



**HAL**  
open science

# Synthèse d'observateurs pour des classes de systèmes non linéaires avec des sorties échantillonnées et retardées

Omar Hernandez Gonzalez

## ► To cite this version:

Omar Hernandez Gonzalez. Synthèse d'observateurs pour des classes de systèmes non linéaires avec des sorties échantillonnées et retardées. Automatique. Normandie Université; Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (Cuernavaca, Mor., México), 2017. Français. NNT: 2017NORMC202 . tel-01492898

**HAL Id: tel-01492898**

**<https://theses.hal.science/tel-01492898>**

Submitted on 20 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

## THESE

**Pour obtenir le diplôme de doctorat**

**Spécialité** (Automatique, signal, productique, robotique)

**Préparée au sein de « Université Caen Normandie »**

**En partenariat international avec « Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico » « Mexique »**

### **Synthèse d'observateurs pour des classes de systèmes non linéaires avec des sorties échantillonnées et retardées**

**Présentée et soutenue par  
Omar HERNANDEZ GONZALEZ**

**Thèse soutenue publiquement le (18 janvier 2017)  
devant le jury composé de**

M. LOZANO Rogelio	Professeur – Univ. de Technologie de Compiègne	Rapporteur
M. PETIT Nicolas	Professeur – Univ. MINES ParisTech	Rapporteur
M. GARCIA Germain	Professeur - INSA de Toulouse	Examineur
M. M'SAAD Mohammed	Professeur - ENSICAEN	Examineur
M. MENARD Tomas	Maître de Conférence – Université de Caen	Examineur
M. ASTORGA ZARAGOZA Carlos Manuel	Professeur - CENIDET	Examineur

**Thèse dirigée par FARZA Mondher  
GUERRERO RAMIREZ Gerardo-Vicente**

**GREYC  
CENIDET**



Structures, Information, Matières et Matériaux





## Résumé

Les résultats présentés dans cette thèse s'articulent autour de la synthèse d'observateurs de type grand gain pour des classes de systèmes non linéaires. Une classe de systèmes multi-entrées/multi-sorties non uniformément observables a tout d'abord été considérée et un observateur dont le gain est issu de la résolution d'une équation différentielle ordinaire de Lyapunov a été proposé. La convergence exponentielle de l'erreur d'observation sous-jacente a été établie sous une condition d'excitation persistante bien appropriée. La synthèse de l'observateur proposé a été ensuite reconsidérée pour prendre en compte l'échantillonnage et la présence de retard sur la sortie. L'observateur résultant de la resynthèse a une structure en cascade avec des systèmes en chaîne où le premier système de la cascade estime l'état retardé tandis que l'état du dernier système est une estimation de l'état instantané du système. La deuxième classe de systèmes considérée dans cette thèse est une forme normale observable multi-sorties comportant des incertitudes et dont la sortie est échantillonnée et retardée. Un observateur en cascade a été proposé pour l'estimation de l'état instantané du système. Les performances des différents observateurs proposés ont été illustrées à travers plusieurs exemples en simulation tout au long de de la thèse.

**Mots-clés:** Systèmes non linéaires , Observateur à grand gain, Observateur continu-discret, Observateur en cascade, Excitation persistante, Moteur Stirling à piston libre, Bioréacteur.

## Abstract

The results given in this thesis deal with the design of high gain observers for some classes on nonlinear systems. A class of multi-inputs/multi-output non uniformly observable systems has been first considered and an observer the gain of which is issued from the resolution of a Lyapunov ordinary differential equation has been proposed. The exponential convergence of the underlying observation error has been established under an appropriate persistent excitation condition. The design of the proposed observer has then been reconsidered in order to account for the sampling and delay processes which may occur on the output. The redesigned observer assumes a cascade structure with chained systems where the head of the cascade is an observer for the delayed state while the state of the last system in the cascade constitutes an estimation of the system actual state. The second class of systems considered in this thesis is a multi-outputs observable normal form involving some uncertainties and with a delayed sampled output. A cascade observer allowing the estimation of the system actual state has been proposed. The performance and main properties of the proposed observers have been illustrated in simulation by considering many examples throughout this thesis.

**Keywords:** Nonlinear systems, High gain observer, Continuous-discrete observer, Cascade observer, Persistent excitation, Free piston Stirling engine, Bioreactor.



à Dieu

*"Ne t'ai-je pas commandé : Sois fort et courageux ? Ne crains pas, ne t'effraie pas, car le Seigneur ton Dieu sera avec toi partout où tu iras..."*  
*Josué 1 :9*



## Remerciements

Je tiens à remercier vivement mes encadrants de thèse M. Mondher Farza et M. Thomas Ménard qui ont accepté de m'encadrer en tant que doctorant, je vous remercie de votre patience et de votre attention à tout instant sur ma thèse, pour vos conseils avisés et votre écoute qui avez été prépondérants pour la bonne réussite de ce travail. Votre compréhension et confiance ont été des éléments moteurs pour moi. Un merci tout particulier à M. Farza pour m'avoir appris à me débrouiller dans la vie professionnelle. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec vous, et j'espère que nous pourrons faire des partenariats à l'avenir.

J'adresse de chaleureux remerciements à M. Boubekur Targui pour m'avoir proposé à faire ma thèse au sein de l'université de Caen, et pour m'avoir permis de vivre l'expérience d'étudier et de vivre en France. Je le remercie également pour ses bons conseils et ses explications. J'espère aussi que nous puissions collaborer dans des travaux à l'avenir. J'associe à ces remerciements toute l'équipe de GREYC d'automatique (M. M'Saad, M. Miloud, M. Olivier, M. Eric and M. Mathieu). C'était très agréable de travailler tous les jours avec vous ; un grand merci pour votre accueil.

Je souhaite remercier M. C.-M. Astorga-Zaragoza et M. G.-V. Guerrero-Ramírez qui m'ont permis de développer ma thèse doctorale dans le CENIDET. Un merci tout particulier à M. Astorga pour son amitié et sa parfaite implication sur les travaux que nous avons réalisés ces dernières années.

Je voudrais remercier les rapporteurs qui m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie dans mon jury de soutenance : M. Rogelio Lozano, Professeur de Technologie de Compiègne, et M. Nicolas Petit, Professeur de MINES Paris Tech, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je voudrais aussi remercier les personnes qui ont participé dans le jury de ma soutenance : M. Germain Garcia et M. Mohammed M'Saad qui ont accepté d'être examinateurs de ce travail de thèse.

Mes remerciements s'adressent également à ma femme Eusebia, qui, pour mon plus grand bonheur partage ma vie et mes expériences professionnelles depuis très longtemps. Merci d'avoir fait ce chemin avec moi et de m'avoir encouragé sur ma voie. Je la remercie d'avoir partagé nos rêves ensemble. Je la remercie d'avoir été à mes côtés dans les bons moments mais surtout pendant les moments difficiles de ma vie. Sans elle à mes côtés, ma vie n'aurait pas la même saveur.

Et bien sûr, un merci à toutes celles et ceux qui m'ont accompagné durant cette thèse. En particulier Ibtissem qui a été présente tout au long de ma thèse, pour les discussions scientifiques, techniques et religieuses. Je voudrais surtout la remercier pour son amitié. Merci à Abdelhak, Ali et Clément pour leurs conversations amusantes, ainsi que les rafraîchissantes pauses et soirées de Couscous.

Enfin, merci à mes parents Jesus et Irma sans qui je n'aurai pu commencer ni finir



cette épreuve. Vous êtes toujours un exemple dans ma vie, je vous remercie d'avoir cru à mes rêves. Merci aussi à ma soeur Olivia qui est un bel exemple de persévérance. Je remercie tous les trois d'être avec moi dans les bons et difficiles moments de ma vie. Je remercie mes deux familles Hernández et González pour leur soutien inconditionnel, et surtout mes tantes Silvia et Haydée d'avoir été près de moi à tout moment.

---

# Publications

---

## Revues internationales

- [1] M. Farza, O. Hernández-González, T. Ménard, B. Targui, M. M'Saad, and C.-M. Astorga-Zaragoza. Cascade observer design for a class of nonlinear uncertain systems with long delay and sampled output. *Automatica*, Submitted 2016. Submitted Automatica.
- [2] O. Hernández-González, M. Farza, T. Ménard, B. Targui, M. M'Saad, and C.-M. Astorga-Zaragoza. A cascade observer for a class of mimo non uniformly observable systems with delayed sampled outputs. *Systems & Control Letters*, Accepted 2017.
- [3] O. Hernández-González, T. Ménard, M. Farza, B. Targui, C.-M. Astorga-Zaragoza, and G.V. Guerrero-Ramírez. Continuous-discrete time observer for a class of state affine nonlinear systems : application to an induction motor. *International Journal of Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering*, 10(1) :2072–2078, 2016. IJA-STA, Special Issue AND, Tunis, Tunissia.

## Conférences internationales

- [4] M. Farza, Omar Hernández, T. Ménard, and Mohammed M'Saad. Cascade predictors design for a class of nonlinear uncertain systems with delayed state- application to biorecator. In *2016 17th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)*, pages –, Dec 2016.
- [5] O. Hernández, T. Ménard, M. Farza, C. M. Astorga-Zaragoza, and G. V. Guerrero-Ramírez. High gain observer for a class of nonlinear systems with sampled measurements : Application to a free-piston stirling engine. In *2015 16th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)*, pages 805–810, Dec 2015.
- [6] O. Hernández-González, T. Ménard, B. Targui, M. Farza, M. M'Saad, and C.-M. Astorga-Zaragoza. Cascade observer design for a class of nonlinear uncertain systems : Application to bioreactor. *IFAC-PapersOnLine*, 49(7) :85 – 90, 6-8 June 2016. 11th {IFAC} Symposium on Dynamics and Control of Process Systems Including Biosystems DYCOPS-CAB 2016 Trondheim, Norway.
- [7] B. Targui, O. Hernández-González, C. M. Astorga-Zaragoza, and G. V. Guerrero-Ramírez. Observer design for a class of lipschitz nonlinear systems with delayed outputs : time-varying delay. In *2015 Congreso Nacional*

*de Control Automático, AMCA 2015, Cuernavaca, Morelos, México, pages 606–610, Octubre 2015.*

# Table des matières

Table des figures	xv
Liste des tableaux	xvii
Notation	1
<b>1 Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>2 Observateurs pour des systèmes non linéaires avec sortie disponible en temps continu</b>	<b>13</b>
2.1 Introduction . . . . .	13
2.2 Observateur continu pour une classe de systèmes non linéaires non uniformément observables . . . . .	14
2.2.1 Formulation du problème . . . . .	15
2.2.2 Synthèse de l'observateur . . . . .	17
2.2.3 Analyse de convergence . . . . .	18
2.3 Observateur continu pour une classe de systèmes non linéaires incertains	22
2.3.1 Formulation du problème . . . . .	22
2.3.2 Synthèse de l'observateur . . . . .	24
2.3.3 Analyse de convergence . . . . .	25
2.4 Conclusion . . . . .	26
<b>3 Observateur continu-discret pour une classe de systèmes non linéaires</b>	<b>27</b>
3.1 Introduction . . . . .	27
3.2 Formulation du problème . . . . .	28
3.3 Observateur continu-discret . . . . .	29
3.4 Analyse de convergence . . . . .	31

3.5	Exemples . . . . .	34
3.5.1	Application à un moteur asynchrone . . . . .	34
3.5.2	Application à moteur Stirling à piston libre . . . . .	37
3.6	Conclusion . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Observateur en cascade pour une classe de systèmes non linéaires MIMO avec sorties échantillonnées et retardées</b>	<b>47</b>
4.1	Introduction . . . . .	47
4.2	Formulation du problème . . . . .	48
4.3	Synthèse de l'observateur . . . . .	49
4.4	Analyse de convergence . . . . .	53
4.5	Exemples . . . . .	60
4.5.1	Exemple académique . . . . .	60
4.5.2	Observateur en cascade appliqué à un Moteur Stirling à Piston Libre . . . . .	62
4.6	Conclusion . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Synthèse d'observateur en cascade pour une classe de systèmes non linéaires incertains avec sorties échantillonnées et retardées</b>	<b>71</b>
5.1	Introduction . . . . .	71
5.2	Formulation du problème . . . . .	72
5.3	Synthèse d'un observateur en cascade pour des sorties retardées disponibles en temps continu . . . . .	75
5.4	Synthèse d'un observateur pour des sorties échantillonnées et retardées	92
5.5	Exemples . . . . .	96
5.5.1	Application à un exemple académique . . . . .	96
5.5.2	Application à un bioréacteur typique . . . . .	98
5.6	Conclusion . . . . .	102
<b>6</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>107</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>111</b>
	<b>Annexe</b>	<b>119</b>
<b>A</b>	<b>Quelques rappels sur l'observabilité des systèmes non linéaires</b>	<b>119</b>
A.1	Observabilité . . . . .	119

A.1.1	Quelques définitions . . . . .	120
A.1.2	$U$ -uniforme observabilité . . . . .	122
A.1.3	Observabilité des systèmes mono-sortie bilinéaires . . . . .	122
A.1.4	Observabilité des systèmes mono-sortie affines en la commande .	123
A.1.5	Observabilité des systèmes affines en l'état . . . . .	124
A.2	Observateurs . . . . .	125
A.2.1	Systèmes linéaires stationnaires : observateur de Luenberger . .	127
A.2.2	Systèmes linéaires temps variant : Filtre de Kalman . . . . .	127
A.2.3	Systèmes mono-sortie affines en la commande . . . . .	128
A.2.4	Systèmes mono-sortie non affines en la commande . . . . .	130
<b>B</b>	<b>Moteur Stirling à piston libre</b>	<b>133</b>
B.1	Modèle non linéaire du moteur Stirling à piston libre . . . . .	135
B.1.1	Le modèle isotherme pour la thermodynamique . . . . .	137
B.1.2	Équations sans dimension . . . . .	137
<b>C</b>	<b>Tableaux</b>	<b>141</b>
<b>D</b>	<b>Lemmes techniques</b>	<b>143</b>
D.1	Lemmes des Chapitre 4 . . . . .	143



# Table des figures

3.1	Schéma d'un observateur d'état continu-discret . . . . .	27
3.2	<i>Schéma représentatif d'un moteur asynchrone</i> . . . . .	35
3.3	Estimation de l'état du moteur asynchrone avec $\Delta_k = 10\text{msec.}$ et $\theta = 10.$	40
3.4	Erreur d'observation pour le moteur asynchrone avec $\Delta_k = 10\text{msec.}$ et $\theta = 10.$ . . . . .	41
3.5	Estimation de l'état du moteur asynchrone avec $\Delta_k = 100\text{msec.}$ et $\theta = 10.$	42
3.6	Erreur d'observation pour le moteur asynchrone avec $\Delta_k = 100\text{msec.}$ et $\theta = 10.$ . . . . .	43
3.7	Estimation de l'état du <b>FPSE</b> avec l'observateur continu-discret : $\Delta_k = 0.1\text{sec.}$ et $\theta = 1.2.$ . . . . .	44
3.8	Estimation de l'état du <b>FPSE</b> avec l'observateur continu-discret : $\Delta_k = 1\text{sec.}$ et $\theta = 1.1.$ . . . . .	45
4.1	Observateur en cascade pour une sortie échantillonnée et retardée . . . . .	47
4.2	La séquence des itérations $j = 0, 1, \dots, m$ . . . . .	50
4.3	Estimation de l'état retardé avec l'observateur en cascade ( $m = 2$ pour $\Delta_k = 0.3s$ et $\tau = 0.4s$ , avec $\lambda = 0.5$ et $\theta = 2$ ) . . . . .	62
4.4	Estimation de l'état retardé avec l'observateur en cascade ( $m = 2$ pour $\Delta_k = 0.3s$ et $\tau = 0.4s$ , avec $\lambda = 0.5$ et $\theta = 2$ ) . . . . .	63
4.5	Estimation de l'état retardé avec l'observateur en cascade ( $m = 2$ pour $\Delta_k = 0.3s$ et $\tau = 0.4s$ , avec $\lambda = 1.5$ et $\theta = 2$ ) . . . . .	64
4.6	Estimation de l'état retardé avec l'observateur en cascade ( $m = 2$ pour $\Delta_k = 0.3s$ et $\tau = 0.4s$ , avec $\lambda = 1.5$ et $\theta = 2$ ) . . . . .	65
4.7	Norme de l'erreur d'observation $\ \tilde{x}_m(t)\ $ avec $m = 5$ (pour $\Delta_k = 0.3s$ et $\tau = 0.8s$ , avec $\theta = 2$ ) . . . . .	66
4.8	Estimation de l'état retardé avec l'observateur en cascade ( $m = 9$ pour $\Delta_k = 0.3s$ et $\tau = 1.6s$ , avec $\lambda = 1.2$ et $\theta = 1.5$ ) . . . . .	67
4.9	Estimation de l'état retardé avec l'observateur en cascade ( $m = 9$ pour $\Delta_k = 0.3s$ et $\tau = 1.6s$ , avec $\lambda = 1.2$ et $\theta = 1.5$ ) . . . . .	68
4.10	Estimation de l'état du <b>FPSE</b> avec l'observateur en cascade continu-discret ( $m = 2$ pour $\Delta_k = 1s$ et $\tau = 1s$ , avec $\lambda = 1$ et $\theta = 1.2$ ) . . . . .	69
4.11	Estimation de l'état du <b>FPSE</b> avec l'observateur en cascade continu-discret ( $m = 9$ pour $\Delta_k = 1s$ et $\tau = 5s$ , avec $\lambda = 0.5$ et $\theta = 1.2$ ) . . . . .	70
5.1	Estimation de l'état $x(t)$ avec $\theta = 4$ , $\Delta_k = 0.5$ , $\tau = 1$ , $m = 2$ et $\lambda = 0.5$	98



5.2	Norme de l'erreur d'observation $\ \tilde{z}_m(t)\ $ avec $m = 2$ (pour $\Delta_k = 0.5$ et $\tau = 1$ , avec $\theta = 4$ ) . . . . .	99
5.3	Estimation de $x^1$ et $x^2$ avec $\theta = 4$ , $\Delta_k = 0.5$ , $\tau = 10$ et $m = 8$ . . . . .	100
5.4	Estimation de $x^1$ et $x^2$ avec $\theta = 4$ , $\Delta_k = 0.5$ , $\tau = 10$ et $m = 15$ . . . . .	101
5.5	Norme de l'erreur d'observation $\ \tilde{z}_m(t)\ $ avec $m = 2$ (pour $\Delta_k = 0.5$ et $\tau = 1$ , avec $\theta = 4$ ) . . . . .	102
5.6	Évolution du taux de dilution . . . . .	102
5.7	Estimations de $x_1$ et $r$ avec $\Delta_k = 0.5h$ , $\tau = 1h$ et $m = 2$ . . . . .	103
5.8	Estimation de $x_1$ et $r$ avec $\Delta_k = 0.5h$ , $\tau = 3h$ et $m = 6$ . . . . .	104
5.9	Estimation de $x_1$ et $r$ avec $\Delta_k = 0.5h$ , $\tau = 8h$ et $m = 12$ . . . . .	105
B.1	Moteur Stirling à piston libre . . . . .	134
B.2	Système d'énergie Dish-Stirling . . . . .	135
B.3	<i>Schema du Moteur Stirling à Piston Libre</i> . . . . .	136

# Liste des tableaux

C.1 Paramètres du moteur asynchrone . . . . .	141
C.2 <i>Nomenclature du Moteur Stirling à Piston Libre</i> . . . . .	142



# Notation

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel de dimension $n$ construit sur le corps des réels.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$ .
$I_n$	Matrice d'identité de dimension $n \times n$ (appropriées).
$0_{n \times m}$	Matrice nulle de dimension $n \times m$ (appropriées).
$t$	Variable temporelle.
$\theta$	Paramètre de réglage du gain de l'observateur.
$\lambda_{\min}(\dots)$	La plus petite valeur propre de la matrice carrée $(\cdot)$
$\lambda_{\max}(\dots)$	La plus grande valeur propre de la matrice carrée $(\cdot)$
$[a, b]$	Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$
$[a, b[$	Intervalle semi-fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$
$]a, b[$	Intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$
$\{1, \dots, r\}$	Ensemble des $r$ premiers nombres entiers positifs
$U$	Sous ensemble dans $\mathbb{R}^n$
$x = [x^1, \dots, x^n]$	Vecteur d'état instantané
$x^1 \in \mathbb{R}^p$	Sous vecteur de $x \in \mathbb{R}^n$
$x_1 \in \mathbb{R}$	Variable d'état
$\triangleq$	Égal par définition
$ a $	Valeur absolue du nombre réel $a$
$x^T$	Transposée du vecteur $x$
$\ x\ $	Norme euclidienne du vecteur $x$
$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$	Dérivé temporelle de l'état $x$
$A^T$	Transposée de la matrice $A$
$\ A\ $	Norme euclidienne de la matrice $A$
$diag(a_1, \dots, a_p)$	Matrice diagonale constituée par $a_i$ , où $i = 1, \dots, p$
$\Delta_\theta$	Matrice diagonale de dimension $n \times n$
$\sup x(t)$	Supremo du vecteur $x$
$\tau$	Retard de temps

## *Notation*

### **Abréviations :**

SNL	Système non linéaire
MIMO	Multi-entrées/ Multi-sorties (Multi Input / Multi Output)
SISO	Mono-entrées/ Mono-sorties (Single Input / Single Output)
LMI	Inégalité Matricielle Linéaire (Linear Matrix Inequality)
ODE	Équation Différentielle Ordinaire (Ordinary Differential Equation )
SDP	Matrice symétrique définie positive
DDE23	Équation différentielle retardée avec un retard constante (Delay Differential Equations with a constant Delay)
FPSE	Moteur Stirling à Piston Libre (Free Piston Stirling Engine)

# Chapitre 1

## Introduction générale

Les travaux de recherche sur l'observation et la synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires continuent à susciter l'intérêt de la communauté automatique à travers le monde. Plusieurs approches ont été adoptées pour la synthèse de ces observateurs. La première approche, qui a suscité beaucoup d'intérêt pendant longtemps, est celle basée sur le filtre de Kalman. Cet intérêt est essentiellement dû à une simplicité relative dans sa mise en oeuvre même pour des systèmes de taille importante. De plus, ce filtre constitue souvent le point du départ pour la synthèse d'observateurs pour de tels systèmes. Toutefois, dans la plupart des cas, on manque de preuve de convergence du filtre. Une deuxième approche est basée sur la linéarisation de l'erreur d'observation. Elle consiste à mettre le système sous une forme où les non linéarités du système de dépendent plus que des entrées et sorties. La difficulté essentielle posée par cette approche consiste en la recherche des transformations appropriées qui mettent le système sous la forme désirée ([Boutat *et al.*, 2009, Gauthier and Hammouri, 1992, Guay, 2002, Krener and Isidori, 1983, Krener and Respondek, 1985, Rajamani, 1998, Respondek *et al.*, 2009, Xia and Gao, 1989, Tami *et al.*, 2016]). Une troisième approche est basée sur des techniques LMI qui s'appuient sur des équations de type Lyapunov ou Riccati, algébriques ou différentielles ([Rajamani, 1998, Zemouche and Boutayeb, 2013]). La synthèse de l'observateur repose alors sur la faisabilité d'un certain nombre d'inégalités matricielles linéaires (Linear Matrix Inequality, LMI). L'inconvénient majeur de cette approche réside dans l'absence dans la plupart des cas de conditions exploitables garantissant la faisabilité des LMI considérés. En effet, la faisabilité de ces LMI devra être vérifiée *a priori* de manière numérique ([Arcak and Kokotović, 2001]). La quatrième approche utilise des outils de l'algèbre différentielle. Elle consiste à exprimer les états non mesurés en fonction des sorties, des entrées et de leurs dérivées (par rapport au temps) successives, ces dérivées étant calculées par des différentiateurs numériques (cf. par exemple [Fliess *et al.*, 2008]). Une cinquième approche se base le calcul par

## Chapitre 1. Introduction générale

intervalles (cf. par exemple [Efimov and Raïssi, 2016, Moisan *et al.*, 2009, Raïssi *et al.*, 2012, Mazenc *et al.*, 2012]). Une dernière approche est celle basée sur des formes canoniques ou normales observables. Une contribution bien connue qui entre dans le cadre de cette approche est celle de ([Gauthier *et al.*, 1992]) où les auteurs donnent une condition nécessaire et suffisante pour caractériser les systèmes mono-sorties uniformément observables (ou encore observables pour toute entrée) et elle consiste en l'existence d'une transformation qui mette le système sous une forme triangulaire. Cette forme canonique est ensuite exploitée pour la synthèse d'un observateur à grand gain sous certaines conditions, notamment le caractère global Lipschitz des non linéarités. On notera que le gain de l'observateur proposé est issu de la résolution d'une équation algébrique de Lyapunov et son expression a été donnée. La généralisation de ce résultat aux systèmes multi-sorties a fait l'objet de plusieurs travaux dont notamment ([Farza *et al.*, 1998, Busawon *et al.*, 1998, Deza *et al.*, 1992, Farza *et al.*, 2004, Gauthier and Kupka, 2001, Hammouri and Farza, 2003, Hou *et al.*, 2000, Shim *et al.*, 2001, Farza *et al.*, 2011, Hammouri *et al.*, 2010, Besançon and Ticlea, 2007, Dufour *et al.*, 2012]). On notera que plusieurs travaux relativement récents se sont intéressés à l'amélioration des performances des observateurs de type grand gain en particulier vis-à-vis des bruits de mesures en proposant soit des versions avec un paramètre de synthèse variant dans le temps ou en changeant légèrement la structure du gain de l'observateur [Ahrens and Khalil, 2009, Boizot *et al.*, 2010, Sanfelice and Praly, 2011, Oueder *et al.*, 2012, Boker and Khalil, 2013, Alessandri and Rossi, 2015, Astolfi and Marconi, 2015]. Les travaux qui seront présentés dans ce mémoire entrent dans le cadre de la dernière approche.

Il est bien connu que contrairement aux systèmes linéaires, l'observabilité des systèmes non linéaires dépend des entrées du système. En dépit des efforts importants réalisés durant les trente dernières années dans l'étude de l'observabilité et de la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires, plusieurs problèmes restent ouverts. Parmi les travaux consacrés à l'observation des systèmes non linéaires, nous allons nous intéresser en particulier à ceux qui sont qui s'appuient sur l'exhibition de formes normales ou canoniques d'observabilité. En suivant cette approche, plusieurs travaux se sont intéressés à la classe des systèmes non linéaires qui sont observables pour toute entrée. Une telle classe de systèmes peut s'interpréter comme étant la prolongement naturel des systèmes linéaires observables. Le but ultime derrière l'étude de l'observabilité des systèmes non linéaires observables pour toute entrée est d'exhiber une forme canonique d'observabilité pour ces systèmes, c'est-à-dire une forme sous laquelle peut se mettre tout système non linéaire observable pour toute entrée. Comme nous l'avons mentionné précédemment, les premiers résultats dans ce sens ont été obtenus au début

des années 1990 où une forme canonique a été proposée pour les systèmes non linéaires mono-entrée/mono-sortie et affines en l'entrée [Gauthier *et al.*, 1992, Deza *et al.*, 1992]. Cette forme canonique est composée d'une partie linéaire par rapport à l'état avec une matrice anti-décalage et une partie non linéaire dépendant de l'entrée et ayant une structure triangulaire. Ce résultat a été généralisé dans [Gauthier and Kupka, 2001] dans le cas non affine en la commande, toujours pour les systèmes mono-sorties. Le cas des systèmes multi-sorties est plus crucial. Plusieurs formes normales d'observabilité ont été proposées pour des classes de systèmes observables pour toute entrée dans ce cas. Une de ces formes est celle proposée dans [Hammouri and Farza, 2003] et elle mime la forme canonique du cas mono-sortie. En effet, toutes les sorties sont considérées dans un seul bloc et la dérivation successive de l'ensemble de ces sorties donne lieu à plusieurs blocs qui donnent lieu à un système composé d'une partie linéaire décrite par une matrice anti-décalage en blocs, avec des non linéarités qui sont triangulaires par rapport aux variables décrivant chaque bloc. Une autre forme a été proposée dans [Shim *et al.*, 2001] où plusieurs blocs sont considérés et chacun de ces blocs est associé à une sortie et ses dérivées successives. La forme normale proposée consiste en un système constitué par un nombre de blocs égal au nombre de sorties. Chaque bloc est composé d'une partie linéaire décrite par une matrice anti-décalage par rapport aux variables du bloc et un terme non linéaire ayant une structure triangulaire par rapport aux variables de tous les blocs. Notons que pour les deux formes précédentes, il n'y en a pas une qui est plus générale que l'autre, c'est-à-dire qu'il y a des classes de systèmes observables pour toute entrée qui peuvent se mettre sous une forme et pas sous l'autre. Ces formes ont été utilisées pour la synthèse d'observateurs de type grand gain. Le gain de ces observateurs est issu de la résolution d'une équation algébrique de Lyapunov et son expression est explicitement donnée.

Dans la continuité de ces travaux, d'autres travaux ont proposé des formes normales observables pour toute entrée. Ces formes ont été surtout considérées pour la synthèse d'observateurs. Une de ces formes a été proposée dans [Hammouri *et al.*, 2010] et des conditions suffisantes portant sur la structure des non linéarités ont été formulées pour permettre de synthétiser un observateur. La forme normale se présente sous la forme de plusieurs blocs dont chacun est associé à une sortie et les conditions proposées portent sur l'existence de certains paramètres réels qui traduisent le couplage entre les non linéarités des différents blocs. Une forme plus générale a été présentée dans [Farza *et al.*, 2011] et elle se présente sous la forme de plusieurs blocs dont chacun est associé à toute ou partie de l'ensemble des sorties considérées. La caractéristique principale de cette forme réside dans le fait que dans chaque bloc, certaines dynamiques peuvent



## Chapitre 1. Introduction générale

dépendre de toutes les variables du système, c'est-à-dire des variables de tous les blocs. Comme nous l'avons mentionné précédemment, le problème consistant à exhiber une forme canonique pour l'ensemble des systèmes non linéaires observables pour toute entrée reste ouvert puisqu'on peut encore exhiber des classes de systèmes observables pour toute entrée qui ne peuvent pas se mettre sous les formes normales existantes.

Tous les travaux cités précédemment traitent des systèmes observables pour toute entrée et la synthèse de l'observateur ne nécessite aucune condition sur les entrées considérées. Lorsque le système n'est pas observable pour toute entrée, des conditions souvent qualifiées de conditions d'excitation persistante devraient être formulées pour garantir l'observabilité du système. Ces conditions supposent généralement que les entrées sont régulièrement persistante, ce sont les entrées pour lesquelles le grammien d'observabilité reste toujours défini positif sur une fenêtre glissante de largeur donnée. Cette notion a été reprise dans [Besançon and Ticlea, 2007] où la notion d'entrée localement régulière a été introduite pour la synthèse d'un observateur de type grand gain pour des classes de systèmes affines en l'état où la matrice traduisant le caractère affine par rapport à l'état dépend des entrées et des sorties du système. La principale propriété des entrées localement régulières réside dans le fait que la largeur fenêtre glissante sur laquelle le grammien d'observabilité reste positif peut être arbitrairement petite et cette largeur est en particulier proportionnelle à l'inverse d'un paramètre de synthèse de l'observateur, dont la valeur est généralement élevé. Le gain de l'observateur sous-jacent est issue de la résolution d'une Equation Différentielle Ordinaire (EDO) de Lyapunov. La convergence de l'erreur d'observation utilise les mêmes techniques que celles pour les systèmes observables pour toute entrée. La seule différence réside dans la fonction quadratique de Lyapunov où la matrice considérée n'est plus constante mais elle est régie par une EDO de Lyapunov d'où est issu le gain d'observation. Le caractère défini positif de cette matrice est généralement obtenu comme une conséquence du fait que les entrées considérés sont localement régulièrement persistantes. La bornitude de cette matrice nécessite l'adoption d'autres conditions telle que la bornitude de la sortie. Dans [Dufour *et al.*, 2012], les auteurs définissent la classe des entrées régulières qui inclut celle des entrées localement régulières et donnent des conditions suffisantes permettant de caractériser de telles entrées.

Notre première contribution dans cette thèse a consisté dans la synthèse d'un observateur pour une classe de systèmes non linéaires non uniformément observables qui sont pseudo-affines par rapport à l'état. La dynamique du système considérée est composée de deux parties additives. Dans la première partie, l'état apparaît de manière affine

avec une matrice anti-décalage où les termes non-nuls sont des fonctions (non linéaires) ayant une structure triangulaire par rapport à l'état. Comme ces termes dépendent de l'état (de manière triangulaire), nous avons utilisé le terme pseudo-affine. La deuxième partie additive consiste en des linéarités avec une structure triangulaire par rapport à l'état. Cette classe de systèmes inclut celles considérées dans [Besançon and Ticlea, 2007] et [Dufour *et al.*, 2012] qui sont similaires mais où la matrice anti-décalage ne dépend que des entrées et des sorties et non pas de l'état. En considérant des conditions d'excitation persistantes similaires à celles considérées dans [Besançon and Ticlea, 2007, Dufour *et al.*, 2012], un observateur de type grand gain est proposé.

Les travaux cités précédemment sont dédiés à la synthèse d'observateurs dans un contexte où les sorties sont disponibles en temps continu. Quelques travaux se sont intéressés à la re-synthèse des observateurs fonctionnant avec des sorties temps continu pour donner lieu à des observateurs tenant compte du processus d'échantillonnage de ces sorties. De tels observateurs sont souvent appelés observateurs continus-discrets reflétant ainsi le fait que le modèle du système est temps continu alors que les mesures sont discrètes c'est-à-dire disponibles aux instants d'échantillonnage. La première contribution intéressante en termes d'observateurs continus-discrets est celle proposée dans [Deza *et al.*, 1992] où les auteurs ont tout d'abord présenté la synthèse d'un observateur de type grand gain continu dont le gain est issu d'une équation différentielle de type Riccati, puis une version continue-discrete de cet observateur a été présentée. Plus tard, cette synthèse, initialement proposée pour des systèmes mono-sorties uniformément observables, a été étendue à d'autres classes de systèmes [Nadri and Hammouri, 2003, Nadri *et al.*, 2004, Nadri *et al.*, 2013]. Des observateurs continus-discrets dont les gains sont issus de la résolution de LMI ont aussi été proposés dans [Mazenc *et al.*, 2015, Dinh *et al.*, 2016]. La structure des observateurs continus-discrets cités dans les références précédentes est similaire à celle du filtre de Kalman continu-discret : une prédiction de l'état est obtenue à partir d'un système dynamique qui est une copie du système, puis, à l'instant d'échantillonnage, le gain d'observation est mis à jour de manière appropriée pour corriger ensuite la prédiction de l'état en utilisant la mesure disponible. Une approche basée sur la prédiction de sortie a été proposée dans ([Karafyllis and Kravaris, 2009]) pour faire face à l'indisponibilité des mesures de sortie entre les instants d'échantillonnage. La structure de l'observateur sous-jacent est très similaire à celle d'un observateur fonctionnant avec des sorties temps continu, la seule différence réside dans le fait que la mesure temps continu, non disponible, est remplacée par une prédiction temps continu appropriée issu de la résolution entre deux instants d'échantillonnage successifs  $t_k$  et  $t_{k+1}$  d'une EDO avec comme condition initiale la va-

## Chapitre 1. Introduction générale

leur de la mesure disponible à l'instant  $t_k$ . Il a été établi que l'observateur proposé est un système hybride qui est capable de récupérer les propriétés de l'observateur avec une sortie temps continu pour des courtes périodes d'échantillonnage.

Une autre approche a été décrite dans [Raff *et al.*, 2008] où les auteurs ont proposé un observateur continu-discret impulsionnel pour une classe de systèmes uniformément observables avec des mesures discrètes. Le terme de correction de l'observateur proposé est le produit d'un gain constant par la différence entre les valeurs estimée et mesurée de la sortie. Le terme de correction se réduit ainsi à une constante, c'est-à-dire une impulsion, d'où l'appellation de l'observateur (impulsionnel). Notons que le gain de l'observateur est issu de la résolution d'une LMI appropriée. Dans [Bouraoui *et al.*, 2015], un observateur continu-discret a été proposé pour une classe de systèmes non linéaires uniformément observables renfermant des incertitudes. La synthèse de l'observateur proposé a été effectuée dans un premier temps en supposant que la sortie est disponible de manière continue. Puis, une re-synthèse de l'observateur a été effectuée pour qu'il puisse fonctionner avec des sorties échantillonnées. Cette re-synthèse a donné lieu à un observateur de type impulsionnel mais avec un gain variable dans le temps. Cet observateur peut aussi être interprété comme étant un observateur qui utilise une prédiction appropriée de la sortie. Il a été montré que les performances de l'observateur continu-discret deviennent similaires à celles de l'observateur avec sortie continue lorsque la période d'échantillonnage tend vers zéro.

Notre deuxième contribution dans cette thèse consiste à reconsidérer la synthèse de l'observateur que nous avons proposé pour la classe des systèmes non uniformément observables, pour donner lieu à une version continu-discrete qui puisse fonctionner avec des sorties échantillonnées. La méthodologie de re-synthèse s'appuie sur celle adoptée dans [Bouraoui *et al.*, 2015]. De même, comme dans [Bouraoui *et al.*, 2015], nous montrerons que les performances de l'observateur continu-discret deviennent similaires à celles de l'observateur avec sortie continue lorsque la période d'échantillonnage tend vers zéro.

Un autre problème que l'on peut rencontrer lors de la synthèse d'observateurs réside dans la présence de retard dans les mesures disponibles. Le problème de synthèse d'observateurs pour des systèmes avec des sorties retardées a suscité l'intérêt de plusieurs travaux. Le cas des systèmes linéaires a été traité de manière détaillée dans [Krstic, 2009]. Pour les systèmes non linéaires, nous pouvons citer l'observateur proposé dans [Germani *et al.*, 2002] pour une classe de systèmes observables pour toute entrée dont

la sortie est disponible avec un retard  $\tau$  arbitrairement grand. Cet observateur a une structure en cascade comportant  $m + 1$  systèmes dynamiques dont la dimension de chacun est égale à celle du système. Le système en tête de la cascade permet d'estimer l'état retardé du système à partir de la sortie retardée. Pour les  $m$  autres systèmes de la cascade, chacun d'entre est en fait un prédicteur de l'état du système précédant avec un horizon de prédiction égal à  $\tau/m$  de sorte que l'état du dernier système permet d'estimer l'état instantané du système. L'inconvénient majeur de cet observateur réside dans le fait que la série de prédicteurs fonctionne en boucle ouverte et on ne dispose d'aucun paramètre de synthèse pour régler la dynamique de prédiction. Cette synthèse a été reconsidérée dans [Kazantzis and Wright, 2005] pour une classe de systèmes pouvant se mettre sous une forme particulière. L'observateur proposé dispose aussi d'une structure sous forme de cascade comme dans [Germani *et al.*, 2002] et un paramètre de synthèse sous forme d'une matrice stable est à la disposition de l'utilisateur pour régler la dynamique de prédiction. Dans [Farza *et al.*, 2015b], une classe plus générale de systèmes uniformément observables avec un retard sur la sortie a été considérée et un observateur en cascade similaire à ceux proposés dans [Germani *et al.*, 2002, Kazantzis and Wright, 2005] a été proposé. Comme dans [Kazantzis and Wright, 2005], le gain de prédiction peut être réglé à travers le choix d'une matrice stable.

Notre troisième contribution dans cette thèse a consisté à étendre l'approche proposée dans [Farza *et al.*, 2015b] à la classe de systèmes non uniformément observables pour proposer un observateur de type grand gain fonctionnant avec des sorties échantillonnées disponibles avec un retard arbitrairement grand. Cet observateur a la même structure en cascade que ceux dans [Germani *et al.*, 2002, Kazantzis and Wright, 2005, Farza *et al.*, 2015b] et son gain renferme une matrice stable qui permet de régler la dynamique de prédiction.

Notre dernière contribution a reprendre une classe de systèmes uniformément observables comportant des incertitudes. Cette classe a déjà été considéré dans [Farza *et al.*, 2004] où les auteurs ont proposée un observateur à grand gain pour cette classe. Elle a aussi été reconsidérée dans [Bouraoui *et al.*, 2015] où les auteurs ont reconsidéré la synthèse proposée dans [Farza *et al.*, 2004] pour prendre en compte le processus d'échantillonnage sur la sortie. Dans cette thèse, nous étendons la synthèse de l'observateur au cas où la sortie est disponible avec un retard constant arbitrairement grand et ce dans le cas où cette sortie (retardée) est disponible de manière continue dans le temps ou simplement à certains instants d'échantillonnage non nécessairement équidistants. Effectivement, un observateur avec une structure en cascade est propo-

## Chapitre 1. Introduction générale

sée pour la classe de systèmes considérés. Il a été en particulier établi qu'en l'absence d'incertitude, l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro. En présence des incertitudes, l'erreur asymptotique d'observation reste dans une boule centrée sur l'origine, dont l'amplitude du rayon dépend de la borne des incertitudes, de la valeur du retard, de la période d'échantillonnage ainsi que de certains paramètres du système tels que la constante de Lipschitz des non linéarités.

Ce mémoire est composé de 6 chapitres dont l'introduction et la conclusion et quatre annexes de A à D..

Le deuxième chapitre est consacré à la conception d'un observateur grand gain pour une classe de systèmes non linéaires non uniformément observables. Outre les hypothèses habituelles adoptées lors de la synthèse d'observateurs de type grand gain, une condition d'excitation persistante permettant d'assurer l'observabilité du système a été considérée. Le gain de l'observateur proposé est issu de la résolution d'une équation différentielle de type Lyapunov dont le caractère défini positif ainsi que la bornitude de la solution a été démontré. La solution de cette équation a servi pour construire la fonction de Lyapunov quadratique permettant de prouver la convergence exponentielle de l'erreur d'observation. Nous présentons aussi dans ce chapitre une classe de systèmes non linéaires uniformément observables comportant des incertitudes qui a été considérée dans [Farza *et al.*, 2004] et pour laquelle les auteurs ont proposé un observateur à grand gain. Nous rappelons les principales étapes de cette synthèse qui seront reconsidérées au chapitre 5 pour prendre en compte l'aspect d'échantillonnage et la présence de retard sur la sortie.

Dans le troisième chapitre, une re-synthèse de l'observateur proposé dans le chapitre 2 a été considérée et cette re-synthèse a donné lieu à une variante de l'observateur fonctionnant avec des sorties échantillonnées et auquel on se réfère par observateur continu-discret. Nous avons montré que tant que l'amplitude de la période d'échantillonnage, qui pourrait être variable, reste en dessous d'un certain seuil dont l'expression a été fournie et qui dépend en particulier du gain de l'observateur et de certains paramètres du système, les performances de l'observateur continu-discret sont similaires à celles de l'observateur avec des sorties temps continu. Les performances de l'observateur continu-discret sont illustrés dans ce chapitre à travers deux exemples dont le premier concerne le moteur asynchrone et le second un moteur Stirling à piston libre .

Au quatrième chapitre, la synthèse de l'observateur continu-discret est étendu au cas où les échantillonnées sont disponibles avec un retard arbitrairement grand  $\tau$ . L'obser-

vateur proposé a une structure de  $m + 1$  systèmes en cascade. Le premier système de la cascade délivre une estimation de l'état retardé de la cascade alors que les autres systèmes sont des prédicteurs et chacun de ces systèmes estime l'état du système qui le suit dans la cascade sur un horizon de prédiction égal à  $\tau/m$  de sorte que l'état du dernier système constitue une estimation de l'état instantané du système. Il a été montré que longueur de la cascade dépend en particulier de l'amplitude du retard considéré ainsi que de la constante de Lipschitz des non linéarités. Les performances de l'observateur proposé ont été illustrés à travers un exemple académique puis à travers l'exemple du moteur Stirling à piston libre.

Au cinquième chapitre, la synthèse présentée au chapitre relative à la classe de systèmes non linéaires uniformément observables et comportant des incertitudes, est reconsidérée. Cette re-synthèse a donné lieu à un observateur en cascade permettant d'estimer l'état instantané du système à partir de mesures retardées de la sortie et ce dans le cas où la sortie est disponible en temps continu ou simplement à certains d'échantillonnage. Nous avons montré à travers l'analyse de la convergence de l'erreur d'observation, qu'en l'absence d'incertitudes, cette erreur converge exponentiellement vers zéro. En présence des ces incertitudes, l'erreur asymptotique d'observation reste confinée dans une boule centrée à l'origine dont le rayon dépend de la borne des incertitudes, de la valeur du retard, de la période d'échantillonnage ainsi que de certains paramètres du système tels que la constante de Lipschitz des non linéarités. Les performances de l'observateur proposé ont été illustrés à travers un exemple académique puis à travers un exemple traitant d'un bioréacteur.

Enfin, à la lumière des résultats obtenus, nous terminons ce mémoire avec une conclusion et nous proposons quelques perspectives.

Pour la clarté du manuscrit, nous avons reporté certains développements en annexe. En effet, cette thèse comporte quatre annexes numérotés de A à D. L'annexe A contient un bref rappel sur l'observabilité et la synthèse d'observateurs pour quelques classes de systèmes non linéaires. L'annexe B est dédié à la présentation du modèle du moteur Stirling à piston libre. Nous avons reporté dans l'annexe C les valeurs numériques des différents paramètres intervenant dans le modèle du moteur asynchrone ainsi que celles du moteur Stirling à piston libre qui ont été utilisés en simulation pour illustrer les performances de certains observateurs proposés dans la thèse. Enfin, l'annexe D rappelle deux lemmes techniques utilisés dans la preuve du théorème du chapitre 4.

## *Chapitre 1. Introduction générale*

# Chapitre 2

## Observateurs pour des systèmes non linéaires avec sortie disponible en temps continu

### 2.1 Introduction

Dans la plupart des applications, le procédé doit être contrôlé ou surveillé en temps réel et ceci nécessite de pouvoir accéder aux variations en fonction du temps des variables d'état. Cet accès n'est pas toujours possible soit par manque de capteurs appropriés ou par le coût élevé de certains de ces capteurs. Pour pallier à ce problème, un observateur d'état (un estimateur) est généralement utilisé pour reconstruire les variables d'état non mesurées. L'observateur est un algorithme qui fournit un estimé  $\hat{x}(t)$  de l'état  $x(t)$  du système, à partir des mesures de la sortie  $y(t)$  et de l'entrée  $u(t)$ .

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction générale de ce mémoire, plusieurs approches peuvent être adoptés pour la synthèse d'observateur. Nous pouvons citer par exemple [Alessandri and Rossi, 2015, Besançon, 1999, Ciccarella *et al.*, 1993] où la synthèse s'appuie sur des formes normales observables.

Dans ce chapitre, nous allons considérer deux classes différentes de systèmes non linéaires et nous allons proposer pour chacune de ces classes la synthèse d'un observateur de type grand gain. La première classe représente un ensemble de systèmes non uniformément observables qui a été considérée dans [Besançon *et al.*, 1996] en vue de synthèse d'observateur. L'observateur proposé dans [Besançon *et al.*, 1996] pour cette classe de systèmes se présente sous forme de cascade de plusieurs systèmes dont la dimension de



chacun est égale à celle du système considéré. La convergence de l'erreur d'observation associée a été établie en adoptant une certaine condition d'excitation persistante. Notre objectif derrière la reconsideration de cette classe est de proposer un observateur dont la structure est plus simple que celle de l'observateur proposé dans [Besançon *et al.*, 1996] et de formuler une condition d'excitation persistante appropriée qui permet de garantir la convergence exponentielle de l'observateur. En effet, notre première contribution dans cette thèse consiste à proposer la synthèse d'un tel observateur dont la dimension est égale à celle du système. La synthèse de l'observateur qui sera présentée dans ce chapitre suppose que les sorties sont disponibles en temps continu. Cette synthèse sera reconsidérée dans les chapitres suivants où l'on considère tout d'abord le cas des sorties échantillonnées, puis ensuite le cas de sorties échantillonnées et retardées.

La deuxième classe de systèmes a aussi été considérée dans [Bouraoui *et al.*, 2015] où les auteurs ont proposé la synthèse d'un observateur de type grand gain. Il a été établi qu'en l'absence d'incertitude, l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro. En présence d'incertitudes (essentiellement) bornées, l'erreur asymptotique d'observation reste confinée dans une boule centrée à l'origine et dont le rayon, qui dépend de la borne des incertitudes, peut être rendu aussi petit que désiré par un choix approprié d'un paramètre de synthèse de l'observateur. Ce résultat sera rappelé et sera utilisé dans l'avant dernier chapitre de cette thèse où les sorties du système ne sont plus disponibles en temps continu, comme c'est le cas dans ce chapitre, mais de manière échantillonnée avec une période d'échantillonnage éventuellement variable et un retard qui pourrait être arbitrairement grand.

## 2.2 Observateur continu pour une classe de systèmes non linéaires non uniformément observables

Comme nous l'avons énoncé précédemment, notre objectif consiste à présenter la synthèse d'un observateur de type grand-gain pour une classe de systèmes non uniformément observables où les sorties sont supposées être disponibles en temps continu. Cette synthèse sera reconsidérée dans les chapitres suivant pour prendre en compte les processus d'échantillonnage et de retard qui peuvent entacher ces sorties.

### 2.2.1 Formulation du problème

Nous considérons la classe suivante de systèmes non linéaires multi-entrées et multi-sorties

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t), x(t))x(t) + \varphi(u(t), x(t)) \\ y(t) = Cx(t) = x^1(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec

$$C = \begin{bmatrix} I_{n_1 \times n_1} & 0_{n_1 \times n_2} & \cdots & 0_{n_1 \times n_q} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$A(u, x) = \begin{bmatrix} 0 & A_1(u, x^1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & A_{q-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\varphi(u, x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(u, x^1) \\ \varphi_2(u, x^1, x^2) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}) \\ \varphi_n(u, x) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

où l'état du système  $x = ((x^1)^T \dots (x^q)^T)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^k \in \mathbb{R}^{n_k}$ ,  $k = 1, \dots, q$  avec  $n_1 = p$  et  $\sum_{k=1}^q n_k = n$  et chaque  $A_k(u, x)$  est une matrice  $n_k \times n_{k+1}$  qui est triangulaire par rapport à  $x$  i.e.  $A_k(u, x) = A_k(u, x^1, \dots, x^k)$ ,  $k = 1, \dots, q-1$ ;  $\varphi(u, x)$  est une fonction non linéaire qui possède une structure triangulaire par rapport à  $x$ ;  $u \in \mathbb{R}^s$  représente l'entrée du système et  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie continue.

Afin de synthétiser un observateur pour le système (2.1), les hypothèses classiques suivantes sont adoptées ([Besançon *et al.*, 1996] et [Farza *et al.*, 2015a]) :

**Hypothèse 2.2.1.** *L'état  $x(t)$  et l'entrée  $u(t)$  sont bornés, c'est-à-dire,  $x(t) \in X$  et  $u(t) \in U$ ,  $\forall t \geq 0$ , où  $X \subset \mathbb{R}^n$  et  $U \subset \mathbb{R}^s$  sont des ensembles compacts.*

**Hypothèse 2.2.2.** *Les fonctions  $A(u, x)$  et  $\varphi(u, x)$  sont Lipschitz par rapport à  $x$  uniformément en  $u$  où  $(u, x) \in U \times X$ . Leurs constantes de Lipschitz sont respectivement notées  $L_A$  et  $L_\varphi$ .*

Notons que comme l'état appartient à l'ensemble borné  $X$ , nous pouvons construire des prolongations Lipschitz des non linéarités, en utilisant des fonctions de saturation lisses (cf. [Shim *et al.*, 2001]). Dans ce qui suit, nous supposons que les prolongations

## Chapitre 2.

ont été effectuées et que les fonctions  $A(u, x)$  et  $\varphi(u, x)$  sont le résultat de ces prolongations. Ceci permet de conclure que pour toute entrée bornée  $u \in U$ , les fonctions  $A(u, x)$  et  $\varphi(u, x)$  sont globalement Lipschitz par rapport à  $x$  et sont bornées pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

L'hypothèse 2.2.1 donne l'existence d'une borne supérieure pour l'état et pour  $A(u, x)$ , ces bornes sont définies comme :

$$x_M = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\| \quad (2.5)$$

$$\tilde{a} = \sup_{u \in U, x \in X} \|A(u, x)\| \quad (2.6)$$

Afin de construire un observateur à grand-gain, on introduit la matrice diagonale  $\Delta_\theta$  comme :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left[ I_{n_1} \quad I_{n_2}/\theta \quad \dots \quad I_{n_q}/\theta^{q-1} \right] \quad (2.7)$$

Compte tenu des structure de  $A$  et  $C$ , les égalités suivantes peuvent être établies (on pourra se référer par exemple à [Farza *et al.*, 2004])

$$\Delta_\theta A(u, x) \Delta_\theta^{-1} = \theta A(u, x) \quad C \Delta_\theta^{-1} = C \quad (2.8)$$

Avant de présenter la synthèse de l'observateur, nous attirons l'attention sur la structure assez générale du système (2.1). En effet, comme aucune condition n'est faite sur les dimensions des matrices  $A_k$ , c'est-à-dire sur les  $n_k$ , la structure triangulaire par rapport à  $x$  des matrices  $A_k(u, x)$  et des non linéarités  $\varphi(u, x)$  n'est pas aussi contraignantes que dans le cas d'une seule sortie où tous les  $n_k$  sont égaux à 1. A titre d'exemple, la classe de systèmes (2.1) renferme le cas où  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = n - 2$  et  $n_3 = 1$  où  $n$  est la dimension du système. Pour un tel exemple, le système devient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= A_1(u, x_1)x_2 + \varphi_1(u, x_1) \\ \dot{x}_2 &= A_2(u, x_1, x_2)x_3 + \varphi_2(u, x_1, x_2) \\ \dot{x}_3 &= \varphi_3(u, x) \end{cases} \quad (2.9)$$

avec  $x = (x_1 \ x_2^T \ x_3)^T$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  et  $x_3 \in \mathbb{R}^2$ . On remarque que la matrice  $A_2(u, x_1, x_2)$  ainsi que la non linéarité  $\varphi_2(u, x_1, x_2)$  dépendent de toutes les variables du système exceptée la dernière, i.e.  $x_3$ .

Notons que sous la condition  $p = n_1 \geq n_2 \dots \geq n_q$  avec  $\text{rang}(A_k(u, x)) = n_{k+1}$  pour tout  $(x, u) \in X \times U$ , les auteurs dans [Hammouri and Farza, 2003] ont montré que

## 2.2. Obs. pour une classe de systèmes non linéaires non uniformément observables

le système (2.1) est une forme normale pour une classe de systèmes observables pour toute entrée.

### 2.2.2 Synthèse de l'observateur

Les équations de l'observateur candidat que nous proposons pour le système (2.1) se présentent comme suit :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(u(t), \hat{x}(t))\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta \Delta_{\theta}^{-1} S^{-1}(t) C^T (C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (2.10)$$

où l'état estimé  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  est partitionné comme suit  $\hat{x} = ((\hat{x}^1)^T \dots (\hat{x}^q)^T)^T$  avec  $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^{n_k}$ ,  $u$  et  $y$  sont l'entrée et la sortie du système (2.1), respectivement, et  $S(t)$  est une matrice SDP qui est régie par l'EDO de Lyapunov suivante

$$\dot{S}(t) = \theta \left( -S(t) - A(u(t), \hat{x}(t))^T S - SA(u(t), \hat{x}(t)) + C^T C \right) \quad (2.11)$$

avec  $S(0) = S^T(0) > 0$  et  $\theta > 0$  est un paramètre de synthèse scalaire.

La principale difficulté pour établir la convergence des trajectoires de (2.10) vers celles du système (2.1) réside dans l'exhibition d'un ensemble d'entrée qui satisfasse une certaine condition d'excitation persistante permettant de garantir l'observabilité du système. Afin d'exprimer cette nouvelle condition, nous avons besoin d'introduire  $\Phi_{u, \hat{x}}(t, s)$ , qui est la matrice de transition du système affine en l'état suivant

$$\dot{\xi}(t) = A(u(t), \hat{x}(t))\xi(t) \quad (2.12)$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , est l'état du système,  $u$  et  $\hat{x}$  sont les entrées de ce système et ils correspondent respectivement à l'entrée et à l'état du système dynamique (2.10). La matrice  $\Phi_{u, \hat{x}}(t, s)$  est définie comme :

$$\frac{d\Phi_{u, \hat{x}}(t, s)}{dt} = A(u(t), \hat{x}(t))\Phi_{u, \hat{x}}(t, s), \quad \forall t \geq s \geq 0, \quad (2.13)$$

$$\Phi_{u, \hat{x}}(t, t) = I_n, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.14)$$

où  $I_n$  représente la matrice identité dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

Maintenant, nous pouvons énoncer l'hypothèse suivante

**Hypothèse 2.2.3.** *L'entrée  $u$  est telle que pour toute trajectoire  $\hat{x}$  du système (2.10) partant de  $\hat{x}(0) \in X$ ,  $\exists T^* > 0$ ,  $\exists \theta^* > 0$ ,  $\exists \delta_0 > 0$ ,  $\forall \theta \geq \theta^*$  et  $\forall t \geq T^*/\theta$ , la condition*

## Chapitre 2.

d'excitation persistante suivante est satisfaite :

$$\int_{t-T^*/\theta}^t \Phi_{u,\hat{x}}(s,t)^T C^T C \Phi_{u,\hat{x}}(s,t) ds \geq \frac{\delta_0}{\theta \alpha(\theta)} \Delta_\theta^2, \quad (2.15)$$

où  $\alpha(\theta) \geq 1$  est une fonction qui satisfait

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0. \quad (2.16)$$

**Theorème 2.2.1.** *Considérons le système (2.1), qui satisfait les hypothèses 2.2.1-2.2.2. Alors, pour chaque entrée bornée  $u$  satisfaisant l'hypothèse 2.2.3, il existe une constante  $\theta^*$  telle que pour tout  $\theta > \theta^*$ , le système (2.10) est un observateur d'état pour le système (2.1) avec une convergence exponentielle de l'erreur d'observation vers l'origine, c'est-à-dire, pour toutes conditions initiales  $(x(0), \hat{x}(0)) \in X$ , l'erreur d'observation  $\hat{x}(t) - x(t)$  converge exponentiellement vers zéro lorsque  $t \rightarrow \infty$ .*

### 2.2.3 Analyse de convergence

Nous allons d'abord montrer que la matrice  $S(t)$  est SDP et nous allons expliciter une borne inférieure de ses valeurs propres. En effet, à partir de (2.8), on peut montrer que la matrice de transition  $\tilde{\Phi}_{u,\hat{x}}$ , du système affine en l'état :

$$\dot{\xi}(t) = \theta A(u(t), \hat{x}(t)) \xi(t) \quad (2.17)$$

est donnée par

$$\tilde{\Phi}_{u,\hat{x}} = \Delta_\theta \Phi_{u,\hat{x}}(t,s) \Delta_\theta^{-1} \quad (2.18)$$

où  $\Phi_{u,\hat{x}}$  est définie par (2.13).

De ce fait, la solution  $S$  de l'EDO (2.11), peut s'exprimer comme :

$$\begin{aligned} S(t) &= e^{-\theta t} \tilde{\Phi}_{u,\hat{x}}^T(0,t) S(0) \tilde{\Phi}_{u,\hat{x}}(0,t) + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \tilde{\Phi}_{u,\hat{x}}^T(s,t) C^T C \tilde{\Phi}_{u,\hat{x}}(s,t) ds \\ &= e^{-\theta t} \Delta_\theta^{-1} \Phi_{u,\hat{x}}^T(0,t) \Delta_\theta S(0) \Delta_\theta \Phi_{u,\hat{x}}(0,t) \Delta_\theta^{-1} \\ &\quad + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \Delta_\theta^{-1} \Phi_{u,\hat{x}}^T(s,t) \Delta_\theta C^T C \Delta_\theta \Phi_{u,\hat{x}}(s,t) \Delta_\theta^{-1} ds \end{aligned} \quad (2.19)$$

Compte tenu du fait que  $\Delta_\theta^{-1} \Phi_{u,\hat{x}}^T(0,t) \Delta_\theta S(0) \Delta_\theta \Phi_{u,\hat{x}}(0,t) \Delta_\theta^{-1}$  est une matrice Symé-

## 2.2. Obs. pour une classe de systèmes non linéaires non uniformément observables

trique Définie Positive (SDP) et que le terme intégral dans (2.19) est une matrice semi-définie positive, il en résulte que  $S(t)$  est une matrice SDP.

En utilisant le fait que  $C\Delta_\theta = C$  et  $S(0)$  est SDP, on obtient pour  $t \geq T^*/\theta$

$$\begin{aligned}
S(t) &\geq \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \Delta_\theta^{-1} \Phi_{u,\hat{x}}^T(s,t) C^T C \Phi_{u,\hat{x}}(s,t) \Delta_\theta^{-1} ds \\
&\geq \theta \int_{t-\frac{T^*}{\theta}}^t e^{-\theta(t-s)} \Delta_\theta^{-1} \Phi_{u,\hat{x}}^T(s,t) C^T C \Phi_{u,\hat{x}}(s,t) \Delta_\theta^{-1} ds \\
&\geq \theta e^{-1} \int_{t-\frac{T^*}{\theta}}^t \Delta_\theta^{-1} \Phi_{u,\hat{x}}^T(s,t) C^T C \Phi_{u,\hat{x}}(s,t) \Delta_\theta^{-1} ds \\
&\geq e^{-T^*} \frac{\delta_0}{\alpha(\theta)} I_n
\end{aligned} \tag{2.20}$$

où  $\delta_0$  et  $\alpha(\theta)$  sont donnés par l'hypothèse 2.2.3. D'après l'inégalité (2.20), on obtient

$$\lambda_{\min}(S) \geq \frac{e^{-T^*} \delta_0}{\alpha(\theta)} \tag{2.21}$$

Maintenant, nous allons montrer que  $\lambda_{\max}(S)$  est borné avec une borne supérieure qui est indépendante de  $\theta$ . À cette fin, nous devons montrer que cette propriété est satisfaite pour chaque entrée de la matrice  $S(t)$ . En effet, désignons par  $S_{i,j}$  l'entrée bloc située à la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de la matrice  $S$ . Alors, d'après l'équation (2.11), nous avons

$$\dot{S}_{11} = -\theta(S_{11}(t) - I_p) \tag{2.22}$$

$$\dot{S}_{1j} = -\theta(S_{1j}(t) + S_{1,j-1}(t)A_{j-1}(u(t), \hat{x}(t))) \quad j = 2, \dots, q \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
\dot{S}_{ij} &= -\theta(S_{ij}(t) + S_{i,j-1}(t)A_{j-1}(u(t), \hat{x}(t))) \\
&\quad + A_{i-1}^T(u(t), \hat{x}(t))S_{i-1,j}(t)) \quad i = 2, \dots, q, \quad j = i, \dots, q
\end{aligned} \tag{2.24}$$

D'après (2.22), nous avons

$$\begin{aligned}
\|S_{11}(t)\| &\leq e^{-\theta t} \|S_{11}(0)\| + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \|I_p\| ds \\
&\leq \|S_{11}(0)\| + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} ds = \|S_{11}(0)\| + 1(1 - e^{-\theta t}) \leq \|S_{11}(0)\| + 1
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Maintenant, pour  $j \geq 2$ , nous procédons par récurrence sur  $j$  afin de montrer que  $S_{1j}$

Chapitre 2.

est bornée avec une borne qui ne dépend pas de  $\theta$ . En effet supposons que  $S_{1,j-1}$  est bornée et notons

$$S_M = \sup_{t \geq 0} \|S_{1,j-1}(t)\| \quad (2.26)$$

Rappelons que selon les hypothèses 2.2.1-2.2.2, les matrices  $A_k(u, \hat{x})$ ,  $k = 1, \dots, q-1$  sont bornées. Ainsi, en notant

$$A_M = \sup_{t \geq 0} \|A_k(u(t), \hat{x}(t))\| \quad (2.27)$$

et en utilisant (2.23), nous avons pour  $j = 2, \dots, q$

$$\begin{aligned} \|S_{1j}(t)\| &\leq e^{-\theta t} \|S_{1j}(0)\| + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \|S_{1,j-1}(s) A_{j-1}(u(s), \hat{x}(s))\| ds \\ &\leq \|S_{1j}(0)\| + \theta S_M A_M \int_0^t e^{-\theta(t-s)} ds \\ &= \|S_{1j}(0)\| + S_M A_M (1 - e^{-\theta t}) \leq \|S_{1j}(0)\| + S_M A_M \end{aligned} \quad (2.28)$$

À cette étape, nous avons montré que toutes les entrées situées à la première ligne (et la première colonne) de la matrice symétrique sont bornées. Nous procédons par récurrence sur les lignes afin de montrer que toutes les entrées de chaque ligne sont bornées. En effet, supposons que toutes les entrées des lignes 1 à  $i-1$  sont bornées (avec un borne que ne dépend pas de  $\theta$ ) et démontrons que toutes les entrées de la ligne  $i$  sont aussi bornées. Puisque  $S$  est symétrique, toutes les entrées  $S_{i,j}$  avec  $i < j$  sont bornées par l'hypothèse de récurrence. En particulier, nous avons  $S_{i-1,i} = S_{i,i-1}$  et ces matrices sont bornées avec une borne supérieure, c'est-à-dire,  $S_M$  indépendante de  $\theta$ . Maintenant, nous allons montrer que  $S_{i,j}$  est bornée pour  $j \geq i$ . Considérons d'abord le cas où  $j = i$ . En effet, selon (2.24), nous avons :

$$\begin{aligned} \|S_{ii}(t)\| &\leq e^{-\theta t} \|S_{ii}(0)\| \\ &\quad + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \left\| S_{i,i-1}(s) A_{j-1}(u(s), \hat{x}(s)) + A_{j-1}^T(u(s), \hat{x}(s)) S_{i-1,i}(s) \right\| ds \\ &\leq e^{-\theta t} \|S_{ii}(0)\| + \theta (2S_M A_M) \int_0^t e^{-\theta(t-s)} ds \\ &= \|S_{ii}(0)\| + 2S_M A_M (1 - e^{-\theta t}) \leq \|S_{ii}(0)\| + 2S_M A_M \end{aligned} \quad (2.29)$$

Maintenant, considérons le cas  $j > i$  en supposant que  $S_{i,j-1}$  est bornée et montrons

2.2. Obs. pour une classe de systèmes non linéaires non uniformément observables

que  $S_{i,j}$  est aussi bornée. En effet, selon l'hypothèse de récurrence, l'entrée  $S_{i-1,j}$  située à la ligne  $i - 1$  est bornée. À partir de l'équation (2.24), nous avons

$$\begin{aligned}
\|S_{ij}(t)\| &\leq e^{-\theta t} \|S_{ij}(0)\| \\
&\quad + \theta \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \left\| S_{i,j-1}(s) A_{j-1}(u(s), \hat{x}(s)) + A_{j-1}^T(u(s), \hat{x}(s)) S_{i-1,j}(s) \right\| ds \\
&\leq e^{-\theta t} \|S_{ij}(0)\| + \theta(2S_M A_M) \int_0^t e^{-\theta(t-s)} ds \\
&= \|S_{ij}(0)\| + 2S_M A_M (1 - e^{-\theta t}) \leq \|S_{ij}(0)\| + 2S_M A_M
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Pour récapituler, nous avons montré que toutes les entrées de la matrice  $S(t)$  sont bornées avec une borne supérieure indépendante de  $\theta$ . De ce fait la plus grande valeur propre de  $S(t)$ ,  $\bar{\lambda}_M(S)$ , est aussi indépendante de  $\theta$ .

Maintenant, nous allons montrer la convergence exponentielle vers zéro de l'erreur d'observation. Soit  $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}$  où  $\tilde{x} = \hat{x} - x$  est l'erreur d'observation ; à partir de (2.1) et (2.10) et en utilisant (2.8), on peut montrer que la dynamique de l'erreur est donnée par

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}}(t) &= \theta \left[ A(u(t), \hat{x}(t)) - S^{-1}(t) C^T C \right] \bar{x}(t) \\
&\quad + \Delta_\theta \left[ \tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) x + \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) \right]
\end{aligned} \tag{2.31}$$

où

$$\tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) = A(u(t), \hat{x}(t)) - A(u(t), x(t)) \tag{2.32}$$

$$\tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) = \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \varphi(u(t), x(t)) \tag{2.33}$$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate  $V(\tilde{x}, t) = \bar{x}^T S(t) \bar{x}$  ; en utilisant (2.11), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{x}(t), t) &= 2\bar{x}^T(t) S(t) \dot{\bar{x}}(t) + \bar{x}^T(t) \dot{S}(t) \bar{x}(t) \\
&= -\theta \bar{x}^T(t) S(t) \bar{x}(t) - \theta \bar{x}^T(t) C^T C \bar{x}(t) \\
&\quad + 2\bar{x}^T(t) S(t) \Delta_\theta \left[ \tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) x + \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) \right]
\end{aligned} \tag{2.34}$$

En considérant, la condition de Lipschitz et la structure triangulaire de  $\varphi(u, x)$ ,



nous pouvons montrer que pour  $\theta > 1$ , [Farza *et al.*, 2009] :

$$\begin{aligned} \|2\bar{x}(t)S(t)\Delta_\theta\tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t))x(t)\| &\leq 2\sqrt{n}\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}}V(t)L_Ax_M \\ &\leq 2\sqrt{\alpha(\theta)}\sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}}V(t)L_Ax_M \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \|2\bar{x}(t)S(t)\Delta_\theta\tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t))\| &\leq 2\sqrt{n}\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}}V(t)L_\varphi \\ &\leq 2\sqrt{\alpha(\theta)}\sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}}V(t)L_\varphi \end{aligned} \quad (2.36)$$

où  $L_A$  et  $L_\varphi$  sont respectivement les constantes de Lipschitz de  $A$  et  $\varphi$  sont donnés dans l'hypothèse 2.2.2 et en considérant  $\lambda_{\min}(S)$  comme dans (2.21).

En substituant (2.35) et (2.36) dans (2.34), nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}(t), t) &\leq -\theta V(\bar{x}(t), t) + 2\sqrt{\alpha(\theta)}\sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}}(L_Ax_M + L_\varphi)V(\bar{x}(t), t) \\ &\leq -\theta \left(1 - 2\sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}\sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}}(L_Ax_M + L_\varphi)\right)V(\bar{x}(t), t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Selon (2.37),  $V(\bar{x}(t), t)$  converge exponentiellement vers zéro pour des valeurs de  $\theta$  suffisamment élevées, donc  $\bar{x}(t)$  aussi. Ceci termine la preuve du théorème.

## 2.3 Observateur continu pour une classe de systèmes non linéaires incertains

Nous rappelons à présent la synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes non linéaires, uniformément observables, avec des incertitudes de dynamique.

### 2.3.1 Formulation du problème

Considérons le problème de la synthèse d'observateurs pour des systèmes non linéaires, incertains, MIMO, de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(u(t), x(t)) + B\varepsilon(t) \\ y(t) = Cx(t) = x^1(t) \end{cases} \quad (2.38)$$

### 2.3. Observateur continu pour une classe de systèmes non linéaires incertains

avec

$$C = \begin{pmatrix} I_p & 0_p & \dots & 0_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0_p & \dots & 0_p & I_p \end{pmatrix}^T \quad (2.39)$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_p & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & I_p \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(u, x) = \begin{bmatrix} \varphi^1(u, x^1) \\ \varphi^2(u, x^1, x^2) \\ \vdots \\ \varphi^{q-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}) \\ \varphi^q(u, x) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est partitionné comme suit  $x = ((x^1)^T \dots (x^q)^T)^T$  avec  $x^k \in \mathbb{R}^p$  et  $n = qp$ ,  $u$  désigne l'entrée du système et  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie mesurée;  $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  est une fonction inconnue qui représente les incertitudes sur le modèle;  $\varphi(u, x)$  est une fonction non linéaire qui possède une structure triangulaire par rapport à  $x$ .

Afin de synthétiser un observateur pour les systèmes incertains non linéaires considérés ici, nous devons introduire les hypothèses suivantes [Bouraoui *et al.*, 2015] :

**Hypothèse 2.3.1.** *L'état  $x(t)$  et l'entrée  $u(t)$  sont bornés, c'est-à-dire,  $x(t) \in X$  et  $u(t) \in U$ , où  $X \subset \mathbb{R}^n$  et  $U \subset \mathbb{R}^s$  sont des ensembles compacts.*

**Hypothèse 2.3.2.** *La fonction  $\varphi$  est Lipschitz par rapport à  $x$  uniformément par rapport à  $u$ , pour  $(u, x) \in U \times X$ . Sa constante de Lipschitz est notée  $L_\varphi$  :*

$$\|\varphi(u, x) - \varphi(u, \hat{x})\| \leq L_\varphi \|x - \hat{x}\| \quad (2.41)$$

**Hypothèse 2.3.3.** *La fonction inconnue  $\varepsilon$  est essentiellement bornée, c'est-à-dire*

$$\exists \delta_\varepsilon > 0; \quad \text{esssup}_{t \geq 0} \|\varepsilon(t)\| \leq \delta_\varepsilon \quad (2.42)$$

Il y a deux choses qui valent la peine d'être mentionnées. Premièrement la classe de systèmes décrit par (2.38) peut sembler très restrictive car elle suppose une dimension non première ( $n = pq$ ) et les blocs de l'état  $x^k$  ont la même dimension  $p$ . Ceci n'est pas le cas, en effet, il est montré dans [Hammouri and Farza, 2003] que dans le cas sans incertitudes, le système (2.38) est une forme normale qui caractérise une classe de systèmes non linéaires uniformément observables qui peut se mettre sous cette forme via une application injective (cf. [Hammouri and Farza, 2003, Farza *et al.*, 2004]). En second lieu, comme la trajectoire de l'état du système  $x(t)$  se situe dans un ensemble borné  $X$ , on peut étendre les non linéarités  $\varphi(u, x)$  de telle sorte que cette extension devienne globalement lipschitzienne sur l'espace d'état entier  $\mathbb{R}^n$ . La synthèse d'un

## Chapitre 2.

observateur sera alors basé sur le système étendu résultant qui coïncide avec le système original sur le domaine d'intérêt, c'est-à-dire,  $X$ . On peut se référer à [Shim *et al.*, 2001, Andrieu and Praly, 2006] pour plus de détails.

Afin de pouvoir présenter l'observateur, nous devons introduire la matrice diagonale  $\Delta_\theta$  définie comme suit :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left[ I_p \quad \frac{1}{\theta} I_p \quad \cdots \quad \frac{1}{\theta^{q-1}} I_p \right] \quad (2.43)$$

où  $\theta > 1$  est un nombre réel.

Les propriétés suivantes sont directes en considérant la structure de  $A$  et  $C$  :

$$\Delta_\theta A \Delta_\theta^{-1} = \theta A \quad C \Delta_\theta^{-1} = C. \quad (2.44)$$

### 2.3.2 Synthèse de l'observateur

L'observateur à grand-gain candidat pour la classe de systèmes MIMO uniformément observables est donné par [Farza *et al.*, 2004] :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(\hat{x}(t), u(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (2.45)$$

où l'état estimé est désigné par  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ , il est partitionné comme suit  $\hat{x} = ((\hat{x}^1)^T \cdots (\hat{x}^q)^T)^T$  avec  $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^p$  pour  $k = 1, \dots, q$  avec  $n = pq$ ,  $u \in \mathbb{R}^s$  désigne l'entrée du système,  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie mesurée et  $S$  représente la matrice SDP, unique solution de l'équation de Lyapunov algébrique :

$$S + A^T S + S A - C^T C = 0 \quad (2.46)$$

En tenant compte de la forme des matrices  $A$  et  $C$  d'après (2.40), on peut montrer que la solution de (2.46) est symétrique définie positive et on obtient :

$$S^{-1} C^T = \left[ C_q^1 I_p \quad C_q^2 I_p \quad \cdots \quad C_q^q I_p \right]^T, \quad C_q^k = \frac{q!}{k!(q-k)!}, \quad k = 1, \dots, q. \quad (2.47)$$

Maintenant, nous énonçons le théorème suivant :

**Théorème 2.3.1.** *Considérons le système (2.38), soumis aux hypothèses 2.3.1-2.3.2-2.3.3. Alors, il existe  $\theta_0 > 1$  tel que pour tous  $\theta > \theta_0$ , le système (2.45) est un observateur qui converge exponentiellement, i.e.*

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \sigma \theta^{q-1} e^{-\frac{\theta}{2}t} \|\hat{x}(0) - x(0)\| + 2\sigma \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \left( \frac{\delta_\varepsilon}{\theta} \right) \quad (2.48)$$

### 2.3. Observateur continu pour une classe de systèmes non linéaires incertains

où  $x(t)$  est la trajectoire inconnue du système (2.38) associée à l'entrée  $u(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  est la trajectoire du système (2.45) associée à  $(u, y)$ , où  $\theta_0 = \max\{1, 4L_\varphi\sqrt{n}\lambda_{\max}(S)\}$ ;  $\delta_\varepsilon$  est la borne essentielle supérieure  $\varepsilon$ ; et  $\sigma = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)}}$  est le conditionnement de la matrice  $S$  solution de (2.46).

#### 2.3.3 Analyse de convergence

Nous prouvons maintenant la convergence exponentielle vers zéro de l'erreur d'observation. Fixons  $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}$  où  $\tilde{x} = \hat{x} - x$  est l'erreur d'observation, la dynamique d'erreur est donnée par :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \theta \left[ A - S^{-1}C^T C \right] \bar{x}(t) + \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - \Delta_\theta B \varepsilon(t) \quad (2.49)$$

où

$$\tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) = \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \varphi(u(t), x(t)) \quad (2.50)$$

Soit  $V(\bar{x}) = \bar{x}^T S \bar{x}$  la fonction candidate de Lyapunov. En utilisant la solution unique de l'équation de Lyapunov algébrique (2.46), nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}(t)) &= 2\bar{x}^T(t) S \dot{\bar{x}}(t) \\ &= 2\theta \bar{x}^T(t) S A \bar{x}(t) - 2\theta \bar{x}^T(t) C^T C \bar{x}(t) + 2\bar{x}^T(t) S \Delta_\theta (\tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) + B \varepsilon(t)) \\ &= -\theta \bar{x}^T(t) S \bar{x}(t) - \theta \bar{x}^T(t) C^T C \bar{x}(t) + 2\bar{x}^T(t) S \Delta_\theta (\tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) + B \varepsilon(t)) \\ &\leq -\theta \bar{x}^T(t) S \bar{x}(t) + 2\bar{x}^T(t) S \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) + 2\bar{x}^T(t) S \Delta_\theta B \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (2.51)$$

En procédant comme dans [Farza *et al.*, 2004, Hammouri and Farza, 2003], on peut obtenir que pour  $\theta \geq 1$

$$\|2\bar{x}^T(t) S \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t))\| \leq 2\sqrt{n}\lambda_{\max}(S)L_\varphi\|\bar{x}(t)\|^2 \quad (2.52)$$

où  $L_\varphi$  provient de l'hypothèse 2.3.2.

De la même manière, d'après la structure de  $B$  et  $\Delta_\theta$  [Bouraoui *et al.*, 2015]

$$\|2\bar{x}^T(t) S \Delta_\theta B \varepsilon(t)\| \leq 2 \frac{\|\varepsilon(t)\| \sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\theta^{q-1}} \quad (2.53)$$

## Chapitre 2.

En substituant (2.52) et (2.53) dans (2.51), on obtient

$$\dot{V}(\bar{x}(t)) \leq -\left(\theta - 2\sqrt{n}\lambda_{\max}(s)L_{\bar{\varphi}}\right) \|\bar{x}(t)\|^2 + 2\frac{\|\varepsilon(t)\|\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\theta^{q-1}} \quad (2.54)$$

En choisissant  $\theta$  tel que  $(\theta - 2\sqrt{n}\lambda_{\max}(S)L_{\varphi}) > \frac{\theta}{2}$ , c'est-à-dire :

$$\theta > \theta_0 \triangleq 4L_{\varphi}\sqrt{n}\lambda_{\max}(S) \quad (2.55)$$

Alors, nous pouvons réécrire l'équation (2.54) comme suit :

$$\dot{V}(\bar{x}(t)) \leq -\frac{\theta}{2}V(t) + 2\frac{\delta_{\varepsilon}\sqrt{\lambda_{\max}(S)}}{\theta^{q-1}} \quad (2.56)$$

Maintenant, comme  $\bar{x} = \Delta_{\theta}\tilde{x}$ , nous avons  $\|\bar{x}(t)\| \leq \|\tilde{x}(t)\| \leq \theta^{q-1}\|\tilde{x}(t)\|$ , où  $\theta_0 = \max\{1, 4L_{\varphi}\sqrt{n}\lambda_{\max}\}$ , et l'inégalité (2.56) conduit à :

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \sigma\theta^{q-1}e^{-\frac{\theta}{2}t}\|\tilde{x}(0)\| + 2\sigma\sqrt{\lambda_{\max}(S)}\left(\frac{\delta_{\varepsilon}}{\theta}\right) \quad (2.57)$$

Cette expression désigne l'erreur d'observation, ce qui prouve la convergence exponentielle de l'observateur à grand-gain.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré deux classes de systèmes non linéaires dont la sortie est disponible en temps continu. La première classe, contenant des systèmes non uniformément observables, a déjà été étudiée et un observateur en cascade a été construit dans [Besançon *et al.*, 1996]. Un nouvel observateur a été synthétisé ici, avec une structure plus simple, dont la dimension est la même que celui du système d'origine, grâce à l'introduction d'une nouvelle condition d'excitation persistante. Ce résultat a été présenté dans [Hernández *et al.*, 2015] et [Hernández-González *et al.*, 2016b]. Le deuxième observateur considéré dans ce chapitre est un résultat déjà existant concernant une classe de systèmes uniformément observables incertains qui sera réutilisé dans la suite.

# Chapitre 3

## Observateur continu-discret pour une classe de systèmes non linéaires

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la synthèse d'un observateur pour une classe de systèmes non linéaires, non uniformément observables, dont la sortie est disponible seulement à des instants discrets, comme illustré sur la figure 3.1. Cet observateur devra fournir une estimation en temps continu de l'état du système. La classe de sys-

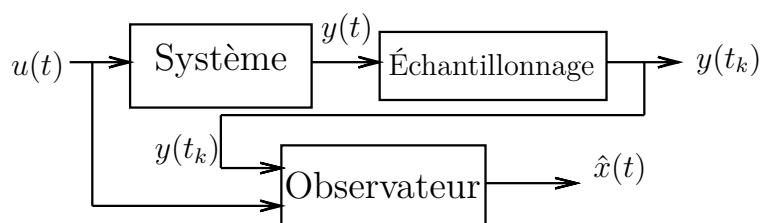


FIGURE 3.1 – Schéma d'un observateur d'état continu-discret

tèmes considérée dans ce chapitre a déjà été étudiée dans [Besançon, 1999] pour des mesures en temps continu et un observateur avec une structure simple a été proposé dans le chapitre 2. Cet observateur va donc être modifié afin de prendre en compte l'échantillonnage de la sortie. Les performances de l'observateur ainsi obtenu seront validées sur deux exemples : le moteur asynchrone et le moteur Stirling à piston libre.

## 3.2 Formulation du problème

Nous considérons la classe suivante de systèmes non linéaires multi-entrées et multi-sorties avec mesures échantillonnées :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t), x(t)) x(t) + \varphi(u(t), x(t)) \\ y(t_k) = Cx(t_k) = x^1(t_k) \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $C = \begin{bmatrix} I_{n_1 \times n_1} & 0_{n_1 \times n_2} & \cdots & 0_{n_1 \times n_q} \end{bmatrix}$  et :

$$A(u, x) = \begin{bmatrix} 0 & A_1(u, x^1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & A_{q-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(u, x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(u, x^1) \\ \varphi_2(u, x^1, x^2) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}) \\ \varphi_n(u, x) \end{bmatrix}$$

où l'état du système  $x = ((x^1)^T \dots (x^q)^T)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^k \in \mathbb{R}^{n_k}$ ,  $k = 1, \dots, q$  avec  $n_1 = p$  et  $\sum_{k=1}^q n_k = n$  et chaque  $A_k(u, x)$  est une matrice  $n_k \times n_{k+1}$  qui est triangulaire par rapport à  $x$  i.e.  $A_k(u, x) = A_k(u, x^1, \dots, x^k)$ ,  $k = 1, \dots, q-1$ ;  $\varphi(u, x)$  est une fonction non linéaire qui possède une structure triangulaire par rapport à  $x$ ;  $u \in \mathbb{R}^s$  représente l'entrée du système et  $y(t_k) \in \mathbb{R}^p$  est la sortie discrète. En outre  $0 \leq t_0 < \dots < t_k < \dots$ ,  $\Delta_k = t_{k+1} - t_k$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$ , nous supposons qu'il existe une constante  $\Delta_M > 0$  telle que  $0 < \Delta_k < \Delta_M$ ,  $\forall k \geq 0$ .

Afin de synthétiser un observateur pour le système (3.1), les hypothèses classiques suivantes sont adoptées ([Besançon *et al.*, 1996] et [Farza *et al.*, 2015a]) :

**Hypothèse 3.2.1.** *L'état  $x(t)$  et l'entrée  $u(t)$  sont bornés, c'est-à-dire,  $x(t) \in X$  et  $u(t) \in U$ , où  $X \subset \mathbb{R}^n$  et  $U \subset \mathbb{R}^s$  sont des ensembles compacts.*

**Hypothèse 3.2.2.** *Les fonctions  $A(u, x)$  et  $\varphi(u, x)$  sont Lipschitz par rapport à  $x$  uniformément en  $u$  où  $(u, x) \in U \times X$ . Leurs constantes de Lipschitz sont respectivement notées  $L_A$  et  $L_\varphi$ .*

En prenant en considération que l'état appartient à l'ensemble borné  $X$ , on peut

construire des prolongations Lipschitz des non linéarités, en utilisant des fonctions de saturation lisses. Nous supposons dans la suite que ces prolongations ont été effectuées et que les fonctions  $A(u, x)$  et  $\varphi(u, x)$  sont le résultat de ces prolongations. Nous pouvons donc considérer que pour toute entrée bornée  $u \in U$ , les fonctions  $A(u, x)$  et  $\varphi(u, x)$  sont globalement Lipschitz par rapport à  $x$  et sont bornées pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

L'hypothèse 3.2.1 donne l'existence d'une borne supérieure pour l'état et pour  $A(u, x)$ , ces bornes sont définies comme :

$$x_M = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\| \quad (3.2)$$

$$\tilde{a} = \sup_{(u,x) \in U \times X} \|A(u, x)\| \quad (3.3)$$

Afin de construire un observateur à grand-gain, on introduit la matrice diagonale  $\Delta_\theta$  comme :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left[ I_{n_1} \quad I_{n_2}/\theta \quad \dots \quad I_{n_q}/\theta^{q-1} \right] \quad (3.4)$$

Les propriétés suivantes sont directes, étant donné la structure de  $A$  et  $C$

$$\Delta_\theta A(u, x) \Delta_\theta^{-1} = \theta A(u, x) \quad C \Delta_\theta^{-1} = C \quad (3.5)$$

### 3.3 Observateur continu-discret

Dans cette section, nous allons présenter une des principales contributions de cette thèse, qui est la synthèse d'un observateur lorsque la sortie est disponible de manière discrète. Afin de faire face à ce problème, l'observateur proposé dans la section 2.2 est modifié.

L'observateur continu-discret candidat pour le système (3.1) est défini comme suit

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(u(t), \hat{x}(t))\hat{x} + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1}(t) C^T \eta(t) \quad (3.6)$$

$$\dot{S}(t) = \theta \left( -S(t) - A(u(t), \hat{x}(t))^T S - SA(u(t), \hat{x}(t)) + C^T C \right) \quad (3.7)$$

$$\dot{\eta}(t) = -\theta C S^{-1}(t) C^T \eta(t) \quad t \in [t_k, t_{k+1}[ , k \in \mathbb{N} \quad (3.8)$$

$$\eta(t_k) = C \hat{x}(t_k) - y(t_k) \quad (3.9)$$

où  $\hat{x} = [(\hat{x}^1)^T, \dots, (\hat{x}^q)^T]^T$  est l'état estimé et  $\Delta_\theta$  est la matrice diagonale par blocs, définie par (3.4), avec  $\theta \geq 1$ .



### Chapitre 3.

Afin de donner la dernière hypothèse, nous devons définir la matrice  $\Phi_{u,\hat{x}}(t, s)$ , qui est la matrice de transition du système suivant :

$$\dot{\xi}(t) = A(u(t), \hat{x}(t))\xi(t) \quad (3.10)$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $u$  et  $\hat{x}$  sont respectivement l'entrée et l'état du système dynamique (3.6). La matrice  $\Phi_{u,\hat{x}}(t, s)$  est définie comme :

$$\frac{d\Phi_{u,\hat{x}}(t, s)}{dt} = A(u(t), \hat{x}(t))\Phi_{u,\hat{x}}(t, s), \quad \forall t \geq s \geq 0, \quad (3.11)$$

$$\Phi_{u,\hat{x}}(t, t) = I_n, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.12)$$

où  $I_n$  représente la matrice identité dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

Maintenant, nous pouvons énoncer l'hypothèse suivante

**Hypothèse 3.3.1.** *L'entrée  $u$  est telle que pour toute trajectoire  $\hat{x}$  du système (3.6) partant de  $\hat{x}(0) \in X$ ,  $\exists T^* > 0$ ,  $\exists \theta^* > 0$ ,  $\exists \delta_0 > 0$ ,  $\forall \theta \geq \theta^*$  et  $\forall t \geq T^*/\theta$ , la condition d'excitation persistante suivante est satisfaite :*

$$\int_{t-T^*/\theta}^t \Phi_{u,\hat{x}}(s, t)^T C^T C \Phi_{u,\hat{x}}(s, t) ds \geq \frac{\delta_0}{\theta \alpha(\theta)} \Delta_\theta^2, \quad (3.13)$$

où  $\alpha(\theta) \geq 1$  est une fonction qui satisfait

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0. \quad (3.14)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat de convergence suivant.

**Theorème 3.3.1.** *Considérons le système (3.1), soumis aux hypothèses 3.2.1-3.2.2. Supposons que l'entrée  $u$  est bornée et satisfait l'hypothèse 3.3.1. Alors, il existe  $\theta_0 > 1$  telle que pour chaque  $\theta \geq \theta_0$ , il existe  $\chi_\theta > 0$  telle que si la borne supérieure sur la période d'échantillonnage  $\Delta_M$  est choisie telle que*

$$\Delta_M < \chi_\theta \quad (3.15)$$

*alors l'état de l'observateur continu-discret avec mesures échantillonnées (3.6)-(3.9) converge exponentiellement vers l'état du système non linéaire (3.1).*

### 3.4 Analyse de convergence

Soit  $\bar{x} = \Delta_\theta \tilde{x}$  où  $\tilde{x} = \hat{x} - x$ ; à partir des équations du système (3.1) et de celles de l'observateur continu-discret (3.6)-(3.9), l'équation d'erreur est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \theta A(u(t), \hat{x}(t))\bar{x}(t) - \theta S^{-1}(t)C^T \eta(t) \\ &\quad + \Delta_\theta \tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t))x(t) + \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) \\ &= \theta \left[ A(u(t), \hat{x}(t)) - S^{-1}(t)C^T C \right] \bar{x}(t) + \theta S^{-1}(t)C^T z(t) \\ &\quad + \Delta_\theta \tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t))x + \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) \end{aligned} \quad (3.16)$$

où

$$\tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) = A(u(t), \hat{x}(t)) - A(u(t), x(t)) \quad (3.17)$$

$$\tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) = \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \varphi(u(t), x(t)) \quad (3.18)$$

et  $z(t) = C\bar{x}(t) - \eta(t)$ . D'après (3.9), on voit que  $\eta(t_k) = C\tilde{x}(t_k) = \bar{x}(t_k)$  et en conséquence  $z(t_k) = 0$ .

En utilisant le fait que  $\eta(t)$  est régie par l'EDO (3.8), on peut montrer que

$$\dot{z}(t) = C[\theta A(u(t), \hat{x}(t))\bar{x}(t) + \Delta_\theta \tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t))x(t) + \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t))] \quad (3.19)$$

Une fonction de Lyapunov candidate est donnée par  $V(\bar{x}, t) = \bar{x}^T S(t)\bar{x}$ . En utilisant (3.16) et du fait que  $S(t)$  est régie par l'équation différentielle ordinaire (3.7), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}(t), t) &= 2\bar{x}^T(t)S(t)\dot{\bar{x}}(t) + \bar{x}^T(t)\dot{S}(t)\bar{x}(t) \\ &= -\theta\bar{x}^T(t)S(t)\bar{x}(t) - \theta\bar{x}^T(t)C^T C\bar{x}(t) + 2\theta\bar{x}^T(t)C^T z(t) \\ &\quad + 2\bar{x}(t)S(t)\Delta_\theta \left[ \tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t))x + \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) \right] \\ &\leq -\theta\bar{x}^T(t)S(t)\bar{x}(t) + 2\theta\bar{x}^T(t)C^T z(t) \\ &\quad + 2\bar{x}(t)S(t)\Delta_\theta \left[ \tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t))x + \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\quad (3.21)$$

Maintenant, nous allons majorer  $\|z(t)\|$ . En effet, à partir de la définition de  $z(t)$  et du fait que  $\eta(t)$  est régie par l'équation différentielle (3.8), on peut montrer que

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= C\dot{\tilde{x}}(t) - \dot{\eta}(t) \\ &= C \left[ \theta A(u(t), \hat{x}(t))\bar{x}(t) + \Delta_\theta \left( \tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t))x(t) + \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

### Chapitre 3.

En intégrant l'équation (3.22) entre  $t_k$  et  $t$  et du fait que  $z(t_k) = 0$ , on obtient

$$z(t) = \int_{t_k}^t C \left[ \theta A(u(s), \hat{x}(s)) \bar{x}(s) + \Delta_\theta \left( \tilde{A}(u(s), \hat{x}(s), x(s)) x(s) + \tilde{\varphi}(u(s), \hat{x}(s), x(s)) \right) \right] ds \quad (3.23)$$

En prenant la norme, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &\leq \frac{\theta \tilde{a}}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s), s)} ds + \frac{\sqrt{n} L_A x_M}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s), s)} ds \\ &\quad + \frac{\sqrt{n} L_\varphi}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s), s)} ds \\ &= \frac{\theta \tilde{a} + \sqrt{n} (L_A x_M + L_\varphi)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s), s)} ds \end{aligned} \quad (3.24)$$

où  $x_M$  est donnée par (3.2) et  $\tilde{a}$  par (3.3). En utilisant (2.21), il résulte que

$$\begin{aligned} \|2\theta \bar{x}(t) C^T z(t)\| &\leq 2\theta \frac{\sqrt{V(\bar{x}(t), t)}}{\lambda_{\min}(S)} \left[ (\theta \tilde{a} + \sqrt{n} (L_A x_M + L_\varphi)) \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s), s)} ds \right] \\ &\leq 2\theta \left[ \frac{\alpha(\theta) (\theta \tilde{a} + \sqrt{n} (L_A x_M + L_\varphi)) e^{T^*}}{\delta_0} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s), s)} ds \right] \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

En tenant compte de la condition de Lipschitz et de la structure triangulaire de  $\varphi(u, x)$ , on peut montrer que pour  $\theta \geq 1$ , [Farza *et al.*, 2009] :

$$\|2\bar{x}(t) S(t) \Delta_\theta \tilde{A}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) x(t)\| \leq 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n \lambda_{\max}(S) e^{T^*}}{\delta_0}} V(t) L_A x_M \quad (3.26)$$

$$\|2\bar{x}(t) S(t) \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t))\| \leq 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n \lambda_{\max}(S) e^{T^*}}{\delta_0}} V(t) L_\varphi \quad (3.27)$$

En combinant les équations (3.26), (3.27), (3.21) et (3.25), nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}(t), t) &\leq -\theta V(\bar{x}(t), t) + 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n \lambda_{\max}(S) e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi] V(\bar{x}(t), t) \\ &\quad + 2\theta \left[ \frac{\alpha(\theta) (\theta \tilde{a} + \sqrt{n} (L_A x_M + L_\varphi)) e^{T^*}}{\delta_0} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s), s)} ds \right] \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

On peut réécrire (3.28) comme suit

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sqrt{V(\bar{x}(t), t)}}{dt} &\leq -\theta\sqrt{V(\bar{x}(t), t)} + 2\sqrt{\alpha(\theta)}\sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi] \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \\
 &\quad + 2\theta\frac{\alpha(\theta)(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi))e^{T^*}}{\delta_0} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s), s)} ds \\
 &\leq -\theta\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}\sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi]\right) \sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \\
 &\quad + \theta\frac{\alpha(\theta)(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi))e^{T^*}}{\delta_0} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s), s)} ds \\
 &\leq -a_\theta\sqrt{V(\bar{x}(t), t)} + b_\theta \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}(s), s)} ds
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

où

$$a_\theta = \theta\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}\sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi]\right) \tag{3.30}$$

$$b_\theta = \theta\frac{\alpha(\theta)(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi))e^{T^*}}{\delta_0} \tag{3.31}$$

Supposons que la borne supérieure des périodes d'échantillonnage  $\Delta_M$  satisfait la condition suivante  $\Delta_M < \frac{a_\theta}{b_\theta}$ , c'est-à-dire,  $\frac{b_\theta\Delta_M}{a_\theta} < 1$  ou plus explicitement

$$\Delta_M \frac{\alpha(\theta)(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi))e^{T^*}}{\delta_0\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}\sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi]\right)} < 1 \tag{3.32}$$

Il est clair que  $b_\theta > 0$  et que pour  $\theta$  suffisamment grand  $a_\theta > 0$  (car  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0$ ). Donc, selon le Lemme D.1.1, dans l'annexe D, nous avons

$$\sqrt{V(\bar{x}(t), t)} \leq e^{-\eta_\theta t} \sqrt{V(\bar{x}(0), 0)} \tag{3.33}$$

avec :

$$0 < \eta_\theta = (a_\theta - b_\theta\Delta_{\max}) e^{-a_\theta\Delta_M} \tag{3.34}$$

La constante  $\chi_\theta$  utilisée dans le théorème est donné par

$$\chi_\theta = \frac{a_\theta}{b_\theta} = \frac{\delta_0\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}}\sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi]\right)}{\alpha(\theta)(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi))e^{T^*}} \tag{3.35}$$

On remarque que le taux de décroissance exponentiel de l'erreur d'observation  $\tilde{x}$  est donné par (3.34) et peut être considéré comme une fonction de  $\Delta_M$ , c'est-à-dire

$$\eta_\theta(\Delta_M) = (a_\theta - b_\theta \Delta_{\max}) e^{-a_\theta \Delta_M} \quad (3.36)$$

Il est facile de vérifier que pour tout  $\Delta_M \geq 0$  satisfaisant (3.15), la première dérivée de la fonction  $\eta_\theta(\Delta_M)$  par rapport à  $\Delta_M$  est négative et donc  $\eta_\theta$  est une fonction décroissante de  $\Delta_M$ . En outre, nous obtenons

$$\lim_{\Delta_{\max} \rightarrow 0} \eta_\theta(\Delta_M) = a_\theta \quad (3.37)$$

c'est-à-dire, nous récupérons le taux de décroissance exponentiel de l'observateur obtenu dans le cas d'une sortie en temps continu lorsque  $\Delta_M$  tend vers zéro (à comparer avec (2.37)).

## 3.5 Exemples

Afin de valider les performances de l'observateur continu-discret proposé, nous présentons des exemples qui permettent d'en montrer l'efficacité. Dans le premier exemple, nous synthétisons un observateur pour un système bien connu dans la littérature : le moteur asynchrone. Dans le second exemple, nous appliquons l'observateur proposé à un système de récupération d'énergie qui est basé sur un moteur Stirling à piston libre. Les estimations des vitesses et des positions du moteur seront considérées.

### 3.5.1 Application à un moteur asynchrone

Pour montrer les performances de l'approche proposée, le modèle d'un moteur asynchrone est considéré. Ce type de moteur est utilisé dans de nombreux domaines industriels en raison sa rentabilité opérationnelle. Toutefois, la dynamique de la machine est fortement non linéaire, de plus les variables ne sont généralement pas toutes disponibles, comme les variables du rotor. Une solution est d'utiliser un observateur non linéaire pour estimer tous les états à partir des mesures disponibles.

Nous nous sommes intéressés au moteur asynchrone avec la configuration illustrée sur la Figure 3.2, cf. [Bodson *et al.*, 1994, Chiasson, 1993], qui montre un diagramme schématique du moteur. Le moteur asynchrone peut être représenté par un système d'équations différentielles ordinaires, données par (cf. [DeLeon *et al.*, 2000, Ahmed,

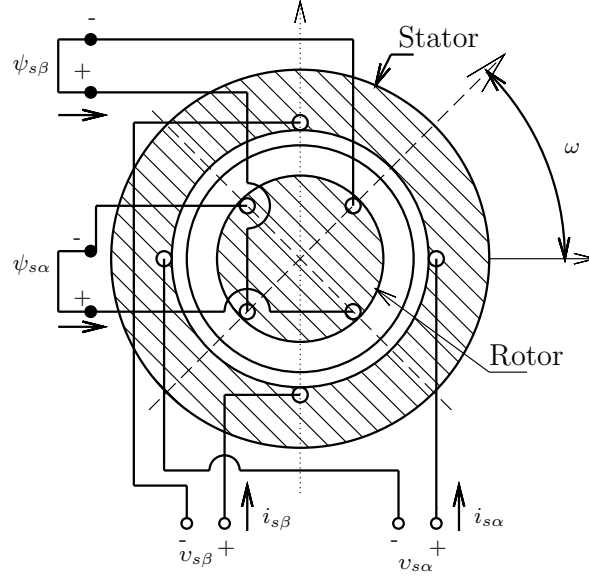


FIGURE 3.2 – Schéma représentatif d'un moteur asynchrone

2008]) :

$$\begin{cases} \dot{i}_{s\alpha} = -\gamma i_{s\alpha} + \frac{K}{T_r} \psi_{r\alpha} + pK\omega \psi_{r\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} v_{s\alpha} \\ \dot{i}_{s\beta} = -\gamma i_{s\beta} - pK\omega \psi_{r\alpha} + \frac{K}{T_r} \psi_{r\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} v_{s\beta} \\ \dot{\omega} = \frac{pM}{JL_r} (i_{s\beta} \psi_{r\alpha} - i_{s\alpha} \psi_{r\beta}) - \frac{C_{res}}{J} \\ \dot{\psi}_{r\alpha} = \frac{M}{T_r} i_{s\alpha} - \frac{1}{T_r} \psi_{r\alpha} - p\omega \psi_{r\beta} \\ \dot{\psi}_{r\beta} = \frac{M}{T_r} i_{s\beta} + p\omega \psi_{r\alpha} - \frac{1}{T_r} \psi_{r\beta} \end{cases} \quad (3.38)$$

avec les paramètres :

$$T_r = \frac{L_r}{R_r} \quad \sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r} \quad K = \frac{M}{\sigma L_s L_r} \quad \gamma = \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r M^2}{\sigma L_s L_r^2}$$

où  $i_{s\alpha}$  et  $i_{s\beta}$  désignent les courants du stator ;  $\psi_{s\alpha}$  et  $\psi_{s\beta}$  représentent les flux du rotor et  $\omega$  la vitesse angulaire ; les tensions d'entrée sont notées  $v_{s\alpha}$  et  $v_{s\beta}$ . Les valeurs des paramètres utilisées dans cette simulation sont présentées dans le Tableau C.1 dans l'Annexe B, cf. [Ahmed, 2008].

Le modèle non linéaire est représenté sous la forme (3.1), comme suit

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_2^1 \\ \dot{x}_3^1 \\ \dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{K}{T_r} & pKx_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & -pKx_3^1 & \frac{K}{T_r} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{pM}{JL_r}x_2^1 & -\frac{pM}{JL_r}x_1^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\gamma x_1^1 + \frac{1}{\sigma L_s} v_{s\alpha} \\ -\gamma x_2^1 + \frac{1}{\sigma L_s} v_{s\beta} \\ -\frac{C_{res}}{J} \\ \frac{M}{T_r} x_1^1 - \frac{1}{T_r} x_1^2 - px_2^2 x_3^1 \\ \frac{M}{T_r} x_2^1 - \frac{1}{T_r} x_2^2 - px_1^2 x_3^1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

### Chapitre 3.

avec :

$$y(t_k) = \begin{bmatrix} x_1^1(t_k) & x_2^1(t_k) & x_3^1(t_k) \end{bmatrix}^T$$

où l'état est noté  $x = [(x^1)^T (x^2)^T]^T$ . Ainsi les variables sont rassemblées comme suit :  $x^1 = [x_1^1 \ x_2^1 \ x_3^1]^T = [i_{s\alpha} \ i_{s\beta} \ \omega]^T$  et  $x^2 = [x_1^2 \ x_2^2]^T = [\psi_{r\alpha} \ \psi_{r\beta}]^T$ . On peut voir que la sortie échantillonnée  $y(t_k)$  est reliée à seulement une des variables de l'état qui est  $x^1(t_k)$ , c'est-à-dire, les courants du stator ( $i_{s\alpha}$  et  $i_{s\beta}$ ) et la vitesse angulaire ( $\omega$ ) qui sont disponibles aux instants d'échantillonnage  $t_k$ . Pour cette raison, nous nous fixons comme objectif l'estimation de tout l'état du système  $x(t)$  en temps continu. Maintenant, nous pouvons synthétiser un observateur non linéaire continu-discret de la forme (3.6)-(3.9).

La simulation du modèle non linéaire est effectuée avec les valeurs suivantes pour les tensions des entrées :  $v_{s\alpha} = 310 \cos(\omega t)$  et  $v_{s\beta} = 310 \sin(\omega t)$ , où la fréquence d'entrée du moteur est  $\omega = 377 \text{ rad}$ . En outre, les conditions initiales pour le système sont choisies telles que

$$x(0) = [x_1^1 \ x_2^1 \ x_3^1 \ x_1^2 \ x_2^2]^T = [0.2 \ 0.2 \ 10 \ 1 \ 1]^T$$

Afin d'évaluer l'observateur proposé, deux ensembles de résultats de simulation sont donnés. La première simulation correspond à une période d'échantillonnage relativement petite  $\Delta_k = 10 \text{ ms}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , tandis que l'autre est fixée à  $\Delta_k = 100 \text{ ms}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , celles-ci permettent d'évaluer l'effet de la période d'échantillonnage. En outre, le paramètre de synthèse de l'observateur continu-discret est choisi comme  $\theta = 10$ , dans les deux simulations, nous pouvons alors écrire la matrice  $\Delta_\theta$  comme suit :

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta} I_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

Les conditions initiales pour l'observateur continu-discret sont choisies telles que

$$\hat{x}(0) = [\hat{x}_1^1 \ \hat{x}_2^1 \ \hat{x}_3^1 \ \hat{x}_1^2 \ \hat{x}_2^2]^T = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$S(0) = I_{5 \times 5}$$

Les résultats de la première simulation pour l'observateur continu-discret (3.6)-(3.9) pour le moteur asynchrone (3.39) sont présentés sur les figures 3.3 et 3.4. Ces figures montrent l'état estimé  $\hat{x}(t)$  et l'erreur d'observation  $\tilde{x}(t)$ . Rappelons que la sortie échantillonnée  $y(t_k)$  est disponible avec une période d'échantillonnage  $\Delta_k = 10 \text{ ms}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Nous pouvons noter que les estimations délivrées par l'observateur convergent très rapidement vers les états inconnus  $x^2$  (voir la Figure 3.3). Afin de pouvoir mieux apprécier le temps de convergence pour la plus petite période d'échantillonnage  $\Delta_k = 10ms$ , l'erreur d'observation  $\tilde{x}(t)$  est reportée sur la figure 3.4. On peut remarquer qu'elle converge en moins de  $0.6s$ .

Dans ce qui suit, des résultats de simulation pour l'observateur continu-discret sont présentés pour une plus grande période d'échantillonnage  $\Delta_k = 100ms$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  (voir la figure 3.5). Ces simulations sont obtenues avec la même valeur du paramètre de synthèse  $\theta$ .

Clairement, on peut voir que l'observateur proposé prend un peu plus de temps pour converger. Ceci est plus visible sur l'erreur d'observation  $\tilde{x}(t)$ , qui est montrée sur la figure 3.6. Nous pouvons voir que l'erreur converge vers zéro en moins de  $1s$ . Toutefois, l'observateur proposé réussit à estimer l'état du système même avec une longue période d'échantillonnage, confirmant ainsi les résultats présentés.

#### 3.5.2 Application à moteur Stirling à piston libre

Les performances de l'observateur continu-discret sont illustrées sur un système de commande qui peut aider l'environnement. En effet, une alternative environnementale et productive est de récupérer l'énergie gaspillée, et ainsi produire de l'énergie renouvelable. Un moteur thermique est une bonne solution pour ce problème, un exemple de ce type de machine est le moteur Stirling à piston libre (pour plus de détails voir l'Annexe B).

Afin de construire un observateur pour le **FPSE**, on note  $x_1$  la longueur du piston,  $x_3$  la course de déplacement, et  $x_2$  et  $x_4$  leur vitesse respective. Les équations de mouvement pour la course de déplacement et le piston sont présentées dans (B.11), où  $\Delta_p$  est la perte de pression totale et  $\bar{F}_{load}$  la charge externe, qui sont définies dans (B.13) et (B.12), respectivement. En effet, le moteur peut être représenté par un système non linéaire de la forme (3.1), ce qui permet la synthèse d'un observateur continu-discret



### Chapitre 3.

de la forme (3.6)-(3.8). Par conséquent, le système (B.11) peut être réécrit comme suit

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{pd}p_m(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f}_L x_2 - \bar{f}_C x_1^2 x_2 + \bar{k}_C x_1^3 + k_{pp} p_m x_1 \\ 0 \\ k_{dd} p_m x_1 + c_{dd} p_m x_2 + k_{dp} p_m x_3 + c_{dp} p_m x_4 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

où l'entrée représente la pression du gaz de travail  $p_m(t) = 7MPa + 0.5MPa \sin(t)$ ;  $x(t) = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  est le vecteur d'état et  $y(t_k) = x_1(t_k)$  est la sortie échantillonnée, qui est la longueur du piston. Les conditions initiales sont choisies comme  $x(0) = [0, 0, 0.1, 0]$ . Les valeurs numériques utilisées dans ce travail ont été obtenues en utilisant les paramètres du **FPSE** présentées dans [Ulusoy, 1994] et sont reportées dans le Tableau C.2 (voir l'Annexe C).

Afin d'évaluer les performances de l'observateur proposé, à nouveau, deux ensembles de résultats de simulation sont donnés. La première simulation correspond à une période d'échantillonnage relativement petite,  $\Delta_k = 0.1s$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , tandis que l'autre est prise plus grande :  $\Delta_k = 1s$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . En outre, le paramètre de synthèse de l'observateur continu-discret est pris comme  $\theta = 1.1$ , pour la première simulation et  $\theta = 1.2$  pour la deuxième simulation. On peut donc écrire la matrice  $\Delta_\theta$  comme suit :

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\theta^3} \end{bmatrix}$$

L'observateur continu-discret a été initialisé comme suit

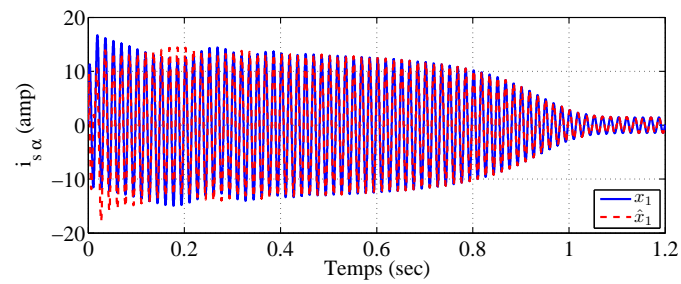
$$\begin{aligned} \hat{x}(0) &= [0.5, -0.5, 0.5, -0.5]^T \\ S(0) &= I_{4 \times 4} \end{aligned}$$

Les résultats de simulation de l'observateur continu-discret (3.6)-(3.9) pour le **FPSE** (3.40) sont présentés sur les figures 3.7-3.8, avec  $\Delta_k = 0.1s$  et  $\Delta_k = 1s$ , respectivement. Dans la première simulation, nous pouvons voir que l'observateur proposé converge en moins de 6sec. Dans la seconde simulation, l'observateur continu-discret prend environ 25sec pour converger vers l'état réel du système  $x(t)$ . Il est important de souligner que les résultats sont aussi satisfaisants, même avec une plus grande période d'échantillon-

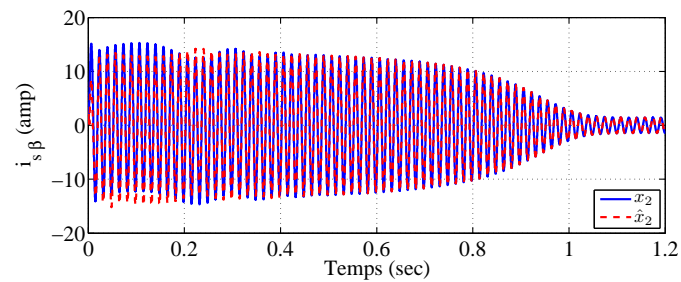
nage.

## 3.6 Conclusion

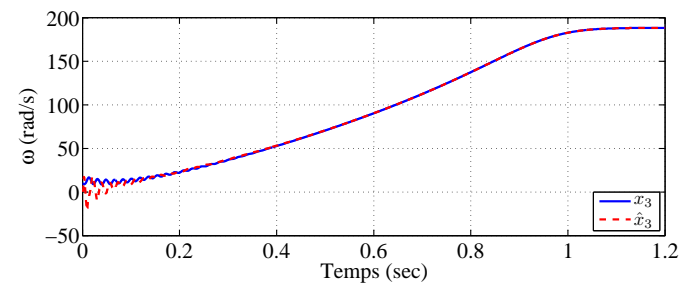
Nous avons considéré ici le problème de la synthèse d'observateurs pour une classe assez générale de systèmes non linéaires avec des sorties échantillonnées. L'observateur précédemment obtenu dans le Chapitre 2 pour le cas où la sortie est disponible en temps continu, basé sur une structure à grand-gain, a été reconsidéré afin de faire face au problème de la sortie échantillonnée. L'algorithme proposé ici a été validé par des simulations sur deux systèmes différents : le moteur asynchrone et le moteur Stirling à piston libre.



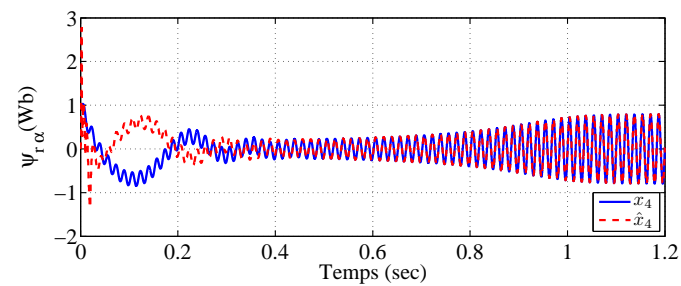
(a) Courant du stator  $i_{s\alpha}$



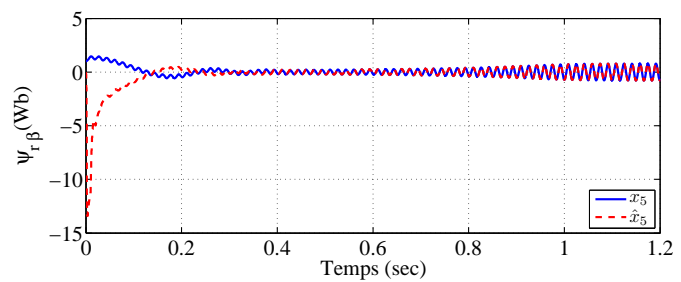
(b) Courant du stator  $i_{s\beta}$



(c) Vitesse angulaire  $\omega$



(d) Flux du rotor  $\psi_{r\alpha}$



(e) Flux du rotor  $\psi_{r\beta}$

FIGURE 3.3 – Estimation de l'état du moteur asynchrone avec  $\Delta_k = 10\text{msec.}$  et  $\theta = 10.$

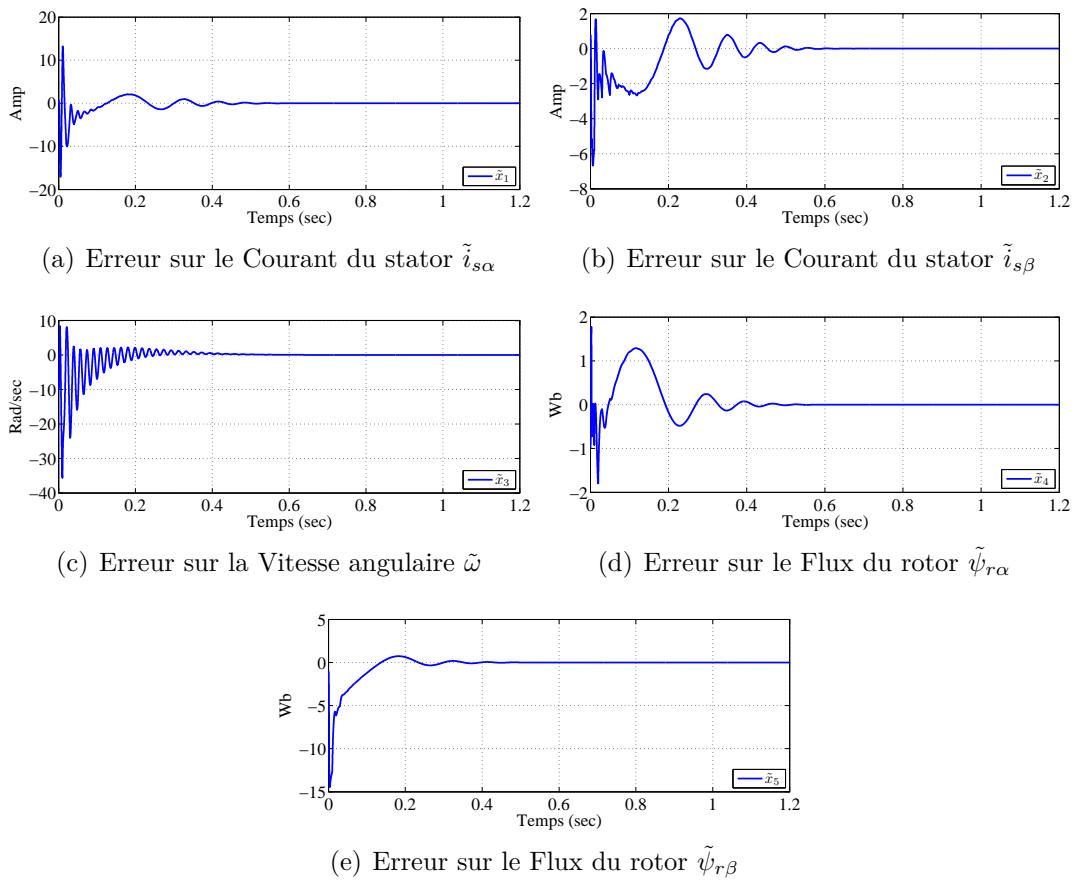
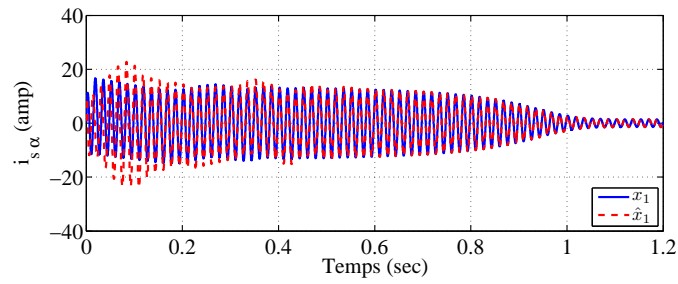
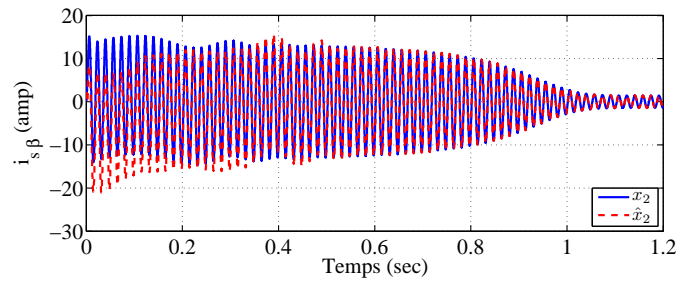


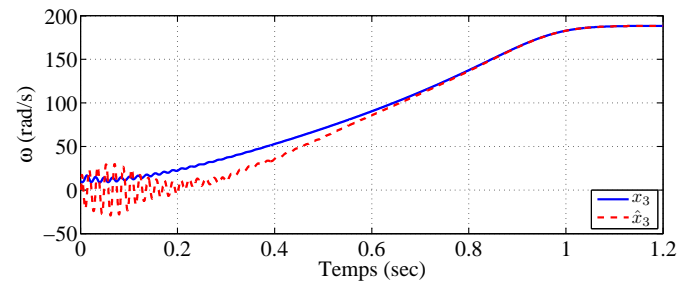
FIGURE 3.4 – Erreur d’observation pour le moteur asynchrone avec  $\Delta_k = 10\text{msec.}$  et  $\theta = 10$ .



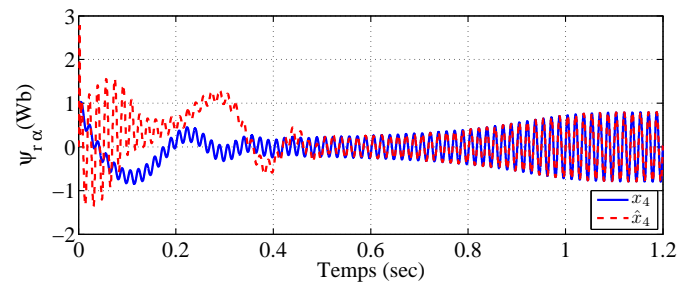
(a) Courant du stator  $i_{s\alpha}$



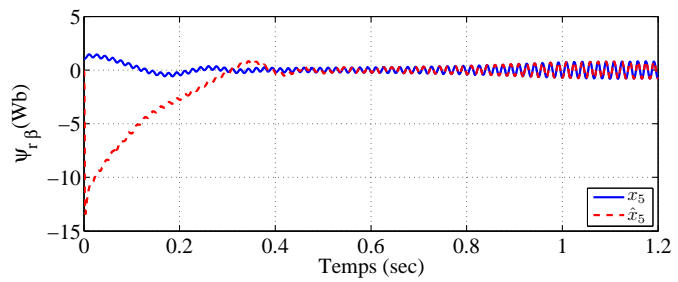
(b) Courant du stator  $i_{s\beta}$



(c) Vitesse angulaire  $\omega$



(d) Flux du rotor  $\psi_{r\alpha}$



(e) Flux du rotor  $\psi_{r\beta}$

FIGURE 3.5 – Estimation de l'état du moteur asynchrone avec  $\Delta_k = 100\text{msec.}$  et  $\theta = 10.$

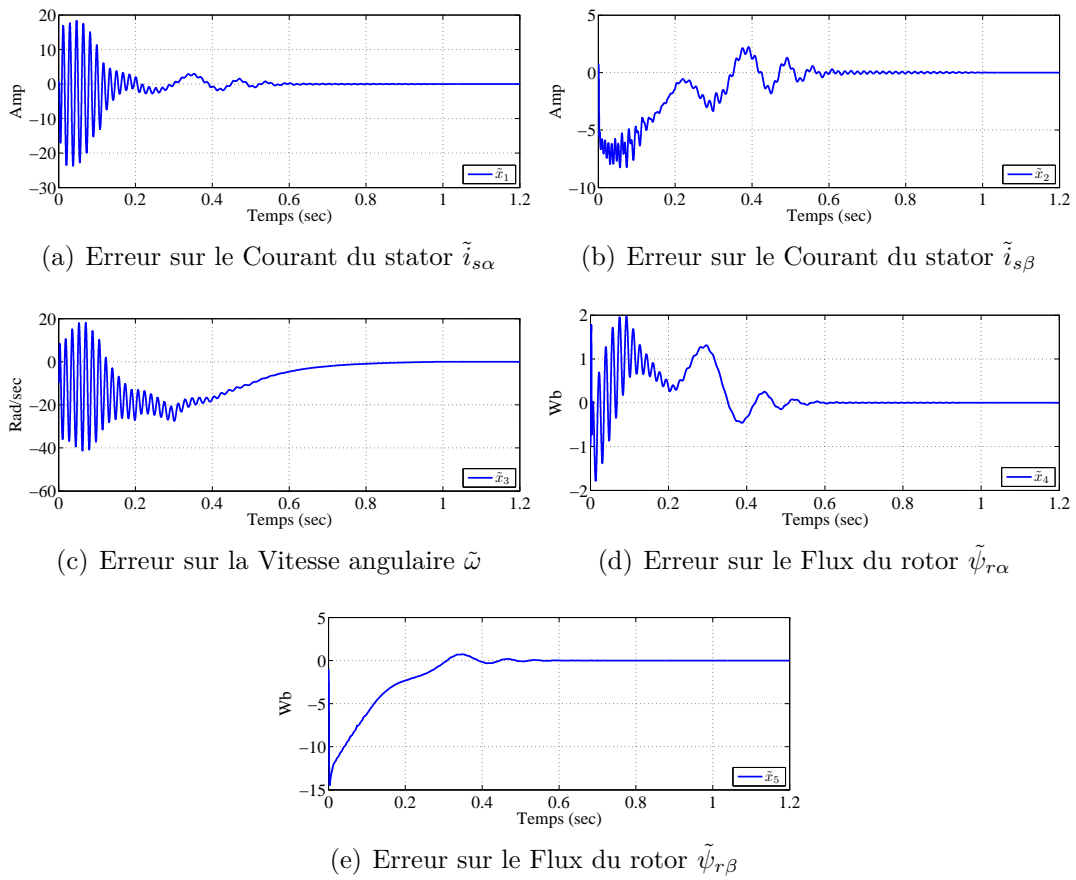
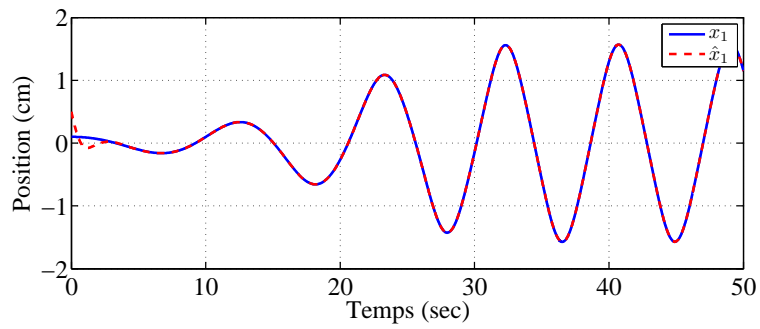
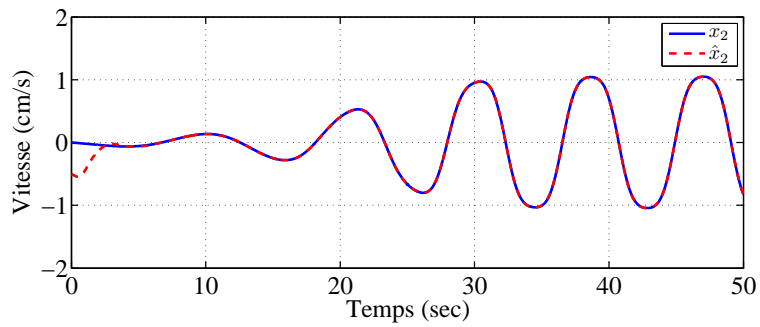


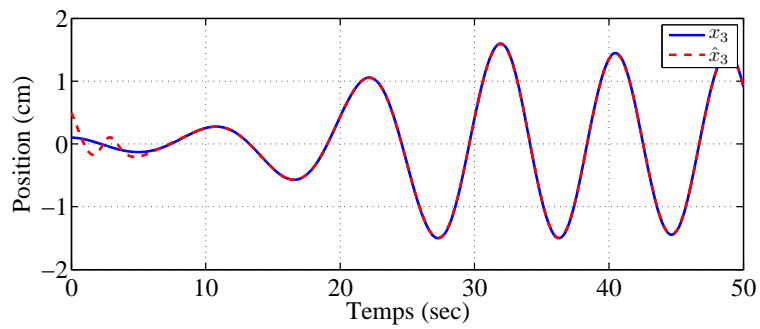
FIGURE 3.6 – Erreur d’observation pour le moteur asynchrone avec  $\Delta_k = 100\text{msec.}$  et  $\theta = 10$ .



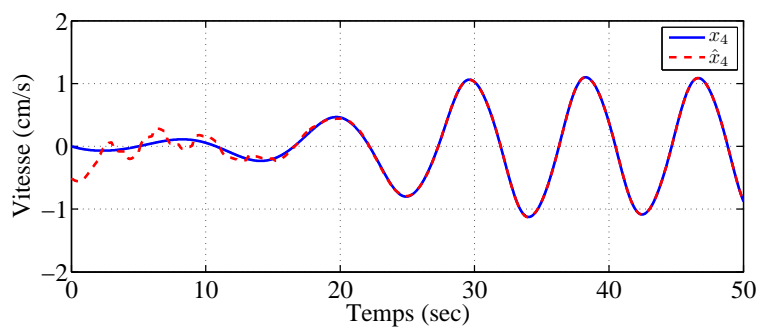
(a) Position du piston  $x_1$



(b) Vitesse du piston  $x_2$



(c) Position de la course de déplacement  $x_3$



(d) Vitesse de la course de déplacement  $x_4$

FIGURE 3.7 – Estimation de l'état du **FPSE** avec l'observateur continu-discret :  $\Delta_k = 0.1\text{sec.}$  et  $\theta = 1.2.$

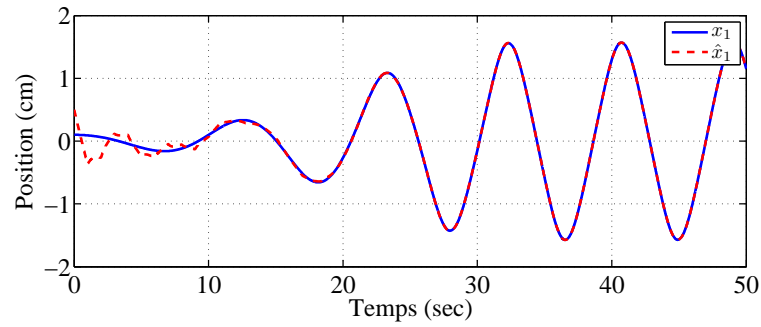
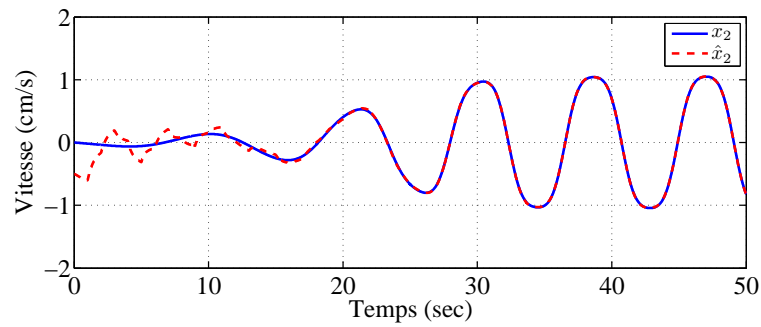
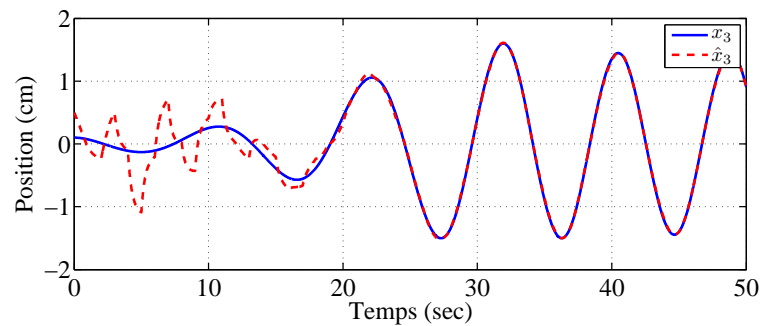
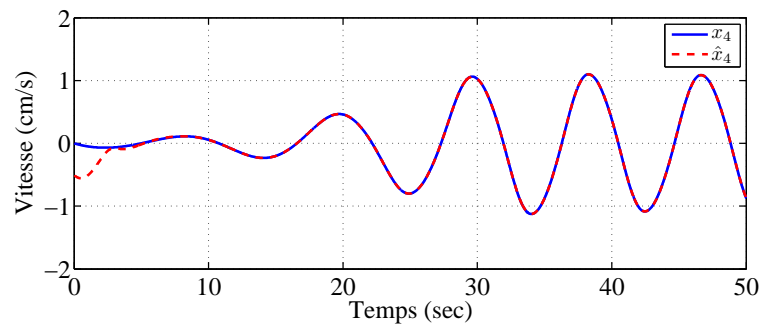
(a) Position du piston  $x_1$ (b) Vitesse du piston  $x_2$ (c) Vitesse du déplaceur  $x_3$ (d) Vitesse du déplaceur  $x_4$ 

FIGURE 3.8 – Estimation de l'état du **FPSE** avec l'observateur continu-discret :  $\Delta_k = 1\text{sec}$ .  
et  $\theta = 1.1$ .



*Chapitre 3.*

# Chapitre 4

## Observateur en cascade pour une classe de systèmes non linéaires MIMO avec sorties échantillonnées et retardées

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes non linéaires, non uniformément observables, dont la sortie est à la fois échantillonnée et retardée. La classe de systèmes considérée dans ce chapitre est la même que celle considérée dans le chapitre précédent où les sorties étaient échantillonnées. Afin de pouvoir surmonter le problème simultané de l'échantillonnage et du retard, nous réutilisons l'observateur présenté dans le chapitre précédent et nous l'associons avec une structure en cascade, comme illustré sur la figure 4.1.

En effet, la structure d'observateur en cascade a été initialement proposé dans [Ger-

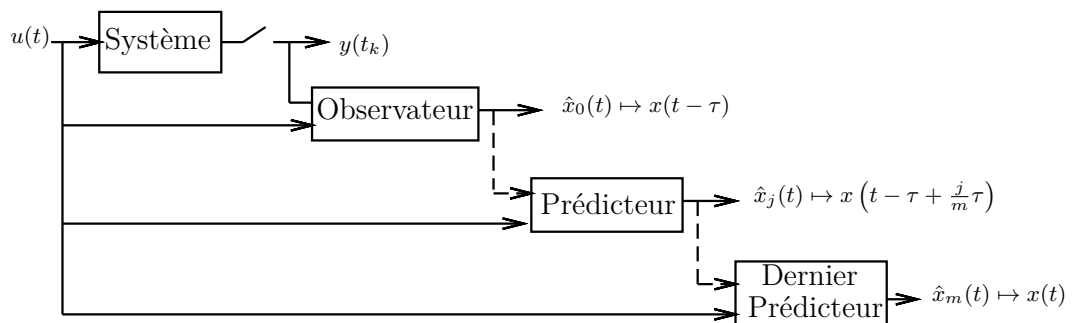


FIGURE 4.1 – Observateur en cascade pour une sortie échantillonnée et retardée

mani *et al.*, 2002], pour une classe de systèmes non linéaires uniformément observables, cette synthèse a été reconsidérée dans [Kazantzis and Wright, 2005] pour un retard constant et dans [Farza *et al.*, 2015b, Cacace *et al.*, 2014] pour un retard variant dans le temps. L'observateur en cascade est constitué d'une chaîne de sous-systèmes où chacun prédit l'état du prédicteur précédent dans la chaîne sur une petite fraction du retard original, de telle sorte que l'état du dernier sous-système fournit une estimation de l'état instantané du système.

Les performances de l'observateur ainsi obtenu sont illustrées à travers des simulations : un exemple académique et une application à un moteur Stirling à piston libre.

## 4.2 Formulation du problème

Nous considérons la classe de systèmes non linéaires multi-entrées et multi-sorties suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t), x(t)) x(t) + \varphi(u(t), x(t)) \\ y(t_k) = Cx(t_k - \tau) = x^1(t_k - \tau) \end{cases} \quad (4.1)$$

avec  $C = \begin{bmatrix} I_{n_1 \times n_1} & 0_{n_1 \times n_2} & \cdots & 0_{n_1 \times n_q} \end{bmatrix}$  et :

$$A(u, x) = \begin{bmatrix} 0 & A_1(u, x^1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & A_{q-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(u, x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(u, x^1) \\ \varphi_2(u, x^1, x^2) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}) \\ \varphi_n(u, x) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

où l'état  $x = ((x^1)^T \dots (x^q)^T)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^k \in \mathbb{R}^{n_k}$ ,  $k = 1, \dots, q$  avec  $n_1 = p$  et  $\sum_{k=1}^q n_k = n$  et chaque  $A_k(u, x)$  est une matrice  $n_k \times n_{k+1}$  qui est triangulaire par rapport à  $x$ , c'est-à-dire,  $A_k(u, x) = A_k(u, x^1, \dots, x^k)$ ,  $k = 1, \dots, q-1$ ;  $\varphi(u, x)$  est une fonction non linéaire qui a une structure triangulaire par rapport à  $x$ ;  $u \in \mathbb{R}^s$  désigne l'entrée du système et  $y(t_k) \in \mathbb{R}^p$  est la sortie échantillonnée et retardée,  $\tau > 0$  est le retard sur la sortie. En outre  $0 \leq t_0 < \dots < t_k < \dots$ ,  $\Delta_k = t_{k+1} - t_k$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$ , nous supposons qu'il existe  $\Delta_M > 0$  tel que  $0 < \Delta_k \leq \Delta_M$ ,  $\forall k \geq 0$ .

Les hypothèses classiques requises pour un observateur à grand-gain sont données par (cf. [Besançon *et al.*, 1996] et [Farza *et al.*, 2015a]),

**Hypothèse 4.2.1.** *L'état  $x(t)$  et l'entrée  $u(t)$  sont bornés, c'est-à-dire,  $x(t) \in X$  et  $u(t) \in U$ , où  $X \subset \mathbb{R}^n$  et  $U \subset \mathbb{R}^s$  sont des ensembles compacts.*

**Hypothèse 4.2.2.** *Les fonctions  $A(u, x)$  et  $\varphi(u, x)$  sont Lipschitziennes par rapport à  $x$  uniformément par rapport à  $u$ , où  $(u, x) \in U \times X$ . Leur constante de Lipschitz sont notées  $L_A$  et  $L_\varphi$ .*

Nous rappelons encore le fait que comme l'état est confinée dans un ensemble borné  $X$ , on peut donc supposer qu'il existe des prolongations Lipschitz pour les non linéarités, en utilisant des fonctions de saturation lisses. Nous supposons donc dans la suite que les prolongations ont été effectuées et que les fonctions  $A(u, x)$  et  $\varphi(u, x)$  proviennent de ces prolongations. Ceci permet de conclure que pour toute entrée bornée  $u \in U$ , les fonctions  $A(u, x)$  et  $\varphi(u, x)$  sont globalement Lipschitz par rapport à  $x$ , et sont bornées pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  (voir [Farza *et al.*, 2009] pour plus de détails).

L'hypothèse 4.2.1 donne l'existence d'une bornée supérieure pour l'état et pour  $A(u, x)$ , qui sont définies comme suit

$$x_M = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\|. \quad (4.3)$$

$$\tilde{a} = \sup_{(u, x) \in U \times X} \|A(u, x)\| \quad (4.4)$$

Afin de synthétiser un observateur à grand-gain, on introduit la matrice diagonale  $\Delta_\theta$  comme suit

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left[ I_{n_1} \quad I_{n_2}/\theta \quad \cdots \quad I_{n_q}/\theta^{q-1} \right] \quad (4.5)$$

Comme dans les chapitres précédents, nous rappelons les propriétés suivantes qui résultent des structures de  $A$  et  $C$

$$\Delta_\theta A(u, x) \Delta_\theta^{-1} = \theta A(u, x) \quad C \Delta_\theta^{-1} = C \quad (4.6)$$

### 4.3 Synthèse de l'observateur

Dans cette section, nous proposons la synthèse d'un observateur en cascade pour le système (4.1) où les sorties sont échantillonnées et retardées avec un retard  $\tau$ . En effet, l'observateur proposé est constitué d'une cascade de  $m + 1$  sous-systèmes dont chacun

## Chapitre 4.

est de dimension  $n$ , où  $m$  est un entier positif (voir la Figure 4.2). Le premier observateur de la cascade est un observateur continu-discret qui fournit une estimation en temps continu de l'état retardé, en utilisant les sorties échantillonnées. Chaque sous-système restant dans la cascade est un prédicteur de l'état qui prédit l'état du système précédent dans la cascade avec un horizon de prédiction égal à  $\frac{\tau}{m}$ , de telle manière que l'état du dernier prédicteur fournit une estimation de l'état réel du système.

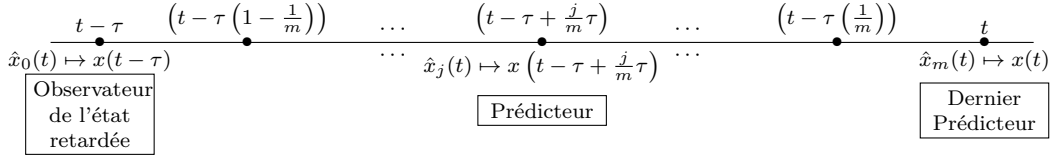


FIGURE 4.2 – La séquence des itérations  $j = 0, 1, \dots, m$

Comme dans [Germani *et al.*, 2002, Kazantzis and Wright, 2005, Farza *et al.*, 2015b], les notations suivantes sont adoptées :

$$x_j(t) = x\left(t - \tau + \frac{j}{m}\tau\right) \quad , \quad u_j(t) = u\left(t - \tau + \frac{j}{m}\tau\right) \quad (4.7)$$

où  $j = 0, \dots, m$ . À noter que la synthèse de l'observateur en cascade est basée sur les propriétés suivantes

$$x_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) = x_{j-1}(t) \quad \text{et} \quad u_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) = u_{j-1}(t) \quad (4.8)$$

L'observateur candidat pour le système non linéaire (4.1) est donné par l'ensemble des équations suivantes

$$\dot{\hat{x}}_j(t) = A(u_j(t), \hat{x}_j(t))\hat{x}_j + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) - G_j(t), \quad j = 0, \dots, m \quad (4.9)$$

où  $\hat{x}_j \in \mathbb{R}^n$  est l'estimation de  $x_j$  et  $G_j$  est le terme de correction de l'observateur, pour l'état retardé lorsque  $j = 0$  et pour le  $j$ -ème prédicteur lorsque  $j = 1, \dots, m$ . Maintenant, nous présentons l'expression des gains  $G_j$ . En effet, le gain de l'observateur pour l'état retardé  $G_0$  est défini comme suit

$$G_0(t) = \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1}(t) C^T \eta(t) \quad (4.10)$$

$$\dot{S}(t) = \theta \left( -S(t) - A(u_0(t), \hat{x}_0(t))^T S - S A(u_0(t), \hat{x}_0(t)) + C^T C \right) \quad (4.11)$$

$$\dot{\eta}(t) = -\theta C S^{-1}(t) C^T \eta(t) \quad t \in [t_k, t_{k+1}[ , k \in \mathbb{N} \quad (4.12)$$

$$\eta(t_k) = C \hat{x}(t_k) - y(t_k) \quad (4.13)$$

### 4.3. Synthèse de l'observateur

tandis que les gains des prédicteurs sont définis par les équations récursives suivantes pour  $j = 1, \dots, m$  :

$$G_j(t) = e^{\left(\bar{A}\frac{\tau}{m}\right)} \left[ G_{j-1}(t) + A \left( u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - A(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) \hat{x}_{j-1}(t) \right. \\ \left. + \varphi \left( u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) - \bar{A} \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) \right] \quad (4.14)$$

où  $\bar{A}$  est une matrice Hurwitz de taille  $n \times n$ , qui sera considérée comme un paramètre de synthèse.

Les équations différentielles à retard (4.9), pour les observateurs, sont initialisées comme suit

$$\hat{x}_0(0) = \hat{x}(-\tau) \text{ and } \hat{x}_j(s) = \hat{x} \left( s - \tau + \frac{j}{m}\tau \right), \quad s \in \left[ -\frac{\tau}{m}, 0 \right], \quad j = 1, \dots, m \quad (4.15)$$

où  $\hat{x}(s)$ ,  $s \in [-\tau, 0]$  est pour une estimation sélectionnée *a priori*.

Comme ce sera détaillé plus loin, un élément clé des prédicteurs proposés est l'introduction d'un paramètre de synthèse matriciel :  $\bar{A}$ . Cette matrice permet de régler la dynamique du processus de prédiction.

#### Remarques 4.3.1.

1. Comme les matrices  $A(u_j(t), \hat{x}_j(t))$  sont supposées être bornées, cette propriété est aussi vraie pour les matrices  $\bar{A} - A(u_j(t), \hat{x}_j(t))$ . Dans la suite, nous posons :

$$\Gamma = \max_{j=1, \dots, m} \sup_{t \geq 0} \|\bar{A} - A(u_j(t), \hat{x}_j(t))\| \quad (4.16)$$

2. Comme la matrice  $\bar{A}$  est Hurwitz, il existe des nombres positifs  $\varrho \geq 1$  et  $\bar{a} > 0$  tels que :

$$\forall t \geq 0 : \quad \|e^{\bar{A}t}\| \leq \varrho e^{-\bar{a}t} \quad (4.17)$$

Afin de donner la dernière hypothèse, nous devons définir la matrice  $\Phi_{u_0, \hat{x}_0}(t, s)$ , qui est la matrice de transition du système.

$$\dot{\xi}(t) = A(u_0(t), \hat{x}_0(t))\xi(t) \quad (4.18)$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_0$  et  $\hat{x}_0$  sont respectivement l'entrée et l'état du système dynamique (4.9)

Chapitre 4.

pour  $j = 0$ . La matrice  $\Phi_{u_0, \hat{x}_0}(t, s)$  est définie comme :

$$\frac{d\Phi_{u_0, \hat{x}_0}(t, s)}{dt} = A(u_0(t), \hat{x}_0(t))\Phi_{u_0, \hat{x}_0}(t, s), \quad \forall t \geq s \geq 0, \quad (4.19)$$

$$\Phi_{u_0, \hat{x}_0}(t, t) = I_n, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.20)$$

où  $I_n$  représente la matrice identité dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

Maintenant, nous considérons l'hypothèse suivante

**Hypothèse 4.3.1.** *L'entrée  $u$  est telle que pour toute trajectoire  $\hat{x}_0$  du système (4.9), pour  $j = 0$  partant de  $\hat{x}_0(0) \in X$ ,  $\exists T^* > 0$ ,  $\exists \theta^* > 0$ ,  $\exists \delta_0 > 0$ ,  $\forall \theta \geq \theta^*$  et  $\forall t \geq T^*/\theta$ , la condition d'excitation persistante suivante est satisfaite :*

$$\int_{t-T^*/\theta}^t \Phi_{u_0, \hat{x}_0}(s, t)^T C^T C \Phi_{u_0, \hat{x}_0}(s, t) ds \geq \frac{\delta_0}{\theta \alpha(\theta)} \Delta_\theta^2, \quad (4.21)$$

où  $\alpha(\theta) \geq 1$  est une fonction qui satisfait

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0. \quad (4.22)$$

Nous pouvons maintenant, énoncer le Théorème suivant.

**Theorème 4.3.1.** *Considérons le système (4.1) soumis aux hypothèses 4.2.1-4.2.2. Alors, pour chaque entrée bornée  $u$  satisfaisant l'hypothèse 4.3.1, il existe une constante  $\theta_0$  telle que pour tout  $\theta > \theta_0$ , il existe  $\chi_\theta > 0$  telle que si la borne supérieure de la période d'échantillonnage  $\Delta_M$  et le nombre  $m$  de systèmes dans la cascade vérifient :*

$$\Delta_M < \chi_\theta \quad (4.23)$$

$$\beta \frac{\tau}{m} < 1 \quad (4.24)$$

avec

$$\beta = \varrho(\sqrt{n}(L_\varphi + L_A x_M) + \Gamma) \quad (4.25)$$

où  $L_A$  et  $L_\varphi$  sont les constantes de Lipschitz de  $A$  et  $\varphi$ , respectivement, comme indiqué dans l'hypothèse 4.2.2,  $\Gamma$  et  $\varrho$  sont respectivement donnés par (4.16) et (4.17),  $x_M$  est la borne supérieure de l'état du système (4.1) donnée par (4.3), alors l'erreur d'observation  $\hat{x}_m(t) - x(t)$ , où  $\hat{x}_m$  est l'état du dernier sous-système dans l'observateur en cascade (4.9) et  $x$  est l'état du système (4.1), converge exponentiellement vers zéro lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

## 4.4 Analyse de convergence

Soit  $\tilde{x}_j = \hat{x}_j - x_j$  l'erreur d'observation relative à l'observateur situé au rang  $j$  de la cascade. La preuve est faite par récurrence sur  $j$ , c'est-à-dire que nous prouverons d'abord que l'erreur d'observation relative au premier observateur dans la cascade,  $\tilde{x}_0$ , converge exponentiellement vers zéro. Nous montrerons ensuite que si l'erreur  $\tilde{x}_{j-1}$  converge exponentiellement vers zéro, alors il en est de même pour  $\tilde{x}_j$ .

### Analyse de convergence pour $\tilde{x}_0$

L'analyse effectuée dans cette section étend celle qui a été effectuée dans [Farza *et al.*, 2014], où les auteurs ont considéré une classe de systèmes uniformément observables en vue de la synthèse d'un observateur continu-discret. Rappelons qu'un observateur continu-discret pour une classe de systèmes non linéaires non uniformément observable a été proposé dans le Chapitre 3.

Posons  $\bar{x}_0 = \Delta_\theta \tilde{x}_0$ . A partir des équations du système (4.1) et de l'observateur d'état retardé (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_0(t) &= \theta \left[ A(u_0(t), \hat{x}_0(t)) - S^{-1}(t)C^T C \right] \bar{x}_0(t) + \theta S^{-1}(t)C^T z(t) \\ &\quad + \Delta_\theta \tilde{A}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t))x_0(t) + \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) \end{aligned} \quad (4.26)$$

où  $\tilde{A}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t))$  et  $\tilde{\varphi}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t))$  sont définis en (3.17) et (3.18), respectivement (voir le Chapitre 3), et  $z(t) = C\bar{x}_0(t) - \eta(t)$ . Remarquons que d'après (4.13),  $\eta(t_k) = C\tilde{x}_0(t_k) = C\bar{x}_0(t_k)$  et de ce fait  $z(t_k) = 0$ .

Soit  $V(\bar{x}_0, t) = \bar{x}_0^T S(t) \bar{x}_0$  la fonction de Lyapunov candidate où  $S(t)$  est donnée par (4.11). En utilisant (4.26) et à partir du fait que la fonction  $S(t)$  est régie par l'EDO (4.11), nous avons

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}_0(t), t) &\leq -\theta \bar{x}_0^T(t) S(t) \bar{x}_0(t) + 2\theta \bar{x}_0^T(t) C^T z(t) \\ &\quad + 2\bar{x}_0(t) S(t) \Delta_\theta \left[ \tilde{A}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t))x_0 + \tilde{\varphi}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Cherchons maintenant une majoration de  $\|z(t)\|$ . En effet, à partir de la définition de



Chapitre 4.

$z(t)$  et du fait que  $\eta(t)$  est régie par l'EDO (4.12), nous avons

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= C\dot{\bar{x}}_0(t) - \dot{\eta}(t) \\ &= C \left[ \theta A(u_0(t), \hat{x}_0(t))\bar{x}_0(t) + \Delta_\theta \tilde{A}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t))x_0(t) \right. \\ &\quad \left. + \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u_0(t), \hat{x}_0(t), x_0(t)) \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

En intégrant l'équation (4.28) entre  $t_k$  et  $t$  et du fait que  $z(t_k) = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{t_k}^t C \left[ \theta A(u_0(s), \hat{x}_0(s))\bar{x}_0(s) \right. \\ &\quad \left. + \Delta_\theta \tilde{A}(u_0(s), \hat{x}_0(s), x_0(s))x_0(s) + \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u_0(s), \hat{x}_0(s), x_0(s)) \right] ds \end{aligned}$$

En prenant la norme de  $z(t)$ , nous obtenons

$$\|z(t)\| \leq \frac{\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi)}{\sqrt{\lambda_{\min}(S)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}_0(s), s)} ds \quad (4.29)$$

où  $x_M$  est donnée par (4.3) et  $\tilde{a} = \sup_{t \geq 0} \|A(u_0(t), \hat{x}_0(t))\|$ . En utilisant (2.21), (cf. Chapitre 2), il en résulte que

$$\|2\theta\bar{x}_0(t)C^T z(t)\| \leq 2\theta \left[ \frac{\alpha(\theta)(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi))e^{T^*}}{\delta_0} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}_0(s), s)} ds \right] \sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)} \quad (4.30)$$

En combinant les équations (3.26) et (3.27) dans le Chapitre 3, et les équations (4.27) et (4.30), nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}_0(t), t) &\leq -\theta V(\bar{x}_0(t), t) + 2\sqrt{\alpha(\theta)} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi] V(\bar{x}_0(t), t) \\ &\quad + 2\theta \left[ \frac{\alpha(\theta)(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi))e^{T^*}}{\delta_0} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}_0(s), s)} ds \right] \sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)} \end{aligned} \quad (4.31)$$

ou de manière équivalente

$$\begin{aligned} \frac{d\sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)}}{dt} &\leq -\theta \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi] \right) \sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)} \\ &\quad + \theta \frac{\alpha(\theta)(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi))e^{T^*}}{\delta_0} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{x}_0(s), s)} ds \end{aligned} \quad (4.32)$$

Posons

$$a_\theta = \theta \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi] \right) \quad (4.33)$$

$$b_\theta = \theta \frac{\alpha(\theta)(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi))e^{T^*}}{\delta_0} \quad (4.34)$$

et supposons que la borne supérieure de la période d'échantillonnage  $\Delta_M$  satisfait la condition suivante  $\Delta_M < \frac{a_\theta}{b_\theta}$ , c'est-à-dire,  $\frac{b_\theta \Delta_M}{a_\theta} < 1$  ou plus explicitement

$$\Delta_M \frac{\alpha(\theta)(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi))e^{T^*}}{\delta_0 \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi] \right)} < 1 \quad (4.35)$$

Il est clair que  $b_\theta > 0$  et que pour  $\theta$  suffisamment grand  $a_\theta > 0$  (car  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\theta)}{\theta^2} = 0$ , voir l'hypothèse 4.3.1). Donc, selon le Lemme D.1.1 de l'annexe D, nous avons

$$\sqrt{V(\bar{x}_0(t), t)} \leq e^{-\eta_\theta t} \sqrt{V(\bar{x}_0(0), 0)} \quad (4.36)$$

avec :

$$0 < \eta_\theta = (a_\theta - b_\theta \Delta_M) e^{-a_\theta \Delta_M} \quad (4.37)$$

La constante  $\chi_\theta$  énoncée dans le Théorème 4.3.1 est donnée par

$$\chi_\theta = \frac{a_\theta}{b_\theta} = \frac{\delta_0 \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\alpha(\theta)}{\theta^2}} \sqrt{\frac{n\lambda_{\max}(S)e^{T^*}}{\delta_0}} [L_A x_M + L_\varphi] \right)}{\alpha(\theta)(\theta\tilde{a} + \sqrt{n}(L_A x_M + L_\varphi))e^{T^*}} \quad (4.38)$$

On remarque que le taux de décroissance exponentiel de l'erreur d'observation  $\tilde{x}_0$  est donnée par (4.37) et peut être considérée comme une fonction de  $\Delta_M$ , c'est-à-dire

$$\eta_\theta(\Delta_M) = (a_\theta - b_\theta \Delta_M) e^{-a_\theta \Delta_M} \quad (4.39)$$

Il est aisé de vérifier que pour tout  $\Delta_M \geq 0$  satisfaisant (4.23), la dérivée de la fonction  $\eta_\theta(\Delta_M)$  par rapport à  $\Delta_M$  est négative et donc  $\eta_\theta$  est une fonction décroissante de  $\Delta_\theta$ . En outre, nous obtenons

$$\lim_{\Delta_M \rightarrow 0} \eta_\theta(\Delta_M) = a_\theta \quad (4.40)$$

On peut remarquer que nous retrouvons, lorsque  $\Delta_M$  tend vers zéro, le taux de décroissance exponentielle de l'observateur obtenu dans le cas où la sortie est disponible en temps continu (4.24).

À cette étape, nous avons montré que  $\bar{x}_0(t)$  converge exponentiellement vers zéro. Nous allons montrer que l'erreur d'observation  $\tilde{x}_j(t)$  converge également exponentiellement vers zéro pour  $j = 1, \dots, m$ .

### Analyse de convergence pour $\tilde{x}_j$ , $j = 1, \dots, m$

Nous procédons par récurrence sur  $j$ . En effet, soit  $1 \leq j \leq m - 1$  et supposons que  $\tilde{x}_{j-1}$  converge exponentiellement vers zéro. Nous allons montrer que  $\tilde{x}_j$  converge aussi exponentiellement vers zéro. Dans ce qui suit, non seulement nous prouverons la convergence vers zéro de l'erreur d'observation mais nous montrerons aussi comment les expressions des gains des prédicteurs  $G_j$  ont été obtenues pour  $j = 1, \dots, m$  (celles-ci sont données par (4.14)).

En effet, selon (4.1), l'état  $x_j$  est régie par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\dot{x}_j(t) = A(u_j(t), x_j(t))x_j(t) + \varphi(u_j(t), x_j(t)) \quad (4.41)$$

L'équation ci-dessus peut se réécrire comme suit

$$\dot{x}_j(t) = \bar{A}x_j(t) + \varphi(u_j(t), x_j(t)) + (A(u_j(t), x_j(t)) - \bar{A})x_j(t) \quad (4.42)$$

où  $\bar{A}$  est une matrice Hurwitz de taille  $n \times n$ .

Selon (4.42), l'état  $x_j$  peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} x_j(t) &= e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})}x_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) \\ &\quad + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{(\bar{A}(t-s))} [\varphi(u_j(s), x_j(s)) + (A(u_j(s), x_j(s)) - \bar{A})x_j(s)] ds \\ &= e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})}x_{j-1}(t) \\ &\quad + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{(\bar{A}(t-s))} [\varphi(u_j(s), x_j(s)) + (A(u_j(s), x_j(s)) - \bar{A})x_j(s)] ds \end{aligned} \quad (4.43)$$

Ensuite, en mimant (4.42), l'équation du prédicteur (4.9) peut se réécrire comme suit

$$\dot{\hat{x}}_j(t) = \bar{A}\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) - G_j(t) + (A(u_j(t), \hat{x}_j(t)) - \bar{A})\hat{x}_j(t) \quad (4.44)$$

De nouveau et selon (4.44), la prédiction  $\hat{x}_j$  peut s'exprimer comme suit

$$\begin{aligned} \hat{x}_j(t) &= e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \hat{x}_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) \\ &+ \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{(\bar{A}(t-s))} \left[ \varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - G_j(s) + \left( A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A} \right) \hat{x}_j(s) \right] ds \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ensuite, en imitant la relation (4.43) entre les états  $x_j(t)$  et  $x_{j-1}(t)$  du système, nous imposons une relation similaire entre les états de deux prédicteurs successifs, i.e.,  $\hat{x}_j$  et  $\hat{x}_{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Une telle relation peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \hat{x}_j(t) &= e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \hat{x}_{j-1}(t) + r_j(t) \\ &+ \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{(\bar{A}(t-s))} \left[ \varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) + \left( A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A} \right) \hat{x}_j(s) \right] ds \end{aligned} \quad (4.46)$$

où les  $r_j$ 's,  $j = 1, \dots, m$  sont des fonctions qui sont différentiables par rapport au temps et qui seront déterminées simultanément avec les  $G_j$ 's. Il est à noter que les fonctions  $r_j$ 's sont seulement utilisées dans l'analyse de convergence et n'apparaissent pas dans les équations des prédicteurs.

Les équations des gains des prédicteurs  $G_j$  sont déterminées de telle manière à ce que la relation (4.46) soit satisfaite. En effet, en soustrayant l'équation (4.45) à l'équation (4.46), on obtient

$$e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \left( \hat{x}_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) + r_j(t) = \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{(\bar{A}(t-s))} G_j(s) ds \quad (4.47)$$

En dérivant par rapport au temps chaque côté de l'équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \left( \dot{\hat{x}}_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) - \dot{\hat{x}}_{j-1}(t) \right) + \dot{r}_j(t) &= G_j(t) - e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} G_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) \\ &+ \bar{A} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{(\bar{A}(t-s))} G_j(s) ds \end{aligned} \quad (4.48)$$

ou de manière équivalente,

$$\begin{aligned} e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \left( \dot{\hat{x}}_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) - \dot{\hat{x}}_{j-1}(t) \right) + \dot{r}_j(t) &= \bar{A} e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \left( \hat{x}_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) + \bar{A} r_j(t) \\ &+ G_j(t) - e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} G_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Soustrayant  $\dot{\hat{x}}_{j-1}(t)$  et  $\dot{\hat{x}}_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right)$  dans l'équation (4.49), et tenant du fait que leur

## Chapitre 4.

expression sont données par (4.9), conduit à

$$\begin{aligned}
& e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \left( A \left( u_{j-1}(t), x_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - A(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) \hat{x}_{j-1} \right. \\
& \quad \left. + \varphi \left( u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) + G_{j-1}(t) - G_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) = \\
& \bar{A} e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) + G_j(t) - e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} G_{j-1}(t) - \left( \dot{r}_j(t) - \bar{A} r_j(t) \right) \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Notez que nous avons utilisé l'identité  $u_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) = u_{j-1}(t)$  dans la dernière équation. Maintenant, en utilisant le fait que les matrices  $\bar{A}$  et  $e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}$  commutent entre elles, l'équation (4.51) conduit à

$$\begin{aligned}
G_j(t) = e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} & \left( G_{j-1}(t) + A \left( u_{j-1}(t), x_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - A(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) \hat{x}_{j-1}(t) \right. \\
& \left. + \varphi \left( u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) \right) + \left( \dot{r}_j(t) - \bar{A} r_j(t) \right) \quad (4.51)
\end{aligned}$$

Maintenant, si nous choisissons chaque  $r_j$  de sorte que sa dynamique soit régie par l'équation différentielle suivante

$$\dot{r}_j(t) = \bar{A} r_j(t) \quad (4.52)$$

l'expression du terme de correction  $G_j$  devient

$$\begin{aligned}
G_j(t) = e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} & \left[ G_{j-1}(t) + A \left( u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - A(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) \hat{x}_{j-1}(t) \right. \\
& \left. + \varphi \left( u_{j-1}(t), \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi(u_{j-1}(t), \hat{x}_{j-1}(t)) - \bar{A} \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) \right] \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant établir la convergence vers zéro de  $\tilde{x}_j(t)$ . En effet, d'après les équations (4.43) et (4.46), nous avons :

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_j(t) &= \hat{x}_j(t) - x_j(t) \\
&= e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \tilde{x}_{j-1}(t) - r_j(t) + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{(\bar{A}(t-s))} [\tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) \\
& \quad + \tilde{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) x_j(s) + (A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A}) \tilde{x}_j(s)] ds \quad (4.54)
\end{aligned}$$

#### 4.4. Analyse de convergence

En considérant (4.17) et en prenant la norme de l'erreur  $\tilde{x}_j(t)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_j(t)\| &\leq \varrho e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \|\tilde{x}_{j-1}(t)\| + \|r_j(t)\| + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|e^{-\bar{A}(t-s)}\| \left[ \|\tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))\| \right. \\ &\quad \left. + \|\tilde{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))\| \|x_j(s)\| + \left\| \left( A(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \bar{A}_j(s) \right) \|\tilde{x}_j(s)\| \right\| \right] ds \end{aligned} \quad (4.55)$$

D'une part, comme  $r_j(t)$  est régie par (4.52) et d'autre part, comme  $\bar{A}$  est Hurwitz, nous avons

$$\|r_j(t)\| \leq \varrho e^{-\bar{a}t} \|r_j(0)\| \quad (4.56)$$

où  $\varrho$  et  $\bar{a}$  sont donnés par (4.17).

Maintenant, compte tenu de l'hypothèse de récurrence,  $\tilde{x}_{j-1}(t)$  converge exponentiellement vers zéro, c'est-à-dire, il existe  $\rho_{j-1}, \alpha_{j-1} > 0$  tels que

$$\|\tilde{x}_{j-1}(t)\| \leq \rho_{j-1} e^{-\alpha_{j-1}t} \quad (4.57)$$

Ensuite, de manière similaire aux inégalités (3.26) et (3.27) dans le chapitre 3, nous avons

$$\|\tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))\| \leq \sqrt{n} L_\varphi \|\tilde{x}_j(s)\| \quad (4.58)$$

$$\|\tilde{A}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s))\| \|x_j(s)\| \leq \sqrt{n} L_A \|\tilde{x}_j(s)\| x_M. \quad (4.59)$$

En utilisant les inégalités (4.56), (4.57), (4.58) et (4.59) conjointement avec (4.16), l'inégalité (4.55) devient :

$$\|\tilde{x}_j(t)\| \leq \varrho \left( \rho_{j-1} e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} e^{-\alpha_{j-1}t} + e^{-\bar{a}t} \|r_j(0)\| \right) + \beta \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|\tilde{x}_j(s)\| ds \quad (4.60)$$

$$\leq \mu_{j-1} e^{-\bar{\alpha}_{j-1}t} + \beta \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|\tilde{x}_j(s)\| ds \quad (4.61)$$

où  $\mu_{j-1} = \varrho \max \left( \rho_{j-1} e^{\bar{a}\frac{\tau}{m}}, \|r_j(0)\| \right)$ ,  $\bar{\alpha}_{j-1} = \min(\alpha_{j-1}, \bar{a})$  et  $\beta$  est donné par (4.25).

En appliquant le lemme D.1.2 (cf. annexe D), il s'ensuit que sous la condition (4.24), l'erreur  $\|\tilde{x}_j(t)\|$  converge exponentiellement vers zéro. Ceci est vrai pour chaque  $j = 1, \dots, m$ , et donc en particulier pour  $j = m$ . Ceci termine la preuve du Théorème.

## 4.5 Exemples

Dans ce paragraphe, les performances de l'observateur en cascade sont illustrées tout d'abord à travers un exemple académique puis à travers une application sur un moteur Stirling à piston libre.

### 4.5.1 Exemple académique

Nous considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 x_1 x_2 + u_2 x_1^2 x_3 + x_1 u_3 \\ x_3 - 10x_2 + u_3 - x_2^3 \\ -x_3 - 2x_1 x_2 - 10u_1 x_2 \end{bmatrix} \\ y(t_k) = x_1(t_k - \tau) \end{cases} \quad (4.62)$$

où  $x_i, u_j \in \mathbb{R}$  pour  $i = 1, \dots, 3$  et  $j = 1, \dots, 3$ . Le système (4.62) est sous la forme (4.1) avec  $q = 2$ ,  $x = \begin{bmatrix} (x^1)^T & (x^2)^T \end{bmatrix}^T$ ,  $x^1 = [x_1]$  et  $x^2 = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ , où les matrices  $A(u, x)$  et  $\varphi(u, x)$  sont représentées sous les formes suivantes

$$A(u, x) = \begin{bmatrix} 0 & A_1(u, x^1) \\ 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad \varphi(u, x) = \begin{bmatrix} x_1 u_3 \\ x_3 - 10x_2 + u_3 - x_2^3 \\ -x_3 - 2x_1 x_2 - 10u_1 x_2 \end{bmatrix}$$

où  $A_1(u, x^1) = \begin{bmatrix} u_1 x_1 & u_2 x_1^2 \end{bmatrix}$ .

Par conséquent, nous avons

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1/\theta \end{bmatrix}$$

Un observateur en cascade de la forme (4.9)-(4.14) a été synthétisé pour estimer l'état réel  $x(t)$ , où les entrées du système sont données par  $u_1(t) = \sin(11\pi t)$ ,  $u_2(t) = \cos(11\pi t)$  et  $u_3(t) = 5 \cos(2\pi t)$ .

La matrice  $\bar{A}$  est définie comme suit :

$$\bar{A} = -\lambda I_n \quad (4.63)$$

Quatre ensembles de résultats de simulation sont fournis pour l'observateur en cas-

cade (4.9)-(4.14) du système (4.62). Les deux premiers sont obtenus avec  $\tau = 0.4s$ . Dans le troisième ensemble, on compare différentes valeurs pour la matrice  $\bar{A}$  avec  $\tau = 0.9s$ . Le quatrième ensemble correspond à  $\tau = 1.8s$ . La période d'échantillonnage a été supposée constante et a été fixée à la même valeur pour toutes les simulations,  $\Delta_k = \Delta_M = 0.3sec$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Dans tous les cas, l'observateur en cascade a été initialisé avec :

$$\begin{aligned}\hat{x}_j(s) &= 0_{3 \times 1}, & j &= 1, \dots, m, s \in [-\tau/m, 0] \\ S(0) &= I_{3 \times 3} \eta(0) = 0\end{aligned}$$

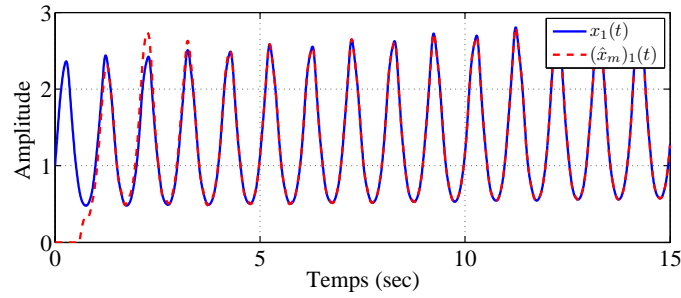
Les simulations sont effectuées en utilisant la fonction Matlab pour résoudre des équations différentielles retardées avec un retard constant, c'est-à-dire *dde23*.

Les deux premières simulations ont été effectuées en utilisant les mêmes valeurs pour les paramètres de synthèse  $\theta$  et le nombre de cascade  $m$  a été fixé à 2, tandis que le paramètre  $\lambda$  intervenant dans l'expression de  $\bar{A}$  a été fixée à 0.5 pour la première simulation et à 2 pour la seconde. Les résultats sont reportés sur les figures 4.3-4.6. On remarque que la vitesse de convergence de l'observateur diminue lorsque les valeurs propres de  $\bar{A}$  diminuent.

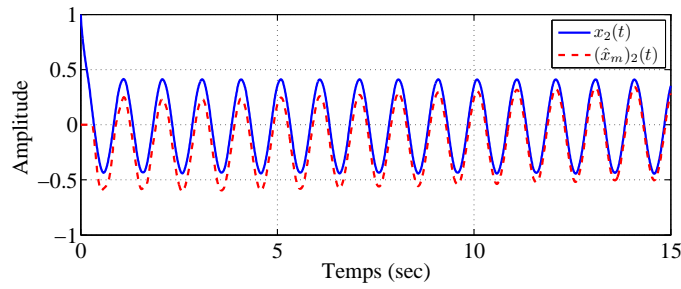
En outre, nous avons comparé différentes valeurs propres pour la matrice  $\bar{A}$  :  $\lambda = 1.5, 0.5$  et  $0.1$ . Les résultats obtenus sont reportés sur la figure 4.7, qui montre la norme de l'erreur d'observation  $\|\tilde{x}_m(t)\|$ . Ces résultats ont été obtenus en utilisant un nombre de sous-systèmes  $m = 5$  dans la cascade, un retard de  $\tau = 0.9s$  et un paramètre de synthèse  $\theta = 2$ , dans tous les cas. La valeur  $\lambda = 1.5$  a permis d'avoir la décroissance la plus rapide vers zéro. Notons qu'il faudrait éviter de prendre des valeurs propres de  $\bar{A}$  relativement élevées, qui donneraient lieu à des valeurs élevées pour  $\Gamma$  (qui est défini par (4.16)) qui risquent de violer la condition requise (4.24) pour la convergence comme indiqué dans le Théorème 4.3.1.

Dans la dernière simulation, le nombre de sous-systèmes  $m$  dans la cascade a été augmenté à 9 pour faire face à la valeur élevée du retard. Les figures 4.8-4.9 montrent le résultat correspondant, qui a été obtenu avec  $\theta = 1.5$  et  $\lambda = 1.2$ . Les simulations montrent que l'observateur proposé permet bien de faire face à des retards relativement élevés.

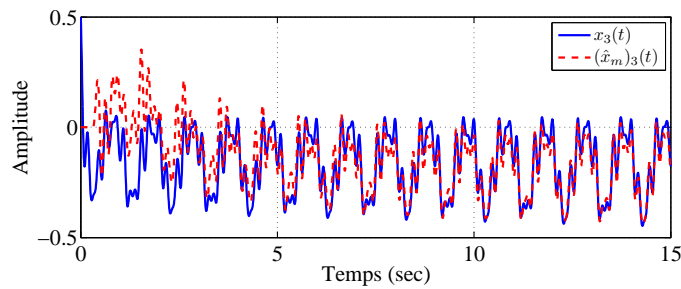




(a) Estimation de l'état  $x_1$



(b) Estimation de l'état  $x_2$



(c) Estimation de l'état  $x_3$

FIGURE 4.3 – Estimation de l'état retardé avec l'observateur en cascade ( $m = 2$  pour  $\Delta_k = 0.3s$  et  $\tau = 0.4s$ , avec  $\lambda = 0.5$  et  $\theta = 2$ )

## 4.5.2 Observateur en cascade appliqué à un Moteur Stirling à Piston Libre

Nous reconsidérons le système non linéaire du moteur **FPSE** qui a été introduit au chapitre précédent, où l'état  $x(t)$  est encore une fois pris comme  $x(t) = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ . Les états désignent la longueur du piston  $x_1$ , la course de déplacement  $x_3$ , et leur vitesse sont désignés par  $x_2$  et  $x_4$ , respectivement, tandis que  $y(t_k) = x_1(t_k - \tau)$  est la sortie échantillonnée et retardée. La simulation est effectuée avec les mêmes valeurs considérées au chapitre précédent, aussi bien pour les paramètres que pour l'entrée :  $p_m(t) = 7MPa + 0.5MPa \sin(t)$ .

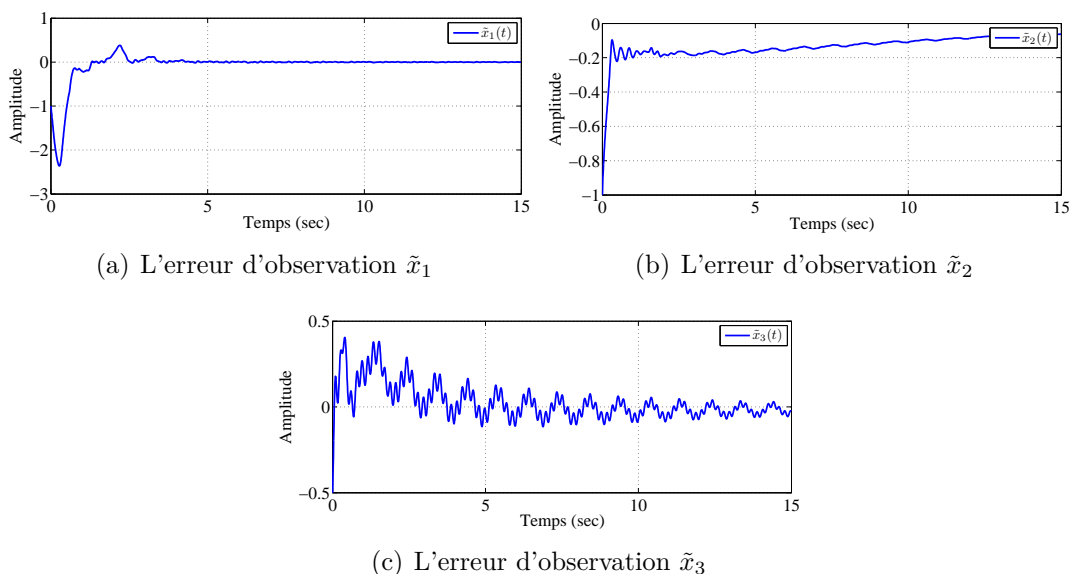


FIGURE 4.4 – Estimation de l'état retardé avec l'observateur en cascade ( $m = 2$  pour  $\Delta_k = 0.3s$  et  $\tau = 0.4s$ , avec  $\lambda = 0.5$  et  $\theta = 2$ )

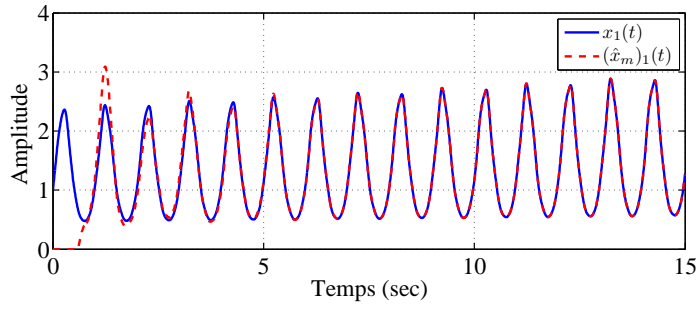
D'après l'équation (3.40) dans le Chapitre 3, nous pouvons synthétiser un observateur en cascade de la forme (4.9)-(4.14) pour le moteur FPSE. Les matrices  $A(u, x)$  et  $\varphi(u, x)$  pour le moteur FPSE sont données par :

$$A(u, x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{pd}p_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

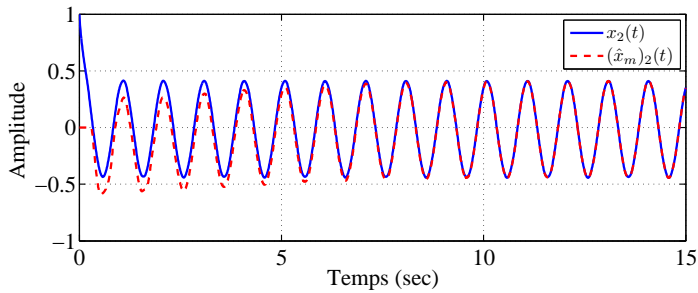
$$\varphi(u, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f}_L x_2 - \bar{f}_C x_1^2 x_2 + \bar{k}_C x_1^3 + k_{pp} p_m x_1 \\ 0 \\ k_{dd} p_m x_1 + c_{dd} p_m x_2 + k_{dp} p_m x_3 + c_{dp} p_m x_4 \end{bmatrix}$$

Encore une fois, nous avons choisi la matrice  $\bar{A}$  afin qu'elle remplisse les hypothèses du Théorème 4.3.1, de manière similaire à l'exemple précédent. La matrice diagonale  $\Delta_\theta$  est définie comme suit

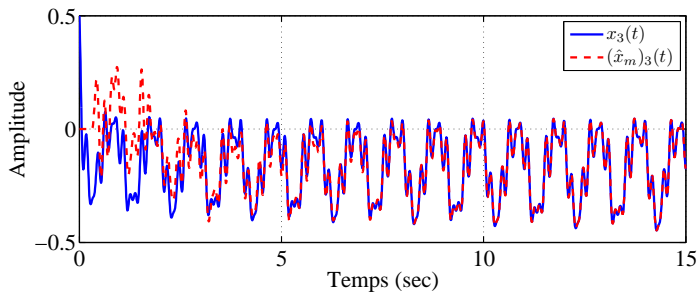
$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\theta^3} \end{bmatrix}$$



(a) Estimation de l'état  $x_1$



(b) Estimation de l'état  $x_2$



(c) Estimation de l'état  $x_3$

FIGURE 4.5 – Estimation de l'état retardé avec l'observateur en cascade ( $m = 2$  pour  $\Delta_k = 0.3s$  et  $\tau = 0.4s$ , avec  $\lambda = 1.5$  et  $\theta = 2$ )

L'observateur continu-discret a été initialisé comme suit

$$\hat{x}(0) = [0, 0, 0, 0]^T$$

$$S(0) = I_{4 \times 4}$$

Un des avantages de l'observateur en cascade proposé est qu'il peut être facilement mis en oeuvre. Afin d'illustrer ceci, deux ensembles de simulations ont été réalisés. Ces simulations ont été effectuées pour faire face aux retards  $\tau = 1s$  et  $\tau = 5s$ , tandis que la sortie échantillonnée est mesurée toutes les  $1s$ , dans les deux cas. Les paramètres de l'observateur ont été choisis comme  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 0.5$ , respectivement, alors que le

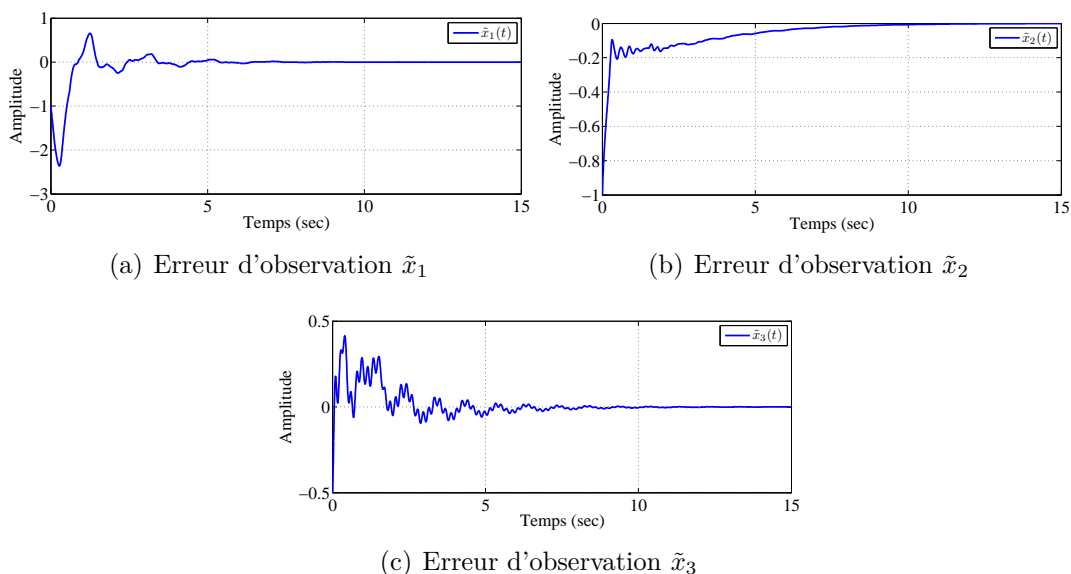


FIGURE 4.6 – Estimation de l'état retardé avec l'observateur en cascade ( $m = 2$  pour  $\Delta_k = 0.3s$  et  $\tau = 0.4s$ , avec  $\lambda = 1.5$  et  $\theta = 2$ )

paramètre de synthèse  $\theta$  est pris comme  $\theta = 1.2$ , dans les deux cas.

Les performances de l'observateur en cascade sont montrées sur les figures 4.10-4.11. D'abord, nous montrons comment l'observateur proposé permet d'obtenir une estimation de  $x(t)$ , lorsque la sortie échantillonnée est soumise à un retard  $\tau = 1s$ . Dans ce cas, les hypothèses du Théorème 4.3.1 peuvent être satisfaites avec une nombre de cascade  $m = 2$ . Clairement, ce résultat valide notre observateur ; en effet l'observateur converge rapidement, dans le cas d'un retard relativement petit.

Pour faire face à un retard plus important, i.e.  $\tau = 5s$ , il est nécessaire d'adapter le nombre de sous-systèmes dans la cascade et la longueur de la cascade a été fixé à  $m = 9$ . Nous pouvons voir que l'observateur prend un certain temps pour converger à cause du retard et du nombre élevé de sous-systèmes dans la cascade. D'après ce résultat, nous pouvons dire que l'état instantané du système  $x(t)$  est bien estimé par le dernier prédicteur  $x_m(t)$ .

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, un observateur en cascade de type grand-gain capable de donner une estimation précise de l'état pour une classe de systèmes non linéaires, non uniformément observables, avec des sorties échantillonnées et retardées a été proposé. La synthèse de

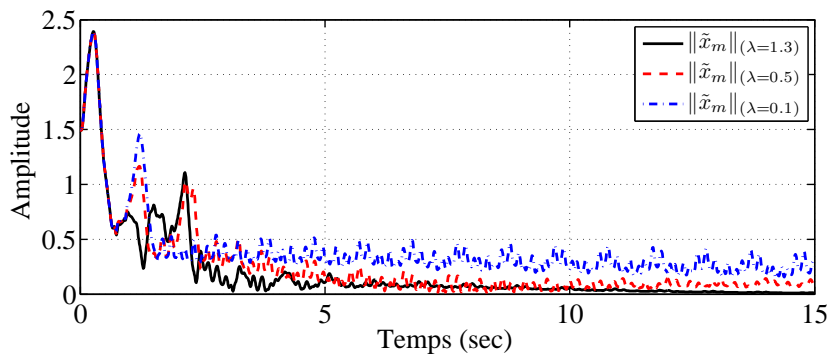


FIGURE 4.7 – Norme de l’erreur d’observation  $\|\tilde{x}_m(t)\|$  avec  $m = 5$  (pour  $\Delta_k = 0.3s$  et  $\tau = 0.8s$ , avec  $\theta = 2$ )

l’observateur en cascade a été effectuée en deux étapes. Le premier sous-système dans la cascade est un observateur continu-discret qui fournit une estimation continue de l’état retardé à partir de la sortie échantillonnée et retardée. Cet observateur est obtenu par la re-synthèse d’un observateur de type grand-gain, qui est capable de traiter des mesures de sortie échantillonnées. Ceci a déjà été abordé dans le chapitre précédent. Les sous-systèmes restants dans la cascade effectuent une prédiction appropriée de l’état du système, c’est-à-dire, chaque sous-système prédit l’état sur un horizon de prédiction égal à une fraction du retard original, de sorte que le dernier sous-système fournisse une estimation de l’état instantané du système. Cette contribution a fait l’objet d’une publication dans *Systems & Control Letters* [Hernández-González *et al.*, 2016a]. les performances de l’observateur ont été illustrées en simulation à travers un exemple académique ainsi que sur un modèle représentant un moteur Stirling à piston libre.

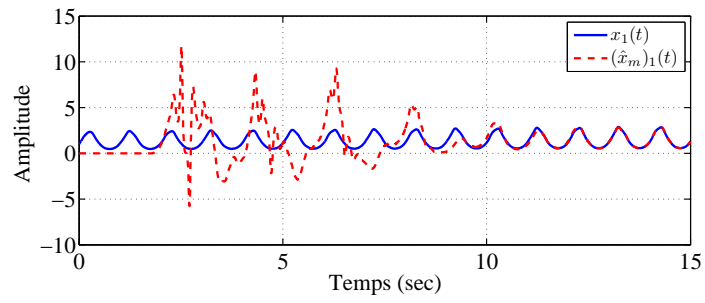
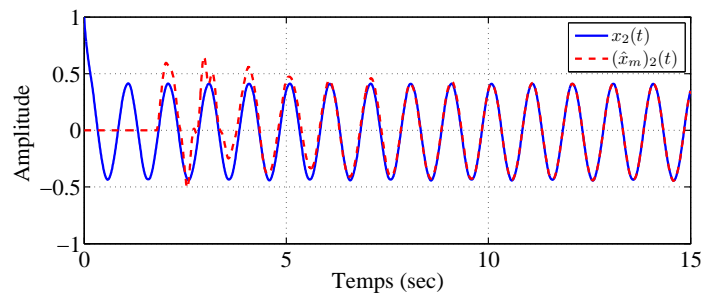
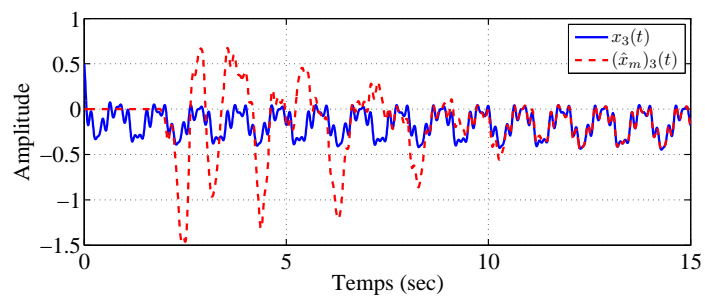
(a) Estimation de l'état  $x_1$ (b) Estimation de l'état  $x_2$ (c) Estimation de l'état  $x_3$ 

FIGURE 4.8 – Estimation de l'état retardé avec l'observateur en cascade ( $m = 9$  pour  $\Delta_k = 0.3s$  et  $\tau = 1.6s$ , avec  $\lambda = 1.2$  et  $\theta = 1.5$ )

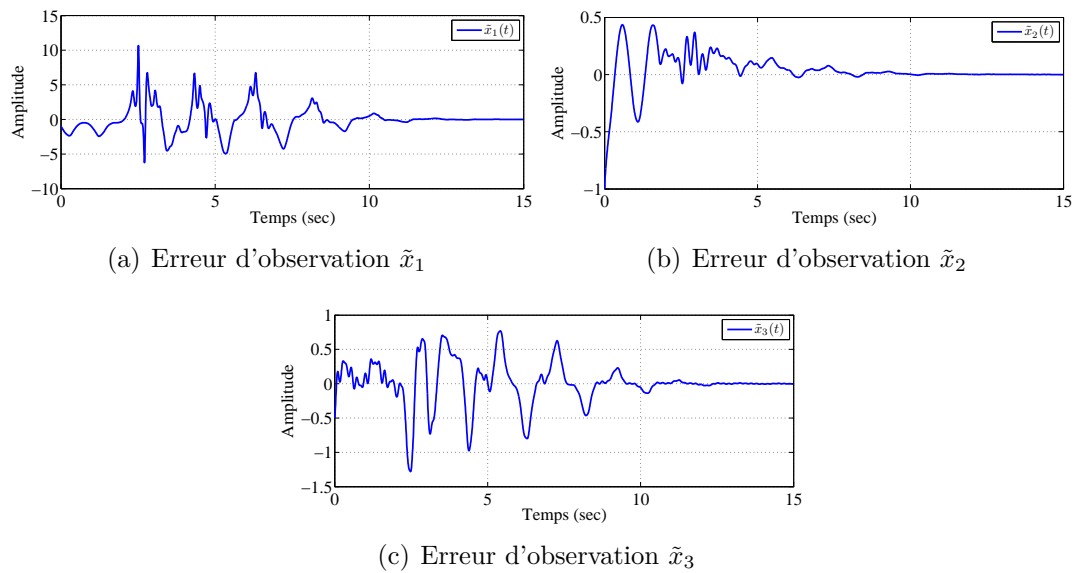


FIGURE 4.9 – Estimation de l'état retardé avec l'observateur en cascade ( $m = 9$  pour  $\Delta_k = 0.3s$  et  $\tau = 1.6s$ , avec  $\lambda = 1.2$  et  $\theta = 1.5$ )

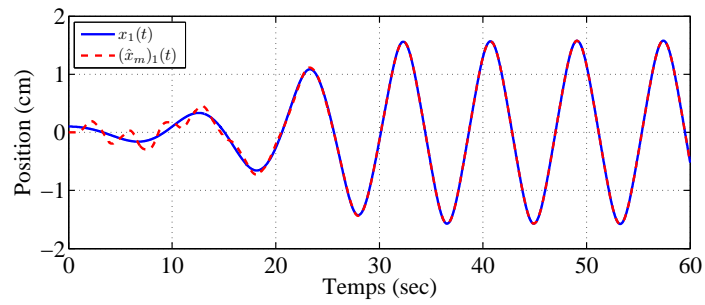
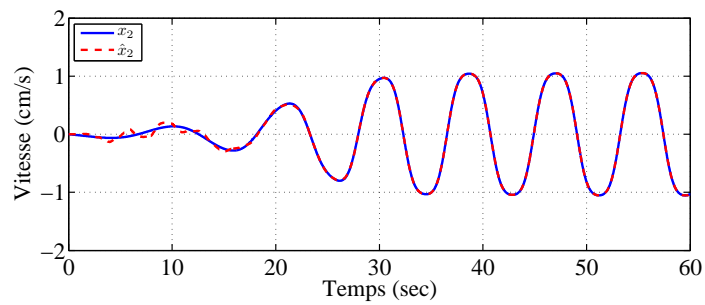
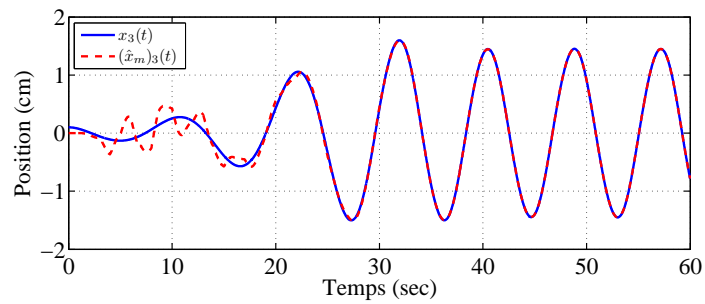
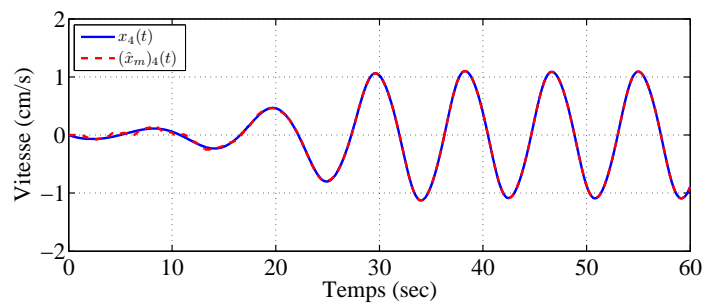
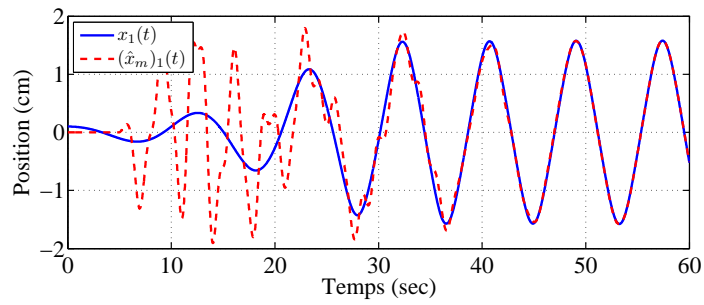
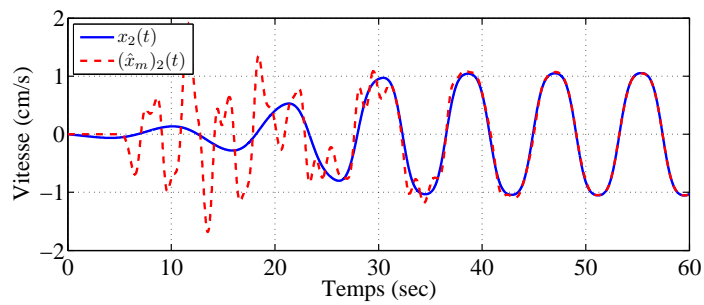
(a) Position du piston  $x_1$ (b) Vitesse du piston  $x_2$ (c) Position du déplaceur  $x_3$ (d) Vitesse du déplaceur  $x_4$ 

FIGURE 4.10 – Estimation de l'état du **FPSE** avec l'observateur en cascade continu-discret ( $m = 2$  pour  $\Delta_k = 1s$  et  $\tau = 1s$ , avec  $\lambda = 1$  et  $\theta = 1.2$ )

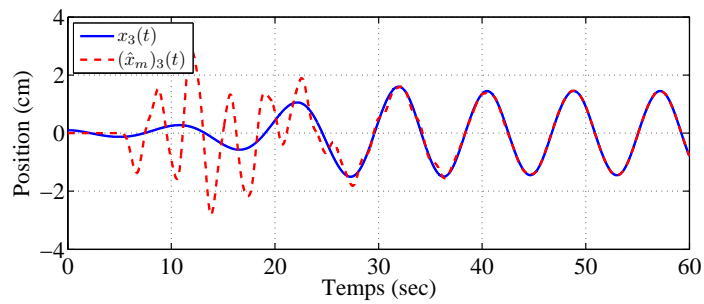




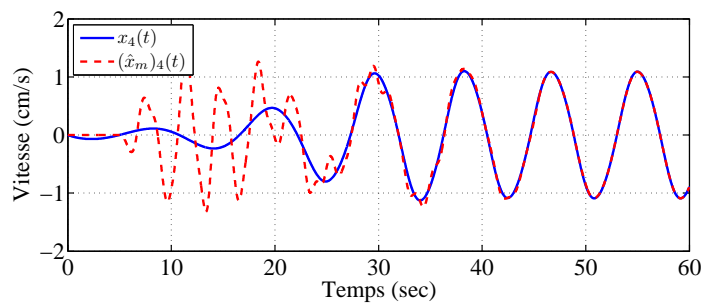
(a) Position du piston  $x_1$



(b) Vitesse du piston  $x_2$



(c) Position du déplaceur  $x_3$



(d) Vitesse du déplaceur  $x_4$

FIGURE 4.11 – Estimation de l'état du **FPSE** avec l'observateur en cascade continu-discret ( $m = 9$  pour  $\Delta_k = 1s$  et  $\tau = 5s$ , avec  $\lambda = 0.5$  et  $\theta = 1.2$ )

# Chapitre 5

## Synthèse d'observateur en cascade pour une classe de systèmes non linéaires incertains avec sorties échantillonnées et retardées

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes uniformément observables incertains dont la sortie est disponible de façon retardée et à des instants discrets. En effet, les systèmes usuellement considérés en pratique contiennent des incertitudes. Cela peut être dû à des dynamiques non modélisées, des paramètres inconnus ou à des perturbations variant dans le temps, par exemple. Bien que l'effet d'incertitudes sur certains observateurs ait déjà été étudié dans [Zemouche *et al.*, 2015] pour des systèmes linéaires ou dans [Cai *et al.*, 2012, Zhang and Xu, 2015, Zheng *et al.*, 2016, Moisan and Bernard, 2010] pour des systèmes non linéaires, le cas d'incertitudes lorsque la sortie est retardée n'a pas été considéré.

L'observateur proposé dans ce chapitre possède une structure en cascade similaire à celle déjà considérée dans le chapitre précédent. Une étude précise de l'effet des incertitudes sur l'erreur d'observation est effectuée et est illustrée en simulation sur un exemple académique et un bioréacteur.

## 5.2 Formulation du problème

Nous considérons ici la classe de systèmes non linéaires multi-entrées et multi-sorties qui sont difféomorphes au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(u(t), x(t)) + B\varepsilon(t) \\ y_\tau(t_k) = Cx(t_k - \tau) = x^1(t_k - \tau) \end{cases} \quad (5.1)$$

avec  $x = [(x^1)^T \ \dots \ (x^{q-1})^T \ (x^q)^T] \in \mathbb{R}^n$  et :

$$A = \begin{pmatrix} 0_{(q-1)p,p} & I_{(q-1)p} \\ 0_{p,p} & 0_{p,(q-1)p} \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, x^1) \\ \varphi^2(u, x^1, x^2) \\ \vdots \\ \varphi^{q-1}(u, x^1, \dots, x^{q-1}) \\ \varphi^q(u, x) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0_p & 0_p & \dots & I_p \end{pmatrix}^T, \quad C = \begin{pmatrix} I_p & 0_p & \dots & 0_p \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

où  $x^i \in \mathbb{R}^p$  pour  $i = 1, \dots, q$  sont les blocs de variables d'état,  $u \in U$  désigne l'entrée du système, avec  $U$  un ensemble compact de  $\mathbb{R}^m$ , et  $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^p$  est une fonction inconnue qui décrit les incertitudes du système et peut dépendre de l'état, de l'entrée et de paramètres incertains. Enfin,  $y_\tau(t_k) \in \mathbb{R}^p$  est la sortie retardée et échantillonnée,  $\tau > 0$  est le retard sur la sortie, qui est disponible uniquement à des instants d'échantillonnage qui satisfont la condition  $0 \leq t_0 < \dots < t_k < \dots$ , avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$ . Nous supposons de plus qu'il existe  $0 < \Delta_m \leq \Delta_M < +\infty$  vérifiant :

$$0 < \Delta_m \leq \Delta_k = t_{k+1} - t_k \leq \Delta_M, \quad \forall k \geq 0 \quad (5.3)$$

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, notre principal objectif est de synthétiser un observateur en cascade qui fournit une estimation de l'état du système (5.1), en utilisant les mesures échantillonnées et retardées de la sortie. Une telle synthèse sera réalisée selon les hypothèses suivantes

**Hypothèse 5.2.1.** *L'état  $x(t)$  et l'entrée  $u(t)$  sont bornés, c'est-à-dire,  $x(t) \in X$  et  $u(t) \in U, \forall t \geq 0$ , où  $X \subset \mathbb{R}^n$  et  $U \subset \mathbb{R}^s$  sont des ensembles compacts.*

**Hypothèse 5.2.2.** *La fonction  $\varphi$  est Lipschitz par rapport à  $x$ , uniformément par*

rapport à  $u$ , i.e.

$$\begin{aligned} \exists L_\varphi > 0; \forall u \in U; \forall (x, \bar{x}) \in X \times X : \\ \|\varphi^i(u, x) - \varphi^i(u, \bar{x})\| \leq L_\varphi \|x - \bar{x}\| \end{aligned} \quad (5.4)$$

**Hypothèse 5.2.3.** La fonction inconnue  $\varepsilon$  est essentiellement bornée, c'est-à-dire

$$\exists \delta_\varepsilon > 0; \text{esssup}_{t \geq 0} \|\varepsilon(t)\| \leq \delta_\varepsilon \quad (5.5)$$

Nous considérons, dans un premier temps, le cas continu et sans retard. Les équations de l'observateur s'écrivent comme suit (voir le chapitre 2) :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - G(t) \\ &= A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} K(C\hat{x}(t) - y(t)) \end{aligned} \quad (5.6)$$

où  $K = [k_1 I_p \cdots k_q I_p]$ ,  $k_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, q$ , est un vecteur constant, choisi de sorte que la matrice  $A - KC$  soit Hurwitz;  $\theta \geq 1$  est un paramètre de synthèse et  $\Delta_\theta$  est la matrice diagonale suivante :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left( I_p, \frac{1}{\theta} I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_p \right) \quad (5.7)$$

Nous avons montré dans le chapitre 2 que l'erreur d'observation est bornée comme suit

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \mu(\theta) e^{-\lambda(\theta)t} \|\hat{x}(0) - x(0)\| + \frac{M}{\theta} \delta_\varepsilon \quad (5.8)$$

où  $\theta \geq 1$  est le paramètre de synthèse de l'observateur,  $M > 0$  est une constante positive qui ne dépend pas de  $\theta$ ,  $\mu(\theta)$  est polynomiale en  $\theta$  avec  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \lambda(\theta) = +\infty$  et finalement  $\delta_\varepsilon$  est la borne de l'incertitude donnée par (5.5) dans l'hypothèse 5.2.3.

Il faut souligner qu'en l'absence d'incertitudes, c'est-à-dire,  $\delta_\varepsilon = 0$ , l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro. Dans le cas où les incertitudes sont bornées l'erreur d'observation est ultimement bornée et la borne ultime peut être choisie aussi petite que désirée en prenant une valeur suffisamment élevée pour le paramètre de synthèse de l'observateur  $\theta$ .

Les principaux aspects de la synthèse de l'observateur en cascade seront précisés dans les sections suivantes. Cette synthèse est effectuée sous quelques hypothèses qui seront énoncés au moment opportun. Les Lemmes suivants sont nécessaires pour la preuve de

## Chapitre 5.

convergence de l'observateur.

**Lemme 5.2.1.** *Considérons une fonction réelle continue  $x : t \in [-\delta, +\infty[ \rightarrow x(t) \in [0, +\infty[$  avec  $\delta > 0$ , telle que*

$$\int_{-\delta}^0 x(s)ds < +\infty, \quad x(t) \leq K(t) + \eta \int_{t-\delta}^t x(s)ds \quad \text{for } t \geq 0 \quad (5.9)$$

où  $K(t)$  est une fonction à valeurs réelles, positive et croissante;  $\eta > 0$  est une constante réelle. Si  $\eta\delta < 1$  alors, nous avons  $x(t) \leq \frac{\mu(t)}{1 - \eta\delta}$  où  $\mu(t) = K(t) + \eta \int_{-\delta}^0 x(s)ds > 0$ .

*Démonstration du Lemme 5.2.1* La preuve est similaire à celle du Lemme 2 dans [Germani *et al.*, 2002] et au résultat donné dans la Remarque 1 dans [Farza *et al.*, 2015b]. En effet, en procédant comme dans les références mentionnées ci-dessus, nous montrons que :

$$x(t) \leq \mu(t) + \eta \int_{\max\{0, t-\delta\}}^t x(s)ds, \quad t \geq 0 \quad (5.10)$$

Comme la fonction positive  $K(t)$  est croissante,  $\mu(t)$  l'est aussi et nous pouvons alors procéder comme dans [Germani *et al.*, 2002] et [Farza *et al.*, 2015b] en itérant (5.10)  $k$  fois et en appliquant le lemme de Gronwall. Ceci conduit à

$$x(t) \leq \mu(t) \sum_{i=0}^k (\eta\delta)^i + \mu(t) \frac{\eta t}{(k+1)!} e^{\eta t}$$

En prenant la limite lorsque  $k$  tend vers l'infini de chaque coté de l'inégalité ci-dessus, nous avons  $x(t) \leq \frac{\mu(t)}{1-\eta\delta}$  car  $\eta\delta < 1$ .

**Lemme 5.2.2.** *Soit  $A$  la matrice anti-décalage par blocs de dimension  $n \times n$  donnée par (5.2) et soit  $\bar{A}$  une matrice Hurwitz de dimension  $n \times n$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres ordonnées de telle sorte que :*

$$0 < -\Re(\lambda_1) \leq \dots \leq -\Re(\lambda_n) \quad (5.11)$$

où  $\Re(\cdot)$  est la partie réelle du nombre complexe  $(\cdot)$ . Alors, on obtient

$$\Re(\lambda_1) \leq \|A - \bar{A}\|$$

*Démonstration du Lemme 5.2.2*

Nous désignons par  $a_{ij}$  (respectivement  $\bar{a}_{ij}$ ) l'entrée complexe de la matrice  $A$  (respec-

### 5.3. Synthèse d'un observateur en cascade pour des sorties retardées disponibles en temps continu

tivement  $\bar{A}$ ) située à la ligne  $i$  et la colonne  $j$ . Nous avons

$$\|A - \bar{A}\|^2 = \lambda_{\max}((A - \bar{A}) * (A - \bar{A})) \geq \frac{1}{n} \text{tr}((A - \bar{A}) * (A - \bar{A})) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij} - \bar{a}_{ij}|^2$$

où  $(\cdot)^*$  est le complexe conjugué de la matrice complexe  $(\cdot)$  et  $\text{tr}(\cdot)$  est la trace de la matrice  $(\cdot)$ . Nous désignons par  $\Re(\cdot)$  et  $\Im(\cdot)$  les parties réelle et imaginaire du nombre complexe  $(\cdot)$ , respectivement. Alors, on obtient

$$\begin{aligned} \|A - \bar{A}\|^2 &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_{ij} - \bar{a}_{ij}|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_{ii}|^2 \quad (\text{car } a_{ii} = 0) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( (\Re(\bar{a}_{ii}))^2 + (\Im(\bar{a}_{ii}))^2 \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Re(\bar{a}_{ii}))^2 \geq \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n |\Re(\bar{a}_{ii})| \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{n^2} \left( \left| \sum_{i=1}^n \Re(\bar{a}_{ii}) \right| \right)^2 = \frac{1}{n^2} \left( \left| \sum_{i=1}^n \Re(\lambda_i) \right| \right)^2 \quad \text{car } \sum_{i=1}^n \bar{a}_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (= \text{tr}(\bar{A})) \\ &\geq \frac{1}{n^2} \left( \left| \sum_{i=1}^n \Re(\lambda_i) \right| \right)^2 \quad \text{selon 5.11} \\ &= \frac{1}{n^2} (n \Re(\lambda_1))^2 = |\Re(\lambda_1)|^2 \end{aligned}$$

Par conséquent  $|\Re(\lambda_1)| \leq \|A - \bar{A}\|$ . Ceci termine la preuve du Lemme 5.2.2.

## 5.3 Synthèse d'un observateur en cascade pour des sorties retardées disponibles en temps continu

Nous considérons d'abord le cas d'une sortie retardée, disponible en temps continu. Le système est donc régi par le modèle dynamique suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \varphi(u(t), x(t)) + B\varepsilon(t) \\ y_\tau(t) &= Cx(t - \tau) = Cx^1(t - \tau) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Dans ce qui suit, comme dans [Germani *et al.*, 2002, Kazantzis and Wright, 2005], nous adoptons les suivantes notations :

$$x_j(t) = x\left(t - \tau + \frac{j}{m}\tau\right), \quad u_j(t) = u\left(t - \tau + \frac{j}{m}\tau\right) \quad \text{et} \quad \varepsilon_j(t) = \varepsilon\left(t - \tau + \frac{j}{m}\tau\right) \quad (5.13)$$

pour  $j = 0, \dots, m$  et  $t \geq -\frac{j}{m}\tau$  où  $m$  est un nombre entier positif qui sera spécifié plus précisément dans la suite.

## Chapitre 5.

Comme dans le chapitre précédent, l'observateur que nous proposons est composé de  $m + 1$  sous-systèmes en cascade où le premier système est un observateur utilisant une sortie continue, qui fournit une estimation en temps continu de l'état retardé tandis que chacun des sous-systèmes restants est un prédicteur. Comme dans [Germani *et al.*, 2002, Kazantzis and Wright, 2005, Farza *et al.*, 2015b], le prédicteur au rang  $j$  dans la cascade prédit l'état du sous-système précédent avec un horizon de prédiction égal à  $\frac{\tau}{m}$ , de telle sorte que l'état du  $m$ -ème prédicteur est une estimation de l'état du système réel.

Comme nous l'avons souligné au chapitre précédent, l'idée derrière la conception d'un observateur en cascade résulte principalement des propriétés suivantes :

$$x_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) = x_{j-1}(t) \text{ and } u_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) = u_{j-1}(t), j = 1, \dots, m \quad (5.14)$$

### Structure de l'estimateur

D'après la notation adoptée, l'état du système retardé est régi par le modèle dynamique suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= Ax_0(t) + \varphi(u_0(t), x_0(t)) + B\varepsilon_0(t) \\ y_\tau(t) &= Cx_0(t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Le système non retardé (5.15) est sous la forme (5.1), où la sortie n'est pas retardée et est disponible en temps continu. Ainsi, un observateur à grand-gain continu sous la forme (5.6) peut être utilisé pour l'estimation de  $x_0$ . Les équations de cet observateur sont données par :

$$\dot{\hat{x}}_0(t) = A\hat{x}_0(t) + \varphi(u_0(t), \hat{x}_0(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} K(C\hat{x}_0(t) - y(t)) \quad (5.16)$$

où, comme dans (5.6),  $K$  est un vecteur tel que  $(A - KC)$  est Hurwitz et  $\theta \geq 1$  est un paramètre de synthèse.

### Structure des prédicteurs

Nous nous concentrons maintenant sur la structure des  $m$  prédicteurs restants dont la synthèse est décrite ci-dessous.

### 5.3. Synthèse d'un observateur en cascade pour des sorties retardées

Rappelons que la variable  $x_j$  désigne l'état retardé avec un retard égal à  $\tau - \frac{j}{m}\tau$ . Comme l'observateur (5.16) permet l'estimation de l'état  $x_0$ , nous nous concentrons sur le cas où  $j = 1, \dots, m$ . L'objectif est de synthétiser un prédicteur qui estime l'état  $x_j$ . la dynamique de ce dernier est régie par l'équation suivante

$$\dot{x}_j(t) = Ax_j(t) + \varphi(u_j(t), x_j(t)) + B\varepsilon_j(t) \quad (5.17)$$

Le système (5.17) peut se réécrire comme suit

$$\dot{x}_j(t) = \bar{A}x_j(t) + \varphi(u_j(t), x_j(t)) + (A - \bar{A})x_j(t) + B\varepsilon_j(t) \quad (5.18)$$

où  $\bar{A}$  est une matrice Hurwitz qui est un paramètre de synthèse pour les prédicteurs qui doit être choisi Hurwitz.

D'après (5.18), l'état  $x_j$  peut être représenté comme suit

$$\begin{aligned} x_j(t) &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}x_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{\bar{A}(t-s)} (\varphi(u_j(s), x_j(s)) + (A - \bar{A})x_j(s) + B\varepsilon_j(s)) ds \\ &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}x_{j-1}(t) + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{\bar{A}(t-s)} (\varphi(u_j(s), x_j(s)) + (A - \bar{A})x_j(s) + B\varepsilon_j(s)) ds \end{aligned} \quad (5.19)$$

Notez que la dernière égalité résulte du fait que  $x_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) = x_{j-1}(t)$ .

Nous désignons par  $\hat{x}_j$  l'état du prédicteur qui fournit une estimation de l'état  $x_j$ , nous assignons la dynamique de  $\hat{x}_j$  comme suit

$$\dot{\hat{x}}_j(t) = A\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) - G_j(t) \quad (5.20)$$

où  $G_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, m$  est le terme correctif qui doit être choisi afin de garantir la convergence exponentielle vers zéro de l'erreur de prédiction, i.e.,  $\tilde{x}_j(t) = \hat{x}_j(t) - x_j(t)$ . On remarque que la structure de l'observateur de l'état continu (5.6) est similaire à celle du prédicteur (5.20) avec

$$G_0(t) = \theta\Delta_\theta^{-1}K(C\hat{x}_0(t) - y(t)) = \theta\Delta_\theta^{-1}KC(\hat{x}_0(t) - x(t)) = \theta\Delta_\theta^{-1}KC\tilde{x}_0(t) \quad (5.21)$$

où  $\tilde{x}(t)$  est l'erreur d'observation correspondant à l'état retardé, qui satisfait une inégalité similaire à (5.8). Plus précisément, nous avons

$$\|\tilde{x}_0(t)\| \leq \mu(\theta)e^{-\lambda(\theta)t}\|\tilde{x}_0(0)\| + \frac{M}{\theta}\delta_\varepsilon \quad (5.22)$$



## Chapitre 5.

où  $\theta \geq 1$  désigne le paramètre de synthèse de l'observateur,  $M > 0$  est une constante positive qui ne dépend pas de  $\theta$ ,  $\mu(\theta)$  est un polynôme en  $\theta$  avec  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \lambda(\theta) = +\infty$  et finalement  $\delta_\varepsilon$  est la borne de l'incertitude comme donné par l'hypothèse 5.2.3.

Maintenant, en mimant (5.18), l'équation du prédicteur peut se réécrire comme suit

$$\dot{\hat{x}}_j(t) = \bar{A}\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) + (A - \bar{A})\hat{x}_j(t) - G_j(t) \quad (5.23)$$

De nouveau et selon (5.23), la prédiction  $\hat{x}_j$  peut s'exprimer comme suit :

$$\hat{x}_j(t) = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \hat{x}_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) + e^{\bar{A}t} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{A}s} (\varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) + (A - \bar{A})\hat{x}_j(s) - G_j(s)) ds \quad (5.24)$$

Ensuite, en imitant la relation (5.19), entre les états  $x_j(t)$  et  $x_{j-1}(t)$ , nous imposons une relation similaire entre les états correspondant à deux prédicteurs successifs, i.e.  $\hat{x}_j$  et  $\hat{x}_{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Cette relation s'exprime comme suit

$$\hat{x}_j(t) = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \hat{x}_{j-1}(t) + r_j(t) + e^{\bar{A}t} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{A}s} (\varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) + (A - \bar{A})\hat{x}_j(s)) ds \quad (5.25)$$

où les  $r_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  sont des fonctions qui sont différentiables par rapport au temps et qui seront déterminées simultanément avec les termes de correction  $G_j$  de telle sorte que la relation (5.25) reste vrai pour  $t \geq 0$ .

### Détermination des gains des prédicteurs

Dans ce paragraphe, les expressions des gains des prédicteurs  $G_j$  sont déterminées de telle sorte que la relation imposée (5.25) soit satisfaite.

En soustrayant l'équation (5.25) à l'équation (5.24), on obtient

$$e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( \hat{x}_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) - r_j(t) = e^{\bar{A}t} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{A}s} G_j(s) ds$$

La dérivation par rapport au temps de chaque côté de l'équation ci-dessus donne

$$\begin{aligned} e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} \left( \dot{\hat{x}}_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) - \dot{\hat{x}}_{j-1}(t) \right) + \dot{r}_j(t) &= G_j(t) - e^{(\bar{A}\frac{\tau}{m})} G_j\left(t - \frac{\tau}{m}\right) \\ &+ \bar{A} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{(\bar{A}(t-s))} G_j(s) ds \end{aligned} \quad (5.26)$$

### 5.3. Synthèse d'un observateur en cascade pour des sorties retardées

ou de manière équivalente,

$$e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( \dot{\hat{x}}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \dot{\hat{x}}_{j-1}(t) \right) - \dot{r}_j(t) = \bar{A}e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) - \bar{A}r_j(t) + G_j(t) - e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}G_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \quad (5.27)$$

Substituant dans (5.27),  $\dot{\hat{x}}_{j-1}(t)$  et  $\dot{\hat{x}}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right)$  par leur expression donnée par (5.20) conduit à

$$e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( A \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) + \varphi \left( u_{j-1}, \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi(u_{j-1}, x_{j-1}(t)) + G_{j-1}(t) - G_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) = \bar{A}e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) + G_j(t) - e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}G_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) + (\dot{r}_j(t) - \bar{A}r_j(t)) \quad (5.28)$$

Notons que nous avons utilisé, dans la dernière équation, l'identité  $u_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) = u_{j-1}(t)$ . Ensuite, en utilisant le fait que les matrices  $\bar{A}$  et  $e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}}$  commutent entre elles, l'équation (5.28) conduit à

$$G_j(t) = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( G_{j-1}(t) + (A - \bar{A}) \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) + \varphi \left( u_{j-1}, \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi(u_{j-1}, x_{j-1}(t)) \right) - (\dot{r}_j(t) - \bar{A}r_j(t)) \quad (5.29)$$

Maintenant, si on choisit  $r_j$  de sorte que

$$\dot{r}_j(t) = \bar{A}r_j(t) \quad (5.30)$$

l'expression du terme de correction  $G_j$  devient :

$$G_j(t) = e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( G_{j-1}(t) + (A - \bar{A}) \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) + \varphi \left( u_{j-1}, \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi(u_{j-1}, x_{j-1}(t)) \right)$$

Avant de donner le théorème principal qui résume les résultats obtenus à travers les développements précédents, nous rappelons que comme la matrice  $\bar{A}$  est Hurwitz, il existe des nombres  $\beta$  et  $\bar{a}$  tels que [Khali, 2003, Kazantzis and Wright, 2005]

$$\forall t \geq 0 : \|e^{\bar{A}t}\| \leq \beta e^{-\bar{a}t} \quad (5.31)$$

Chapitre 5.

Les équations de l'observateur candidat pour le système (5.12) sont alors données par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_j(t) &= A\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) - G_j(t), \quad j = 0, \dots, m \\ G_0(t) &= \theta \Delta_\theta^{-1} KC(\hat{x}_0(t) - y_\tau(t)) \\ G_j(t) &= e^{\bar{A}\frac{\tau}{m}} \left( G_{j-1}(t) + (A - \bar{A}) \left( \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{x}_{j-1}(t) \right) \right. \\ &\quad \left. + \varphi \left( u_{j-1}, \hat{x}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi(u_{j-1}, x_{j-1}(t)) \right) \quad \text{pour } j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (5.32)$$

où la matrice  $\bar{A}$  est Hurwitz, le vecteur  $K$  est tel que  $A - KC$  est Hurwitz,  $\Delta_\theta$  est la matrice diagonale donnée par (5.7) et  $\theta \geq 1$  est un paramètre de synthèse.

Nous énonçons le théorème suivant

**Theorème 5.3.1.** *Considérons le système (5.12) soumis aux hypothèses 5.2.1-5.2.2-5.2.3 et l'observateur (5.32). Si la matrice  $\bar{A}$  est choisie telle que  $\bar{a} \leq \lambda(\theta)$  où  $\lambda(\theta) > 0$  est défini par (5.22) et si le nombre  $m$  de sous-systèmes dans la cascade est choisi de sorte que*

$$\eta \frac{\tau}{m} < 1 \quad (5.33)$$

où

$$\eta = \beta \left( L_\varphi + \|\bar{A} - A\| \right) \quad (5.34)$$

avec  $\beta$  donné par (5.31) et  $L_\varphi$  la constante de Lipschitz de  $\varphi$  définie dans l'hypothèse 5.2.2, alors, nous avons pour  $j = 1, \dots, m$  :

$$\|\tilde{x}_j(t)\| \leq \rho_j e^{-\bar{a}t} + M_j \delta_\varepsilon, \quad t \geq 0 \quad (5.35)$$

où

$$\rho_j = \frac{\eta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds + \beta \chi_m^j \mu(\theta) \|\tilde{x}_0(0)\| + \frac{\beta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \sum_{i=1}^j \chi_m^k \|r_{j-k}(0)\| \quad (5.36)$$

$$M_j = \beta \chi_m^j \frac{M}{\theta} + \frac{\beta \frac{\tau}{m}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \sum_{i=0}^{j-1} \chi_m^i \quad (5.37)$$

où les fonctions  $r_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , sont régies par (5.30),  $\mu(\theta)$  et  $M$  donnés par (5.22),  $\delta_\varepsilon$  est la borne supérieure essentielle des incertitudes fournie par l'hypothèse 5.2.3 et

$$\chi_m = \frac{e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \quad (5.38)$$

La preuve du théorème est donnée dans la sous-section suivante. Avant de détailler

### 5.3. Synthèse d'un observateur en cascade pour des sorties retardées

cette preuve, nous remarquons que selon (5.35), dans le cas sans incertitudes, l'erreur d'estimation associée à chaque prédicteur au rang  $j$  et en particulier au dernier, c'est-à-dire, au rang  $m$ , converge exponentiellement vers zéro. En présence d'incertitudes, l'erreur d'estimation reste bornée et la borne ultime est proportionnelle à la borne essentielle des incertitudes  $\delta_\epsilon$ . D'autres propriétés de la borne ultime sont fournies dans la proposition suivante.

**Proposition 5.3.1.** *Soit  $M_m$  la borne ultime de l'erreur entre l'état réel  $x(t)$  du système (5.1) et l'état du dernier sous-système  $\hat{x}_m(t)$  dans la cascade de l'observateur (5.32), c'est-à-dire,  $M_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_m(t) - x(t)\|$ . Alors, nous avons :*

1.  $M_m = \beta \chi_m^m \frac{M}{\theta} + \frac{\beta \tau}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \sum_{i=0}^{m-1} \chi_m^i$  où  $M$  et  $\chi_m$  sont donnés par (5.22) et (5.38), respectivement .
2. La suite  $M_m$   $m \in \mathbb{N}^*$  est décroissante

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_m = \beta \frac{M}{\theta} e^{(\eta - \bar{a})\tau} + \beta \frac{e^{(\eta - \bar{a})\tau} - 1}{\eta - \bar{a}} \quad (5.39)$$

Avant de donner la preuve de la proposition 5.3.1, nous notons les deux faits suivants.

**Remarques 5.3.1.** *Le membre de droite de l'équation (5.39) est constitué de deux termes. Le premier terme  $\beta e^{(\eta - \bar{a})\tau} \frac{M}{\theta}$  peut être fixé aussi petit que voulu en prenant des valeurs suffisamment élevées pour le paramètre de synthèse de l'observateur  $\theta$ . Le second terme,  $\beta \frac{e^{(\eta - \bar{a})\tau} - 1}{\eta - \bar{a}}$ , est fixé et est la limite de la borne ultime lorsque la longueur de la cascade,  $m$ , est choisie suffisamment élevée. Donc, lorsque la longueur de la cascade  $m$  est fixée, nous devons d'abord satisfaire la condition (5.33) et ensuite gérer un compromis entre la complexité de l'observateur et une valeur acceptable pour l'erreur d'estimation.*

**Remarques 5.3.2.** *Le terme  $\eta - \bar{a}$  apparaissant dans l'expression de la borne ultime (5.39) est directement lié à la constante de Lipschitz des non linéarités du système. En effet, nous avons*

$$\begin{aligned} \eta - \bar{a} &= \beta(L_\varphi + \|A - \bar{A}\|) - \bar{a} \\ &\geq \beta L_\varphi \end{aligned}$$

comme  $\beta \geq 1$  et  $\|A - \bar{A}\| - \bar{a} \geq 0$  selon le Lemme 5.2.2.

En conséquence, comme la fonction  $\frac{e^\alpha - 1}{\alpha}$  est croissante pour  $\alpha \geq 0$ , la limite de la

Chapitre 5.

borne ultime donnée par (5.39) satisfait particulièrement

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_m = \beta e^{(\beta L_\varphi)\tau} \frac{M}{\theta} + \beta \frac{e^{(\beta L_\varphi)\tau} - 1}{L_\varphi} \quad (5.40)$$

c'est-à-dire, la borne inférieure de cette limite est une fonction croissante de la constante de Lipschitz des non linéarités du système.

*Démonstration de la proposition 5.3.1* Le point (i) de la proposition 5.3.1 est direct, car il suffit de remplacer  $j$  par  $m$  dans l'expression (5.37). Maintenant, nous prouvons le point (ii). En effet, selon l'expression de  $M$  donnée par (i), on obtient :

$$M_m = \beta \frac{e^{-\bar{a}\tau}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} M_0 + \frac{\beta}{\eta} \frac{\eta \frac{\tau}{m}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \sum_{i=0}^{j-1} \left( \frac{e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \right)^i \triangleq \frac{\beta e^{-\bar{a}\tau} M_0}{f(\nu)} + \frac{\beta}{\eta} g(\nu) \quad (5.41)$$

$\nu = \eta \frac{\tau}{m}$ . On note que selon la condition (5.33), on obtient  $\nu \in ]0, 1[$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  sont définies comme suit :  $f : ]0, 1[ \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\nu \mapsto f(\nu)$  et  $g : ]0, 1[ \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\nu \mapsto g(\nu)$

$$f(\nu) \triangleq (1 - \nu)^{\frac{\eta\tau}{\nu}} = e^{\frac{\eta\tau}{\nu} \log(1-\nu)} \quad (5.42)$$

$$g(\nu) \triangleq \frac{\nu}{1 - \nu} \sum_{i=0}^{j-1} (h(\nu))^i \quad \text{avec} \quad h(\nu) = \frac{e^{-\frac{\bar{a}}{\eta}\nu}}{1 - \nu} \quad (5.43)$$

De ce fait,  $M_m$  peut être considérée comme une fonction de  $\nu$  comme exprimé par (5.41). Comme  $\nu$  est une fonction décroissante de  $m$ , il suffit de montrer que  $\nu \mapsto M_m(\nu)$  est une fonction croissante afin de montrer que  $M_m$  n'est pas en croissant par rapport à  $m$ . En outre, comme  $\beta$ ,  $\eta$ ,  $M_0$  et  $f(\nu)$  sont positifs, il suffit de montrer que  $\nu \mapsto \frac{1}{f(\nu)}$  et  $\nu \mapsto g(\nu)$  sont des fonctions croissantes. En effet, nous montrons d'abord que  $f'(\nu) \leq 0$  (c'est-à-dire  $\nu \mapsto f(\nu)$  est décroissante) avant de montrer que  $g'(\nu) \geq 0$ , pour tout  $\nu \in ]0, 1[$ .

$$\begin{aligned} f'(\nu) &= - \left( \frac{\eta\tau}{\nu^2} \log(1 - \nu) + \frac{\eta\tau}{1 - \nu} \right) f(\nu) = - \frac{\eta\tau}{\nu^2} \left( \frac{\nu}{1 - \nu} + \log(1 - \nu) \right) f(\nu) \\ &\triangleq - \frac{\eta\tau}{\nu^2} f_1(\nu) f(\nu) \end{aligned} \quad (5.44)$$

- La décroissance de  $\nu \mapsto f(\nu)$  : on obtient :

$$f'(\nu) = - \frac{1}{1 - \nu} + \frac{1}{(1 - \nu)^2} \geq 0 \quad \text{comme} \quad 0 < 2 - \nu < 1 \quad (5.45)$$

$f_1(\nu) \triangleq \frac{\nu}{1 - \nu} + \log(1 - \nu)$ . Afin de prouver que  $f'(\nu) \leq 0$  et comme  $f(\nu) > 0$ , il suffit

### 5.3. Synthèse d'un observateur en cascade pour des sorties retardées

de montrer que  $f_1(\nu) \geq 0$  pour tout  $\nu \in ]0, 1[$ . Par conséquent, nous avons

$$g(\nu) = \left(-1 + \frac{1}{1-\nu}\right) \sum_{i=0}^{j-1} (h(\nu))^i \quad (5.46)$$

Donc  $f_1(\nu)$  est croissante. En outre, nous avons  $\lim_{\nu \rightarrow 0} f_1(\nu) = 0$ , ce qui implique que  $f_1(\nu) \geq 0$  pour tous  $\nu \in ]0, 1[$ .

- La croissance de  $\nu \mapsto g(\nu)$  : l'expression (5.43) de  $g$  peut s'écrire, comme suit

$$\begin{aligned} g'(\nu) &= \left(-1 + \frac{1}{1-\nu}\right) \sum_{i=1}^{j-1} i h'(\nu) (h(\nu))^{i-1} + \frac{1}{(1-\nu)^2} \sum_{i=0}^{j-1} (h(\nu))^i \\ &\leq \left(-1 + \frac{1}{1-\nu}\right) \sum_{i=1}^{j-1} i h'(\nu) (h(\nu))^{i-1} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Alors

$$h'(\nu) = \left(-\frac{\bar{a}}{\eta} + \frac{1}{1-\nu}\right) h(\nu) \quad (5.48)$$

D'après (5.43), la dérivé de  $h_1$  par rapport à  $\nu$ ,  $h'(\nu)$  peut s'exprimer comme suit :

$$M_m = V_m + W_m$$

Maintenant, d'après le Lemme 5.2.2, nous avons  $\frac{\bar{a}}{\eta} \leq 1$  et comme  $\frac{1}{1-\nu} > 1$  pour  $\nu \in ]0, 1[$ , on déduit de (5.48) que  $h'(\nu) \geq 0$  pour tout  $\nu \in ]0, 1[$ . En combinant ce fait avec (5.47), on déduit que  $g'(\nu) \geq 0$ .

Pour résumer, nous avons montré que  $M_m(\nu)$  est une fonction croissante de  $\nu$ , ou de façon équivalente, une fonction croissante de  $m$ . Maintenant, nous calculons la limite donnée par (5.39). En effet, l'expression de  $M_m$  peut s'écrire comme suit

$$V_m = \beta \frac{e^{-\bar{a}\tau}}{\left(1 - \eta \frac{\tau}{m}\right)^m} \frac{M}{\theta} \quad W_m = \frac{\beta \frac{\tau}{m}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}}\right)^i \quad (5.49)$$

D'une part et comme  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \eta \frac{\tau}{m}\right)^m = e^{-\eta\tau}$ , on obtient

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m = \beta e^{(\eta-\bar{a})\tau} \frac{M}{\theta} \quad (5.50)$$

## Chapitre 5.

D'un autre côté, nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} W_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\beta \frac{\tau}{m} \left( \frac{e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \right)^m - 1}{1 - \eta \frac{\tau}{m} \frac{e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} - 1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \beta \frac{\tau}{m} \frac{\left( \frac{e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \right)^m - 1}{\frac{e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} + \eta \frac{\tau}{m} - 1} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \beta \frac{\left( \frac{e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \right)^m - 1}{\eta - \bar{a}} = \beta \frac{e^{(\eta - \bar{a})\tau} - 1}{\eta - \bar{a}} \end{aligned} \quad (5.51)$$

À partir de (5.49), (5.50) et (5.51), on déduit (5.77). Ceci met fin à la preuve de la Proposition 5.3.1.

### Preuve du Théorème 5.3.1

Soit  $\tilde{x}_j = \hat{x}_j - x_j$  l'erreur d'estimation pour  $j = 0, \dots, m$ . Nous cherchons la borne supérieure de  $\tilde{x}_j(t)$ . En effet, à partir des équations (5.19) et (5.25), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j(t) &= e^{\bar{A} \frac{\tau}{m}} \tilde{x}_{j-1}(t) + r_j(t) \\ &\quad + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{\bar{A}(t-s)} (\tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) + (A - \bar{A})\tilde{x}_j(s) - B\varepsilon_j(t)) ds \end{aligned} \quad (5.52)$$

où

$$\tilde{\varphi}(u_j(s), \hat{x}_j(s), x_j(s)) = \varphi(u_j(s), \hat{x}_j(s)) - \varphi(u_j(s), x_j(s))$$

Remarquons que selon le choix des  $r_j$ 's,  $j = 1, \dots, m$  donné par (5.30), nous avons

$$\|r_j(t)\| \leq \beta e^{-\bar{a}t} \|r_j(0)\| \quad \forall t \geq 0 \quad (5.53)$$

L'inégalité (5.31) est fournie par récurrence sur  $j$ . En effet, nous prouvons d'abord cette inégalité pour  $j = 1$ .

**Pour  $j = 1$  :**

L'inégalité (5.52) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= e^{\bar{A} \frac{\tau}{m}} \tilde{x}_0(t) + r_1(t) \\ &\quad + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{\bar{A}(t-s)} (\tilde{\varphi}(u_1(s), \hat{x}_1(s), x_1(s)) + (A - \bar{A})\tilde{x}_1(s) - B\varepsilon_1(s)) ds \end{aligned}$$

### 5.3. Synthèse d'un observateur en cascade pour des sorties retardées

Rappelons que selon (5.22) et comme  $\bar{a} \leq \lambda(\theta)$ , on obtient

$$\|\tilde{x}_0(t)\| \leq \rho_0 e^{-\bar{a}t} + M_0 \delta_\varepsilon \quad (5.54)$$

où

$$\rho_0 = \mu(\theta) \|\tilde{x}_0(0)\| \quad \text{et} \quad M_0 = \frac{M}{\theta} \quad (5.55)$$

Maintenant, en utilisant (5.31), (5.53) et (5.54), on obtient

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_1(t)\| &\leq \beta e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \left( \rho_0 e^{-\bar{a}t} + M_0 \delta_\varepsilon \right) + \beta e^{-\bar{a}t} \|r_1(0)\| \\ &\quad + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|e^{\bar{A}(t-s)}\| \left( (L_\varphi + \|A - \bar{A}\|) \|\tilde{x}_1(s)\| + \|B\| \|\varepsilon_1(s)\| \right) ds \end{aligned}$$

En utilisant (5.31) et du fait que  $\|B\| = 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_1(t)\| &\leq \beta e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \left( \rho_0 e^{-\bar{a}t} + M_0 \delta_\varepsilon \right) + \beta \|r_1(0)\| e^{-\bar{a}t} \\ &\quad + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{a}(t-s)} (\eta \|\tilde{x}_1(s)\| + \beta \|\varepsilon_1(s)\|) ds \end{aligned}$$

où  $\eta = \beta(L_\varphi + \|A - \bar{A}\|)$ .

Donc,

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_1(t)\| &\leq \beta \left( e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \left( \rho_0 e^{-\bar{a}t} + M_0 \delta_\varepsilon \right) + e^{-\bar{a}t} \|r_1(0)\| \right) \\ &\quad + \beta \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t \|\varepsilon_1(s)\| ds + \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{a}(t-s)} \eta \|\tilde{x}_1(s)\| ds \\ &\leq \beta \left( e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \rho_0 + \|r_1(0)\| \right) e^{-\bar{a}t} \\ &\quad + \beta \left( M_0 e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} + \frac{\tau}{m} \right) \delta_\varepsilon + \eta \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{a}(t-s)} \|\tilde{x}_1(s)\| ds \end{aligned} \quad (5.56)$$

Maintenant, nous posons  $z_1(t) = e^{\bar{a}t} \|\tilde{x}_1(t)\|$  et

$$K_1(t) = \beta \left( e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \rho_0 + \|r_1(0)\| \right) + \beta \left( M_0 e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} + \frac{\tau}{m} \right) \delta_\varepsilon e^{\bar{a}t}$$

L'équation (5.56) devient :

$$z_1(t) \leq K_1(t) + \eta \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t z_1(s) ds \quad (5.57)$$

En prenant en compte (5.33), il est facile de voir que les conditions du Lemme 5.2.1



Chapitre 5.

sont remplies et on obtient

$$\begin{aligned}
z_1(t) &\leq \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( K_1(t) + \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 z_1(s) ds \right) \\
&= \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( K_1(t) + \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 e^{\bar{a}s} \|\tilde{x}_1(s)\| ds \right) \\
&\leq \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( K_1(t) + \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_1(s)\| ds \right)
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Pour revenir à  $\|\tilde{x}_1\|$  et en utilisant (5.58), on obtient

$$\begin{aligned}
\|\tilde{x}_1(t)\| &\leq \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( \beta \left( e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \rho_0 + \|r_1(0)\| \right) + \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_1(s)\| ds \right) e^{-\bar{a}t} \\
&\quad + \frac{\beta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( M_0 e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} + \frac{\tau}{m} \right) \delta_\varepsilon \\
&\stackrel{\Delta}{=} \rho_1 e^{-\bar{a}t} + M_1 \delta_\varepsilon
\end{aligned} \tag{5.59}$$

où

$$\rho_1 = \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( \beta \left( e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \rho_0 + \|r_1(0)\| \right) + \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_1(s)\| ds \right) \tag{5.60}$$

$$M_1 = \frac{\beta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} M_0 + \frac{\tau}{m} \right) \tag{5.61}$$

En substituant dans les expressions ci-dessus de  $M_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_0$  et  $M_0$  par leur expression respective donnée par (5.55), on obtient :

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( \beta e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \mu(\theta) \|\tilde{x}_0(0)\| + \beta \|r_1(0)\| + \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_1(s)\| ds \right) \\
&= \beta \chi_m \mu(\theta) \|\tilde{x}_0(0)\| + \frac{\beta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \|r_1(0)\| + \frac{\eta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_1(s)\| ds
\end{aligned} \tag{5.62}$$

$$M_1 = \frac{\beta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \frac{M}{\theta} + \frac{\tau}{m} \right) = \beta \chi_m \frac{M}{\theta} + \frac{\beta \frac{\tau}{m}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \tag{5.63}$$

où  $\chi_m$  est donnée par (5.38). Il est clair que les expressions ci-dessus de  $\rho_1$  et  $M_1$ , i.e. (5.62) et (5.63) sont sous les formes (5.36) et (5.37), respectivement.

Enfin, nous procédons par récurrence sur  $j$ . En effet, nous supposons que pour chaque  $i = 1, \dots, j - 1$ , il existe  $\rho_i$  et  $M_i$  tels que

$$\|\tilde{x}_i(t)\| \leq \rho_i e^{-\bar{a}t} + M_i \delta_\varepsilon, \forall t \geq 0 \tag{5.64}$$

### 5.3. Synthèse d'un observateur en cascade pour des sorties retardées

Notez que l'inégalité (5.64) a déjà été prouvée pour  $j = 1$  avec  $\rho_1$  et  $M_1$  donnés par (5.62) et (5.63), respectivement. Soit  $j \geq 2$ , supposons maintenant que (5.64) est vérifiée.

Fixons :

$$v_i(t) = \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{\bar{A}(t-s)} (\tilde{\varphi}(u_i(s), \hat{x}_i(s), x_i(s)) + (A - \bar{A})\tilde{x}_i(s) - B\varepsilon_i(t)) ds \quad (5.65)$$

En itérant la relation (5.52), on obtient :

$$\tilde{x}_j(t) = e^{\bar{A}j\frac{\tau}{m}} \tilde{x}_0(t) + \sum_{i=1}^j \left( e^{\bar{A}(j-i)\frac{\tau}{m}} r_i(0) \right) + \sum_{i=1}^j \left( e^{\bar{A}(j-i)\frac{\tau}{m}} v_i(t) \right) \quad (5.66)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_j(t)\| &\leq \|e^{\bar{A}j\frac{\tau}{m}}\| \|\tilde{x}_0(t)\| + \sum_{i=1}^j \left( \|e^{\bar{A}(j-i)\frac{\tau}{m}}\| \|r_i(0)\| \right) + \sum_{i=1}^j \|e^{\bar{A}(j-i)\frac{\tau}{m}} v_i(t)\| \\ &\leq \beta e^{-\bar{a}j\frac{\tau}{m}} \|\tilde{x}_0(t)\| + \beta \left( \sum_{i=1}^j e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} \|r_i(0)\| \right) e^{-\bar{a}t} + \sum_{i=1}^j \|e^{\bar{A}(j-i)\frac{\tau}{m}} v_i(t)\| \end{aligned} \quad (5.67)$$

Selon (5.65) et en utilisant (5.31), on obtient :

$$\begin{aligned} \|e^{\bar{A}(j-i)\frac{\tau}{m}} v_i(t)\| &\leq e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{a}(t-s)} (\eta \|\tilde{x}_i(s)\| + \beta \|\varepsilon_i(s)\|) ds \\ &\leq e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} \left( \eta \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{a}(t-s)} \|\tilde{x}_i(s)\| ds + \beta \frac{\tau}{m} \delta_\varepsilon \right) \end{aligned} \quad (5.68)$$

où  $\eta$  est donné par (5.34).

En combinant (5.67) et (5.68), nous avons :

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_j(t)\| &\leq \beta e^{-\bar{a}j\frac{\tau}{m}} \|\tilde{x}_0(t)\| + \beta \left( \sum_{i=1}^j e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} \|r_i(0)\| \right) e^{-\bar{a}t} \\ &\quad + \eta \sum_{i=1}^j e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{a}(t-s)} \|\tilde{x}_i(s)\| ds + \beta \frac{\tau}{m} \delta_\varepsilon \sum_{i=1}^j e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} \\ &= \beta e^{-\bar{a}j\frac{\tau}{m}} \|\tilde{x}_0(t)\| + \beta \left( \sum_{i=1}^j e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} \|r_i(0)\| \right) e^{-\bar{a}t} + \eta \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{a}(t-s)} \|\tilde{x}_j(s)\| ds \\ &\quad + \eta \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{a}(t-s)} \|\tilde{x}_i(s)\| ds + \beta \frac{\tau}{m} \delta_\varepsilon \sum_{i=1}^j e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} \end{aligned} \quad (5.69)$$

Chapitre 5.

L'utilisant de l'hypothèse de récurrence (5.64) conduit à :

$$\begin{aligned} \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{a}(t-s)} \|\tilde{x}_i(s)\| ds &\leq \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{a}(t-s)} (\rho_i e^{-\bar{a}s} + M_i \delta_\varepsilon) ds \\ &\leq \rho_i \frac{\tau}{m} e^{-\bar{a}t} + M_i \frac{\tau}{m} \delta_\varepsilon = \frac{\tau}{m} (\rho_i e^{-\bar{a}t} + M_i \delta_\varepsilon) \end{aligned} \quad (5.70)$$

Par conséquent, en utilisant (5.53), (5.54) et (5.70), l'inégalité (5.69) devient :

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_j(t)\| &\leq \beta e^{-\bar{a}j\frac{\tau}{m}} (\rho_0 e^{-\bar{a}t} + M_0 \delta_\varepsilon) + \beta \frac{\tau}{m} \delta_\varepsilon \sum_{i=1}^j e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} + \eta \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} (\rho_i e^{-\bar{a}t} + M_i \delta_\varepsilon) \\ &\quad + \eta \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{a}(t-s)} \|\tilde{x}_j(s)\| ds + \beta \left( \sum_{i=1}^j e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} \|r_i(0)\| \right) e^{-\bar{a}t} \\ &= \left( \beta \left( e^{-\bar{a}j\frac{\tau}{m}} \rho_0 + \|r_j(0)\| \right) + \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} \left( \eta \frac{\tau}{m} \rho_i + \beta \|r_i(0)\| \right) \right) e^{-\bar{a}t} \\ &\quad + \left( \beta e^{-\bar{a}j\frac{\tau}{m}} M_0 + \beta \frac{\tau}{m} + \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} (\eta M_i + \beta) \right) \delta_\varepsilon + \eta \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t e^{-\bar{a}(t-s)} \|\tilde{x}_j(s)\| ds \end{aligned} \quad (5.71)$$

Maintenant, posons  $z_j = e^{\bar{a}t} \|\tilde{x}_j\|$  et

$$\begin{aligned} K_j(t) &= \beta \left( \rho_0 e^{-\bar{a}j\frac{\tau}{m}} + \|r_j(0)\| \right) + \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} \left( \eta \frac{\tau}{m} \rho_i + \beta \|r_i(0)\| \right) \\ &\quad + \left( \beta M_0 e^{-\bar{a}j\frac{\tau}{m}} + \beta \frac{\tau}{m} + \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} (\eta M_i + \beta) \right) \delta_\varepsilon e^{\bar{a}t} \end{aligned} \quad (5.72)$$

L'équation (5.71) devient :

$$z_j(t) \leq K_j(t) + \eta \int_{t-\frac{\tau}{m}}^t z_j(s) ds$$

Encore une fois, en prenant en compte (5.33), il est facile de voir que les conditions du Lemme 5.2.1 sont assurées, ce qui conduit à

$$\begin{aligned} z_j(t) &\leq \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( K_j(t) + \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 z_j(s) ds \right) \\ &\leq \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( K_j(t) + \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds \right) \end{aligned} \quad (5.73)$$

### 5.3. Synthèse d'un observateur en cascade pour des sorties retardées

En revenant à  $\|\tilde{x}_j\|$ , et en utilisant (5.73), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_j(t)\| &\leq \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( \beta e^{-\bar{a}j \frac{\tau}{m}} M_0 + \beta \frac{\tau}{m} + \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}} (\eta M_i + \beta) \right) \delta_\varepsilon \\ &+ \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( \beta \left( e^{-\bar{a}j \frac{\tau}{m}} \rho_0 + \|r_j(0)\| \right) + \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}} \left( \eta \frac{\tau}{m} \rho_i + \|r_j(0)\| \right) + \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds \right) e^{-\bar{a}t} \end{aligned} \quad (5.74)$$

Posons

$$\rho_j = \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( \beta \left( e^{-\bar{a}j \frac{\tau}{m}} \rho_0 + \|r_j(0)\| \right) + \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}} \left( \eta \frac{\tau}{m} \rho_i + \beta \|r_i(0)\| \right) + \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds \right) \quad (5.75)$$

$$\begin{aligned} M_j &= \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( \beta e^{-\bar{a}j \frac{\tau}{m}} M_0 + \beta \frac{\tau}{m} + \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}} (\eta M_i + \beta) \right) \\ &= \frac{1}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( \beta e^{-\bar{a}j \frac{\tau}{m}} M_0 + \beta \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^j e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}} + \eta \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}} M_i \right) \end{aligned} \quad (5.76)$$

Selon (5.74), nous avons

$$\|\tilde{x}_j(t)\| \leq \bar{\rho}_j e^{-\bar{a}t} + M_j \delta_\varepsilon$$

À partir de (5.75), on obtient

$$\begin{aligned} \left(1 - \eta \frac{\tau}{m}\right) \rho_j &= \beta \left( e^{-\bar{a}(j) \frac{\tau}{m}} \rho_0 + \|r_j(0)\| \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}} \left( \eta \frac{\tau}{m} \rho_i + \beta \|r_i(0)\| \right) + \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_i(s)\| ds \end{aligned}$$

ou de façon équivalente :

$$\begin{aligned} \rho_j &= \beta e^{-\bar{a}j \frac{\tau}{m}} \rho_0 + \sum_{i=1}^j e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}} \left( \eta \frac{\tau}{m} \rho_i + \beta \|r_i(0)\| \right) + \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds \\ &= \beta e^{-\bar{a}j \frac{\tau}{m}} \rho_0 + \eta \frac{\tau}{m} \rho_j + \beta \|r_j(0)\| + \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}} \left( \eta \frac{\tau}{m} \rho_i + \beta \|r_i(0)\| \right) \\ &+ \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds \end{aligned} \quad (5.77)$$

Chapitre 5.

Réécrivant (5.77) pour le rang  $j - 1$  conduit à :

$$\begin{aligned}\rho_{j-1} &= \beta \left( e^{-\bar{a}(j-1)\frac{\tau}{m}} \rho_0 \right) + \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-1-i)\frac{\tau}{m}} \left( \eta \frac{\tau}{m} \rho_i + \beta \|r_i(0)\| \right) + \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_{j-1}(s)\| ds \\ &= e^{\bar{a}\frac{\tau}{m}} \left( \beta \left( e^{-\bar{a}(j)\frac{\tau}{m}} \rho_0 \right) + \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}} \left( \eta \frac{\tau}{m} \rho_i + \beta \|r_i(0)\| \right) + e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \eta \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_{j-1}(s)\| ds \right)\end{aligned}\quad (5.78)$$

À partir de (5.77) et (5.78), nous obtenons :

$$\rho_j - \rho_{j-1} e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} = \eta \frac{\tau}{m} \rho_j + \beta \|r_j(0)\| + \eta \left( \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds - e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_{j-1}(s)\| ds \right)\quad (5.79)$$

À partir de (5.75), on peut montrer que  $\rho_j$  s'exprime comme suit :

$$\rho_j = \frac{e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \rho_{j-1} + \frac{\eta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds - e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_{j-1}(s)\| ds \right) + \frac{\beta \|r_j(0)\|}{1 - \eta \frac{\tau}{m}}\quad (5.80)$$

L'équation ci-dessus (5.80) peut se réécrire comme suit

$$\left( \rho_j - \frac{\eta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds \right) = \frac{e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \left( \rho_{j-1} - \frac{\eta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_{j-1}(s)\| ds \right) + \frac{\beta \|r_j(0)\|}{1 - \eta \frac{\tau}{m}}\quad (5.81)$$

Comme l'équation récursive ci-dessus est valide pour  $j \geq 2$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\left( \rho_j - \frac{\eta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds \right) &= \frac{e^{-\bar{a}(j-1)\frac{\tau}{m}}}{\left(1 - \eta \frac{\tau}{m}\right)^{j-1}} \left( \rho_1 - \frac{\eta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_1(s)\| ds \right) \\ &\quad + \sum_{i=2}^j \frac{e^{-\bar{a}(j-i)\frac{\tau}{m}}}{\left(1 - \eta \frac{\tau}{m}\right)^{j-i}} \frac{\beta \|r_i(0)\|}{1 - \eta \frac{\tau}{m}}\end{aligned}\quad (5.82)$$

Maintenant l'équation (5.62) peut se réécrire comme suit :

$$\left( \rho_1 - \frac{\eta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_1(s)\| ds \right) = \beta \frac{e^{-\bar{a}\frac{\tau}{m}}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \rho_0 + \frac{\beta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \|r_1(0)\|$$

### 5.3. Synthèse d'un observateur en cascade pour des sorties retardées

et l'équation (5.82) devient alors

$$\begin{aligned} \rho_j - \frac{\eta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds &= \frac{e^{-\bar{a}j \frac{\tau}{m}}}{\left(1 - \eta \frac{\tau}{m}\right)^j} \beta \rho_0 + \frac{e^{-\bar{a}(j-1) \frac{\tau}{m}}}{\left(1 - \eta \frac{\tau}{m}\right)^j} \beta \|r_1(0)\| \\ &+ \sum_{i=2}^j \frac{e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}}}{\left(1 - \eta \frac{\tau}{m}\right)^{j+1-i}} \beta \|r_i(0)\| \end{aligned} \quad (5.83)$$

ou de façon équivalente :

$$\rho_j = \frac{\eta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds + \frac{e^{-\bar{a}j \frac{\tau}{m}}}{\left(1 - \eta \frac{\tau}{m}\right)^j} \beta \rho_0 + \sum_{i=1}^j \frac{e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}}}{\left(1 - \eta \frac{\tau}{m}\right)^{j+1-i}} \beta \|r_i(0)\| \quad (5.84)$$

Encore fois, en remplaçant  $\rho_0$  par son expression donnée par (5.55), on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_j &= \frac{\eta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds + \frac{e^{-\bar{a}j \frac{\tau}{m}}}{\left(1 - \eta \frac{\tau}{m}\right)^j} \beta \mu(\theta) \|\tilde{x}_0(0)\| + \sum_{i=1}^j \frac{e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}}}{\left(1 - \eta \frac{\tau}{m}\right)^{j+1-i}} \beta \|r_i(0)\| \\ &= \frac{\eta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{x}_j(s)\| ds + \beta \chi_m^j \mu(\theta) \|\tilde{x}_0(0)\| + \frac{\beta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \sum_{k=0}^{j-1} \chi_m^k \|r_{j-k}(0)\| \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'on récupère l'expression de  $\rho_j$  donnée par (5.36).

Maintenant, nous allons obtenir l'expression explicite de  $M_j$ . En effet, d'après l'équation (5.76), nous avons :

$$\begin{aligned} M_j &= \beta e^{-\bar{a}j \frac{\tau}{m}} M_0 + \beta \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^j e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}} + \eta \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^j e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}} M_i \\ &= \beta e^{-\bar{a}j \frac{\tau}{m}} M_0 + \beta \frac{\tau}{m} + \eta \frac{\tau}{m} + \beta \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}} + \eta \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}} M_i \end{aligned} \quad (5.85)$$

En réécrivant l'équation récursive ci-dessus (5.85) pour le rang  $j - 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} M_{j-1} &= \beta e^{-\bar{a}(j-1) \frac{\tau}{m}} M_0 + \beta \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-1-i) \frac{\tau}{m}} + \eta \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-1-i) \frac{\tau}{m}} M_i \\ &= e^{\bar{a} \frac{\tau}{m}} \left( \beta e^{-\bar{a}(j) \frac{\tau}{m}} M_0 + \beta \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}} + \eta \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^{j-1} e^{-\bar{a}(j-i) \frac{\tau}{m}} M_i \right) \end{aligned} \quad (5.86)$$

À partir de (5.85) et (5.86), on obtient :

$$M_j - e^{-\bar{a} \frac{\tau}{m}} M_{j-1} = \beta \frac{\tau}{m} + \eta \frac{\tau}{m} M_j \quad (5.87)$$

## Chapitre 5.

ou de façon équivalente :

$$M_j = \frac{e^{-\bar{a}_m \frac{\tau}{m}}}{1 - \eta_m \frac{\tau}{m}} M_{j-1} + \frac{\beta_m \frac{\tau}{m}}{1 - \eta_m \frac{\tau}{m}} = \chi_m M_{j-1} + \frac{\beta_m \frac{\tau}{m}}{1 - \eta_m \frac{\tau}{m}} \quad (5.88)$$

Selon (5.88),  $M_j$  peut s'exprimer comme suit :

$$M_j = \chi_m^{j-1} M_1 + \frac{\beta_m \frac{\tau}{m}}{1 - \eta_m \frac{\tau}{m}} \sum_{i=1}^{j-1} \chi_m^i \quad (5.89)$$

En remplaçant, dans (5.89),  $M_1$  par son expression donnée par (5.63), nous obtenons :

$$\begin{aligned} M_j &= \beta \chi_m^j M_0 + \frac{\beta_m \frac{\tau}{m}}{1 - \eta_m \frac{\tau}{m}} + \frac{\beta_m \frac{\tau}{m}}{1 - \eta_m \frac{\tau}{m}} \sum_{i=1}^{j-1} \chi_m^i \\ &= \beta \chi_m^j M_0 + \frac{\beta_m \frac{\tau}{m}}{1 - \eta_m \frac{\tau}{m}} \sum_{i=0}^{j-1} \chi_m^i \\ &= \beta \chi_m^j \frac{M}{\theta} + \frac{\beta_m \frac{\tau}{m}}{1 - \eta_m \frac{\tau}{m}} \sum_{i=0}^{j-1} \chi_m^i \end{aligned} \quad (5.90)$$

et l'on a bien l'expression de  $M_j$  donnée par (5.37). Ceci termine la preuve du Théorème 5.3.1.

## 5.4 Synthèse d'un observateur pour des sorties échantillonnées et retardées

Nous nous concentrons d'abord sur le cas sans retard, c'est-à-dire ( $y_\tau(t_k) = y(t_k)$ ). Dans ce cas, un observateur à grand-gain a été proposé pour le système (5.1) dans [Bouraoui *et al.*, 2015]. L'équation de l'observateur proposé peut s'écrire, comme suit :

$$\dot{\hat{x}}_j(t) = A\hat{x}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{x}_j(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} K e^{k_1 \theta (t-t_k)} (C\hat{x}(t_k) - y(t_k)) \quad (5.91)$$

où  $K = [k_1 I_p, \dots, k_q I_p]^T$ ,  $k_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, q$ , est un vecteur constant et est choisi de telle sorte que la matrice  $\tilde{A} \triangleq A - KC$  soit Hurwitz et  $\Delta_\theta$  est donnée par (5.7) avec  $\theta$  un paramètre de synthèse. Notez qu'étant donné que la matrice  $\bar{A}$  est Hurwitz, il existe une matrice SDP  $P$  de taille  $n \times n$  et un réel positif  $\nu$  tel que :

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P \leq -\nu I_n \quad (5.92)$$

#### 5.4. Synthèse d'un observateur pour des sorties échantillonnées et retardées

où la matrice  $P$  est bornée par  $\lambda_{\min}(P)$  et  $\lambda_{\max}(P)$ , les bornes inférieure et supérieure, respectivement.

Nous devons respecter la condition suivante : la borne supérieure de la période d'échantillonnage maximale,  $\Delta_M$ , doit être assez petite. Elle doit, en effet, satisfaire la condition suivante :

$$\Delta_M \chi(\theta) < 1 \quad (5.93)$$

avec

$$\chi(\theta) = \frac{\nu \sqrt{\lambda_{\min}(P)}}{2(L_\varphi + \theta) \|K\| \lambda_{\max}(P)^{3/2}} \quad (5.94)$$

où  $\lambda_{\min}(P)$  et  $\lambda_{\max}(P)$  désignent la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice  $P$  et la constante  $\nu$  est donnée par (5.92),  $K$  est le gain de l'observateur (5.91) et  $L_\varphi$  est la constante de Lipschitz des non linéarités  $\varphi$  du système. L'erreur d'estimation sous-jacente satisfait l'inégalité suivante :

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \mu(\theta) e^{-\eta_\theta(\Delta_M)t} \|\hat{x}(0) - x(0)\| + N_\theta(\Delta_m, \Delta_M) \frac{\delta_\varepsilon}{\theta} \quad (5.95)$$

avec

$$\eta_\theta(\Delta_M) = a_\theta e^{-a_\theta \Delta_M} - \frac{1 - e^{-a_\theta \Delta_M}}{\chi_\theta} \quad (5.96)$$

$$N_\theta(\Delta_M, \Delta_m) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \theta \Delta_M \left( \frac{2 - e^{-\eta_\theta(\Delta_M)\Delta_m}}{1 - e^{-\eta_\theta(\Delta_M)\Delta_m}} \right) \quad (5.97)$$

où

$$a_\theta = \frac{v\theta}{2\lambda_M}$$

et  $\mu(\theta)$  est défini comme dans (5.8),  $\Delta_m$  et  $\Delta_M$  respectivement désignent la plus petite et la plus grande valeur de la période d'échantillonnage données par (5.3).

L'inégalité (5.95), ci-dessus, doit être comparée avec sa contrepartie (5.8) correspondant au cas de mesures de la sortie disponibles en temps continu. En effet, les deux inégalités sont très similaires avec comme différence que  $\lambda(\theta)$  et  $M$  dans (5.95) sont respectivement remplacées par  $\eta_\theta(\Delta_M)$  et  $N_\theta(\Delta_m, \Delta_M)$  dans (5.8). Il a été montré dans [Bouraoui *et al.*, 2015] que si la période d'échantillonnage est constante, i.e.  $\Delta_m = \Delta_M = T_s$ , alors



Chapitre 5.

$\eta_\theta(T_s)$  et  $N_\theta(T_s)$  sont des fonctions décroissantes de  $T_s$  et nous avons :

$$\lim_{T_s \rightarrow 0} \eta_\theta(T_s) = \lambda(\theta) \quad \text{et} \quad \lim_{T_s \rightarrow 0} N_\theta(T_s) = M$$

Cela signifie que la borne de l'erreur d'estimation dans le cas de la sortie échantillonnée donnée par (5.97) tend vers celle correspondant à la sortie disponible en temps continu et donnée par (5.8).

Les développements ci-dessus suggèrent que la structure de l'observateur en cascade continu-discrète doit être similaire à l'observateur (5.32) avec la différence que le premier observateur qui constitue la tête de la cascade dans (5.32) doit être remplacé par un observateur continu-discret qui fournit des estimations en temps continu de l'état du système, c'est-à-dire  $x(t - \tau)$  à partir des sorties disponibles aux instants d'échantillonnage  $t_k$ . Les prédicteurs restants dans l'observateur en cascade continu-discret ont la même structure que ceux de (5.32). En effet, les équations de l'observateur en cascade continu-discret sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{z}}_j(t) = A\hat{z}_j(t) + \varphi(u_j(t), \hat{z}_j(t)) - H_j(t), \quad j = 0, \dots, m \\ H_0(t) = \theta \Delta_\theta^{-1} K e^{-k_1 \theta(t-t_k)} (C\hat{z}_0(t_k) - y_\tau(t_k)) \quad \text{pour } t \in (t_k, t_{k+1}[ \\ H_j(t) = e^{\bar{A} \frac{\tau}{m}} \left( H_{j-1}(t) + (A - \bar{A}) \left( \hat{z}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) - \hat{z}_{j-1}(t) \right) \right. \\ \quad \left. + \varphi \left( u_{j-1}, \hat{z}_j \left( t - \frac{\tau}{m} \right) \right) - \varphi(u_{j-1}, z_{j-1}(t)) \right) \quad \text{pour } j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (5.98)$$

où la matrice  $\bar{A}$  est Hurwitz, le vecteur  $K = [k_1 I_p, \dots, k_q I_p]$  est pris de telle sorte que  $A - KC$  soit Hurwitz,  $\Delta_\theta$  est la matrice diagonale donnée par (5.7) et  $\theta \geq 1$  est un paramètre de synthèse. La borne supérieure de la période d'échantillonnage maximale,  $\Delta_M$ , doit être assez petite et en particulier satisfaire la condition (5.93).

La borne de l'erreur d'estimation  $\tilde{z}_0(t) = \hat{z}_0(t) - x_0(t)$  satisfait une inégalité similaire à (5.95). Plus précisément, si la période d'échantillonnage est assez petite et en particulier satisfait (5.93), alors nous avons

$$\|\hat{z}_0(t) - x_0(t)\| \leq \mu(\theta) e^{-\eta_\theta(\Delta_M)t} \|\hat{z}_0(0) - x_0(0)\| + N_\theta(\Delta_m, \Delta_M) \frac{\delta_\varepsilon}{\theta} \quad (5.99)$$

où  $\mu(\theta) > 0$  est le même que dans (5.8) et  $\eta_\theta$  et  $N_\theta(\Delta_m, \Delta_M)$  sont respectivement donnés par (5.96) et (5.97). Les bornes des erreurs d'estimation  $\tilde{z}_j(t) - x_j(t)$  sont similaires à celles obtenues dans le théorème 5.3.1 dans le cas d'une sortie continue, avec comme différence que les termes  $\lambda(\theta)$  et  $M$  intervenant dans l'expression de  $\rho_j$  et  $M_j$  (les équations (5.36) et (5.37)) doivent être remplacés par  $\eta_\theta(\Delta_M)$  et  $N_\theta(\Delta_m, \Delta_M)$ , res-

#### 5.4. Synthèse d'un observateur pour des sorties échantillonnées et retardées

pectivement. À des fins de clarté, les principales propriétés de l'observateur en cascade continu-discret sont résumées dans le théorème suivant dont la preuve est directe (selon les développements ci-dessus).

**Theorème 5.4.1.** *Considérons le système(5.1) soumis aux hypothèses 5.2.1-5.2.2-5.2.3. Alors, il existe une constante  $\theta_0$  telle que, pour chaque  $\theta > \theta_0$ , si,*

- *La borne supérieur de la période d'échantillonnage maximale  $\Delta_M$  satisfait*

$$\Delta_M \chi(\theta) < 1 \quad (5.100)$$

avec

$$\chi(\theta) = \frac{\nu \sqrt{\lambda_{\min}(P)}}{2(L_\varphi + \theta) \|K\| \lambda_{\max}(P)^{3/2}} \quad (5.101)$$

où  $\lambda_{\max}(P)$  et  $\lambda_{\min}(P)$  désignent la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice  $P$  et la constante  $\nu$  est donnée par (5.92),  $K$  est le gain de l'observateur (5.91) et  $L_\varphi$  est la constante de Lipschitz des non linéarités  $\varphi$  du système.

- *La matrice  $\bar{A}$  est choisie telle que  $\bar{a} \leq \eta_\theta(\Delta_M)$  où  $\bar{a}$  et  $\eta_\theta$  sont respectivement données par (5.31) et (5.96).*

- *Le nombre  $m$  de systèmes dans la cascade est choisi tel que*

$$\eta \frac{\tau}{m} < 1 \quad (5.102)$$

où  $\eta$  est donné par (5.34).

Alors, nous avons pour  $j = 1, \dots, m$

$$\|\tilde{z}_j(t)\| \triangleq \|\hat{z}_j(t) - x_j(t)\| \leq \bar{\rho}_j e^{-\bar{a}t} + \bar{M}_j \delta_\varepsilon \quad t \geq 0 \quad (5.103)$$

où

$$\bar{\rho}_j = \frac{\eta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \int_{-\frac{\tau}{m}}^0 \|\tilde{z}_j(s)\| ds + \beta \chi_m^j \mu(\theta) \|\tilde{z}_0(0)\| + \frac{\beta}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \sum_{k=0}^{j-1} \chi_m^k \|r_{j-k}(0)\| \quad (5.104)$$

$$\bar{M}_j = \beta \chi_m^j \frac{N(\Delta_m, \Delta_M)}{\theta} + \frac{\beta \frac{\tau}{m}}{1 - \eta \frac{\tau}{m}} \sum_{k=0}^{j-1} \chi_m^k \quad (5.105)$$

où les fonctions  $r_k$ ,  $k = 1, \dots, q$ , sont régies par (5.30),  $\mu(\theta)$  est donné par (5.22),  $\delta_\varepsilon$  est la borne essentielle supérieur des incertitudes comme indiqué dans l'hypothèse 5.2.3 et les expressions  $\chi_m$ ,  $\eta_\theta$  et  $N_\theta$  sont données par (5.38), (5.96) et (5.97), respectivement.

## 5.5 Exemples

Dans cette section, les performances de l'observateur continu-discret en cascade sont illustrées en simulation à travers un exemple académique ainsi qu'à travers un modèle du bioréacteur.

### 5.5.1 Application à un exemple académique

Considérons le système dynamique suivant [Farza *et al.*, 2015b, Germani *et al.*, 2002] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t)x_1(t) + \epsilon(t) \\ y_\tau(t_k) &= Cx(t_k - \tau) = x_1(t_k - \tau) \end{cases} \quad (5.106)$$

où le vecteur d'état est  $x = [(x^1)^T (x^2)^T]^T \in \mathbb{R}^2$ , et les variables  $x^1 = x_1 \in \mathbb{R}$ , et  $x^2 = x_2 \in \mathbb{R}$ ;  $y_\tau(t_k)$  désigne la sortie échantillonnée et retardée,  $u(t)$  représente l'entrée du système et  $\epsilon(t)$  est le terme incertain inconnu. D'après (5.106), on peut écrire la matrice  $A$  et le vecteur non linéaire  $\varphi(u, x)$ , comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 + ux_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (5.107)$$

Il est évident que le système (5.106) est sous la forme (5.1). Donc, notre objectif est de fournir une estimation de l'état réel  $x^1(t)$  et  $x^2(t)$  à partir de la sortie échantillonnée et retardée  $x^1(t_k - \tau)$ .

Les simulations du système non linéaire (5.106) ont été effectuées avec comme conditions initiales et comme entrée :

$$\begin{aligned} u(t) &= 0.01 \sin(0.1t) \\ x(0) &= [0.5 \ 0.5]^T \end{aligned}$$

alors que l'observateur en cascade a été initialisé comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{x}_j(s) &= [-0.5 \ -0.5]^T, \quad j = 0, s \in [-\tau/m, 0] \\ \hat{x}_j(s) &= 0_{2 \times 1}, \quad j = 1, \dots, m, s \in [-\tau/m, 0] \end{aligned}$$

L'expression du terme incertain inconnu  $\epsilon$  a été prise comme suit :

$$\epsilon(t) = 0.5 \tanh(x^1(t)x^2(t)) \quad (5.108)$$

Un observateur continu-discret en cascade de la forme (5.98) a été synthétisé. cet observateur ne connaît bien sûr pas l'expression du terme incertain donné par (5.108).

Dans toutes les simulations, la valeur de la période d'échantillonnage est prise constante et égale à  $0.5s$ . De même pour les valeurs des paramètres de synthèse de l'observateur continu-discret en tête de la cascade, qui ont été prises égales à  $\theta = 4$  et  $K = [2 \ 1]^T$ .

La matrice Hurwitz  $\bar{A}$  a été choisie comme suit

$$\bar{A} = A - \lambda I_n$$

où  $A$  est, comme dans (5.107), la matrice anti-décalage  $2 \times 2$  et  $\lambda > 0$  est un réel positif.

Deux valeurs du retard ont été considérées :  $1sec$  et  $10sec$ . Les premiers résultats sont reportés sur la figure 5.1. L'estimation de  $x^1(t)$  et  $x^2(t)$  fournies par l'observateur sont comparées avec leur évolution respective en temps issues la simulation du système (5.106). Ces résultats correspondent à  $\tau = 1$  tandis que les valeurs de  $\lambda$  et  $m$  ont été fixées  $0.5$  et  $1$ , respectivement. Il est clair que les estimations convergent rapidement vers les états du système.

Afin de mettre en avant l'influence du paramètre  $\lambda$  (ou de façon équivalente, les valeurs propres de  $\bar{A}$ ) sur la vitesse de convergence de l'erreur d'observation, d'autres valeurs de  $\lambda$  ont été considérées. En effet, les valeurs suivantes pour  $\lambda$  ont été considérées  $\{0.01, 0.1, 0.5\}$ , tandis que les paramètres de synthèse de l'observateur sont maintenus constants :  $m = 1$ ,  $\theta = 4$  et  $K = [2 \ 1]^T$ . Les résultats obtenus sont reportés sur la figure 5.2 et montrent clairement que la vitesse de convergence vers l'état réel décroît quand les valeurs propres deviennent petites. Remarquez que des valeurs relativement élevées pour  $\lambda$  doivent être évitées car elles donnent lieu à des valeurs élevées pour  $\|A - \bar{A}\|$  et par conséquent la condition (5.102) peut être violée si  $m$  n'est pas augmenté.

D'autres simulations ont été effectuées afin d'apprécier les performances de l'observateur en cascade en présence de retards relativement. Ces résultats sont présentés sur les figures 5.3-5.4. Ces simulations mettent en évidence le fait qu'une augmentation du nombre de sous-systèmes  $m$  fournit une meilleure estimation de l'état. Sur la Figure

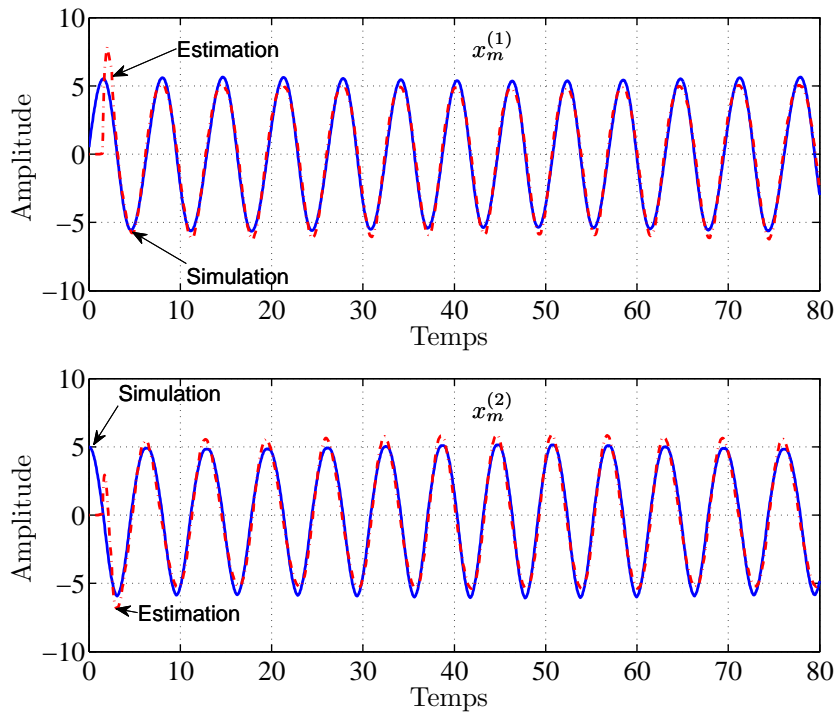


FIGURE 5.1 – Estimation de l'état  $x(t)$  avec  $\theta = 4$ ,  $\Delta_k = 0.5$ ,  $\tau = 1$ ,  $m = 2$  et  $\lambda = 0.5$

5.5, les erreurs obtenues avec  $\tau = 10$  pour deux longueurs de cascade  $m$  :  $m = 8$  et  $m = 15$ , sont présentées. Les résultats obtenus montrent clairement que l'amplitude de la borne ultime décroît quand  $m$  augmente comme le stipule le point (ii) de la Proposition 5.3.1. D'autres valeurs de  $m$  plus grandes que 15 ont été considérées mais ne donnent pas lieu à une réduction significative de la borne ultime.

### 5.5.2 Application à un bioréacteur typique

Dans cet exemple, nous illustrons les performances de l'observateur en cascade à travers un bioréacteur infiniment mélangé où tient lieu une culture microbienne une biomasse  $x_1$  et un substrat  $x_2$ . Le bioréacteur fonctionne en mode continu avec un taux de dilution  $u(t)$  et une concentration d'alimentation en substrat  $s_{in}(t)$ . Le modèle mathématique dynamique du processus est constitué par les deux équations de bilan de matière associées à  $x_1$  et  $x_2$  et qui s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = r(t) - u(t)x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -kr(t) + u(t)(s_{in}(t) - x_2(t)) \end{cases} \quad (5.109)$$

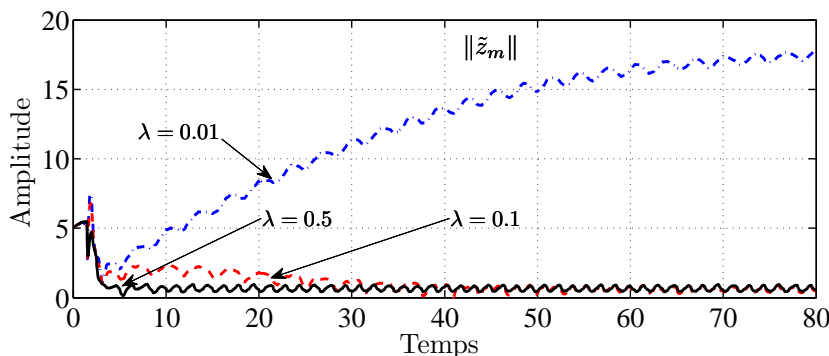


FIGURE 5.2 – Norme de l’erreur d’observation  $\|\tilde{z}_m(t)\|$  avec  $m = 2$  (pour  $\Delta_k = 0.5$  et  $\tau = 1$ , avec  $\theta = 4$ )

où  $x_1$  et  $x_2$  désignent les concentrations en biomasse et en substrat, respectivement,  $r$  est la vitesse de réaction et  $k$  est un coefficient de rendement. La vitesse de réaction  $r$  est généralement une fonction très complexe des conditions opératoires et de l’état du processus. La modélisation analytique de cette fonctions est souvent difficile et constitue encore le sujet d’investigations approfondies et intenses. Pour faire face à ce problème, cette fonction est traitée comme un paramètre variant dans le temps. En utilisant une telle stratégie, les bio-ingénieurs ne sont pas obligés de choisir un modèle particulier parmi les nombreux décrits dans la littérature [Bailey and Ollis, 1986].

Les mesures de la concentration de la biomasse sont supposées être disponibles aux instants d’échantillonnage avec un retard  $\tau$  sur la sortie. L’objectif est d’estimer la concentration de la biomasse réelle ainsi que l’évolution dans le temps de  $r$  à partir des mesures retardées disponibles. Cet objectif est atteint en utilisant une synthèse d’observateur en cascade, en considérant le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= r(t) - u(t)x_1(t) \\ \dot{r}(t) &= \varepsilon(t) \\ y_\tau(t_k) &= x_1(t_k - \tau) \end{cases} \quad (5.110)$$

où  $\varepsilon$  est une fonction bornée et inconnue. Donc, nous écrivons la matrice  $A$  et la fonction non linéaire  $\varphi$ , comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, x) = \begin{pmatrix} -ux_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (5.111)$$

Il est clair que le système (5.110) est sous la forme (5.1) et par conséquent un observa-

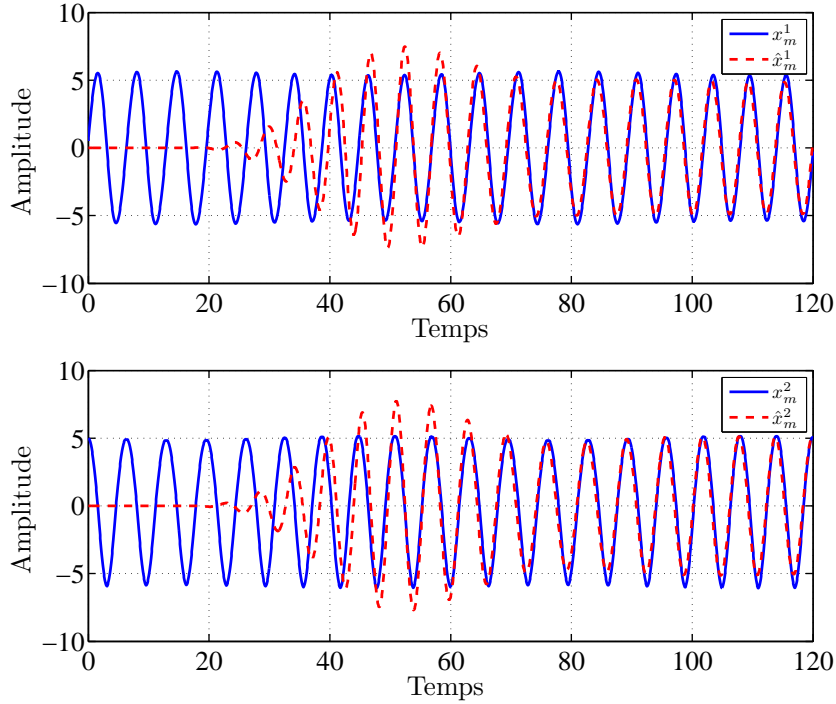


FIGURE 5.3 – Estimation de  $x^1$  et  $x^2$  avec  $\theta = 4$ ,  $\Delta_k = 0.5$ ,  $\tau = 10$  et  $m = 8$

teur en cascade de la forme (5.98) peut être utilisé pour obtenir l'objectif d'estimation.

À des fins de simulation et afin de générer les mesure échantillonnées et retardées de la biomasse  $x_1$  et  $r$ , nous avons choisi l'expression suivante pour la vitesse de réaction [Farza *et al.*, 1998] :

$$r = \frac{\mu_{max} x_1 x_2}{\left(K_S + x_2 + \frac{x_2^2}{K_I}\right)} \quad (5.112)$$

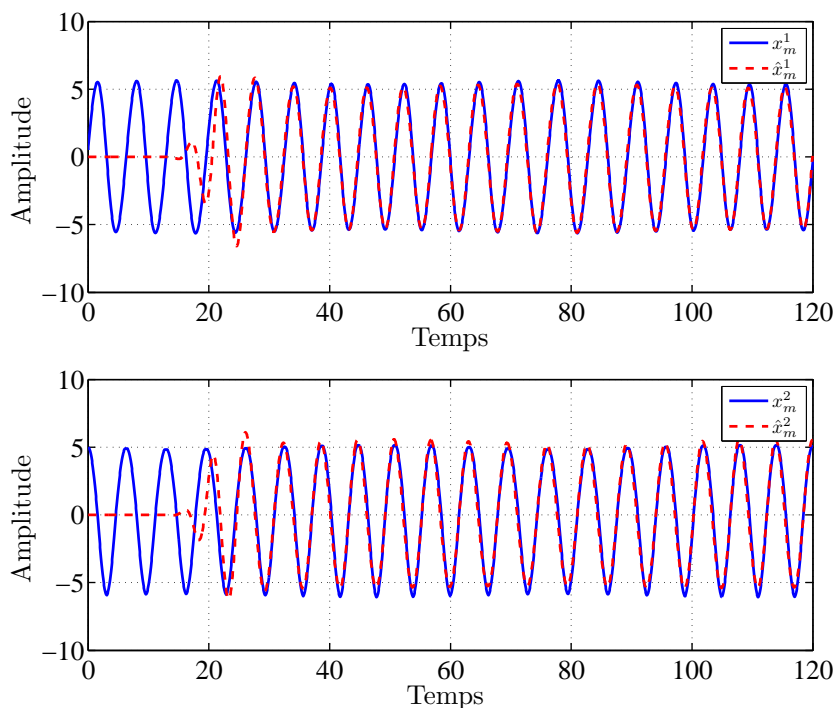
où les paramètres cinétiques sont donnés par :

$$\mu_{max} = 0.3 \text{ h}^{-1}, \quad K_S = 3 \text{ g.l}^{-1}, \quad K_I = 50 \text{ (g.l}^{-1}\text{)}^2, \quad S_{in} = 15 \text{ g.l}^{-1}$$

Les simulations ont été effectuées en utilisant les conditions initiales suivantes :

$$X(0) = 2.6 \text{ g.l}^{-1}, \quad S(0) = 10 \text{ g.l}^{-1}, \quad \hat{X}(0) = 0_{2 \times 1}$$

Le taux de dilution varie comme un signal trapézoïdal de  $0.1$  à  $0.2 \text{ l.h}^{-1}$ , comme le montre la Figure 5.6. Rappelons que l'expression de la réaction donnée par (5.112) a été introduite pour générer les pseudo-mesures et elle n'est pas connue par l'observateur.

FIGURE 5.4 – Estimation de  $x^1$  et  $x^2$  avec  $\theta = 4$ ,  $\Delta_k = 0.5$ ,  $\tau = 10$  et  $m = 15$ 

Trois résultats différents sont donnés. Le premier correspond à un retard relativement petit, i.e.  $\tau = 1h$  tandis que les deux autres sont obtenus avec  $\tau = 3h$  et  $\tau = 8h$ , respectivement. Pour la période d'échantillonnage, elle a été prise constante et égale à  $0.5h$  dans toutes les simulations.

Les estimations de la concentration en biomasse et de l'évolution dans le temps de la vitesse de réaction sont données sur les Figures 5.7-5.8-5.9, où elles sont comparées aux vraies valeurs issues de la simulation du modèle du bioréacteur (5.109) avec  $r$  comme spécifié par (5.112).

Dans la première simulation, les valeurs des paramètres de synthèse de l'observateur sont les suivantes :  $K^T = [1 \ 0.25]$ ,  $\theta = 2$ ,  $m = 2$  et  $\bar{A} = A - 0.5I_2$ . Sur la Figure 5.7, nous avons comparé les estimées délivrées par de l'observateur proposé avec celles issues d'un observateur de type grand gain ([Farza *et al.*, 2004]) où le retard sur la sortie est négligé. Nous remarquons que même si l'amplitude du retard considéré est relativement petite, l'estimation fournie par l'observateur en cascade est plus précise que celle obtenue en négligeant le retard.



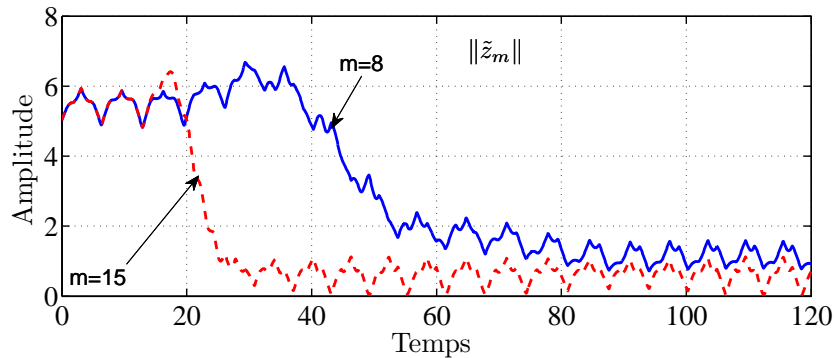


FIGURE 5.5 – Norme de l'erreur d'observation  $\|\tilde{z}_m(t)\|$  avec  $m = 2$  (pour  $\Delta_k = 0.5$  et  $\tau = 1$ , avec  $\theta = 4$ )

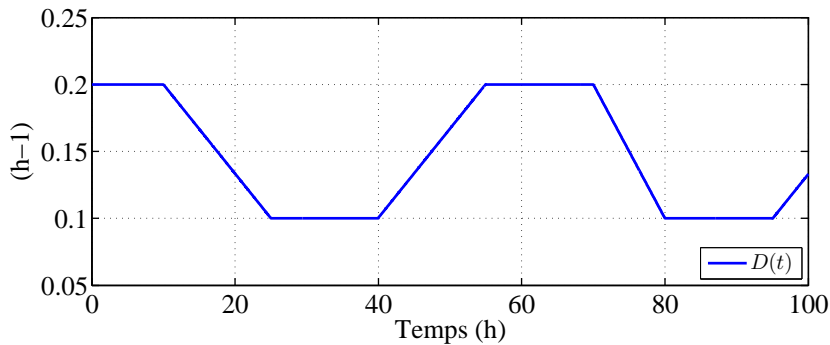
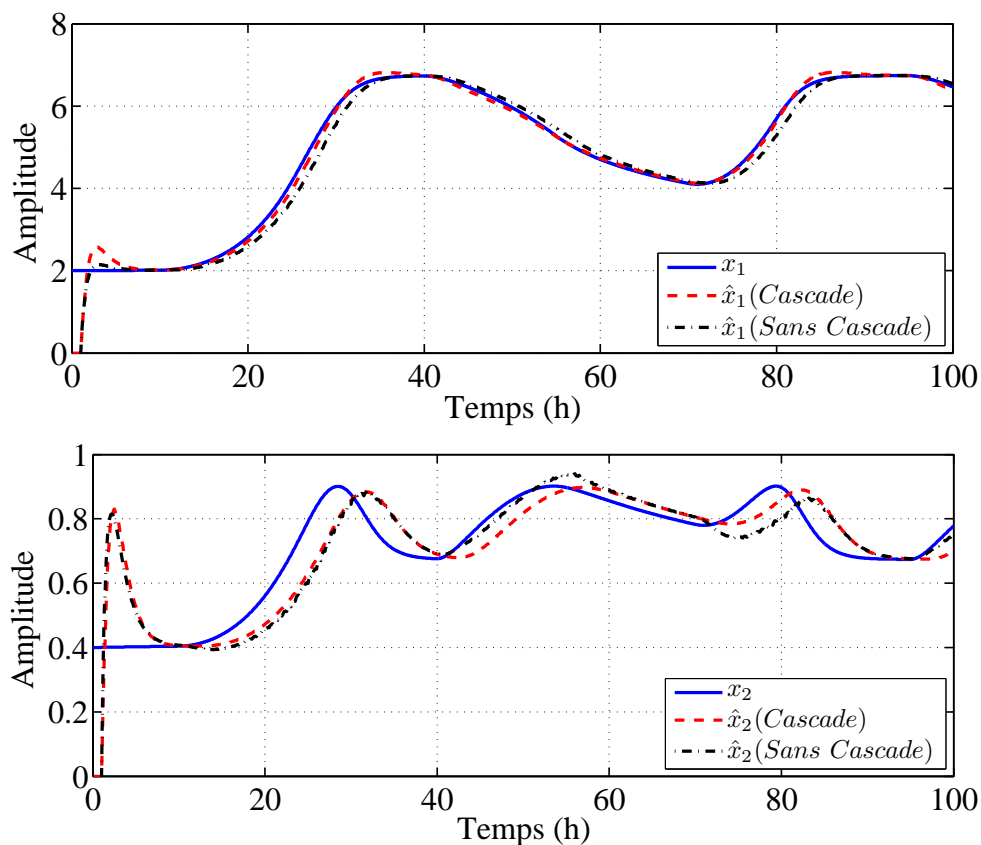


FIGURE 5.6 – Évolution du taux de dilution

L'observateur a été ensuite utilisé avec des retards plus importants. En effet, des simulations ont été effectuées avec  $\tau = 3h$  et  $\tau = 8h$ . Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 5.8 et 5.9. Les valeurs des paramètres de synthèse de l'observateur ont été fixées à  $K^T = [1 \ 0.25]$ ,  $\theta = 2$  et  $\bar{A} = A - 0.5I_2$ . Les valeurs de  $m$  ont été fixées à  $m = 6$  pour  $\tau = 3h$  et à  $m = 12$  pour  $\tau = 8h$ . Nous remarquons que l'erreur d'observation croît avec la valeur de  $m$  et que dans tous les cas, les estimations fournies sont plus précises que celles obtenues en négligeant le retard.

## 5.6 Conclusion

Un observateur en cascade a été proposé pour estimer l'état d'un système incertain à partir de la sortie échantillonnée et retardée. Il a été montré qu'en présence d'incertitudes, l'erreur d'estimation reste dans une boule dont le rayon est proportionnel à la borne des incertitudes et au produit du retard avec la constante de Lipschitz du

FIGURE 5.7 – Estimations de  $x_1$  et  $r$  avec  $\Delta_k = 0.5h$ ,  $\tau = 1h$  et  $m = 2$ 

ystème. Ces résultats ont été présentés en conférence dans [Hernández-González *et al.*, 2016c, Farza *et al.*, 2016] et soumis en revue dans Automatica [Farza *et al.*, Submitted 2016]. Les performances de l'observateur ont été illustrées à travers un exemple académique ainsi qu'à travers un exemple typique de bioréacteur.

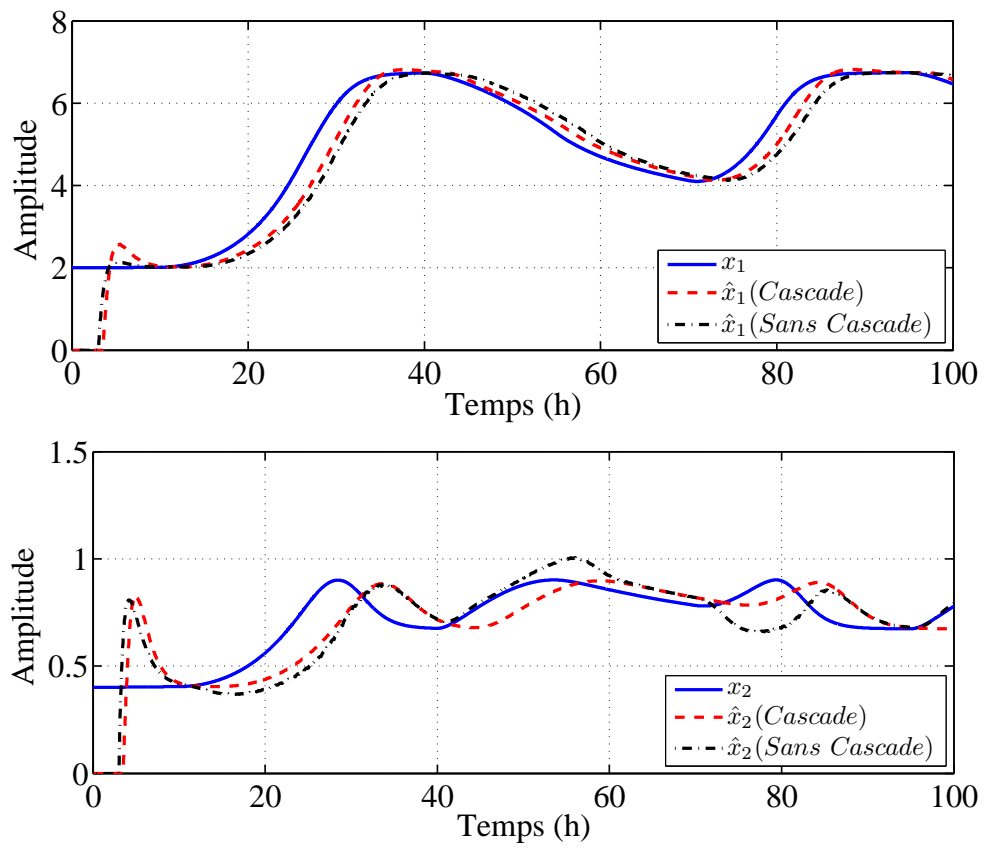


FIGURE 5.8 – Estimation de  $x_1$  et  $r$  avec  $\Delta_k = 0.5h$ ,  $\tau = 3h$  et  $m = 6$

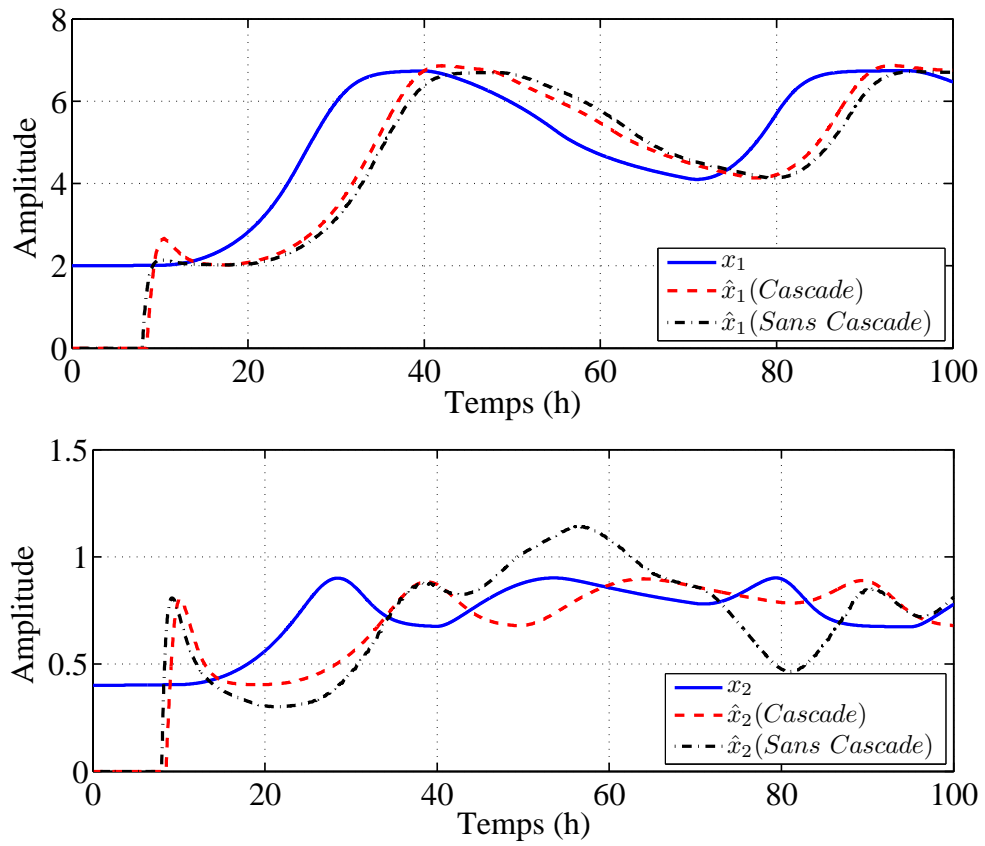


FIGURE 5.9 – Estimation de  $x_1$  et  $r$  avec  $\Delta_k = 0.5h$ ,  $\tau = 8h$  et  $m = 12$

*Chapitre 5.*

# Chapitre 6

## Conclusion générale

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la synthèse d'observateurs pour des systèmes non linéaires en utilisant une approche de type grand-gain. Plusieurs contraintes ont été considérées : l'échantillonnage et le retard de la sortie, ainsi que des incertitudes dans la dynamique du système.

La première contribution est présentée dans le chapitre 2, où un observateur avec une structure simple est proposé pour une classe générale de systèmes non linéaire non uniformément observables. Ce résultat s'appuie en particulier sur la formulation d'une nouvelle condition d'excitation persistante caractérisant les entrées du système et permettant de garantir une convergence exponentielle de l'erreur d'observation. Nous avons ensuite considéré une classe de systèmes non linéaires uniformément observables comportant des incertitudes et nous avons rappelé les principales étapes de la synthèse d'un observateur de type grand gain proposé dans [Farza *et al.*, 2004] pour cette classe de systèmes. En particulier, il a été établi qu'en l'absence d'incertitudes, l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro. En présence d'incertitudes, l'erreur asymptotique d'observation reste confinée dans une boule centrée sur l'origine et dont le rayon peut-être rendu aussi petit que désiré par un choix approprié d'un paramètre de synthèse de l'observateur. Les deux classes de systèmes présentés dans ce chapitre ainsi que les observateurs associés ont été reconsidérés dans les chapitres suivants pour prendre en compte les processus d'échantillonnage et la présence du retard qui peuvent affecter la sortie.

En effet, la classe de systèmes non uniformément observables a été reconsidérée au chapitre 3 où la sortie a été supposée disponible simplement à certains instants échantillonnages qui ne sont pas nécessairement équidistants. La synthèse de l'observateur présenté au chapitre 2 pour cette classe de système a été reconsidéré pour prendre en

## Chapitre 6. Conclusion générale

compte le processus d'échantillonnage. Cette re-synthèse a donné lieu à un observateur continu-discret qui permet de délivrer des estimations continues de l'état du système à partir des mesures échantillonnées de la sortie. Il a été montré que cet observateur hérite des propriétés de l'observateur avec des sorties temps continu tant que la borne supérieure de la période d'échantillonnage reste inférieure à un certain seuil qui a été explicitement donné et qui dépend en particulier des paramètres du système (dimension du système, constante de Lipschitz) ainsi que du gain de l'observateur. Comme l'on pouvait s'y attendre, la décroissance exponentielle de l'erreur d'observation est d'autant plus lente que la période d'échantillonnage est grande. De même, le rayon de la boule au sein de laquelle demeure l'erreur d'observation est une fonction croissante de la période d'échantillonnage. Enfin, la vitesse de décroissance ainsi que le rayon de la boule tendent vers leur valeur correspondant au cas des sorties continues lorsque la période d'échantillonnage tend vers zéro.

Au chapitre 4, la classe de systèmes non uniformément observables a été de nouveau reconsidérée et la sortie a été supposée toujours échantillonnée mais aussi disponible avec un retard constant,  $\tau$ , arbitrairement grand. Un observateur en cascade a alors été proposé pour l'estimation de l'état instantané du système à partir de la sortie échantillonnée retardée. La cascade comporte  $m + 1$  systèmes dynamiques dont la dimension de chacun est égale à celle du système original. Le premier système de la cascade est un observateur continu-discret similaire à celui présenté au chapitre 3. Il permet l'estimation de tout l'état retardé du système. Chacun des  $m$  autres systèmes de la cascade est un prédicteur qui prédit l'état du système le précédant dans la cascade sur un horizon de prédiction égal à  $\tau/m$  de sorte que l'état du dernier système de la cascade constitue une estimation de l'état instantané du système. La convergence exponentielle de l'observateur en cascade a été établie sous des conditions bien établies, en particulier il faut d'une part que la borne supérieure de la période d'échantillonnage reste inférieure à un certain seuil qui a été explicitement donné et d'autre part la longueur de la cascade,  $m$  devrait satisfaire à une inégalité faisant intervenir l'amplitude du retard considérée ainsi que la constante de Lipschitz des non linéarités.

Dans le chapitre 5, la classe de systèmes uniformément observables et comportant des incertitudes qui a été présentée au chapitre 2 avec un observateur de type grand gain a été reconsidérée pour prendre en compte la présence d'un retard sur la sortie. Deux cas ont alors été considérées selon que la sortie est disponible en temps continu (avec un retard) ou selon qu'elle soit échantillonnée et retardée. Un observateur en cascade a été présenté dans chaque cas et la convergence exponentielle de ces observateurs a été

établie en l'absence d'incertitudes. En présence d'incertitudes, il a été montré que l'erreur asymptotique des observateurs en cascade proposés reste confinée dans une boule centrée sur l'origine dont le rayon dépend en particulier de l'amplitude du retard considéré de la constante de Lipschitz des non linéarités).

La performance des différents observateurs présentés ont été illustrés à travers des exemples académiques ainsi que sur deux modèles associés à un moteur asynchrone et à un moteur Stirling à piston libre.

Compte tenu des différents aspects abordés dans cette thèse, plusieurs pistes sont possibles pour la poursuite de nos recherches. Nous pouvons en citer quelques unes :

1. Nous pensons qu'il est possible d'étendre l'analyse de l'effet des incertitudes considérées sur les système uniformément observables à des classes de systèmes plus larges, telles que les systèmes non uniformément observables présentés dans cette thèse.
2. Des travaux futurs impliqueront la synthèse de lois de commande utilisant 'un des observateurs proposés pour des classes de systèmes présentant un retard au niveau de la commande et/ou de la sortie.
3. Nous envisageons la validation expérimentale de certains des observateurs présentés sur banc de moteur Stirling à piston libre.



*Chapitre 6. Conclusion générale*

# Bibliographie

- [Ahmed, 2008] C. Ahmed. A nonlinear observer of estimating rotor flux in induction motor. In *Int. Conf. on Circuits, Systems, Electronics, control & Signal Processing, 2008*, pages 15–21, Canary Islands, Spain, 2008.
- [Ahrens and Khalil, 2009] J.H. Ahrens and H. Khalil. High-gain observer in the presence of measurement noise : A switched approach. *Automatica*, 45 :936–943, 2009.
- [Aksoy *et al.*, 2015] F. Aksoy, H. Karabulut, C. Çınar, H. Solmaz, Y. Önder Özgören, and A. Uyumaz. Thermal performance of a stirling engine powered by a solar simulator. *Applied Thermal Engineering*, 86 :161 – 167, 2015.
- [Alessandri and Rossi, 2015] A. Alessandri and A. Rossi. Increasing-gain observers for nonlinear systems : Stability and design. *Automatica*, 57 :180–188, 2015.
- [Andrieu and Praly, 2006] V. Andrieu and L. Praly. On the existence of Kazantzis-Kravaris/Luenberger observers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45 :432–456, 2006.
- [Arcak and Kokotović, 2001] M. Arcak and P. Kokotović. Nonlinear observers : a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 37 :1923–1930, 2001.
- [Astolfi and Marconi, 2015] D. Astolfi and L. Marconi. A high-gain nonlinear observer with limited gain power. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60 :3059–3064, 2015.
- [Bailey and Ollis, 1986] J.E. Bailey and D.F. Ollis. *Biochemical Engineering Fundamentals*. McGraw-Hill, New York, 1986.
- [Barth and Hofacker, 2009] E.-J. Barth and M. Hofacker. Dynamic modeling of a regenerator for the control-based design of free-piston stirling engines. In *Proceedings of 2009 NSF Engineering Research and Innovation Conference*, pages –, Hawaii, USA, 2009.
- [Beale, 1969] W. Beale. Free piston stirling-some model tests and simulation. In *International Automotive Engineering Congress*, pages 13–17, Detroit, USA, 1969.
- [Beltrán-Chacon *et al.*, 2015] R. Beltrán-Chacon, D. Leal-Chavez, D. Saucedo, M. Pellegrini-Cervantes, and M. Borunda. Design and analysis of a dead volume

## Bibliographie

- control for a solar stirling engine with induction generator. *Energy*, 93 :2593–2603, 2015.
- [Besançon and Ticlea, 2007] G. Besançon and A. Ticlea. An immersion-based observer design for rank-observable nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52 :83–88, 2007.
- [Besançon *et al.*, 1996] G. Besançon, G. Bornard, and H. Hammouri. Observer synthesis for a class of nonlinear control systems. *European Journal of Control*, 2(3) :176–192, 1996.
- [Besançon, 1999] G. Besançon. Further results on high gain observers for nonlinear systems. In *Decision and Control (CDC), 1999 38th IEEE Conference on*, pages 2904–2909, Arizona, USA, 1999.
- [Bodson *et al.*, 1994] M. Bodson, J. Chiasson, and R. Novotmak. High performance induction motor control via input-output linearization. *IEEE Control Systems Magazine*, 14(4) :25–33, 1994.
- [Boizot *et al.*, 2010] N. Boizot, E. Busvelle, and J.P. Gauthier. An adaptive high-gain observer for nonlinear systems. *Automatica*, 46 :1483–1488, 2010.
- [Boker and Khalil, 2013] A.M. Boker and H. Khalil. Nonlinear observers comprising high-gain observers and extended Kalman filters. *Automatica*, 49 :3583–3590, 2013.
- [Bornard *et al.*, 1993] G. Bornard, F. Celle, G. Dauphin-Tanguy, G. Gilles, J. Lottin, L. Pronzato, S. Scavarda, D. Thomasset, and E. Walter. *Systèmes non linéaires. 1. modélisation - estimation*, chapter Observabilité et observateurs, pages 177–221. Automatique. Masson, 1993.
- [Boucher *et al.*, 2007] J. Boucher, F. Lanzetta, and P. Nika. Optimization of a dual free piston stirling engine. *Applied Thermal Engineering*, 27 :802–811, 2007.
- [Bouraoui *et al.*, 2015] I. Bouraoui, M. Farza, T. Ménard, R.B. Abdennour, M. M’Saad, and H. Mosrati. Observer design for a class of uncertain nonlinear systems with sampled output sampled - application to the estimation of kinetic rates in bioreactors. *Automatica*, 55 :78–87, 2015.
- [Boutat *et al.*, 2009] D. Boutat, A. Benali, H. Hammouri, and K. Busawon. New algorithm for observer error linearization with a diffeomorphism on the outputs. *Automatica*, 45 :2187–2193, 2009.
- [Busawon *et al.*, 1998] K. Busawon, M. Farza, and H. Hammouri. A nonlinear observer for induction motors. *International Journal of Control*, 71 :405–418, 1998.
- [Cacace *et al.*, 2014] F. Cacace, A. Germani, and C. Manes. A chain observer for nonlinear systems with multiple time-varying measurements delays. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 52(3) :1862–1885, 2014.

- [Cai *et al.*, 2012] X. Cai, G. Lv, and W. Zhang. Stabilisation for a class of non-linear uncertain systems based on interval observers. *IET Control Theory Applications*, 6(13) :2057–2062, 2012.
- [Chiasson, 1993] J. Chiasson. Dynamic feedback linearization of the induction motor. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(10) :1588–1594, 1993.
- [Ciccarella *et al.*, 1993] G. Ciccarella, M. Dalla Mora, and A. Germani. A luenberger-like observer for nonlinear systems. *International Journal of Control*, 57(3) :537–556, 1993.
- [DeLeon *et al.*, 2000] J. DeLeon, A. Glumineau, and G. Schreier. Cascade nonlinear observer for induction motor. In *Decision and Control (CDC), 2000 39th IEEE Conference on*, pages 623–628, Alaska, USA, 2000.
- [Deza *et al.*, 1992] F. Deza, E. Busvelle, and J.P. Gauthier. Exponentially converging observers for distillation columns and internal stability of the dynamic output feedback. *Chemical Engineering Science*, 47(15/16), 1992.
- [Dinh *et al.*, 2016] T. N. Dinh, V. Andrieu, M. Nadri, and U. Serres. Continuous-discrete time observer design for lipschitz systems with sampled measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60 :787 – 792, 2016.
- [Dufour *et al.*, 2012] P. Dufour, S. Flila, and H. Hammouri. Observer design for MIMO non-uniformly observable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57 :511–516, 2012.
- [Efimov and Raïssi, 2016] D. Efimov and T. Raïssi. Design of interval observers for uncertain dynamical systems. *Automation and Remote Control*, 77(2) :191–225, 2016.
- [Farza *et al.*, 1998] M. Farza, K. Busawon, and H. Hammouri. Simple nonlinear observers for estimation of kinetic rates in bioreactors. *Automatica*, 34 :301–318, 1998.
- [Farza *et al.*, 2004] M. Farza, M. M’Saad, and L. Rossignol. Observer design for a class of MIMO nonlinear systems. *Automatica*, 40(1) :135–143, 2004.
- [Farza *et al.*, 2009] M. Farza, M. M’Saad, T. Maatoug, and M. Kamoun. Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems. *Automatica*, 45 :2292–2299, 2009.
- [Farza *et al.*, 2011] M. Farza, M. M’Saad, M. Triki, and T. Maatoug. High gain observer for a class of non-triangular systems. *Systems & Control Letters*, 60(1) :27–35, 2011.
- [Farza *et al.*, 2014] M. Farza, M. M’Saad, M. L. Fall, E. Pigeon, O. Gehan, and K. Busawon. Continuous-discrete time observers for a class of MIMO nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(4) :1060–1065, 2014.

## Bibliographie

- [Farza *et al.*, 2015a] M. Farza, T. Ménard, A. Ltaief, T. Maatoug, M. M'Saad, and Y. Koubaa. Extended high gain observer design for state and parameter estimation. In *2015 4th International Conference on Systems and Control (ICSC)*, pages 345–350, Sousse, Tunisia, April 2015.
- [Farza *et al.*, 2015b] M. Farza, M. M'Saad, T. Menard, M.L. Fall, O. Gehan, and E. Pigeon. Simple cascade observer for a class of nonlinear systems with long output delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(12) :3338–3343, 2015.
- [Farza *et al.*, 2016] M. Farza, Omar Hernández, T. Ménard, and Mohammed M'Saad. Cascade predictors design for a class of nonlinear uncertain systems with delayed state- application to bioreactor. In *2016 17th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)*, pages –, Dec 2016.
- [Farza *et al.*, Submitted 2016] M. Farza, O. Hernández-González, T. Ménard, B. Targui, M. M'Saad, and C.-M. Astorga-Zaragoza. Cascade observer design for a class of nonlinear uncertain systems with long delay and sampled output. *Automatica*, -(-) :-, Submitted 2016. Submitted Automatica.
- [Fliess *et al.*, 2008] M. Fliess, C. Join, and H. Sira-Ramirez. Nonlinear estimation is easy. *Int. J. Model. Ident. Control*, 4 :12–27, 2008.
- [Formosa, 2011] F. Formosa. Coupled thermodynamic-dynamic semi-analytical model of free piston stirling engines. *Energy Conversion and Management*, 52 :2098–2109, 2011.
- [Gauthier and Bornard, 1981] J.P. Gauthier and G. Bornard. Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 26 :922–926, 1981.
- [Gauthier and Hammouri, 1992] J.P. Gauthier and H. Hammouri. Global time-varying linearization up to output injection. *SIAM J. Control Optim.*, 30 :1295–1310, 1992.
- [Gauthier and Kupka, 1994] J.P. Gauthier and I.A.K. Kupka. Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM J. Control. Optim.*, 32 :975–994, 1994.
- [Gauthier and Kupka, 2001] J.P. Gauthier and I. Kupka. *Deterministic Observation Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2001.
- [Gauthier *et al.*, 1992] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems - application to bioreactors. *IEEE Trans. Auto. Control*, 37(6) :875–880, 1992.
- [Germani *et al.*, 2002] A. Germani, C. Manes, and P. Pepe. A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(1) :96–101, 2002.

- [Guay, 2002] M. Guay. Observer linearization by output-dependent time-scale transformations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :1730–1735, 2002.
- [Hammouri and Farza, 2003] H. Hammouri and M. Farza. Nonlinear observers for locally uniformly observable systems. *ESAIM : Control, optimisation and calculus of Variations*, 9 :353–370, 2003.
- [Hammouri *et al.*, 2010] H. Hammouri, G. Bornard, and K. Busawon. High gain observer for structured multi-output nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55 :987–992, 2010.
- [Hermann and Krener, 1977] Hermann and A.J. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 22 :728–740, 1977.
- [Hernández *et al.*, 2015] O. Hernández, T. Ménard, M. Farza, C. M. Astorga-Zaragoza, and G. V. Guerrero-Ramírez. High gain observer for a class of nonlinear systems with sampled measurements : Application to a free-piston stirling engine. In *2015 16th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)*, pages 805–810, Dec 2015.
- [Hernández-González *et al.*, 2016a] O. Hernández-González, M. Farza, T. Ménard, B. Targui, M. M’Saad, and C.-M. Astorga-Zaragoza. A cascade observer for a class of mimo non uniformly observable systems with delayed sampled outputs. *Systems & Control Letters*, 98 :86–96, 2016.
- [Hernández-González *et al.*, 2016b] O. Hernández-González, T. Ménard, M. Farza, B. Targui, C.-M. Astorga-Zaragoza, and G.V. Guerrero-Ramírez. Continuous-discrete time observer for a class of state affine nonlinear systems : application to an induction motor. *International Journal of Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering*, 10(1) :2072–2078, 2016. IJA-STA, Special Issue AND, Tunis, Tunisia.
- [Hernández-González *et al.*, 2016c] O. Hernández-González, T. Ménard, B. Targui, M. Farza, M. M’Saad, and C.-M. Astorga-Zaragoza. Cascade observer design for a class of nonlinear uncertain systems : Application to bioreactor. 49(7) :85–90, 2016. 11th {IFAC} Symposium on Dynamics and Control of Process Systems Including Biosystems DYCOPS-CAB 2016 Trondheim, Norway, 6-8 June.
- [Hou *et al.*, 2000] M. Hou, K. Busawon, and M. Saif. Observer design based on triangular form generated by injective map. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 45(7) :1350–1355, 2000.
- [Jia *et al.*, 2016] B. Jia, A. Smallbone, H. Feng, G. Tian, Z. Zuo, and A.P. Roskilly. A fast response free-piston engine generator numerical model for control applications. *Applied Energy*, 162 :321–329, 2016.

## Bibliographie

- [Karabulut, 2011] H. Karabulut. Dynamic analysis of a free piston stirling engine working with closed and open thermodynamic cycles. *Renewable Energy*, 36 :1704–1709, 2011.
- [Karafyllis and Kravaris, 2009] I. Karafyllis and C. Kravaris. From continuous-time design to sampled-data design of observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(9) :2169–2174, 2009.
- [Kazantzis and Wright, 2005] N. Kazantzis and R.A. Wright. Nonlinear observer design in the presence of delayed output measurements. *Systems & Control Letters*, 54(9) :877–886, 2005.
- [Khali, 2003] H.K. Khali. *Nonlinear systems*. Printice Hall, third edition, New Jersey, 2003.
- [Kirby and Vitale, 2008] R-L. Kirby and N. Vitale. Update on development of a control system for a 5 kilowatt free piston stirling engine convertor. In *IEEE 6th International Energy Conversion Engineering Conference (IECEC)*, pages 1–9, Washington, USA, 2008.
- [Krener and Isidori, 1983] A.J. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 3(1) :47–52, 1983.
- [Krener and Respondek, 1985] A.J. Krener and W. Respondek. Nonlinear observer with linearizable error dynamics. *SIAM J. Control Optim.*, 23 :197–216, 1985.
- [Krstic, 2009] M. Krstic. *Delay compensation for nonlinear, adaptive and PDE systems*. Birkhäuser Boston, 2009.
- [Mazenc *et al.*, 2012] F. Mazenc, S.I. Niculescu, and O. Bernard. Exponentially stable interval observers for linear systems with delay. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 50 :286–305, 2012.
- [Mazenc *et al.*, 2015] F. Mazenc, V. Andrieu, and M. Malisoff. Design of continuous-discrete observers for time-varying nonlinear systems. *Automatica*, 57 :135–144, 2015.
- [Moisan and Bernard, 2010] M. Moisan and O. Bernard. Robust interval observers for global lipschitz uncertain chaotic systems. *Systems & Control Letters*, 59(11) :687 – 694, 2010.
- [Moisan *et al.*, 2009] M. Moisan, O. Bernard, and J. Gouzé. Near optila interval observers bundle for uncertain bioreactors. *Automatica*, 45(1) :291–295, 2009.
- [Nadri and Hammouri, 2003] M. Nadri and H. Hammouri. Design of a continuous discrete observer for state affine systems. *Applied mathematics letters*, 16 :967–974, 2003.

- [Nadri *et al.*, 2004] M. Nadri, H. Hammouri, and C.M. Astorga Zaragoza. Observer design for continuous-discrete time state affine systems up to output injection. *European Journal of Control*, 10(3) :252–263, 2004.
- [Nadri *et al.*, 2013] M. Nadri, H. Hammouri, and R.M. Grajales. Observer design for uniformly observable systems with sampled measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58 :757–762, 2013.
- [Oueder *et al.*, 2012] M. Oueder, M. Farza, R. Ben Abdennour, and M. M’Saad. A high gain observer with updated gain for a class of MIMO non-triangular systems. *Systems & Control Letters*, 61 :298–308, 2012.
- [Raff *et al.*, 2008] T. Raff, M. Kögel, and F. Allgöwer. Observer with sample-and-hold updating for Lipschitz nonlinear systems with nonuniformly sampled measurements. In *Proc. of the American Control Conference*, Washington, USA, 2008.
- [Raïssi *et al.*, 2012] T. Raïssi, D. Efimov, and A. Zolghardi. Interval state estimation for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(1) :260–265, 2012.
- [Rajamani, 1998] R. Rajamani. Observer for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3) :397–401, 1998.
- [Respondek *et al.*, 2009] W. Respondek, A Pogromsky, and H. Nijmeijer. Time scaling for observer design with linearization error dynamics. *Automatica*, 45 :2187–2193, 2009.
- [Riofrio *et al.*, 2008] J.A. Riofrio, K. Al-Dakkan, M.E. Hofacker, and E.J. Barth. Control based design of free-piston stirling engines. In *2008 American Control Conference*, pages 1533–1538, Washington, USA, 2008.
- [Sanfelice and Praly, 2011] R.G. Sanfelice and L. Praly. On the performance of high-gain observers with gain adaptation under measurement noise. *Automatica*, 47 :2165–2176, 2011.
- [Shim *et al.*, 2001] H. Shim, Y.I. Son, and J.H. Seo. Semi-global observer for multi-output nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 42(3) :233–244, 2001.
- [Tami *et al.*, 2016] R. Tami, G. Zheng, D. Boutat, D. Aubry, and H. Wang. Partial observer normal form for nonlinear system. *Automatica*, 49 :585–591, 2016.
- [Ulusoy, 1994] N. Ulusoy. *Dynamic analysis of Free Piston Stirling Engines*. PhD thesis, Case Western Reserve University, 1994.
- [Williamson, 1977] D. Williamson. Observation of bilinear systems with application to biological control. *Automatica*, 13 :243–254, 1977.



## Bibliographie

- [Xia and Gao, 1989] X. Xia and W. Gao. Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 27(1) :199–216, 1989.
- [Zemouche and Boutayeb, 2013] A. Zemouche and M. Boutayeb. On LMI conditions to design observers for Lipschitz nonlinear systems. *Automatica*, 64 :54–62, 2013.
- [Zemouche *et al.*, 2015] A. Zemouche, R. Rajamani, H. Kheloufi, and F. Bedouhene. Observer-based stabilization via lmi’s for linear uncertain systems. In *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 7286–7291, Dec 2015.
- [Zhang and Xu, 2015] Z. Zhang and S. Xu. Observer design for uncertain nonlinear systems with unmodeled dynamics. *Automatica*, 51 :80 – 84, 2015.
- [Zheng *et al.*, 2012] P. Zheng, C. Tong, J. Bai, B. Yu, Y. Sui, and W. Shi. Electromagnetic design and control strategy of an axially magnetized permanent-magnet linear alternator for Free-Piston Stirling Engines. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 48(6) :2230–2239, 2012.
- [Zheng *et al.*, 2016] G. Zheng, D. Efimov, and W. Perruquetti. Design of interval observer for a class of uncertain unobservable nonlinear systems. *Automatica*, 63 :167 – 174, 2016.

# Annexe A

## Quelques rappels sur l'observabilité des systèmes non linéaires

Dans ce qui suit, la classe des problèmes considérés concerne les procédés qui admettent un modèle dynamique écrit sous la forme suivante :

$$\Sigma \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(u, x) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où l'état  $x(t) \in \mathcal{V}$  une variété analytique ( $C^\omega$ , l'entrée  $u \in U \subset \mathbb{R}^\mu$  ; la sortie  $y \in \mathbb{R}^p$ . Pour tout  $u \in U$ ,  $f_u(x) = f(u, \cdot)$  dénote un champ de vecteur  $C^\omega$  sur  $M$  et la fonction  $h = (h_1, \dots, h_p)$  est aussi  $C^\omega$ . La variable  $t$  représente le temps.

Ces systèmes constituent une représentation du comportement du procédé. Pour une entrée donnée, les trajectoires au cours du temps des variables d'états dépendent de leurs conditions initiales. Par la suite, étant donné  $t_0$  un instant initial,  $T > 0$  un horizon temporel (éventuellement infini) et  $u(t, t_0)$  une entrée, on note  $x(t, u(t), x(t_0))$  la trajectoire du système lorsqu'elle existe de manière unique pour tout temps  $t \in [t_0, t_0 + T[$  (Problème de Cauchy).

### A.1 Observabilité

L'observabilité d'un système exprime la possibilité de reconstruire l'état initial  $x(t_0)$  à partir de la seule connaissance des sorties  $y(t, t_0)$  et des entrées  $u(t, t_0)$  pendant un intervalle de temps suffisamment long contenu dans  $[t_0, t_0 + T[$ .

Dans ce qui suit, nous allons rappeler certaines définitions inhérentes à l'observabilité

des systèmes non linéaires, que l'on peut retrouver dans [Hermann and Krener, 1977, Bornard *et al.*, 1993].

### A.1.1 Quelques définitions

La notion d'observabilité est basée sur la possibilité de différencier deux conditions initiales distinctes. On parlera ainsi de la distinguabilité d'un couple de conditions initiales.

**Definition A.1.1.** (*Distinguabilité - Indistinguabilité*) : Deux états initiaux  $x_0, x_1 \in \mathcal{V}$  tel que  $x_0 \neq x_1$  sont dits distinguables dans  $\mathcal{V}$  si  $\exists t \geq 0$  et  $\exists u : [0, t] \rightarrow U$  une entrée admissible telle que les trajectoires des sorties issues respectivement de  $x_0$  et  $x_1$  restent dans  $\mathcal{V}$  pendant la durée  $[0, t]$  et vérifient  $y(t, u(t), x_0) \neq y(t, u(t), x_1)$ . Dans ce cas, on dira que  $u$  distingue  $x_0$  et  $x_1$  dans  $\mathcal{V}$ . Réciproquement, deux états initiaux  $x_0, x_1 \in \mathcal{V}$  tel que  $x_0 \neq x_1$  sont dits indistinguables si  $\forall t \geq 0$  et  $\forall u : [0, t] \rightarrow U$  pour lesquels les trajectoires issues de  $x_0, x_1$  restent dans  $\mathcal{V}$  on a :  $y(t, u(t), x_0) = y(t, u(t), x_1)$ .

Il est maintenant possible de donner une définition de l'observabilité d'un système en un point, et par extension, de définir un système observable.

**Definition A.1.2.** (*Observabilité*) : Un système est observable en  $x_0 \in \mathcal{V}$  si tout autre état  $x_1 \neq x_0$  est distinguable de  $x_0$  dans  $\mathcal{V}$ . Un système est observable s'il est observable en tout point  $x_0 \in \mathcal{V}$ .

Pour les systèmes linéaires stationnaires

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^\mu, y \in \mathbb{R}^p \quad (\text{A.2})$$

L'observabilité est caractérisée par la fameuse condition du rang : le système (A.2) est

observable si et seulement si la matrice  $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$  est de rang plein ( $= n$ ).

La distinguabilité est un concept global. Il arrive souvent que pour engendrer deux trajectoires à partir de  $x_0$  et  $x_1$ , on ait besoin de s'éloigner suffisamment de  $x_0$  et  $x_1$ . Les deux définitions qui suivent sont de nature locale.

**Definition A.1.3.** (*observabilité locale*) : On dit que le système  $\Sigma$  est localement observable en  $x_0$  si pour tout voisinage ouvert  $V_{x_0}$  de  $x_0$ , l'ensemble des points qui sont indistinguables de  $x_0$  dans  $V_{x_0}$  via les trajectoires dans  $V_{x_0}$  est le point  $x_0$  lui-même.

Lorsqu'il s'agit de distinguer  $x_0$  de ses voisins, on peut affaiblir la notion d'observabilité locale. Dans cette optique, on a :

**Definition A.1.4.** (*observabilité locale faible*) : On dit que le système  $\Sigma$  est localement faiblement observable en  $x_0$  s'il existe un voisinage ouvert  $V_{x_0}$  de  $x_0$  tel que pour tout voisinage ouvert  $V'_{x_0} \subset V_{x_0}$ , l'ensemble des points qui sont indistinguables de  $x_0$  dans  $V'_{x_0}$  via les trajectoires dans  $V'_{x_0}$  est le point  $x_0$  lui-même.

Un système est donc localement faiblement observable si tout état  $x_0$  peut être instantanément distingué de ses voisins en utilisant les trajectoires qui restent dans un voisinage de  $x_0$ .

Dans le but de traduire cette propriété d'observabilité par une condition de rang comme dans le cas des systèmes linéaires, nous sommes amenés à définir l'espace d'observation.

**Definition A.1.5.** (*Espace d'observation*) : L'espace d'observation du système  $\Sigma$  est le plus petit sous-espace vectoriel,  $\mathcal{O}$ , de fonctions de  $\mathcal{V}$  à valeurs dans l'espace de sortie qui contienne  $h_1, \dots, h_p$ , et qui soit fermé pour la dérivation de Lie par rapport à tous les champs de vecteurs du type  $f_u(x) = f(u, x)$ ,  $u \in U$ , fixé.

**Definition A.1.6.** (*Observabilité au sens du rang*) : Soit  $d\mathcal{O}$  l'espace des différentielles des éléments de  $\mathcal{O}$ . Désignons par  $d\mathcal{O}(x_0)$  l'évaluation de  $d\mathcal{O}$  en  $x_0$ . Le système  $\Sigma$  est localement faiblement observable en  $x_0$  si

$$\dim d\mathcal{O}(x_0) = n \tag{A.3}$$

La condition (A.3) est appelée condition du rang. Si cette condition est satisfaite pour tout  $x_0 \in \mathcal{V}$ , on dit que le système  $\Sigma$  est observable au sens du rang.

Le théorème précédent donne une condition suffisante d'observabilité locale faible. Le théorème suivant donne une condition nécessaire :

**Theorème A.1.1.** *Supposons que le système  $\Sigma$  est localement faiblement observable. Alors la condition (A.3) est vérifiée presque partout dans  $\mathcal{V}$ , c'est-à-dire,  $\dim d\mathcal{O}(x) = n$  en tout point  $x$  appartenant à un ouvert  $\mathcal{V}'$  dense dans  $\mathcal{V}$ .*

## Annexe A.

On remarque que les définitions d'observabilité données précédemment n'impliquent pas que toute entrée distingue des couples de points de  $\mathcal{V}$ . En pratique, on aimerait se placer dans le cas où l'entrée  $u$  étant fixée, tout couple d'états distincts donne lieu à des sorties différentes. En effet, ce n'est que dans ce cas que l'on peut reconnaître l'état initial du système à partir des informations antérieures sur l'entrée et la sortie. Ceci nous conduit au concept des entrées universelles et des systèmes qui sont observables au sens du rang pour toutes les entrées appliquées.

### A.1.2 $U$ -uniforme observabilité

Lorsqu'une entrée distingue tous les couples d'état initiaux sur  $\mathcal{V}$ , celle-ci est dite universelle.

**Definition A.1.7.** (*Entrée universelle*) : Une entrée  $u : [0, T] \rightarrow U$  admissible est dite universelle pour le système  $\Sigma$  sur  $[0, T]$  si, pour tout couple d'états initiaux distincts  $x_0$  et  $x_1$ , il existe au moins un temps  $t \in [0, T]$  tel que  $y(t, u(t), x_0) \neq y(t, u(t), x_1)$ . Une entrée non universelle est dite singulière.

Lorsqu'il n'existe pas d'entrée singulière parmi l'ensemble des entrées admissibles  $U$ , alors tout couple d'états initiaux sont distinguables. Cette propriété est appelée la  $U$ -uniforme observabilité.

**Definition A.1.8.** ( *$U$ -uniforme observabilité*) : Un système dont toutes les entrées admissibles à valeur dans  $U$  sont universelles est dit  $U$ -uniformément observable.

Dans le cas où l'ensemble de toutes les entrées à valeurs bornées dans  $\mathbb{R}^m$  sont universelles, ce système sera dit  $\mathbb{R}^m$ -uniformément observable (et l'on dira par la suite seulement uniformément observable).

Le problème de la caractérisation des systèmes uniformément observables dans le cas mono-sortie a été abordé par [Williamson, 1977] pour les systèmes bilinéaires et par [Gauthier and Bornard, 1981] pour les systèmes affines en la commande. Ces résultats peuvent se résumer par les deux théorèmes des paragraphes suivants. Dans le cas multi-sorties, certaines conditions suffisantes de structure seront données plus loin.

### A.1.3 Observabilité des systèmes mono-sortie bilinéaires

**Theorème A.1.2.** *Considérons le système bilinéaire :*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx + Fu \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ;  $A, B, F, C$  sont des matrices de dimensions appropriées. Une condition nécessaire et suffisante pour que le système (A.4) soit uniformément observable est qu'il puisse être transformé par un changement de coordonnées  $z = Tx$ , en :

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + u\bar{B}z + \bar{F}u \\ y = \bar{C}z \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

$$\text{où } \bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ a_1 & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}, \bar{B} = TBT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ \bar{b}_{n1} & \dots & \dots & \bar{b}_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\bar{F} = TF, \bar{C} = CT^{-1} = [1, 0, \dots, 0].$$

#### A.1.4 Observabilité des systèmes mono-sortie affines en la commande

Considérons le système affine en la commande :

$$\Sigma_0 \begin{cases} \dot{x} = f(x) + G(x)u \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

Le résultat suivant, dû à [Gauthier and Bornard, 1981], donne une condition nécessaire et suffisante pour que le système  $\Sigma_0$  soit uniformément observable.

**Theorème A.1.3.** *Le système (A.6) est  $\mathbb{R}^m$ -uniformément observable, si et seulement si, il existe un système de coordonnées locales sur  $\mathbb{R}^n$  tel que (A.6) soit presque partout localement de la forme*

$$\Gamma_0 \begin{cases} \dot{z} = Az + \psi(z) + \Phi(z)u \\ y(t) = Cz \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{où } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \psi(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_n(z) \end{bmatrix}, C = [1, 0, \dots, 0];$$

$$\Phi(z) = [\Phi^1(z) \ \Phi^2(z) \ \dots, \Phi^m(z)] \text{ où chaque vecteur colonne, } \Phi^k(z) = \begin{bmatrix} \Phi_1^k(z) \\ \vdots \\ \Phi_n^k(z) \end{bmatrix} \text{ de}$$

Annexe A.

la matrice  $\Phi(z)$  est triangulaire par rapport à  $z$ , c'est-à-dire  $\Phi_i^k(z) \triangleq \Phi_i^k(z_1, z_2, \dots, z_i)$  pour  $k = 1, \dots, m$ ;  $i = 1, \dots, n$ .

Nous proposons maintenant de rappeler quelques définitions relatives à l'observation des systèmes affines en l'état qui sont un cas particulier des systèmes non-linéaires présentés précédemment. La motivation derrière la mise en avant de ces systèmes réside dans deux faits :

- les modèles physiques de plusieurs procédés (notamment les procédés biochimiques, le moteur asynchrone) se présentent sous cette forme.
- la synthèse de l'observateur pour ces systèmes est basée sur la partie affine en l'état.

### A.1.5 Observabilité des systèmes affines en l'état

Un système affine en l'état est de la forme :

$$\mathcal{L} \begin{cases} \dot{x} = A(u)x + B(u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $u \in U$  sont les entrées appartenant à un borélien et  $y \in \mathbb{R}^p$  sont les signaux de sortie. Les matrices  $A(u)$  et  $B(u)$  sont mesurables en  $u$ , respectivement de dimension  $n \times n$  et  $n \times 1$ .  $C$  est une matrice  $p \times n$  constante.

On appelle matrice de transition du système  $\mathcal{L}$  la matrice  $n \times n$  inversible solution de :

$$\begin{cases} \frac{d\phi_u(t, t_0)}{dt} = A(u)\phi_u(t, t_0) \\ \phi(t_0, t_0) = I \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

$I$  étant la matrice identité.

Posons  $\phi_u(t_0, t) = \phi_u^{-1}(t, t_0)$ . Il s'ensuit que pour tout  $t_1, t_2$  et  $t_3$ , on vérifie :

$$\phi_u(t_1, t_2)\phi_u(t_2, t_3) = \phi_u(t_1, t_3)$$

Comme la sortie  $y(t, u, x(t_0))$  de  $\mathcal{L}$  est de la forme :

$$y(t, u, x(t_0)) = C(t)\phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{\tau=t_0}^t C(t)\phi(t, \tau)B(u(\tau))d\tau$$

on peut montrer facilement que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $u$  est universelle sur  $[0, T]$  pour le système  $\mathcal{L}$ .

2.  $u$  est universelle sur  $[0, T]$  pour le système homogène :

$$\mathcal{L} \begin{cases} \dot{x} = A(u)x \\ y = Cx \end{cases}$$

3. Si la sortie du système homogène est nulle sur  $[0, T]$ , alors la condition initiale  $x$  est nulle.

4. le Grammien d'observabilité de  $\mathcal{L}$  i.e.

$$G(u, t_0, t_0 + T) = \int_{t_0}^{t_0+T} \phi_u^T(t, t_0) C^T C \phi_u(t, t_0) dt$$

est symétrique défini positif.

La définition de la complète uniforme observabilité du système  $\mathcal{L}$  fait recours à la notion d'entrée régulièrement persistante que nous rappelons ici.

**Definition A.1.9.** (*Entrée régulièrement persistante*) : Une entrée  $u \in U$  est dite régulièrement persistante si le Grammien d'observabilité du système  $\mathcal{L}$  vérifie :

$$\exists t_0 \geq 0; \exists T > 0; \exists \alpha_1; \exists \alpha_2 > 0; \forall t \geq t_0 : \alpha_1 I \leq \int_t^{t+T} \phi_u^T(\tau, t) C^T C \phi_u(\tau, t) d\tau \leq \alpha_2 I$$

Nous donnons maintenant la définition suivante :

**Definition A.1.10.** (*Système complètement uniformément observable*) : Lorsque toutes les entrées  $u \in U$  sont régulièrement persistantes, le système  $\mathcal{L}$  est dit complètement uniformément observable.

Nous allons maintenant nous intéresser à la synthèse d'observateur. Dans ce qui suit, nous allons rappeler ce que c'est un observateur puis présenter quelques résultats sur la synthèse d'observateur. L'observateur de Luenberger et le filtre de Kalman seront tout d'abord présentés. Ensuite, on s'intéressera à certaines classes de systèmes non-linéaires uniformément observables pour lesquelles nous présenterons des observateurs de type grand gain.

## A.2 Observateurs

Un observateur ou reconstituteur d'état est un système dynamique qui permet d'obtenir une estimation de la valeur courante de l'état non mesuré d'un système à partir des informations antérieures sur les entrées et la sortie de ce dernier.



Annexe A.

Considérons le système dynamique suivant :

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z} = \bar{f}(z, u, y) \\ \hat{x} = \bar{h}(z) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

où  $z \in M$  une variété différentiable telle que  $\bar{h} : M \rightarrow \mathcal{V}$  soit une submersion,  $\mathcal{V}$  étant l'ouvert de  $\mathbb{R}^n$  constituant l'espace d'état de  $\Sigma$ ;  $u$  et  $y$  sont respectivement les entrées et les sorties de  $\Sigma$ .

**Definition A.2.1.** (*Observateur*) : (i) Le système  $\mathcal{O}$  est un observateur asymptotique local s'il existe  $x_0 \in \mathcal{V}$  et un voisinage  $V_{x_0}$  de  $x_0$  tel que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$$

pour toute condition initiale  $x(0) \in V_{x_0}$  et  $z(0) \in \bar{h}^{-1}(V_{x_0})$ .

(ii) Le système  $\mathcal{O}$  est un observateur global si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$$

pour toute condition initiale  $x(0) \in \mathcal{V}$  et  $z(0) \in M$ .

(iii) Dans les deux cas ci-dessus,  $\mathcal{O}$  est dit observateur exponentiel si :

$$\exists \lambda, \mu > 0 \text{ tel que } \|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \mu e^{-\lambda t} \|\hat{x}(0) - x(0)\|$$

La structure d'observateur la plus utilisée est :

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - G(g)(h(\hat{x}) - y) \\ \dot{g} = \varphi(\hat{x}, u, y, g) \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

$G(g)$  est appelé *gain d'observation* et  $G(g)(h(\hat{x}) - y)$  est le terme de correction.

Dans ce qui suit, nous allons rappeler quelques résultats existants sur la synthèse d'observateurs.

### A.2.1 Systèmes linéaires stationnaires : observateur de Luenberger

Soit le système linéaire stationnaire suivant.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^\mu$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  et  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

Le système suivant :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - K(C\hat{x} - y) \quad (\text{A.13})$$

où la matrice  $K$  est choisie telle que les valeurs propres de  $A - KC$  sont à parties réelles négatives, est un observateur exponentiel pour le système (A.12), communément appelé par le nom de son auteur i.e. observateur de Lunenberger .

### A.2.2 Systèmes linéaires temps variant : Filtre de Kalman

Soit le système linéaire temps variant suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^\mu$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ , les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  étant de dimensions appropriées.

Pour les systèmes linéaires temps variant de la forme (A.14), il existe des observateurs de type Kalman. La synthèse de ces observateurs suppose que les entrées sont régulièrement persistantes. Les observateurs de Kalman prennent les deux formes suivantes selon que l'on utilise une équation dynamique de Lyapunov (A.15) ou de Riccati (A.16) pour le gain.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) - S^{-1}(t)C^T(t)(C(t)\hat{x}(t) - y(t)) \\ \dot{S}(t) = -\theta S(t) - A^T(t)S(t) - S(t)A(t) + C^T(t)C(t) \\ S(0) = S_0 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) - S^{-1}(t)C^T(t)(C(t)\hat{x}(t) - y(t)) \\ \dot{S}(t) = -SQS - A^T(t)S(t) - S(t)A(t) + C^T(t)C(t) \\ S(0) = S_0 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Annexe A.

$\theta > 0$  et  $S_0, Q_0$  étant définies positives.

La convergence de ces observateurs est garantie sous l'hypothèse de l'uniforme complète observabilité du système. Dans ce type de synthèse, il faut assurer non seulement la stabilité de l'équation d'erreur, mais aussi celle de la matrice de gain  $S$ . Celle-ci doit être symétrique définie positive et bornée pour tout  $t$ .

Dans ce qui suit, nous allons rappeler la synthèse d'observateurs à grand gain pour certaines classes de systèmes uniformément observables.

### A.2.3 Systèmes mono-sortie affines en la commande

Soit le système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(u, x) = f(x) + G(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^\mu, G(x)$  une matrice  $n \times m$ .

Dans [Gauthier *et al.*, 1992], les auteurs ont démontré que si le système (A.17) est uniformément observable, alors il peut se transformer via le changement de variable

$$z = \Phi(x) = [h(x), L_f(h)(x), \dots, L_f^{n-1}(h)(x)]^T \quad (\text{A.18})$$

sous la forme canonique d'observabilité suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \varphi(z) + \Psi(z)u \\ y = Cz \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

où

- $A$  est la matrice anti-décalage, c'est-à-dire

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & 1 & & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

- $C$  est la matrice d'observation ayant la structure particulière suivante :

$$C = [1, 0, \dots, 0] \quad (\text{A.21})$$

- la matrice  $\Psi(z) = [\Psi^1(z) \ \Psi^2(z) \ \dots \ \Psi^m(z)]^T$  est telle que chacun de ses vecteurs colonnes  $\Psi^k(z)$ ,  $k = 1, \dots, m$  a une structure triangulaire par rapport à  $z$ , c'est-à-dire

$$\Psi^k(z) = \begin{pmatrix} \Psi_1^k(z_1) \\ \Psi_2^k(z_1, z_2) \\ \vdots \\ \Psi_n^k(z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

Les auteurs ont ensuite utilisé la forme (A.19) pour faire la synthèse de l'observateur exponentiel, de type grand gain, suivant :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \varphi(\hat{z}) + \Psi(\hat{z})u - \theta\Delta_\theta^{-1}S^{-1}C^T(C\hat{z} - y) \quad (\text{A.23})$$

où

- $\theta > 0$  est le paramètre de réglage de l'observateur.
- $S$  est l'unique solution de l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$S + A^T S + SA = C^T C \quad (\text{A.24})$$

- $\Delta_\theta$  est la matrice diagonale suivante :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left( 1, \frac{1}{\theta}, \dots, \frac{1}{\theta^{n-1}} \right) \quad (\text{A.25})$$

Pour la synthèse de l'observateur, les hypothèses suivantes doivent être vérifiées :

- (H1) Les fonctions  $\varphi(z)$  et  $\psi_i(z)$  sont globalement Lipschitz par rapport à  $z$ .
- (H2) Les entrées  $u_i$  sont mesurables et bornées dans  $\mathbb{R}$ .

Notons que la solution  $S$  de l'équation (A.24) peut s'exprimer comme suit :

$$S(i, j) = (-1)^{(i+j)} C_{i+j-2}^{j-1} \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n$$

où  $C_n^p$  est le symbole désignant la binomiale, c'est-à-dire  $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ .

## Annexe A.

De même, le terme  $S^{-1}C^T$  intervenant dans le gain d'observation peut s'exprimer aussi comme suit :

$$S^{-1}C^T = \begin{pmatrix} C_n^1 \\ C_n^2 \\ \vdots \\ C_n^n \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Notons que l'estimation  $\hat{x}$  de l'état  $x$  de (A.17), peut s'obtenir par  $\hat{x} = \Phi^{-1}(z)$ . Parfois, la fonction  $\Phi^{-1}$  ne peut pas être exprimée en fonction de  $z$  et un autre moyen pour contourner cette difficulté consiste à exprimer l'équation de l'observateur directement dans les coordonnées originales en  $x$ . En effet, en tenant compte du fait que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

l'équation de l'observateur dans les coordonnées originales s'écrit comme suit :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + G(\hat{x})u - \theta \left( \frac{\partial \Phi(\hat{x})}{\partial x} \right)^{-1} \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (h(\hat{x}) - y)$$

Notons ici la similitude de cet observateur avec le modèle original i.e. le système (A.17). En effet, cet observateur est une copie du modèle, plus un terme correctif qui est explicitement donné. De plus, son réglage se fait à travers le choix d'un seul paramètre, i.e.  $\theta$ .

Le résultat présenté reste valable même pour des systèmes avec des non linéarités non affines en la commande [Gauthier and Kupka, 1994, Hammouri and Farza, 2003].

### A.2.4 Systèmes mono-sortie non affines en la commande

Soit le système non-linéaire de la forme triangulaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x, u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^\mu$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

Le système (A.27) peut se mettre sous la forme condensée suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

où  $C = [1, \dots, 0]$ .

On considère les hypothèses suivantes :

(H1')  $\exists \alpha > 0, \beta > 0$  telle que :

$$\alpha \leq \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(u, x_1, \dots, x_{i+1}) \leq \beta; \forall (x, u). \quad (\text{A.29})$$

(H2') les fonctions  $f_i, i = 1, \dots, n$  sont globales Lipschitz.

Soit maintenant le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - \Delta_\theta K(C\hat{x} - y) \quad (\text{A.30})$$

où  $\Delta_\theta = \text{diag}(\theta, \theta^2, \dots, \theta^n)$ ,  $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \\ k_n \end{bmatrix}$  est un vecteur constant choisi de telle

manière que l'inégalité de stabilité suivante soit vérifiée :

$$(A(t) - KC)^T S + S(A(t) - KC) \leq -\eta I_n. \quad (\text{A.31})$$

où  $\eta > 0$ ,  $S$  est une matrice constante de dimension  $(n \times n)$ ,  $I_n$  est la matrice identité

de dimension  $(n \times n)$ ,  $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & a_1(t) & 0 & 0 \\ \vdots & & a_2(t) & 0 \\ 0 & & \ddots & a_{n-1}(t) \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$  où les  $a_i(t)$  sont données

par :

$$a_i(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(u, x_1, \dots, x_{i+1}), i = 1, \dots, n - 1$$

Le résultat suivant est dû à [Gauthier and Kupka, 1994] :

**Theorème A.2.1.** *Sous les trois hypothèses (H1') et (H2'), le système (A.30) est un observateur exponentiel pour le système (A.27).*

## *Annexe A.*

Remarquons que la synthèse de l'observateur (A.30), dont le gain est constant, ne nécessite pas la connaissance des  $a_i(t)$  mais utilise simplement le fait que ces variables sont bornées.

# Annexe B

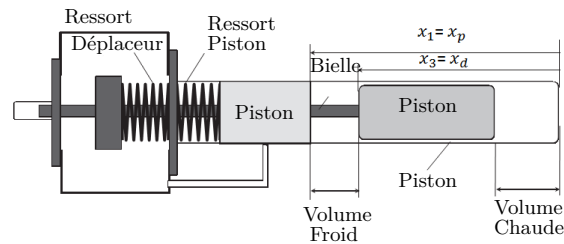
## Moteur Stirling à piston libre

Le moteur Stirling à piston libre est un mécanisme simple qui génère un mouvement de translation de la forme d'une vibration. Il a été inventé par Beale en 1964 [Beale, 1969]. Les moteurs FPSE consistent en un petit nombre de composants comme le piston, le déplaceur, les ressorts et l'échangeur. La machine marche avec tous types de source de chaleur comme l'énergie solaire, l'énergie radio-isotope, l'énergie géothermique, etc.

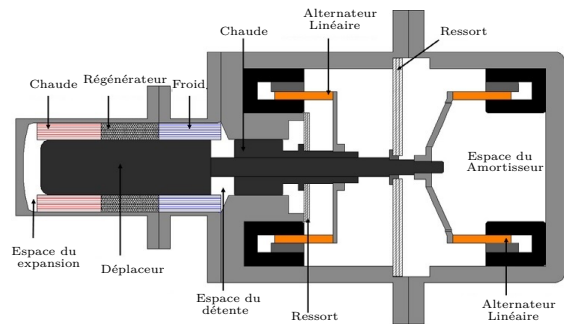
Un intérêt croissant s'est porté sur l'utilisation du moteur Stirling en tant que solution pour la récupération d'énergie. Pour cette raison, de nombreux travaux ont été présentés récemment. Certains travaux ont proposés la re-synthèse du FPSE pour améliorer ses performances [Boucher *et al.*, 2007, Karabulut, 2011]. Dans [Boucher *et al.*, 2007] un moteur composé de deux FPSE couplés a été proposé, il est nommé moteur Stirling à piston libre double effet, il est capable de produire une puissance mécanique de  $1KW$  avec seulement  $1MPa$  de pression. Une analyse dynamique du FPSE en travaillant avec des cycles thermodynamiques ouverts et fermés a également été proposé, les avantages de chaque configuration sont montrés dans [Karabulut, 2011].

Basé sur un FPSE donné, des modèles ont été proposés afin de l'optimiser. Ces modèles peuvent être linéaires [Riofrio *et al.*, 2008, Barth and Hofacker, 2009, Jia *et al.*, 2016] ou, de façon plus complexe, non linéaires [Ulusoy, 1994, Formosa, 2011, Karabulut, 2011]. Un des premiers modèles non linéaire a été présenté dans [Ulusoy, 1994], où le comportement du FPSE a été étudié en utilisant des méthodes de perturbation, le modèle considère les effets dues à des phénomènes non linéaires comme la perte de pression. Une synthèse de commande est basée sur ce modèle dans [Zheng *et al.*, 2012], où un alternateur à aimants permanents est couplé à un FPSE.





(a) Diagramme schématique



(b) Diagramme schématique du FPSE avec un alternateur couplé

FIGURE B.1 – Moteur Stirling à piston libre

Un alternateur est généralement couplé avec un FPSE pour convertir la puissance mécanique en énergie électrique comme dans [Zheng *et al.*, 2012, Kirby and Vitale, 2008], cf. la Figure B.1. Cette puissance générée est dû à la longueur des pistons du FPSE, ces longueur dépendent des différences de température dans le FPSE. Dans [Kirby and Vitale, 2008] est présenté un système de commande pour le convertisseur de 5KW, cette commande peut maintenir le piston à un point déterminé malgré la présence de perturbations.

De nouveaux systèmes ont été utilisés, pour récupérer l'énergie, en utilisant des moteurs Stirling, comme de système dish/Stirling de génération d'énergie, [Aksoy *et al.*, 2015, Beltrán-Chacon *et al.*, 2015]. Ce système est basé sur un réflecteur parabolique qui focalise le rayonnement solaire sur un récepteur monté dans le moteur thermique (voir la Figure B.2). Ce récepteur convertit le rayonnement en chaleur le transfère à un fluide qui coule dans le moteur thermique. De cette façon, l'énergie mécanique produite par le moteur thermique est convertie en électricité à travers un alternateur [Aksoy *et al.*, 2015].

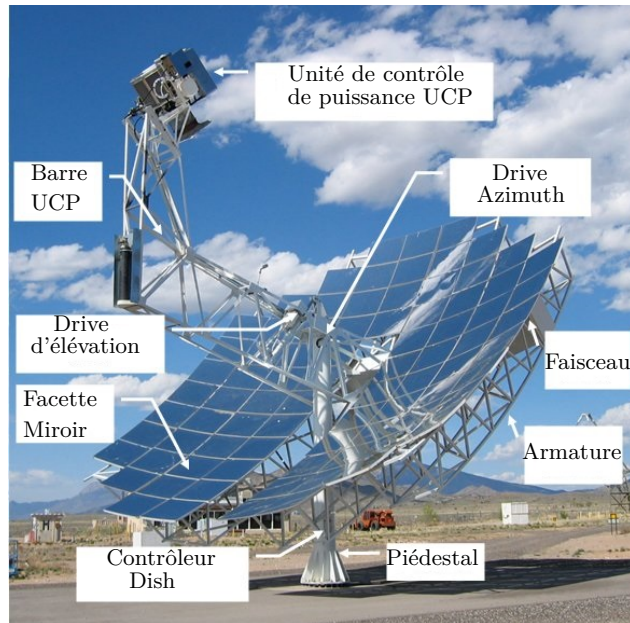


FIGURE B.2 – Système d'énergie Dish-Stirling

## B.1 Modèle non linéaire du moteur Stirling à piston libre

La dynamique du moteur Stirling à piston libre va être examinée (voir la figure B.3). Les variables thermodynamiques sont obtenues comme fonction des variables dynamiques (des déplacements et des vitesses) avec l'hypothèse de simplification de la détente isotherme et des procédés de compression. Il existe diverses autres configurations du FPSE qui sont différentes de cette configuration en raison des arrangements géométriques, aussi l'analyse peut s'étendre à d'autres configurations, avec les ajustements nécessaires .

Le moteur possède trois masses distinctes : la carcasse du moteur, le piston de travail  $m_p$  et le déplaceur  $m_d$ . Dans de nombreuses applications les masses du piston de travail et du déplaceur représentent moins de 5% de la masse de la carcasse du moteur. Le mouvement de la carcasse est supposée être si petit qu'il n'a pas une grande influence sur le comportement du moteur. La force nette exercée sur un piston est le produit de la différence de pression entre les deux côtés du piston et l'aire du piston. Les équations de mouvement pour le déplaceur  $x_d$  et le piston de travail  $x_p$  sont écrites en utilisant la

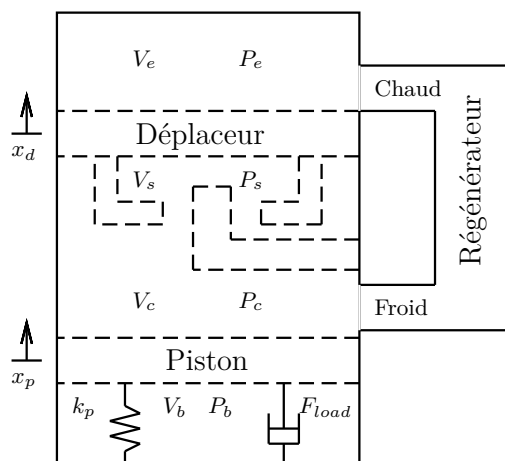


FIGURE B.3 – *Schema du Moteur Stirling à Piston Libre*

deuxième loi de Newton :

$$m_p \ddot{x}_p = A_p(p_b - p_c) + F_{load} \quad (\text{B.1})$$

$$m_d \ddot{x}_d = A_d(p_c - p_e) - A_r(p_c - p_s) \quad (\text{B.2})$$

où  $F_{load}$  représente la charge externe qui est associée au piston de travail. La charge est modélisée comme une combinaison d'un amortisseur linéaire et d'une charge non linéaire hypothétique. Les forces de gravitation exercées sur le déplaceur et le piston ne sont pas incluses dans ces équations car ces forces sont constantes en amplitude et en direction, et son effet modifie seulement le centre du mouvement. En outre, dans de nombreux cas les forces de gravitation sont négligeable en comparaison des forces résultant de la variation de pression du gaz de travail.

La solution des équations (B.2) exigent la connaissance de  $p_b$ ,  $p_c$ ,  $p_e$ , et  $p_s$ , qui sont les pressions dans l'amortisseur de travail, la compression, la détente, l'espace du ressort gazeux, respectivement et sont des variables thermiques évoluant dans le temps et couplées avec la dynamique du moteur. Les mouvements du piston et du déplaceur modifient la pression du gaz. La variation de la pression, à son tour, change la force ressentie par le piston et le déplaceur et déplace ces éléments plus loin. Dans la section suivante nous déduirons un modèle thermodynamique qui permet d'obtenir des relations algébriques simples pour ces termes de pression comme fonction des déplacements et vitesses du piston et du déplaceur.

### B.1.1 Le modèle isotherme pour la thermodynamique

Les processus de détente et de compression isotherme, la régénération parfaite et constante de l'espace instantané du gaz de travail sont les principales hypothèses de l'analyse de Schmidt. Un processus isotherme exige soit un rapport de transfert de chaleur infini ou en temps infini. Dans un FPSE réel, pendant la compression et la détente, la chaleur est transférée au gaz de travail depuis les parois du cylindre en très peu de temps. Par conséquent l'hypothèse isotherme est une approximation appropriée [Ulusoy, 1994] :

- Les échangeurs de chaleur sont parfaitement efficaces
- Les espaces de travail sont isothermes. Les températures du gaz de travail dans les espaces de compression et de détente sont constantes et égales aux températures des échangeurs froid et chaud, respectivement.
- Il n'existe aucune fuite de gaz et la masse du gaz reste constant
- Le gaz de travail loi obéit à la loi des gaz parfaits.
- La pression instantanée du gaz est constante dans l'espace.
- Le gaz est parfaitement mélangé dans le cylindre
- La cinétique du gaz de travail est négligée.

En considérant les hypothèses ci-dessus et les équations mouvement (B.2), le système du FPSE est alors défini comme suit

$$m_p \ddot{x}_p = A_p p_m (1 - F) + F_{load} \quad (\text{B.3})$$

$$m_d \ddot{x}_d = A_d \Delta_p - A_r p_m \left[ F - \left( \frac{1}{1 + a_s x_d} \right)^\gamma \right] \quad (\text{B.4})$$

où  $\Delta_p$  est la perte de pression totale à travers les échangeurs,  $p_m$  la pression du gaz,  $\gamma$  le taux de chaleur spécifique et  $F$  est définie comme suit :

$$F = \left( \frac{1}{1 - a_p x_p + a_d x_d} \right)$$

### B.1.2 Équations sans dimension

La forme des équations suggère qu'une approche avec un système dynamique serait productive, nous essayons donc de déterminer analytiquement les valeurs des paramètres permettant d'atteindre le mouvement périodique désiré du moteur, cf. [Ulusoy, 1994]. L'analyse d'un système équivalent d'ordre moins élevé doit être fourni. Une analyse non-dimensionnelle a été présentée dans [Ulusoy, 1994], ainsi que dans [Zheng *et al.*, 2012], afin de valider les équations du moteur **FPSE**. Donc l'ensemble du système

Annexe B.

(B.3)-(B.4) peut se réécrire sous la forme non-dimensionnelle suivante

$$\bar{m}_p \ddot{\bar{x}}_p = p_m(1 - \bar{F}) + \bar{F}_{load} \quad (B.5)$$

$$\bar{m}_d \ddot{\bar{x}}_d = \bar{A}_d \bar{\Delta}_p - \bar{A}_r p_m \left[ \bar{F} - \left( \frac{1}{1 + \bar{a}_s \bar{x}_d} \right)^\gamma \right] \quad (B.6)$$

où nous désignons  $\bar{x}_p = x_p/(l_p/2)$ ,  $\bar{x}_d = x_d/(l_p/2)$  et  $\bar{F}$  par :

$$\bar{F} = \left( \frac{1}{1 - \bar{a}_p \bar{x}_p + \bar{a}_d \bar{x}_d} \right)$$

Ces relations non linéaires de la pression dans l'espace de travail fluctuent quand le déplaceur déplace le gaz de travail, dans un sens et dans l'autre, entre les espaces des échangeurs froid et chaud. Ils doivent être linéarisés, par commodité, ceci est effectué sur les positions initiales  $\bar{x}_p$  et  $\bar{x}_d$ , qui sont supposées égales à  $\bar{x}_p = 0$  et  $\bar{x}_d = 0$ .

Le déplacement  $\bar{x}_p$  est linéarisé avec les conditions initiales ci-dessus, ceci conduit à

$$\bar{P}_1 = [1 - \bar{F}] = \frac{(\bar{a}_p \bar{x}_p - \bar{a}_d \bar{x}_d)}{(1 - \bar{a}_p \bar{x}_p + \bar{a}_d \bar{x}_d)}$$

$$\bar{P}_1 \approx \left. \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \bar{x}_d} \right|_{\substack{\bar{x}_d=0 \\ \bar{x}_p=0}} \bar{x}_d + \left. \frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \bar{x}_p} \right|_{\substack{\bar{x}_d=0 \\ \bar{x}_p=0}} \bar{x}_p = \bar{a}_d \bar{x}_d - \bar{a}_p \bar{x}_p$$

Maintenant, nous exprimons la linéarisation du déplacement  $\bar{x}_d$ , comme suit :

$$\bar{P}_2 = \bar{F} - \left( \frac{1}{1 + \bar{a}_s \bar{x}_d} \right)^\gamma = \frac{(1 + \bar{a}_s \bar{x}_d)^\gamma - (1 - \bar{a}_p \bar{x}_p + \bar{a}_d \bar{x}_d)}{(1 - \bar{a}_p \bar{x}_p + \bar{a}_d \bar{x}_d) (1 + \bar{a}_s \bar{x}_d)^\gamma} \quad (B.7)$$

$$\bar{P}_2 \approx \left. \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial \bar{x}_d} \right|_{\substack{\bar{x}_d=0 \\ \bar{x}_p=0}} \bar{x}_d + \left. \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial \bar{x}_p} \right|_{\substack{\bar{x}_d=0 \\ \bar{x}_p=0}} \bar{x}_p = (\gamma \bar{a}_s - \bar{a}_d) \bar{x}_d + \bar{a}_p \bar{x}_p \quad (B.8)$$

Les équations sont données par

$$\bar{m}_p \ddot{\bar{x}}_p = p_m [\bar{a}_d \bar{x}_d - \bar{a}_p \bar{x}_p] + \bar{F}_{load} \quad (B.9)$$

$$\bar{m}_d \ddot{\bar{x}}_d = \bar{A}_d \bar{\Delta}_p - \bar{A}_r p_m [(\gamma \bar{a}_s - \bar{a}_d) \bar{x}_d + \bar{a}_p \bar{x}_p] \quad (B.10)$$

Le système peut s'exprimer avec des équations de forme non-dimensionnelle. En considérant les effets dissipatifs dues à la perte de pression et à la charge externe sur

### B.1. Modèle non linéaire du moteur Stirling à piston libre

le piston, mais seulement les termes linéaires, le système s'exprime comme :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\bar{x}}_p \\ \ddot{\bar{x}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{load} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{pd}\bar{x}_d + k_{pp}\bar{x}_p \\ k_{dp}\bar{x}_p + c_{dp}\dot{\bar{x}}_p + k_{dd}\bar{x}_d + c_{dd}\dot{\bar{x}}_d \end{bmatrix} p_m(t) \quad (\text{B.11})$$

En considérant aussi que la charge peut s'exprimer comme suit :

$$\bar{F}_{load} = (\bar{f}_L - \bar{f}_c\bar{x}_p^2)\dot{\bar{x}}_p + \bar{k}_c\bar{x}_p^3 \quad (\text{B.12})$$

où :

$$\begin{aligned} k_{dd} &= -\frac{\bar{A}_r}{\bar{m}_d}(\gamma\bar{a}_s - \bar{a}_d) & k_{dp} &= -\frac{\bar{A}_r}{\bar{m}_d}\bar{a}_p & k_{pd} &= \frac{\bar{a}_d}{\bar{m}_p} \\ k_{pp} &= -\frac{\bar{a}_p}{\bar{m}_p} & c_{dd} &= \left(\frac{\bar{A}_d}{\bar{m}_d}\right)k_1 & c_{dp} &= \left(\frac{\bar{A}_d}{\bar{m}_d}\right)k_2 \\ \bar{f}_L &= \frac{f_L}{\omega m_p} & \bar{f}_c &= \frac{F_c(l_p/2)^2}{\omega m_p} & \bar{k}_c &= \frac{k_c}{\omega m_p} \end{aligned}$$

où  $k_2$  et  $k_1$  sont les termes linéaires de la perte de pression totale  $\Delta_p$  à travers chaque section qui est exprimée par une série de Taylor et qui dépend des termes  $\dot{\bar{x}}_p$  et  $\dot{\bar{x}}_d$ . En considérant les valeurs des paramètres calculées d'après les données du Tableau C.2, dans [Ulusoy, 1994], le polynôme suivant a été proposé :

$$\begin{aligned} \sum \bar{\Delta}_p &= (\bar{\delta}_p)_h + (\bar{\delta}_p)_R + (\bar{\delta}_p)_k \\ \bar{\Delta}_p &= -0.028\dot{\bar{x}}_d - 0.511\dot{\bar{x}}_d^3 + 0.021\dot{\bar{x}}_p + 1.197\dot{\bar{x}}_d^2\dot{\bar{x}}_p - 0.979\dot{\bar{x}}_d\dot{\bar{x}}_p^2 + 0.269\dot{\bar{x}}_p^3 \\ &\approx -0.028\dot{\bar{x}}_d + 0.021\dot{\bar{x}}_p \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

En outre, tous les autres paramètres constants sont non-dimensionnalisés de la manière suivante

Aire de chaque section :

$$\bar{A}_r = \frac{A_r}{A_p} \quad \bar{A}_d = \frac{A_d}{A_p}$$

Les masses du piston et du déplaceur :

$$\bar{m}_d = \frac{\omega^2 (l_p/2) m_d}{A_p} \quad (\text{B.14})$$

$$\bar{m}_p = \frac{\omega^2 (l_p/2) m_p}{A_p} \quad (\text{B.15})$$

Les pressions dépendant des paramètres  $\bar{a}_p$ ,  $\bar{a}_d$  et  $\bar{a}_s$ , qui sont régies par les équations

Annexe B.

suivantes :

$$\bar{a}_p = a_p (l_p/2) \quad \bar{a}_d = a_d (l_p/2) \quad \bar{a}_s = a_s (l_p/2)$$

où :

$$a_p = \frac{A_p}{T_k} \left( \frac{1}{V_{mt}} \right) \quad a_d = \left[ \frac{A_d - A_r}{T_k} - \frac{A_d}{T_h} \right] \left( \frac{1}{V_{mt}} \right) \quad a_s = \frac{A_r}{V_{s0}}$$

Ces termes dépendent du volume totale de l'espace de travail, qui est défini comme suit :

$$V_{mt} = \left[ \frac{V_{e0}}{T_h} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_R}{T_R} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_{c0}}{T_k} \right] \quad (\text{B.16})$$

# Annexe C

## Tableaux

TABLE C.1 – Paramètres du moteur asynchrone

Paramètre	Not.	Valeur	Paramètre	Not.	Valeur
Pairs de pôles	$p$	2	Inductance du rotor	$L_r$	$0.4718H$
Résistance du stator	$R_s$	$9.65\Omega$	Inductance mutuelle	$M$	$0.4475H$
Résistance du rotor	$R_r$	$4.3047\Omega$	Inertie du rotor	$J$	$0.0293kg/m^2$
Inductance du stator	$L_s$	$0.4718H$	Résistance du torque	$C_{res}$	$0Nm$



TABLE C.2 – Nomenclature du Moteur Stirling à Piston Libre

Symbole	Description et unités	Valeur
$A_d$	Aire du déplaceur ( $m^2$ )	$2.5 \times 10^{-3}$
$A_h$	Aire de la tête chaude ( $m^2$ )	$148 \times 10^{-3}$
$A_k$	Aire de la tête froide ( $m^2$ )	$148 \times 10^{-3}$
$A_p$	Aire du piston ( $m^2$ )	$2.6 \times 10^{-6}$
$A_r$	Aire la bielle du déplaceur ( $m^2$ )	$217 \times 10^{-6}$
$A_R$	Aire du régénérateur ( $m^2$ )	Variable
$A_s$	Aire moyenne de transfert de chaleur ( $m^2$ )	Variable
$f_c$	Terme non linéaire de la charge externe $F_{load}$	Variable
$f_d$	Terme du ressort dans le déplaceur	Variable
$f_p$	Terme du ressort dans le piston	Variable
$f_L$	Terme linéaire de la charge external $F_{load}$	Variable
$F_{load}$	La charge externe	Variable
$l_p$	La course maximale de piston (m)	$4.2 \times 10^{-3}$
$m_d$	Masse du déplaceur (kg)	0.42
$m_h$	Masse du gaz dans la tête chaude (kg)	Variable
$m_k$	Masse du gaz dans la tête froide (kg)	Variable
$m_p$	Masse du piston (kg)	6.2
$m_R$	Masse du gaz dans le régénérateur (kg)	6.2
$m_t$	Masse totale de gaz dans moteur (kg)	6.2
$p_b$	Pression dans l'espace d'amortisseur de travail (Pa)	Variable
$p_c$	Pression dans l'espace de compression (Pa)	Variable
$p_e$	Pression dans l'espace de détente (Pa)	Variable
$p_m$	Pression dans le moteur (Pa)	$7 \times 10^6$
$p_s$	Pression dans l'espace de ressort de travail (Pa)	Variable
$T_h$	Température du gaz dans la tête chaude (K)	900
$T_k$	Température du gaz dans la tête froide (K)	300
$T_R$	Température du gaz dans le régénérateur (K)	Variable
$V_c$	Volume de l'espace de compression ( $m^3$ )	Variable
$V_{c0}$	Volume moyen de l'espace de compression ( $m^3$ )	$103.6 \times 10^{-6}$
$V_e$	Volume de l'espace de détente ( $m^3$ )	Variable
$V_{e0}$	Volume moyen de l'espace de détente ( $m^3$ )	$63.6 \times 10^{-6}$
$V_h$	Volume dans la tête chaude ( $m^3$ )	$39.6 \times 10^{-6}$
$V_k$	Volume dans la tête froide ( $m^3$ )	$28.5 \times 10^{-6}$
$V_R$	Volume dans l'espace du régénérateur ( $m^3$ )	$59.41 \times 10^{-6}$
$V_s$	Volume dans l'espace de ressort de travail ( $m^3$ )	Variable
$V_{s0}$	Volume moyen dans l'espace de ressort de travail ( $m^3$ )	$31.8 \times 10^{-6}$
$x_d$	Déplacement du déplaceur (m)	Variable
$x_p$	Déplacement du piston (m)	Variable
$\gamma$	Ratio de chaleur spécifique (sans dimension)	1.7
$\omega$	Vitesse de rotation du moteur ( $rad/s$ )	188.5

# Annexe D

## Lemmes techniques

### D.1 Lemmes des Chapitre 4

Les deux lemmes suivants seront utilisés dans la preuve du Théorème 4.3.1.

**Lemme D.1.1.** [Farza et al., 2014]

Nous considérons une fonction différentiable  $v : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto v(t) \in \mathbb{R}^+$  qui satisfait l'inégalité suivante :

$$\dot{v}(t) \leq -av(t) + b \int_{t_k}^t v(s)ds \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}[ \text{ avec } k \in \mathbb{N} \quad (\text{D.1})$$

où  $0 < t_{k+1} - t_k \leq \Delta_M < +\infty$  et,  $a$  et  $b$  sont des réels positifs qui vérifient

$$\frac{b\Delta_M}{a} < 1. \quad (\text{D.2})$$

Alors, la fonction  $v$  converge exponentiellement vers zéro, c'est-à-dire

$$v(t) \leq e^{-\eta(t-t_0)}v(t_0) \quad \text{avec } 0 < \eta = (a - b\Delta_M) e^{-a\Delta_M}. \quad (\text{D.3})$$

**Lemme D.1.2.** [Germani et al., 2002]

Nous considérons une fonction réelle continue  $v : t \in [-\delta, +\infty[ \rightarrow v(t) \in [0, +\infty[$  avec  $\delta > 0$ , telle que

$$\int_{-\delta}^0 v(s)ds < +\infty, \quad v(t) \leq \mu e^{-\bar{\alpha}t} + \beta \int_{t-\delta}^t v(s)ds \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (\text{D.4})$$

où  $\bar{\alpha}, \mu, \beta$  sont des réels positifs.

Annexe D.

Si  $\beta\delta < 1$  alors il existe un réel positif  $\alpha \leq \bar{\alpha}$  tel que :

$$v(t) \leq \bar{\mu}e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0 \quad (\text{D.5})$$

où

$$\bar{\mu} = \frac{1}{1-c} \left( e^{\alpha\delta}\mu + \beta \int_{-\delta}^0 v(s)ds \right), \quad c = \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha\delta} - 1) < 1 \quad (\text{D.6})$$