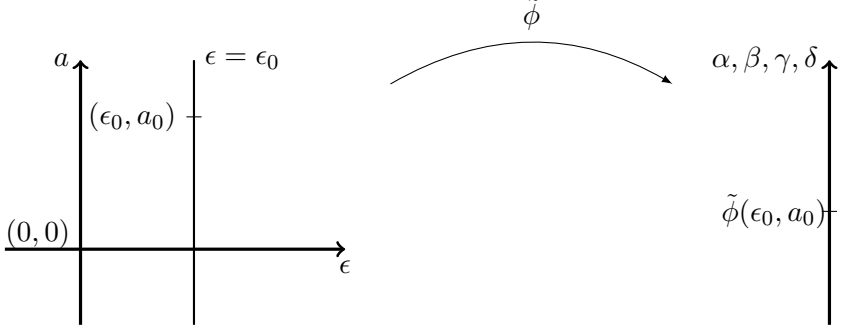
Le feuilletage donné par les trajectoires de X_{III} est décrit par le système de formes

$$d\alpha,\ d\beta,\ d\gamma,\ d\delta,\ du - vdx,\ dv - F_{\text{III}}dx$$

Le tiré en arrière par ϕ sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ est décrit par le système de formes

$$d\epsilon,\ da,\ df - gdt,\ dg - \frac{\epsilon^3}{2}F_{\text{III}} \circ \phi dt$$

i.e. c'est le feuilletage donné par le champ $Y_{\text{III}} := \epsilon^2 \phi^* X_{\text{III}}$ qui correspond à l'équation du second ordre : $f'' = \frac{\epsilon^3}{2}F_{\text{III}}(\phi(t, f, g, \epsilon, a))$. La dégénérescence de P_{III} sur P_{II} s'exprime de la manière suivante : $\frac{\epsilon^3}{2}F_{\text{III}} \circ \phi|_{\epsilon=0} = F_{\text{II}}$, autrement dit $Y_{\text{III}}|_{\epsilon=0} = X_{\text{II}}$. La situation de dégénérescence étant décrite nous pouvons appeler les théorèmes rencontrés dans la section précédente. Nous raisonnons à l'aide du dessin suivant :



Par le théorème (4.2.1) le pseudo-groupe de Malgrange du champ $Y_{\text{III}}|_{(0,0)}$ est à croissance quadratique. Le théorème (4.1.8) nous dit que le pseudo-groupe de Malgrange du champ $Y_{\text{III}}|_(\epsilon, a)$ pour (ϵ, a) général dans l'espace des paramètres $\mathbb{C}^2$ est à croissance quadratique. Choisissons $(\epsilon_0, a_0) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ l'un de ces paramètres pour lequel la première coordonnée ϵ_0 est non nulle. La restriction $\phi|_{(\epsilon_0,a_0)}$ conjugue $Y_{\text{III}}|_{(\epsilon_0,a_0)}$ à $\epsilon_0^2 X_{\text{III}}|_{\tilde{\phi}(\epsilon_0,a_0)}$. Donc le pseudo-groupe de Malgrange du champ $Y_{\text{III}}|_{(\epsilon_0,a_0)}$ est isomorphe au pseudo-groupe de Malgrange du champ $X_{\text{III}}|_{\tilde{\phi}(\epsilon_0,a_0)}$. Le théorème (4.1.8) nous dit que le pseudo-groupe de Malgrange du champ $X_{\text{III}}|_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$ pour $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ général dans l'espace des paramètres $\mathbb{C}^4$ est à croissance quadratique. Pour ces paramètres généraux, le pseudo-groupe de Malgrange de l'équation P_{III} est à croissance quadratique.

Le changement de variables qui permet de faire dégénérer P_{IV} sur P_{II} est

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2 \\ & (t, f, g, \epsilon, a) & \longmapsto & \left(\dfrac{\epsilon t}{2^{2/3}} - \dfrac{1}{\epsilon^3}, \dfrac{2^{2/3} f}{\epsilon} + \dfrac{1}{\epsilon^3}, \dfrac{2^{4/3} g}{\epsilon^2}, \tilde{\phi}(\epsilon, a) \right) \end{array}$$

où

$$\tilde{\phi}(\epsilon, a) = \left(-2a - \frac{1}{2\epsilon^6}, -\frac{1}{2\epsilon^{12}} \right)$$

Soient X_{IV} le champs de vecteurs sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2$ associé à P_{IV} et $Y_{\text{IV}} := \dfrac{\epsilon}{2^{2/3}} \phi^* X_{\text{IV}}$ champ de vecteurs sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. La dégénérescence de P_{IV} sur P_{II} s'exprime de la manière suivante : $Y_{\text{IV}}|_{\epsilon=0} = X_{\text{II}}$ où X_{II} est le champ de vecteurs donné précédemment. Le pseudo-groupe de Malgrange de $Y_{\text{IV}}|_{(0,0)}$ est à croissance quadratique. En reprenant le même raisonnement il s'ensuit que pour des paramètres généraux, le pseudo-groupe de Malgrange de l'équation P_{IV} est à croissance quadratique.

Le changement de variables qui permet de faire dégénérer P_{V} sur P_{IV} est

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \times \times \mathbb{C}^4 \\ & (t, f, g, \epsilon, a, b) & \longmapsto & \left(1 + \epsilon\sqrt{2} t, \dfrac{\epsilon f}{\sqrt{2}}, \dfrac{g}{2}, \tilde{\phi}(\epsilon, a, b) \right) \end{array}$$

où

$$\tilde{\phi}(\epsilon, a, b) = \left(\frac{1}{2\epsilon^4}, \frac{b}{4}, -\frac{1}{\epsilon^4}, \frac{a}{\epsilon^2} - \frac{1}{2\epsilon^4} \right)$$

Soient X_{V} le champs de vecteurs sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4$ associé à P_{V} et $Y_{\text{V}} := \epsilon\sqrt{2}\phi^* X_{\text{V}}$ champ de vecteurs sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$. La dégénérescence de P_{V} sur P_{IV} s'exprime de la manière suivante : $Y_{\text{V}}|_{\epsilon=0} = X_{\text{IV}}$ où le champ X_{IV} est cette fois-ci défini sur $\mathbb{C}^3 \times \{0\} \times \mathbb{C}^2$. Nous savons maintenant que pour des paramètres généraux $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, le pseudo-groupe de Malgrange de $Y_{\text{V}}|_{(0,a,b)}$ est à croissance quadratique. Choisissons en un. En reprenant le même raisonnement avec ce paramètre il s'ensuit que pour des paramètres généraux, le pseudo-groupe de Malgrange de l'équation P_{V} est à croissance quadratique.

Enfin, le changement de variables qui permet de faire dégénérer P_{VI} sur P_{V} est

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^4 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4 \\ & (t, f, g, \epsilon, a, b, c, d) & \longmapsto & \left(1 + \epsilon t, f, \dfrac{g}{\epsilon}, \tilde{\phi}(a, b, c, d) \right) \end{array}$$

où

$$\tilde{\phi}(\epsilon, a, b, c, d) = \left(a, b, -\frac{d}{\epsilon^2} + \frac{c}{\epsilon}, \frac{d}{\epsilon^2}\right)$$

Soient X_{VI} le champs de vecteurs sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4$ associé à P_{VI} et $Y_{\mathrm{VI}} := \epsilon\phi^* X_{\mathrm{VI}}$ champ de vecteurs sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^4$. La dégénérescence de P_{VI} sur P_{V} s'exprime de la manière suivante : $Y_{\mathrm{VI}}|_{\epsilon=0} = X_{\mathrm{V}}$ où cette fois-ci le champ X_{V} est défini sur $\mathbb{C}^3 \times \{0\} \times \mathbb{C}^4$. Nous savons maintenant que pour des paramètres généraux $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, le pseudo-groupe de Malgrange de $Y_{\mathrm{V}}|_{(0,a,b,c,d)}$ est à croissance quadratique. Choisissons en un. En reprenant le même raisonnement il s'ensuit que pour des paramètres généraux, le pseudo-groupe de Malgrange de l'équation P_{VI} est à croissance quadratique. □

4.3 Calcul des pseudo-groupes de Malgrange des équations de Painlevé

Le pseudo-groupe de Malgrange d'une équation différentielle est inclus dans l'ensemble des applications formelles qui préserve la forme dx et le champ de vecteurs associé à l'équation. Dans le cas des équations de Painlevé, nous allons voir que ces applications formelles préservent aussi une 3-forme.

Les champs de vecteurs de la première et de la deuxième équation de Painlevé est de divergence nulle, donc pour $J = \mathrm{I}, \mathrm{II}$:

$$Mal(P_J) \subset \{\phi \in J^*(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3) \mid \phi^* dx = dx,\ \phi^* X_J = X_J,\ \phi^* dvol = dvol\}$$

où $dvol$ est la 3-forme $dx \wedge du \wedge dv$. Les applications formelles contenues dans les pseudo-groupes de Malgrange des autres équations de Painlevé préservent aussi une 3-forme. Cependant telles que ces équations sont écrites ici, les formes volumes préservées ne s'expriment pas aussi facilement. Nous allons donc nous placer dans des coordonnées hamiltoniennes que nous pouvons trouver dans [30]. Soient $J \in \{\mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{VI}\}$ et $F_J \in \mathbb{C}(x, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ tel que $P_J : u'' = F_J(x, u, u', \alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Il existe $H_J \in \mathbb{C}(x, u, w, a, b, c, d)$ tel qu'après avoir fixé les paramètres, le système associé à l'équation P_J

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= v \\ \frac{dv}{dx} &= F_J \end{aligned}$$

soit équivalent au système hamiltonien

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{\partial H_J}{\partial w} \\ \frac{dw}{dx} &= -\frac{\partial H_J}{\partial u} \end{aligned}$$

Autrement dit, l'isomorphisme de $\mathbb{C}^3$ donné par $\phi : (x, u, w) \mapsto (x, u, \frac{\partial H_J}{\partial w})$ envoie le champ de vecteurs $Y_J := \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial H_J}{\partial w}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial H_J}{\partial u}\frac{\partial}{\partial w}$ sur le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial u} + F_J\frac{\partial}{\partial v}$.

Donnons la liste de ces applications :

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{III}} &= \frac{1}{x}\left[2u^2v^2 - (2axu^2 + (2b+1)u - 2cx)v + a(b+d)xu\right] \\
H_{\mathrm{IV}} &= 2uv^2 - (u^2 + 2xu + 2a)v + bu \\
H_{\mathrm{V}} &= \frac{1}{x}\left[u(u-1)^2v^2 - \left(a(u-1)^2 + bu(u-1) - cxu\right)v + \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - d^2\right)(u-1)\right] \\
H_{\mathrm{VI}} &= \frac{1}{x(x-1)}\left[u(u-1)(u-x)v^2 - (a(u-1)(u-x) + bu(u-x) + (c-1)u(u-1))\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4}\left((a+b+c-1)^2 - d^2\right)(u-x)\right]
\end{aligned}
$$

La divergence de Y_J est nulle. Nous avons dans ces coordonnées hamiltoniennes :

$$Mal(P_J) \subset \{\phi \in J^*(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3) \mid \phi^* dx = dx,\ \phi^* Y_J = Y_J,\ \phi^* dvol = dvol\}$$

où $dvol = dx \wedge du \wedge dw$. Voici la conséquence immédiate de ce théorème et des corollaires 4.1.11 et (4.1.13) :

Corollaire 4.3.1. *Pour $J = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{VI}$ et pour des paramètres généraux l'équation, nous avons l'égalité $Mal(P_J) = Vol(P_J)$ et P_J est irréductible.*

Chapitre 5

Malgrange pseudogroup and confluence of q-difference equations

In this chapter we adapt the previous definitions and results to the q-difference case. The study of fibered dynamical systems $\Phi : M \dashrightarrow M$ leads us to define the associated fibered objects : fibered frames bundle, fibered automorphism pseudogroup. In this context, we define the transversal Malgrange pseudogroup for differential equations. The theorem (6.4.1) of E. Amerik and F. Campana, the analogous theorem (6.3.2) of P. Bonnet in the q-difference case, leads us to define the transversal Malgrange pseudogroup for q-difference equation in two equivalent ways :

- it is the pseudogroup associated to the fiber product $M \times_N M$ where $\mathbb{C}(N)$ is the field of differential invariant of Φ
- it is the Zariski closure of the set of Taylor expansions of iterates of Φ.

An adapted proof of an other theorem of P. Bonnet (6.1.4) leads us to obtain the specialisation theorem for q-difference equation. When the q-difference equation degenerates on a differential equation, the Malgrange pseudogroups of both equations are related : the first one is greater than the second one. We conclude this chapter with an application to the discret Painlevé equations : thanks to the Cartan classification of pseudogroups, we determine their transversal Malgrange pseudogroups.

5.1 Fibered dynamical systems and transversal Malgrange pseudogroup

When a dynamical system $\Phi : M \dashrightarrow M$ comes from a difference equation, it preserves the foliation by fibers of the map $\tau : M \to B$ given by the independant coordinates. Moreover in the case with parameters, Φ preserves the fibers of the map given by the parameters. Let M be the phase space, B the space of the independant variable and

parameters and S the parameters space. We have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & M \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ B & \xrightarrow{\sigma} & B \\ \downarrow & \swarrow & \\ S & & \end{array}$$

where σ is the map corresponding to the operator involved in the difference equation.

5.1.1 The fibered frames bundle

We remind the definitions of the fibered frames bundle. Let m be the dimension of fibers of M over B. The spaces of frames on fibers of $M \to B$ is

$$R(M/B) = \{r : (\mathbb{C}^m, 0) \to M_b \mid b \in B \text{ and } \det(Jr) \neq 0\}$$

Its coordinates ring of $R(M/B)$ is $(Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathbb{C}[M])/\mathcal{K})\,[1/jac]$ where

- the tensor product is a tensor product of $\mathbb{C}$-vector spaces;
- $Sym(V)$ is the $\mathbb{C}$-algebra generated by the vector space V;
- $Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathbb{C}[M])$ has a structure of $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$-differential algebra *via* the left composition of differential operators;
- the Leibniz ideal $\mathcal{K}$ is the $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$-ideal generated by $fg \otimes 1 - (f \otimes 1)(g \otimes 1)$ for all $(f, g) \in \mathbb{C}[M]^2$ and $\partial_i \otimes h$ for $h \in \mathbb{C}[B]$ and $1 \leq i \leq m$;
- the quotient is then localized by jac the sheaf of ideals (not differential!) generated by $\det([\partial_j \otimes x_i]_{i,j})$ for a transcendental basis $(x_1, \ldots, x_m)$ of $\mathbb{C}(M)$ over $\mathbb{C}(B)$ on Zariski open subset of M where such a basis is defined.

Local coordinates $(b_1, \ldots b_d, x_1, \ldots, x_m)$ on M such that the projection on B is the projection on b's coordinates, induce local coordinates on $R(M/B)$ *via* Taylor expansion of maps r at 0 :

$$r(\epsilon_1 \ldots, \epsilon_m) = \left(b_1^0, \ldots b_d^0, \sum_{\alpha \in \mathbb{C}^m} r_1^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, \ldots, \sum_{\alpha \in \mathbb{C}^m} r_m^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!} \right).$$

Let us denote by $x_i^\alpha : R(M/B) \to \mathbb{C}$ the function defined by $x_i^\alpha(r) = r_i^\alpha$. This function is the element $\partial^\alpha \otimes x_i$ in $\mathbb{C}[R(M/B)]$.

1. The action of $\partial_j : \mathbb{C}[R(M/B)] \to \mathbb{C}[R(M/B)]$ can be written in local coordinates and gives the total derivative operator $\partial_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ \alpha \in \mathbb{C}^m}} x_i^{\alpha + 1_j} \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}$ where $1_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.
2. The vector space $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_q]$ is filtered by $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_q]^{\leq k}$ the spaces of operators of order less or equal than k. This gives a filtration of $\mathbb{C}[R(M/B)]$ by $\mathbb{C}$-algebras of finite type.
3. These algebras are coordinate ring of the space of k-jet of frames $R_k(M/B) = \{j_k r \mid r \in R(M/B)\}$.
4. The action of $\partial_1, \ldots, \partial_m$ have degree $+1$ with respect to the filtration.

5.1.2 Prolongation of dominant morphism and vector fields

Morphisms (resp. derivations) from $\mathbb{C}[M]$ to $\mathbb{C}[M]$ with a non zero Jacobian determinant and preserving $\mathbb{C}[B]$ act on $\mathbb{C}[R(M/B)]$ as morphisms (resp. derivations).

If the map Φ is regular and induces $\Phi^* : \mathbb{C}[M] \to \mathbb{C}[M]$. Its action of the frame bundle is defined by $Sym(1 \otimes \Phi)$ on $Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathbb{C}[M])$, it can be easily checked that the Leibniz ideal is preserved. The induced map $\mathbb{C}[R(M/B)] \to \mathbb{C}[R(M/B)]$ correspond to a endomorphism of $R(M/B)$ denoted by $R\Phi$ and is called the prolongation of the morphism. The prolongation of a derivation X of $\mathbb{C}[M]$ preserving $\mathbb{C}[B]$ is a derivation of $\mathbb{C}[R(M/B)]$ defined in the same way : $1 \otimes X$ is a linear endomorphism of $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathbb{C}[M]$ and $Sym(1 \otimes X)$ is the dérivation of $Sym(\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_m] \otimes \mathbb{C}[M])$ induced by $1 \otimes X$. It preserves $\mathcal{K}$ and define a vector field RX on $R(M/B)$.

If the map Φ is rational and dominant with domain of definition M°, its prolongation on $R(M^\circ/B)$ is a rational dominant map on $R(M/B)$. Rational vector fields on M can be prolonged on $R(M/B)$ in a similar way.

Prolongations of morphisms and derivations of $\mathbb{C}[M]$ preserving $\mathbb{C}[B]$ on $\mathbb{C}[R(M/B)]$ have degree 0 with respect to the filtration defined above. Prolongations commute with the differential structure. When X is a rational vector field on M preserving $M \to B$, its prolongation RX on $R(M/B)$ can be computed with a explicit formula :

Let $X = \sum c_i(b) \frac{\partial}{\partial b_i} + \sum a_i(x,b) \frac{\partial}{\partial x_i}$ be a vector field preserving $M \to B$ in local coordinates. One gets $RX = \sum c_i(b) \frac{\partial}{\partial b_i} + \sum_{i,\alpha} \partial^\alpha(a_i) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}$.

5.1.3 The space $R(M/B)$ is a principal bundle over M.

Let us describe this structure here. The pro-algebraic group

$$\Gamma = \{\gamma : \widehat{(\mathbb{C}^q, 0)} \xrightarrow{\sim} \widehat{(\mathbb{C}^q, 0)};\ \text{formal invertible}\}$$

is the projective limit of groups $\Gamma_k = \{j_k\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. It acts on $R(M/B)$ by composition and $R(M/B) \times \Gamma \to R(M/B) \underset{M}{\times} R(M/B)$ sending (r, γ) to $(r, r \circ \gamma)$ is an isomorphism. The action of $\gamma \in \Gamma$ on $R(M/B)$ is denoted by $S\gamma : R(M/B) \to R(M/B)$ as it acts as a change of source coordinate of frames. At the coordinate ring level, this action is given by the action of formal change of coordinate on $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_q]$ followed by the evaluation at 0 in order to get operator with constant coefficients. This action has degree 0 with respect to the filtration induced by the order of differential operators meaning that for any k, the bundle of order k frames R_kM is a principal bundle over M for the group $\Gamma_k = \{j_k\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$.

5.1.4 Compatibility of the differential and principal structures

Let $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ be coordinates on $(\mathbb{C}^m, 0)$ such that $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \epsilon_i}$. The Lie algebra of Γ is the Lie algebra of formal vector fields vanishing at 0 . The infinitesimal action of $v = \sum a_i(\epsilon)\partial_i$ on $R(M/B)$ is $f \otimes P \mapsto f \otimes (P \circ v)|_{\epsilon=0}$. When v belongs to $\mathbb{C}\langle\partial_1, \ldots \partial_m\rangle$, this action is the differential structure ; when v belongs to $Lie(\Gamma)$, it is the action induced by the action of the group Γ. See section (2.1).

5.1.5 The fibers automorphism pseudogroup

A groupoid is naturally associated to any principal bundle. In the case of $R(M/B)$ one can give three definitions of this groupoid.

1. The groupoid $J^*(M/B, M/B)$ is the groupoid of formal invertible maps :
$$\{\widehat{\varphi} : (M_b, p) \xrightarrow{\sim} (M_{b'}, q) \mid (b, b') \in B \times B, p \in M_b, p' \in M_{b'}\}$$
2. The map
$$\begin{array}{rccc} \Psi : & R(M/B) \times R(M/B) & \longrightarrow & J^*(M/B, M/B) \\ & (r, s) & \longmapsto & s \circ r^{-1} \end{array}$$
realized the quotient by the diagonal action of Γ.
3. The groupoid of Γ-equivariant maps between fibers of $\pi : R(M/B) \to M$ is the space $J^*(M/B, M/B)$.

The second definition is adapted to prove that $J^*(M/B, M/B)$ is pro-algebraic groupoid.

Remark 5.1.1. *Here we allow applications $(M_b, p) \xrightarrow{\sim} (M_{b'}, p')$ with $b \neq b'$. Recall that the elements of the jet space $J^*(M/S, M/S)$ defined in section 3.2 have source and target on the same fiber M_s. Both notation are not compatible.*

5.1.6 Malgrange pseudogroups

It is a proper generalisation of the Galois group of linear differential or difference equation. It is a quotient of the Galois groupoid defined in [24] for foliations and in [19, 9] for rational dominant maps.

5.1.6.1 Pseudogroups of a rational vector field

We remind the definition of pseudogroups for vector fields in the fibered situation. This version is slightly different from (3.5), we will see that they coincide for ordinary differential equations.

A rational function $H \in \mathbb{C}(R(M/B))$ such that $RX \cdot H = 0$ is a (transversal) differential invariant of X. Let $Inv(X) \subset \mathbb{C}(R(M/B))$ be the subfield of differential invariants of X. Let N be a geometrical model for the field $Inv(X)$ and $\pi : R(M/B) \dashrightarrow N$ be the dominant map induced by the inclusion $Inv(X) \subset \mathbb{C}(R(M/B))$.

The vector field $R^t(X/B)$ is the target prolongation of X on $J^*(M/B, M/B)$, *i.e.* $R^t(X/B) = \Psi_*(0 \oplus R(X/B))$ where $\Psi : R(M/B) \times R(M/B) \to J^*(M/B, M/B)$ is the quotient by the diagonal action of Γ defined in the previous subsection.

Definition 5.1.2. *The transversal Malgrange pseudogroup is*
$$Mal(X/B) = \Phi(R(M/B) \underset{N}{\times} R(M/B)) \subset J^*(M/B, M/B)$$

To defined properly this fiber product one needs to restrict $\pi : (R(M/B))^o \to N$ on its domain of definition then $(R(M/B) \underset{N}{\times} R(M/B))$ is defined to be the Zariski closure of $(R(M/B)^o \underset{N}{\times} R(M/B)^o)$ in $R(M/B) \times R(M/B)$. The transversal Malgrange pseudogroup is closed in $J^*(M/B, M/B)$ because this fiber product is invariant by the diagonal action of Γ (see lemma 1.5.13).

This is the analog of the third definition given in the part 1.5. We can also defined the two others analogs :

- $Mal(X/B)$ is the smallest pseudogroup of $J^*(M/B, M/B)$ tangent to $R^t(X/B)$
- $Mal(X/B)$ is the smallest variety of $J^*(M/B, M/B)$ witch contains the identity and tangent to $R^t(X/B)$

5.1.6.2 Comparison of $Mal(X/S)$ and $Mal(X/B)$

The vector field X describes an ordinary differential equation with parameters. This means that there exists coordinates $x, y_1, \dots, y_n, s_1, \dots, s_d$ such that

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \sum a_i(x,s,y)\frac{\partial}{\partial y_i} \quad \text{and} \quad \tau\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ s \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix}$$

The pseudogroup $Mal(X/S)$ is defined in section (3.5). This a subpseudogroup of the groupoid $J^*(M/S, M/S)$. An element $\phi \in Mal(X/S)$ can be described in coordinates

$$\phi = \left(p_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ s \end{bmatrix}, p_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ s \end{bmatrix}, \begin{array}{ccc} (M,p_0) & \to & (M,p_1) \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ s \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} x+c \\ f(x,s,y) \\ s \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

Its restriction to the fiber is an element $rest(\phi)$ of $J^*(M/B, M/B)$:

$$rest(\phi) = \left(p_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ s \end{bmatrix}, p_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ s \end{bmatrix}, \begin{array}{ccc} (M_{\tau(p_0)},p_0) & \to & (M_{\tau(p_1)},p_1) \\ y & \mapsto & f(x_0,s,y) \end{array} \right)$$

The map $rest : Mal(X/S) \to J^*(M/B, M/B)$ is an injective morphism of algebraic groupoids on M compatible with prolongations of X on both spaces : if $R^t(X/S)$ is the target prolongation of X on $Mal(X/S)$ and $R^t(X/B)$ is the target prolongation of X on $Mal(X/B)$, then $rest_* R^t(X/S) = R^t(X/B)$. The minimality propertie of Malgrange pseudogroup implies that $Mal(X/B) = rest(Mal(X/S))$.

5.1.6.3 Pseudogroups of a rational dominant map

A rational functions $H \in \mathbb{C}(R(M/B))$ such that $H \circ R\Phi = H$ is a (fibered) differential invariant of Φ. Let $Inv(\Phi) \subset \mathbb{C}(R(M/B))$ be the subfield of differential invariants of Φ.

Let N be a model for Inv and $\pi : R(M/B) \dashrightarrow N$ be the dominant map induced by the inclusion $Inv \subset \mathbb{C}(R(M/B))$. We keep in mind that the application $R(M/B) \times R(M/B) \to J^*(M/B, M/B)$ is denoted by Ψ.

Définition 5.1.3. *The fiber Malgrange pseudogroup is*

$$Mal(\Phi/B) = \Psi(R(M/B) \underset{N}{\times} R(M/B)) \subset J^*(M/B, M/B)$$

To defined properly this fiber product one needs to restrict $\pi : (R(M/S))^o \to N$ on its domain of definition then $(R(M/B) \underset{N}{\times} R(M/B))$ is defined to be the Zariski closure of $(R(M/B)^o \underset{N}{\times} R(M/B)^o)$ in $R(M/B) \times R(M/B)$.

The following lemmas are important parts in the proof of the specialisation theorem. The first of them is the lemma (1.5.12) presented in section (1.5.1) :

Lemma 5.1.4. *Let $O \subset R(M/B)^o$ be a general subset then $\overline{O \underset{N}{\times} O} = \overline{R(M/B)^o \underset{N}{\times} R(M/B)^o}$.*

The second is the discret analog of the definition of $\mathcal{G}^b$ given in section 1.5.

Lemma 5.1.5. *Malgrange pseudogroup is the Zariski closure of the set of Taylor expansions of iterates of Φ.*

Proof. Let k be an integer and considere the order k frame bundle $R_k(M/B)$ and T_k be the Zariski closure of the set of all Taylor expansions of iterates of Φ.

To prove the inclusion of T_k in $Mal_k(\Phi/B)$, remark that the image $\Psi(j_k(r), j_k(\Phi \circ r))$ is $j_k(\Phi)$: the order k Taylor expansion of Φ at $r(0)$. Then $Mal_k(\Phi/B) = \Psi(R_k(M/B) \underset{N_k}{\times} R_k(M/B))$ contains Taylor expansions of Φ.

To prove the minimality of $Mal(\Phi/B)$, we use the following theorem from [1]. The dominant map $\pi : R_k(M/B) \dashrightarrow N_k$ induced by the inclusion $Inv_k \subset \mathbb{C}(R_k(M/B))$ has the following property : for a general $j_k(r) \in R_k(M/B)$ the Zariski closure of the fiber $\pi^{-1}(\pi(j_k(r)))$ is the Zariski closure of the $R_k\Phi$-orbit of $j_k(r)$. Hence, there is a general subset $U \subset M$ such that for all $p \in U$, one can find a frame r with $r(0) = p$ such that $\{j_k(r)\} \times \pi^{-1}(\pi(j_k(r)) \subset \{j_k(r)\} \times R_k(M/B)$ is the Zariski closure of the orbit of $\{j_k(r)\} \times \{j_k(r)\}$ for Φ acting on the second factor. The projection $\Psi(\{j_k(r)\} \times \pi^{-1}(\pi(j_k(r))))$ is included in the Zariski closure of the set of Taylors expansions of $\Phi^{\circ n}$ at p. It is also the subset of $Mal_k(\Phi/B)$ of order k jet of maps with source at p. This means that $\Psi(R_k(U/B) \times_N R_k(U/B))$ is a subset of T_k.

We can use the lemma 5.1.5 with $O := R_k(U/B)$ to get the equality

$$\overline{\Psi(R_k(U/B) \times_N R_k(U/B))} = Mal_k(X/B)$$

This concludes the proof.

□

Remark 5.1.6. *When Φ is the map from a linear difference equation on a vector bundle $M \to B$:*

1. *the pseudogroup $Mal(\Phi/B)$ is "the analog" of the Galois group of the equation over the difference field $(\mathbb{C}(B), \sigma)$*

2. *the pseudogroup $Mal(\Phi/*)$ is "the analog" of the differential Galois group of the difference equation over $\mathbb{C}(B)$ with difference operator σ and differential structure given by the exterior differential on the base $d : \mathbb{C}(B) \to \mathbb{C}(B) \underset{\mathbb{C}[B]}{\otimes} \Omega^1_B$*

5.2 A specialisation and a confluence theorem

5.2.1 The specialisation theorem

When the equation depend on parameters, the base B is fibered on S the parameter space and the maps $\sigma : B \to B$ preserves fibers of this map. The first results is a comparison theorem of Malgrange pseudogroup of Φ with Malgrange pseudogroup of it restriction on a fiber $\Phi_q : M_q \dashrightarrow M_q$ for $q \in S$

Theorem 5.2.1. $\dim Mal_k(\Phi_q/B_q) \leq \dim_S Mal_k(\Phi/B)$ *with equality for general $q \in S$*

Proof. The dimension of $Mal_k(\Phi/B)$ is the dimension of M plus the dimension of the Zariski closure of a general orbit of $R_k\Phi$ in $R_k(M/B)$. One has to prove that the dimension of the Zariski closure of a particular orbit is smaller that the general one. The proof can be adapted from [3] where this inequality is proved for leaves of algebraic foliations.

Lemma 5.2.2. *For $j_k r \in R_k(M/B)$, we denote by $V(j_k r)$ the Zariski closure of the orbit of $j_k r$. There is an integer h_k such that $\dim(V(j_k r)) \leq h_k$ with equality for a general $j_k r$.*

Proof. We will compare Hilbert polynomial of these subvarieties and deduce the wanted inequalities of dimensions.

The ideal of $V(j_k r)$ is $I(j_k r) = \{f \in \mathbb{C}[R_k(M/B)] | j_k(r) \in \overline{\{f \circ \Phi = 0\}}\}$ and the sub vector space of equation of degree less or equal d is also described by these linear equations in f depending on r. Let $h_{j_k r}(d)$ be the dimension of this space.There exists a Zariski open subset $O \in R_k(M/B)$ and a integer h_k such that for any r, $h_{j_k r}(d) \geq h_k$ with equality for $j_k r \in O$.

This implies that the Hilbert polynomial of $V(j_k r)$ is contant for $j_k r$ general in $R_k(M/B)$, and that for other frames, it is smaller. The dimension of a subvariety is the degree of its Hilbert polynomial. The lemma is proved. □

The theorem is proved. □

5.2.2 The confluence theorem

In this section, we will assume the parameter space to be 1-dimensional with coordinate q. The following theorem compares Malgrange pseudogroups of Φ with Malgrange pseudogroup of X a vector field on M_{q_0} such that $\Phi_q = Id + (q - q_0)X + o(q - q_0)$

Theorem 5.2.3. $\dim Mal_k(X/B_{q_0}) \leq \dim_S Mal_k(\Phi/B)$

Proof. First, the restrictions of differential invariants of Φ at $q = q_0$ give differential invariants of X : by expansion around q_0, $R\Phi_q = Id + (q - q_0)RX + o(q - q_0)$ and $H = H_0 + o(1)$ then $H \circ R\Phi_q = H$ implies $RX \cdot H = 0$. This means that the fiber of $Mal_k(\Phi/B)$ at q_0 contains $Mal_k(X/B_{q_0})$.

To prove the inequality one has to prove that $\dim Mal_k(\Phi/B)_{q_0} \leq \dim_S Mal_k(\Phi/B)$. As the codimension of these varieties are given by the transcendence degree of theirs fields of differential invariant, we will compare $Inv(R_k\Phi)$ and $Inv(R_k\Phi)_{q_0} := \{H|\}$.

Let $H_1, \dots H_d$ be a transcendence basis of $Inv(R_k\Phi)$ over $\mathbb{C}(S)$. Because q is a differential invariant, one can assume that the restriction of the basis to $q = q_0$ are well defined rational functions $H_1^0, \dots, H_d^0$ and the vanishing order ℓ of $dH_1 \wedge \dots dH_d$ at $q = q_0$ is minimal. If $\ell = 0$, these restrictions are functionally independant, the theorem is proved. If not, let $P(H_1^0, \dots, H_d^0)$ be the minimal polynomial of H_d^0 over $\mathbb{C}[H_1^0, \dots, H_{d-1}^0]$. The invariant $P(H_1, \dots, H_d)$ can be written as $(q - q_0)F$ with F a function of $q, H_1, \dots, H_d$. Up to some factorisation by $q - q_0$ one can assume that there exist a index i such that $(\partial_i P)^0$ is well defined and not zero. One has, up to some sign and mod dq,

$$\begin{aligned} d(P(H_1, \dots H_d)) \wedge dH_1 \wedge \dots \widehat{dH_i} \dots \wedge dH_d &= \partial_i P dH_1 \wedge \dots \wedge dH_d \\ &= (q - q_0) dF \wedge dH_1 \wedge \dots \widehat{dH_i} \dots \wedge dH_d \end{aligned}$$

This contradicts the minimality of ℓ. □

5.2.3 Corollaries about Malgrange pseudogroups of discrete Painlevé equations

A discrete Painlevé equation is a birationnal map Φ of $\mathbb{C}^2 \times \mathscr{C} \times S$ fibered above an automorphism without periodic points of the space of the independent variable $n \in \mathscr{C}$ and parameters $a \in S$. The space $\mathscr{C} \times S$ may be non compact. Formally the difference equation of invariant curves paramaterized by n is the difference equation. Two properties are imposed to be called "discrete-Painlevé equation" :

1. It must have the singularity confinement property. There exists a fibers compactification M of $\mathbb{C}^2 \times \mathscr{C} \times S \to \mathscr{C} \times S$ such that Φ can be extended as a biholomorphism of M.

2. It must degenerate on a differential Painlevé equation. There exists a deformation $\widetilde{M}$ of M above $\mathbb{C}$ and a deformation $\widetilde{\Phi}$ of Φ such that for $\epsilon \in \mathbb{C}^*$ $(\widetilde{M_\epsilon}, \widetilde{\Phi}_\epsilon)$ is birational to (M, Φ) and at 0 one has the Taylor expansion $\widetilde{\Phi}_\epsilon = Id + \epsilon X + o(\epsilon)$ with X a vector field on $\widetilde{M_0}$ whose trajectories parameterized by open set in $\mathscr{C}$ are Painlevé transcendents and such that $a \in S \to X(a)$ covers the Painlevé equations $P_J(\gamma)$ for a fixed $J \in \{\text{I}, \text{II}, \text{III}, \text{IV}, \text{V}, \text{VI}\}$ and generic parameters γ.

These equations are classified by families indexes by affine Weyl groups W, each family depends on finite number of parameters a. Such an equation will be denoted by $dP_W(a)$. In Sakai's article [35], it is proved that there exist an invariant relative 2-form $\omega \in \Omega^2_{M/\mathscr{C}}$. In the framework of this chapter this means that we have an inclusion :

$$Mal(dP_W(a)/\mathscr{C}) \subset \{\varphi : (M_n, p) \to M_{n'}, q) | (n, n') \in \mathscr{C}^2, \varphi^*\omega = \omega\}.$$

This inclusion, the second property above and Cartan generic local classification of algebraic pseudogroups [7] enable us to compute Malgrange pseudogroup of discrete Painlevé equations.

Theorem 5.2.4. *For any affine Weyl group W and for general values of parameters a*

$$Mal(dP_W(a)/\mathscr{C}) = \{\varphi : (M_n, p) \to M_{n'}, q) | (n, n') \in \mathscr{C}^2, \varphi^*\omega = \omega\}.$$

Proof. First one will determined the codimension 2 subvariety given for $n \in \mathscr{C}$ by $Mal_{n,n} = Mal(dP_W(a)/\mathscr{C}) \cap \{\varphi : (M_n, p) \to M_n, q), \}$. It is a sub pseudogroup y of $Inv(\omega_n) = \{\varphi : (M_n, p) \to M_n, q) | \varphi^*\omega = \omega\}$. The restriction of these pseudogroups on a fiber M_n give algebraic pseudogroups on two dimensional manifold. Such objects have been classified by Elie Cartan [7] up to analytic change of coordinates near a generic point. From the specialisation theorem we know that $Mal_{n,n}$ has quadratic growth. From Cartan results we know that there is only one quadratic sub pseudogroup of $Inv(\omega_n)$: it is $Inv(\omega_n)$ itself.

Now the two pseudogroups dominate $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$ and have same fibers, they are equals. □

Chapitre 6

Annexe

6.1 Sous-variétés minimales tangentes

Nous commençons par définir la plus petite sous-variété algébrique contenant une sous variété donnée et qui est tangente à une distribution. Si la distribution est principale, un résultat de P. Bonnet portant sur la dimension de ces sous-variétés nous permettra d'obtenir, sous une hypothèse de domination, une partition du fibré principal.

Définition 6.1.1. *Soient M une variété irréductible, $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle sur M et M_0 une sous-variété irréductible de M. La variété minimale tangente $V(\mathcal{D}, M_0)$ est la plus petite sous-variété de M vérifiant les deux conditions suivantes :*

- $M_0 \subset V(\mathcal{D}, M_0)$
- $\mathcal{D}_x \subset T_x V(\mathcal{D}, M_0)$ *pour tout point x de $V(\mathcal{D}, M_0)$ là où ça a un sens*

Un lemme de ([3]) nous dit qu'une variété minimale tangente à une distribution intégrable est irréductible. Le lemme suivant nous dit que nous pouvons nous passer de l'hypothèse d'intégrabilité.

Lemme 6.1.2. *En reprenant les notations de la définition ci-dessus, la variété $V(\mathcal{D}, M_0)$ est bien définie et est irréductible.*

Démonstration. Pour montrer que $V(\mathcal{D}, M_0)$ est bien définie sur M, nous allons d'abord le voir en supposant M affine et la distribution bien définie sur tout M, pour ensuite le voir dans le cas général à l'aide d'une clôture de Zariski.

Fait : Si M est affine et la distribution bien définie sur tout M alors $V(\mathcal{D}, M_0)$ est bien définie.
En effet, regardons les idéaux de $\mathcal{O}_M(M)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- $I \subset \mathcal{I}(M_0)$ l'idéal associé à M_0
- $\forall X \in \mathcal{D},\ X(I) \subset I$

Si deux tels idéaux vérifient ces deux conditions alors la somme des deux vérifiera aussi ces conditions. Par noethérianité, nous pouvons alors définir l'unique idéal maximale parmi les idéaux vérifiant ces deux conditions. La sous-variété $V(\mathcal{D}, M_0)$ correspond alors aux zéros de cet idéal.

Fort de ce fait, nous pouvons montrer la première assertion du lemme pour une distribution rationnelle sur une variété M. Soit O un ouvert affine de M qui est d'intersection non

vide avec M_0 et sur lequel la distribution $\mathcal{D}$ est bien définie. Désignons par $V_O(\mathcal{D}_{|O}, M_0 \cap O)$ la variété minimale tangente sur O. La variété $V(\mathcal{D}, M_0) := \overline{V_O(\mathcal{D}_{|O}, M_0 \cap O)}$ est la variété minimale tangente recherchée. En effet, d'une part elle contient M_0 car elle contient l'adhérence de $M_0 \cap O$ qui est M_0 elle-même par irréductibilité de M_0. D'autre part, elle est tangente à $\mathcal{D}$ puisque la propriété de tangence est une propriété fermée. De plus, si N est une autre variété vérifiant ces deux conditions, alors $V(\mathcal{D}, M_0) \cap O = V_O(\mathcal{D}_{|O}, M_0 \cap O) \subset N \cap O$ par la minimalité de $V_O(\mathcal{D}_{|O}, M_0 \cap O)$. Et en passant aux adhérences, il vient $V(\mathcal{D}, M_0) \subset N$, ce qui montre la minimalité de $V(\mathcal{D}, M_0)$. Enfin, cette minimalité montre la non dépendance par rapport à l'ouvert O.

Pour la deuxième assertion, écrivons une sous-variété minimale comme union de ses composantes irréductibles : $V(\mathcal{D}, M_0) = \bigcup V_i$. Puisque M_0 est irréductible, il existe un indice i_0 tel que $M_0 \subset V_{i_0}$. Montrons que la distribution $\mathcal{D}$ est tangente à cette composante irréductible. Remarquons d'abord que $\mathcal{D}$ est tangente à $V_{i_0} - \bigcup_{i \neq i_0} V_i$. Ensuite, la condition de tangence étant une condition fermée, il vient donc que $\mathcal{D}$ est aussi tangente à $V_{i_0} = \overline{V_{i_0} - \bigcup_{i \neq i_0} V_i}$. Enfin, la minimalité de $V(\mathcal{D}, x)$ entraine que $V(\mathcal{D}, x) = V_{i_0}$. Autrement dit, la sous-variété minimale est irréductible.

□

Dans ([3]), P. Bonnet suppose les distributions intégrables pour montrer comment se comporte "l'ordre de contact d'une fonction à la distribution" vis à vis de l'addition et de la multiplication. Il en déduit la propriété d'irréductibilité d'une sous-variété minimale tangente. Cependant, il n'utilise en réalité que ce corollaire dans la suite de [3] pour montrer le théorème (6.3.2) que nous verrons un peu après. Or nous venons de voir que cette hypothèse d'intégrabilité de la distribution n'était pas nécessaire pour obtenir l'irréductibilité. C'est pour cette raison que cette hypothèse n'apparaît pas dans le théorème (6.3.2).

Rappelons-nous l'exemple de l'équation différentielle à paramètre donné en introduction :

Exemple 6.1.3. *A l'équation* $\frac{d}{dx}y = \frac{t}{x}y$ *il est associé le champ de vecteurs* $X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{t}{x}y\frac{\partial}{\partial y}$ *sur* $\mathbb{C}^3$. *Nous avons :*

- $V(X, (t_0, x_0, y_0)) = \{t_0\} \times \mathbb{C}^2$ *si* $t_0 \notin \mathbb{Q}$
- $V(X, (t_0, x_0, y_0)) = \{t_0\} \times \{\frac{y^q}{x^p} = \frac{y_0^q}{x_0^p}\}$ *si* $t = \frac{p}{q}$ *avec* $(p, q) = 1$

En particulier, la dimension d'une sous variété minimale tangente est 2 *sur un ensemble général et inférieure à* 2 *partout.*

Voici un théorème de P. Bonnet issu du même article qui généralise cet exemple :

Théorème 6.1.4. *Soit* $\mathcal{D}$ *une distribution rationnelle principale sur un fibré principale* P *et régulière sur* P_U *pour* U *un ouvert de la base. Il existe un entier* v *tel que :*

- *pour tout* $x \in P_U$, $\dim(V(\mathcal{D}, x)) \leq v$
- *pour* x *général* $\dim(V(\mathcal{D}, x)) = v$

Dans cette annexe, nous utilisons ce théorème pour montrer l'équidimensionalité des sous-variétés minimales tangentes à une distribution principale qui domine la base du fibré sur lequel elle est définie. Commençons par un lemme.

Lemme 6.1.5. *Soit $\phi : M \to N$ un morphisme dominant. L'image par ϕ d'un ensemble général est encore un ensemble général.*

Démonstration. Si nous notons F un tel ensemble, alors $F = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} V_i$ avec V_i ouvert dense de M. L'image $\phi(V_i)$ est constructible et en particulier, contient un ouvert dense W_i de son adhérence. Cette adhérence est N tout entier car le morphisme est dominant. Ainsi $\phi(F)$ contient l'ensemble général $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_i$. □

Lemme 6.1.6. *Soient $p : P \to B$ un fibré principal de groupe structural G et $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale.*

i) Si V est une sous-variété minimale tangente qui domine la base B alors elle est de dimension maximale.

ii) Si la distribution domine TB alors toutes les sous-variétés minimales tangentes dominent la base, ont même dimension et forment une partition de l'ouvert de régularité P_U de $\mathcal{D}$.

Démonstration. i) Par le théorème (6.1.4), il existe un sous-ensemble très général E de P tel que toute sous-variété minimale tangente contenant un point de E est de dimension maximale. Or, par le lemme (6.1.5), $p(E)$ est un sous-ensemble très général de B. Donc $p(E) \cap p(V) \neq \emptyset$. De plus, l'action de G sur les fibres de p est transitive, il existe donc $x \in E$, $g \in G$ tels que $x.g \in V$. Ainsi, d'une part $V(\mathcal{D}, x.g)$ est incluse dans V car cette dernière est tangente à $\mathcal{D}$ et contient $x.g$, et d'autre part, $V(\mathcal{D}, x.g)$ est de dimension maximale car $V(\mathcal{D}, x.g) = V(\mathcal{D}, x).g$ par le lemme (1.3.2) et car S_g est un isomorphisme. Il s'ensuit que V est elle-même de dimension maximale.

ii) Pour la deuxième assertion, supposons que la distribution domine TB. Soit V une sous-variété minimale tangente. Par le théorème de lissité générique, il existe un ouvert lisse O_1 de V et un ouvert lisse O_2 de $p(V)$ tel que $p_{|O_1} : O_1 \to O_2$ soit lisse. Ainsi, pour un point x de O_1 sur lequel $\mathcal{D}$ est régulière, d'une part $\dim(d_x p.T_x V) = \dim(T_{p(x)}O_2) = \dim(O_2)$, d'autre part, par hypothèse sur la distribution qui est tangente à V, $\dim(d_x p.T_x V) = \dim(T_{p(x)}B) = \dim(B)$. La base B étant irréductible, il s'ensuit que O_2 est un ouvert dense de B, et donc que V domine B. La preuve se conclut en invoquant la première assertion de ce lemme.

Enfin, regardons la partition. L'ouvert de régularité P_U est bien recouvert par les sous-variétés minimales tangentes. Il suffit donc de montrer que deux sous-variétés minimales tangentes sont soit disjointes, soit égales. Soient V et V' deux telles sous-variétés qui ne sont pas disjointes. La variété $V \cap V'$ est tangente à la distribution et contient donc une sous-variété minimale tangente W. Or, par le point précédent, $\dim(W) = \dim(V) = \dim(V')$. Par irréductibilité de ces sous-variétés, il vient $V = W = V'$.

□

6.2 Un théorème de X. Gomez-Mont

Voici le théorème qui peut-être trouvé dans [18] :

Théorème 6.2.1. *Si $\tilde{\mathcal{D}}$ est une distribution rationnel sur une variété projective irréductible M dont les feuilles sont quasi-projectives, alors il existe une variété projective N et une*

application rationnelle $\pi : M \dashrightarrow N$ telle que la clôture d'une fibre générique de π est la clôture d'une feuille de $\tilde{\mathcal{D}}$.

Il peut s'appliquer au cas d'une distribution principale qui domine la base du fibré principal sur lequel elle est définie.

Corollaire 6.2.2. *Si $p : P \to B$ est un fibré principal et $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle principale qui domine TB, alors il existe une variété projective N et une application rationnelle dominante $\pi : P \dashrightarrow N$ tel que génériquement, les fibres de π sont les sous-variétés minimales tangentes.*

Démonstration. Soit V une sous-variété minimale tangente. Par le lemme (1.3.5), il existe un ouvert $O \subset B$ tel que le couple $(P_O, \mathcal{D})$ soit réductible au couple $(V_O, \mathcal{D}(V_O[G]))$. La distribution $\tilde{\mathcal{D}}$ induite sur le G-fibré $V_O[G] = P_O$ par la distribution $V_O \to G(\dim(V_O), TV_O)$ est intégrable. De plus, ses feuilles sont les translatés de V_O sous l'action du groupe G, ce sont donc exactement les sous-variétés minimales tangentes restreintes à l'ouvert P_O. Cette nouvelle distribution rationnelle, qui est intégrable et dont les feuilles sont quasi-projectives, peut être vu comme une distribution rationnelle sur le projectivisé de P. Il ne reste plus qu'à conclure en invoquant le théorème de Gomez-Mont. □

Autrement dit, sous cette hypothèse de domination de la base, les sous-variétés minimales tangentes s'arrangent entre elles pour former les fibres d'une application rationnelle. Cette hypothèse est nécessaire comme le montre l'exemple (6.1.3).

6.3 Un théorème de P. Bonnet

Les distributions qui nous intéressent sont issues d'équations à paramètres. Elles ne vérifient pas l'hypothèse de domination de la base. Le théorème de P.Bonnet qui va suivre s'acquitte de cette hypothèse. Nous commençons par donner la définition d'une application qui englobe toutes les intégrales premières d'une distribution. Puis nous verrons qu'elle coïncide avec l'application donné dans le théorème de P. Bonnet.

Définition 6.3.1. *Soient $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle sur une variété irréductible P, N une variété irréductible et $\pi : P \dashrightarrow N$ une application rationnelle dominante. L'application π est une intégrale première maximale si $\pi^*\mathbb{C}(N) = \mathbb{C}(P)^{\mathcal{D}}$.*

Voici le théorème de P. Bonnet :

Théorème 6.3.2. *Soient $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle sur une variété irréductible P. Il existe une variété irréductible N, une application rationnelle dominante $\pi : P \dashrightarrow N$ et un ensemble général E tels que pour tout $x \in E$, $\overline{\pi^{-1}(\pi(x))} = V(\mathcal{D}, x)$.*

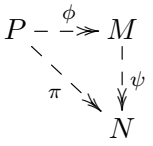
Nous constatons que la conclusion du théorème est un peu plus faible que celle du théorème de Gomez Mont mais qu'il n'y a aucune hypothèse sur la distribution. C'est d'ailleurs la motivation de ce théorème.

Notons deux points plus techniques. Le premier point est que le papier de P.Bonnet nous dit que l'ensemble général du théorème (6.3.2) et l'ensemble général du théorème (6.1.4) sont les mêmes. Le deuxième point est qu'en notant v l'entier du théorème (6.1.4) correspondant au maximum de la dimension d'une variété minimale tangente alors la variété N du théorème ci-dessus est de dimension $\dim(P) - v$.

Proposition 6.3.3. *Soit $\mathcal{D}$ une distribution rationnelle sur une variété P. Si $\pi : P \dashrightarrow N$ est l'application donnée dans le théorème (6.3.2)), alors c'est une intégrale première maximale, i.e. $\pi^*\mathbb{C}(N) = \mathbb{C}(P)^{\mathcal{D}}$. Réciproquement, si ϕ est une intégrale première maximale alors il existe un ensemble général E tel que pour tout $x \in E$, $\overline{\phi^{-1}(\phi(x))} = V(\mathcal{D}, x)$.*

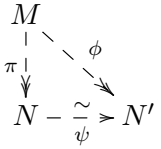
Démonstration. Montrons d'abord l'inclusion $\pi^*\mathbb{C}(N) \subset \mathbb{C}(P)^{\mathcal{D}}$. Prenons $f \in \mathbb{C}(N)$ et un ouvert affine U de P sur lequel l'application $\pi^* f$ et la distribution $\mathcal{D}$ sont bien définies. Il suffit alors de montrer que $\pi^* f \in \mathbb{C}(U)^{\mathcal{D}}$. Notons pour cela l'ensemble $F := \{x \in U \mid X.(\pi^* f)(x) = 0 \text{ pour tout } X \in \mathcal{D}\}$. Cet ensemble est fermé dans U. Il est aussi dense puisqu'en notant E l'ensemble général de la définition (6.3.1) alors nous avons $E \subset \bigcup_{x \in E} \pi^{-1}(\pi(x)) \subset F$. Ainsi $F = U$, ce qui montre ce que nous voulions.

Montrons maintenant l'égalité. La correspondance entre extensions de corps et applications rationnelles dominantes ([20] p 25-26) associe à la suite d'extensions $\mathbb{C}(N) \subset \mathbb{C}(P)^{\mathcal{D}} \subset \mathbb{C}(P)$ le diagramme commutatif :

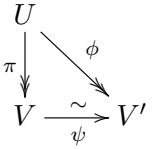


où M est une variété vérifiant $\mathbb{C}(M) = \mathbb{C}(P)^{\mathcal{D}}$. Il suffit de montrer que les variétés M et N sont birationnellement équivalentes. Commençons par montrer qu'elles ont même dimension en montrant que les fibres génériques de ϕ et de π ont même dimension. La commutativité du diagramme nous dit déjà que la dimension d'une fibre générique de ϕ est inférieure à la dimension d'une fibre générique de π. Or, d'un côté la distribution $\mathcal{D}$ est, par définition, tangente aux fibres de ϕ, donc pour un x générique, la variété minimale tangente $V(\mathcal{D}, x)$ est incluse dans la clôture d'une fibre de ϕ. Et d'un autre côté, pour un x général, $V(\mathcal{D}, x)$ est la clôture d'une fibre de π, ce qui implique par le lemme (6.1.5) qu'une fibre générale de π est une sous-variété minimale tangente. Cela nous dit que les clôtures des fibres générales de ϕ contiennent celles de π. Donc les fibres générales de ϕ et de π ont même dimension, ce qui est aussi vrai pour les fibres génériques. Il s'ensuit que les variétés M et N ont même dimension. L'extension de corps $\mathbb{C}(N) \subset \mathbb{C}(M)$ est donc finie, notons d le nombre de points dans une fibre générique de ψ. Nous venons de voir que les fibres générales de $\pi = \psi \circ \phi$ sont des variétés minimales tangentes qui sont en particulier connexes. Donc les fibres générales de ψ sont aussi connexes. Il en est de même des fibres génériques ce qui nous dit que $d = 1$ et montre l'égalité recherchée.

Montrons maintenant la réciproque. Soit $\pi : M \dashrightarrow N$ l'application donnée dans le théorème (6.3.2) et $\phi : M \dashrightarrow N'$ une intégrale première maximale. Aux égalités $\mathbb{C}(N) = \mathbb{C}(M)^{\mathcal{D}} = \mathbb{C}(N')$ il est associé le diagramme commutatif :



qui induit sur des ouverts convenables :



Notons E l'ensemble général donné dans le théorème (6.3.2). Si $x \in E \cap U$, alors $\phi^{-1}(\phi(x)) = (\psi \circ \pi)^{-1}(\psi \circ \pi(x)) = \pi^{-1}(\pi(x)) = V(\mathcal{D}, x)$. Ce qui termine la preuve. □

6.4 Un théorème d'E. Amerik et F. Campana

Ce théorème explique l'organisation des clôtures de Zariski des orbites d'une application rationnelle d'une varitété Kähler compact dans elle même. C'est un analogue discret et analytique d'une partie des théorèmes de P. Bonnet. Dans notre cadre algébrique, ce théorème donne :

Théorème 6.4.1. *Soit M une variété projective et $\Phi : M \dashrightarrow M$ une application rationnelle dominante. Il existe une application rationnelle dominante Φ-invariante $\pi : M \dashrightarrow N$ dont la fibre générale M_x, $x \in N$, est l'adhérence de Zariski de l'ensemble des itérés par Φ d'un point général de M_x.*

La première partie des théorèmes de P. Bonnet donnant la semi-continuité de la dimension de la clôture de Zariski des orbites se montre en adaptant la méthode de P. Bonnet. C'est l'objet principal de la preuve du théorème de spécialisation discret 5.2.1.

Bibliographie

[1] Ekaterina Amerik and Frédéric Campana. Fibrations méromorphes sur certaines variétés à fibré canonique trivial. *Pure Appl. Math. Q.*, 4(2, Special Issue : In honor of Fedor Bogomolov. Part 1) :509–545, 2008.

[2] Yves André. Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 34(5) :685–739, 2001.

[3] Philippe Bonnet. Minimal invariant varieties and first integrals for algebraic foliations. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 37(1) :1–17, 2006.

[4] Armand Borel. *Linear algebraic groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[5] Michel Brion, Preena Samuel, and V. Uma. *Lectures on the structure of algebraic groups and geometric applications*, volume 1 of *CMI Lecture Series in Mathematics*. Hindustan Book Agency, New Delhi ; Chennai Mathematical Institute (CMI), Chennai, 2013.

[6] Serge Cantat and Frank Loray. Dynamics on character varieties and Malgrange irreducibility of Painlevé VI equation. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(7) :2927–2978, 2009.

[7] Elie Cartan. Les sous-groupes des groupes continus de transformations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 25 :57–194, 1908.

[8] G. Casale and J.-A. Weil. Galoisian Methods for Testing Irreducibility of Order Two Nonlinear Differential Equations. *ArXiv e-prints*, April 2015.

[9] Guy Casale. Enveloppe galoisienne d'une application rationnelle de $\mathbb{P}^1$. *Publ. Mat.*, 50(1) :191–202, 2006.

[10] Guy Casale. Le groupoïde de Galois de P_1 et son irréductibilité. *Comment. Math. Helv.*, 83(3) :471–519, 2008.

[11] Guy Casale. Une preuve galoisienne de l'irréductibilité au sens de Nishioka-Umemura de la première équation de Painlevé. *Astérisque*, (323) :83–100, 2009.

[12] Guy Casale. An introduction to Malgrange pseudogroup. In *Arithmetic and Galois theories of differential equations*, volume 23 of *Sémin. Congr.*, pages 89–113. Soc. Math. France, Paris, 2011.

[13] Teresa Crespo and Zbigniew Hajto. *Algebraic groups and differential Galois theory*, volume 122 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[14] Lucia Di Vizio, Jean-Pierre Ramis, Jacques Sauloy, and Changgui Zhang. Equations aux q-différences. *Gazette des mathématiciens*, 96 :20–49, 2003.

[15] Jules Drach. Essai sur la théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 15 :243–384, 1898.

[16] Charles H. Franke. Picard-Vessiot theory of linear homogeneous difference equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108 :491–515, 1963.

[17] Lawrence Goldman. Specialization and Picard-Vessiot theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85 :327–356, 1957.

[18] Xavier Gómez-Mont. Integrals for holomorphic foliations with singularities having all leaves compact. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 39(2) :451–458, 1989.

[19] Anne Granier. A Galois D-groupoid for q-difference equations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 61(4) :1493–1516 (2012), 2011.

[20] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[21] E. R. Kolchin. Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations. *Ann. of Math. (2)*, 49 :1–42, 1948.

[22] E. R. Kolchin. *Differential algebra and algebraic groups*. Academic Press, New York-London, 1973. Pure and Applied Mathematics, Vol. 54.

[23] K. Mackenzie. *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, volume 124 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[24] Bernard Malgrange. Le groupoïde de Galois d'un feuilletage. In *Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2*, volume 38 of *Monogr. Enseign. Math.*, pages 465–501. Enseignement Math., Geneva, 2001.

[25] Jean Martinet and Jean-Pierre Ramis. Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre. *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 16(4) :571–621, 1983.

[26] Keiji Nishioka. A note on the transcendency of Painlevé's first transcendent. *Nagoya Math. J.*, 109 :63–67, 1988.

[27] Katsumi Nomizu. *Lie groups and differential geometry*. The Mathematical Society of Japan, 1956.

[28] Masatoshi Noumi and Kazuo Okamoto. Irreducibility of the second and the fourth Painlevé equations. *Funkcial. Ekvac.*, 40(1) :139–163, 1997.

[29] Yousuke Ohyama and Shoji Okumura. A coalescent diagram of the Painlevé equations from the viewpoint of isomonodromic deformations. *J. Phys. A*, 39(39) :12129–12151, 2006.

[30] Kazuo Okamoto. Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations. I. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 56(6) :264–268, 1980.

[31] Peter J. Olver. *Equivalence, invariants, and symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[32] Paul Painlevé. *Oeuvres de Paul Painlevé. Tome I.* Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1973. Preface by René Garnier, Compiled by Raymond Gérard, Georges Reeb and Antoinette Sec.

[33] Émile Picard. Sur les équations différentielles linéaires et les groupes algébriques de transformations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, 1(1) :A1–A15, 1887.

[34] A. Ramani, B. Grammaticos, and J. Hietarinta. Discrete versions of the Painlevé equations. *Phys. Rev. Lett.*, 67(14) :1829–1832, 1991.

[35] Hidetaka Sakai. Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations. *Comm. Math. Phys.*, 220(1) :165–229, 2001.

[36] Jean-Pierre Serre. *Oeuvres/Collected papers. I. 1949–1959*. Springer Collected Works in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2013. Reprint of the 2003 edition [of the 1986 original, MR0926689].

[37] T. A. Springer. *Linear algebraic groups*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, second edition, 2009.

[38] Hiroshi Umemura. Differential Galois theory of infinite dimension. *Nagoya Math. J.*, 144 :59–135, 1996.

[39] Hiroshi Umemura and Humihiko Watanabe. Solutions of the third Painlevé equation. I. *Nagoya Math. J.*, 151 :1–24, 1998.

[40] Marius van der Put and Michael F. Singer. *Galois theory of linear differential equations*, volume 328 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[41] Ernest Vessiot. Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 21 :9–85, 1904.

[42] Humihiko Watanabe. Solutions of the fifth Painlevé equation. I. *Hokkaido Math. J.*, 24(2) :231–267, 1995.

[43] Humihiko Watanabe. Birational canonical transformations and classical solutions of the sixth Painlevé equation. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 27(3-4) :379–425 (1999), 1998.

Résumé

Le pseudo-groupe de Malgrange d'un champ de vecteurs défini sur une variété est la sous-pro-variété de l'espace des jets de biholomorphismes locaux de cette variété obtenue en prenant la clôture de Zariski des flots du champ de vecteurs. Une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 définit un champ de vecteurs sur une variété de dimension 3. Le pseudo-groupe de Malgrange de ce dernier est de type différentiel d'ordre inférieur ou égal à 2. Une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 est dite irréductible si ses solutions générales ne peuvent pas être exprimées à l'aide de solutions d'équations algébriques, différentielles linéaires ou différentielles d'ordre 1. Si le type différentiel du pseudo-groupe de Malgrange d'une équation d'ordre 2 est exactement 2 alors cette dernière est irréductible.

Nous donnons plusieurs définitions du pseudo-groupe de Malgrange d'un champ de vecteurs équivalentes à la définition originale donnée par Bernard Malgrange. La définition du premier paragraphe nous permet d'appliquer un théorème de semi-continuité de la dimension des clôtures de Zariski des feuilles d'un feuilletage holomorphe de Philippe Bonnet. Nous obtenons le résultat suivant concernant les équations différentielles ordinaires dépendant de paramètres. Si le type différentiel du pseudo-groupe de Malgrange de l'équation spécialisée en une valeur des paramètres est à exactement 2 alors il en sera de même pour les pseudo-groupes de Malgrange de l'équation spécialisée en des valeurs générales des paramètres. Une première application de ce résultat est de redémontrer l'irréductibilité des équations de Painlevé pour des valeurs générales des paramètres. Une seconde application est de déterminer complètement les pseudo-groupes de Malgrange de ces équations pour des valeurs générales des paramètres.

Les définitions du pseudo-groupe de Malgrange et les résultats de spécialisations s'adaptent aux équations aux q-différences. En appliquant ces résultats aux équations de Painlevé discrètes, nous obtenons le pseudo-groupe de Malgrange de ces dernières pour des valeurs générales des paramètres.

Abstract

The Malgrange pseudogroup of a vector field on a variety is the sub-pro-variety of the jet space of local biholomorphisms of this variety obtained by taking the Zariski closure of the flow of the vector field. A second-order ordinary differential equation defines a vector field on a variety of dimension 3. The differential type of the Malgrange pseudogroup of this one is at most 2. A second-order ordinary differential equation is said to be irreductible if its general solutions can not be expressed using solutions of algebraic equations, linear differential equations or differential equations of order 1. If the differential type of the Malgrange pseudogroup of a second-order differential equation is exactly 2 then the latter is irreductible.

We give several definitions of the Malgrange pseudogroup of a vector field which are equivalent to the original definition given by Bernard Malgrange. The definition of the first paragraph leads us to apply a semi-continuity theorem of the dimension of the Zariski closure of the leaves of a holomorphic foliation given by Philippe Bonnet. We obtain the following result about the ordinary differential equations which depend on parameters. If the differential type of the Malgrange pseudogroup of the equation specialized in one value of parameters is exactly two then it will be the same for the Malgrange pseudogroup of the equation specialized in a general value of parameters. A first application of this result is an other proof of the irreductibility of the Painlevé equations for general value of parameters. A second application is to fully determined the Malgrange pseudogroups of this equations for general value of parameters.

The definitions of the Malgrange pseudogroup of a vector field and the specialisation results can be adapted the q-difference equations. By applying this results to the discret Painlevé equations, we fully determined the Malgrange pseudogroup of the latters for general value of parameters.