



HAL
open science

Méthodes de simulation du comportement mécanique non linéaire des grandes structures en béton armé et précontraint : condensation adaptative en contexte aléatoire et représentation des hétérogénéités

Antoine Llau

► **To cite this version:**

Antoine Llau. Méthodes de simulation du comportement mécanique non linéaire des grandes structures en béton armé et précontraint : condensation adaptative en contexte aléatoire et représentation des hétérogénéités. Matériaux. Université Grenoble Alpes, 2016. Français. NNT : 2016GREAI029 . tel-01492808

HAL Id: tel-01492808

<https://theses.hal.science/tel-01492808>

Submitted on 20 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Matériaux, Mécanique, Génie Civil, Electrochimie**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Antoine LLAU

Thèse dirigée par **Frédéric DUFOUR**

préparée au sein du **Laboratoire 3SR**
dans l'**École Doctorale I-MEP²**

Méthodes de simulation du comportement mécanique non linéaire des grandes structures en béton armé et précontraint

Condensation adaptative en contexte aléatoire et
représentation des hétérogénéités.

Thèse soutenue publiquement le **26/09/2016**,
devant le jury composé de :

M. Bruno SUDRET

Professeur à l'ETH Zürich, Président du jury

M. Nicolas MOËS

Professeur à l'École Centrale de Nantes, Rapporteur

M. Alain SELLIER

Professeur à l'Université Paul Sabatier, Rapporteur

M. Frédéric DUFOUR

Professeur à Grenoble INP, Directeur de thèse

M. Ludovic JASON

Ingénieur-Chercheur HDR au CEA Saclay, Co-encadrant

M. Julien BAROTH

Maître de conférences à l'Université Grenoble-Alpes, Co-encadrant



Méthodes de simulation du comportement mécanique non linéaire des grandes structures en béton armé et précontraint.

Condensation adaptative en contexte aléatoire et représentation des hétérogénéités.

Remerciements

C'est au lendemain de la soutenance de cette thèse que je prends enfin le temps de regarder derrière moi, et de constater tout le chemin qui a été parcouru lors de cette aventure. Au cours de ces trois années, de nombreuses personnes ont participé à divers titres à ce travail ainsi qu'à cette expérience si enrichissante pour moi, et je les en remercie.

En premier lieu, je tiens à remercier Bruno Sudret, qui a accepté de présider le jury de soutenance de cette thèse ainsi que Nicolas Moës et Alain Sellier, qui ont accepté la dure tâche de rapporter ce manuscrit. J'espère avoir répondu à leurs questions lors de la soutenance ; l'échange que nous avons eu m'a permis de prendre plus de recul tant sur les travaux réalisés que sur mon projet scientifique.

Ceux qui ont fourni le plus lourd travail pour cette thèse sont sans conteste mes trois encadrants : Frédéric, Julien et Ludovic. Merci à Frédéric, pour sa direction rigoureuse, ses bonnes idées, les connaissances qu'il m'a apportées, et son sens aigu du progrès scientifique. Merci à Julien pour son enthousiasme, sa créativité, son sens du compromis et sa persévérance. Enfin, merci à Ludovic, pour son implication dans l'encadrement quotidien, son pragmatisme, son ambition scientifique, son exigence et sa bonne humeur constante. C'est grâce à vous trois si cette thèse a pu être si enrichissante pour moi et – pour reprendre l'expression d'un collègue – apporter quelques fleurs et quelques fruits à la communauté scientifique.

Je souhaiterais également remercier les personnes que j'ai rencontrées à Saclay, à Clamart ainsi qu'à Grenoble, qui m'ont souvent aidé, soutenu dans les phases difficiles et avec qui j'ai partagé beaucoup de bons moments. Sans vous, cette aventure n'aurait pas été aussi agréable, et c'est en partie grâce à vous que j'en garderai un aussi bon souvenir. Merci à ceux de Saclay : Fang, Chetra, Antoine, Can, Haithem, Clément, Jérémie, Grégory, Guillaume, Florian, Jean-Baptiste, Gauthier, Fabrice, Nicolas, Olivier, Caroline, Sabine, Alain, Martine, Mathieu, Bertrand, François, Benjamin, Jean-Luc ... Merci à ceux de Clamart : Patrick, Hippolyte, Marcel, Alexandre, Fabien ... Et merci à ceux de Grenoble : Maxime, Maria, Hicham, Carole, Antoine, Benjamin, Stiven ...

Enfin, je n'oublie pas ma famille, qui m'a soutenu dans ce projet long, difficile et un peu fou. Merci à mes parents, à mes sœurs et surtout à Morgane.

Merci à tous.

Antoine Llau

Résumé

Les structures en béton et béton armé de grandes dimensions, en particulier les enceintes de confinement, peuvent être sujettes à de la fissuration localisée suite à leur vieillissement ou dans le cas d'une forte sollicitation (APRP, par exemple). Afin d'optimiser les actions de maintenance, il est nécessaire de disposer d'un modèle prédictif de l'endommagement du béton. Ce phénomène se produit à une échelle matériau relativement petite et un modèle prédictif nécessite un maillage fin et une loi de comportement non linéaire. Hors ce type de modélisation ne peut être directement appliquée sur une structure de génie civil de grande échelle, le calcul étant trop lourd pour les machines actuelles.

Une méthode de calcul est proposée, qui concentre l'effort de calcul sur les zones d'intérêt (parties endommagées) de la structure en éliminant les zones non endommagées. L'objectif est ainsi d'utiliser la puissance de calcul disponible pour la caractérisation des propriétés des fissures notamment. Cette approche utilise la méthode de condensation statique de Guyan pour ramener les zones élastiques à un ensemble de conditions aux limites appliquées aux bornes des zones d'intérêt. Lorsque le système évolue, un système de critères permet de promouvoir à la volée des zones élastiques en zones d'intérêt si de l'endommagement y apparaît. Cette méthode de condensation adaptative permet de réduire la dimension du problème non linéaire sans altérer la qualité des résultats par rapport à un calcul complet de référence.

Cependant, une modélisation classique ne permet pas de prendre en compte les divers aléas impactant le comportement de la structure : propriétés mécaniques, géométrie, chargement... Afin de mieux caractériser ce comportement en tenant compte des incertitudes, la méthode de condensation adaptative proposée est couplée avec une approche de collocation stochastique. Chaque calcul déterministe nécessaire pour caractériser les incertitudes sur les grandeurs d'intérêt de la structure est ainsi réduit et les étapes de prétraitement nécessaires à la condensation sont elles-mêmes mutualisées via une deuxième collocation. L'approche proposée permet ainsi de produire pour un coût de calcul limité des densités de probabilités des grandeurs d'intérêt d'une grande structure.

Les stratégies de résolution proposées rendent accessibles à l'échelle locale une modélisation plus fine que celle qui pourrait s'appliquer sur l'ensemble de la structure. Afin de bénéficier d'une meilleure représentativité à cette échelle, il est nécessaire de représenter les effets tridimensionnels des hétérogénéités. Dans le domaine du génie civil et nucléaire, cela concerne au premier chef les câbles de précontrainte, traditionnellement représentés en unidimensionnel. Une approche est donc proposée, qui s'appuie sur un maillage et une modélisation 1D pour reconstruire un volume équivalent au câble et retransmettre les efforts et rigidités dans le volume de béton. Elle combine la représentativité d'un modèle 3D complet et conforme des câbles lorsque le maillage s'affine et la facilité d'utilisation et paramétrage d'un modèle 1D.

L'applicabilité des méthodes proposées à une structure de génie civil de grande échelle est évaluée sur un modèle numérique d'une maquette à l'échelle 1/3 de l'enceinte de confinement interne d'un réacteur de type REP 1300 MWe à double paroi.

Abstract

Large-scale concrete and reinforced concrete structures, and in particular containment buildings, may undergo localized cracking when they age or endure strong loadings (LOCA for instance). In order to optimize the maintenance actions, a predictive model of concrete damage is required. This phenomenon takes place at a rather small material scale and a predictive model requires a refined mesh and a nonlinear constitutive law. This type of modelling cannot be applied directly on a large-scale civil engineering structure, as the computational load would be too heavy for the existing machines.

A simulation method is proposed to focus the computational effort on the areas of interest (damaged parts) of the structure while eliminating the undamaged areas. It aims at using the available computing power for the characterization of crack properties in particular. This approach uses Guyan's static condensation technique to reduce the elastic areas to a set of boundary conditions applied to the areas of interest. When the system evolves, a set of criteria allows to promote on the fly the elastic areas to areas of interest if damage appears. This adaptive condensation technique allows to reduce the dimension of a nonlinear problem without degrading the quality of the results when compared to a full reference simulation.

However, a classical modelling does not allow to take into account the various unknowns which will impact the structural behaviour: mechanical properties, geometry, loading... In order to better characterize this behaviour while taking into account the various uncertainties, the proposed adaptive condensation method is coupled with a stochastic collocation approach. Each deterministic simulation required for the characterization of the uncertainties on the structural quantities of interest is therefore reduced and the pre-processing steps necessary to the condensation technique are also reduced using a second collocation. The proposed approach allows to produce for a reduced computational cost the probability density functions of the quantities of interest of a large structure.

The proposed calculation strategies give access at the local scale to a modelling finer than what would be applicable to the full structure. In order to improve the representativeness at this scale, the tridimensional effects of the heterogeneities must be taken into account. In the civil and nuclear engineering field, one of the main issues is the modelling of prestressing tendons, usually modelled in one dimension. A new approach is proposed, which uses a 1D mesh and model to build a volume equivalent to the tendon and redistribute the forces and stiffnesses in the concrete. It combines the representativeness of a full conform 3D modelling of the tendon when the mesh is refined and the ease of use of the 1D approaches.

The applicability of the proposed methodologies to a large-scale civil engineering structure is evaluated using a numerical model of a 1/3 mock-up of a double-wall containment building of a PWR 1300 MWe nuclear reactor.

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	ii
Abstract	iii
Chapitre 1 - Introduction générale.....	1
1 Contexte industriel	1
2 Problématique.....	2
3 Verrous & approche proposée	4
4 Organisation du manuscrit	5
Chapitre 2 - Etat de l'art.....	7
1 Méthodes de calcul pour les grandes structures en régime non linéaire.....	7
1.1 Méthodes de calcul parallèle	7
1.2 Méthodes globales-locales.....	8
1.3 Méthodes de réduction de modèle.....	9
1.4 Méthodes d'élimination de degrés de liberté.....	10
1.5 Synthèse	11
2 Calcul de structures sous incertitudes	12
2.1 Méthode de Monte-Carlo	13
2.2 Méthode des éléments finis stochastiques.....	14
2.3 Synthèse	18
3 Modélisation des renforts actifs et passifs à l'échelle locale	19
3.1 Modélisations à l'échelle structurale	19
3.2 Modélisations à l'échelle intermédiaire : approche par séparation d'échelles	21
3.3 Modélisations à l'échelle de l'hétérogénéité	21
3.4 Synthèse	22
Chapitre 3 - Condensation adaptative pour l'analyse des grandes structures au comportement non linéaire localisé.....	25
1 Introduction.....	25
2 Condensation du problème.....	26
3 Méthode de condensation adaptative	29
3.1 Décomposition en zones	31
3.2 Condensation locale	32
3.3 Pré-calcul linéaire	32
3.4 Condensation globale.....	33
3.5 Condensation adaptative et critères de promotion.....	33

4	Validation de la méthode de condensation adaptative	37
4.1	Exemple: Poutre entaillée en flexion 3 points	37
4.2	Structure en béton armé sous pression interne	42
5	Résumé	47
	Problématique	47
	Contributions	47
	Résultats	47
	Conclusions	47
	Publications	47
Chapitre 4 - Eléments finis stochastiques condensés pour l'analyse des structures sous incertitudes		49
1	Introduction	49
2	Formulation du problème	49
2.1	Problème mécanique non linéaire stochastique	49
2.2	Construction d'un méta-modèle	50
2.3	Fonction de densité de probabilité (FDP) de grandeurs d'intérêt	50
3	Approche proposée	51
3.1	EFS condensés adaptatifs	51
3.2	Collocation stochastique condensée	52
3.3	Approximation des FDP de grandeurs d'intérêt	54
4	Eléments de validation	56
4.1	Barre en acier ayant un défaut localisé	56
4.2	Poutre en béton ordinaire en flexion 4 points	63
5	Résumé	67
	Problématique	67
	Contributions	67
	Résultats	67
	Conclusions	67
	Publications	68
Chapitre 5 - Approche 1D-3D pour la modélisation des câbles et armatures dans un volume de béton		69
1	Introduction	69
2	Présentation de la modélisation "1D-3D"	69
2.1	Génération du volume équivalent	70
2.2	Calcul des forces équivalentes	70
2.3	Condensation du volume équivalent 3D	71
2.4	Interface domaine-inclusion	73

3	Validation: Tronçon précontraint courbe.....	74
3.1	Présentation	74
3.2	Résultats	74
4	Application: Modèle numérique d'un Volume Structurel Représentatif	82
4.1	Présentation	82
4.2	Résultats	84
5	Résumé	89
	Problématique	89
	Contributions.....	89
	Résultats	89
	Conclusions.....	89
	Publications	89
	Chapitre 6 - Application: Simulation de mise en pression de la maquette Vercors.....	91
1	Introduction.....	91
2	Présentation du problème	91
2.1	Structure en béton	91
2.2	Renforts passifs et parties en acier	93
2.3	Câbles et précontrainte.....	94
2.4	Conditions aux limites et chargements	95
3	Condensation adaptative et réduction du problème.....	97
4	Résultats	99
5	Prise en compte des incertitudes	102
6	Résumé	108
	Objectif	108
	Contributions.....	108
	Résultats	108
	Conclusions.....	108
	Chapitre 7 - Conclusions & Perspectives	109
1	Conclusions & Résultats	109
2	Pistes d'améliorations des développements proposés.....	111
3	Perspectives de recherche	112
	Bibliographie.....	115

Chapitre 1 - Introduction générale

1 Contexte industriel

La production d'électricité en France, assurée principalement par EDF, s'appuie sur un parc nucléaire de 58 réacteurs de production électrique d'une capacité totale d'environ 63 GW (Tableau 1). Tous ces réacteurs sont du type REP (Réacteur à Eau Pressurisée) et appartiennent à différentes familles ou « paliers » : 34 réacteurs de 900 MWe de puissance (paliers CP0 et CPY), 20 réacteurs de 1300 MWe de puissance (paliers P4 et P'4) et 4 réacteurs de 1450 MWe de puissance (palier N4).

	Capacité de production
Nucléaire	63130 MW
Hydro-électrique	19929 MW
Energies fossiles	9970 MW

Tableau 1 : Capacité de production du parc énergétique d'EDF en France [1]

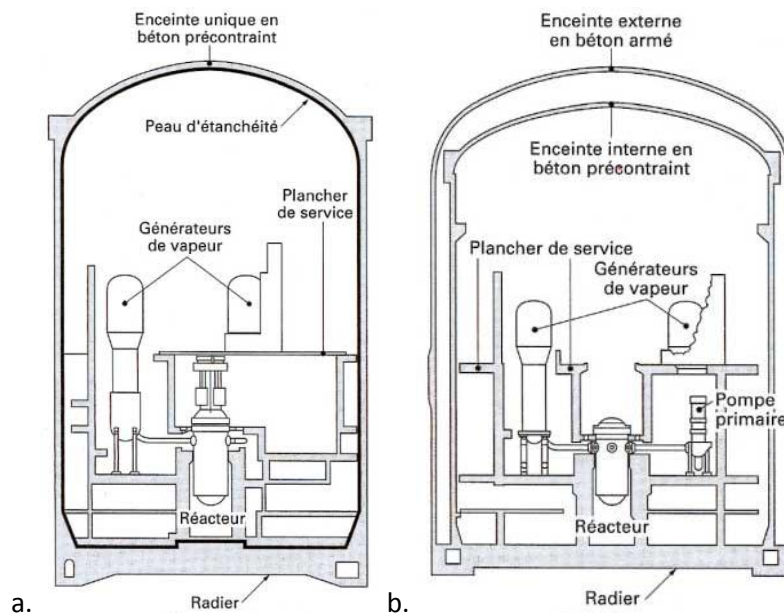


Figure 1 : Schémas de bâtiments de confinement (a : enceinte à paroi unique des réacteurs de type REP 900 MWe, b : enceinte à double paroi des réacteurs de type REP 1300-1450 MWe) (issu de [2])

Afin de protéger l'environnement des conséquences d'un potentiel accident interne, trois barrières de confinement sont mises en place pour chaque réacteur : la gaine qui contient le combustible, le circuit primaire (notamment la cuve) et enfin l'enceinte de confinement. L'enceinte de confinement assure deux fonctions : la protection du réacteur en cas d'agression externe (chute d'avion, impact ...) et la protection de l'environnement dans un scénario d'accident interne. Afin d'assumer pleinement ce rôle de protection, le bâtiment doit pouvoir assurer une certaine étanchéité dans une situation de défaillance du circuit primaire. La Figure 1 illustre les deux types d'enceintes de confinement présentes sur les réacteurs nucléaires de production d'énergie en France :

- les enceintes de type paroi unique sont construites en béton précontraint et remplissent le double rôle de protection du réacteur et d'étanchéité en cas d'accident interne. L'étanchéité

est assurée par un liner métallique situé sur la paroi interne, la « peau d'étanchéité ». Ces enceintes équipent les réacteurs de type REP 900 MWe.

- les enceintes de type double paroi sont constituées d'une enceinte externe, construite en béton armé, qui assure le rôle de protection du réacteur et d'une enceinte interne construite en béton armé précontraint qui assure le rôle d'étanchéité. Ces enceintes équipent les réacteurs de type REP 1300 MWe et REP 1450 MWe.

La problématique ayant motivé cette thèse est celle de l'étanchéité des enceintes de confinement de type double paroi. L'étanchéité est vérifiée (en France) lors des épreuves décennales menées par l'autorité de sûreté. Ces épreuves visent à évaluer l'étanchéité du bâtiment par rapport à un scénario de mise en pression donné. Elles consistent à injecter de l'air sec à haute pression (4,2 bars relatifs) à l'intérieur de l'enceinte. Le critère d'étanchéité est un taux de fuite en masse d'air inférieur à 1% par jour. La réalisation de ces épreuves et le respect du critère d'étanchéité conditionnent l'autorisation de poursuite d'exploitation du réacteur.

Le béton qui assure le rôle d'étanchéité dans le cas des enceintes à double paroi est un matériau dit quasi-fragile : il est susceptible de se fissurer lorsqu'il est soumis à de fortes sollicitations mécaniques, provoquant un risque de perte d'étanchéité. De plus, le béton courant a une faible résistance à la traction (de l'ordre de 3 MPa, en comparaison de sa résistance à la compression de l'ordre de 30 MPa). Lors d'un accident provoquant une surpression interne, la partie courante de la structure serait principalement sollicitée en traction, c'est pourquoi elle est construite en béton armé et précontraint :

- les barres d'acier (armatures) placées dans le béton reprennent une partie des efforts et limitent l'ouverture et la propagation des fissures ;
- les câbles de précontrainte (également en acier) sont mis en tension puis fixés à la structure, ce qui met le béton en compression. Sur les enceintes de confinement précontraintes, celle-ci est dimensionnée de sorte que le béton ne soit pas ou peu mis en tension sous un chargement d'accident (précontrainte de l'ordre de 12 MPa).

Néanmoins, la complexité de la structure et son vieillissement potentiel ne permettent pas d'écarter complètement le risque de fissuration, en particulier à proximité des hétérogénéités géométriques, notamment les ouvertures d'exploitation de l'enceinte, nervures, etc.

Afin d'assurer le niveau d'étanchéité requis, les bâtiments peuvent donc nécessiter des opérations de maintenance, assurées par l'exploitant. Les opérations de maintenance concernant l'étanchéité des enceintes sont réalisées réacteur à l'arrêt. Elles doivent idéalement avoir lieu pendant les visites décennales, afin de minimiser le temps d'arrêt des réacteurs et donc le coût des opérations. On souhaite donc réaliser des simulations prédictives capables de localiser et d'estimer le taux de fuite sur les enceintes de confinement pour anticiper du mieux possible les travaux.

2 Problématique

Le phénomène physique qu'on souhaite quantifier est la fissuration du béton sur des structures en béton, béton armé et béton précontraint de grandes dimensions. La simulation de la fissuration dans le béton est possible en l'état actuel des connaissances mais nécessite un certain nombre d'éléments spécifiques :

- un modèle de comportement mécanique du matériau représentatif de la physique, typiquement non linéaire. Différentes approches sont possibles (mécanique de la rupture, champs de phase, modèle mésoscopique ...); la mécanique de l'endommagement sera choisie. En effet, elle permet à la fois de localiser l'amorçage de la fissuration et de représenter son impact mécanique.

- une méthode numérique « avancée » capable de prendre en compte le comportement des matériaux fissurés (éléments finis enrichis, éléments discrets, etc.) ; nous utiliserons ici une résolution par éléments finis appuyée par des approches régularisées lorsque l'échelle de la simulation le permet. En effet, ces approches permettent de s'affranchir des problèmes de dépendance au maillage et de représenter convenablement la zone de microfissuration.
- une finesse de représentation géométrique et physique adaptée à l'échelle du phénomène ; pour caractériser les propriétés des fissures, l'ordre de grandeur pour un maillage éléments finis est celui du centimètre. En effet ce type de maillage permet de capturer convenablement la zone fissurée dans un béton standard.

Le contexte spécifique des enceintes de confinement est celui des structures de grandes dimensions. Il suppose les spécificités suivantes :

- la dimension typique de la structure est de l'ordre de cinquante mètres.
- la structure est complexe, par sa géométrie (portes, traversées, ...), mais aussi les matériaux différents et les hétérogénéités locales (barres passives, câbles de précontrainte) et le mode de mise en œuvre (propriétés du béton variables selon les levées).
- les incertitudes sont potentiellement nombreuses : sur la géométrie (construction réelle potentiellement différente du plan) et les propriétés du matériau (produit localement, variable spatialement, parfois insuffisamment caractérisé).
- les maillages existants pour l'analyse de ce type de structure sont relativement grossiers ; l'ordre de grandeur est typiquement celui de quelques dizaines de centimètres voire du mètre.

Ces spécificités semblent entrer en contradiction avec celles du calcul de fissuration, abordées précédemment.

A titre d'illustration du problème de la dimension de la structure par rapport à la finesse de représentation voulue, la Figure 2 présente, pour différentes échelles de structures, la finesse de maillage accessible avec un calcul éléments finis classiques en comportement non linéaire (on considère un maillage à 10^5 éléments, ordre de grandeur des simulations réalisables sur un PC de bureau en quelques heures). On observe qu'avec une finesse de maillage de l'ordre de quelques cm, les plus grandes structures accessibles sont de l'ordre de 1 m^3 en volume.

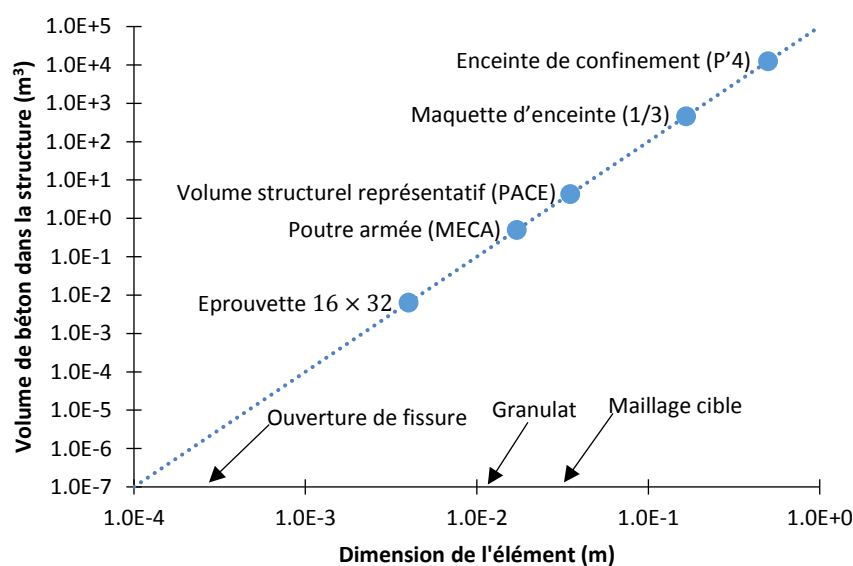


Figure 2 : Ordre de grandeur des finesses de maillage accessibles pour différentes structures.

La problématique de la thèse autour de la simulation prédictive de fissuration sur les enceintes de confinement en béton armé et précontraint peut donc être ramenée au verrou scientifique suivant :

Comment réaliser une simulation de mécanique non linéaire, avec une discrétisation fine, potentiellement une approche régularisée, sur une structure de grande taille, complexe, soumise à de fortes incertitudes, dont le maillage typique est relativement grossier ?

C'est à ce questionnement scientifique que ce manuscrit souhaite apporter des éléments de réponse.

3 Verrous & approche proposée

En termes de mécanique numérique, on souhaite donc résoudre un problème non linéaire sous incertitudes, à nombre élevé de degrés de liberté et dont la représentation géométrique n'est pas forcément satisfaisante. Trois verrous scientifiques peuvent alors être identifiés au regard des approches classiques :

- extensibilité et dimension du problème : une modélisation suffisamment fine au sens de la loi de comportement et du maillage ne peut être appliquée sur l'ensemble de la structure pour des raisons de coût de calcul et de difficulté de modélisation.
- incertitudes : les nombreux aléas (matériaux, géométriques) sont susceptibles d'avoir une influence difficile à quantifier sur ses grandeurs d'intérêt (fissuration, endommagement, ouverture de fissure, etc.), elles-mêmes calculées par une résolution non linéaire de grande dimension. Le calcul déterministe étant difficile et coûteux, une analyse d'incertitudes semble difficilement atteignable.
- hétérogénéités et finesse de la modélisation locale : les maillages et modélisations habituellement utilisés pour représenter les hétérogénéités locales à l'intérieur du béton (notamment les renforts en acier et les câbles de précontrainte) sont pertinents pour des analyses du comportement global de la structure. Ils ne sont pas forcément appropriés ou représentatifs à l'échelle de la fissuration qu'on souhaite quantifier.

Le but de cette thèse est d'apporter des éléments méthodologiques répondant à cette problématique scientifique, en levant les verrous identifiés. L'approche proposée visera ainsi à réduire la dimension du problème traité tout en conservant la qualité de résultats à l'échelle locale d'une approche non linéaire complète. Une extension de cette méthode au contexte aléatoire sera proposée, pour limiter la dimension du problème incertain et accéder à une quantification probabiliste des grandeurs d'intérêt. Enfin, une stratégie sera proposée pour améliorer la modélisation des hétérogénéités à l'échelle locale et assurer la représentativité du calcul de fissuration.

Dans le cadre de cette thèse, la stratégie de modélisation adoptée pour le phénomène de fissuration est celle de la mécanique de l'endommagement scalaire. Dans ce contexte, la loi de comportement s'écrit sous la forme générale $\sigma = (1 - D)\Lambda\varepsilon$, où σ est le tenseur des contraintes, ε celui des déformations, D la variable d'endommagement et Λ le tenseur d'élasticité. Des approches non locales de type intégrales sont utilisées pour le calcul de critères mécaniques comme les déformations équivalentes, qui s'écrivent sous la forme générale $\bar{\varepsilon} = \int_{\Omega} \tilde{\varepsilon}(x)\phi(x)$, où $\bar{\varepsilon}$ est la déformation équivalente non locale, $\tilde{\varepsilon}$ la déformation équivalente locale et $\phi(x)$ une fonction normée de l'espace Ω .

Même si les choix seront orientés de manière à tirer parti des spécificités du problème de la simulation de la fissuration sur les enceintes de confinement, on s'attachera autant que possible à proposer des méthodes suffisamment génériques pour être applicables à d'autres problèmes ainsi qu'à d'autres approches de modélisation.

4 Organisation du manuscrit

Ce manuscrit vise à être un document pédagogique et relativement synthétique. Il retrace donc la démarche scientifique suivie lors de la thèse, décrit les développements méthodologiques réalisés et présente les principaux résultats obtenus. Après ce premier chapitre introductif, le manuscrit est décomposé en six chapitres supplémentaires.

Le Chapitre 2 présente un état de l'art des approches existantes permettant d'apporter des éléments de réponse à la problématique posée. L'objectif sera de choisir des méthodes de base et définir les développements nécessaires.

Le Chapitre 3 propose une stratégie de résolution des problèmes de mécanique non linéaire s'appuyant sur l'extension d'une méthode de l'état de l'art au contexte non linéaire. Cette méthode dite de « condensation adaptative » permet dans certains cas le gain d'une échelle dans la simulation du comportement mécanique des structures. La description de la méthode proposée, sa validation ainsi qu'une première étude d'applicabilité au problème des grandes structures fissurées font l'objet de ce chapitre.

Le Chapitre 4 apporte des éléments de réponse à la question de la quantification des incertitudes sur le comportement mécanique des grandes structures. En particulier, il décrit une extension de la méthode de condensation adaptative présentée dans le chapitre précédent au contexte probabiliste et sa validation.

Le Chapitre 5 aborde le problème de l'amélioration de la modélisation structurelle à l'échelle locale. Plus spécifiquement, il décrit une approche de modélisation des renforts actifs et passifs utilisable à l'échelle de la structure comme à l'échelle locale, dite « 1D-3D ».

Le Chapitre 6 propose la description et l'analyse du comportement mécanique d'une maquette d'enceinte de confinement en béton précontraint, s'appuyant sur la méthode de condensation adaptative et son extension au contexte des incertitudes décrites dans les chapitres précédents.

Le Chapitre 7 tire des conclusions sur les développements et les analyses réalisés dans le cadre de la thèse et propose des perspectives de recherche pour l'amélioration de la réponse apportée au problème de la simulation du comportement mécanique non linéaire des grandes structures en béton armé et précontraint.

Chapitre 2 - Etat de l'art

Afin de répondre à la problématique scientifique posée dans le chapitre introductif, c'est-à-dire la réalisation d'une simulation de mécanique non linéaire donnant une information fine sur une structure de grande taille et soumise à de fortes incertitudes, un état de l'art des approches existantes est proposé ici. Cet état de l'art s'intéresse aux catégories de méthodes susceptibles de répondre aux différents verrous identifiés. Il est structuré en trois sections correspondant aux points de difficulté identifiés :

- méthodes de calcul pour les grandes structures en régime non linéaire ;
- incertitudes sur les grandes structures ;
- hétérogénéités et finesse de la modélisation locale.

1 Méthodes de calcul pour les grandes structures en régime non linéaire

Dans cette section, nous réalisons un état de l'art portant sur les méthodologies susceptibles de répondre au problème de l'extensibilité des simulations et de la dimension du problème, présenté dans l'introduction. Plusieurs grandes catégories de méthodes existent, qui permettraient d'apporter des réponses, a minima partielles, à cette problématique : calcul parallèle, approches globales-locales, réduction de modèle et élimination de degrés de liberté. L'objectif est de comparer les avantages et inconvénients de chacune par rapport au problème à résoudre et choisir la plus appropriée. Le choix de la méthode de simulation sera orienté de manière à pouvoir traiter différentes classes de problèmes, mais fonctionner de manière optimale dans des configurations spécifiques du problème applicatif traité, en l'occurrence :

- le comportement de fissuration est localisé sur une zone de petites dimensions devant la taille de la structure.
- le reste de la structure est en régime linéaire, avec un comportement élastique des matériaux.

La méthode choisie devra en outre être capable de tenir compte de phénomènes typiques de la fissuration :

- la redistribution des contraintes suite à l'endommagement d'une partie de la structure peut entraîner l'apparition de nouvelles zones fissurées.
- les fissures existantes sont susceptibles de se propager de proche en proche dans le matériau sur une certaine distance.

1.1 Méthodes de calcul parallèle

Une des approches permettant de résoudre des problèmes de mécanique des structures en un temps de calcul limité est le calcul parallèle. Ces méthodologies permettent de décomposer un problème de grande taille en problèmes plus petits, résolus indépendamment et en parallèle [3,4] (Figure 3). Pour un problème global sur le domaine Ω posé sous la forme :

$$K \cdot u = f \tag{1}$$

où $K \in \mathbb{R}^{n,n}$ est la matrice de raideur de la structure, $u \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de déplacements nodaux et $f \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des forces nodales équivalentes, on cherche à obtenir une décomposition en N sous-domaines Ω_j , susceptibles d'être résolus de manière indépendante. En utilisant par exemple la méthode FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting) [5], le problème peut se mettre sous la forme :

$$\forall j \in [1, N], \quad K_j \cdot u_j = f_j - {}^t B_j \lambda \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^N B_j \cdot U_j = 0 \quad (3)$$

où K_j est la matrice de raideur du sous-domaine Ω_j , u_j le vecteur de déplacements des nœuds de Ω_j , f_j les forces externes appliquées à Ω_j , B_j une matrice de booléens associant les multiplicateurs de Lagrange λ aux degrés de liberté de Ω_j . Ce sont ces multiplicateurs de Lagrange qui assurent la continuité de la solution aux frontières entre les sous-domaines (Figure 3).

Ces méthodes permettent de répartir la charge de calcul entre plusieurs machines ou nœuds et d'utiliser au maximum les architectures parallèles pour résoudre les problèmes plus rapidement. Néanmoins, avec ce type d'approches, la charge de calcul globale augmente, même si la division permet un gain de temps. Elles ne permettent donc pas l'amélioration de la finesse de l'information pour une dimension de problème (ou une puissance de calcul) donnée [5–7].

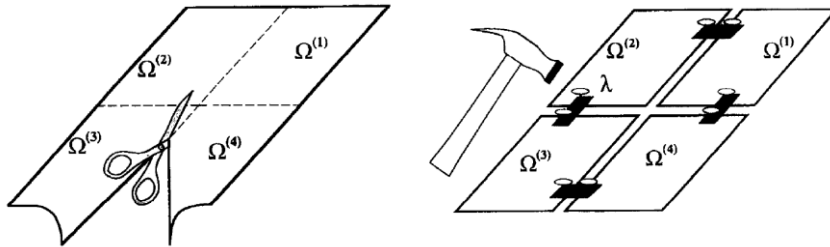


Figure 3 : Schéma de la méthode de décomposition de domaine FETI-DP (issu de [5])

Par ailleurs, dans le cas d'une modélisation non locale, seuls les nœuds appartenant à l'interface entre les sous-domaines sont connectés via les multiplicateurs de Lagrange. Il n'est donc pas possible de transmettre directement des informations non locales.

1.2 Méthodes globales-locales

Les méthodes d'analyse globale-locale sont largement utilisées pour les simulations multi-échelles, où des phénomènes physiques différents se produisent aux différentes échelles du problème. Ces méthodes permettent de découpler les échelles et de limiter la complexité du problème global [8]. Elles combinent une simulation relativement grossière à la grande échelle, avec des simulations plus fines à la petite échelle. Les deux échelles de simulations s'échangent des conditions aux limites (forces, déplacements, ...). Un schéma itératif permet de trouver une solution satisfaisant les équations aux deux échelles (Figure 4).

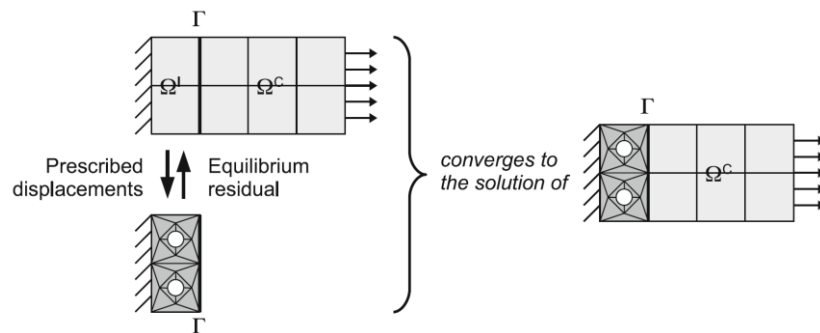


Figure 4 : Schéma de fonctionnement de l'analyse globale-locale (issu de [9])

La séparation d'échelles requiert toutefois la définition d'un VER (Volume Élémentaire Représentatif), suffisamment petit pour être représentatif du comportement matériau, considéré comme homogène à la grande échelle et suffisamment grand pour représenter un comportement moyen à la petite échelle. La définition d'un VER pour un matériau fissuré n'est pas clairement établie [10]. De nombreuses variantes de ces méthodes globales-locales existent [9,11–14], qui combinent éventuellement des modèles différents mais aussi des méthodes numériques différentes, telles que les CSL (Confinement-Shear-Lattice) [15] ou les éléments discrets [16].

Une méthodologie globale-locale spécifiquement étudiée pour la simulation de la fissuration dans le béton a été développée en 2003 par Haidar *et al.* [17]. La méthode permet de coupler une résolution du problème de grande échelle, utilisant un maillage grossier et un modèle de comportement élastique, avec une résolution à l'échelle de la zone fissurée utilisant un maillage fin et un modèle d'endommagement (cette zone est dite « zoomée », Figure 5). A chaque pas de chargement :

- le problème de l'échelle globale est résolu, de manière à obtenir un champ de déplacement.
- les déplacements P_G des nœuds situés à la frontière de la zone zoomée Γ_L sont utilisés comme conditions aux limites de la zone zoomée Ω_L , qui est alors simulée (non linéaire).
- la distribution des efforts résiduels p_L résultant des contraintes (inélastiques) dans la zone zoomée est alors ajoutée comme une force externe au problème élastique associé à l'échelle globale (domaine Ω_G), qui est résolu de nouveau.
- les deux étapes précédentes sont répétées jusqu'à la convergence.

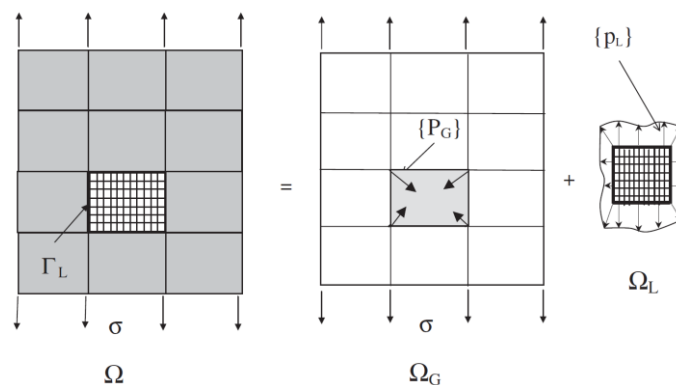


Figure 5 : Schéma de la méthode globale-locale de Haidar *et al.* (issu de [17])

Cette approche permet de reproduire avec une bonne fidélité les résultats à l'échelle locale et de réduire la dimension globale du problème non linéaire. L'absence d'homogénéisation permet de s'affranchir du problème de définition du VER, même si la dimension des zones zoomées est fixée par le modèle mécanique. Néanmoins, elle nécessite en particulier la connaissance a priori de la localisation du comportement de fissuration (nécessaire pour définir la zone zoomée), qui n'est pas forcément facilement identifiable sur une structure de grande taille.

1.3 Méthodes de réduction de modèle

Les méthodes de réduction de modèle et les méthodes de « zoom » qui en sont issues sont utilisées lorsque des phénomènes complexes se manifestent uniquement sur une partie localisée d'un problème de grandes dimensions. Ces approches visent à simplifier le plus possible la modélisation des zones non soumises au phénomène non linéaire et à concentrer l'effort de calcul là où il est le plus nécessaire, limitant ainsi la charge de calcul globale [18]. La Figure 6 illustre le principe de la réduction de modèle pour la représentation d'une géométrie par un nombre réduit de polyèdres.

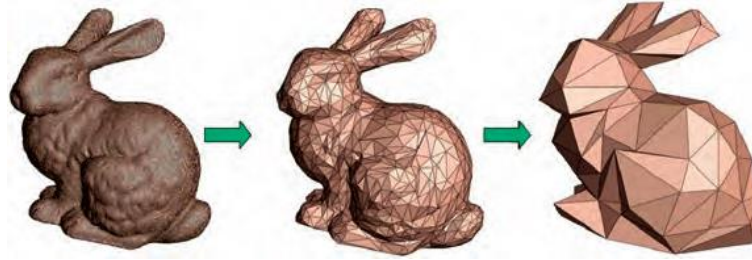


Figure 6 : Illustration des méthodes de réduction de modèle (issu de [19])

De manière générale, on formalise le problème de la manière suivante :

$$x = g(x, p) \quad (4)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système et $p \in \mathbb{R}^q$ un jeu de paramètres du problème. La résolution de ce problème pour x permet d'obtenir un vecteur de grandeurs d'intérêt $y \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$y = h(x, p) \quad (5)$$

La réduction de modèle consiste à réduire la dimension du problème (et du vecteur d'état) pour obtenir le problème sous la forme :

$$\hat{x} = \hat{g}(\hat{x}, p) \quad (6)$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n'}$ est l'état réduit du système, avec $n' < n$. On obtient alors les grandeurs d'intérêt par :

$$y = \hat{h}(\hat{x}, p) \quad (7)$$

Une des méthodes de réduction de modèles les plus utilisées est la décomposition orthogonale, utilisant par exemple le développement de Karhunen-Loève. Cette approche fut introduite dans la mécanique des structures par Spanos et Ghanem [20], s'inspirant des méthodes existantes dans la mécanique des fluides [21,22]. Elle consiste à analyser par la méthode de l'Analyse en Composantes Principales (ACP) les réponses mécaniques en fonction des sollicitations et des paramètres de sorte à construire un modèle prédictif. Appliquer cette méthodologie à une sous-structure permet de la remplacer par un modèle linéarisé et ainsi réduire le coût de calcul associé [23]. Cette méthode a diverses applications notamment dans la mécanique des fluides [19], l'optimisation de forme [19], l'analyse dynamique [24] et les méthodes d'éléments finis stochastiques [25].

Cependant, la réduction de dimension associée à ce type de méthode se fait au prix d'une perte d'information et d'un résultat local dégradé. Dans les configurations où l'on souhaite obtenir des informations sur la fissuration, ceci pose problème.

1.4 Méthodes d'élimination de degrés de liberté

Les méthodes d'élimination de degrés de liberté (ddls) sont des méthodes mathématiques permettant de réduire la dimension des systèmes ayant un grand nombre d'inconnues : des variables sont éliminées du système, qui peut alors être résolu partiellement de sorte à obtenir la valeur des variables restantes. Dans le cadre de la mécanique, la méthode de condensation statique, aussi nommée méthode des super-éléments, est la plus largement utilisée. Elle fut introduite en 1965 par Guyan [26]. Elle simplifie la résolution des systèmes linéaires de grandes dimensions en éliminant une partie des degrés de liberté.

La méthode de Guyan permet de résoudre un problème de mécanique linéaire, discrétisé sur n degrés de liberté et posé sous la forme de l'équation (1) : $Ku = f$. Pour simplifier la formulation, on suppose

que les matrices de rigidité sont inversibles. On notera que dans le code de calcul utilisé pour la thèse, Cast3M [27], les conditions aux limites sont dualisées par la méthode des doubles multiplicateurs de Lagrange, qui permet de conserver des matrices inversibles tout en incluant les conditions aux limites dans la matrice de rigidité du système [28].

Le système est décomposé en deux sous-domaines Ω_C (condensé) et Ω_M (maître):

$$f = \begin{pmatrix} f_C \\ f_M \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_C \\ u_M \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} K_{C,C} & K_{C,M} \\ K_{M,C} & K_{M,M} \end{pmatrix} \quad (8)$$

avec $f_C, u_C \in \mathbb{R}^p, f_M, u_M \in \mathbb{R}^q, K_{C,C} \in \mathbb{R}^{p,p}, K_{C,M} \in \mathbb{R}^{p,q}, K_{M,C} \in \mathbb{R}^{q,p}, K_{M,M} \in \mathbb{R}^{q,q}, n = p + q$.

Le système est réécrit de sorte à trouver la solution du problème associé au sous-domaine Ω_M , en utilisant la matrice de rigidité « réduite » ou « condensée » \hat{K} du système [26], qui est le complément de Schur de la matrice K :

$$u_C = K_{C,C}^{-1} (f_C - K_{C,M} u_M) \quad (9)$$

$$\hat{K} \cdot u_M = \hat{f} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \hat{K} = K_{M,M} - K_{M,C} K_{C,C}^{-1} K_{C,M} \\ \hat{f} = f_M - K_{M,C} K_{C,C}^{-1} f_C \end{cases} \quad (11)$$

L'équation (10) est le problème condensé. Ce problème linéaire, de dimension q , est plus rapide à résoudre que le problème initial de dimension n . Le résoudre donne la solution sur Ω_M . Il est alors possible de déduire celle de Ω_C par l'équation (9), nous nommerons cette étape « décondensation ». Un terme de chargement « condensé » ou « réduit » ($-K_{M,C} K_{C,C}^{-1} f_C$) apparaît dans le problème condensé. Il s'agit de la retransmission sur Ω_M des forces externes f_C appliquées à Ω_C : les degrés de liberté des deux sous-domaines sont bien découplés (car les degrés de liberté du sous-domaine s n'interviennent pas dans les équations des matrices de l'équation) et les effets mécaniques réciproques sont bien pris en compte.

Plusieurs développements ont été réalisés sur la base de cette méthode, comme l'extension aux problèmes d'analyse dynamique (condensation dynamique) [18,29]. Cette classe de méthode trouve diverses applications, par exemple en sismique ou pour l'ingénierie des véhicules [30]. La première méthode dite de « zoom structural » fut introduite par Hirai *et al.* [31,32]. Elle combine la condensation statique avec une méthode de réanalyse proposée par Wang et Pilkey [33] et une méthode de remaillage permettant d'améliorer localement la qualité de la simulation numérique. Le point de départ est un maillage relativement grossier, qu'on raffine sur une sous-structure. La nouvelle rigidité de cette sous-structure est calculée, puis condensée par la méthode de Guyan sur le maillage grossier et réintroduite dans le problème global. La résolution du problème global donne la solution sur le maillage grossier, qui permet ensuite de résoudre le sous-problème local sur le maillage fin. Seule la rigidité de la zone d'intérêt est donc condensée avec cette approche. Cette méthode peut être utilisée pour combiner différents modèles aux différentes échelles [34].

1.5 Synthèse

Différentes méthodes permettant de réduire la dimension ou d'optimiser la résolution des problèmes de mécanique proches de celui qui nous intéresse ont été proposées dans la littérature. Compte tenu du phénomène qu'on souhaite simuler (fissuration du béton) et du type de structure traité, les principaux critères de choix seront donc : la possibilité de réduire la dimension du problème, la

possibilité d'obtenir une solution équivalente à un calcul complet, la capacité à détecter l'amorçage ou la propagation d'une fissuration, la possibilité de traiter des problèmes de mécanique non linéaire et la compatibilité avec les approches non locales. En suivant ces critères, les avantages et inconvénients des différentes classes d'approches sont résumés dans le Tableau 2.

Méthodes	Réduction de dimension	Solution exacte	Détection de la fissuration	Mécanique non linéaire	Approches non locales
Calcul parallèle & Décomposition de domaine					
Approches globale-locales					
Réduction de modèle					
Elimination de ddl					

Tableau 2 : Performance des méthodes de calcul pour les grandes structures.

Il apparaît qu'aucune des catégories de méthodes présentées n'est pleinement satisfaisante par rapport au problème posé. Les approches par calcul parallèle et de réduction de modèle ne répondent respectivement pas aux deux critères les plus importants : la réduction effective de la dimension du problème et la qualité optimale de la solution locale. Un dernier critère, plus pragmatique, nous poussera à délaisser les approches globales-locales au profit de l'élimination de degrés de liberté : il s'agit de la facilité d'implémentation. La condensation statique est en effet une méthode largement répandue et implémentée dans de nombreux codes de calcul, là où les approches multi-échelles nécessitent l'implémentation de nouveaux algorithmes dans la plupart des codes existants. Afin de pouvoir répondre à notre problématique, il sera donc nécessaire d'étendre la méthode de condensation au contexte de la mécanique de l'endommagement (comportement non linéaire), ainsi qu'y apporter une méthode de détection de la fissuration. Les développements apportés devront permettre de maintenir la compatibilité avec les approches non locales.

2 Calcul de structures sous incertitudes

Dans cette section, nous réalisons un état de l'art portant sur les méthodes susceptibles de répondre à la question de la quantification des incertitudes sur les structures de grandes dimensions en régime non linéaire. Dans un contexte déterministe, qui est celui de la plupart des modélisations classiques de type éléments finis pour les structures, il n'est pas tenu compte des divers aléas intrinsèques à la structure ni de leur influence sur le comportement du système. Ils sont souvent pris en compte a posteriori par l'application de coefficients de sécurité, qui sont typiquement issus du retour d'expérience sur des structures similaires et/ou réglementaires.

Cependant, durant les dernières décennies, un certain nombre d'approches alternatives sont apparues dans la littérature. Elles font appel à une caractérisation probabiliste des aléas et permettent de quantifier de manière plus précise le comportement attendu de la structure. La caractérisation probabiliste de la réponse mécanique comprend notamment le calcul de sa moyenne, variance et covariance, fonction de densité de probabilité ou des quantiles de relativement faible probabilité. Ce type d'analyses peut typiquement permettre un dimensionnement plus réaliste des structures ou des opérations de maintenance pour un niveau de sûreté donné [35,36]. Selon le type de grandeur qu'on souhaite obtenir par l'analyse, différentes approches peuvent être adoptées [37,38] :

- les approches de type Monte-Carlo ou Quasi-Monte-Carlo permettent en théorie une caractérisation probabiliste complète de toutes les grandeurs d'intérêt sur les systèmes mécaniques.
- les méthodes fiabilistes permettent de calculer directement la probabilité de défaillance d'un système mécanique.

- les méthodes de types éléments finis stochastiques (EFS) visent une caractérisation probabiliste plus ou moins complète des grandeurs d'intérêt de la structure, considérées elles-mêmes comme des variables ou champs aléatoires (ou processus stochastiques). Parmi cette grande catégorie d'approches, on distingue :
 - les méthodes de perturbation ;
 - les approches de type collocation ou surface de réponse ;
 - les approches spectrales ;
 - les approches couplées réduction déterministe – EFS.

Dans le contexte général des méthodes EFS, mais plus généralement de l'analyse mécano-probabiliste, un certain nombre de méthodes sont décrites comme « non-intrusives » (en particulier, méthodes de perturbation, collocation et surface de réponse). Leur point commun est d'apporter une réponse aux problématiques probabilistes en utilisant un certain nombre de résolutions de problèmes déterministes [39]. A l'inverse, un ensemble de méthodes de type EFS sont dites « intrusives » (en particulier les approches spectrales). Leur spécificité est de remplacer la résolution déterministe du problème de mécanique déterministe par un solveur spécifique aux systèmes stochastiques [40].

Dans le cadre de cette thèse, l'objectif est d'obtenir une quantification probabiliste de certaines grandeurs d'intérêt locales de structures de grande taille au comportement non linéaire. Les méthodes fiabilistes ne sont pas appropriées par rapport à cet objectif. L'état de l'art se concentrera donc sur la méthode de Monte-Carlo ainsi que sur les approches de type éléments finis stochastiques. Le choix de la méthode sera orienté selon les spécificités du problème (évoquées dans la section précédente), ainsi que selon la capacité à s'articuler avec la méthode de réduction développée.

2.1 Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo désigne une stratégie algorithmique permettant de calculer certaines grandeurs probabilistes si on dispose d'un modèle ou d'une approximation de réponse mécanique et d'une modélisation des paramètres aléatoires [41,42]. Largement utilisée dans différents domaines (optimisation numérique, finance de marché, transport particulière ...), cette méthode est simple à mettre en œuvre et extrêmement robuste. Son inconvénient majeur est le coût de calcul.

Elle consiste à réaliser un certain nombre (élevé) de tirages des paramètres aléatoires d'entrée du système (dans le cas de la mécanique, les propriétés du matériau par exemple). Pour chacun de ces tirages, la réponse mécanique est calculée. On engendre ainsi un ensemble de tirages de réponses mécaniques. Il est ensuite possible d'estimer, par une analyse statistique des résultats ainsi produits, des grandeurs d'intérêt probabilisées de la structure (par exemple probabilité de défaillance, force moyenne à la rupture, quantiles, ...).

La moyenne d'une grandeur d'intérêt et son écart type peuvent être estimés en fonction des diverses réalisations selon les expressions :

$$\mu_q \simeq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_j \quad (12)$$

$$\sigma_q^2 \simeq \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (q_j - \mu_q)^2 \quad (13)$$

où μ_q est la moyenne de la grandeur d'intérêt q , σ_q^2 sa variance sans biais, q_j sa valeur au tirage j et N le nombre de réalisations. La probabilité d'un événement donné $f(q)$ (en particulier, défaillance de la structure) peut être estimée de la manière suivante :

$$p_f \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N 1_f(q_j) \quad (14)$$

où p_f est la probabilité de l'évènement et 1_f est la fonction caractéristique de l'évènement $f(q)$.

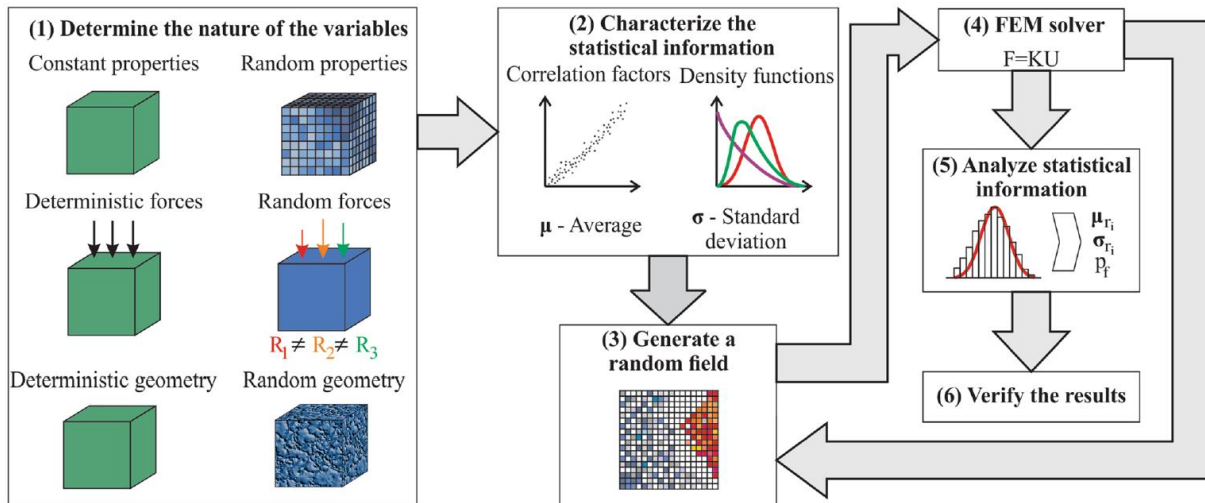


Figure 7 : Schéma de la méthode de Monte-Carlo (issu de [43])

Cependant, cette méthode présente plusieurs inconvénients. En particulier, elle est difficilement applicable si le calcul des grandeurs d'intérêt mécanique est une opération difficile à faire, par exemple s'il requiert un calcul éléments finis de grandes dimensions et/ou non linéaire. Un autre inconvénient est sa vitesse de convergence, relativement lente (\sqrt{N} où N est le nombre de tirages). Elle permet facilement d'obtenir des moyennes ou moment statistiques, mais les queues de distribution ou les faibles probabilités peuvent nécessiter un très grand nombre de tirages pour être estimées avec une précision suffisante. Différentes méthodes d'échantillonnage, permettant d'influer sur le tirage initial en fonction du type de résultat qu'on souhaite obtenir, peuvent cependant permettre de pallier partiellement ces inconvénients.

2.2 Méthode des éléments finis stochastiques

De nombreuses méthodes ont été développées dans le cadre général des Eléments Finis Stochastiques (EFS). Ces méthodes permettent d'utiliser la résolution par éléments finis sur des problèmes mécaniques sous incertitudes. Elles permettent aussi de quantifier l'influence de ces incertitudes sur les grandeurs d'intérêt d'une structure. En comparaison des approches de type Monte-Carlo, les approches de modélisation plus récentes offrent de meilleurs ordres de convergence et nécessitent moins de simulations [20,44–46]. Ces méthodes sont maintenant utilisées dans plusieurs codes de simulation industriels [43,47]. Dans certains cas, elles produisent directement des approximations des grandeurs statistiques d'intérêt [48–50]: valeurs moyennes, moments statistiques, Fonctions de Densité de Probabilité (FDPs), etc.

Les méthodes EFS sont caractérisées par trois blocs fonctionnels, qui permettent de préciser le comportement d'une structure sous incertitudes [46] :

- un modèle d'incertitudes (par exemple modélisation par champs aléatoires des propriétés matérielles incertaines).
- une méthode de résolution des problèmes déterministes (typiquement, simulation EF).
- un algorithme de propagation des solutions déterministes en fonction des incertitudes (par exemple surface de réponse, développement en chaos polynômial).

Diverses méthodes ont été développées pour la modélisation des incertitudes sur la géométrie, le matériau, le chargement. Les méthodologies de propagation des incertitudes à travers des solutions déterministes ont aussi été largement étudiées et différentes classes de méthodes existent dans la littérature.

Cependant, dans le cadre des EFS, peu d'études ont porté sur la problématique du modèle et des approches numériques de résolution du problème déterministe, en particulier dans l'optique de limiter le coût de calcul [46,51]. Ceci est particulièrement marqué pour les systèmes non linéaires de grandes dimensions, pour lesquels des approches non-intrusives de type chaos polynômial ou collocation stochastique [52] sont généralement préférées aux approches intrusives [43].

2.2.1 Méthodes de perturbation

Les méthodes de perturbation représentent une première catégorie des approches de type EFS, qui ont la particularité de s'appuyer sur les variations locales de grandeurs d'intérêt par rapport aux différents paramètres aléatoires impactant le système [43]. Elles sont particulièrement adaptées aux analyses de sensibilité par rapport aux différentes incertitudes, notamment les propriétés du matériau.

En utilisant le développement en séries de Taylor, l'influence des paramètres aléatoires peut être quantifiée. Pour un vecteur normalisé de paramètres aléatoires $y = (y_1, \dots, y_r)$, on peut calculer les différentielles :

$$q_i^1 = \frac{\partial q}{\partial y_i} \quad (15)$$

$$q_{ij}^2 = \frac{\partial^2 q}{\partial y_i \partial y_j} \quad (16)$$

Il est alors possible d'approximer les grandeurs d'intérêt pour une valeur donnée des paramètres aléatoires par le développement de Taylor :

$$q = q^0 + \sum_{i=1}^r q_i^1 y_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r q_{ij}^2 y_i y_j \quad (17)$$

Cette approximation permet de calculer directement les valeurs moyennes μ_q et matrices de covariance des grandeurs d'intérêt q :

$$\mu_q \simeq q^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r q_{ij}^2 Cov(y_i, y_j) \quad (18)$$

$$Cov(q, q) \simeq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r q_i^1 {}^t q_j^1 Cov(y_i, y_j) \quad (19)$$

2.2.2 Méthodes de collocation et surfaces de réponse

Dans le contexte des méthodes de type surface de réponse ou collocation stochastique, on cherche à écrire le vecteur des grandeurs d'intérêt de la structure q sous la forme :

$$q(y) \approx \sum_{i=0}^N q^i \phi_i(y) \quad (20)$$

où les ϕ_i représentent une famille de polynômes du vecteur y et les q^i sont des valeurs du vecteur $q(y)$ pour des valeurs de y bien choisies.

La particularité de ces méthodes est donc de permettre l'utilisation de méthodes de résolution déterministes pour résoudre les problèmes de mécanique, par exemple des codes de calcul ou solveurs existants. Elles sont en particulier adaptées aux problèmes nécessitant des outils complexes pour être résolus dans le contexte déterministe (problèmes non linéaires en particulier).

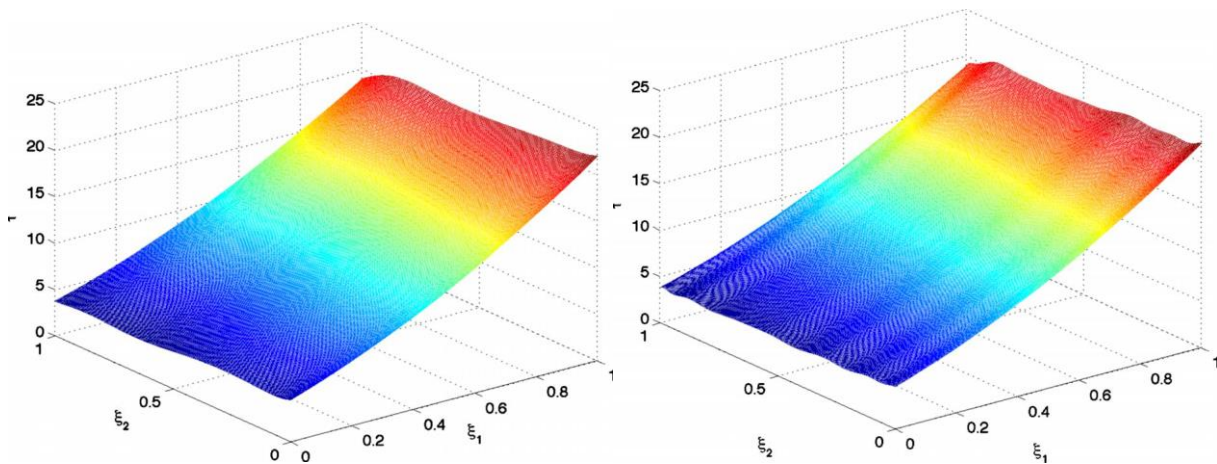


Figure 8 : Exemple de méta-modèle construit par collocation stochastique avec deux ordres d'approximation différents (contrainte dans un vaisseau sanguin selon la vitesse et le rayon [53])

2.2.3 Méthodes spectrales

Les approches spectrales des éléments finis stochastiques utilisent souvent une décomposition polynômiale de type Karhunen-Loève de la réponse mécanique en fonction des paramètres aléatoires, généralement avec des polynômes d'Hermite. Ce développement en série est généralement tronqué à un niveau qui détermine la qualité de l'approximation de la réponse mécanique. On compare en Figure 9 le principe de fonctionnement d'une méthode non intrusive, du type collocation stochastique, avec une méthode spectrale (intrusive), du type Chaos Polynomial Galerkin [54], pour résoudre un problème aléatoire de type $(K(\theta)u(\theta) = f(\theta))$ [46] :

- dans le cas de la collocation, N_{SC} problèmes déterministes sont engendrés et résolus de manière indépendante. Chacun de ces problèmes $(K_i u_i = f_i)$ a la même dimension d que le problème aléatoire de base et correspond à une valeur donnée des paramètres aléatoires θ : le point de collocation.
- dans le cas du chaos polynomial intrusif, un problème de plus grande dimension $(K^{jk} u_j = f_j)$, de dimension $d N_{PC}$ est résolu directement. Ce problème contient la projection de la fonction de réponse mécanique (discrétisée sur le domaine Ω) sur une base orthogonale de polynômes des paramètres aléatoires.

Les principaux avantages des approches intrusives type Chaos Polynomial sont leur capacité à traiter des problèmes ayant une forte dimension probabiliste (nombreux paramètres aléatoires), ainsi que des bonnes propriétés de convergence lorsque l'ordre de la décomposition augmente [55]. Leurs principaux inconvénients sont le besoin de développer un solveur ad hoc pour réaliser des analyses probabilistes et la limitation de ces approches aux problèmes linéaires ou quasi-linéaires.

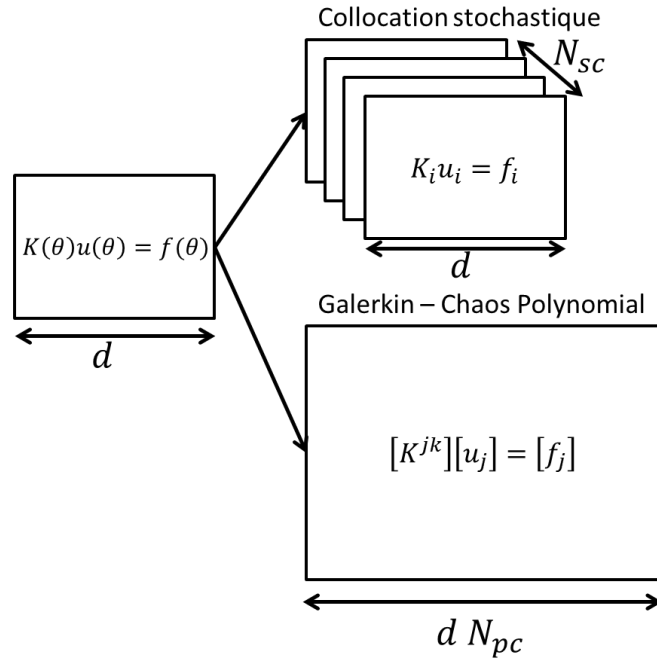


Figure 9 : Comparaison des approches par collocation stochastique et chaos polynomial de type Galerkin pour un problème de mécanique linéaire sous incertitudes.

2.2.4 Approches couplées réduction déterministe – EFS

Dans le cadre des approches EFS, de nombreuses méthodes sont présentes dans la littérature pour réduire la dimension du système probabiliste global en réduisant la dimension probabiliste ou en améliorant le conditionnement du système [46,51]. Du côté des approches non intrusives, on pourra citer notamment les travaux de Nobile *et al.* utilisant des grilles de collocation creuses de type Smolyak pour réduire le nombre de points de collocation [56,57] et ceux de Blatman et Sudret sur les développements en chaos polynômiaux creux [58,59] pour réduire le nombre de coefficients du développement polynômial. Du côté des approches spectrales, on pourra citer notamment les travaux de Nair et Keane sur les méthodes stochastiques à base réduite [60] et ceux de Doostan *et al.* sur la réduction de modèle appliquée au chaos polynomial [61] permettant de réduire la dimension du système global à résoudre. Cependant, comme indiqué en début de section, peu d'approches ont été proposées dans la littérature pour répondre à la problématique de la réduction déterministe du coût des calculs dans les méthodes EFS. La méthode « Guyan-PC » est l'une des rares réponses, avec la méthode de Guedri pour la dynamique, utilisant la condensation de Craig-Bampton [62]. Elle fut introduite en 2011 par Panayirci *et al.* [51]. Cette approche consiste à appliquer la méthode de condensation de Guyan dans le cadre d'une analyse EFS avec décomposition en chaos polynomial de type Galerkin.

Le principe de cette méthode est illustré en Figure 10 : avant d'assembler le problème probabiliste complet sous la forme du chaos polynômial, chaque problème déterministe ($K_j u_j = f_j$) est ainsi ramené au problème réduit associé ($\hat{K}_j u_{zj} = \hat{f}_j$) par la méthode de condensation de Guyan. Cela

permet d'éliminer les degrés de liberté dont on ne souhaite pas forcément obtenir le comportement. Ainsi, la dimension de l'ensemble du problème linéaire probabiliste est réduite d'un facteur M .

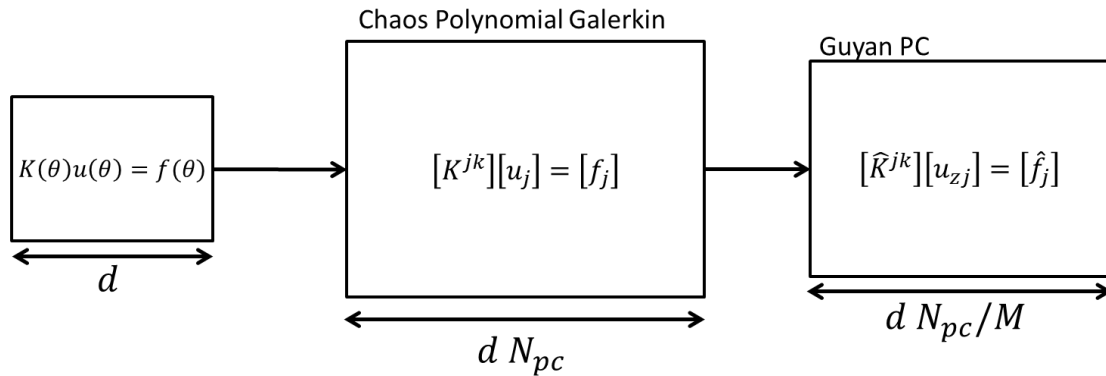


Figure 10 : Schéma de la méthode Guyan-PC.

2.3 Synthèse

Différentes catégories de méthodes permettant de tenir compte des incertitudes et de leur impact sur les grandeurs d'intérêt d'une structure lors des simulations ont été présentées. Dans l'optique du problème qu'on souhaite résoudre et de la structure étudiée, les critères de comparaison seront donc : la réduction de dimension apportée, le coût de calcul, la capacité à traiter des grands intervalles de variation des paramètres aléatoires, la possibilité de traiter des problèmes de mécanique non linéaire et la capacité à s'articuler avec les codes éléments finis disponibles. Les avantages et inconvénients des différentes classes d'approches sont résumés dans le Tableau 3.

Méthode	Réduction de dimension	Coût de calcul	Grands intervalles de variation	Régime non linéaire	Codes existants
Monte-Carlo					
Perturbation					
Surface de réponse & Collocation					
CP Galerkin					
Approches réduites					

Tableau 3 : Performance des méthodes de calcul de structures sous incertitudes.

Il apparaît qu'aucune des catégories de méthodes étudiées ne répond totalement au problème que pose la prise en compte des incertitudes sur le comportement de fissuration des grandes structures : l'approche Monte-Carlo est inenvisageable pour des raisons de coût de calcul ; la méthode de perturbation ne permettra pas de traiter un problème avec des variations potentiellement grandes des paramètres aléatoires ou fortement non linéaire en fonction de ces paramètres ; les approches spectrales nécessitent l'implémentation dans un code de simulation ad hoc, qui semble peu envisageable compte tenu de la complexité du problème. Ceci rendrait les outils méthodologiques développés moins génériques et plus difficilement applicables à d'autres types de problèmes. Les méthodes de surface de réponse et de collocation semblent apporter une partie de la réponse, mais la question de la dimension du problème déterministe demeure. Afin de répondre à notre problématique spécifique, nous proposons donc de développer une approche réduite, s'appuyant sur la méthode proposée dans la section précédente, couplant la réduction du problème non linéaire déterministe avec une approche de type collocation stochastique.

3 Modélisation des renforts actifs et passifs à l'échelle locale

Dans cette section, nous réalisons un état de l'art portant sur les approches de modélisation susceptibles de répondre au problème de la représentation locale des inclusions et en particulier des renforts actifs et passifs. Plusieurs catégories de modélisations sont utilisées dans la littérature pour représenter ces inclusions, dont nous étudions l'applicabilité aux structures traitées et la capacité à répondre à la problématique posée. Les stratégies de modélisation étudiées sont regroupées en trois grandes catégories :

- les modélisations à l'échelle de la structure, largement utilisées pour les études de génie civil ;
- les modélisations à l'échelle intermédiaire, plus fines mais applicables sur des structures de plus petites dimensions (de dimension typique inférieure à 1 m) ;
- les modélisations les plus fines, prévues pour des études avec une représentation fine (échelle du granulat, de dimension typique 1 cm).

L'objectif de cet état de l'art est d'établir les avantages et inconvénients des différentes stratégies de modélisation, afin de choisir la plus appropriée au problème considéré.

3.1 Modélisations à l'échelle structurale

Ce paragraphe rassemble deux modélisations classiquement utilisées pour la représentation des renforts à l'échelle des structures de génie civil : la modélisation 1D et la modélisation homogénéisée 2D.

3.1.1 Modélisation 1D

L'approche 1D est de loin la plus utilisée dans la littérature pour représenter les renforts dans le béton [63–66]. Elle est simple à appliquer sur des structures complexes de grande taille comportant de nombreux renforts et n'impose pas de contraintes de maillage. Les renforts peuvent être représentés avec des éléments barres ou poutres [67]. Le modèle de barre ne dispose que d'une rigidité axiale, là où le modèle de poutre possède également une rigidité de flexion et de cisaillement. Du point de vue géométrique, le diamètre de la barre est négligé devant sa longueur et la taille des éléments finis du domaine 3D. D'un point de vue mécanique, on suppose que les modèles de béton et d'acier sont superposés en termes de rigidité. La section de la barre est utilisée uniquement pour calculer les valeurs de rigidités et de contraintes des éléments 1D et non la répartition spatiales des efforts transmis au béton ou l'interface géométrique entre les matériaux. Cette approche crée une singularité géométrique. La barre 1D et le béton 3D sont reliés, soit directement par un maillage conforme (ce qui ajoute une contrainte sur le maillage), soit indirectement par des relations cinématiques ou un modèle de liaison [68,69].

Dans le cas d'un modèle de type barre, la rigidité des éléments ne s'applique qu'en élancement. L'énergie élastique de chaque barre s'écrit sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{\sigma_x^2 S}{E} dl \quad (21)$$

où E est le module d'Young de l'acier, S la section de la barre, σ_x la contrainte longitudinale (dans le repère local) et l l'abscisse curviligne de la barre. Dans le cas des éléments poutres, il faut ajouter à cette expression l'énergie de flexion de l'élément et son énergie de cisaillement.

Cette méthode unidimensionnelle est facile d'utilisation et permet de bien reproduire le comportement mécanique global. Cependant, à l'échelle locale, elle ne permet pas de reproduire les phénomènes dans certaines configurations spécifiques [66]. De plus, elle tend à provoquer un effet de

concentration de contraintes, en particulier lorsqu'on considère des renforts actifs, tels que les câbles de précontrainte [70]. Cet effet de concentration de contraintes est illustré en Figure 11 : une force appliquée sur une singularité géométrique (ici, un nœud) provoque un niveau de contraintes local d'autant plus élevé que le maillage est fin. Ceci provoque une dépendance au maillage pathologique et des résultats physiquement incohérents : en particulier, la singularité de contraintes risque de créer un endommagement apparaissant très rapidement, si le modèle n'est pas régularisé.

Ce problème est uniquement dû à la singularité géométrique créée : l'approximation 1D utilisée consiste à négliger l'effet de la section de barre. Elle perd sa validité lorsque la dimension caractéristique des éléments finis béton devient aussi voire plus petite que le diamètre du renfort.

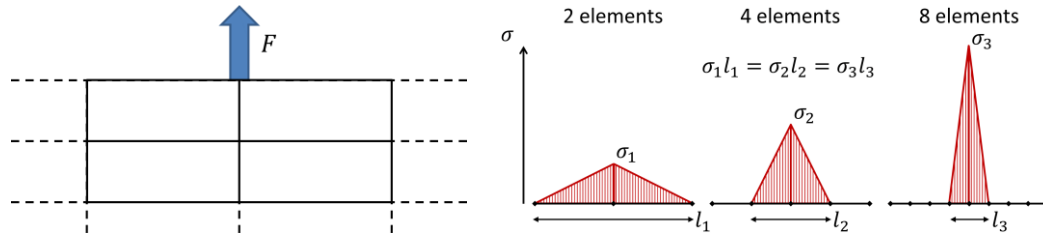


Figure 11 : Schéma de la concentration des contraintes en 2D avec une force nodale constante.

3.1.2 Modélisation homogénéisée 2D

La modélisation par comportement homogénéisé est l'une des plus largement utilisées pour les calculs de grandes structures. Elle est utilisée notamment pour représenter les treillis ou les nappes d'armatures (Figure 12) [71,72]. Avec cette approche, les aciers ne sont pas représentés individuellement, mais par un comportement de membrane ou de coque anisotrope. Dans ce cas, la section n'est prise en compte que pour le calcul de la rigidité et des contraintes dans la direction axiale des barres.

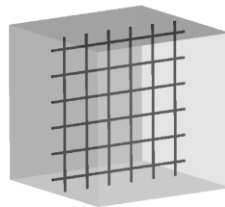


Figure 12 : Exemple de nappe d'armatures régulière (issu de [71]).

Afin de représenter avec cette approche une nappe d'armatures réparties de section S et d'espacement d , on pourra utiliser une épaisseur moyenne $e = S/d$. On choisira un coefficient de Poisson $\nu = 0$ afin de représenter le comportement d'une nappe de barres (qui n'a pas d'effet Poisson à l'échelle du réseau). Pour un modèle de type plaque représentant une nappe unidirectionnelle d'acier, l'énergie élastique de la nappe s'écrit sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} \int_{s'} \frac{\sigma_x^2 e}{E} ds' \quad (22)$$

où s' est la surface de la nappe et σ_x la contrainte dans la direction des barres. Il est possible avec cette approche homogénéisée de représenter avec un seul jeu d'éléments une nappe d'aciers bidirectionnelle (comme illustré sur la Figure 12). Dans ce cas, les aciers dans les deux directions sont susceptibles d'avoir des propriétés différentes, on utilisera donc des éléments équivalents ayant des propriétés orthotropes. L'épaisseur étant une propriété géométrique des éléments, on choisira de

faire varier par exemple le module élastique. Si les aciers ont les mêmes propriétés mécaniques, on écrira donc $E_y = E_x S_y d_x / S_x d_y$, où E_x, E_y sont les modules d'Young de l'élément homogénéisé dans les directions x et y , S_x et S_y les sections des barres, d_x et d_y leurs espacements. Dans ce cas, l'énergie élastique s'écrit sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} \int_{s'} \frac{\sigma_x^2 e}{E_x} ds' + \frac{1}{2} \int_{s'} \frac{\sigma_y^2 e}{E_y} ds' \quad (23)$$

Cette approche présente l'avantage de ne pas créer de singularité géométrique, contrairement à l'approche 1D et d'être stable par rapport au maillage [70]. De plus, elle ne présente pas de contraintes de maillage spécifique. Cependant, la description géométrique et mécanique des aciers n'est pas représentative dès qu'on se place à une échelle relativement fine (de l'ordre de l'espace entre barres). Elle ne permet donc pas d'utiliser des modèles d'interface acier-béton tenant compte par exemple de la perte d'adhérence, qui apporterait des informations sur la fissuration. Le domaine d'utilisation de cette approche est donc limité aux calculs de comportement global [71,73].

3.2 Modélisations à l'échelle intermédiaire : approche par séparation d'échelles

L'approche par séparation d'échelles, introduite par Sanchez-Palencia en 1980 [74], permet de séparer l'échelle fine (en l'occurrence celle de la section des barres) de l'échelle macroscopique, qui est celle de la structure. A la grande échelle, un comportement mécanique peut être identifié en considérant le matériau comme homogène. Les hétérogénéités sont prises en compte dans une seconde étape, où les valeurs des grandeurs mécaniques peuvent être calculées aux environs des aciers. Cette approche permet de reproduire avec une bonne précision le comportement des hétérogénéités. Dans le contexte de la modélisation du béton armé, ces méthodes sont cependant réservées à une utilisation pour des nappes d'armatures homogènes et tendent à complexifier l'implémentation des calculs numériques par rapport à une méthode éléments finis traitant une seule échelle [71].

3.3 Modélisations à l'échelle de l'hétérogénéité

Ce paragraphe rassemble deux modélisations classiquement utilisées pour la représentation des renforts à l'échelle la plus fine : la modélisation par level-sets pour les méthodes d'éléments finis enrichis et la modélisation 3D complète.

3.3.1 *Eléments enrichis et level-sets*

Dans le cas des calculs où le modèle béton est basé sur la mécanique de la rupture, il est courant d'utiliser des éléments finis dits « enrichis » de type X-FEM, qui permettent d'inclure un enrichissement cinématique local au niveau des fissures et de capturer ainsi les sauts de déplacement donc l'ouverture de ces fissures. Dans ces calculs, une approche de modélisation des inclusions géométriques pour les microstructures basées sur des level-sets est disponible [75,76]. Ces approches sont aussi applicables au cas des renforts actifs et passifs dans le béton. Avec cette modélisation, la géométrie des inclusions est représentée par la level-set, discrétisée sur le domaine éléments finis. L'enrichissement cinématique permet de représenter la discontinuité des champs entre l'intérieur et l'extérieur de l'inclusion.

La modélisation des renforts par level-sets présente en particulier l'avantage de ne pas nécessiter de maillage spécifique au niveau des aciers (Figure 13). Elle présente aussi de bonnes propriétés de convergence en maillage. En revanche, elle nécessite la création de nombreuses level-sets associées aux différentes armatures, ce qui peut être problématique si la structure est fortement renforcée. De plus, son domaine d'utilisation est de fait limité aux calculs dont le maillage est fin à l'échelle de l'inclusion, ce qui peut rendre difficile son applicabilité sur des structures de grandes dimensions.

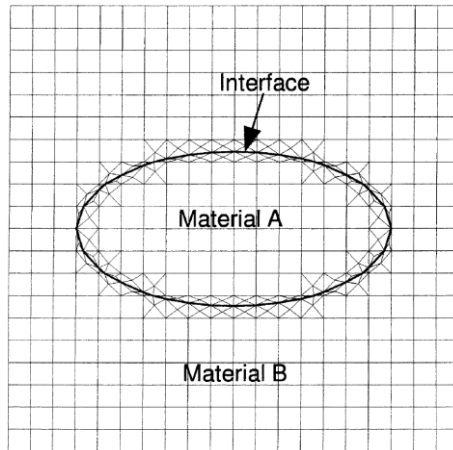


Figure 13 : Illustration d'une inclusion dans un domaine 2D (issu de [76])

3.3.2 Modélisation 3D complète

Une approche alternative, dans le cas des calculs éléments finis classiques notamment, consiste à modéliser le volume de l'inclusion dans le domaine 3D du béton. Cette modélisation présente une cinématique riche et peut permettre une description fine de la géométrie, notamment dans les cas de renforts complexes ou d'une modélisation à une échelle très fine (barres haute adhérence avec nervures, treillis soudés, cages d'armatures, ancrages des câbles ...) [77,78]. La contrepartie est la complexité du maillage et le coût de calcul associé. De plus, cette approche nécessite de réaliser un maillage conforme à la géométrie des inclusions. Avec cette modélisation, l'interface entre acier et béton est donc représentée explicitement.

Cette solution présente plusieurs avantages, en particulier une stabilité des résultats par rapport au maillage. Ceci est dû principalement à l'absence de singularité géométrique, puisque la section de l'hétérogénéité est introduite explicitement dans la géométrie. Cependant, malgré les progrès de l'automatisation et des algorithmes de maillage, l'adaptation nécessaire du maillage peut s'avérer difficilement compatible avec des applications industrielles (en particulier pour une forte densité de renforts ou une géométrie complexe des inclusions). En conséquence, cette approche est relativement rare dans la littérature, à l'exception des cas où une représentation explicite de l'interface est nécessaire (par exemple pour les modèles de liaison acier-béton [77,79–81] ou des modèles de corrosion [82]).

3.4 Synthèse

Différentes catégories d'approches permettant de représenter les hétérogénéités dans un matériau et plus particulièrement les aciers dans le béton ont été présentées. Dans l'optique du phénomène qu'on cherche à simuler et de la structure sur laquelle on souhaite réaliser ces simulations, les critères de choix pour la modélisation des aciers seront donc : la capacité à représenter les aciers passifs comme les câbles de précontrainte, l'applicabilité aux grandes structures, la représentativité à l'échelle locale, la stabilité numérique et la possibilité de s'adapter sur tout ou partie des maillages existants pour les études de génie civil. Les avantages et inconvénients des différentes classes d'approches sont résumés dans le Tableau 4.

Approche	Nappes d'aciers	Câbles	Grandes structures	Représentativité locale	Stabilité numérique	Maillages existants
Level-set et X-FEM						
3D complet						
Séparation d'échelles						
1D Barre/poutre						
2D homogénéisé						

Tableau 4 : Performance des approches de modélisation des aciers et câbles dans le béton.

Aucune des stratégies de modélisation proposées ne semble répondre totalement au problème qui se pose. Les approches par séparation d'échelles et 2D homogénéisé permettent de représenter le comportement des nappes d'aciers, mais pas d'aciers passifs isolés ou des câbles de précontrainte. Pour des raisons de coût de calcul, les approches les plus fines, level-set et 3D complet, semblent inapplicables à des structures de génie civil complètes. L'approche 1D a de nombreuses qualités et peut s'appuyer sur une grande partie des maillages existants, mais elle n'est ni représentative à l'échelle locale ni numériquement stable. Afin de répondre à notre problématique de représentativité locale à l'échelle de la grande structure, nous proposerons donc une nouvelle approche de modélisation pour les aciers, s'appuyant sur les maillages et caractéristiques du 1D, mais visant une représentativité locale et une stabilité numérique équivalentes à celle d'une modélisation en 3D.

Cette problématique de modélisation des renforts à l'échelle fine s'inscrit de plus dans un cadre plus général : pour différentes applications, il est nécessaire de modéliser des hétérogénéités 1D dans un volume 3D, par exemple pour les matériaux fibrés [8], composites à nanotubes de carbone [83] ou plus généralement pour modéliser des microstructures hétérogènes [84]. Les solutions proposées dans ce travail viseront à être applicables dans ce contexte plus général.

Chapitre 3 - Condensation adaptative pour l'analyse des grandes structures au comportement non linéaire localisé

1 Introduction

Dans ce chapitre, la problématique traitée est celle du passage à l'échelle des simulations numériques fines vers les problèmes de grandes structures. Une nouvelle méthode de calcul, s'appuyant sur la stratégie de condensation de Guyan [26], adaptée aux spécificités du problème, est proposée. Elle vise à reproduire à l'échelle locale les résultats d'un calcul non linéaire complet pour un coût de calcul réduit. Cette approche est présentée, puis appliquée à une poutre en béton en flexion et à un bâtiment en béton armé sous pression interne.

Du point de vue de la mécanique numérique, on cherche à résoudre un problème de mécanique non linéaire, dans l'hypothèse quasi-statique, en utilisant un pseudo-temps représentant l'évolution du chargement. On suppose que le problème est bien posé. Il est résolu par éléments finis, selon un chargement discrétisé τ (utilisé comme pseudo-temps) et de manière itérative :

$$K^\tau(u^\tau) \cdot u^\tau = f^\tau \quad (24)$$

avec K^τ la matrice de rigidité de la structure, u^τ le vecteur de déplacements nodaux et f^τ le vecteur de forces nodales. En décomposant les zones à comportement linéaire élastique (Ω_e) et non linéaire (Ω_n) du problème (Figure 14), on obtient :

$$\begin{pmatrix} K_{e,e} & K_{e,n} \\ {}^tK_{e,n} & K_{n,n}(u_n^\tau) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_e^\tau \\ u_n^\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_e^\tau \\ f_n^\tau \end{pmatrix} \quad (25)$$

avec $K_{e,e}$ la matrice de rigidité de la zone élastique linéaire de la structure (constante), $K_{n,n}^\tau$ la rigidité de sa partie endommagée (fonction du déplacement nodal et du chargement), $K_{e,n}$ la rigidité (constante) de l'interface $\Gamma_{e,n}$ entre Ω_e et Ω_n , u_e le déplacement dans la zone élastique, u_n le déplacement dans la zone non linéaire, f_e les forces nodales dans la zone élastique et f_n dans la zone non linéaire. Sous cette forme, si la zone à comportement non linéaire Ω_n est de petite dimension par rapport à la zone à comportement élastique Ω_e , alors u_e est de dimension plus élevée que u_n . Le terme variable de la matrice de rigidité, associé à la zone non linéaire, est ainsi séparé des termes constants, associés à la zone élastique et à l'interface.

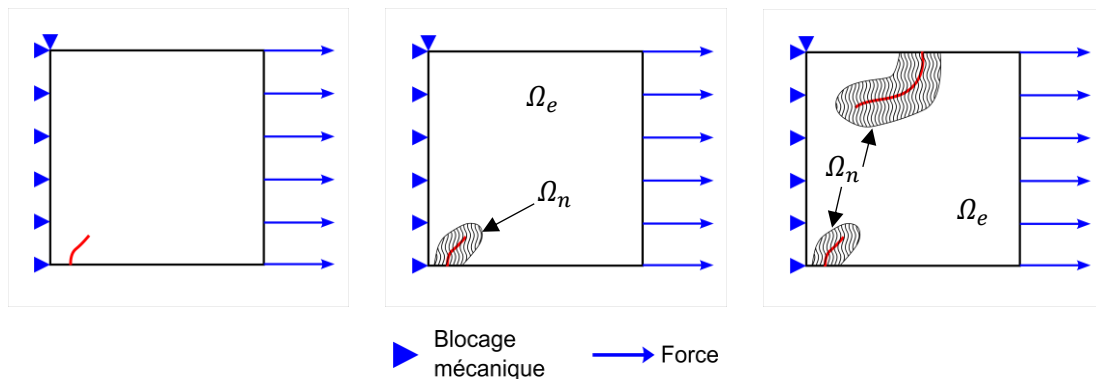


Figure 14 : Vue schématique du problème à résoudre au cours du chargement (rouge : fissure).

2 Condensation du problème

En décomposant le problème en N sous-structures, le problème général non linéaire (sous l'hypothèse des milieux continus et d'un comportement local) peut être mis sous la forme :

$$\begin{pmatrix} K_{1,1}^\tau(u_1^\tau) & \cdots & K_{1,N}^\tau(u_1^\tau, u_N^\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^tK_{1,N}^\tau(u_1^\tau, u_N^\tau) & \cdots & K_{N,N}^\tau(u_N^\tau) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^\tau \\ \vdots \\ u_N^\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^\tau \\ \vdots \\ f_N^\tau \end{pmatrix} \quad (26)$$

On suppose que la décomposition est réalisée de telle manière que :

- le système a un comportement linéaire dans les zones $\Omega_1, \dots, \Omega_{N'}$ et non linéaire dans les zones $\Omega_{N'+1}, \dots, \Omega_N$: le comportement non linéaire est localisé dans certaines zones.
- les interfaces entre zones linéaires et zones non linéaires ont un comportement linéaire élastique : le comportement non linéaire est localisé à l'intérieur du domaine non linéaire Ω_n et n'atteint pas la frontière $\Gamma_{e,n}$.

On peut alors utiliser la décomposition en zones pour réécrire le système en isolant les termes linéaires et non linéaires de la matrice. Si la majeure partie de la structure a bien un comportement élastique linéaire et si la décomposition est bien choisie, les zones non linéaires sont peu nombreuses : on a alors $N' \sim N$.

Dans ce contexte, les parties linéaires et non linéaires du système de départ correspondent, au pas τ , au découpage en zones. On a donc $\Omega_e = \{\Omega_1, \dots, \Omega_{N'}\}$ et $\Omega_n = \{\Omega_{N'+1}, \dots, \Omega_N\}$. Sous la forme décomposée, les différents termes de l'équation (25) s'écrivent donc :

$$K_{e,e} = \begin{pmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,N'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^tK_{1,N'} & \cdots & K_{N',N'} \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$K_{e,n} = \begin{pmatrix} K_{1,N'+1} & \cdots & K_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N',N'+1} & \cdots & K_{N',N} \end{pmatrix} \quad (28)$$

Les termes $K_{e,e}$ et $K_{e,n}$ sont des assemblages de rigidités élastiques (zones élastiques et interfaces), qui sont donc indépendantes de τ et du champ de déplacement u^τ .

$$K_{n,n}^\tau = \begin{pmatrix} K_{N'+1,N'+1}^\tau(u_{N'+1}^\tau) & \cdots & K_{N'+1,N}^\tau(u_{N'+1}^\tau, u_N^\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^tK_{N'+1,N}^\tau(u_{N'+1}^\tau, u_N^\tau) & \cdots & K_{N,N}^\tau(u_N^\tau) \end{pmatrix} \quad (29)$$

La matrice $K_{n,n}$, en revanche, est un assemblage de rigidités des zones non linéaires, elle est donc dépendante de τ ainsi que du champ de déplacement u_n^τ sur le sous-domaine local Ω_n .

$$u^\tau = \begin{pmatrix} u_e^\tau \\ u_n^\tau \end{pmatrix}; u_e^\tau = \begin{pmatrix} u_1^\tau \\ \vdots \\ u_{N'}^\tau \end{pmatrix}; u_n^\tau = \begin{pmatrix} u_{N'+1}^\tau \\ \vdots \\ u_N^\tau \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$f^\tau = \begin{pmatrix} f_e^\tau \\ f_n^\tau \end{pmatrix}; f_e^\tau = \begin{pmatrix} f_1^\tau \\ \vdots \\ f_{N'}^\tau \end{pmatrix}; f_n^\tau = \begin{pmatrix} f_{N'+1}^\tau \\ \vdots \\ f_N^\tau \end{pmatrix} \quad (31)$$

On souhaite arriver à une réduction du problème sur le sous-domaine Ω_n . Pour cela, une condensation statique globale de Guyan peut être appliquée au problème complet, incluant la zone linéaire Ω_e et non linéaire Ω_n . On choisit de condenser Ω_e avec comme nœuds de condensation (ou nœuds maîtres) ceux de l'interface $\Gamma_{e,n}$; on obtient alors le problème suivant, exprimé uniquement sur les degrés de liberté du domaine d'intérêt :

$$\hat{K}^\tau(u_n^\tau). u_n^\tau = \hat{f}^\tau \quad (32)$$

Dans cette équation, les termes réduits sont calculés par la méthode de condensation de Guyan :

$$\hat{K}^\tau(u_n^\tau) = K_{n,n}^\tau(u_n^\tau) - {}^tK_{e,n}K_{e,e}^{-1}K_{e,n} \quad (33)$$

$$\hat{f}^\tau = f_n^\tau - {}^tK_{e,n}K_{e,e}^{-1}f_e^\tau \quad (34)$$

Avec cette approche, le problème est bien réduit à sa partie non linéaire. Néanmoins, le terme inverse $K_{e,e}^{-1}$ est de grande dimension et donc potentiellement très coûteux à calculer si Ω_e est grand (ce qui est le cas visé). De plus, la définition des sous-domaines $\Omega_e = \{\Omega_1, \dots, \Omega_{N'}\}$ et $\Omega_n = \{\Omega_{N'+1}, \dots, \Omega_N\}$ est liée au pas de calcul τ auquel on se place. Elle est susceptible d'être modifiée lorsque l'état du système évolue; d'un pas sur l'autre il serait donc nécessaire de recalculer $K_{e,e}^{-1}$.

On souhaite limiter le coût de calcul associé à cette étape. Pour cela, on se propose d'utiliser une stratégie de condensation alternative à deux niveaux : on ajoute une condensation locale associée à chaque zone élastique à la condensation globale associée au sous-domaine élastique complet.

On constate dans les équations (27) à (31) que chaque zone linéaire $\Omega_1, \dots, \Omega_{N'}$ peut être condensée sur sa frontière par la méthode de condensation de Guyan : la rigidité $\hat{K}_{i,i}$ et le chargement \hat{f}_i^τ condensés peuvent être calculés. Les degrés de liberté situés à l'intérieur de chaque zone élastique peuvent être éliminés : c'est la condensation locale. Notons que la rigidité condensée $\hat{K}_{i,i}$ de chaque zone Ω_i tient compte de la rigidité du matériau, mais aussi des conditions aux limites et des rigidités additionnelles (adhérence multi-matériaux, etc.). Le système (26) est alors mis sous la forme équivalente :

$$\begin{pmatrix} \hat{K}_{e,e} & K_{e,n} \\ {}^tK_{e,n} & K_{n,n}^\tau(u_n^\tau) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{Me}^\tau \\ u_n^\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_e^\tau \\ f_n^\tau \end{pmatrix} \quad (35)$$

où les différents termes s'écrivent :

$$\hat{K}_{e,e} = \begin{pmatrix} \hat{K}_{1,1} & \dots & K_{1,N'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^tK_{1,N'} & \dots & \hat{K}_{N',N'} \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$u_{Me}^\tau = \begin{pmatrix} u_{M1}^\tau \\ \vdots \\ u_{MN'}^\tau \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\hat{f}_e^\tau = \begin{pmatrix} \hat{f}_1^\tau \\ \vdots \\ \hat{f}_{N'}^\tau \end{pmatrix} \quad (38)$$

où u_{Mi}^τ est le vecteur de déplacement nodaux sur la frontière de Ω_i , $\hat{K}_{e,e}$ la rigidité localement condensée de la zone Ω_e , u_{Me}^τ le vecteur de déplacement nodaux sur la frontière entre Ω_e et Ω_n et \hat{f}_e^τ le vecteur de forces nodaux équivalentes sur la frontière entre Ω_e et Ω_n . Le principe de la condensation locale des zones est illustré en Figure 15.

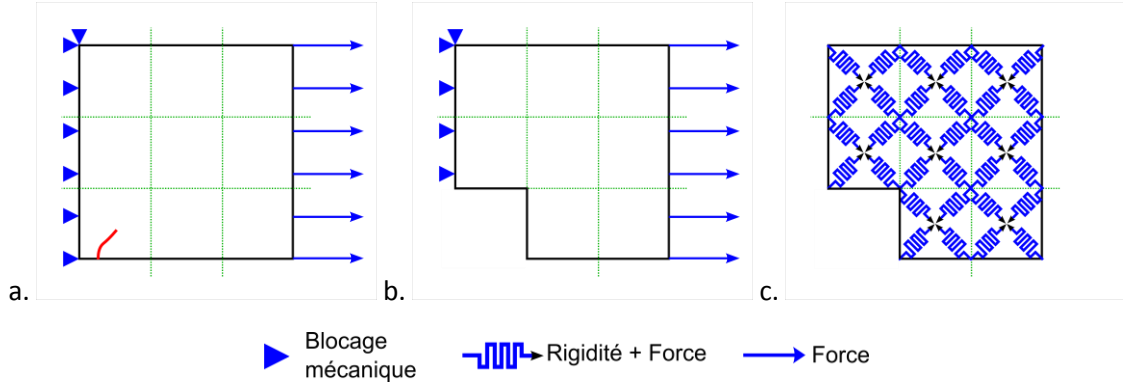


Figure 15 : Illustration de la condensation locale pour un pas du calcul (a : problème complet décomposé en 9 sous-zones, b : zones élastiques, c : condensation des zones élastiques sur leurs frontières). Chaque zone peut contenir un nombre quelconque d'éléments finis.

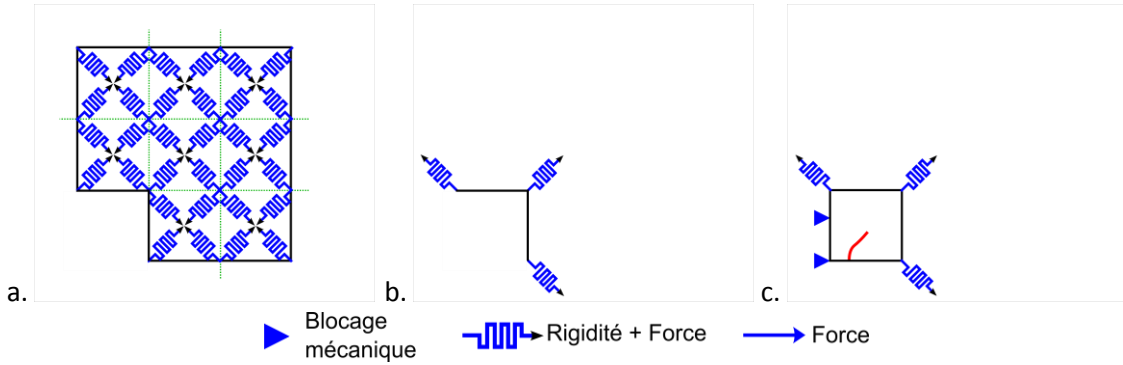


Figure 16 : Principe de la double condensation : Les rigidités équivalentes des zones élastiques sont assemblées (a). L'ensemble est alors condensé sur l'interface Ω_e/Ω_n (b). La rigidité condensée globale est alors appliquée aux bornes de la zone d'intérêt Ω_n (c).

Il est alors possible d'appliquer la condensation statique globale au système complet que l'on vient de réduire par la condensation locale (équation 35), incluant les frontières $\{\Omega_1, \dots, \Omega_{N'}\}$ et le sous-domaine non linéaire Ω_n . On peut alors retrouver la forme du système (32) :

$$\hat{K}^\tau(u_n^\tau).u_n^\tau = \hat{f}^\tau \quad (39)$$

Cependant, dans cette équation, les termes réduits sont calculés par la méthode de condensation de Guyan sur la base de termes déjà condensés localement :

$$\widehat{K}^\tau(u_n^\tau) = K_{n,n}^\tau(u_n^\tau) - {}^tK_{e,n}\widehat{K}_{e,e}^{-1}K_{e,n} \quad (40)$$

$$\widehat{f}^\tau = f_n^\tau - {}^tK_{e,n}\widehat{K}_{e,e}^{-1}\widehat{f}_e^\tau \quad (41)$$

On obtient donc un système similaire aux équations (33-34), où les termes $\widehat{K}_{e,e}$ et \widehat{f}_e^τ ont respectivement remplacé $K_{e,e}$ et f_e^τ . La Figure 16 illustre le principe de la condensation globale appliquée. Comme pour les équations (33-34), la définition des sous-domaines Ω_e et Ω_n est susceptible d'être modifiée lorsque l'état du système évolue ; d'un pas sur l'autre il est donc nécessaire de re-calculer $\widehat{K}_{e,e}^{-1}$. Si les frontières Γ_i des zones Ω_i ont peu de degrés de liberté par rapport aux zones elles-mêmes, ce terme est néanmoins de plus faible dimension et donc moins coûteux à calculer.

Le problème condensé sous cette forme tient toujours compte du comportement de l'ensemble de la structure et est bien condensé sur les degrés de liberté du domaine non linéaire. Sa solution pour u_n^τ est identique à celle du problème de départ. Le domaine linéaire a été éliminé intégralement en deux étapes via la méthode de Guyan. Le système final est réduit aux degrés de liberté de Ω_n et a donc une dimension plus faible que celle du problème de départ, dépendante de la décomposition en sous-problèmes Ω_i .

Sur la base de cette reformulation du problème, nous souhaitons proposer un algorithme de résolution des problèmes de fissuration du béton en particulier, mais plus généralement pour les problèmes localement non linéaires en mécanique. Cependant, on observe que le problème n'est reformulé que pour un pas de chargement donné et que cette opération nécessite :

- une décomposition du problème en sous-zones ;
- un critère déterminant les zones élastiques et les zones non linéaires ;
- le calcul des rigidités et chargement réduits des sous-zones élastiques. Cette opération peut être coûteuse si les matrices $K_{i,i}$ sont de grande taille ;
- le calcul d'une rigidité et chargement équivalents à l'ensemble du domaine élastique. Cette opération devient coûteuse si la matrice $\widehat{K}_{e,e}$ est de grande taille.

Nous savons par ailleurs que les fissures (ou le comportement non linéaire en général) sont susceptibles de s'amorcer en différents points d'une structure et de se propager à travers le matériau. Il est donc nécessaire de développer un algorithme adaptatif, dont l'objectif sera d'appliquer cette réduction du problème aux différents pas de chargement d'un calcul non linéaire itératif.

3 Méthode de condensation adaptative

La méthode de condensation adaptative s'appuie sur la condensation du problème non linéaire proposée dans la section précédente (elle-même basée sur la méthode de Guyan [26], étendue aux problèmes localement non linéaires) et permet de l'appliquer sur une simulation complète.

Pour un pas de chargement donné :

- seules les zones ayant un comportement non linéaire à un pas de chargement donné sont modélisées (ou « activées ») ;
- les zones élastiques à ce même pas de chargement sont remplacées par des conditions aux limites aux bornes des zones activées représentant leur comportement (ou « éliminées ») ;
- ces conditions aux limites sont calculées par la méthode de condensation.

La méthode proposée suit l'évolution du système mécanique et de son état en régime non linéaire au cours de la simulation. En particulier, elle est capable de mettre à jour la modélisation lorsque le

comportement non linéaire s’amorce ou se propage dans le matériau. Parmi les opérations nécessaires à l’application de la condensation sur un calcul non linéaire complet, on observe que :

- la décomposition du problème en sous-zones peut être conservée d’un pas sur l’autre ;
- les rigidités et chargement réduits des sous-zones élastiques peuvent donc être conservés si les zones sont conservées ;
- les zones élastiques et non linéaires évoluent, il est donc nécessaire de disposer d’un critère de détection des zones non linéaires et de le réévaluer périodiquement ;
- la rigidité et le chargement réduits du sous-domaine élastique Ω_e évoluent avec les zones non linéaires, il est donc nécessaire de les recalculer lorsque ces zones évoluent.

Nous proposons une méthode de condensation dite « adaptative », permettant de réaliser cette extension au calcul complet. La méthode fonctionne en deux temps :

- une phase de prétraitement :
 - o le problème est divisé en N sous-domaines ($\Omega_1, \dots, \Omega_N$) (§ 3.1) ;
 - o la rigidité réduite $\hat{K}_{i,i}$ de chaque sous-zone est calculée (condensation locale, § 3.2) ;
 - o un pré-calcul linéaire détermine la (ou les) première(s) zone(s) d’intérêt ($\Omega_1, \dots, \Omega_{N'}$) à l’aide d’un critère d’amorçage de l’endommagement (§ 3.3) ;
 - o la matrice de rigidité des zones élastiques $\hat{K}_{e,e}$ est assemblée puis condensée sur l’interface zones élastiques / zones non linéaires (condensation globale, § 3.4) ;
 - o la (ou les) zone(s) activée(s) ($\Omega_{N'+1}, \dots, \Omega_N$) sont incluses dans le modèle éléments finis ;
 - o la rigidité réduite de Ω_e et son chargement réduits sont appliqués au modèle éléments finis (construction de la rigidité $\hat{K}^r(u_n^r)$).
- une phase de condensation adaptative, où la simulation se déroule :
 - o à chaque pas de chargement, le problème non linéaire condensé est résolu ;
 - o la nécessité d’activer de nouvelles zones est évaluée (§ 3.5) :
 - à chaque pas de chargement, la propagation d’une fissure d’une zone d’intérêt à une zone élastique adjacente est vérifiée via un critère de propagation (§ 3.5.1) ;
 - tous les p pas de chargement, l’amorçage d’une fissure dans les zones élastiques est vérifié via un critère d’amorçage (§ 3.5.2).
 - o si de nouvelles zones doivent être activées, le problème est mis à jour (§ 3.5.3) :
 - dans le cas d’une propagation, les zones élastiques et non linéaires sont mises à jour au pas suivant : le modèle élément finis est enrichi de nouvelles zones et les conditions aux limites sont recalculées (condensation globale) ;
 - dans le cas d’un amorçage, l’endommagement « aurait dû » apparaître dans une zone élastique, on revient à la vérification précédente et les zones sont mises à jour à partir du pas suivant.

Ainsi, cette approche est capable d’ajouter de nouvelles zones « activées » au modèle lors de l’amorçage et de la propagation de fissures et de recalculer les rigidités et forces équivalentes à appliquer : à chaque pas de temps, le problème est réduit à ses zones non linéaires. La Figure 17 décrit schématiquement les différentes étapes d’un calcul avec condensation adaptative et illustre le principe général de la méthode. Les sections suivantes décrivent plus en détails les différentes étapes.

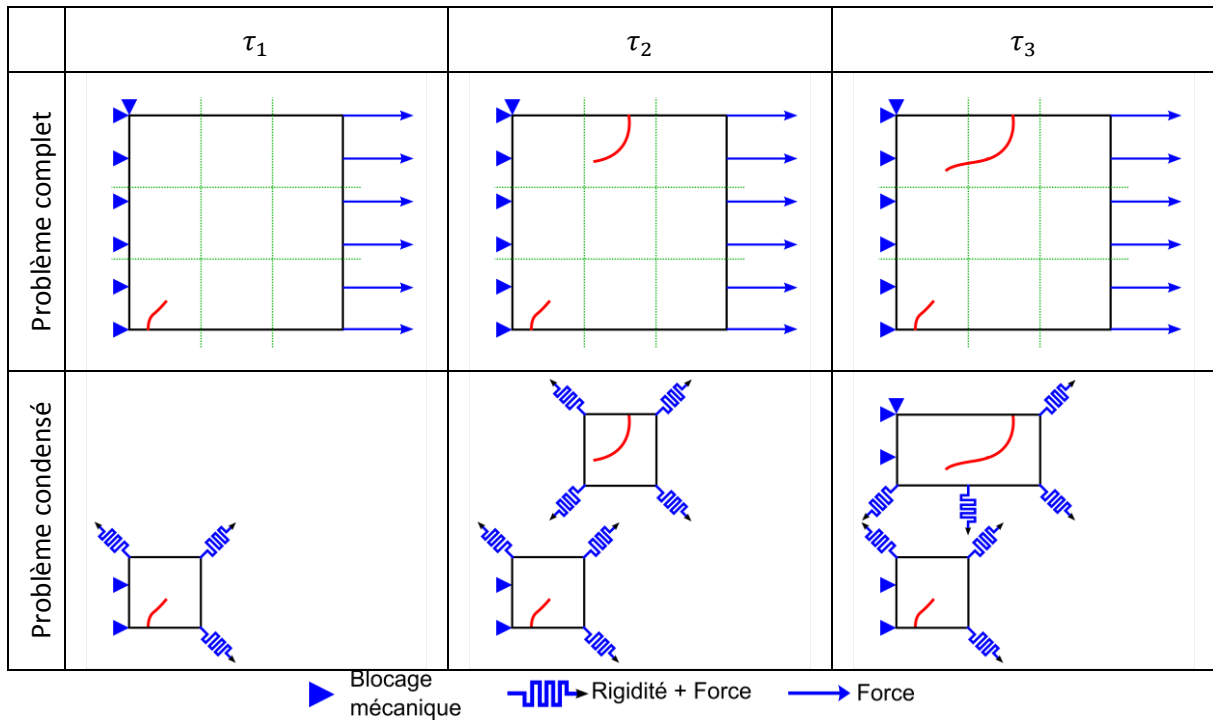


Figure 17 : Méthode de condensation adaptative appliquée à un problème à 9 zones : évolution du système pour trois pas de chargement ($\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$)

3.1 Décomposition en zones

La décomposition du problème en sous-zones $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ va directement impacter la dimension des domaines élastique Ω_e et non linéaire Ω_n au cours de l'évolution du système. En effet, elle définit quelle partie de la structure est activée et donc la dimension du problème au cours du chargement. Elle a donc une influence très forte sur l'efficacité de la méthode en termes de coût de calcul, mais n'impacte pas le résultat de la simulation. Elle fera donc l'objet de quelques études de sensibilité mais la décomposition optimale a priori relève toujours du retour d'expérience de l'utilisateur.

Une configuration avec un nombre élevé de zones pourra capturer la géométrie des zones endommagées au cours du chargement, mais nécessitera potentiellement de nombreuses mises à jour du modèle éléments finis (et donc des calculs supplémentaires de rigidités inversées $\hat{K}_{e,e}^{-1}$). A l'inverse, un faible nombre de zones impliquera d'activer de grandes parties de la structure et de moins optimiser l'effort de calcul. La décomposition doit donc présenter un compromis entre la taille du modèle à calculer (c'est-à-dire les zones d'intérêt) et la fréquence des activations de nouvelles zones.

Dans la méthode proposée, on utilise une décomposition en sous-zones fixes. Cette approche a été choisie (plutôt que des zones flexibles ou un découpage dynamique par exemple) car elle présente plusieurs avantages :

- elle réduit le coût de l'élimination des zones élastiques (qui nécessite de calculer la rigidité condensée de chaque zone $\hat{K}_{i,i}$) ;
- les interfaces géométriques entre zones ne sont calculées qu'une seule fois ;
- le critère de propagation nécessite des opérations géométriques pour pouvoir détecter la propagation d'endommagement et étendre le domaine non linéaire (et éventuellement le domaine non local). Ces opérations sont recalculées moins régulièrement avec une décomposition fixe.

Le principal inconvénient de cette approche est que l'efficacité de la méthode dépend de la décomposition : la condensation adaptative permettra un gain d'autant plus élevé que la forme des zones d'intérêt correspondra aux zones endommagées de la structure au cours de la simulation.

3.2 Condensation locale

La condensation locale des rigidités et des chargements est réalisée une seule fois lors de la phase de prétraitement. La rigidité élastique de chaque zone $K_{1,1}, \dots, K_{N,N}$ est calculée, en incluant les conditions aux limites ainsi que les éventuelles rigidités additionnelles, adhérence entre matériaux par exemple. Elle est condensée sur la frontière géométrique de la zone, pour obtenir les rigidités équivalentes $\hat{K}_{1,1}, \dots, \hat{K}_{N,N}$.

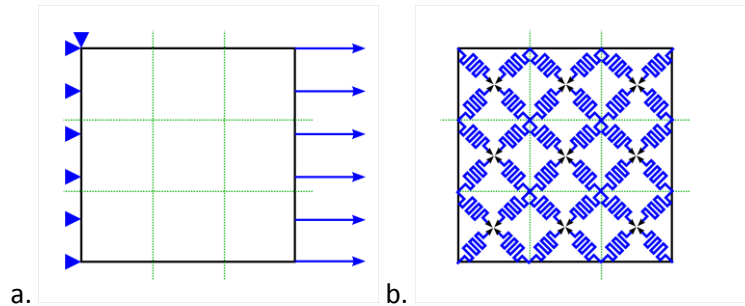


Figure 18 : Condensation des rigidités et chargements des sous-zones (a : Problème élastique, b : Rigidités condensées).

3.3 Pré-calcul linéaire

Un pré-calcul détermine quelles zones sont activées au départ de la simulation et lesquelles sont condensées, selon le comportement attendu au cours de la simulation. Ce pré-calcul consiste en une résolution linéaire de la structure complète et a deux objectifs (Figure 19):

- calculer la ou les premières zones d'intérêt (amorçage du comportement non linéaire)
- calculer le pas de chargement τ_1 auquel cette zone entre en phase non linéaire.

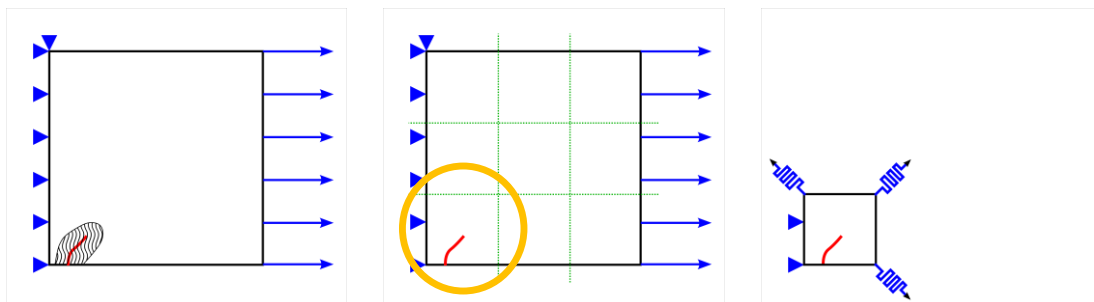


Figure 19: Principe du pré-calcul linéaire – Identification de la première zone d'intérêt.

La résolution linéaire donne le champ de déplacement dans le domaine complet Ω ainsi que le champ de variables internes de la loi de comportement. Ce champ permet de connaître le lieu où l'endommagement apparaît en premier (élément où le critère d'amorçage est le plus élevé) et donc la zone dans laquelle il se situe : on détermine le problème non linéaire condensé de départ.

En notant ε^* le maximum du critère d'amorçage après résolution linéaire (dans le cas du modèle Mazars, on choisira la déformation équivalente) et ε_0 le seuil d'amorçage de l'endommagement, on peut calculer le pas d'apparition de l'endommagement en fonction du pas de chargement final τ_f par simple règle de proportionnalité $\tau_1 = \tau_f * (\varepsilon_0 / \varepsilon^*)$. Le coût de ce pré-calcul devient négligeable devant celui du calcul non linéaire dans la plupart des cas, dès que le nombre de pas devient grand.

Le choix de cette approche utilisant un pré-calcul linéaire pour déterminer la première zone endommagée et le pas de départ a été fait car il semble intuitif. De plus, dans la plupart des cas, ceci permet d'éliminer une grande partie des pas nécessaires ($0 \leq \tau \leq \tau_1$) et donc de réduire la charge de calcul. Néanmoins, une approche alternative pourrait consister à réaliser le calcul intégralement, avec un démarrage de la simulation sans aucune zone d'intérêt et à promouvoir des zones élastiques en zones d'intérêt uniquement au cours du calcul. Ceci permettrait de simplifier l'utilisation de la méthode sans dégrader les performances et constitue une piste d'amélioration de l'approche proposée.

3.4 Condensation globale

La seconde condensation (ou condensation globale) est réalisée en fin de prétraitement ainsi que lors des mises à jour du modèle éléments finis (par activation de nouvelles zones). Les rigidités réduites des zones élastiques $\tilde{K}_{1,1}, \dots, \tilde{K}_{N',N'}$ sont assemblées pour former la matrice de rigidité $\tilde{K}_{e,e}$. Cette matrice de rigidité est alors condensée sur l'interface entre Ω_e et Ω_n . Il suffit ensuite d'assembler la rigidité élastique condensée et la rigidité non linéaire $K_{n,n}^\tau(u_n^\tau)$ de Ω_n pour obtenir la rigidité complète non linéaire du problème $\tilde{K}^\tau(u_n^\tau)$ (Figure 16).

Lorsque le domaine d'intérêt et le domaine élastique évoluent, par promotion de zones élastiques en zones d'intérêt, il est alors nécessaire de refaire cette étape de condensation globale, en incluant aux degrés de liberté Ω_n du problème non linéaire condensé les nouvelles zones d'intérêt.

3.5 Condensation adaptative et critères de promotion

Le problème complet est traité comme une succession de problèmes non linéaires associés à chaque pas de chargement et résolus successivement. A chaque pas de chargement, le problème condensé est résolu et on obtient la solution complète de la partie non linéaire du problème au cours du chargement. Des zones condensées peuvent être promues zones d'intérêt lorsqu'elles sont sujettes à la fissuration. La promotion de nouvelles zones d'intérêt implique de remplacer les zones condensées ciblées par les critères de promotion par des zones d'intérêt, modélisées explicitement (Figure 20). Les deux critères de promotion (propagation et amorçage) visent à être adaptables à différents types de modèles mécaniques.

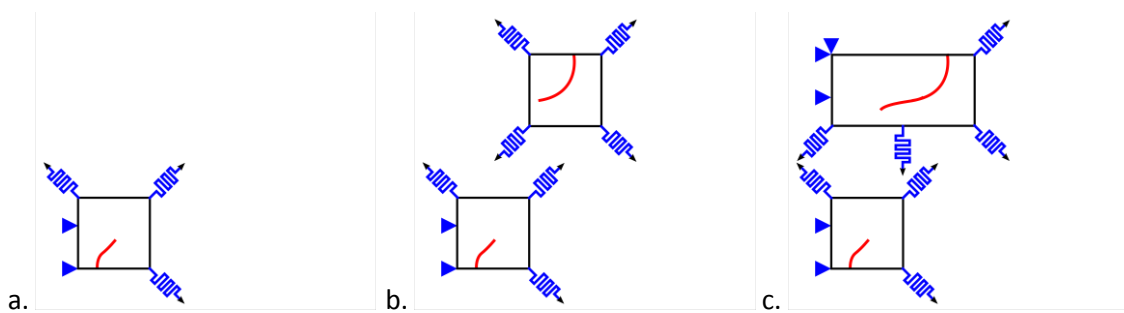


Figure 20: Promotion de nouvelles zones d'intérêt (a : problème de départ à τ_1 , b : amorçage d'une deuxième fissure à τ_2 , c : propagation de la deuxième fissure à τ_3)

3.5.1 Critère de propagation

Le critère de propagation est appliqué directement sur les zones d'intérêt existantes. On définit un critère de distance autour des zones condensées, de valeur L . Ce critère est matérialisé par des « bandes de propagation » créées autour de chaque interface entre le domaine d'intérêt Ω_n et les zones condensées $\Omega_{1'}, \dots, \Omega_{N'}$. A la fin de chaque pas de calcul, le champ d'endommagement dans le domaine non linéaire est calculé. Si de l'endommagement est présent dans ces bandes de propagation,

c'est-à-dire à moins d'une distance L d'une zone condensée, la zone condensée concernée doit être activée (Figure 21).

Dans le cas d'un modèle à endommagement, la variable d'endommagement D peut être utilisée comme critère de propagation. Pour d'autres lois de comportement, il est possible d'utiliser d'autres variables d'état : dans le cas d'un modèle de plasticité, on peut utiliser la déformation plastique ε_p .

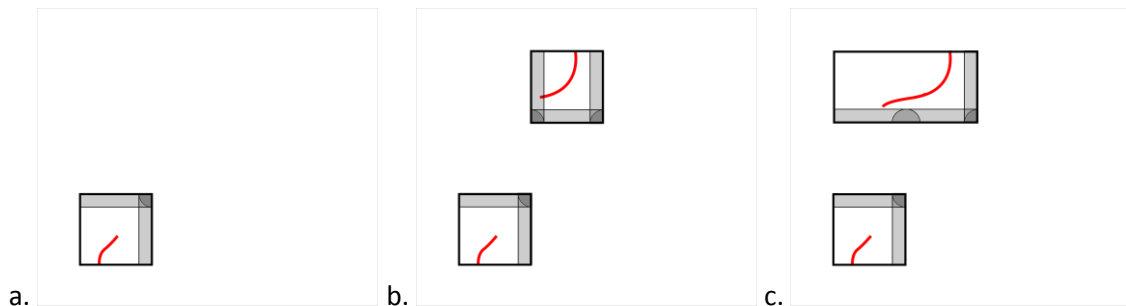


Figure 21: Calcul du critère de propagation en cours de simulation ($a : \tau_1$, $b : \tau_2$, $c : \tau_3$)

Ces bandes de propagation sont définies par leur « largeur » L , qui correspond à la distance sur laquelle une fissure risque de se propager entre deux pas de calcul. Si on utilise un modèle local, la largeur L des bandes peut être fixée en fonction de la taille de maille d , via un coefficient α qui dépend du rythme de propagation des fissures (et donc du pas de chargement) : $L = \alpha \times d$.

Cependant, ce critère a également une seconde fonction dans le cas des lois de comportement non locales. En effet, en éliminant les zones élastiques du modèle éléments finis, un bord de domaine est artificiellement créé à la frontière du domaine non linéaire Ω_n . Ce bord de domaine, sur lequel on applique des efforts et rigidités (issus de la condensation de Ω_e) pourrait déséquilibrer la régularisation dans les zones endommagées [85]. Afin de parer à cet effet, dans le cas non local, la valeur de L doit être fixée en fonction de la longueur non locale l_{c0} . Ainsi, si de l'endommagement s'approche du « bord de domaine », la zone adjacente est activée, ce qui étend le domaine non local et élimine l'effet de bord. Néanmoins, cette approche repose sur l'hypothèse d'une propagation de fissure relativement lente par rapport à la dimension des zones et des bandes de propagation : les bandes doivent être suffisamment larges pour capturer la propagation de l'endommagement entre deux pas sans que cet endommagement devienne trop proche (au regard de la longueur non locale) du bord de la zone.

On remarque que le critère de propagation nécessite uniquement des calculs géométriques (définition des bandes de propagation elles-mêmes), mais s'appuie sur les champs calculés sur le domaine non linéaire Ω_n . Le coût de l'évaluation du critère est donc négligeable : on peut donc appliquer ce critère à chaque pas de chargement.

3.5.2 Critère d'amorçage

La première étape de vérification du critère d'amorçage consiste à calculer le champ de déplacement dans les zones condensées. Pour cela, on procède à une « décondensation » globale du sous-domaine élastique Ω_e (c'est-à-dire qu'on calcule la solution dans les degrés de liberté éliminés de Ω_e). Cette décondensation permet d'obtenir les déplacements u_{Me} aux frontières des zones condensées $\Omega_1, \dots, \Omega_N$. On procède alors à une décondensation locale pour chaque zone, qui permet de calculer le champ de déplacement à l'intérieur de chaque zone condensée. On peut ensuite appliquer la loi de comportement appropriée (Mazars par exemple) sur la zone pour calculer les variables d'état (Figure 22). Ces variables d'état servent ensuite à déterminer l'amorçage de la fissuration.

Le critère pour un modèle d'endommagement scalaire du type Mazars ou Peerlings basé sur la déformation [86,87], peut s'appuyer sur la déformation équivalente $\tilde{\varepsilon}$, avec un seuil d'amorçage fixé à la limite élastique ε_0 (ou κ_0 dans le cas de [87]). La déformation équivalente de Mazars s'écrit :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (42)$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont les valeurs principales des déformations et $\langle \varepsilon_1 \rangle_+, \langle \varepsilon_2 \rangle_+, \langle \varepsilon_3 \rangle_+$ leurs valeurs positives. Dans le cas du modèle de Mazars [86], cette déformation équivalente permet de déterminer quand l'endommagement s'initie dans le matériau et par la suite de calculer sa valeur.

Dans le cas d'une simulation en non local, le critère d'amorçage utilisé doit lui aussi être non local [88,89] (dans notre cas, la déformation équivalente non locale). Les décondensations locales des différentes zones sont réalisées indépendamment, on obtient alors les champs de déplacements et déformations. On calcule les variables d'état locales (déformation équivalente $\tilde{\varepsilon}$ dans notre cas). Un domaine non local peut alors être construit, qui inclut tout le sous-domaine élastique Ω_e . Afin d'éviter les effets de localisation en bordure des zones (en particulier, localisation de l'endommagement en bord de domaine [85,90]), le domaine de régularisation n'est pas fractionné aux interfaces entre zones condensées. La déformation équivalente non locale peut alors être calculée par régularisation des valeurs locales de déformation équivalente.

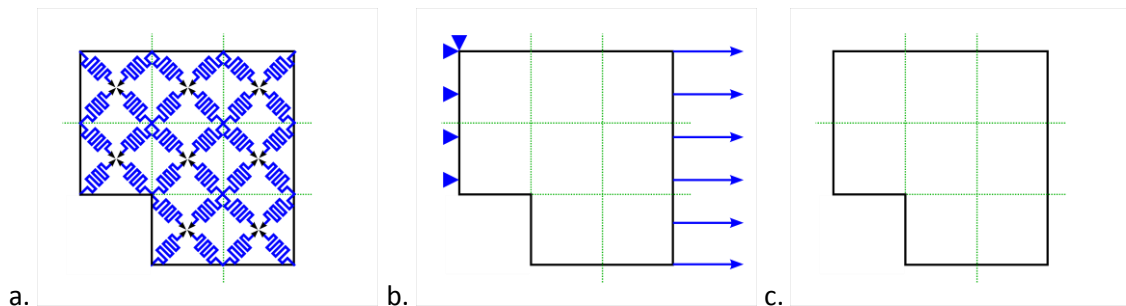


Figure 22 : Calcul du critère d'amorçage en cours de simulation
(a : Décondensation globale, b : Décondensation locale, c : Calcul des variables d'état).

Le but de ce calcul est uniquement de détecter les zones susceptibles de se fissurer. Les déplacements et déformations sont donc calculés sous l'hypothèse élastique linéaire. Si le critère d'amorçage de l'endommagement (dans notre cas, $\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon_0$) n'est pas atteint, les zones condensées ont bien un comportement linéaire et la solution du calcul est acceptée. Dans le cas contraire ($\tilde{\varepsilon} \geq \varepsilon_0$), la zone condensée où s'amorce de l'endommagement doit être promue zone d'intérêt.

Sur des problèmes de grande taille, l'application de la loi de comportement et la régularisation peuvent être coûteuses : on essaiera donc de limiter le recours à ce critère. La valeur fixée pour la période de vérification p doit donc être un compromis entre :

- le coût de vérification du critère lui-même : décondensations, calcul des variables d'état sur les zones condensées et régularisation
- le coût des pas de calcul non linéaire qui sont recalculés si on active des zones et qu'un retour en arrière est nécessaire (Figure 23)

En supposant que la majeure partie de la structure est condensée, la méthode pourrait être plus efficace avec des valeurs de p faibles sur les problèmes fortement non linéaires (où le coût des pas de calcul est élevé) et des valeurs de p plus élevées sur des problèmes faiblement non linéaires (résolution

des zones linéaires plus coûteuse que les pas de calcul). De même, si la fissuration est susceptible de s'amorcer dans plusieurs zones condensées, des valeurs de p plus faibles permettront de détecter rapidement ces comportements. A l'inverse s'il est peu probable qu'une fissure s'amorce dans les zones éliminées, des valeurs de p plus élevées réduiront la charge de calcul.

3.5.3 Algorithme adaptatif

Actuellement, la promotion de zone condensée à zone d'intérêt est irréversible : une zone activée ne peut pas être recondensée (des phénomènes irréversibles peuvent se produire au niveau du matériau, par exemple un changement des propriétés mécaniques ou des déformations permanentes).

A la fin de chaque pas de chargement, le critère de promotion par propagation est vérifié pour les différentes zones condensées, qui peuvent être promues si le critère est atteint. Le critère de promotion par amorçage est vérifié moins régulièrement (tous les p pas de calcul), car il est plus coûteux à calculer (en particulier pour des modèles non locaux). Pour garantir la validité de la condensation, les zones éliminées doivent garder un comportement linéaire élastique entre deux vérifications.

La méthode de promotion « juste-à-temps » finalement choisie introduit une rétroaction dans la méthode de condensation adaptative, en vérifiant les critères de promotion après avoir résolu le problème condensé sur un pas de chargement. La Figure 23 illustre la résolution d'un pas de chargement avec cette méthode. Les critères de promotion ont chacun un comportement spécifique :

- le critère en propagation est vérifié systématiquement et provoque une promotion immédiate des zones condensées concernées ;
- le critère en amorçage est vérifié a posteriori et provoque un retour au dernier pas validé si nécessaire et la promotion des zones linéaires concernées à partir de ce pas.

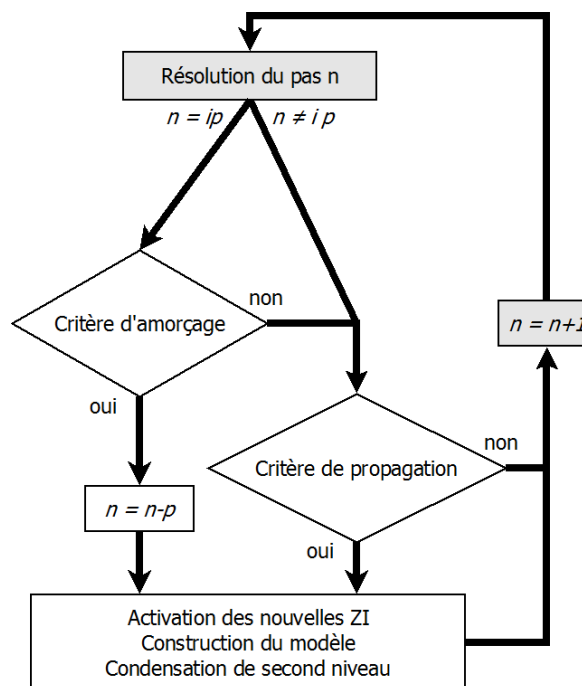


Figure 23 : Pas de calcul non linéaire avec condensation adaptative

La méthode fonctionne sous l'hypothèse suivante : on suppose que l'amorçage d'un endommagement entre les pas $(n + 1)$ et $(n + p)$ provoquera une détection du critère d'amorçage au pas $(n + p)$. Ceci implique en particulier deux hypothèses :

- on suppose que l'hypothèse élastique est vraie à tous les pas entre deux vérifications validées (ce qui pourrait être faux par exemple dans le cas d'une relaxation de contraintes) ;
- on suppose que si l'hypothèse d'élasticité devient fautive dans certaines zones condensées, le problème non linéaire condensé aura une solution qui impliquera au pas $(n + p)$ le dépassement du critère d'amorçage dans les zones concernées (ce qui pourrait être faux par exemple dans le cas d'une rupture très fragile).

Le principal inconvénient de cette approche « juste-à-temps » est la nécessité de recalculer certains pas de chargement en cas de promotion de nouvelles zones d'intérêt. Ceci peut provoquer un coût de calcul supplémentaire ; il est donc nécessaire de fixer correctement la fréquence des vérifications du critère d'amorçage. Sur la base des expériences numériques menées pendant la thèse sur des structures en béton et béton armé, des valeurs situées entre $p = 1$ (problèmes fortement non linéaires) et $p = 5$ (problèmes quasi-linéaires) sont de bons compromis.

Une approche alternative consistait à promouvoir les zones condensées légèrement avant l'amorçage réel de l'endommagement (en définissant une « marge » sur la valeur du seuil d'amorçage), ce qui éviterait un amorçage entre deux vérifications. Cependant, cette méthode nécessitait de calibrer de nouveaux paramètres, empiriques et dépendants du cas traité et pouvait s'avérer trop conservatrice : à cause des marges prises, certaines zones élastiques pouvaient être activées inutilement.

4 Validation de la méthode de condensation adaptative

Cette section a pour objectifs :

- la validation de la méthode, par comparaison des résultats avec ceux d'un calcul de référence et de résultats expérimentaux ;
- l'évaluation de l'apport de la méthode proposée en termes de réduction de dimension du problème et du coût du calcul sur deux exemples de structures.

4.1 Exemple: Poutre entaillée en flexion 3 points

4.1.1 Description du problème

Ce cas-test a pour objectif de proposer pour la méthode de condensation adaptative une structure de validation rapide à calculer, ayant un comportement non linéaire avec de l'endommagement localisé. La structure proposée est une poutre en béton entaillée soumise à un chargement de flexion 3 points sur laquelle des résultats expérimentaux et des calculs de référence sont disponibles. Il permettra ainsi une validation rapide du fonctionnement de la méthode ainsi que de son applicabilité à des cas réels. Les résultats expérimentaux sont tirés d'un article de la littérature [91], contenant une comparaison calcul/expérience. Les hypothèses et paramètres de modélisation de l'article serviront donc de référence dans la suite.

La poutre est modélisée en deux dimensions sous l'hypothèse des contraintes planes. Elle mesure 40 cm de long pour 10 cm de haut (Figure 24). La poutre expérimentale a une épaisseur de 5 cm. L'entaille, située au bas de la poutre (à mi longueur), mesure 20 mm de haut pour une largeur de 2 mm. Le maillage est constitué de 6464 quadrangles de 2,5 mm de côté avec des éléments finis bilinéaires (« QUA4 » dans Cast3M).

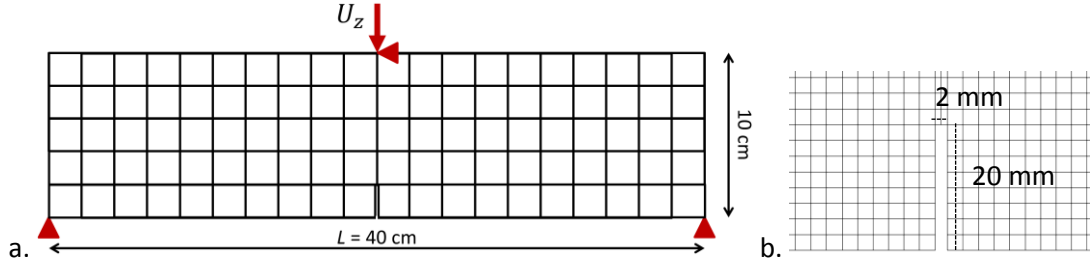


Figure 24 : Schéma de la poutre en flexion (a), zoom sur la zone de l'entaille (b).

Module d'Young	Coeff. de Poisson	Limite élastique	A_C	B_C	A_T	B_T
E	ν	ε_0	A_C	B_C	A_T	B_T
30 GPa	0,24	4×10^{-5}	1,25	1000	0,90	4×10^3

Tableau 5: Paramètres du modèle de Mazars pour la poutre entaillée en flexion trois points.

Le matériau est représenté par le modèle d'endommagement isotrope de Mazars [86] avec le jeu de paramètres donné dans le Tableau 5 (issu de [91] et recalé sur les valeurs expérimentales). Ceci correspond à une limite en compression $f_c = 41,4$ MPa et une limite en traction $f_t = 3,03$ MPa. Avec ce modèle, la déformation équivalente $\tilde{\varepsilon}$ issue de l'équation (42) permet de calculer les endommagements partiels en traction D_T et compression D_C :

$$\begin{cases} D_T = 1 - \frac{\varepsilon_0(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - A_T \exp(B_T(\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon})) \\ D_C = 1 - \frac{\varepsilon_0(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - A_C \exp(B_C(\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon})) \end{cases} \quad (43)$$

où A_T, B_T, A_C et B_C sont des paramètres du modèle. La variable d'endommagement s'écrit alors :

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (44)$$

où α_T et α_C sont des fonctions de l'état de contraintes [86] :

$$\begin{cases} \alpha_T = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\langle \varepsilon_i^t \rangle \langle \varepsilon_i \rangle_+}{\tilde{\varepsilon}^2} \right)^\beta \\ \alpha_C = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\langle \varepsilon_i^c \rangle \langle \varepsilon_i \rangle_+}{\tilde{\varepsilon}^2} \right)^\beta \end{cases} \quad (45)$$

où $\langle \varepsilon_i^t \rangle$ et $\langle \varepsilon_i^c \rangle$ sont respectivement les valeurs principales des déformations positives et négatives, $\langle \varepsilon_i \rangle_+$ les valeurs positives principales des déformations et β une constante du modèle ($\beta = 1,06$).

Afin d'éviter la dépendance pathologique au maillage, une méthode non locale est choisie : la méthode de régularisation basée sur les contraintes (ou « stress-based » [89]), avec une longueur interne $l_{c0} = 7,5$ mm. Cette méthode a été retenue pour limiter la propagation de l'endommagement non local et obtenir une bonne localisation de l'initiation d'endommagement au niveau de l'entaille [89]. La déformation équivalente non locale $\bar{\varepsilon}$ remplace alors la déformation équivalente $\tilde{\varepsilon}$ du modèle local et s'écrit sous la forme [88]:

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{\int_{\Omega} \tilde{\varepsilon}(s) \phi(x-s) ds}{\int_{\Omega} \phi(x-s) ds} \quad (46)$$

où ϕ est la fonction de régularisation (ou fonction poids) qui s'écrit [89]:

$$\phi(x - s) = \exp\left(-\left(\frac{2 \|x - s\|}{l_c \rho(x, \sigma(s))}\right)^2\right) \quad (47)$$

où x et s représentent respectivement la position du point local et du point distant, σ le tenseur des contraintes et ρ une fonction de l'état de contraintes. Le chargement est un déplacement imposé vertical, qui s'applique à l'extrémité d'une petite zone d'introduction des chargements située en haut de la poutre (Figure 24). Cette zone a pour but d'éviter l'effet d'endommagement du matériau au niveau de la zone de chargement (non représentatif de la physique). Elle mesure 2,5 mm de hauteur pour 12 mm de largeur (maillage triangulaire, éléments finis linéaires, type « TRI3 » dans Cast3M) et est décrite par un modèle élastique ($E = 30$ GPa ; $\nu = 0,24$). De même, au niveau de chaque appui se trouve une zone élastique similaire de 2,5 mm de hauteur et 10 mm de largeur permettant de limiter l'endommagement au niveau des appuis. Un déplacement vertical nul est appliqué en un point de chaque zone d'appui. Afin de bloquer les mouvements de corps rigides, un déplacement latéral nul est considéré au point d'introduction du chargement.

4.1.2 Méthode de condensation et critères de promotion

La méthode de condensation adaptative est appliquée à la simulation mécanique de cette structure. Pour appliquer la méthode de condensation à cette structure, les éléments suivants sont nécessaires :

- la décomposition en sous-zones. Le maillage de la poutre est partitionné en 16 zones de dimension équivalente (Figure 25). Une zone supplémentaire est ajoutée, qui contient la zone d'application du chargement. Cette zone est activée dès le début de la simulation, afin de permettre le pilotage du chargement en déplacement imposé (qui nécessite des nœuds de maillage, sur lesquels sont appliqués les doubles multiplicateurs de Lagrange [28]). Les zones élastiques situées au niveau des appuis sont intégrés à la zone adjacente.
- la définition de critères d'amorçage et de propagation :
 - o Pour le critère de propagation :
 - chaque zone éliminée est entourée par une « bande de propagation », de largeur $1,5 l_{c0}$, qui contient des éléments des différentes zones non linéaires (Figure 21).
 - si de l'endommagement D apparaît dans un élément de cette bande, alors la zone élastique concernée est activée au pas suivant (la valeur seuil d'endommagement déclenchant l'activation est de 0,01).
 - o Pour le critère d'amorçage :
 - lors des vérifications, la déformation équivalente non locale de Mazars $\bar{\epsilon}$ est calculée dans les zones condensées, préalablement décondensées. Si cette déformation équivalente dépasse le seuil de ϵ_0 dans une zone, celle-ci est activée.
 - ce critère nécessitant de calculer l'état de l'ensemble de la poutre, il n'est donc vérifié que tous les 4 pas de chargement ($p = 4$).

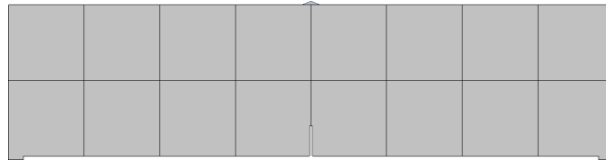


Figure 25: Décomposition de la poutre en 16 zones (+ zone de chargement)

4.1.3 Résultats: échelle globale

La Figure 26 présente les évolutions force-flèche pour le calcul à condensation adaptative ainsi que pour un calcul de référence, réalisé avec le même jeu de données sans utiliser de condensation. La flèche est mesurée à mi-hauteur et mi-longueur de la poutre.

Les deux courbes suivent la même évolution :

- au point 1, l'endommagement s'amorce au niveau de l'entaille ;
- au point 2, le pic de force est atteint ;
- le point 3 est le dernier incrément de chargement (et la fin de la simulation).

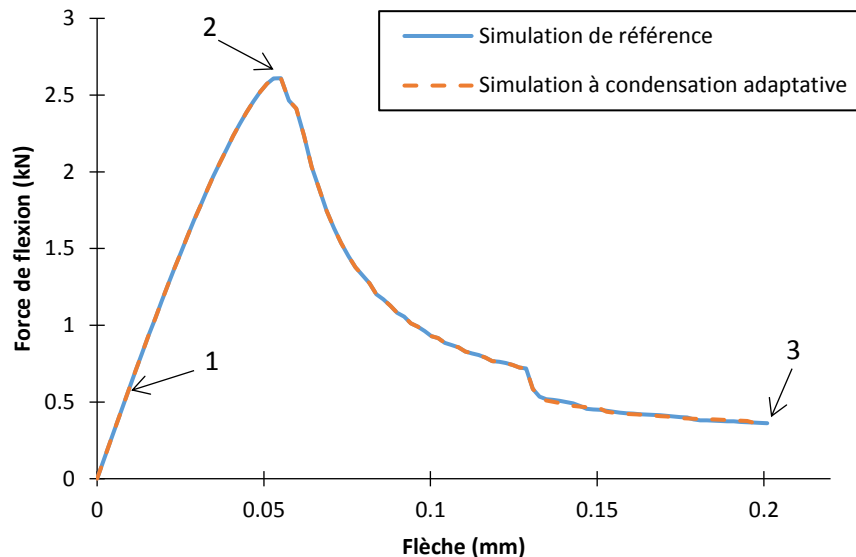


Figure 26 : Courbe force - flèche de la poutre en flexion

La Figure 27 présente les évolutions force – ouverture de l'entaille pour la simulation avec condensation adaptative, la simulation complète et le résultat expérimental. L'ouverture de l'entaille est calculée par le déplacement relatif des deux points situés à son extrémité.

L'évolution force-ouverture montre que le modèle choisi permet de reproduire de manière correcte les résultats expérimentaux. A titre de remarque, la modélisation proposée constitue également une amélioration par rapport à des simulations antérieures [91], due à l'utilisation de la méthode non locale basée sur les contraintes, qui permet une meilleure modélisation du comportement autour de l'entaille que la régularisation gaussienne [85,89]. La simulation condensée reproduit bien les résultats de la simulation de référence.

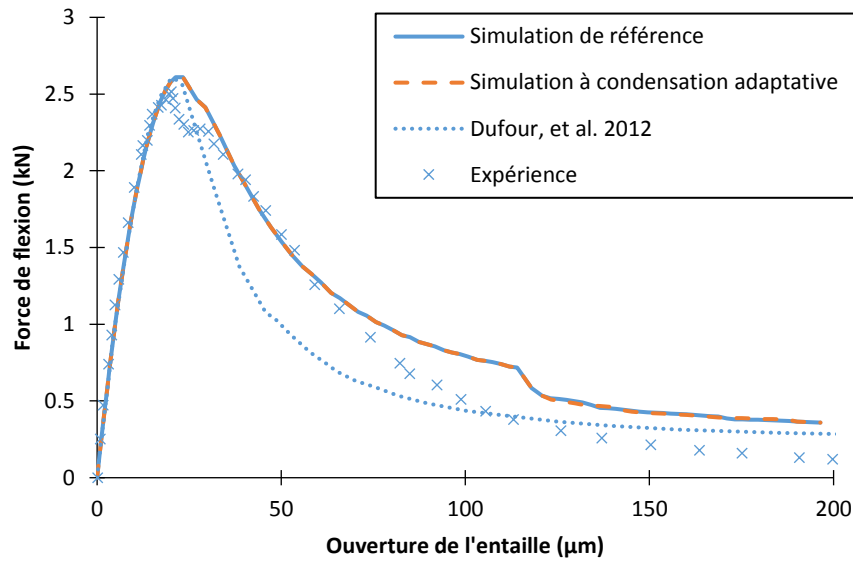


Figure 27 : Courbe force - ouverture de l'entaille

4.1.4 Résultats: échelle locale

La Figure 28 présente l'évolution des profils d'endommagement pour le calcul de référence et pour le calcul à condensation adaptative. Pour chaque pas de chargement considéré, les deux profils sont identiques. On observe bien dans les deux cas une propagation de l'endommagement de l'entaille vers le haut de la poutre. Un comportement non linéaire semble aussi s'amorcer au niveau des appuis. La méthode de condensation adaptative permet donc de reproduire correctement le comportement de référence de la structure, y compris à l'échelle locale.

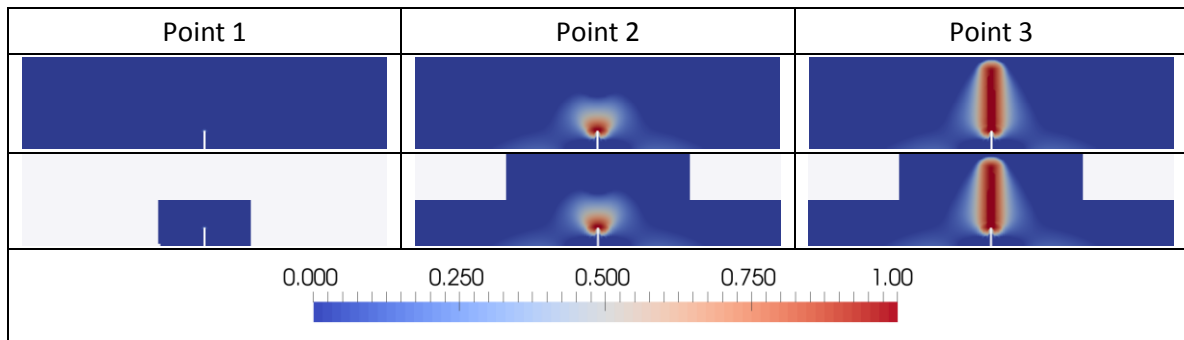


Figure 28 : Profils d'endommagement à l'amorçage (point 1), au pic de force (point 2) et en fin de chargement (point 3) : calcul de référence et calcul à condensation adaptative

4.1.5 Apport de la méthode de condensation

Afin de mesurer l'efficacité de la méthode, nous comparons le temps global (processeur) nécessaire pour la simulation avec la méthode de condensation et le calcul de la structure complète, utilisé comme référence. L'effet de la décomposition sur l'efficacité de la méthode est aussi observé, en utilisant le même jeu de données avec une décomposition en 16, 32 ou 64 zones. Toutes les simulations ont été réalisées sur le même ordinateur (station de travail à deux cœurs) avec le logiciel de calcul Cast3M [27]. Les durées globales de calcul pour chacune des simulations sont présentées dans le Tableau 6.

Simulation	Référence	Cond. Adapt. (16 zones)	Cond. Adapt. (32 zones)	Cond. Adapt. (64 zones)
Temps processeur	8590 s	6378 s	5578 s	4117 s
Accélération		35 %	54 %	109 %
Nombre d'éléments	6464	4864	3664	3264

Tableau 6 : Durée globale de la simulation et nombre d'éléments dans les zones activées (temps processeur : la durée écoulée réelle est plus faible car le calcul est parallélisé sur les deux cœurs)

On observe que la méthode de condensation adaptative permet une accélération respective de 35 %, 54 % et 109 % avec une décomposition en 16, 32 et 64 zones. La meilleure performance apportée par la configuration à 64 zones s'explique par la forme et la localisation de l'endommagement dans la structure : sur cette configuration, la décomposition la plus fine (64 zones) nécessite l'activation d'une part plus faible de la structure (Figure 29). Néanmoins, ce n'est pas le cas général : sur des structures différentes, par exemple une poutre en béton en flexion 3 points non entaillée [92], l'accélération est susceptible de varier et une décomposition optimale peut être trouvée (Tableau 7). La réduction de dimension apportée est en effet limitée par le rapport entre la dimension de la structure elle-même et la dimension des zones endommagées. Cependant, sur des structures de génie civil de grande taille, ce rapport est bien plus élevé que sur ces petites structures, en particulier si l'endommagement est localisé. L'économie en termes de charge de calcul pourrait donc atteindre un ordre de grandeur.

Ceci montre clairement l'intérêt de cette approche sur base de condensation par zones. Les valeurs d'accélération peuvent sembler faibles en regard de ce qu'on obtiendrait par exemple avec des méthodes de zoom ou de type réduction de modèles, mais dans le cas de cette méthode, le gain en coût de calcul se fait sans perte d'information sur les effets mécaniques à l'échelle locale.

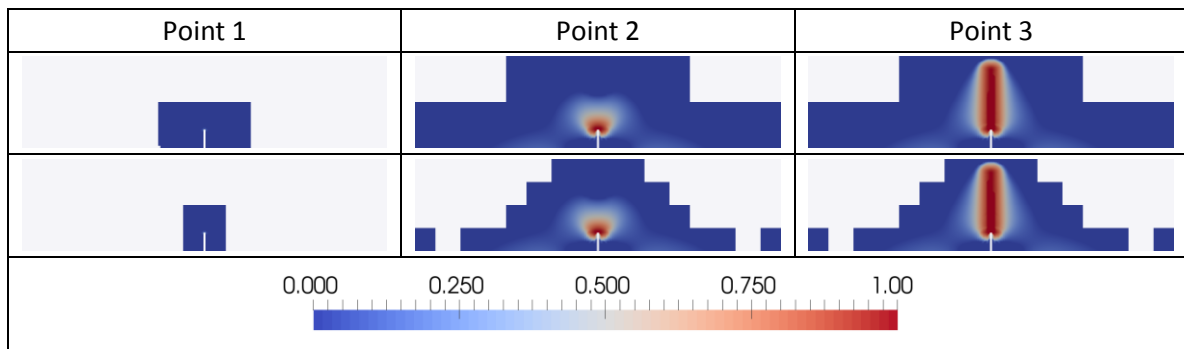


Figure 29 : Profils d'endommagement de la poutre en calcul à condensation adaptative: configurations 16 zones (haut) et 64 zones (bas)

Simulation	Référence	Cond. Adapt. (16 zones)	Cond. Adapt. (32 zones)	Cond. Adapt. (64 zones)
Temps processeur	741 s	292 s	207 s	248 s
Accélération		154 %	258 %	199 %
Erreur max. (Force)		$8,24 \times 10^{-5}$	$8,57 \times 10^{-5}$	$8,57 \times 10^{-5}$

Tableau 7 : Durée de la simulation pour un cas de flexion 3 points [92].

4.2 Structure en béton armé sous pression interne

4.2.1 Description du problème

Ce cas de validation a pour objectif d'évaluer l'applicabilité de la méthode proposée à une structure plus proche des structures industrielles, c'est-à-dire un problème 3D représentant une structure en béton armé (et donc des modèles mécaniques différents). Le second objectif est de valider la capacité de la méthode à retransmettre un chargement réparti, en l'occurrence une pression. La structure

proposée est un modèle simplifié de maquette d'enceinte de confinement en béton armé. Les dimensions sont de l'ordre de grandeur de celles de la maquette d'enceinte Vercors (Chapitre 6). Dans cette première approche simplifiée, on ne tient pas compte de la précontrainte ni de la géométrie complexe (nervures, ceinture torique, ouvertures, etc.). La structure étudiée est donc un cylindre de béton armé surmonté d'un dôme hémisphérique. Les déplacements à la base du cylindre sont bloqués. Le chargement consiste en une pression appliquée sur la surface interne de la structure.

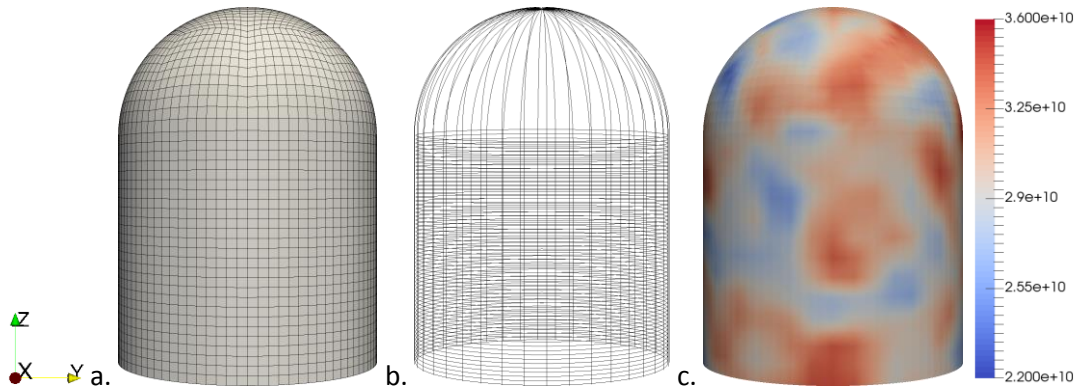


Figure 30: Maillage de l'enceinte simplifiée (a: Maillage du béton, b: Barres d'acier passives, c: Distribution du Module d'Young du béton (Pa))

Hauteur du fût	Rayon interne du fût	Epaisseur du fût	Rayon interne du dôme	Epaisseur du dôme
13,3 m	7,30 m	0,40 m	7,30 m	0,40 m

Tableau 8 : Dimensions de la structure

La géométrie et le maillage de la structure sont présentés en Figure 30. Ses dimensions sont données dans le Tableau 8. Ces dimensions sont basées sur celles de la maquette d'enceinte interne Vercors [93,94]. Le fût et le dôme sont maillés avec des parallélépipèdes de 50 x 50 x 40 cm (un élément dans l'épaisseur) avec des éléments finis tri-linéaires. Les aciers sont modélisés par des éléments barres de longueur 50 cm. Ces éléments ont une section équivalente de $S = 8,04 \text{ cm}^2$ (soit un diamètre de 32 mm). La structure comprend 60 cerces situées dans le fût, ayant un enrobage de 17,5 cm (depuis l'intérieur) et 40 barres en U (à un enrobage de 17,5 cm depuis l'extérieur) passant dans le fût et le dôme (Figure 30). Le lien entre les aciers et le béton est assuré par des relations cinématiques parfaites sur les déplacements (adhérence parfaite).

Le béton est modélisé par la loi d'endommagement isotrope de Mazars [86,95], avec le jeu de paramètres donné dans le Tableau 9. Pour un module d'Young moyen $E_M = 30 \text{ GPa}$, ceci correspond à une résistance en compression $f_c = 26,9 \text{ MPa}$ et en traction $f_t = 3,0 \text{ MPa}$. Un champ aléatoire auto corrélé est appliqué afin de représenter l'hétérogénéité du module d'Young à l'échelle de la structure. Ce champ a deux fonctions : donner une meilleure représentation de la physique des enceintes de confinement où les propriétés mécaniques varient spatialement [96] et briser l'invariance par rotation du problème en créant des points faibles où l'endommagement peut s'amorcer. La distribution aléatoire suit une loi gaussienne, de moyenne $E_M = 30 \text{ GPa}$ et d'écart type $E_\sigma = 3,0 \text{ GPa}$ (Figure 30). La fonction d'autocorrélation est une fonction gaussienne, de longueur interne $l_i = 1 \text{ m}$ [96].

Les barres d'acier sont représentées par le modèle de plasticité de Von Mises à écrouissage linéaire, avec les paramètres donnés dans le Tableau 10. L'évolution contrainte-déformation associée à cette modélisation est représentée sur la Figure 31.

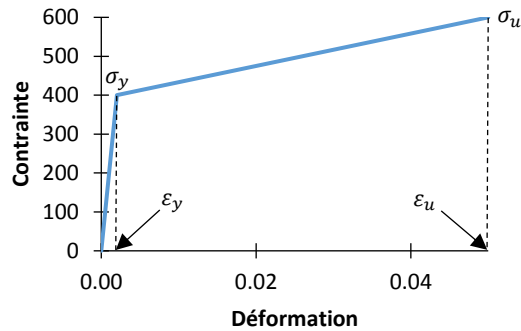


Figure 31 : Evolution contrainte-déformation avec le modèle de Von Mises à écrouissage linéaire.

Module d'Young	Coeff. de Poisson	Limite élastique	A_C	B_C	A_T	B_T
E_M	ν	ϵ_0	A_C	B_C	A_T	B_T
30 GPa	0,2	1×10^{-4}	1,15	1900	0,95	12000

Tableau 9: Paramètres du modèle de Mazars pour le béton (E_M : moyenne du champ aléatoire de E)

Module d'Young	Déformation limite élastique	Contrainte limite élastique	Déformation ultime	Contrainte ultime	Section
E	ϵ_y	σ_y	ϵ_m	σ_m	S
200 GPa	2×10^{-3}	400 MPa	5×10^{-2}	600 MPa	8,04 cm ²

Tableau 10: Paramètres du modèle de plasticité pour les barres de renfort

Afin d'éviter la dépendance pathologique au maillage, on utilise la méthode de régularisation basée sur les contraintes [89], avec une longueur interne $l_{c0} = 0,5$ m (longueur minimale permettant de limiter la localisation). Le chargement est une pression uniforme, appliquée sur la surface interne du fût et du dôme, augmentant jusqu'à une valeur finale de $1,69 \times 10^5$ Pa.

4.2.2 Méthode de condensation et critères de promotion

La méthode de condensation adaptative est utilisée sur cette simulation de la manière suivante : le maillage de la structure est divisé en 12 zones de dimension équivalente (Figure 32). Toutes les conditions aux limites sont condensées dans les rigidités équivalentes associées, ainsi que le chargement appliqué dans le chargement équivalent.

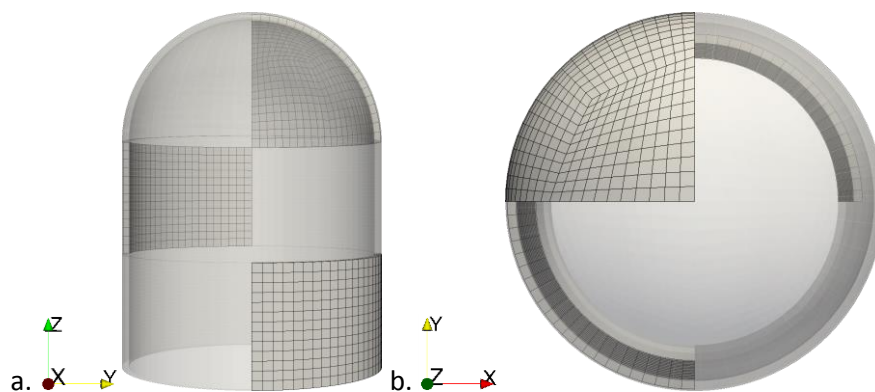


Figure 32: Décomposition en 12 zones (a: vue de face, b: vue de dessus)

Les critères de promotion appliqués aux différentes zones sont les mêmes que pour le cas de poutre entaillée en flexion, le modèle mécanique du béton étant le même. Etant donné que les nœuds d'acier sont reliés cinématiquement à ceux du béton et que le béton s'endommage avant que l'acier ne

plastifie, les critères de promotion ne sont pas appliqués au comportement de l'acier. C'est donc le comportement du béton qui pilote la condensation ou l'activation des zones.

4.2.3 Résultats

La Figure 33 donne les évolutions pression interne – déplacement radial pour le calcul à condensation adaptative, ainsi que pour un calcul de référence utilisant le même jeu de données. Les deux calculs utilisent en particulier le même champ de propriétés mécaniques.

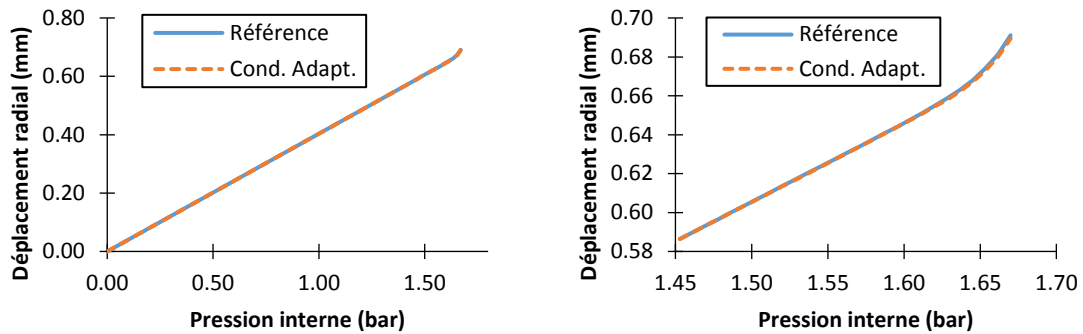


Figure 33: Evolution pression interne – déplacement radial (courbe complète et partie non linéaire).

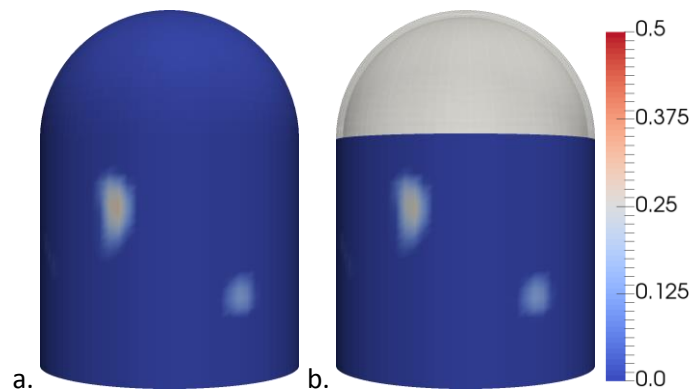


Figure 34: Profils d'endommagement à la fin du chargement (a: référence, b: calcul condensé)

Une correspondance parfaite est observée entre les deux calculs (Figure 33). Ceci confirme le résultat obtenu sur la poutre en flexion et valide l'applicabilité de la méthode à un problème 3D représentant une structure en béton armé, ainsi que la capacité à représenter un chargement réparti.

Les profils d'endommagement finaux (Figure 34) montrent aussi une correspondance entre le calcul condensé et le calcul de référence, à la fois concernant la localisation et les valeurs de l'endommagement. Les résultats du calcul de référence sont donc correctement reproduits par la méthode de condensation adaptative, ce qui valide les développements réalisés.

Simulation	Référence	Cond. Adapt.
Temps processeur (s)	1838	922

Tableau 11: Durée globale de la simulation de structure en béton armé.

Le Tableau 11 compare le temps de calcul global pour chaque simulation (les deux calculs ont été réalisés sur la même machine, un nœud de calcul à 16 cœurs). On observe que la méthode de condensation adaptative permet de diviser par 2 le coût global du calcul. L'applicabilité de la méthode est donc confirmée sur ce type de simulations. L'observation du déroulement de la simulation condensée révèle en outre que le critère d'amorçage d'endommagement est atteint une seule fois. En

effet, la structure est très homogène en termes de chargement et structure et les zones les plus faibles s'activent de manière quasi-simultanée. Cependant, étant donné le faible nombre de pas de chargement réellement simulés (27), une valeur plus élevée de p serait susceptible de dégrader les performances, car il faudrait réaliser de nouveau p pas de calcul lors de l'amorçage d'endommagement dans de nouvelles zones. Cependant, avec des maillages plus fins, de nouvelles décompositions pourraient permettre de réduire largement la dimension du problème tout en améliorant la qualité des résultats. Ceci est étudié sur une structure plus complexe et représentative par la suite.

5 Résumé

Problématique

La simulation de la fissuration du béton nécessite d'utiliser une loi de comportement non linéaire, appliquée sur un maillage fin dès lors qu'on souhaite évaluer correctement les propriétés des fissures. Ces calculs sont donc coûteux, parfois même impossibles à réaliser lorsqu'on étudie des grandes structures en béton. Des solutions alternatives au calcul éléments finis classique doivent donc être proposées.

Contributions

Nous avons développé une méthode de condensation adaptative pour la simulation non linéaire des grandes structures. Cette méthode étend l'élimination linéaire de degrés de liberté de Guyan à la réduction de dimension d'un grand problème ayant un comportement non linéaire localisé. Lorsque le système évolue durant le chargement, l'algorithme proposé permet une détection des comportements non linéaires via des critères et la promotion des zones éliminées en zones activées (par propagation ou amorçage). Le système de critères mis en place est générique et l'implémentation pour un modèle d'endommagement pour le béton est proposée. Enfin, une optimisation des calculs est proposée en appliquant un système de condensation à deux niveaux des zones éliminées.

Résultats

La méthode proposée a été appliquée à deux études numériques de structures. La première est une poutre en béton entaillée en flexion 3 points. Sur ce modèle, la méthode proposée permet de reproduire les résultats des calculs de référence de manière précise, deux fois plus rapidement qu'un calcul standard, avec des paramètres standards et non optimisés. Le second cas numérique est un modèle de structure en béton armé dont la géométrie correspond à la forme simplifiée et aux dimensions d'une maquette d'enceinte de confinement. Sur cette application, la méthode de condensation adaptative permet aussi de reproduire les résultats d'un calcul de référence, avec une économie de 50 % sur la charge de calcul.

La méthode de condensation adaptative proposée permet de reproduire les résultats d'un calcul de référence de la structure. Cette efficacité numérique de la méthode proposée pourrait s'accroître dans le cas d'une zone d'endommagement plus restreinte. Néanmoins, elle est très dépendante de la décomposition en sous-problèmes et de la localisation du comportement non linéaire.

Conclusions

La condensation adaptative réduit la taille d'un problème de mécanique à celle de ses zones non linéaires. Pour une taille donnée de zone non linéaire, elle est donc d'autant plus efficace que la taille du problème global augmente. Ceci implique que les exemples de petite dimension présentés dans ce chapitre, s'ils permettent de valider l'applicabilité de la méthode sur des calculs de type génie civil, sont intrinsèquement défavorables à notre approche en termes d'évaluation des performances. On s'attend en particulier à une réduction de taille de problème plus élevée (gain d'un ordre de grandeur) sur des problèmes de grandes structures de génie civil, telles que celle étudiée dans le chapitre 5.

Enfin, cette méthode a été développée dans l'optique d'être applicable à différents modèles et matériaux si on dispose de critères d'activation et de propagation adaptés.

Publications

Les développements décrits dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication dans la revue à comité de lecture *Finite Elements in Analysis and Design* [97]. Des communications ont également été présentées lors des conférences internationales SMiRT 23 (*Structural Mechanics in Reactor Technology*) et ICDM 2 (*International Conference on Damage Mechanics*) [92,98].

Chapitre 4 - Eléments finis stochastiques condensés pour l'analyse des structures sous incertitudes

1 Introduction

Ce chapitre présente une méthode couplée pour résoudre les problèmes d'Eléments Finis Stochastiques (EFS) non linéaires de grande taille pour un coût de calcul limité. L'approche proposée se base sur la méthode de condensation adaptative présentée dans le chapitre précédent pour réduire le coût de chaque calcul déterministe. L'approche proposée se place dans la lignée des travaux de Guedri [62] utilisant la condensation dynamique ou de Panayirci [25], utilisant la condensation statique. L'approche proposée vise à répondre à la problématique du calcul d'incertitudes sur les structures de génie civil de grandes dimensions.

La méthode des EFS condensés, proposée dans ce chapitre :

- utilise l'approche de condensation adaptative pour les problèmes non linéaires dans le contexte des analyses d'incertitudes [26,97] ;
- construit un second méta-modèle, d'ordre faible, utilisé pour les rigidités réduites, chargements et champs de déplacements dans les zones condensées ;
- produit des Fonctions de Densité de Probabilité (FDPs) complètes de grandeurs d'intérêt soit par une approche semi-analytique, soit par simulation de Monte-Carlo.

Cette méthode, développée dans l'optique d'une application aux grandes structures de génie civil, est néanmoins générique et peut être utilisée en mécanique des structures pour évaluer la robustesse des modèles numériques, construire des courbes de fragilité de systèmes mécaniques, etc.

En premier lieu, une formulation du problème de mécanique, étendu au contexte des incertitudes est proposée. La méthode proposée pour résoudre ce problème efficacement est ensuite présentée. Une validation est réalisée sur une étude heuristique, où le résultat de l'approche proposée est comparé à une étude analytique. Enfin, une application à une petite structure est réalisée, où la méthode est comparée à une approche EFS de l'état de l'art.

2 Formulation du problème

2.1 Problème mécanique non linéaire stochastique

Le problème à résoudre est ici une généralisation de celui présenté dans le chapitre précédent. Du point de vue formel, il s'écrit comme un problème de mécanique non linéaire de dimension n , défini sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d$, avec $d = 1,2,3$. Dans cette partie, nous souhaitons traiter les diverses incertitudes sur notre problème. Elles sont caractérisées par un ensemble de r paramètres d'entrée $y = (y_1, \dots, y_r)$. Les hypothèses et la méthode de résolution sont identiques à celles du chapitre précédent. Le problème s'écrit :

$$K^\tau(u^\tau(y), y) \cdot u^\tau = f^\tau(y) \quad (48)$$

Avec $K \in \mathbb{R}^{n,n}$ la matrice de rigidité, $u^\tau \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de déplacements nodaux et f^τ le vecteur de forces nodales (au pas $t = \tau$). Des grandeurs mécaniques d'intérêt peuvent être extraites lorsque le problème est résolu : elles sont considérées comme un vecteur aléatoire $Z = h^\tau(y)$. Il est admis dans la suite que les paramètres aléatoires d'entrée peuvent être mis sous la forme d'un vecteur aléatoire normal standard $x = (x_1, \dots, x_r) = T(y)$, en utilisant la fonction de normalisation Gaussienne T [99]. Sachant que n'importe quelle loi de probabilité inconnue peut être engendrée par transformation d'une loi normale [99], cette méthodologie permet de choisir n'importe quel type de loi pour les

Variables Aléatoires (VAs) réellement utilisées dans le problème (propriétés mécaniques, champs aléatoires, ...) à l'aide d'une seule méthode EFS. La fonction de dé-normalisation gaussienne est donc incluse dans la fonction de réponse mécanique M . Le vecteur aléatoire Z s'écrit:

$$Z = h^T(y) = h^T \circ T^{-1}(x) = M(x) \quad (49)$$

2.2 Construction d'un méta-modèle

Les paramètres incertains y sont représentés par un vecteur de dimension r de variables aléatoires normales standard indépendantes $X = T(Y) = (X_1, \dots, X_r)$, définies sur l'espace de probabilités (Θ, F, P) .

Dans de nombreux cas, la fonction M est approximée par une fonction analytique $\tilde{Z} = \tilde{M}(X): \Omega \rightarrow I$. Cette approximation \tilde{M} est classiquement obtenue par les méthodes EFS sous la forme générale d'un méta-modèle (ou surface de réponse). Ce méta-modèle est souvent la projection de la fonction de réponse mécanique M sur une base de polynômes orthogonaux $\Phi_p, p = 1, \dots, n_g$ de dimension n_g . L'approximation de la variable aléatoire s'écrit :

$$Z = M(X) \simeq \tilde{Z} = \tilde{M}(X) = \sum_{p=1}^{n_g} z_p \Phi_p(X) \quad (50)$$

où les z_p sont les coefficients du méta-modèle polynômial, plus ou moins difficiles à estimer.

2.3 Fonction de densité de probabilité (FDP) de grandeurs d'intérêt

Dans de nombreuses études utilisant les méthodes EFS, seule la valeur moyenne d'une grandeur d'intérêt structurale, quelques moments statistiques ou une probabilité de rupture sont calculées pour un problème donné [43]. Ces grandeurs peuvent être obtenues via diverses méthodologies, par des études de sensibilité ou des approches fiabilistes. Cependant, il serait intéressant d'obtenir une caractérisation probabiliste complète de la VA $Z = M(X)$, *i.e.* une approximation de sa FDP p_Z , en plus de sa moyenne μ_Z et son écart type σ_Z . On s'intéresse donc à la FDP $p_{\tilde{Z}}$ de \tilde{Z} , approximation de p_Z ($p_{\tilde{Z}}$ permet aussi d'obtenir $\mu_{\tilde{Z}}$ et $\sigma_{\tilde{Z}}$).

Dans le but de simplifier l'écriture, on traite dans un premier temps le cas d'un système mécanique dépendant d'une seule VA scalaire X dont la loi admet une FDP p_X sur un intervalle I . On suppose qu'il existe un ensemble de n couples d'intervalles (Θ_i^1, Θ_i^2) de \mathbb{R} et de bijections $M_i: \Theta_i^1 \rightarrow \Theta_i^2$ tels que pour tout x de Θ_i^1 $M_i(x) = M(x)$. Chaque fonction M_i admet une bijection réciproque M_i^{-1} . Par changement de variables, p_Z s'écrit:

$$p_Z(z) = \sum_{i \in I_Z} p_X(M_i^{-1}(z)) |M_i^{-1}'(z)| \quad (51)$$

Avec M_i^{-1}' la dérivée de la fonction M_i^{-1} et $I_Z = \{i \in [1, n], z \in \Theta_i^2\}$. Les mêmes hypothèses sont faites pour \tilde{M} , avec des notations similaires (en particulier, les fonctions \tilde{M}_i sont connues si \tilde{M} est un polynôme). On obtient alors la FDP $p_{\tilde{Z}}$ de \tilde{Z} .

Cependant, pour la plupart des problèmes de mécanique sous incertitudes, les grandeurs d'intérêt sont des fonctions de plusieurs paramètres aléatoires. L'approche proposée peut être étendue à ce cas plus général sous des hypothèses similaires [100], de manière à élargir son domaine d'utilisation. Dans ce cas, la FDP de Z et son approximation \tilde{Z} s'écrivent:

$$\begin{aligned}
p_Z(z) &= \sum_{i \in I_Z} p_X(M_i^{-1}(z)) \left| \det(\mathbf{D}M_i^{-1}(z)) \right| \\
&\simeq p_{\tilde{Z}}(z) = \sum_{i \in I_{\tilde{Z}}} p_X(\tilde{M}_i^{-1}(z)) \left| \det(\mathbf{D}\tilde{M}_i^{-1}(z)) \right|
\end{aligned} \tag{52}$$

avec $\mathbf{D}M_i^{-1}$ la matrice Jacobienne de la fonction M_i^{-1} et $I_Z = \{i \in [1, n], z \in \Theta_i^2\}$.

3 Approche proposée

Dans cette section, une approche est proposée afin de résoudre le problème précédent et d'obtenir une estimation probabiliste des grandeurs d'intérêt:

- un couplage entre la méthode de condensation adaptative et les approches EFS est proposé : la méthode des EFS condensés adaptatifs. Cette méthode peut être appliquée à différentes approches EFS afin de calculer les coefficients de l'approximation de la réponse mécanique.
- un cas particulier de couplage avec la collocation stochastique est présenté.
- une approche semi-analytique pour le calcul des FDPs de grandeurs d'intérêt est présentée. Cette méthode utilise la forme de l'approximation de la réponse mécanique pour construire la FDP des grandeurs d'intérêt Z .

3.1 EFS condensés adaptatifs

Dans le cadre des méthodes de type EFS, il est nécessaire de résoudre des problèmes déterministes afin d'obtenir les coefficients z^p permettant de construire une approximation \tilde{M} de la réponse mécanique. L'objectif de l'approche proposée est de calculer ces coefficients de la manière la plus efficace possible. Chaque problème déterministe individuel peut être résolu par éléments finis avec la méthode de condensation adaptative décrite dans le chapitre 2. Cette méthode limite le coût des simulations EF mais nécessite le calcul de grandeurs additionnelles :

- les rigidités réduites $\hat{K}_{i,i}$. Elles sont calculées avant chaque simulation.
- les chargements condensés \hat{f}_i^τ . Ils sont calculés au cours des simulations non linéaires.
- les déplacements nodaux internes u_{Ci}^τ dans les zones condensées. Ils sont calculés régulièrement au cours de la simulation non linéaire pour évaluer les critères de promotion.

Ces grandeurs, qui dépendent des valeurs des paramètres aléatoires, devraient être calculées indépendamment pour chaque réalisation et calcul non linéaire réalisé dans le cadre de la méthode EFS. Comme cette opération est relativement coûteuse, cette approche mérite d'être optimisée. La méthode proposée construit donc pour la rigidité réduite de chaque zone Ω_i un méta-modèle d'ordre n_K sur les valeurs d'un sous-vecteur bien choisi X_{Ki} de X . Dans chaque simulation déterministe, les grandeurs nécessaires sont donc approximées en utilisant ce méta-modèle. Ainsi, chaque rigidité réduite est approchée par un développement de la forme:

$$\hat{K}_i(X) \simeq \sum_{p=1}^{n_K} \hat{K}_i^p \Phi_p(X_{Ki}) \tag{53}$$

De la même manière, le vecteur de forces nodales équivalentes réduit $\hat{f}_i^\tau(X)$ de la zone condensée Ω_i peut s'écrire:

$$\hat{f}_i^\tau(X) = f_{Mi}^\tau(X) - {}^tK_{Ci,Mi}(X)K_{Ci,Ci}^{-1}(X)f_{Ci}^\tau(X) \tag{54}$$

$$\hat{f}_i^\tau(X) \simeq \sum_{p=1}^{n_f} \hat{f}_i^{\tau,p} \Phi_p'(X_{Fi}) \quad (55)$$

La solution $u_{Ci}^\tau(X)$ sur les degrés de liberté internes de la zone Ω_i peut s'écrire:

$$u_{Ci}^\tau(X) = K_{Ci,Ci}^{-1}(X) (f_{Ci}^\tau(X) - K_{Ci,Mi}(X) u_{Mi}^\tau(X)) \quad (56)$$

$$u_{Ci}^\tau(X) \simeq \sum_{p=1}^{n_u} u_{Ci}^{\tau,p} \Phi_p''(X_{ui}) \quad (57)$$

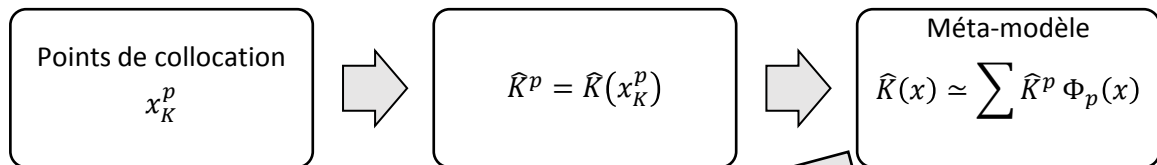
avec $\Phi_p, \Phi_p', \Phi_p''$ trois bases de polynômes orthogonaux et K^p, F^p, u^p les coefficients de l'approximation.

Ces méta-modèles sont indépendants de l'approximation réalisée pour la réponse mécanique (§ 2.2) et peuvent donc être construits par une approche différente : par exemple, les grandeurs de condensation pourraient être approximées par développement de Taylor, avec une méthode de type collocation approximant la réponse mécanique. Cette approche permet de réduire le coût des prétraitements de la condensation adaptative.

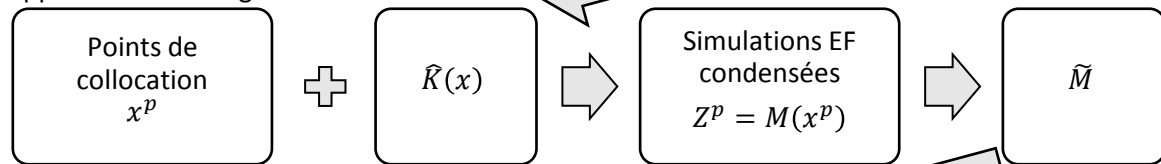
3.2 Collocation stochastique condensée

La Figure 35 propose un schéma général de l'approche de collocation stochastique condensée.

Méta-modèle 1: Approximation des grandeurs condensées



Méta-modèle 2:
Approximation des grandeurs d'intérêt



Quantification probabiliste des grandeurs d'intérêt

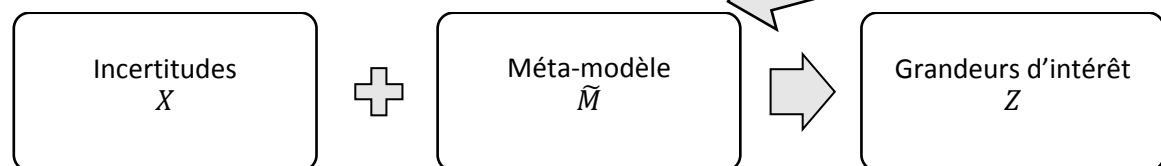


Figure 35 : Schéma général de la méthode de collocation stochastique condensée

3.2.1 Collocation stochastique

La collocation stochastique constitue une classe de méthodes EFS, dans laquelle les coefficients z^p du polynôme \tilde{M} approximant la réponse mécanique M sont calculés par un ensemble de simulations déterministes sur des échantillons. Plus spécifiquement la méthode utilisée dans ce chapitre est la collocation sur base de polynômes de Lagrange [101]. Compte tenu du fait que l'ordre de

l'approximation est généralement faible, des polynômes de Lagrange sont utilisés comme base de Φ_p , au lieu des polynômes d'Hermite. La méthode de collocation proposée résout donc un ensemble de problèmes déterministes définis par les n_g points de collocation $z_p = M(x_p)$ de la fonction de réponse \tilde{M} . Les points de collocation x_p sont les points de quadrature de Gauss-Hermite [102].

3.2.2 Collocation stochastique condensée adaptative

La méthode de collocation stochastique condensée proposée dans ce chapitre consiste à coupler la collocation stochastique avec la condensation adaptative. Il s'agit de la forme spécifique de la méthode EFS condensée dans le format de la collocation. L'approche proposée fonctionne sur la base de deux collocations:

- Un premier méta-modèle construit par collocation permet d'approcher les grandeurs de condensation (rigidités réduites) en fonction des paramètres aléatoires du problème.
- Un second méta-modèle est construit par collocation pour la fonction de réponse mécanique : il nécessite de réaliser des simulations déterministes aux points de collocation.
- Les valeurs de la réponse mécanique aux points de collocation sont calculées avec la méthode de condensation adaptative. Les grandeurs de condensation nécessaires à ces simulations sont approximées par le premier méta-modèle.

Sous la forme de la collocation stochastique condensée, les rigidités réduites aléatoires $\hat{K}_i(X)$, forces condensées aléatoires $\hat{f}_i^T(X)$ et déplacements internes aléatoires $u_{Ci}^T(X)$ sont approximés par collocation. En premier lieu, pour chaque zone i , les VAs de X impactant ses grandeurs de condensation (en particulier la rigidité condensée), sont déterminées et mises sous la forme d'un vecteur X_{Ki} .

Le choix des sous-vecteurs X_{Ki} et de l'ordre d'approximation n_K est variable selon la nature des incertitudes prises en compte :

- Les VAs qui impactent la rigidité réduite (en particulier, les propriétés élastiques comme le module d'Young ou le coefficient de Poisson) doivent être incluses dans X_{Ki} . Dans les applications proposées, les rigidités sont approximées linéairement en fonction de ces variables ($n_K = 2$).
- Les VAs n'ayant pas d'impact sur la rigidité de la zone (limite élastique, chargement, etc.) ne sont pas incluses dans le vecteur X_{Ki} .
- Les VAs qui impactent les rigidités non linéairement ou de manière couplée (position des inclusions par ex.) sont incluses dans le vecteur X_{Ki} , avec un ordre d'approximation $n_K \geq 2$.

D'évidence, le choix des VAs à inclure dans les méta-modèles locaux est largement dépendant du cas étudié. A titre d'exemple, sur des applications génie civil, les propriétés du béton sont souvent modélisées par des incertitudes sur les paramètres locaux du modèle mécanique, telles que le module d'Young ou la limite élastique. Ces propriétés sont généralement considérées variables d'une levée à l'autre. Pour une zone donnée i , la stratégie adoptée consiste à tenir compte dans le sous-vecteur X_{Ki} uniquement du module élastique associé à la levée contenant la zone.

Sur ces sous-vecteurs X_{Ki} , des points de collocation x_{Ki}^p sont déterminés par quadrature de Gauss-Hermite (comme pour le second méta-modèle), sur lesquels les rigidités réduites \hat{K}_i^p sont calculées. En ces points sont calculés non seulement les rigidités ($\hat{K}_i^p, K_{Ci, Mi}^p, K_{Ci, Ci}^p$), mais aussi les coûteux termes inverses ($(K^{-1})^p$) qui permettront de calculer les autres grandeurs condensées.

Un méta-modèle sur base de polynômes de Lagrange est alors construit sur ces points de collocation, afin d'estimer les rigidités condensées au départ de chaque simulation non linéaire:

$$\widehat{K}_i(X) \simeq \sum_{p=1}^{n_K} \widehat{K}_i^p \Phi_p(X_{Ki}) \quad (58)$$

avec Φ_p les polynômes de Lagrange définis sur les n_K points du méta-modèle, X_{Ki} le sous-vecteur approprié de X et \widehat{K}_i^p les valeurs aux points de collocation x_{Ki}^p .

Durant les simulations non linéaires condensées, il est nécessaire de calculer les chargements réduits retransmis par les zones condensées aux zones d'intérêt. Il est également nécessaire de calculer régulièrement les déplacements et les critères de promotion dans les zones condensées. Dans la méthode de collocation stochastique condensée, ces grandeurs sont calculées dans un premier temps pour les valeurs aux points de collocation des rigidités:

$$\widehat{f}_i^{\tau,p}(X) \simeq f_{Mi}^\tau(X) - \left({}^t K_{Ci,Mi} (K_{Ci,Ci}^{-1})^p \right) f_{Ci}^\tau(X) \quad (59)$$

$$u_{Ci}^{\tau,p}(X) \simeq (K_{Ci,Ci}^{-1})^p \left(f_{Ci}^\tau(X) - K_{Ci,Mi} u_{Mi}^\tau(X) \right) \quad (60)$$

Après quoi, les grandeurs réelles sont approximées à partir de ces valeurs par un méta-modèle sur base de polynômes de Lagrange et utilisées dans la condensation adaptative:

$$\widehat{f}_i^\tau(X) \simeq \sum_{p=1}^{n_K} \widehat{f}_i^{\tau,p}(X) \Phi_p(X_{Ki}) \quad (61)$$

$$u_{Ci}^\tau(X) \simeq \sum_{p=1}^{n_K} u_{Ci}^{\tau,p}(X) \Phi_p(X_{Ki}) \quad (62)$$

Le principal avantage de cette approche est qu'elle permet d'utiliser le même choix de VAs X_{Ki} et de points de collocation x_{Ki}^p (et donc un unique méta-modèle) pour toutes les grandeurs de condensation.

Cette méthode peut fonctionner avec un apport utilisateur très faible, par exemple en utilisant toutes les VAs dans le sous-vecteur ($X_{Ki} = X$), avec un ordre d'approximation réduit (typiquement $n_K = 2$). Le nombre de calculs nécessaires à la construction du méta-modèle est de $(n_K)^n$ (où n est le nombre total de VAs) ; il est donc grandement réduit si le nombre de VAs est élevé. Néanmoins, une expertise de l'utilisateur pour identifier l'influence des différentes VAs sur les rigidités locales peut permettre de réduire plus drastiquement le nombre de points de collocation nécessaires.

3.3 Approximation des FDP de grandeurs d'intérêt

L'objectif est d'obtenir une approximation de la caractérisation probabiliste des grandeurs d'intérêt Z . L'approximation \widehat{Z} de Z peut être obtenue par les méthodes EFS et doit être caractérisée (en particulier, il est nécessaire de calculer sa FDP $p_{\widehat{Z}}$). Deux approches différentes sont proposées pour remplir cet objectif, qui seront appliquées et comparées dans la suite.

3.3.1 Estimation par Monte-Carlo

La première approche consiste à appliquer la méthode de Monte-Carlo sur la fonction de réponse mécanique. Cette approche a été précédemment utilisée [101], avec un méta-modèle polynômial construit par collocation. Pour un échantillon arbitrairement grand (x^1, \dots, x^N) de réalisations de X , les valeurs de la réponse mécanique approximée $(\widehat{M}(x^1), \dots, \widehat{M}(x^N))$ sont calculées. La distribution « expérimentale » peut ensuite être analysée d'un point de vue statistique. Cette méthodologie présente de nombreux avantages, notamment la simplicité d'implémentation et la robustesse, ainsi

qu'une charge de calcul limitée, car l'évaluation du polynôme ne requiert que peu d'opérations. Elle remplit l'objectif de construire une caractérisation probabiliste complète (avec FDP) des grandeurs d'intérêt approximées \tilde{Z} . Cependant, elle présente aussi des inconvénients, notamment une vitesse de convergence faible et la nécessité de post-traiter de grandes quantités de données.

3.3.2 Approche semi-analytique

Dans certains cas, où la forme du méta-modèle \tilde{M} est relativement simple, il est possible d'adopter une autre approche pour éviter ces inconvénients. L'approche proposée, nommée approche semi-analytique, utilise l'expression du méta-modèle \tilde{M} pour calculer directement la FDP des grandeurs d'intérêt \tilde{Z} . Elle offre une alternative aux approches type Monte-Carlo appliquées au méta-modèle, en utilisant sa forme polynomiale. En utilisant les résultats du § 2.3 sur l'approximation \tilde{M} de la réponse mécanique, il est possible d'obtenir la FDP de \tilde{Z} .

Afin de simplifier l'écriture, nous traiterons en premier lieu le cas d'une VA scalaire. Pour une VA de loi normale standard (centrée réduite), en supposant que M' est non nul pour $x = \tilde{M}_i^{-1}(z)$, la FDP de \tilde{Z} peut être déduite:

$$p_{\tilde{Z}}(z) = \sum_{i \in I_{\tilde{Z}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\tilde{M}_i^{-1}(z))^2\right) \left| \frac{1}{\tilde{M}'(\tilde{M}_i^{-1}(z))} \right| \quad (63)$$

Compte tenu de la nature polynomiale de \tilde{M} , sa dérivée \tilde{M}' peut être calculée explicitement et les bornes des intervalles I_z où \tilde{M} est bijective sont données par les racines de \tilde{M}' . Les réciproques locales \tilde{M}_i^{-1} de \tilde{M} peuvent être obtenues directement si l'ordre du polynôme est faible: dans les cas $N_{SC} \in [2,3]$, il existe des solutions explicites à l'équation $\tilde{M}(x) = z$. Dans les autres cas, où le polynôme est de degré plus élevé, des approximations locales des réciproques \tilde{M}_i^{-1} peuvent être nécessaires.

Une approche consiste à calculer les valeurs \tilde{z}^j de \tilde{M}_i sur un certain nombre de points de Θ_i^1 , notés x^j . Sur chaque point x^j , les dérivées première et seconde $\tilde{M}'_i(x^j)$ et $\tilde{M}''_i(x^j)$ peuvent être calculées, soit directement (si l'expression de \tilde{M} est connue explicitement), soit par un schéma de type différences finies avec $\tilde{M}_i(x^{j-1}) = \tilde{z}^{j-1}$ et $\tilde{M}_i(x^{j+1}) = \tilde{z}^{j+1}$. Ces dérivées donnent aussi de bonnes approximations des dérivées des fonctions réciproques $\tilde{M}_i^{-1}(\tilde{z}^j)$ et $\tilde{M}_i^{-1}''(\tilde{z}^j)$. Il est ensuite possible de construire une approximation de Taylor d'ordre 2 de \tilde{M}_i^{-1} au voisinage de \tilde{z}^j . Cette approximation peut alors être utilisée dans l'équation (63) pour calculer localement la FDP $p_{\tilde{Z}}$.

Cependant, dans le cas général, la réponse mécanique et son approximation \tilde{M} sont des fonctions de k VAs scalaires donnant k' valeurs scalaires: $\tilde{M}: \Theta^1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \Theta^2 \subset \mathbb{R}^{k'}$ avec pour tout $x = (x_1, \dots, x_k)$, de Θ^1 $\tilde{M}(x) = (\tilde{M}_1(x), \dots, \tilde{M}_{k'}(x))$. Dans certains cas, des bijections locales \tilde{M}_i peuvent être construites. La première étape consiste à utiliser des espaces Θ^1 et Θ^2 de dimension k .

- Si $k' > k$, une approche possible consiste à séparer les valeurs en plusieurs fonctions de réponse. La réponse unique $\tilde{M}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k'}$ est remplacée par une série de fonctions $A, B, C, \dots: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ traitées comme des réponses mécaniques séparées.
- Si $k' < k$, une approche possible consiste à construire une fonction de réponse $N: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k'}$ telle que $N(x) = (\tilde{M}_1(x), \dots, \tilde{M}_{k'}(x), x_{k'+1}, \dots, x_k)$.

Une combinaison des deux méthodes peut être nécessaire pour obtenir des espaces de dimension k dans certains cas. Les séries d'espaces $\{\Theta_1^1, \dots, \Theta_k^1\}$ et $\{\Theta_1^2, \dots, \Theta_k^2\}$ et les bijections locales N_i peuvent alors être construites. Leurs réciproques N_i^{-1} peuvent être construites explicitement dans

certains cas. Cependant, dans le cas général, elles devront être approximées par des méthodes similaires à celle du cas unidimensionnel, telles que la méthode de Taylor. La FDP de $N(X)$ peut être obtenue en appliquant le résultat du § 2.3 aux fonctions N_i . La FDP de $\tilde{Z} = \tilde{M}(X)$ peut alors être déduites par des formules de probabilités conditionnelles.

Cette approche peut donc être considérée comme une méthode semi-analytique permettant d’obtenir une approximation de la réponse d’un problème probabiliste. Cette méthode requiert d’extraire le méta-modèle, définir les ensembles sur lesquels il est bijectif et calculer ses dérivées. En particulier, cela nécessite une étude mathématique permettant d’obtenir la bijectivité locale de la fonction de réponse dans le cas multi-variables. Ceci peut représenter un travail considérable dans le cas de méta-modèle d’ordre élevé avec un grand nombre de variables aléatoires. Cependant, pour des problèmes ayant un faible nombre de paramètres aléatoires, cette approche permet d’obtenir des résultats de qualité analytique.

4 Éléments de validation

4.1 Barre en acier ayant un défaut localisé

Cette étude vise à illustrer le principe et l’applicabilité de la méthode sur un petit problème à deux dimensions, localement non linéaire : en particulier, ce problème peut être simplifié pour être résolu analytiquement. Il inclut aussi une zone arbitrairement petite ayant un comportement non linéaire. Les résultats obtenus par la méthode de collocation condensée sont comparés à ceux d’une méthode EFS de l’état de l’art [101,103] ainsi qu’à la solution analytique.

4.1.1 Description du problème

La structure étudiée est une barre d’acier ayant un défaut central, sollicitée en tension directe. L’objectif est de construire un méta-modèle du comportement mécanique et d’extraire la FDP de la déformation plastique maximale ε_p en fin de chargement.

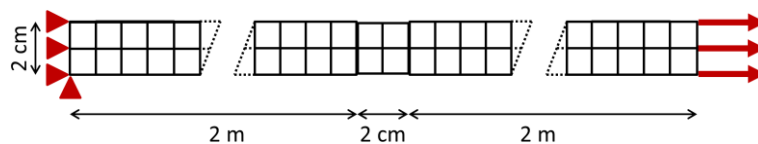


Figure 36 : Schéma de la barre d’acier et des conditions aux limites

La barre est modélisée en deux dimensions sous l’hypothèse des contraintes planes. Un schéma de la barre est présenté en Figure 36 ; la structure est maillée uniformément par des éléments carrés bilinéaires (« QUA4 »). Le défaut central est modélisé par un segment de 2 cm de long. Le long de ce segment, la hauteur de la barre est réduite de 5 %. Le lien entre les deux parties latérales et la partie centrale de la barre est assuré par des relations cinématiques sur les déplacements nodaux. La Figure 37 présente deux maillages de la partie centrale : différentes tailles de maille seront étudiées afin d’évaluer la capacité de passage à l’échelle de la méthode. Les mouvements de corps rigides sont bloqués. Le chargement appliqué est une force horizontale appliquée à l’extrémité droite, afin de créer des conditions de chargement uniaxial. Il exerce une contrainte de 475 MPa dans les parties latérales et de $f = 500$ MPa dans la partie centrale.

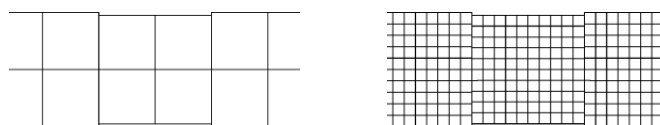


Figure 37 : Deux maillages différents de la barre.

L'acier est représenté par le modèle de plasticité de Von Mises à écrouissage linéaire. Les paramètres du modèle sont des valeurs typiques issues des codes de construction européens [104], donnés dans le Tableau 12. Les paramètres sont tous considérés homogènes dans la barre.

Afin de représenter l'incertitude sur les propriétés mécaniques de l'acier, une VA est introduite représentant le seuil de plasticité ε_y . Sa distribution suit une loi gaussienne tronquée, de moyenne $\varepsilon_y^\mu = 2,38 \times 10^{-3}$ et d'écart type $\varepsilon_y^\sigma = 2,38 \times 10^{-5}$ (de sorte que $f = E \times \varepsilon_y^\mu$), tronquée sur l'intervalle $[-8, 8]$ (8 écarts type de la moyenne). La loi normale tronquée évite la création de valeurs non physiques de ε_y , en éliminant les valeurs plus élevées que f_u/E et les valeurs négatives. Ce choix permet de simplifier l'étude analytique, car la loi présente une FDP simple à formuler, symétrique et permet de placer un point de collocation à $X = 0$. Cette troncature introduit une erreur dans l'estimation de la FDP. Cependant, cette erreur est de l'ordre de 10^{-13} et peut donc être négligée.

Module d'Young	Coefficient de Poisson	Limite élastique*		Déformation ultime	Contrainte ultime
		Moyenne	Ecart type		
E	ν	ε_y^μ	ε_y^σ	ε_u	f_u
210 GPa	0,28	$2,38 \times 10^{-3}$	$2,38 \times 10^{-5}$	0,05	540 MPa

Tableau 12 : Paramètres matériau pour la barre d'acier (* Paramètre aléatoire).

Les propriétés élastiques et les déformation et contrainte ultimes sont indépendantes de la valeur de la limite élastique ε_y , mais le module d'écrouissage et la contrainte limite élastique en dépendent. La Figure 38 présente les évolutions contrainte-déformations pour trois valeurs différentes de ε_y .

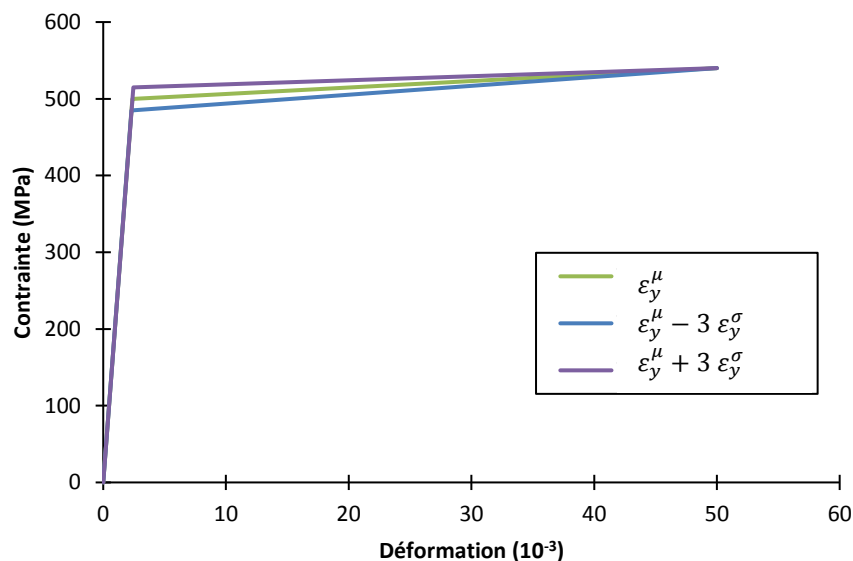


Figure 38 : Evolutions contrainte-déformation du modèle acier pour différentes valeurs de ε_y

4.1.2 Etude analytique

Ce problème peut être résolu analytiquement, en considérant uniquement le défaut central comme un problème de plasticité unidimensionnel. Sachant que la zone de section réduite est dans le régime plastique, la déformation plastique ε_p peut être calculée en fonction de la limite élastique ε_y :

$$- \text{ si } 0 \leq \varepsilon_y \leq \frac{f}{E}$$

$$\varepsilon_p = \left(\frac{E\varepsilon_u - f_u}{E} \right) \frac{f - E\varepsilon_y}{f_u - E\varepsilon_y} \quad (64)$$

$$- \text{ si } \frac{f}{E} \leq \varepsilon_y \leq \frac{f_u}{E}$$

$$\varepsilon_p = 0 \quad (65)$$

- Les autres cas ne sont pas pris en compte, en raison de considérations physiques et de limitations du modèle (en particulier, une limite plastique négative ou plus élevée que la déformation ultime). Ils sont éliminés par la loi de probabilité tronquée.

La limite élastique ε_y de la barre d'acier dépend d'une VA standard X :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^\mu + \varepsilon_y^\sigma X \quad (66)$$

La réponse mécanique (déformation plastique maximale dans la barre) peut donc s'écrire directement comme une fonction de x , une réalisation de X :

$$- \text{ si } -\frac{\varepsilon_y^\mu}{\varepsilon_y^\sigma} \leq x \leq 0$$

$$\varepsilon_p(x) = (E\varepsilon_u - f_u) \frac{-\varepsilon_y^\sigma x}{(f_u - f) - E\varepsilon_y^\sigma x} \quad (67)$$

$$- \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{f_u - f}{E\varepsilon_y^\sigma}$$

$$\varepsilon_p(x) = 0 \quad (68)$$

- Les autres cas ne sont pas pris en compte (ils ont une probabilité nulle due à la loi tronquée).

La déformation plastique est nulle si $x \geq 0$ (limite élastique plus élevée que la valeur moyenne). Des simulations numériques inutiles peuvent donc être évitées en considérant uniquement la partie négative de la distribution, où le comportement non linéaire se produit effectivement ($\varepsilon_p(x) > 0$). La fonction de réponse mécanique permet de montrer que la valeur nulle de la réponse mécanique ε_p a une probabilité finie :

$$P(\varepsilon_p = 0) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2} \quad (69)$$

La FDP p_p de la VA représentant la déformation plastique ε_p peut donc être calculée, en connaissant la FDP p_x de la VA X et la fonction de réponse mécanique analytique ε_p , pour x dans $]0, \varepsilon_u \frac{f}{f_u}]$:

$$p_p(x) = \frac{\left((f_u - f) - \frac{Ex(f_u - E\varepsilon_y^\mu)}{Ex - (E\varepsilon_u - f_u)} \right)^2}{\sqrt{2\pi}\varepsilon_y^\sigma (E\varepsilon_u - f_u)(f_u - f)} \exp\left(-\left[\frac{x(f_u - E\varepsilon_y^\mu)}{\sqrt{2}\varepsilon_y^\sigma (Ex - (E\varepsilon_u - f_u))}\right]^2\right) \quad (70)$$

Cette FDP servira de résultat de référence pour la suite de l'étude.

4.1.3 Paramètres de condensation adaptative et collocation stochastique

Sur cette étude, la méthode de condensation adaptative est appliquée avec une décomposition en 32 zones. Le seul paramètre aléatoire étant la limite élastique, qui n'impacte pas les rigidités élastiques, l'ordre n_{Ki} du méta-modèle des rigidités réduites est fixé nul : les rigidités réduites seront donc approximées à partir d'une unique valeur, (c'est-à-dire constantes) pour chaque étape :

$$\tilde{K}_i(X) \simeq \hat{K}_i \quad (71)$$

$$\hat{f}_i^\tau(X) \simeq f_{Mi}^\tau(X) - ({}^tK_{Ci,Mi}K_{Ci,Ci}^{-1})f_{Ci}^\tau(X) \quad (72)$$

$$u_{Ci}^\tau(X) \simeq K_{Ci,Ci}^{-1} \left(f_{Ci}^\tau(X) - K_{Ci,Mi} u_{Mi}^\tau(X) \right) \quad (73)$$

Comme décrit précédemment, les méta-modèles sont construits et utilisés uniquement pour la partie négative de la loi de la VA. Le choix des points de collocation est donc modifié : seuls les points d'intégration ayant des valeurs négatives sont utilisés dans le développement polynômial. Pour la loi normale centrée normée, la FDP s'écrit :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad (74)$$

En considérant une collocation à 3 points, le méta-modèle \tilde{M} est un polynôme de degré 2. Sa réciproque \tilde{M}^{-1} peut être calculée directement (en utilisant le discriminant) sur les intervalles où le polynôme est bijectif. Sa dérivée \tilde{M}' (polynôme de degré 1) peut aussi être obtenue directement. La FDP p_p de la déformation plastique aléatoire peut ensuite être obtenue en utilisant le résultat du § 2.3.

4.1.4 Résultats

La Figure 39 présente les méta-modèles construits par collocation classique et condensée avec 3 points de collocation. Ces résultats sont comparés avec la solution analytique obtenue dans le § 4.1.2 et le choix des points de collocation est illustré. Sur la figure, les deux méta-modèles de collocation sont similaires. Ils correspondent avec la solution analytique au niveau des points de collocation. Ceci indique que la simulation et le calcul analytique correspondent bien. A distance des points de collocation, les méta-modèles sont moins précis. Ceci implique que les points de collocation et la base de fonctions du méta-modèle doivent être choisis en accord avec les objectifs de l'étude.

Avec les méthodes de collocation ($N_{sc} = 3$), les valeurs de la grandeur d'intérêt $\varepsilon_p^1 = 0$, $\varepsilon_p^2 = 7,04 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_p^3 = 1,26 \times 10^{-2}$ sont obtenues aux points de collocation $x^1 = 0$, $x^2 = -1,36$, $x^3 = -2,86$. Pour des valeurs positives de la VA standard X , les valeurs de ε_p sont fixées à zéro, comme dans l'étude analytique. Le méta-modèle, calculé par polynômes de Lagrange, s'écrit :

$$\tilde{M}(X) = -5,22 \times 10^{-4}X^2 - 5,90 \times 10^{-3}X \quad (75)$$

Le méta-modèle \tilde{M} (polynôme de degré 2) atteint un maximum pour une déformation plastique de $1,67 \times 10^{-2}$. La FDP de la déformation plastique obtenue par collocation est donc nulle pour les valeurs supérieures à $1,67 \times 10^{-2}$. Pour des valeurs dans $[0; 1,67 \times 10^{-2}]$, \tilde{M} admet deux bijections réciproques locales :

- $\tilde{M}_1^{-1}: [0; 1,67 \times 10^{-2}] \rightarrow [-5,66; 0]$, d'expression :

$$\tilde{M}_1^{-1}(E_p) = -959 \times \left(5,90 \times 10^{-3} - \sqrt{3,48 \times 10^{-5} - 2,09 \times 10^{-3}E_p} \right) \quad (76)$$

- $\tilde{M}_2^{-1}: [0; 1,67 \times 10^{-2}] \rightarrow [-11,33; -5,66]$, d'expression :

$$\tilde{M}_2^{-1}(E_p) = -959 \times \left(5,90 \times 10^{-3} + \sqrt{3,48 \times 10^{-5} - 2,09 \times 10^{-3} E_p} \right) \quad (77)$$

Ces expressions permettent de déduire la FDP semi-analytique pour la VA E_p :

$$p_{\tilde{p}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\exp\left(-0,5 \left(\tilde{M}_1^{-1}(z)\right)^2\right)}{\left|\tilde{M}'\left(\tilde{M}_1^{-1}(z)\right)\right|} + \frac{\exp\left(-0,5 \left(\tilde{M}_2^{-1}(z)\right)^2\right)}{\left|\tilde{M}'\left(\tilde{M}_2^{-1}(z)\right)\right|} \right] \quad (78)$$

Les probabilités associées aux valeurs de X plus faibles que -8 (et a fortiori, plus faibles que -11,3) sont nulles dû à la distribution tronquée.

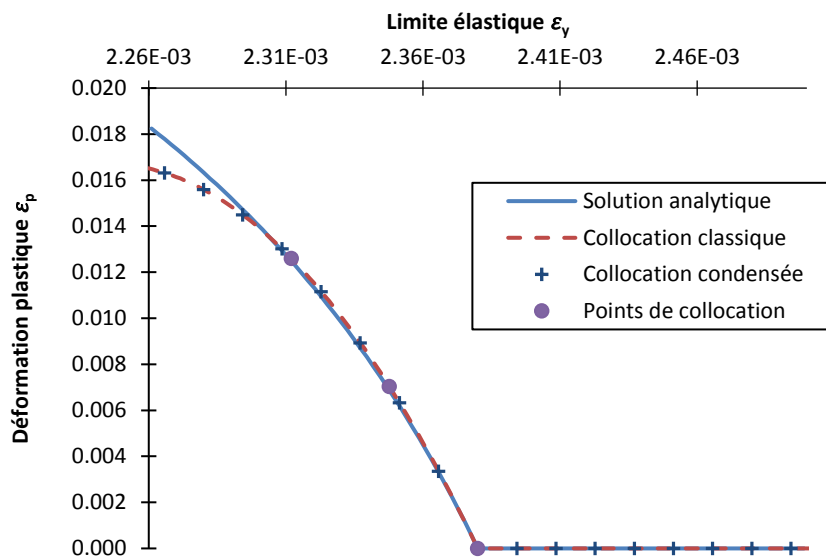


Figure 39 : Evolution de la déformation plastique selon la VA ε_y : valeurs analytiques et numériques

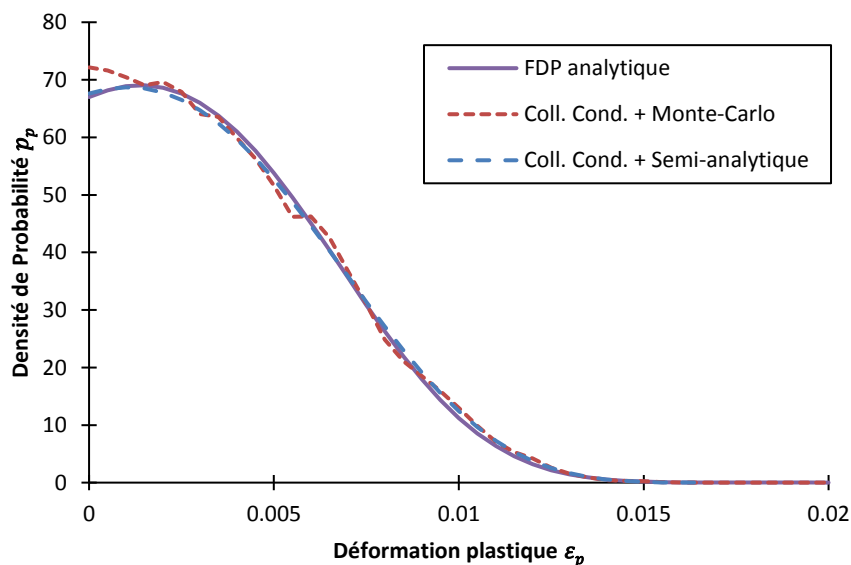


Figure 40 : FDP de la déformation plastique : analytique vs numérique

La Figure 40 présente les trois FDP p_p obtenues pour la déformation plastique ε_p

- la solution analytique issue du § 4.1.2 (modèle mécanique 1D);
- la FDP semi-analytique issue du § 3.3.2;
- la FDP obtenue par collocation stochastique classique associée à une approche Monte-Carlo [101] utilisant 25000 appels au méta-modèle ($N_{sc} = 3$).

La FDP issue du Monte-Carlo est moins précise que celle issue du calcul semi-analytique. Cependant, elle convergerait vers la solution semi-analytique en utilisant un très grand nombre de réalisations.

Le Tableau 13 présente les temps processeurs nécessaires à la construction du méta-modèle du problème mécanique avec différentes tailles de maille, pour la collocation classique et condensée. Les méta-modèles présentés sont construits avec 3 ou 5 points de collocation et utilisent respectivement des polynômes de degré 2 et de degré 4. La collocation condensée, qui produit des méta-modèles similaires à la collocation standard (Figure 39), nécessite un temps de calcul plus faible pour un problème donné. Lorsque la dimension du problème augmente, par exemple par raffinement de maillage, l'écart grandit. Pour un temps de calcul donné, la méthode de collocation condensée permet donc d'améliorer la qualité des résultats par rapport à la collocation classique.

Simulation		Coll. stochastique	Coll. Condensée	Monte-Carlo (est)
Maillage 10 mm (2426 ddls)	3 pts	19,2 s	17,6 s	$\sim 65 \times 10^3 s$
	5 pts	32,8 s	30,0 s	
Maillage 1 mm (168924 ddls)	3 pts	1286 s	254 s	$\sim 4,2 \times 10^6 s$
	5 pts	2110 s	465 s	

Tableau 13 : Temps processeur pour deux simulations de la barre en traction sur une station de travail à deux cœurs. Les temps du Monte-Carlo sont estimés pour 10^4 réalisations.

La Figure 41 présente les valeurs de réduction du temps de calcul obtenues par la collocation condensée en fonction de la dimension du problème. Les collocations à 3 et 5 points sont étudiées. Dans les deux cas l'accélération augmente graduellement jusqu'à un plateau pour une valeur de 5. Les résultats sont évidemment très dépendants de la configuration du problème et de la décomposition. Cependant, des tendances similaires peuvent être attendues d'une manière générale.

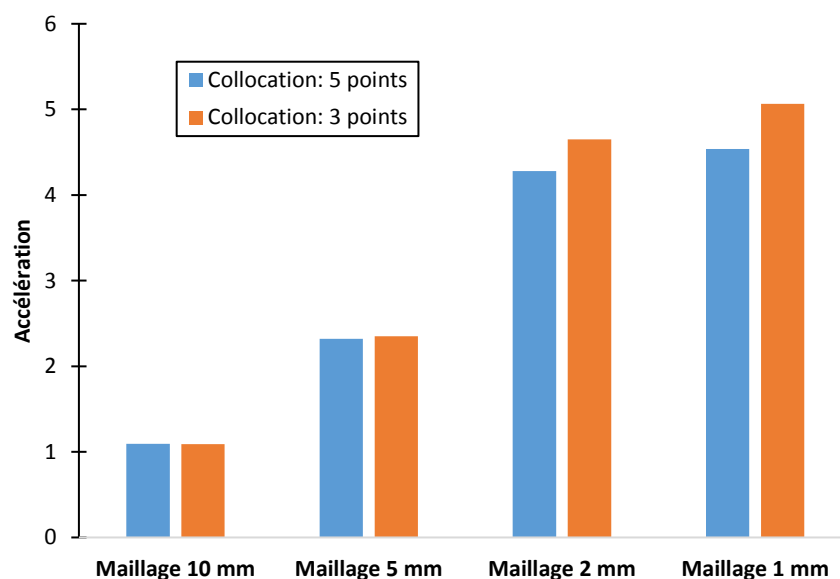


Figure 41 : Accélération de la collocation condensée pour différents maillages

4.1.5 Effet de la dimension probabiliste

Afin d'évaluer la capacité de la méthode proposée à résoudre des problèmes de dimension probabiliste plus élevée, une variante de ce premier problème est étudiée, qui contient de nouveaux paramètres aléatoires. Dans cette variante, 6 paramètres aléatoires sont pris en compte. Ces paramètres suivent des distributions log-normales, dont les caractéristiques sont données dans le Tableau 14. La méthode de collocation stochastique condensée doit construire un méta-modèle de la réponse mécanique par collocation à 3 points sur chaque variable. Avec la méthode de collocation standard comme avec la méthode condensée, il est donc nécessaire de réaliser 729 simulations non linéaires, correspondant aux points de collocation.

Paramètre	Module d'Young	Coefficient de Poisson	Largeur	Limite élastique	Déformation Ultime	Contrainte Ultime
Symbole	E	ν	L'	ε_y	ε_u	f_u
Moyenne	210 GPa	0,28	1,0	$2,38 \times 10^{-3}$	$5,0 \times 10^{-2}$	540 MPa
Ecart type	4,2 GPa	$5,6 \times 10^{-3}$	5×10^{-3}	$4,76 \times 10^{-5}$	$2,0 \times 10^{-3}$	21,6 MPa

Tableau 14 : Paramètres aléatoires pour la variante de la barre en acier.

Cependant, seuls 3 des paramètres aléatoires pris en compte (module d'Young, coefficient de Poisson et largeur de la barre) ont une influence sur les propriétés élastiques. De plus, ces grandeurs sont supposées avoir un impact linéaire sur les matrices de rigidité locales, l'ordre d'approximation pour le second méta-modèle est donc fixé dans ce cas à $(n_K - 1) = 1$: l'estimation des matrices de rigidité utilise 2 points de collocation sur chacune de ces variables. Ainsi, l'approche couplée utilisant l'approximation d'ordre faible pour les rigidités réduites permet au prétraitement d'être considérablement allégé. Dans cette configuration, seulement 8 ensembles de rigidités réduites doivent être effectivement calculés, là où une approche non couplée en nécessiterait 729. Avec un maillage de 10 mm, ceci représente une durée de prétraitement de 7,0 s pour l'approche couplée, contre 619,4 s sans utiliser le second méta-modèle. Avec un maillage de 1 mm, la durée du prétraitement est de 370,3 s en utilisant l'approche couplée. La Figure 42 présente la FDP de la déformation plastique ε_p obtenue par collocation condensée avec l'approche Monte-Carlo sur cette variante du problème. Dans cette configuration, la probabilité d'une valeur nulle de la déformation plastique est de l'ordre de $P(\varepsilon_p = 0) \approx 0,32$.

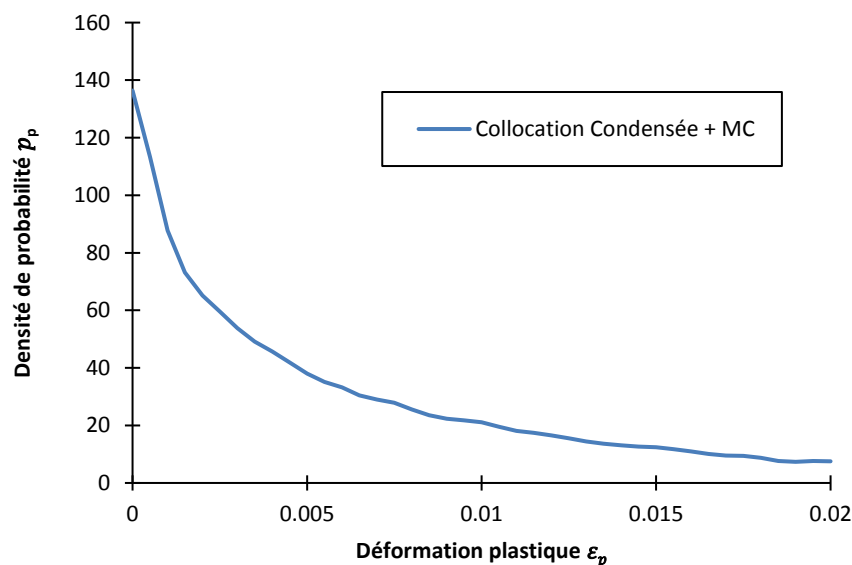


Figure 42 : FDP de la déformation plastique pour la variante de la barre en acier.

4.2 Poutre en béton ordinaire en flexion 4 points

4.2.1 Description du problème

Cette étude vise à valider l'applicabilité de la méthode proposée sur un problème typique de mécanique des structures sous incertitudes. La structure est une poutre en béton ordinaire sollicitée en flexion 4 points. L'objectif est de construire un méta-modèle de son comportement mécanique et d'extraire une FDP pour la valeur maximale de l'endommagement D en fin de chargement.

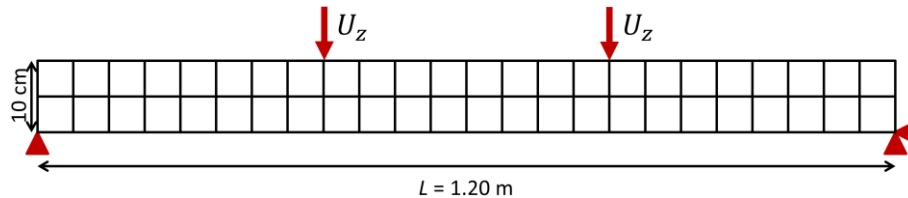


Figure 43 : Schéma de la poutre en béton et des CL

La poutre est modélisée en deux dimensions sous l'hypothèse des contraintes planes. Le modèle 2D a été choisi ici par simplicité, mais la méthode présentée peut tout aussi bien être appliquée à des modèles 3D. La Figure 43 présente un schéma de principe de la poutre en flexion. La poutre est maillée uniformément par des éléments carrés bilinéaires (QUA4) de dimension 5 x 5 mm. Des zones élastiques de petite dimension sont ajoutées afin d'éviter l'endommagement au niveau des supports et des points de chargement. Le chargement est un déplacement imposé vertical orienté vers le bas, croissant jusqu'à 3×10^{-4} m. Il est appliqué en deux points en haut de la poutre, situés à 40 cm ($L/3$) des extrémités. Ce chargement provoque un moment de flexion homogène dans le tiers central de la poutre. Le béton est représenté par le modèle d'endommagement isotrope de Peerlings [87], choisi dans le but de valider l'applicabilité de la méthode de condensation adaptative avec d'autres modèles que celui de Mazars. Avec ce modèle, la loi d'endommagement s'écrit :

$$D(\kappa) = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} (1 - \alpha + \alpha \exp[-\beta(\kappa - \kappa_0)]) \quad (79)$$

avec κ la déformation équivalente historique, κ_0 la limite élastique, α et β des paramètres du modèle, dont les valeurs sont données dans le Tableau 15.

Module d'Young *.*		Coefficient de Poisson	Limite élastique *		α	β	Ratio f_c/f_T
Moyenne	Ecart type		Moyenne	Ecart type			
E'_μ	E'_σ	ν	κ_μ	κ_σ	α	β	k
30 GPa	3 GPa	0,2	1×10^{-4}	5×10^{-6}	0,96	9000	11

Tableau 15 : Paramètres matériau pour le modèle mécanique du béton (* Paramètre matériau aléatoire, ** Champ hétérogène)

Afin d'éviter une dépendance au maillage pathologique et d'avoir une meilleure modélisation des zones endommagées, la méthode non locale stress-based est utilisée [89] (longueur non locale $l_{c0} = 12$ mm). Ceci permet au problème d'être bien posé.

Afin de représenter l'hétérogénéité des propriétés mécaniques dans un matériau tel que le béton [105], un champ hétérogène $C(x)$ est utilisé pour engendrer le module d'Young. Ce paramètre a été choisi car il crée une hétérogénéité à la fois dans la résistance et dans la rigidité du matériau. Les autres paramètres mécaniques sont supposés homogènes, la variabilité spatiale étant représentée par une unique réalisation d'un champ aléatoire auto-corrélé de loi log-normale (de moyenne $C_\mu = 1$ et écart type $C_\sigma = 0,067$), avec une longueur d'autocorrélation $l_i = 12$ mm. Il est à noter que la longueur interne non locale l_{c0} et la longueur d'autocorrélation l_i sont égales. Ces deux grandeurs

sont souvent considérées comme liées à la taille des granulats, d'où le choix arbitraire de leur égalité. La Figure 44 présente le champ aléatoire $C(x)$ pour le module élastique.

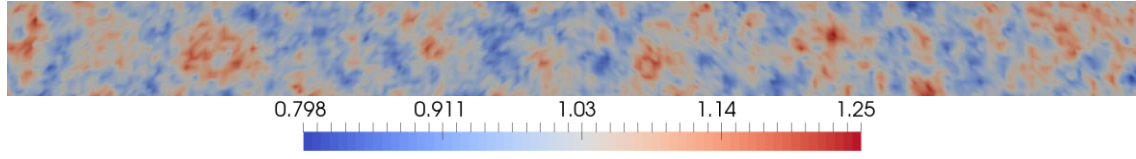


Figure 44 : Champ de module élastique normalisé $C(x)$ dans la poutre en béton

Les lois de probabilité log-normales sont largement utilisées dans le domaine de la mécanique des matériaux, car elles évitent de créer des valeurs négatives (et non physiques) des paramètres matériaux. C'est pourquoi des distributions log-normales seront choisies pour modéliser l'incertitude sur les paramètres. Ainsi, une VA de loi log-normale E' , de moyenne et écarts type donnés dans le Tableau 15 pondère le champ de module élastique. Le module d'Young, hétérogène et aléatoire, s'écrit donc pour un point $x = (x_1, x_2)$ situé dans $[0; H] \times [0; L]$:

$$E(x, X_1) = E'(X_1)C(x) \quad (80)$$

Une seconde VA est appliquée pour modéliser l'incertitude sur les propriétés : la limite élastique κ_0 utilisée dans le modèle, homogène sur la poutre, est une VA $\kappa_0(X_2)$. Elle suit de même une loi log-normale, dont les paramètres sont indiqués dans le Tableau 15.

4.2.2 Paramètres de condensation adaptative et collocation stochastique

Sur cette application, la méthode de condensation adaptative est appliquée à chaque simulation, avec une décomposition en 32 zones. Deux paramètres aléatoires sont pris en compte : le module élastique $E'(X_1)$ et la limite élastique $\kappa_0(X_2)$. Cependant, la limite élastique n'a pas d'impact sur la rigidité élastique de la structure. Le méta-modèle des rigidités réduites utilise donc une décomposition polynômiale d'ordre $(n' - 1) = 1$ (linéaire) sur la seule VA X_1 : les rigidités réduites, ainsi que les déplacements dans les zones condensées seront approximés sur un modèle à $n' = 2$ points de collocation. En tenant compte des spécificités de ce problème, l'approximation des rigidités réduites, forces nodales condensées et champs de déplacement dans les zones condensées peut s'écrire :

$$\hat{K}_i(X) \approx \sum_{p'=1}^{n'} \hat{K}_i^{p'} \Phi_{p'}^{E'}(X_1) \quad (81)$$

$$\hat{f}_i^\tau(X) \approx \sum_{p'=1}^{n'} \hat{f}_i^{\tau, p'}(X) \Phi_{p'}^{E'}(X_1) \quad (82)$$

$$u_{Ci}^\tau(X) \approx \sum_{p'=1}^{n'} u_{Ci}^{\tau, p'}(X) \Phi_{p'}^{E'}(X_1) \quad (83)$$

4.2.3 Résultats

Sur cette application, les résultats de la collocation stochastique standard sont comparés à ceux de la collocation stochastique condensée. La Figure 45 présente des exemples de profils d'endommagement obtenus en fin de chargement pour l'un des points de collocation, avec la collocation stochastique

classique et condensée. Les cartes d'endommagement correspondent bien et les zones activées sont en accord avec les parties endommagées de la poutre.

La Figure 46 présente les méta-modèles générés par les deux approches, donnant une approximation de l'endommagement maximum D_{Max} dans la poutre à la fin du chargement. Les deux approches utilisent une collocation à 4 points sur les deux VAs (donc des polynômes de degré 3 sur deux variables). Chaque méta-modèle nécessite donc 16 simulations déterministes condensées. Les fonctions de réponse obtenues par collocation condensée et standard correspondent bien. Sur ce problème (qui comprend 10122 degrés de liberté) la construction du méta-modèle par collocation standard nécessite 6392 s de temps processeur (sur une station de travail à deux cœurs).

La Figure 48 présente les FDPs obtenues avec le méta-modèle de la collocation condensée par la méthode de Monte-Carlo (avec 10^4 et 10^5 réalisations) et l'approche semi-analytique. Ces FDPs correspondent bien.

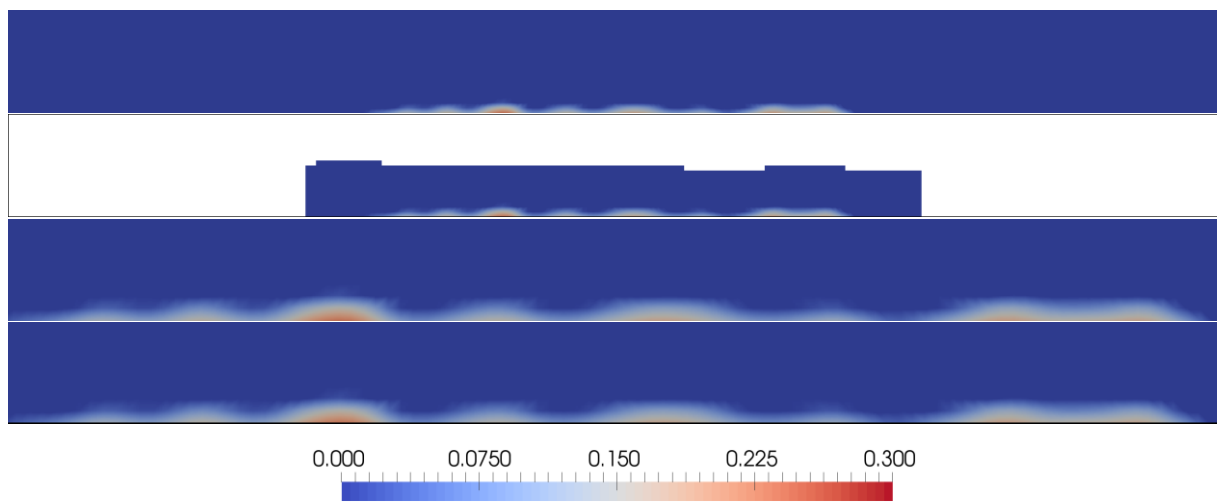


Figure 45 : Profils d'endommagement sur la poutre pour un point de collocation : poutre complète et partie centrale, en collocation classique et collocation condensée.

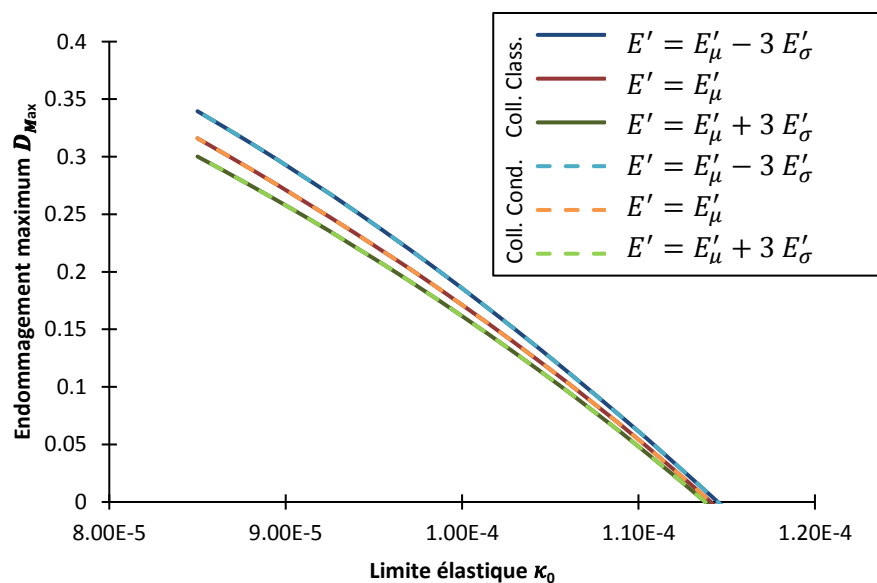


Figure 46 : Méta-modèles de l'endommagement maximum D_{Max} dans la poutre.

La construction du méta-modèle par la méthode de collocation condensée ne nécessite que 2808 s de temps de calcul sur la même machine, tout en produisant des résultats équivalents (Figure 46, Figure 47), réduisant ainsi la charge de calcul globale du calcul EFS. De la même manière que dans l'application précédente, la réduction de la charge de calcul est liée à la dimension du problème et plus particulièrement à celle de sa partie non linéaire. La formulation semi-analytique permet d'obtenir une FDP de la grandeur d'intérêt plus précise et d'éliminer le coût de traitement de données associé à l'approche Monte-Carlo (Figure 48).

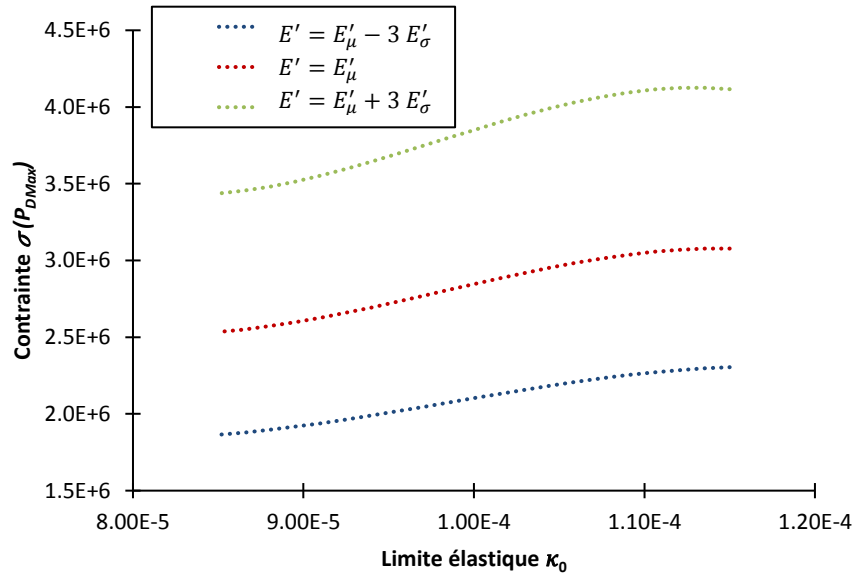


Figure 47 : Méta-modèle de la contrainte équivalente σ au point d'intégration le plus endommagé (Collocation condensée).

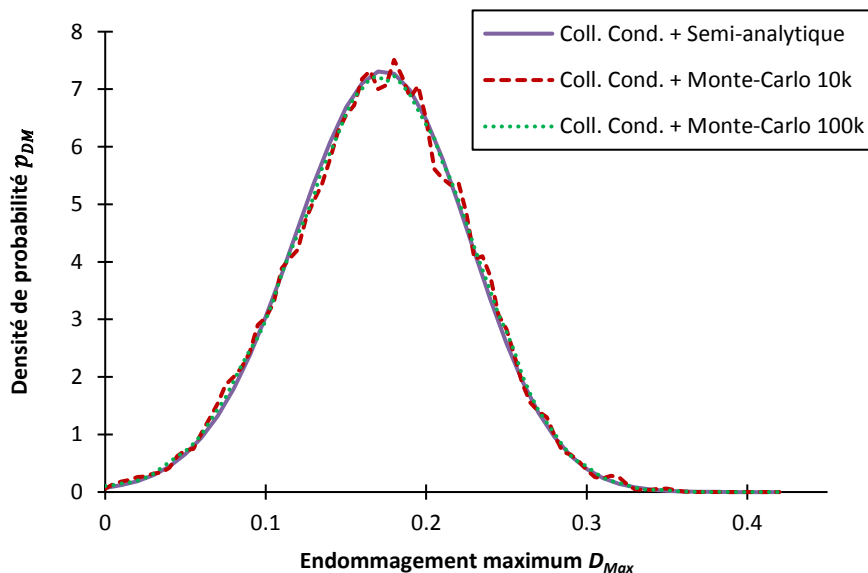


Figure 48 : FDP de la variable d'endommagement D_{Max} obtenues par collocation condensée : semi-analytique vs Monte-Carlo (10^4 et 10^5 réalisations).

5 Résumé

Problématique

La problématique adressée dans ce chapitre est celle de la prise en compte des incertitudes sur les calculs de grandes structures de génie civil. En effet, divers aléas peuvent impacter le comportement d'une structure de grande dimension et leur impact doit être quantifié. Cependant, les méthodes de type EFS permettant de quantifier ces aléas ont un coût de calcul considérable et ne sont pas nécessairement adaptées à l'analyse des grandes structures de génie civil ayant un comportement non linéaire.

Contributions

Une approche de collocation condensée permettant d'étendre la méthode de condensation adaptative présentée dans le chapitre précédent a été développée. Elle vise à rendre accessibles les analyses EFS sur les structures de grande échelle, localement non linéaires, soumises aux incertitudes. L'approche proposée consiste à coupler à deux niveaux la méthode EFS avec la méthode de condensation adaptative présentée dans le chapitre 2 : de cette manière, il est possible de réduire à la fois le coût de chaque simulation déterministe nécessaire dans la méthode EFS, mais aussi le coût de la réduction du système associé à la condensation. Chaque simulation déterministe est ainsi réduite par la méthode de double condensation adaptative à deux niveaux ; les grandeurs nécessaires à cette condensation sont approximées par un second développement polynômial de dimension réduite, sur des paramètres aléatoires sélectionnés. L'approche proposée adopte la forme de la collocation stochastique pour construire un développement polynômial des grandeurs d'intérêt d'un problème de mécanique des structures et produire des résultats statistiques sur ces grandeurs, tels que des courbes de fragilité, moments statistiques ou FDPs. Une approche semi-analytique permet de calculer les FDPs des grandeurs d'intérêt plus précisément et sans le coût de traitement des données associé aux approches de type Monte-Carlo.

Résultats

Cette méthode est appliquée au modèle numérique d'une barre d'acier en tension ayant un défaut localisé, utilisant une loi de comportement non linéaire avec un paramètre aléatoire. Sur ce problème, elle reproduit les résultats d'une méthode EFS de l'état de l'art pour une fraction du coût de calcul et est en accord avec les résultats analytiques. Elle permet aussi de réaliser une étude probabiliste semi-analytique en vue d'obtenir des valeurs précises de grandeurs statistiques telles que la FDP de la déformation plastique.

L'approche proposée est également appliquée au cas d'une poutre en flexion 4 points en béton ordinaire, où elle est utilisée pour construire un méta-modèle à deux variables aléatoires. Le méta-modèle est équivalent à celui obtenu par collocation stochastique, pour une charge de calcul réduite.

Conclusions

La méthode des EFS condensés permet d'étendre le principe de la condensation adaptative, présentée dans le chapitre précédent, au contexte de l'analyse sous incertitudes des grandes structures. Grâce à la condensation adaptative, le coût de chaque calcul déterministe est réduit à celui de ses zones non linéaires. De plus, le couplage complet permet de réduire le coût de la phase initiale de condensation en utilisant une approximation d'ordre plus faible. L'approche semi-analytique développée en complément permet d'améliorer la qualité de la quantification d'incertitudes et de s'affranchir d'un Monte-Carlo sur le méta-modèle.

Enfin, la méthode proposée vise à être applicable non seulement à différents types de problèmes de mécanique non linéaire, mais aussi d'autres méthodes EFS ou types d'approximation, par exemple sur la base de développements en chaos polynômial ou approximation de Taylor.

Publications

Les développements en lien avec ce chapitre ont fait l'objet d'une publication dans la revue à comité de lecture *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* [106]. Une communication a également été présentée lors des JFMS 9 (*Journées Nationales Fiabilité des Matériaux et des Structures*) [107].

Chapitre 5 - Approche 1D-3D pour la modélisation des câbles et armatures dans un volume de béton

1 Introduction

Ce chapitre décrit une nouvelle approche, nommée 1D-3D (renforts 1D par domaine éléments finis 3D), qui vise à répondre à la problématique de la modélisation des renforts avec une représentativité locale sur des structures de grandes dimensions. La méthode proposée est générique et utilisable pour différentes applications en mécanique pour représenter les matériaux renforcés ou comportant des éléments « allongés » (fibres par exemple). Les applications pour notre problématique spécifique, le béton armé et précontraint incluent notamment la modélisation des barres d'aciers dans les zones fortement renforcées (potentiellement difficiles à mailler), les treillis soudés (difficiles à mailler au niveau des angles), la prise en compte des incertitudes géométriques sur la position des barres et câbles, etc.

Dans ce chapitre, on décrira d'abord l'approche proposée. Un cas de validation numérique permettra ensuite d'évaluer la représentativité de la modélisation et son domaine de validité par rapport aux approches 1D et 3D. Enfin, une application sera proposée : la simulation du comportement d'un Volume Structurel Représentatif (VSR) d'enceinte de confinement [108], où les différentes approches seront comparées.

2 Présentation de la modélisation "1D-3D"

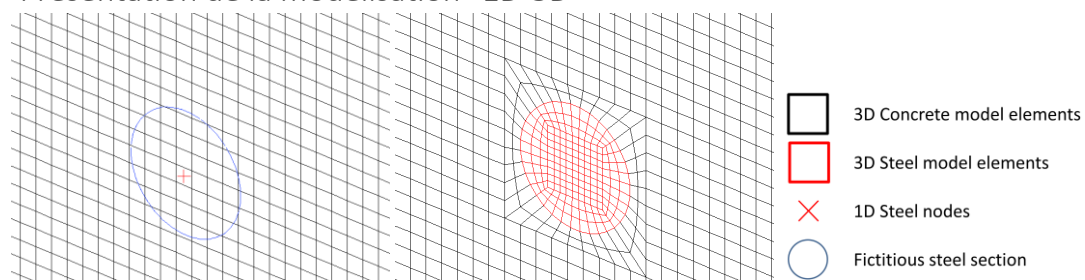


Figure 49 : Barres d'acier dans un volume de béton avec le modèle 1D et 3D [109].

L'approche 1D-3D pour la modélisation des renforts dans le béton permet de représenter les renforts dans un massif de béton représenté en 3D. Elle vise à combiner les avantages des stratégies classiques de modélisation 1D et 3D (Figure 49) :

- facilité d'utilisation pour le maillage et la simulation équivalente à l'approche 1D ;
- qualité de résultats à l'échelle locale équivalente à l'approche 3D ;
- applicabilité directe aux modèles éléments finis existants utilisant des maillages 1D des renforts et des maillages 3D du béton afin d'améliorer la qualité de la solution.

L'approche 1D-3D proposée s'appuie sur une discrétisation existante en 1D des renforts. Elle fonctionne en 4 étapes :

- génération d'un volume équivalent à l'acier 3D à partir de la discrétisation 1D ;
- calcul des forces équivalentes à appliquer au volume équivalent à partir des forces appliquées au modèle 1D ;
- condensation du volume 3D équivalent sur l'interface acier-béton pour limiter le nombre de degrés de liberté (cette étape est optionnelle) ;
- création des conditions d'interface acier-béton.

2.1 Génération du volume équivalent

Le volume équivalent 1D-3D est construit en utilisant comme génératrice le maillage 1D de l'hétérogénéité (éléments barres ou poutres). La section est construite par une méthode itérative maillant des cercles concentriques par des triangles (Figure 50). Le volume équivalent est finalement maillé par des éléments prismatiques, par projection des sections circulaires le long de la génératrice. Le maillage du béton n'est pas modifié (Figure 51). La densité de maillage de l'inclusion utilisée pour la génération des sections est en pratique fixée à la moitié de la dimension des mailles du béton environnant (si la taille de maille du béton environnant est très grossière, la section d'acier est représentée par 4 éléments). Ceci permet une description relativement fine de la géométrie et une répartition homogène des contraintes sans induire de conformité entre les maillages acier et béton. Le long de l'axe de l'inclusion, la dimension du maillage suit celle du modèle 1D.

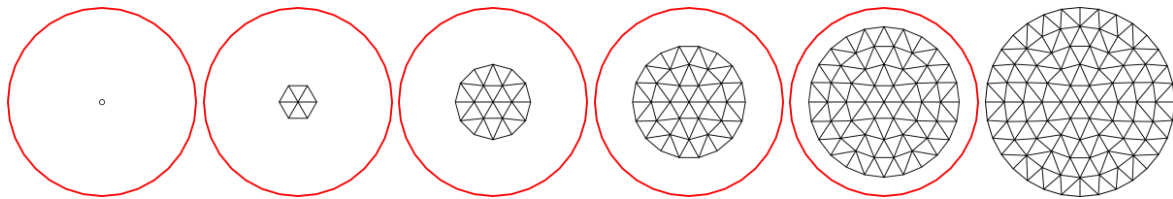


Figure 50: Construction d'une section circulaire de l'hétérogénéité en 1D-3D (5 étapes).

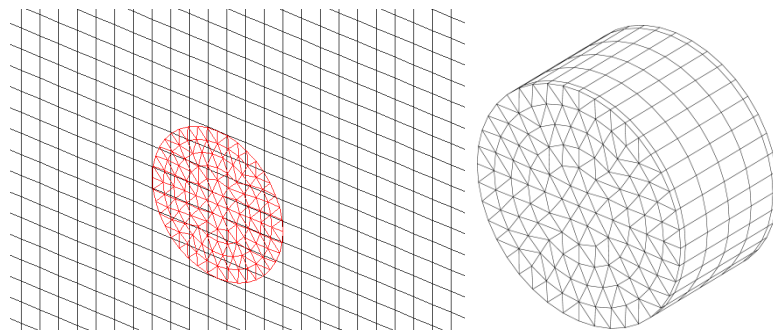


Figure 51 : Maillage de la zone de l'acier et de la barre avec le modèle 1D-3D.

Aux extrémités de l'inclusion, la discrétisation en 1D tient compte de la courbure : la direction du dernier élément d'acier n'est donc pas toujours orthogonale à la surface du volume béton. Afin d'obtenir un bon ajustement de la direction du câble avec les surfaces extérieures du béton, les éléments aux extrémités sont scindés (Figure 52) : on rediscrétise en ajoutant un élément de petite dimension dont la direction est orthogonale à la surface du béton. Ceci permet, en bord de domaine, de garder une interface acier-béton bien définie.

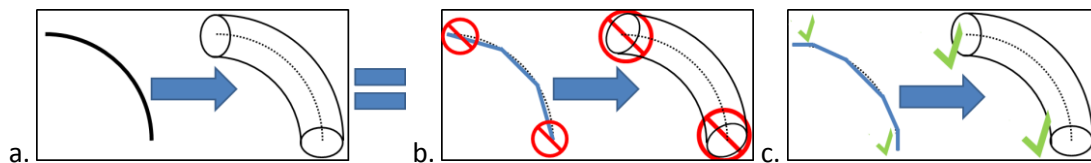


Figure 52 : Génération du câble 3D équivalent avec la modélisation 1D-3D (discrétisations en bleu).
a. Géométrie théorique. b. Discrétisation standard. c. Discrétisation corrigée.

2.2 Calcul des forces équivalentes

Dans certains cas (câbles de précontrainte, chargement en température, ...), un chargement (constant ou variable) peut être appliqué directement sur l'inclusion. Dans ces circonstances, l'approche 1D-3D

nécessite de transposer l'état de contraintes calculé sur le modèle 1D (noté σ_{1D}) sur le modèle 1D-3D correspondant (σ_{1D3D}). On convertit d'abord l'état de contraintes 1D en forces nodales:

$$f_i = S \int_{L_i} \frac{d\sigma_{1D}}{dl} dl \quad (84)$$

où f_i est le vecteur de forces nodales au nœud i , σ_{1D} le champ de contraintes, S la section de l'hétérogénéité et l l'abscisse curviligne le long de l'inclusion, intégrée sur le sous-domaine L_i (qui dépend des fonctions de forme du modèle éléments finis). Ces forces nodales sont ensuite appliquées sur le modèle 1D-3D de l'inclusion, de manière à obtenir le champ de contraintes dans le volume équivalent :

$$f_i = \int_{V_i} \nabla \sigma_{1D3D} dV \quad (85)$$

où f_i est le champ de forces nodales au nœud i , σ_{1D3D} le champ tensoriel de contraintes dans le modèle 1D-3D, $\nabla \sigma_{1D3D}$ sa divergence, V le volume de l'inclusion, V_i le sous-domaine sur lequel on intègre (qui dépend de la géométrie et des fonctions de forme du modèle éléments finis).

Dans le cas des câbles de précontrainte par exemple, on souhaite retransmettre les contraintes appliquées au câble lors de la mise en tension, en tenant éventuellement compte des pertes de précontrainte de diverses origines (recul d'ancrage, frottements, etc.). Des procédures et méthodes existantes permettent de calculer ces pertes et les contraintes associées sur un câble de géométrie 1D. On transpose ensuite ces contraintes 1D au modèle équivalent 1D-3D, en suivant la procédure présentée ci-dessus.

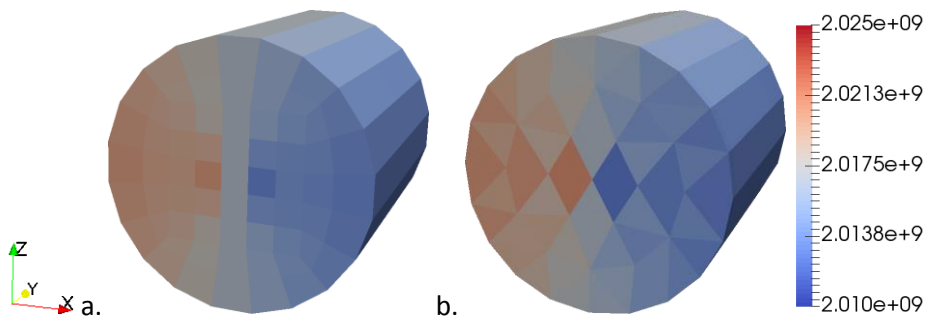


Figure 53 : Contrainte axiale: modélisation 3D (a) et modélisation 1D-3D (b).

La Figure 53 présente le profil des contraintes dans un câble résultant d'une mise en précontrainte donnée. On compare le profil de contraintes entre la modélisation 3D (représentation explicite du câble) et la modélisation 1D-3D. On observe que les profils de contraintes sont similaires : le chargement de précontrainte appliqué au modèle béton en modélisation 1D-3D est donc bien équivalent à celui de la modélisation du câble complet en 3D. La différence entre les deux profils est liée à la forme et à la dimension des éléments, différentes entre les deux cas.

2.3 Condensation du volume équivalent 3D

Comparé au modèle 1D, la génération d'un volume équivalent à l'inclusion utilisée pour la modélisation 1D-3D ajoute un grand nombre de degrés de liberté et d'éléments finis. Ces degrés de liberté supplémentaires permettent d'enrichir la solution à l'échelle locale. Leur nombre peut s'avérer faible comparé au nombre total de degrés de liberté si on considère des domaines ayant peu

d'inclusions. Cependant, le coût de calcul additionnel pourrait s'avérer problématique si on considère des structures de grandes dimensions ayant de nombreux renforts.

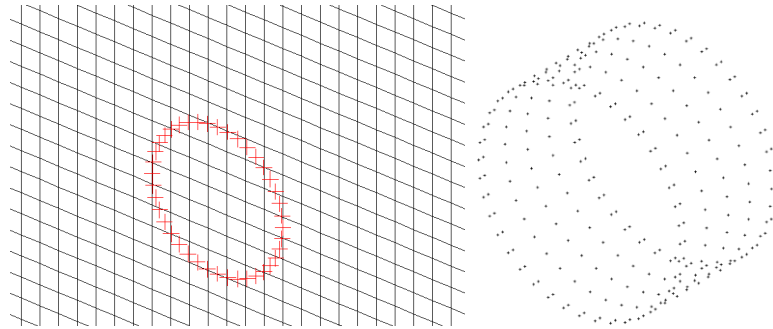


Figure 54 : Nœuds de condensation du volume 1D-3D (vue latérale et vue 3D).

On propose donc une approche pour réduire le nombre de degrés de liberté, sur la base de la méthode de Guyan, similaire à la méthode de condensation décrite dans le Chapitre 3 [97]. On remplacera donc le volume équivalent par un champ de forces et une rigidité réduite, de manière à conserver la qualité de la solution. La condensation est ici appliquée sur l'enveloppe de l'hétérogénéité (Figure 54). Ce faisant, on réduit le volume généré à une surface. A titre d'illustration, pour une barre de diamètre $2R$ et de longueur L , générée avec des éléments finis de longueur l , le nombre de noeuds n_f dans le volume équivalent s'écrit :

$$n_f = \frac{2\pi R^2 L}{\sqrt{3} l^3} \quad (86)$$

Le nombre de degrés de liberté sur l'interface n_c est :

$$n_c = \frac{2\pi RL}{l^2} \quad (87)$$

On a donc :

$$n_f/n_c = \frac{R}{\sqrt{3} l} \quad (88)$$

Par exemple, pour une barre de dimensions $L = 2$ m, $R = 84$ mm et $l = 5$ mm, le ratio n_f/n_c est proche de 10. Néanmoins, le gain sur les degrés de liberté doit également être comparé à la perte liée à la modification de la matrice de rigidité associé à la condensation. En effet, la matrice de rigidité obtenue par la méthode de condensation est plus petite que la matrice de rigidité d'origine associée au volume 1D-3D, mais aussi plus pleine, ce qui peut impacter les performances numériques en fonction du type de solveur utilisé. Afin d'améliorer cet aspect, il serait possible d'approximer la matrice condensée en supprimant les termes proches de zéro ou en utilisant des méthodes d'approximation de rang faible, telles que la SVD (Décomposition en Valeurs Singulières) tronquée [37,110]. La condensation des hétérogénéités peut améliorer ou altérer les performances de calcul selon la situation (et en particulier, selon la géométrie des inclusions). On notera que cette étape est facultative dans l'approche 1D-3D et devrait être appliquée ou non en fonction des configurations. La condensation nécessite en outre que l'acier garde un comportement linéaire élastique, ce qui est typiquement le cas des câbles de précontrainte par exemple. Si ce n'est pas le cas, l'approche devra être utilisée sans condensation, en l'état actuel des développements.

2.4 Interface domaine-inclusion

Plusieurs possibilités ont été étudiées concernant la manière d'assurer le lien entre l'hétérogénéité modélisée en 1D-3D et le domaine 3D :

- accrochage complet des nœuds de l'inclusion 1D-3D au domaine 3D.
- accrochage des nœuds situés sur la surface enveloppe de l'inclusion au domaine 3D.

L'accrochage des nœuds en surface par des relations cinématiques imposées aux déplacements s'est avéré être une solution plus représentative de la physique, compte tenu de la liaison d'interface qu'on souhaite représenter. Cette approche est aussi plus proche des modélisations 3D complètes où les maillages de l'acier et du béton en 3D correspondent aux interfaces entre les deux matériaux.

Les nœuds d'interface de l'inclusion (Ω_b) sont donc reliés au domaine 3D par des relations cinématiques sur les déplacements (Figure 54-55). Le déplacement u_i du nœud i de l'inclusion situé en x_i est tel que :

$$u_i = \sum_j u_j N_j(x_i) \quad (89)$$

où u_j sont les déplacements des sommets j de l'élément fini du domaine 3D dans lequel i est situé et N_j les fonctions de forme des éléments finis du domaine 3D (Figure 55).

On remarquera que cette approche est similaire au lien parfait généralement utilisé pour les inclusions 1D (dans le cas des maillages non conformes). Cependant, pour des applications au béton armé, la modélisation pourrait être améliorée en incluant des modèles de liaison acier-béton plus représentatifs de la physique [81,111,112].

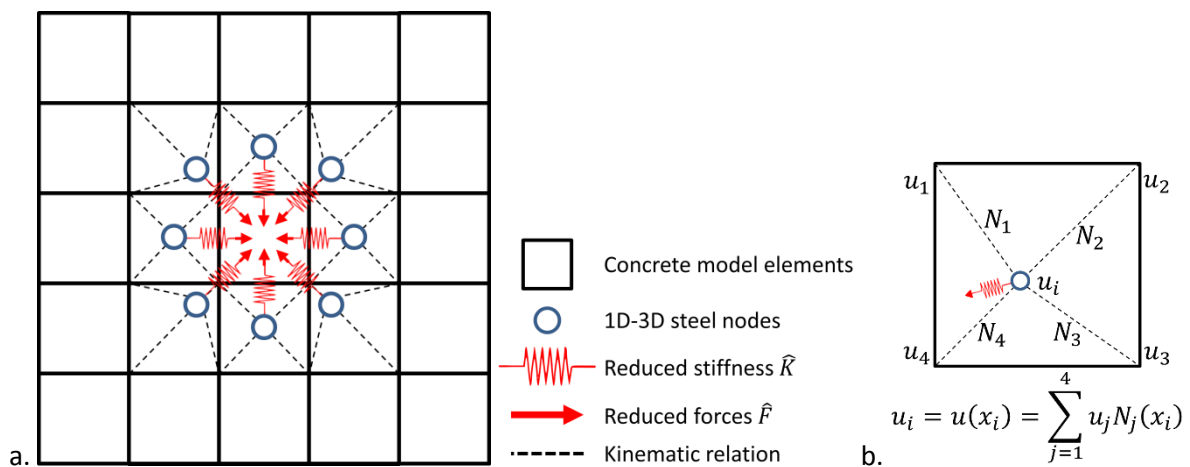


Figure 55: Schéma de l'approche 1D-3D condensée (a) et zoom sur un EF du domaine 3D contenant un nœud de l'inclusion (b) [113].

Comme dans le cas du modèle 1D, on considère que la superposition du domaine et de l'inclusion (et la rigidité additionnelle induite) est négligeable. La méthode a été développée de manière à pouvoir être appliquée de manière automatisée sur des maillages 1D existants. En particulier, elle ne nécessite pas de remaillage. Le seul coût additionnel, comparé à un modèle 1D, est le coût de calcul associé aux degrés de liberté et relations cinématiques supplémentaires. En contrepartie, cette approche vise à obtenir des champs de contraintes locaux plus représentatifs et d'éliminer la dépendance au maillage, comme l'illustre la section 3.

3 Validation: Tronçon précontraint courbe

3.1 Présentation

La validation numérique proposée vise à valider l'approche 1D-3D par rapport à une solution 3D complète de référence. Le cas proposé est un tronçon de béton courbe, traversé par un câble horizontal. Les dimensions sont en accord avec celles de la maquette VerCORS [93,94].

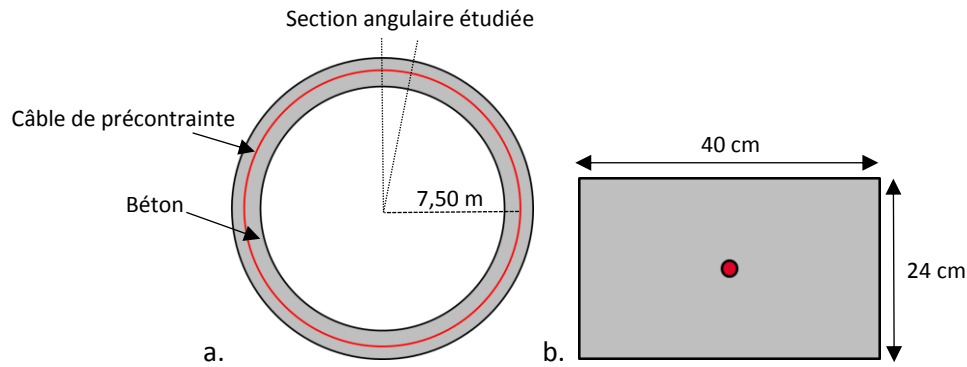


Figure 56 : Géométrie du tronçon précontraint courbe (a: Vue du dessus, b: Vue de la section)

La Figure 56 présente la géométrie. Le rayon de courbure du câbles est de 7,50 m. Sa section est de 5,56 cm² (diamètre $\phi = 26,6$ mm). Le béton est maillé avec des éléments cubiques, avec une loi de comportement élastique ($E = 30$ GPa, $\nu = 0,2$) dans un premier temps. Les conditions aux limites assurent l'invariance par rotation du problème (tous les déplacements normaux aux faces sont bloqués sauf dans la direction radiale). Le seul chargement appliqué est la précontrainte (1,5 GPa), qui entraîne une compression dans le béton (environ 8 MPa). On néglige les pertes de précontrainte.

Lorsque la précontrainte est appliquée, le câble provoque des efforts radiaux et orthoradiaux dus à sa courbure [114]. Ces derniers mettent les éléments situés directement à l'intérieur de sa courbure en compression radiale et ceux situés à l'extérieur en tension radiale.

3.2 Résultats

3.2.1 Echelle globale

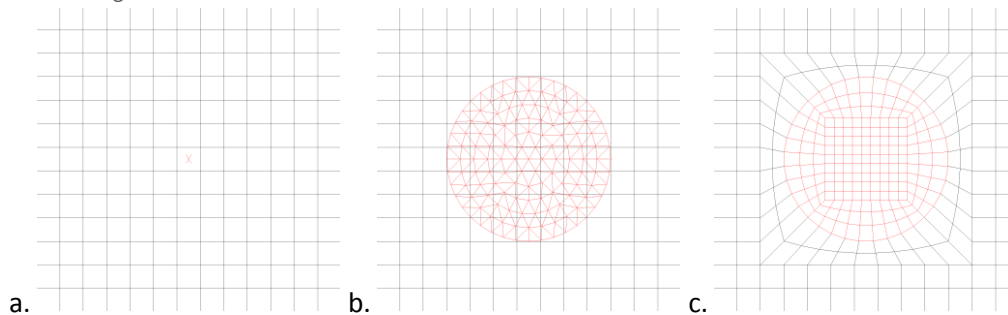


Figure 57 : Maillages de la zone du câble pour le tronçon précontraint courbe (a : Modélisation 1D, b : Modélisation 1D-3D, c : Modélisation 3D)

Afin de positionner l'approche proposée par rapport aux solutions existantes, les résultats sont comparés au modèle 1D ainsi qu'au 3D complet. Dans les trois cas, le maillage du béton est le même sur la partie courante du volume (Figure 57): il ne diffère qu'autour du câble dans le cas du modèle 3D (conforme au niveau de l'interface câble-béton). La Figure 58 présente la distribution de déformation à la fin de l'application de la précontrainte en utilisant la déformation équivalente qui s'écrit [115]:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (90)$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont les valeurs principales des contraintes et $\langle \varepsilon_1 \rangle_+, \langle \varepsilon_2 \rangle_+, \langle \varepsilon_3 \rangle_+$ leurs valeurs positives.

	Modèle 1D	Modèle 1D-3D	Modèle 3D
Energie élastique dans le béton (J)	76,08	76,56	76,65
Déplacement radial (mm)	-2,164	-2,171	-2,179

Tableau 16 : Effet global de la précontrainte

L'effet global de compression dû à la précontrainte est bien reproduit : les valeurs d'énergie élastique stockée dans le béton et de déplacement radial sont similaires pour les trois modélisations (Tableau 16). Le profil global de déformation équivalente est aussi similaire pour les trois modèles (Figure 58). On observe que la déformation équivalente est la plus élevée dans la zone directement à l'extérieur de la courbure du câble et la plus faible dans la zone à l'intérieur de cette courbure. Ce phénomène est dû à l'effet de courbure du câble [114], qui est bien capturé par les différents modèles.

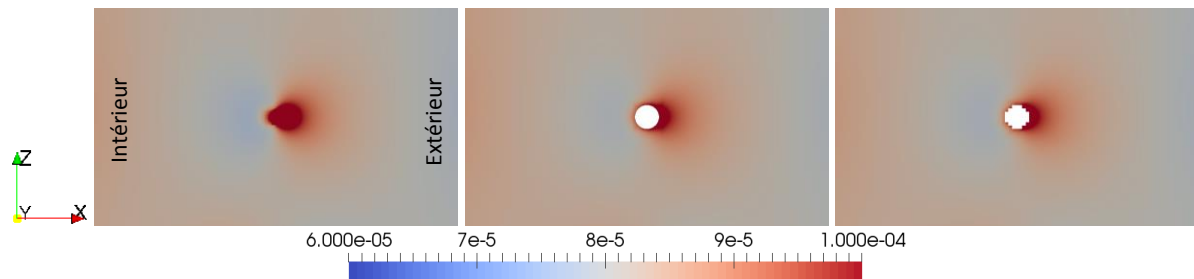


Figure 58: Distribution de la déformation équivalente dans le béton: modélisations 1D, 3D et 1D-3D

3.2.2 Echelle locale - Concentration de contraintes

Les trois approches capturent correctement l'effet global de compression et de courbure dû au câble. Cependant, les résultats à l'échelle locale peuvent varier significativement selon la taille de maille dans le cas du modèle 1D. La Figure 60 présente les profils de contrainte radiale dans le béton après mise en précontrainte, pour deux différents maillages, avec le modèle 1D. A l'échelle globale, les distributions de contraintes sont similaires entre les deux maillages. Cependant, les éléments finis situés directement à l'intérieur et à l'extérieur de la courbure du câble présentent respectivement des valeurs très faibles et très élevées : les contraintes sont concentrées sur les éléments adjacents au câble 1D. Localement, ceci n'est pas représentatif de la physique : la singularité géométrique (et mécanique) introduite provoque une localisation systématique des contraintes sur un seul élément fini, sans tenir compte de la section du câble [70].

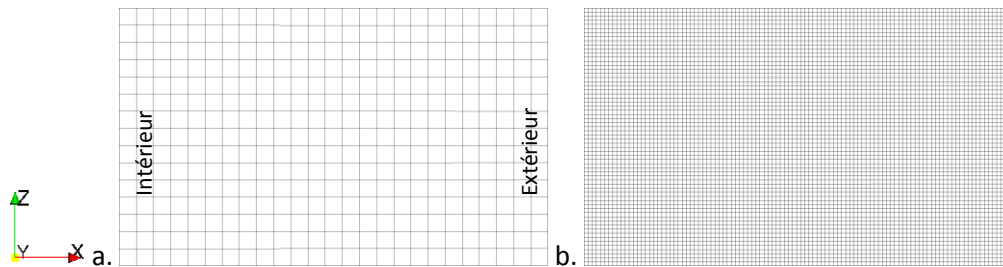


Figure 59 : Maillages pour le volume de béton en éléments cubiques avec la modélisation 1D du câble (a : 16 mm de côté, b : 3,8 mm de côté)

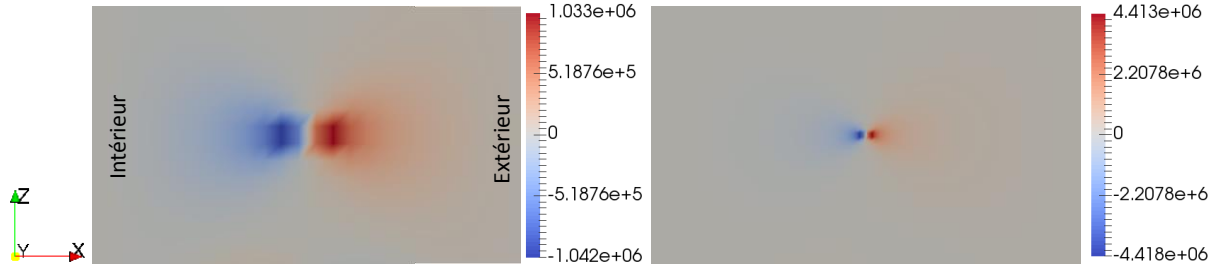


Figure 60 : Contraintes radiales dans le volume de béton avec un modèle de câble 1D: la contrainte atteint $1,03 \times 10^6$ Pa pour un maillage de 16 mm et $4,41 \times 10^6$ Pa pour un maillage de 3,8 mm.

Cet effet de localisation, mis en évidence qualitativement, peut aussi être investigué théoriquement. Afin de simplifier l'étude théorique, nous nous plaçons dans le cas d'un maillage conforme avec une inclusion 1D. Dans ce cas, les forces nodales dues à l'hétérogénéité 1D s'appliquent sur un seul nœud sans tenir compte de la taille d'élément. Les forces nodales appliquées par l'inclusion au béton sont constantes et ne tiennent pas compte de la taille de maille.

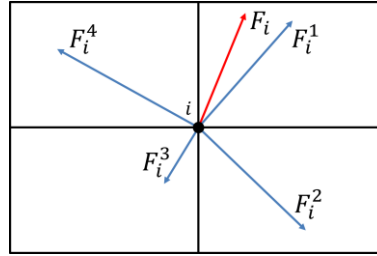


Figure 61: Contributions des éléments à la force nodale.

La force nodale appliquée sur un nœud de la matrice i est la somme des contributions des éléments finis adjacents (Figure 61, pour $1 \leq e \leq 4$) :

$$f_i = \sum_e f_i^e \quad (91)$$

où f_i est la force nodale au nœud i et f_i^e la contribution de l'élément fini e à f_i . La contribution de chaque élément fini est une fonction de ses contraintes :

$$F_i^e = \int_{\Omega_e} (B_i^e)^t \sigma_e d\Omega \quad (92)$$

où B_i^e est la matrice dérivée de fonction de forme associée au nœud i dans l'élément fini e et σ_e la valeur de contrainte. En pratique, l'intégrale est approximée par exemple par quadrature de Gauss :

$$f_i^e = \sum_{g=1}^{N_G(e)} \omega^g B_i^g \sigma^g \quad (93)$$

où ω^g sont les points d'intégration, B_i^g et σ^g les valeurs de B_i et σ aux N_G points de Gauss de l'élément fini e . Lorsqu'on raffine le maillage (dimension typique de l'élément égale à l), les fonctions d'interpolation sont modifiées et suivent une évolution telle que $B_i^g \sim l^{-1}$. Le terme intégral varie

aussi en fonction de la taille d'élément fini. Les poids de quadrature sont donc aussi dépendants de l de sorte que :

$$\omega^g \simeq \omega_0^g \cdot \left(\frac{l}{l_0}\right)^d \quad (94)$$

où d est la dimension de l'espace [116], ω_0^g et l_0 des valeurs de référence pour ω^g et l . Si la contribution de l'élément e à la force nodale f_i reste constante (ce qui est le cas dans notre problème), on déduit :

$$\sigma_e \simeq \sigma_0 \cdot \left(\frac{l_0}{l}\right)^{(d-1)} \quad (95)$$

où σ_0 est la valeur de référence pour σ (correspondant au maillage de dimension l_0). Lorsqu'on raffine le maillage, les valeurs de contraintes dans les éléments adjacents aux nœuds de l'hétérogénéité dépendent donc directement de la taille de maille.

La même analyse peut être menée dans le cas d'un maillage non conforme, où l'hétérogénéité appartient à un unique élément du volume. Dans le cas non conforme avec des relations cinématiques, les forces nodales appliquées au renfort sont transférées à plusieurs nœuds du maillage béton. Les relations de dépendances (équations 94-95) sont identiques, mais les valeurs de référence sont différentes. Dans le cas présenté en Figure 60 par exemple, la contrainte radiale au niveau de la singularité est approximativement 4,3 fois plus élevée pour un maillage de taille $l = 3,8$ mm que pour celui de taille $l_0 = 16$ mm (problème de dimension $d = 2$). On retrouve bien le rapport $(l_0/l)^{d-1}$ de l'équation (95).

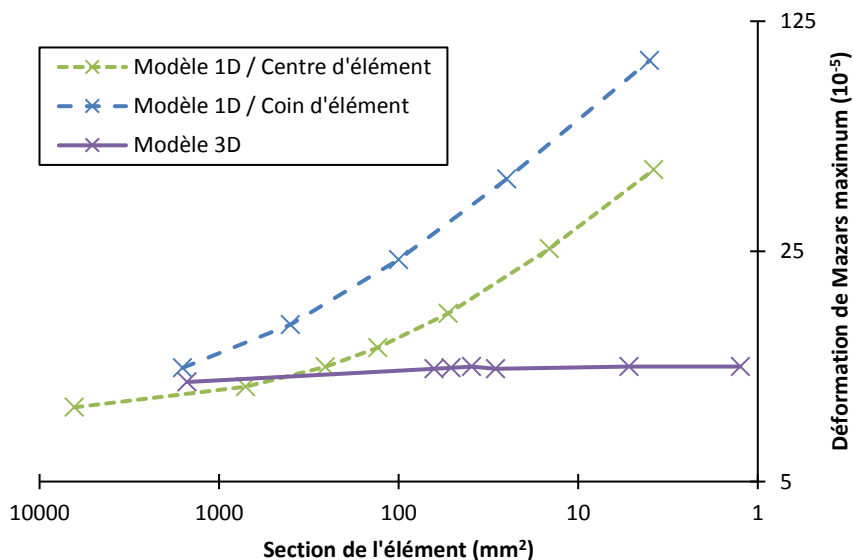


Figure 62 : Maximum de déformation équivalente dans le béton en fonction de la section des éléments de béton (calcul élastique).

A titre de confirmation, la Figure 62 présente l'évolution du maximum de déformation équivalente selon la taille des éléments du maillage béton. On observe que le résultat local en phase élastique obtenu par le modèle 1D est dépendant de la taille de maille : la déformation se localise de manière

pathologique. La croissance exponentielle de la déformation avec la taille de maille ne permet pas d'obtenir des résultats de qualité à l'échelle locale autour de l'hétérogénéité. La Figure 62 montre aussi l'influence de la position de l'hétérogénéité dans l'élément. Dans le premier cas, les nœuds d'acier coïncident avec les nœuds de béton. Dans le second cas, les nœuds de l'hétérogénéité sont positionnés au centre de la section des éléments de béton. Dans le cas où l'hétérogénéité est au centre de l'élément, la localisation des déformations est moins marquée car les contraintes sont réparties sur plusieurs éléments. Dans le cas coïncident, la concentration de contraintes est plus forte. Dans le cas du modèle 3D complet, aucune concentration de contraintes n'est observée. Les résultats sont donc stables en maillage à la convergence éléments finis près (Figure 62).

La Figure 63 présente les mêmes résultats pour les modèles 1D, 1D-3D et 3D complet. Ceci donne une indication du domaine de validité de chaque approche par rapport au calcul des champs de déplacement et déformation locaux. Dans le cas étudié, l'inclusion a un diamètre de 26,6 mm. On observe que les différents modèles donnent des résultats similaires pour les maillages les plus grossiers, c'est-à-dire pour une section d'élément plus grande que celle de l'hétérogénéité.

Pour les maillages les plus fins, le calcul utilisant l'approche 1D ne converge pas en termes de déformation équivalente, là où les approches 1D-3D et 3D donnent des valeurs convergentes et similaires. Par une méthode de régression et en prenant comme valeur de référence la déformation approximée pour un maillage 1D-3D de 1 mm, on peut estimer la taille de maille à partir de laquelle l'erreur est en dessous d'un seuil donné. Par exemple, on obtient une erreur inférieure à 10 % pour les maillages plus fins que 30 mm. On peut donc en conclure que l'approche 1D-3D donne des résultats précis lorsque le maillage est de dimension équivalente à la singularité.

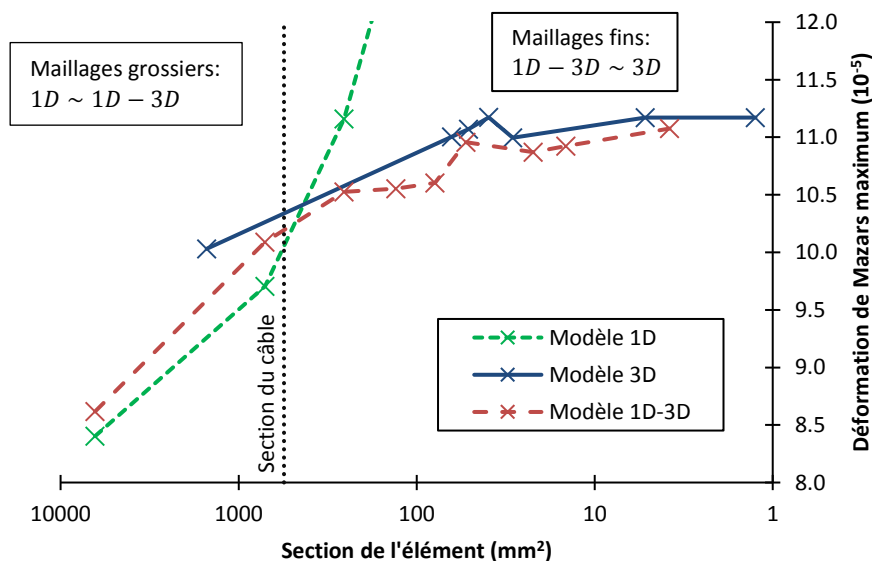


Figure 63 : Maximum de déformation équivalente en fonction de la section des éléments de béton.

Pour les maillages les plus grossiers, l'approche 1D-3D donne des résultats peu significatifs à l'échelle locale, ce qui est attendu, mais représentatifs du comportement global de la structure (Tableau 16) et équivalents à ceux de l'approche 1D. L'approche 3D complète, qui nécessite une discrétisation du câble suffisante, ne peut être utilisée avec les maillages les plus grossiers (section très supérieure à celle de l'inclusion).

Ainsi l'approche 1D-3D permet d'élargir le domaine d'applicabilité à la fois par rapport au 3D (qui nécessite un maillage fin) et par rapport au 1D (qui ne donne de résultats « satisfaisants » que pour

des maillages grossiers). En effet elle est utilisable et donne des résultats satisfaisants pour tous les types de maillages : elle permet d'obtenir les grandeurs globales avec les maillages les plus grossiers et les grandeurs globales et locales lorsque le maillage est plus fin.

3.2.3 Conséquences sur le comportement non linéaire

Afin d'évaluer l'applicabilité de l'approche 1D-3D aux calculs non linéaires, on modélise dans cette section le comportement du béton par une loi de comportement non linéaire : le modèle d'endommagement isotrope de Mazars [86,115]. Afin d'endommager le béton localement lors de sa mise en précontrainte, la valeur de précontrainte est augmentée à 2,0 GPa. Le modèle est utilisé avec la méthode non locale basée sur les contraintes afin d'éviter une dépendance de l'endommagement au maillage [89]. Dans le cas de la modélisation 1D-3D, aucun traitement particulier n'est appliqué au béton situé à l'intérieur du câble concernant le domaine non local.

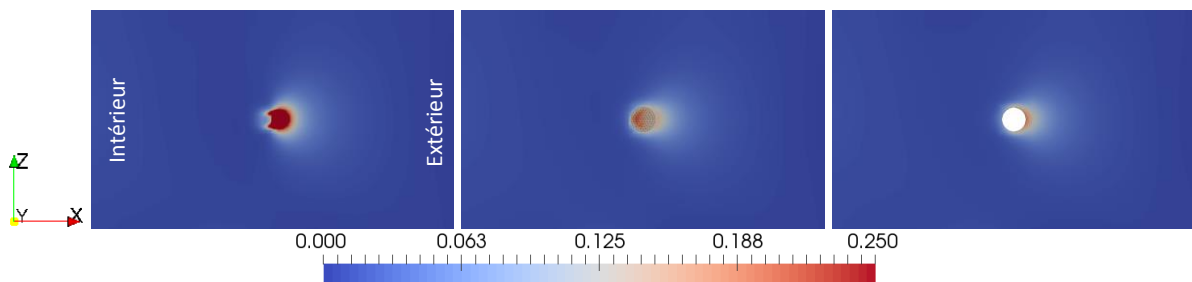


Figure 64 : Carte d'endommagement en fin de chargement (maillage 5 mm): modélisation 1D ($D_{max} = 0,91$), modélisation 1D-3D ($D_{max} = 0,24$) et modélisation 3D ($D_{max} = 0,20$).

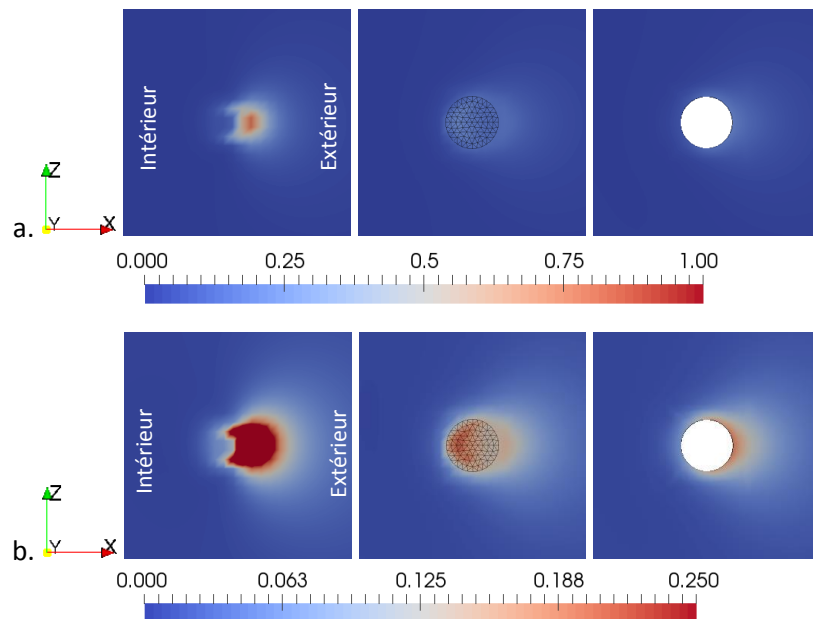


Figure 65 : Zoom autour de la zone du câble: modélisations 1D, 1D-3D et 3D (a : Echelle complète de l'endommagement, b : Echelle restreinte)

La Figure 64 présente les distributions d'endommagement obtenues à la fin du chargement de précontrainte avec les trois modélisations. Avec la modélisation 1D, les valeurs d'endommagement atteignent 0,9 alors que pour les modélisations 3D et 1D-3D, la variable interne reste en-dessous de 0,25. On observe que les distributions sont similaires entre le 3D et 1D-3D. Les isovaleurs, en forme d'ellipses concentriques, sont bien reproduites pour les valeurs d'endommagement faibles. La Figure 65 présente une vue zoomée sur la zone du câble des profils d'endommagement. Là encore, les distributions d'endommagement sont similaires, y compris à l'échelle locale. Un effet de seuil semble

apparaître avec la modélisation 1D-3D dans les éléments incluant des degrés de liberté d’acier. Ceci pourrait être dû à la discrétisation géométrique du câble et à la superposition des deux matériaux à ce niveau (qui n’est pas présente dans l’approche 3D conforme). La zone dans laquelle acier et béton sont superposés est aussi endommagée ; cependant cet endommagement ne se propage pas à l’extérieur du câble en raison de sa raideur très élevée.

Ces résultats illustrent la capacité de la méthode à reproduire les résultats d’une représentation 3D complète de référence, en régime élastique comme non linéaire, sans nécessiter de maillage conforme.

3.2.4 Perturbation aléatoire de la géométrie

Comme dit précédemment, une des difficultés spécifiques de la modélisation 3D complète est de représenter et prendre en compte les incertitudes, notamment géométriques, telles que la position du câble de précontrainte dans le béton. Dans ce cas, le maillage doit être recréé, ce qui s’avère vite très coûteux en temps de travail sur des structures complexes (la coïncidence des nœuds au niveau de l’interface nécessitant de reconstruire totalement le maillage). La modélisation 1D-3D conserve la flexibilité de l’approche 1D, car elle ne nécessite pas de remailler le massif béton (maillage du câble indépendant du béton). Pour mettre en évidence cette flexibilité, une perturbation dans la géométrie du câble est considérée sur le cas-test du tronçon précontraint courbe.

Pour cela, nous faisons le choix de perturber la position du câble dans le massif béton (forme identique). La géométrie du câble est ainsi perturbée en ajoutant aux coordonnées de son point de départ et de son point d’arrivée une valeur fixée par une variable aléatoire. On écrit ainsi :

$$\begin{cases} X_a(\omega) = X_d(\omega) = \tilde{X} + \sigma_X X_p(\omega) \\ Z_a(\omega) = Z_d(\omega) = \tilde{Z} + \sigma_Z Z_p(\omega) \end{cases} \quad (96)$$

où X_d, Z_d sont les coordonnées du point de départ du câble (dans le plan de la face avant), X_a, Z_a celles du point d’arrivée (dans le plan de la face arrière) et X_p, Z_p sont des variables aléatoires indépendantes de loi gaussienne centrée normée, introduisant une incertitude géométrique sur la position du câble. On fixe les constantes $\tilde{X} = 20$ cm, $\tilde{Z} = 12$ cm et $\sigma_X = \sigma_Z = 2$ cm. Le tracé du câble reste un arc de cercle ayant un point fixe pour centre et passant par les deux points aléatoires.

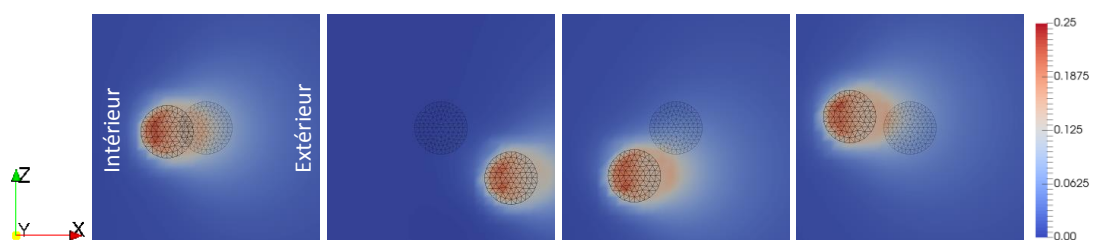


Figure 66 : Profils d’endommagement pour quatre simulations avec position aléatoire du câble (modélisation 1D-3D) dans le massif béton (position nominale du câble en transparence).

La Figure 66 présente quatre résultats de calculs issus de quatre réalisations de géométrie perturbées modélisées avec l’approche 1D-3D. On observe que dans chaque cas, le profil d’endommagement est relativement similaire et correspond au résultat attendu. Les valeurs d’endommagement sont légèrement plus élevées sur la quatrième réalisation: ceci est dû à un câble de rayon de courbure plus faible, qui impose une contrainte radiale plus forte. De même, les valeurs d’endommagement sont plus faibles sur la deuxième réalisation, où le câble est plus situé vers l’extérieur du tronçon. L’incertitude sur la géométrie est donc bien prise en compte dans le modèle 1D-3D, sans nécessiter de modifier le maillage du béton. L’influence de cette variabilité sur les résultats est quantifiable.

La modélisation 1D-3D condensée apporte bien la flexibilité attendue en termes de géométrie et permet de représenter les phénomènes locaux à l'œuvre aux abords du câble y compris dans un contexte de positionnement incertain, sans impliquer de surcoût en termes de maillage.

3.2.5 Non local aux abords de l'hétérogénéité 1D-3D

Les modèles non locaux généralement appliqués lorsqu'on utilise une loi d'endommagement pour représenter le béton [88,115,117] sont cependant susceptibles d'avoir une moindre représentativité en bord de domaine [85]. Certaines méthodes, par exemple la méthode non locale intégrale basée sur les contraintes [89], permettent de traiter correctement les bords libres du domaine.

Avec la modélisation 1D-3D, il y a superposition du câble ou de l'inclusion géométrique au sens large et du béton. La question de la définition du domaine utilisé pour le calcul des grandeurs non locales dans le béton se pose donc : plus spécifiquement l'influence du béton géométriquement inclus dans le câble sur l'endommagement aux abords du câble mérite d'être étudiée. En particulier, avec une modélisation 3D complète, un bord de domaine est créé au niveau de l'interface acier-béton, qui est absent pour la modélisation 1D-3D puisque les deux matériaux sont superposés. De plus, le câble retransmet des efforts au béton, contrairement à un bord de domaine libre. Exclure les éléments béton situés dans le câble du domaine non local semblerait plus proche de cette configuration.

Afin d'apporter quelques éléments de réponse, la Figure 67 présente les profils d'endommagement aux abords du câble obtenus après un calcul de mise en précontrainte avec l'approche 1D-3D. Dans les quatre cas, le modèle utilisé est le modèle d'endommagement de Mazars auquel on applique différents traitements non locaux [88,89].

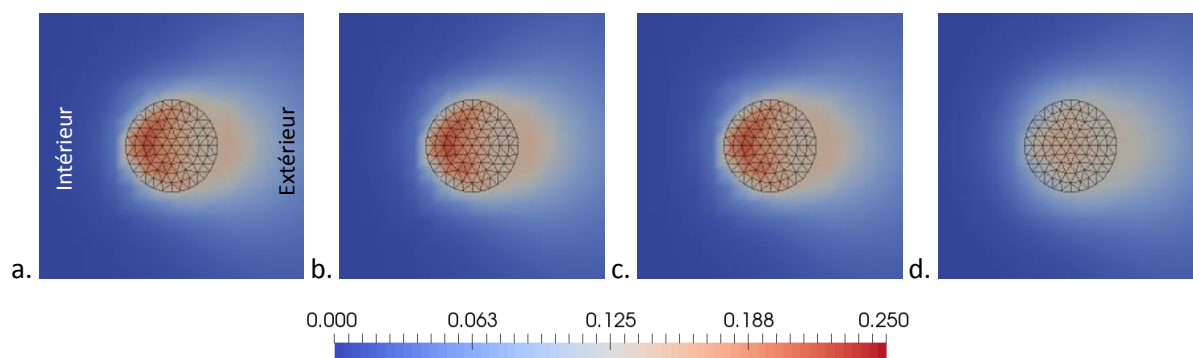


Figure 67 : Endommagement dans le béton aux abords du câble (a,b : Méthode non locale stress-based ; c,d : Non local intégral ; a,c : Béton fictif exclu du domaine non local ; b,d : Béton fictif inclus dans le domaine non local)

On observe qu'en non local intégral Gaussien (Figure 67 c et d), le choix d'inclure ou exclure le béton situé à l'intérieur du câble a une influence sur le profil d'endommagement : dans le cas où le béton fictif est inclus au domaine de régularisation, les valeurs d'endommagement sont plus faibles. Ce résultat semble intuitif. En revanche, dans le cas de la méthode non locale basée sur les contraintes (Figure 67, a et b), le béton situé à l'intérieur du câble semble avoir peu d'influence sur le profil d'endommagement. Ceci peut s'expliquer par les contraintes très élevées dans l'axe du câble qui limitent la régularisation dans le plan orthogonal au câble. Dans ce cas, ce résultat pourrait être contredit dans le cas de renforts passifs, exerçant des contraintes moins élevées. Cette première analyse mériterait d'être complétée par une étude de plus grande envergure sur la modélisation non locale aux abords des inclusions, ainsi que par une étude plus globale sur l'influence de la superposition acier-béton. Néanmoins, notons que ces questions ne se posent que pour des maillages relativement fins par rapport à la section du renfort (c'est-à-dire si le diamètre du renfort est supérieur à quelques longueurs d'éléments).

4 Application: Modèle numérique d'un Volume Structurel Représentatif

4.1 Présentation

Dans cette section, une application est proposée sur une structure sur laquelle des études antérieures ont été réalisées. Elle consiste en un volume structurel représentatif (VSR) d'une enceinte de confinement en béton précontraint, sur laquelle une mise en pression est réalisée [94,108] (Figure 68). Cette structure inclut un volume de béton, des renforts passifs en acier, deux câbles précontraints circonférentiels et un câble vertical non précontraint. Des études numériques précédentes ont permis d'observer sur cette structure un effet d'inclusion autour du câble vertical. Cet effet n'est pas reproduit par les modélisations 1D, mais peut être reproduit par un modèle 3D complet [66,71]. Le but est donc d'évaluer la capacité de la modélisation 1D-3D à reproduire les effets 3D. La Figure 69 présente la géométrie de la structure.

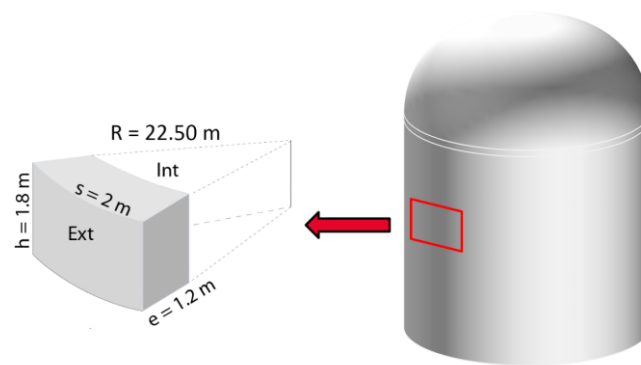


Figure 68 : Schéma de principe du VSR pour un bâtiment de confinement

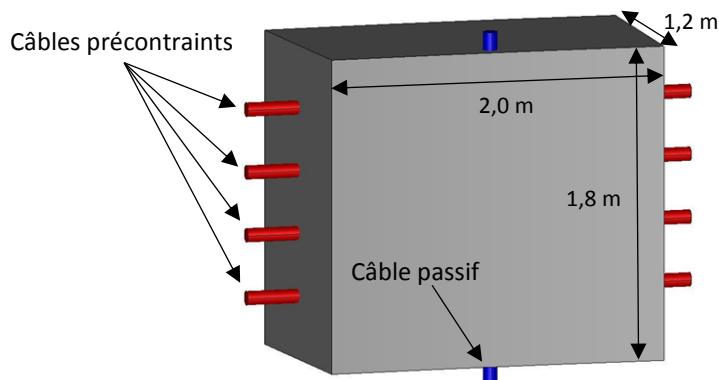


Figure 69 : Géométrie du Volume Structurel Représentatif

On ne modélise qu'un quart de la structure, en utilisant des conditions de symétrie. La Figure 70 présente les conditions aux limites appliquées au VSR au cours de la simulation : les déplacements normaux sont bloqués sur trois des faces du volume. Une condition de déplacement vertical uniforme est appliquée sur la face haute. Le maillage 3D est présenté en Figure 71 et est issu de l'étude numérique [66]. Il est constitué d'éléments cubiques (type « CUB8 »), d'environ 4 cm de côté loin des câbles, mais inférieurs à 2 cm à proximité des câbles (Figure 71). Ce type de maillage, relativement complexe, a nécessité un travail d'ingénierie considérable (plusieurs heures), malgré la petite dimension de la structure comparé aux structures industrielles complètes.

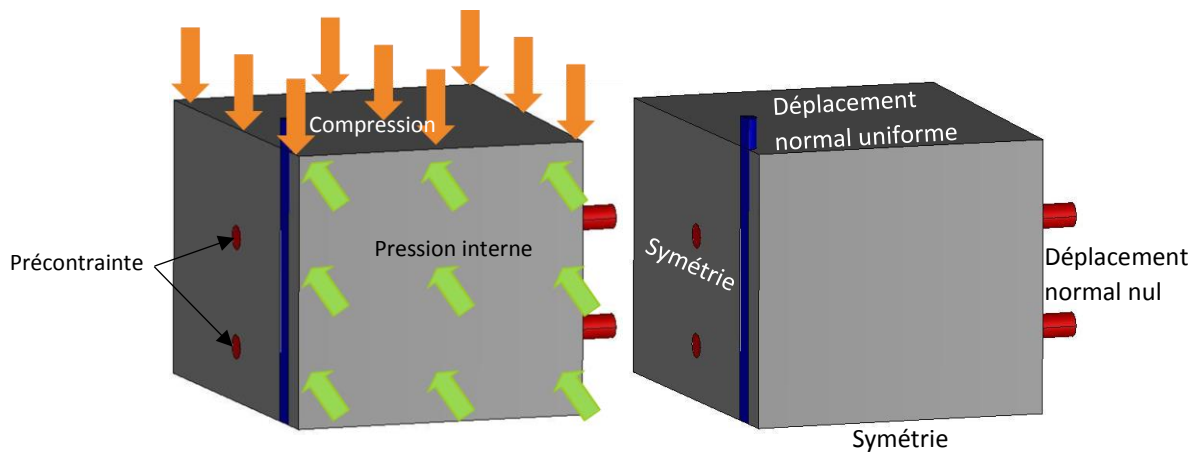


Figure 70 : Conditions aux limites appliquées au VSR (chargements, conditions de déplacements)

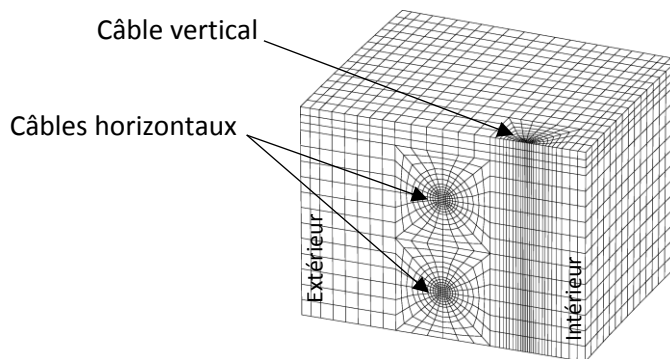


Figure 71 : Maillage 3D complet avec câbles. Les câbles ont un diamètre $D = 84$ mm.

Les maillages utilisés pour les représentations 1D et 3D complète ne diffèrent que par la répartition des matériaux : les câbles, explicitement maillés, sont pourvus d'un modèle d'acier dans le cas 3D et d'un modèle béton dans le cas 1D [66]. La Figure 72 présente la répartition du maillage entre béton et acier dans les deux configurations.

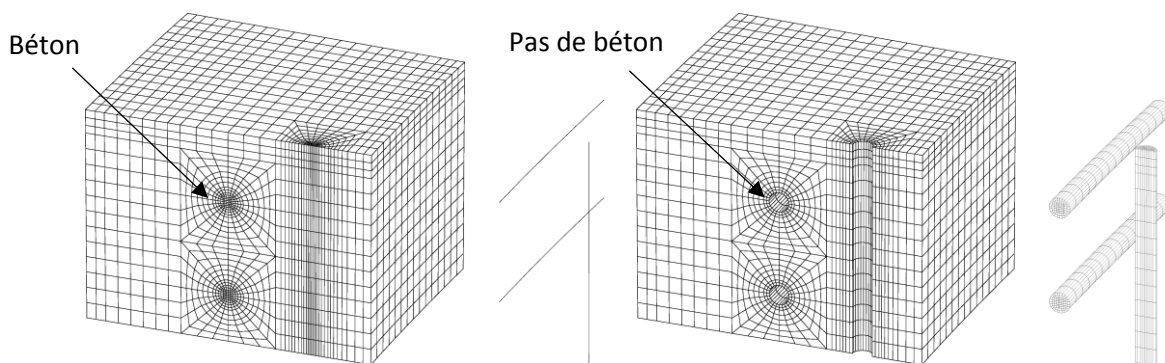


Figure 72: Maillages conformes pour le béton et l'acier (modèles 1D et 3D).

Le béton est modélisé par le modèle d'endommagement de Mazars [115], avec le jeu de paramètres issu de [66], rappelé dans le Tableau 17 (soit une résistance à la compression $f_c = 37,6$ MPa et une résistance à la tension $f_t = 3,57$ MPa). On utilise la méthode non locale basée sur les contraintes [89]. La longueur non locale choisie est $l_{c0} = 4$ cm, en accord avec les résultats précédents concernant la dépendance à cette grandeur [66]. Dans tous les modèles différents utilisés pour cette structure, les nappes de renforts passifs sont modélisées par des éléments coques équivalents. Elles utilisent une loi

de comportement élastique linéaire, avec des propriétés matérielles orthotropes issues de [66] rappelées dans le Tableau 18. Les câbles, modélisés selon différentes approches, utilisent une loi de comportement élastique linéaire, dont les paramètres sont issus de [66] et rappelés dans le Tableau 19.

La précontrainte horizontale est une force de tension de 6480 kN appliquée dans chaque câble horizontal (soit une contrainte dans les câbles de 1,17 GPa). Aucune perte de précontrainte n'est prise en compte. La précontrainte engendre une contrainte de compression orthoradiale dans le béton de l'ordre de 12 MPa. La compression verticale est une pression uniforme de 1 MPa appliquée à la surface supérieure du VSR. La précontrainte est appliquée en 10 pas, de même que la force de compression verticale. On applique ensuite la pression interne, avec un pilotage en déplacement radial. Sa valeur est normalisée à 0,43 MPa.

E	ν	ε_0	A_T	B_T	A_C	B_C	ρ
34 GPa	0,26	$1,05 \times 10^{-4}$	0,8	10000	1,5	1390	2350 kg.m^{-3}

Tableau 17 : Paramètres du modèle de Mazars pour le béton.

E_z	E_θ	$\nu_{z,\theta}$	$G_{z\theta}$	G_{zr}	$G_{\theta r}$	ρ	e
200 GPa	164 GPa	0,3	77 GPa	77 GPa	77 GPa	7850 kg.m^{-3}	$1,92 \times 10^{-3} \text{ m}$

Tableau 18 : Paramètres matériaux pour les aciers passifs.

E	ν	ρ	S
190 GPa	0,3	7850 kg.m^{-3}	$5,55 \times 10^{-3} \text{ m}^2$

Tableau 19 : Paramètres matériaux pour les câbles.

4.2 Résultats

4.2.1 Echelle globale

Sur cette application, on souhaite comparer les modèles 1D, 1D-3D et 3D complet du câble sur les résultats globaux et locaux. Les évolutions pression interne – déplacement radial pour les trois modélisations sont présentées en Figure 73.

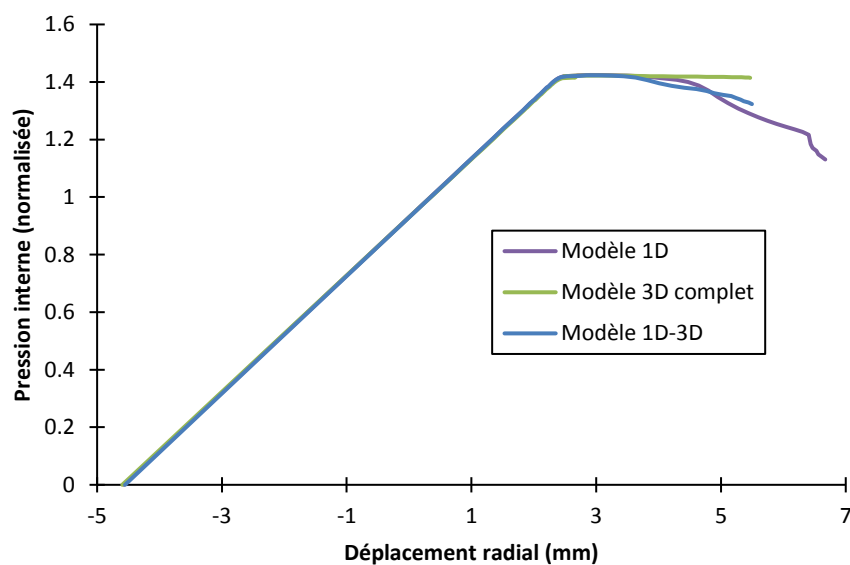


Figure 73 : Evolution pression-déplacement radial pour différents modèles de câbles.

La précontrainte provoque un déplacement initial vers l'intérieur. Après la phase élastique du comportement, on observe une évolution non linéaire avec une baisse de pression finale, pour un déplacement radial croissant. Les trois approches donnent des résultats similaires : le choix du modèle d'acier (à la fois pour les câbles actifs et passifs) a donc peu d'impact sur le comportement global, à l'échelle de l'enceinte en particulier, tant que le régime de rupture n'est pas atteint.

Néanmoins, il est important de noter qu'aux niveaux de chargement les plus élevés, la convergence de l'algorithme de résolution itérative devient difficile. La solution n'est potentiellement pas unique ou très sensible à de petites variations de modélisation, ce qui pourrait expliquer les différences entre les modélisations proposées. De plus, compte tenu de la rapidité de la propagation de la fissuration sur ce problème, il est possible que l'hypothèse quasi-statique soit à remettre en question en fin de chargement.

4.2.2 Echelle locale

La Figure 74 présente les distributions d'endommagement pour un déplacement radial de 3 mm, puis de 4,5 mm avec les différentes modélisations. On observe qu'à l'exception de l'intérieur des câbles (du béton est modélisé sur ces éléments en 1D-3D et non en 3D), les distributions sont quasiment identiques entre les approches 1D-3D et 3D complet à ces deux étapes de chargement. En particulier, le rôle du câble vertical pour l'apparition puis la propagation de l'endommagement est bien reproduit : cette inclusion, de raideur très élevée, tend à se déformer beaucoup moins que le béton et à provoquer des contraintes élevées qui endommagent le matériau à proximité. A l'inverse, l'approche 1D ne reproduit pas du tout cet effet et présente un endommagement distribué dans tout le volume, avec des éléments très endommagés le long des câbles horizontaux. Ces différences engendreraient des écarts significatifs entre modélisations si un taux de fuite devait être calculé (par exemple à partir d'une relation endommagement-perméabilité).

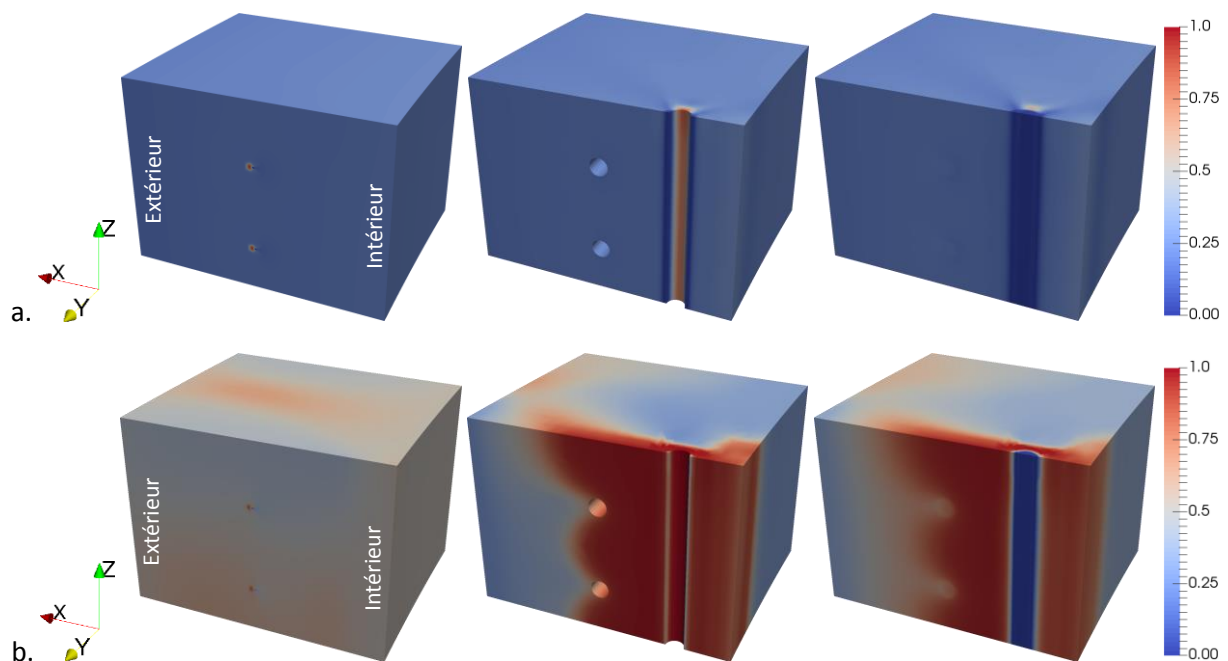


Figure 74 : Profils d'endommagement avec les modélisations 1D, 3D et 1D-3D (maillage conforme)
(a : déplacement radial de 3 mm, b : déplacement radial de 4,5 mm).

4.2.3 Maillage régulier

Les approches 1D-3D et 3D donnent donc pour ce calcul des résultats équivalents. Cependant, elles ont été appliquées sur un maillage incluant une représentation explicite des câbles verticaux et

horizontaux (Figure 75). Cette représentation est nécessaire pour utiliser le modèle 3D, mais pas l'approche 1D-3D. Cette flexibilité est l'un des points clés de la méthode proposée, dans les cas où un maillage structuré avec représentation des câbles peut nécessiter plusieurs heures d'ingénierie. De plus, dans les cas typiques, ce type de maillage nécessitera plus de degrés de liberté et d'éléments qu'un simple maillage régulier.

Les mêmes simulations ont donc été réalisées avec les approches 1D et 1D-3D, mais avec un maillage régulier ne tenant pas compte explicitement de la géométrie des câbles (Figure 75). La Figure 76 présente les évolutions pression – déplacement radial, similaires dans les différents calculs, ce qui souligne la capacité des trois approches (1D, 1D-3D et 3D complet) à représenter le comportement global. La Figure 77 présente les distributions d'endommagement obtenues pour un déplacement radial de 4,5 mm pour les modèles 1D et 1D-3D avec maillage régulier. Avec le modèle 1D-3D, l'endommagement s'amorce et se localise autour du câble vertical (de la même manière qu'avec le maillage conforme, Figure 74), mais pas avec le modèle 1D. La méthode proposée permet donc de capturer cet effet de la structure, en s'affranchissant de l'effort de maillage nécessaire pour une représentation 3D explicite des câbles.

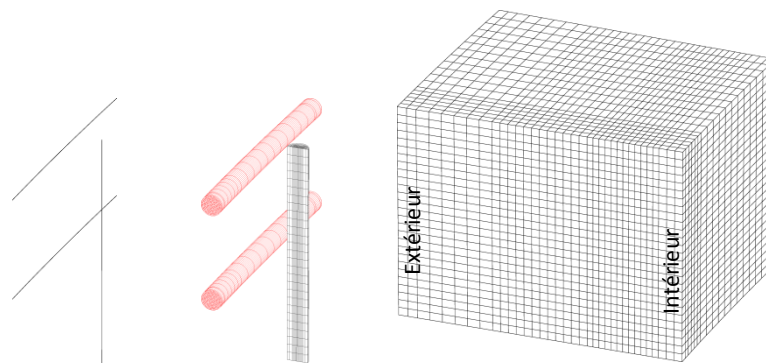


Figure 75 : Maillages d'acier pour le modèle 1D et 1D-3D, maillage régulier pour le béton.

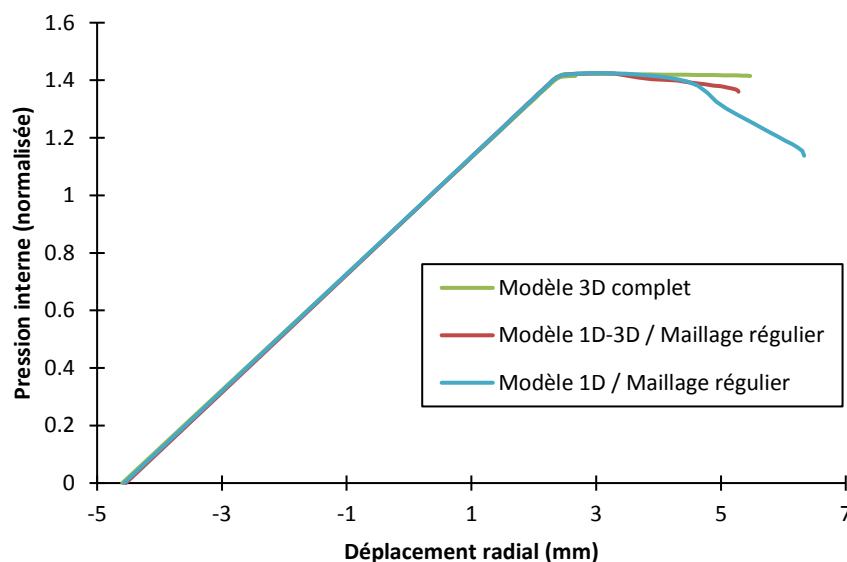


Figure 76 : Evolution pression-déplacement radial pour différents modèles de câbles.

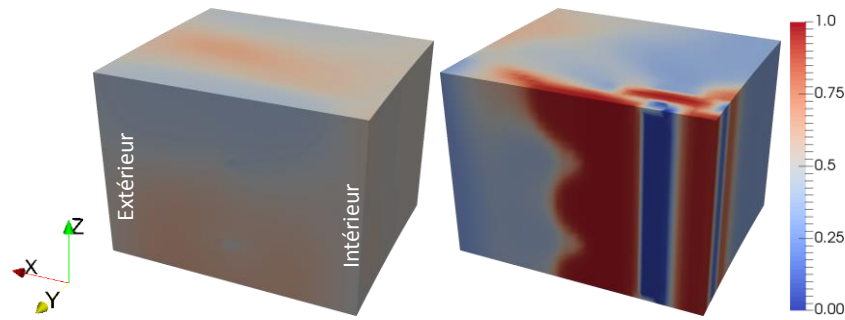


Figure 77 : Profils d'endommagement pour un déplacement radial de 4,5 mm: modélisations 1D et 1D-3D (maillage régulier).

4.2.4 Perturbation aléatoire de la géométrie

Comme vu précédemment, un des avantages clés de l'approche 1D-3D dans la modélisation des barres et câbles de précontrainte est sa flexibilité. En particulier, comme elle utilise une description 1D de la géométrie des hétérogénéités, elle s'adapte bien à des applications telles que l'analyse de sensibilité ou la quantification d'incertitudes (comme les analyses par éléments finis stochastiques) tenant compte des incertitudes géométriques.

Dans cette section, un exemple d'application est présenté sur le VSR : on étudie la sensibilité du profil d'endommagement à la position du câble vertical. On utilise pour cette étude l'approche 1D-3D, avec un maillage régulier pour le béton. Trois configurations sont étudiées :

- dans la première, l'enrobage du câble (\varnothing 84 mm) est réduit de 46 mm.
- dans la deuxième, le câble est à sa position nominale (enrobage de 208 mm).
- dans la troisième, l'enrobage du câble est augmenté de 46 mm.

Les profils d'endommagement obtenus pour les trois configurations sont comparés en Figure 78, afin d'observer les effets locaux et l'influence de la position du câble.

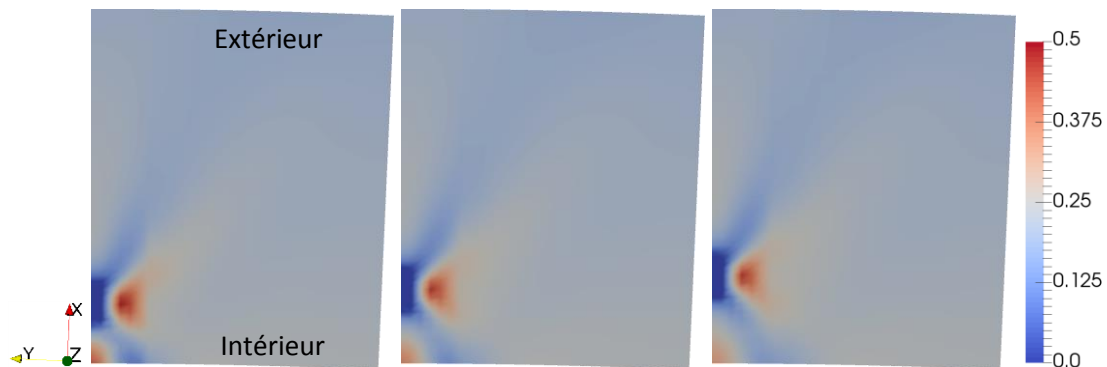


Figure 78 : Profils d'endommagement pour un déplacement radial de 3,0 mm avec différentes positions du câble vertical (face supérieure).

Pour observer plus facilement la différence entre les 3 profils, on observe la face supérieure du VSR, pour un déplacement radial de 3,0 mm. L'effet d'inclusion, qui localise l'endommagement, est bien reproduit pour les trois positions avec la modélisation 1D-3D. Dans les trois cas, l'endommagement apparaît à côté du câble vertical, en suivant la perturbation de sa position. Une seconde zone endommagée s'amorce sur la face intérieure du VSR, en face de la position du câble. Cette zone, présente également sur les modélisations à maillage conforme (Figure 74), est d'autant plus endommagée que l'enrobage du câble est faible. Elle correspond à une zone de contraintes élevées due à la proximité du câble de forte raideur.

L'effet du câble vertical (en particulier l'effet d'inclusion) est bien reproduit dans les trois configurations et l'influence de la position du câble peut être observée et quantifiée. Ceci valide bien l'applicabilité de l'approche 1D-3D pour les analyses dans un contexte d'incertitude sur la géométrie.

5 Résumé

Problématique

La problématique adressée dans ce chapitre est celle de la modélisation des renforts dans les grandes structures de génie civil sur lesquelles on souhaite caractériser la fissuration du béton. Les approches classiques sont soit suffisamment représentatives mais difficilement applicables sur une structure de grandes dimensions, soit prévues pour les grandes structures mais non représentatives à l'échelle du phénomène de fissuration. Il serait nécessaire de disposer d'une approche ayant un large spectre d'utilisation, susceptible de représenter les renforts actifs et passifs et de s'appuyer sur les modèles classiques à la grande échelle.

Contributions

Une approche pour la modélisation des renforts dans le béton, mais plus largement aussi des hétérogénéités dans les matériaux 3D a été développée. Cette approche, nommée 1D-3D, génère un volume à partir de la discrétisation 1D, dont la rigidité et les efforts internes sont condensés par la méthode de Guyan sur son interface avec le matériau 3D. Cette méthode ne nécessite pas de modifier le maillage existant de la matrice, par rapport à une discrétisation 1D. La rigidité et les efforts appliqués par l'hétérogénéité sont condensés (étape optionnelle) et appliqués sur l'enveloppe du volume équivalent. La relation avec le matériau est assurée par un ensemble de relations cinématiques.

Résultats

L'approche proposée est validée sur un tronçon courbe en béton précontraint, ainsi que sur un VSR de la partie courante d'une enceinte de confinement en béton précontraint. L'approche 1D-3D évite la concentration de contraintes observée avec les représentations 1D dans le cas des renforts actifs. Elle permet aussi de reproduire les effets locaux, en particulier les effets d'inclusion. Enfin, elle est particulièrement adaptée à une géométrie susceptible d'être perturbée, par exemple dans le cas d'études de sensibilité ou de propagation d'incertitudes.

Conclusions

L'approche 1D-3D combine en un seul modèle la représentativité à l'échelle locale et la stabilité numérique des modèles 3D, avec la flexibilité et l'efficacité numérique des approches 1D à l'échelle d'une structure de génie civil. Son spectre d'utilisation est suffisamment large pour produire des résultats pertinents sur différents types de modélisations.

Publications

Les développements en lien avec ce chapitre ont fait l'objet d'une publication dans la revue à comité de lecture *Engineering Structures* [113]. Une communication a également été présentée lors de la conférence internationale ECCOMAS 2016 (*European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*) [109].

Chapitre 6 - Application: Simulation de mise en pression de la maquette Vercors

1 Introduction

Dans les chapitres précédents, différentes méthodes ont été présentées, qui visent à rendre accessibles des modélisations fines sur des structures de génie civil, en particulier les structures en béton armé et béton précontraint. Il est donc nécessaire d'évaluer l'adaptabilité réelle des méthodes développées, notamment la condensation adaptative, sur l'analyse d'une structure de grandes dimensions.

Dans cette optique, une analyse mécanique est proposée dans ce chapitre sur un modèle numérique de la maquette d'enceinte de confinement Vercors. La maquette Vercors est une maquette à l'échelle 1/3 d'enceinte de confinement à double paroi, telle que celles qui protègent les réacteurs de type REP 1300 MWe. Cette maquette a été construite sur le site EDF Lab des Renardières, dans le but d'améliorer la compréhension des phénomènes de vieillissement sur les enceintes de confinement. La maquette est constituée de béton armé et précontraint et est réalisée de manière similaire à une enceinte de confinement du parc nucléaire. Elle présente donc le même niveau de complexité en termes de modélisation et d'analyse. Elle a donc été choisie comme structure de référence pour le projet Macena (Maîtrise du confinement d'une enceinte en accident), dans le cadre duquel cette thèse s'inscrit.

2 Présentation du problème

Le problème étudié est donc une représentation numérique de l'enceinte interne de la maquette Vercors. Cette maquette d'enceinte de confinement mesure environ 20 m de haut, est mise en précontrainte dans les directions orthoradiale et verticale, et inclut diverses hétérogénéités géométriques (notamment des traversées et des pièces métalliques). Sur cette structure, on souhaite accéder à des simulations apportant une meilleure information que ce qui est possible par un calcul éléments finis classique. Les dimensions et la géométrie de la structure, ainsi que les caractéristiques des matériaux sont issus des rapports de projet ainsi que des plans de construction de la maquette [94,118,119]. Un maillage de la structure, comprenant les câbles de précontrainte et les parties en béton était disponible via le benchmark Vercors. Néanmoins, nous avons choisi de créer un maillage différent afin de faciliter la décomposition en sous-zones de la structure complète et de pouvoir paramétrer le maillage au besoin.

2.1 Structure en béton

La structure en béton de la maquette est modélisée en trois dimensions et mesure 22,79 m de hauteur, pour 7,70 m de rayon. Elle se compose de différentes parties, dont les principales sont le radier, le fût cylindrique (ou jupe) et le dôme (Figure 79). Un gousset en béton assure le lien entre le radier et le bas de la jupe et une ceinture torique relie le dôme au fût (Figure 80). Les dimensions des différentes parties de la structure sont indiquées dans le Tableau 20. Le fût est percé par quatre traversées : tampon d'accès matériel (TAM), sas personnel, traversée du circuit de vapeur vive principale (VVP) et traversée du circuit d'alimentation et régulation en eau (ARE). Les dimensions de ces traversées et leurs positions sont indiquées dans le Tableau 21. Autour de la plus grande, le TAM, la jupe est renforcée par une surépaisseur qui atteint jusqu'à 20 cm. Cette surépaisseur est présente à l'intérieur et à l'extérieur du fût au niveau du TAM.

Fût	Rayon extérieur du fût	7,70 m
	Rayon intérieur du fût	7,30 m
	Hauteur du fût	15,33 m
	Epaisseur du fût	0,40 m
	Hauteur de la base du fût	-0,33 m
Dôme	Rayon extérieur du dôme	10,97 m
	Rayon intérieur du dôme	10,67 m
	Epaisseur du dôme	0,30 m
	Hauteur du centre de courbure du dôme	8,82 m
Gousset	Rayon intérieur du gousset	7,10 m
	Rayon extérieur du gousset	7,70 m
	Hauteur du gousset	0,67 m
	Hauteur de la base du gousset	-1,00 m
	Epaisseur du gousset	0,60 m
Radier	Rayon du radier	7,70 m
	Hauteur du radier	2,00 m
	Hauteur de la base du radier	-3,00 m
Ceinture torique	Hauteur de la ceinture torique	1,65 m
	Hauteur de la base de la ceinture torique	15,00 m
	Rayon interne bas de la ceinture torique	7,30 m
	Rayon externe bas de la ceinture torique	8,00 m
	Epaisseur à la base de la ceinture torique	0,70 m
	Rayon interne haut de la ceinture torique	7,00 m
	Rayon externe haut de la ceinture torique	8,00 m
	Epaisseur en haut de la ceinture torique	1,00 m

Tableau 20 : Dimensions de la maquette Vercors [94].

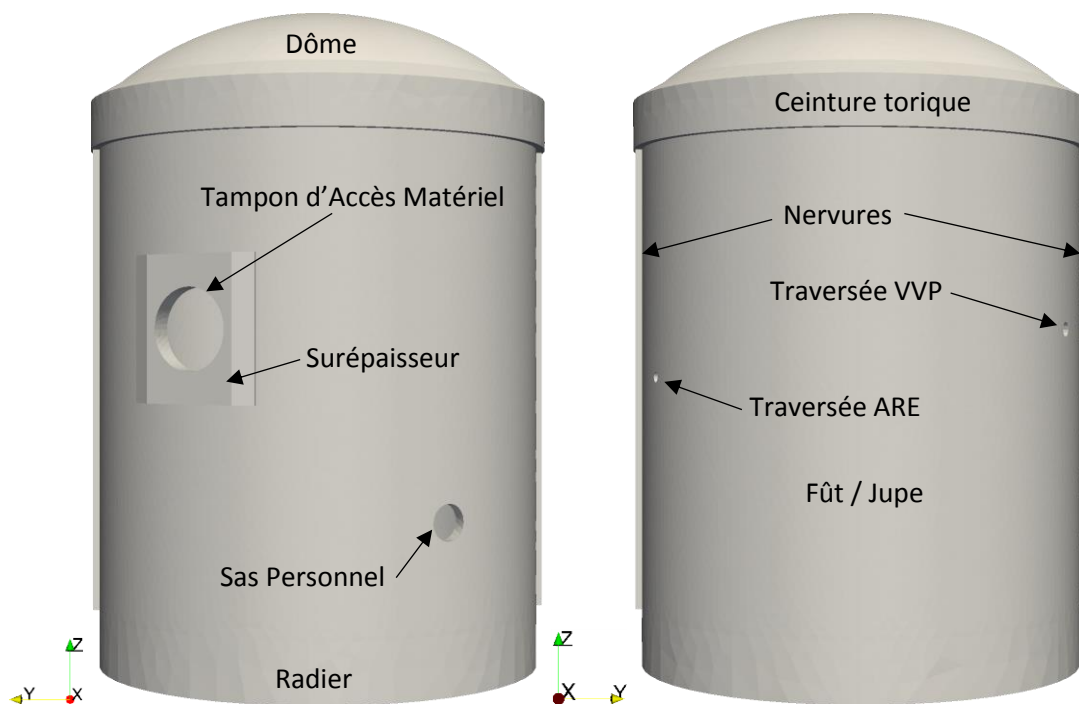


Figure 79 : Vue extérieure de la géométrie du modèle numérique de Vercors.
La direction de l'axe Y fixe le zéro angulaire.

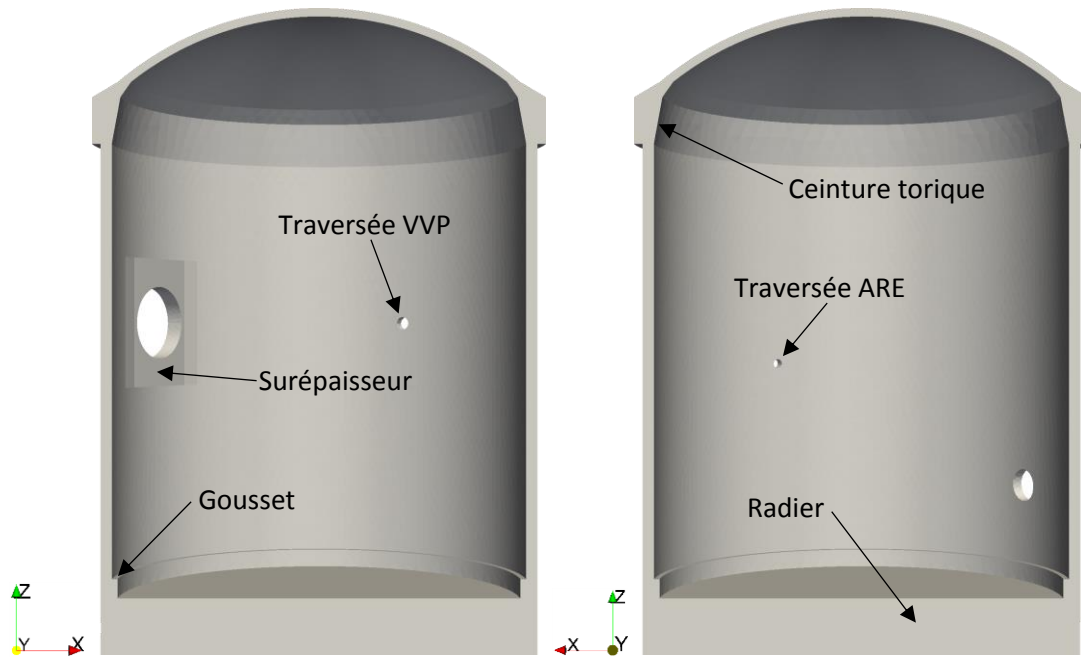


Figure 80 : Vue intérieure de la géométrie du modèle numérique de Vercors.

	Diamètre	Hauteur du centre	Position angulaire
Tampon d'accès matériel	2,71 m	8,72 m	211,95 °
Sas personnel	1,21 m	2,57 m	147,15 °
Traversée VVP	0,50 m	8,72 m	297 °
Traversée ARE	0,36 m	7,12 m	63 °

Tableau 21 : Dimensions des différentes traversées (le zéro angulaire suit l'axe Y sur les figures).

La structure en béton est maillée avec des éléments tétraédriques linéaires (« TET4 »). Le matériau est représenté par le modèle d'endommagement isotrope de Mazars [86] au niveau de la jupe et par un modèle élastique linéaire dans le dôme, le gousset et le radier (afin d'éviter l'endommagement dans des zones considérées comme saines). Le matériau est considéré homogène en termes de propriétés. Le jeu de paramètres est choisi de manière à obtenir les propriétés moyennes mesurées sur la maquette réelle (module d'Young $E = 38$ GPa, résistance en compression $f_c = 48$ MPa, résistance en traction $f_t = 4,4$ MPa [94]) et est donné dans le Tableau 22. Sa masse volumique est prise égale à $\rho = 2400$ kg.m⁻³.

E	ν	ε_0	A_T	B_T	A_C	B_C
38 GPa	0,2	$1,16 \times 10^{-4}$	0,9	10^4	1,10	1300

Tableau 22 : Paramètres du modèle de Mazars.

2.2 Renforts passifs et parties en acier

Afin de limiter la fissuration du béton, le béton de la jupe est renforcé par des nappes d'armatures en acier, dans les directions orthoradiale et verticale. Dans le modèle numérique, ces aciers de renfort sont représentés en utilisant des coques minces équivalentes orthotropes. Deux nappes d'éléments coques, situées à 25 mm de l'intérieur et 25 mm de l'extérieur du béton de la jupe, sont donc utilisées (Figure 81). Un enrobage de 25 mm sans acier autour des traversées est aussi appliqué. Le maillage de ces aciers passifs est constitué de quadrangles bilinéaires dans la zone courante (« QUA4/COQ4 ») et de triangles linéaires autour des traversées (« TRI3/DKT »). Les aciers passifs sont reliés aux éléments de béton par des relations cinématiques sur les déplacements nodaux (liaison parfaite). Les propriétés

mécaniques des aciers sont indiquées dans le Tableau 23. Pour ces aciers, on considère une loi de comportement élastique linéaire.

E_z	E_θ	$\nu_{z,\theta}$	$G_{z\theta}$	G_{zr}	$G_{\theta r}$	ρ	e
200 GPa	184 GPa	0,0	100 GPa	100 GPa	100 GPa	7850 kg.m ⁻³	6,57 × 10 ⁻⁴ m

Tableau 23 : Propriétés des renforts passifs (coques orthotropes).

En plus de ces aciers de renfort, les deux principales ouvertures (TAM et sas personnel) sont équipées de viroles, qui viennent renforcer le béton à l'intérieur de l'ouverture. Dans le modèle numérique, ces viroles en acier sont représentées par des éléments de coques minces isotropes, appliquées sur un maillage triangulaire. Au niveau des viroles, les nœuds d'acier et de béton sont correspondants. On suppose une liaison acier-béton parfaite. Les viroles ont une épaisseur de 20 mm. Chaque virole est équipée d'une porte sur la face intérieure du fût. Ces portes sont elles aussi modélisées par des éléments coques minces isotropes, appliquées sur un maillage triangulaire dont les nœuds correspondent à l'interface avec ceux de la virole (et du béton). Les portes ont une épaisseur de 30 mm. Pour les viroles et les portes, on considère une loi de comportement élastique, ayant les paramètres suivants : $E = 200$ GPa, $\nu = 0,3$, $\rho = 7850$ kg.m⁻³.

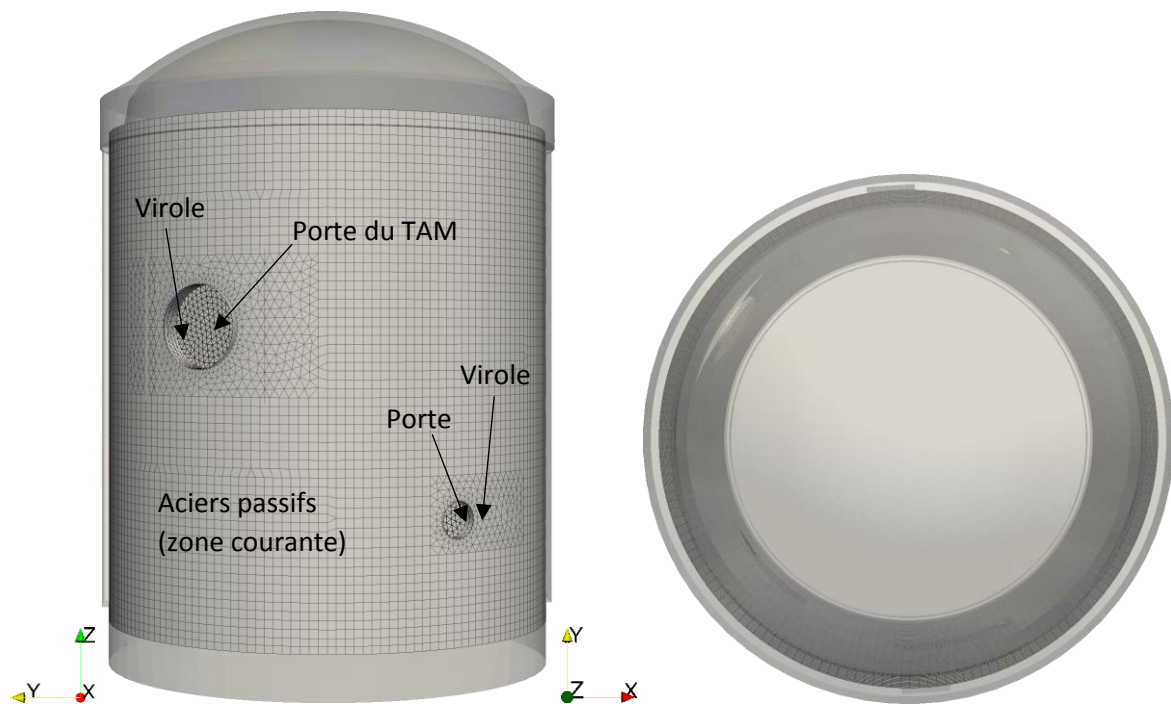


Figure 81 : Maillage des aciers passifs, viroles et portes du modèle numérique de Vercors [119].

2.3 Câbles et précontrainte

Le béton et les aciers passifs sont mis en précontrainte dans la direction orthoradiale et dans la direction verticale. Pour cela sont utilisés :

- 122 câbles horizontaux, qui assurent la précontrainte horizontale. Ils viennent s'ancrer dans les deux nervures en béton situées de chaque côté de la jupe (aux angles de 175,95° et 355,95°). Les nervures ont une épaisseur de 30 cm et une hauteur de 16 m.
- 57 câbles verticaux, qui assurent une partie de la précontrainte verticale. Ils viennent s'ancrer dans le radier et dans la ceinture torique.
- 18 câbles de dôme, qui assurent une partie de la précontrainte dans le dôme. Ils viennent s'ancrer dans la ceinture torique.

- 98 câbles Γ , qui assurent une partie de la précontrainte verticale dans la jupe et une partie de la précontrainte du dôme. Ils viennent s'ancrer dans la ceinture torique et dans le radier.

Tous ces câbles suivent un trajet qui dévie autour des différentes traversées (Figure 82). Dans le modèle numérique, ces câbles sont représentés par des éléments barres linéaires (« SEG2/BARR »). Le maillage des câbles est issu de la CAO réalisée pour le benchmark Vercors [118]. Les câbles sont reliés aux éléments de béton par des relations cinématiques sur les déplacements nodaux (liaison parfaite). On considère pour les câbles une loi de comportement élastique linéaire ayant les paramètres suivants : $E = 190 \text{ GPa}$, $\rho = 7850 \text{ kg.m}^{-3}$. La section des câbles est de $S = 5,56 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

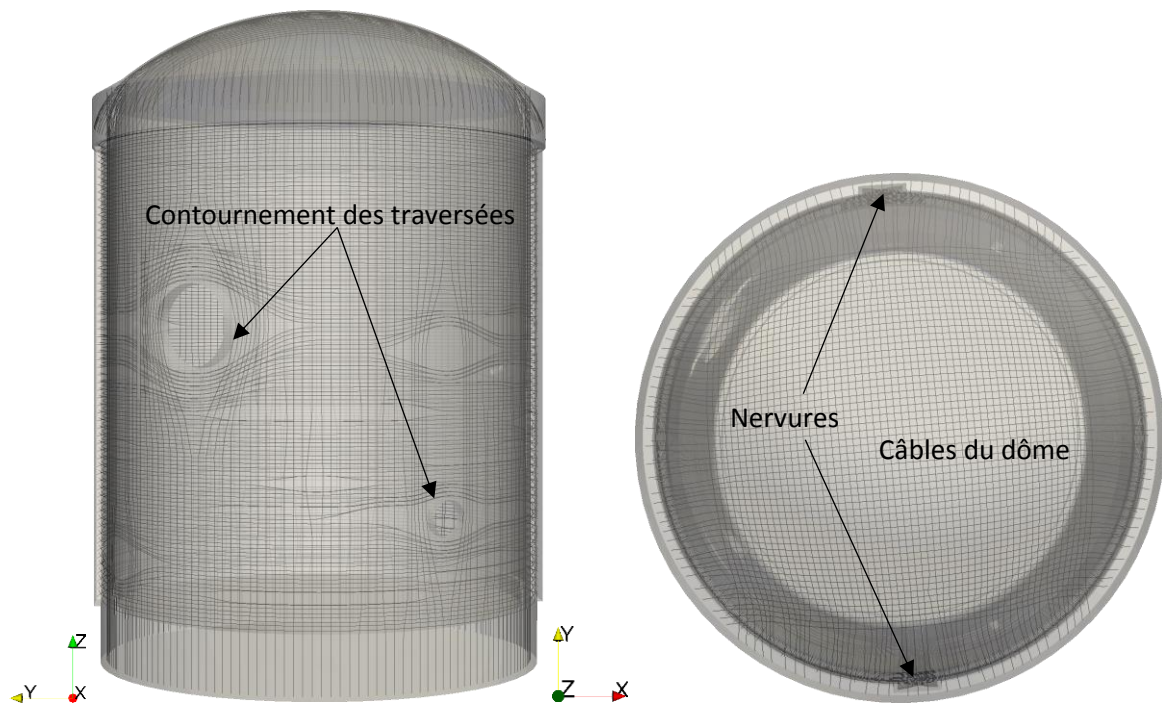


Figure 82 : Maillage des câbles de précontrainte du modèle numérique de Vercors [118].

2.4 Conditions aux limites et chargements

La principale condition aux limites appliquée est l'encastrement du radier. Les déplacements des nœuds situés à la base du radier sont bloqués dans les trois directions pendant tout le calcul.

Trois types de chargement seront successivement appliqués à la structure :

- mise en précontrainte ;
- poids propre ;
- pression interne.

Dans le cadre de l'analyse proposée, nous faisons le choix de partir d'un état initial (avant précontrainte) homogène en ignorant le comportement au jeune âge : l'état initial ne tient donc pas compte des chargements et état de déformation et contraintes ou des hétérogénéités de propriétés que les différents phénomènes du jeune âge (retrait, chaleur, etc.) engendreraient.

Le premier chargement appliqué est donc la mise en précontrainte. Ce chargement consiste à mettre en tension les câbles afin de provoquer par redistribution des efforts une contrainte de compression bi-axiale dans le béton et les aciers passifs. Il n'est pas tenu compte de l'ordre de mise en tension des câbles, on considère que la tension est simultanée pour tous les câbles. Pour cette mise en

précontrainte, on tient compte des pertes de précontrainte dans les câbles, qui ont différentes origines :

- frottement linéaire ;
- frottement angulaire ;
- recul d'ancrage ;
- relaxation de l'acier des câbles.

Les coefficients de calcul associés à ces différentes sources de pertes sont indiqués dans le Tableau 24.

Après la mise en précontrainte et l'application du poids propre, le dernier chargement appliqué est la mise en pression. Sur la maquette physique, les épreuves appliquées consistent en une pression relative de 4,2 bars appliquée à l'intérieur de la structure. Sur le modèle numérique, afin d'observer des valeurs d'endommagement élevées, une pression plus élevée pourra être appliquée. La pression interne s'applique sur la peau intérieure de la structure en béton. Elle est aussi appliquée au niveau de la surépaisseur (interne), ainsi que sur les portes du TAM et du sas personnel. Cette pression augmente jusqu'à atteindre 5,8 bars relatifs.

	Coeff. de frott. linéaire (ϕ)	Coeff. de frott. angulaire (f)	Recul à l'ancrage	Relaxation à 1000 h (ρ_{1000})
Câbles verticaux	$8,0 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$	$0,16 \text{ rad}^{-1}$	8,0 mm	2,5 %
Câbles horizontaux	$1,5 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$	$0,17 \text{ rad}^{-1}$	8,0 mm	2,5 %
Câbles Γ / Partie verticale	$8,0 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$	$0,16 \text{ rad}^{-1}$	8,0 mm	2,5 %
Câbles Γ / Partie dôme	$1,5 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$	$0,16 \text{ rad}^{-1}$	8,0 mm	2,5 %
Câbles dôme	$1,5 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$	$0,16 \text{ rad}^{-1}$	8,0 mm	2,5 %

Tableau 24 : Coefficients de pertes de précontrainte [94].

La tension des câbles (qui permet de mettre la structure en précontrainte) est considérée comme une contrainte initiale qui n'est pas associée à une déformation ; ceci représente le fait que l'état de référence des câbles, à déplacement et déformation nuls, est l'état tendu. Il apparaît donc un terme additionnel de contrainte σ^{tc} dans le modèle de comportement des câbles, qui s'exprime alors sous la forme :

$$\sigma^{tot} = \sigma^{tc} + \sigma(\varepsilon) \quad (97)$$

où σ^{tot} est la contrainte totale, ε la déformation $\sigma(\varepsilon)$ la contrainte engendrée par cette déformation. Dans le cas d'un modèle barre, les déformations et contraintes sont scalaires au niveau de l'élément.

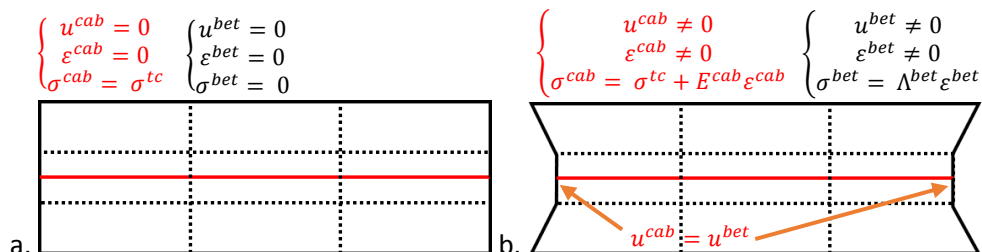


Figure 83 : Schéma de principe de la mise en précontrainte pour un câble (rouge) dans un volume de béton (noir) (a : tension initiale du câble, b : état du système une fois équilibré)

Le calcul de mise en précontrainte est réalisé indépendamment dans une première étape et ne fait pas appel à la condensation adaptative ; cette phase nécessite une première résolution du système incluant les contraintes de tension dans les câbles σ^{tc} , mais pas de chargement (Figure 83).

Il est possible d'exprimer ce champ de contraintes sous la forme de forces nodales pour les différents câbles :

$$f_i^{tc} = S \int_{L_i} \frac{d\sigma^{tc}}{dl} dl \quad (98)$$

où f_i^{tc} est le champ de forces nodales de tension initiale du câble i , S la section du câble et l l'abscisse curviligne le long du câble, intégrée sur sa longueur L_i .

Le choix de cette approche pour représenter la tension des câbles engendre pour tout le calcul un système à résoudre légèrement différent de l'équation (24) ($K^T(u^T) = f^T$), contenant le terme additionnel de tension initiale des câbles :

$$K^T(u^T) \cdot u^T + f^{tc} = f^T \quad (99)$$

avec K^T la matrice de rigidité de la structure, u^T le vecteur de déplacements nodaux, f^T le vecteur des forces nodales extérieures et f^{tc} le vecteur de forces nodales associées aux termes de tension initiale σ^{tc} (ce terme est constant).

3 Condensation adaptative et réduction du problème

Afin de pouvoir utiliser la méthode de condensation adaptative et réduire la dimension du problème, la structure complète est décomposée en 132 zones de dimension équivalente (Figure 84). Le maillage des parties en acier de la structure (barres, viroles et portes) respecte la décomposition en sous-zones. Le maillage des câbles respecte lui aussi la décomposition en sous-zones, les interfaces entre zones sont donc conformes aux différents maillages. Au final, la frontière de chaque zone est donc constituée d'une nappe de nœuds formant une surface continue : ceci permet de bien définir les interfaces entre zones et donc les conditions aux limites à appliquer ainsi que les bandes de propagation de l'endommagement.

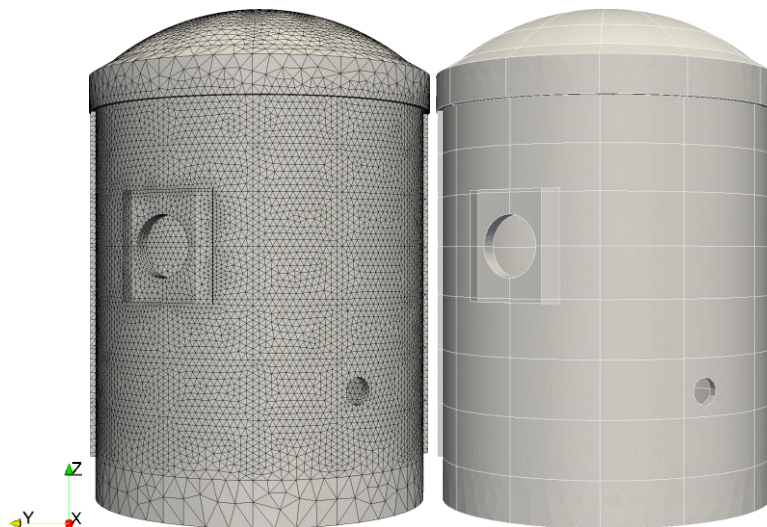


Figure 84 : Maillage du béton de la maquette Vercors et décomposition en zones.

Le calcul de mise en pression est réalisé dans un second temps et fait appel à la condensation adaptative. C'est cette étape en particulier qu'on cherche à améliorer en réduisant la dimension du problème et en rendant ainsi accessible une meilleure information.

L'état mécanique du système est obtenu à la suite du calcul de mise en précontrainte. Cet état mécanique servira d'état de départ pour la mise en pression. Les zones d'intérêt choisies au départ du calcul de mise en pression sont les zones ayant un endommagement non nul à la suite de la mise en précontrainte ; en effet, leur état endommagé ne permet plus de les condenser. Dans les zones d'intérêt, l'état mécanique complet (déplacement, contraintes et variables internes) est conservé puis utilisé pour le calcul non linéaire à condensation adaptative. Dans les zones élastiques, qui sont condensées et éliminées, les champs de déplacement et de déformation peuvent être reconstitués par décondensation (voir Chapitre 3). Notons qu'une fois la mise en précontrainte réalisée, les champs de déplacements nodaux, de déformations et de contraintes sont non nuls.

On observe que du fait de la modification du système d'équations à résoudre (99), les zones élastiques qui contiennent des câbles tendus n'ont plus un comportement réellement linéaire au regard des efforts externes f^τ qui leur sont appliqués, du fait du terme de tension f^{tc} . On observe plutôt un comportement « affine », comme l'illustre la Figure 85. Néanmoins, à l'exception des câbles de précontrainte, les lois de comportement ne sont pas modifiées : le comportement matériau reste donc linéaire (tant que le béton n'est pas endommagé), même si le comportement structural de la zone ne l'est plus.

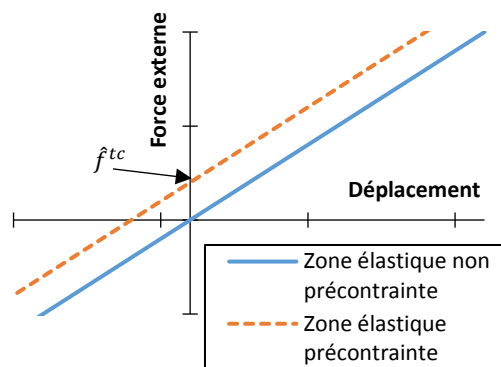


Figure 85 : Comportement schématisé d'une zone élastique précontrainte : évolution force-déplacement

Comme l'indique l'équation (97), la différence entre le champ total de contraintes σ^{tot} et le champ de contraintes associé à la déformation $\sigma(\varepsilon)$ (associée au déplacement des nœuds u) représente la contrainte additionnelle de tension des câbles σ^{tc} . Ainsi, pour le système condensé :

- dans les zones d'intérêt, la précontrainte est prise en compte via le terme de contraintes de tension σ^{tc} et les déplacements initiaux qu'elle provoque (Figure 83) ;
- dans les zones élastiques, cette contrainte est convertie en forces nodales équivalentes f^{tc} par l'équation (98). Elle est alors condensée comme un chargement extérieur et retransmise aux zones d'intérêt. Elle est aussi prise en compte dans les décondensations de ces zones, notamment pour le calcul du critère d'amorçage.

Une fois la condensation réalisée, le système réduit correspondant à l'équation (39) devient donc :

$$\hat{K}^\tau(u_n^\tau).u_n^\tau + f_n^{tc} = \hat{f}^\tau - \hat{f}_e^{tc} \quad (100)$$

où \hat{K}^τ représente la rigidité réduite de la structure, u_n^τ le vecteur de déplacements nodaux dans les zones d'intérêt, f_n^{tc} le vecteur de forces nodales équivalentes à la contrainte de tension des câbles dans les zones d'intérêt, \hat{f}^τ le chargement réduit et \hat{f}_e^{tc} le vecteur de forces nodales équivalentes à σ^{tc} dans les zones élastiques.

La méthode de condensation adaptative nécessite aussi la définition de critères de propagation et d'amorçage. Le critère de propagation utilisera des bandes de 30 cm de largeur, sur la valeur de la variable d'endommagement. Le critère d'amorçage utilisera la déformation équivalente de Mazars calculée dans le béton des zones élastiques. Le choix d'un critère local crée le risque d'une dépendance au maillage du critère calculé. Néanmoins, le maillage a été réalisé de manière à éviter de créer de forts gradients de taille d'élément. De plus, le critère d'amorçage doit pouvoir être calculé sur la plus grande partie de la structure lors des décondensations, et l'utilisation d'un critère en déformation non locale imposerait une finesse de maillage inaccessible à cette échelle de structure. Le critère d'amorçage sera calculé uniquement à 4 pas au cours du calcul, à titre de validation de l'hypothèse d'élasticité des zones condensées. Aucun critère de promotion n'est associé aux aciers (actifs ou passifs).

4 Résultats

A la suite de la mise en précontrainte, un ensemble de zones contient de faibles valeurs d'endommagement. Ces zones correspondent au béton situé autour du TAM, du sas personnel et de la traversée VVP. Elles constituent les zones d'intérêt de départ dans le calcul de mise en pression.

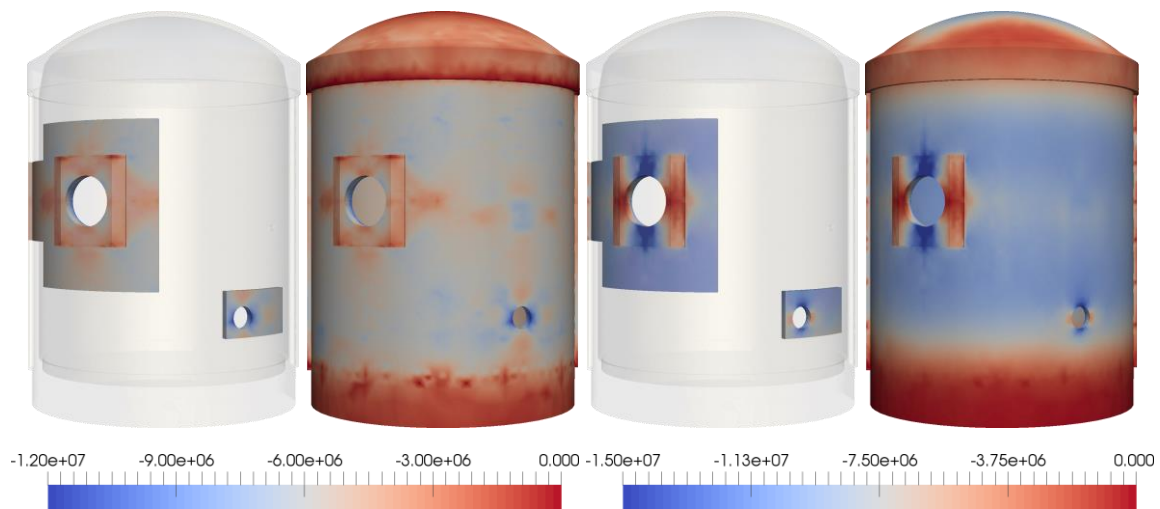


Figure 86 : Contraintes σ_{zz} (gauche) et $\sigma_{\theta\theta}$ (droite) dans la maquette à la fin de la mise en précontrainte: choix des zones d'intérêt pour la simulation non linéaire

Les cartes de contraintes dans la direction orthoradiale et dans la direction verticale à la suite de la mise en précontrainte (Figure 86), puis à la pression de dimensionnement (Figure 87) et enfin à la pression finale (Figure 88) sont comparées pour une simulation de référence et pour la simulation à condensation adaptative. Ces cartes sont largement similaires dans les zones d'intérêt et permettent donc de valider le résultat à l'échelle globale sur cette structure précontrainte.

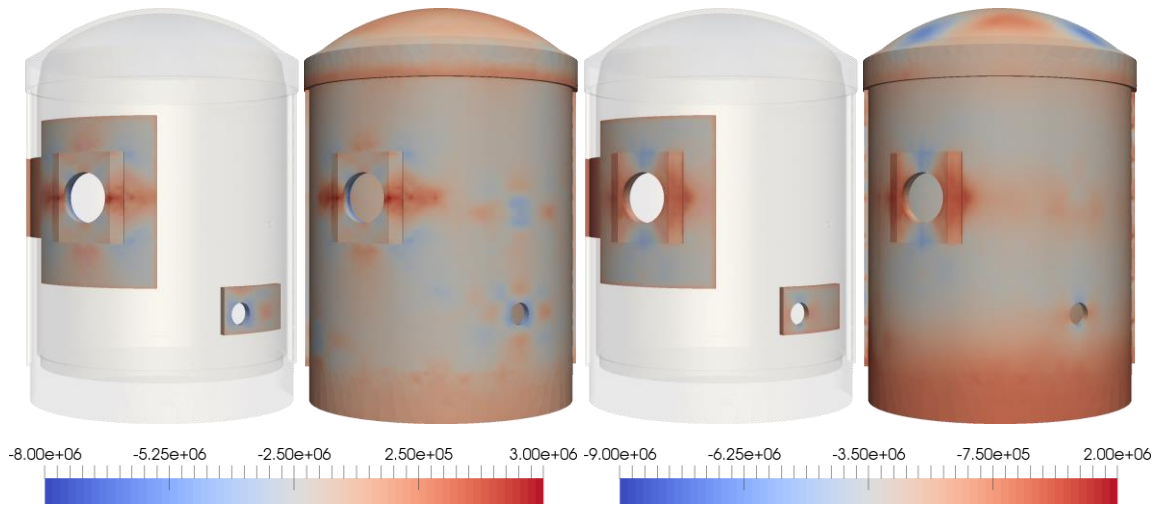


Figure 87 : Contraintes σ_{zz} (gauche) et $\sigma_{\theta\theta}$ (droite) dans la maquette à la pression de dimensionnement (4,2 bars relatifs) : calcul à condensation adaptative vs calcul de référence

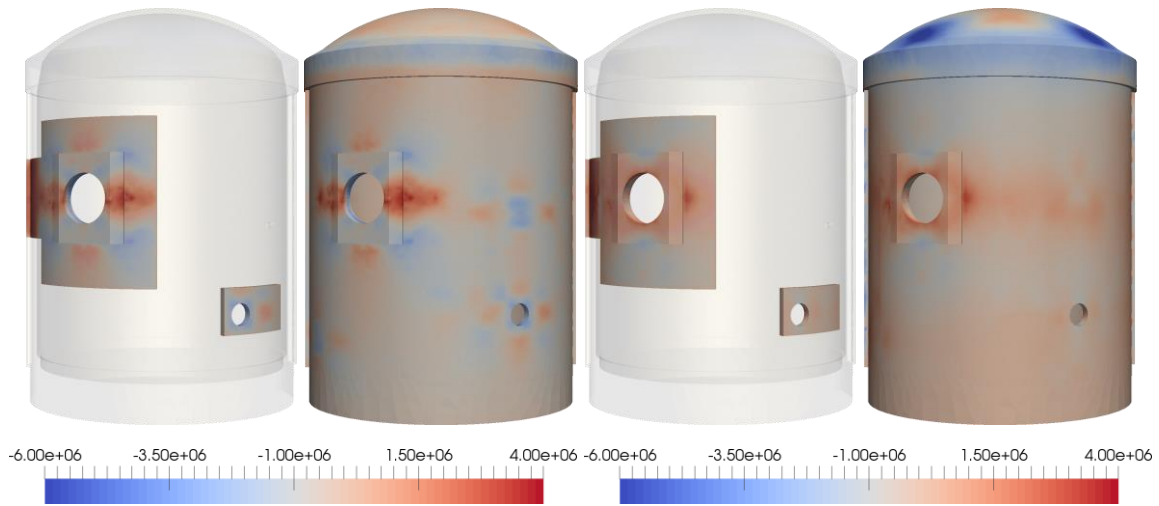


Figure 88 : Contraintes σ_{zz} (gauche) et $\sigma_{\theta\theta}$ (droite) dans la maquette à la pression finale (5,8 bars relatifs) : calcul à condensation adaptative vs calcul de référence

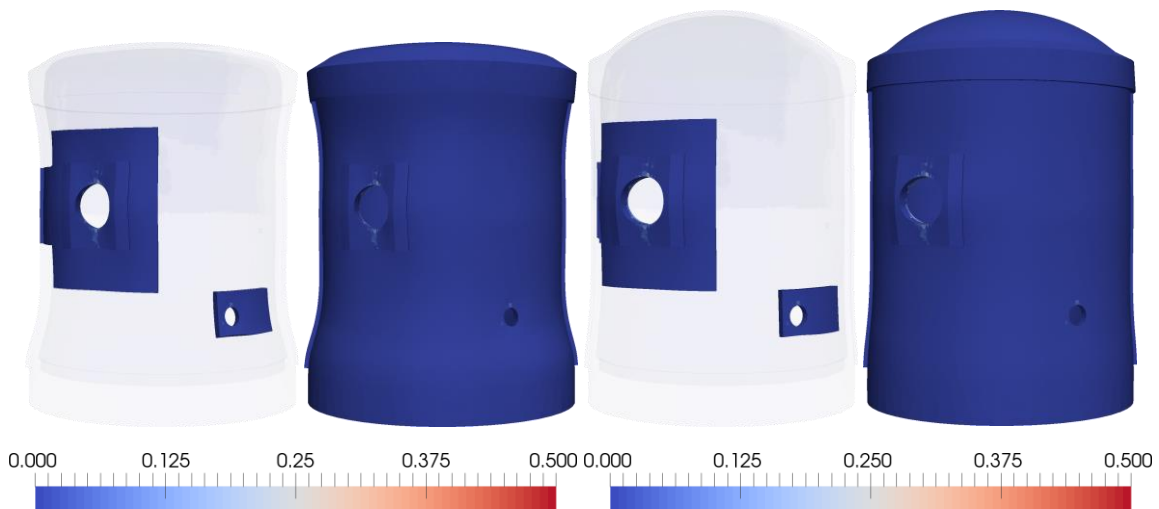


Figure 89 : Profils d'endommagement à la pression de dimensionnement (4,2 bars relatifs) tracés sur la configuration déformée (amplification x500) : condensation adaptative vs calcul de référence

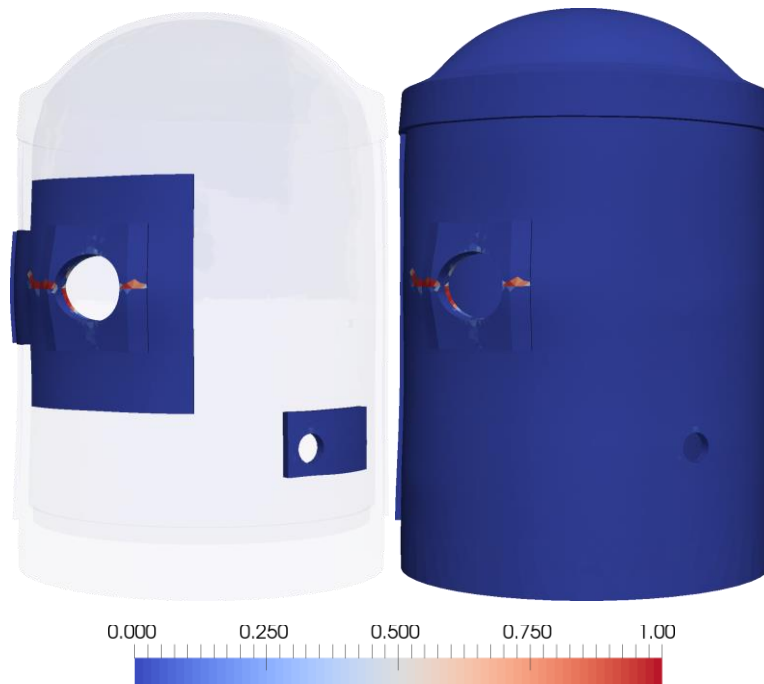


Figure 90 : Profils d'endommagement à la fin de mise en pression (5,8 bars relatifs) tracés sur la configuration déformée (amplification x500) : condensation adaptative vs calcul de référence

A l'échelle locale, les résultats doivent aussi être comparés. La Figure 90 compare les profils d'endommagement entre le calcul de référence et le calcul à condensation adaptative, en fin de mise en pression. Il apparaît suite à la mise en pression de l'endommagement sur la face extérieure de l'enceinte, qui forme deux fissures latérales horizontales partant du TAM. Ceci correspond au niveau de contraintes verticales de traction très élevées dans cette zone (Figure 88). On observe aussi un phénomène d'ovalisation du TAM en accord avec la contrainte de traction orthoradiale observée (Figure 88). Sur la face intérieure, l'interface entre la porte en acier et le béton est aussi très endommagée ; ceci pouvait être attendu compte tenu du fait que l'interface retransmet au béton la pression interne appliquée sur la porte. On remarque que les profils sont identiques entre les deux calculs. Ceci permet de valider l'utilisation de la méthode de condensation adaptative sur cette structure, y compris pour les résultats locaux.

Avec la décomposition utilisée, l'ensemble des zones d'intérêt en fin de calcul représente un total de :

- 11249 tétraèdres pour le béton, pour un volume total de 48,2 m³ ;
- 3959 triangles et 800 quadrangles pour les parties en acier ;
- 3712 segments pour les câbles.

En comparaison, le maillage complet contient :

- 82366 tétraèdres pour le béton, pour un volume total de 825,4 m³ (dont radier : 372 m³) ;
- 4511 triangles et 17918 quadrangles pour les aciers ;
- 38346 segments pour les câbles de précontrainte.

La dimension du problème est donc bien réduite d'un facteur proche d'un ordre de grandeur en nombre d'éléments mais aussi en dimension de structure traitée. En termes de temps de calcul, le calcul de référence nécessite 7009 s, contre 2143 s pour le calcul à condensation adaptative.

La réduction de taille de système apportée par la méthode de condensation adaptative peut donc être mise à profit afin d'améliorer l'étude.

5 Prise en compte des incertitudes

On souhaite maintenant quantifier l'incertitude sur certaines grandeurs d'intérêt de cette structure. Pour cela, on réalise une étude de type éléments finis stochastiques utilisant la méthode de collocation stochastique condensée. Afin de représenter une incertitude sur les propriétés mécaniques du béton, une variable aléatoire (VA) est introduite et représente le module d'Young E . Sa distribution suit une loi gaussienne tronquée, de moyenne $E^\mu = 38$ GPa (sa valeur moyenne sur les différentes levées d'après les mesures expérimentales) et d'écart type $E^\sigma = 3,23$ GPa (soit un coefficient de variation $c_v = 8,5 \times 10^{-2}$, correspondant aux mesures entre les différentes levées). La loi normale est tronquée à 8 écarts type de la moyenne, ce qui permet d'éliminer les valeurs négatives sans réellement affecter la distribution ni introduire une trop grande erreur dans l'estimation des fonctions de densité de probabilité (FDPs). Les autres propriétés mécaniques ne sont pas modifiées.

Pour cette étude, on utilisera la méthode de collocation stochastique condensée avec trois points de collocation. Le méta-modèle \tilde{M} est donc un polynôme de degré 2. On souhaite étudier la valeur maximale de déformation équivalente dans la structure $\tilde{\epsilon}_{Max}$ ainsi que le volume fissuré V_{fiss} (volume des éléments où l'endommagement dépasse 0,90) au stade final du chargement (pression de 5,8 bars relatifs).

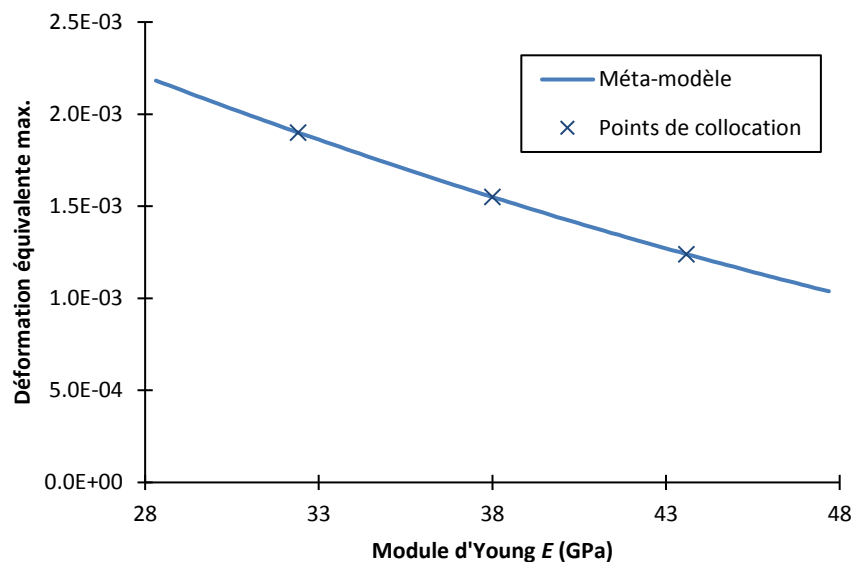


Figure 91 : Méta-modèle de la déformation équivalente maximale en fonction du module d'Young.

La Figure 91 présente le méta-modèle créé par la collocation stochastique condensée pour la valeur de déformation équivalente de Mazars $\tilde{\epsilon}_{Max}$ en fonction du module élastique. On observe une dépendance quasi-linéaire de la déformation maximale par rapport au module d'Young. On remarquera par ailleurs que même pour une valeur de module d'Young élevée de 48 GPa, la déformation maximale est de l'ordre de $\tilde{\epsilon}_{Max} = 10^{-3}$, soit $\tilde{\epsilon}_{Max} \approx 8 \epsilon_0$. La structure est donc fortement endommagée, avec potentiellement des ouvertures de fissures élevées (que le maillage utilisé ne permet cependant pas de quantifier).

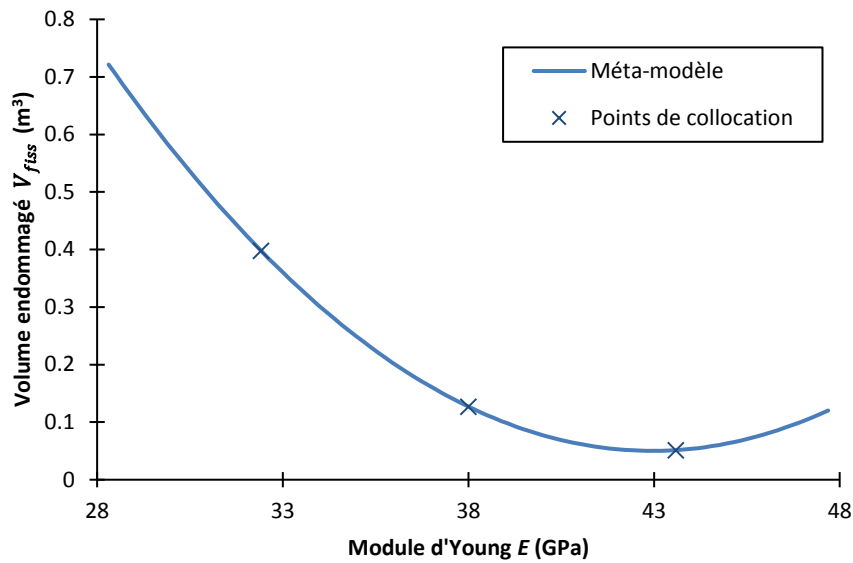


Figure 92 : Méta-modèle du volume fissuré V_{fiss} ($D \geq 0,9$) en fonction du module d'Young.

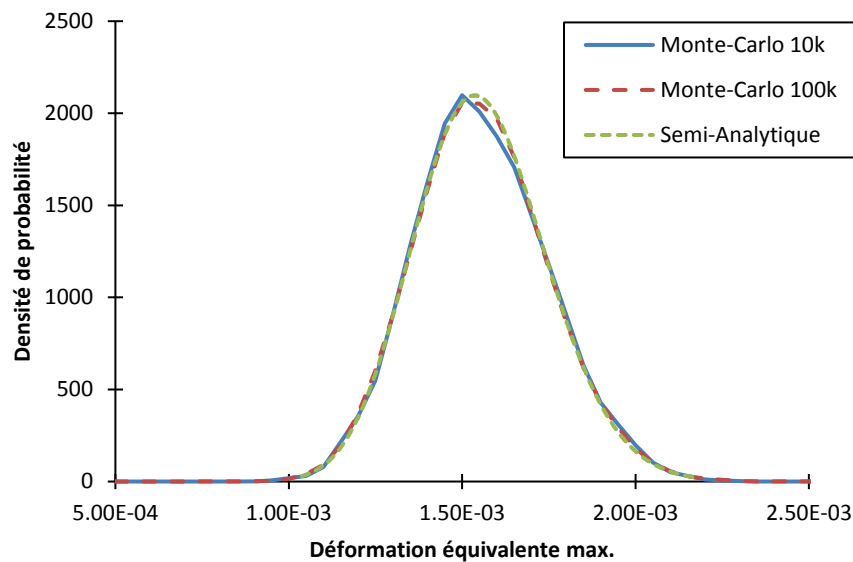


Figure 93 : FDPs de la déformation maximale $\tilde{\epsilon}_{Max}$ dans le béton

La Figure 92 présente le méta-modèle créé par la collocation stochastique condensée pour la valeur de volume fissuré V_{fiss} . Cette grandeur donne un indicateur de l'état de fissuration de la structure. On observe qu'au niveau des points de collocation, le volume endommagé baisse non linéairement quand le module élastique augmente. En particulier, on s'attend à ce que le volume endommagé atteigne 0 m³ lorsque le module élastique dépasse un certain seuil. Cependant, le choix d'un méta-modèle polynômial ne permet pas de capturer de telles tendances et divergera forcément aux extrémités du domaine aléatoire. En particulier dans ce cas, on observe que le méta-modèle adopte une forme parabolique et que les valeurs de volume endommagé tendent à augmenter au-delà de 43 GPa de module élastique.

Une fois ces deux méta-modèles obtenus, on souhaite rapprocher les fonctions de densité de probabilité du volume fissuré V_{fiss} et de la déformation équivalente maximale $\tilde{\epsilon}_{Max}$.

Les FDPs obtenues avec le méta-modèle précédent pour la déformation équivalente maximum sont comparées entre les deux approches proposées pour la collocation condensée : Monte-Carlo appliqué au méta-modèle (10^4 et 10^5 réalisations) et méthode semi-analytique (Figure 93). On observe que les deux approches sont en bon accord et que le Monte-Carlo semble converger vers la FDP obtenue par l'approche semi-analytique. On remarque aussi que la déformation équivalente suit une loi de forme normale, centrée autour de $1,55 \times 10^{-3}$ environ (qui est la valeur de déformation équivalente associée à la valeur moyenne de module élastique $E^\mu = 38$ GPa). Ceci correspond au résultat attendu compte tenu de la dépendance quasi-linéaire observée entre module élastique et déformation maximum.

Les FDPs obtenues avec la collocation condensée par l'approche Monte-Carlo pour le volume fissuré V_{fiss} (10^4 et 10^5 réalisations) sont présentées en Figure 94. On observe un pic pour une valeur de V_{fiss} proche de $0,06 \text{ m}^3$, alors que les valeurs de FDP en-dessous de cette valeur s'annulent. Il s'agit d'un artefact du méta-modèle : la dérivée de la fonction \tilde{M} prend en effet une valeur nulle au minimum de volume fissuré ($V_{fiss} \simeq 0,06$, $E \simeq 43$ GPa). La FDP de V_{fiss} va donc tendre vers l'infini en ce point et avoir une valeur nulle en-dessous. En utilisant l'approche Monte-Carlo, suivie d'une différenciation numérique, cela se traduit par un pic local dont la valeur dépend de la discrétisation utilisée.

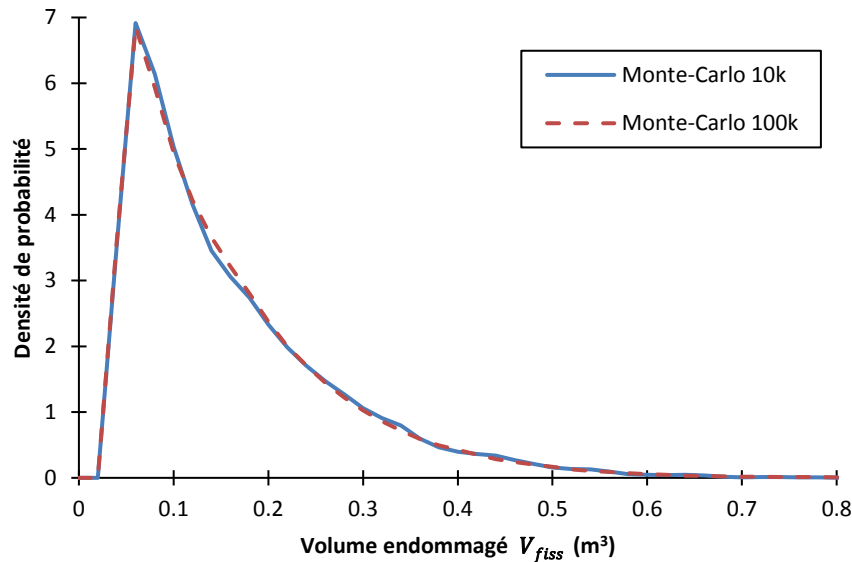


Figure 94 : FDPs du volume fissuré V_{fiss} ($D \geq 0,9$)

Une alternative pour éviter les problèmes liés à l'approximation polynômiale du volume fissuré pourrait être l'utilisation d'autres types de fonctions d'approximation. Les splines cubiques par exemple permettent de fixer la valeur de la différentielle de \tilde{M} au niveau des points de collocation. Ceci peut permettre dans certains cas de respecter a minima localement une tendance donnée (en l'occurrence, décroissance de V_{fiss} lorsque E augmente).

Le méta-modèle obtenu en utilisant des splines cubiques comme fonctions de collocation est présenté en Figure 95. On observe que la tendance attendue est mieux respectée aux abords des points de collocation. En revanche, les valeurs de V_{fiss} deviennent négatives au-delà de la valeur $E \simeq 45$ GPa environ. Pour éviter ces valeurs non physiques, nous proposons d'éliminer les valeurs négatives de V_{fiss} en les remplaçant par des valeurs nulles : nous utiliserons donc un méta-modèle par splines cubiques tronquées. On observe en revanche que contrairement au méta-modèle polynômial, les valeurs de V_{fiss} plafonnent à $0,5 \text{ m}^3$, pour une valeur de $E \simeq 29$ GPa et diminuent pour des valeurs

inférieures de E . Néanmoins, ce maximum local du méta-modèle par splines tronquées apparaît dans une zone de probabilité plus faible ($E \simeq E^\mu - 2,8 E^\sigma$) que le minimum local du méta-modèle polynômial ($E \simeq E^\mu + 1,5 E^\sigma$). De plus, l'utilisation de splines tronquées en zéro ne permet pas de créer de valeurs fortement négatives ; cet artefact ne risque donc pas de déstabiliser les moments statistiques par des valeurs extrêmes. Nous choisissons donc de ne pas en tenir compte en première approximation.

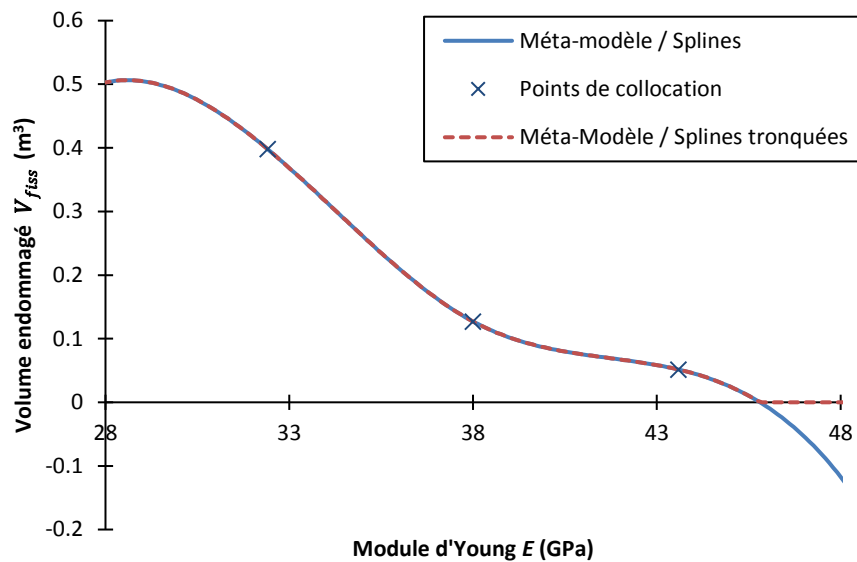


Figure 95 : Méta-modèles avec collocation par splines cubiques du volume fissuré V_{fiss} ($D \geq 0,9$) en fonction du module d'Young.

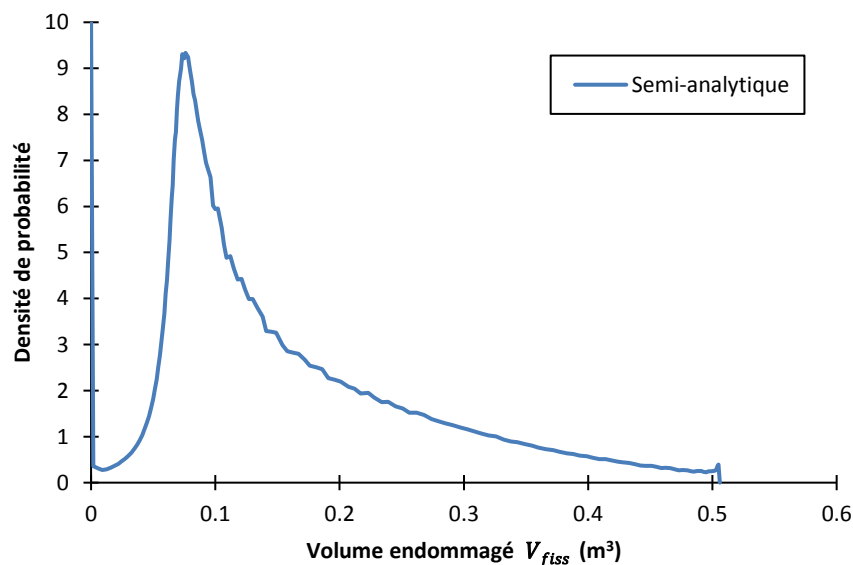


Figure 96 : FDP du volume fissuré V_{fiss} avec le méta-modèle par splines tronquées

La FDP obtenue avec la collocation condensée et le méta-modèle à splines cubiques tronquées pour le volume fissuré V_{fiss} est présentée en Figure 96. Elle est obtenue par l'approche semi-analytique. On observe que :

- la FDP donne des valeurs faibles pour V_{fiss} proche de 0, mais prend une valeur infinie en $V_{fiss} = 0$. Ceci est dû au fait que la FDP ne peut être définie dans le cas où une valeur discrète a une probabilité non nulle ; ce résultat correspond aux modules élastiques très élevés, pour lesquels la structure ne s'endommagerait pas.
- un pic apparaît pour une valeur de V_{fiss} proche de $0,08 \text{ m}^3$. Ce pic est engendré par les valeurs de E légèrement supérieures à E^μ : dans cette zone, V_{fiss} varie lentement en fonction de E (\tilde{M}' prend des valeurs faibles) et la FDP p_E de E a des valeurs élevées, on obtient donc des valeurs élevées de la FDP de V_{fiss} .
- après le pic, les valeurs de FDP de V_{fiss} décroissent jusqu'à $V_{fiss} \approx 0,5$.
- un petit pic apparaît en $V_{fiss} \approx 0,5$, après lequel la FDP s'annule. Ceci correspond au maximum local de V_{fiss} dans le méta-modèle à splines (pour $E \approx 29 \text{ GPa}$). La FDP de V_{fiss} tend vers l'infini en ce point mais cet effet est lissé par la discrétisation utilisée.

On souhaite observer les profils d'endommagement sur la structure, afin de mieux comprendre du point de vue qualitatif l'influence du module élastique sur la fissuration de la structure. La Figure 97 présente les profils d'endommagement en fin de mise en pression (5,8 bars relatifs) correspondant aux simulations réalisées pour les trois points de collocation. On peut observer dans les trois cas une fissuration partant des deux côtés du TAM, qui se propage latéralement, comme dans le cas déterministe. La fissure se propage d'autant plus loin que le module élastique est faible, ce qui est le résultat attendu et correspond au volume fissuré V_{fiss} plus élevé. De même le phénomène d'ovalisation du TAM est d'autant plus marqué sur les calculs à module d'Young faible (ce qui correspond à la déformation $\tilde{\epsilon}_{Max}$ plus élevée). On constate de plus que des zones supplémentaires sont activées sur le calcul du point de collocation le plus bas, notamment suite à la propagation plus marquée de la fissure.

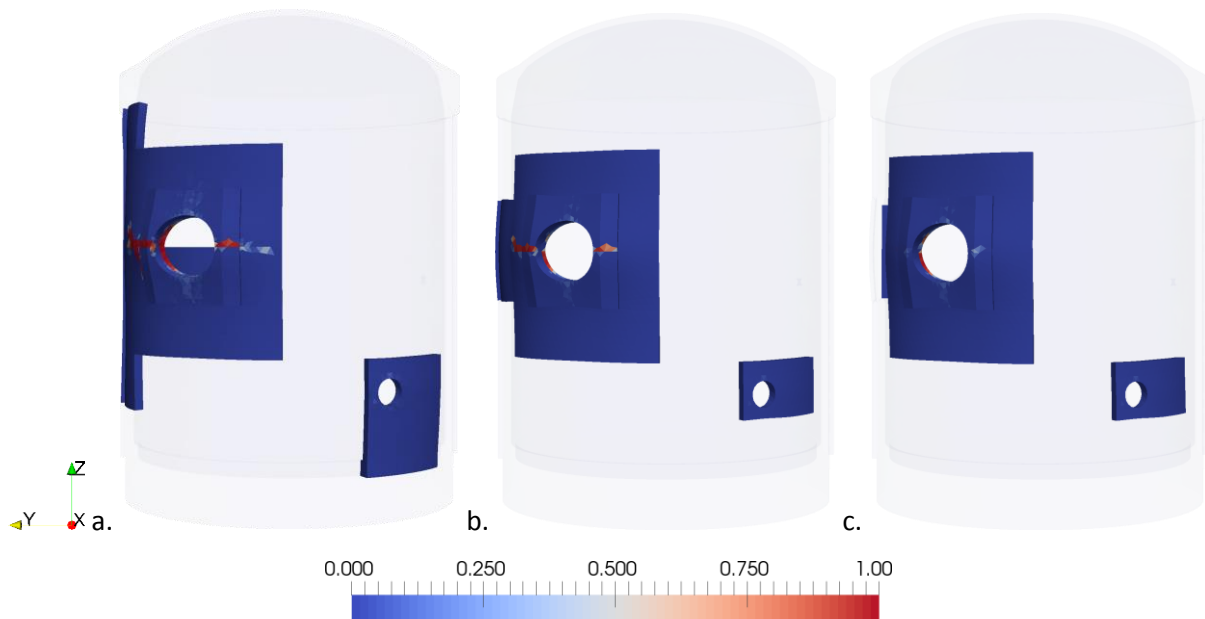


Figure 97 : Profils d'endommagement pour les trois points de collocation tracés sur la configuration déformée (amplification x500) (a : $E_1 \approx 32,4 \text{ GPa}$, b : $E_2 = E^\mu = 38 \text{ GPa}$, c : $E_3 \approx 43,6 \text{ GPa}$).

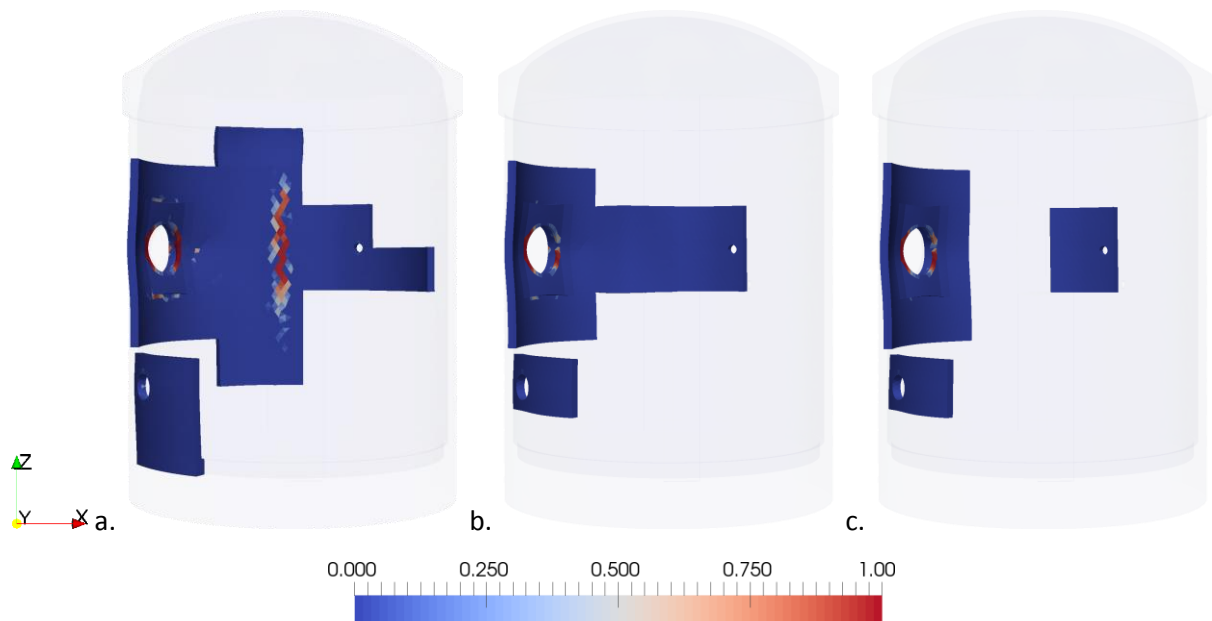


Figure 98 : Profils d'endommagement tracés sur la configuration déformée (amplification x500), vue latérale (a : $E_1 \simeq 32,4 \text{ GPa}$, b : $E_2 = E^\mu = 38 \text{ GPa}$, c : $E_3 \simeq 43,6 \text{ GPa}$).

Ces profils d'endommagement sont présentés en vue latérale en Figure 98. On observe que les zones d'intérêt supplémentaires dans le cas à module élastique faible se situent principalement au niveau de la nervure la plus proche du sas. Une fissuration interne de direction verticale apparaît pour le cas du module élastique le plus faible. Cette zone de fissuration n'est pas présente sur les points de module élastique plus élevé pour un même niveau de chargement : le niveau de contraintes est trop faible pour endommager le béton dans le cas nominal et dans le cas le plus fort mais dépasse sa résistance en traction dans le cas le plus faible. La position de cette zone fissurée, au niveau du croisement des câbles horizontaux suggère qu'elle pourrait être due à une précontrainte horizontale localement plus faible ou éventuellement à un effet de traction dû à la courbure des câbles.

La construction de ces méta-modèles par la collocation stochastique condensée nécessite un temps de calcul de 24490 s et un temps de prétraitement de 566 s. En comparaison, le calcul complet déterministe, qui n'apporte donc pas d'information sur les incertitudes nécessite 54190 s.

6 Résumé

Objectif

L'objectif de ce chapitre est de proposer un démonstrateur de l'applicabilité des méthodologies proposées dans le reste de la thèse au problème du calcul de fissuration sur une grande structure en béton armé et précontraint, plus spécifiquement au problème d'une enceinte de confinement sous pression. On cherche donc à réaliser une simulation du comportement mécanique de la maquette Vercors.

Contributions

En premier lieu, un modèle numérique de la maquette a été réalisé. Ceci inclut :

- la représentation de la géométrie de la maquette (parties béton et aciers passifs), avec les diverses hétérogénéités géométriques ;
- le maillage du béton et des aciers passifs, pré-divisés en 132 zones pour la condensation adaptative ;
- l'adaptation du maillage préexistant des câbles de précontrainte à la division en zones ;
- les choix et hypothèses de modélisation.

Par la suite, des simulations ont été réalisées en utilisant la méthode de condensation adaptative. Ces simulations ont été comparées à des simulations complètes. La méthode des éléments finis stochastiques condensés a été utilisée pour proposer une première quantification d'incertitude en tenant compte d'un aléa sur le module élastique du béton.

Résultats

La méthode de condensation adaptative permet de bien reproduire les résultats du calcul complet en termes de comportement mécanique et détecte bien la propagation de l'endommagement dans la structure. En outre, son fonctionnement à partir d'un état mécanique précédemment calculé (issu de la mise en précontrainte) semble permettre une bonne reproduction des résultats. De même la condensation de l'état initial précontraint et du chargement qui en résulte autour des zones d'intérêt permet de bien reproduire les profils de contraintes dans le matériau. Sur cette structure industrielle, la dimension du problème traité est réduite d'un facteur 8, proche de l'ordre de grandeur recherché, malgré une configuration non optimisée (dôme et radier maillés grossièrement, décomposition en zones arbitraire ne tenant pas compte des zones privilégiées d'amorçage de la fissuration).

La méthode des EFS condensés permet de réaliser une analyse d'incertitude sur le module d'Young et ses conséquences sur le comportement de la structure. Il apparaît que sur les différentes simulations, les zones d'intérêt de la condensation adaptative peuvent différer en fonction des lieux d'amorçage de l'endommagement, dépendants des paramètres matériaux incertains. Les fonctions de densité de probabilité des grandeurs d'intérêt de la structure peuvent être construites par les méthodes de Monte-Carlo et semi-analytique.

Conclusions

Il apparaît donc que la méthode de condensation adaptative apporte une plus-value réelle sur la simulation de ce type de structure, en permettant une réduction effective de la dimension du problème. La méthode des EFS condensés permet de réaliser une quantification probabiliste de grandeurs d'intérêt de cette structure pour un coût de calcul réduit.

Chapitre 7 - Conclusions & Perspectives

Ce manuscrit a présenté l'ensemble des travaux réalisés dans le cadre de ma thèse sur la simulation du comportement mécanique non linéaire des grandes structures en béton armé et précontraint.

1 Conclusions & Résultats

L'objectif de cette thèse était d'apporter des éléments méthodologiques pour améliorer la finesse des simulations de la fissuration du béton réalisables sur des structures en béton armé et précontraint, en particulier les enceintes de confinement. Comme décrit dans le Chapitre 2, au regard des connaissances actuelles, trois points bloquants sont apparus par rapport à la réalisation de simulations apportant l'information voulue sur ce type de structures :

- passage à l'échelle des simulations non linéaires ;
- prise en compte des incertitudes sur les grandes structures ;
- modélisation locale des renforts.

Des méthodologies de calcul numérique, de calcul d'incertitudes et de modélisation des hétérogénéités ont donc été apportées face aux trois verrous scientifiques identifiés.

Le Chapitre 3 décrit la méthode de condensation adaptative développée au cours de la thèse, qui permet de réduire la dimension d'un problème de grande structure à celle de sa partie fissurée. Elle exploite l'une des spécificités du problème de la fissuration sur les enceintes de confinement : dans de nombreux cas, l'endommagement est très localisé et la plus grande partie de la structure reste en régime élastique. L'approche proposée consiste en une extension de la méthode de condensation statique de Guyan au contexte du comportement non linéaire ; elle permet d'appliquer la condensation aux zones élastiques de la structure et ainsi d'éliminer leurs degrés de liberté. Son fonctionnement adaptatif à deux niveaux de condensation (locale et globale) permet de faire évoluer efficacement la modélisation lorsque le comportement de la structure évolue. Cette méthode permet de réduire la dimension du problème sans dégrader la qualité de la solution dans les zones d'intérêt. Cette approche de condensation adaptative repose sur un principe simple, aisément adaptable à d'autres types de problèmes non linéaires. En revanche, sa performance est directement liée à la dimension des zones ayant un comportement non linéaire, ainsi qu'à la décomposition en sous-domaines.

Le Chapitre 4 décrit la méthode des éléments finis stochastiques condensés développée au cours de la thèse, qui permet de réduire la dimension d'un problème non linéaire probabiliste. Cette méthode s'appuie sur la condensation adaptative et permet de l'étendre au contexte de l'analyse probabiliste du comportement mécanique non linéaire des structures. Elle exploite donc les spécificités du comportement de fissuration sur les enceintes de confinement (localisation de la fissuration), ainsi que celles de la condensation adaptative : les rigidités réduites nécessaires à la condensation adaptative sont recalculées plusieurs fois dans un contexte probabiliste (une fois pour chaque réalisation simulée avec la condensation adaptative) mais dépendent uniquement des propriétés élastiques de la structure. L'approche utilise donc deux niveaux d'approximation dans le cadre de l'analyse probabiliste : un premier niveau, qui dépend des paramètres aléatoires du problème, permet de construire une approximation de fonction de réponse mécanique et d'en déduire les grandeurs d'intérêt de la structure ; un second niveau, qui dépend uniquement des paramètres aléatoires impactant les propriétés élastiques, permet d'approximer avec un ordre plus faible les quantités condensées nécessaires au calcul à condensation adaptative. Cette méthode permet de réduire la dimension des problèmes déterministes résolus dans un cadre probabiliste et de limiter le coût des

prétraitements nécessaires à la condensation. Les FDPs des grandeurs d'intérêt peuvent par la suite être calculées en utilisant une approche de type Monte-Carlo sur le méta-modèle des grandeurs d'intérêt, ou dans certains cas l'approche semi-analytique proposée dans le cadre de la thèse. La méthode des éléments finis stochastiques condensés repose sur un principe relativement générique, aisément adaptable à d'autres types de problèmes non linéaires sous incertitudes. Comme la méthode de condensation adaptative, ses performances sont liées à la décomposition du problème en sous-domaines ainsi qu'à la localisation du comportement non linéaire. Par ailleurs, l'approche sur base de collocation proposée est compétitive en termes de performance des calculs pour des problèmes ayant une grande dimension déterministe mais une faible dimension probabiliste. L'approche semi-analytique pour le calcul des FDPs est pour l'instant au stade de prototype et ne permet pas de remplacer systématiquement le Monte-Carlo.

Le Chapitre 5 décrit la stratégie de modélisation 1D-3D développée au cours de la thèse, qui permet de représenter les renforts actifs et passifs dans un massif béton représenté en 3D. Cette approche s'appuie sur un maillage et une représentation 1D existants pour les renforts et génère une rigidité et un champ de forces nodales équivalentes à la présence d'un renfort 3D sur une nappe de nœuds formant la frontière du volume équivalent au renfort. Cette interface est ensuite liée au béton par des relations cinématique, elle n'impose donc aucune contrainte de maillage sur le volume béton. Cette approche, cinématiquement plus riche que les modélisations 1D ou 2D classiques pour les structures de grande dimension permet de représenter les effets locaux, comme la répartition des efforts autour d'un câble de précontrainte ou l'effet d'inclusion transverse. Elle est flexible et utilisable pour des structures de grandes dimensions ayant une géométrie complexe et/ou incertaine, par exemple pour des études de sensibilité. Elle permet aussi d'améliorer la qualité des simulations existantes utilisant des modélisations 1D. La modélisation 1D-3D fait le lien entre l'approche 1D classique pour les grandes structures et une approche 3D complète de modélisation des renforts : elle reproduit le comportement global du 1D lorsque l'on est dans son domaine d'utilisation (maillages les plus grossiers) et le comportement global et local d'une modélisation 3D lorsque l'on est dans son domaine d'utilisation (maillages fins). Cependant, l'amélioration des résultats nécessite l'ajout d'un certain nombre de degrés de liberté et relations cinématiques qui alourdissent le système à résoudre et la superposition acier-béton qui est conservée avec cette approche provoque une sur-rigidité locale.

Le Chapitre 6 décrit le démonstrateur proposé pour les développements réalisés : une simulation de la fissuration lors d'une mise en pression de la maquette Vercors. Cette structure est de grande dimension (20 m de hauteur), non linéaire (fissuration), complexe (pièces en acier, renforts passifs, câbles, traversées) et précontrainte. La structure est maillée de manière à permettre une décomposition en zones pour les différents matériaux. Ce démonstrateur fait intervenir la méthode de condensation adaptative, qui réduit la structure complète à quelques zones autour des traversées. La structure est condensée une fois la mise en précontrainte réalisée ; la méthode de condensation adaptative permet de réaliser un calcul non linéaire en réduisant la dimension du problème sans dégrader les résultats. On observe en particulier que suite à la mise en pression de l'enceinte des fissures latérales se créent sur la face extérieure de l'enceinte au niveau du TAM. La méthode des EFS condensés est ensuite appliquée pour réaliser une première analyse d'incertitudes par collocation en considérant le module d'Young comme un paramètre aléatoire. On observe que les grandeurs d'intérêt de la structure évoluent conformément aux résultats attendus (endommagement et déformation plus élevés lorsque la structure est moins rigide). L'étude probabiliste complète, qui permet de générer des FDPs des grandeurs d'intérêt voulues, s'avère moins coûteuse en termes de temps de calcul qu'un simple calcul déterministe de la structure complète. Cependant, l'étude proposée reste assez grossière en termes de maillage : si la réduction de dimension apportée par la condensation adaptative permet

effectivement d'améliorer l'information obtenue, c'est ici par l'apport de la quantification d'incertitudes et non par l'amélioration de la modélisation à l'échelle locale.

2 Pistes d'améliorations des développements proposés

Les méthodologies proposées ont été validées sur des simulations à différentes échelles et des éléments d'évaluation de leur intérêt par rapport au problème traité ont été apportés. Néanmoins, différentes pistes ont été évoquées qui n'ont pas pu être traitées dans le cadre de la thèse et permettraient potentiellement diverses améliorations de ces méthodes : performances des calculs, adaptation à un spectre plus général de problèmes, amélioration de la représentativité.

Concernant la méthode de condensation adaptative, plusieurs pistes d'améliorations directes semblent particulièrement intéressantes à explorer :

- la mise en place d'un couplage entre remaillage et condensation adaptative. L'intérêt de réduire la dimension du problème d'une grande structure est notamment d'améliorer la représentation à l'échelle locale. Pour cela, un algorithme de remaillage pourrait être couplé à la méthode de condensation adaptative. Ceci permettrait de traiter avec un maillage plus fin les zones d'intérêt, tout en éliminant les zones élastiques et en s'adaptant à l'état du système.
- la mise en place de critères correspondant à divers modèles mécaniques. L'implémentation actuelle dispose de critères de promotion pour les modèles d'endommagement scalaire de Mazars et Von Mises Modifié pour le béton [86,87] et pour le modèle de plasticité à écrouissage linéaire de Von Mises pour l'acier.
- la possibilité de re-condenser des zones d'intérêt lorsque, par exemple, elles rentrent de nouveau dans un régime linéaire, suite à une redistribution des contraintes qui engendrerait une refermeture des fissures. Ceci nécessitera en particulier de mettre en place des critères de re-condensation, le calcul de rigidités réduites dégradées pour tenir compte de l'endommagement du matériau, la prise en compte d'éventuelles déformations irréversibles dans les zones condensées (plasticité) ainsi que des critères de re-promotion pour les éventuelles zones recondensées qui pourraient devoir être réactivées.
- la mise en place d'un prédicteur de fissuration dans les zones condensées permettrait d'effectuer au plus juste les vérifications du critère d'amorçage et d'éliminer le paramètre p de ces vérifications, dont la calibration est actuellement du ressort de l'empirique. Ceci pourrait permettre un gain complémentaire en termes de charge de calcul dans les cas où les zones condensées sont nombreuses.

Concernant la méthode des éléments finis stochastiques condensés, différentes pistes d'améliorations directes semblent intéressantes et mériteraient d'être traitées :

- la possibilité d'utiliser différentes familles de polynômes, voire d'autres types de fonctions d'approximation en plus des polynômes de Lagrange, autoriserait des approximations d'ordre plus élevé. Ceci pourrait servir à des approximations de meilleure qualité des fonctions de réponse, notamment dans le cas de structures ayant un comportement fortement non linéaire.
- la mise en place d'une sélection automatique des variables affectant les rigidités équivalentes sur lesquelles le méta-modèle doit être construit pourrait diminuer le niveau d'expertise nécessaire au fonctionnement de la méthode. Néanmoins, ce type d'analyse se ferait au prix d'une perte de performance dans l'utilisation de la méthode car la sélection nécessiterait un plus grand nombre de prétraitements.

Concernant l'approche 1D-3D de modélisation des renforts, différentes études complémentaires semblent intéressantes et mériteraient d'être réalisées :

- l'influence de la superposition béton-renfort, qui est négligeable à l'échelle de la structure, mériterait d'être quantifiée à l'échelle locale. Le module élastique de l'acier étant environ 7 fois supérieur à celui du béton, cette superposition crée une sur-rigidité de l'ordre de 15 % par rapport au câble seul, ce qui est susceptible d'affecter la distribution locale des contraintes.
- la capacité de l'approche 1D-3D, qui utilise un maillage non conforme, à s'adapter à un maillage béton non structuré et ayant potentiellement de forts gradients de taille d'élément mériterait d'être évaluée. En particulier dans ce contexte, il serait intéressant de la comparer avec d'autres approches existant dans la littérature.
- l'adaptabilité de la stratégie proposée au cas du comportement d'une structure sous chargement cyclique mériterait d'être évaluée.
- la capacité de l'approche 1D-3D à capturer les effets d'enrobage (et en particulier l'effet des cadres anti-cisaillement sur des structures armées) devrait être évaluée, en comparaison avec des approches 3D complètes. Sur ce type d'effet, où la géométrie est incertaine et où les phénomènes ne sont pas capturés par les modèles 1D ou 2D, l'approche 1D-3D pourrait largement faciliter des analyses de sensibilité par exemple.

Concernant l'application des développements proposés à la simulation de la maquette Vercors, plusieurs développements complémentaires et études additionnelles seraient intéressants à réaliser :

- une implémentation d'un algorithme de remaillage pour les zones d'intérêt de la structure, conservant dans un premier temps l'interface conforme en bordure de zone permettrait de mettre à profit la réduction de la dimension du problème pour améliorer la finesse de la modélisation dans les zones d'intérêt. Le maillage plus fin permettrait d'accéder à des informations représentatives au niveau de la fissuration. L'interface conforme permettrait dans un premier temps de contourner le problème de la répartition des conditions aux limites sur un maillage non conforme.
- si un remaillage adaptatif permettait d'accéder à un maillage plus fin dans les zones d'intérêt de la maquette Vercors, il serait alors intéressant de modéliser les renforts dans ces zones avec l'approche 1D-3D. Cette approche permettrait d'améliorer la qualité des résultats au niveau local, tout en s'appuyant sur un maillage 1D relativement grossier des câbles à l'origine. Il serait de plus nécessaire de travailler sur la transmission des efforts et rigidités à l'interface entre zones, où un maillage et une modélisation 1D seraient en interaction avec une modélisation 1D-3D.
- sur la maquette Vercors, des informations sont disponibles quant aux propriétés du béton sur les différentes levées. L'utilisation de champs aléatoires auto corrélés et la prise en compte des levées dans les propriétés mécaniques utilisées pour la simulation apporteraient une information plus représentative.

3 Perspectives de recherche

A plus long terme, des perspectives de recherche apparaissent, qui pourraient apporter des améliorations aux méthodologies proposées, mais requièrent un travail de développement plus conséquent.

L'une des perspectives de recherche les plus importantes concernant la méthode de condensation adaptative serait la possibilité d'un remaillage complet lors de l'activation des nouvelles zones ou alternativement d'un fonctionnement avec un « catalogue » de maillages grossiers pour les zones condensées et fins pour les zones actives. Par rapport à un remaillage avec interface conforme, ceci

permettrait d'améliorer la discrétisation de la géométrie lorsque les zones sont activées et donc la représentativité du modèle. Ceci nécessitera en particulier un travail sur les interfaces entre zones d'intérêt et zones condensées, afin de définir les nouvelles conditions aux limites issues de la rigidité et du chargement condensés appliqués sur un maillage non conforme.

Les perspectives de recherche concernant la méthode des éléments finis stochastiques condensés comprennent en particulier une implémentation utilisant la même approche adaptée aux problèmes non linéaires, mais sur la base d'une méthode EFS de type Galerkin (similaire aux travaux présentés dans [25]). La méthode proposée utilisant la collocation stochastique est particulièrement adaptée aux problèmes ayant un grand nombre d de degrés de liberté dans le système mécanique et un faible nombre n de VAs. Pour construire un méta-modèle d'ordre p sur un tel système, la collocation stochastique requiert en effet, dans le cas linéaire, $(p + 1)^n$ solutions de systèmes linéaires de dimension d , pour une complexité totale en $O((p + 1)^n d^2)$. Pour le même ordre d'approximation, un chaos polynômial de type Galerkin nécessiterait une unique solution d'un système de dimension $\frac{d(n+p)!}{n!p!}$, pour une complexité totale en $O\left(\left(\frac{(n+p)!}{n!p!}\right)^2 d^2\right)$. Une implémentation de l'approche des EFS condensés sur la base d'une méthode EFS de type Galerkin pourrait donc être plus efficace en charge de calcul sur des problèmes ayant un nombre élevé de variables aléatoires, mais nécessiterait aussi plus de mémoire.

Une autre perspective de recherche sur la méthode des éléments finis stochastiques condensés est la généralisation de l'approche semi-analytique pour calculer les fonctions de densité de probabilité. Cette stratégie nécessite actuellement une certaine expertise de l'utilisateur, afin de réaliser la partition du domaine aléatoire en sous-domaines sur laquelle la fonction de réponse mécanique est bijective et de trouver les antécédents d'une valeur donnée de réponse mécanique. Cette étape, difficile dès qu'on sort des cas les plus simples (réponse mécanique directement croissante ou décroissante sur tous les paramètres), devient un point limitant. Il serait nécessaire de pouvoir réaliser cela dans le cas général via un algorithme. Une des pistes envisagées consisterait à utiliser des approximations locales bijectives de la fonction de réponse construite sur base de polynômes. Des approximations linéaires locales pourraient être envisagées, qui serviraient à résoudre ce problème inverse, avec par exemple un échantillonnage sur une grille ou par tirage aléatoire.

L'une des perspectives de recherche concernant la modélisation 1D-3D pour les hétérogénéités serait la question du traitement des superpositions acier-béton locales. Une fois que l'influence de cette superposition aura été quantifiée, l'une des questions en suspens sera celle du traitement du bord de domaine créé par l'interface acier-béton, en particulier dans le cas des modèles non locaux.

Une autre perspective de recherche concernant la modélisation 1D-3D serait le développement d'une fonctionnalité de remaillage permettant de raffiner localement la modélisation 1D-3D en fonction de la finesse du maillage béton. La question des interactions entre les différents « segments » d'une même hétérogénéité utilisant potentiellement des modélisations différentes pourra se poser, dans le cas d'une interface entre câbles 1D et 1D-3D en particulier.

Bibliographie

- [1] Ce qu'il faut retenir des résultats annuels 2015, EDF France. (2016). <https://www.edf.fr/edf/ce-qu-il-faut-retenir-des-resultats-annuels-2015>.
- [2] J. Costaz, Confinement. Enceintes, Techniques de l'ingénieur Conception, construction et exploitation des réacteurs nucléaires. base documentaire: TIB204DUO (1997). <http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/energies-th4/conception-construction-et-exploitation-des-reacteurs-nucleaires-42204210/confinement-enceintes-b3290/>.
- [3] J. Mandel, Balancing domain decomposition, *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 9 (1993) 233–241. doi:10.1002/cnm.1640090307.
- [4] C. Dohrmann, A Preconditioner for Substructuring Based on Constrained Energy Minimization, *SIAM J. Sci. Comput.* 25 (2003) 246–258. doi:10.1137/S1064827502412887.
- [5] C. Farhat, J. Mandel, The two-level FETI method for static and dynamic plate problems Part I: An optimal iterative solver for biharmonic systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 155 (1998) 129–151. doi:10.1016/S0045-7825(97)00146-1.
- [6] C. Farhat, F.-X. Roux, A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 32 (1991) 1205–1227. doi:10.1002/nme.1620320604.
- [7] C. Farhat, M. Lesoinne, P. LeTallec, K. Pierson, D. Rixen, FETI-DP: a dual–primal unified FETI method—part I: A faster alternative to the two-level FETI method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 50 (2001) 1523–1544. doi:10.1002/nme.76.
- [8] F. Feyel, J.-L. Chaboche, FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 183 (2000) 309–330. doi:10.1016/S0045-7825(99)00224-8.
- [9] L. Gendre, O. Allix, P. Gosselet, F. Comte, Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity, *Comput Mech.* 44 (2009) 233–245. doi:10.1007/s00466-009-0372-9.
- [10] I.M. Gitman, H. Askes, L.J. Sluys, Representative volume: Existence and size determination, *Engineering Fracture Mechanics*. 74 (2007) 2518–2534. doi:10.1016/j.engfracmech.2006.12.021.
- [11] P. Ladevèze, O. Loiseau, D. Dureisseix, A micro–macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 52 (2001) 121–138. doi:10.1002/nme.274.
- [12] P. Ladevèze, A. Nouy, On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 192 (2003) 3061–3087. doi:10.1016/S0045-7825(03)00341-4.
- [13] H.B. Dhia, G. Rateau, The Arlequin method as a flexible engineering design tool, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 62 (2005) 1442–1462. doi:10.1002/nme.1229.
- [14] T. Belytschko, S. Loehnert, J.-H. Song, Multiscale aggregating discontinuities: A method for circumventing loss of material stability, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 73 (2008) 869–894. doi:10.1002/nme.2156.
- [15] G. Cusatis, L. Cedolin, Two-scale study of concrete fracturing behavior, *Engineering Fracture Mechanics*. 74 (2007) 3–17. doi:10.1016/j.engfracmech.2006.01.021.
- [16] J. Rousseau, E. Frangin, P. Marin, L. Daudeville, Multidomain finite and discrete elements method for impact analysis of a concrete structure, *Engineering Structures*. 31 (2009) 2735–2743. doi:10.1016/j.engstruct.2009.07.001.
- [17] K. Haidar, J.F. Dubé, G. Pijaudier-Cabot, Modelling crack propagation in concrete structures with a two scale approach, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 27 (2003) 1187–1205. doi:10.1002/nag.318.

- [18] R.W. Clough, E.L. Wilson, Dynamic analysis of large structural systems with local nonlinearities, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 17–18, Part 1 (1979) 107–129. doi:10.1016/0045-7825(79)90084-7.
- [19] W. Schilders, Introduction to Model Order Reduction, in: W.H.A. Schilders, H.A. van der Vorst, J. Rommes (Eds.), *Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications*, Springer Berlin Heidelberg, 2008: pp. 3–32. http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-540-78841-6_1 (accessed May 26, 2016).
- [20] P.D. Spanos, R. Ghanem, Stochastic Finite Element Expansion for Random Media, *Journal of Engineering Mechanics*. 115 (1989) 1035–1053. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:5(1035).
- [21] J. Lumley, *The structure of inhomogeneous turbulent flows*, 1967.
- [22] G. Berkooz, P. Holmes, J.L. Lumley, The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 25 (1993) 539–575. doi:10.1146/annurev.fl.25.010193.002543.
- [23] C. Soize, Reduced models in the medium frequency range for general dissipative structural-dynamics systems, *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 17 (1998) 657–685. doi:10.1016/S0997-7538(99)80027-8.
- [24] A. Batou, C. Soize, N. Brie, Reduced-order computational model in nonlinear structural dynamics for structures having numerous local elastic modes in the low-frequency range. Application to fuel assemblies, *Nuclear Engineering and Design*. 262 (2013) 276–284. doi:10.1016/j.nucengdes.2013.04.039.
- [25] H.M. Panayirci, H.J. Pradlwarter, G.I. Schueller, Efficient stochastic structural analysis using Guyan reduction, *Advances in Engineering Software*. 42 (2011) 187–196. doi:10.1016/j.advengsoft.2011.02.004.
- [26] R.J. Guyan, Reduction of stiffness and mass matrices, *AIAA Journal*. 3 (1965) 380–380. doi:10.2514/3.2874.
- [27] CEA, Description of the finite element code Cast3M, (2015). <http://www-cast3m.cea.fr/>.
- [28] J. Pellet, Dualisation of the boundary conditions, in: *Code_Aster Open Source - General FEA Software*, 2011.
- [29] S.R. Idelsohn, A. Cardona, A reduction method for nonlinear structural dynamic analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 49 (1985) 253–279. doi:10.1016/0045-7825(85)90125-2.
- [30] O.P. Agrawal, K.J. Danhof, R. Kumar, A superelement model based parallel algorithm for vehicle dynamics, *Computers & Structures*. 51 (1994) 411–423. doi:10.1016/0045-7949(94)90326-3.
- [31] I. Hirai, B.P. Wang, W.D. Pilkey, An efficient zooming method for finite element analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 20 (1984) 1671–1683. doi:10.1002/nme.1620200910.
- [32] I. Hirai, Y. Uchiyama, Y. Mizuta, W.D. Pilkey, An exact zooming method, *Finite Elements in Analysis and Design*. 1 (1985) 61–69. doi:10.1016/0168-874X(85)90008-3.
- [33] B.P. Wang, W.D. Pilkey, Efficient reanalysis of locally modified structures, in: *First Chautauqua on Finite Element Modeling*, Wallace Press, Harwichport, MA, 1980: pp. 37–62.
- [34] A.K. Noor, Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis, *Finite Elements in Analysis and Design*. 2 (1986) 333–346. doi:10.1016/0168-874X(86)90020-X.
- [35] F. Deby, M. Carcasses, A. Sellier, Toward a probabilistic design of reinforced concrete durability: application to a marine environment, *Mater Struct.* 42 (2008) 1379–1391. doi:10.1617/s11527-008-9457-8.
- [36] F. Deby, M. Carcassès, A. Sellier, Probabilistic approach for durability design of reinforced concrete in marine environment, *Cement and Concrete Research*. 39 (2009) 466–471. doi:10.1016/j.cemconres.2009.03.003.
- [37] Y.J. Ren, I. Elishakoff, New results in finite element method for stochastic structures, *Computers & Structures*. 67 (1998) 125–135. doi:10.1016/S0045-7949(97)00164-8.
- [38] H.G. Matthies, Uncertainty Quantification with Stochastic Finite Elements, in: *Encyclopedia of Computational Mechanics*, John Wiley & Sons, Ltd, 2004. doi:10.1002/0470091355.ecm071.

- [39] M. Eldred, J. Burkardt, Comparison of Non-Intrusive Polynomial Chaos and Stochastic Collocation Methods for Uncertainty Quantification, in: 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition, American Institute of Aeronautics and Astronautics, n.d. <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2009-976>.
- [40] R. Pulch, Stochastic collocation and stochastic Galerkin methods for linear differential algebraic equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 262 (2014) 281–291. doi:10.1016/j.cam.2013.10.046.
- [41] A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1933. <http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-49888-6>.
- [42] N. Metropolis, S. Ulam, The Monte Carlo Method, *Journal of the American Statistical Association*. 44 (1949) 335–341. doi:10.1080/01621459.1949.10483310.
- [43] J.D. Arregui-Mena, L. Margetts, P.M. Mummery, Practical Application of the Stochastic Finite Element Method, *Arch Computat Methods Eng*. 23 (2014) 171–190. doi:10.1007/s11831-014-9139-3.
- [44] H.G. Matthies, C.E. Brenner, C.G. Bucher, C. Guedes Soares, Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids-Stochastic finite elements, *Structural Safety*. 19 (1997) 283–336. doi:10.1016/S0167-4730(97)00013-1.
- [45] D. Xiu, Fast numerical methods for stochastic computations: a review, *Communications in Computational Physics*. 5 (2009) 242–272.
- [46] G. Stefanou, The stochastic finite element method: Past, present and future, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 198 (2009) 1031–1051. doi:10.1016/j.cma.2008.11.007.
- [47] E. Patelli, H.M. Panayirci, M. Broggi, B. Goller, P. Beaurepaire, H.J. Pradlwarter, G.I. Schueller, General purpose software for efficient uncertainty management of large finite element models, *Finite Elements in Analysis and Design*. 51 (2012) 31–48. doi:10.1016/j.finel.2011.11.003.
- [48] I. Babuska, R. Tempone, G. Zouraris, Galerkin Finite Element Approximations of Stochastic Elliptic Partial Differential Equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 42 (2004) 800–825. doi:10.1137/S0036142902418680.
- [49] J. Back, F. Nobile, L. Tamellini, R. Tempone, Stochastic Spectral Galerkin and Collocation Methods for PDEs with Random Coefficients: A Numerical Comparison, in: J.S. Hesthaven, E.M. Ronquist (Eds.), *Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations*, Springer Berlin Heidelberg, 2011: pp. 43–62.
- [50] G. Stefanou, M. Georgioudakis, M. Papadrakakis, Sequentially Linear Analysis of Structures with Stochastic Material Properties, in: *Multiscale Modeling and Uncertainty Quantification of Materials and Structures*, Springer International Publishing, 2014: pp. 19–32.
- [51] H.M. Panayirci, G.I. Schueller, On the Capabilities of the Polynomial Chaos Expansion Method within SFE Analysis—An Overview, *Arch Computat Methods Eng*. 18 (2011) 43–55. doi:10.1007/s11831-011-9058-5.
- [52] L. Mathelin, M.Y. Hussaini, T.A. Zang, A Stochastic Collocation Algorithm for Uncertainty Analysis, NASA, 2003. <http://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=20030016674>.
- [53] S. Sankaran, A.L. Marsden, A Stochastic Collocation Method for Uncertainty Quantification and Propagation in Cardiovascular Simulations, *J Biomech Eng*. 133 (2011) 031001–031001. doi:10.1115/1.4003259.
- [54] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1991.
- [55] B. Sudret, A. Der Kiureghian, Stochastic finite element methods and reliability: a state-of-the-art report, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, 2000.
- [56] F. Nobile, R. Tempone, C. Webster, A Sparse Grid Stochastic Collocation Method for Partial Differential Equations with Random Input Data, *SIAM J. Numer. Anal.* 46 (2008) 2309–2345. doi:10.1137/060663660.
- [57] S.A. Smolyak, Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions, in: *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1963: p. 123.

- [58] G. Blatman, B. Sudret, Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach, *Comptes Rendus Mécanique*. 336 (2008) 518–523. doi:10.1016/j.crme.2008.02.013.
- [59] G. Blatman, B. Sudret, An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis, *Probabilistic Engineering Mechanics*. 25 (2010) 183–197. doi:10.1016/j.probengmech.2009.10.003.
- [60] P.B. Nair, A.J. Keane, Stochastic Reduced Basis Methods, *AIAA Journal*. 40 (2002) 1653–1664. doi:10.2514/2.1837.
- [61] A. Doostan, R.G. Ghanem, J. Red-Horse, Stochastic model reduction for chaos representations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 196 (2007) 3951–3966. doi:10.1016/j.cma.2006.10.047.
- [62] M. Guedri, N. Bouhaddi, R. Majed, Reduction of the stochastic finite element models using a robust dynamic condensation method, *Journal of Sound and Vibration*. 297 (2006) 123–145. doi:10.1016/j.jsv.2006.03.046.
- [63] S. Ghavamian, I. Carol, A. Delaplace, Discussions over MECA project results, *Revue Française de Génie Civil*. 7 (2003) 543–581. doi:10.1080/12795119.2003.9692509.
- [64] H.-T. Hu, F.-M. Lin, H.-T. Liu, Y.-F. Huang, T.-C. Pan, Constitutive modeling of reinforced concrete and prestressed concrete structures strengthened by fiber-reinforced plastics, *Composite Structures*. 92 (2010) 1640–1650. doi:10.1016/j.compstruct.2009.11.030.
- [65] H.-T. Hu, Y.-H. Lin, Ultimate analysis of PWR prestressed concrete containment subjected to internal pressure, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 83 (2006) 161–167. doi:10.1016/j.ijpvp.2006.02.030.
- [66] L. Jason, S. Ghavamian, A. Courtois, Truss vs solid modeling of tendons in prestressed concrete structures: Consequences on mechanical capacity of a Representative Structural Volume, *Engineering Structures*. 32 (2010) 1779–1790. doi:10.1016/j.engstruct.2010.02.029.
- [67] A. Michou, F. Benboudjema, Y. Berthaud, G. Nahas, P. Wyniecki, V. Petit, J. Dubreuil, Cracking behavior of structures pre-stressed by bonded strands or unbonded strands TGG, in: *Technical Innovation in Nuclear Civil Engineering (TINCE)*, Paris, France, 2013.
- [68] A. Torre-Casanova, *Prise en compte de la liaison acier-béton pour le calcul de structures industrielles*, phdthesis, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2012. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00777204/document> (accessed July 16, 2016).
- [69] L. Jason, A. Torre-Casanova, L. Davenne, X. Pinelli, Cracking behavior of reinforced concrete beams: experiment and simulations on the numerical influence of the steel-concrete bond, *Int J Fract*. 180 (2013) 243–260. doi:10.1007/s10704-013-9815-6.
- [70] E. Lorentz, Ill-posed boundary conditions encountered in 3D and plate finite element simulations, *Finite Elements in Analysis and Design*. 41 (2005) 1105–1117. doi:10.1016/j.finela.2005.01.002.
- [71] M. David, *Approche multi-échelle du comportement mécanique des structures en béton armé - Application aux enceintes de confinement des centrales nucléaires*, PhD Thesis, Ecole Polytechnique X, 2012. <https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00765705/document>.
- [72] M. David, J.-J. Marigo, C. Pideri, Homogenized Interface Model Describing Inhomogeneities Located on a Surface, *J Elast*. 109 (2012) 153–187. doi:10.1007/s10659-012-9374-5.
- [73] L. Jendele, J. Červenka, On the solution of multi-point constraints – Application to FE analysis of reinforced concrete structures, *Computers & Structures*. 87 (2009) 970–980. doi:10.1016/j.compstruc.2008.04.018.
- [74] E. Sanchez-Palencia, ed., *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1980. http://dx.doi.org/10.1007/3-540-10000-8_6.
- [75] N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud, J.-F. Remacle, A computational approach to handle complex microstructure geometries, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 192 (2003) 3163–3177. doi:10.1016/S0045-7825(03)00346-3.
- [76] N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moës, T. Belytschko, Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 190 (2001) 6183–6200. doi:10.1016/S0045-7825(01)00215-8.

- [77] T.S. Phan, J.-L. Tailhan, P. Rossi, P. Bressolette, F. Mezghani, Numerical modeling of the rebar/concrete interface: case of the flat steel rebars, *Mater Struct.* 46 (2012) 1011–1025. doi:10.1617/s11527-012-9950-y.
- [78] T. Mimoto, T. Sakaki, T. Mihara, I. Yoshitake, Strengthening system using post-tension tendon with an internal anchorage of concrete members, *Engineering Structures.* 124 (2016) 29–35. doi:10.1016/j.engstruct.2016.06.003.
- [79] P. Dybeł, K. Furtak, The effect of ribbed reinforcing bars location on their bond with high-performance concrete, *Archives of Civil and Mechanical Engineering.* 15 (2015) 1070–1077. doi:10.1016/j.acme.2015.03.008.
- [80] L.A.M. Mendes, L.M.S.S. Castro, A new RC bond model suitable for three-dimensional cyclic analyses, *Computers & Structures.* 120 (2013) 47–64. doi:10.1016/j.compstruc.2013.01.007.
- [81] B. Richard, F. Ragueneau, C. Cremona, L. Adelaide, J.-L. Tailhan, A three-dimensional steel/concrete interface model including corrosion effects, *Engineering Fracture Mechanics.* 77 (2010) 951–973.
- [82] M. German, J. Pamin, FEM simulations of cracking in RC beams due to corrosion progress, *Archives of Civil and Mechanical Engineering.* 15 (2015) 1160–1172. doi:10.1016/j.acme.2014.12.010.
- [83] E.T. Thostenson, T.-W. Chou, On the elastic properties of carbon nanotube-based composites: modelling and characterization, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 36 (2003) 573. doi:10.1088/0022-3727/36/5/323.
- [84] H. Moulinec, P. Suquet, A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 157 (1998) 69–94. doi:10.1016/S0045-7825(97)00218-1.
- [85] A. Krayani, G. Pijaudier-Cabot, F. Dufour, Boundary effect on weight function in nonlocal damage model, *Engineering Fracture Mechanics.* 76 (2009) 2217–2231. doi:10.1016/j.engfracmech.2009.07.007.
- [86] J. Mazars, A description of micro and macroscale damage of concrete structures, *Engineering Fracture Mechanics.* 25 (1986) 729–737.
- [87] R.H.J. Peerlings, R. De Borst, W.A.M. Brekelmans, M.G.D. Geers, Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture, *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials.* 3 (1998) 323–342.
- [88] G. Pijaudier-Cabot, Z.P. Bažant, Nonlocal Damage Theory, *J. Eng. Mech.* 113 (1987) 1512–1533. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:10(1512).
- [89] C. Giry, F. Dufour, J. Mazars, Stress-based nonlocal damage model, *International Journal of Solids and Structures.* 48 (2011) 3431–3443. doi:10.1016/j.ijsolstr.2011.08.012.
- [90] G. Pijaudier-Cabot, F. Dufour, Non local damage model, *European Journal of Environmental and Civil Engineering.* 14 (2010) 729–749. doi:10.1080/19648189.2010.9693260.
- [91] F. Dufour, G. Legrain, G. Pijaudier-Cabot, A. Huerta, Estimation of crack opening from a two-dimensional continuum-based finite element computation, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 36 (2012) 1813–1830. doi:10.1002/nag.1097.
- [92] A. Llau, L. Jason, J. Baroth, F. Dufour, Adaptive zooming method for the simulation of quasi-brittle materials, in: *Applied Mechanics and Materials - Damage Mechanics: Theory, Computation and Practice*, Trans Tech Publications, Troyes, 2015: pp. 284–291. doi:10.4028/www.scientific.net/AMM.784.284.
- [93] B. Masson, E. Galenne, E. Oukhemanou, C. Aubry, G. Laou-Sio-Hoi, Vercors: a 1/3 scaled mockup and an ambitious research program to better understand the different mechanisms of leakage and aging, in: *Conference on Contribution of Materials Investigations and Operating Experience to LWRs' Safety, Performance and Reliability*, Avignon (France), 2014.
- [94] S. Michel-Ponnelle, Description de l'essai PACE 1450 et de la maquette VeRCORS à destination du projet MACENA, Research Report - EDF R&D, 2015.
- [95] J. Mazars, Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure, Thesis, Université Paris VI, 1984.

- [96] T. de Larrard, J.B. Colliat, F. Benboudjema, J.M. Torrenti, G. Nahas, Effect of the Young modulus variability on the mechanical behaviour of a nuclear containment vessel, *Nuclear Engineering and Design*. 240 (2010) 4051–4060. doi:10.1016/j.nucengdes.2010.09.031.
- [97] A. Llau, L. Jason, F. Dufour, J. Baroth, Adaptive zooming method for the analysis of large structures with localized nonlinearities, *Finite Elements in Analysis and Design*. 106 (2015) 73–84. doi:10.1016/j.finel.2015.07.011.
- [98] A. Llau, L. Jason, J. Baroth, F. Dufour, Structural zooming method for the simulation of large reinforced concrete structures, in: *SMiRT 23: Structural Mechanics in Reactor Technology*, Manchester, 2015.
- [99] M. Rosenblatt, Remarks on a Multivariate Transformation, *Ann. Math. Statist.* 23 (1952) 470–472. doi:10.1214/aoms/1177729394.
- [100] D.H. Fremlin, *Measure theory*, Torres Fremlin, 2010.
- [101] J. Baroth, P. Bressolette, C. Chauvière, M. Fogli, An efficient SFE method using Lagrange polynomials: Application to nonlinear mechanical problems with uncertain parameters, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 196 (2007) 4419–4429. doi:10.1016/j.cma.2007.04.017.
- [102] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical recipes in FORTRAN*, Cambridge University Press, 1992.
- [103] J. Humbert, J. Baroth, L. Daudeville, Probabilistic analysis of a pull-out test, *Mater Struct.* 43 (2009) 345–355. doi:10.1617/s11527-009-9493-z.
- [104] European Committee for Standardization, *EN 1992-1-1 Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings*, CEN, Brussels, 2005.
- [105] A. Aït-Mokhtar, R. Belarbi, F. Benboudjema, N. Burlion, B. Capra, M. Carcassès, J.-B. Colliat, F. Cussigh, F. Deby, F. Jacquemot, T. de Larrard, J.-F. Lataste, P. Le Bescop, M. Pierre, S. Poyet, P. Rougeau, T. Rougelot, A. Sellier, J. Séménadisse, J.-M. Torrenti, A. Trabelsi, P. Turcry, H. Yanez-Godoy, Experimental investigation of the variability of concrete durability properties, *Cement and Concrete Research*. 45 (2013) 21–36. doi:10.1016/j.cemconres.2012.11.002.
- [106] A. Llau, J. Baroth, L. Jason, F. Dufour, Condensed SFEs for nonlinear mechanical problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 309 (2016) 434–452. doi:10.1016/j.cma.2016.06.014.
- [107] A. Llau, J. Baroth, L. Jason, F. Dufour, Méthode EFS condensée pour l’analyse des structures sous incertitudes, in: *JFMS: Journées Nationales Fiabilité Des Matériaux et Des Structures*, Nancy, 2016. <https://videos.univ-lorraine.fr/index.php?act=view&id=3487>.
- [108] N. Herrmann, C. Niklasch, D. Kiefer, L. Gerlach, Y. Le Pape, S. Fortier, PACE 1450: An Experimental Test Setup for the Investigation of the Crack Behaviour of Prestressed Concrete Containment Walls, in: *16th International Conference on Nuclear Engineering*, Orlando, Florida, USA, 2008: pp. 1–8. doi:10.1115/ICONE16-48029.
- [109] A. Llau, L. Jason, F. Dufour, J. Baroth, Modelling strategies of prestressing tendons and reinforcement bars in concrete structures, in: *Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Hersonissos, Crete Island, Greece, 2016. <https://eccomas2016.org/proceedings/pdf/8463.pdf>.
- [110] C. Tropea, A.L. Yarin, J.F. Foss, *Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics*, Springer Science & Business Media, 2007.
- [111] A. Casanova, L. Jason, L. Davenne, Bond slip model for the simulation of reinforced concrete structures, *Engineering Structures*. 39 (2012) 66–78. doi:10.1016/j.engstruct.2012.02.007.
- [112] C. Mang, L. Jason, L. Davenne, A new bond slip model for reinforced concrete structures. Validation by modelling a reinforced concrete tienull, *Engineering Computations*. (2015). doi:10.1108/EC-11-2014-0234.
- [113] A. Llau, L. Jason, F. Dufour, J. Baroth, Finite element modelling of 1D steel components in reinforced and prestressed concrete structures, *Engineering Structures*. 127 (2016) 769–783. doi:10.1016/j.engstruct.2016.09.023.

- [114] S.-J. Jeon, C.-H. Chung, Axisymmetric modeling of prestressing tendons in nuclear containment dome, *Nuclear Engineering and Design*. 235 (2005) 2463–2476. doi:10.1016/j.nucengdes.2005.06.007.
- [115] J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot, Continuum Damage Theory - Application to Concrete, *J. Eng. Mech.* 115 (1989) 345–365. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:2(345).
- [116] P. Badel, E. Lorentz, Critères de convergence en mécanique des solides, in: CSMA 2011 / 10e colloque national en calcul des structures, Giens, France, 2011. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00592774/document>.
- [117] Z. Bažant, M. Jirásek, Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress, *J. Eng. Mech.* 128 (2002) 1119–1149. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119).
- [118] International Benchmark Vercors 2015, Benchmark Workshop - Modeling the behavior of the VeRCoRs mock-up, 2016.
- [119] P.M. Alliard, Etudes de dimensionnement d'une maquette d'enceinte double paroi de type P'4 - Pré-dimensionnement et analyse des effets d'échelle, Tractebel Engineering SA, 2012.