



**HAL**  
open science

# Modèles non locaux en rupture ductile des métaux

Koffi Enakoutsa

► **To cite this version:**

| Koffi Enakoutsa. Modèles non locaux en rupture ductile des métaux. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Pierre et Marie Curie, Paris VI, 2007. Français. NNT: . tel-01492088

**HAL Id: tel-01492088**

**<https://theses.hal.science/tel-01492088>**

Submitted on 17 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6**

Spécialité : **Mécanique**

présentée par

**ENAKOUTSA Koffi**

pour obtenir le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de thèse :

**MODÈLES NON LOCAUX EN RUPTURE DUCTILE  
DES MÉTAUX**

Soutenance prévue le 15-01-2007

devant le jury composé de Messieurs :

Amine BENZERGA	Rapporteur
Jean-Michel BERGHEAU	Rapporteur
Basile AUDOLY	Examinateur
Philippe GILLES	Examinateur
Jean-Baptiste LEBLOND	Examinateur
Jean-Jacques MARIGO	Examinateur
Quoc Son NGUYEN	Examinateur
Gilles PERRIN	Examinateur

---

# Présentation générale

---

Il est unanimement admis que le modèle de Gurson [Gur, 1977] amélioré par Tvergaard et Needleman [Tve, 1981] [Tve & Nee, 1984] décrit correctement le comportement des matériaux plastiques poreux dans un nombre important de cas. Ce modèle “homogénéisé” a été obtenu à partir d’une analyse-limite approximative d’une sphère creuse soumise à des conditions de taux de déformation homogène au bord. La sphère creuse représente approximativement un volume élémentaire dans un matériau poreux.

Le modèle de Gurson présente cependant des défauts. Un de ces défauts est qu’il n’est pas applicable à des volumes élémentaires trop petits pour contenir au moins une cavité. Ceci est, malheureusement, exactement ce qui se produit dans les simulations numériques par éléments finis qui prédisent une localisation de l’endommagement dans des volumes de taille tendant graduellement vers zéro.

De plus, le modèle de Gurson ne décrit que le comportement mécanique macroscopique des métaux plastiques poreux contenant des cavités de tailles *identiques*. Dans de nombreux matériaux cependant l’observation de faciès de rupture ductile révèle la présence de cavités de *tailles différentes*.

L’objet du mémoire de thèse résumé ici est d’apporter des éléments de réponse aux deux insuffisances du modèle de Gurson ci-dessus indiquées. Le mémoire est subdivisé en deux parties inégales. La plus longue est la première. Elle est consacrée à l’étude de l’efficacité pratique de deux solutions proposées au problème de la concentration infinie de l’endommagement et de la déformation. La seconde partie est une contribution, prolongeant celle de Perrin [Per & Leb, 2000], à l’étude des matériaux ductiles poreux contenant deux populations de cavités.

## Première partie

Tous les modèles de comportement adoucissants prédisent une concentration de la déformation dans des zones d'épaisseur de plus en plus petite (par exemple sous forme de bandes de cisaillement). Ce phénomène conduit à des conséquences indésirables, aussi bien sur le plan mathématique que sur le plan physique. Parmi ces conséquences, on peut citer l'existence de bifurcations présentant un nombre infini de branches bifurquées, la dépendance des résultats vis-à-vis de la taille de maille dans les simulations numériques par éléments finis, et l'absence d'énergie de dissipation au cours de la propagation de la fissure. Tous ces phénomènes constituent des symptômes d'un défaut fondamental de ces modèles : leur domaine d'application est limité à une échelle minimale ; mais quand la déformation se localise, comme ils le prédisent, ils sont, en fait, abusivement utilisés à des échelles inférieures à cette échelle minimale. En d'autres termes, la prédiction de la localisation est en contradiction avec le caractère macroscopique des modèles. Le modèle de Gurson n'échappe malheureusement pas à ces phénomènes.

Pour venir à bout de ces difficultés, deux propositions de modification de ce modèle ont été faites par Leblond *et al.* [JBL, 1994] et Gologanu *et al.* [GLPD, 1997]. Ces deux propositions sont différentes, mais comme tous les modèles proposés dans différents contextes physiques pour résoudre le problème de la localisation de la déformation, elles possèdent en commun un aspect : l'introduction dans le modèle d'une longueur caractéristique dont le rôle est de limiter la localisation de la déformation. Dans les cas spécifiques considérés, cette longueur sera reliée à l'espacement moyen des cavités.

Cette partie du mémoire a pour but de tester l'efficacité pratique de ces deux propositions. Les critères utilisés sont l'indépendance des résultats numériques vis-à-vis de la taille de maille et la capacité des modèles à reproduire de manière satisfaisante les résultats d'expériences de rupture ductile réalisées sur des éprouvettes-type en acier A508 Cl.3.

### Chapitre 1

La première solution, purement heuristique, est inspirée d'une suggestion initiale de Pijaudier-Cabot et Bazant [Pij & Baz, 1987] faite dans le contexte de l'endommagement du béton. Elle consiste à adopter une équation d'évolution non locale de la porosité (paramètre responsable de l'adoucissement) en conservant les autres équations constitutives du modèle de Gurson. La non localité est introduite sous la forme d'une intégrale de convolution d'un "taux de porosité local".

Nous commençons par présenter brièvement les équations constitutives du modèle de Gurson et de sa variante non locale. Nous envisageons ensuite, pour préparer la discussion de l'implémentation numérique, la relation de ces modèles avec la classe des matériaux standards généralisés, telle que l'ont définie et étudiée Halphen et Nguyen [Hal & Ngu, 1975] et Nguyen [Ngu, 1977]. Nous montrons à cet

effet que les versions originale et modifiée du modèle définissent un tel matériau, à porosité fixée et dans l'hypothèse des petites transformations.

Nous discutons ensuite de l'implémentation numérique du modèle. La propriété précédente garantit que le "problème de projection" des contraintes calculées élastiquement sur la surface de charge (correction plastique du prédicteur élastique) admet une unique solution, à condition que les équations de ce problème soient obtenues par une discrétisation temporelle implicite par rapport aux composantes de la déformation plastique et au paramètre d'écrouissage, mais explicite vis-à-vis de la porosité. C'est la raison principale pour laquelle nous adoptons un algorithme "mixte" implicite/explicite qui est fondamentalement analogue à celui, classique, d'Aravas, sauf ce qui concerne l'usage d'un schéma de discrétisation explicite vis-à-vis de la porosité.

Dans la suite, nous comparons les résultats de simulations numériques par éléments finis de rupture d'éprouvettes axisymétriques fissurées avec des observations expérimentales de [Rou & Mur, 1981]. On observe que bien que l'équation d'évolution non locale de Leblond *et al.* [JBL, 1994] permette de s'affranchir des effets de la taille de maille, elle dégrade considérablement l'accord obtenu entre les courbes force-déplacement numérique et expérimentale. Une analyse détaillée des résultats numériques révèle que ce phénomène est dû à un lissage excessif, au cours du temps, de la porosité dans le ligament situé devant la pointe de fissure.

Une analyse théorique, basée sur des approximations grossières telles que le caractère infini des milieux considérés et l'homogénéité des champs mécaniques, est présentée pour expliquer qualitativement ce phénomène. Nous montrons que l'équation d'évolution non locale utilisée est qualitativement analogue à une équation de diffusion, la déformation plastique cumulée jouant le rôle du "temps". Une telle équation de diffusion est à l'origine du phénomène de lissage excessif de la porosité.

Un remède très simple mais efficace, suggéré par la précédente analyse, consiste à adopter une équation d'évolution non locale du *logarithme de la porosité* au lieu de la porosité elle-même. Cette modification change le caractère mathématique de l'équation, ce qui supprime l'analogie avec une équation de diffusion. Les simulations numériques avec la nouvelle équation d'évolution de la porosité ne montrent plus de lissage excessif de la porosité et reproduisent les expériences. Par conséquent, avec cette modification, la méthode heuristique de régularisation de l'équation d'évolution de la porosité par intégrale de convolution apparaît comme une solution viable au problème de la localisation de la déformation dans les matériaux ductiles.

## Chapitre 2

La deuxième solution au problème de la localisation, fondée sur une approche micromécanique et non plus phénoménologique, provient d'un raffinement de la technique d'homogénéisation originale de

Gurson. L'idée de base de cette approche est que les conditions de taux de déformation homogène au bord utilisées par Gurson, basées implicitement sur l'hypothèse d'homogénéité des champs mécaniques à l'échelle du volume représentatif élémentaire, deviennent inadéquates quand apparaît la localisation de la déformation. La variation rapide des champs mécaniques macroscopiques sur des distances de l'ordre de l'espacement moyen entre cavités est pris en compte dans la nouvelle approche [GLPD, 1997] en supposant que le champ de vitesse varie de façon quadratique et non plus linéaire en fonction des coordonnées sur les bords de la cellule représentative. L'analyse aboutit à un modèle homogénéisé complexe qui fait intervenir à la fois le second gradient du champ de vitesse macroscopique et des contraintes macroscopiques généralisées de type "moment".

Le chapitre commence par un bref rappel des équations constitutives de ce modèle. Une difficulté est que son implémentation numérique nécessite apparemment l'usage d'éléments de classe  $\mathcal{C}^1$ . Cette difficulté peut être levée en introduisant une nouvelle variable nodale destinée à être égale au taux de déformation, en modifiant l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs, et en imposant l'égalité entre la nouvelle variable et le taux de déformation par une méthode de pénalisation. (Cette procédure est l'équivalent, dans le contexte considéré, du passage de la théorie des plaques ou coques de Kirchhoff-Love à celle de Reissner et Mindlin). On obtient ainsi une nouvelle théorie, équivalente à l'ancienne, pour laquelle ne sont plus nécessaires des éléments de classe  $\mathcal{C}^1$ .

En faisant, comme dans le chapitre précédent, l'hypothèse des petites transformations, nous montrons ensuite que les équations constitutives du modèle avec ou sans pénalisation définissent un matériau standard généralisé à porosité fixée.

Cette propriété assure l'existence et l'unicité de la solution du "problème de projection", élément essentiel de l'implémentation numérique du modèle, à condition d'adopter un schéma de discrétisation implicite par rapport à toutes les variables internes à l'exception de la porosité. Le problème de projection lui-même est réduit à la recherche de deux scalaires inconnus à travers une paramétrisation convenable de la surface de charge.

Nous présentons ensuite une solution analytique exacte des équations du modèle pour le problème d'une poutre élastoplastique en flexion pure en déformation plane, en petites transformations. Une autre solution analytique des équations du modèle est donnée pour le problème d'une sphère creuse élastique en petites transformations, puis visqueuse en grandes transformations. Les deux solutions analytiques sont utilisées pour tester et valider l'implémentation numérique des équations du modèle. La première, permet de plus de mieux comprendre certains aspects fondamentaux du modèle.

L'application du modèle à la simulation d'une éprouvette axisymétrique pré-fissurée fictive montre que la méthode permet de lever les difficultés liées à la dépendance des résultats numériques vis-à-vis du maillage. Les mêmes simulations numériques, reprises cette fois-ci sur des éprouvettes axisymétriques

entaillées réelles, révèlent de graves ennuis de convergence. En pratique, nous n'avons obtenu de résultats convergés, qu'avec une variante explicite de l'algorithme élastoplastique, consistant à utiliser les incréments de déformation plastique du pas de temps immédiatement précédent.

Les simulations montrent alors un accord satisfaisant entre les courbes force-déplacement numérique et expérimentale, ce qui établit l'efficacité de la deuxième solution examinée pour résoudre le problème de la localisation de la déformation et de l'endommagement dans le modèle de Gurson.

## Deuxième partie

La deuxième partie du mémoire est consacrée à l'étude de l'influence de la germination d'une seconde population de petites cavités sur la croissance et la coalescence des grandes cavités de la première population. Pour cela, nous considérons le problème-modèle d'une sphère creuse constituée d'un matériau rigide-parfaitement plastique poreux et soumise à un chargement de traction hydrostatique. La matrice poreuse contient des cavités de tailles identiques et beaucoup plus petites que la grande cavité centrale, de sorte qu'il est licite d'assimiler cette matrice à un matériau homogène obéissant au modèle de Gurson-Tvergaard-Needleman. La germination continue des petites cavités dans la matrice est décrite par une formule phénoménologique proposée par Pineau et Joly [Pin & Jol, 1991].

Ce problème est résolu analytiquement à l'instant initial et numériquement au-delà de cet instant. Ces éléments sont utiles pour définir un modèle simplifié homogénéisé comprenant très peu de paramètres internes, décrivant la croissance de la première population de cavités couplée avec la germination, la croissance et la coalescence des cavités de la seconde population.

Cette étude ouvre la voie à l'analyse de la coalescence des grandes cavités assistée par la germination, la croissance et la coalescence des petites cavités.

---

# Table des matières

---

<b>Présentation générale</b>	<b>1</b>
<b>I Modèles Non Locaux en Rupture Ductile</b>	<b>11</b>
<b>1 Modèles local et non local de Gurson</b>	<b>12</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Mécanismes physiques de la rupture ductile . . . . .	15
1.3 Quelques modèles de rupture ductile . . . . .	16
1.4 Le modèle de Gurson local de rupture ductile . . . . .	17
1.4.1 Phase de germination des cavités . . . . .	17
1.4.2 Phase de croissance des cavités . . . . .	18
1.4.2.1 Critère de plasticité de Gurson original . . . . .	18
1.4.2.2 Loi de normalité macroscopique . . . . .	20
1.4.2.3 Loi d'évolution de la porosité . . . . .	20
1.4.2.4 Introduction des paramètres de Tvergaard . . . . .	21
1.4.2.5 Prise en compte de l'écrouissage . . . . .	22
1.4.3 Phase de coalescence des cavités . . . . .	23
1.4.4 Introduction de l'hypoélasticité . . . . .	24
1.4.5 Résumé : équations constitutives du modèle . . . . .	26
1.4.5.1 Eléments essentiels du modèle local de Gurson . . . . .	26



1.4.5.2	Quelques remarques en guise de conclusion . . . . .	27
1.5	Modèles non locaux en rupture ductile . . . . .	29
1.5.1	Généralités . . . . .	29
1.5.2	Version non locale de Leblond <i>et al.</i> du modèle de Gurson . . . . .	31
1.6	Classe des matériaux standards généralisés et modèle de Gurson . . . . .	32
1.6.1	Généralités . . . . .	32
1.6.1.1	Propriété 1 . . . . .	33
1.6.1.2	Propriété 2 . . . . .	34
1.6.1.3	Propriété 3 . . . . .	34
1.6.2	Exemple simple de MSG : matériau de von Mises à écrouissage isotrope . . . . .	35
1.6.3	Modèle de Gurson et classe des matériaux standards généralisés . . . . .	37
1.6.3.1	Caractère standard généralisé du modèle de Gurson à porosité fixée . . . . .	37
1.7	Implémentation numérique des équations constitutives . . . . .	41
1.7.1	Discrétisation en temps . . . . .	41
1.7.2	Généralités sur la démarche de résolution . . . . .	41
1.7.3	Algorithme implicite de projection sur le critère . . . . .	43
1.7.3.1	Généralités . . . . .	43
1.7.3.2	Equations discrétisées du problème de projection . . . . .	44
1.7.3.3	Démarche de résolution . . . . .	46
1.7.3.4	Prise en compte des grandes transformations . . . . .	47
1.7.3.5	Comparaison avec d'autres algorithmes . . . . .	48
1.7.4	Traitement numérique de la délocalisation . . . . .	49
1.7.4.1	Remarque : correction de l'incrément de déplacement initial entre les instants $t$ et $t + \Delta t$ . . . . .	50
1.7.4.2	Conséquences du caractère standard généralisé à porosité fixée sur la solution du problème de projection . . . . .	50
1.7.4.3	Autres arguments en faveur d'un algorithme explicite par rapport à la porosité . . . . .	52
1.8	Applications : essais numériques sur des éprouvettes fissurées . . . . .	54
1.8.1	Généralités . . . . .	54
1.8.2	Vérification de l'absence d'effet de la taille de maille . . . . .	55
1.8.3	Comparaisons calculs numériques/expériences . . . . .	57
1.9	Analyse du lissage de la porosité . . . . .	62
1.10	Version non locale logarithmique du modèle de Gurson standard . . . . .	64

1.11	Reprise des simulations numériques par éléments finis . . . . .	64
1.11.1	Simulations numériques sur des éprouvettes axisymétriques fissurées . . . . .	64
1.11.2	Simulations numériques sur l'éprouvette en flexion CTJ 25 . . . . .	66
1.12	Conclusion . . . . .	68
<b>2</b>	<b>Modèle micromorphique de rupture ductile</b>	<b>70</b>
2.1	Introduction . . . . .	70
2.2	Modèle GLPD : théorie . . . . .	72
2.2.1	Homogénéisation en conditions de taux de déformation inhomogène au bord . .	73
2.2.2	Lemme de Hill-Mandel et définition des contraintes et moments macroscopiques	74
2.2.3	Puissance virtuelle des efforts intérieurs et extérieurs et équations d'équilibre macroscopiques . . . . .	75
2.2.4	Elimination des mouvements de corps rigide . . . . .	75
2.2.5	Analyse-limite pour un matériau rigide parfaitement-plastique . . . . .	77
2.2.6	Analyse-limite d'une sphère creuse soumise à un chargement axisymétrique . .	78
2.2.7	Critère général pour les chargements non axisymétriques . . . . .	79
2.2.8	Loi d'écoulement associée au critère par normalité . . . . .	80
2.2.9	Introduction de l'écrouissage et de l'hypoélasticité . . . . .	82
2.2.10	Conclusion : résumé des équations théoriques du modèle GLPD . . . . .	83
2.2.11	Elimination des dérivées secondes du champ de vitesse . . . . .	85
2.3	Modèle GLPD et classe des matériaux standards généralisés . . . . .	89
2.3.1	Cas du modèle "normal" sans pénalisation . . . . .	89
2.3.1.1	Variables internes . . . . .	89
2.3.1.2	Energie libre et propriétés . . . . .	90
2.3.1.3	Loi d'écoulement . . . . .	91
2.3.2	Cas du modèle avec pénalisation . . . . .	94
2.4	Modèle GLPD : implémentation numérique . . . . .	95
2.4.1	Numérisation des équations du modèle . . . . .	95
2.4.1.1	Algorithme de projection sur la surface de charge . . . . .	95
2.4.1.2	Résolution sur l'écrouissage et la porosité . . . . .	102
2.4.2	Calcul de $\nabla \mathbf{W}$ dans le cas axisymétrique . . . . .	103
2.5	Modèle GLPD : évaluation numérique . . . . .	105
2.5.1	Problème de la poutre en flexion, en déformation plane . . . . .	105
2.5.1.1	Géométrie, cinématique et conditions aux limites . . . . .	106
2.5.1.2	Solution du problème dans le cas élastique pur . . . . .	107

2.5.1.3	Solution du problème dans le cas plastique pur . . . . .	110
2.5.2	Solution dans le cas élastoplastique . . . . .	116
2.5.3	Discussion : examen de la solution . . . . .	120
2.5.4	Résultats numériques et comparaison avec les solutions analytiques : cas de la poutre en flexion . . . . .	121
2.5.5	Solution analytique du problème de la sphère creuse en élasticité . . . . .	125
2.5.5.1	Remarque préliminaire . . . . .	125
2.5.5.2	Résolution . . . . .	125
2.5.6	Résolution du problème pour un fluide visqueux . . . . .	129
2.5.7	Résultats numériques et comparaison avec les solutions analytiques : cas de la sphère creuse . . . . .	129
2.6	Modèle GLPD : applications . . . . .	132
2.6.1	Effet de la taille de maille . . . . .	132
2.6.2	Simulations numériques sur des éprouvettes axisymétriques entaillées . . . . .	133
2.6.3	Simulations numériques sur des éprouvettes axisymétriques fissurées . . . . .	135
2.6.4	Algorithme élastoplastique, deuxième version . . . . .	135
2.6.5	Reprise des simulations numériques sur des éprouvettes axisymétriques fissurées . . . . .	136
2.7	Conclusion . . . . .	137
	Annexe . . . . .	139

## **II Matériaux Ductiles à Double Population de Cavité 152**

### **3 Double population de cavités et germination 153**

3.1	Introduction . . . . .	153
3.2	Solution analytique du problème de la sphère creuse à l'instant initial . . . . .	155
3.2.1	Présentation du problème . . . . .	155
3.2.2	Champs de contrainte et de déformation . . . . .	156
3.2.3	Taux de croissance des cavités . . . . .	157
3.3	Solution analytique du problème de la sphère creuse au-delà de l'instant initial . . . . .	159
3.3.1	Champ de contraintes . . . . .	159
3.3.2	Champ de déformation . . . . .	160
3.3.3	Taux de porosité dans la matrice . . . . .	160
3.3.4	Etude asymptotique de la porosité $f_2$ pour $r \rightarrow a$ . . . . .	161
3.4	Etude numérique après le début de la coalescence des petites cavités . . . . .	161

3.4.1	Présentation du problème . . . . .	161
3.4.2	Principe des simulations numériques . . . . .	162
3.4.3	Définition des porosités $f_1$ , $f_1^*$ et $\bar{f}_2$ . . . . .	162
3.4.4	Résultats des simulations numériques . . . . .	163
3.5	Modèle pour les matériaux poreux à deux populations de cavités . . . . .	164
3.5.1	Présentation du modèle . . . . .	164
3.5.2	Equations d'évolution des paramètres internes avant la coalescence des petites cavités . . . . .	167
3.5.3	Equations d'évolution des paramètres internes durant la coalescence des petites cavités . . . . .	168
3.5.4	Résumé et comparaison avec les simulations numériques . . . . .	168
3.6	Conclusion . . . . .	169
	Annexe 1 . . . . .	170
	Annexe 2 . . . . .	174
	Annexe 3 . . . . .	181
	<b>Conclusion générale</b>	<b>184</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>187</b>

Première partie

**Modèles Non Locaux en Rupture Ductile**

---

# Modèles de Gurson local et non local de rupture ductile

---

## **Avertissement**

Les sections [1.2], [1.3], [1.4] et [1.5] ne contiennent aucun résultat original à proprement parler. Elles reprennent, pour l'essentiel, de façon très sommaire, les étapes successives qui ont conduit au très classique modèle de Gurson-Tvergaard-Needelman (GTN). Le lecteur familiarisé avec ce modèle peut passer sans préjudice à la section [1.6] où commence véritablement la partie originale du premier chapitre de ce mémoire.

## 1.1 Introduction

Une très large variété de comportements constitutifs fait intervenir des mécanismes d'endommagement à l'échelle du *point matériel*<sup>1</sup>, qui doivent être modélisés à l'aide d'équations constitutives spécifiques. Bien que ces comportements constitutifs diffèrent les uns des autres aussi bien dans leur formulation que dans leurs mécanismes physiques, ils possèdent en commun un aspect : au delà d'un certain niveau de chargement, le domaine de réversibilité exprimé dans l'espace des contraintes se rétrécit. Cette propriété essentielle, caractéristique de la mécanique de l'endommagement appelée adoucissement, est responsable de la localisation des champs mécaniques (déformations, endommagement, déformation plastique etc.) qu'il est possible d'observer expérimentalement sur plusieurs matériaux endommageables (sols, béton, métaux, etc.) dans des zones de volume suffisamment petit.

Malgré les grands progrès qui ont été réalisés dans le domaine de la description des mécanismes d'endommagement par l'*approche locale* sur la base aussi bien des analyses "micro-macro" que des intuitions phénoménologiques, la modélisation numérique des phénomènes de localisation reste un défi qui n'est pas encore entièrement relevé. Les phénomènes de localisation continuent d'entraver les prédictions numériques de la propagation des zones endommagées dans des structures réelles soumises à des sollicitations mécaniques.

La difficulté essentielle provient du fait que les équations qui décrivent le comportement de la structure (qui incluent non seulement les équations constitutives mais aussi celles gouvernant l'équilibre) deviennent, d'un point de vue mathématique, "mal posées", ce qui entraîne des conséquences indésirables comme l'existence de bifurcations présentant un nombre infini de branches bifurquées. D'un point de vue physique, les déformations et l'endommagement ont tendance à se localiser dans des zones de volume nul, entraînant une rupture sans énergie dissipée. Enfin, les calculs numériques par éléments finis souffrent pathologiquement d'une forte sensibilité au maillage.

Tous ces phénomènes sont clairement symptomatiques d'un défaut fondamental des lois constitutives qui régissent ces comportements : leur domaine d'application est limité à une échelle minimale ; mais quand la déformation se localise, comme elles le prédisent, elles sont, en fait, abusivement utilisées à des échelles inférieures à cette échelle minimale. Autrement dit, la prédiction de la localisation est en contradiction avec le caractère macroscopique de ces lois.

Le modèle de Gurson [Gur, 1977] de rupture ductile, basé sur une technique d'homogénéisation approchée d'une sphère creuse, volume élémentaire représentatif d'un matériau plastique poreux, n'échappe malheureusement pas au phénomène de la dépendance des résultats numériques qu'il prédit vis-à-vis de la taille de maille. Dans ce modèle, l'adoucissement qui est dû à l'augmentation de la porosité, est responsable de la localisation de l'endommagement.

---

<sup>1</sup>Au sens de la mécanique des milieux continus.

L'objet de ce chapitre est de tester numériquement l'efficacité pratique d'une méthode heuristique proposée par Leblond *et al.* [JBL, 1994], à partir d'une suggestion initiale de Pijaudier-Cabot et Bazant [Pij & Baz, 1987] faite dans le contexte de l'endommagement du béton, pour résoudre ces problèmes dans le modèle de Gurson. Elle consiste à adopter une *équation d'évolution non locale* de la variable responsable de l'adoucissement (la porosité) dans les équations constitutives de ce modèle. Le taux de porosité est exprimé sous la forme d'une intégrale de convolution d'un "taux de porosité local". Cette solution a déjà été adoptée par certains auteurs, notamment Tvergaard et Needleman [Tve & Nee, 1995] [Tve & Nee, 1995]. Leur contribution a consisté à examiner si cette solution élimine la dépendance vis-à-vis de la taille de maille dans les calculs numériques par éléments finis [Tve & Nee, 1995]. Ils ont ensuite utilisé les résultats de simulations numériques de la formation de bandes de cisaillement et de coalescence des cavités dans les matériaux plastiques poreux pour ajuster la valeur de la longueur caractéristique introduite dans le modèle [Tve & Nee, 1997]. Ils montrent que cette longueur caractéristique est, soit égale à la valeur moyenne de la distance entre cavités, soit égale à la valeur moyenne du rayon des cavités suivant que le mécanisme qui conduit à la rupture finale est la coalescence des cavités ou la formation des bandes de cisaillement. Finalement ils étendent le modèle en y incorporant les effets dynamiques (Tvergaard et Needleman, 1998). Cependant, dans aucun de ces travaux n'a été envisagé la comparaison entre les prédictions numériques et les expériences.

L'évaluation du caractère opérationnel de la proposition de Leblond *et al.* sera basée sur deux principaux critères : d'une part, les résultats numériques prédits par le nouveau modèle ne doivent plus souffrir d'aucune dépendance pathologique vis-à-vis du maillage ; d'autre part, ils doivent pouvoir reproduire, de manière satisfaisante, les résultats d'expérience typique de rupture ductile.

Le point de départ du chapitre est la présentation des équations théoriques du modèle de Gurson dans ses versions locale et non locale de Leblond *et al.* [JBL, 1994]. Dans la suite, nous discutons des conditions d'existence et d'unicité de la solution du "problème de projection sur la surface de charge", élément essentiel de l'implémentation numérique, dans le cadre du formalisme des matériaux standards généralisés, puis nous décrivons en détail cette implémentation, rendue délicate par la présence d'un critère de plasticité complexe. Enfin, nous comparons les résultats issus des simulations numériques de la rupture d'éprouvettes axisymétriques fissurées avec ceux obtenus expérimentalement.

Les expériences numériques indiquent que l'utilisation de l'équation d'évolution non locale de la porosité de Leblond *et al.* [JBL, 1994] permet d'éliminer l'effet de dépendance vis-à-vis de la taille de maille, mais elle possède l'inconvénient de considérablement dégrader le très bon accord entre la courbe de charge expérimentale force-déplacement et celle prédite numériquement par le modèle local de Gurson, invalidant ainsi le caractère opérationnel de la démarche proposée. A l'origine de ce problème



se trouve un phénomène que révèle une analyse détaillée des résultats numériques. Il s’agit du lissage excessif de la porosité au cours du temps dans le ligament en amont de la pointe de fissure.

Nous présentons, dans la section [1.9], une analyse théorique de ce phénomène qui est basée sur deux approximations : l’homogénéité des champs mécaniques et le caractère infini du milieu considéré. Ces deux approximations sont grossières mais elles sont acceptables pour expliquer, qualitativement tout au moins, le défaut présenté par la version non locale de Leblond *et al.* [JBL, 1994] du modèle de Gurson. En effet, nous montrons que l’équation d’évolution non locale de Leblond *et al.* est, qualitativement, semblable à une équation de diffusion, la déformation plastique cumulée locale jouant le rôle du “temps”. Une telle équation conduit inexorablement au lissage de la porosité comme l’équation de diffusion de la chaleur dans un métal conduit, après un temps plus ou moins long, à une répartition uniforme de la température dans ce métal.

L’analyse précédente nous permet de suggérer une solution très simple que nous présentons dans la section [1.10]. Cette solution consiste à considérer une équation d’évolution non locale du logarithme de la porosité au lieu de la porosité elle même. Le caractère mathématique de l’équation d’évolution de la porosité change et cette dernière ne devrait plus conduire à un lissage excessif de la porosité.

Les simulations numériques sur plusieurs géométries d’éprouvettes incluant les éprouvettes axisymétriques fissurées et CT, reprises, en utilisant la nouvelle équation d’évolution de la porosité, viennent confirmer cette espérance. Ces nouvelles simulations numériques donnent, elles, des résultats en accord satisfaisant avec l’expérience.

## 1.2 Mécanismes physiques de la rupture ductile

Les matériaux ductiles peuvent subir d’importantes déformations plastiques sous l’effet des sollicitations. Le processus qui conduit ces matériaux à la rupture peut être décrit, d’après des observations expérimentales de faciès de rupture ductile, par un mécanisme qui se déroule en trois phases : la germination, la croissance et la coalescence des microcavités.

La phase de **germination des cavités** survient au niveau de sites privilégiés (défauts préexistants) par décohésion de la matrice métallique autour des inclusions (sulfures, carbures tec.) ou rupture de ces dernières. On distingue généralement une germination brutale, autour de grosses inclusions, que l’on suppose régie par un critère en contrainte, et une germination continue, autour de petites inclusions, que l’on suppose pilotée par la déformation plastique “moyenne” de la matrice.

A côté de ces deux types de germination de cavités, on en distingue une troisième, généralement négligée, qui se produit au niveau des hétérogénéités submicroscopiques telles que celles générées par le mouvement des dislocations. Lorsque le glissement de ces dislocations est empêché, leur empilement

peut entraîner la création de microvides ou de microfissures.

La phase de **croissance** des microcavités (ou des microfissures) apparaît comme un prolongement de la première. Elle résulte de l'augmentation de la taille des microcavités. Le taux de croissance de ces dernières est étroitement lié à la contrainte hydrostatique, souvent prise en compte *via* le taux de triaxialité des contraintes, rapport de cette contrainte hydrostatique à la contrainte équivalente de von Mises. Au cours de cette phase, la forme des microcavités change également.

La phase de **coalescence** des cavités suppose un des deux mécanismes suivants : un empiètement direct des cavités (résultant de leur croissance) entre elles ou l'apparition de bandes de localisation de la déformation entre les cavités. Dans tous les cas, elle mène à la formation d'une microfissure et à la rupture finale du matériau.

### 1.3 Quelques modèles de rupture ductile

Les phénomènes précédents ont été abondamment étudiés, on pourra se référer par exemple à Bauvineau *et al.* [Bau, 1996] qui ont modélisé la phase de germination ainsi qu'à Rice et Tracey [Ric, 1969], Gurson [Gur, 1977], Tvergaard [Tve, 1981], Rousselier (1981), Leblond *et al.* (1995), Perrin *et al.* [Per, 1992], Garajeu *et al.* [Gar, 1995] et bien d'autres encore qui ont étudié et modélisé les phases de croissance et de coalescence des cavités.

A la suite de ces travaux et des extensions qui ont suivi, on dispose à l'heure actuelle de plusieurs modèles qui permettent de décrire les phases de germination, croissance et coalescence des cavités.

Ces modèles diffèrent par leur degré de raffinement (modélisation heuristique ou micromécanique, prise en compte ou non des effets de forme des cavités, du contact unilatéral des cavités avec les inclusions etc.) Parmi ces modèles, le plus utilisé est sans nul doute celui de Gurson [Gur, 1977] modifié par Tvergaard et Needleman (modèle GTN) [Gur, 1977] [Tve, 1981]. Ce modèle a à son actif d'impressionnants succès sur lesquels nous reviendrons brièvement dans la section [1.2].

Nous présentons dans ce qui suit les équations théoriques du modèle de Gurson. La présentation suit naturellement les phases de germination, croissance et coalescence des cavités correspondant aux trois principaux mécanismes qui se succèdent dans le temps.

## 1.4 Le modèle de Gurson local de rupture ductile

### 1.4.1 Phase de germination des cavités

On distingue deux types de germination des cavités :

#### Une germination par décohésion des inclusions.

Elle est brutale et contrôlée par un critère en contrainte. Ce critère est donné, d'après [Ber, 1981] et [Mud, 1982], par :

$$(1.1) \quad \sigma_1 + \alpha(\sigma_{eq} - \sigma_0) \leq \sigma_c$$

où  $\sigma_1$  désigne la plus grande contrainte principale du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\alpha$  un paramètre adimensionnel,  $\sigma_0$  la limite d'élasticité,  $\sigma_c$  une contrainte critique et  $\sigma_{eq}$  la contrainte équivalente définie par :

$$(1.2) \quad \sigma_{eq} = \frac{3}{2}(s_{ij}s_{ij})^{\frac{1}{2}}$$

où  $\mathbf{s}$  désigne le déviateur de  $\boldsymbol{\sigma}$ . Il n'y a pas de germination tant que l'inégalité reste stricte dans [1.1]; lorsque l'égalité est réalisée, la porosité  $f$  saute brutalement à sa valeur "initiale"  $f_0$  (et ne peut ensuite redevenir inférieure à cette valeur).

Il faut noter que la modélisation de la germination brutale n'appartient pas au modèle de Gurson proprement dit, elle est due à Beremin. (Elle ne joue d'ailleurs aucun rôle dans la suite). Seule la germination continue fait partie du modèle de Gurson étendu (par Tvergaard et Needleman).

#### Une germination continue.

Lorsqu'on tient compte de ce type de germination, la loi d'évolution de la porosité s'obtient en décomposant  $\dot{f}$  en  $\dot{f}_c + \dot{f}_n$  où  $\dot{f}_c$  et  $\dot{f}_g$  sont respectivement les taux d'accroissement de la porosité par croissance et par germination (nucleation en anglais) des cavités. L'expression de  $\dot{f}_c$  sera donnée plus loin.

Il ne reste donc plus qu'à proposer une expression de  $\dot{f}_g$  pour déterminer complètement  $\dot{f}$ . C'est ce que font Pineau et Joly, en supposant que la germination est pilotée par la déformation plastique macroscopique  $\bar{\epsilon}$  (qui sera définie précisément plus loin), sous la forme d'une loi (empirique) dont l'expression est donnée par

$$(1.3) \quad \dot{f}_g \equiv A(\bar{\epsilon})\dot{\bar{\epsilon}}$$

où  $A$  est une fonction croissante puis décroissante de  $\bar{\epsilon}$ , en accord avec l'idée phénoménologique selon laquelle la germination des cavités nécessite une déformation assez importante, mais est limitée par

le nombre d'inclusions susceptibles d'engendrer des vides. Dans la pratique cependant, on fait généralement l'hypothèse que  $A$  est constant, les seules <sup>2</sup> expériences disponibles de mesure de  $A$ , dues à Pineau et Joly (1991), n'ayant pas clairement montré de dépendance de  $A$  vis-à-vis de  $\bar{\epsilon}$ .

### 1.4.2 Phase de croissance des cavités

La phase de croissance des cavités est décrite par le critère de Gurson [Gur, 1977] modifié d'une part par Tvergaard [Tve, 1981] pour prendre en compte les effets des interactions entre les cavités, et d'autre part par Tvergaard et Needleman [Tve & Nee, 1984] pour rendre compte de leur coalescence.

Nous décrivons d'abord le critère de Gurson sous sa forme originale non modifiée, obtenue grâce à une analyse étendant celle, classique, de Rice et Tracey [Ric, 1969], effectuée dans le cas d'une cavité unique dans un milieu infini.

#### 1.4.2.1 Critère de plasticité de Gurson original

Le critère de plasticité de Gurson est obtenu grâce à l'analyse-limite d'une sphère creuse (de rayons intérieur et extérieur  $a$  et  $b$  respectivement) soumise à un chargement quelconque. Cette sphère creuse est censée représenter un volume élémentaire du milieu poreux. La description fait intervenir une variable d'endommagement, la porosité  $f$ , qui est responsable de l'adoucissement du matériau au cours de la déformation et qui correspond au volume de la cavité ramené au volume total de la microstructure. Dans le cas de la sphère creuse,  $f = (a/b)^3$ .

Comme dans l'analyse de Rice et Tracey [Ric, 1969], on fait l'hypothèse que le matériau constitutif de la matrice métallique de la sphère creuse est rigide-parfaitement plastique et on note  $\sigma_0$  sa limite d'élasticité en traction simple. La matrice obéit au critère de von Mises et à la loi d'écoulement associée au critère par normalité.

Le champ des vitesses,  $\mathbf{v}$ , sur le bord extérieur de la sphère est donné par :

$$(1.4) \quad v(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur position et  $\mathbf{D}$ , le tenseur d'ordre 2 de taux de déformation Eulérien macroscopique de la sphère creuse.

Dans la matrice métallique, le champ de vitesse-test  $\mathbf{v}$  considéré dans l'analyse-limite est de la forme :

$$(1.5) \quad v(\mathbf{x}) = \mathbf{D}' \cdot \mathbf{x} + \frac{b^3}{r^2} D_m e_r$$

---

<sup>2</sup>Tout au moins à la connaissance de l'auteur.

où  $\mathbf{D}'$  désigne le déviateur de  $\mathbf{D}$ ,  $D_m$  la déformation volumique ( $D_m = \frac{1}{3}\text{tr } \mathbf{D}$ ) et  $\mathbf{e}_r$  le vecteur unitaire radial en coordonnées sphériques. Ce champ de vitesse correspond à des conditions de taux de déformation homogène au bord et la seule connaissance de  $\mathbf{D}$  suffit à déterminer entièrement  $\mathbf{v}$ . Ceci signifie que le sous-espace des champs-tests considérés cinématiquement admissibles avec la donnée de  $\mathbf{D}$  est réduit à un point. La minimisation de la dissipation plastique sur ce sous-espace se réduit donc au simple calcul de cette dissipation. Le critère macroscopique s'en déduit par dérivation par rapport à  $\mathbf{D}$ . Pour les détails mathématiques de la résolution du problème, on pourra avantageusement se reporter à la thèse de Gurson [Gur, 1977] ou bien au chapitre 8 du livre de Leblond [Leb, 2003] qui présente de manière plus simple et plus rigoureuse certains points délicats.

Le principal résultat obtenu est une estimation approchée par l'extérieur d'une surface de charge macroscopique pour les matériaux plastiques poreux. Cette surface de charge est donnée par l'équation

$$(1.6) \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, f) \equiv \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - f^2 = 0$$

dans laquelle  $\sigma_0$  est la limite d'élasticité en traction simple de la matrice,  $\sigma_{eq}$  la contrainte équivalente de von Mises et  $\sigma_m$  la "contrainte moyenne" de  $\boldsymbol{\sigma}$  ( $\sigma_m \equiv \frac{1}{3}\text{tr } \boldsymbol{\sigma}$ ).

Au sujet de la fonction de charge  $\Phi$ , il y a lieu d'observer premièrement que quand  $f = 0$  l'équation [1.6] se ramène à  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, f) \equiv (\sigma_{eq}/\sigma_0)^2 - 1 = 0$  : le matériau non endommagé correspond à celui de von Mises. Deuxièmement, on calcule aisément les limites d'élasticité sous des chargements purement déviatorique et purement hydrostatique : en effet

$$\begin{aligned} \sigma_m = 0 &\implies \sigma_{eq}/\sigma_0 = 1 - f \\ \sigma_{eq} = 0 &\implies \sigma_m/\sigma_0 = \pm \frac{2}{3} \log(1/f). \end{aligned}$$

Une dernière remarque porte sur la rupture finale du matériau. De façon générale, un modèle d'endommagement doit pouvoir décrire le comportement du matériau jusqu'à cette rupture finale. Dans ce cas, les contraintes dans le matériau sont nulles ( $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ ) bien que le critère soit atteint, ce qui indique que les conditions

$$(1.7) \quad \Phi = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

sont simultanément respectées. En utilisant le critère [1.6] avec  $\sigma_{eq} = 0$  et  $\sigma_m = 0$ , on trouve

$$(1.8) \quad \Phi = 2f - 1 - f^2 = -(1 - f)^2 = 0;$$

autrement dit la rupture n'a lieu que si  $f = 1$ , auquel cas le matériau n'est constitué que de cavités. Prédiction de rupture plutôt irréaliste! Le modèle doit donc être amélioré, comme nous le verrons dans les sections [1.4.2.4], [1.4.2.5] et [1.4.3], de façon à pouvoir représenter correctement la fin du processus de rupture ductile.

### 1.4.2.2 Loi de normalité macroscopique

La propriété de normalité<sup>3</sup> implique que le tenseur de taux de déformation plastique  $\mathbf{D}^p$  est donné (après explicitation de la dérivée de la fonction de charge pour le critère de Gurson) par la formule :

$$(1.9) \quad \mathbf{D}^p = \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \eta \left[ \frac{3\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_0^2} + \frac{f}{\sigma_0} \sinh \left( \frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right) \mathbf{I} \right], \quad \eta \begin{cases} = 0 & \text{si } \Phi(\boldsymbol{\sigma}, f) < 0 \\ \geq 0 & \text{si } \Phi(\boldsymbol{\sigma}, f) = 0. \end{cases}$$

avec

$$(1.10) \quad \mathbf{D}^p = \eta \left[ \frac{3\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_0^2} + \frac{f}{\sigma_0} \sinh \left( \frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right) \mathbf{I} \right]$$

Dans ces deux dernières expressions,  $\eta$  désigne le multiplicateur plastique et  $\boldsymbol{\sigma}'$ , le déviateur des contraintes.

En prenant la trace de l'équation [1.10], on obtient

$$(1.11) \quad \text{tr } \mathbf{D}^p = \eta \left[ \frac{3f}{\sigma_0} \sinh \left( \frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right) \right]$$

Cette trace est non nulle puisque la porosité  $f$  et la contrainte moyenne  $\sigma_m$  sont non nulles en général. Il y a donc une variation plastique du volume, qui peut, suivant les cas, correspondre à une augmentation de la porosité si  $\sigma_m > 0$  ou une diminution si  $\sigma_m < 0$ . Le modèle prend donc en compte aussi bien la croissance que la refermeture des cavités.

### 1.4.2.3 Loi d'évolution de la porosité

L'un des paramètres internes intervenant dans le critère de plasticité macroscopique [1.6] est la porosité. Il est nécessaire que la loi qui régit son évolution soit précisée.

Nous allons voir que la variation de porosité est associée au taux de déformation plastique  $\mathbf{D}^p$  en utilisant le principe de la conservation de masse et l'incompressibilité approchée (en négligeant l'élasticité) de la matrice métallique. Dans la suite, désignons par  $\Omega$  le volume total et  $\omega$  le volume de la matrice. Ce dernier volume est constant.

Par définition de la porosité, on a

$$(1.12) \quad f = \frac{\Omega - \omega}{\Omega} = 1 - \frac{\omega}{\Omega}$$

Une différentiation de l'équation [1.12] prenant en compte la relation  $\dot{\omega} = 0$  donne :

$$(1.13) \quad \dot{f} = \frac{\omega}{\Omega} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = (1 - f) \text{tr } \mathbf{D} \approx (1 - f) \text{tr } \mathbf{D}^p$$

où l'on a de nouveau négligé l'élasticité.

---

<sup>3</sup>Gurson a montré que cette propriété "passe" de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique; il s'agit là en fait d'une conséquence d'un théorème général de l'analyse-limite.

#### 1.4.2.4 Introduction des paramètres de Tvergaard

L'utilisation du modèle de Gurson pour décrire le comportement élastoplastique des matériaux poreux conduit à un certain nombre de difficultés liées à deux types d'approximations utilisées pour l'obtenir :

- *des approximations dans l'analyse-limite elle-même dont dérive le critère et*
- *l'approximation, très grossière, qui consiste à représenter le matériau poreux par un volume élémentaire constitué d'une sphère creuse contenant une seule cavité.*

En ce qui concerne le premier point, les champs de vitesse utilisés par Gurson dans son analyse ne rendent pas compte de tous les phénomènes qui accompagnent l'écoulement plastique autour des cavités : à basse triaxialité, par exemple, les cavités sphériques tendent à s'allonger tandis qu'elles s'aplatissent à forte triaxialité. En ce qui concerne le second point, les effets d'interaction entre cavités sont négligés dans le critère, en contradiction avec les résultats de plusieurs études qui indiquent que ces effets deviennent très significatifs pour des porosités  $f$  dépassant 0.01.

C'est pour ces différentes raisons que Tvergaard [Tve, 1981] a proposé d'introduire dans le critère deux paramètres empiriques  $q_1$  et  $q_2$ , qu'il ajuste à partir de simulations micromécaniques par éléments finis sur des cellules soumises à des conditions aux limites périodiques, qui sont supposées, en principe, conduire à des solutions plus précises du problème. Plus précisément, Tvergaard a ajusté les valeurs de  $q_1$  et  $q_2$  de façon à retrouver avec le modèle de Gurson les prédictions numériques réputées exactes de la localisation de l'endommagement. Il trouve  $q_1 = 1.5$  et  $q_2 = 1$ .

Le critère de Gurson correspondant s'écrit :

$$(1.14) \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, f) \equiv \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2q_1 \cosh\left(q_2 \frac{3\sigma_m}{2\sigma_0}\right) - 1 - q_1^2 f^2 = 0.$$

Plus tard, Koplik et Needleman [Kop & Nee, 1988] d'une part et Faleskog *et al.* [FGS, 1998] d'autre part ont amélioré les valeurs des paramètres empiriques de Tvergaard. Les premiers ont suggéré des valeurs allant de 1.2 à 1.5 et montrent que ces valeurs dépendent de la triaxialité; les seconds, ont proposé un ensemble de valeurs qui dépendent à la fois de l'exposant de l'écroutissage  $n$  et du rapport  $\sigma_0/E$ .

De leur côté, Perrin *et al.* [Per, 1992] suggèrent de prendre  $q_1 = q$  et  $q_2 = 1$ . L'argument de Perrin *et al.* repose sur une idée générale qui consiste à identifier la valeur de la contrainte macroscopique moyenne  $\sigma_m$  donnée par le critère de Gurson, dans le cas particulier d'une contrainte macroscopique hydrostatique ( $\sigma_{eq} = 0$ ) avec *celle de la charge-limite exacte d'une sphère creuse soumise à un chargement hydrostatique de compression ou de traction*. Ils adoptent un schéma "différentiel"<sup>4</sup> pour déterminer

<sup>4</sup>Ce schéma est fondé sur la résolution du problème d'une sphère creuse dont le comportement est celui d'un matériau rigide-plastique *poreux* et soumise à une traction hydrostatique.

une valeur théorique du paramètre  $q_1$ . Ils trouvent  $q_1 = 4/e = 1.47$ , en accord plutôt acceptable avec les valeurs proposées par les expérimentateurs, qui en général vont de 1.5 à 2. Il a été cependant montré expérimentalement par Marini, Murdy et Pineau (1985) que ce paramètre pouvait être très différent de la valeur théorique en présence d'une double population de cavités. Il apparaît en effet, que les petites cavités situées à proximité des grosses pouvaient croître deux fois plus vite que ces dernières.

Finalement, le critère de Gurson amélioré par Tvergaard s'écrit, en prenant  $q_2 = 1$  et en notant  $q$  le paramètre  $q_1$  :

$$(1.15) \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, p) \equiv \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2p \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - p^2 = 0 \quad ; \quad p = qf$$

#### 1.4.2.5 Prise en compte de l'érouissage

La démarche adoptée dans la recherche de la surface d'écoulement [1.6] repose sur l'hypothèse que le matériau considéré est rigide-parfaitement plastique. Elle reste donc d'un usage pratique très limité car elle ne tient pas compte de l'érouissage qui est présent, à des degrés divers, dans tous les métaux.

Pour traiter le cas d'une matrice érouissable, Gurson propose de remplacer l'érouissage réel, qui est très inhomogène à l'échelle microscopique, par un érouissage uniforme "équivalent". Cela revient à remplacer le matériau réel par un matériau fictif présentant un érouissage uniforme "équivalent" dont la limite d'élasticité est homogène et égale à :

$$(1.16) \quad \bar{\sigma} \equiv \sigma(\bar{\epsilon})$$

où  $\sigma(\bar{\epsilon})$  représente la limite d'élasticité en traction simple, connue expérimentalement, fonction de la déformation plastique cumulée <sup>5</sup>  $\epsilon$ , et où  $\bar{\epsilon}$  désigne la valeur de la déformation plastique du matériau fictif. Le critère de Gurson devient alors :

$$(1.17) \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, p) \equiv \frac{\sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2p \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - p^2 = 0.$$

Il ne reste plus qu'à préciser la loi d'évolution de  $\bar{\epsilon}$ . La loi proposée par Gurson s'écrit :

$$(1.18) \quad (1 - f)\bar{\sigma}\dot{\bar{\epsilon}} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}^P$$

Le terme de gauche de cette expression correspond à la dissipation plastique microscopique tandis que celui de droite représente la dissipation plastique macroscopique.

Il faut garder présent à l'esprit que la méthode utilisée par Gurson pour traiter le cas d'une matrice érouissable ne repose sur aucun véritable argument de nature micromécanique. La modification qu'il propose, quoiqu'habile et élégante, n'a de justification que dans un cadre phénoménologique ou

<sup>5</sup>La matrice métallique est modélisée par un matériau de von Mises avec érouissage isotrope.



heuristique. De plus, cette modification souffre de la négligence, dans le modèle, d'une des propriétés fondamentales qu'on connaît de l'érouissage : son caractère hétérogène..

Une variante de ce modèle, ne présentant pas cette insuffisance, a été définie dans le travail de thèse de G. Perrin [Per, 1992]. Elle introduit un érouissage isotrope à deux variables, l'une portant sur le terme déviatorique du critère de plasticité et l'autre sur son terme hydrostatique.

### 1.4.3 Phase de coalescence des cavités

A l'approche de la coalescence, le critère de Gurson [Gur, 1977] ne rend plus compte du comportement réel du matériau. Pour remédier à cet défaut, Tvergaard et Needleman [Tve & Nee, 1984] ont suggéré d'accélérer artificiellement la croissance des cavités prédite par le modèle de Gurson [Gur, 1977] en utilisant un facteur multiplicatif phénoménologique  $\delta$ . Autrement dit, ils introduisent dans le modèle, en lieu et place de la porosité vraie  $f$ , une porosité effective  $f^*$ , fonction de la porosité vraie et plus élevée qu'elle, de la forme :

$$(1.19) \quad f^* \equiv \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \delta(f - f_c) & \text{si } f > f_c. \end{cases}$$

Dans cette relation,  $f_c$  et  $\delta$  sont des paramètres empiriques, représentant respectivement *la porosité critique du début de coalescence* et *le facteur accélérateur de la croissance des cavités*. Durant la phase de coalescence des cavités, on remplace, dans le critère et la loi d'écoulement associée, la porosité vraie  $f$  par la porosité fictive  $f^*$  définie par la relation [1.19]. Le seuil d'écoulement devient donc :

$$(1.20) \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, p) \equiv \frac{\sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2p \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - p^2 = 0 \quad ; \quad p = qf^*$$

Cette extension simple du modèle de Gurson dite de Gurson-Tvergaard-Needleman est couramment utilisée dans la littérature. Le paramètre essentiel de ce modèle est la valeur de la porosité critique  $f_c$  à partir de laquelle commence la coalescence. Dans leurs simulations numériques, Tvergaard et Needleman [Tve & Nee, 1984] ont supposé que  $f_c$  est une constante caractéristique du matériau de sorte que sa valeur peut être déterminée soit par des analyses métallographiques, soit par des calculs micromécaniques de cellules. D'autres types d'approches peuvent être envisagés pour prédire la valeur de  $f_c$ , à partir de modèles micromécaniques de la coalescence. On peut ainsi citer, l'approche proposée par Thomason [Tho, 1990] [Tho, 1985a] [Tho, 1985b] qui consiste en une analyse-limite approchée de l'écoulement plastique dans le ligament séparant deux cavités voisines. C'est cette même approche qu'utilisent Zhang et Niemi [Zha & Nie, 1994] : ils adoptent la formule phénoménologique de prédiction de la coalescence de Tvergaard et Needleman, avec cette différence que la valeur de  $f_c$  qu'ils utilisent, au lieu d'être arbitrairement fixée au départ dans la relation [1.19], est celle prédite par le modèle de Thomason [Tho, 1990].

Dans le même ordre d'idées, on peut mentionner les contributions de Perrin [Per, 1992] et de Gologanu *et al* [Gol, 2001b] qui ont modélisé la coalescence en se basant sur la condition de localisation de Rudnicki et Rice [Rud & Ric, 1975] ou sur un processus de localisation naturelle dans un sandwich tri-couche non-poreux/poreux/non-poreux.

Une autre analyse de la coalescence, fondée sur des arguments micromécaniques, également suggérée par Gologanu *et al*. [Gol, 2001a] fait intervenir un mécanisme de coalescence “en colonnes” où la zone de localisation est un cylindre. Ce phénomène de localisation n’apparaît cependant que dans des conditions axisymétriques quand la contrainte radiale est la contrainte majeure. Ce mécanisme semble être en accord avec des observations expérimentales de Benzerga [Ben, 2000].

Il est difficile de donner une valeur précise au paramètre  $\delta$ . Les valeurs qu’on lui attribue dans la littérature sont comprises entre 3 et 8. Les analyses théoriques montrent que ces valeurs dépendent des paramètres du problème (état des contraintes, état actuel de la répartition et de la forme des cavités, état actuel de l’écroutissage, etc.) Malgré les efforts qui ont été faits pour essayer de rationaliser le choix de  $\delta$ , il demeure encore, pour des raisons pratiques, un paramètre ajustable du modèle.

Au passage, notons qu’il y a de bonnes raisons de penser que la coalescence n’est pas l’étape ultime de la rupture ductile mais elle est interrompue par un processus de rupture de ligament qui ne nécessite que très peu d’énergie. Ce processus de rupture finale devrait apparaître bien avant la *coalescence totale* des cavités pour l’une des deux raisons suivantes : la nucléation d’une seconde population de cavités dans le ligament et le microclivage du ligament. En d’autres termes, il devrait y avoir un quatrième mécanisme [Bes, 2004] (rupture finale) qui prolongerait le processus de la nucléation-croissance-coalescence des cavités. A l’heure actuelle cependant la coalescence reste, dans les modèles usuels, la dernière étape des mécanismes à l’origine de la rupture ductile des aciers et des métaux en général.

#### 1.4.4 Introduction de l’hypoélasticité

Jusqu’à présent, nous nous sommes contenté de présenter le modèle de rupture ductile dans le cas rigide-plastique. Il nous faut maintenant indiquer comment introduire la part élastique du comportement dans les équations constitutives pour définir un modèle complet susceptible d’être incorporé à un code de calcul par éléments finis, bien que l’on puisse négliger les effets de l’élasticité en rupture ductile. Pour cela, nous adopterons la formulation habituelle de la plasticité en grandes transformations via l’introduction d’une dérivée temporelle objective des contraintes dans une loi d’hypoélasticité.

Nous supposons que le taux de déformation macroscopique  $\mathbf{D}$  admet la décomposition additive usuelle en une partie élastique et une autre plastique :

$$(1.21) \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$$

La loi d'hypoélasticité employée prend la forme d'une relation linéaire entre le taux de déformation élastique et le taux objectif de contrainte. A température constante, elle s'écrit :

$$(1.22) \quad \check{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\text{tr } \mathbf{D}^e)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}^e$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  désignent les coefficients de Lamé et  $\check{\boldsymbol{\sigma}}$  une dérivée objective du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ . Cette dérivée pourra être par exemple celle de Jaumann, définie par :

$$(1.23) \quad \check{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

où

$$(1.24) \quad \boldsymbol{\Omega} \equiv \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{U} - \nabla_{\mathbf{x}}^t\mathbf{U})$$

( $\mathbf{x}$  vecteur position actuelle,  $\mathbf{U}$  vecteur vitesse macroscopique) désigne le taux de rotation (tenseur antisymétrique). On peut aussi utiliser la dérivée de Green-Naghdi, définie par la même formule, mais où  $\boldsymbol{\Omega}$  prend la valeur  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{-1}$ , où  $\mathbf{R}$  est la rotation intervenant dans la décomposition polaire du gradient de transformation macroscopique.

On notera que le modèle, par construction, n'incorpore pas le couplage endommagement-élasticité ( $\lambda$  et  $\mu$  ne dépendent pas de la porosité et sont donc constants si la température l'est), beaucoup moins important en pratique que le couplage endommagement-plasticité.

L'opération d'introduction de la loi d'hypoélasticité dans les équations de comportement du modèle comporte une part d'arbitraire assez importante, liée notamment au choix de la dérivée objective du tenseur des contraintes. Ceci n'a pas d'importance eu égard à la faiblesse des effets liés à l'élasticité en rupture ductile. (La seule véritable justification de l'introduction de l'élasticité dans le modèle est qu'elle est nécessaire pour le traitement numérique).

### 1.4.5 Résumé : équations constitutives du modèle

#### 1.4.5.1 Éléments essentiels du modèle local de Gurson

Les équations constitutives du modèle sont écrites dans le cadre de la théorie des grandes transformations, en formulation eulérienne ; elles comprennent l'expression du taux de déformation élastique  $\mathbf{D}^e$ , celle du taux de déformation plastique  $\mathbf{D}^p$  (critère de plasticité et loi d'écoulement associée), et les lois d'évolution des paramètres internes (porosité et paramètre d'écrouissage). Le modèle peut être complété par la prise en compte de la germination des cavités sous sa forme brutale ou continue.

Le point de départ des équations théoriques du modèle est la classique hypothèse de partition du taux de déformation total :

$$(1.25) \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p.$$

On stipule ensuite le **taux de déformation élastique**, en utilisant une loi d'hypoélasticité. A température constante le tenseur de taux déformation élastique prend la forme

$$(1.26) \quad \mathbf{D}^e = \frac{1 + \nu}{E} \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{I}$$

dans laquelle le tenseur de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  est donné par l'équation [1.22] où l'on a fait usage de la dérivée de Jaumann ou de celle de Green-Naghdi.

Vient après l'expression du **taux de déformation plastique**. Le critère de plasticité de Gurson s'écrit

$$(1.27) \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, p) \equiv \frac{\sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2p \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - p^2 = 0.$$

Dans cette expression, le paramètre interne  $p$  est défini par l'équation phénoménologique de Tvergaard et Needleman

$$(1.28) \quad p \equiv qf^* \quad , \quad f^* \equiv \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \delta(f - f_c) & \text{si } f > f_c \end{cases}$$

où  $q$  désigne le paramètre de Tvergaard,  $f_c$  la porosité critique du début de coalescence et  $\delta$  le facteur accélérateur de la croissance des cavités.

Le second paramètre interne  $\bar{\sigma}$  du critère est donné par :

$$(1.29) \quad \bar{\sigma} \equiv \sigma(\bar{\epsilon})$$

où  $\sigma(\bar{\epsilon})$  est la fonction, connue expérimentalement, donnant la limite d'élasticité de la matrice métallique en fonction de la déformation plastique équivalente cumulée  $\epsilon$ , et  $\bar{\epsilon}$  est la valeur moyenne de cette

déformation équivalente dans la matrice hétérogène et dont l'équation est donnée par :

$$(1.30) \quad (1 - f)\bar{\sigma}\dot{\epsilon} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p.$$

La loi d'écoulement associée par normalité à ce critère s'écrit alors

$$(1.31) \quad \mathbf{D}^p = \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

où le multiplicateur plastique  $\eta$  est nul si  $\Phi < 0$ , et positif ou nul si  $\Phi = 0$ ; en introduisant le taux de déformation plastique équivalent :

$$(1.32) \quad D_{eq} = \left[ \frac{3}{2} D_{ij}^{p'} D_{ij}^{p'} \right]^{\frac{1}{2}}$$

où  $\mathbf{D}^{p'}$  désigne le déviateur de  $\mathbf{D}^p$ , on peut écrire cette loi d'écoulement sous la forme :

$$(1.33) \quad \begin{cases} \mathbf{D}^{p'} = \frac{3}{2} \frac{D_{eq}}{\sigma_{eq}} \boldsymbol{\sigma}' \\ D_m^p = \frac{p}{2} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{eq}} \sinh \left( \frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} \right) D_{eq} \end{cases}$$

où  $D_m^p = (1/3)\text{tr } \mathbf{D}^p$  est la partie moyenne du taux de déformation plastique.

La loi d'évolution de la porosité est donnée par

$$(1.34) \quad \dot{f} \equiv (1 - f)\text{tr } \mathbf{D}^p$$

Cette dernière relation suppose négligeable la germination des cavités, hypothèse que l'on fera dans toute la suite du chapitre.

#### 1.4.5.2 Quelques remarques en guise de conclusion

Les succès et les applications à l'actif du modèle de Gurson sont très impressionnants. Ils concernent surtout la prédiction de la propagation de la fissure dans les composants nucléaires (cuves, générateurs de vapeur etc.) ou la prédiction numérique des courbes limite de formage.

A titre d'exemple, un calcul de structure par éléments finis faisant l'hypothèse d'un comportement local régi, par le modèle de Gurson standard permet de reproduire numériquement les phénomènes d'*effet tunnel* [DJL, 1995] (propagation de fissure plus rapide au centre d'une éprouvette que sur les bords) et d'apparition de rupture en cisaillement, encore appelée *rupture en tronc de cône* [DLM, 1992], d'une éprouvette axisymétrique lisse (qui se déroule en trois étapes successives : striction du milieu de l'éprouvette; puis à partir du centre de l'éprouvette, amorçage et propagation horizontale vers

la surface libre d'une fissure; enfin déviation à  $45^\circ$  de cette dernière vers le haut ou vers le bas au voisinage de la surface de l'éprouvette). Tout ceci laisse augurer d'un développement important de ces modèles dans l'avenir à condition de résoudre les problèmes cruciaux (par exemple la localisation de l'endommagement) qu'ils engendrent.

## 1.5 Modèles non locaux en rupture ductile

### 1.5.1 Généralités

Une des difficultés essentielles rencontrées dans l'utilisation pratique du modèle local de Gurson concerne la localisation de la déformation et la sensibilité au maillage qui en résulte dans les calculs numériques par éléments finis. Cette difficulté n'est d'ailleurs pas propre à ce modèle : il est bien connu que l'utilisation de modèles de comportement adoucissants, en général, pose des problèmes de nature tant mathématique que physique.

Du point de vue mathématique, ces problèmes se manifestent sous forme de bifurcations présentant un nombre infini de branches bifurquées. Ce phénomène a notamment été étudié par [JBL, 1994] dans le cas du modèle de Gurson, pour un milieu infini soumis à une déformation initialement homogène.

D'un point de vue physique, l'endommagement tend à se concentrer dans des zones d'épaisseur de plus en plus petite (par exemple sous la forme de bandes de cisaillement). Autrement dit, la largeur de la bande de localisation tend vers zéro, et il en résulte que l'énergie nécessaire pour faire progresser la fissure tend également vers zéro, ce qui est totalement en désaccord avec la réalité physique. Ceci se manifeste dans les calculs numériques par éléments finis par une concentration de l'endommagement dans une rangée de mailles et une dépendance pathologique des résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale. Plus précisément, ces solutions dépendent de la nature des éléments finis, de leur taille et de leur orientation.

Pour remédier à ce défaut fondamental des modèles adoucissants, il faut introduire un *limiteur de localisation* sous une forme ou une autre. La manière la plus simple de procéder, proposée il y a déjà fort longtemps par Rousselier [Rou, 1981], consiste à imposer une taille fixe, ne pouvant tendre vers zéro aux éléments du maillage. Cette taille acquiert ainsi un sens physique : elle représente la distance (typiquement, la distance entre cavités) au-dessous de laquelle les modèles adoucissants *homogénéisés*, prenant en compte l'existence des cavités, ne s'appliquent plus. L'inconvénient principal de cette approche est que le rôle de limiteur de localisation, au lieu d'être dévolu à un paramètre du modèle, est confié à la taille de maille, qui ne devrait être qu'un artifice mathématique sans effet sur les résultats du calcul. Dans la pratique, elle reste, de nos jours, d'un usage très répandu du fait de sa simplicité.

Plusieurs observations expérimentales (sur l'effet d'échelle des matériaux adoucissants, sur la localisation de l'endommagement etc.) mettent en évidence l'existence de longueurs internes intrinsèques aux matériaux, représentatives des microstructures sous-jacentes aux points matériels macroscopiques et dont l'influence s'avère significative aux petites échelles. Malheureusement, les théories mécaniques locales ne rendent pas compte des phénomènes observés, du fait qu'elles ne parviennent pas à décrire les situations où les variations des champs mécaniques interagissent avec les micro-structures

sous-jacentes aux points matériels. En particulier, cette déficience est manifeste lorsqu'on cherche à modéliser, au sein d'une structure, la formation et la propagation des zones endommagées, dont on sait expérimentalement qu'elles tendent à s'organiser sous forme de bandes d'épaisseur mince.

Pour remédier à ces insuffisances, de nombreux auteurs ont proposé des formulations qui étendent les théories locales en introduisant une nouvelle échelle dans la modélisation. On dispose de plusieurs techniques d'extension des modèles locaux qui reposent sur différentes approches. On peut en effet choisir un angle d'approche plutôt physique pour introduire, par une analyse microstructurale, des longueurs internes. L'approche phénoménologique consiste à introduire directement des termes macroscopiques censés caractériser des interactions à l'échelle microscopique. L'approche mathématique consiste à chercher des modélisations assurant de bonnes propriétés mathématiques pour les différentes grandeurs du problème. Nous ne détaillerons pas ici les différents modèles proposés, mais en mentionnerons quelques-uns.

Il existe tout d'abord des méthodes consistant à introduire de nouveaux degrés de liberté de "déplacements" qui sont associés à de nouveaux efforts intérieurs par l'intermédiaire du principe des puissances virtuelles. Certains auteurs comme Frémond et Nedjar [Fre & Ned, 1993] introduisent un terme de porosité qui représente l'endommagement comme un déplacement microscopique. D'autres comme De Borst [DeB, 1991] se basent sur la théorie des milieux micropolaires des frères Cosserat en introduisant des degrés de liberté de rotation ; d'autres enfin représentent les bandes de localisation de l'endommagement par des surfaces de discontinuité des déplacements. Il existe aussi des méthodes dites "à gradient" qui consistent à prendre en compte des effets de voisinage spatial par l'intermédiaire des gradients des déformations (voir par exemple Aifantis [Aif, 1987]) ou des variables internes [Lor, 1997]. Enfin, une dernière classe de modèles est celle des modèles réellement non locaux. Le principe de ces modèles est de considérer une interaction à distance entre les différents points de la structure.

Qu'il s'agisse d'une méthode introduisant une cinématique enrichie ou prenant en compte, au niveau du comportement, des interactions dans un voisinage spatial du point matériel, ces formulations rendent toutes compte d'une microstructure sous-jacente à ce point matériel, *via* une étape d'homogénéisation formelle, ou bien de manière phénoménologique. L'idée consiste à prendre en compte un effet de voisinage spatial pour décrire le comportement d'un point matériel : il y a interaction entre deux points distincts de la structure. Ces interactions ont lieu *a minima* dans un voisinage de taille fixée du point matériel considéré et généralement sur toute la structure, avec une influence d'un point sur l'autre d'autant plus faible qu'ils sont éloignés.

Une formulation dans laquelle toutes les grandeurs locales de la loi de comportement sont remplacées par des pendants non locaux, résultant de l'application d'opérateurs de délocalisation, a été proposée par Bazant [Baz & Bel, 1984], mais elle conduit à de sérieuses complications, notamment



dans l'écriture des conditions aux limites et des équations d'équilibre. Plus tard, Pijaudier-Cabot et Bazant [Pij & Baz, 1987] ont montré que, sans restreindre la généralité du concept de non localité, on peut raisonnablement considérer que seule la variable interne responsable de l'adoucissement (la porosité pour les matériaux ductiles) est de nature non locale. Cette idée paraît très attrayante d'un point de vue physique car dans le cas des matériaux poreux par exemple, pour lesquels la variable d'endommagement est la porosité, il n'y a pas de raison claire à ce que la déformation, la contrainte et bien d'autres variables encore soient considérées comme non locales. En revanche la porosité ne peut être définie qu'en considérant des volumes "élémentaires" de taille supérieure à la distance inter-cavités ; elle est donc essentiellement une quantité moyenne de nature non locale. L'équation d'évolution de cette variable est donnée, dans cette approche, par une intégrale de convolution faisant intervenir une fonction de pondération (Gaussienne ou Lorentzienne par exemple) où apparaît une distance caractéristique du matériau. La taille de maille peut être choisie arbitrairement mais ne doit pas dépasser cette distance caractéristique, au moins dans la zone concernée par la fissuration. Une telle approche, initialement développée pour rendre compte des interactions entre microfissures dans les bétons (voir par exemple Bazant et Pijaudier-Cabot [Baz & Pij, 1988]) a été ensuite transposée au cas des métaux (confer Leblond *et al* [JBL, 1994]).

Dans le même ordre d'idées, Rousselier a proposé une approche de délocalisation de la porosité par régularisation *via* la résolution d'un problème aux limites supplémentaire.

### 1.5.2 Version non locale de Leblond *et al.* du modèle de Gurson

La version non locale de Leblond *et al.* du modèle de Gurson comprend toutes les équations constitutives du modèle de Gurson local déjà précédemment évoquées à l'exception de l'équation d'évolution de la porosité [1.34]. La proposition de Leblond *et al.* [JBL, 1994] consiste à remplacer l'équation d'évolution [1.34] de la porosité par

$$(1.35) \quad \dot{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{C(\mathbf{x})} \int_{\Omega} \chi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \dot{f}^{\text{loc}}(\mathbf{y}) d\Omega_y$$

où  $\Omega$  désigne le domaine considéré et  $\chi$  une certaine "fonction de pondération" que l'on prend gaussienne dans la pratique :

$$(1.36) \quad \chi(\mathbf{x}) \equiv \exp(-\|\mathbf{x}\|^2/b^2)$$

$b$  étant une longueur caractéristique (de l'ordre de l'espacement entre cavités). Le facteur  $C(\mathbf{x})$  et le "taux de porosité local"  $\dot{f}^{\text{loc}}$  sont donnés par

$$(1.37) \quad C(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \chi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\Omega_y$$

et

$$(1.38) \quad \dot{f}^{\text{loc}}(\mathbf{x}) \equiv (1 - f(\mathbf{x})) \operatorname{tr} [\mathbf{D}^p(\mathbf{x})]$$

L'introduction du terme  $1/C(\mathbf{x})$  dans l'équation [1.35] n'a d'autre but que d'éviter les effets de bords parasites. En effet,  $\dot{f}$  doit être identique à  $\dot{f}^{\text{loc}}$  si  $\dot{f}^{\text{loc}}$  est uniforme par rapport à la variable d'espace. Sans l'introduction du terme  $1/C(\mathbf{x})$  cette condition ne saurait être vérifiée au voisinage du bord de  $\Omega$ ; la présence de ce terme assure l'égalité partout.

Encore une fois, l'idée physique sous-jacente dans l'équation [1.35] est que la porosité est fondamentalement une quantité non locale puisque cette grandeur n'a de sens que pour des volumes élémentaires suffisamment grands pour contenir au moins une cavité. Il faut cependant noter que cette équation est purement heuristique et ne jouit d'aucune justification théorique sérieuse.

## 1.6 Classe des matériaux standards généralisés et modèle de Gurson

Nous nous proposons dans cette partie d'introduire les matériaux standards généralisés (en abrégé MSG) puis d'examiner le caractère standard généralisé ou non du modèle de Gurson en faisant l'hypothèse des petites transformations<sup>6</sup>. L'examen montre qu'à porosité fixée, les équations constitutives du modèle de Gurson possèdent les propriétés requises pour assurer l'appartenance du modèle à la classe des MSG. Nous verrons dans la section suivante les implications de cette propriété sur le plan de l'implémentation numérique du modèle. Il faut noter immédiatement que cette propriété s'applique aussi bien à la version locale originale du modèle qu'à sa version modifiée non locale présentée dans la section [1.5.2], puisqu'en fixant la porosité on ne tient plus compte de son équation d'évolution, seul point de différence entre les deux versions.

L'exposé commence par une présentation générale très sommaire de quelques aspects des travaux de Halphen et Nguyen [Hal & Ngu, 1975] et Nguyen [Ngu, 1977] sur les MSG, et est poursuivi en donnant un exemple simple de MSG avant d'attaquer le résultat essentiel de la partie : le caractère standard généralisé du modèle de Gurson à porosité fixée.

### 1.6.1 Généralités

La loi constitutive d'un MSG est spécifiée grâce à deux potentiels thermodynamiques. Le premier est l'énergie libre spécifique  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha})$ , qui est une fonction du tenseur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et d'un ensemble de paramètres internes collectivement notés  $\boldsymbol{\alpha}$ . Cette fonction doit être convexe par rapport aux variables  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\alpha}$  prises séparément (mais pas nécessairement par rapport à la variable globale  $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha})$ ).

---

<sup>6</sup>Le formalisme des matériaux standards généralisés ne s'applique que dans cette hypothèse.

L'énergie libre fournit par dérivation le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et la force thermodynamique  $\mathbf{F}$  associée à  $\boldsymbol{\alpha}$  :

$$(1.39) \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = -\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$$

Le second potentiel thermodynamique est le potentiel de dissipation, noté  $\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\alpha}})$ , qui doit être une fonction convexe, positive et nulle pour  $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = 0$ . Ce potentiel gouverne les équations d'évolution des paramètres internes à travers les relations équivalentes suivantes :

$$(1.40) \quad \mathbf{F} \in \partial \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \iff \dot{\boldsymbol{\alpha}} \in \partial \tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{F})$$

où  $\tilde{\mathcal{D}}$  désigne la transformée de Legendre-Fenchel <sup>7</sup> de  $\mathcal{D}$ , et  $\partial \mathcal{D}$  et  $\partial \tilde{\mathcal{D}}$  les sous-différentiels de  $\mathcal{D}$  et  $\tilde{\mathcal{D}}$  respectivement.

Pour un comportement indépendant du temps, comme c'est le cas dans notre travail, le potentiel  $\mathcal{D}$  est positivement homogène de degré 1 par rapport à  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ . Sa transformée de Legendre-Fenchel,  $\tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{F})$ , est alors la fonction indicatrice <sup>8</sup> d'un ensemble convexe fermé  $\mathcal{C}$  (le domaine de réversibilité) dans l'espace des forces thermodynamiques  $\mathbf{F}$ . Cet ensemble étant défini par une inégalité du type  $\Phi(\mathbf{F}) \leq 0$  pour une certaine fonction  $\Phi$ , le sous-différentiel  $\partial \tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{F})$  est réduit au seul vecteur  $\mathbf{0}$  si  $\mathbf{F}$  est contenu à l'intérieur du convexe  $\mathcal{C}$ , coïncide avec la demi-droite  $\{\eta(\partial f / \partial \mathbf{F})(\mathbf{F}), \eta \geq 0\}$  si  $\mathbf{F}$  est contenu dans la frontière de  $\mathcal{C}$ , et est vide si  $\mathbf{F}$  n'est pas contenu dans  $\mathcal{C}$ . L'équation d'évolution [1.40]<sub>2</sub> peut donc être ré-écrite de façon équivalente :

$$(1.41) \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{F}} \quad , \quad \eta \begin{cases} = 0 & \text{si } \Phi(\mathbf{F}) < 0 \\ \geq 0 & \text{si } \Phi(\mathbf{F}) = 0 \end{cases}$$

Ceci signifie que l'équation d'évolution de  $\boldsymbol{\alpha}$  obéit à une sorte de "propriété de normalité" généralisée.

Il en découle immédiatement un certain nombre de propriétés que vérifient les MSG :

### 1.6.1.1 Propriété 1

*La loi d'évolution [1.41] de  $\boldsymbol{\alpha}$  assure la positivité de la dissipation  $F : \dot{\boldsymbol{\alpha}}$ .*

En effet le sous-différentiel de  $\mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\alpha}})$  est défini par :

$$(1.42) \quad \mathbf{F} \in \partial \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \iff \forall \dot{\boldsymbol{\alpha}}', \quad \mathbf{F} : (\dot{\boldsymbol{\alpha}}' - \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \leq \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}') - \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}).$$

<sup>7</sup>On rappelle (i) que la transformée de Legendre-Fenchel  $\tilde{f}(\mathbf{y})$  de la fonction  $f(\mathbf{x})$  est définie par la formule  $\tilde{f}(\mathbf{y}) \equiv \sup_{\mathbf{x}} [\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - f(\mathbf{x})]$ ; (ii) que son sous-différentiel  $\partial f(\mathbf{x})$  au point  $\mathbf{x}$  est l'ensemble des points  $\mathbf{y}$  tels que  $\mathbf{y}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})$  pour tout point  $\mathbf{x}'$ ; (iii) et que l'équivalence  $\mathbf{y} \in \partial f(\mathbf{x}) \iff \mathbf{x} \in \partial \tilde{f}(\mathbf{y})$  s'ensuit.

<sup>8</sup>On rappelle que la fonction indicatrice d'un ensemble convexe prend les valeurs 0 et  $+\infty$  respectivement dans cet ensemble et à l'extérieur.

Pour  $\dot{\alpha}' = 0$ , ceci donne  $-\mathbf{F} : \dot{\alpha}' \leq -\mathcal{D}(\dot{\alpha})$  (car  $\mathcal{D}(\mathbf{0}) = 0$ ) soit  $\mathbf{F} : \dot{\alpha}' \geq \mathcal{D}(\dot{\alpha}) \geq 0$  (du fait de la positivité de  $\mathcal{D}$ ).

### 1.6.1.2 Propriété 2

Convenons que les quantités indexées par <sup>0</sup> sont prises à l'instant  $t$  et celles sans symbole particulier sont prises à l'instant  $t + \Delta t$ . Si l'équation d'évolution [1.41] de  $\alpha$  est discrétisée en temps par un schéma implicite, alors le problème de projection qui consiste à déterminer les valeurs de  $\alpha$  ou  $\Delta\alpha \equiv \alpha - \alpha^0$  à partir de celles de  $\varepsilon^0$ ,  $\alpha^0$  et  $\Delta\varepsilon \equiv \varepsilon - \varepsilon^0$  est équivalent à minimiser la fonction  $\chi(\varepsilon, \alpha^0, \Delta\alpha) \equiv \psi(\varepsilon, \alpha^0 + \Delta\alpha) + \mathcal{D}(\Delta\alpha)$  par rapport à  $\Delta\alpha$ .

Afin de d'établir cette propriété, notons que la condition assurant que la fonction  $\chi$  soit minimale au point  $\Delta\alpha$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \in \partial\chi(\varepsilon, \alpha^0, \Delta\alpha) &\iff \mathbf{0} \in \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(\varepsilon, \alpha^0 + \Delta\alpha) + \partial\mathcal{D}(\alpha) \\ &\iff -\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(\varepsilon, \alpha^0, \Delta\alpha) \in \partial\mathcal{D}(\alpha) \\ &\iff \mathbf{F} \in \partial\mathcal{D}(\Delta\alpha) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{F}$  désigne la force thermodynamique à l'instant  $t + \Delta t$ . L'équivalence annoncée est alors claire puisque la dernière expression n'est rien d'autre que l'équation d'évolution de  $\alpha$ , écrite sous la forme [1.40]<sub>1</sub> au lieu de [1.40]<sub>2</sub> et discrétisée implicitement en temps. (Noter que  $\partial\mathcal{D}(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}) = \partial\mathcal{D}(\Delta\alpha)$  puisque  $\mathcal{D}$  est positivement homogène de degré 1).

Puisque les fonctions  $\psi(\varepsilon, \alpha^0 + \Delta\alpha)$  et  $\mathcal{D}\Delta\alpha$  sont convexes par rapport à  $\Delta\alpha$ , cette équivalence garantit l'existence de la solution du problème de projection, et son unicité si l'énergie libre est *strictement* convexe<sup>9</sup> par rapport à  $\alpha$ . Elle assure également la symétrie de la matrice-tangente à utiliser pour résoudre le problème de projection puisque cette matrice est la matrice hessienne de la fonction  $\chi$ .

### 1.6.1.3 Propriété 3

*La matrice-tangente des itérations elastoplastiques globales est symétrique.*

Cette troisième propriété est quelque peu moins évidente que les deux premières et provient de la seconde propriété. Pour l'établir, nous utiliserons une notation vectorielle des tenseurs de contrainte

<sup>9</sup>Le potentiel de dissipation ne saurait lui être strictement convexe car sa propriété d'homogénéité positive de degré 1 implique qu'il est linéaire sur chaque demi-droite d'origine  $\mathbf{0}$ .

et déformation,  $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq 6}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_i)_{1 \leq i \leq 6}$ , et des variables internes,  $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_p)_{1 \leq p \leq N}$ . La matrice-tangente en question est alors  $(\partial\sigma_i/\partial\varepsilon_j)_{1 \leq i, j \leq 6}$  où  $\boldsymbol{\sigma}$  est exprimé comme fonction de l'unique variable  $\boldsymbol{\varepsilon}$  par l'expression :

$$(1.43) \quad \boldsymbol{\sigma} \equiv \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}[\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon})]$$

dans laquelle  $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\alpha}^0 + \Delta\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon})$  et  $\Delta\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon})$  minimise la fonction  $\chi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}^0, \Delta\boldsymbol{\alpha})$ .

En différentiant l'équation [1.43], on obtient :

$$(1.44) \quad \frac{\partial\sigma_i}{\partial\varepsilon_j}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial^2\psi}{\partial\varepsilon_i\partial\varepsilon_j}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon})) + \frac{\partial^2\psi}{\partial\varepsilon_i\partial\alpha_p}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon})) \frac{\partial\Delta\alpha_p}{\partial\varepsilon_j}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

Pour évaluer les dérivées  $\partial\Delta\alpha_p/\partial\varepsilon_j$ , nous différencions les conditions  $\partial\chi/\partial\Delta\alpha_p = 0$  définissant  $\Delta\boldsymbol{\alpha}$  par rapport à  $\varepsilon_j$ , en utilisant la définition de la fonction  $\chi$  :

$$(1.45) \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\varepsilon_j\partial\alpha_p}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon})) + \frac{\partial^2\mathcal{D}}{\partial\Delta\alpha_p\partial\Delta\alpha_q}(\Delta\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon})) \frac{\partial\Delta\alpha_q}{\partial\varepsilon_j}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0.$$

Désignons par  $\mathbf{M}$  l'inverse de la matrice hessienne  $(\partial^2\mathcal{D}/\partial\Delta\alpha_p\partial\Delta\alpha_q)_{1 \leq p, q \leq N}$ . Inversant la relation [1.45], nous obtenons :

$$(1.46) \quad \frac{\partial\Delta\alpha_p}{\partial\varepsilon_j}(\boldsymbol{\varepsilon}) = -M_{pq}(\Delta\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon})) \frac{\partial^2\psi}{\partial\varepsilon_j\partial\Delta\alpha_q}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon}))$$

L'insertion de ce résultat dans l'équation [1.44] donne

$$(1.47) \quad \frac{\partial\sigma_i}{\partial\varepsilon_j}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial^2\psi}{\partial\varepsilon_i\partial\varepsilon_j}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon})) - \frac{\partial^2\psi}{\partial\varepsilon_i\partial\alpha_p}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon})) M_{pq}(\Delta\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon})) \frac{\partial^2\psi}{\partial\varepsilon_j\partial\Delta\alpha_q}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon})),$$

qui fait clairement apparaître la symétrie de la matrice  $(\partial\sigma_i/\partial\varepsilon_j)_{1 \leq i, j \leq 6}$ .

### 1.6.2 Exemple simple de MSG : matériau de von Mises à écrouissage isotrope

Nous donnons dans cette sous-section un exemple simple de MSG. L'exemple en question est celui du matériau élastoplastique de von Mises à écrouissage isotrope.

Il faut pour commencer définir les variables d'état et l'expression de l'énergie libre, puis s'assurer que cette dernière vérifie les propriétés requises (voir section [1.6.1]).

On décrit l'état du matériau par les variables d'état suivantes : les composantes de la déformation totale  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et un ensemble de variables internes comprenant les composantes de la déformation plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et la déformation plastique équivalente cumulée.

On propose alors le potentiel d'énergie libre suivant, somme d'une énergie élastique de déformation et d'une énergie "bloquée" d'écrouissage :

$$(1.48) \quad \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \varepsilon_{eq}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \int_0^{\varepsilon_{eq}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Dans cette équation  $\mathbf{C}$  représente le tenseur de rigidité élastique du quatrième ordre et  $\sigma(\varepsilon_{eq})$  la limite d'élasticité en traction simple, fonction de la déformation plastique cumulée.

Il est facile de voir, avec cette définition, que l'énergie libre  $\psi$  est *strictement convexe* par rapport à la variable interne  $\varepsilon$ , la forme quadratique définie par  $\mathbf{C}$  étant définie positive. L'énergie libre est aussi strictement convexe par rapport à  $\varepsilon^p$  pour la même raison que précédemment. Elle est aussi strictement convexe vis-à-vis de la variable  $\varepsilon_{eq}$  du fait de la positivité de la pente d'écroissage. De plus, elle est une somme de fonctions strictement convexes de  $\varepsilon^p$  et  $\varepsilon_{eq}$  (à  $bv$  fixé). Par conséquent, l'énergie libre est strictement convexe par rapport à la variable interne globale  $(\varepsilon^p, \varepsilon_{eq})$ , comme souhaité.

Par ailleurs, la dérivée de  $\psi$  par rapport à  $\varepsilon$  vaut  $\sigma$ , comme souhaité aussi, et les forces thermodynamiques  $\mathbf{F}^{\varepsilon^p}$  et  $F^{\varepsilon_{eq}}$  associées aux variables internes  $\varepsilon^p$ ,  $\varepsilon_{eq}$  sont données par

$$(1.49) \quad \begin{cases} \mathbf{F}^{\varepsilon^p} = -\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^p} = \mathbf{C} : (\varepsilon - \varepsilon^p) = \sigma \\ F^{\varepsilon_{eq}} = -\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{eq}} = -\sigma(\varepsilon_{eq}) \equiv \sigma \end{cases}$$

(par définition de la limite d'élasticité actuelle  $\bar{\sigma}$ ).

Il faut maintenant s'assurer que le domaine de réversibilité défini par le critère de von Mises à écroissage isotrope dans l'espace des forces thermodynamiques (en exprimant donc la fonction de charge en fonction des variables  $\mathbf{F}^{\varepsilon^p}$  et  $F^{\varepsilon_{eq}}$  au lieu de  $\sigma$  et  $\sigma$ ) est convexe. Le passage des variables  $(\sigma, \sigma)$  aux variables  $(\mathbf{F}^{\varepsilon^p}, F^{\varepsilon_{eq}}) = (\sigma, -\sigma)$  étant linéaire, il est suffisant de prouver que le domaine de réversibilité dans l'espace des premières variables,  $\mathcal{C} \equiv \{(\sigma, \sigma); \Phi(\sigma, \sigma) \leq 0\}$ , est convexe. Ceci est évident du fait de la convexité de la fonction de charge de von Mises  $\Phi$  par rapport à la variable globale  $(\sigma, \sigma)$ .

Il reste à vérifier que les lois d'évolution associées aux variables internes  $\varepsilon^p$  et  $\varepsilon_{eq}$  vérifient la "règle de normalité généralisée" par rapport à la fonction de charge de von Mises, exprimée en fonction des forces thermodynamiques, c'est-à-dire qu'on a bien :

$$(1.50) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}^p &= \eta \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{F}^{\varepsilon^p}} \equiv \eta \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} \\ \dot{\varepsilon}_{eq} &= \eta \frac{\partial\Phi}{\partial F^{\varepsilon_{eq}}} \equiv -\eta \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} \end{cases}$$

L'équation d'évolution [1.50]<sub>1</sub> est équivalente à la loi d'écoulement associée au critère par normalité. Il suffit donc de vérifier que la loi d'évolution [1.50]<sub>2</sub> est aussi satisfaite. Or

$$\Phi(\sigma, \sigma) = \sigma_{eq} - \sigma \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_{eq}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} = -1.$$

La relation [1.50]<sub>1</sub> donne donc :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \eta \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_{eq}}$$

ce qui en prenant la norme de von Mises des deux membres, implique que

$$\eta = \dot{\varepsilon}_{eq}.$$

Or ceci est précisément la valeur de  $\eta$  fournie par l'équation [1.50]<sub>2</sub>. Il y a donc bien “normalité généralisée” par rapport à la variable globale  $(\varepsilon, \varepsilon_{eq})$ .

En définitive, on peut dire, à partir des éléments précédents, que le modèle de von Mises à écrouissage isotrope satisfait aux propriétés requises pour être qualifié de “standard généralisé”.

### 1.6.3 Modèle de Gurson et classe des matériaux standards généralisés

#### 1.6.3.1 Caractère standard généralisé du modèle de Gurson à porosité fixée

Nous allons montrer qu'à *porosité fixée* le modèle de Gurson définit un MSG, à condition bien sûr de se restreindre à l'hypothèse des petites perturbations. Bien qu'aucune de ces deux hypothèses ne soit réaliste en pratique, la propriété annoncée conduit à d'intéressantes conséquences sur l'implémentation numérique du modèle, comme on le verra dans la section suivante. Jusqu'à présent cependant, cette propriété ne semble pas attiré l'attention des auteurs, malgré le fait que la reformulation thermodynamique des équations du modèle de Gurson de Besson et Guillemer-Neel [Bes & Gui, 2003] ouvre certaines pistes dans cette direction.

La première chose à faire consiste à définir les variables d'état du matériau et l'expression de son énergie libre, et à vérifier que cette expression satisfait les propriétés requises.

Les variables d'état comprennent les composantes de la déformation totale  $\varepsilon$ , et un ensemble de variables internes formés des composantes de la déformation plastique  $\varepsilon^p$  et de la déformation équivalente moyenne  $\bar{\varepsilon}$ . La porosité ne doit pas être considérée comme une variable interne car sa valeur est supposée fixe ici.

Nous définissons ensuite l'énergie libre comme la somme d'une énergie élastique de déformation et d'une énergie “bloquée” liée à l'écrouissage :

$$(1.51) \quad \psi(\varepsilon, \varepsilon^p, \bar{\varepsilon}) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^p) : \mathbf{C} : (\varepsilon - \varepsilon^p) + \lambda \int_0^{\bar{\varepsilon}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

Dans cette expression,  $\mathbf{C}$  est le tenseur de rigidité élastique d'ordre quatre et  $\lambda$  un paramètre positif fixé dont la valeur sera précisée plus tard.

Avec cette définition, l'énergie libre  $\psi$  est strictement convexe par rapport à la variable  $\varepsilon$  (parce que la forme quadratique définie par  $\mathbf{C}$  est définie positive). De plus, cette énergie libre est la somme d'une fonction strictement convexe de la variable  $\varepsilon^p$  (pour la même raison que précédemment) et d'une fonction strictement convexe de la variable  $\bar{\varepsilon}$  (la pente d'écrouissage  $d\sigma/d\varepsilon$  étant toujours positive).

L'énergie libre est donc *strictement convexe par rapport à la variable interne globale*  $(\varepsilon^p, \bar{\varepsilon})$ , comme il convient.

Par ailleurs, la dérivée de  $\psi$  par rapport à  $\varepsilon$  vaut  $\sigma$ , comme souhaité, et les forces thermodynamiques  $\mathbf{F}^{\varepsilon^p}$  et  $F^{\bar{\varepsilon}}$  associées aux variables internes  $\varepsilon^p$ ,  $\bar{\varepsilon}$  de cette énergie libre sont données par

$$(1.52) \quad \begin{cases} \mathbf{F}^{\varepsilon^p} = -\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^p} = \mathbf{C} : (\varepsilon - \varepsilon^p) = \sigma \\ F^{\bar{\varepsilon}} = -\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\varepsilon}} = -\lambda\sigma(\bar{\varepsilon}) \equiv -\lambda\bar{\sigma} \end{cases}$$

(par définition de  $\bar{\sigma}$ ).

La deuxième chose à faire est de montrer que le domaine de réversibilité défini par le critère de Gurson dans l'espace des forces thermodynamiques (en exprimant donc la fonction de charge de Gurson  $\Phi$  en fonction des variables  $\mathbf{F}^{\varepsilon^p}$  et  $F^{\bar{\varepsilon}}$  au lieu de  $\sigma$  et  $\bar{\sigma}$ ) est convexe. La transformation passant des variables  $(\sigma, \bar{\sigma})$  aux variables  $(\mathbf{F}^{\varepsilon^p}, F^{\bar{\varepsilon}}) = (\sigma, -\lambda\bar{\sigma})$  est cependant linéaire; il sera en conséquence suffisant de prouver que le domaine de réversibilité dans l'espace des premières variables,  $\mathcal{C} \equiv \{(\sigma, \bar{\sigma}); \Phi(\sigma, \bar{\sigma}, f) \leq 0\}$ , est convexe. Cela résulterait immédiatement de la convexité de la fonction de charge de Gurson  $\Phi$  par rapport à la variable interne globale  $(\sigma, \bar{\sigma})$ , si cette fonction était convexe. Ce n'est malheureusement pas le cas car on vérifie aisément que  $\Phi(\sigma, \bar{\sigma})$  est convexe par rapport à  $\sigma$  à  $\bar{\sigma}$  fixé, mais pas par rapport à la variable globale  $(\sigma, \bar{\sigma})$ .

Pour lever cette petite difficulté, on introduit les changements de variables

$$\mathbf{X} \equiv \sigma/\bar{\sigma} \quad \text{et} \quad \Phi(\sigma, \bar{\sigma}, f) \equiv \tilde{\Phi}(\mathbf{X}, f).$$

La fonction  $\tilde{\Phi}$  est convexe par rapport à  $\mathbf{X}$ , si bien que l'ensemble  $\tilde{\mathcal{C}}$  des  $\mathbf{X}$  tels que  $\tilde{\Phi}(\mathbf{X}, f) \leq 0$  est convexe. De plus  $(\sigma, \bar{\sigma})$  appartient à  $\mathcal{C}$  si et seulement si  $\mathbf{X}$  appartient à  $\tilde{\mathcal{C}}$ .

Soient alors  $(\sigma_1, \bar{\sigma}_1)$  et  $(\sigma_2, \bar{\sigma}_2) \in \mathcal{C}$  et  $\theta \in [0, 1]$ . Il faut montrer que

$$((1 - \theta)\sigma_1 + \theta\sigma_2, (1 - \theta)\bar{\sigma}_1 + \theta\bar{\sigma}_2)$$

appartient à  $\mathcal{C}$ . En posant

$$\mathbf{X}_1 \equiv \sigma_1/\bar{\sigma}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_2 \equiv \sigma_2/\bar{\sigma}_2,$$

on a  $\mathbf{X}_1 \in \tilde{\mathcal{C}}$  et  $\mathbf{X}_2 \in \tilde{\mathcal{C}}$ . Il s'agit de prouver que

$$\mathbf{X} = \frac{(1 - \theta)\sigma_1 + \theta\sigma_2}{(1 - \theta)\bar{\sigma}_1 + \theta\bar{\sigma}_2}$$

est dans l'ensemble  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Or

$$\mathbf{X} = \frac{(1 - \theta)\bar{\sigma}_1}{(1 - \theta)\bar{\sigma}_1 + \theta\bar{\sigma}_2} \mathbf{X}_1 + \frac{\theta\bar{\sigma}_2}{(1 - \theta)\bar{\sigma}_1 + \theta\bar{\sigma}_2} \mathbf{X}_2 = (1 - \theta')\mathbf{X}_1 + \theta'\mathbf{X}_2$$



où

$$\theta' = \frac{\theta \bar{\sigma}_2}{(1 - \theta) \bar{\sigma}_1 + \theta \bar{\sigma}_2} \in [0, 1].$$

Ceci prouve bien que  $\mathbf{X} \in \tilde{\mathcal{C}}$ .

La convexité de  $\tilde{\Phi}$  par rapport à  $\mathbf{X}$  implique que

$$\Phi[(1 - \theta)\boldsymbol{\sigma}_1 + \theta\boldsymbol{\sigma}_2, (1 - \theta)\bar{\sigma}_1 + \theta\bar{\sigma}_2, f] = \tilde{\Phi}(\mathbf{X}, f) \leq (1 - \theta')\tilde{\Phi}(\mathbf{X}_1, f) + \theta'\tilde{\Phi}(\mathbf{X}_2, f) \leq 0$$

de sorte que

$$((1 - \theta)\boldsymbol{\sigma}_1 + \theta\boldsymbol{\sigma}_2, (1 - \theta)\bar{\sigma}_1 + \theta\bar{\sigma}_2) \in \mathcal{C}.$$

Ceci prouve bien que  $\mathcal{C}$  est convexe.

Il reste à vérifier, pour achever la démonstration, que les équations d'évolution des variables internes  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et  $\bar{\varepsilon}$  obéissent à la propriété de normalité généralisée par rapport à la fonction de charge de Gurson, exprimée en fonction des forces thermodynamiques :

$$(1.53) \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{F}^{\boldsymbol{\varepsilon}^p}} \equiv \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{\bar{\varepsilon}} &= \eta \frac{\partial \Phi}{\partial F^{\bar{\varepsilon}}} \equiv -\frac{\eta}{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\sigma}} \end{cases}$$

Ecrivons à cet effet, comme ci-dessus  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma}, f)$  sous la forme  $\tilde{\Phi}(\mathbf{X}, f)$  avec  $\mathbf{X} \equiv \boldsymbol{\sigma}/\bar{\sigma}$ . On a alors

$$(1.54) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\sigma}} = -\frac{1}{\bar{\sigma}^2} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \end{cases}$$

La loi d'évolution [1.53]<sub>1</sub> est bien vérifiée : c'est la normalité simple. Le problème est donc réduit à examiner si l'équation d'évolution [1.53]<sub>2</sub> est aussi satisfaite. Or d'après l'équation [1.54]<sub>2</sub>, l'équation [1.53]<sub>2</sub> s'écrit :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = -\frac{\eta}{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\eta}{\lambda \bar{\sigma}^2} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} = \frac{1}{\lambda \bar{\sigma}} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p,$$

ou encore

$$(1.55) \quad \lambda \bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p.$$

La relation [1.55] est équivalente à l'équation [2.52] à condition de prendre

$$(1.56) \quad \lambda = 1 - f.$$

Le choix précédent du paramètre  $\lambda$  est possible parce que l'hypothèse de départ fixe la valeur de la porosité. Par ailleurs, le choix de l'expression de l'énergie libre est totalement arbitraire; on peut prendre pour cette énergie l'expression que l'on veut du moment qu'elle est compatible avec les équations constitutives. Le choix de  $\lambda = 1 - f$  est donc parfaitement licite.

Toutes les conditions requises pour que le modèle de Gurson à porosité fixée, définisse un matériau standard généralisé sont ainsi satisfaites.

L'essentiel ici est que l'équation d'évolution du paramètre d'écroutissage  $\bar{\epsilon}$  est telle que les variables internes  $\epsilon^p$  et  $\bar{\epsilon}$  vérifient collectivement une certaine la "loi de normalité". La propriété ne semble pas pouvoir être étendue au cas où l'on tient compte de l'évolution de la porosité suivant l'équation [1.34], car le membre de droite de cette équation ne présente aucun rapport avec la dérivée du critère par rapport à la porosité.

## 1.7 Implémentation numérique des équations constitutives

Cette section a pour objet la présentation de la numérisation des équations constitutives du modèle de Gurson non local, défini par Leblond *et al.* [JBL, 1994], en vue de son intégration dans le code de calcul par éléments finis SYSTUS<sup>®</sup> développé par ESI Group (Engineering System International). L'élément essentiel de cette implémentation numérique est l'indispensable opération de "projection" sur le critère. Après avoir précisé la discrétisation temporelle du problème, permettant ainsi de fixer les notations employées, et rappelé brièvement les deux principales étapes (locale et globale) associées à la résolution itérative du problème, nous décrivons l'algorithme utilisé pour cette projection.

La matière de cette section est tirée des travaux de Leblond [Leb, 1993].

### 1.7.1 Discrétisation en temps

Comme l'intégration directe du problème continu en temps est très difficile, on adopte une résolution du problème par une méthode pas à pas : on cherche à déterminer les divers paramètres mécaniques à l'instant  $t + \Delta t$  connaissant ces quantités à l'instant  $t$ .

### 1.7.2 Généralités sur la démarche de résolution

De manière générale, la résolution d'un problème d'évolution quasi-statique nécessite le traitement couplé de deux sous-problèmes : d'une part, il faut assurer l'équilibre de la structure, et d'autre part, il faut intégrer les relations de comportement.

L'équilibre est écrit sous la forme du principe des puissances virtuelles :

$$(1.57) \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial_T \Omega} \mathbf{T}^d \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V_0^{ad}$$

où  $V_0^{ad}$  est l'ensemble des champs cinématiquement admissibles,  $\boldsymbol{\sigma}$  le champ de contrainte inconnu,  $\mathbf{T}^d$  et  $\mathbf{f}^d$  les forces volumiques et surfaciques imposées. L'intégration des relations de comportement fournit à chaque point  $\boldsymbol{\sigma}$  en fonction de l'incrément de déplacement  $\Delta \mathbf{u}$  via une relation non linéaire. L'équation d'équilibre [1.57] s'écrit alors, sous la forme

$$(1.58) \quad \mathbf{R}(\Delta \mathbf{u}) = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_e = \mathbf{0}.$$

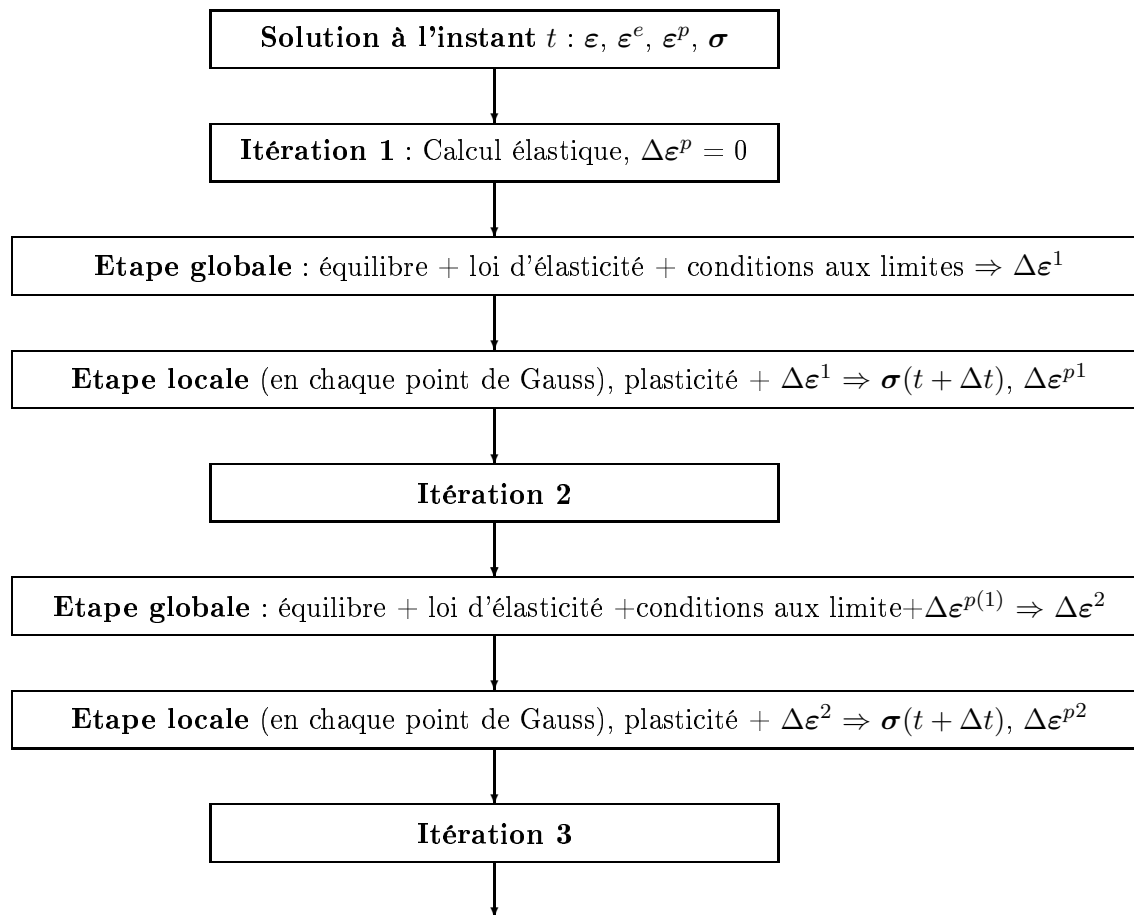
Dans l'équation [1.58],  $\mathbf{R}$  est le vecteur des résidus aux nœuds exprimé comme différence entre les forces nodales internes  $\mathbf{F}_i$  et externes  $\mathbf{F}_e$ . Comme le système [1.58] est non linéaire, sa solution ne peut pas être directement obtenue comme c'est le cas dans les problèmes d'élasticité. La résolution s'effectue par une méthode itérative de Newton (ou une de ses variantes), les itérations prenant fin lorsqu'on considère que l'équilibre est atteint. Chaque itération est composée de deux étapes : une étape globale et une étape locale.

L'**étape globale** consiste à calculer les déplacements aux nœuds de la structure ainsi que les déformations totales et les contraintes aux points de Gauss, en supposant connu en tout point l'incrément de déformation plastique  $\Delta\varepsilon^p$  entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ . En pratique, on suppose que la valeur de cet incrément est nulle (calcul purement élastique) au cours de la première itération ; et elle prend la valeur trouvée à la fin de l'itération précédente au cours des itérations ultérieures. Cette étape utilise les équations d'équilibre, la loi de comportement élastique et les conditions aux limites, ce qui entraîne la résolution d'un système linéaire sur l'ensemble de la structure. Cependant, les équations de la plasticité ne sont pas utilisées au cours de cette étape.

La démarche est analogue à la résolution d'un problème classique d'élasticité par la méthode des éléments finis à cette différence près que la déformation totale comprend une contribution supplémentaire due à la plasticité qui joue le rôle de "déformation initiale" (analogue à la déformation thermique par exemple).

Au cours de l'**étape locale**, on considère comme donnée, en chaque point, la déformation totale finale (ou bien son incrément  $\Delta\varepsilon$ ), qui résulte de l'étape globale précédente, puis on calcule les incréments de déformation élastique et plastique,  $\Delta\varepsilon^e$  et  $\Delta\varepsilon^p$ , ainsi que la contrainte  $\sigma$ , en utilisant les équations de la plasticité. En aucune manière, il ne sera fait usage, au cours de cette étape, des équations d'équilibre, ni des conditions aux limites, ce qui exclut toute résolution d'un système linéaire sur l'ensemble de la structure. L'algorithme de résolution est effectué aux différents points indépendamment les uns des autres.

Le schéma suivant résume les différentes étapes de la méthode.



Signalons que malgré l'aspect quelque peu complexe que peut revêtir la programmation de l'étape globale, on n'a pas à s'en soucier lors de l'implantation numérique d'un nouveau modèle de plasticité dans un code de calcul par éléments finis, les seuls développements à faire concernent l'étape locale, sur laquelle nous nous focaliserons désormais.

### 1.7.3 Algorithme implicite de projection sur le critère

#### 1.7.3.1 Généralités

La numérisation des équations constitutives du modèle de Gurson, que ce soit dans sa version locale ou sa version non locale, présente certaines différences par rapport à celle des équations de l'élasto-plasticité classique de von Mises. Ces différences concernent essentiellement l'opération de "projection sur le critère" ou de "correction plastique des contraintes", c'est-à-dire le calcul des contraintes et des divers autres paramètres mécaniques à l'instant  $t + \Delta t$  connaissant ces quantités à l'instant  $t$  ainsi que l'incrément de déformation totale <sup>10</sup>  $\Delta\varepsilon \equiv \mathbf{D}\Delta t$  entre ces deux instants.

<sup>10</sup>Noter qu'en grandes transformations,  $\mathbf{D}\Delta t$  n'est pas la variation du tenseur de déformation linéarisée, qui n'est pas défini, l'écriture de cette quantité sous la forme  $\Delta\varepsilon$  n'est qu'une notation pour alléger les expressions.

Dans tout ce qui va suivre, nous nous intéresserons au problème incrémental défini entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ . Nous nous plaçons dans un premier temps dans l'hypothèse des petites perturbations pour simplifier l'exposé. Les grandeurs qui apparaîtront seront considérées à l'instant  $t + \Delta t$ , sauf si elles sont munies d'un indice supérieur  $0$  qui signifiera qu'elles sont considérées à l'instant  $t$ . Les quantités connues comprennent  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\bar{\varepsilon}$  et  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  (l'incrément de déformation totale entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ ).

Nous ferons usage de la formule

$$(1.59) \quad \boldsymbol{\sigma}^e \equiv \boldsymbol{\sigma}^0 + \lambda(\text{tr}\Delta\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}.$$

La quantité  $\boldsymbol{\sigma}^e$  représente ici le tenseur des contraintes à  $t + \Delta t$  *calculé élastiquement*, ou encore la *prédicteur élastique*. Elle correspond à la valeur finale de ce tenseur en supposant l'incrément de déformation totale purement élastique. On préfère utiliser  $\boldsymbol{\sigma}^e$  comme donnée du problème plutôt que  $\boldsymbol{\sigma}^0$  et  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  pris séparément. Une des raisons de ce choix est qu'en l'absence de plasticité entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$  (c'est-à-dire quand le seuil de plasticité n'est pas encore atteint ou lors d'une décharge élastique), tout ce qu'on a à faire est d'identifier  $\boldsymbol{\sigma}$  à  $\boldsymbol{\sigma}^e$ . Notons que si la plasticité apparaît,  $\boldsymbol{\sigma}^e$  ne convergera pas vers  $\boldsymbol{\sigma}$  à la fin du processus itératif, puisque  $\boldsymbol{\sigma}^e$  représente la valeur de  $\boldsymbol{\sigma}$  en l'absence de plasticité, ce qui précisément est exclu dans ce cas.

Le problème est donc de calculer les incréments de déformation élastique et plastique  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ,  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , l'incrément de déformation équivalente "moyenne"  $\Delta\bar{\varepsilon}$ , et la contrainte finale  $\boldsymbol{\sigma}$ . Ces inconnues sont reliées par la relation

$$(1.60) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^0 + \lambda(\text{tr}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e)\mathbf{I} + 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e \\ &= \boldsymbol{\sigma}^0 + \lambda(\text{tr}\Delta\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \lambda(\text{tr}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)\mathbf{I} - 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ &= \boldsymbol{\sigma}^e - 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p. \end{aligned}$$

Le terme  $\lambda(\text{tr}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)\mathbf{I} + 2\mu\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$  est appelé *correcteur plastique* ; il correspond à la correction à apporter au *prédicteur élastique* pour obtenir la contrainte finale.

Nous allons maintenant écrire les équations discrétisées du problème.

### 1.7.3.2 Equations discrétisées du problème de projection

L'algorithme adopté est implicite par rapport à la déformation plastique et au paramètre d'écrouissage  $\bar{\varepsilon}$  mais explicite vis-à-vis de la porosité, pour des raisons que détaillerons dans la suite.

Ecrivons les équations discrétisées du problème, en notant  $\mathbf{X}'$  et  $\mathbf{X}_m$  les parties déviatorique et moyenne d'un tenseur du second ordre  $\mathbf{X}$ . (On rappelle que les effets dûs aux grandes transformations sont négligés pour le moment).

Les deux premières équations du problème correspondent aux parties déviatorique et moyenne de l'équation [1.60]

$$(1.61) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}' &= (\boldsymbol{\sigma}^e)' - 2\mu (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)' \\ \sigma_m &= \sigma_m^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta\varepsilon_m^p. \end{cases}$$

L'équation suivante est le critère de plasticité de Gurson [1.27]. En théorie, du fait du caractère mixte implicite/explicite de l'algorithme, les quantités  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\bar{\sigma}$  dans le critère doivent être prises à l'instant  $t + \Delta t$ , et la quantité  $p$  à l'instant  $t$ ; ce qui signifie qu'elle doit correspondre, *via* la relation [1.19], à

$$f^0 \equiv f(t).$$

Il est cependant clair que cet écart de temps dégrade la précision du schéma numérique. Pour réduire cette dégradation, nous allons utiliser la valeur de  $p$  correspondant à l'estimation explicite de la porosité à l'instant  $t + \Delta t$  donnée par

$$(1.62) \quad f \approx f^0 + \dot{f}^0 \Delta t.$$

Puisqu'une telle estimation reste fixe durant toute la procédure de la solution du problème de projection, l'utiliser à la place de  $f^0$  préserve le caractère explicite de l'algorithme par rapport à la porosité. On notera cependant que ceci nécessite de stocker le taux de porosité en sus de la porosité elle-même.

Les deux équations suivantes sont constituées par les parties déviatorique et moyenne de la loi d'écoulement [1.31] :

$$(1.63) \quad \begin{cases} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)' &= \Delta\eta \frac{3}{\bar{\sigma}^2} \boldsymbol{\sigma}' \\ \Delta\varepsilon_m^p &= \Delta\eta \frac{p}{\bar{\sigma}} \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right). \end{cases}$$

La quantité  $p$  correspond ici encore, *via* la relation [1.19], à la valeur approchée de la porosité à l'instant  $t + \Delta t$  donnée par l'équation [1.62].

Les deux dernières équations définissent le paramètre  $\bar{\sigma}$  en fonction du paramètre  $\bar{\varepsilon}$  et donnent l'évolution de  $\bar{\varepsilon}$  :

$$(1.64) \quad \begin{cases} \bar{\sigma} &= \sigma(\bar{\varepsilon}^0 + \Delta\bar{\varepsilon}) \\ (1-f)\bar{\sigma}\Delta\bar{\varepsilon} &= \boldsymbol{\sigma}' : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)' + 3\sigma_m \Delta\varepsilon_m^p = \sigma_{eq} \Delta\varepsilon_{eq}^p + 3\sigma_m \Delta\varepsilon_m^p \end{cases}$$

où

$$\Delta\varepsilon_{eq}^p \equiv \left[ \frac{2}{3} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)' : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)' \right]^{1/2}$$

représente l'incrément de déformation plastique équivalent. La dernière égalité résulte du fait que les tenseurs  $\boldsymbol{\sigma}'$  et  $(\Delta\varepsilon^p)'$  sont positivement colinéaires du fait de l'équation [1.63]<sub>1</sub>.

### 1.7.3.3 Démarche de résolution

La démarche de résolution proposée est la même que celle qu'utilise Aravas [Ara, 1987] jusqu'à un certain point, puis elle s'en écarte. Une comparaison détaillée avec l'algorithme de cet auteur et celui de Besson sera présentée dans la section [1.7.3.5].

On commence par montrer, à partir des équations [1.61]<sub>1</sub> et [1.63]<sub>1</sub>, que les tenseurs  $\boldsymbol{\sigma}'$ ,  $(\boldsymbol{\sigma}^e)'$  et  $(\Delta\varepsilon^p)'$  sont positivement colinéaires. Cette propriété implique que

$$(1.65) \quad (\Delta\varepsilon^p)' = \frac{3}{2} \frac{\Delta\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} \boldsymbol{\sigma}' = \frac{3}{2} \frac{\Delta\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}^e} (\boldsymbol{\sigma}^e)'$$

où  $\sigma_{eq}^e$  désigne la norme de von Mises (contrainte équivalente) du prédicteur élastique. En rapprochant cette propriété de la relation [1.61]<sub>1</sub>, on voit aussi que :

$$(1.66) \quad \sigma_{eq} = \sigma_{eq}^e - 3\mu \Delta\varepsilon_{eq}^p.$$

Faisons remarquer au passage qu'on serait parvenu au même résultat si on utilisait le critère de von Mises à la place de celui de Gurson.

De plus, en prenant la norme de von Mises des deux membres de l'équation [1.63]<sub>1</sub>, nous obtenons

$$\Delta\varepsilon_{eq}^p = \Delta\eta \frac{2}{\bar{\sigma}} \sigma_{eq}.$$

L'élimination du multiplicateur plastique  $\Delta\eta$  entre cette expression et l'équation [1.63]<sub>2</sub> conduit à :

$$(1.67) \quad \frac{\Delta\varepsilon_m^p}{\Delta\varepsilon_{eq}^p} = \frac{p}{2} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{eq}} \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) \Leftrightarrow 2\sigma_{eq} \Delta\varepsilon_m^p - p\bar{\sigma} \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) \Delta\varepsilon_{eq}^p = 0.$$

Nous introduisons à présent une paramétrisation de la surface d'écoulement de Gurson. Cette paramétrisation, inspirée de celle, classique, d'une ellipse, garantit automatiquement la satisfaction du critère. Elle est obtenue en recherchant d'abord la valeur maximale possible de  $\sigma_{eq}$  autorisée par le critère, en écrivant ensuite  $\sigma_{eq}$  comme la valeur de ce maximum multipliée par le cosinus d'un angle (que nous noterons  $\phi$ ), et enfin en résolvant l'équation  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma}, f) = 0$  par rapport à  $\sigma_m$ . Le résultat est

$$(1.68) \quad \begin{cases} \frac{\sigma_{eq}}{\bar{\sigma}} \equiv X_{eq}(\phi) \equiv (1-p) \cos \phi \\ \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} \equiv X_m(\phi) \equiv \frac{2}{3} \operatorname{sgn}(\phi) \cosh^{-1} \left[ 1 + \frac{(1-p)^2 \sin^2 \phi}{2p} \right] \end{cases}$$

où  $\phi$  est un angle compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ . Le signe de  $\phi$  est introduit dans l'équation [1.68]<sub>2</sub> pour prendre en compte aussi bien les valeurs négatives que positives de  $\sigma_m$ .

Supposons d'abord connue la valeur de  $\Delta\bar{\varepsilon}$ . On connaît alors aussi celle de  $\bar{\sigma}$  à partir de l'équation [1.64]<sub>1</sub>, et le problème se réduit à résoudre, par une méthode de Newton par exemple, l'équation



suivante sur l'unique inconnue  $\phi$ , qui résulte de la combinaison des équations [1.61]<sub>2</sub>, [1.66], [1.67]<sub>2</sub> et [1.68] :

$$(1.69) \quad 6X_{eq}(\phi) \frac{\sigma_m^e - \bar{\sigma} X_m(\phi)}{3\lambda + 2\mu} - p \sinh\left(\frac{3}{2} X_m(\phi)\right) \frac{\sigma_{eq}^e - \bar{\sigma} X_{eq}(\phi)}{\mu} = 0.$$

La valeur de  $\Delta\bar{\varepsilon}$  peut elle-même être déterminée par une méthode itérative de point fixe ( $\phi$  étant calculé par la méthode de Newton à chaque itération) : partant d'une valeur initiale de ce paramètre, on détermine la valeur de  $\bar{\sigma}$  à partir de l'équation [1.64]<sub>1</sub>, puis celle de  $\phi$  en résolvant l'équation [1.69], ensuite celles de  $\sigma_{eq}$  et  $\sigma_m$  à partir des équations [1.68], puis celles de  $\Delta\epsilon_{eq}^p$  et  $\Delta\epsilon_m^p$  à partir des équations [1.66] et [1.61]<sub>2</sub>, puis on détermine une nouvelle valeur de  $\Delta\bar{\varepsilon}$  à partir de l'équation [1.64]<sub>2</sub>, et on itère le processus jusqu'à ce que la valeur de  $\Delta\bar{\varepsilon}$  ne change plus.

L'essentiel de la résolution consiste donc en deux boucles itératives imbriquées, une boucle externe résolvant les équations sur le paramètre  $\Delta\bar{\varepsilon}$  par une méthode de point fixe, et une boucle interne résolvant l'équation [1.69] sur  $\phi$  pour une valeur donnée de  $\Delta\bar{\varepsilon}$  par la méthode de Newton.

Une fois obtenue la convergence sur  $\Delta\bar{\varepsilon}$  et  $\phi$ , on connaît les valeurs correctes de  $\sigma_{eq}$ ,  $\sigma_m$ ,  $\Delta\epsilon_{eq}^p$  et  $\Delta\epsilon_m^p$ . On en déduit les valeurs des composantes de  $\sigma'$  et  $(\Delta\epsilon^p)'$  à partir des équations [1.65], dont la combinaison avec les valeurs de  $\sigma_m$  et  $\Delta\epsilon_m^p$  donne les composantes de  $\sigma$  et  $\Delta\epsilon^p$ .

#### 1.7.3.4 Prise en compte des grandes transformations

Indiquons, à présent, les modifications apportées dans l'opération de projection par la prise en compte des grandes transformations. Ces modifications proviennent de l'apparition d'une dérivée objective du tenseur des contraintes dans la loi d'hypoélasticité. Cette dérivée diffère de la dérivée ordinaire par des quantités qui sont des combinaisons du tenseur des contraintes, éventuellement du gradient de transformation et le gradient de vitesse. La loi d'élasticité est remplacée par :

$$(1.70) \quad \begin{cases} \Delta\sigma' + (\Delta\sigma')_{J/GN} = 2\mu(\Delta\epsilon^p)' \\ (\Delta\sigma')_{J/GN} \equiv \sigma \cdot \Delta\Omega - \Delta\Omega \cdot \sigma \end{cases}$$

où  $\Delta\Omega = \Omega\Delta t$  représente l'incrément de rotation. La quantité  $(\Delta\sigma')_{J/GN}$  représente ici la correction de l'incrément de contrainte due à la dérivée de Jaumann (symbole  $J$  :  $\Omega$  est alors la partie antisymétrique du gradient de vitesse) ou à celle de Green-Naghdi (symbole  $GN$  :  $\Omega$  est alors le taux de rotation associé à la décomposition polaire du gradient de transformation).

Supposons maintenant la quantité  $(\Delta\sigma')_{J/GN}$  discrétisée de manière explicite, c'est-à-dire en utilisant le tenseur des contraintes à l'instant  $t$ , connu. (Ceci est acceptable car ce terme est toujours petit). On connaît alors la valeur de  $(\Delta\sigma')_{J/GN}$  dès le début de chaque itération élastoplastique, et cette valeur ne variera pas au cours de cette itération. Il suffit dès lors de l'incorporer au prédicteur

élastique, sous forme d'une pré-correction préalable à l'opération de projection. L'expression de ce prédicteur devient donc

$$(1.71) \quad (\boldsymbol{\sigma}^e)' = (\boldsymbol{\sigma})' + 2\mu(\Delta\varepsilon)' - (\Delta\boldsymbol{\sigma})_{\mathbf{J}/\mathbf{GN}}$$

L'opération de projection qui suit est alors inchangée.

En pratique, le terme correctif  $-(\Delta\boldsymbol{\sigma})_{\mathbf{J}/\mathbf{GN}}$  est programmé dans un sous programme qu'appelle un programme où tout se passe exactement comme si les transformations étaient petites.

### 1.7.3.5 Comparaison avec d'autres algorithmes

Une différence importante entre l'algorithme que nous proposons pour la numérisation des équations du modèle de Gurson et ceux qu'utilisent Aravas [Ara, 1987] et Besson [Bes, 2001] est que ces auteurs adoptent un schéma implicite par rapport à la porosité. (Les raisons pour lesquelles nous préférons un schéma explicite seront évoqués plus loin). Il y a cependant d'autres différences, moins importantes il est vrai.

L'approche que nous utilisons dans notre algorithme est identique à celle d'Aravas jusqu'à l'équation [1.67]. Dans la suite, au lieu d'utiliser une paramétrisation du critère comme nous l'avons fait, il propose de résoudre directement les équations en prenant comme inconnues principales  $\Delta\varepsilon_{eq}^p$  et  $\Delta\varepsilon_m^p$ . En effet, la connaissance des valeurs de ces grandeurs permet de calculer  $\sigma_{eq}$  et  $\sigma_m$  en utilisant les équations [1.66] et [1.61]<sub>2</sub>, et  $\Delta\bar{\varepsilon}$  en résolvant les équations [1.64] par une méthode itérative. Le critère de Gurson [1.27] forme alors avec l'équation [1.67]<sub>2</sub> un système d'équations sur les inconnues  $\Delta\varepsilon_{eq}^p$  et  $\Delta\varepsilon_m^p$  qu'une méthode de Newton permet de résoudre.

L'algorithme d'Aravas consiste donc en deux boucles itératives imbriquées, une boucle "externe" qui effectue la résolution des équations [1.27] et [1.67]<sub>2</sub> sur les paramètres  $\Delta\varepsilon_{eq}^p$  et  $\Delta\varepsilon_m^p$ , et une boucle "interne" qui résout les équations [1.64] sur le paramètre  $\Delta\bar{\varepsilon}$  pour des valeurs données de  $\Delta\varepsilon_{eq}^p$  et  $\Delta\varepsilon_m^p$ . Les itérations "internes" sur l'incrément du paramètre d'écrouissage  $\Delta\bar{\varepsilon}$  convergent toujours très vite; le rôle qu'elles jouent dans l'algorithme de résolution n'est donc que mineur, et ceci est d'ailleurs vrai dans notre algorithme <sup>11</sup>. (Ceci s'explique du fait que la présence des non linéarités dans les équations portant sur  $\Delta\bar{\varepsilon}$  est le seul fait des variations de la limite d'élasticité  $\bar{\sigma}$ , qui restent toujours très petites entre deux instants de calcul successifs et encore plus entre deux itérations successives).

Ces itérations "internes" étant donc mises à part, l'algorithme d'Aravas, consiste, pour l'essentiel, en une méthode de Newton sur deux inconnues,  $\Delta\varepsilon_{eq}^p$  et  $\Delta\varepsilon_m^p$ , alors que le nôtre consiste en une méthode de Newton sur la seule inconnue  $\phi$ . L'avantage de notre algorithme sur celui d'Aravas est ici évident, bien que mineur.

<sup>11</sup>C'est d'ailleurs la raison pour laquelle un schéma aussi primitif que la méthode du point fixe peut être utilisée pour déterminer ce paramètre.

Au lieu d'essayer de réduire le problème à la recherche d'un nombre limité d'inconnues, Besson [Bes, 2001] propose de résoudre directement l'ensemble des équations par une méthode de Newton sur l'ensemble des inconnues, c'est-à-dire les composantes de  $\Delta\epsilon^p$ , ainsi que  $\Delta\bar{\epsilon}$  et  $f$ . Cette technique possède l'avantage d'être simple et souple. Elle est virtuellement applicable à tout modèle de plasticité, et notamment au cas où l'élasticité est anisotrope. (L'algorithme d'Aravas et le nôtre ne s'appliquent pas dans un tel cas parce qu'ils utilisent la colinéarité des déviateurs des contraintes avant et après la correction plastique des contraintes, qui n'a lieu qu'en élasticité isotrope). L'algorithme de Besson a cependant l'inconvénient d'être numériquement très couteux en temps de calcul par rapport au nôtre et celui d'Aravas, du fait que la méthode de Newton qu'il utilise porte sur plusieurs inconnues.

#### 1.7.4 Traitement numérique de la délocalisation

Une fois la convergence des itérations élastoplastiques entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$  obtenue, le programme évalue l'incrément local de porosité  $\Delta f^{\text{loc}}(\mathbf{x})$  grâce à la version discrétisée suivante de l'équation d'évolution de la porosité

$$(1.72) \quad \Delta f^{\text{loc}}(\mathbf{x}) = 3[1 - f(\mathbf{x})]\Delta\epsilon_m^p(\mathbf{x}).$$

L'incrément de porosité actuel  $\Delta f(\mathbf{x})$  est alors donné par

$$(1.73) \quad \Delta f(\mathbf{x}) = \frac{1}{C(\mathbf{x})} \int_{\Omega} \chi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta f^{\text{loc}}(\mathbf{y}) dV_y$$

(où le facteur  $C(\mathbf{x})$  est donné par l'équation [1.37]), qui est la forme discrétisée de l'équation [1.35]. Cet incrément est utilisé pour évaluer la porosité à l'instant  $t + \Delta t$  pour le pas de temps suivant. Bien que cette nouvelle valeur diffère légèrement de l'estimation explicite fournie par la relation [1.62], elle *n'est pas* utilisée pour recommencer toute la procédure de solution entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ , puisque l'algorithme deviendrait ainsi implicite par rapport à la porosité.

Il semble cependant à première vue que la double boucle sur les points de Gauss nécessitée par le calcul des multiples intégrales de convolution soit peu compatible avec la structure générale d'un programme d'éléments finis, et donc très lourde à programmer. Pour éviter cet écueil, on utilise un bloc stocké en mémoire dynamique sous la forme d'un tableau à deux indices AF(I, J), dédié exclusivement à l'opération de convolution. Le premier indice varie de 1 à 6, le second de 1 au nombre total de points de Gauss. Les significations des différentes grandeurs AF(I, J) sont les suivantes :

- AF(1, J), AF(2, J), AF(3, J) : coordonnées du point de Gauss J ;
- AF(4, J) : incrément local de porosité (entre les instants)  $t$  et  $t + \Delta t$  au point de Gauss J ;
- AF(5, J) : incrément réel de porosité (après convolution) au point de Gauss J ;
- AF(6, J) : poids du point de Gauss pour l'intégration.

Au cours de chaque itération élastoplastique, les valeurs  $AF(1, J)$ ,  $AF(2, J)$ ,  $AF(3, J)$ ,  $AF(4, J)$ ,  $AF(6, J)$  sont stockées au cours de la boucle du programme sur les points de Gauss. Une fois la convergence obtenue, une double boucle sur ces points permet, en utilisant les valeurs précédentes, de calculer celle de  $AF(5, J)$ . La programmation de cette double boucle est très simple du fait que le tableau  $AF$  ne contient que les informations strictement nécessaires et n'associe pas les points de Gauss aux mailles auxquels ils appartiennent.

Il faut noter que l'intégrale de convolution dans l'équation [1.35] peut être calculée sur la configuration initiale ou actuelle suivant que les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de cette équation sont interprétés comme des positions initiales ou actuelles. Nous ferons le choix de la configuration initiale pour nos calculs.

#### 1.7.4.1 Remarque : correction de l'incrément de déplacement initial entre les instants $t$ et $t + \Delta t$

La valeur initiale  $\Delta \mathbf{U}^0$  (servant à amorcer les itérations élastoplastiques globales) de l'incrément de déplacement entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ , au lieu d'être prise nulle comme habituellement, peut être déduite par extrapolation des déplacements aux deux instants immédiatement précédents. Ce remplacement permet de se rapprocher de la solution finale

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}(t + \Delta t) - \mathbf{U}(t)$$

dans le cas où le déplacement évolue de façon sensiblement proportionnelle sur l'intervalle de temps considéré. En pratique, on constate une amélioration sensible de la convergence des itérations élastoplastiques dans la plupart des cas.

L'opération d'extrapolation mentionnée ci-dessus nécessite le stockage, à la fin du calcul entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , de la "vitesse"

$$(1/\Delta t) [\mathbf{U}(t + \Delta t) - \mathbf{U}(t)].$$

#### 1.7.4.2 Conséquences du caractère standard généralisé à porosité fixée sur la solution du problème de projection

Le caractère standard généralisé du modèle de Gurson à porosité fixée n'est pas sans conséquence sur l'implémentation numérique des équations de ce modèle. Il milite en effet en la faveur de l'adoption d'un algorithme explicite par rapport à la porosité car il garantit, dans ces conditions, l'existence et l'unicité de la solution du problème de projection, comme nous allons le voir maintenant.

Commençons par nous placer dans l'hypothèse des petites perturbations, dans le cadre de laquelle a été développé le formalisme des MSG. Supposons les équations du problème de projection obtenues *via* une discrétisation en temps explicite par rapport à la porosité. Cela signifie qu'on utilise la valeur

de la porosité de l'instant  $t$  au lieu de celle de l'instant  $t + \Delta t$ , sa mise-à-jour n'intervenant qu'à la fin des itérations élastoplastiques globales entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ , quand la convergence est réalisée. La valeur de la porosité ne change donc pas durant toute la procédure de solution du problème de projection entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ , à chaque point de Gauss. Les propriétés de l'algorithme de projection sont alors exactement les mêmes *que si* la porosité était fixée dans le temps, malgré la mise à jour finale. Les propriétés d'existence et d'unicité de la solution du problème de projection sont en conséquence garanties, pour peu qu'on adopte un schéma de discrétisation implicite par rapport aux autres variables internes (les composantes de la déformation plastique et le paramètre d'écoulement  $\bar{\epsilon}$ ).

En conclusion, on peut dire que *les propriétés d'existence et d'unicité de la solution du problème de projection sur la surface de charge de Gurson sont garanties, dès lors que ses équations sont obtenues par une discrétisation en temps implicite vis-à-vis des composantes de la déformation plastique et du paramètre d'écoulement, mais explicite par rapport à la porosité.*

Ce qui précède se place cependant dans l'hypothèse des petites perturbations. Nous sommes donc en droit de nous demander si le résultat obtenu sur l'existence et l'unicité de la solution du problème de projection subsiste en présence des grandes transformations et des grands déplacements qui existent toujours en rupture ductile. Pour répondre à cette question, il nous faut examiner de quelle manière la présence des grands déplacements et des grandes transformations affecte l'implémentation numérique du modèle.

La présence des grandes transformations ainsi que des grands déplacements a un double impact sur l'implémentation numérique du modèle. Premièrement, les équations d'équilibre doivent être résolues sur la configuration actuelle (formulation eulérienne), c'est-à-dire à l'instant final  $t + \Delta t$  de l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$  considéré. Cela est réalisé en actualisant la géométrie à cet instant et en calculant les dérivées des fonctions de forme sur cette géométrie actualisée. Cette opération s'effectue une fois pour toutes au début de chaque itération élastoplastique globale. La géométrie est donc fixe durant toute la procédure de solution du problème de projection à chaque point de Gauss. Cette procédure n'est pas affectée par le fait que la géométrie ait été actualisée ou non. Il s'ensuit que l'actualisation de la géométrie ne saurait modifier des propriétés mathématiques de l'algorithme telles que l'existence et l'unicité de la solution.

La deuxième conséquence que génère la présence des grandes transformations et des grands déplacements réside dans l'apparition d'une dérivée objective temporelle du tenseur des contraintes dans la loi d'hypoélasticité. Cependant, nous avons vu plus haut que le terme supplémentaire provenant de la dérivée objective dans l'expression de l'incrément de contrainte peut être considéré comme une pré-correction du tenseur des contraintes calculé élastiquement (prédicteur élastique), qui peut lui être ajoutée une fois pour toutes au début de chaque itération élastoplastique. La procédure de solution du

problème de projection en chaque point de Gauss est donc indépendante du fait que ce terme soit pris en compte ou non, de sorte qu'il est sans effet sur l'existence et l'unicité de la solution du problème de projection.

En conclusion, on peut affirmer que *la présence des grands déplacements et des grandes transformations n'a aucun effet sur l'existence et l'unicité du problème de projection sur la surface de charge de Gurson, dans la mesure où le terme supplémentaire provenant de la dérivée objective en temps du tenseur de contrainte dans la loi d'hypoélasticité est discrétisé par un schéma explicite.*

Le résultat essentiel : existence et unicité de la solution du problème de projection, subsiste donc en grandes transformations et grands déplacements.

### 1.7.4.3 Autres arguments en faveur d'un algorithme explicite par rapport à la porosité

Un autre argument en faveur d'un algorithme explicite par rapport à la porosité est que les expériences numériques ont révélé que la convergence est très difficile à obtenir sinon impossible, avec un algorithme implicite par rapport à la porosité. En effet, il a été presque toujours impossible de poursuivre jusqu'à la rupture finale un calcul de structure en utilisant un schéma implicite par rapport à la porosité. Ceci n'a rien de contradictoire avec le fait que plusieurs calculs par éléments finis ont été effectués en utilisant les algorithmes d'Aravas [Ara, 1987] et de Besson [Bes, 2001], qui sont tous les deux implicites par rapport à la porosité. Il semble, en effet, que ces calculs aient été, soit arrêtés quelque peu avant la rupture complète de la structure, soit poursuivis en utilisant un artifice numérique pour réaliser l'annulation des contraintes dans les éléments totalement endommagés.

Un autre argument qui milite en faveur de l'usage d'un schéma de discrétisation explicite par rapport à la porosité est relatif au calcul de la matrice-tangente. Si on adopte par rapport à la porosité un schéma de discrétisation implicite, son équation d'évolution a une influence sur la matrice-tangente, ce qui complique son calcul. Cette difficulté est encore accrue si l'équation d'évolution de la porosité utilisée est celle de l'équation non locale [1.35], puisque cette équation conduit à une matrice-tangente pleine, en lieu et place de l'habituelle matrice-tangente "concentrée" autour de la diagonale principale (matrice-tangente bande). Si, en revanche, on adopte un schéma explicite par rapport à la porosité, son évolution n'a aucun effet sur la matrice-tangente, puisqu'elle est fixe durant toute la procédure de correction plastique du prédicteur élastique. Le calcul de la matrice-tangente devient simple et on préserve en particulier son caractère "bande".

Par ailleurs, d'après les conclusions de la partie [1.6.1.3] on est en droit d'affirmer que les équations du modèle de Gurson discrétisées, avec un schéma explicite par rapport à la porosité et implicite par rapport aux autres paramètres internes, conduisent à une matrice-tangente symétrique.

Nous allons maintenant envisager des études à vocation pratique, à savoir la simulation numérique d'essais de traction sur des éprouvettes entaillées fissurées, pour lesquelles des résultats expérimentaux existent et des calculs avec le modèle local de Gurson sont déjà disponibles.

## 1.8 Applications : essais numériques sur des éprouvettes fissurées

Après avoir discuté les problèmes du lien du modèle avec la classe des matériaux standards généralisés et de son intégration à un code de calcul des structures, notre objet dans cette section est d'illustrer par des tests sur des éprouvettes axisymétriques, le genre de prédiction que l'on peut attendre de ce modèle. Les performances du modèle seront évaluées sur la base de deux critères, le premier étant son habileté à s'affranchir des problèmes de dépendance vis-à-vis de la taille de maille et le second sa capacité à reproduire un comportement expérimental.

### 1.8.1 Généralités

Les simulations numériques ont été effectuées à l'aide du code de calcul par éléments finis Systus<sup>®</sup>. Dans chacune d'elles, on utilise la valeur du paramètre de Tvergaard  $q = 4/e = 1.47$  déterminée par Perrin et Leblond [Leb & Per, 1990] par un schéma "différentiel". Les autres paramètres d'endommagement dépendent du matériau considéré et seront donnés plus tard.

Les objectifs poursuivis par ces simulations sont, rappelons-le, de deux ordres : il s'agit, dans un premier temps, de vérifier l'indépendance des résultats numériques vis-à-vis de la discrétisation spatiale ; et dans un second temps, d'étudier l'efficacité pratique de la méthode de délocalisation de la porosité par une intégrale de convolution sous l'angle de sa capacité à reproduire les résultats expérimentaux.

Les résultats expérimentaux dont nous disposons pour faire ces comparaisons concernent l'acier faiblement allié 16MND5 ou encore A508 Cl.3. Cet acier est utilisé dans la fabrication des cuves des réacteurs des centrales nucléaires. Pour cet acier, le module d'Young vaut  $E = 203000$  MPa, le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  et la limite d'élasticité initiale en traction simple  $\sigma_y = 450$  MPa.

La relation de comportement de ce matériau est déduite des courbes de traction rationnelle. La courbe de traction à 100°C est bien reproduite par la loi empirique

$$\sigma = 795\varepsilon_p^{0.01},$$

représentée schématiquement sur la figure [2.12]. La partie élastique n'est pas représentée car on peut la négliger sans trop porter atteinte au comportement mécanique global du matériau.

La valeur de la porosité initiale  $f_0$  de cet acier est issue de l'étude de sa composition chimique et de son état inclusionnaire [Rou & Mur, 1981]. Elle est déduite de la teneur en soufre et en manganèse du matériau et des dimensions moyennes des inclusions. La valeur trouvée est de 0.00016. A ce paramètre d'endommagement viennent s'ajouter deux autres,  $f_c$  et  $\delta$ , représentant respectivement la porosité "critique" de début de coalescence et le facteur accélérateur de la croissance des cavités, dont les valeurs peuvent être ajustées d'une simulation à une autre.



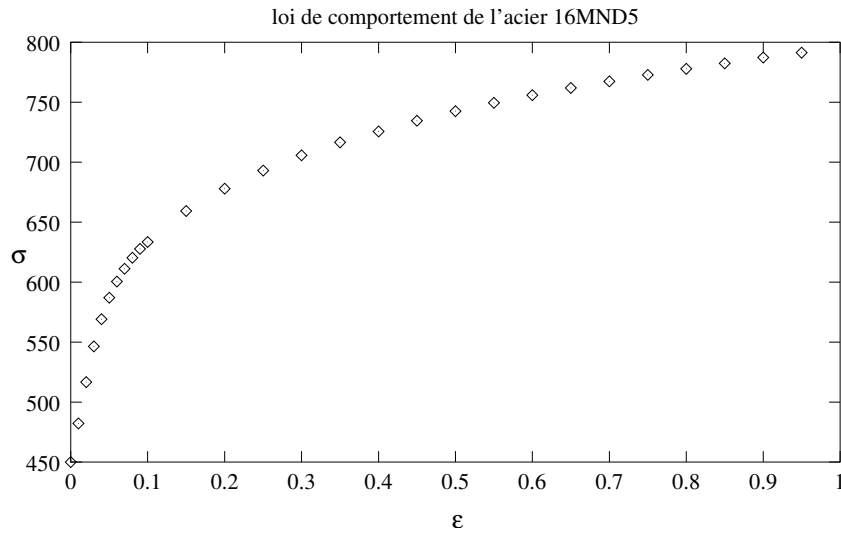


FIG. 1.1 – Loi de comportement de l'acier 16MND5

### 1.8.2 Vérification de l'absence d'effet de la taille de maille

Pour vérifier l'absence d'effet de la taille de maille, il n'est pas nécessaire de comparer les résultats numériques à ceux d'expériences. Nous sommes donc en droit de considérer une éprouvette axisymétrique pré-entaillée fictive, dont le matériau constitutif est l'acier A508 Cl.3. La figure [1.2] illustre un maillage fin de cette éprouvette. (On utilise également un maillage grossier comportant des éléments deux fois plus grands dans le ligament en amont de la pointe de fissure).

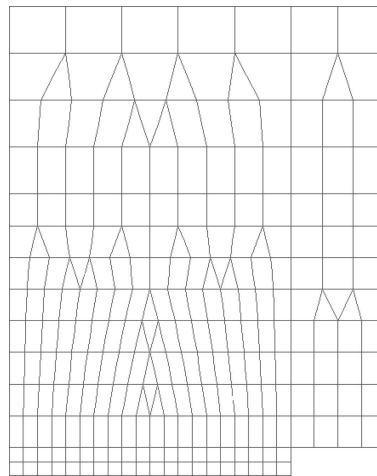


FIG. 1.2 – Maillage fin de l'éprouvette fictive pré-entaillée

Nous tirons parti des conditions de symétrie et d'axisymétrie pour ne discrétiser qu'un quart de la coupe méridienne de l'éprouvette avec des éléments quadrangles (8 nœuds 4 points de Gauss par élément sous-intégré). La demi-hauteur et le rayon valent respectivement 5 mm et 4 mm. La forme de

l'entaille centrale est rectangulaire dans le plan méridien et sa demi-largeur et sa profondeur sont de  $300 \mu\text{m}$  et  $1 \text{ mm}$  respectivement.

La figure [1.3-gauche] montre les courbes de charge force-déplacement obtenues avec les deux maillages, en utilisant le modèle de Gurson local. La comparaison de ces deux courbes montre que l'amorçage est le même quelle que soit la taille des mailles. La pente de la courbe pendant la phase de propagation de la fissure est par contre variable : plus la taille de maille diminue, plus la propagation est rapide. Cette variation de la pente se traduit aussi, à partir d'un niveau de chargement donné, correspondant à l'amorçage, par un écart de plus en plus grand entre les deux courbes dans les régions adoucissantes jusqu'à la rupture de l'éprouvette. Cet écart est une illustration de la dépendance des résultats numériques prédits par le modèle vis-à-vis de la taille de maille.

Il faut souligner que la taille de maille n'a pas d'influence sur l'amorçage.

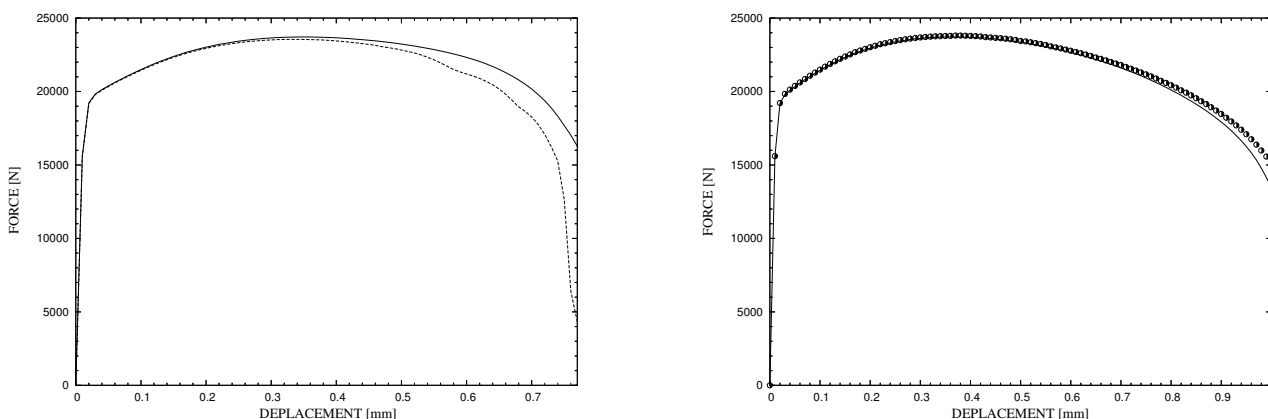


FIG. 1.3 – *Effet de la taille de maille sur la courbe force-déplacement de l'éprouvette pré-entailée - Modèle de Gurson local (à gauche) et modèle de Gurson non local (à droite)*

La figure [1.3-droite] montre les résultats obtenus avec le modèle non local de Gurson dans les mêmes conditions. La valeur de la "distance caractéristique de la microstructure"  $b$  utilisée est de  $400 \mu\text{m}$ .

Les courbes de charge obtenues sont pratiquement les mêmes. La dispersion observée entre les deux courbes dans le cas des calculs sans délocalisation est très significativement réduite. Toutefois, on note que le point d'amorçage est un peu retardé par rapport au cas sans délocalisation.

Les simulations numériques révèlent donc que l'utilisation de l'équation d'évolution non locale [1.35] de la porosité au lieu de l'équation locale [1.34] permet d'éliminer considérablement (sinon complètement) l'effet de la taille de maille dans les calculs numériques par éléments finis. Ce résultat était attendu et n'a rien de spectaculaire, il confirme les conclusions de plusieurs travaux de même nature dûs à Tvergaard et Needleman [Tve & Nee, 1995].

Nous n'insisterons donc pas davantage sur cet aspect. En revanche, la comparaison des prédictions numériques du modèle avec les résultats expérimentaux, ultime étape qui permet de décider du bien-fondé ou non de la proposition de Leblond *et al.*, non disponible dans la littérature, va retenir notre attention.

### 1.8.3 Comparaisons calculs numériques/expériences

Pour les comparaisons à venir, nous ne retiendrons qu'un seul type de géométrie d'éprouvette : les éprouvettes axisymétriques fissurées, toujours en acier A508 Cl.3, pour lesquelles les résultats expérimentaux de [Rou & Mur, 1981], fruit d'années de travail, sont disponibles. Notre choix porte sur ce type d'éprouvettes pour deux raisons : d'une part, les gradients de contraintes et de déformations donc de porosité,  $y$ , sont très élevés dans la zone fissurée, ce qui permettra un test significatif du modèle de délocalisation de la porosité; d'autre part, ce type d'éprouvettes conduit à une fissuration stable sur une distance importante, ce qui permet d'enregistrer l'évolution de la courbe de charge pendant la fissuration.

#### Simulations numériques sur des éprouvettes axisymétriques fissurées

**Géométries et discrétisations** Les maillages des éprouvettes fissurées, de diamètres 50 mm (TA50), 30 mm (TA30) et 15 mm (TA15), sont illustrés sur la figure [1.4]. La préfissuration est réalisée par fatigue et elle conduit aux rayons de préfissuration  $R_0$  suivants, variables suivant le type d'éprouvette :

$$\left\{ \begin{array}{llllll} \text{TA50} & 13.63 & \text{mm} & \leq R_0 \leq 14.05 & \text{mm} & R_{0\text{moy}} \approx 13.85 & \text{mm} \\ \text{TA30} & 08.07 & \text{mm} & \leq R_0 \leq 8.450 & \text{mm} & R_{0\text{moy}} \approx 8.300 & \text{mm} \\ \text{TA15} & 03.88 & \text{mm} & \leq R_0 \leq 4.180 & \text{mm} & R_{0\text{moy}} \approx 4.100 & \text{mm} \end{array} \right.$$

Les fissures ainsi obtenues sont quasi-circulaires et leur centrage satisfaisant.

Les éprouvettes utilisées sont cylindriques et massives. Nous tirons parti des conditions de symétrie et d'axisymétrie en ne modélisant qu'un quart d'une coupe longitudinale de l'éprouvette avec de nouveau des éléments quadrangles (8 nœuds 4 points de Gauss par élément sous-intégré). Les quelques éléments triangulaires, inévitables dans la génération automatique du maillage, n'ont aucun effet sur le résultat car ils sont situés en dehors des zones "sensibles" de ce problème (zone de la pointe de fissure et région en amont de cette pointe). Les valeurs de la demi-hauteur et du rayon sont respectivement de 75 mm et 25 mm dans le cas de la TA50, de 45 mm et 15 mm dans le cas de la TA30, et de 22.5 mm et 15 mm dans le cas de la TA15. Le demi-angle d'ouverture vaut  $30^\circ$  dans les trois cas ; la profondeur de l'entaille centrale en forme de V est de 8.335 mm pour la TA50, de 5 mm pour la TA30 et de 3.88

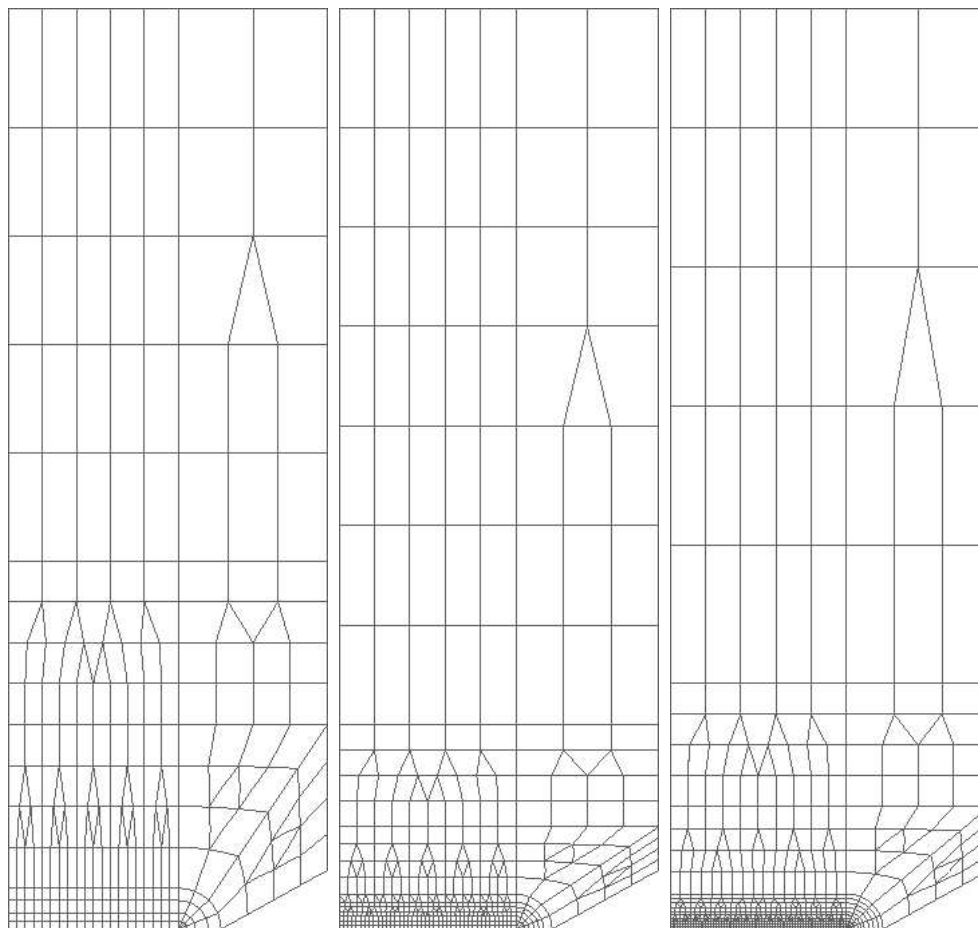


FIG. 1.4 – Maillages fins des éprouvettes TA15, TA30 et TA50 (de la gauche vers la droite). La taille des mailles du ligament est de  $200\mu\text{m}$

mm pour la TA15. Les rayons de préfissuration, sont pris respectivement égaux à 13.8 mm, 8.3 mm et 4 mm.

La discrétisation en pointe de fissure tient compte de l'étude [ESI, 1992]. En arrière de la fissure, elle est rayonnante avec secteur angulaire divisé en 4 pour bien représenter les gradients de contraintes et de déformations très importants dans cette zone. Parmi les quatre mailles jouxtant le fond de fissure dont les nœuds intermédiaires sont repoussés au quart, on distingue deux quadrilatères quasi-dégénérés et deux triangles. Le rôle des premiers est de permettre la représentation de l'émoussement, les nœuds quasi-confondus s'écartent au cours de la déformation. Devant la fissure, la discrétisation comporte des éléments carrés identiques.

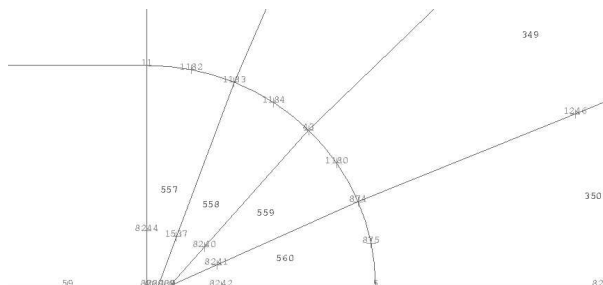


FIG. 1.5 – Maillage en pointe de fissure avec 4 mailles dont les nœuds sont repoussés au quart.

Le chargement des éprouvettes consiste en un déplacement uniforme vertical imposé à tous les nœuds de la face supérieure de la portion d'éprouvette modélisée, les nœuds situés dans le plan de symétrie étant bloqués axialement.

Les calculs sont effectués en élastoplasticité grandes transformations avec une version prototype de Systus incluant les versions locale et non locale du modèle de Gurson standard, en option bidimensionnelle axisymétrique. La valeur de  $\delta$  de 2.8, et celle de  $f_c$  est de  $5 \times 10^{-4}$ . Dans le cas des calculs non locaux, la valeur de la longueur caractéristique de la microstructure  $b$  est prise égale à  $400 \mu\text{m}$  pour une taille de maille de  $200 \mu\text{m}$  dans la zone du ligament.

**Résultats des simulations numériques et discussions** Les figures [1.6] comparent les résultats numériques obtenus pour la courbe de charge force-déplacement aux données expérimentales. La comparaison expérience/calculs numériques est très bonne avec le modèle local (à taille de maille fixée à  $800 \mu\text{m}$ ) bien que les résultats numériques dépendent du maillage.

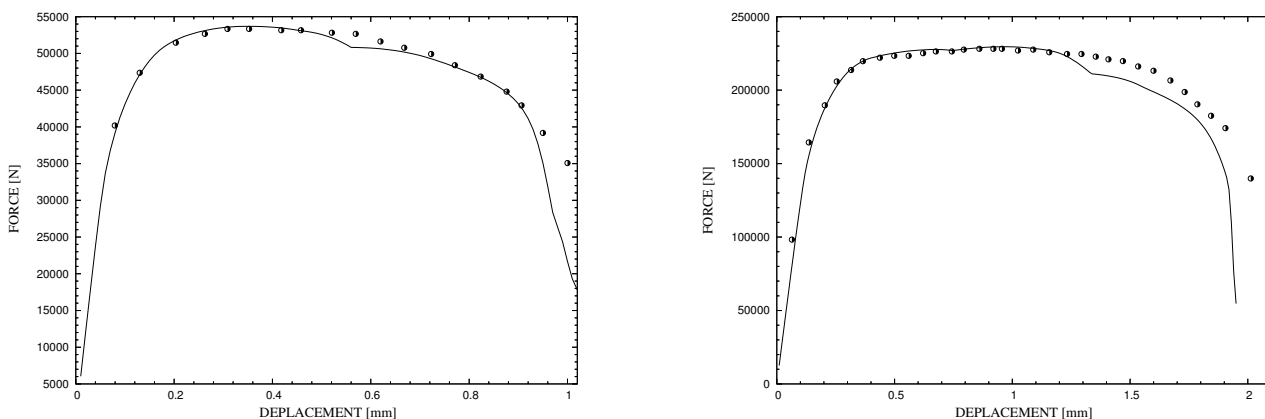


FIG. 1.6 – Comparaison calculs numériques/expériences - Force en fonction du déplacement pour une taille de maille de  $200 \mu\text{m}$  et une distance de délocalisation de  $400 \mu\text{m}$  : calculs numériques par éléments finis avec le modèle local de Gurson standard (lignes continues) et expériences (points discrets) dans le cas des éprouvettes TA15 (à gauche) et TA30 (à droite)

De l'autre côté, les résultats obtenus avec le modèle non local (figure [2.12]) bien qu'indépendants du maillage, sont médiocres. En effet, la charge prédite par les calculs numériques reste quasi-stationnaire et chute trop brutalement à partir d'un instant donné.

De plus, l'endommagement n'est pas maximal en fond de fissure et la rupture s'effectue "au-delà" du front de fissure [Dev & Mot, 1992]; ce qui est incorrect. Enfin, le point d'amorçage est retardé par rapport au cas sans délocalisation.

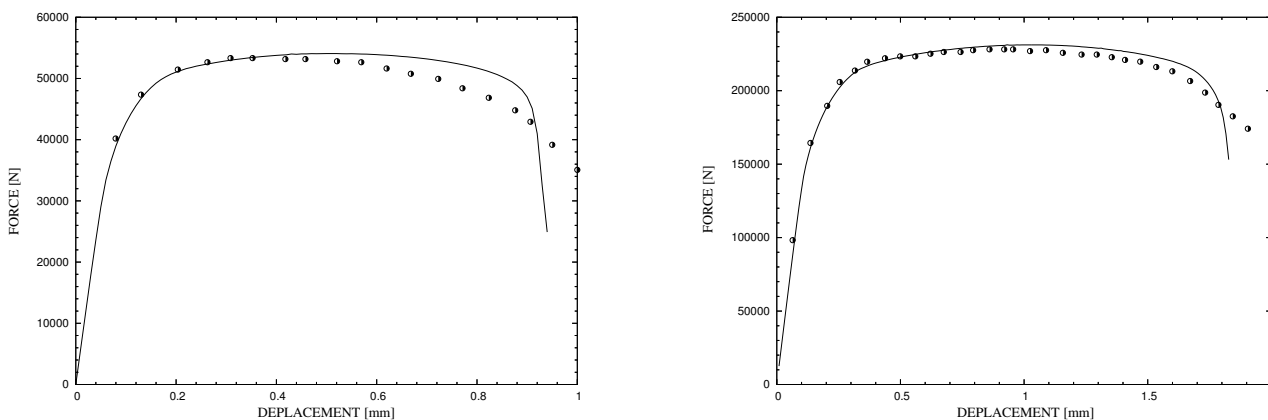


FIG. 1.7 – *Comparaison calculs numériques/expériences - Force en fonction du déplacement pour une taille de maille de  $200\ \mu\text{m}$  et une distance de délocalisation de  $400\ \mu\text{m}$  : calculs numériques par éléments finis avec le modèle Gurson non local (lignes continues) et expériences (points discrets) dans le cas des éprouvettes TA15 (à gauche) et TA30 (à droite)*

Une analyse détaillée de la distribution de porosité dans le ligament situé devant la pointe de fissure va nous permettre de comprendre ces trois derniers points afin de proposer une solution à même de les éliminer.

La figure [1.8] présente les évolutions temporelles de la porosité dans diverses mailles localisées dans ce ligament, pour les deux modèles, dans le cas de l'éprouvette TA15. On constate que le "décollage" de la porosité ne s'effectue pas aux mêmes instants aux différents points dans le calcul local, alors qu'il est quasi-simultané à tous les points dans le calcul non local. Ceci implique que la distribution de porosité prédite par le modèle local devient très hétérogène au cours du temps, tandis que celle obtenue avec le modèle non local reste presque homogène pendant longtemps de sorte que les taux d'accroissement de la porosité dans ce ligament restent faibles et quasi nuls. Il s'ensuit que la rupture du ligament s'effectue très graduellement avec le modèle local alors qu'elle est brutale avec le modèle non local, la porosité critique  $f_c$  marquant le début de la coalescence étant atteinte presque simultanément en tous les points.

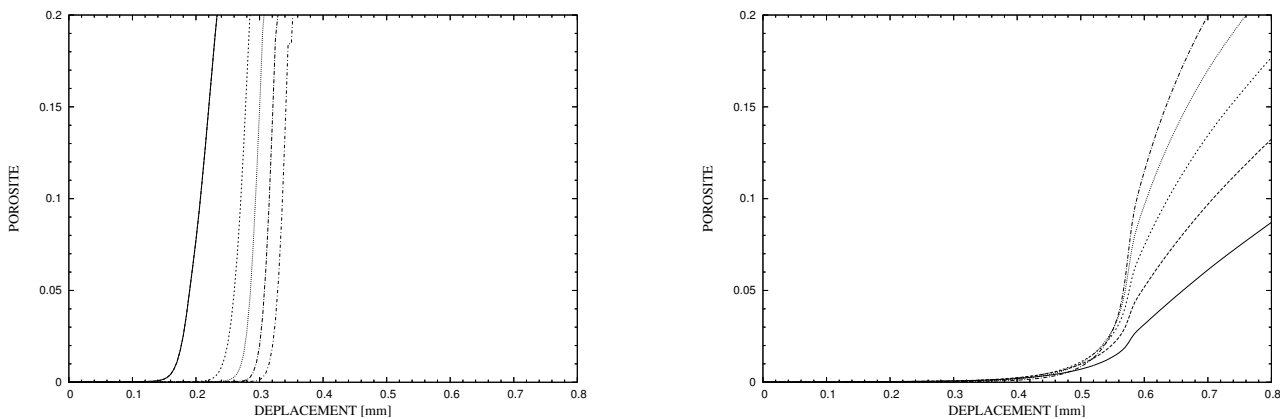


FIG. 1.8 – Répartition de la porosité dans les mailles en amont de la pointe de fissure - Modèle de Gurson local (à gauche) et Modèle de Gurson non local (à droite)

La chute trop brutale de la courbe force-déplacement est donc due à un lissage excessif de la porosité au cours du temps. Il s'agit maintenant de comprendre pourquoi l'équation d'évolution non locale de la porosité employée provoque un tel lissage, afin d'y remédier.

## 1.9 Analyse du lissage de la porosité

Le but de cette section est de proposer une explication théorique du phénomène de lissage excessif de la porosité qui résulte de l'équation d'évolution non locale [1.35]. Bien que grossière et qualitative, cette explication sera suffisante pour suggérer un remède efficace au problème.

En considérant les parties “moyenne” et déviatorique de la loi d'écoulement [1.33]<sub>1</sub> et en éliminant le multiplicateur plastique  $\eta$ , nous obtenons :

$$(1.74) \quad \frac{D_m^p}{D_{eq}^p} = \frac{p}{2} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{eq}} \sinh \left( \frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} \right)$$

où  $D_m^p \equiv \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{D}^p$  et  $D_{eq}^p \equiv \left( \frac{2}{3} D_{ij}^{p'} D_{ij}^{p'} \right)^{1/2}$  ( $\mathbf{D}^{p'} \equiv$  déviateur de  $\mathbf{D}^p$ ) sont respectivement les taux de déformation plastique moyen et équivalent. Si l'équation d'évolution locale [1.34] est utilisée pour la porosité, la combinaison de cette équation et de la relation [1.74] donne (en ne considérant, pour des raisons de simplicité, que la phase de pré-coalescence, au cours de laquelle  $f^* = f$  et  $p = qf$ ) :

$$(1.75) \quad \dot{f} = kf D_{eq}^p \quad , \quad k \equiv \frac{3q}{2} (1-f) \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{eq}} \sinh \left( \frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} \right).$$

Remplacer l'équation d'évolution locale [1.34] par l'équation non locale [1.35] est équivalent à remplacer l'équation [1.75]<sub>1</sub> par

$$(1.76) \quad \dot{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mathcal{C}(\mathbf{x})} [\chi * (kf \varepsilon_{eq}^p)](\mathbf{x}, t)$$

où le symbole  $*$  représente le produit de convolution ; les dépendances par rapport à la position et au temps sont ajoutées ici à titre indicatif pour des raisons de clarté.

Par la suite, nous introduisons l'approximation grossière selon laquelle le corps peut être considéré comme un milieu infini et les quantités  $k$  et  $D_{eq}^p$  dans l'équation [1.76] comme indépendantes de la variable d'espace. Le facteur  $\mathcal{C}(\mathbf{x})$  est donc uniforme et peut être incorporé dans la fonction de lissage  $\chi$  et il devient possible d'extraire les quantités  $k$  et  $D_{eq}^p$  du produit de convolution.

En prenant la transformée de Fourier (par rapport à la variable d'espace) de l'équation [1.76], nous obtenons alors

$$(1.77) \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(\mathbf{p}, t) = k(t) D_{eq}^p(t) \hat{\chi}(\mathbf{p}) \hat{f}(\mathbf{p}, t)$$

ou de façon équivalente

$$(1.78) \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial \epsilon_{eq}^p}(\mathbf{p}, \epsilon_{eq}^p) = k(\epsilon_{eq}^p) \hat{\phi}(\mathbf{p}) \hat{f}(\mathbf{p}, \epsilon_{eq}^p)$$

où  $\epsilon_{eq}^p$  représente la déformation plastique équivalente cumulée (intégrale par rapport au temps de  $D_{eq}^p$ ).

L'équation [1.78] montre clairement que le taux d'accroissement de  $\hat{f}(\mathbf{p}, \epsilon_{eq}^p)$  est régi par le facteur  $k(\epsilon_{eq}^p) \hat{\phi}(\mathbf{p})$ . Or la transformée de Fourier  $\hat{\phi}(\mathbf{p})$  d'une fonction de lissage-type (par exemple une fonction



Gaussienne) est positive et maximale pour  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ . Le taux d'accroissement de  $\hat{f}(\mathbf{p}, \epsilon_{eq}^p)$  atteint donc son maximum pour  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  c'est-à-dire quand la longueur d'onde  $\lambda \equiv 2\pi/\|\mathbf{p}\|$  est infinie. Cela signifie que les composantes de Fourier de  $f$  de grande longueur d'onde se développent beaucoup plus vite que les composantes de Fourier de courte longueur d'onde. En d'autres termes, la distribution de porosité devient de plus en plus lisse au cours du temps.

Pour être plus précis, faisons l'approximation (une fois encore très grossière) qu'en plus d'être indépendante de la variable d'espace, la quantité  $k$  est indépendante du temps. L'intégration de l'équation [1.78] donne alors

$$(1.79) \quad \hat{f}(\mathbf{p}, \epsilon_{eq}^p) = \hat{f}(\mathbf{p}, 0) \exp \left[ k \hat{\phi}(\mathbf{p}) \epsilon_{eq}^p \right].$$

Le développement en temps de  $\hat{f}(\mathbf{p}, \epsilon_{eq}^p)$  est régi le "facteur d'accroissement"  $\exp \left[ k \hat{\phi}(\mathbf{p}) \epsilon_{eq}^p \right]$ . Le rapport des facteurs d'accroissement correspondant à  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$  est donné par

$$(1.80) \quad \frac{\hat{f}(\mathbf{0}, \epsilon_{eq}^p)/\hat{f}(\mathbf{0}, 0)}{\hat{f}(\mathbf{p}, \epsilon_{eq}^p)/\hat{f}(\mathbf{p}, 0)} = \exp \left\{ k \left[ \hat{\phi}(\mathbf{0}) - \hat{\phi}(\mathbf{p}) \right] \epsilon_{eq}^p \right\}.$$

La fonction  $\hat{\phi}(\mathbf{p})$  étant maximale pour  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ , le terme  $\{ \dots \}$  est positif. Le rapport considéré est donc supérieur à l'unité, et devient très grand dans la limite  $t$  tendant vers  $+\infty$  (en fait pour des valeurs élevées de  $\epsilon_{eq}^p$ ), à cause de la croissance rapide de la fonction exponentielle.

Ceci confirme les conclusions déjà évoquées selon lesquelles, entre les composantes de Fourier de  $f$  de longueurs d'onde grandes et courtes, celles qui se développent le plus vite sont celles de grandes longueurs d'onde.

L'équation d'évolution [1.78] *n'est pas* une equation de diffusion, mais s'y apparente fortement. En effet, considérons une équation de diffusion fictive de la porosité (la déformation plastique équivalente cumulée  $\epsilon_{eq}^p$  jouant le rôle du temps),

$$(1.81) \quad \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{eq}^p}(\mathbf{x}, \epsilon_{eq}^p) = D \Delta f(\mathbf{x}, \epsilon_{eq}^p),$$

où  $D$  est une constante et le symbole  $\Delta$  représente le laplacien. En prenant la transformée de Fourier d'une telle équation, on obtient

$$(1.82) \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial \epsilon_{eq}^p}(\mathbf{p}, \epsilon_{eq}^p) = -D \|\mathbf{p}\|^2 \hat{f}(\mathbf{p}, \epsilon_{eq}^p),$$

qui donne par intégration

$$(1.83) \quad \hat{f}(\mathbf{p}, \epsilon_{eq}^p) = \hat{f}(\mathbf{p}, 0) \exp(-D \|\mathbf{p}\|^2 \epsilon_{eq}^p).$$

Le rapport des facteurs d'accroissement correspondant à  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$  est alors donné par

$$(1.84) \quad \frac{\hat{f}(\mathbf{0}, \epsilon_{eq}^p)/\hat{f}(\mathbf{0}, 0)}{\hat{f}(\mathbf{p}, \epsilon_{eq}^p)/\hat{f}(\mathbf{p}, 0)} = \exp(D \|\mathbf{p}\|^2 \epsilon_{eq}^p).$$

Ceci est exactement le résultat qu'on obtiendrait en développant au second ordre en  $\mathbf{p}$  le terme  $\{\dots\}$  dans le membre de droite de l'équation [1.80].

## 1.10 Version non locale logarithmique du modèle de Gurson standard

L'analogie entre l'équation [1.78] et une équation de diffusion comme [1.81] est très utile dans la recherche d'une solution au problème du lissage excessif de la porosité. En effet le caractère lisse de l'équation [1.81] est lié à la présence du Laplacien de  $f$  dans le second membre : si  $\Delta f$  était absent du second membre, [1.81] ne serait pas une équation de diffusion et on n'aurait pas de lissage de la porosité.

La solution pour empêcher un tel phénomène de se produire consiste à éliminer la porosité du membre de droite de l'équation d'évolution locale [1.34] en divisant les deux membres de l'équation par  $f$ , c'est-à-dire à la considérer sous la forme

$$(1.85) \quad \frac{d(\ln f)}{dt} = (1 - f) \frac{\text{tr } \mathbf{D}^p}{f}.$$

(La présence de  $f$  au dénominateur du membre de droite n'est qu'apparente puisque  $\text{tr } \mathbf{D}^p = 3D_m^p$  est proportionnelle à  $f$ , voir les équations [1.74] et [1.28]). Cette équation locale peut être transformée en une équation non locale de la même façon que l'équation [1.34] a été transformée en [1.35], et le résultat n'est pas le même bien que les équations locales [1.34] et [1.85] soient équivalentes. On est ainsi amené à postuler que

$$(1.86) \quad \frac{d(\ln f)}{dt}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathcal{C}(\mathbf{x})} \int_{\Omega} \chi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[ \frac{d(\ln f)}{dt} \right]^{\text{loc}}(\mathbf{y}) dV_y$$

où

$$(1.87) \quad \left[ \frac{d(\ln f)}{dt} \right]^{\text{loc}}(\mathbf{x}) \equiv (1 - f(\mathbf{x})) \frac{\text{tr}[\mathbf{D}^p(\mathbf{x})]}{f(\mathbf{x})}.$$

## 1.11 Reprise des simulations numériques par éléments finis

Les calculs numériques de la section [1.11.2] ont été recommencés en utilisant cette fois-ci la forme logarithmique de l'équation d'évolution non locale de la porosité  $f$ .

Des calculs sur un autre type d'éprouvette, l'éprouvette CTJ 25, sont effectués pour confirmer le résultat obtenu.

### 1.11.1 Simulations numériques sur des éprouvettes axisymétriques fissurées

La figure [1.9] montre les résultats obtenus avec la seconde version du modèle non local et les compare de nouveau aux résultats expérimentaux. On voit qu'en remplaçant l'équation [1.35] par

l'équation [1.86], l'accord obtenu entre les prédictions numériques et les expériences est meilleur et maintenant satisfaisant. Le nouveau modèle représente correctement la chute graduelle de la force au-delà de sa valeur maximale. De plus, l'observation de l'évolution temporelle de la porosité en divers points du ligament en amont de la pointe de fissure (figure [1.10]) ne relève plus de lissage excessif de la porosité.

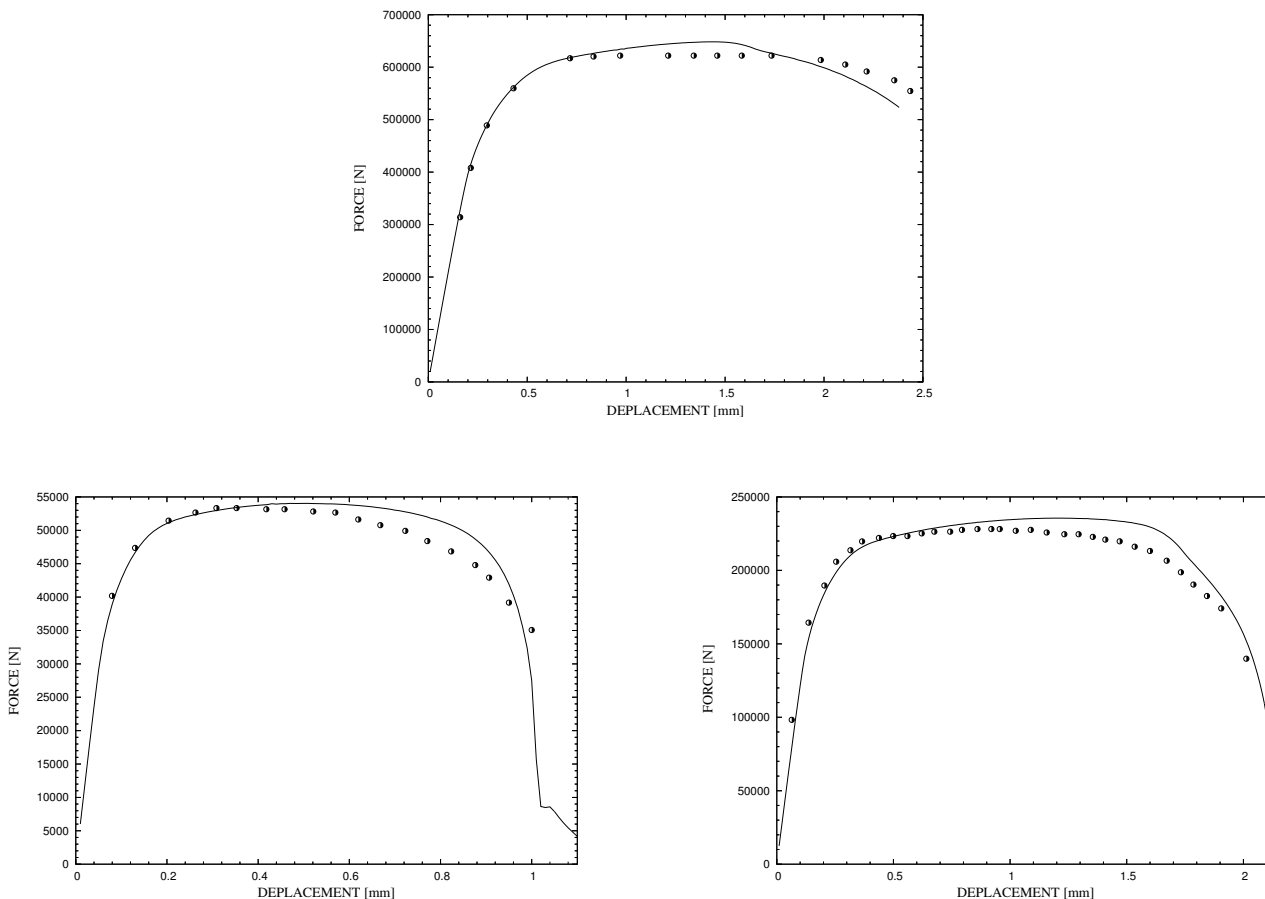


FIG. 1.9 – *Comparaison calculs numériques/expériences - Force en fonction du déplacement pour une taille de maille de  $200\ \mu\text{m}$  et une distance de délocalisation de  $400\ \mu\text{m}$  : calculs numériques par éléments finis avec le modèle de convolution logarithmique (ligne continue) et expériences (points discrets)-Eprouvettes TA50 (en haut), TA15 (à gauche en bas) et TA30 (à droite en bas)*

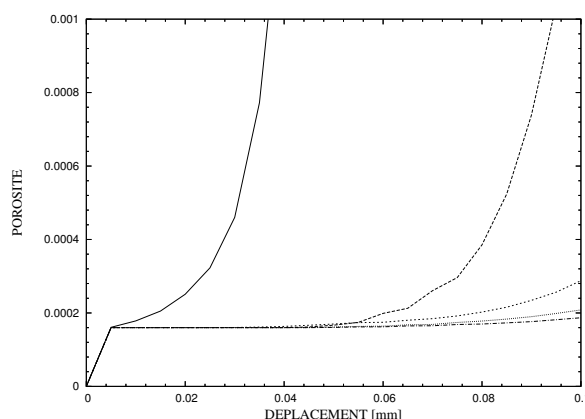


FIG. 1.10 – Evolution temporelle de la porosité dans différentes mailles situées devant la pointe de fissure : modèle de convolution logarithmique-Cas d'une éprouvette TA15.

### 1.11.2 Simulations numériques sur l'éprouvette en flexion CTJ 25

La géométrie de l'éprouvette CTJ 25, est donnée figure [1.11]. La pré-fissuration par fatigue jusqu'à une longueur de fissuration visée de  $\frac{a_0}{w} = 0.6$  a conduit à une longueur  $a_0$  (distance moyenne du front de fissure à l'axe des goupilles) comprise entre 29.45 et 30.58 mm. La longueur de fissure  $a_0$  considérée pour la modélisation numérique vaut 30 mm.

Ce type d'éprouvette est essentiellement tridimensionnelle ; cependant les entailles latérales sont pratiquées pour que la fissure ait quasiment un comportement en déformation plane.

Nous n'effectuerons donc qu'une modélisation bidimensionnelle dans le plan de symétrie de l'éprouvette en déformation plane.

La discrétisation de la demi-éprouvette correspond au plan de symétrie et tient compte de la symétrie du plan de fissure. En pointe de fissure, le maillage est celui déjà utilisé pour les éprouvettes axisymétriques fissurées de type TA. : les nœuds intermédiaires des arêtes issues de la pointe sont repoussés au quart. La taille de maille dans la zone du ligament vaut 200  $\mu\text{m}$ .

Le chargement de l'éprouvette est effectué en imposant un déplacement au centre de la goupille. Celle-ci n'est modélisée que sur une portion circulaire, portion que l'on suppose suffisamment rigide et en contact constant avec l'éprouvette.

Les nœuds appartenant au plan de symétrie de la fissure sont bloqués selon la direction du déplacement imposé. Seul un point est bloqué dans le sens perpendiculaire, pour des raisons de stabilité numérique.

Les calculs sont effectués en option bidimensionnelle de déformation plane et en grandes transformations.

Les calculs numériques ont été poursuivis jusqu'à ce qu'une longueur suffisante de propagation de fissure soit obtenue. Il était en effet inutile de rompre tout le ligament.

Pour pouvoir comparer les résultats numériques aux valeurs expérimentales et en raison de la présence des entailles latérales, il est nécessaire d'appliquer une correction de la force appliquée dans le calcul bidimensionnel. Pour cela, nous utiliserons au lieu de l'épaisseur réelle  $B$  de l'éprouvette (tridimensionnelle) une épaisseur  $B^*$  [ESIG, 1992] dont plusieurs approximations ont été proposées. Celle que nous utiliserons est une combinaison de deux formules couramment utilisées à savoir :

$$B_1^* = B \left[ 1 - \left( \frac{B - B_N}{B} \right)^2 \right] \quad \text{et} \quad B_2^* = \sqrt{B \cdot B_N}$$

où  $B_N = 0.75B$ , épaisseur hors entaille.

La formule utilisée est :

$$B^* = \frac{B_1^* \cdot B_2^*}{B}$$

Les courbes globales de charge sont données en fonction de l'ouverture de l'éprouvette, celle-ci est mesurée au niveau des goupilles pour des valeurs de  $f_0$ ,  $f_c$ ,  $\delta$  et  $b$  valant respectivement  $16 \times 10^{-5}$ ,  $5 \times 10^{-4}$ , 2.8 et 400  $\mu\text{m}$ .

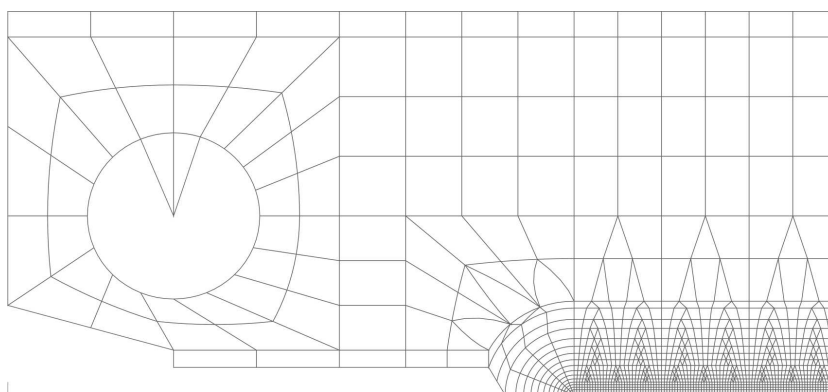


FIG. 1.11 – Maillage fin de l'éprouvette CTJ25 avec taille de maille 200  $\mu\text{m}$  dans le ligament principal

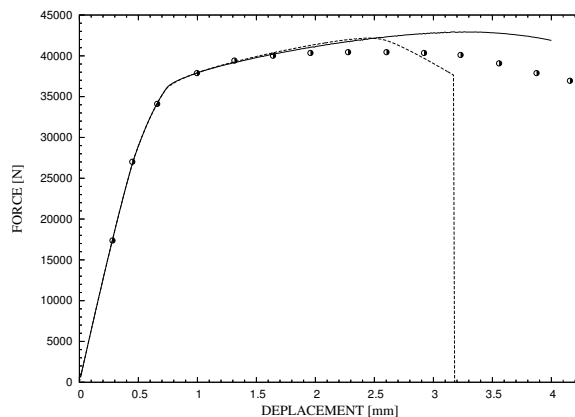


FIG. 1.12 – Comparaisons des courbes force-déplacement numériques avec l’expérience : trait continu, modèle de convolution logarithmique ; pointillés, modèle de convolution simple ; points discrets, expérience

La figure [1.12] présente la comparaison des courbes force-déplacement prédites par les modèles de convolution simple et logarithmique avec les résultats expérimentaux. On voit clairement la nette amélioration qu’apporte la méthode de délocalisation logarithmique. Les résultats sont en bon accord avec l’expérience même si les calculs numériques n’ont pu être poursuivis jusqu’à rupture complète de l’éprouvette pour des raisons de difficultés de convergence.

## 1.12 Conclusion

Le modèle de rupture ductile de Gurson [Gur, 1977], comme tous les autres modèles adoucissants, prédit à tort une concentration de la déformation et du dommage dans des zones de volume nul. Dans le cadre de ce chapitre, nous nous sommes intéressés à une solution possible à ce problème, proposée par Leblond *et al.* [JBL, 1994] à partir d’une idée initiale de Pijaudier-Cabot et Bazant faite dans un contexte différent. Cette solution qui consiste à utiliser dans les équations du modèle de Gurson, une équation d’évolution non locale pour la porosité, a été implantée dans le code de calcul par éléments finis Systus.

L’implémentation numérique proposée utilise un algorithme explicite par rapport à la porosité mais cependant implicite vis-à-vis des autres paramètres internes. La raison principale de ce choix est qu’il garantit l’existence et l’unicité de la solution du “problème de projection” sur la surface de charge de Gurson. Par ailleurs, la programmation de l’opération de délocalisation de la porosité par une intégrale de convolution est simple et ne remet pas en cause l’architecture générale du code.

Les tests numériques sur les éprouvettes axisymétriques fissurées ont révélé que l’équation d’évolution non locale considérée prédit des réponses en sérieux désaccord avec les expériences. Une analyse théorique de ce phénomène basée sur des approximations grossières a été présentée. Elle suggère un

remède très simple pour remédier à ce défaut : remplacer l'équation d'évolution non locale de la porosité par celle du logarithme de la porosité. Avec cette modification, la proposition de Leblond *et al.* [JBL, 1994] apparaît comme une solution efficace au problème de la localisation de la déformation et de l'endommagement dans le modèle de Gurson. En effet, elle permet de s'affranchir des effets de la taille de maille qui apparaissent dans les calculs numériques par éléments finis et donne des résultats en accord très satisfaisant avec les expériences.

La nouvelle équation d'évolution non locale de la porosité proposée ne repose cependant sur aucun fondement théorique sérieux. De plus, un autre inconvénient concerne les effets de bords. Par exemple, le taux de porosité d'un point situé sur ou près de l'une des deux lèvres d'une fissure est influencé par la valeur du "taux de porosité local" des points du voisinage immédiat situés sur ou près de l'autre lèvre de la fissure, malgré l'espace qui sépare les deux lèvres<sup>12</sup>.

Toutes ces raisons sont suffisantes pour justifier la considération d'autres types de solutions, moins directement applicables mais plus satisfaisantes théoriquement, au problème de la localisation de l'endommagement et de la déformation dans le modèle de Gurson. Un exemple de telle solution est le modèle *micromorphique* de rupture ductile de Gologanu *et al.* [GLPD, 1997], qui s'appuie sur une extension de l'analyse originale d'homogénéisation de Gurson [Gur, 1977], basée sur des conditions de taux de déformation homogène au bord, à des conditions de *taux de déformation inhomogène au bord*. L'examen critique de cette deuxième solution va faire l'objet du chapitre suivant.

---

<sup>12</sup>Cet effet n'est cependant pas très important parce qu'il n'apparaît que derrière la pointe de la fissure, à un endroit où la croissance des cavités s'est déjà arrêtée ; on pourrait y remédier en faisant la moyenne en variables actuelles.

---

# Modèle micromorphique de rupture ductile

---

## 2.1 Introduction

La solution proposée par Leblond *et al.* [JBL, 1994], pour résoudre le problème de la concentration infinie de l'endommagement et de la déformation dans le modèle de Gurson, qui a fait l'objet du chapitre précédent, consiste à délocaliser l'équation d'évolution de la porosité (variable responsable de l'adoucissement) au moyen d'une intégrale de convolution. Cette solution introduit dans les équations constitutives du modèle une longueur caractéristique, de l'ordre de l'espacement moyen entre cavité, et permet non seulement de s'affranchir des effets de la taille de maille, mais aussi de prédire des résultats en très bon accord avec les expériences, moyennant une légère modification de la loi d'évolution non locale de la porosité [ELP, 2006]. Elle présente cependant l'inconvénient d'être de nature purement heuristique.

Ce chapitre a pour objet d'étudier une autre solution à cette difficulté, reposant non plus sur des arguments heuristiques et phénoménologiques mais micromécaniques. Cette solution est due à Gologanu *et al.* [GLPD, 1997]. L'analyse de ces auteurs aboutit à un modèle (noté GLPD<sup>1</sup> dans tout ce qui va suivre), qui est une variante de celui de Gurson, en raffinant la procédure d'homogénéisation originale de cet auteur, qui était basée sur une analyse-limite utilisant des conditions de taux de déformation homogène au bord. Plus précisément, dans l'approche de Gologanu *et al.*, on impose sur le bord du volume représentatif un champ de vitesse quadratique, et non plus linéaire, par rapport aux

---

<sup>1</sup>Du nom de ses auteurs : Gologanu, Leblond, Perrin et Devaux.



coordonnées. Il s'agit, physiquement parlant, de tenir compte approximativement de la possibilité des variations rapides du taux de déformation macroscopique à des échelles très petites, de l'ordre de la longueur de la cellule élémentaire, comme on en rencontre au cours de la localisation de la déformation. La procédure conduit à un modèle de type "micromorphique", incluant le second gradient du champ de vitesse macroscopique, et des contraintes macroscopiques généralisées de type "moment" (homogènes au produit d'une contrainte par une distance).

L'étude sera essentiellement consacrée à une évaluation critique de l'efficacité pratique du modèle GLPD, à travers son implémentation dans un code de calcul par éléments finis et l'étude de ses prédictions numériques. Ces dernières doivent pouvoir lever le problème de la dépendance pathologique des résultats de calcul par rapport à la taille de maille, et reproduire de manière satisfaisante les résultats d'expériences de rupture ductile effectuées sur des éprouvettes types.

Après avoir présenté les équations théoriques du modèle GLPD dans la section [2.2] et ses relations avec la classe des matériaux standards généralisés dans la section [2.3], nous décrivons son implémentation numérique dans la section [2.4]. Cette implémentation numérique soulève essentiellement deux difficultés. La première, discutée dans la sous-section [2.4.1.1], réside dans l'opération dite de "projection" sur le critère de plasticité complexe du modèle GLPD. Ce problème est réduit à la recherche de deux scalaires inconnus à travers une paramétrisation convenable de la surface de charge macroscopique du modèle GLPD. Comme dans le cas du modèle de Gurson, l'utilisation d'un schéma implicite par rapport aux variables internes à l'exception de la porosité permet d'assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème de projection.

La seconde difficulté, envisagée dans la sous-section [2.2.11], concerne la nécessité apparente de l'emploi d'éléments finis de classe  $C^1$ , provenant des dérivées secondes du champ de vitesse dans les équations constitutives du modèle. De tels éléments finis ne sont pas disponibles dans le code de calcul Systus (pas plus que dans les autres codes de calcul usuels). On lève cette difficulté, comme dans les travaux de Shu *et al.* [Shu, 1999], en définissant de nouvelles variables nodales sous la forme d'un tenseur symétrique du second ordre, représentant approximativement le taux de déformation, puis en déduisant les dérivées premières du taux de déformation de ces nouvelles variables en utilisant uniquement les dérivées premières des fonctions de forme, comme d'habitude, et finalement en imposant aux nouvelles variables de coïncider avec les composantes du taux de déformation par une méthode de pénalisation. Se pose ensuite la question de la validation de la numérisation des équations constitutives du modèle.

A cet effet, nous présentons dans la section [2.5] des solutions exactes des équations du modèle pour deux problèmes simples. Le premier est celui d'une poutre élastoplastique en flexion pure en déformation plane, en petites transformations. Le second est celui d'une sphère creuse élastique en petites transformations, puis visqueuse en grandes transformations. Les solutions analytiques exactes

sont en très bon accord avec celles obtenues numériquement, ce qui valide la numérisation des équations constitutives. De plus, la première solution nous permet de mieux comprendre certains aspects fondamentaux du modèle.

Ces points nous permettent d'envisager dans la section [2.6] des simulations numériques, sur différentes géométries d'éprouvettes fissurées.

La sous-section [2.6.1] est consacrée à la vérification de l'absence d'effet de la taille de maille. Comme aucune comparaison avec l'expérience n'est ici nécessaire, nous considérons la même éprouvette fictive pré-fissurée que dans le premier chapitre. Les résultats numériques font apparaître, de façon très claire, une différence entre le modèle de Gurson local, qui présente une dépendance par rapport à la taille de maille dans les régions adoucissantes de la courbe force-déplacement, et le modèle GLPD qui n'en présente presque pas.

Les premières simulations numériques sur des éprouvettes axisymétriques fissurées ont révélé de graves difficultés de convergence pour lesquelles un calcul de la matrice-tangente n'apporte qu'une amélioration insuffisante pour prétendre à la résolution de ces ennuis. C'est pour cette raison que, dans la sous-section [2.6.4], nous présentons une variante de l'algorithme élastoplastique qui, elle, permet de s'affranchir de ces difficultés de convergence.

Cette méthode ouvre la voie dans la sous-section [2.6.5] à des tests sur l'aptitude du modèle GLPD à reproduire numériquement les résultats d'essais de rupture ductile. L'accord entre les résultats numériques et les expériences est très bon même dans la région adoucissante de la courbe force-déplacement.

On peut conclure que le modèle GLPD représente une solution acceptable au problème de la localisation de l'endommagement dans le modèle de Gurson de rupture ductile.

## 2.2 Modèle GLPD : théorie

Le modèle repose sur une extension de l'analyse-limite de Gurson [Gur, 1977] d'une sphère creuse constituée d'un matériau rigide-parfaitement plastique et soumise à un chargement axisymétrique à travers des conditions de taux de déformation *homogène* au bord. L'extension consiste à considérer des conditions de taux de déformation *inhomogène* au bord. L'analyse conduit à un critère de plasticité macroscopique approché de type Gurson, d'où découlent immédiatement une loi d'écoulement macroscopique et une loi d'évolution de la porosité. On envisage, par la suite, la prise en compte de l'écroutissage, des effets de coalescence des cavités, de manière purement phénoménologique ; la démarche est ici exactement la même que pour le modèle de Gurson. Enfin, on introduit l'élasticité dans le modèle par des équations heuristiques convenables donnant les parties élastiques du taux de déformation macroscopique et de son gradient.

La procédure qui conduit à l'obtention de ce modèle est présentée de manière complète dans Gologanu *et al.* [GLPD, 1997]. Nous nous contenterons ici d'en rappeler les éléments essentiels.

### 2.2.1 Homogénéisation en conditions de taux de déformation inhomogène au bord

On découpe par la pensée le matériau en “volumes élémentaires” ou cellules, de forme par exemple cubique, contenant chacune une ou plusieurs cavités. Dans la théorie de Hill-Mandel, on fait l'hypothèse que la vitesse est linéaire sur le bord de chacune des cellules (taux de déformation macroscopique homogène sur une cellule) : l'idée est que les champs macroscopiques varient suffisamment lentement pour pouvoir être considérés comme constants sur une distance de l'ordre de la taille  $2b$  des cellules. En rupture ductile, ce n'est plus le cas : en pointe de fissure par exemple, les champs macroscopiques varient très rapidement et ne peuvent être considérés comme constants sur une cellule. Pour en tenir compte, on adopte une hypothèse un peu plus fine que celle de Hill-Mandel : on suppose que la variation du champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  sur les bords de la cellule représentative  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$  ( $\mathbf{X}$  désignant le centre de la cellule), est quadratique, c'est-à-dire de la forme

$$(2.1) \quad v_i(\mathbf{x}) = A_{ij}x_j + \frac{1}{2}B_{ijk}x_i x_k \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{C}(\mathbf{X}).$$

Dans cette expression  $\mathbf{A}$  est un tenseur du second ordre symétrique (sa partie antisymétrique n'engendre qu'un mouvement de corps rigide), et  $\mathbf{B}$  est un tenseur du troisième ordre symétrique par rapport aux deux derniers indices (la partie antisymétrique sur les indices  $j$  et  $k$  n'engendre aucune contribution dans le champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ).

On définit ensuite le taux de déformation macroscopique  $\mathbf{D}(\mathbf{X})$  comme la valeur moyenne du taux de déformation microscopique  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$  sur  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ , le champ de vitesse étant prolongé arbitrairement dans les cavités. (Par hypothèse, ces dernières n'interceptent pas  $\partial\mathcal{C}(\mathbf{X})$ ). D'après la formule de Green et la relation [2.1], on a

$$(2.2) \quad \begin{aligned} D_{ij}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{2|\mathcal{C}(\mathbf{X})|} \int_{\mathcal{C}(\mathbf{X})} [v_{i,j}(\mathbf{x}) + v_{j,i}(\mathbf{x})] dv \\ &= \frac{1}{2|\mathcal{C}(\mathbf{X})|} \int_{\partial\mathcal{C}(\mathbf{X})} [v_i(\mathbf{x})n_j(\mathbf{x}) + v_j(\mathbf{x})n_i(\mathbf{x})] da \\ &= \frac{1}{|\mathcal{C}(\mathbf{X})|} \int_{\mathcal{C}(\mathbf{X})} [A_{ij} + \frac{1}{2}(B_{ijk} + B_{jik})x_k] dv \end{aligned}$$

où  $|\mathcal{C}(\mathbf{X})|$  désigne le volume de  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ , et  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal extérieur à sa surface  $\partial\mathcal{C}(\mathbf{X})$ . En traitant la variable  $\mathbf{X}$  (à une échelle  $\gg 2b$ ) comme continue et en désignant par le symbole “;” la dérivation par rapport aux composantes de  $\mathbf{X}$ , l'équation [2.2] implique que

$$(2.3) \quad D_{ij}(\mathbf{X}) = A_{ij} + \frac{1}{2}(B_{ijk} + B_{jik})X_k \quad \Rightarrow \quad D_{ij;k}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(B_{ijk} + B_{jik}).$$

Au passage, cette relation établit que  $\mathbf{D}(\mathbf{X})$  et  $\nabla\mathbf{D}(\mathbf{X})$  sont indépendants du prolongement de  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  choisi dans les cavités.

Se pose alors la question de savoir si, des  $D_{ij;k}$  arbitraires étant fixés (avec bien entendu  $D_{ij;k} = D_{ji;k}$ ), on peut trouver des  $B_{ijk}$ , respectant la propriété de symétrie par rapport aux deux derniers indices, tels que  $D_{ij;k} = 1/2(B_{ijk} + B_{jik})$ . Pour répondre à cette question, on écrit les équations à résoudre (en les  $B_{ijk}$ ) pour les triplets  $(ijk)$ ,  $(jki)$  et  $(kij)$  :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(B_{ijk} + B_{jik}) = D_{ij;k} \\ \frac{1}{2}(B_{jki} + B_{kji}) = D_{jk;i} \\ \frac{1}{2}(B_{kij} + B_{ikj}) = D_{ki;j} \end{cases}$$

En utilisant la propriété de symétrie des coefficients  $B_{ijk}$  en  $j$  et  $k$ , on déduit des relations [2.4], par combinaison, que

$$(2.5) \quad B_{ijk} = D_{ij;k} - D_{jk;i} - D_{ki;j}$$

Il y a donc une solution unique. La réponse à la question précédente est donc affirmative. La donnée de  $\mathbf{D}$  et  $\Delta\mathbf{D}$  définit donc complètement  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  et les conditions aux limites à imposer sur  $\partial\mathcal{C}(\mathbf{X})$ .

### 2.2.2 Lemme de Hill-Mandel et définition des contraintes et moments macroscopiques

On prolonge par  $\mathbf{0}$ , le champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  dans la cavité. Cette opération préserve son caractère *statiquement admissible* puisque  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  sur le bord des vides. Il s'ensuit alors que

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \mathbf{d}(\mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{C}(\mathbf{X})} &= \frac{1}{|\mathcal{C}(\mathbf{X})|} \int_{\mathcal{C}(\mathbf{X})} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) v_{i,j}(\mathbf{x}) dv \\ &= \frac{1}{|\mathcal{C}(\mathbf{X})|} \int_{\partial\mathcal{C}(\mathbf{X})} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) da \quad (\text{P.P.V.}) \\ &= \frac{1}{|\mathcal{C}(\mathbf{X})|} \int_{\partial\mathcal{C}(\mathbf{X})} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) (A_{ik} x_k + \frac{1}{2} B_{ikh} x_k x_h) n_j(\mathbf{x}) da \\ &= \frac{1}{|\mathcal{C}(\mathbf{X})|} \int_{\mathcal{C}(\mathbf{X})} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \left[ A_{ik} + \frac{1}{2} (B_{ijk} + B_{ikj}) x_k \right] dv. \end{aligned}$$

En écrivant  $\mathbf{x}_k$  sous la forme  $\mathbf{X}_k + (\mathbf{x}_k - \mathbf{X}_k)$ , en définissant les quantités

$$(2.6) \quad \Sigma_{ij}(\mathbf{X}) \equiv \langle \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{C}(\mathbf{X})} \quad ; \quad M_{ijk}(\mathbf{X}) \equiv \langle (\mathbf{x}_k - \mathbf{X}_k) \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{C}(\mathbf{X})}$$

et enfin en utilisant la relation [2.3], on peut mettre ce résultat sous la forme :

$$(2.7) \quad \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \mathbf{d}(\mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{C}(\mathbf{X})} = \Sigma_{ij}(\mathbf{X}) D_{ij}(\mathbf{X}) + M_{ijk}(\mathbf{X}) D_{ij;k}(\mathbf{X}) \equiv \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X}) : \mathbf{D}(\mathbf{X}) + \mathbf{M}(\mathbf{X}) : \nabla\mathbf{D}(\mathbf{X})$$

Ce résultat correspond à l'extension du lemme classique de Hill-Mandel pour les conditions de taux de déformation homogène au bord, aux conditions de taux de déformation inhomogène au bord. Nous appellerons  $\Sigma$  le *tenseur* (symétrique) des *contraintes macroscopique* (valeur moyenne du tenseur des contraintes microscopique sur la cellule considérée) et  $\mathbf{M}$ , le *moment macroscopique* (symétrique par rapport à ses deux premiers indices) (valeur moyenne, sur la cellule, des moments microscopiques  $(x_k - X_k)\sigma_{ij}$ ).

### 2.2.3 Puissance virtuelle des efforts intérieurs et extérieurs et équations d'équilibre macroscopiques

On désigne par  $\Omega$  le corps considéré (constitué de "cellules élémentaires"  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ ). La puissance virtuelle des efforts intérieurs est donnée par

$$(2.8) \quad \mathcal{P}^i = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \mathbf{d}(\mathbf{x}) dv \equiv - \int_{\Omega} [\Sigma(\mathbf{X}) : \mathbf{D}(\mathbf{X}) + \mathbf{M}(\mathbf{X}) : \nabla \mathbf{D}(\mathbf{X})] dV.$$

L'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit quant à elle

$$(2.9) \quad \mathcal{P}^e = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}) dA,$$

où  $\mathbf{T}(\mathbf{X})$  représente une certaine traction surfacique macroscopique. On pourrait imaginer introduire dans l'intégrande des termes proportionnels à  $\nabla \mathbf{V}$ ; le cofacteur de cette quantité représenterait une sorte de "moment de surface". Ceci n'aurait de sens que si d'importantes variations de la traction de surface microscopique se produisaient sur des distances de l'ordre de l'espacement entre cavités. On fera l'hypothèse, dans le cas présent, qu'il n'en est rien puisque les forts gradients des champs macroscopiques proviennent du caractère adoucissant du matériau dû à la porosité, et non d'une quelconque pathologie liée aux conditions aux limites.

En utilisant, comme d'habitude, le théorème de la divergence et des intégrations par parties, l'application du P.P.V. conduit aux équations d'équilibre suivantes :

$$(2.10) \quad \Sigma_{ij;j}(\mathbf{X}) - M_{ijk;jk}(\mathbf{X}) = 0.$$

Ces équations semblables à peu de choses près <sup>2</sup> à celles de Mindlin et Eshel [Min & Esh, 1968].

### 2.2.4 Elimination des mouvements de corps rigide

Désignons par  $\overline{\nabla \mathbf{D}}$  et  $\overline{\mathbf{M}}$  les "déviateurs" de  $\nabla \mathbf{D}$  et  $\mathbf{M}$  sur leurs indices "non-symétriques" :

$$(2.11) \quad \overline{D}_{ij;k} \equiv D_{ij;k} - \frac{1}{4} (\delta_{ik} D_{jhh} + \delta_{jk} D_{ihh}) \quad ; \quad \overline{M}_{ijk} \equiv M_{ijk} - \frac{1}{4} (\delta_{ik} M_{jhh} + \delta_{jk} M_{ihh}).$$

<sup>2</sup>Il manque les termes liés à l'accélération et aux forces volumiques.

Avec ces définitions,  $\overline{\nabla \mathbf{D}}$  et  $\overline{\mathbf{M}}$  possèdent les mêmes propriétés de symétrie que  $\nabla \mathbf{D}$  et  $\mathbf{M}$ , c'est-à-dire

$$(2.12) \quad \overline{D}_{ij;k} = \overline{D}_{ji;k} \quad \text{et} \quad \overline{M}_{ijk} = \overline{M}_{jik},$$

et sont de trace nulle :

$$(2.13) \quad \overline{D}_{ij;j} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{M}_{ijj} = 0.$$

Ces deux déviateurs sont nuls si et seulement si  $D_{ij;k}$  et  $M_{ijk}$  ont la forme :

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_{ij;k} \\ \text{ou} \\ M_{ijk} \end{array} \right. = \delta_{ik}U_j + \delta_{jk}U_i$$

pour un vecteur  $\mathbf{U}$  donné.

Dans la suite, on ne considérera que des cellules élémentaires de forme sphérique. Le centre de la cellule sphérique coïncide, par hypothèse, avec l'origine des espaces. Pour une telle cellule, les tenseurs  $\nabla \mathbf{D}$  de trace nulle correspondent seulement à des mouvements de corps rigide ; en effet, si  $\nabla \mathbf{D}$  est de la forme [2.14], à partir de la relation [2.5], on a

$$B_{ijk} = 2\delta_{jk}U_i$$

de sorte que la vitesse provenant de  $\nabla \mathbf{D}$  sur le bord extérieur de la cellule est de la forme :

$$(2.15) \quad v_i(\mathbf{x}) = \delta_{jk}U_i x_j x_k = b^2 U_i = \text{Cste}.$$

Dans cette expression,  $b$  désigne le rayon de la cellule. Par conséquent, *de tels gradients du taux de déformation n'ont aucun effet sur les relations de comportement et peuvent être ignorés dans la recherche de ces équations.*

Les relations [2.8], [2.11] et [2.14] donnent :

$$\begin{aligned} \Sigma : \mathbf{D} + \mathbf{M} : \nabla \mathbf{D} &= \Sigma_{ij} D_{ij} + \left[ \overline{M}_{ijk} + \frac{1}{4} (\delta_{ik} M_{jhh} + \delta_{jk} M_{ihh}) \right] \times \\ &\quad \left[ \overline{D}_{ij;k} + \frac{1}{4} (\delta_{ik} D_{jh,h} + \delta_{jk} D_{ih,h}) \right] \\ \Rightarrow \mathcal{P}^i &= - \int_{\Omega} [\Sigma_{ij} : D_{ij} + \overline{M}_{ijk} \overline{D}_{ij;k} + \frac{1}{2} M_{ijj} D_{ik;k}] dV \end{aligned}$$

La puissance virtuelle des efforts intérieurs  $\mathcal{P}^i$  doit être nulle pour les mouvements de corps rigide, donc  $\mathbf{D} = 0$ ,  $\overline{\nabla \mathbf{D}} = 0$ . Par conséquent, les cofacteurs  $M_{ijj}$  des "traces"  $D_{ik;k}$  s'annulent :

$$(2.16) \quad M_{ijj} = 0.$$

Ce résultat peut aussi être directement obtenu en écrivant les équations d'équilibre (en l'absence de forces de masse) sur le bord de la sphère. En effet, si  $\mathcal{S}(\mathbf{X} = \mathbf{0}, r) \equiv \mathcal{S}(r)$  désigne le rayon de la sphère centrée à l'origine, l'équation d'équilibre globale de cette sphère implique que

$$(2.17) \quad 0 = \int_{\partial\mathcal{S}(r)} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) da = \frac{1}{r} \int_{\partial\mathcal{S}(r)} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) x_j da.$$

En utilisant la définition [2.6]<sub>2</sub> des moments, une intégration de l'équation [2.17] par rapport à  $r$  permet d'obtenir les relations [2.16].

Les relations [2.16] jouent, dans le modèle, le même rôle que les conditions de contrainte plane en théorie des plaques minces.

### 2.2.5 Analyse-limite pour un matériau rigide parfaitement-plastique

La définition classique de la dissipation plastique microscopique pour un matériau rigide-parfaitement plastique est

$$\omega(\mathbf{d}) \equiv \underbrace{\text{Sup}}_{\boldsymbol{\sigma}^* \in \mathcal{C}} \boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{d},$$

où  $\mathcal{C}$  représente le convexe d'élasticité. On déduit de cette définition et du lemme de Hill-Mandel généralisé que

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} + \mathbf{M} : \nabla \mathbf{D} = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \mathbf{d}(\mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{C}(\mathbf{x})} \leq \langle \omega(\mathbf{d}(\mathbf{x})) \rangle_{\mathcal{C}(\mathbf{x})}$$

de sorte que

$$(2.18) \quad \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} + \mathbf{M} : \nabla \mathbf{D} \leq W(\mathbf{D}, \nabla \mathbf{D}) \equiv \text{Inf} \langle \omega(\mathbf{d}(\mathbf{x})) \rangle_{\mathcal{C}(\mathbf{x})}.$$

L'infimum est ici pris sur tous les champs de vitesse microscopique  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  incompressibles cinématiquement admissibles avec les données  $\mathbf{D}$  et  $\Delta \mathbf{D}$  sur le bord. La grandeur  $W(\mathbf{D}, \nabla \mathbf{D})$  représente une extension de la dissipation classique macroscopique usuelle de Hill-Mandel.

Il s'ensuit que le domaine  $\mathcal{C}$  des couples  $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$  plastiquement admissibles est contenu dans l'intersection des demi-espaces  $\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} + \mathbf{M} : \nabla \mathbf{D} \leq W(\mathbf{D}, \nabla \mathbf{D})$ , et même égal à cette intersection comme le stipule un des résultats généraux classiques de l'analyse-limite. La frontière  $\partial \mathcal{C}$  est définie par les équations paramétriques

$$(2.19) \quad \Sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial D_{ij}}(\mathbf{D}, \nabla \mathbf{D}) \quad ; \quad M_{ijk} = \frac{\partial W}{\partial D_{ij;k}}(\mathbf{D}, \nabla \mathbf{D}).$$

Puisqu'à l'échelle microscopique, la loi d'écoulement vérifie le principe du travail plastique maximal, le lemme de Hill-Mandel généralisé assure que ce dernier passe de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique; on a donc

$$(2.20) \quad (\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^*) : \mathbf{D} + (\mathbf{M} - \mathbf{M}^*) : \nabla \mathbf{D} \geq 0$$

où  $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$  et  $(\boldsymbol{\Sigma}^*, \mathbf{M}^*)$  représentent des couples de contraintes macroscopiques, arbitraires, plastiquement admissibles, et  $(\mathbf{D}, \nabla \mathbf{D})$  le couple des “taux de déformation macroscopiques généralisés” correspondant au couple  $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$ . Suivant le raisonnement classique, on aboutit à partir de là aux deux conclusions suivantes : l’ensemble  $\mathcal{C}$  des couples macroscopiques plastiquement admissibles  $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$  est convexe, et  $(\mathbf{D}, \nabla \mathbf{D})$  est orthogonal à la surface de charge macroscopique  $\partial \mathcal{C}$  au point  $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$ .

Exprimer analytiquement la deuxième conclusion n’est pas aisé puisque les conditions [2.16] réduisent l’espace  $\mathcal{E}$ , de dimension 24, des couples  $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$  obéissant aux propriétés de symétrie  $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}$  et  $M_{ijk} = M_{jik}$ , à un sous espace  $\mathcal{F}$  de dimension 21 de sorte que aussi bien  $\mathcal{C}$  que  $\partial \mathcal{C}$  sont contenus dans ce sous espace  $\mathcal{F}$ . Il en résulte que l’espace des couples  $(\mathbf{D}, \nabla \mathbf{D})$  orthogonaux dans  $\mathcal{E}$ , espace de dimension 24, à  $\partial \mathcal{C}$ , surface de dimension 20, au point  $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$ , n’est plus comme d’habitude de dimension 1 mais 4. On lève cette difficulté en écrivant l’équation de la surface de charge macroscopique  $\Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M}, f) = 0$  pour tout couple  $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$  de  $\mathcal{E}$  en dépit de ce que les couples  $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$  n’appartenant pas à  $\mathcal{F}$  n’ont aucun sens physique ; on étend ainsi  $\partial \mathcal{C}$  à une surface  $\overline{\partial \mathcal{C}}$  de dimension 23 débordant le sous-espace  $\mathcal{F}$ . Les vecteurs colinéaires au “gradient”  $(\partial \Phi / \partial \Sigma_{ij}, \partial \Phi / \partial M_{ijk})$  sont orthogonaux à  $\overline{\partial \mathcal{C}}$ , donc à  $\partial \mathcal{C}$ , au point  $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$ . En leur ajoutant des vecteurs orthogonaux à  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{E}$ , c’est-à-dire de la forme  $(\mathbf{D} = \mathbf{0})$  avec  $\nabla \mathbf{D}$  de la forme  $D_{ij;k} = \delta_{ik} U_j + \delta_{jk} U_i$ , on obtient tous les vecteurs orthogonaux à  $\partial \mathcal{C}$  au point  $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$ . L’expression analytique de la condition d’orthogonalité de  $(\mathbf{D}, \nabla \mathbf{D})$  à la surface  $\partial \mathcal{C}$  au point  $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M})$  s’écrit donc

$$(2.21) \quad D_{ij} = \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{ij}} \quad ; \quad D_{ij;k} = \eta \frac{\partial \Phi}{\partial M_{ijk}} + \delta_{ik} U_j + \delta_{jk} U_i$$

où  $\mathbf{U}$  est un vecteur arbitraire et  $\eta$  un scalaire positif en raison de l’inégalité [2.20].

### 2.2.6 Analyse-limite d’une sphère creuse soumise à un chargement axisymétrique

Le volume représentatif considéré est une sphère creuse, de centre  $O$ , de rayons extérieur  $b$  (ce rayon représente une sorte de valeur moyenne du demi-espacement entre les cavités) et intérieur  $a \equiv b f^{1/3}$ , constitué d’un matériau rigide-parfaitement plastique de von Mises obéissant à la propriété de normalité. La sphère est soumise à des conditions de taux de déformation inhomogène au bord. On se limite au cas d’un chargement axisymétrique.

Ces conditions aux limites imposent la considération de deux nouveaux champs de vitesse dans l’approche de Gurson. On suppose que ces champs de vitesse dérivent d’une “fonction de courant” de la forme  $f(r)g(\theta)$  en coordonnées sphériques  $r, \theta, \varphi$ . La valeur de  $g(\theta)$  est fixée par les conditions aux limites tandis que celle de  $f(r)$  est obtenue en imposant à la dissipation plastique macroscopique d’être minimale pour le champ de vitesse considéré. Ce problème de minimisation est semblable, bien qu’un peu plus compliqué, à celui rencontré en mécanique rationnelle. L’“équation de Lagrange” associée,



qui est une équation différentielle non-linéaire du quatrième ordre sur la fonction  $f(r)$ , est résolue numériquement. On obtient finalement, malgré la difficulté supplémentaire que représente la présence de quatre champs de vitesse dans l'analyse au lieu de deux comme chez Gurson, une forme analytique compacte approchée de la fonction de charge macroscopique, pour un chargement axisymétrique. Cette forme est la suivante :

$$(2.22) \quad \Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M}, f) \equiv \frac{1}{\sigma_0^2} \left( (\Sigma_{33} - \Sigma_{11})^2 + \frac{Q^2}{b^2} \right) + 2f \cosh \left( \frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0.$$

où

$$(2.23) \quad Q^2 \equiv 9\Delta_A^{-1} M_{m3}^2 + \Delta_B^{-1} (M_{333} - M_{113})^2 + 6\Delta_C^{-1} M_{m3} (M_{333} - M_{113}).$$

Dans [2.23],  $M_{m3}$  désigne la valeur moyenne sur les deux premières composantes du moment  $\mathbf{M}$ , et  $\Delta_A^{-1}$ ,  $\Delta_B^{-1}$ ,  $\Delta_C^{-1}$  trois constantes dont la valeur importe peu ici. Ce critère dépend bien entendu du demi-espacement moyen  $b$  entre cavités.

On peut également déterminer le critère macroscopique exact, toujours dans le cas axisymétrique, en minimisant la dissipation plastique sur un grand nombre de champ de vitesse, cette opération ne pouvant toutefois s'effectuer que numériquement. La comparaison, entre la surface de charge analytique et celle obtenue numériquement suggère un léger ajustement des paramètres  $\Delta_A^{-1}$ ,  $\Delta_B^{-1}$ ,  $\Delta_C^{-1}$  apparaissant dans la surface de charge analytique. Les meilleures valeurs de ces paramètres sont

$$(2.24) \quad \Delta_A^{-1} = 0.992 \quad ; \quad \Delta_B^{-1} = 10.18 \quad ; \quad \Delta_C^{-1} = 1.97.$$

### 2.2.7 Critère général pour les chargements non axisymétriques

Afin de pouvoir appliquer le modèle, il est nécessaire de le généraliser, au cas de chargements quelconques, non axisymétriques. Cette extension, qui est réalisée de manière heuristique, doit respecter deux conditions : l'isotropie (puisque le volume représentatif considéré est lui même isotrope), qui implique que seuls les invariants de  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $\mathbf{M}$  peuvent apparaître dans l'expression de la fonction de charge macroscopique  $\Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M}, f)$ , et la convexité de cette fonction par rapport aux variables  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $\mathbf{M}$ .

Si, par rapport à  $\boldsymbol{\Sigma}$ , ces conditions sont facilement satisfaites en remplaçant  $(\Sigma_{33} - \Sigma_{11})^2$  dans [2.22] par  $\Sigma_{eq}^2$ , par rapport à  $\mathbf{M}$  il est difficile de satisfaire la condition de convexité de  $\Phi$  si on utilise des invariants non-quadratiques. Ceci suggère d'étendre simplement dans la relation [2.22], la forme quadratique  $Q^2$  donnée par la relation [2.23] du cas axisymétrique, à une forme plus générale :

$$(2.25) \quad Q^2 \equiv A_I \mathcal{M}_I + A_{II} \mathcal{M}_{II} + A_{III} \mathcal{M}_{III}$$

où  $A_I$ ,  $A_{II}$  et  $A_{III}$  sont des coefficients, et  $\mathcal{M}_I$ ,  $\mathcal{M}_{II}$  et  $\mathcal{M}_{III}$  les 3 invariants quadratiques indépendants du tenseur d'ordre 3, vérifiant la propriété de symétrie  $M_{ijk} = M_{jik}$  et les conditions [2.16], définis par

$$(2.26) \quad \mathcal{M}_I \equiv \frac{1}{9} M_{jji} M_{kki} = M_{mi} M_{mi} \quad ; \quad \mathcal{M}_{II} \equiv \frac{3}{2} M'_{jki} M'_{jki} \quad ; \quad \mathcal{M}_{III} \equiv \frac{3}{2} M'_{jki} M'_{ikj}$$

Le symbole “” représente ici la partie déviatorique, prise sur les premier et second indices (indices “symétriques”).

Cependant, le calcul de ces invariants dans le cas axisymétrique montre qu'ils ne sont pas indépendants les uns des autres. Ceci implique que dans le cas axisymétrique, la forme quadratique donnée par [2.25] ne dépend en réalité que de 2 paramètres ajustables, qui sont des combinaisons de  $A_I$ ,  $A_{II}$  et  $A_{III}$ , et non trois. Il paraît par conséquent difficile d'identifier cette forme quadratique à celle définie par [2.23], qui comporte elle trois paramètres,  $\Delta_A^{-1}$ ,  $\Delta_B^{-1}$  et  $\Delta_C^{-1}$ . Il se trouve cependant que les valeurs de ces paramètres sont telles que la formule [2.23] peut être représentée presque exactement par la formule [2.25], appliquée dans le cas axisymétrique, avec les valeurs

$$(2.27) \quad A_I = 0.194 \quad , \quad A_{II} = 6.108 \quad , \quad A_{III} = 0.$$

On peut vérifier que la nouvelle forme quadratique obtenue est définie positive sur l'espace des tenseurs  $\mathbf{M}$  d'ordre 3 obéissant à la propriété de symétrie  $M_{ijk} = M_{jik}$  et aux conditions [2.16]. La fonction  $\Phi$  est donc convexe sur l'ensemble des couples  $(\Sigma, \mathbf{M})$  physiquement admissibles.

Finalement, on obtient donc le critère généralisé suivant :

$$(2.28) \quad \Phi(\Sigma, \mathbf{M}, f) \equiv \frac{1}{\sigma_0} \left( \Sigma_{eq}^2 + \frac{Q^2}{b^2} \right) + 2f \cosh \left( \frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0} \right) - 1 - f^2 \leq 0$$

où la forme quadratique  $Q^2$  est définie par la relation [2.25]

### 2.2.8 Loi d'écoulement associée au critère par normalité

La loi d'écoulement associée au critère par normalité s'écrit, comme on l'a vu ci-dessus,

$$(2.29) \quad \begin{cases} D_{ij}^p & = \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{ij}} \\ (\nabla D)_{ijk}^p & = \eta \frac{\partial \Phi}{\partial M_{ijk}} + U_i \delta_{jk} + U_j \delta_{ik} \end{cases} , \quad \eta \begin{cases} = 0 & \text{si } \Phi(\Sigma, \mathbf{M}, f) < 0 \\ \geq 0 & \text{si } \Phi(\Sigma, \mathbf{M}, f) = 0 \end{cases}$$

où  $\Phi$  est la fonction de charge définie par [2.28], et  $\eta$  le multiplicateur plastique. Les termes comportant le vecteur arbitraire  $\mathbf{U} \equiv (U_i)_{1 \leq i \leq 3}$  représentent, on l'a vu, un mouvement arbitraire de corps rigide. Dans la pratique, la valeur de  $\mathbf{U}$  est fixée par les conditions  $M_{ijj} = 0$ . Ce vecteur joue donc, dans le modèle, sensiblement le même rôle que la composante  $\epsilon_{zz}$  de la déformation totale en théorie des plaques minces, qui s'ajuste de manière à satisfaire la condition de contrainte plane  $\sigma_{zz} = 0$ .

Il convient d'expliciter les lois d'écoulement [2.29]<sub>1</sub> et [2.29]<sub>2</sub> pour le critère [2.28]. On obtient facilement pour  $\mathbf{D}^p$ , compte tenu des relations évidentes  $\partial \Sigma_{eq}^2 / \partial \Sigma_{ij} = 3 \Sigma'_{ij}$  (où le “'” désigne le déviateur) et  $\partial \Sigma_m / \partial \Sigma_{ij} = \delta_{ij} / 3$  :

$$(2.30) \quad D_{ij}^p = \eta \left[ \frac{3}{\sigma^2} \Sigma'_{ij} + \frac{f}{\sigma} \sinh \left( \frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma} \right) \delta_{ij} \right].$$

En identifiant les parties moyenne et déviatorique de cette expression, on trouve

$$(2.31) \quad \begin{cases} D_{ij}^{p'} &= \eta \frac{3}{\bar{\sigma}^2} \Sigma'_{ij} \\ D_m^p &= \eta \frac{f}{\bar{\sigma}} \sinh\left(\frac{3 \Sigma_m}{2 \bar{\sigma}}\right). \end{cases}$$

On peut calculer le multiplicateur plastique  $\eta$  en fonction du taux de déformation équivalent de von Mises à l'aide de l'équation [2.31]<sub>1</sub> :

$$(2.32) \quad \dot{D}_{eq}^p = \left(\frac{2}{3} D_{ij}^{p'} D_{ij}^{p'}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3} \frac{9\eta^2}{\bar{\sigma}^4} \Sigma'_{ij} \Sigma'_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\eta \frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}^2}$$

ce qui entraîne que

$$(2.33) \quad \eta = \frac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}^2}{\Sigma_{eq}} \dot{D}_{eq}^p.$$

En reportant ce dernier résultat dans les relations [2.31], on trouve

$$(2.34) \quad \begin{cases} D_{ij}^{p'} &= \frac{3 \dot{D}_{eq}^p}{2 \Sigma_{eq}} \Sigma'_{ij} \\ D_m^p &= \frac{f \bar{\sigma}}{2 \Sigma_{eq}} \sinh\left(\frac{3 \Sigma_m}{2 \bar{\sigma}}\right) \dot{D}_{eq}^p, \end{cases}$$

équations où n'apparaît plus le multiplicateur plastique. La première est très classique car elle est également valable pour le critère usuel de von Mises.

Pour expliciter de même  $(\nabla \mathbf{D})^p$ , il faut calculer les dérivées  $\partial M_I / \partial M_{ijk}$  et  $\partial M_{II} / \partial M_{ijk}$ . L'utilisation des relations

$$(2.35) \quad \frac{\partial M_{mh}}{\partial M_{ijk}} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{hk} \quad \text{et} \quad \frac{\partial M'_{pqh}}{\partial M_{ijk}} = \left[ \frac{1}{2} (\delta_{pi} \delta_{qj} + \delta_{pj} \delta_{qi}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right]$$

donne immédiatement

$$(2.36) \quad \begin{cases} \frac{\partial M_I}{\partial M_{ijk}} = 2M_{mh} \frac{\partial M_{mh}}{\partial M_{ijk}} = \frac{2}{3} M_{mk} \delta_{ij} \\ \frac{\partial M_{II}}{\partial M_{ijk}} = 3M'_{pqh} \frac{\partial M'_{pqh}}{\partial M_{ijk}} = 3M'_{ijk} \end{cases}$$

En reportant, ces résultats dans l'équation [2.29]<sub>2</sub> pour  $(\nabla \mathbf{D})^p$ , on obtient

$$(2.37) \quad (\nabla D)_{ijk}^p = \eta \frac{3}{\bar{\sigma}^2 b^2} \left( \frac{2}{3} A_I \delta_{ij} M_{mk} + 3A_{II} M'_{ijk} \right) + \delta_{ik} U_j + \delta_{jk} U_i$$

d'où, par identification des parties moyenne et déviatorique,

$$(2.38) \quad \begin{cases} (\nabla D)_{ijk}^{p'} = \eta \frac{3}{\bar{\sigma}^2 b^2} A_{II} M'_{ijk} + \delta_{ik} U_j + \delta_{jk} U_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} U_k \\ (\nabla D)_{mk}^p = \eta \frac{3}{\bar{\sigma}^2 b^2} A_I M_{mk} + \frac{2}{3} U_k \end{cases}$$

où l'on rappelle que le multiplicateur plastique  $\eta$  est donné par la relation [2.33].

### 2.2.9 Introduction de l'écroûissage et de l'hypoélasticité

Pour prendre en compte l'écroûissage, on part de la suggestion heuristique de Gurson qui consiste à remplacer le matériau poreux vrai, déformé de manière inhomogène, par un matériau poreux fictif dont la matrice présente une déformation plastique équivalente uniforme  $\bar{\epsilon}$ . La limite d'élasticité  $\bar{\sigma} \equiv \sigma(\bar{\epsilon})$  reste donc uniforme dans la matrice; et il s'ensuit que le critère macroscopique est celui donné par la relation [2.28] en remplaçant  $\sigma_0$  par  $\bar{\sigma}$ .

L'équation d'évolution du paramètre  $\bar{\epsilon}$  est régie par la loi

$$(2.39) \quad (1 - f)\bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D}^p + \mathbf{M} : (\nabla \mathbf{D})^p.$$

Cette loi est obtenue, comme dans le modèle de Gurson, en égalant les dissipations plastiques dans le matériau réel et le matériau fictif "équivalent"; la seule différence est que la dissipation plastique dans le matériau réel comprend une contribution supplémentaire  $\mathbf{M} : (\nabla \mathbf{D})$ , comme l'indique le lemme de Hill-Mandel généralisé.

L'autre paramètre interne du modèle est la porosité  $f$  qui apparaît dans le critère. Son équation d'évolution, qui résulte classiquement de l'incompressibilité de la matrice, est donnée comme dans le modèle de Gurson par

$$(2.40) \quad \dot{f} = 3(1 - f)D_m^p.$$

Bien que l'élasticité soit peu importante en rupture ductile, il faut incorporer l'hypoélasticité dans les équations constitutives du modèle pour des besoins pratiques d'ordre numérique. On adopte l'hypothèse de la partition de la déformation et de son gradient en parties élastique et plastique. Cette hypothèse s'écrit

$$(2.41) \quad \begin{cases} \mathbf{D} & \equiv \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \\ \nabla \mathbf{D} & \equiv (\nabla \mathbf{D})^e + (\nabla \mathbf{D})^p. \end{cases}$$

On prendra garde au fait *qu'il n'y a aucune raison pour laquelle les parties élastique et plastique  $(\nabla \mathbf{D})^e$ ,  $(\nabla \mathbf{D})^p$  du gradient du taux de déformation devraient coïncider avec les gradients  $\nabla(\mathbf{D}^e)$ ,  $\nabla(\mathbf{D}^p)$  des parties élastique et plastique du taux de déformation.*

Les parties élastiques de la déformation et de son gradient sont reliées aux contraintes et moments à travers la loi d'hypoélasticité suivante :

$$(2.42) \quad \begin{cases} \check{\Sigma}_{ij} & = \lambda D_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}^e \\ \check{M}_{ijk} & = \frac{b^2}{5} [\lambda (\nabla D)_{hhk}^e \delta_{ij} + 2\mu (\nabla D)_{ijk}^e - 2\lambda U_k^e \delta_{ij} - 2\mu (U_i^e \delta_{jk} + U_j^e \delta_{ik})]. \end{cases}$$

Dans ces expressions  $\check{\sigma}_{ij}$  et  $\check{M}_{ijk}$  sont les dérivées de Jaumann ou de Green-Naghdi (objectives) de  $\Sigma_{ij}$  et  $M_{ijk}$ , données par

$$(2.43) \quad \begin{cases} \check{\Sigma}_{ij} & \equiv \dot{\Sigma}_{ij} + \Omega_{ki}\Sigma_{kj} + \Omega_{kj}\Sigma_{ik} \\ \check{M}_{ijk} & \equiv \dot{M}_{ijk} + \Omega_{hi}M_{hjk} + \Omega_{hj}M_{ihk} + \Omega_{hk}M_{ijh} \end{cases}$$

où  $\mathbf{\Omega} \equiv (\Omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  est le taux de rotation (matrice antisymétrique) de la matière, dont l'expression diffère suivant la dérivée objective choisie. De plus,  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé,  $b$  est le demi-espacement moyen entre les cavités, et  $\mathbf{U}^e \equiv (U_i^e)_{1 \leq i \leq 3}$  est un vecteur dont la valeur est fixée par les équations [2.16], écrite sous la forme ( $\check{M}_{ijj} = 0$ ) :

$$(2.44) \quad U_i^e = \frac{\lambda(\nabla D)_{hhi}^e + 2\mu(\nabla D)_{ihh}^e}{2\lambda + 8\mu}.$$

Ce vecteur joue, dans le modèle, le même rôle que la composante  $\epsilon_{zz}^e$  de la déformation élastique en théorie des plaques minces, qui est libre *a priori* mais fixée, en réalité, par la condition de contrainte plane  $\sigma_{zz} = 0$ .

On notera que l'expression de la loi d'hypoélasticité [2.53]<sub>2</sub> n'est pas exactement la même que celle proposée dans Gologanu *et al* [GLPD, 1997], qui avait été obtenue par homogénéisation (avec des champs de vitesse tests il est vrai assez rudimentaires). On peut cependant vérifier que les deux lois coïncident au premier ordre en  $\lambda/\mu$ , pour les faibles valeurs de ce rapport.

La raison de la modification proposée est qu'elle permet une numérisation un peu plus aisée des équations du modèle. Comme l'élasticité ne joue pas un rôle majeur en rupture ductile et est introduite essentiellement pour des raisons numériques, on peut se permettre de modifier dans une certaine mesure la loi qui l'exprime.

### 2.2.10 Conclusion : résumé des équations théoriques du modèle GLPD

Le modèle proposé comporte essentiellement quatre éléments.

Le premier est un critère "homogénéisé" de type Gurson pour les matériaux plastiques poreux. En y incorporant les modifications heuristiques proposées par Tvergaard et Needleman (introduction du "paramètre d'interaction"  $q$  et de la "porosité fictive"  $f^*$ ), ce critère s'écrit :

$$(2.45) \quad \Phi(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{M}, f) \equiv \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left( \Sigma_{eq}^2 + \frac{Q^2}{b^2} \right) + 2p \cosh \left( \frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}} \right) - 1 - p^2 \leq 0.$$

Dans cette expression,

- $\Sigma_{eq} \equiv \left( \frac{3}{2} \Sigma'_{ij} \Sigma'_{ij} \right)^{1/2}$  ( $\mathbf{\Sigma}' \equiv$  déviateur de  $\mathbf{\Sigma}$ ) est la contrainte équivalente de von Mises ;
- $\Sigma_m \equiv \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{\Sigma}$  est la contrainte moyenne ;

- $\bar{\sigma}$  représente une sorte de valeur moyenne de la limite d'élasticité dans la matrice métallique hétérogène ;
- $p$  est un paramètre relié à la porosité  $f$  à travers la relation de Tvergaard et Needleman :

$$(2.46) \quad p \equiv qf^* \quad , \quad f^* \equiv \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \delta(f - f_c) & \text{si } f > f_c \end{cases}$$

où  $q$  est le "paramètre de Tvergaard",  $f_c$  la porosité critique du début de coalescence des cavités, et  $\delta (> 1)$  le facteur accélérateur de la dégradation du matériau durant la coalescence ;

- $Q^2$  est une forme quadratique des composantes du tenseur des moments donnée par

$$(2.47) \quad Q^2 \equiv A_I M_I + A_{II} M_{II} \quad , \quad \begin{cases} A_I = 0.194 \\ A_{II} = 6.108 \end{cases}$$

où  $M_I$  et  $M_{II}$  sont les deux premiers invariants de  $\mathbf{M}$  :

$$(2.48) \quad M_I \equiv \frac{1}{9} M_{jji} M_{kki} \quad , \quad M_{II} \equiv \frac{3}{2} M'_{ijk} M'_{ijk}$$

( $\mathbf{M}' \equiv$  déviateur de  $\mathbf{M}$  sur les deux premiers indices).

Le deuxième élément est la loi d'écoulement associée au critère par normalité :

$$(2.49) \quad \begin{cases} D_{ij}^p & = \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{ij}} \\ (\nabla D)_{ijk}^p & = \eta \frac{\partial \Phi}{\partial M_{ijk}} + U_i \delta_{jk} + U_j \delta_{ik} \end{cases} \quad , \quad \eta \begin{cases} = 0 & \text{si } \Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M}, f) < 0 \\ \geq 0 & \text{si } \Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{M}, f) = 0. \end{cases}$$

Les termes faisant intervenir le vecteur  $\mathbf{U} \equiv (U_i)_{1 \leq i \leq 3}$  représentent un mouvement de corps rigide arbitraire. La valeur de ce vecteur est fixée par les conditions  $M_{ijj} = 0$ .

Le troisième élément est une équation d'évolution de la porosité qui provient de l'incompressibilité approchée de la matrice métallique (les variations de la porosité dues à l'élasticité étant négligées) :

$$(2.50) \quad \dot{f} = (1 - f) \operatorname{tr} \mathbf{D}^p.$$

Le quatrième élément concerne le paramètre  $\bar{\sigma}$ . Ce paramètre est donné par

$$(2.51) \quad \bar{\sigma} \equiv \sigma(\bar{\epsilon})$$

où  $\sigma(\epsilon)$  est la fonction donnant la limite d'élasticité de la matrice en fonction de la déformation plastique équivalente cumulée  $\epsilon$ , et  $\bar{\epsilon}$  la valeur moyenne de cette déformation équivalente dans la matrice hétérogène. L'évolution de  $\bar{\epsilon}$  est gouvernée par la loi :

$$(2.52) \quad (1 - f) \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \mathbf{M} : (\nabla \mathbf{D})$$

Le modèle est complété par la loi d'hypoélasticité suivante :

$$(2.53) \quad \begin{cases} \check{\Sigma}_{ij} &= \lambda D_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}^e \\ \check{M}_{ijk} &= \frac{b^2}{5} [\lambda (\nabla D)_{hhk}^e \delta_{ij} + 2\mu (\nabla D)_{ijk}^e - 2\lambda U_k^e \delta_{ij} - 2\mu (U_i^e \delta_{jk} + U_j^e \delta_{ik})]. \end{cases}$$

Dans ces expressions  $\check{\sigma}_{ij}$  et  $\check{M}_{ijk}$  sont les dérivées de Jaumann ou de Green-Naghdi (objectives) de  $\Sigma_{ij}$  et  $M_{ijk}$ , données par

$$(2.54) \quad \begin{cases} \check{\Sigma}_{ij} &\equiv \dot{\Sigma}_{ij} + \Omega_{ki} \Sigma_{kj} + \Omega_{kj} \Sigma_{ik} \\ \check{M}_{ijk} &\equiv \dot{M}_{ijk} + \Omega_{hi} M_{hjk} + \Omega_{hj} M_{ihk} + \Omega_{hk} M_{ijh}. \end{cases}$$

### 2.2.11 Elimination des dérivées secondes du champ de vitesse

Nous allons maintenant lever la difficulté que constitue la nécessité apparente de l'usage d'éléments finis de classe  $C^1$ , du fait de la présence dans la loi de comportement du gradient de la déformation.

Ce problème est très similaire à celui rencontré dans l'implémentation numérique de la théorie des plaques ou des coques de Kirchhoff-Love et peut être résolu de la même manière, à travers une légère modification de la formulation théorique. En effet, introduisons, en plus du champ de vitesse macroscopique  $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ , un nouveau degré de liberté cinématique sous la forme d'un tenseur symétrique du second ordre  $\mathbf{W}(\mathbf{X}) \equiv (W_{ij}(\mathbf{X}))_{1 \leq i, j \leq 3}$ ; ce tenseur est *a priori* indépendant de  $\mathbf{D}(\mathbf{X})$  mais est destiné à lui être égal *in fine*. Cette procédure est l'analogue, dans le cas des plaques et coques, de celle qui consiste à abandonner les hypothèses de Kirchhoff-Love et à considérer la rotation des segments joignant les surfaces inférieure et supérieure de la plaque ou de la coque comme un nouveau degré de liberté indépendant du déplacement de la surface moyenne. On introduit ensuite un tenseur mécanique symétrique du second ordre  $\mathbf{P}(\mathbf{X})$  "dual" du "taux de déformation"  $(\mathbf{W} - \mathbf{D})(\mathbf{X})$  au sens du principe des puissances virtuelles; c'est-à-dire qu'on modifie l'expression [2.8] de  $\mathcal{P}^i$  en

$$(2.55) \quad \mathcal{P}^i \equiv - \int_{\Omega} [\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X}) : \mathbf{D}(\mathbf{X}) + \mathbf{M}(\mathbf{X}) : \nabla \mathbf{W}(\mathbf{X}) + \mathbf{P}(\mathbf{X}) : (\mathbf{W} - \mathbf{D})(\mathbf{X})] dV.$$

Cela revient, dans le contexte des plaques et des coques, à introduire la notion de contrainte de cisaillement transverse. On remplace par la suite  $(\nabla \mathbf{D})$ ,  $(\nabla \mathbf{D})^e$  et  $(\nabla \mathbf{D})^p$  partout dans les équations constitutives précédentes par  $(\nabla \mathbf{W})$ ,  $(\nabla \mathbf{W})^e$  et  $(\nabla \mathbf{W})^p$ . On obtient ainsi une nouvelle théorie qui joue, par rapport à l'ancienne, un rôle semblable à celui que joue la théorie des plaques ou des coques de Reissner-Mindlin par rapport à celle de Kirchhoff et Love. Finalement, on impose à  $\mathbf{W}$  d'être quasi égal à  $\mathbf{D}$  à travers une loi d'hypoélasticité supplémentaire liant  $\mathbf{W} - \mathbf{D}$  et la dérivée de Jaumann de  $\mathbf{P}$ , comportant une rigidité très élevée (méthode de "pénalisation") :

$$(2.56) \quad \check{P}_{ij} = L\mu(W_{ij} - D_{ij})$$

où  $L$  un nombre positif sans dimension très grand. Dans le contexte de l'implémentation numérique de la théorie des plaques ou des coques Reissner-Mindlin, cela revient à faire tendre vers 0 l'épaisseur de la plaque ou de la coque de façon que la rigidité vis-à-vis de sollicitations de cisaillement transverse devienne très élevée.

Pour comprendre pourquoi la nouvelle théorie est équivalente à la première dans la limite  $L \rightarrow +\infty$ , examinons les équations d'équilibre associée à [2.55]. L'application du principe des puissances virtuelles (en l'absence de forces de masse) donne, en intégrant par partie et en utilisant l'équation [2.9] :

$$(2.57) \quad \begin{aligned} 0 = \mathcal{P}^i + \mathcal{P}^e &= \int_{\Omega} [(\Sigma_{ij;j} - P_{ij;j})V_i + (M_{ijk;k} - P_{ij})W_{ij}](\mathbf{X}) dV \\ &+ \int_{\partial\Omega} [((-\Sigma_{ij} + P_{ij})n_j + T_i)V_i - M_{ijk}n_k W_{ij}](\mathbf{X}) dA \\ &\Rightarrow \begin{cases} \Sigma_{ij;j}(\mathbf{X}) - P_{ij;j}(\mathbf{X}) = 0 \\ M_{ijk;k}(\mathbf{X}) - P_{ij}(\mathbf{X}) = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

et

$$(2.58) \quad \begin{cases} (\Sigma_{ij}(\mathbf{X}) - P_{ij}(\mathbf{X}))n_j(\mathbf{X}) = 0 \\ M_{ijk}(\mathbf{X})n_k(\mathbf{X}) = 0. \end{cases} \quad \text{sur } \partial\Omega$$

A partir de l'équation [2.57]<sub>2</sub>, par exemple, il est clair que les variables  $P_{ij}$  restent finies dans la limite  $L \rightarrow +\infty$ . Il en est donc de même des variables  $\check{P}_{ij}$ . L'équation [2.56] implique donc que, dans la limite  $L \rightarrow +\infty$ , les  $W_{ij} - D_{ij}$  s'annulent, c'est-à-dire en fait que  $\mathbf{W}$  devient égal à  $\mathbf{D}$ . Les nouvelles équations constitutives faisant intervenir  $\nabla\mathbf{W}$ ,  $(\nabla\mathbf{W})^e$  et  $(\nabla\mathbf{W})^p$  sont donc équivalentes aux anciennes qui comportaient, elles,  $\nabla\mathbf{D}$ ,  $(\nabla\mathbf{D})^e$  et  $(\nabla\mathbf{D})^p$ . De plus, le terme  $\mathbf{P} : (\mathbf{W} - \mathbf{D})$  dans la nouvelle expression [2.55] de la puissance virtuelle des efforts intérieurs s'annule de sorte que l'expression de cette dernière devient équivalente à l'ancienne [2.8]. Il s'ensuit que les équations d'équilibre sont rigoureusement identiques à celles de l'ancienne théorie.

Il est intéressant de noter que les équations [2.58] permettent de comprendre, tout au moins qualitativement, comment la nouvelle formulation théorique proposée est une solution au problème de la localisation du dommage dans une zone infiniment mince. En effet, sur les lèvres d'une fissure, la relation [2.58]<sub>2</sub> montre que certaines composantes de  $\mathbf{M}$  sont nulles. Si le dommage se concentrait infiniment,  $\mathbf{M}$  deviendrait différent de zéro dès qu'on quitte les lèvres de la fissure.  $\mathbf{M}$  serait donc discontinu et certaines composantes de  $\nabla\mathbf{M}$  infinies. Mais comme  $\Sigma$  se comporte comme  $\nabla\mathbf{M}$  à cause des équations d'équilibre, certaines composantes de  $\Sigma$  seraient infinies, ce qui violerait le critère. La localisation devient donc impossible et l'épaisseur de la zone d'endommagement ne peut s'annuler. Dans la pratique, cette distance est de l'ordre de la longueur caractéristique  $b$  introduite dans le modèle.



D'un point de vue purement théorique, la nouvelle formulation ne présente aucun avantage par rapport à l'ancienne. Mais la situation est différente, d'un point de vue numérique : en effet  $\mathbf{W}$  sera considéré comme un degré de liberté aux nœuds et l'évaluation de  $\nabla \mathbf{W}$  aux points de Gauss des éléments s'effectuera uniquement à partir des dérivées premières (et non secondes) des fonctions de forme. L'utilisation des éléments finis de classe  $C^1$  n'est donc plus nécessaire. Le prix à payer est qu'en dimension 2, on utilisera six degrés de liberté  $(v_1, v_2, w_{11}, w_{22}, w_{12}, w_{33})$  au lieu de 2  $(v_1, v_2)$ .

Il est à noter que la modification du modèle proposée a déjà utilisée par Shu *et al.* [Shu, 1999] pour l'implémentation numérique d'un autre modèle micromorphique.

De plus, dans [Ger, 1973], Germain expose une "théorie micromorphique" dans laquelle on trouve des  $U_i$ , des  $D_{ij}$ , et au lieu des  $D_{ij;k}$ , des  $\mathcal{X}_{ij}$  et des  $\chi_{ijk} = \mathcal{X}_{ij;k}$ . La puissance virtuelle des efforts intérieurs  $\mathcal{P}_i^*$  prend alors la forme

$$(2.59) \quad - \int_{\Omega} (\Sigma_{ij} D_{ij} + s_{ij} \eta_{ij} + \nu_{ijk} \chi_{ijk}) d\Omega \quad , \quad \eta_{ij} = U_{i;j} - \mathcal{X}_{ij}.$$

On retombe sur la théorie du second gradient en imposant la liaison  $\eta_{ij} = 0$  qui implique  $\chi_{ij} = U_{i;j}$  qui à son tour donne  $\chi_{ijk} = U_{ij;k}$ .

On constate que cette théorie "micromorphique" est exactement la même que celle sur laquelle nous tombons pour l'implémentation numérique, à ceci près que nous posons  $\eta_{ij} = D_{ij} - W_{ij} \equiv D_{ij} - \mathcal{X}_{ij}$  au lieu de  $U_{i;j} - \mathcal{X}_{ij}$  : résultat, nos  $\eta_{ij}$  sont symétriques et nos  $s_{ij}$  aussi. Il est remarquable qu'à part ce petit détail, on retombe sur une théorie classique en "pénalisant" la liaison  $D_{ij} = W_{ij}$ , ce qui est *a priori*, un artifice purement numérique.

A l'issue de cette partie, nous avons présenté les éléments essentiels d'un modèle du second gradient pour les matériaux ductiles poreux (modèle GLPD) dans lequel les effets des forts gradients mécaniques sont pris en compte et dont l'ingrédient fondamental est un critère obtenu par analyse-limite approchée avec vitesse quadratique sur le bord. La théorie du second gradient utilisée est classique. L'exposé le mieux élaboré de cette théorie est dû à Germain [Ger, 1973], en particulier avec le lien principe des puissances virtuelles-équations d'équilibre. De même, l'idée de faire appel au second gradient pour décrire les effets d'échelle est classique. L'élément principal qui détermine l'originalité du modèle GLPD (dans la formulation mathématique détaillée sinon dans les idées physiques de base) est la déduction de la théorie du second gradient de l'homogénéisation de Hill-Mandel avec vitesse quadratique sur le bord, et l'interprétation des effets du second gradient comme résultant de l'homogénéisation des champs macroscopiques même à l'échelle du volume représentatif élémentaire.

Malgré l'introduction quelque peu arbitraire de la loi d'hypoélasticité, cette approche associe un cadre formel à un souci de justification microstructurale. Nous nous attendons donc à pouvoir décrire correctement la propagation de zones endommagées dans les matériaux, motivation initiale de notre étude. Nous nous proposons maintenant d'aborder les relations du modèle GLPD avec la classe des

matériaux standards généralisés telle que l'ont définie et étudiée Halphen et Nguyen [Hal & Ngu, 1975] puis Nguyen [Ngu, 1977].

## 2.3 Modèle GLPD et classe des matériaux standards généralisés

L'objet de cette partie est de montrer que comme le modèle de Gurson, le modèle GLPD définit un matériau standard généralisé à porosité fixée dans l'hypothèse des petites transformations. Nous faisons dès maintenant ces deux hypothèses.

On commence par définir les variables d'état du matériau et l'expression de l'énergie libre, puis on vérifie si cette expression satisfait aux propriétés requises par le formalisme des matériaux standards généralisés. Nous distinguerons deux cas : le modèle GLPD "normal" sans pénalisation résumé dans la section [2.2.10] et le second avec pénalisation introduit dans la section [2.2.11].

### 2.3.1 Cas du modèle "normal" sans pénalisation

Jusqu'à présent, nous avons noté les contraintes  $\Sigma$  parce que la présentation de la démarche d'homogénéisation conduisant au modèle nécessitait de distinguer les contraintes microscopiques (notées  $\sigma$ ) et macroscopiques (notées  $\Sigma$ ). A partir d'ici, nous reprendrons par souci de simplicité la notation  $\sigma$  usuelle au lieu de  $\Sigma$ .

Rappelons que pour un tenseur du troisième ordre  $\mathbf{X}$  symétrique sur les deux premiers indices, nous désignons par  $\overline{\mathbf{X}}$  le déviateur de  $\mathbf{X}$  sur ses indices non-symétriques défini par

$$(2.60) \quad \overline{X}_{ijk} = X_{ijk} - \frac{1}{4}(\delta_{ik}X_{jhh} + \delta_{jk}X_{ihh}).$$

En particulier,  $\overline{\nabla\varepsilon}$  se déduit de  $\nabla\varepsilon$  par la formule

$$(2.61) \quad \overline{\nabla\varepsilon}_{ijk} = \nabla\varepsilon_{ijk} - \frac{1}{4}(\delta_{ik}\nabla\varepsilon_{jhh} + \delta_{jk}\nabla\varepsilon_{ihh}).$$

#### 2.3.1.1 Variables internes

Les variables d'état considérées comprennent les composantes de la déformation  $\varepsilon$  et de son gradient  $\nabla\varepsilon$ , plus un ensemble de variables internes constituées par les composantes de  $\varepsilon^p$  et  $\overline{(\nabla\varepsilon)^p}$ , et la déformation équivalente moyenne  $\bar{\varepsilon}$ . La porosité n'est pas une variable interne puisque sa valeur est considérée comme fixe.

On considère les  $\overline{(\nabla\varepsilon)^p}_{ijk}$  comme des variables indépendantes. On n'impose pas par définition  $\overline{(\nabla\varepsilon)^p}_{ijj} = 0$ . C'est la loi d'écoulement plastique qui fournira ces relations (de même que pour le modèle de von Mises on considère au départ les  $\varepsilon^p_{ij}$  comme des variables indépendantes, c'est la loi d'écoulement qui impose ensuite  $\text{tr } \varepsilon^p = 0$ ).

La loi de comportement élastique s'écrit

$$(2.62) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_\sigma : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ \mathbf{M} = \mathbf{C}_M : (\nabla \boldsymbol{\varepsilon} - (\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^p) \end{cases}$$

En fait il est aisé de vérifier que  $\mathbf{M}$ , exprimé ici en fonction de  $\nabla \boldsymbol{\varepsilon}^e$ , peut aussi s'exprimer en fonction de  $\overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}$ . Il est donc possible d'écrire la relation [2.62]<sub>2</sub> sous la forme

$$\mathbf{M} = \overline{\mathbf{C}}_M : \left( \overline{\nabla \boldsymbol{\varepsilon}} - \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^p} \right).$$

### 2.3.1.2 Energie libre et propriétés

L'énergie libre peut être définie comme

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \nabla \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^p}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C}_\sigma : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{1}{2} \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e} : \overline{\mathbf{C}}_M : \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e} + (1-f) \int_0^{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) d\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \mathbf{C}_\sigma : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \frac{1}{2} \left( \overline{\nabla \boldsymbol{\varepsilon}} - \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^p} \right) : \overline{\mathbf{C}}_M : \left( \overline{\nabla \boldsymbol{\varepsilon}} - \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^p} \right) \\ &\quad + (1-f) \int_0^{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) d\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$

Avec cette définition, l'énergie libre  $\psi$  est de façon évidente *strictement convexe* par rapport à  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . La convexité stricte par rapport à la variable  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  est aussi évidente.

Montrons que  $\psi$  est strictement convexe par rapport à  $\overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}$ . On a

$$\frac{1}{2} \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e} : \overline{\mathbf{C}}_M : \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e} = \frac{1}{2} \mathbf{M} : \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}.$$

Or on peut mettre la loi de comportement sous la forme

$$M_{ijk} = \frac{b^2}{5} \left[ \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 4\mu} \left( \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{hhk} \delta_{ij} - \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{hhi} \frac{\delta_{jk}}{4} - \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{hhj} \frac{\delta_{ik}}{4} \right) + 2\mu \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{ijk} \right].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} : \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e} &= \frac{b^2}{5} \left[ \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 4\mu} \left( \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{hhk} \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{iik} - \frac{1}{4} \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{hhi} \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{ijj} - \frac{1}{4} \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{hhj} \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{iji} \right) \right] \\ &\quad + \frac{b^2}{5} \left[ 2\mu \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{ijk} \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{ijk} \right] \\ &= \frac{b^2}{5} \left[ \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 4\mu} \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{hhk} \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{iik} + 2\mu \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{ijk} \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{ijk} \right]. \end{aligned}$$

Avec  $\lambda$  et  $\mu$  positifs, cette dernière quantité, somme de carrés, est positive ou nulle, et si elle est nulle, tous les  $\overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{ijk}$  sont nuls, ce qui achève la démonstration.

Dans ce qui précède, nous avons fait usage de la propriété  $\overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^e}_{ijj} = 0$ , qui résulte des relations  $\overline{\nabla \boldsymbol{\varepsilon}}_{ijj} = 0$  (par définition de  $\overline{\nabla \boldsymbol{\varepsilon}}$ ) et  $\overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^p}_{ijj} = 0$  (conséquence de la loi d'écoulement).

L'énergie libre  $\psi$  étant une somme de fonctions de  $\varepsilon^e$ ,  $\overline{(\nabla\varepsilon)^e}$ ,  $\bar{\varepsilon}$ , est strictement convexe par rapport au triplet  $(\varepsilon^e, \overline{(\nabla\varepsilon)^e}, \bar{\varepsilon})$ . Comme  $\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p$  et  $\overline{(\nabla\varepsilon)^e} = \overline{\nabla\varepsilon} - \overline{(\nabla\varepsilon)^p}$ , les propriétés de stricte convexité par rapport au couple  $(\varepsilon, \overline{\nabla\varepsilon})$  d'une part, au triplet  $(\varepsilon^e, \overline{(\nabla\varepsilon)^e}, \bar{\varepsilon})$  d'autre part, sont assurées.

Faisons remarquer que par rapport au couple  $(\varepsilon, \nabla\varepsilon)$  l'énergie libre n'est convexe qu'au sens large, car elle est indépendante des tenseurs  $\nabla\varepsilon$  de la forme  $(\nabla\varepsilon)_{ijk} = \delta_{ik}U_j + \delta_{jk}U_i$ . Ceci n'est pas ici un inconvénient car c'est le problème de projection, où  $\varepsilon$  et  $\nabla\varepsilon$  sont fixés, qui nous occupe. Ce qui est requis est donc seulement la convexité stricte par rapport au triplet  $(\varepsilon^p, \overline{(\nabla\varepsilon)^p}, \bar{\varepsilon})$ .

### 2.3.1.3 Loi d'écoulement

Il nous faut récrire la loi d'écoulement de manière à faire disparaître le vecteur  $\mathbf{U}$ , qui ne s'inscrit pas dans le formalisme des matériaux standards généralisés. Nous reprenons les lois d'écoulement

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \\ (\nabla \dot{\varepsilon})_{ijk}^p &= \eta \frac{\partial \Phi}{\partial M_{ijk}} + U_i \delta_{jk} + U_j \delta_{ik}. \end{cases}$$

La fonction de charge  $\Phi$  est définie sur tout l'espace  $\mathcal{E}$  des couples  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M})$ , pas seulement sur l'espace  $\mathcal{F}$  des couples  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M})$  physiquement possibles, c'est-à-dire tels que  $M_{ijj} = 0$ . Mais seules les valeurs de  $\Phi$  sur  $\mathcal{F}$  comptent. On peut remarquer que l'appartenance de  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M})$  à  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire les relations  $M_{ijj} = 0$ , sont imposées par la loi d'élasticité

$$\mathbf{M} = \overline{\mathbf{C}}_{\mathbf{M}} : \overline{(\nabla\varepsilon)^e}.$$

On peut donc redéfinir  $\tilde{\Phi}$  de la façon suivante :  $\tilde{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}) = \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \overline{\mathbf{M}})$ ; cette opération laisse en effet inchangé  $\Phi$  sur  $\mathcal{F}$ , puisque  $\mathbf{M} = \overline{\mathbf{M}}$  si  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}) \in \mathcal{F}$ . L'ajout d'un  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}) \in \mathcal{F}^\perp$  (c'est-à-dire tel que  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  et que  $\mathbf{M}$  soit de la forme  $U_i \delta_{jk} + U_j \delta_{ik}$ ) ne change alors rien à la valeur de  $\tilde{\Phi}$ .

Alors le gradient de  $\tilde{\Phi}$  est contenu dans  $\mathcal{F}$ . Le choix de  $\Phi$  étant arbitraire en dehors de  $\mathcal{F}$ , écrivons la loi d'écoulement avec  $\tilde{\Phi}$  au lieu de  $\Phi$  :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \eta \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \sigma_{ij}} \\ (\nabla \dot{\varepsilon})_{ijk}^p &= \eta \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial M_{ijk}} + U_i \delta_{jk} + U_j \delta_{ik}. \end{cases}$$

Décomposons  $(\dot{\varepsilon}^p, \nabla \dot{\varepsilon}^p)$  sur  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}^\perp$ . La loi d'écoulement s'écrit alors

$$(\dot{\varepsilon}^p, \nabla \dot{\varepsilon}^p) = \eta \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{M}} \right) + (0, \nabla \dot{\varepsilon}^{p'}) \quad \text{avec} \quad (0, \nabla \dot{\varepsilon}^{p'}) \in \mathcal{F}^\perp.$$

Or

$$(2.63) \quad \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{M}} \right) \in \mathcal{F}.$$

La projection sur  $\mathcal{F}$  donne donc

$$(2.64) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \eta \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \sigma_{ij}} \\ \overline{\dot{\nabla} \varepsilon}_{ijk}^p &= \eta \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial M_{ijk}}. \end{cases}$$

On s'est ainsi débarrassé du vecteur gênant  $\mathbf{U}$ .

Sous la nouvelle forme, la loi d'écoulement a la forme qui convient : elle donne les dérivées des variables internes  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et  $\overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^p}$  et la loi de normalité est respectée.

**Remarque.** Pour récrire les équations d'évolution de  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et  $\nabla \boldsymbol{\varepsilon}^p$ , nous nous sommes placés dans le cadre du modèle résumé dans la section [2.2.10], sommes partis de la forme originale [2.29] et avons utilisé le fait que  $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^p})$  est, dans ce modèle, la projection de  $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, (\nabla \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})^p)$  sur  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire que  $\overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^p}_{ijj} = 0$ . Cependant, quand on cherche à prouver le caractère standard généralisé du modèle (à porosité fixée), le point de vue est, comme nous le disions plus haut, un peu différent ; on ne suppose pas a priori que  $\overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^p}_{ijj} = 0$  et la loi [2.29] est adoptée comme postulat. C'est cette loi qui impose alors les relations  $\overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^p}_{ijj} = 0$ , c'est-à-dire  $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^p}) \in \mathcal{F}$ , puisque  $\left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{M}} \right) \in \mathcal{F}$ .

Il reste à vérifier que le domaine

$$(2.65) \quad \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}, \bar{\sigma}) \text{ tels que } \tilde{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}, \bar{\sigma}) \leq 0\}$$

est convexe et qu'on a bien la normalité généralisée par rapport au triplet  $(\boldsymbol{\varepsilon}^p, \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^p}, \bar{\varepsilon})$ .

**Convexité du domaine.** Comme pour le modèle de Gurson standard, on pose  $\mathbf{X} \equiv \left( \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\bar{\sigma}}, \frac{\mathbf{M}}{\bar{\sigma}} \right)$ . On sait que le domaine  $\{\mathbf{X} \text{ tel que } \tilde{\Phi} \leq 0\}$  est convexe dans l'espace des  $\mathbf{X}$  du fait de la convexité de  $\tilde{\Phi}$ . La convexité du domaine  $\{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}, \bar{\sigma}) \text{ tels que } \tilde{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}, \bar{\sigma}) \leq 0\}$  s'en déduit par le même raisonnement que pour le modèle de Gurson.

**Normalité généralisée.** Là aussi, la démonstration est la même que pour le modèle de Gurson. Les forces thermodynamiques associées aux variables internes  $\varepsilon^p$ ,  $\overline{(\nabla\varepsilon)^p}$  et  $\bar{\varepsilon}$  sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_{\varepsilon^p} = -\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^p} = \mathbf{C}_\sigma : (\varepsilon - \varepsilon^p) = \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{F}_{\overline{(\nabla\varepsilon)^p}} = -\frac{\partial\psi}{\partial\overline{(\nabla\varepsilon)^p}} = \overline{\mathbf{C}}_{\mathbf{M}} : (\overline{\nabla\varepsilon} - \overline{(\nabla\varepsilon)^p}) = \mathbf{M} \\ F_{\bar{\varepsilon}} = -\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\varepsilon}} = -(1-f)\bar{\sigma}(\varepsilon). \end{array} \right.$$

Le critère s'exprime bien en fonction de ces forces thermodynamiques ( $f$  étant fixée). (Le remplacement de  $\bar{\sigma}$  par  $-(1-f)\bar{\sigma}$  ne change rien, le passage de l'un à l'autre étant linéaire.)

Il ne reste qu'à vérifier que les équations d'évolution des variables internes obéissent à la règle de normalité par rapport à la fonction de charge, exprimée en termes de forces thermodynamiques, c'est-à-dire qu'on a bien

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}^p = \eta \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \\ \overline{(\nabla\varepsilon)^p} = \eta \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\mathbf{M}} \\ \dot{\bar{\varepsilon}} = \eta \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial F_{\bar{\varepsilon}}}. \end{array} \right.$$

Pour cela, il suffit de vérifier la troisième équation. Pour cela, nous définissons comme ci-dessus  $\mathbf{X} \equiv \left( \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\bar{\sigma}}, \frac{\mathbf{M}}{\bar{\sigma}} \right)$ . Nous avons  $\tilde{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}, \bar{\sigma}) \equiv \tilde{\Phi}(\mathbf{X})$ , donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}, \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\mathbf{M}} \right) = \frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\mathbf{X}} \\ \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\mathbf{X}} \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = -\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\mathbf{X}} \frac{\mathbf{X}}{\bar{\sigma}} \Rightarrow \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial F_{\bar{\varepsilon}}} = \frac{1}{(1-f)\bar{\sigma}} \mathbf{X} \cdot \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\mathbf{X}}. \end{array} \right.$$

Or

$$\left( \dot{\varepsilon}^p, \overline{(\nabla\varepsilon)^p} \right) = \eta \left( \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}, \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\mathbf{M}} \right) = \frac{\eta}{\bar{\sigma}} \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\mathbf{X}}.$$

La troisième équation ci-dessus s'écrit donc

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}} &= \frac{\eta}{(1-f)\bar{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}) \cdot \left( \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}, \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\mathbf{M}} \right) \\ &= \frac{\eta}{(1-f)\bar{\sigma}} \left( \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{M} : \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\mathbf{M}} \right) = \frac{1}{(1-f)\bar{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon}^p + \mathbf{M} : \overline{(\nabla\varepsilon)^p}). \end{aligned}$$

C'est bien la loi d'évolution de  $\bar{\varepsilon}$ ,

$$(2.66) \quad (1 - f)\bar{\sigma}\dot{\bar{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \mathbf{M} : \overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^p}.$$

De tout ce qui précède, on peut conclure que le modèle micromorphique sans pénalisation est standard généralisé à porosité fixée (et en petites transformations).

### 2.3.2 Cas du modèle avec pénalisation

On prend comme énergie libre

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{W}, \nabla \mathbf{W}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \nabla \mathbf{W}^p, \bar{\varepsilon}) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C}_\sigma : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{1}{2} \overline{(\nabla \mathbf{W})^e} : \mathbf{C}_M : \overline{(\nabla \mathbf{W})^e} \\ &+ \frac{1}{2} L\mu(\mathbf{W} - \boldsymbol{\varepsilon}) : (\mathbf{W} - \boldsymbol{\varepsilon}) + (1 - f) \int_0^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma}(\varepsilon) d\varepsilon. \end{aligned}$$

La seule différence est qu'il y a maintenant  $\mathbf{W}$  en plus de  $\nabla \mathbf{W}$  comme variable interne. (Il n'y a pas de "partie plastique" associée comme variable interne.) Cela ne change absolument rien de fondamental à la démonstration précédente et les mêmes conclusions que dans le cas sans pénalisation s'appliquent.

En conclusion, nous avons montré que le modèle GLPD est standard généralisé à condition de fixer la porosité. La démonstration est fondamentalement la même que pour le modèle de Gurson. La seule difficulté réside dans le vecteur  $\mathbf{U}$  de la loi d'écoulement plastique qui n'entre pas dans le formalisme classique. Le problème a été résolu en ne considérant que les "déviateurs"  $\overline{(\nabla \boldsymbol{\varepsilon})^p}_{ijk}$ . L'énergie libre n'est que fonction de ces "déviateurs", pas des parties "moyennes" associées. De plus, quand on prend les "déviateurs" de la loi d'écoulement plastique, le vecteur  $\mathbf{U}$  disparaît.



## 2.4 Modèle GLPD : implémentation numérique

Nous avons incorporé le modèle micromorphique décrit plus haut dans le code de calcul par éléments finis SYSTUS<sup>®</sup> développé par ESI Group. Seul le cas 2D a été envisagé.

### 2.4.1 Numérisation des équations du modèle

Nous nous intéressons au problème incrémental défini entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$  pour lequel la solution à un instant donné ne saurait être obtenue que par une méthode pas à pas. Nous avons déjà exposé dans le précédent chapitre la méthode standard pour l'implémentation numérique des modèles de plasticité. Très brièvement, rappelons que cette méthode est essentiellement basée sur une démarche itérative, chaque itération étant constituée de deux étapes : une étape globale et une étape locale. La première étape utilise les équations d'équilibre, la loi d'élasticité et les conditions aux limites pour calculer les déplacements aux nœuds de la structure ainsi que les déformations et contraintes aux points de Gauss. La seconde consiste à considérer la déformation totale issue de l'étape précédente comme donnée en chaque point et à évaluer en chacun de ces points les incréments des déformations élastique et plastique ainsi que les contraintes.

L'élément clé de cette implémentation numérique se réduira à écrire un module pour l'opération de projection des contraintes calculées élastiquement sur la surface de charge.

#### 2.4.1.1 Algorithme de projection sur la surface de charge

Comme dans le cas du modèle de Gurson (voir chapitre précédent), le caractère standard généralisé à porosité fixée assure l'existence et l'unicité de la solution du problème de projection, pourvu que l'algorithme adopté soit implicite par rapport aux variables internes à l'exception de la porosité, pour laquelle il doit être explicite. (Cette propriété subsiste en grandes transformations sous réserve d'une discrétisation explicite des termes provenant des dérivées objectives des contraintes et des moments). On adopte donc un tel algorithme.

Les grandeurs considérées dans la suite seront prises à l'instant  $t + \Delta t$ , sauf si elles sont munies d'un indice supérieur <sup>0</sup> signifiant qu'elles sont prises à l'instant  $t$ .

Commençons par supposer les paramètres  $p$  et  $\bar{\sigma}$  connus, en laissant pour plus tard le problème de la détermination de ces grandeurs.

Comme dans la numérisation du modèle de Gurson, nous adoptons une paramétrisation de la surface de charge au moyen d'un angle noté  $\varphi$ , qui assure le respect automatique du critère. Les lois d'écoulement fourniront ensuite une équation portant sur  $\varphi$ , qui pourra être résolue numériquement.

Le critère implique immédiatement que la valeur maximale possible de  $\frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left( \sigma_{eq}^2 + \frac{Q^2}{b^2} \right)$  (atteinte pour  $\sigma_m = 0$ ) vaut  $(1 - p)^2$ . Ceci implique que

$$(2.67) \quad \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left( \sigma_{eq}^2 + \frac{Q^2}{b^2} \right) = (1 - p)^2 \cos^2 \varphi$$

où  $\varphi$  est un certain angle. En substituant cette expression dans [2.45], nous obtenons

$$\begin{aligned} & (1 - p)^2 \cos^2 \varphi + 2p \cosh \left( \frac{3 \sigma_m}{2 \bar{\sigma}} \right) - 1 - p^2 = 0 \\ \Rightarrow & 2p \cosh \left( \frac{3 \sigma_m}{2 \bar{\sigma}} \right) \\ = & 1 + p^2 - (1 - p)^2 + (1 - p)^2 \sin^2 \varphi \\ = & 2p + (1 - p)^2 \sin^2 \varphi \\ \Rightarrow & \cosh \left( \frac{3 \sigma_m}{2 \bar{\sigma}} \right) = 1 + \frac{(1 - p)^2 \sin^2 \varphi}{2p} \\ (2.68) \quad \Rightarrow & \sigma_m = \frac{2}{3} \bar{\sigma} \operatorname{sgn}(\varphi) \cosh^{-1} \left[ 1 + \frac{(1 - p)^2 \sin^2 \varphi}{2p} \right] \end{aligned}$$

où nous avons introduit un facteur  $\operatorname{sgn}$  (signe de  $\varphi$ ) afin de permettre à  $\sigma_m$  de prendre toutes les valeurs possibles, positives et négatives. Le domaine de variation de  $\varphi$  est l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ; il permet à  $\sin^2 \varphi$  et à  $\operatorname{sgn}(\varphi)$  de prendre toutes les valeurs envisageables.

Ecrivons maintenant les lois d'écoulement [2.34], [2.38] et [2.121] sous forme discrétisée :

$$(2.69) \quad \begin{cases} \Delta \varepsilon_{ij}^{p'} = \frac{3}{2} \frac{\Delta \varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} \sigma'_{ij} \\ \Delta \varepsilon_m^p = \frac{p}{2} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{eq}} \sinh \left( \frac{3 \sigma_m}{2 \bar{\sigma}} \right) \Delta \varepsilon_{eq} \end{cases}$$

$$(2.70) \quad \begin{cases} \Delta (\nabla W)_{ijk}^{p'} = \Delta \eta \left( \frac{3}{\bar{\sigma}^2 b^2} A_{II} M'_{ijk} + U_j \delta_{ik} + U_i \delta_{jk} - \frac{2}{3} U_k \delta_{ij} \right) \\ \Delta (\nabla W)_{mk}^p = \Delta \eta \left( \frac{2}{3 \bar{\sigma}^2 b^2} A_I M_{mk} + \frac{2}{3} U_k \right) \end{cases}$$

où

$$(2.71) \quad \Delta \eta = \frac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_{eq}} \Delta \varepsilon_{eq}.$$

Par souci de commodité, on a ici introduit le vecteur  $\mathbf{U}$  à l'intérieur de la parenthèse en facteur de  $\Delta\eta$ ; cette opération est licite puisque la valeur de ce vecteur est laissée arbitraire par la loi d'écoulement.

Ces équations sont écrites sous forme implicite puisque les contraintes qui interviennent ici sont prises à l'instant  $t + \Delta t$ .

Notons  $\sigma^e$  et  $\mathbf{M}^e$  les contraintes et les moments (à l'instant  $t + \Delta t$ ) *calculés élastiquement*, c'est-à-dire en supposant les incréments  $\Delta\varepsilon$  et  $\Delta(\nabla\mathbf{W})$  purement élastiques. Ces quantités connues sont issues de l'étape globale de l'itération élastoplastique et données par

$$(2.72) \quad \begin{cases} \sigma_{ij}^{e'} = \sigma_{ij}^{0'} + 2\mu\Delta\varepsilon_{ij} \\ \sigma_m^e = \sigma_m^{0'} + (3\lambda + 2\mu)\Delta\varepsilon_m \end{cases}$$

et

$$(2.73) \quad \begin{cases} M_{ijk}^{*'} = M_{ijk}^{0'} + \frac{2}{5}\mu b^2 \Delta(\nabla W)_{ijk}' \\ M_{mk}^{*'} = M_{mk}^{0'} + (3\lambda + 2\mu)\frac{b^2}{5}\Delta(\nabla W)_{mk}. \end{cases}$$

(On peut noter que s'il y a plasticité, on peut supprimer les termes proportionnels à  $\mathbf{U}^e$  dans la loi d'hypoélasticité, en effet le respect des relations  $M_{ijj} = 0$  sera assuré par un choix convenable du vecteur  $\mathbf{U}$  dans la loi d'écoulement).

Calculons à présent successivement  $\sigma'_{ij}$ ,  $\sigma_m$ ,  $M'_{ijk}$  et  $M_{mk}$  en utilisant les lois d'écoulement discrétisées [2.69], [2.70] et [2.71] et en tenant compte des définitions [2.72], [2.73] des contraintes  $\sigma^e$  et des moments  $\mathbf{M}^e$  calculés élastiquement.

#### a) Calcul de $\sigma'_{ij}$

Nous avons

$$(2.74) \quad \begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \sigma_{ij}^{0'} + 2\mu\Delta\varepsilon_{ij}^{e'} = \sigma_{ij}^{0'} + 2\mu\Delta\varepsilon_{ij}' - 2\mu\Delta\varepsilon_{ij}^{p'} \\ &= \sigma_{ij}^{e'} - 2\mu\Delta\varepsilon_{ij}^{p'} = \sigma_{ij}^e - 3\mu\frac{\Delta\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}}\sigma'_{ij} \\ &\Rightarrow \left(1 + 3\mu\frac{\Delta\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}}\right)\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^e. \end{aligned}$$

Cette dernière équation montre que  $\sigma'$  et  $\sigma^{e'}$  sont positivement colinéaires; on a donc

$$(2.75) \quad \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}^*}\sigma_{ij}^{e'}.$$

De plus, en prenant la norme de von Mises des deux membres de l'équation [2.74], on obtient

$$(2.76) \quad \begin{aligned} \left(1 + 3\mu \frac{\Delta \varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}}\right) \sigma_{eq} &= \sigma_{eq} + 3\mu \Delta \varepsilon_{eq}^p = \sigma_{eq}^e \\ &\Rightarrow \Delta \varepsilon_{eq}^p = \frac{\sigma_{eq}^* - \sigma_{eq}}{3\mu}. \end{aligned}$$

### b) Calcul de $\sigma_m$

Nous avons :

$$(2.77) \quad \begin{aligned} \sigma_m &= \sigma_m^0 + (3\lambda + 2\mu) \Delta \varepsilon_m^e = \sigma_m^* - (3\lambda + 2\mu) \Delta \varepsilon_m^p \\ &= \sigma_m^e - (3\lambda + 2\mu) \frac{p}{2} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{eq}} \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) \Delta \varepsilon_{eq}^p \\ &= \sigma_m^e - (3\lambda + 2\mu) \frac{p}{2} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{eq}} \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}}{3\mu} \\ &\Rightarrow \sigma_m^* - \sigma_m = \frac{3\lambda + 2\mu}{6\mu} p \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{eq}} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}) \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) \\ &\Rightarrow \frac{6\mu}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_m^e - \sigma_m) \sigma_{eq} = p \bar{\sigma} (\sigma_{eq}^* - \sigma_{eq}) \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) \\ &\Rightarrow \left[ \frac{6\mu}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_m^e - \sigma_m) + p \bar{\sigma} \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) \right] \sigma_{eq} = p \bar{\sigma} \sigma_{eq}^* \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right). \end{aligned}$$

L'égalité [2.77] permet, si on le souhaite, d'exprimer  $\sigma_{eq}$  en fonction de la seule inconnue  $\sigma_m$ , donc de  $\varphi$  grâce à la relation [2.68]. Nous n'utiliserons pas cette propriété dans la suite.

### c) Calcul de $M'_{ijk}$

Partant de

$$\begin{aligned} M'_{ijk} &= M_{ijk}^0 + \frac{2}{5} \mu b^2 \Delta (\nabla W)_{ijk}^e = M_{ijk}^e - \frac{2}{5} \mu b^2 \Delta (\nabla W)_{ijk}^p \\ &= M_{ijk}^* - \frac{2}{5} \mu b^2 \frac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_{eq}} \frac{\sigma_{eq}^* - \sigma_{eq}}{3\mu} \left( \frac{3}{\bar{\sigma}^2 b^2} A_{II} M'_{ijk} + U_j \delta_{ik} + U_i \delta_{jk} - \frac{2}{3} U_k \delta_{ij} \right), \end{aligned}$$

nous avons

$$(2.78) \quad \left(1 + \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} \frac{A_{II}}{5}\right) M'_{ijk} = M_{ijk}^{**'}$$

où

$$(2.79) \quad M_{ijk}^{**'} = M_{ijk}^e - \frac{\bar{\sigma}^2 b^2}{15} \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} \left( U_j \delta_{ik} + U_i \delta_{jk} - \frac{2}{3} U_k \delta_{ij} \right).$$

( $\mathbf{M}^{**'}$  est un tenseur connu,  $\mathbf{U}$  étant momentanément supposé lui-même connu). L'équation [2.78] implique que les tenseurs  $\mathbf{M}'$  et  $\mathbf{M}^{**'}$  sont positivement colinéaires et on a donc

$$(2.80) \quad M'_{ijk} = \frac{\sqrt{M_{II}}}{\sqrt{M_{II}^{**}}} M_{ijk}^{**'}$$

où  $M_{II}^{**} = \frac{3}{2} M_{ijk}^{**'} M_{ijk}^{**'}$  désigne le deuxième invariant de  $\mathbf{M}^{**'}$ , comme  $M_{II}$  celui de  $\mathbf{M}$ . De plus, en prenant les invariants " $M_{II}$ " des deux membres de [2.78], on obtient

$$(2.81) \quad \left(1 + \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} \frac{A_{II}}{5}\right)^2 M_{II} = M_{II}^{**} \Rightarrow M_{II} = \frac{M_{II}^{**} \sigma_{eq}^2}{\left(\sigma_{eq} + \frac{A_{II}}{5} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})\right)^2}.$$

#### d) Calcul de $M_{mk}$

Nous avons

$$\begin{aligned} M_{mk} &= M_{mk}^0 + (3\lambda + 2\mu) \frac{b^2}{5} \Delta(\nabla W)_{mk}^e = M_{mk}^e - (3\lambda + 2\mu) \frac{b^2}{5} \Delta(\nabla W)_{mk}^p \\ &= M_{mk}^* - (3\lambda + 2\mu) \frac{b^2}{5} \frac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_{eq}} \frac{\sigma_{eq}^* - \sigma_{eq}}{3\mu} \left( \frac{2}{3\bar{\sigma}^2 b^2} M_{mk} A_I + \frac{2}{3} U_k \right) \end{aligned}$$

qui entraîne que

$$(2.82) \quad \left(1 + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} A_I\right) M_{mk} = M_{mk}^{**}$$

où

$$(2.83) \quad M_{mk}^{**} = M_{mk}^e - \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} \bar{\sigma}^2 b^2 \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} U_k.$$

( $\mathbf{M}_m^{**}$  est connu si  $\mathbf{U}$  l'est).

L'équation [2.82] implique que les vecteurs  $\mathbf{M}_m^{**}$  et  $\mathbf{M}_m$  sont positivement colinéaires ; donc

$$(2.84) \quad M_{mk} = \frac{\sqrt{M_I}}{\sqrt{M_I^{**}}} M_{mk}^{**}$$

où  $M_I^{**} = M_{mi}^{**} M_{mi}^{**}$  désigne le premier invariant de  $\mathbf{M}^{**}$ , comme  $M_I$  celui de  $\mathbf{M}$ . De plus, en prenant les invariants " $M_I$ " des deux membres de [2.82], on obtient

$$(2.85) \quad \left(1 + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} \frac{\sigma_{eq}^* - \sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} A_I\right)^2 M_I = M_I^{**} \Rightarrow M_I = \frac{M_I^{**} \sigma_{eq}^2}{\left(\sigma_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})\right)^2}.$$

Un élément nouveau par rapport au cas standard, et apparamment fort gênant, est la présence du vecteur  $\mathbf{U}$ , inconnu. En fait on peut calculer les composantes de ce vecteur en écrivant les relations  $M_{ijj} = 0$ , comme nous allons le voir maintenant. En effet, d'après les relations [2.78] et [2.79] :

$$\begin{aligned} M'_{ijk} &= \frac{M_{ijk}^{**'} \sigma_{eq}}{\sigma_{eq} + \frac{A_{II}}{5} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} \\ &= \frac{M_{ijk}^e \sigma_{eq}}{\sigma_{eq} + \frac{A_{II}}{5} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} - \frac{b^2 \bar{\sigma}^2}{15} \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}}{\sigma_{eq} + \frac{A_{II}}{5} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} \left( \delta_{ik} U_j + \delta_{jk} U_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} U_k \right). \end{aligned}$$

De plus, d'après les équations [2.82] et [2.83] :

$$\begin{aligned} M_{mk} &= \frac{M_{mk}^{**} \sigma_{eq}}{\sigma_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} \\ &= \frac{M_{mk}^e \sigma_{eq}}{\sigma_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} - \bar{\sigma}^2 b^2 \frac{\frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})}{\sigma_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} U_k. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} M_{ijk} &= M'_{ijk} + \delta_{ij} M_{mk} \\ &= \frac{M_{ijk}^e \sigma_{eq}}{\sigma_{eq} + \frac{A_{II}}{5} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} + \delta_{ij} \frac{M_{mk}^e \sigma_{eq}}{\sigma_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} \\ &\quad - \frac{\bar{\sigma}^2 b^2}{15} \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}}{\sigma_{eq} + \frac{A_{II}}{5} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} \left( \delta_{ik} U_j + \delta_{jk} U_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} U_k \right) \\ &\quad - \bar{\sigma}^2 b^2 \delta_{ij} \frac{\frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})}{\sigma_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} U_k. \end{aligned}$$

et donc, d'après [2.16], que

$$\begin{aligned} 0 = M_{ijj} &= \frac{M_{ijj}^e \sigma_{eq}}{\sigma_{eq} + \frac{A_{II}}{5} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} + \frac{M_{mi}^e \sigma_{eq}}{\sigma_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} \\ &\quad - \frac{\bar{\sigma}^2 b^2}{15} \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}}{\sigma_{eq} + \frac{A_{II}}{5} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} \frac{10}{3} U_i - \bar{\sigma}^2 b^2 \frac{\frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})}{\sigma_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} U_i. \end{aligned}$$

Ceci entraîne, en posant,

$$\mathcal{G}_{1i} = \frac{M_{ijj}^{e'}}{\sigma_{eq} + \frac{A_{II}}{5}(\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} + \frac{M_{mi}^e}{\sigma_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu}A_I(\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})}$$

$$\mathcal{G}_2 = \frac{10}{45 \left( \sigma_{eq} + \frac{A_{II}}{5}(\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}) \right)} + \frac{\frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu}}{\sigma_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{9\mu}A_I(\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})}$$

que

$$(2.86) \quad U_i = \frac{\sigma_{eq}}{\bar{\sigma}^2 b^2 (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq})} \frac{\mathcal{G}_{1i}}{\mathcal{G}_2}.$$

Ainsi le vecteur  $\mathbf{U}$  est connu en fonction de la seule inconnue  $\sigma_{eq}$ . Il en résulte, d'après les relations [2.79] et [2.83], que  $M_{ijk}^{**'}$  et  $M_{mk}^{**}$ , donc  $M_{II}^{**}$  et  $M_I^{**}$ , sont également connus en fonction de cette seule inconnue. De plus, d'après les équations [2.47]<sub>1</sub>, [2.81] et [2.85] :

$$(2.87) \quad Q^2 = \sigma_{eq}^2 \left( \frac{A_I M_I^{**}}{\left( \sigma_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}) \right)^2} + \frac{A_{II} M_{II}^{**}}{\left( \sigma_{eq} + \frac{A_{II}}{5} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}) \right)^2} \right)$$

d'où, d'après la relation [2.67],

$$\sigma_{eq}^2 \left( 1 + \frac{A_I M_I^{**}}{b^2 \left( \sigma_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}) \right)^2} + \frac{A_{II} M_{II}^{**}}{b^2 \left( \sigma_{eq} + \frac{A_{II}}{5} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}) \right)^2} \right) = (1-p)^2 \bar{\sigma}^2 \cos^2 \varphi.$$

On obtient finalement le système

$$(2.88) \quad \begin{cases} \left( \frac{6\mu}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_m^e - \sigma_m) + p\bar{\sigma} \sinh \left( \frac{3\sigma_m}{2\bar{\sigma}} \right) \right) \sigma_{eq} = p\bar{\sigma} \sigma_{eq}^e \sinh \left( \frac{3\sigma_m}{2\bar{\sigma}} \right) \\ \sigma_{eq}^2 \left( 1 + \frac{A_I M_I^{**}}{b^2 \left( \sigma_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}) \right)^2} + \frac{A_{II} M_{II}^{**}}{b^2 \left( \sigma_{eq} + \frac{A_{II}}{5} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}) \right)^2} \right) \\ = (1-p)^2 \bar{\sigma}^2 \cos^2 \varphi. \end{cases}$$

dont les inconnues sont  $\varphi$  et  $\sigma_{eq}$  ( $\sigma_m$  s'exprimant en fonction de  $\varphi$  grâce à [2.68]).

La stratégie la plus simple pour résoudre ce système consiste à exprimer  $\sigma_{eq}$  en fonction de  $\varphi$  grâce à [2.88]<sub>1</sub>, et à reporter l'expression obtenue dans [2.88]<sub>2</sub>. On obtient ainsi une équation portant sur

la seule inconnue  $\varphi$ , que l'on peut résoudre numériquement par la méthode de Newton. L'expérience montre cependant que cet algorithme de Newton converge mal. Il est donc préférable de résoudre [2.88]<sub>1</sub> par rapport à  $\varphi$  par une méthode de Newton, ceci nécessite de connaître  $\sigma_{eq}$  en fonction de  $\varphi$ , donc de résoudre [2.88]<sub>2</sub> par rapport à  $\sigma_{eq}$  à  $\varphi$  fixé, par une seconde méthode de Newton. L'algorithme est alors plus lourd puisqu'il comporte deux méthodes de Newton imbriquées mais l'expérience montre qu'il converge systématiquement.

Une fois  $\varphi$  connu, on calcule  $\sigma_m$  par [2.68],  $\sigma_{eq}$  par [2.88]<sub>1</sub>,  $\sigma'$  par [2.75],  $\mathbf{U}$  par [2.87],  $\mathbf{M}^{**'}$  par [2.79],  $\mathbf{M}_m^{**'}$  par [2.83],  $\mathbf{M}'$  par [2.80],  $\mathbf{M}_m$  par [2.84]. Ainsi, l'opération de "projection sur la surface de charge" est réalisée.

#### 2.4.1.2 Résolution sur l'érouissage et la porosité

Nous avons supposé connu, dans ce qui précède, l'état de l'érouissage à l'instant  $t + \Delta t$ , c'est-à-dire le paramètre  $\bar{\varepsilon}$ . En réalité, il ne l'est pas si bien qu'il est nécessaire d'effectuer des itérations sur ce paramètre pour en déterminer la valeur. Ceci nécessite d'écrire l'équation d'évolution [2.52] sous forme discrétisée (compte tenu de l'équation [2.51]) :

$$\begin{aligned} (1-f)\sigma(\bar{\varepsilon})\Delta\bar{\varepsilon} &= \sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}^p + M_{ijk}\Delta(\nabla W)_{ijk}^p \\ &= (\sigma'_{ij} + \sigma_{ij}\delta_{ij})(\Delta\varepsilon_{ij}^{p'} + \Delta\varepsilon_m^p\delta_{ij}) \\ &+ (M'_{ijk} + M_{mk}\delta_{ij})(\Delta(\nabla W)_{ijk}^{p'} + \Delta(\nabla W)_{mk}^p\delta_{ij}) \\ &= \sigma'_{ij}\varepsilon_{ij}^{p'} + 3\sigma_m\Delta\varepsilon_m^p + M'_{ijk}\Delta(\nabla W)_{ijk}^{p'} + 3M_{mk}\Delta(\nabla W)_{mk}^p. \end{aligned}$$

Or, en se reportant au paragraphe *Calcul de  $\sigma_m$* , on voit que

$$(2.89) \quad \Delta\varepsilon_m^p = \frac{\sigma_m^e - \sigma_m}{3\lambda + 2\mu}.$$

De plus, d'après les relations [2.69]<sub>1</sub> et [2.74], on a

$$(2.90) \quad \sigma'_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}^{p'} = \frac{3}{2} \frac{\Delta\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \sigma_{eq}\Delta\varepsilon_{eq} = \sigma_{eq} \frac{\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}}{3\mu}.$$

Enfin, en se reportant aux paragraphes *Calcul de  $M'_{ijk}$*  et *Calcul de  $M_{mk}$* , on voit que

$$(2.91) \quad \Delta(\nabla W)_{ijk}^{p'} = \frac{1}{5} \frac{M_{ijk}^e{}' - M'_{ijk}}{2\mu b^2} \quad \text{et} \quad \Delta(\nabla W)_{mk}^p = \frac{1}{5} \frac{M_{mk}^e - M_{mk}}{(3\lambda + 2\mu)b^2}$$

si bien que finalement, en posant

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= \frac{\sigma_{eq}(\sigma_{eq}^* - \sigma_{eq})}{3\mu} + \frac{3\sigma_m(\sigma_m^* - \sigma_m)}{3\lambda + 2\mu} \\ \mathcal{K}_2 &= \frac{1}{5} \frac{M'_{ijk}(M_{ijk}^*{}' - M'_{ijk})}{2\mu b^2} \\ \mathcal{K}_3 &= \frac{3}{5} \frac{M_{mk}(M_{mk}^* - M_{mk})}{(3\lambda + 2\mu)b^2}, \end{aligned}$$



il vient que

$$(2.92) \quad \Delta\bar{\varepsilon} = \frac{1}{(1-f)\sigma(\bar{\varepsilon})}(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3).$$

On notera que les produits contractés  $M'_{ijk}\Delta(\nabla W)_{ijk}'$  et  $M_{mk}\Delta(\nabla W)_{mk}^p$  ne se ramènent pas à un simple produit de deux scalaires, comme  $\sigma'_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}'$  se ramène à  $\sigma_{eq}\Delta\varepsilon_{eq}$ . Cela tient à ce que le tenseur  $\mathbf{M}'$  et le vecteur  $\mathbf{M}_m$  ne sont pas colinéaires à  $\mathbf{M}^{*'} et  $\mathbf{M}_m^e$  (comme  $\boldsymbol{\sigma}'$  est colinéaire  $\boldsymbol{\sigma}^{e'}$ ), mais à  $\mathbf{M}_m^{**'}$  et  $\mathbf{M}_m^{**}$  (équations [2.79] et [2.82]).$

En pratique, l'incrément du paramètre d'érouissage  $\Delta\bar{\varepsilon}$  est calculé par une méthode de point fixe : partant d'une valeur initiale de  $\Delta\bar{\varepsilon}$ , on évalue  $\bar{\sigma} = \sigma(\bar{\varepsilon}) = \sigma(\bar{\varepsilon}^0 + \bar{\varepsilon})$ , on résout par rapport aux autres inconnues, on en déduit une nouvelle valeur de  $\bar{\varepsilon}$  grâce à la relation [2.92], et ainsi de suite jusqu'à convergence. Cet algorithme très simple converge très vite du fait que  $\bar{\sigma}$  varie peu d'une itération à l'autre.

En ce qui concerne la porosité, nous adoptons un schéma explicite, comme mentionné plus haut. Nous prenons donc pour  $p$ , dans les équations précédentes, la valeur correspondant à l'estimation *explicite* de la porosité à l'instant  $t + \Delta t$  donnée par

$$(2.93) \quad \tilde{f} = f^0 + \dot{f}^0 \Delta t,$$

fixe pendant tout le passage de l'instant  $t$  à l'instant  $t + \Delta t$ . Une fois la convergence des itérations élastoplastiques obtenue,  $f$  (donc  $p$ ) est actualisé grâce à la formule discrétisée :

$$(2.94) \quad f = f^0 + \Delta f \quad ; \quad \Delta f = 3(1 - \tilde{f})\Delta\varepsilon_m^p.$$

### 2.4.2 Calcul de $\nabla\mathbf{W}$ dans le cas axisymétrique

Dans le cas axisymétrique, le calcul de  $\nabla\mathbf{W}$  pose un problème spécifique lié à l'utilisation des coordonnées curvilignes (cylindriques). L'expression de cette quantité n'est pas classique : seule celle de  $\text{div}\mathbf{W}$  (qui conduit à l'écriture des équations d'équilibre, en prenant  $\mathbf{W} \equiv \boldsymbol{\sigma}$ ) est bien connue. Considérons donc un champ de tenseurs symétriques d'ordre 2 axisymétriques :

$$(2.95) \quad \begin{aligned} \mathbf{W}(r, z) &\equiv W_{rr}(r, z)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + W_{\theta\theta}(r, z)\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + W_{zz}(r, z)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \\ &+ W_{rz}(r, z)(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r). \end{aligned}$$

(L'axisymétrie entraîne la nullité des composantes  $w_{r\theta}$ ,  $w_{\theta z}$  ainsi que l'absence de dépendance par rapport à  $\theta$ ). Alors, compte tenu des relations

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial r} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta ; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r ; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_r &= \nabla \mathbf{W} \cdot \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial r} = W_{rr,r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + W_{\theta\theta,r} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \\ &+ W_{zz,r} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + W_{rz,r} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r) \end{aligned}$$

d'où

$$(2.96) \quad (\nabla W)_{rrr} = W_{rr,r}; \quad (\nabla W)_{\theta\theta r} = W_{\theta\theta,r}; \quad (\nabla W)_{zzr} = W_{zz,r}; \quad (\nabla W)_{rzz} = W_{rz,r}.$$

De plus

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_\theta &= \nabla \mathbf{W} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \theta} = \frac{W_{rr}}{r} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta) \\ &- \frac{W_{\theta\theta}}{r} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r) + \frac{W_{rz}}{r} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta) \end{aligned}$$

d'où

$$(\nabla W)_{r\theta\theta} = \frac{W_{rr} - W_{\theta\theta}}{r} ; \quad (\nabla W)_{z\theta\theta} = \frac{W_{rz}}{r}.$$

Enfin

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_z &= \nabla \mathbf{W} \cdot \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z} = W_{rr,z} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + W_{\theta\theta,z} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \\ &+ W_{zz,z} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + W_{rz,z} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r) \end{aligned}$$

d'où

$$(2.97) \quad (\nabla W)_{rrz} = w_{rr,z}; \quad (\nabla W)_{\theta\theta z} = W_{\theta\theta,z} ; \quad (\nabla W)_{zzz} = W_{zz,z}; \quad (\nabla W)_{rzz} = W_{rz,z}.$$

On peut récrire les équations [2.96] à [2.97] en faisant intervenir les directions  $1 \equiv r, 2 \equiv z, 3 \equiv \theta$  comme il est d'usage dans SYSTUS ; les indices grecs ne prenant que les valeurs 1 et 2, on a

$$\begin{aligned} (\nabla W)_{\alpha\beta\gamma} &= (\nabla W)_{\alpha\beta,\gamma} ; \quad (\nabla W)_{33\alpha} = (\nabla W)_{33,\alpha} \\ (\nabla W)_{133} &= \frac{W_{11} - W_{33}}{r} ; \quad (\nabla W)_{233} = \frac{W_{12}}{r}. \end{aligned}$$

## 2.5 Modèle GLPD : évaluation numérique

Afin de tester l'implémentation du modèle GLPD dans le code SYSTUS, nous allons considérer deux problèmes de structure raisonnablement simples dont la solution peut être obtenue analytiquement : d'une part, une poutre élastoplastique en flexion pure, d'autre part, une sphère creuse élastique sollicitée en traction ou compression hydrostatique. Pour ces deux problèmes, nous détaillons dans un premier temps, les calculs analytiques qui conduisent à l'obtention de la solution exacte en termes de déformations, contraintes et moments. Dans un second temps, les solutions numériques de ces deux problèmes seront comparées aux solutions analytiques. L'étude analytique du premier problème présentera l'intérêt supplémentaire de dégager certaines caractéristiques intéressantes du modèle GLPD. Son intérêt dépasse donc la simple validation du code.

### 2.5.1 Problème de la poutre en flexion, en déformation plane

Nous nous intéressons ici à la réponse d'une section de poutre droite soumise à un moment de flexion en déformation plane dans la direction  $x_3$ . Nous déterminons les expressions analytiques des distributions des contraintes, des déformations et des moments dans les cas *élastique* et *plastique purs*, puis dans le cas élastoplastique, pour la loi de comportement micromorphique présentée dans la section [2.2]. Nous ferons les hypothèses des petites transformations et de la plasticité parfaite ( $\bar{\sigma} \equiv \sigma_0 = Cste$ ). De plus, la compressibilité plastique compliquant le problème au point de rendre inenvisageable une solution explicite, nous supposons la porosité nulle. (Le critère ne se réduit pas dans ce cas, contrairement à ce que l'on pourrait penser, à celui de von Mises, à cause du terme  $Q^2/b^2$  qui vient s'ajouter à  $\sigma_{eq}^2$ ; ce point sera commenté plus loin). Dans ces conditions, les éléments essentiels du modèle GLPD nécessaires à la résolution du problème comprennent :

- un critère de plasticité

$$\Phi(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{M}, f) \equiv \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \left( \Sigma_{eq}^2 + \frac{Q^2}{b^2} \right) - 1 = 0$$

avec

$$Q^2 \equiv A_I M_I + A_{II} M_{II} \quad , \quad M_I \equiv \frac{1}{9} M_{jji} M_{kki} \quad , \quad M_{II} \equiv \frac{3}{2} M'_{ijk} M'_{ijk}$$

( $\mathbf{M}' \equiv$  déviateur de  $\mathbf{M}$  sur les deux premiers indices) ;

- une loi d'élasticité (écrite en petites transformations) :

$$(2.98) \quad \begin{cases} \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^e \\ M_{ijk} &= \frac{b^2}{5} [\lambda (\nabla \varepsilon)_{hhk}^e \delta_{ij} + 2\mu (\nabla \varepsilon)_{ijk}^e - 2\lambda U_k^e \delta_{ij} - 2\mu (U_i^e \delta_{jk} + U_j^e \delta_{ik})] . \end{cases}$$

$$U_i^e = \frac{\lambda(\nabla\varepsilon)_{hhi}^e + 2\mu(\nabla\varepsilon)_{ihh}^e}{2\lambda + 8\mu}.$$

- une loi d'écoulement plastique associée au critère par normalité :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}^p = \eta \frac{3}{\sigma_0} \sigma'_{ij} \\ (\nabla\dot{\varepsilon})_{ijk}^p = \eta \frac{1}{\sigma_0 2b^2} \left( \frac{2}{3} A_I \delta_{ij} M_{mk} + 3A_{II} M'_{ijk} \right) + \delta_{ik} U_j + \delta_{jk} U_i, \end{cases}$$

où

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{\Sigma_{eq}} \dot{\varepsilon}_{eq}^p.$$

### 2.5.1.1 Géométrie, cinématique et conditions aux limites

La géométrie considérée est une poutre à section droite rectangulaire, d'épaisseur  $2h$  dans la direction  $\mathbf{e}_2$  d'un repère orthonormé  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ .

On fait l'hypothèse que la composante  $\varepsilon_{11}$  de la déformation est proportionnelle à  $X_2$  et est de la forme  $\varepsilon_{11} = BX_2$ . La grandeur  $B$  est non nulle et constante par rapport à  $X_2$  mais pas par rapport au temps. Les autres composantes restent nulles.

Nous n'avons pas explicité plus haut les conditions aux limites en efforts associées au modèle GLPD, car elles sont en général compliquées et n'étaient pas nécessaires pour l'implémentation numérique. Elles le deviennent cependant ici puisque nous cherchons une solution analytique. Pour les déterminer (uniquement dans le cas particulier envisagé), nous allons utiliser le principe des puissances virtuelles.

En utilisant les propriétés de symétrie de  $\Sigma$  et de  $\nabla\varepsilon$ , la puissance virtuelle des efforts intérieurs  $\mathcal{P}_i^*$  s'écrit

$$\mathcal{P}_i^* = - \int_{\Omega} [\Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + M_{ijk} (\nabla\varepsilon)_{ijk}^*] d\Omega = - \int_{\Omega} [(\Sigma_{ij} v_{i,j}^* + M_{ijk} v_{i,jk}^*)] d\Omega.$$

Une intégration par parties ne conservant que les termes de bord (l'écriture des termes donnant les conditions d'équilibre n'est pas nécessaire ici vu que l'objectif poursuivi est la recherche des conditions aux limites) donne

$$\mathcal{P}_i^* = - \int_{\partial\Omega} [\Sigma_{ij} v_i^* n_j + M_{ijk} v_{i,j}^* n_k] dS.$$

Nous ne nous intéressons qu'aux bords inférieur et supérieur  $X_2 = \pm h$ , où  $n = \pm \mathbf{e}_2$ . Le deuxième terme s'écrit donc, par exemple en  $X_2 = h$  :

$$M_{ij2} v_{i,j}^* = M_{i12} v_{i,1}^* + M_{i22} v_{i,2}^* + M_{i32} v_{i,3}^*.$$

Sur le bord,  $v_{i,2}^*$  est une variable indépendante de  $v_i^*$ . Mais les autres dérivées  $v_{i,1}^*$  et  $v_{i,3}^*$  sont liées à  $v_i^*$  sur le bord, ce qui entraîne qu'il faut réintégrer par parties. En ne considérant que les termes de

surface dans le principe des puissances virtuelles, on obtient donc

$$-\int_{\partial\Omega} M_{i22} v_{i,2}^* dS + \int_{\partial\Omega} (-\Sigma_{12} v_i^* + M_{i12,1} v_i^* + M_{i32,3} v_i^* dS = 0.$$

En annulant séparément les cofacteurs de  $v_i^*$  et  $v_{i,2}^*$ , on conclut que les conditions aux limites sont

$$(2.99) \quad \begin{cases} \Sigma_{i2} + M_{i12,1} + M_{i32,3} = 0 \\ M_{i22} = 0. \end{cases}$$

Mais, dans ce problème, les moments sont indépendants de  $X_1$  et  $X_3$ ; les conditions aux limites se réduisent donc à

$$(2.100) \quad \Sigma_{i2} = 0 \quad \text{et} \quad M_{i22} = 0.$$

### 2.5.1.2 Solution du problème dans le cas élastique pur

On suppose que le comportement de la poutre est purement élastique et l'on cherche les champs de contraintes, déformations et moments.

*Calcul des contraintes* (supposées linéaires en  $X_2$ ).

La composante  $\Sigma_{22}$  du tenseur des contraintes  $\Sigma$  est linéaire en  $X_2$  et nulle en  $X_2 = \pm h$  (voir les conditions aux limites associées au problème); elle est donc tout simplement nulle partout. Les composantes de cisaillement étant évidemment supposées nulles, les seules composantes non nulles de  $\Sigma$  sont  $\Sigma_{11}$  et  $\Sigma_{33}$ .

La condition de déformation plane entraîne, en utilisant la partie "contrainte" de la loi d'élasticité [2.98]<sub>1</sub>, que

$$\begin{cases} 0 = E\varepsilon_{33} = \Sigma_{33} - \nu(\Sigma_{11} + \Sigma_{22}) \Rightarrow \Sigma_{33} = \nu\Sigma_{11} \\ E\varepsilon_{11} = \Sigma_{11} - \nu(\Sigma_{22} + \Sigma_{33}) = (1 - \nu^2)\Sigma_{11} \\ \Rightarrow \Sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2}\varepsilon_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2}BX_2. \end{cases}$$

En définitive, on a :

$$(2.101) \quad \Sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2}BX_2 \quad ; \quad \Sigma_{33} = \nu\Sigma_{11}.$$

*Calcul des déformations*

Seules les composantes  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{22}$  de la déformation sont différentes de zéro. L'expression de la composante  $\varepsilon_{11}$  est celle imposée par la cinématique du problème. La composante  $\varepsilon_{22}$ , quant à elle, est aussi donnée par la partie "contrainte" de loi d'élasticité :

$$\left\{ \begin{array}{l} E\varepsilon_{22} = \Sigma_{22} - \nu(\Sigma_{11} + \Sigma_{33}) = -\nu(1 + \nu)\Sigma_{11} \\ \\ = -\nu(1 + \nu)\frac{E}{1 - \nu^2}\varepsilon_{11} = -\frac{E\nu}{1 - \nu}\varepsilon_{11} \\ \\ \Rightarrow \varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{1 - \nu}\varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{1 - \nu}BX_2 \end{array} \right.$$

d'où

$$(2.102) \quad \varepsilon_{11} = BX_2 \quad ; \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{1 - \nu}BX_2.$$

On notera que ces contraintes et déformations sont exactement les mêmes que pour le modèle habituel du premier gradient. (Il en est de même du déplacement).

*Calcul des moments*

Nous déterminons d'abord les composantes non nulles du gradient  $\nabla\varepsilon$  de la déformation en coordonnées cartésiennes. Compte tenu de la forme précédente de la déformation  $\varepsilon$ , il ne subsiste que deux composantes non nulles,

$$(2.103) \quad \nabla\varepsilon_{112} = B \quad \text{et} \quad \nabla\varepsilon_{222} = -\frac{\nu}{1 - \nu}B.$$

Il s'ensuit que le vecteur  $\mathbf{U}$  associé au moment dans la loi de comportement est nul. En effet, un calcul de ses composantes utilisant les relations [2.103] donne

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = \frac{\lambda}{2\lambda + 8\mu} \nabla \varepsilon_{hh1} + \frac{2\mu}{2\lambda + 8\mu} \nabla \varepsilon_{1hh} = 0 \\ U_2 = \frac{\lambda}{2\lambda + 8\mu} \nabla \varepsilon_{hh2} + \frac{2\mu}{2\lambda + 8\mu} \nabla \varepsilon_{2hh} \\ = \frac{\lambda}{2\lambda + 8\mu} \left( B - \frac{\nu}{1-\nu} B \right) - \frac{2\mu}{2\lambda + 8\mu} \frac{\nu}{1-\nu} B \\ = \frac{B}{2\lambda + 8\mu} \left( \frac{1-2\nu}{1-\nu} \lambda - \frac{2\nu\mu}{1-\nu} \right) \\ = \frac{\lambda}{2\lambda + 8\mu} \left( \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1-\nu)} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{E}{1+\nu} \right) = 0 \\ U_3 = \frac{\lambda}{2\lambda + 8\mu} \nabla \varepsilon_{hh3} + \frac{2\mu}{2\lambda + 8\mu} \nabla \varepsilon_{3hh} = 0. \end{array} \right.$$

Les composantes du moment ont donc la forme compacte suivante :

$$(2.104) \quad M_{ijk} = \frac{b^2}{5} [\lambda (\nabla \varepsilon)_{hhk} \delta_{ij} + 2\mu \nabla \varepsilon_{ijk}].$$

Or

$$\nabla \varepsilon_{hh1} = 0 \quad ; \quad \nabla \varepsilon_{hh2} = B - \frac{\nu}{1-\nu} B = \frac{1-2\nu}{1-\nu} B \quad ; \quad (\nabla \varepsilon)_{hh3} = 0,$$

donc d'après la relation [2.104],

$$M_{111} = M_{221} = M_{331} = M_{121} = M_{122} = M_{133} = M_{233} = 0.$$

Les composantes restantes du moment  $\mathbf{M}$  ( $M_{112}$ ,  $M_{222}$  et  $M_{332}$ ) sont aussi déduites de l'équation [2.104] :

$$\leftrightarrow \text{pour } M_{112}$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_{112} &= \frac{b^2}{5} (\lambda(\nabla\varepsilon)_{hh2} + 2\mu(\nabla\varepsilon)_{112}) = \frac{b^2}{5} \left( \lambda \frac{1-2\nu}{1-\nu} B + 2\mu B \right) \\ &= \frac{b^2}{5} \left( \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{1-2\nu}{1-\nu} B + \frac{E}{1+\nu} B \right) \\ &= \frac{b^2}{5} \left( \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\nu}{1-\nu} + 1 \right) B \right) \\ &= \frac{b^2}{5} \frac{E}{1-\nu^2} B \end{aligned} \right.$$

↔ pour  $M_{222}$

$$\left\{ \begin{aligned} M_{222} &= \frac{b^2}{5} (\lambda(\nabla\varepsilon)_{hh2} + 2\mu(\nabla\varepsilon)_{222}) = \frac{b^2}{5} \left( \lambda \frac{1-2\nu}{1-\nu} B + 2\mu \left( -\frac{\nu}{1-\nu} \right) B \right) \\ &= \frac{b^2}{5} \left( \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)} B - \frac{E}{1+\nu} \frac{\nu}{1-\nu} B \right) \\ &= 0 \end{aligned} \right.$$

↔ pour  $M_{332}$

$$\left\{ \begin{aligned} M_{332} &= \frac{b^2}{5} (\lambda(\nabla\varepsilon)_{hh2}) = \frac{b^2}{5} \left( \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)} B \right) \\ &= \frac{b^2}{5} \frac{E\nu}{1-\nu^2} B. \end{aligned} \right.$$

En fin de compte, on a

$$(2.105) \quad M_{112} = \frac{b^2}{5} \frac{E}{1-\nu^2} B \quad ; \quad M_{332} = \frac{b^2}{5} \frac{E\nu}{1-\nu^2} B,$$

les autres composantes étant nulles.

On peut facilement vérifier que ces valeurs des composantes du moment respectent à la fois les conditions aux limites  $M_{i22} = 0$ , les relations  $M_{ijj} = 0$  et les équations d'équilibre (les moments sont constants).

### 2.5.1.3 Solution du problème dans le cas plastique pur

Nous cherchons maintenant une solution dans le cas plastique pur, c'est-à-dire en l'absence d'élasticité. Ceci appelle une remarque. Cette solution n'est non triviale que si la totalité de la poutre est



plastique. Pour le modèle habituel du premier gradient, cette circonstance est impossible car l'annulation de toutes les composantes des contraintes sur la fibre moyenne implique nécessairement l'existence d'un noyau élastique. Cela devient possible cependant pour le modèle GLPD, du fait de l'existence de moments  $M_{112}$  et  $M_{332}$  non nuls sur la fibre moyenne, qui peuvent suffire à atteindre le critère. Ce point sera commenté plus loin. Nous faisons donc l'hypothèse que toute la poutre est plastique. De plus, nous rappelons que la porosité  $f$  est supposée nulle. Dans ces conditions, le critère n'est pas réduit à celui de von Mises à cause de la présence du terme  $Q^2/b^2$  mais l'incompressibilité est assurée. On en déduit que :

$$\dot{\varepsilon}_{22} = -\dot{\varepsilon}_{11} = -\dot{B}X_2.$$

Il s'ensuit aussi que

$$(\nabla\dot{\varepsilon})_{112} = \dot{B} \quad , \quad (\nabla\dot{\varepsilon})_{222} = -\dot{B},$$

les autres composantes de  $(\nabla\dot{\varepsilon})$  étant nulles.

Nous cherchons une solution avec contraintes nulles sauf  $\Sigma_{11}$  et  $\Sigma_{33}$ , et moments nuls sauf  $M_{112}$  et  $M_{332}$ , par analogie avec la solution du cas purement élastique. De telles restrictions imposent le respect des relations  $M_{ijj} = 0$ . Les conditions aux limites aussi bien en moments qu'en contraintes sont aussi automatiquement vérifiées.

Dans ces conditions, nous avons

$$(2.106) \quad \begin{cases} M_{m1} &= \frac{1}{3}(M_{111} + M_{221} + M_{331}) = 0 \\ M_{m2} &= \frac{1}{3}(M_{112} + M_{223} + M_{333}) = \frac{1}{3}(M_{112} + M_{223}) \\ M_{m3} &= \frac{1}{3}(M_{113} + M_{223} + M_{333}) = 0, \end{cases}$$

ce qui conduit, en utilisant le loi d'écoulement plastique, à

$$(2.107) \quad \begin{cases} 0 = (\nabla\dot{\varepsilon})_{111} = \eta \frac{1}{\sigma_0^2 b^2} \left( \frac{2}{3} A_I M_{m1} + 3 A_{II} M'_{111} \right) + 2U_1 \Rightarrow U_1 = 0 \\ 0 = (\nabla\dot{\varepsilon})_{221} = \eta \frac{1}{\sigma_0^2 b^2} \left( \frac{2}{3} A_I M_{m1} + 3 A_{II} M'_{221} \right) \quad \text{OK} \\ 0 = (\nabla\dot{\varepsilon})_{121} = \eta \frac{1}{\sigma_0^2 b^2} \left( \frac{2}{3} A_{II} M'_{121} \right) + U_2 \Rightarrow U_2 = 0 \\ 0 = (\nabla\dot{\varepsilon})_{331} = \eta \frac{1}{\sigma_0^2 b^2} \left( \frac{2}{3} A_I M_{m1} + 3 A_{II} M'_{331} \right) \quad \text{OK}; \end{cases}$$

$$(2.108) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{B} = (\nabla \varepsilon)_{112} = \eta \frac{1}{\sigma_0^2 b^2} \left( \frac{2}{3} A_I M_{m2} + 3 A_{II} M'_{112} \right) + 2U_1 \\ \quad = \eta \frac{1}{\sigma_0^2 b^2} \left( \frac{2}{3} A_I M_{m2} + 3 A_{II} (M_{112} - M_{m2}) \right) \\ \quad = \eta \frac{1}{\sigma_0^2 b^2} \left( \left( \frac{2}{3} A_I - 3 A_{II} \right) M_{m2} + 3 A_{II} M_{112} \right) \\ -\dot{B} = (\nabla \dot{\varepsilon})_{222} = \eta \frac{1}{\sigma_0^2 b^2} \left( \frac{2}{3} A_I M_{m2} + 3 A_{II} M'_{222} \right) + 2U_2 \\ \quad = \frac{\eta}{\sigma_0^2 b^2} \left( \frac{2}{3} A_I - 3 A_{II} \right) M_{m2}; \end{array} \right.$$

et finalement

$$(2.109) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = (\nabla \dot{\varepsilon})_{122} = \eta \frac{1}{\sigma_0^2 b^2} 3 A_{II} M'_{112} + U_1 \quad \text{OK} \\ 0 = (\nabla \dot{\varepsilon})_{332} = \eta \left( \frac{1}{\sigma_0^2 b^2} \left( \frac{2}{3} A_I M_{m2} + 3 A_{II} M'_{332} \right) \right) \\ \quad = \frac{\eta}{\sigma_0^2 b^2} \left( \left( \frac{2}{3} A_I - 3 A_{II} \right) M_{m2} + 3 A_{II} M_{332} \right). \end{array} \right.$$

Une combinaison des équations [2.108]<sub>3</sub> et [2.108]<sub>5</sub> donne

$$(2.110) \quad \dot{B} = -\dot{B} + \frac{3\eta}{\sigma_0^2 b^2} A_{II} M_{112} \Rightarrow 2\dot{B} = \frac{3\eta}{\sigma_0^2 b^2} A_{II} M_{112}$$

tandis que celle de [2.108]<sub>5</sub> et [2.109]<sub>2</sub> conduit à

$$(2.111) \quad 0 = -\dot{B} + \frac{3\eta}{\sigma_0^2 b^2} A_{II} M_{332} \Rightarrow \dot{B} = \frac{3\eta}{\sigma_0^2 b^2} A_{II} M_{332}.$$

La somme des équations [2.110]<sub>2</sub> et [2.111]<sub>2</sub> conduit à la relation

$$(2.112) \quad \frac{\eta}{\sigma_0^2 b^2} A_{II} M_{m2} = \frac{\dot{B}}{3}.$$

Or l'équation [2.108]<sub>5</sub> entraîne que

$$(2.113) \quad \frac{\eta}{\sigma_0^2 b^2} \left( -\frac{2}{9} A_I + A_{II} \right) M_{m2} = \frac{\dot{B}}{3}.$$

Les deux équations [2.112] et [2.113] ne sont compatibles que si  $A_I = 0$  : la solution du problème, sous la forme recherchée, n'est acceptable que dans ce cas. Nous faisons donc cette hypothèse à partir de maintenant. (Cette modification de la valeur du paramètre  $A_I$  du modèle GLPD n'est pas gênante puisqu'il ne s'agit ici que de validation du code et non de réalisme physique ; la valeur de  $A_I$  dans le modèle GLPD, soit 0.194, est d'ailleurs assez faible vis-à-vis de celle de  $A_{II}$ , soit 6.108).

Avec cette hypothèse,

$$(2.114) \quad M_{112} = \frac{2\dot{B}}{3\eta A_{II}} \sigma_0^2 b^2 \quad ; \quad M_{332} = \frac{\dot{B}}{3\eta A_{II}} \sigma_0^2 b^2.$$

Les composantes restantes de la loi d'écoulement donnent enfin

$$\begin{cases} 0 = (\nabla \dot{\epsilon})_{133} = \eta \left[ \frac{1}{\sigma_0^2 b^2} 3A_{II} M'_{133} + U_1 \right] & \Rightarrow U_1 = 0 \quad \text{OK} \\ 0 = (\nabla \dot{\epsilon})_{233} = \eta \left[ \frac{1}{\sigma_0^2 b^2} 3A_{II} M'_{233} + U_2 \right] & \Rightarrow U_2 = 0 \quad \text{OK.} \end{cases}$$

La partie "contraintes" de la loi d'écoulement, quant à elle, donne :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{11} = \dot{B} X_2 = 3\eta \frac{\Sigma'_{11}}{\sigma_0^2} = 3 \frac{\eta}{\sigma_0^2} (\Sigma_{11} - \Sigma_m) \\ \dot{\epsilon}_{22} = -\dot{B} X_2 = 3\eta \frac{\Sigma'_{22}}{\sigma_0^2} = 3 \frac{\eta}{\sigma_0^2} (\Sigma_{22} - \Sigma_m) \\ \dot{\epsilon}_{33} = 0 = 3\eta \frac{\Sigma'_{33}}{\sigma_0^2} = 3 \frac{\eta}{\sigma_0^2} (\Sigma_{33} - \Sigma_m) \end{cases}$$

d'où il résulte que

$$\Sigma_{33} = \Sigma_m = \frac{1}{3} (\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{33}) \quad \Rightarrow \quad 3\Sigma_{33} = \Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{33}.$$

Ceci entraîne que

$$\Sigma_{33} = \frac{1}{2} (\Sigma_{11} + \Sigma_{22}) \quad \text{et} \quad \Sigma_m = \frac{1}{3} \frac{3}{2} (\Sigma_{11} + \Sigma_{22}) = \frac{1}{2} (\Sigma_{11} + \Sigma_{22}).$$

On en déduit, compte tenu de ce que  $\Sigma_{22} = 0$ , que

$$(2.115) \quad \Sigma'_{11} = \Sigma'_{22} = \frac{\Sigma_{22}}{2}.$$

Le report dans les équations précédentes donne alors

$$(2.116) \quad \Sigma_{11} = \frac{2\sigma_0^2}{3\eta} \dot{B} X_2 \quad ; \quad \Sigma_{33} = \frac{\sigma_0^2}{3\eta} \dot{B} X_2,$$

les autres composantes du champ de contraintes  $\Sigma$  restant nulles par hypothèse.

Il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de  $\eta$  pour compléter la solution. Pour ce faire, nous écrivons le "critère réduit" (sans les termes proportionnels à la porosité, supposée ici nulle). On va pour

cela commencer par calculer les valeurs intermédiaires  $\Sigma_{eq}^2$  et  $M_{II}$ . On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{eq}^2 = \frac{3}{2}(\Sigma'_{11}{}^2 + \Sigma'_{22}{}^2 + \Sigma'_{33}{}^2) \\ = \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{4}\Sigma_{11}^2 + \frac{1}{4}\Sigma_{22}^2 \right] \\ = \frac{3}{4}\Sigma_{11}^2 \end{array} \right.$$

et

$$(2.117) \quad M_{II} = \frac{3}{2}M'_{ijk}M'_{ijk} = \frac{3}{2}(M'_{112}{}^2 + M'_{222}{}^2 + M'_{332}{}^2).$$

Or  $(\nabla\hat{\epsilon})_{332} = 0$ . On a donc, compte tenu de ce que  $M_{222} = 0$ ,  $A_I = 0$  et  $\mathbf{U} = \mathbf{0}$  (voir ci-dessus) :

$$M_{332} = M_{m2} \Rightarrow M_{332} = M_{m2} = \frac{M_{112}}{2}$$

et donc

$$(2.118) \quad M'_{112} = M_{112} - M_{m2} = \frac{M_{112}}{2} \quad ; \quad M'_{222} = -M_{m2} = -\frac{M_{112}}{2} \quad ; \quad M'_{332} = 0,$$

expressions qui réduisent  $M_{II}$  à

$$(2.119) \quad M_{II} = \frac{3}{2} \left( \frac{M_{112}^2}{4} + \frac{M_{112}^2}{4} \right) = \frac{3}{4}M_{112}^2$$

Le "critère réduit" de plasticité s'écrit alors

$$(2.120) \quad \Sigma_{eq}^2 + \frac{Q^2}{b^2} = \Sigma_{eq}^2 + \frac{A_{II}M_{II}}{b^2} = \frac{3}{4}\Sigma_{11}^2 + \frac{3}{4b^2}A_{II}M_{112}^2 = \sigma_0^2.$$

Compte tenu de [2.116]<sub>1</sub> et [2.114]<sub>1</sub> cette expression devient

$$\frac{1}{3}\sigma_0^2\dot{B}^2X_2^2 + \frac{1}{3}\frac{\sigma_0^2b^2}{A_{II}}\dot{B}^2 = \eta^2$$

soit

$$(2.121) \quad \eta = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\sqrt{\dot{B}^2X_2^2 + \frac{b^2}{A_{II}}\dot{B}^2} = \frac{\sigma_0\dot{B}^2}{\sqrt{3}}\sqrt{X_2^2 + \frac{b^2}{A_{II}}} \quad (> 0).$$

Les valeurs des composantes non nulles des contraintes et moments  $\Sigma_{11}, \Sigma_{33}$ ,  $M_{112}$  et  $M_{332}$ , données ci-dessus en fonction de  $\eta$ , peuvent alors s'exprimer explicitement.

Pour s'assurer de la validité de la solution, il faut encore d'une part vérifier les équations d'équilibre, d'autre part vérifier que le calcul du champ de déplacements est possible à partir des valeurs des composantes de la déformation.

Les équations d'équilibre s'écrivent

$$(2.122) \quad \Sigma_{ij,j} - M_{ijk,jk} = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \Sigma_{1j,j} - M_{1jk,jk} = 0 \\ \Sigma_{2j,j} - M_{2jk,jk} = 0 \\ \Sigma_{3j,j} - M_{3jk,jk} = 0. \end{cases}$$

Dans l'équation [2.122]<sub>1</sub>, il ne subsiste que  $\Sigma_{11,1} - M_{112,12} = 0$  qui est vérifiée puisque les contraintes et les moments sont indépendants de  $X_1$ . La deuxième équation, [2.122]<sub>2</sub>, est identiquement vérifiée. Il ne reste de la troisième équation, [2.122]<sub>3</sub>, que  $\sigma_{33,3} - M_{332,32} = 0$  qui est aussi vraie à cause de l'indépendance des contraintes et des moments vis-à-vis de  $X_3$ .

Envisageons enfin le calcul des déplacements à partir des déformations. Dans ce cas précis, les déformations sont de la forme :

$$(2.123) \quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = BX_2 \\ \varepsilon_{22} = -BX_2 \\ \varepsilon_{12} = 0 \end{cases}$$

donc il faut résoudre

$$(2.124) \quad \begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial X_1} = BX_2 \\ \frac{\partial U_1}{\partial X_1} = -BX_2 \\ \frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} = 0. \end{cases}$$

La solution de [2.124]<sub>1</sub> est

$$U_1 = BX_1X_2 + g(X_2);$$

celle de [2.124]<sub>2</sub> est

$$U_2 = -B\frac{X_2^2}{2} + h(X_1).$$

L'équation [2.124]<sub>3</sub> donne alors

$$BX_1 + g'(X_2) + h'(X_1) = 0,$$

équation qui impose

$$\begin{aligned} g'(X_2) = K \quad , \quad h'(X_1) + BX_1 = -K &\Rightarrow g(X_2) = KX_2 \quad (+Cste), \\ h(X_1) = -KX_1 - \frac{B}{2}X_1^2 &\quad (+Cste) \end{aligned}$$

Il y a donc bien une solution.

Un test intéressant sur la solution trouvée consiste à vérifier que pour  $b \rightarrow 0$  (et bien entendu pour les porosités nulles), nous retombons sur la solution pour le modèle de von Mises : moments nuls,

$$(2.125) \quad \Sigma_{11} = 2\sigma_0/\sqrt{3}, \quad \Sigma_{33} = \sigma_0/\sqrt{3}.$$

Or

$$b \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \eta \rightarrow \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \dot{B} X_2.$$

Les composantes a priori non nulles des contraintes et des moments sont alors données par

$$\Sigma_{11} = \frac{2\sigma_0^2 \sqrt{3}}{3 \sigma_0} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \Sigma_{33} = \frac{\sigma_0^2 \sqrt{3}}{3 \sigma_0} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad ; \quad M_{112} = M_{332} = 0.$$

On retrouve bien la solution correspondante au modèle de von Mises.

### 2.5.2 Solution dans le cas élastoplastique

Nous considérons comme dans le problème précédent, une poutre de section rectangulaire et d'épaisseur  $2h$ , soumise à une sollicitation de type flexion pure, en déformation plane. Nous recherchons maintenant une solution élastoplastique, en faisant comme auparavant l'hypothèse d'une porosité nulle. Nous postulons *a priori* l'existence d'un noyau élastique ( $-c \leq X_2 \leq c$ ), et de deux zones plastiques, l'une en traction ( $c \leq X_2 \leq h$ ), l'autre en compression ( $-h \leq X_2 \leq -c$ ), où  $c$  représente la taille de la zone plastique.

Nous cherchons une solution qui se réduise à celle du cas élastique pur, étudié plus haut, dans la zone élastique, et à celle du cas plastique pur, également étudié plus haut, dans la zone plastique. Pour ceci, il est nécessaire que  $\dot{\epsilon}^e$  soit nul dans la zone plastique, et ceci entraîne que  $\dot{\Sigma}$  doit également y être nul. Ainsi la répartition des contraintes sera fixe dans la zone plastique, seule la taille de cette dernière variera.

En pratique, la répartition des contraintes dans la zone plastique  $|X_2| \geq c$  sera donc celle du cas plastique pur, et les contraintes  $\Sigma_{22}$  et  $\Sigma_{33}$  évolueront linéairement en fonction de  $X_2$  dans la zone élastique, entre les valeurs  $\Sigma_{22}(-c)$  et  $\Sigma_{22}(c)$ , ou  $\Sigma_{33}(-c)$  et  $\Sigma_{33}(c)$ . La différence par rapport au modèle habituel du premier gradient sera que les contraintes ne seront pas uniformes dans la zone plastique (du fait que le multiplicateur plastique dépendra de  $X_2$ ).

#### Conditions à remplir pour qu'il ait une solution du type considéré.

- Premièrement, il faut  $\nu = \frac{1}{2}$ . En effet, dans la zone élastique, on a

$$(2.126) \quad \Sigma_{33} = \nu \Sigma_{11},$$

et dans la zone plastique,

$$(2.127) \quad \dot{\varepsilon}_{33}^p = \dot{\varepsilon}_{33} = 0,$$

qui implique que

$$(2.128) \quad \Sigma_{33} = \frac{1}{2}\Sigma_{11}.$$

Il faut que ces deux valeurs coïncident pour que  $\Sigma_{eq}$  soit continue à la jonction des zones élastique et plastique.

- De plus il faut aussi  $A_I = 0$ . En effet dans la zone plastique, la solution est la même qu'en négligeant l'élasticité; nous avons montré qu'il faut alors prendre  $A_I = 0$ .
- Il faut enfin, comme nous le verrons plus loin, prendre  $A_{II} = 5$ .

Pour l'instant, nous ne faisons pas d'hypothèse sur  $A_{II}$ .

**Zone élastique : champ de contraintes et de moments.** La solution est la même que dans le cas purement élastique [2.5.1.2]. Pour mémoire, nous rappelons les résultats (avec  $\nu = \frac{1}{2}$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{11} = \frac{4E}{3}BX_2 \quad , \quad \Sigma_{33} = \frac{1}{2}\Sigma_{11} \quad , \quad \Sigma_{22} = 0 \\ M_{112} = \frac{4Eb^2}{15}B \quad , \quad M_{332} = \frac{1}{2}M_{112} \quad , \quad M_{222} = 0. \end{array} \right.$$

Ces relations permettent d'envisager la détermination de la taille  $c$  de la zone élastique. Commençons par calculer, à cet effet,  $\Sigma_{eq}^2 + \frac{Q^2}{b^2}$ . Nous avons

$$\Sigma_{eq}^2 = \frac{3}{4}\Sigma_{11}^2 \quad \text{et} \quad M_{II} = \frac{3}{2}M'_{ijk}M'_{ijk} = \frac{3}{4}M_{112}^2$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{eq}^2 + \frac{Q^2}{b^2} = \frac{3}{4} \left( \Sigma_{11}^2 + \frac{A_{II}}{b^2} M_{112}^2 \right) \\ = \frac{3}{4} \frac{16E^2}{9} \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)^2 \left( B^2 X_2^2 + \frac{A_{II}}{25b^2} b^4 B^2 \right) \\ = \frac{3}{4} E^2 B^2 \left( X_2^2 + \frac{A_{II}}{25} b^2 \right). \end{array} \right.$$

Pour trouver la taille  $c$  de la zone élastique, on écrit [2.129] en  $X_2 = \pm c$  :

$$(2.129) \quad \sigma_{eq} = \frac{2}{\sqrt{3}}EB\sqrt{c^2 + \frac{A_{II}}{25}b^2}.$$

Cette relation donne  $c$  en fonction du paramètre de chargement  $B$ . Quand  $B$  augmente,  $c$  diminue, ce qui est tout à fait normal intuitivement. On constate aussi que  $c$  atteint la valeur 0 pour une valeur finie de  $B$ , soit  $B_0$  tel que

$$(2.130) \quad \frac{2}{\sqrt{3}}EB_0\frac{b}{5}\sqrt{A_{II}} = \sigma_0.$$

Pour  $B > B_0$ , il semble y avoir un paradoxe car  $c$  ne peut plus exister. Ceci signifie en fait qu'il n'y a plus alors de zone élastique (le calcul ci-dessus tombe en défaut). La charge-limite est atteinte puisque la zone plastique a totalement envahi la structure et que les contraintes  $y$  sont fixes.

**Zone plastique : calcul du champ de contraintes et des moments.** Le point de départ sera la solution plastique avec élasticité négligée de la section [2.6.3]. On avait

$$\eta = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\dot{B}\sqrt{X_2^2 + \frac{b^2}{A_{II}}}.$$

Les composantes non nulles du champ de contraintes s'expriment alors de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{11} = \frac{2\sigma_0^2}{3\eta}\dot{B}X_2 = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}\frac{X_2}{\sqrt{X_2^2 + b^2/A_{II}}} \\ \Sigma_{33} = \frac{1}{2}\Sigma_{11} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\frac{X_2}{\sqrt{X_2^2 + b^2/A_{II}}}. \end{array} \right.$$

Les composantes non nulles du moment  $\mathbf{M}$ , quant à elles, valent :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{112} = \frac{2\dot{B}}{3\eta A_{II}}\sigma_0^2 b^2 = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}A_{II}}\frac{b^2}{\sqrt{X_2^2 + b^2/A_{II}}} \\ M_{332} = \frac{1}{2}M_{112} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}A_{II}}\frac{b^2}{\sqrt{X_2^2 + b^2/A_{II}}}. \end{array} \right.$$

**Raccordement de la solution avec la zone élastique.** On écrit la continuité de  $\Sigma_{11}$  et  $M_{112}$  en  $X_2 = c$  (la continuité de  $\sigma_{33}$  et  $M_{332}$  est alors automatique avec  $\nu = \frac{1}{2}$ ). Nous avons donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{3}EBc = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}\frac{c}{\sqrt{c^2 + b^2/A_{II}}} \\ \frac{4}{15}Eb^2B = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}A_{II}}\frac{b^2}{\sqrt{c^2 + b^2/A_{II}}} \end{array} \right.$$

ou encore

$$(2.131) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{3}}EB = \frac{\sigma_0}{\sqrt{c^2 + b^2/A_{II}}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}}E\frac{B}{5} = \frac{\sigma_0}{A_{II}}\frac{1}{\sqrt{c^2 + b^2/A_{II}}}. \end{array} \right.$$



La compatibilité de [2.131]<sub>1</sub> et [2.131]<sub>2</sub> exige immédiatement que  $A_{II} = 5$ . Nous faisons désormais cette hypothèse dans la suite du calcul.

Cette modification de la valeur de  $A_{II}$  (d'ailleurs faible,  $A_{II}$  valant 6.108 dans le modèle GLPD) est, comme celle de la valeur  $A_I$ , licite puisqu'il s'agit ici de validation de code et non de réalisme physique. Il ne reste alors plus qu'une seule équation de raccordement

$$(2.132) \quad \frac{2}{\sqrt{3}}EB = \frac{\sigma_0}{\sqrt{c^2 + b^2/A_{II}}}$$

qui est équivalente à l'équation [2.130] donnant  $c$ .

Le calcul des déplacements ne pose pas de problème puisque les déformations sont les mêmes que dans le cas plastique pur.

En conclusion, pour  $\nu = \frac{1}{2}$ ,  $A_I = 0$  et  $A_{II} = 5$ , les champs de contraintes et des moments sont donnés par (en se limitant aux composantes non nulles) :

$$\begin{cases} \Sigma_{11} = \frac{4E}{3}BX_2 & ; & \Sigma_{11} = \frac{1}{2}\Sigma_{11} \\ M_{112} = \frac{4}{15}EBb^2 & ; & M_{332} = \frac{1}{2}M_{112} \end{cases}$$

dans la zone élastique ( $-c \leq X_2 \leq c$ ), dont la limite  $c$  est donnée par

$$(2.133) \quad \frac{2}{\sqrt{3}}EB\sqrt{c^2 + b^2/5} = \sigma_0.$$

Pour

$$B \geq B_0 = \frac{\sqrt{15}}{2} \frac{\sigma_0}{Eb},$$

il n'y a plus de zone élastique et la charge-limite est atteinte. Dans la zone plastique ( $X_2 \leq -c$  ou  $X_2 \geq c$ ), les champs de contraintes et de moments sont donnés par

$$\begin{cases} \Sigma_{11} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{X_2}{\sqrt{X_2^2 + b^2/5}} & ; & \Sigma_{11} = \frac{1}{2}\Sigma_{11} \\ M_{112} = \frac{\sigma_0}{5\sqrt{3}} \frac{b^2}{\sqrt{X_2^2 + b^2/5}} & ; & M_{332} = \frac{1}{2}M_{112}. \end{cases}$$

Quand  $b \rightarrow 0$  on retombe bien sur sur la solution du modèle classique du premier gradient c'est-à-dire :

$$(2.134) \quad \begin{cases} \Sigma_{11} = \frac{4E}{3}BX_2, & M_{112} = 0 & \text{dans la zone élastique} \\ \Sigma_{11} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}\text{sgn}(X_2), & M_{112} = 0 & \text{dans la zone plastique.} \end{cases}$$

### 2.5.3 Discussion : examen de la solution

On peut être étonné de constater que le modèle à gradients proposé ne se réduit pas à celui de von Mises dans le cas  $f \rightarrow 0$ , à  $b$  fixé. En fait cela est dû à ce que dans ces conditions  $\Sigma$  ne se réduit pas à  $\sigma$  puisque c'est une valeur moyenne de  $\sigma$  sur un volume de taille  $b$  finie. Il est normal qu'un modèle qui travaille sur une telle contrainte (en plus des moments) ne soit pas celui de von Mises : les variables considérées ne sont pas les mêmes.

L'examen de la solution de la poutre en flexion va montrer que les prédictions du modèle GLPD, avec  $f \rightarrow 0$  mais  $b$  fixé, réalisent bien une moyenne spatiale des prédictions du modèle de von Mises, c'est-à-dire que quand on prend la solution exacte du problème pour le modèle de von Mises, et que l'on calcule les moyennes de  $\sigma_{ij}$  et  $\sigma_{ij}(x_k - X_k)$  sur un volume sphérique de rayon  $b$ , on tombe sur des  $\Sigma_{ij}$  et des  $M_{ijk}$  qui présentent au moins qualitativement l'allure prédite par le modèle GLPD.

**Cas élastique.** Convenons que  $\sigma$  représente la solution en contrainte du modèle usuel du premier gradient. Les grandeurs considérées par le modèle GLPD sont

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle \quad , \quad M_{ijk} = \langle \sigma_{ij}(x_k - X_k) \rangle$$

Il est bien connu que  $\sigma_{11}$  est linéaire en fonction de  $X_2$ . Quand on moyenne une telle fonction sur un volume sphérique, le résultat trouvé est égal à la valeur  $\sigma_{11}$  au centre de la sphère :

$$\Sigma_{11}(X_2) = \sigma_{11}(X_2).$$

C'est bien le résultat que fournit le modèle GLPD, dont nous avons remarqué qu'il donne les mêmes contraintes que le modèle du premier gradient.

En ce qui concerne le moment, si l'on moyenne le produit de la valeur de  $\sigma_{11}$  donnée par le modèle du premier gradient, soit  $4/3EBx_2$ , et de  $x_2 - X_2$ , sur la sphère de centre  $X_2$ , de rayon  $b$ , on trouve

$$4/15EBb^2.$$

Là encore, c'est exactement le résultat que donne le modèle GLPD pour le moment  $M_{112}$ .

**Cas plastique.** Il apparaît ici certaines différences entre les contraintes et moments fournis par le modèle GLPD et les moyennes correspondantes dans le modèle de von Mises. Dans la solution de Mises,  $\Sigma_{11}$  et  $M_{112}$  atteignent leurs valeurs-limites dans les zones plastiques ( $\pm \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$  et 0 respectivement) pour  $|X_2| \geq c + b$ . En effet dans ces conditions la sphère de centre  $X_2$ , de rayon  $b$  est entièrement contenue dans la zone plastique, donc la contrainte  $\sigma_{11}$  y est constante, égale à  $\pm 2\sqrt{\sigma_0}/\sqrt{3}$ .

Dans la solution du modèle GLPD, ces valeurs-limites ne sont atteintes qu'asymptotiquement, pour  $|X_2| \rightarrow +\infty$ . Mais la distance caractéristique de variation de  $\Sigma_{11}$  et  $M_{112}$  dans la zone plastique est

bien égale à  $b$  (c'est la distance caractéristique de variation de la fonction  $1/(X_2^2 + b^2/5)$ ), comme dans le modèle de von Mises.

Même le fait qu'on trouve, dans la solution GLPD, que la plastification complète est possible, est raisonnable. Le modèle GLPD ne distingue pas les cas subtils où une partie seulement du VRE est plastique : le VRE (point du modèle homogénéisé) est soit élastique, soit plastique. Si dans la solution de von Mises, la taille  $c$  de la zone élastique est très petite par rapport à la taille  $b$  du VRE, il est logique que le modèle homogénéisé conduise à la plasticité.

#### 2.5.4 Résultats numériques et comparaison avec les solutions analytiques : cas de la poutre en flexion

Dans toutes les figures qui vont suivre, les points discrets représenteront les prédictions numériques du modèle et les traits correspondront aux résultats théoriques.

Par raison de symétrie, seule la moitié droite de la poutre rectangulaire est modélisée. Le maillage est constitué de deux rangées de mailles de 10 mailles chacune, soit 20 éléments au total ; il y a 2 mailles dans la direction  $x$  et 10 dans la direction  $y$ . Le chargement est un déplacement imposé dans la direction  $U_x$  aux nœuds de la face latérale droite de la poutre. Ce déplacement est positif dans la moitié supérieure de la poutre et négatif dans la moitié inférieure de la poutre. Le nœud milieu de la face latérale gauche est lié en  $U_x$  et  $U_y$  et tous les nœuds de cette face en  $U_x$ . Le problème est modélisé en déformation plane en option bidimensionnelle.

Le matériau considéré, quant à lui, obéit à une loi de comportement qui est celle de l'acier A508 Cl.3 dont les caractéristiques ont déjà été mentionnées dans le chapitre 1. Nous avons cependant procédé à quelques aménagements sur la loi de comportement pour pouvoir effectuer les comparaisons nécessaires : dans le cas élastique pur, nous avons volontairement exagéré la valeur de la limite d'élasticité à 450 000 MPa pour que le matériau reste élastique pendant tout le temps que durera le calcul ; dans le cas plastique pur, nous faisons l'hypothèse que la poutre reste parfaitement plastique. En élastoplasticité par contre, la loi de comportement est maintenue comme telle même si les solutions analytiques sont obtenues en plasticité parfaite. Cela n'a aucune incidence sur les comparaisons que nous effectuerons. En effet, les déformations plastiques restant très petites (hypothèse des petites perturbations) la solution numérique collera malgré tout avec la solution analytique en plasticité parfaite.

Dans toutes les simulations numériques, la valeur de la longueur caractéristique  $b$  retenue est de 1 mm et la hauteur de la poutre considérée est de 5 mm. Les valeurs de  $A_I$  et  $A_{II}$  utilisées dans l'évaluation de la forme quadratique  $Q^2$  sont celles imposées par les restrictions de la résolution analytique du problème ; elles valent respectivement 0 et 5. Les calculs sont effectués avec de très petites porosi-

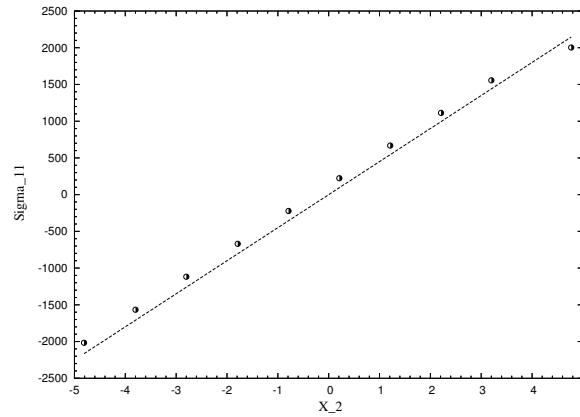


FIG. 2.1 – *Comparaison calculs numériques/théorie dans le cas élastique pur. Répartition de  $\Sigma_{11}$  en fonction de  $X_2$  (trait : calcul analytique ; points : calculs numériques)*

tés, en petites transformations. Les valeurs de  $X_2$  numériques utilisées sont celles qui correspondent à l'ordonnée des points de Gauss 1 et 4 de chaque maille.

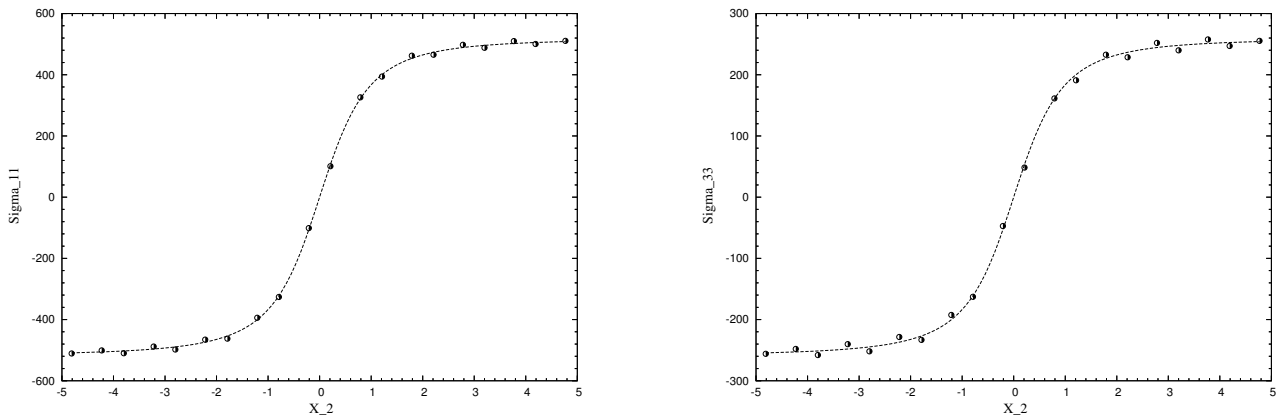


FIG. 2.2 – *Comparaison calculs numériques/théorie dans le cas plastique pur. À gauche, répartition de  $\Sigma_{11}$  (trait : calcul théorique ; points : calculs numériques) en fonction de  $X_2$  ; à droite répartition de  $\Sigma_{33}$  (mêmes conventions)*

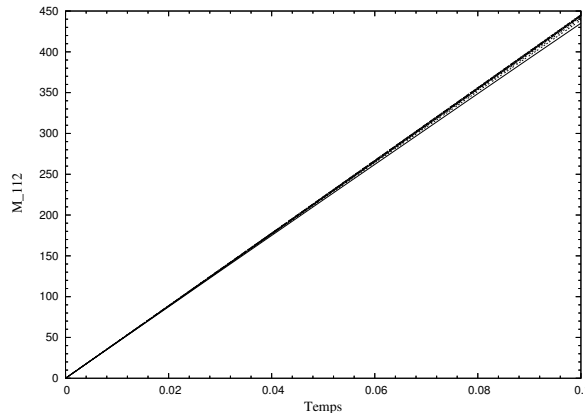


FIG. 2.3 – Evolution de  $M_{112}$  en fonction du temps en divers points

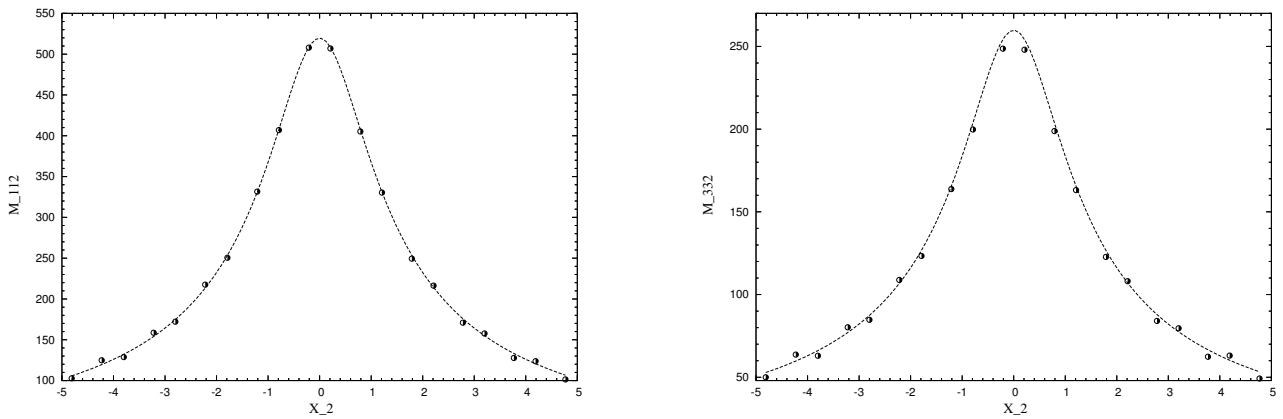


FIG. 2.4 – Comparaison calculs numériques/théorie dans le cas plastique pur. A gauche, répartition de  $M_{112}$  (trait : calcul théorique ; points : calculs numériques) en fonction de  $X_2$  ; à droite répartition de  $M_{332}$  (mêmes conventions)

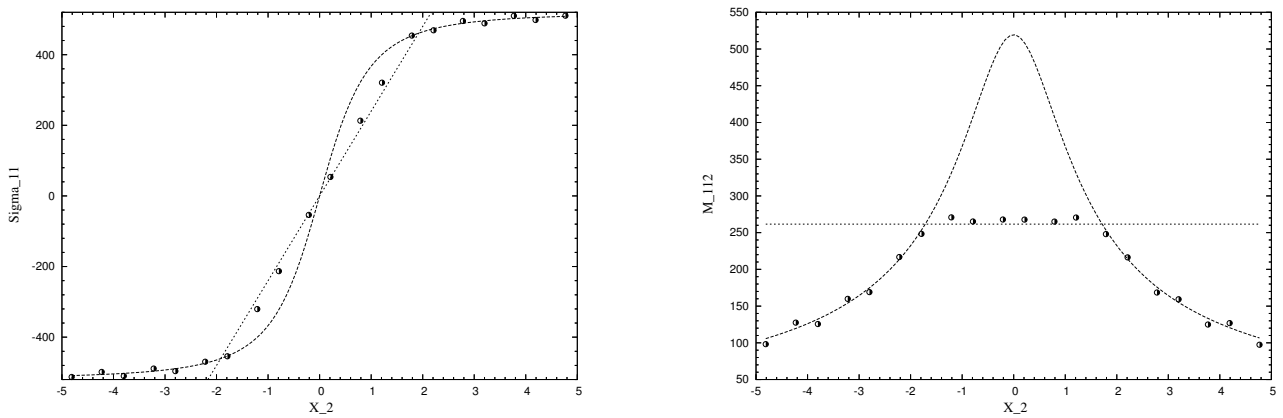


FIG. 2.5 – Comparaison calculs numériques/théorie dans le cas élastoplastique. A gauche, répartition de  $\Sigma_{11}$  (trait : calcul théorique ; points : calculs numériques) en fonction de  $X_2$  ; à droite répartition de  $M_{112}$  (mêmes conventions)

La figure [3.1] compare les résultats numérique et théorique de la répartition de  $\Sigma_{11}$  à un instant donné en fonction de  $X_2$ . L'allure est sans surprise linéaire et les deux courbes coïncident parfaitement.

La figure [2.3] quant à elle indique que la composante  $M_{112}$  du moment  $\mathbf{M}$  est constante à chaque instant sur la poutre conformément aux résultats théoriques trouvés.

Les figures [3.2-gauche] et [3.2-droite] illustrent la répartition, à un instant donné, des composantes  $\Sigma_{11}$  et  $\Sigma_{33}$  du tenseur des contraintes  $\Sigma$  en fonction de  $X_2$  dans le cas plastique pur. Les résultats numériques n'ont pas été obtenus en éliminant l'élasticité, chose impossible, mais en se plaçant dans les conditions où il n'y a plus de zone élastique; on a vu, ci-dessous que tout se passe comme s'il y avait pas d'élasticité (puisque  $\dot{\epsilon}^e = 0$ ). L'accord numérique/analytique est excellent. L'accord est aussi bon en ce qui concerne les moments (voir figure [2.4]).

Les figures [3.4-gauche] et [3.4-droite] montrent les répartitions des mêmes composantes des tenseurs des contraintes et des moments dans le cas élastoplastique. Dans le cas de la solution analytique, on a représenté en pointillés à la fois la solution purement élastique et la solution purement plastique; comme on l'a vu ci-dessus, la solution élastoplastique est identique à la solution purement élastique dans la zone centrale, élastique, et à la solution purement plastique dans les zones externes, plastiques.

La comparaison entre les prédictions numériques du modèle et les résultats théoriques semble très bonne. Les quelques dispersions observées sur les points représentant les prédictions numériques sont le fait d'imperfections numériques n'ayant pas d'incidence significative sur les résultats.

Au vu des résultats, il semble que l'intégration de la loi de comportement et la prise en compte de l'élasticité et de la plasticité soient correctement effectuées.

### 2.5.5 Solution analytique du problème de la sphère creuse en élasticité

Nous considérons dans cette section une sphère creuse de rayons intérieur  $r_i$ , extérieur  $r_e$ . Nous étudions les solutions à symétrie sphérique, en supposant le matériau élastique et en adoptant les hypothèses des petites perturbations (petits déplacements, petites déformations). Avant de passer à la résolution proprement dite du problème, nous faisons la remarque préliminaire suivante qui va être utile pour la suite.

#### 2.5.5.1 Remarque préliminaire

Si  $\mathbf{w}$  est un vecteur radial (de la forme  $\mathbf{w} = w_r(r)\mathbf{e}_r$ ), alors  $\Delta\mathbf{w} = \text{grad}(\text{div}\mathbf{w})$ , c'est-à-dire que

$$(2.135) \quad w_{i,hh} = w_{h,hi}.$$

En effet  $\mathbf{w}$  étant radial, il dérive d'un champ scalaire, soit  $\mathbf{w} = \text{grad}F$  où  $F$  est une primitive de  $w_r(r)$ . On a donc  $\text{rot}\mathbf{w} = \mathbf{0}$ . Mais

$$\text{rot}\text{rot}\mathbf{w} = \mathbf{0} = \text{grad}(\text{div}\mathbf{w}) - \Delta\mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad \Delta\mathbf{w} = \text{grad}(\text{div}\mathbf{w})$$

ce qui établit la propriété annoncée.

#### 2.5.5.2 Résolution

On note  $u_r \equiv u$  le déplacement radial,  $\mathbf{u} \equiv u\mathbf{e}_r$  le vecteur déplacement, et on pose  $\mathbf{w} = \Delta\mathbf{u}$ . On a

$$\varepsilon_{hh,i} = u_{h,hi} = w_i \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ih,h} = \frac{1}{2}(u_{i,hh} + u_{h,ih}) = u_{i,hh} = \Delta u_i$$

soit

$$\varepsilon_{hh,i} = \varepsilon_{ih,h} = w_i.$$

Dans la loi d'élasticité [2.98]<sub>2</sub>, le vecteur  $\mathbf{U}^e$  est donné par

$$U_i^e = \frac{\lambda\varepsilon_{hh,i} + 2\mu\varepsilon_{ih,h}}{2\lambda + 8\mu} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\lambda + 8\mu}w_i.$$

Ceci permet d'obtenir  $M_{ijk}$  sous la forme

$$\frac{5}{\beta^2}M_{ijk} = \lambda\varepsilon_{hh,k}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij,k} - 2\lambda\delta_{ij}U_k - 2\mu\delta_{ik}U_j - 2\mu\delta_{jk}U_i.$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned}
\frac{5}{b^2} M_{ijk,jk} &= \lambda w_{k,ik} + 2\mu \varepsilon_{ij,kjk} - \lambda \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 4\mu} w_{k,ik} - \mu \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 4\mu} w_{j,ji} - \mu \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 4\mu} w_{i,jj} \\
&= \lambda (\Delta w)_i + 2\mu w_{i,kk} - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{\lambda + 4\mu} (\Delta w)_i \\
&= \left( \lambda + 2\mu - \frac{(\lambda + 2\mu)^2}{\lambda + 4\mu} \right) (\Delta w)_i = (\lambda + 2\mu) \left( 1 - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 4\mu} \right) (\Delta w)_i \\
&= 2\mu \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 4\mu} (\Delta w)_i.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{hh} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ij,j} = \lambda \varepsilon_{hh,i} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} = (\lambda + 2\mu) w_i.$$

Les équations d'équilibre peuvent alors se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,j} - M_{ijk,jk} &= (\lambda + 2\mu) w_i - 2\mu \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 4\mu} \frac{b^2}{5} (\Delta \mathbf{w})_i = 0 \\
(2.136) \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{w} - \frac{2\mu}{\lambda + 4\mu} \frac{b^2}{5} (\Delta \mathbf{w}) = 0.
\end{aligned}$$

Or

$$(2.137) \quad \frac{2\mu}{\lambda + 4\mu} = \frac{1 - 2\nu}{2 - 3\nu},$$

donc en posant

$$(2.138) \quad k^2 = \frac{1 - 2\nu}{2 - 3\nu} \frac{b}{5},$$

l'équation [2.136] s'écrit

$$(2.139) \quad \Delta \mathbf{w} - k^2 \mathbf{w} = 0.$$

L'équation [2.139] est assez classique. Elle ressemble fort à celle qui régit les vibrations radiales d'une sphère (mais avec  $-k^2 \mathbf{w}$  au lieu de  $k^2 \mathbf{w}$ ).

Le champ  $\mathbf{w}$ , comme nous l'avons vu, est le gradient d'une fonction  $\Phi$ , soit  $\mathbf{w} = \text{grad } \Phi$  et l'équation [2.139] devient alors

$$(2.140) \quad \Delta \text{grad } \Phi - k^2 \text{grad } \Phi = \text{grad}(\Delta \Phi - k^2 \Phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \Phi - k^2 \Phi = \text{cste}.$$

En ajustant la constante arbitraire dans  $\Phi$ , [2.140]<sub>2</sub> se ramène à  $\Delta \Phi - k^2 \Phi = 0$ . Or en coordonnées sphériques,

$$(2.141) \quad \Delta \Phi = \Phi'' + 2 \frac{\Phi'}{r} = \frac{1}{r} (r \Phi'' + 2 \Phi') = \frac{1}{r} (r \Phi)''.$$



Dans cette expression les symboles ' et '' désignent respectivement  $\frac{\partial}{\partial r}$  et  $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ . L'équation [2.140]<sub>2</sub> s'écrit donc

$$\frac{1}{r}(r\Phi)'' - k^2\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad (r\Phi)'' = k^2r\Phi.$$

Ceci entraîne que

$$\Phi = \alpha \frac{e^{kr}}{r} + \beta \frac{e^{-kr}}{r} \quad \text{et} \quad w \equiv w_r = \Phi'.$$

Le déplacement radial  $u_r \equiv u$  s'obtient ensuite en écrivant que

$$(2.142) \quad w \equiv w_r = (\nabla \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})_{,r} = (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})_{,r} = \left(u' + \frac{2u}{r}\right)'$$

Cette équation implique que

$$\begin{aligned} \left(u' + \frac{2u}{r}\right)' &= \Phi' \quad \Rightarrow \quad u' + \frac{2u}{r} = \frac{1}{r^2}(r^2u)' = \Phi + \gamma = \alpha \frac{e^{kr}}{r} + \alpha \frac{e^{-kr}}{r} + \gamma \\ &\Rightarrow \quad (r^2u)' = \alpha r e^{kr} + \beta r e^{-kr} + \gamma r^2. \end{aligned}$$

Or

$$\int r e^{kr} dr = \frac{r e^{kr}}{k} - \frac{e^{kr}}{k^2} \quad ; \quad \int r e^{-kr} dr = -\frac{r e^{-kr}}{k} - \frac{e^{-kr}}{k^2}.$$

On a donc

$$r^2u = \alpha \left( \frac{r e^{kr}}{k} - \frac{e^{kr}}{k^2} \right) - \beta \left( \frac{r e^{-kr}}{k} + \frac{e^{-kr}}{k^2} \right) + \frac{\gamma r^3}{3} + \delta$$

soit, en redéfinissant  $\gamma$ ,

$$u = \alpha \left( \frac{1}{kr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) e^{kr} - \beta \left( \frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} \right) e^{-kr} + \gamma r + \frac{\delta}{r^2}.$$

Si l'on pose  $x \equiv kr$  et change les définitions de  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ , on a finalement

$$(2.143) \quad u(x) = \alpha \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) e^x + \beta \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) e^{-x} + \gamma x + \frac{\delta}{x^2}.$$

Pour que la forme analytique du déplacement  $u$  soit complète, il est nécessaire de déterminer les valeurs des constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ . Il nous faut décider, à cet effet, des conditions aux limites à imposer. Les plus simples sont, par exemple,  $M_{rrr}(r_i) = 0$ ,  $u_r(r_i) = \Delta_i$ ,  $M_{rrr}(r_e) = 0$  et  $u_r(r_e) = \Delta_e$  (déplacements imposés sur les bords). Il faut, pour écrire ces conditions aux limites, calculer la composante  $M_{rrr}$  du moment  $\mathbf{M}$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= k \frac{du}{dx} = k\alpha e^x \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) - k\beta e^{-x} \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) + k\gamma - 2\frac{k\delta}{x^3} \\ &\Rightarrow \quad \frac{du}{dr} + \frac{2u}{r} = k\alpha \frac{e^x}{x} - k\beta \frac{e^{-x}}{x} + 3k\gamma. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} w &= \frac{d}{dr} \left( \frac{du}{dr} + \frac{2u}{r} \right) = k \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dr} + \frac{2u}{r} \right) \\ &= k^2 \left( \alpha \frac{e^x}{x} - \alpha \frac{e^x}{x^2} + \beta \frac{e^{-x}}{x} + \beta \frac{e^{-x}}{x^2} \right). \end{aligned}$$

De plus

$$\frac{d^2u}{dr^2} = k^2 \left[ \alpha e^x \left( \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} \right) + \beta e^{-x} \left( \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3} + \frac{6}{x^4} \right) + \frac{6\delta}{x^4} \right].$$

On déduit de ces éléments que

$$\begin{aligned} 5 \frac{M_{rrr}}{b^2} &= \lambda w_r + 2\mu(\nabla \varepsilon)_{rrr} - 2\lambda U_r^e - 4\mu U_r^e \\ &= 2\mu \frac{d^2u}{dr^2} + \lambda w - (2\lambda + 4\mu) \frac{\lambda + 2\mu}{2\lambda + 8\mu} w \\ &= 2\mu \left( \frac{du^2}{dr^2} - \chi w \right) \\ &= 2\mu k^2 \left[ \alpha e^x P(x) + \beta e^{-x} Q(x) + \frac{6\delta}{x^4} \right] \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\chi = \frac{1 - 2\nu}{2 - 3\nu}$$

$$P(x) \equiv \frac{1 - \chi}{x} + \frac{-3 + \chi}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} \quad \text{et} \quad Q(x) \equiv \frac{1 - \chi}{x} + \frac{3 - \chi}{x^2} + \frac{6}{x^3} + \frac{6}{x^4}.$$

Posons aussi  $x_i = kr_i$ ,  $x_e = kr_e$  puis

$$P_i \equiv P(x_i) \quad ; \quad P_e \equiv P(x_e) \quad ; \quad Q_i \equiv Q(x_i) \quad \text{et} \quad Q_e \equiv Q(x_e).$$

Les conditions aux limites s'écrivent alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha e^{x_i} P_i + \beta e^{-x_i} Q_i + \frac{6\delta}{x_i^4} = 0 \\ \alpha e^{x_e} P_e + \beta e^{-x_e} Q_e + \frac{6\delta}{x_e^4} = 0 \\ \alpha \left( \frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_i^2} \right) e^{x_i} - \beta \left( \frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_i^2} \right) e^{-x_i} + \gamma x_i + \frac{\delta}{x_i^2} = \Delta_i \\ \alpha \left( \frac{1}{x_e} + \frac{1}{x_e^2} \right) e^{x_e} - \beta \left( \frac{1}{x_e} + \frac{1}{x_e^2} \right) e^{-x_e} + \gamma x_e + \frac{\delta}{x_e^2} = \Delta_e. \end{array} \right.$$

On obtient ainsi un système de 4 équations linéaires à 4 inconnues  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  dont la résolution fournit les expressions analytiques des 4 inconnues en fonction de  $x_i$ ,  $x_e$ ,  $P_i$ ,  $P_e$ ,  $Q_i$ ,  $Q_e$ ,  $\Delta_i$  et  $\Delta_e$ . Ces inconnues sont, en posant,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_e &= (x_i^4 Q_i e^{-x_i} - x_e^4 Q_e e^{-x_e}) \left[ e^{x_i} \left( \chi - 1 + \frac{3 - \chi}{x_i} \right) - e^{x_e} \left( \chi - 1 + \frac{3 - \chi}{x_e} \right) \right] \\
 &\quad - (x_i^4 P_i e^{x_i} - x_e^4 P_e e^{x_e}) \left[ e^{-x_i} \left( \chi - 1 + \frac{-3 + \chi}{x_i} \right) - e^{-x_e} \left( \chi - 1 + \frac{-3 + \chi}{x_e} \right) \right] \\
 (2.144) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{6 \left( \frac{\Delta_i}{x_i} - \frac{\Delta_e}{x_e} \right) (x_i^4 Q_i e^{-x_i} - x_e^4 Q_e e^{-x_e})}{\mathcal{D}_e} \\ \beta = -\frac{6 \left( \frac{\Delta_i}{x_i} - \frac{\Delta_e}{x_e} \right) (x_i^4 P_i e^{x_i} - x_e^4 P_e e^{x_e})}{\mathcal{D}_e} \\ \delta = -\frac{\alpha x_i^4 e^{x_i} P_i + \beta x_i^4 e^{-x_i} Q_i}{6} \\ \gamma = \frac{\Delta_i}{x_i} - \left[ \alpha \left( \frac{1}{x_i^2} - \frac{1}{x_i^3} \right) e^{x_i} - \beta \left( \frac{1}{x_i^2} + \frac{1}{x_i^3} \right) e^{-x_i} - \frac{\delta}{x_i^3} \right]. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Les équations [2.144] et [2.143] définissent complètement l'expression du déplacement.

### 2.5.6 Résolution du problème pour un fluide visqueux

Dans cette section, nous considérons très momentanément un fluide visqueux du second gradient, vérifiant une loi de comportement analogue à [2.53]<sub>1</sub> et [2.53]<sub>2</sub>, en remplaçant les taux de contrainte et de moments  $\check{\Sigma}$  et  $\check{\mathbf{M}}$  par les contraintes et les moments  $\Sigma$ ,  $\mathbf{M}$ . Pour un fluide visqueux à gradients, la solution est formellement exactement la même qu'en élasticité linéarisée, à ceci près qu'elle donne maintenant la vitesse et non plus le déplacement, et en fonction de la coordonnée radiale actuelle et non plus initiale.

### 2.5.7 Résultats numériques et comparaison avec les solutions analytiques : cas de la sphère creuse

En exploitant les conditions de symétrie et d'axisymétrie du problème, on n'étudiera que le quart de la géométrie considérée, modélisé en option bidimensionnelle, ce qui nous conduit à une discrétisation comportant 81 mailles quadrangles. Le rayon extérieur  $r_e$  vaut 10 mm et est le double du rayon intérieur  $r_i$ . A nouveau, la sphère creuse considérée est composée du même matériau que dans le chapitre 1, mais avec une limite d'élasticité très élevée pour que son comportement reste élastique au cours du calcul.

La valeur de la longueur caractéristique  $b$  est de 1 mm Le chargement est un déplacement imposé sur la face extérieure de la sphère creuse, la face intérieure étant maintenue fixe. Les figures [2.15] et [2.7] donnent la répartition du déplacement en fonction du rayon  $R$  pour différentes valeurs de la longueur caractéristique  $b$  dans le cas du problème de la sphère creuse en élasticité petites transformations. Les résultats numériques sont en très bon accord avec les résultats théoriques.

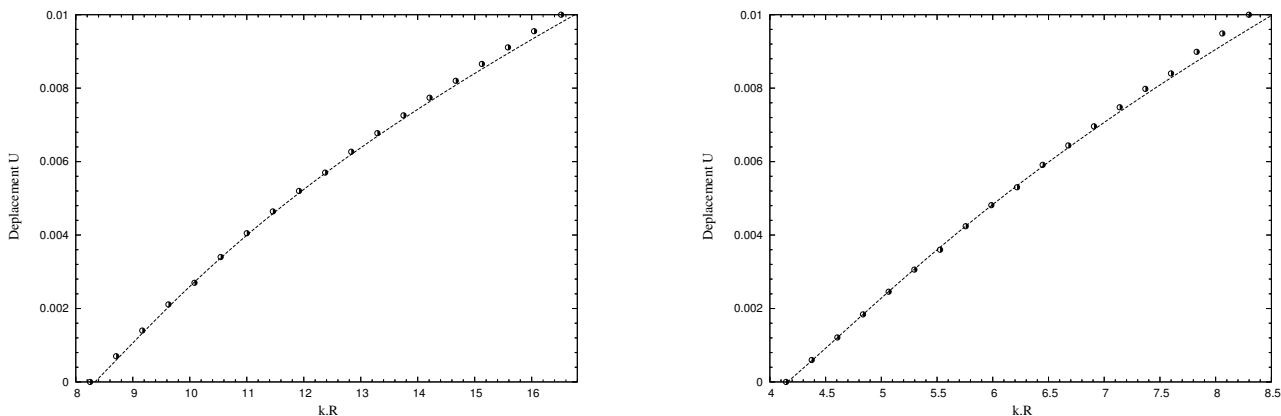


FIG. 2.6 – Comparaison calculs numériques/théorie. Répartition du déplacement sur un rayon de la sphère pour une distance caractéristique  $b = 1$  mm (à gauche),  $b = 2$  mm (à droite). Calcul en élasticité petites transformations. Trait pointillé : théorie ; points : calculs numériques

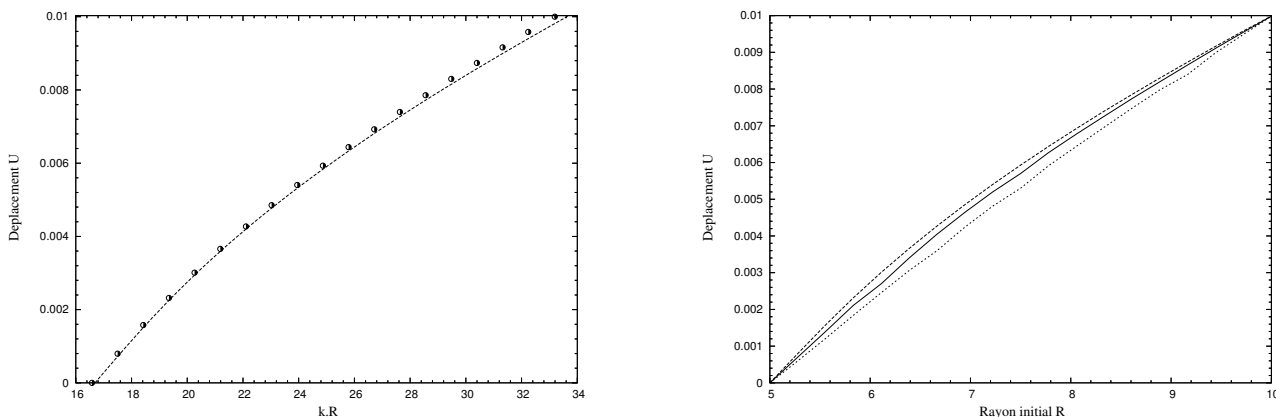


FIG. 2.7 – Comparaison calculs numériques/théorie. A gauche, répartition du déplacement sur un rayon de la sphère pour une distance caractéristique  $b = 0.5$  mm ; à droite, comparaison des courbes correspondant aux trois valeurs de  $b_0$ . Calcul en élasticité petites transformations. Traits : théorie ; points : calculs numériques

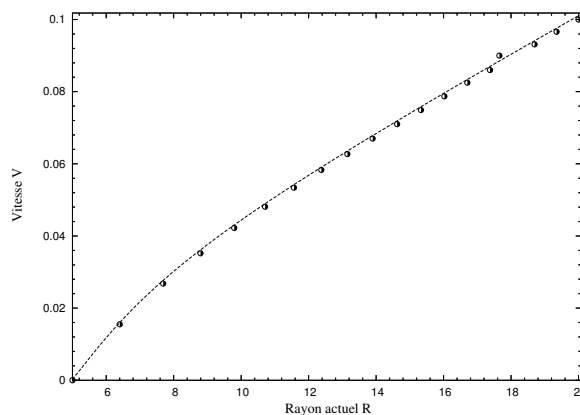


FIG. 2.8 – *Comparaison calculs numériques/théorie. Répartition de la vitesse sur un rayon de la sphère pour une distance caractéristique  $b = 1$  mm. Calcul pour un fluide visqueux grandes transformations. Trait pointillé : théorie ; points : calcul numérique*

Le figure [2.8] illustre quant à elle la répartition de la vitesse sur un rayon de la sphère à un instant donné, dans le cas du problème de la sphère creuse visqueuse en grandes transformations. Là aussi on observe que l'accord entre les calculs analytiques et les résultats numériques est très bon.

Le modèle prend bien donc bien en compte les grandes transformations et les grands déplacements.

Nous nous sommes contentés jusqu'ici de vérifier la validité de l'implémentation numérique du modèle GLPD en comparant les résultats théoriques aux résultats numériques pour deux problèmes de structures. En revanche, aucune démarche pour vérifier le caractère opérationnel du modèle proposé n'a été menée. Cette démarche fait l'objet de la section suivante.

## 2.6 Modèle GLPD : applications

Comme dans le chapitre 1, le but des simulations numériques qui vont suivre est de voir si le modèle GLPD représente une solution convenable au problème de la localisation de l'endommagement dans le modèle de Gurson, en se basant sur ses capacités d'une part à affranchir les résultats numériques de la dépendance vis-à-vis de la taille de maille, d'autre part à reproduire les expériences.

### 2.6.1 Effet de la taille de maille

Pour évaluer la dépendance des résultats vis-à-vis du maillage, on considère la même éprouvette fictive que celle du chapitre 1, pour laquelle on adopte deux discrétisations spatiales : d'abord une taille de maille de  $150 \mu\text{m}$  dans la zone de propagation de la fissure, puis une taille de maille de  $300 \mu\text{m}$  dans la même zone. Dans les deux cas, la taille de maille est augmentée en dehors de la zone de propagation pour réduire la taille des calculs. La distance caractéristique retenue vaut  $2 \text{ mm}$ . Cette valeur semble très élevée par rapport à la taille des éléments dans la zone du ligament. Il était en effet impossible d'obtenir des résultats convergés avec une plus petite distance caractéristique.

Les figures [2.9-gauche] et [2.9-droite] représentent la comparaison des courbes force-déplacement obtenues avec les deux maillages, en utilisant le modèle de Gurson local, puis le modèle GLPD. La conclusion est apparente sur ces graphiques : l'utilisation du modèle GLPD permet de réduire très fortement la dépendance vis-à-vis du maillage observée pour le modèle de Gurson.

Ce calcul pourtant simple *a priori* (maillage grossier dans les deux cas, zone de singularité peu sévère) permet néanmoins de révéler dès à présent une difficulté. Il s'est avéré que l'algorithme utilisé pour réaliser l'intégration numérique n'assure pas toujours la convergence des itérations élastoplastiques pour des valeurs de la distance caractéristique assez proches de la taille des éléments dans la zone de propagation. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'on a été obligé d'utiliser de grandes valeurs de cette distance caractéristique. Pour des géométries plus complexes, cette difficulté se révélera cruciale.

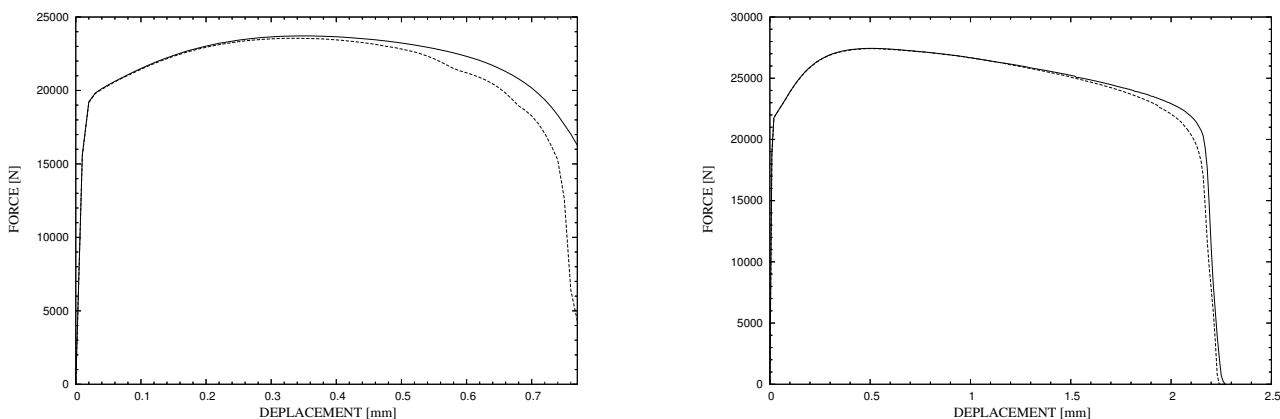


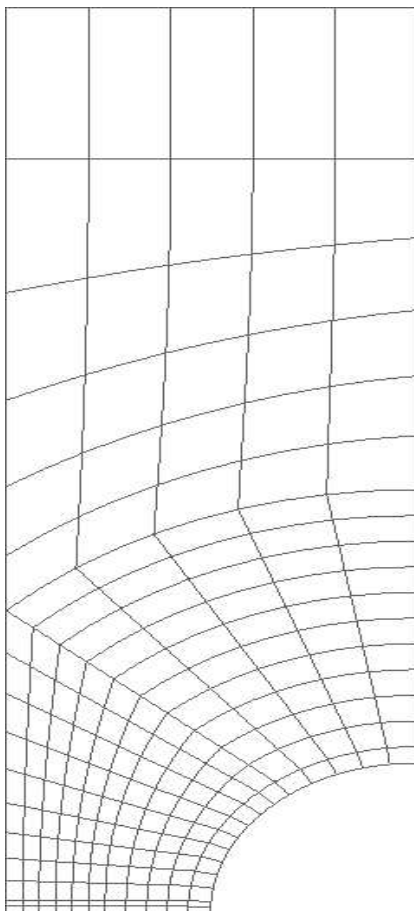
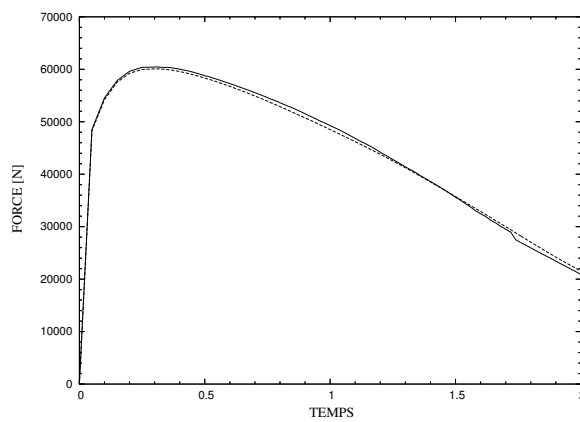
FIG. 2.9 – *Effet de la taille de maille sur la courbe force-déplacement de l'éprouvette pré-fissurée - modèle de Gurson local (à gauche) et modèle GLPD (à droite)*

### 2.6.2 Simulations numériques sur des éprouvettes axisymétriques entaillées

Dans un premier temps, nous n'effectuons pas de comparaison avec des expériences mais nous nous contentons de vérifier que le modèle GLPD, avec une valeur extrêmement petite de  $b$ , donne les mêmes résultats que le modèle de Gurson (pour un même maillage). Il s'agit là d'une dernière vérification de la validité de l'implémentation numérique du modèle GLPD, plus que d'une évaluation critique de ce modèle.

On se propose de simuler un essai de traction sur une éprouvette axisymétrique entaillée en acier A508 Cl.3, pour laquelle les champs mécaniques (contraintes et déformations) sont homogènes dans le ligament. L'ensemble des caractéristiques mécaniques du matériau ainsi que les paramètres d'endommagement ( $f_0, f_c, \delta$ ) ont déjà été fournis au chapitre 1. Le rayon d'entaille de cette éprouvette vaut  $5 \text{ mm}$ . L'éprouvette utilisée est cylindrique. La symétrie et l'axisymétrie du problème sont exploitées pour ne modéliser qu'un quart d'une coupe longitudinale de l'éprouvette. Les nœuds situés dans la section minimale sont bloqués axialement dans la direction  $Y$ , le chargement de l'éprouvette est un déplacement appliqué sur tous les nœuds de la surface supérieure de la portion d'éprouvette discrétisée, variant linéairement dans le temps. Les calculs numériques sont effectués avec des mailles dont les dimensions valent  $0.4 \times 0.2 \text{ mm}^2$  dans la région du ligament, pour une distance caractéristique  $b$  de  $10^{-5} \mu\text{m}$ . Le maillage de cette éprouvette est donné figure [2.10].

La figure [2.11] montre les courbes force-déplacement obtenues avec le modèle de Gurson et le modèle GLPD. Ces simulations indiquent que pour des valeurs de la distance caractéristique tendant vers 0, on retrouve la courbe de charge obtenue avec le modèle de Gurson local.

FIG. 2.10 – *Maillage de l'éprouvette axisymétrique AE5*FIG. 2.11 – *Somme des réactions aux nœuds de la face supérieure de l'éprouvette en fonction du temps-  
trait plein : modèle de Gurson ; trait continu : modèle GLPD*



### 2.6.3 Simulations numériques sur des éprouvettes axisymétriques fissurées

Nous considérons à présent les mêmes éprouvettes axisymétriques fissurées TA15, TA30 et TA50 en acier A508 Cl.3 que dans le chapitre 1, pour lesquelles nous disposons de résultats expérimentaux. Les géométries, les maillages, les chargements et les caractéristiques du matériau sont les mêmes que dans le chapitre 1. Les résultats numériques sont obtenus en utilisant le modèle GLPD avec une distance caractéristique  $b = 550 \mu\text{m}$  pour une taille de maille de  $200 \mu\text{m}$  dans la zone du ligament (pour les deux éprouvettes). La figure [2.12] montre les courbes force-déplacement expérimentale et numérique de l'éprouvette TA15. L'accord entre les deux courbes est acceptable compte tenu des erreurs expérimentales.

Les simulations sur l'éprouvette TA30 n'ont pu être menées à terme. En effet, il était impossible d'obtenir la convergence des calculs au-delà d'un certain niveau de chargement. L'utilisation de la matrice-tangente dont le calcul est détaillé dans l'annexe du chapitre 2 n'a apporté aucune amélioration. En effet, l'expérience numérique montre que l'utilisation de cette matrice-tangente permet une convergence plus rapide (en nombre d'itérations, sinon en temps de calcul) dans les cas où une méthode BFGS classique conduit elle aussi à la convergence, mais n'apporte aucune amélioration dans le cas où la méthode BFGS conduit à une divergence.

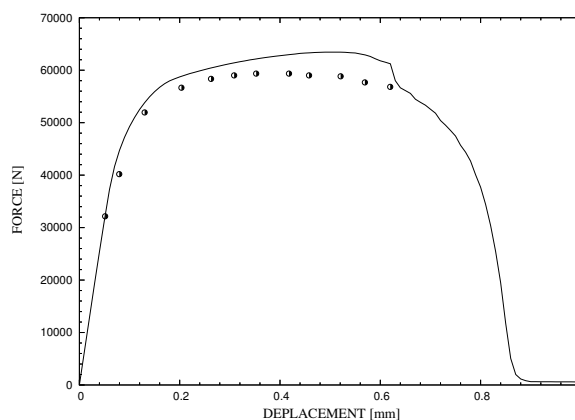


FIG. 2.12 – Comparaison calculs numériques/expériences - Force en fonction du déplacement pour une taille de maille  $200 \mu\text{m}$  et une distance caractéristique  $b = 550 \mu\text{m}$  : calculs numériques par éléments finis avec le modèle GLPD (trait plein) et expériences (points) pour une éprouvette TA15

### 2.6.4 Algorithme élastoplastique, deuxième version

Une variante explicite de l'algorithme élastoplastique ne présentant pas ces ennuis de convergence consiste à fixer les valeurs des incréments de déformation plastique et de son gradient à celles du pas de temps précédent. Ces valeurs deviennent donc connues contrairement à la première version

où elles sont des inconnues du problème. La résolution du problème devient semblable à celle d'un problème purement élastique avec déformations initiales. Si les équations d'équilibre sont résolues sur la configuration à  $t$  et non à  $t + \Delta t$  il ne subsiste que quelques non-linéarités faibles liées aux dérivées objectives des contraintes et des moments. A la convergence on récupère les valeurs convergées des incréments de déformation plastique et de son gradient, qu'on répartit avec l'algorithme de projection sur le critère en parties élastique et plastique. Cet algorithme de projection est lui-même inchangé, l'existence et l'unicité de la solution demeurant donc assurées en vertu du caractère standard généralisé du modèle GLPD à porosité fixée. La modification proposée n'est valide que pour des pas de temps très petits. L'erreur commise sur les incréments de déformation plastique et de son gradient est en  $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$ .

### 2.6.5 Reprise des simulations numériques sur des éprouvettes axisymétriques fissurées

Les figures [2.13] et [2.14] montrent les résultats obtenus avec la seconde version de l'algorithme élastoplastique, comparés avec les résultats expérimentaux sur des éprouvettes axisymétriques fissurées TA15, TA30 et TA50. Les ennuis de convergence rencontrés dans la première version de l'algorithme sont levés et l'accord obtenu entre les prédictions numériques et les expériences est satisfaisant. La méthode est cependant très coûteuse en temps de calcul du fait de l'augmentation du nombre de degré de liberté par nœud et de la nécessité de très petits pas de temps.

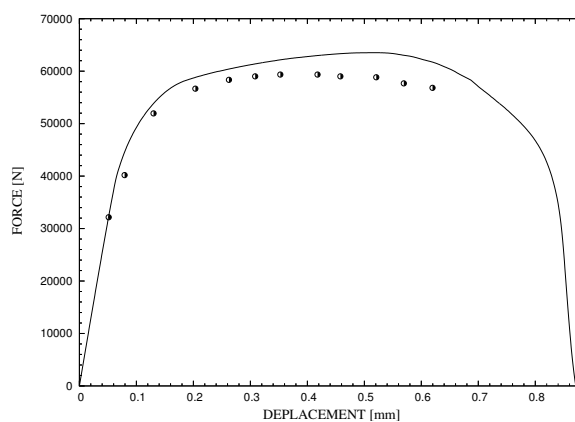


FIG. 2.13 – *Comparaison calculs numériques/expériences - Force en fonction du déplacement pour une taille de maille 200  $\mu\text{m}$  et une longueur caractéristique de 550  $\mu\text{m}$  : calculs numériques par éléments finis avec le modèle GLPD, première version (trait plein), avec le modèle GLPD, deuxième version (trait continu) et expériences (points) pour une éprouvette TA15*

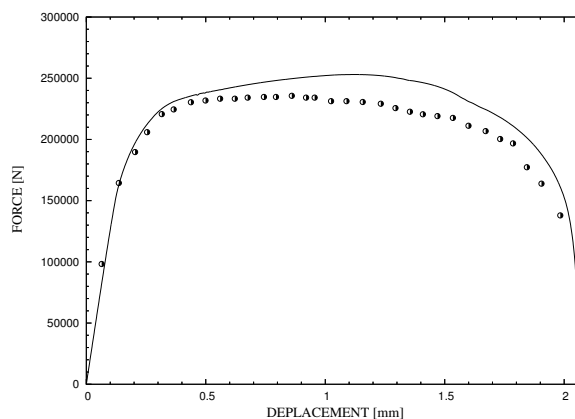


FIG. 2.14 – *Comparaison calculs numériques/expériences - Force en fonction du déplacement pour une taille de maille  $200\ \mu\text{m}$  et une longueur caractéristique  $550\ \mu\text{m}$  : calculs numériques par éléments finis avec le modèle GLPD, deuxième version (trait plein) et expériences (points) pour une éprouvette axisymétrique fissurée TA30*

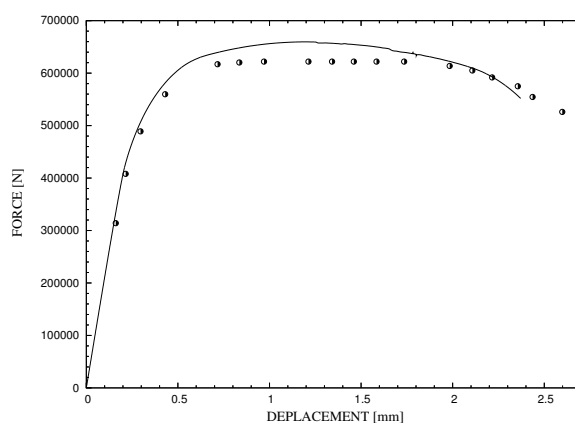


FIG. 2.15 – *Comparaison calculs numériques/expériences - Force en fonction du déplacement pour une taille de maille  $200\ \mu\text{m}$  et une longueur caractéristique de  $550\ \mu\text{m}$  : calculs numériques par éléments finis avec le modèle GLPD, deuxième version (trait plein) et expériences (points) pour une éprouvette axisymétrique fissurée TA50*

## 2.7 Conclusion

Le modèle GLPD a passé avec succès les deux tests imposés : absence d'effet de la taille de maille dans les calculs numériques par éléments finis (contrairement au modèle de Gurson local), et accord acceptable entre les expériences et les prédictions numériques. Il peut donc être considéré comme une solution efficace au problème de la localisation de la déformation et de l'endommagement dans le modèle de Gurson.

Cependant les simulations numériques utilisant ce modèle sont très coûteuses en temps (en raison du nombre élevé de degrés de liberté) et la convergence des itérations élastoplastiques est très difficile à obtenir. En pratique, il a été nécessaire pour obtenir des résultats de rendre l'algorithme élastoplastique explicite et d'utiliser de très petits pas de temps.

Toutes ces raisons sont suffisantes pour ne pas rejeter la solution grossière mais beaucoup plus simple au problème de la localisation de l'endommagement dans le modèle de Gurson qui a été discutée dans le chapitre 1.

---

# Annexe : Calcul de la matrice-tangente du modèle GLPD

---

Le but de cette annexe est de calculer la matrice-tangente pour parer aux graves ennuis de convergence qu'on avait en n'utilisant que la matrice élastique.

## Contraintes, moments, vecteurs réduits

Nous ne calculerons en fait pas en fait tous les termes de la matrice-tangente mais seulement “les plus importants”(ou du moins ce que nous pensons tels!) Ainsi, nous ne prendrons en compte pour le calcul de la matrice-tangente, les variations des contraintes dues à la variation de la température; ceci est en fait rigoureusement licite du fait que cette correction des contraintes est effectuée de manière explicite, en utilisant les contraintes à l'instant  $t$  et non à l'instant  $t + \Delta t$ , et donc indépendante de l'incrément de déplacement  $\Delta \mathbf{U}$  entre ces instants. On ne prendra pas non plus en compte la variation des contraintes due à la dérivation objective dans la loi d'hypélasticité, qui dépend elle bel et bien de  $\Delta \mathbf{U}$  et engendre donc théoriquement une contribution dans la matrice-tangente. De même, on ne tiendra pas compte de l'influence de la géométrie sur les forces résiduelles (dérivation de  $\mathbf{B}$  par rapport à  $\Delta \mathbf{U}$  dans l'intégrale  $\int_{\Omega} \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} dV$ ). On peut résumer tout ceci en disant que le calcul de la matrice-tangente sera effectuée en négligeant les effets des grandes transformations. Ce choix est conforme à celui déjà fait dans Systus pour le calcul de la matrice-tangente pour les modèles de plasticité usuels (sans endommagement), dont l'expérience a démontré l'efficacité.

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}^* = \frac{\sigma^*}{\bar{\sigma}} \quad ; \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \\ \tilde{\mathbf{M}}^* = \frac{\mathbf{M}^*}{\bar{\sigma}} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{M}}^{**} = \frac{\mathbf{M}^{**}}{\bar{\sigma}} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{M}}{\bar{\sigma}} \\ \tilde{\mathbf{U}} = \bar{\sigma}^2 b^2 \frac{\sigma_{eq}^* - \sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} \frac{\mathbf{U}}{\bar{\sigma}}. \end{array} \right.$$

Il est ensuite possible de récrire les équations donnant  $\mathbf{U}$ ,  $\sigma_{eq}$  et  $\varphi$ . Avec ces notations, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{ijk}^{**'} = \tilde{M}_{ijk}^{*'} - \frac{1}{15} \left( \tilde{U}_j \delta_{ik} + \tilde{U}_i \delta_{jk} - \frac{2}{3} \tilde{U}_k \delta_{ij} \right) \\ \tilde{M}_{mk}^{**} = \tilde{M}_{mk}^* - \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} \tilde{U}_k \end{array} \right.$$

et

$$\tilde{U}_i = \frac{\frac{\tilde{M}_{ijj}^{*'}}{\tilde{\sigma}_{eq} + \frac{A_{II}}{5}(\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq})} + \frac{\tilde{M}_{mi}^*}{\tilde{\sigma}_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I(\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq})}}{\frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu}} \equiv \tilde{U}_i(\tilde{\sigma}_{eq}, \tilde{\sigma}^*, \tilde{\mathbf{M}}^*).$$

$$\frac{10}{45(\tilde{\sigma}_{eq} + \frac{A_{II}}{5}(\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq}))} + \frac{\frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu}}{\tilde{\sigma}_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{9\mu} A_I(\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq})}$$

La valeur de  $\tilde{U}_i$  dépend de  $\varphi$  à travers ses arguments  $\tilde{\sigma}_{eq}$ ,  $\tilde{\sigma}^*$  et  $\tilde{\mathbf{M}}^*$ . De plus,

$$\tilde{\sigma}_{eq} \left[ 1 + \frac{A_I \tilde{M}_I^{**}}{b^2 \left( \tilde{\sigma}_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I(\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq}) \right)^2} + \frac{A_{II} \tilde{M}_{II}^{**}}{\left( b^2 \left( \tilde{\sigma}_{eq} + \frac{A_{II}}{5}(\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$-(1-p) \cos \varphi = 0,$$

$$\frac{6\mu}{(3\lambda + 2\mu)} (\tilde{\sigma}_m^* - \tilde{\sigma}_m) + p(\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq}) \sinh \left( \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_m \right) = 0.$$

Dans la suite, nous poserons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G} = \tilde{\sigma}_{eq} \left( 1 + \frac{A_I \tilde{M}_I^{**}}{b^2 \left( \tilde{\sigma}_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I(\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq}) \right)^2} + \frac{A_{II} \tilde{M}_{II}^{**}}{b^2 \left( \tilde{\sigma}_{eq} + \frac{A_{II}}{5}(\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq}) \right)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ - (1-p) \cos \varphi \\ \mathbf{F} = \frac{6\mu}{(3\lambda + 2\mu)} (\tilde{\sigma}_m^* - \tilde{\sigma}_m) + p(\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq}) \sinh \left( \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_m \right) \end{array} \right.$$

où G et F dépendent respectivement de  $\varphi$ ,  $\tilde{\sigma}_{eq}$ ,  $\tilde{\sigma}^*$ ,  $\tilde{M}^*$  et  $\varphi$ ,  $\tilde{\sigma}^*$ ,  $\tilde{M}^*$ .

Posons aussi

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_1 = \tilde{\sigma}_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I (\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq}) \equiv \mathcal{D}_1(\tilde{\sigma}_{eq}, \tilde{\sigma}^*) \\ \mathcal{D}_2 = \tilde{\sigma}_{eq} + \frac{A_{II}}{45} (\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq}) \equiv \mathcal{D}_2(\tilde{\sigma}_{eq}, \tilde{\sigma}^*) \\ \mathcal{D} = \frac{2}{9} \frac{1}{\mathcal{D}_2} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} \frac{1}{\mathcal{D}_1} \equiv \mathcal{D}(\tilde{\sigma}_{eq}, \tilde{\sigma}^*). \end{array} \right.$$

On a alors

$$\tilde{U}_i = \frac{1}{\mathcal{D}} \left( \frac{\tilde{M}_{ijj}^* '}{\mathcal{D}_2} + \frac{\tilde{M}_{mi}^*}{\mathcal{D}_1} \right).$$

Ce qui permet de réécrire l'expression de  $\mathbf{G}$  de la façon suivante :

$$G = \tilde{\sigma}_{eq} \left( 1 + \frac{A_I \tilde{M}_I^{**}}{b^2 \mathcal{D}_\infty^2} + \frac{A_{II} \tilde{M}_{II}^{**}}{b^2 \mathcal{D}_\epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} - (1-p) \cos \varphi.$$

### Calcul des dérivées

Commençons d'abord, à toute fin utile, par calculer les expressions intermédiaires suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}^*}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}^*} = \frac{3}{4\sigma_{eq}^*} \tilde{\sigma}_{ij}^* ' = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\sigma}_{ij}^* '}{\tilde{\sigma}_{eq}^*} \\ \tilde{M}_{mk}^* = \frac{1}{3} \tilde{M}_{hhk}^* \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}_{mk}^*}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} = \frac{1}{3} \delta_{pq} \delta_{kr} \\ \tilde{M}_{ijj}^* ' = \tilde{M}_{ijj}^* - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tilde{M}_{hhj}^* = \tilde{M}_{ijj}^* - \frac{1}{3} \tilde{M}_{hhi}^* \\ \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}_{ijj}^* '}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} = \frac{1}{2} (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \delta_{jr} - \frac{1}{3} \delta_{pq} \delta_{ir} \\ = \frac{1}{2} \delta_{ip} \delta_{qr} + \frac{1}{2} \delta_{iq} \delta_{pr} + \frac{1}{2} \delta_{pq} \delta_{ir}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} = 1 - \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} = 1 - \frac{A_{II}}{5} \\ \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} = \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I \frac{3 \tilde{\sigma}_{pq}'}{2 \tilde{\sigma}_{eq}^*} \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} = \frac{A_I}{5} \frac{3 \tilde{\sigma}_{pq}'}{2 \tilde{\sigma}_{eq}^*} \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} = -\frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} \frac{1}{\mathcal{D}_\infty^2} \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} - \frac{2}{9} \frac{1}{\mathcal{D}_\epsilon^2} \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} = -\frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} \frac{1}{\mathcal{D}_\infty^2} \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} - \frac{2}{9} \frac{1}{\mathcal{D}_\epsilon^2} \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}}. \end{array} \right.$$

### Dérivées des $\tilde{U}_i$

$\tilde{U}_i$  dépend de  $\tilde{\sigma}_{eq}$ ,  $\tilde{\sigma}^*$  et  $\tilde{\mathbf{M}}^*$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} &= -\frac{1}{\mathcal{D}^2} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \left( \frac{\tilde{M}_{ijj}^*'}{\mathcal{D}_2} + \frac{\tilde{M}_{mi}^*}{\mathcal{D}_1} \right) - \frac{1}{\mathcal{D}} \left( \frac{\tilde{M}_{ijj}^*'}{\mathcal{D}_\epsilon^2} \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} + \frac{\tilde{M}_{mi}^*}{\mathcal{D}_\infty^2} \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \right) \\ &= -\left( \frac{1}{\mathcal{D}^2 \mathcal{D}_2} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} + \frac{1}{\mathcal{D} \mathcal{D}_\epsilon^2} \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \right) \tilde{M}_{ijj}^*' - \left( \frac{1}{\mathcal{D}^2 \mathcal{D}_1} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} + \frac{1}{\mathcal{D} \mathcal{D}_\infty^2} \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \right) \tilde{M}_{mi}^* \quad ; \\ \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} &= -\left( \frac{1}{\mathcal{D}^2 \mathcal{D}_2} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} + \frac{1}{\mathcal{D} \mathcal{D}_\epsilon^2} \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} \right) \tilde{M}_{ijj}^*' - \left( \frac{1}{\mathcal{D}^2 \mathcal{D}_1} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} + \frac{1}{\mathcal{D} \mathcal{D}_\infty^2} \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} \right) \tilde{M}_{mi}^* \quad \text{et} \\ \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} &= \frac{1}{\mathcal{D}} \left( \frac{1}{\mathcal{D}_1} \frac{\partial \tilde{M}_{mi}^*}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} + \frac{1}{\mathcal{D}_2} \frac{\partial \tilde{M}_{ijj}^*}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{D}} \left[ \frac{1}{\mathcal{D}_1} \frac{1}{3} \delta_{pq} \delta_{kr} + \frac{1}{\mathcal{D}_2} \left( \frac{1}{2} \delta_{ip} \delta_{qr} + \frac{1}{2} \delta_{iq} \delta_{pr} + \frac{1}{2} \delta_{pq} \delta_{ir} \right) \right]. \end{aligned}$$

### Dérivées des $\tilde{M}_{ijk}^{**'}$ et $\tilde{M}_{mk}^{**}$

$\tilde{M}_{ijk}^{**'}$  et  $\tilde{M}_{mk}^{**}$  dépendent de  $(\tilde{\sigma}_{eq}, \tilde{\sigma}^*, \tilde{\mathbf{M}}^*)$ . On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{M}_{ijk}^{**'}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} = -\frac{1}{15} \left( \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \delta_{ik} + \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \delta_{ij} \right) \\ \frac{\partial \tilde{M}_{mk}^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} = -\frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}, \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{M}_{ijk}^{**'}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} = -\frac{1}{15} \left( \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} \delta_{ik} + \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} \delta_{ij} \right) \\ \frac{\partial \tilde{M}_{mk}^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} = -\frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{M}_{ijk}^{**'}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} = \frac{1}{2} (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \delta_{kr} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{pq} \delta_{kr} \\ \quad - \frac{1}{15} \left( \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} \delta_{ik} + \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} \delta_{ij} \right) \\ \frac{\partial \tilde{M}_{mk}^{**}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} = \frac{1}{3} \delta_{pq} \delta_{kr} - \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*}. \end{array} \right.$$

Dérivées des  $\tilde{M}_I^{**}$  et  $\tilde{M}_{II}^{**}$

$\tilde{M}_I^{**}$  et  $\tilde{M}_{II}^{**}$  dépendent de  $(\tilde{\sigma}_{eq}, \tilde{\sigma}^*, \tilde{M}^*)$ . On effectue comme suit leur dérivation

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_I^{**} = \frac{1}{9} \tilde{M}_{hhi}^{**} \tilde{M}_{kki}^{**} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}_I^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} = \frac{2}{9} \tilde{M}_{kki}^{**} \frac{\partial \tilde{M}_{kki}^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} = 2 \tilde{M}_{mk}^{**} \frac{\partial \tilde{M}_{mk}^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \\ \tilde{M}_{II}^{**} = \frac{3}{2} \tilde{M}_{ijk}^{**'} \tilde{M}_{ijk}^{**'} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}_{II}^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} = 3 \tilde{M}_{ijk}^{**'} \frac{\partial \tilde{M}_{ijk}^{**'}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} = -\frac{2}{5} \tilde{M}_{ijj}^{**'} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{M}_I^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} = \frac{2}{9} \tilde{M}_{kki}^{**} \frac{\partial \tilde{M}_{kki}^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} = 2 \tilde{M}_{mk}^{**} \frac{\partial \tilde{M}_{mk}^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} \\ \frac{\partial \tilde{M}_{II}^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} = 3 \tilde{M}_{ijk}^{**'} \frac{\partial \tilde{M}_{ijk}^{**'}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} = -\frac{2}{5} \tilde{M}_{ijj}^{**'} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} \end{array} \right.$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{M}_I^{**}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} = \frac{2}{9} \tilde{M}_{kki}^{**} \frac{\partial \tilde{M}_{kki}^{**}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} = 2 \tilde{M}_{mk}^{**} \frac{\partial \tilde{M}_{mk}^{**}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} \\ \frac{\partial \tilde{M}_{II}^{**}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} = 3 \tilde{M}_{ijk}^{**'} \frac{\partial \tilde{M}_{ijk}^{**'}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} = -\frac{2}{5} \tilde{M}_{ijj}^{**'} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*}. \end{cases}$$

### Dérivées de G

Nous savons que  $G \equiv \mathbf{G}(\varphi, \tilde{\sigma}_{eq}, \tilde{\sigma}^*, \tilde{\mathbf{M}}^*)$ . En posant

$$\mathcal{S} = \left( 1 + \frac{A_I \tilde{M}_I^{**}}{b^2 \mathcal{D}_1^2} + \frac{A_{II} \tilde{M}_{II}^{**}}{b^2 \mathcal{D}_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \equiv \mathcal{S}(\tilde{\sigma}_{eq}, \tilde{\sigma}^*, \tilde{\mathbf{M}}^*) \quad , \quad \text{on a} \quad G = \tilde{\sigma}_{eq} \mathcal{S} - (1-p) \cos \varphi$$

on a

$$G = \tilde{\sigma}_{eq} \mathcal{S} - (1-p) \cos \varphi.$$

Par la suite

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} &= \mathcal{S} + \tilde{\sigma}_{eq} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \\ &= \mathcal{S} + \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{2\mathcal{S}} \left( \frac{A_I}{b^2 \mathcal{D}_\infty^2} \frac{\partial \tilde{M}_I^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} + \frac{A_{II}}{b^2 \mathcal{D}_\epsilon^2} \frac{\partial \tilde{M}_{II}^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} - \frac{2A_I}{b^2 \mathcal{D}_\infty^3} \tilde{M}_I^{**} \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} - \frac{2A_I}{b^2 \mathcal{D}_2^3} \tilde{M}_I^{**} \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \right) \\ \frac{\partial G}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} &= \tilde{\sigma}_{eq} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}} \\ &= \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{2\mathcal{S}} \left( \frac{A_I}{b^2 \mathcal{D}_\infty^2} \frac{\partial \tilde{M}_I^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} + \frac{A_{II}}{b^2 \mathcal{D}_\epsilon^2} \frac{\partial \tilde{M}_{II}^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} - \frac{2A_I}{b^2 \mathcal{D}_1^3} \tilde{M}_I^{**} \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} - \frac{2A_I}{b^2 \mathcal{D}_\epsilon^3} \tilde{M}_I^{**} \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} \right) \\ \frac{\partial G}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} &= \tilde{\sigma}_{eq} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{2\mathcal{S}} \left( \frac{A_I}{b^2 \mathcal{D}_1^2} \frac{\partial \tilde{M}_I^{**}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} + \frac{A_{II}}{b^2 \mathcal{D}_\epsilon^2} \frac{\partial \tilde{M}_{II}^{**}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} \right) \\ \frac{\partial G}{\partial \varphi} &= (1-p) \sin \varphi. \end{aligned} \right.$$

Les dérivées de G permettent d'évaluer celles de  $\tilde{\sigma}_{eq}$  par rapport à  $\varphi$ ,  $\tilde{\sigma}^*$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}^*$

Dérivées de  $\tilde{\sigma}_{eq}$  par rapport à  $\varphi$ ,  $\tilde{\sigma}^*$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}^*$

$$\begin{aligned} G \equiv G(\varphi, \tilde{\sigma}_{eq}, \tilde{\sigma}^*, \tilde{\mathbf{M}}^*) = 0 &\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} d\tilde{\sigma}_{eq} + \frac{\partial G}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial G}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} d\tilde{\sigma}_{pq}^* + \frac{\partial G}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_{pqr}^*} d\tilde{\mathbf{M}}_{pqr}^* = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \varphi} = -\frac{\partial G / \partial \varphi}{\partial G / \partial \tilde{\sigma}_{eq}} ; \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} = -\frac{\partial G / \partial \tilde{\sigma}_{pq}^*}{\partial G / \partial \tilde{\sigma}_{eq}} \\ &; \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_{pqr}^*} = -\frac{\partial G / \partial \tilde{\mathbf{M}}_{pqr}^*}{\partial G / \partial \tilde{\sigma}_{eq}}. \end{aligned}$$

Dérivées de  $\mathbf{F}(\varphi, \tilde{\sigma}^*, \tilde{\mathbf{M}}^*)$

De l'expression de F, on déduit immédiatement les dérivées suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varphi} = \left[ -\frac{6\mu}{(3\lambda + 2\mu)} \tilde{\sigma}_{eq} - \frac{3}{2} p (\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq}) \sinh\left(\frac{3}{2} \tilde{\sigma}_m\right) \right] \frac{d\tilde{\sigma}_m}{d\varphi} \\ \quad + \left[ \frac{6\mu}{(3\lambda + 2\mu)} (\tilde{\sigma}_m^* - \tilde{\sigma}_m) + p \sinh\left(\frac{3}{2} \tilde{\sigma}_m\right) \right] \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} = \frac{2\mu}{(3\lambda + 2\mu)} \delta_{pq} \tilde{\sigma}_{eq} - \frac{3p}{2} \sinh\left(\frac{3}{2} \tilde{\sigma}_m\right) \frac{\tilde{\sigma}_{pq}^{* \prime}}{\tilde{\sigma}_{eq}^*} \\ \quad + \left[ \frac{6\mu}{(3\lambda + 2\mu)} (\tilde{\sigma}_m^* - \tilde{\sigma}_m) + p \sinh\left(\frac{3}{2} \tilde{\sigma}_m\right) \right] \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_{pqr}^*} = \left[ \frac{6\mu}{(3\lambda + 2\mu)} (\tilde{\sigma}_m^* - \tilde{\sigma}_m) + p \sinh\left(\frac{3}{2} \tilde{\sigma}_m\right) \right] \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_{pqr}^*} \end{array} \right.$$

qui permettent de calculer celles de  $\varphi$  par rapport à  $\tilde{\sigma}^*$  et  $\tilde{\mathbf{M}}^*$ .

Dérivées de  $\varphi(\tilde{\sigma}^*; \tilde{\mathbf{M}}^*)$

On a

$$\begin{aligned} F \equiv F(\varphi, \tilde{\sigma}^*, \tilde{\mathbf{M}}^*) = 0 &\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial F}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} d\tilde{\sigma}_{pq}^* + \frac{\partial F}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_{pqr}^*} d\tilde{\mathbf{M}}_{pqr}^* = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} = -\frac{\partial F / \partial \tilde{\sigma}_{pq}^*}{\partial F / \partial \varphi} ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\mathbf{M}}_{pqr}^*} = -\frac{\partial F / \partial \tilde{\mathbf{M}}_{pqr}^*}{\partial F / \partial \varphi}. \end{aligned}$$

Dérivées de  $\tilde{\sigma}_{eq}(\tilde{\sigma}^*; \tilde{\mathbf{M}}^*)$

Nous les noterons  $\frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*}$  et  $\frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{M}_{pqr}^*}$ . On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} = \frac{\partial\tilde{\sigma}_{eq}}{\partial\tilde{\sigma}_{pq}^*} + \frac{\partial\tilde{\sigma}_{eq}}{\partial\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{\sigma}_{pq}^*} \\ \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{M}_{pqr}^*} = \frac{\partial\tilde{\sigma}_{eq}}{\partial\tilde{M}_{pqr}^*} + \frac{\partial\tilde{\sigma}_{eq}}{\partial\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{M}_{pqr}^*}. \end{array} \right.$$

Dérivées de  $\tilde{\sigma}_m(\tilde{\sigma}^*; \tilde{\mathbf{M}}^*)$

On a

$$\frac{\partial\tilde{\sigma}_m}{\partial\tilde{\sigma}_{pq}^*} = \frac{d\tilde{\sigma}_m}{d\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{\sigma}_{pq}^*} \quad ; \quad \frac{\partial\tilde{\sigma}_m}{\partial\tilde{M}_{pqr}^*} = \frac{d\tilde{\sigma}_m}{d\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{M}_{pqr}^*}.$$

Dérivées de  $\tilde{\sigma}'(\tilde{\sigma}^*; \tilde{\mathbf{M}}^*)$

On a

$$\sigma'_{ij} = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\tilde{\sigma}_{eq}^*} \sigma_{ij}^* \Rightarrow \frac{\partial\tilde{\sigma}'_{ij}}{\partial\tilde{\sigma}_{pq}^*} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_{eq}^*} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} \sigma_{ij}^* - \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{(\tilde{\sigma}_{eq}^*)^2} \frac{\partial\tilde{\sigma}_{eq}}{\partial\tilde{\sigma}_{pq}^*} \sigma_{ij}^* + \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\tilde{\sigma}_{eq}^*} \frac{\partial\tilde{\sigma}'_{ij}}{\partial\tilde{\sigma}_{pq}^*}$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{\sigma}_{eq}^*}{\partial\tilde{\sigma}_{pq}^*} &= \frac{3}{2} \frac{\sigma_{pq}^*}{\tilde{\sigma}_{eq}^*} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\tilde{\sigma}'_{ij}}{\partial\tilde{\sigma}_{pq}^*} = \frac{1}{2} (\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}) - \frac{1}{3} \delta_{ij}\delta_{pq} \\ \frac{\partial\tilde{\sigma}'_{ij}}{\partial\tilde{M}_{pqr}^*} &= \frac{1}{\sigma_{eq}^*} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{M}_{pqr}^*} \sigma_{ij}^*. \end{aligned}$$

Il devient possible, à partir de ces dernières équations, de calculer aisément  $\frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial\tilde{\sigma}_{pq}^*}$  et  $\frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial\tilde{M}_{pqr}^*}$ .

Dérivées de  $\tilde{M}_{mk}^{**}(\tilde{\sigma}^*; \tilde{\mathbf{M}}^*)$  et  $\tilde{M}_{ijk}^{\prime**}(\tilde{\sigma}^*; \tilde{\mathbf{M}}^*)$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\tilde{M}_{mk}^{**}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} = \frac{\partial\tilde{M}_{mk}^{**}}{\partial\tilde{\sigma}_{pq}^*} + \frac{\partial\tilde{M}_{mk}^{**}}{\partial\tilde{\sigma}_{eq}} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} \quad ; \quad \frac{D\tilde{M}_{mk}^{**}}{D\tilde{M}_{pqr}^*} = \frac{\partial\tilde{M}_{mk}^{**}}{\partial\tilde{M}_{pqr}^*} + \frac{\partial\tilde{M}_{mk}^{**}}{\partial\tilde{\sigma}_{eq}} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{M}_{pqr}^*} \\ \frac{D\tilde{M}_{ijk}^{\prime**}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} = \frac{\partial\tilde{M}_{ijk}^{\prime**}}{\partial\tilde{\sigma}_{pq}^*} + \frac{\partial\tilde{M}_{ijk}^{\prime**}}{\partial\tilde{\sigma}_{eq}} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} \quad ; \quad \frac{D\tilde{M}_{ijk}^{\prime**}}{D\tilde{M}_{pqr}^*} = \frac{\partial\tilde{M}_{ijk}^{\prime**}}{\partial\tilde{M}_{pqr}^*} + \frac{\partial\tilde{M}_{ijk}^{\prime**}}{\partial\tilde{\sigma}_{eq}} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{M}_{pqr}^*}. \end{array} \right.$$

Dérivées de  $\tilde{M}_{mk} \equiv \tilde{M}_{mk}(\tilde{\sigma}^*; \tilde{M}^*)$

On sait que

$$\tilde{M}_{mk} = R_1 \tilde{M}_{mk}^{**} \quad \text{où} \quad R_1 = \sqrt{\frac{M_I}{M_I^{**}}} = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\tilde{\sigma}_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I (\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq})} = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\mathcal{D}_1}.$$

On en déduit les dérivées suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_1}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}^*} = \frac{1}{\mathcal{D}_1} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} - \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\mathcal{D}_1^2} \left( \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} + \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} \right) \\ \frac{\partial R_1}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} = \frac{1}{\mathcal{D}_1} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{M}_{pqr}^*} - \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\mathcal{D}_1^2} \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{M}_{pqr}^*}. \end{array} \right.$$

Par la suite,

$$\frac{\partial \tilde{M}_{mk}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} = R_1 \frac{D\tilde{M}_{mk}^{**}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} + \frac{\partial R_1}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} M_{mk}^{**} \quad ; \quad \frac{\partial \tilde{M}_{mk}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} = R_1 \frac{D\tilde{M}_{mk}^{**}}{D\tilde{M}_{pqr}^*} + \frac{\partial R_1}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} M_{mk}^{**}.$$

De la même façon, le fait que

$$\tilde{M}'_{ijk} = R_2 \tilde{M}'_{ijk} \quad \text{où} \quad R_2 = \sqrt{\frac{M_{II}}{M_{II}^{**}}} = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\tilde{\sigma}_{eq} + \frac{A_{II}}{5} (\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq})} = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\mathcal{D}_2}$$

conduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_2}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}^*} = \frac{1}{\mathcal{D}_2} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} - \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\mathcal{D}_2^2} \left( \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} + \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} \right) \\ \frac{\partial R_2}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} = \frac{1}{\mathcal{D}_2} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{M}_{pqr}^*} - \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{\mathcal{D}_2^2} \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{M}_{pqr}^*} \end{array} \right.$$

soit

$$\frac{\partial \tilde{M}'_{ijk}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} = R_2 \frac{D\tilde{M}'_{ijk}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} + \frac{\partial R_2}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} M'_{ijk} \quad ; \quad \frac{\partial \tilde{M}'_{ijk}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} = R_2 \frac{D\tilde{M}'_{ijk}}{D\tilde{M}_{pqr}^*} + \frac{\partial R_2}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} M'_{ijk}.$$

On tire facilement de ces équations, les expressions des dérivées :  $\frac{\partial \tilde{M}_{ijk}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*}$  et  $\frac{\partial \tilde{M}_{ijk}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*}$ .

On précise que,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_I = \frac{\tilde{M}_I^{**} \tilde{\sigma}_{eq}^2}{\left( \tilde{\sigma}_{eq} + \frac{3\lambda + 2\mu}{45\mu} A_I (\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq}) \right)^2} = R_1^2 \tilde{M}_I^{**} \\ \tilde{M}_{II} = R_2^2 \tilde{M}_{II}^{**}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{M}_I}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} = 2R_1 \frac{\partial R_1}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} \tilde{M}_I^{**} + R_1^2 \frac{D\tilde{M}_I^{**}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} \\ \frac{\partial \tilde{M}_{II}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} = 2R_2 \frac{\partial R_2}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} \tilde{M}_{II}^{**} + R_2^2 \frac{D\tilde{M}_{II}^{**}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{D\tilde{M}_I^{**}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} = \frac{\partial \tilde{M}_I^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} + \frac{\partial \tilde{M}_I^{**}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} \\ \frac{D\tilde{M}_{II}^{**'}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*} = \frac{\partial \tilde{M}_{II}^{**'}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} + \frac{\partial \tilde{M}_{II}^{**'}}{\partial \tilde{\sigma}_{eq}} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{\sigma}_{pq}^*}. \end{array} \right.$$

### Introduction de l'écroûissage passage aux contraintes non réduites

Nous cherons ici l'équation donnant  $\Delta \bar{\varepsilon}$ , écrites avec des contraintes et moments "réduits". On a

$$(1-f) \frac{\Delta \bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} = \tilde{\sigma}_{eq} \frac{\tilde{\sigma}_{eq}^* - \tilde{\sigma}_{eq}}{3\mu} + 3\tilde{\sigma}_m \frac{\tilde{\sigma}_m^* - \tilde{\sigma}_m}{3\lambda + 2\mu} + \\ + \tilde{M}'_{ijk} \frac{\tilde{M}'_{ijk} - \tilde{M}'_{ijk}}{2\mu b^{2/5}} + 3\tilde{M}_{mk} \frac{\tilde{M}_{mk}^* - \tilde{M}_{mk}}{(3\lambda + 2\mu)b^{2/5}}$$

qui peut encore se mettre sous la forme :

$$(1-f) \frac{\Delta \bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} = \tilde{\sigma}'_{ij} \frac{\tilde{\sigma}'_{ij} - \tilde{\sigma}'_{ij}}{2\mu} + 3\tilde{\sigma}_m \frac{\tilde{\sigma}_m^* - \tilde{\sigma}_m}{3\lambda + 2\mu} + \\ + \tilde{M}'_{ijk} \frac{\tilde{M}'_{ijk} - \tilde{M}'_{ijk}}{2\mu b^{2/5}} + 3\tilde{M}_{mk} \frac{\tilde{M}_{mk}^* - \tilde{M}_{mk}}{(3\lambda + 2\mu)b^{2/5}}$$

Différentions la dernière expression en envisageant des petites variations des  $\tilde{\sigma}_{pq}^*$  et des  $\tilde{M}_{pqr}^*$ . On a l'expression

$$d \left[ (1-f) \frac{\Delta \bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \right] = (1-f) \left[ \frac{d\Delta \bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} - \frac{\Delta \bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}^2} d\bar{\sigma} \right] \\ = \frac{1-f}{\bar{\sigma}} \left( \frac{1}{h} - \frac{\Delta \bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \right) d\bar{\sigma}$$

dans laquelle

$$h = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}}.$$

Il vient que

$$\frac{1-f}{\bar{\sigma}} \left( \frac{1}{h} - \frac{\Delta \bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \right) d\bar{\sigma} = d\tilde{\sigma}'_{ij} \frac{\tilde{\sigma}'_{ij} - \tilde{\sigma}'_{ij}}{2\mu} + 3d\tilde{\sigma}_m \frac{\tilde{\sigma}_m^* - \tilde{\sigma}_m}{3\lambda + 2\mu} \\ + d\tilde{M}'_{ijk} \frac{\tilde{M}'_{ijk} - \tilde{M}'_{ijk}}{2\mu b^{2/5}} + 3d\tilde{M}_{mk} \frac{\tilde{M}_{mk}^* - \tilde{M}_{mk}}{(3\lambda + 2\mu)b^{2/5}} \\ + \tilde{\sigma}'_{ij} \frac{d\tilde{\sigma}'_{ij} - d\tilde{\sigma}'_{ij}}{2\mu} + \frac{3\tilde{\sigma}_m}{3\lambda + 2\mu} (d\tilde{\sigma}_m^* - d\tilde{\sigma}_m) \\ + \tilde{M}'_{ijk} \frac{d\tilde{M}'_{ijk} - d\tilde{M}'_{ijk}}{2\mu b^{2/5}} + 3\tilde{M}_{mk} \frac{d\tilde{M}_{mk}^* - d\tilde{M}_{mk}}{(3\lambda + 2\mu)b^{2/5}}$$

La somme des quatre premiers termes est nulle. En effet, cette somme peut s'écrire

$$d\tilde{\sigma}'_{ij}\Delta\tilde{\varepsilon}^p_{ij} + 3d\tilde{\sigma}_m\Delta\tilde{\varepsilon}^p_m + d\tilde{M}'_{ijk}\Delta(\nabla\tilde{w})^p_{ijk} + 3d\tilde{M}_{mk}(\nabla\tilde{w})^p_{mk} = d\tilde{\sigma}_{ij}\Delta\tilde{\varepsilon}^p_{ij} + d\tilde{M}_{ijk}\Delta(\nabla\tilde{w})^p_{ijk}.$$

Or, le critère de plasticité de Gologanu peut être mis sous forme

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\tilde{\sigma}, \tilde{\mathbf{M}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}d\tilde{\sigma}_{ij} + \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{M}_{ijk}}d\tilde{M}_{ijk} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\tilde{\varepsilon}^p_{ij} = \Delta\tilde{\eta} \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}, \\ \Delta(\nabla\tilde{w})^p_{ijk} = \Delta\tilde{\eta} \left( \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{M}_{ijk}} + \delta_{ik}\tilde{U}_j + \delta_{jk}\tilde{U}_i \right) \end{aligned}$$

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^p_{ij}d\tilde{\sigma}_{ij} + \Delta(\nabla\tilde{w})^p_{ijk}d\tilde{M}_{ijk} = \Delta\tilde{\eta} \left( \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}d\tilde{\sigma}_{ij} + \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{M}_{ijk}}d\tilde{M}_{ijk} + \delta_{ik}\tilde{U}_jd\tilde{M}_{ijk} + \delta_{jk}\tilde{U}_id\tilde{M}_{ijk} \right) = 0$$

car

$$d\tilde{M}_{ijj} = 0.$$

**Dérivées de  $\bar{\sigma}$  par rapport aux  $\tilde{\sigma}^*_{pq}$  et aux  $\tilde{M}^*_{pqr}$**

On a

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1-f}{\bar{\sigma}} \left( \frac{1}{h} - \frac{\Delta\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \right) \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma^*_{pq}} &= \frac{\tilde{\sigma}'_{ij}}{2\mu} \left( \frac{\partial\tilde{\sigma}^*_{ij}}{\partial\tilde{\sigma}^*_{pq}} - \frac{\partial\tilde{\sigma}'_{ij}}{\partial\tilde{\sigma}^*_{pq}} \right) + \frac{3\tilde{\sigma}_m}{3\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial\tilde{\sigma}^*_{m'}}{\partial\tilde{\sigma}^*_{pq}} - \frac{\partial\tilde{\sigma}_m}{\partial\tilde{\sigma}^*_{pq}} \right) \\ &- \frac{\tilde{M}'_{ijk}}{2\mu b^2/5} \frac{\partial\tilde{M}^*_{ijk}}{\partial\tilde{\sigma}^*_{pq}} - 3 \frac{\tilde{M}_{mk}}{(3\lambda + 2\mu)b^2/5} \frac{\partial\tilde{M}_{mk}}{\partial\tilde{\sigma}^*_{pq}} \\ &= \frac{\tilde{\sigma}'_{ij}}{2\mu} \left[ \frac{1}{2}(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{pq} \right] - \frac{1}{6\mu} \frac{D\tilde{\sigma}^2_{eq}}{D\tilde{\sigma}^*_{pq}} \\ &+ \frac{3\tilde{\sigma}_m}{3\lambda + 2\mu} \frac{1}{3}\delta_{pq} - 3 \frac{\tilde{\sigma}_m}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial\tilde{\sigma}_m}{\partial\tilde{\sigma}^*_{pq}} \\ &- \frac{1}{6\mu b^2/5} \frac{\partial\tilde{M}_{II}}{\partial\tilde{\sigma}^*_{pq}} - 3 \frac{\tilde{M}_{mk}}{(3\lambda + 2\mu)b^2/5} \frac{\partial\tilde{M}_{mk}}{\partial\tilde{\sigma}^*_{pq}} \\ &= \frac{\tilde{\sigma}'_{pq}}{2\mu} - \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{3\mu} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{\sigma}^*_{pq}} + \frac{\tilde{\sigma}_m}{3\lambda + 2\mu} \delta_{pq} - 3 \frac{\tilde{\sigma}_m}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial\tilde{\sigma}_m}{\partial\tilde{\sigma}^*_{pq}} \\ &- \frac{1}{6\mu b^2/5} \frac{\partial\tilde{M}_{II}}{\partial\tilde{\sigma}^*_{pq}} - \frac{3}{(3\lambda + 2\mu)b^2/5} \frac{\partial\tilde{M}_I}{\partial\tilde{\sigma}^*_{pq}}. \end{aligned} \right.$$

De la même façon,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1-f}{\bar{\sigma}} \left( \frac{1}{h} - \frac{\Delta \bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \right) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial M_{pqr}^*} &= -\frac{\tilde{\sigma}'_{ij}}{2\mu} \frac{\partial \tilde{\sigma}'_{ij}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} - \frac{3\tilde{\sigma}_m}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial \tilde{\sigma}_m^*}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} \\ &+ \frac{\tilde{M}'_{ij}}{2\mu b^2/5} \left[ \frac{1}{2} (\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}) - \frac{1}{3} \delta_{ij}\delta_{pq} \right] \delta_{kr} \\ &- \frac{\tilde{M}'_{ijk}}{2\mu b^2/5} \frac{\partial \tilde{M}'_{ijk}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} + 3 \frac{\tilde{M}_{mk}}{(3\lambda + 2\mu)b^2/5} \frac{1}{3} \delta_{pq}\delta_{kr} \\ &- 3 \frac{\tilde{M}_{mk}}{(3\lambda + 2\mu)b^2/5} \frac{\partial \tilde{M}_{mk}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} \\ &= -\frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{3\mu} \frac{D\tilde{\sigma}_{eq}}{D\tilde{M}_{pqr}^*} + \frac{\tilde{M}_{mr}}{(3\lambda + 2\mu)b^2/5} \delta_{pq} - 3 \frac{\tilde{\sigma}_m}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial \tilde{\sigma}_m}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} \\ &- \frac{1}{6\mu b^2/5} \frac{\partial \tilde{M}_{II}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} - \frac{3}{(3\lambda + 2\mu)b^2/5} \frac{\partial \tilde{M}_I}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*} + \frac{\tilde{M}'_{pqr}}{2\mu b^2/5}. \end{aligned} \right.$$

Dérivées de  $\bar{\sigma}$  par rapport aux  $\sigma_{pq}^*$  et aux  $M_{pqr}^*$

On détermine ici finalement l'expression des contraintes et moments non normalisés.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &\equiv \bar{\sigma}(\bar{\sigma}^*, \mathbf{M}^*) \equiv \bar{\sigma}\left(\frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}}, \frac{\mathbf{M}^*}{\bar{\sigma}}\right) \\ \Rightarrow d\bar{\sigma} &= \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{pq}^*} \left( \frac{d\sigma_{pq}^*}{\bar{\sigma}} - \frac{\sigma_{pq}^*}{\bar{\sigma}^2} d\bar{\sigma} \right) + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial M_{pqr}^*} \left( \frac{dM_{pqr}^*}{\bar{\sigma}} - \frac{M_{pqr}^*}{\bar{\sigma}^2} d\bar{\sigma} \right) \\ \Rightarrow \left( 1 + \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{pq}^*} \sigma_{pq}^* + \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial M_{pqr}^*} M_{pqr}^* \right) d\bar{\sigma} &= \frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{pq}^*} d\sigma_{pq}^* + \frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial M_{pqr}^*} dM_{pqr}^*. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{pq}^*} &= \frac{\frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{pq}^*}}{1 + \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}^*} \sigma_{ij}^* + \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial M_{ijk}^*} M_{ijk}^*} \\ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial M_{pqr}^*} &= \frac{\frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial M_{pqr}^*}}{1 + \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}^*} \sigma_{ij}^* + \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial M_{ijk}^*} M_{ijk}^*}. \end{aligned} \right.$$



On avait  $\sigma_{ij} \equiv \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{M}^*) \tilde{\sigma}_{ij}(\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{\bar{\sigma}}, \frac{\mathbf{M}^*}{\bar{\sigma}})$ ; et il s'ensuit que

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= d\bar{\sigma} \tilde{\sigma}_{ij} + \bar{\sigma} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial \sigma_{pq}^*} \left( \frac{d\sigma_{pq}^*}{\bar{\sigma}} - \frac{\sigma_{pq}^*}{\bar{\sigma}^2} d\bar{\sigma} \right) + \bar{\sigma} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial M_{pqr}^*} \left( \frac{dM_{pqr}^*}{\bar{\sigma}} - \frac{M_{pqr}^*}{\bar{\sigma}^2} d\bar{\sigma} \right) \\ &= \left( \tilde{\sigma}_{ij} - \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial \sigma_{hk}^*} \frac{\sigma_{hk}^*}{\bar{\sigma}} - \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial M_{hkl}^*} \frac{M_{hkl}^*}{\bar{\sigma}} \right) \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{pq}^*} d\sigma_{pq}^* + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial M_{pqr}^*} dM_{pqr}^* \right) \\ &\quad + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} d\sigma_{pq}^* + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial M_{pqr}^*} dM_{pqr}^*. \end{aligned}$$

Par la suite

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{pq}^*} = \left( \tilde{\sigma}_{ij} - \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial \sigma_{hk}^*} \sigma_{hk}^* - \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial M_{hkl}^*} M_{hkl}^* \right) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{pq}^*} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial M_{pqr}^*} = \left( \tilde{\sigma}_{ij} - \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial \sigma_{hk}^*} \sigma_{hk}^* - \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial M_{hkl}^*} M_{hkl}^* \right) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial M_{pqr}^*} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*}. \end{array} \right.$$

De la même façon,  $M_{ijk} \equiv \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{M}^*) \tilde{M}_{ijk}(\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{\bar{\sigma}}, \frac{\mathbf{M}^*}{\bar{\sigma}})$ ; et on en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M_{ijk}}{\partial \sigma_{pq}^*} = \left( \tilde{M}_{ijk} - \frac{\partial \tilde{M}_{ijk}}{\partial \sigma_{lm}^*} \sigma_{lm}^* - \frac{\partial \tilde{M}_{ijk}}{\partial M_{lmn}^*} M_{lmn}^* \right) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{pq}^*} + \frac{\partial \tilde{M}_{ijk}}{\partial \tilde{\sigma}_{pq}^*} \\ \frac{\partial M_{ijk}}{\partial M_{pqr}^*} = \left( \tilde{M}_{ijk} - \frac{\partial \tilde{M}_{ijk}}{\partial \sigma_{lm}^*} \sigma_{lm}^* - \frac{\partial \tilde{M}_{ijk}}{\partial M_{lmn}^*} M_{lmn}^* \right) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial M_{pqr}^*} + \frac{\partial \tilde{M}_{ijk}}{\partial \tilde{M}_{pqr}^*}. \end{array} \right.$$

**Dérivées de  $\sigma_{ij}$  et des  $M_{ijk}$  par rapport aux  $\Delta\varepsilon_{pq}$  et aux  $\Delta(\nabla W)_{pqr}$**

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Delta\varepsilon_{pq}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{lm}^*} \frac{\partial \sigma_{lm}^*}{\partial \Delta\varepsilon_{pq}} \quad ; \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\Delta(\nabla W)_{pqr}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial M_{lmn}^*} \frac{\partial M_{lmn}^*}{\Delta(\nabla W)_{pqr}} \\ \frac{\partial M_{ijk}}{\partial \Delta\varepsilon_{pq}} = \frac{\partial M_{ijk}}{\partial \sigma_{lm}^*} \frac{\partial \sigma_{lm}^*}{\partial \Delta\varepsilon_{pq}} \quad ; \quad \frac{\partial M_{ijk}}{\Delta(\nabla W)_{pqr}} = \frac{\partial M_{ijk}}{\partial M_{lmn}^*} \frac{\partial M_{lmn}^*}{\Delta(\nabla W)_{pqr}}. \end{array} \right.$$

Deuxième partie

Matériaux Ductiles à Double Population  
de Cavités

---

# Influence de la germination continue de petites cavités sur la croissance et la coalescence des cavités dans les matériaux ductiles poreux à double population de cavités

---

## 3.1 Introduction

Le modèle de Gurson [Gur, 1977] étendu par Tvergaard et Needleman [Tve & Nee, 1984] (modèle GNT) est unanimement considéré comme apte à décrire correctement le comportement macroscopique des métaux ductiles poreux contenant des cavités de même taille. Dans de nombreux matériaux cependant, l'observation expérimentale des faciès de rupture ductile indique la présence de deux "populations" de cavités de tailles différentes. Perrin et Leblond [Per & Leb, 2000] ont montré que la présence de la seconde population de petites cavités accélère très fortement la croissance des grosses cavités de la première population. Leur théorie est en accord avec les observations expérimentales de Marini, Mudry et Pineau [MMP, 1985].

L'approche de Perrin et Leblond [Per & Leb, 2000] de cette question est basée sur le problème-modèle d'une sphère creuse dont la matrice est constituée d'un matériau poreux, et soumise à une traction hydrostatique. La grosse cavité centrale représente la première population de cavités, et la

présence de la seconde population de petites cavités est prise en compte en supposant que la matrice poreuse suit un comportement rigide-parfaitement plastique régi par le modèle GTN. La germination des petites cavités n'a cependant pas été prise en compte dans ce modèle dans un premier temps.

Ce chapitre a pour objet l'extension des travaux de Perrin et Leblond [Per & Leb, 2000] au cas où la germination des petites cavités, très importantes en pratique, est prise en compte. On utilise à cet effet une formule phénoménologique simple proposée par Pineau et Joly [Pin & Jol, 1991] donnant le taux de porosité de la seconde population de cavités provenant de la germination.

Pour commencer, nous évaluons la solution analytique complète du problème à l'instant initial, lorsque la porosité est uniforme dans la matrice. La détermination des contraintes s'effectue en combinant les équations d'équilibre au critère de plasticité. Il devient alors possible de calculer, à l'aide de la loi d'écoulement associée au critère par normalité, l'expression du champ de vitesse. L'équation d'évolution de la porosité de la seconde population de cavités fournit finalement le taux de porosité local dans la matrice.

Nous donnons ensuite certains éléments d'une solution analytique aux instants ultérieurs, lorsque la porosité n'est plus homogène dans la matrice. Il est notamment possible de déterminer analytiquement, à tout instant, le taux de porosité sur le bord de la grosse cavité centrale. Le calcul révèle que ce taux de porosité est plus élevé que celui de la cavité centrale, ce qui signifie que les petites cavités situées près des grosses devraient atteindre beaucoup vite la coalescence que ces dernières. Dans ce cas, une couronne de matière ruinée devrait se former autour de chaque grosse cavité et accélérer par conséquent sa croissance.

Ce mécanisme d'endommagement est ensuite étudié en détail en évaluant numériquement la solution complète du problème-modèle au-delà de l'instant initial. La coalescence des petites cavités est simulée en considérant que le matériau est soudainement complètement ruiné quand la porosité atteint une valeur critique. A chaque pas de temps, on élimine la zone endommagée où la valeur de la porosité excède cette valeur critique, en reportant la condition de bord libre au bord de cette zone pour le pas de temps suivant. Les résultats obtenus confirment entièrement les prédictions qualitatives faites *a priori*.

Enfin, en utilisant la solution analytique complète à l'instant initial et la solution analytique partielle aux instants ultérieurs, on définit un modèle analytique simplifié, "homogénéisé" pour les matériaux ductiles poreux contenant deux populations de cavités, qui reproduit les aspects essentiels de la solution du problème-modèle.

## 3.2 Solution analytique du problème de la sphère creuse à l'instant initial

### 3.2.1 Présentation du problème

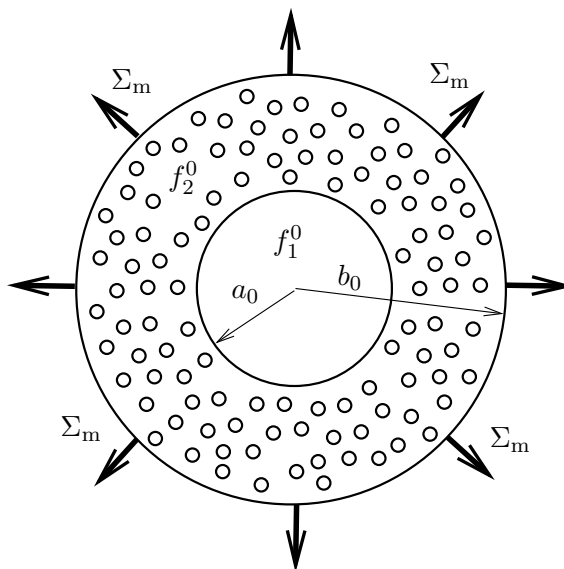


FIG. 3.1 – *Problème modèle considéré*

On considère une sphère creuse (figure [3.1]), de rayons intérieur et extérieur  $a_0$  et  $b_0$ , dont la matrice est constituée d'un matériau plastique contenant une seconde population de petites cavités. La porosité initiale de la matrice (rapport du volume des petites cavités sur le volume total de la matrice) est supposée uniforme, égale à  $f_2^0$ . Afin de définir la porosité  $f_1^0$  due à la cavité centrale, nous postulons que la porosité totale de la sphère creuse est égale à la somme  $f_1^0 + f_2^0$ , cette porosité totale étant définie comme le volume de toutes les cavités (grande et petites) rapporté au volume total de la sphère. Un calcul simple [Leb & Per, 1990] montre alors que le postulat d'additivité des porosités conduit à la définition suivante de la porosité  $f_1^0$  :

$$(3.1) \quad f_1^0 \equiv (1 - f_2^0) \frac{a_0^3}{b_0^3}.$$

Le bord de la cavité centrale est libre de traction. De plus, cette sphère est soumise sur son bord extérieur à une traction hydrostatique ( $\Sigma \equiv \Sigma_m \mathbf{1}, \Sigma_m > 0$ ). Les conditions aux limites s'écrivent donc, en coordonnées sphériques :

$$(3.2) \quad \sigma_{rr}(r = a_0) = 0 \quad ; \quad \sigma_{rr}(r = b_0) = \Sigma_m.$$

La matrice métallique est rigide-parfaitement plastique et obéit au critère suivant :

$$(3.3) \quad \frac{\sigma_{\text{eq}}^2}{\sigma_0^2} + q f_2^0 \exp\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 \leq 0$$

où  $\sigma_{\text{eq}}$  et  $\sigma_m$  désignent respectivement les contraintes locales équivalente et moyenne,  $\sigma_0$  la limite d'élasticité en traction simple, et  $q$  le paramètre de Tvergaard [Tve, 1981] pour lequel on adoptera ici la valeur  $q = 4/e \approx 1.47$  déterminée par Perrin & Leblond par des schémas différentiel et autocohérent [Leb & Per, 1990]. L'équation [3.3] représente une bonne approximation du critère original de Gurson lorsque la porosité  $f_2^0$  est faible (ce qui est toujours réalisé en pratique) et la triaxialité élevée (ce qui est le cas ici sauf dans un voisinage immédiat de la grosse cavité).

Le taux de déformation local  $\mathbf{d}$  est donné par la loi d'écoulement associée au critère [3.3] par la propriété de normalité. Le taux de porosité dans la matrice métallique, provenant à la fois de la croissance et de la germination des cavités, est donné par

$$(3.4) \quad \dot{f}_2 = (1 - f_2^0) \text{tr } \mathbf{d} + A \dot{\epsilon},$$

où  $A$  est un paramètre du matériau et  $\epsilon$  un paramètre scalaire d'écrouissage dont l'évolution est régie par l'équation :

$$(3.5) \quad (1 - f_2^0) \sigma_0 \dot{\epsilon} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}.$$

L'expression du taux de porosité dû à la germination des cavités a été proposée par Pineau et Joly [Pin & Jol, 1991] sur une base expérimentale. Une expression plus élaborée, qui introduit une dépendance du paramètre  $A$  vis-à-vis de la déformation  $\epsilon$ , a été proposée par Chu & Needleman [Chu & Nee, 1980] mais celle que nous utilisons ici semble largement suffisante étant donné l'extrême rareté des mesures de ce paramètre.

Le problème défini ci-dessus peut être résolu analytiquement à l'instant initial, quand la porosité dans la matrice métallique est encore uniforme. Les résultats sont particulièrement simples dans la limite des petites porosités.

### 3.2.2 Champs de contrainte et de déformation

La technique du calcul des champs de contraintes et de déformation a déjà été présentée dans les sections 2 (chapitre II) et 3 (chapitre III) de la thèse de Perrin [Per, 1992]. Nous nous contentons ici de rappeler les éléments qui seront utiles à la résolution du problème de la section [3.2.3].

Cette résolution commence par une combinaison de l'équation d'équilibre radiale et du critère (en supposant que le volume entier est plastique) permettant d'obtenir le champ de contraintes. En

coordonnées sphériques,  $r, \theta, \phi$ , on trouve, dans la limite des petites porosités,

$$(3.6) \quad \begin{cases} v \equiv \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{\sigma_0} = \frac{1}{2\mu} \left( -\mu - 1 + \sqrt{\mu^2 + 6\mu + 1} \right) & , \quad \mu \equiv f_2^0 \frac{r^3}{a_0^3} \\ u \equiv \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0} = \frac{2}{3} \left( -v + \log \frac{1-v^2}{qf_2^0} \right) . \end{cases}$$

De plus,  $\Sigma_m = \sigma_{rr}(r = b_0) = \sigma_0 u_b$  où  $u_b \equiv u(r = b_0)$ .

Le champ de vitesse (radial)  $\mathcal{U}$  est déduit de la loi d'écoulement associée au critère par normalité. On obtient l'équation différentielle

$$(3.7) \quad \frac{d\mathcal{U}}{\mathcal{U}} + 2 \frac{dr}{r} + \frac{dv}{v} = 0$$

dont l'intégration en temps donne le champ  $\mathcal{U}$  :

$$(3.8) \quad \mathcal{U} r^2 v = Cst. \equiv \dot{a} a_0^2 v_a \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U} = \frac{a_0^2 \dot{a} v_a}{r^2 v}.$$

où  $v_a \equiv v(r = a_0)$ .

### 3.2.3 Taux de croissance des cavités

Il devient alors possible de déterminer le taux de porosité dans la matrice. A cet effet, on calcule  $\dot{\epsilon}$ . En utilisant l'expression des contraintes réduites [3.6], la relation [3.5] donne :

$$(3.9) \quad \begin{aligned} (1 - f_2^0) \sigma_0 \dot{\epsilon} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \sigma_{rr} d_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta} d_{\theta\theta} \\ \Rightarrow (1 - f_2^0) \dot{\epsilon} &= 3u d_m + 2v \frac{\mathcal{U}}{r} \\ &= u \left( \frac{d\mathcal{U}}{dr} + 2 \frac{\mathcal{U}}{r} \right) + 2v \frac{\mathcal{U}}{r} \\ &= \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a_0} \frac{1 - v_a}{1 + v_a} \left( 1 + \frac{\mu + 3}{\sqrt{\mu^2 + 6\mu + 1}} \right) u + 2\dot{a} a_0^2 \frac{v_a}{r^3} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'expression [3.8] de  $\mathcal{U}$ . On en déduit le taux de porosité  $\dot{f}_2$  dans la matrice :

$$\begin{aligned} \dot{f}_2 &= \dot{f}_{2c} + \dot{f}_{2g} = 3(1 - f_2^0) d_m + A \dot{\epsilon} \\ &= \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a_0} \frac{1 - v_a}{1 + v_a} \left( 1 + \frac{\mu + 3}{\sqrt{\mu^2 + 6\mu + 1}} \right) \left( 1 - f_2^0 + \frac{A u}{1 - f_2^0} \right) \\ &+ 2 \frac{A}{1 - f_2^0} \frac{\dot{a}}{a_0} \frac{a_0^3}{r^3} v_a . \end{aligned}$$

Or par hypothèse,  $f_2^0 \ll 1$ . On a alors  $v_a \approx 1 - 2f_2^0$  et  $\mu \approx f_2^0 \frac{r^3}{a^3}$ , d'où

$$(3.10) \quad \frac{\dot{f}_2/f_2^0}{\dot{a}/a_0} = \left(1 + \frac{\mu + 3}{\sqrt{\mu^2 + 6\mu + 1}}\right) (1 + Au) + \frac{2A}{f_2^0} \frac{a_0^3}{r^3}.$$

Une analyse détaillée de la fonction  $\dot{f}_2(r)$  (que nous ne présentons pas ici car elle est fastidieuse) montre qu'elle est décroissante.

Etudions à présent les valeurs extrêmes de  $\dot{f}_2$ .

- Pour  $r = a_0$ ,  $\mu \ll 1$  et la formule [3.10] se réduit à

$$(3.11) \quad \frac{\dot{f}_2/f_2^0}{\dot{a}/a_0}(r = a_0) = 6 + \frac{2A}{f_2^0}$$

- Pour  $r \rightarrow +\infty$ , on a  $\mu \rightarrow \infty$  et  $u \approx -\frac{2}{3} \log(qf_2^0)$ , d'où

$$(3.12) \quad \frac{\dot{f}_2/f_2^0}{\dot{a}/a_0}(r \rightarrow +\infty) = 3 \left(1 - \frac{3}{2} A \log(qf_2^0)\right)$$

L'étude des expressions [3.11] et [3.12] montre que le rapport du taux de croissance des petites cavités  $\dot{f}_2/f_2^0$  à celui de la grosse  $\dot{a}/a_0$  est élevé dans un voisinage immédiat de la grosse cavité ; sa valeur décroît quand  $r$  augmente et tend vers  $3[1 - 2/3A \log(qf_2^0)]$  (valeur beaucoup plus petite que  $6 + 2/A f_2^0$ ) à l'infini. Ce résultat est analogue à celui du cas sans germination étudié par [Per & Leb, 2000]. L'écart entre les deux valeurs extrêmes est encore plus important dans le cas avec germination que dans le cas sans germination. Ainsi le *phénomène d'accélération de la croissance des petites cavités près de la grosse cavité* observé dans le cas sans germination des petites cavités est beaucoup plus accentué quand on introduit cette dernière.

Il s'ensuit que la porosité des petites cavités situées au voisinage de la cavité centrale atteint très vite la valeur critique de début de coalescence, très probablement avant celle de la cavité centrale. Une couronne de matière ruinée se forme alors autour de la cavité centrale, accélérant la croissance de cette dernière.

L'introduction de la germination des petites cavités ne modifie donc en rien, mais au contraire renforce le mécanisme de rupture proposé dans [Per & Leb, 2000], à savoir :

- (i) *Chaque grosse cavité se trouve entourée d'un "nuage" de petites cavités croissant très rapidement.*
- (ii) *Près des grosses cavités, la porosité de la seconde population de petites cavités atteint la valeur critique de coalescence : il se forme une couronne de matière ruinée autour des grosses cavités. Ce phénomène accélère la croissance de ces dernières.*
- (iii) *La ruine finale du matériau se produit lorsque la coalescence commence entre les grosses cavités.*

On analyse dans les sections suivantes les étapes (i) et (ii).



### 3.3 Solution analytique du problème de la sphère creuse au-delà de l'instant initial

Au-delà de l'instant initial, la distribution de porosité des petites cavités n'est plus uniforme. Il est donc nécessaire de reprendre l'analyse pour tenir compte de cette non-uniformité. A cet effet, on notera  $a$  et  $b$  les rayons intérieur et extérieur actuels de la sphère creuse et  $f_2$  la porosité actuelle de la seconde population de cavités.

L'introduction de la germination des petites cavités ne portant pas sur les champs de contraintes et déformation, les équations définissant ces derniers restent les mêmes que dans le cas sans germination. Nous les reprenons cependant pour des besoins de clarté de l'exposé.

#### 3.3.1 Champ de contraintes

Les conditions aux limites, l'équation d'équilibre radiale et le critère "réduit" restent les mêmes qu'à l'instant initial à ceci près qu'on remplace  $f_2^0$  par  $f_2$ , qui est maintenant une fonction de  $r$ . On rappelle que ces équations s'écrivent :

$$(3.13) \quad u(r \equiv a) = 0; \quad \frac{du}{dr} = \frac{2v}{r}; \quad v^2 + qf_2 \exp\left(\frac{3}{2}u + v\right) - 1 = 0.$$

Si on définit la fonction  $H$  par la formule

$$(3.14) \quad H(v) = v - \log(1 - v^2),$$

la résolution de l'équation [3.13]<sub>3</sub> par rapport à  $u$  conduit à

$$(3.15) \quad u = -\frac{2}{3} [H(v) + \log(qf_2)]$$

qui n'est autre que l'équation [3.6]<sub>2</sub> avec  $f_2^0$  remplacée par  $f_2$ . De plus, une intégration de l'équation [3.13]<sub>2</sub> tenant compte de la relation [3.13]<sub>1</sub> donne :

$$(3.16) \quad u = 2 \int_a^r v(t) \frac{dt}{t}$$

La combinaison des deux équations [3.15] et [3.16] conduit à l'équation intégrale suivante sur la fonction  $v(r)$  :

$$(3.17) \quad v(r) = H^{-1} \left[ -\log(qf_2(r)) - 3 \int_a^r v(t) \frac{dt}{t} \right]$$

où des indications de dépendance par rapport à la position ont été introduite pour des raisons de clarté. Cette équation donne implicitement la distribution de la contrainte réduite  $v(r)$  en supposant connue la distribution de la porosité  $f_2(r)$ .

### 3.3.2 Champ de déformation

La prise en compte de la germination n'a aucune influence sur la loi d'écoulement. Combinée avec le critère (avec  $f_2^0$  remplacée par  $f_2$ ), cette dernière donne :

$$(3.18) \quad (1 + 2v - v^2) \frac{d\mathcal{U}}{dr} + (-1 + 4v + v^2) \frac{\mathcal{U}}{r} = 0,$$

où  $\mathcal{U}$  désigne, comme dans le cas de l'instant initial, la vitesse radiale. L'intégration de cette équation différentielle donne :

$$(3.19) \quad \mathcal{U} = \dot{a} \exp \left( \int_a^r \frac{1 - 4v(t) - v^2(t)}{1 + 2v(t) - v^2(t)} \frac{dt}{t} \right),$$

expression qui donne le champ de vitesse en fonction de la solution  $v(r)$  de l'équation intégrale [3.17].

### 3.3.3 Taux de porosité dans la matrice

Nous traitons séparément les parts dues à la croissance ( $\dot{f}_{2c}$ ) et à la germination ( $\dot{f}_{2g}$ ) des petites cavités. Le traitement de la part due à la croissance, en faisant usage de l'équation [3.18], donne

$$(3.20) \quad \frac{\dot{f}_{2c}}{1 - f_2} = 3\dot{d}_m = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} + 2\frac{\mathcal{U}}{r} = 3\frac{1 - v^2}{1 + 2v - v^2} \frac{\mathcal{U}}{r}$$

La part due à la germination s'obtient en calculant  $(1 - f_2)\dot{\epsilon}$ . En utilisant les équations [3.18] et [3.6]<sub>2</sub>, on trouve

$$(3.21) \quad \begin{aligned} (1 - f_2)\dot{\epsilon} &= u \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} + 2\frac{\mathcal{U}}{r} \right) + 2v\frac{\mathcal{U}}{r} \\ &= 2\frac{1 - v^2}{1 + 2v - v^2} \left[ \log \left( \frac{1 - v^2}{qf_2} \right) + \frac{2v^2}{1 - v^2} \right] \frac{\mathcal{U}}{r}. \end{aligned}$$

Le taux d'accroissement de la porosité dû à la germination des cavités s'écrit donc

$$(3.22) \quad \dot{f}_{2g} = A\dot{\epsilon} = 2\frac{A}{1 - f_2} \frac{1 - v^2}{1 + 2v - v^2} \left[ \log \left( \frac{1 - v^2}{qf_2} \right) + \frac{2v^2}{1 - v^2} \right] \frac{\mathcal{U}}{r}.$$

En rapprochant les équations [3.20] et [3.22], on obtient

$$\dot{f}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial f_2}{\partial r} = \dot{f}_{2c} + \dot{f}_{2g} = \frac{1 - v^2}{1 + 2v - v^2} \frac{\mathcal{U}}{r} \times \left[ 3(1 - f_2) + \frac{2A}{1 - f_2} \left( \log \frac{1 - v^2}{qf_2} + \frac{2v^2}{1 - v^2} \right) \right]$$

qui donne, en divisant par  $\mathcal{U}$ ,

$$\frac{1}{\mathcal{U}} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial r} = \frac{1 - v^2}{1 + 2v - v^2} \frac{1}{r} \left[ 3(1 - f_2) + \frac{2A}{1 - f_2} \left( \log \frac{1 - v^2}{qf_2} + \frac{2v^2}{1 - v^2} \right) \right]$$

d'où il s'ensuit, en utilisant l'expression [3.19], que

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \exp \left( - \int_a^r \frac{1 - 4v(t) - v^2(t)}{1 + 2v(t) - v^2(t)} \frac{dt}{t} \right) \frac{\partial f_2}{\partial t} + \dot{a} \frac{\partial f_2}{\partial r} &= \frac{\dot{a}}{r} \frac{1 - v^2}{1 + 2v - v^2} \times \\ &\left[ 3(1 - f_2) + \frac{2A}{1 - f_2} \left( \log \frac{1 - v^2}{qf_2} + \frac{2v^2}{1 - v^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Cette dernière équation donne l'évolution dans le temps de la porosité  $f_2$ .

### 3.3.4 Etude asymptotique de la porosité $f_2$ pour $r \rightarrow a$

Les équations précédentes autorisent une étude asymptotique de l'équation d'évolution de la porosité  $f_2$  pour  $r \rightarrow a$ . On présente cette étude dans l'annexe 1. Le principal résultat est que, pour les petites porosités, la valeur  $f_2^m$  de  $f_2$  au point  $r = a$  (on utilise la notation  $f_2^m$  car la porosité  $f_2$  est maximale en ce point) est donnée en fonction du paramètre de nucléation  $A$ , de la porosité initiale  $f_2^0$  et des porosités initiale  $f_1^0$  et actuelle  $f_1$  par la formule

$$(3.24) \quad f_2(r = a) = f_2^m = f_2^0 \left( \frac{f_1}{f_1^0} \right)^2 + \frac{A}{3} \left[ \left( \frac{f_1}{f_1^0} \right)^2 - 1 \right].$$

Le terme

$$\frac{A}{3} \left[ \left( \frac{f_1}{f_1^0} \right)^2 - 1 \right]$$

représente la correction qu'apporte l'introduction de la nucléation. Cette équation confirme bien que les petites cavités situées au voisinage de la cavité centrale croissent plus vite que cette dernière. Elle confirme donc le mécanisme de rupture en trois étapes présenté plus haut.

## 3.4 Etude numérique après le début de la coalescence des petites cavités

### 3.4.1 Présentation du problème

Nous allons à présent étudier l'étape (ii) du scénario de rupture évoqué plus haut. Comme à l'instant initial, l'analyse sera basée sur le problème-modèle de la sphère creuse. (On ne considèrera pas l'étape (iii) parce que l'étude de la coalescence des grosses cavités nécessiterait, dans le problème-modèle, la présence d'au moins deux cavités de ce type, ce qui est exclu ici).

La valeur de la porosité "critique"  $f_2^c$  de début de coalescence des petites cavités peut être extraite par exemple des simulations micromécaniques de Koplik et Needleman [Kop & Nee, 1988] ou du modèle analytique simplifié de Gologanu *et al.* [GLD, 1994]. Nous supposons pour simplifier que la matrice poreuse de porosité  $f_2$  perd toute capacité de résistance mécanique dès que la porosité critique  $f_2^c$  est atteinte (ce qui est équivalent à prendre le paramètre de Tvergaard et Needleman  $\delta$  infini). A chaque instant, la cavité centrale de rayon  $a$  est donc entourée d'une couronne de matière ruinée dont le rayon extérieur  $a^*$  ( $> a$ ) est caractérisé par le fait que la porosité critique  $f_2^c$  y est atteinte ( $[f_2(r = a^*) = f_2^c]$ ); les contraintes s'annulent complètement à l'intérieur de la cavité centrale et dans la couronne de matière ruinée, de sorte que la condition de bord libre en  $a$  ( $\sigma_{rr}(r = a) = 0$ ) est reportée au point  $a^*$  ( $\sigma_{rr}(r = a^*) = 0$ ).

### 3.4.2 Principe des simulations numériques

Le problème ainsi défini ne conduit pas à une solution analytique complète (même si certains éléments d'une telle solution seront donnés dans l'annexe 2). C'est pour cette raison que nous avons recours à une résolution numérique basée sur une discrétisation en temps et en espace des équations du problème. La position des points d'intégration suit le mouvement, pour tenir compte des effets liés aux grandes transformations. Connaissant ces positions  $r_i(t)$ , le rayon de la zone ruinée  $a^*(t)$  et la distribution de porosité  $f_2(r_i, t)$  à l'instant  $t$ , on détermine ces grandeurs à l'instant  $t + \Delta t$  suivant la méthode ci-après.

On évalue pour commencer le champ de contraintes à l'instant  $t$  grâce à l'intégration en espace des équations d'équilibre (en utilisant le critère et la condition de bord libre ( $\sigma_{rr}(a^*(t), t) = 0$ )). Le champ de vitesse se calcule ensuite en intégrant en espace la loi d'écoulement, d'où l'on tire le taux de porosité des petites cavités. De là, on déduit les nouvelles positions des points d'intégration  $r_i(t + \Delta t) \equiv r_i + \Delta r_i$  et la nouvelle distribution  $f_2(r_i + \Delta r_i, t + \Delta t)$  de la porosité. Il ne reste plus qu'à éliminer la zone ruinée formée au cours du passage de l'instant  $t$  à l'instant  $t + \Delta t$ . Cette zone est constituée par l'ensemble des points  $r_i + \Delta r_i$  où  $f_2(r_i + \Delta r_i, t + \Delta t)$  n'excède pas  $f_2^c$  et s'arrête au point  $a^*(t + \Delta t)$  défini par la condition  $f_2(a^*(t + \Delta t), t + \Delta t) = f_2^c$ ; la nouvelle valeur de  $a^*$  servira à déterminer au pas de temps suivant la position où sera appliquée la condition de bord libre  $\sigma_{rr} = 0$ .

### 3.4.3 Définition des porosités $f_1$ , $f_1^*$ et $\bar{f}_2$

Les résultats des simulations numériques fourniront essentiellement trois porosités notées  $f_1$ ,  $f_1^*$  et  $\bar{f}_2$  que nous devons, dans un premier temps, définir.

Désignons par  $\Omega \equiv b^3$  le volume total de la sphère rapporté à  $4\pi/3$ . (Tous les autres volumes définis ci-dessous seront aussi divisés par  $4\pi/3$ , c'est-à-dire qu'ils correspondront à un angle solide de 3 au lieu de  $4\pi$  stéradians). Désignons aussi par  $\Omega_{ZP} \equiv b^3 - a^{*3}$  le volume de la "zone poreuse" (c'est-à-dire l'extérieur de la zone ruinée). Enfin, désignons par  $\Omega_{M,ZR}$  et  $\Omega_{M,ZP}$  les volumes de métal contenus dans la zone ruinée et la zone poreuse respectivement. Le volume total de métal est  $\Omega_M = \Omega_{M,ZR} + \Omega_{M,ZP}$ .

La porosité  $\bar{f}_2$  est définie comme la valeur moyenne de la porosité dans la zone poreuse seulement (pas dans la zone ruinée) :

$$(3.25) \quad \bar{f}_2 \equiv \frac{\Omega_{ZP} - \Omega_{M,ZP}}{\Omega_{ZP}} = 1 - \frac{\Omega_{M,ZP}}{b^3 - a^{*3}}.$$

Ceci permet de définir la porosité totale  $f$  par :

$$\begin{aligned} f &\equiv \frac{\Omega - \Omega_M}{\Omega} = 1 - \frac{\Omega_{M,ZR}}{b^3} - \frac{\Omega_{M,ZP}}{b^3} = 1 - \frac{\Omega_{M,ZR}}{b^3} - (1 - \bar{f}_2) \frac{b^3 - a^{*3}}{b^3} \\ &= (1 - \bar{f}_2) \frac{a^{*3}}{b^3} - \frac{\Omega_{M,ZR}}{b^3} + \bar{f}_2. \end{aligned}$$

L'hypothèse d'additivité des porosités, c'est-à-dire  $f \equiv f_1 + \bar{f}_2$  où  $f_1$  désigne la porosité due à la cavité centrale et à la zone ruinée, conduit alors à la définition suivante de la porosité  $f_1$  :

$$(3.26) \quad f_1 = (1 - \bar{f}_2) \frac{a^{*3}}{b^3} - \frac{\Omega_{M,ZR}}{b^3}.$$

Il faut noter que  $f_1$  est la “vraie” porosité de la cavité centrale et de la zone ruinée, tenant compte de ce que la zone ruinée n'est pas complètement vide mais contient du métal, à travers le terme  $-\Omega_{M,ZR}/b^3$ . D'un point de vue mécanique, cependant, le matériau se comporte comme si la zone ruinée était vide. Il est donc intéressant d'introduire une porosité “effective”  $f_1^*$  qui ne prend pas en compte le métal contenu dans la zone ruinée. On obtient cette porosité en omettant le terme  $-\Omega_{M,ZR}/b^3$  dans la relation [3.26] donnant  $f_1$  :

$$(3.27) \quad f_1^* = (1 - \bar{f}_2) \frac{a^{*3}}{b^3}.$$

Bien entendu,  $f_1^*$  est identique à  $f_1$  avant la coalescence des petites cavités puisqu'il n'y a pas de zone ruinée à ce stade ( $a^* \equiv a, \Omega_{M,ZR} \equiv 0$ ).

#### 3.4.4 Résultats des simulations numériques

Les paramètres considérés dans les simulations numériques sont  $f_1^0 = 10^{-3}$ ,  $f_2^0 = 10^{-5}$ ,  $A = 5 \times 10^{-2}$  et  $f_2^c = 3 \times 10^{-2}$ . La valeur de  $A$  considérée est raisonnable, de l'ordre de celle mesurée par Joly [Pin & Jol, 1991] ( $A = 10^{-1}$ ). De même, le fait de prendre  $f_2^0 = 10^{-5}$  (c'est-à-dire  $f_2^0$  très petit) est aussi raisonnable. En effet, si l'on prend en compte la germination continue des petites cavités, il est logique de supposer qu'il n'y a pas beaucoup de telles cavités initialement. On ne peut pas prendre  $f_2^0 = 0$  pour des raisons numériques,  $f_2^0$  ne peut prendre par conséquent qu'une très petite valeur. La valeur de la porosité critique de début de coalescence des petites cavités  $f_2^c$  est en accord avec les travaux de Koplik-Needleman [Kop & Nee, 1988].

Sur toutes les figures, on présente deux résultats, d'une part ceux correspondant à la simulation numérique et d'autre part ceux prédits par le modèle simplifié qui sera présenté plus loin.

La figure [3.2] montre l'évolution de la charge limite hydrostatique  $\Sigma_m/\sigma_0$  en fonction de la “vraie” porosité  $f_1$ . On voit que la charge limite hydrostatique décroît plus rapidement dès que commence la coalescence des petites cavités. La discontinuité qui se produit à la transition ne semble pas physiquement “réaliste” et provient de l'hypothèse selon laquelle la matrice poreuse perd toute capacité de résistance dès qu'on atteint la porosité critique  $f_2^c$ .

La figure [3.3] montre l'évolution de la porosité “effective”  $f_1^*$  de la zone  $r \leq a^*$  (qui gouverne, avec  $\bar{f}_2$ , la capacité de résistance du matériau) en fonction de la “vraie” porosité  $f_1$ . Après une phase initiale (avant la coalescence des petites cavités) où les deux porosités sont égales,  $f_1^*$  se “sépare” de  $f_1$  pour

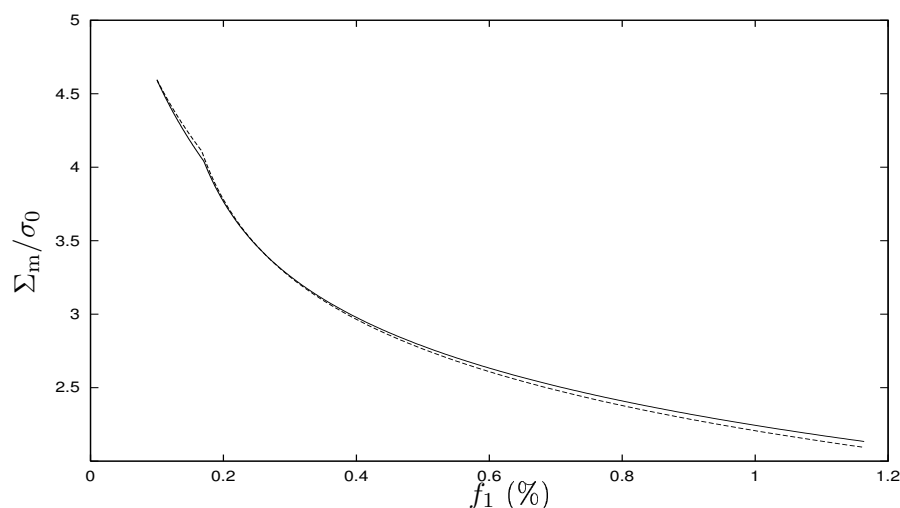


FIG. 3.2 – Evolution de la charge limite hydrostatique en fonction de la porosité vraie de la cavité centrale et de la zone ruinée - Trait plein : calcul numérique, trait pointillé : prédiction du modèle analytique

croître plus vite qu'elle ; ceci est dû à la propagation de la zone ruinée, qui conduit à une croissance de  $f_1^*$  plus rapide que celle de  $f_1$ , le métal contenu dans cette zone étant pris en compte dans  $f_1$  et non dans  $f_1^*$ .

La figure [3.4] présente la valeur moyenne de la porosité de la seconde population  $\bar{f}_2$  comme une fonction de  $f_1$ . Cette figure indique, contrairement aux deux précédentes, que le taux de croissance de la valeur moyenne de la porosité dans la zone non ruinée n'est pas significativement affectée par la coalescence des petites cavités.

## 3.5 Modèle pour les matériaux poreux à deux populations de cavités en présence de germination

### 3.5.1 Présentation du modèle

Cette section a pour objet de définir un modèle simplifié analytique "homogénéisé" pour les matériaux ductiles poreux à double population de cavités, en présence de germination des petites cavités. Ce modèle comprend seulement trois paramètres internes  $f_1$ ,  $f_1^*$  et  $\bar{f}_2$  (qui sont des scalaires et non des fonctions de  $r$ , comme dans le problème-modèle), obéissant à des lois d'évolution qui rendent compte des principaux aspects de la solution du problème-modèle, à savoir l'accélération de la croissance des petites cavités de la seconde population au voisinage des grosses cavités de la première population, puis lorsque commence la coalescence des petites cavités, la très rapide croissance des grosses. La définition

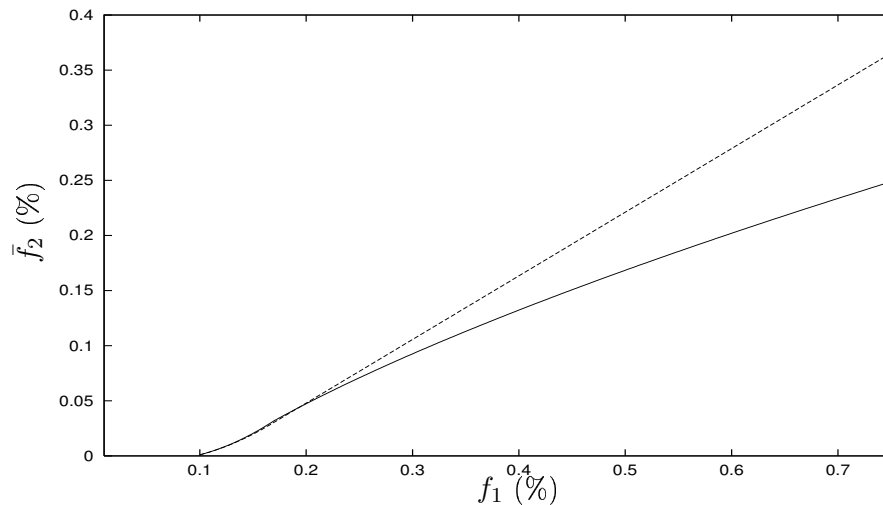


FIG. 3.3 – Evolution de  $\bar{f}_2$  dans la zone non ruinée en fonction de la porosité vraie de la cavité centrale et de la zone ruinée - Trait plein : calcul numérique, trait pointillé : prédiction du modèle analytique

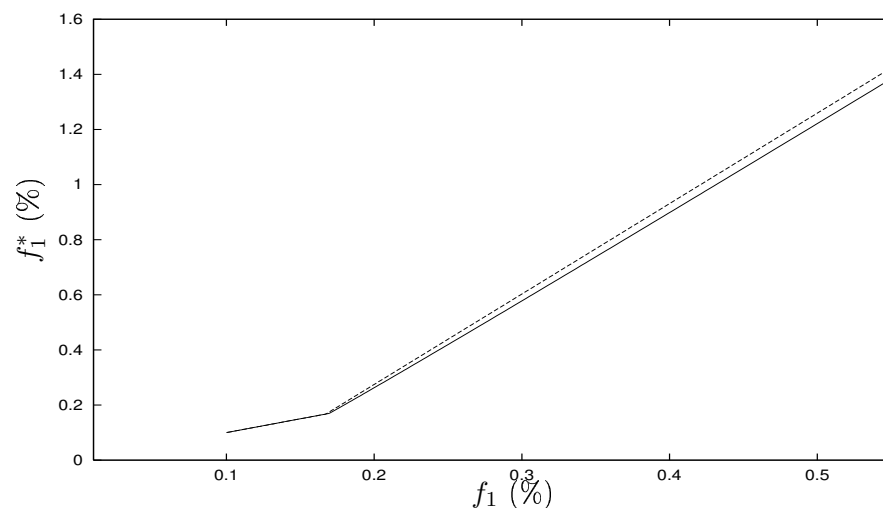


FIG. 3.4 – Evolution de la porosité effective en fonction de la porosité vraie de la cavité centrale et de la zone ruinée - Trait plein : calcul numérique, trait pointillé : prédiction du modèle

de ce modèle utilisera la solution analytique du problème-modèle à l'instant initial et certains éléments de la solution de ce problème au-delà de cet instant.

Le modèle comprend un critère de type Gurson avec porosité  $f_1^* + \bar{f}_2$  (la "porosité effective totale", c'est-à-dire la somme de la porosité "effective" de la première population et de la valeur moyenne de celle de la seconde population) :

$$(3.28) \quad \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2q (f_1^* + \bar{f}_2) \cosh\left(\frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0}\right) - 1 - q^2 (f_1^* + \bar{f}_2)^2 = 0$$

où  $\Sigma_{eq}$  et  $\Sigma_m$  désignent les contraintes macroscopiques équivalente et moyenne respectivement. ( $\Sigma_{eq}$  est nul dans le modèle considéré ci-dessus).

Dans l'équation [3.28] donnant le critère, on a fait l'approximation selon laquelle d'un point de vue mécanique, les grosses cavités, les zones ruinées qui les entourent et les petites cavités sont équivalentes à une seule population de cavités (de tailles identiques). Perrin et Leblond ont montré [Leb & Per, 1990] que cette approximation est raisonnable dans le problème-modèle à l'instant initial, quand la porosité des petites cavités est encore uniforme, pour différentes valeurs des porosités  $f_1^0$  et  $f_2^0$ . De plus, la figure [3.2], qui présente la comparaison entre la vraie valeur de  $\Sigma_m = \sigma_{rr}(r = b)$  (calculée numériquement) dans le problème-modèle et la valeur déduite de l'équation [3.28] avec  $\Sigma_{eq} = 0$ , montre un très bon accord des résultats durant les étapes (i) et (ii) du mécanisme de rupture <sup>1</sup>.

La loi d'écoulement est celle associée au critère par normalité [3.28]. Elle est la même que celle du modèle de Gurson mais en remplaçant la porosité  $f$  par  $f_1^* + \bar{f}_2$ . Elle s'écrit donc :

$$(3.29) \quad D_m = \frac{q}{2} (f_1^* + \bar{f}_2) \frac{\sigma_0}{\Sigma_{eq}} \sinh\left(\frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0}\right) D_{eq},$$

où  $D_m$  et  $D_{eq}$  désignent les taux de déformation macroscopiques équivalent et moyen respectivement.

Finalement, l'incompressibilité du métal donne une équation d'évolution de la porosité totale  $f_1 + \bar{f}_2$  :

$$(3.30) \quad \dot{f}_1 + \dot{\bar{f}}_2 = 3 (1 - f_1 - \bar{f}_2) D_m + A \bar{\epsilon}$$

où  $\bar{\epsilon}$  désigne la valeur moyenne du taux de paramètre d'écroissance  $\epsilon$  dans la zone poreuse non ruinée. Il est à noter que c'est la porosité *vraie*  $f_1$  de la première population de cavités, prenant en compte le métal contenu dans les zones ruinées, qui intervient ici et non la porosité "effective"  $f_1^*$  qui considère que ces zones sont vides de matière.

<sup>1</sup>En fait, la relation [3.28] est exceptionnellement utilisée dans ce cas précis avec la valeur  $f_1^* + q\bar{f}_2$  au lieu de  $q(f_1^* + \bar{f}_2)$  puisque dans le problème-modèle, il n'y a qu'une seule grosse cavité, donc pas d'interactions entre de telles cavités ; il n'y a, par conséquent, pas de raison d'introduire le paramètre d'interaction de Tvergaard pour la porosité de la première population.



Si l'équation [3.30] donnait la dérivée temporelle de la "porosité effective totale"  $f_1^* + \bar{f}_2$ , les équations [3.28] et [3.30] seraient suffisantes pour complètement définir le modèle. Comme elle ne donne que la dérivée temporelle de la porosité totale  $f_1 + \bar{f}_2$ , il reste deux éléments à définir :

- les équations d'évolution séparées de  $f_1$  et  $\bar{f}_2$ , ou de façon équivalente la valeur du rapport  $\dot{f}_2/\dot{f}_1$  ;
- l'expression de la porosité "effective"  $f_1^*$  comme fonction de la vraie porosité  $f_1$ .

### 3.5.2 Equations d'évolution des paramètres internes avant la coalescence des petites cavités

Avant la coalescence des petites cavités,  $f_1^* \equiv f_1$ . Il suffit de donner les valeurs des rapports  $\dot{f}_{2c}/\dot{f}_1$  (qui généralise le rapport  $\dot{f}_2/\dot{f}_1$  du cas sans germination) et  $\dot{f}_{2g}/\dot{f}_1$  (qui correspond à la part due à la germination des cavités).

Les expériences numériques montrent que le rapport  $(\dot{f}_{2c}/\bar{f}_2)/(\dot{f}_1/f_1)$  est sensiblement constant avant la phase de coalescence des petites cavités, et égal à

$$(3.31) \quad \gamma = \frac{1}{2} \left( -\chi + 1 + \sqrt{1 + 6\chi + \chi^2} \right) \quad \text{où} \quad \chi = f_1^0/f_2^0$$

à l'ordre le plus bas vis-à-vis des porosités. Cette valeur est la même que celle calculée par Perrin et Leblond [Per & Leb, 2000].

Les expériences numériques révèlent aussi que le rapport  $\dot{f}_{2g}/\dot{f}_1$  est constant ; on l'écrit sous la forme  $A\gamma'$ . Pour calculer  $\gamma'$ , on évalue la valeur moyenne sur la sphère,  $\bar{\epsilon}$  de  $\epsilon$  à l'instant initial. Les calculs sont effectués dans l'annexe 3. On trouve :

$$(3.32) \quad \bar{\epsilon} = \frac{3\dot{a}v_a a_0^2}{(b_0^3 - a_0^3)(1 - f_2^0)} \frac{u_b}{v_b}.$$

Du fait que

$$(3.33) \quad f_1 = (1 - \bar{f}_2) \frac{a^3}{b^3} \approx \frac{a^3}{b^3} \quad \Rightarrow \quad \dot{f}_1 \approx \frac{3a_0\dot{a}}{b_0^3},$$

L'équation [3.32] devient, à l'ordre le plus bas vis-à-vis des porosités

$$(3.34) \quad \frac{\bar{\epsilon}}{\dot{f}_1} \approx \frac{u_b}{v_b}.$$

Dans cette expression  $u_b$  et  $v_b$  sont donnés par les équations [3.6] appliquées en  $r = b_0$ , c'est-à-dire avec  $\mu = f_2^0/f_1^0$ . On a par conséquent,  $\gamma' \approx \frac{u_b}{v_b}$ .

Les relations précédentes, avec l'équation [3.30], permettent de déterminer les porosités  $f_1$ ,  $f_1^*$  et  $\bar{f}_2$  jusqu'à l'instant  $t_c$  correspondant au début de la coalescence des petites cavités. Les valeurs de  $f_1$

et  $\bar{f}_2$  à cet instant sont données par :

$$(3.35) \quad \begin{cases} f_1(t_c) = f_1^0 \sqrt{\frac{f_2^c + A/3}{f_2^0 + A/3}} \\ \bar{f}_2(t_c) = \left( f_2^0 + \frac{A\gamma'}{\gamma-1} f_1^0 \right) \left( \frac{f_1(t_c)}{f_1^0} \right)^\gamma - \frac{A\gamma'}{\gamma-1} f_1(t_c). \end{cases}$$

La première de ces expressions résulte de [3.24] et la seconde est obtenue en intégrant l'équation différentielle

$$(3.36) \quad \frac{d\bar{f}_2}{df_1} = \frac{\dot{f}_{2c}}{\dot{f}_1} + \frac{\dot{f}_{2g}}{\dot{f}_1} = \gamma \frac{\bar{f}_2}{f_1} + A\gamma'.$$

### 3.5.3 Equations d'évolution des paramètres internes durant la coalescence des petites cavités

Nous exprimons ici les rapports  $\dot{\bar{f}}_2/\dot{f}_1$  et  $\dot{f}_1^*/\dot{f}_1$ . Les courbes donnant les fonctions  $\bar{f}_2(f_1)$  et  $f_1^*(f_1)$  au-delà de l'instant critique  $t_c$  seront approchées par des droites, ainsi nous adoptons les formules :

$$(3.37) \quad \frac{\dot{\bar{f}}_2}{\dot{f}_1} = \frac{d\bar{f}_2}{df_1}(t_c^+) \quad ; \quad \frac{\dot{f}_1^*}{\dot{f}_1} = \frac{df_1^*}{df_1}(t_c^+)$$

Il reste seulement à évaluer les dérivées  $\frac{d\bar{f}_2}{df_1}(t_c^+)$  et  $\frac{df_1^*}{df_1}(t_c^+)$ . Ceci nécessite de lourds calculs qui sont exposés dans l'annexe 2. Les résultats trouvés sont les suivants :

$$(3.38) \quad \begin{cases} \frac{d\bar{f}_2}{df_1}(t_c^+) \approx \gamma \frac{\bar{f}_2(t_c)}{f_1(t_c)} + A\gamma' \\ \frac{df_1^*}{df_1}(t_c^+) \approx \frac{9f_2^c + A \left[ \left( \frac{f_1(t_c)}{f_1^0} \right)^3 + 2 \right]}{A \left[ \left( \frac{f_1(t_c)}{f_1^0} \right)^3 - 1 \right]} \end{cases}$$

Les équations [3.37] et [3.38], avec l'équation [3.30], permettent de calculer les porosités  $f_1$ ,  $f_1^*$  et  $\bar{f}_2$  à tous les instants à partir du début de la coalescence des petites cavités.

### 3.5.4 Résumé et comparaison avec les simulations numériques

Le modèle défini comprend les éléments suivants :

1. un critère donné par

$$(3.39) \quad \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2q (f_1^* + \bar{f}_2) \cosh \left( \frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0} \right) - 1 - q^2 (f_1^* + \bar{f}_2)^2 = 0,$$

2. une loi d'écoulement associée donnée par

$$(3.40) \quad D_m = \frac{q}{2} (f_1^* + \bar{f}_2) \frac{\sigma_0}{\Sigma_{eq}} \cosh \left( \frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0} \right) D_{eq},$$

3. des taux de porosité donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{f}_1 + \dot{\bar{f}}_2 = (1 - f_1 - \bar{f}_2) \operatorname{tr} \mathbf{D} + A \bar{\epsilon} \quad , \quad \bar{\epsilon} = \gamma' \dot{f}_1 \\ \frac{\dot{f}_1^*}{\dot{f}_1} = 1 \quad \text{si } f_1 \leq f_1(t_c) \quad , \quad \frac{9f_2^c + A \left[ \left( \frac{f_1(t_c)}{f_1^0} \right)^3 + 2 \right]}{A \left[ \left( \frac{f_1(t_c)}{f_1^0} \right)^3 - 1 \right]} \quad \text{si } f_1 > f_1(t_c) \\ \frac{\dot{\bar{f}}_2}{\dot{f}_1} = \gamma \frac{\bar{f}_2}{f_1} + A\gamma' \quad \text{si } f_1 \leq f_1(t_c) \quad , \quad \gamma \frac{\bar{f}_2(t_c)}{f_1(t_c)} + A\gamma' \quad \text{si } f_1 > f_1(t_c), \\ \left\{ \begin{array}{l} \gamma' \equiv \frac{u_b(t_0)}{v_b(t_0)} \quad , \quad \gamma \equiv \frac{1}{2} \left( -\chi + 1 + \sqrt{\chi^2 + 6\chi + 1} \right) \quad , \quad \chi \equiv \frac{f_1^0}{f_2^0} \\ f_1(t_c) = f_1^0 \sqrt{\frac{f_2^c + A/3}{f_2^0 + A/3}} \quad , \quad \bar{f}_2(t_c) = \left( f_2^0 + \frac{A\gamma'}{\gamma - 1} f_1^0 \right) \left( \frac{f_1(t_c)}{f_1^0} \right)^\gamma - \frac{A\gamma'}{\gamma - 1} f_1(t_c). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On rappelle que dans cette expression  $u_b(t_0)$  et  $v_b(t_0)$  sont données par [3.6] avec  $r = b_0$ , c'est-à-dire  $\mu \approx f_2^0/f_1^0$ .

Les figures [3.1] [3.2] et [3.3] montrent que les prédictions de ce modèle pour un chargement hydrostatique ( $\Sigma_{eq} = 0$ ) sont en accord acceptable avec les simulations numériques du problème-modèle. Les écarts entre les courbes numériques et théoriques que l'on observe proviennent de l'hypothèse selon laquelle les courbes  $\bar{f}_2(f_1)$  et  $f_1^*(f_1)$  après le début de la coalescence des petites cavités peuvent être approchées par des lignes droites. Il est malheureusement difficile de faire mieux, le calcul analytique des dérivées  $d\bar{f}_2/df_1$  et  $df_1^*/df_1$  après l'instant  $t_c$  étant très difficile.

### 3.6 Conclusion

En utilisant la solution analytique à l'instant initial et des éléments de la solution analytique aux instants ultérieurs, nous sommes parvenus à définir un modèle analytique simplifié "homogénéisé" pour les matériaux poreux contenant deux populations de cavités, en présence de germination de petites cavités. Ce modèle reproduit les aspects essentiels de la solution du problème-modèle. Il ne comporte que trois paramètres internes dont les lois d'évolution sont très simples, et prend en compte les couplages entre la croissance des grosses cavités et la germination, la croissance et la coalescence des petites cavités, mais pas la coalescence des grosses cavités entre elles puisque le problème-modèle sur lequel il est basé ne prend en compte qu'une seule cavité de ce type. De nouvelles idées sont donc nécessaires pour l'étude et la modélisation de la coalescence des grosses cavités assistée par la germination, la croissance et la coalescence des petites cavités.

---

# Annexe 1 : Etude de l'évolution de la porosité au voisinage de la grosse cavité

---

L'objet de cet appendice est d'étudier l'évolution de la porosité  $f_2$  au voisinage du point  $r = a$ , et plus précisément des quantités

$$f_2^m \equiv f_2(r = a) \quad \text{et} \quad \alpha \equiv (df_2/dr)(r = a),$$

avant le début de coalescence des petites cavités (le calcul de  $\alpha$  sera utile à l'établissement des équations du modèle simplifié).

Nous écrivons, pour commencer, le développement de  $f_2$  en puissance de  $\epsilon \equiv r - a$  sous forme :

$$(3.41) \quad f_2 = f_2^m + \alpha\epsilon + \frac{\beta}{2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad , \quad \epsilon \equiv r - a$$

où  $f_2^m$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  ne sont que des fonctions de  $t$ . (Le calcul de  $\beta$  n'interviendra pas ici ; sa valeur sera utilisée dans les calculs ultérieurs). On en déduit les dérivées successives de la porosité  $f_2$  en puissance de  $\epsilon \equiv r - a$  :

$$(3.42) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_2}{\partial r} = \alpha + \beta\epsilon + O(\epsilon^2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = \dot{f}_2^m - \alpha\dot{a} + \dot{\alpha}\epsilon - \beta\dot{a}\epsilon + O(\epsilon^2) \end{cases}$$

Déterminons le développement en puissance de  $v$  par rapport à  $\epsilon$ . On commence par un développement à l'ordre 0 de l'équation [3.17] (en utilisant l'équation [3.41]) :

$$v = H^{-1}[-\log q f_2^m + O(\epsilon)] = H^{-1}[-\log q f_2^m] + O(\epsilon) \equiv v_a + O(\epsilon).$$

L'introduction de cette expression dans [3.17] permet d'obtenir le développement de  $v$  à l'ordre 1. On a

$$\begin{aligned} v &= H^{-1} \left[ -\log(qf_2^m + q\alpha\epsilon + O(\epsilon^2)) - 3 \int_a^r (v_a + O(\epsilon)) \frac{dt}{t} \right] \\ &= H^{-1} \left[ -\log qf_2^m - \frac{\alpha}{f_2^m} \epsilon - 3 \frac{v_a}{a} \epsilon + O(\epsilon^2) \right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$(3.43) \quad v = v_a + v'_a \epsilon + O(\epsilon^2)$$

où par définition de la fonction  $H$

$$(3.44) \quad v'_a = - (H^{-1})' (H(v_a)) \left( \frac{\alpha}{f_2^m} + 3 \frac{v_a}{a} \right) = \frac{1 - v_a^2}{1 + 2v_a - v_a^2} \left( \frac{\alpha}{f_2^m} + 3 \frac{v_a}{a} \right).$$

Les équations [3.43] et [3.44] donnent

$$\begin{aligned} \frac{1 - v^2}{1 + 2v - v^2} &= \frac{1 - v_a^2}{1 + 2v_a - v_a^2} - 2 \frac{1 + v_a^2}{(1 + 2v_a - v_a^2)^2} v'_a \epsilon + O(\epsilon^2) \\ (3.45) \quad &= \frac{1 - v_a^2}{1 + 2v_a - v_a^2} \left[ 1 + 2 \frac{1 + v_a^2}{(1 + 2v_a - v_a^2)^2} \left( \frac{\alpha}{f_2^m} + 3 \frac{v_a}{a} \right) \epsilon \right] + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

De plus, il est évident que

$$(3.46) \quad \exp \left( - \int_a^r \frac{1 - 4v(r') - v^2(r')}{1 + 2v(r') - v^2(r')} \frac{dr'}{r'} \right) = 1 - \frac{1 - 4v_a - v_a^2}{1 + 2v_a - v_a^2} \frac{\epsilon}{a} + O(\epsilon^2).$$

A l'aide des équations [3.46] et [3.45], l'équation d'évolution [3.23] de  $f_2$  prend la forme asymptotique suivante :

$$\begin{aligned} &\left( 1 - \frac{1 - 4v_a - v_a^2}{1 + 2v_a - v_a^2} \frac{\epsilon}{a} \right) \left( \dot{f}_2^m - \alpha \dot{a} + \dot{\alpha} \epsilon - \beta \dot{a} \epsilon \right) + \dot{a} (\alpha + \beta \epsilon) = 3 \frac{\dot{a}}{a} \left( 1 - \frac{\epsilon}{a} \right) \frac{1 - v_a^2}{1 + 2v_a - v_a^2} \times \\ &\left[ 1 + 2 \frac{1 + 4v_a - v_a^2}{1 + 2v_a - v_a^2} \left( \frac{\alpha}{f_2^m} + \frac{3v_a}{a} \right) \epsilon \right] \left( 1 - f_2^m - \alpha \epsilon + 2 \frac{A}{1 - f_2^m} \frac{v_a}{a} \epsilon \right) + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left( 1 - \frac{\epsilon}{a} \right) \times \\ (3.47) \quad &\frac{2A}{1 - f_2^m - \alpha \epsilon} \left[ v_a - \frac{1 - v_a^2}{1 + 2v_a - v_a^2} \left( \frac{\alpha}{f_2^m} + \frac{3v_a}{a} \right) \epsilon \right] \end{aligned}$$

A l'ordre  $\epsilon^0 = 1$ , les termes  $-\alpha \dot{a}$  et  $\dot{\alpha} \epsilon$  disparaissent dans l'équation [3.47] et on obtient l'équation différentielle suivante sur la porosité  $f_2^m$  :

$$(3.48) \quad \dot{f}_2^m = \frac{\dot{a}}{a} \left[ 3 (1 - f_2^m) \frac{1 - v_a^2}{1 + 2v_a - v_a^2} + \frac{2A}{1 - f_2^m} v_a \right]$$

où l'on rappelle que

$$v_a = H^{-1} [-\log(qf_2^0)].$$

La condition initiale associée à cette équation différentielle est  $f_2^m(t=0) = f_2^0$ .

A l'ordre 1 par rapport à  $\epsilon$  le membre de gauche de [3.47] devient

$$\dot{\alpha} - \frac{1 - 4v_a - v_a^2}{1 + 2v_a - v_a^2} \frac{1}{a} \left( f_2^m - \alpha \dot{a} \right)$$

tandis que, en utilisant la relation [3.48], celui de droite donne

$$3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{1 - v_a^2}{1 + 2v_a - v_a^2} \left[ -\frac{1}{a} (1 - f_2^m) + 2 \frac{1 + v_a^2}{1 + 2v_a - v_a^2} \left( \frac{\alpha}{f_2^m} + \frac{3v_a}{a} \right) (1 - f_2^m) - \alpha + \frac{2A}{1 - f_2^m} \frac{v_a}{a} \right] \\ + \frac{2A}{1 - f_2^m} \frac{\dot{a}}{a} \left[ -\frac{v_a}{a} + \frac{\alpha v_a}{1 - f_2^m} - \frac{1 - v_a^2}{1 + 2v_a - v_a^2} \left( \frac{\alpha}{f_2^m} + \frac{3v_a}{a} \right) \right].$$

En réutilisant la relation [3.48], on peut transformer (après un calcul pénible mais élémentaire) l'équation [3.47] à l'ordre 1 par rapport à  $\epsilon$  en :

$$(3.49) \quad \dot{\alpha} = \frac{\dot{a}}{a} \left[ \alpha \left( 4 \frac{-1 + 4v_a + v_a^2}{1 + 2v_a - v_a^2} + 6 \frac{1 - f_2^m}{f_2^m} \frac{1 - v_a^4}{(1 + 2v_a - v_a^2)^3} + \frac{2Av_a}{(1 - f_2^m)^2} \right) \right] \\ + \frac{\dot{a}}{a} \left[ -36 (1 - f_2^m) \frac{1 - v_a^2}{a} \frac{v_a^2 (1 - v_a)}{(1 + 2v_a - v_a^2)^3} - \frac{12A}{1 - f_2^m} \frac{v_a^2}{a} \frac{1}{1 + 2v_a - v_a^2} \right] \\ - \frac{\dot{a}}{a} \alpha \left[ \left( \frac{2A}{(1 - f_2^m) f_2^m} \frac{1 - v_a^2}{1 + 2v_a - v_a^2} \right) \right]$$

qui est une équation différentielle sur la variable  $\alpha \equiv (\partial f_2 / \partial r)(r = a)$  dont la condition initiale correspondante peut s'écrire  $\alpha(t = 0) = 0$  puisque la porosité est uniforme à l'instant initial.

Nous prenons à présent en compte l'hypothèse des petites porosités, qui impose la relation suivante sur  $v_a$  :

$$v_a = 1 - 2f_2 + O((f_2)^2).$$

La relation [3.48] devient, à l'ordre le plus bas vis-à-vis de  $f_2^m$  :

$$(3.50) \quad \frac{f_2^m}{f_2^m + \frac{A}{3}} = 6 \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow f_2^m + \frac{A}{3} = \left( f_2^0 + \frac{A}{3} \right) \left( \frac{a}{a_0} \right)^6.$$

De plus, en faisant toujours l'hypothèse des petites porosités, l'équation [3.49] se réduit à

$$(3.51) \quad \dot{\alpha} = \frac{\dot{a}}{a} \left[ -\frac{36}{a} (f_2^m)^2 - \frac{6A}{a} + \alpha (8 - 2A) \right].$$

Le paramètre de nucléation  $A$  étant proportionnel à la porosité, on peut négliger  $(f_2^m)^2$  devant  $A$ , et  $2A$  devant 8 ( $A \ll 1$ ); par conséquent la relation [3.51] devient :

$$(3.52) \quad \dot{\alpha} = \frac{\dot{a}}{a} \left( -\frac{6A}{a} + 8\alpha \right) \Rightarrow \frac{d\alpha}{da} = -\frac{6A}{a^2} + \frac{8\alpha}{a}.$$

On aboutit ainsi à une équation différentielle du premier degré (avec second membre) sur  $\alpha$  avec condition initiale dont la résolution par une méthode de variation de constante donne

$$(3.53) \quad \alpha = \frac{2}{3} A a^8 \left( -\frac{1}{a_0^9} + \frac{1}{a^9} \right) = -\frac{2A}{3a} \left[ \left( \frac{a}{a_0} \right)^9 - 1 \right].$$

On souhaite par la suite exprimer  $f_2^m$  et  $\alpha$  en fonction de la porosité initiale et actuelle de  $f_1$  au lieu de la valeur initiale et actuelle du rayon  $a$  de la cavité centrale. Le premier exige qu'on précise la valeur de  $f_1$  quand la porosité n'est plus uniforme (le cas uniforme a été traité lors de la résolution du problème à l'instant initial). Une extension naturelle de la définition [3.1] donne

$$(3.54) \quad f_1^0 \equiv (1 - \bar{f}_2) \frac{a_0^3}{b_0^3}.$$

où  $\bar{f}_2$  représente une sorte de valeur moyenne de la porosité dans la matrice. Il est facile de vérifier que cette définition préserve le caractère additif des porosités. A l'ordre le plus bas vis-à-vis de  $\bar{f}_2$ , on a

$$(3.55) \quad \frac{f_1 a_0^3 a^3}{f_1^0 b_0^3 b^3}.$$

De plus, à l'ordre le plus bas vis-à-vis de  $\bar{f}_2$ , l'incompressibilité de la matrice donne  $b^3 - a^3 = b_0^3 - a_0^3$  et il s'ensuit que

$$(3.56) \quad \frac{b_0^3}{b^3} = \frac{b_0^3}{b_0^3 - a_0^3} \frac{b^3 - a^3}{b^3} = \frac{1 - f_1}{1 - f_1^0} = 1,$$

à l'ordre le plus bas vis-à-vis de  $f_1^0$ ,  $f_1$  et  $\bar{f}_2$ . La combinaison de ce résultat avec le précédent conduit à :

$$(3.57) \quad \frac{f_1}{f_1^0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^3.$$

à l'ordre le plus bas vis-à-vis de  $f_1^0$ ,  $f_1$  et  $\bar{f}_2$ . En rapprochant l'équation [3.57] des équations [3.50]<sub>2</sub> et [3.53], on obtient

$$(3.58) \quad \begin{cases} f_2^m = f_2^0 \left( \frac{f_1}{f_0} \right)^2 + \frac{A}{3} \left( \left( \frac{f_1}{f_0} \right)^2 - 1 \right) \\ \alpha = -\frac{2A}{3a} \left( \frac{f_1}{f_1^0} \right)^{-\frac{1}{3}} \left[ \left( \frac{f_1}{f_1^0} \right)^3 - 1 \right]. \end{cases}$$

---

## Annexe 2 : Evolutions des paramètres internes durant la coalescence des petites cavités

---

L'objet de cet appendice est d'établir les équations [3.35] et [3.38] du chapitre [3]. Ceci nécessitera une analyse détaillée de ce qui se passe entre deux instants voisins  $t$  et  $t + dt$  au cours de l'étape (ii) du processus de rupture. On rappelle que  $a^*$  désigne la limite entre la matrice ruinée et la matrice saine. On considère qu'il se produit, au cours de chaque pas de temps, deux mécanismes :

- écoulement plastique dans la région poreuse  $a^* \leq r \leq b$  ;
- coalescence des petites cavités de la région où  $f_2$  dépasse  $f_2^c$ .

Les variations d'une grandeur donnée  $X$  durant ces deux étapes seront notées  $d_1 X$  et  $d_2 X$ , respectivement. Cette décomposition en deux mécanismes successifs qui apparaît simultanément en réalité ; il convient d'en donner une explication. Ecrire, à tout instant  $t$ , la loi d'écoulement et l'équation d'évolution de la porosité  $f_2$  dans la zone poreuse, permet de calculer (à une constante multiplicative près) la vitesse  $\mathcal{U}$  et le taux d'accroissement de  $f_2(r, t)$  à partir seulement de la connaissance du rayon extérieur  $a^*(t)$  de la zone ruinée et du champ  $\sigma(r, t)$ , indépendamment de sa dérivée temporelle  $\dot{\sigma}(r, t)$  : le mécanisme d'endommagement (annulation du champ  $\sigma$  dans la nouvelle zone ruinée, ce qui entraîne une variation de  $\sigma$  dans toute la structure) est sans influence sur le calcul. On peut donc calculer, à un instant  $t + dt$  infinitésimalement ultérieur, les positions des points matériels et la porosité dans la zone poreuse en faisant abstraction de la propagation de la zone ruinée : ce calcul correspond à l'étape 1.



Il faut dans la suite déterminer la nouvelle position de la limite  $a^*(t + dt)$  de la zone ruinée. Il suffit pour cela d'écrire la condition  $f_2(a^*(t + dt), t + dt) = f_2^c$  : c'est l'étape 2, qui a donc lieu sans mouvement des points matériels (ce mouvement ayant été entièrement déterminé dans l'étape 1) mais est accompagné par une variation de  $\sigma$ , du fait de l'annulation de  $\sigma_{rr}$  en une nouvelle position  $a^*(t + dt)$ .

Considérons pour commencer, l'étape 1. Au cours de cette étape, l'accroissement  $d_1 f_2^m$  de la porosité au point  $a^*$  est donné par des formules analogues à [3.50]<sub>2</sub> de l'appendice A, mais en y remplaçant  $f_2^m$ ,  $\dot{a}$  et  $a$  par  $d_1 f_2^m$ ,  $f_2^c$ ,  $d_1 a$  et  $a^*$  :

$$d_1 f_2^m = 6 \left( f_2^m + \frac{A}{3} \right) \frac{d_1 a^*}{a^*}.$$

Au cours l'étape (i) (avant la coalescence des petites cavités) du processus de rupture, les rapports  $(\bar{f}_{2c}/\bar{f}_2)(\dot{f}_1/f_1)$  et  $\bar{f}_{2c}/\dot{f}_1$  sont toujours sensiblement constants, il est raisonnable d'admettre que ceci reste vrai au cours du mécanisme 1 de l'étape (ii) à condition de remplacer  $\bar{f}_{2c}$ ,  $\bar{f}_{2g}$ ,  $\dot{f}_1$ ,  $f_1$  par  $d_1 \bar{f}_{2c}$ ,  $d_1 \bar{f}_{2g}$ ,  $d_1 \dot{f}_1^*$  et  $f_1^*$  (la porosité "effective" de la cavité centrale et de la zone ruinée) :

$$(3.59) \quad \begin{cases} \frac{d_1 c \bar{f}_2}{\bar{f}_2} = \gamma \frac{d_1 \dot{f}_1^*}{f_1^*} \\ \frac{d_1 g \bar{f}_2}{d_1 \dot{f}_1^*} = A \gamma' \quad \text{avec} \quad \gamma' = \frac{u_b^0}{v_b^0} \end{cases}$$

où la valeur de la constante  $\gamma$  a été précisée dans le texte. De plus, en éliminant  $b^3$  entre les équations [3.25] et [3.27], on a

$$a^{*3} = \frac{f_1^*}{(1 - \bar{f}_2)(1 - f_1^* - \bar{f}_2)} \Omega_{M,ZP}$$

En prenant la dérivée logarithmique de cette équation, on a  $d_1 \Omega_{M,ZP} = 0$  (le volume de métal contenu dans la zone poreuse ne change pas au cours du mécanisme 1) :

$$3 \frac{d_1 a^*}{a^*} = \frac{d_1 \dot{f}_1^*}{f_1^*} + \frac{d_1 \bar{f}_2}{1 - \bar{f}_2} + \frac{d_1 f_1^* + d_1 \bar{f}_2}{1 - f_1^* - \bar{f}_2},$$

c'est-à-dire, à l'ordre le plus bas vis-à-vis des porosités,

$$(3.60) \quad \frac{d_1 \dot{f}_1^*}{f_1^*} = 3 \frac{d_1 a^*}{a^*}.$$

A l'aide des équations [3.27] et [3.26], on obtient finalement :

$$f_1^* - f_1 = \frac{\Omega_{M,ZR}}{b^3};$$

du fait que  $d_1 \Omega_{M,ZR} = 0$ , une différentiation de cette équation donne

$$d_1 f_1^* - d_1 f_1 = -3 \frac{\Omega_{M,ZR}}{b^4} d_1 b = -3 (f_1^* - f_1) \frac{d_1 b}{b}$$

L'équation [3.25] implique que  $1 - \bar{f}_2 = \Omega_{M,ZP} / (b^3 - a^{*3})$ . En prenant la dérivée logarithmique de cette équation, on trouve à l'ordre le plus bas vis-à-vis des porosités, en tenant compte de la relation [3.27] :

$$\begin{aligned} -d_1 \bar{f}_2 &\approx -\frac{3b^2 d_1 b - 3a^{*2} d_1 a^*}{b^3 - a^{*3}} \approx -3 \frac{(d_1 b)/b - (a^{*3}/b^3) (d_1 a^*)/a^*}{1 - a^{*3}/b^3} \\ &\approx -3 \frac{(d_1 b)/b - f_1^* (d_1 a^*)/a^*}{1 - f_1^*} \approx 3 \left( \frac{d_1 b}{b} - f_1^* \frac{d_1 a^*}{a^*} \right) \end{aligned}$$

qui implique, à l'aide des équations [3.59] et [3.60], que

$$\begin{aligned} d_1 \bar{f}_2 &= d_{1c} \bar{f}_2 + d_{1g} \bar{f}_2 = \gamma \frac{\bar{f}_2}{f_1^*} d_1 f_1^* + A\gamma' d_1 f_1^* \\ &= 3 (\gamma \bar{f}_2 + A\gamma' f_1^*) \frac{d_1 a^*}{a^*} = 3 \left( \frac{d_1 b}{b} - f_1^* \frac{d_1 a^*}{a^*} \right) \\ &\Rightarrow \frac{d_1 b}{b} = [\gamma \bar{f}_2 + (1 + A\gamma') f_1^*] \frac{d_1 a^*}{a^*} \end{aligned}$$

En utilisant l'expression précédente de  $d_1 b/b$ , celle de  $d_1 f_1^* - d_1 f_1$  donne

$$d_1 f_1^* - d_1 f_1 = -3 (f_1^* - f_1) \frac{d_1 b}{b} = -3 (f_1^* - f_1) [\gamma \bar{f}_2 + (1 + A\gamma') f_1^*] \frac{d_1 a^*}{a^*}$$

c'est-à-dire, à l'ordre le plus bas par rapport aux porosités (en comparant avec les équations [3.59] et [3.60]),

$$(3.61) \quad d_1 f_1 = d_1 f_1^*.$$

Considérons à présent le mécanisme 2. La vitesse étant nulle, la distribution de porosité  $f_2$  ne change pas. La coalescence des petites cavités dans les régions où  $f_2 > f_2^c$ , induit cependant une variation  $d_2 a^*$  du rayon extérieur de la zone ruinée; cette variation conduit à une variation  $d_2 f_2^m$  de la porosité  $f_2^m$  au point  $r = a^*$  donnée par :

$$(3.62) \quad d_1 f_2^m = \alpha d_2 a^*$$

où l'on rappelle que  $\alpha \equiv (\partial f_2 / \partial r)(r = a^*)$ .

La variation  $d_2 a^*$  de  $a^*$  induit aussi une variation  $d_2 \Omega_{M,ZP}$  du volume de métal contenu dans la zone poreuse donnée par :

$$(3.63) \quad d_2 \Omega_{M,PZ} = -3 (1 - f_2^c) a^{*2} d_2 a^*$$

du fait que la fraction volumique de métal au voisinage du point  $r = a^*$  est  $1 - f_2^c$ . De plus, au cours le mécanisme 2 considéré ici, le rayon extérieur de la sphère ne change pas ( $d_2 b = 0$ ) puisqu'il n'y a

pas de mouvement de matière. Par conséquent, une différentiation de la définition [3.25] de  $\bar{f}_2$  donne :

$$\begin{aligned} d_2 \bar{f}_2 &= (1 - f_2^c) \frac{3a^*}{b^3 - a^{*3}} d_2 a^* - 3 \frac{d_2 \Omega_{M,PZ}}{(b^3 - a^{*3})^2} a^{*2} d_2 a^* \\ &= \frac{3a^*}{b^3 - a^{*3}} [(1 - f_2^c) - (1 - \bar{f}_2)] \frac{d_2 a^*}{a^*} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en utilisant l'équation [3.27],

$$(3.64) \quad d_2 \bar{f}_2 = 3f_1^* (\bar{f}_2 - f_2^c) \frac{d_2 a^*}{a^*}$$

à l'ordre le plus bas vis-à-vis des porosités.

Par ailleurs, en prenant la dérivée logarithmique de la définition [3.27] de la "porosité effective", on a

$$\frac{d_2 f_1^*}{f_1^*} = 3 \frac{d_2 a^*}{a^*} - \frac{d_2 \bar{f}_2}{1 - \bar{f}_2},$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'équation [3.64], à l'ordre le plus bas vis-à-vis des porosités

$$(3.65) \quad \frac{d_2 f_1^*}{f_1^*} = 3 \frac{d_2 a^*}{a^*}.$$

Finalement, la porosité *vraie* totale  $f_1 + \bar{f}_2$  (tenant compte du métal contenu dans la zone ruinée) est constante au cours du mécanisme 2, du fait que le volume de métal et le volume total de la sphère sont tous les deux constants). Par conséquent, à partir toujours de l'équation [3.64], on a à l'ordre le plus bas vis-à-vis des porosités :

$$(3.66) \quad d_2 f_1 = -d_2 \bar{f}_2 = 3f_1^* (f_2^c - \bar{f}_2) \frac{d_2 a^*}{a^*}.$$

Combinons à présent les mékansimes 1 et 2. La condition  $f_2(a^*(t), t) = Cste = f_2^c$  à tout instant implique que  $d_1 f_2^m + d_2 f_2^m = 0$ , qui donne, à l'aide des équations [3.59] et [3.62], le déplacement  $d_2 a^*$  de la limite de la zone ruinée pendant le mécanisme 2 en fonction de son déplacement  $d_1 a^*$  au cours du mécanisme 1 :

$$\begin{aligned} d_1 f_2^m + d_2 f_2^m = 0 &\Rightarrow 6 \left( f_2^m + \frac{A}{3} \right) \frac{d_1 a^*}{a^*} + \alpha d_2 a^* = 0 \\ (3.67) \quad &\Rightarrow d_2 a^* = -\frac{6}{\alpha a^*} \left( f_2^c + \frac{A}{3} \right) d_1 a^*. \end{aligned}$$

Une combinaison des équations [3.59], [3.60], [3.64] et [3.67] donne alors la variation totale de la porosité  $\bar{f}_2$  due aux deux mécanismes :

$$\begin{aligned} d \bar{f}_2 &= d_{1c} \bar{f}_2 + d_{1g} \bar{f}_2 + d_2 \bar{f}_2 = \gamma \frac{\bar{f}_2}{f_1^*} d_1 f_1^* + A \gamma' d_1 f_1^* + 3f_1^* (\bar{f}_{2c} - f_{2c}) \frac{d_2 a^*}{a^*} \\ &= \left( \gamma \frac{\bar{f}_2}{f_1^*} + A \gamma' \right) 3f_1^* \frac{d_2 a^*}{a^*} + 3f_1^* (\bar{f}_{2c} - f_{2c}) \left( -\frac{6}{\alpha a^*} \right) \left( f_2^m + \frac{A}{3} \right) d_1 a^* \\ (3.68) \quad &= 3 \left[ \gamma \bar{f}_2 + A \gamma' d_1 f_1^* + \frac{6}{\alpha a^*} f_1^* (f_2^c - \bar{f}_2) \left( f_2^m + \frac{A}{3} \right) \right] \frac{d_1 a^*}{a^*}. \end{aligned}$$

On trouve la variation totale de la “porosité effective”  $f_1^*$  en combinant les équations [3.60], [3.65] et [3.67] :

$$\begin{aligned}
 df_1^* &= d_1 f_1^* + d_2 f_1^* = 3f_1^* \frac{d_1 a^*}{a^*} + 3f_1^* \frac{d_2 a^*}{a^*} \\
 &= 3f_1^* \frac{d_1 a^*}{a^*} + 3f_1^* \left( -\frac{6}{\alpha a^*} \right) \left( f_2^m + \frac{A}{3} \right) \frac{d_1 a^*}{a^*} \\
 (3.69) \quad &= 3 \left[ 1 - \frac{6}{\alpha a^*} \left( f_2^c + \frac{A}{3} \right) \right] f_1^* \frac{d_1 a^*}{a^*}.
 \end{aligned}$$

Finalement, la variation de la porosité *vraie*  $f_1$  est déduite des équations [3.60], [3.61], [3.66] et [3.67] :

$$\begin{aligned}
 df_1 &= d_1 f_1 + d_2 f_1 = 3f_1^* \frac{d_1 a^*}{a^*} + 3f_1^* (f_2^c - \bar{f}_2) \left( -\frac{6}{\alpha a^*} \right) \left( f_2^c + \frac{A}{3} \right) d_1 a^* \\
 (3.70) \quad &= 3 \left[ 1 + \frac{6}{\alpha a^*} (f_2^c - \bar{f}_2) \left( f_2^c + \frac{A}{3} \right) \right] f_1^* \frac{d_1 a^*}{a^*}.
 \end{aligned}$$

Calculons les dérivées  $d\bar{f}_2/df_1^*$  et  $df_1^*/df_1$  en faisant le rapport des équations [3.68] et [3.69] d’une part et des équations [3.69] et [3.70] de l’autre :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{f}_2}{df_1^*} &= \frac{\gamma \bar{f}_2 + A\gamma' d_1 f_1^* + \frac{6}{\alpha a^*} f_1^* (f_2^c - \bar{f}_2) \left( f_2^m + \frac{A}{3} \right)}{\left[ 1 - \frac{6}{\alpha a^*} \left( f_2^c + \frac{A}{3} \right) \right] f_1^*} \\
 (3.71) \quad &= \frac{\gamma \frac{\bar{f}_2}{f_1^*} + A\gamma' d_1 + \frac{6}{\alpha a^*} (f_2^c - \bar{f}_2) \left( f_2^m + \frac{A}{3} \right)}{1 - \frac{6}{\alpha a^*} \left( f_2^c + \frac{A}{3} \right)}
 \end{aligned}$$

et

$$(3.72) \quad \frac{df_1^*}{df_1} = \frac{1 - \frac{6}{\alpha a^*} \left( f_2^c + \frac{A}{3} \right)}{1 + \frac{6}{\alpha a^*} f_1^* (f_2^c - \bar{f}_2) \left( f_2^m + \frac{A}{3} \right)}.$$

Jusqu’à présent, nous n’avons pas encore introduit l’hypothèse selon laquelle  $t \equiv t_c^+$ , autrement dit le début de coalescence des petites cavités. Cependant, l’expression de  $\alpha a^*$  est inconnue pour  $t > t_c$ . Dans ce cas, la quantité  $\alpha a^* = (\alpha a)(t_c)$  peut être calculée en utilisant entre autres l’équation [3.55] de l’appendice A. On a

$$(3.73) \quad f_2^c = f_2^0 \left( \frac{f_1^c}{f_1^0} \right)^2 + \frac{A}{3} \left[ \left( \frac{f_1^c}{f_1^0} \right)^2 - 1 \right]$$

soit

$$\left( f_2^0 + \frac{A}{3} \right) \left( \frac{f_1^c}{f_1^0} \right)^2 = f_2^0 + \frac{A}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{f_1^c}{f_1^0} = \sqrt{\frac{f_2^c + \frac{A}{3}}{f_2^0 + \frac{A}{3}}}.$$

On note ici  $f_1^c$  au lieu de  $f_1(t_c)$  pour abrégier et on ne néglige pas  $f_2^0$  devant le paramètre  $A$  (cela n'a pas non plus été fait plus haut, on n'a négligé que  $(f_2^c)^2$  devant  $A$  et  $A$  devant 1 pour calculer  $\alpha$ ). Or à  $t_c$

$$\alpha a^* = \alpha a = -\frac{2}{3}A \left[ \left( \frac{a}{a_0} \right)^9 - 1 \right] \approx \frac{2}{3}A \left[ \left( \frac{f_1^c}{f_1^0} \right)^3 - 1 \right].$$

On voit que le terme  $\alpha a^*(t_c)$  est proportionnel à la porosité, car  $A$  est proportionnel à la porosité, à l'ordre le plus bas vis-à-vis des porosités, [3.71] devient (en négligeant le terme  $A\gamma'$ )

$$\frac{d\bar{f}_2}{df_1^*}(t_c) = \frac{\gamma \bar{f}_2(t_c)/f_1(t_c)}{1 + \frac{6(f_2^c + \frac{A}{3})}{\frac{2}{3}A \left[ \left( \frac{f_1^c(t_c)}{f_1^0} \right)^3 - 1 \right]}} = \frac{A\gamma \bar{f}_2(t_c) \left[ \left( \frac{f_1^c(t_c)}{f_1^0} \right)^3 - 1 \right]}{f_1(t_c) \left[ 9f_2^c + A \left( \left( \frac{f_1^c(t_c)}{f_1^0} \right)^3 + 2 \right) \right]}$$

avec

$$\frac{f_1^c}{f_1^0}(t_c) = \sqrt{\frac{f_2^c + \frac{A}{3}}{f_2^0 + \frac{A}{3}}}.$$

De même, la relation [3.72] devient

$$\begin{aligned} \frac{df_1^*}{df_1}(t_c) &\approx 1 - \frac{6}{\alpha a^*} \left( f_2^c + \frac{A}{3} \right) = 1 + \frac{6 \left( f_2^c + \frac{A}{3} \right)}{\frac{2}{3}A \left[ \left( \frac{f_1^c(t_c)}{f_1^0} \right)^3 - 1 \right]} \\ &= \frac{\left[ 9f_2^c + A \left( \left( \frac{f_1^c(t_c)}{f_1^0} \right)^3 + 2 \right) \right]}{A \left[ \left( \frac{f_1^c(t_c)}{f_1^0} \right)^3 - 1 \right]}. \end{aligned}$$

Le produit de [3.71] et [3.72] s'arrange de la façon suivante :

$$\frac{d\bar{f}_2}{df_1}(t_c) = \frac{d\bar{f}_2}{df_1^*}(t_c) \frac{df_1^*}{df_1}(t_c) = \gamma \frac{\bar{f}_2}{f_1}(t_c).$$

Il vient alors que

$$(3.74) \quad \frac{d\bar{f}_2}{df_1}(t_c) = \frac{\gamma \frac{\bar{f}_2}{f_1^*} + A\gamma' d_1 + \frac{6}{\alpha a^*} (f_2^c - \bar{f}_2) \left( f_2^m + \frac{A}{3} \right)}{1 + (\bar{f}_2 - f_2^c) \frac{6}{\alpha a^*} \left( f_2^c + \frac{A}{3} \right)}$$

Plus haut, nous avons négligé  $A\gamma'$  devant  $\gamma \frac{\bar{f}_2}{f_1(t_c)}$ . En réalité,  $\gamma'$  est proportionnel à  $-\frac{2}{3} \log(qf_1^0)$  qui peut être assez élevé, ce terme n'a d'ailleurs pas été négligé dans l'expression

$$\frac{\bar{f}_2}{f_1} = \gamma \frac{\bar{f}_2}{f_1} + A\gamma'.$$

Par conséquent, nous le conservons. En revanche, nous négligeons les termes en  $\frac{1}{\alpha\alpha^*}(\dots)$  car ils sont proportionnels à la porosité (il apparaît ici une différence par rapport au cas sans germination où  $\alpha\alpha^*$  est proportionnel au carré de la porosité et non à la porosité). L'équation [3.74] devient donc

$$(3.75) \quad \frac{d\bar{f}_2}{df_1} = \gamma \frac{\bar{f}_2}{f_1^*} + A\gamma'$$

L'expression est la même qu'avant la coalescence. En conclusion, on a

$$(3.76) \quad \begin{cases} \frac{d\bar{f}_2}{df_1}(t_c^+) \approx \gamma \frac{\bar{f}_2(t_c)}{f_1(t_c)} + A\gamma' \\ \frac{df_1^*}{df_1}(t_c^+) \approx \frac{9f_2^c + A \left( \left( \frac{f_1^c(t_c)}{f_1^0} \right)^3 + 2 \right)}{A \left[ \left( \frac{f_1^c(t_c)}{f_1^0} \right)^3 - 1 \right]} \end{cases}$$

Il ne reste qu'à intégrer l'équation différentielle (avant la coalescence) [3.75] pour lier  $\bar{f}_2(t_c)$  à  $f_1(t_c)$ . On pose à cet effet  $\bar{f}_2 = g(f_1)f_1^\gamma$  et on a

$$\frac{d\bar{f}_2}{df_1} = \gamma g'(f_1)f_1^\gamma + g(f_1)f_1^{\gamma-1} \Rightarrow g' = A\gamma'f_1^{-\gamma} \Rightarrow g = \frac{A\gamma'f_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} + Cste.$$

A l'instant initial,

$$g(f_1^0) = f_2^0 (f_2^0)^{-\gamma} \Rightarrow f_2^0 (f_2^0)^{-\gamma} = \frac{A\gamma' (f_1^0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + Cste.$$

On en déduit la valeur de la constante

$$Cste = \frac{f_2^0}{(f_1^0)^\gamma} + \frac{A\gamma'}{\gamma-1} (f_1^0)^{1-\gamma}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \bar{f}_2 &= \left[ \frac{A\gamma'}{\gamma-1} \left( (f_1^0)^{1-\gamma} - (f_1)^{1-\gamma} \right) + f_2^0 (f_1^0)^{-\gamma} \right] f_1^\gamma \\ &= \frac{A\gamma'}{\gamma-1} \left[ f_1^0 \left( \frac{f_1}{f_1^0} \right)^\gamma - f_1 \right] + f_2^0 \left( \frac{f_1}{f_1^0} \right)^\gamma \end{aligned}$$

soit

$$(3.77) \quad \bar{f}_2(t_c) = \left( f_2^0 + \frac{A\gamma'}{\gamma-1} f_1^0 \right) \left( \frac{f_1(t_c)}{f_1^0} \right)^\gamma - \frac{A\gamma'}{\gamma-1} f_1(t_c).$$

Pour  $f_2^0 = 0$ , [3.77] donne :

$$\bar{f}_2(t_c) = \frac{A\gamma'}{\gamma-1} f_1(t_c) \left( \frac{f_1(t_c)}{f_1^0} \right)^{\gamma-1} - \frac{A\gamma'}{\gamma-1} f_1(t_c)$$

soit

$$\bar{f}_2(t_c) = \frac{A\gamma'}{\gamma-1} f_1(t_c) \left[ \left( \frac{f_1(t_c)}{f_1^0} \right)^{\gamma-1} - 1 \right].$$

---

## Annexe 3 : Valeur moyenne, $\bar{\epsilon}$ , de $\epsilon$ à l'instant initial

---

Cette annexe a pour but de calculer la valeur moyenne,  $\bar{\epsilon}$ , de  $\epsilon$  à l'instant initial dans la matrice en vue de l'évaluation du taux de croissance des cavités dû à la germination. Le taux de porosité dans la matrice à l'instant initial peut s'écrire en utilisant la formule [3.21] :

$$(3.78) \quad (1 - f_2^0)\epsilon = 2 \left[ \left( -v + \log \frac{1 - v^2}{qf_0^2} \right) \frac{1 - v^2}{1 + 2v - v^2} + v \right] \frac{\mathcal{U}}{r}.$$

L'expression de ce taux devient donc :

$$(3.79) \quad \begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi (b_0^3 - a_0^3)} \int_{a_0}^{b_0} \frac{2}{1 - f_2^0} \left[ \left( -v + \log \frac{1 - v^2}{qf_0^2} \right) \frac{1 - v^2}{1 + 2v - v^2} + v \right] \frac{\mathcal{U}}{r} 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{6}{b_0^3 - a_0^3} \frac{1}{1 - f_2^0} \int_{a_0}^{b_0} \left[ \left( -v + \log \frac{1 - v^2}{qf_0^2} \right) \frac{1 - v^2}{1 + 2v - v^2} + v \right] \mathcal{U} r dr. \end{aligned}$$

Une combinaison de la relation [3.8] avec celle de l'équation d'équilibre radiale [3.13]<sub>2</sub>, donne :

$$(3.80) \quad \frac{du}{dr} = \frac{2v}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{r} = \frac{du}{2v} = \frac{1}{2} \frac{du}{dv} \frac{dv}{v}.$$

En utilisant les formules [3.8]<sub>2</sub> et [3.80]<sub>2</sub>, la relation [3.79] devient

$$\bar{\epsilon} = \frac{6\dot{a}v_a a_0^2}{(b_0^3 - a_0^3)(1 - f_2^0)} \int_{a_0}^{b_0} \left[ \left( -v + \text{Log} \frac{1 - v^2}{qf_0^2} \right) \frac{1 - v^2}{1 + 2v - v^2} \frac{1}{2} \frac{du}{dv} \frac{dv}{v^2} + \frac{dr}{r} \right].$$

De plus,

$$u = \frac{2}{3} \left( -v + \log \frac{1 - v^2}{qf_0^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dv} = \frac{2}{3} \left( -1 - \frac{2v}{1 - v^2} \right) = -\frac{2}{3} \frac{1 + 2v - v^2}{1 - v^2}.$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon} &= \frac{6}{b_0^3 - a_0^3} \frac{1}{1 - f_2^0} \left[ \log \frac{b_0}{a_0} + \int_{v_b}^{v_a} \left( -v + \log \frac{1 - v^2}{qf_0^2} \right) \frac{dv}{3v^2} \right] \\ &= \frac{6}{b_0^3 - a_0^3} \frac{1}{1 - f_2^0} \left[ \log \frac{b_0}{a_0} + \frac{1}{3} \int_{v_b}^{v_a} \left( -\frac{1}{v} + \frac{\log(1 - v^2)}{v^2} - \frac{\log(qf_0^2)}{v^2} \right) dv \right].\end{aligned}$$

Cherchons une primitive de  $\log(1 - v^2)/v^2$ . On a

$$\int \log(1 - v^2) \frac{dv}{v^2} = -\frac{\log(1 - v^2)}{v} - 2 \int \frac{dv}{1 - v^2} = -\frac{\log(1 - v^2)}{v} + \log \frac{1 - v}{1 + v}.$$

Par la suite

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon} &= \frac{\dot{a}v_a a_0^2}{(b_0^3 - a_0^3)(1 - f_2^0)} \times \\ &\quad \left[ \log \frac{b_0}{a_0} + \log \frac{v_b}{v_a} + \log \left( \frac{1 - v_a}{1 + v_a} \frac{1 + v_b}{1 - v_b} \right) + \frac{1}{v_b} \log \frac{1 - v_b^2}{qf_2^0} - \frac{1}{v_a} \log \frac{1 - v_a^2}{qf_2^0} \right].\end{aligned}$$

En utilisant les équations [3.13], il est possible d'obtenir :

$$(3.81) \quad \frac{b_0^3}{a_0^3} \frac{1 - v_a}{(1 + v_a)} \frac{v_b(1 + v_b)}{1 - v_b} = 1.$$

De plus, la relation de bord libre  $u_a = u(r = a) = 0$  donne

$$(3.82) \quad u_a = 0 = \frac{2}{3} \left( -v_a + \log \frac{1 - v_a^2}{qf_2^0} \right) \Rightarrow \frac{1}{v_a} \log \frac{1 - v_a^2}{qf_2^0} = 1.$$

Par ailleurs, l'écriture de la valeur de  $u$  sur le second bord  $b$  de la sphère creuse donne :

$$(3.83) \quad u_b = \frac{2}{3} \left( -v_b + \log \frac{1 - v_b^2}{qf_2^0} \right) \Rightarrow \frac{1}{v_b} \log \frac{1 - v_b^2}{qf_2^0} = \frac{3}{2} \frac{u_b}{v_b} + 1.$$

En utilisant les formules [3.81], [3.82]<sub>2</sub> et [3.83]<sub>2</sub>, la valeur de  $\bar{\epsilon}$  se réduit à

$$(3.84) \quad \bar{\epsilon} = \frac{3\dot{a}v_a a_0^2}{(b_0^3 - a_0^3)(1 - f_2^0)} \frac{u_b}{v_b}.$$

**Discussions.** Pour les petites porosités

$$f_1 = (1 - \bar{f}_2) \frac{a^3}{b^3} \approx \frac{a^3}{b^3} \Rightarrow \dot{f}_1 \approx \frac{3a_0 \dot{a}}{b_0^3}$$

et du fait que, pour  $f_2$  petit,  $v_a \approx 1$ , on a

$$(3.85) \quad \bar{\epsilon} \approx \frac{\dot{f}_1}{1 - \dot{f}_1} \frac{v_a u_b}{v_b} \Rightarrow \frac{\bar{\epsilon}}{\dot{f}_1} \approx \frac{u_b}{v_b}.$$

Pour  $f_2^0 \rightarrow 0$ ,  $u_b \approx -\frac{2}{3} \log f_1^0$ ,  $v_b \approx 1$ , on a

$$\frac{\bar{\epsilon}}{\dot{f}_1} \approx -\frac{2}{3} \log f_1^0.$$



Le même résultat peut être obtenu pour  $f_1$  quelconque et  $f_2 = 0$ . En effet, on a alors

$$f_1 = \frac{a^3}{b^3} \Rightarrow \dot{f}_1 = \frac{3a^2\dot{a}}{b^3} - \frac{3a^3\dot{b}}{b^4}$$

et  $a^2\dot{a} = b^2\dot{b}$ , d'où il s'en vient que

$$\dot{f}_1 = 3(1 - f_1) \frac{a^2\dot{a}}{b^3}.$$

De plus,

$$u_b = -\frac{2}{3}\log f_1 \quad \text{et} \quad v_a = v_b = 1.$$

Ceci conduit à

$$(3.86) \quad \begin{cases} \bar{\epsilon} &= \frac{3a^2\dot{a}}{b^3 - a^3} \left( \frac{2}{3}\log f_1 \right) \\ \dot{f}_1 &= 3(1 - f_1) \frac{a^2\dot{a}}{b^3}, \end{cases}$$

par la suite

$$\frac{\bar{\epsilon}}{\dot{f}_1} \frac{b^3}{a^3 - b^3} = \frac{-\frac{2}{3}\log f_1}{1 - f_1} = \frac{-2}{(1 - f_2)^2} \log f_1.$$

Ce qui achève la démonstration.

---

# Conclusion générale

---

Nous avons consacré la plus grande partie de ce mémoire à l'étude de deux propositions de modifications du modèle de Gurson [Gur, 1977], faites par Leblond *et al.* [JBL, 1994] et Gologanu *et al.* [GLPD, 1997], pour résoudre le problème de la localisation de la déformation et de l'endommagement dans ce modèle. La première proposition consiste à utiliser une équation d'évolution non-locale de la porosité. La deuxième consiste en un modèle obtenu grâce à une extension de l'analyse de Gurson d'une sphère creuse soumise à des conditions de taux de déformation *homogène* au bord, au cas de conditions de taux de déformation *inhomogène* au bord. Bien que n'ayant en commun que très peu d'éléments, ces deux propositions introduisent toutes deux dans le modèle une longueur caractéristique (de l'ordre de l'espacement moyen entre cavités) dont le rôle est de limiter la concentration de l'endommagement.

Tout au long de la première partie, nous avons évalué l'efficacité pratique de chacune de ces deux propositions. Les deux critères utilisés étaient d'une part l'indépendance des résultats numériques vis-à-vis du maillage, et d'autre part la capacité du modèle à bien reproduire avec satisfaction les résultats d'expériences typiques de rupture ductile. Bien entendu, tout ceci nécessitait au préalable l'implémentation numérique des équations des modèles dans un code de calcul par éléments finis, en l'occurrence le code Systus développé par ESI Group.

Dans le premier cas, le plus simple, l'algorithme que nous proposons pour résoudre le problème de projection sur la surface de charge est fondamentalement analogue à celui, classique, d'Aravas [Ara, 1987], mais diffère de ce dernier à travers l'adoption d'un schéma de discrétisation temporel explicite vis-à-vis de la porosité. Le choix d'un tel algorithme garantit l'existence et l'unicité de la solution du problème de projection.

La méthode de régulation de l'équation d'évolution de la porosité par intégrale de convolution élimine les effets de dépendance des résultats vis-à-vis du maillage dans les simulations numériques par éléments finis, comme souhaité [Tve & Nee, 1995]. Ces dernières montrent cependant un accord médiocre entre les résultats expérimentaux et les prédictions du modèle pour des expériences typiques de rupture ductile. Cette médiocrité provient du fait que l'équation d'évolution non locale de la porosité de Leblond *et al.* [JBL, 1994] prédit un lissage excessif de la porosité au cours du temps dans le ligament en amont de la pointe de fissure.

Nous avons présenté une analyse théorique qui a révélé l'origine de ce phénomène, sous la forme d'une analogie indésirable avec une équation de diffusion. Une simple modification de l'équation d'évolution non locale de Leblond *et al.* [JBL, 1994] supprimant cette analogie a été proposée. Son utilisation conduit à un très bon accord entre les expériences et les prédictions numériques, validant ainsi la méthode de régulation de l'équation d'évolution de la porosité par intégrale de convolution de Leblond *et al.* [JBL, 1994] pour la résolution du problème de la localisation de la déformation et de l'endommagement dans le modèle de Gurson.

Cette méthode présente cependant l'inconvénient d'être de nature purement heuristique. Une autre difficulté liée à cette méthode concerne les effets de bord indésirables. Le voisinage sur lequel ont lieu les interactions entre points matériels peut déborder d'une partie de la structure sur une autre, alors qu'aucune interaction n'est attendue. Par exemple, le taux de porosité d'un point situé sur ou près de l'une des deux lèvres d'une fissure est influencé par la valeur du "taux de porosité local" des points du voisinage immédiat situés sur ou près de l'autre lèvre de la fissure, malgré l'espace qui sépare les deux lèvres.

Ces deux inconvénients sont suffisants pour nous faire envisager l'implémentation numérique et l'évaluation critique de la deuxième solution proposée au problème de la localisation de la déformation et de l'endommagement.

Cette implémentation numérique soulève deux difficultés. La première concerne la nécessité apparente de l'usage d'éléments de classe  $C^1$ . Pour lever cette difficulté, on introduit une nouvelle variable nodale destinée à être égale au taux de déformation, on modifie l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs, et on impose l'égalité entre la nouvelle variable et le taux de déformation par une méthode de pénalisation. Cette procédure est l'exact équivalent, dans la présent contexte, de la transition de la théorie des plaques ou coques de Love-Kirchhoff à celle de Mindlin-Reissner. La deuxième difficulté réside dans la résolution du problème de projection sur la surface de charge complexe. Cette résolution est, réduite à la recherche de deux scalaires inconnus à travers une paramétrisation de la surface de charge. L'adoption d'un algorithme "mixte" implicite/explicite, explicite par rapport à la

porosité mais implicite par rapport aux autres variables internes, assure de nouveau l'existence et l'unicité de ce problème.

Afin de valider l'implémentation numérique des équations du modèle, les solutions analytiques exactes de deux problèmes particuliers ont été présentées et comparées aux solutions numériques. Il s'agit des problèmes d'une sphère creuse élastique en petites transformations, puis visqueuse en grandes transformations, et d'une poutre élastoplastique en flexion pure en déformation plane, en petites transformations. La solution de ce second problème a aussi servi à mieux comprendre certains aspects du modèle.

Les simulations numériques ont indiqué que le deuxième modèle règle le problème de la dépendance des résultats numériques par rapport au maillage. Elles ont cependant révélé des difficultés de convergence de l'algorithme, qui nous ont obligé à utiliser une variante explicite de l'algorithme élastoplastique utilisant de très petits pas de temps. Avec cette modification, le modèle prédit des résultats qui sont en accord satisfaisant avec les expériences.

Comme on le voit, la deuxième proposition semble, elle aussi, être une solution efficace au problème de la localisation de la déformation et de l'endommagement dans le modèle de Gurson. En raison du nombre élevé des degrés de liberté (6 degrés de liberté par nœud en 2D), l'un des inconvénients de cette proposition est certainement le coût en temps de calcul. Cette difficulté notoire en 2D serait encore accrue en 3D (9 degrés de liberté par nœud). Néanmoins cette approche est plus satisfaisante théoriquement que la première car elle est fondée sur des arguments non plus heuristiques mais de nature micromécanique.

Dans la deuxième partie de ce mémoire, nous avons défini un modèle de type Gurson pour un matériau ductile poreux à double population de cavités, étendant celui de Perrin *et al.* [Per & Leb, 2000], *via* de la prise en compte de la germination des cavités de la seconde population. Ce modèle contient très peu de paramètres internes et est obtenu à partir de la résolution à l'instant initial, et au-delà de cet instant, du problème-type d'une sphère creuse dont la matrice métallique est poreuse, et soumise à un chargement hydrostatique. Ce modèle prend en compte les couplages entre la croissance des grosses cavités et la germination, la croissance et la coalescence des petites cavités. Il ouvre la voie à des études sur la coalescence des grosses cavités assistée par la germination, la croissance et la coalescence des petites cavités.

---

# Bibliographie

---

- [Aif, 1987] E. C. AIFANTIS, *The Physics of Plastic Deformation*, Int. J. Plas, **3** (1987), pp. 211-247.
- [Ara, 1987] N. ARAVAS, *On the Numerical Integration of a Class of Pressure-Dependent Plasticity Models*, Int. J. Num. Meth. Engng., **24** (1987), pp. 1395-1416.
- [Baz & Bel, 1984] Z.P. BAZANT, T.B. BELYTSCHKO, AND T.P. CHANG, *Continuum Theory for Strain-Softening*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, **110** (1984), pp. 1666-1692.
- [Baz & Pij, 1988] Z.P. BAZANT AND G. PIJAUDIER-CABOT, *Non-local Continuum Damage, Localization Instability and Convergence*, J. Appl. Mech., **55** (1988), pp. 287-293.
- [Bau, 1996] L. BAUVINEAU, *Approche Locale de la Rupture Ductile. Application à un Acier Carbone-Manganèse* Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris, 1996.
- [Ben, 2000] A. BENZERGA, *Rupture d'Aciers pour Gazoducs*, Thèse de Doctorat, Ecoles des Mines de Paris, 2000.
- [Ber, 1981] F.M. BEREMIN, *Study of Fracture Criteria for Ductile Rupture of A508 cl3* Advanced in Fracture Research (ICF5), Pergamon Press, 1981.
- [Bes, 2001] J. BESSON, D. STEGLICH, AND W. BROCKS, *Modeling of Crack Growth in Round Bars and Plane Strain Specimens*, Int. J. Solids Structures, **38** (2001), pp. 8259-8284.
- [Bes & Gui, 2003] J. BESSON AND C. GUILLEMER-NEEL, *An Extension of Green and Gurson Models to Kinematics Hardening*, Mech. Materials, **35** (2003), pp. 1-18.
- [Chu & Nee, 1980] C.C. CHU AND A. NEEDLEMAN, *Void Nucleation Effects on Shear Localization in Porous Plastic Solids*, ASME J. Engng. Materials Technol., **102** (1980), pp. 249-256.

- [DeB, 1991] R. DE BORST, *Simulation of Strain Localization : a Reappraisal of the Cosserat Continuum*, Eng. Comp., **8** (1991) pp. 317-332.
- [DLM, 1992] J. DEVAUX, J.B. LEBLOND, G. MOTTET AND G. PERRIN, *Some New Applications of Damage Models for Ductile Metals*, Symposium on the promotion of Application of Local Fracture Damage Models to Engineering Fracture Problems, Tempe, Arizona, 1992.
- [DJL, 1995] J. DEVAUX, P. JOLY, AND J.B. LEBLOND, *Simulation by the Local Approach of the Ductile Crack Growth in a Pressure Vessel Steel using an Improved Gurson Tvergaard model*, 21st MPA Seminar, 1995.
- [ESIG, 1992] J. DEVAUX, G. MOTTET, *Etude numérique de la rupture ductile de l'acier de cuve 16MND5 : Simulation des éprouvettes fissurées de type TA et CTJ*, Note Esi N° LTSW.92/2036.
- [ESI, 1992] J. DEVAUX, G. MOTTET AND J.M. BERGHEAU, *Modélisation de la Rupture Ductile : Etude de la Discrétisation en Pointe d'une Fissure pour Simuler son Emoussement et Assurer sa Propagation*, Note Esi N° LTSW.92/2029.
- [Dev & Mot, 1992] J. DEVAUX AND G. MOTTET, *Application du modèle de rupture ductile avec délocalisation de l'endommagement : Essais numériques sur des éprouvettes entaillées et fissurées*, Note Esi N° LTSW.92/2027/A.
- [ELP, 2006] K.ENAKOUTSA, J.B LEBLOND, AND G. PERRIN, *Numerical Implementation and Assessment of a Phenomenological Nonlocal Model of Ductile Rupture*. à paraître dans "Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering",2006.
- [FGS, 1998] J. FALESKOG, X. GAO, AND C. SHIH, *Cell model for linear fracture analysis-I. Micro-mechanics calibration*, Int. J. Fra., **89** (1998), pp.355-373.
- [Fre & Ned, 1993] M. FRÉMOND AND B. NEDJAR, *Endommagement et Principe des Puissances Virtuelles*, C.R.A.S t.**317**, **Série II** (1993), pp. 857-864.
- [Gar, 1995] M. GARAJEU, *Contribution à l'Etude du Comportement Non Linéaire de Milieu Poreux avec ou sans Renfort*, Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée, 1995.
- [Ger, 1973] P. GERMAIN, *The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics.Part 2, Microstructure*, SIAM J.Appl.Math **25** (1973), pp. 556-575.
- [Ger,1986] P. GERMAIN, *Mécanique Tome II*. Edition Ellipses, 1986.
- [Gol, 2001a] M. GOLOGANU, J. LEBLOND, J. DEVAUX, *Theoretical Models for Voids Coalescence in Porous Ductile Solids. II. Coalescence in "Columns"*, Int. J. Solids Structures, **38**(2001a), 5595-5604.

- [Gol, 2001b] M. GOLOGANU, J.B. LEBLOND, G. PERRIN, J. DEVAUX, *Theoretical Models for Voids Coalescence in Porous Ductile Solids. I. Coalescence in "Layers"*, Int. J. Solids Structures, **38**(2001b), 5581-5594.
- [GLPD, 1997] M. GOLOGANU, J.B. LEBLOND, G. PERRIN, AND J. DEVAUX, *Recent Extensions of Gurson's Model for Porous Ductile Metals*. P. Suquet ed. Continuum Micromechanics, CISM Courses and Lectures **377**, Springer (1997), pp. 61-130.
- [GLD, 1994] M. GOLOGANU, J.B. LEBLOND, AND J. DEVAUX, *Numerical and Theoretical Study of Coalescence of Cavities in Periodically Voided Solids*. In : Noor, A.K., Needleman, A. (Eds.), Computational Material Modeling, ASME publication, AD42 PVP294, New York (1994), pp. 223-244.
- [Gur, 1977] A.L. GURSON, *Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth : Part I - Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media*, ASME Journal of Engineering Materials and Technology, **99** (1977), 2-15.
- [Hal & Ngu, 1975] B. HALPHEN AND Q.S. NGUYEN, *Sur les Matériaux Standards Généralisés*, J. Méc., **14**(1975), pp. 39-63.
- [Hill, 1967] R. HILL, *The Essential Structure of Constitutive Laws for Metal Composites and Polycrystals*, J. Mech. Phys. Solids **15**(1967), pp. 79-95.
- [Kop & Nee, 1988] J. KOPLIK AND A. NEEDLEMAN, *Void Growth and Coalescence in Porous Plastic Solids*, Int.J.Solids Structures, **24**(8) (1988), 835-853.
- [Leb, 1993] J.B. LEBLOND, *Numérisation du Modèle de Comportement*, Note Esi N° LTSW.92/2027/A.
- [JBL, 1994] J.B. LEBLOND, G. PERRIN AND J. DEVAUX, *Bifurcation Effects in Ductile Metals with Non-local Damage*, ASME J. Appl. Mech., **61** (1994), pp. 236-242.
- [ESIG, 2002] J.B LEBLOND, *Matrice-tangente pour les Modèles d'Endommagement Ductile de Gurson et LPD*, Note Esi N° LE/01.4422/B.
- [Leb, 2003] J.B LEBLOND, *Mécanique de la Rupture Fragile et Ductile*, Edition Hermes Science, 2003.
- [Lor, 1997] E. LORENTZ, *Lois de Comportement à Gradients de Variables Internes : Construction, Formulation Variationnelle et Mise en œuvre Numérique*, Thèse de Doctorat, Paris VI, 1997.
- [Men, 1964] J. MANDEL, *Contribution Théorique à l'Etude de l'Ecrouissage et des Lois d'Écoulement Plastique* in Proceedings of th 11th International on Congress on Applied Mechanics, Springer Berlin, pp. 502-509, 1964.
- [MMP, 1985] B. MARINI, F. MUDRY, AND A. PINEAU, *Experimental Study of Cavity Growth in Ductile Rupture*, Engng. Fracture Mech., **22** (1985), pp. 989-996.

- [MChC, 2002] T. MATSUSHIMA, R. CHAMBON, AND D. CAILLERIE, *Large Strain Finite Element Analysis of Local Second Gradient Model : Application to Localization*, Int. J. Numer. Meth. Engng **54** (2002), pp. 499-521.
- [Min & Esh, 1968] R.D. MINDLIN AND N.N. ESHEL, *On First Gradient Theories in Linear Elasticity*, Int. J. Solids Structures, **4** (1968), pp. 109-124.
- [Mud, 1982] F. MUDRY, *Etude de la Rupture Ductile et de la Rupture par Clivage*, Thèse d'Etat, Université Technologique de Campiègne, 1982.
- [Ngu, 1977] Q.S. NGUYEN, *On the Elastic Plastic Initial-boundary Value Problem and its Numerical Integration*, Int. J. Num. Meth. Engng., **11** (1977), pp. 817-832.
- [Per, 1992] G. PERRIN, *Contribution à l'Etude Théorique et Numérique de la Rupture Ductile des Métaux*, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1992.
- [Leb & Per, 1990] G. PERRIN AND J.B. LEBLOND, *Analytical study of a Hollow Sphere made of Porous Plastic Material and Subjected to Hydrostatic Tension-Application to some problem in Ductile Fracture of Metals*, International of Plasticity, **6** (1990), pp. 677-699.
- [Per & Leb, 2000] G. PERRIN AND J.B. LEBLOND, *Accelerated Void Growth in Porous Ductile Solids Containing two Populations of Cavities*, Int. J. Plasticity, **16** (2000), pp. 91-120.
- [Pij & Baz, 1987] G. PIJAUDIER-CABOT AND Z.P. BAZANT, *Non-local Damage Theory*, ASCE J. Engng. Mech., **113** (1987), pp. 1512-1533.
- [Pin & Jol, 1991] A. PINEAU AND P. JOLY, *Local Versus Global Approaches of Elastic-plastic Fracture Mechanics. Application to Ferritic Steels and a Cast Duplex Stainless Steel, Effect Assessment in Components - Fundamentals and Applications*, J.G. Blauel and K.H. Schwalbe, eds.,ESIS, European Group on Fracture Publication 9, 1991.
- [Ric, 1969] J.R. RICE AND D.M. TRACEY, *On the Ductile Enlargement of Voids in Triaxial Stress Fields*, J. Appl. Mech. **17** (1969), pp. 201-217.
- [Ric, 1976] J.R. RICE, *The localization of Plastic Deformation*, International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Koiter WD (ed), North Holland : Amsterdam, 1976.
- [Rou, 1981] G. ROUSSELIER, *Finite Deformation Constitutive Relations and Ductile Fracture*, Edited by Nemat-Nasser, North-Holland, Amsterdam, pp. 331-355, 1981.
- [Rou & Mur, 1981] G. ROUSSELIER AND F. MUDRY, *Etude de la Rupture Ductile de l'Acier Faiblement Allié en Mn-Ni-Mo pour Cuves de Réacteurs à Eau Ordinaire sous Pression, Approvisionné sous la forme d'une Débouchure de Tubulure. Résultats du Programme Expérimental*, EdF Centre des Renardières Internal Report HT/PV D529 MAT/T43, 1981.



- [Rud & Ric, 1975] J.W. RUDINICKI AND J. RICE, *Conditions for the Localization of Deformation in Pressure-Sensitive Dilatant Materials*, *J.Mech. and Physics of Solids*, **23** (1975), pp. 371-394.
- [Shu, 1999] J. SHU, W. KING AND N. FLECK, *Finite Elements for Materials with Strain Gradient Effects*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **44** (1999), pp. 373-391.
- [Tho, 1985a] P.F. THOMASSON, *A three-dimensional Model for Ductile Fracture by the Growth and Coalescence of Microvoids*, *Acta Metallurgica*, **33 (6)** (1985a), pp. 1087-1095.
- [Tho, 1985b] P.F. THOMASSON, *Three-dimensional Models for the Plastic Limit-loads at Incipient Failure of the Intervoid Matrix in Ductile Porous Solids*, *Acta Metallurgica*, **33 (6)** (1985b), pp. 1079-1085.
- [Tho, 1990] P.F. THOMASSON, *Ductile Fracture of Metals*, Pergamon Press, Oxford, 1990.
- [Tve, 1981] V. TVERGAARD, *Influence of Voids on Shear Band Instabilities under Plane Strain Conditions*, *International Journal of Fracture*, **17** (1981), pp. 389-407.
- [Tve & Nee, 1984] V. TVERGAARD AND A. NEEDLEMAN, *Analysis of Cup-cone Fracture in a Round Tensile Bar*, *Acta Metallurgica*, **32** (1984), pp. 157-169.
- [Tve & Nee, 1995] V. TVERGAARD AND A. NEEDLEMAN, *Effects of Non-local Damage in Porous Plastic Solids*, *Int. J. Solids Structures*, **32** (1995), pp.1063-1077.
- [Tve & Nee, 1997] V. TVERGAARD AND A. NEEDLEMAN, *Non-local Effects on Localization in Void-sheet*, *Int. J. Solids Structures*, **34**(1997), pp. 2221-2238.
- [Zha & Nie, 1994] Z. ZHANG AND E. NIEMI, *Analyzing Ductile Fracture using Dual Dilational Constitutive Equations*, *Fatigue and Fract of Engng Mat. Struct.*, **17** (1994), pp. 695-707.
- [Bes, 2004] *Local Approach to Fracture*, Published under the supervision of Jacques Besson by Les Presses de l'École des Mines Paris, 2004.