



**HAL**  
open science

# Régression typologique et reconnaissance des formes

Christian Charles

► **To cite this version:**

Christian Charles. Régression typologique et reconnaissance des formes. Statistiques [stat]. Université Paris IX, 1977. Français. NNT : . tel-01497620

**HAL Id: tel-01497620**

**<https://theses.hal.science/tel-01497620>**

Submitted on 3 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ PARIS IX

pour obtenir

LE DIPLÔME DE DOCTEUR DE 3<sup>ème</sup> CYCLE

par

Christian CHARLES

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Mention : Analyse des Données

## REGRESSION TYPOLOGIQUE ET RECONNAISSANCE DES FORMES

Soutenu le 10 juin 1977 devant la Commission composée de :

|     |                      |            |
|-----|----------------------|------------|
| MM. | <b>J. C. SIMON</b>   | Président  |
|     | <b>A. BENSOUSSAN</b> | Examineurs |
|     | <b>P. CAZES</b>      |            |
|     | <b>E. DIDAY</b>      | Invité     |
|     | <b>P. SOLETY</b>     |            |



# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ PARIS IX

pour obtenir

LE DIPLÔME DE DOCTEUR DE 3<sup>ème</sup> CYCLE

par

Christian CHARLES

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Mention : Analyse des Données

## REGRESSION TYPOLOGIQUE ET RECONNAISSANCE DES FORMES

Soutenu le 10 juin 1977 devant la Commission composée de :

|     |               |            |
|-----|---------------|------------|
| MM. | J. C. SIMON   | Président  |
|     | A. BENSOUSSAN | Examineurs |
|     | P. CAZES      |            |
|     | E. DIDAY      | Invité     |
|     | P. SOLETY     |            |



*Je remercie,*

*Monsieur le Professeur SIMON qui me fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.*

*Monsieur le Professeur BENSOUSSAN, Directeur de l'U.E.R. de Mathématiques de la Décision dont la richesse de l'enseignement m'a permis d'aborder cette étude.*

*Monsieur DIDAY, Maître de Conférences, qui m'a donné le sujet de la thèse, de m'avoir accueilli dans son équipe de l'IRIA, pour les conseils et les encouragements qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail.*

*Monsieur CAZES, Maître Assistant, pour l'intérêt bienveillant avec lequel il a examiné ce travail.*

*Monsieur SOLETY du BRGM qui m'a permis d'appliquer ces algorithmes au domaine géologique.*

*Je tiens également à remercier, Mademoiselle ULMO et Monsieur COHEN, de Paris IX, qui par de judicieuses remarques m'ont apporté une aide efficace.*

*Monsieur SITBON, Directeur de l'UER d'Informatique de Gestion de Paris IX, pour l'aide matérielle efficace que son secrétariat m'a apporté une aide efficace.*

*Tous mes camarades de travail et tout particulièrement Mesdames DUPONT et SCHROEDER, Messieurs BOCHI, FEVRE et LECHEVALLIER.*



"Le seul trait distinctif des objets d'une loi statistique peut être leur appartenance à un certain groupe. Ils ne se distinguent que des objets extérieurs à leur groupe, ils ne se distinguent pas des objets intérieurs. La loi est établie sur la supposition qu'un membre d'un groupe est aussi propre que n'importe quel autre à satisfaire certaines conditions. Tous les caractères individualisants sont effacés par l'introduction de l'individu dans le groupe. Sa définition en tant qu'individu est une définition en tant que membre d'un groupe. On touche désormais le réel par son appartenance à une classe. C'est au niveau de la classe qu'il faudra chercher les propriétés du réel".

Joli!

Gaston BACHELARD

*Le nouvel esprit scientifique*



## TABLE DES MATIERES

### I INTRODUCTION

### II METHODE LOCALE DES MOINDRES CARRES ORDINAIRES

- 1 Rappels théoriques et inverses généralisées
- 2 L'algorithme
  - 2.1 Les notations employées
  - 2.2 Le critère
  - 2.3 Les fonctions  $f$  et  $g$
  - 2.4 Les suites  $u_n$  et  $v_n$
  - 2.5 La convergence de l'algorithme
- 3 Protection de la régression
  - 3.1 Comparaisons entre inverses généralisées et ridge régression
  - 3.2 Schéma général de l'algorithme
  - 3.3 Le programme informatique REGTYPO
- 4 Elimination de l'effet de cylindre
- 5 Choix optimal du nombre de classes
- 6 Méthode de prévision associée aux modèles linéaires locaux

### III METHODE LOCALE DES MOINDRES CARRES GENERALISES

- 1 Les estimateurs des moindres carrés généralisés
- 2 La méthode des moindres carrés généralisés locale
- 3 Cas particulier

### IV METHODE DE REGRESSION MULTIDIMENSIONNELLE LOCALE

- 1 Le modèle classique
- 2 Le modèle local

### V METHODE LOCALE DE REGRESSION SIMULTANEE

### VI METHODE DE REGRESSION ORTHOGONALE LOCALE

- 1 Régression orthogonale et composantes principales
- 2 La méthode de régression orthogonale locale
  - 2.1 Les notations
  - 2.2 Le critère à optimiser
  - 2.3 La fonction de représentation
  - 2.4 La fonction d'identification

- 2.5 Construction des suites  $u_n$ ,  $v_n$
- 2.6 Liens avec l'analyse factorielle typologique

#### VII METHODE DE REGRESSION PONDEREE LOCALE

- 1 le nouveau modèle
- 2 Le modèle de régression pondérée locale
  - 2.1 Les notations
  - 2.2 Le critère à optimiser
  - 2.3 La fonction de représentation
  - 2.4 La fonction d'identification
  - 2.5 la convergence de l'algorithme

#### VIII METHODE LOCALE DES MOINDRES VALEURS ABSOLUES

- 1 Estimation par la méthode des moindres valeurs absolues
  - 1.1 Problème de programmation linéaire
  - 1.2 Schéma général de la méthode des moindres valeurs absolues
- 2 la méthode locale des moindres valeurs absolues
  - 2.1 le critère
  - 2.2 la fonction d'identification
  - 2.3 la fonction de représentation
  - 2.4 la convergence de l'algorithme

#### IX REGRESSION LOCALE ET TEST DE CHOW

- 1 le test de Chow
- 2 Lien entre le critère et le test de Chow

#### X NOTIONS SUR L'ANALYSE DES SERIES TEMPORELLES DISCRETES

- 1 Modèle autorégressif d'ordre  $p$
- 2 Modèle stationnaire
  - 2.1 Autocovariance et autocorrélation théorique
  - 2.2 Estimateurs de l'autocovariance et de l'autocorrélation
  - 2.3 Fonction d'autocorrélation et équations de Yule-Walker
  - 2.4 Fonction d'autocorrélation partielle théorique
  - 2.5 Fonction d'autocorrélation partielle estimée

## XI ETUDE LOCALE DES SERIES TEMPORELLES

- 1 La méthode de lissage pour le modèle I
- 2 L'estimation du trend par un polynome
- 3 La méthode de régression polynomiale locale ( modèle [I])
  - 3.1 Le principe
  - 3.2 Construction de la base de polynomes orthogonaux
  - 3.3 Le formalisme
  - 3.4 L'algorithme
  - 3.5 La convergence de l'algorithme
  - 3.6 Le programme REGPI
- 4 La méthode de régression polynomiale locale ( modèle [II])
  - 4.1 Le problème
  - 4.2 L'estimation des coefficients de l'équation [I]
  - 4.3 La démarche générale
  - 4.4.1 L'espace des noyaux
  - 4.4.2 L'espace des partitions
  - 4.4.3 Notations
  - 4.4.4 Le critère à optimiser
  - 4.4.5 La fonction de représentation
  - 4.4.6 Obtention des parties contigues
  - 4.4.7 La construction de l'algorithme et sa convergence
  - 4.5 Le programme REGP3

## XII RECONNAISSANCE DES FORMES ET MEMORISATION CONDENSEE DE COURBES

- 1 Introduction
- 2 Le modèle
  - 2.1 Obtention des parties contigues
  - 2.2 Obtention des polynomes locaux
  - 2.3 Le formalisme

- 2.4 Le critère
- 2.5 L'algorithme et sa convergence
- 2.6 Le programme REGP2
- 3 Le modèle modifié
  - 3.1 La nouvelle fonction de représentation
  - 3.2 Le formalisme et la convergence
  - 3.3 Généralisation du modèles sous contraintes
  - 3.4 Le nouveau programme REGP2
- 4 Nouvel algorithme fournissant la partition en classes contigues
- 5 Généralisations
  - 5.1 Cas d'une fonction de  $R^2$ 
    - 5.1.1 Le formalisme
    - 5.1.2 Le programme Fortran REGP2B
  - 5.2 Cas de la minimisation de valeurs absolues

### XIII MODELE LINEAIRE TYPOLOGIQUE SUR VARIABLES HETEROGENES

- 1 Notations et hypotheses
- 2 Le problème
  - 2.1 L'espace des partitions et des fonctions de codage
  - 2.2 L'espace des noyaux
  - 2.3 Le critère à optimiser
  - 2.4 La fonction d'identification f
  - 2.5 La fonction de représentation et les opérateurs de codage
    - 2.5.1 Les opérateurs de codage
    - 2.5.2 La matrice  $\tilde{X}$  et le vecteur  $\tilde{Y}$
    - 2.5.3 L'algorithme de calcul des codages optimaux et des coefficients de régression
      - 2.5.3.1 Calcul des coefficients de régression
      - 2.5.3.2 Obtention des codages optimaux
      - 2.5.3.3 L'algorithme de codage et sa convergence
- 3 La convergence de l'algorithme de régression typologique sur variables hétérogènes

3.1 Les suites  $u_n$  et  $v_n$

3.2 La convergence

4 Applications et organigramme général

XIV APPLICATIONS DES DIVERS ALGORITHMES

1 Application de l'algorithme de régression typologique REGTYP0

2 Applications des programmes de mémorisation et de reconnaissance  
de courbes

2.1 Application du programme REGP 2

2.2 Application du programme SPLINE

2.3 Application du programme REGP 2 B

XV CONCLUSION

XVI BIBLIOGRAPHIE

XVII ANNEXES



## I. - INTRODUCTION

Lorsqu'on utilise des séries chronologiques, on se pose souvent des problèmes de stabilité temporelle, c'est-à-dire qu'on désire tester à partir des observations si une même loi est bien adaptée pour représenter le même phénomène à des époques différentes. Par exemple : une fonction de consommation macroéconomique est-elle restée la même avant et après la guerre ?, les investissements industriels en France ont-ils obéi à la même loi avant et après la mise en place du marché commun ?, la fonction d'importation d'un pays anciennement colonisé s'est-elle modifiée depuis l'indépendance ?...

Dans tous les cas ci-dessus, le test de stabilité porte sur deux périodes consécutives. Mais il pourrait tout aussi bien porter sur des périodes entremêlées. Par exemple : la relation de Philips (liant salaires prix, chômage) est-elle la même suivant les diverses phases de la conjoncture : expansion et récession ?

Dans ces exemples, les groupes d'observations sont définis a priori : consommations avant la guerre, consommations après la guerre, investissements avant le marché commun, investissements après le marché commun... La stabilité temporelle est donc mesurée grâce au test de Chow (1960, [6]), dans le cas de modèle linéaire.

Un problème plus difficile à résoudre est celui qui suppose que la série chronologique a été générée par plusieurs régimes de régression dont on se propose de rechercher les instants de discontinuités. Il s'agit alors de définir les différents groupes d'observations et les régimes de régression associés.

Pour reprendre l'exemple des investissements industriels, il ne s'agit plus de vérifier si le marché commun a modifié le comportement des entreprises, mais plutôt, sachant que ce comportement a été modifié au cours du temps, de détecter le ou les instants séparant les différents régimes (et si on

le désire les rattacher à une modification intervenue dans l'économie du pays) ainsi que ces régimes. Diverses méthodes se proposant de résoudre ce problème ont été proposées. On peut les regrouper en deux approches distinctes :

1) - QUANDT (1958, [18]) exprime la fonction de vraisemblance de l'échantillon comme une fonction du temps et la maximise par rapport aux moyennes  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et variances  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$  des deux régimes ainsi que par rapport au temps.

- FAIRLEY et HINICH (1970, [10]) supposent que le point de rupture est équiprobablement réparti sur l'ensemble de l'échantillon et dérive un test de vraisemblance.

- BROWN et DURBIN (1968, [5]) proposent de définir des écarts récursifs  $u_r$  ;  $r = e+1, T$  (où  $e$  est le nombre de variables explicatives et  $T$  le nombre d'observations) obtenus en utilisant la  $r^{\text{ième}}$  rangée de  $y$  et  $x$  (du modèle  $y = x\beta + u$ ) et une estimation  $\beta$  basée sur les  $(r-1)$  premières rangées de  $y$  et  $x$ . Ces écarts sont transformés en variables distribuées suivant une loi  $N(0, \sigma^2 I)$  et leurs sommes cumulées sont testées par rapport à zéro.

2) Une formulation plus complexe supposant que les régimes puissent se rompre et reprendre à différents instants du temps devient rapidement impraticable puisqu'elle nécessite l'évaluation de  $2^T$  fois la fonction de vraisemblance au lieu de  $T$  fois.

Deux nouvelles approches ont été explorées :

- FAIR et JAFFEE (1972, [9]), GOLDFELD et QUANDT (1972, [11]) supposent l'existence d'une variable supplémentaire  $z$  qui permet de classer les individus  $(y_r, x_r)$  suivant un critère du type :

$(y_r, x_r)$  est généré par le régime 1 si  $z_r \leq z_0$

$(y_r, x_r)$  est généré par le régime 2 si  $z_r > z_0$  où  $z_0$  est connu.



La méthode proposée construit à partir d'une partition  $P^{(0)}$  (estimée ou tirée au hasard) en  $K$  classes ( $K$  fixé a priori) des observations une suite  $L^{(n)}$  de  $K$  hyperplans de régression, et une l'inadéquation des hyperplans aux groupes formés (on montre le lien entre ce critère et le test de Chow) en utilisant de façon alternative une fonction d'identification (constitution de  $P$ ) et une fonction de représentation (constitution de  $L$ ). Nous résolvons ainsi le problème indiqué en 2) par un algorithme moins sujet à caution que ceux supposant l'existence d'une variable supplémentaire  $Z$  dont il faut fixer le seuil  $Z_0$ , et moins coûteux que celui de Mc Gee.

Nous généralisons ces modèles aux cas où les résidus suivent sur chaque groupe une distribution normale spécifique en variance (d'où les liens avec les problèmes de mélange de lois). Nous introduisons les notions d'inverse généralisée et de ridge régression, afin d'éviter une reconstitution illusoire du phénomène étudié. Puis nous appliquons cette méthode aux modèles des moindres carrés généralisés, des moindres valeurs absolues, de régression orthogonale (d'où les liens avec l'analyse factorielle typologique 1975 [17]), à erreurs sur les variables, autorégressifs.

D'autre part dans le cadre de la régression typologique nous abordons les problèmes de reconnaissance des formes. En utilisant les méthodes de régression sous contraintes linéaires locales et la classification non hiérarchique nous donnons des algorithmes de mémorisation condensée de courbes, (courbes de niveaux d'altitudes en cartographie automatique, par exemple). Ces algorithmes permettent à la reconstitution d'être continue, à dérivées continues ou spline. (Les raccords en pente et en courbure, dans le cas de courbes d'altitudes, semblent nécessaires à une bonne représentation du profil).

Enfin nous étendons les modèles de régression typologique (utilisables dans le cas de variables quantitatives) aux situations dans lesquelles nous désirons expliquer une variable ordinale, qualitative ou quantitative par un groupe de variables hétérogènes (mélange de variables ordinales, qualitatives, quantitatives). Nous donnons un algorithme qui de façon itérative fournit simultanément la partition des observations, les hyperplans locaux de régression et les codages associés aux variables.

## II. - METHODE LOCALE DES MOINDRES CARRES ORDINAIRES

Dans ce paragraphe nous proposons une méthode permettant de détecter K régimes locaux de régression et les K hyperplans associés de façon à minimiser un critère mesurant l'inadéquation des sous échantillons à leurs représentations linéaires.

Nous rappelons tout d'abord les résultats classiques de la régression et introduisons les inverses généralisées.

### 1. Rappels théoriques et inverses généralisées [15] [19]

Le modèle de régression linéaire multiple s'écrit habituellement :

$$\forall n = 1, N$$

$$y_n = b_1 x_{n1} + b_2 x_{n2} + \dots + b_m x_{nm} + \varepsilon_n$$

avec  $E \varepsilon_n = 0$

$$E \varepsilon_n \varepsilon_{n'} = \delta_{nn'} \sigma^2 \quad 0 < \sigma^2 < \infty$$

ou matriciellement :

$$\begin{array}{ll} Y = Xb + \varepsilon & Y \text{ vecteur } (N, 1) \\ E \varepsilon = 0 & \text{avec } X \text{ matrice } (N, m) \\ V \varepsilon = \sigma^2 I_N & b \text{ vecteur } (m, 1) \\ & \varepsilon \text{ vecteur } (N, 1) \end{array}$$

La méthode des moindres carrés ordinaires consiste à choisir pour estimateur  $\hat{b}$  de  $b$  le vecteur qui rend minimum dans l'échantillon la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées  $y_n$  et les valeurs ajustées  $\hat{y}_n$  de la variable dépendante, ce qui s'écrit :

$$\text{Min}_b \sum_{n=1}^N (y_n - \sum_{e=1}^m b_e x_{ne})^2$$

ou matriciellement :

$$\underset{b}{\text{Min}} (Y-Xb)'(Y-Xb) = \underset{b}{\text{Min}} S(b)$$

Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\frac{\delta S}{\delta b}(\hat{b}) = -2 X'Y + 2 X'X \hat{b} = 0$$

Les conditions du second ordre sont :

$$\frac{\delta^2 S}{\delta b \delta b'}(\hat{b}) = 2 X'X$$

et nous assurent que l'on obtient un minimum d'où

$$\underline{X'X \hat{b} = X'Y}$$

Deux cas se présentent alors :

- . X'X inversible, bien conditionnée
- . X'X non inversible ou mal conditionnée

Dans le premier cas on obtient le résultat classique :

$$\underline{\hat{b} = (X'X)^{-1} X'Y}$$

Dans le second (cas de multicollinéarité, variables non orthogonales...) nous devons introduire la notion d'inverse généralisée.

### Définition

Soit A une matrice (m,n) de rang p. On appelle inverse généralisée de A une matrice notée  $A^-$ , de format (n,m) telle que :

$$A A^- A = A$$

Nous allons montrer qu'une telle matrice existe. Considérons la matrice  $AA'$  : elle est carrée  $(m,m)$ , symétrique de rang  $p$  et définie non négative. On peut donc la diagonaliser et comme elle admet  $p$  valeurs propres positives et  $(m-p)$  valeurs propres nulles, il existe une matrice  $P$  orthogonale telle que :

$$PAA'P' = \begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } P' = P^{-1} \quad \text{et } \Lambda_p = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{bmatrix}$$

$(m,m)$                        $(p,p)$

Partitionnons alors  $P$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} P_1 \text{ de format } (p,m) \\ P_2 \text{ de format } (m-p,m) \end{array}$$

Par suite de l'orthogonalité de  $P$  on a

$$PP' = \begin{bmatrix} P_1P_1' & P_1P_2' \\ P_2P_1' & P_2P_2' \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = P'P = \begin{bmatrix} P_1'P_1 & P_1'P_2 \\ P_2'P_1 & P_2'P_2 \end{bmatrix}$$

ce qui implique

$$P_1'P_1 = I = P_1'P_1$$

Par ailleurs on a :

$$PAA'P' = \begin{bmatrix} P_1AA'P_1' & P_1AA'P_2' \\ P_2AA'P_1' & P_2AA'P_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où

$$P_1'AA'P_1' = \Lambda_p$$

$$\Rightarrow P_1'P_1AA'P_1' = P_1'\Lambda_p \quad \text{et puisque } P_1'P_1 = I$$

$$AA'P_1' = P_1'\Lambda_p$$

Comme

$$P_1' P_1 A = A, \text{ si nous définissons la matrice } G \text{ par } G = A' P_1' \Lambda_p^{-1} P_1$$

alors  $G$  est une inverse généralisée de  $A$

En effet :

$$\begin{aligned} AGA &= AA' P_1' \Lambda_p^{-1} P_1 A = P_1' \Lambda_p \Lambda_p^{-1} P_1 A \\ &= P_1' P_1 A \\ &= A \end{aligned}$$

En conclusion  $G$  existe toujours. Montrons qu'elle n'est pas l'unique inverse généralisée de  $A$ .

### Théorème

Soit  $G$  une inverse généralisée particulière de  $A$ .

Alors  $\forall B$  matrice  $(n,m)$  la matrice  $G + B - GABAG$  est aussi une inverse généralisée de  $A$ ,

### démonstration

Sachant que  $AGA = A$  il suffit de vérifier que

$$A(G+B - GABAG) A = A$$

En effet en développant nous obtenons :

$$AGA + ABA - AGABAGA = A + ABA - ABA = A$$

### Remarque :

Si  $A$  est inversible alors  $G = A^{-1}$ , d'où y a-t-il d'autres inverses généralisées que  $A^{-1}$ ? Le théorème suivant répond non, puisque si  $G = A^{-1}$ ,  $H=G$  et  $B=0$ .

### Théorème

Pour tout autre inverse généralisée  $H$  de  $A$  il existe une matrice  $B$   $(n,m)$  telle que  $H=G+B-GABAG$

### démonstration

$$\begin{aligned} \text{Sachant que } AHA=A, \text{ choisissons } B=H-G \text{ et vérifions que } H=G+B-GABAG \\ G+B-GABAG &= G+H-G-GAHAG+GAGAG \\ &= H-GAG+GAG \\ &= H \end{aligned}$$

Donc il existe toujours une et en général une infinité d'inverses généralisées de A. De plus si A est inversible,  $A^{-} = A^{-1}$  est unique.

### Application aux systèmes linéaires

$$\text{Soit le système } \begin{matrix} A & \hat{b} & = & g \\ (m,n) & (n,1) & & (m,1) \end{matrix}$$

avec  $\text{rang } A = p < \text{Min } (m,n)$

### Définition

On dit que le système ci-dessus est compatible si pour A et g donnés, il admet au moins une solutions en  $\hat{b}$

### Théorème

$$A \hat{b} = g \text{ compatible } \Leftrightarrow AA^{-} g = g \quad \forall A^{-}$$

### démonstration

$\Rightarrow$  S'il existe une solution  $\hat{b}_0 / A \hat{b}_0 = g$  alors pour toute inverse généralisée  $A^{-}$  on a

$$AA^{-} g = AA^{-} A \hat{b}_0 = A \hat{b}_0 = g$$

$\Leftarrow$  Soit G une inverse généralisée particulière de A telle que  $AGg = g$ . Alors Gg est une solution du système et celui-ci est compatible.

### Théorème

Si le système  $A \hat{b} = g$  est compatible il admet pour solution générale

$$\hat{b} = A^{-} g + (I - A^{-} A) h \quad \begin{matrix} \forall A^{-} \\ \forall h \text{ vecteur de } \mathbb{R}^n \end{matrix}$$

### démonstration

Il s'agit de montrer que si  $AA^{-} g = g$  alors

1)  $\forall A^{-}$  et h  $\hat{b} = A^{-} g + (I - A^{-} A) h$  est tel que  $A \hat{b} = g$ , ce qui est immédiat puisque

$$A \hat{b} = AA^{-} g = g$$

2)  $\forall \hat{b}_0$  tel que  $A \hat{b}_0 = g$ ,  $\exists A^-$  et  $h$  tels que  $\hat{b}_0 = A^-g + (I - A^- A) h$

Il suffit pour cela de prendre  $h = \hat{b}_0$  et n'importe quelle matrice  $A^-$ .

Ainsi dans le cadre de la régression nous obtenons si

$$\begin{array}{ll} A &= X'X, \quad g = X'Y \\ (m,m) & \quad (m,1) \end{array}$$

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} X'Y + (I - (X'X)^{-1} X'X) h$$

Pour évaluer  $(X'X)^{-1}$  nous pouvons utiliser la méthode due à GAUSS-DOOLITTLE ([19]).

Nous rappelons ci-dessous quelques résultats et tests statistiques permettant de juger la validité de la régression.

— Dans le cas où le modèle contient un terme constant (une des variables explicatives constante et égale à 1 sur tout l'échantillon) on mesure l'adéquation du modèle à l'échantillon par le coefficient de détermination  $R^2$

$$R^2 = 1 - \frac{\text{variance résiduelle}}{\text{variance totale}} = 1 - \frac{\hat{\epsilon}' \hat{\epsilon}}{(y - \bar{y}e)'(y - \bar{y}e)}$$

où  $\hat{\epsilon} = \hat{y} - y$ ,  $e = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$  vecteur  $(N,1)$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n$

Remarque :

Dans le cas d'un modèle sans constante (cas restrictif puisqu'il impose à l'hyperplan de régression de passer par l'origine) on mesure cette adéquation par

$$\frac{\hat{y}'\hat{y}}{y'y} = 1 - \frac{\hat{\epsilon}' \hat{\epsilon}}{y'y}$$

— L'estimateur de  $\sigma^2$  est donné par  $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\epsilon}' \hat{\epsilon}}{N - m}$  (estimateur sans biais)

. La matrice de covariances de  $\hat{b}$  est donnée par

$$V(\hat{b}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

$$\text{Donc } \widehat{V}(\hat{b}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}$$

si  $(X'X)^{-1}$  existe. Nous donnerons au §3, les matrices de covariances lorsque  $(X'X)^{-1}$  n'existe pas ou lorsque  $(X'X)$  est mal conditionnée.

Les résultats rappelés ci-dessus seront utilisés sur chacun des sous ensembles d'observations donc après que le découpage en K classes ait été effectué.

## 2. L'algorithme

L'algorithme de régression typologique a été proposé par E. DIDAY (1976, [8]). Nous le reprenons ici dans un cadre plus général en introduisant l'inverse généralisée et la ridge-régression. Il est basé sur la construction de trois fonctions f, g et w.

La fonction f fournit la partition, la fonction g, les hyperplans, et W mesure la validité des résultats. Une itération de l'algorithme consiste en l'application des trois fonctions f, g et w successivement.

### 2.1. - Les notations employées

. Les données se présentent sous la forme de N lignes et (m+1) colonnes notées  $(X^1 \dots X^m, y)$  où le i<sup>ème</sup> élément est  $z_i = (X_i^1 \dots, X_i^m, y_i) \quad \forall i = 1, N$

.  $(X^1 \dots X^m)$  sont les m variables explicatives

. y est la variable à expliquer

#### Définitions

On appellera espace des noyaux  $\mathbb{L}_K = \{ (L_1 \dots L_K) \}$  l'ensemble des vecteurs

$(L_1 \dots L_K)$  où

$$L_j = \begin{bmatrix} b_j^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_j^m \end{bmatrix} = B_j = \text{vecteur des coefficients de régression}$$

On a ainsi  $\mathbb{L}_K = \mathbb{R}^{mK}$

On appellera espace des partitions  $\mathbb{P}_K = \{ (P_1 \dots P_K) \}$  l'ensemble des des partitions en K classes au plus des observations

.  $n_j = \text{Card} (P_j) \quad \forall j = 1, K$

.  $z_i^j = i^{\text{ème}} \text{élément de } P_j, \text{ vecteur à } (m+1) \text{ composantes}$

On a alors :

$$Z^j = \begin{bmatrix} z_1^j \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{n_j}^j \end{bmatrix}, \quad X^j = \begin{bmatrix} x_1^{1j} & \dots & x_1^{mj} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ x_{n_j}^{1j} & & x_{n_j}^{mj} \end{bmatrix}, \quad y^j = \begin{bmatrix} y_1^j \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n_j}^j \end{bmatrix}$$

$Z^j$  matrice  $(n_j, m+1)$

## 2.2. - Le critère

L'algorithme consiste en la recherche simultanée d'une partition en K classes de l'ensemble des observations et des K hyperplans de régression associés de façon à minimiser le critère :

$$\begin{aligned}
 W : \mathbb{L}_K \times \mathbb{P}_K &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\
 W(L, P) &= \sum_{j=1}^K \left\| y^j - X^j B_j \right\|_{\mathbb{R}}^2 n_j \\
 &= \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (y_i^j - X_i^j B_j)^2 \\
 &= \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (y_i^j - \sum_{e=1}^m x_i^{ej} b_j^e)^2
 \end{aligned}$$

On minimise la somme des carrés des résidus associés à la partition en K classes des N observations. Il s'agit de trouver le couple  $(L^*, P^*)$  tel que :

$$W(L^*, P^*) = \min_{\mathbb{L}_K \times \mathbb{P}_K} W(L, P)$$

## 2.3. - Les fonctions f et g

La fonction d'identification f est une application de  $\mathbb{L}_K$  dans  $\mathbb{P}_K$

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{L}_K &\longrightarrow \mathbb{P}_K \\
 f : L &\longrightarrow P = (P_1, \dots, P_K)
 \end{aligned}$$

### Définition

Soit  $d : E \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction de proximité entre un individu et un noyau définie par :

$$d(Z, B_i) = (y - X B_i)^2$$

où  $X = (x^1 \dots x^m)$

$Z = (X, y)$

$E =$  ensemble des observations

On définit alors  $P_i$  ( $\forall i = 1, K$ ) par :

$$P_i = \{Z \mid d(Z, B_i) < d(Z, B_j) \forall j \neq i\}$$

Dans le cas où  $\exists j / d(Z, B_i) = d(Z, B_j)$  on affecte  $Z$  à  $P_{i \wedge j}$ , c'est à-dire à la classe de plus petit indice.

La fonction de représentation  $g$  est une application de  $\mathbb{P}_K$  dans  $\mathbb{L}_K$

$$g : \mathbb{P}_K \rightarrow \mathbb{L}_K$$

$$g : P \rightarrow L = (L_1 \dots L_K) = (B_1 \dots B_K)$$

où  $B_j$  minimise  $R(B, j, P) = \sum_{Z \in P_j} d(Z, B)$  et

$$R(B_j, j, P) = \text{Inf} \{R(B, j, P) / B \in R^m\}$$

d'où par les équations normales et en introduisant l'inverse généralisée :

$$B_j = B_j(h) = ((X^j)'(X^j))^{-1} (X^j)' y^j + (I_m - ((X^j)'(X^j))^{-1} (X^j)'(X^j)) \cdot h$$

où  $h$  est un vecteur quelconque de  $R^m$ .

Afin d'éviter que la reconstitution de la variable  $y^j$  ne se fasse à l'aide de termes de valeurs élevées (qui se retranchant donnent une reconstitution illusoire de  $y^j$ ) nous choisirons pour  $B^j$  le  $B^j(h)$  de norme minimale (cf. § 3 et annexe 2).

2.4. - Les suites  $u_n$  et  $v_n$

La suite  $v_n$  est définie par :

.  $v^{(0)} = (L^{(0)}, P^{(0)})$  où  $P^{(0)}$  (ou  $L^{(0)}$ ) est tirée au hasard ou estimée

.  $v^{(n+1)}$  est déduit de  $v^{(n)}$  par

$$L^{(n+1)} = g(P^{(n)}) \text{ et } P^{(n+1)} = f(L^{(n+1)})$$

La suite  $u_n$  est définie par  $u_n = W(v_n)$

2.5. - La convergence de l'algorithme

Théorème : La suite  $u_n$  converge en décroissant

démonstration

Montrons [1]  $W(L^{(n)}, P^{(n)}) \geq W(L^{(n+1)}, P^{(n)})$

$$[2] \quad W(L^{(n+1)}, P^{(n)}) \geq W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)})$$

[1] et [2]  $\Rightarrow u_n$  non croissante.

Pour [1]

$$W(L^{(n)}, P^{(n)}) = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (y_i^j - x_i^j B_j^{(n)})^2$$

$$W(L^{(n+1)}, P^{(n)}) = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (y_i^j - x_i^j B_j^{(n+1)})^2$$

or  $B_j^{(n+1)}$  est  $\forall j = 1, K$  l'élément qui minimise

$$R(B, j, P^{(n)}) = \sum_{z \in P_j^{(n)}} d(z, B) \text{ avec } z = (X, y)$$

donc on a [1]

Pour [2]

$$\text{On a } W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)}) = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n'_j} (y_i^j - x_i^j B_j^{(n+1)})^2$$

$$\text{où } |P_j^{(n+1)}| = n'_j$$

Dans  $W(L^{(n+1)}, P^{(n)})$  et  $W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)})$  on ne retrouve chaque élément qu'une fois et une seule.

Soit  $i(X,y)$  l'indice de la classe à laquelle appartient  $(X,y)$  dans  $P^{(n)}$ .  
Soit  $i'(X,y)$  ce même indice dans  $P^{(n+1)}$ .

On a alors

$$W(L^{(n+1)}, P^{(n)}) = \sum_{z \in E} d(z, B_{i(X,y)}^{(n+1)}) \quad \text{ou } z = (X,y)$$

$$W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)}) = \sum_{z \in E} d(z, B_{i'(X,y)}^{(n+1)})$$

Par construction de  $P^{(n+1)}$  on a

$$d(z, B_{i(X,y)}^{(n+1)}) \geq d(z, B_{i'(X,y)}^{(n+1)}) \quad \forall z \in E$$

donc en sommant on a [2]

De [1] et [2] on a  $u_n$  non croissante. Or  $u_n$  est minorée par 0, donc  $u_n$  est convergente.

La convergence s'effectue en un nombre fini d'étapes puisque  $\mathbb{P}_K$  est fini et que les éléments de la suite  $L^{(n)}$  appartiennent à  $g(\mathbb{P}_K) \subset \mathbb{L}_K$  avec  $g(\mathbb{P}_K)$  fini.

Théorème : La suite  $(L^{(n)}, P^{(n)})$  converge vers un élément non biaisé c'est-à-dire que  $(L^{(n)}, P^{(n)}) \rightarrow (L,P) = (\text{gof}(L), f(L))$

démonstration

On sait que  $u_n$  converge et atteint sa limite donc  $\exists N/\forall n > N$

$$W(L^{(n)}, P^{(n)}) = W(L^{(N)}, P^{(N)})$$

Mais on a  $W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)}) \leq W(L^{(n+1)}, P^{(n)}) \leq W(L^{(n)}, P^{(n)})$

d'où  $W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)}) = W(L^{(n+1)}, P^{(n)}) = W(L^{(n)}, P^{(n)})$

La dernière égalité s'écrit

$$\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (y_i^j - X_i^j B_j^{(n+1)})^2 = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (y_i^j - X_i^j B_j^{(n)})^2$$

Par construction des  $B_j^{(n+1)}$  on a

$$\sum_{i=1}^{n_j} (y_i^j - X_i^j B_j^{(n+1)})^2 \leq \sum_{i=1}^{n_j} (y_i^j - X_i^j B_j^{(n)})^2 \quad \forall j = 1, K$$

L'égalité n'est possible que si

$$\sum_{i=1}^{n_j} (y_i^j - X_i^j B_j^{(n+1)})^2 = \sum_{i=1}^{n_j} (y_i^j - X_i^j B_j^{(n)})^2 \quad \forall j = 1, K$$

$$\Rightarrow B_j^{(n+1)} = B_j^{(n)} \quad \forall j = 1, K \Rightarrow L^{(n+1)} = L^{(n)}$$

$$\text{Comme } P^{(n+1)} = f(L^{(n+1)}) = f(L^{(n)}) \Rightarrow P^{(n)} = P^{(n+1)}$$

$$\text{donc } \exists N \forall n > N \quad (L^{(n)}, P^{(n)}) = (L^{(N)}, P^{(N)})$$

La suite  $(L^{(n)}, P^{(n)})$  est une suite convergente. Soit  $(L, P)$  la limite. On a

$$(L, P) = (L^{(n+1)}, P^{(n+1)}) \quad \forall n > N$$

$$\text{De plus } P^{(n)} = f(L^{(n)}) \Rightarrow P = f(L)$$

$$\text{et } L^{(n+1)} = g(P^{(n)}) \Rightarrow L = g(P) = \text{gof}(L)$$

$$\Rightarrow (L, P) = (\text{gof}(L), f(L)) \Rightarrow (L, P) \text{ non biaisé}$$

### 3. - Protection de la régression

Lors du déroulement itératif de l'algorithme trois situations peuvent se présenter :

- la matrice  $X'X$  d'une classe est non inversible car le nombre d'individus est inférieur au nombre de variables explicatives.

- la matrice  $X'X$  est mal conditionnée ce qui peut se produire lorsque le nombre d'individus devient relativement faible par rapport au nombre de variables explicatives. L'estimation est alors de mauvaise qualité au sens où les variances des paramètres sont élevées.

- la matrice  $(X'X)$  est bien conditionnée (inversible) et on peut évaluer la solution classique des moindres carrés.

Pour résoudre les deux premiers cas nous utiliserons les techniques de Ridge Regression et d'inverse généralisée. Nous supposons dans la suite du § que les variables explicatives sont centrées et réduites ainsi que la variable à expliquer.

#### La Ridge Régression [5 bis], [12 ter], [12 (4)].

Dans le cas de variables explicatives non orthogonales, la matrice de corrélations est "éloignée" de la matrice identité.

L'estimateur des moindres carrés tend à être de norme élevée et ses coefficients peuvent avoir un mauvais signe.

En effet soit le modèle :

$$Y = Xb + \epsilon \quad E \epsilon = 0, \quad V\epsilon = \sigma^2 I$$

$$\text{On a } \hat{b} = (X'X)^{-1} X'Y$$

Calculons la distance de  $\hat{b}$  à  $b$

$$E (\hat{b}-b)'(\hat{b}-b) = E (\text{trace } (\hat{b}-b)'(\hat{b}-b))$$

puisque  $(\hat{b}-b)'(\hat{b}-b) \in \mathbb{R}$

$$\text{Or } \left. \begin{array}{l} \hat{b} = (X'X)^{-1} X'Y \\ Y = Xb + \epsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{b} = (X'X)^{-1} X'(Xb + \epsilon)$$

$$\Rightarrow \hat{b} = b + (X'X)^{-1} X' \epsilon$$

d'où

$$\begin{aligned}(\hat{b}-b)'(\hat{b}-b) &= ((X'X)^{-1} X'\epsilon)'((X'X)^{-1} X'\epsilon) \\ &= \text{trace} ((X'X)^{-1} X'\epsilon)'((X'X)^{-1} X'\epsilon) \\ &= \text{trace} ((X'X)^{-1} X'\epsilon)(\epsilon'X (X'X)^{-1})\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}E(\hat{b}-b)'(\hat{b}-b) &= \text{trace} ((X'X)^{-1} X') \sigma^2 (X(X'X)^{-1}) \\ &= \sigma^2 \text{trace} (X'X)^{-1}\end{aligned}$$

Soient  $(\lambda_i)_{i=1,m}$  les  $m$  valeurs propres de  $X'X$ , donc  $(1/\lambda_i)_{i=1,m}$

celles de  $(X'X)^{-1}$ . On a alors :

$$E(\hat{b}-b)'(\hat{b}-b) = \sigma^2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i}$$

donc si  $\lambda_{\text{Max}} = \lambda_1 > \lambda_2 \dots > \lambda_m = \lambda_{\text{min}} > 0$

$$E(\hat{b}-b)'(\hat{b}-b) > \sigma^2 \frac{1}{\lambda_m}$$

Si la matrice des corrélations est éloignée de la matrice identité alors  $\lambda_m$  est voisin de zéro, donc la distance de  $\hat{b}$  à  $b$  est grande, ce qui implique une mauvaise estimation.

Par contre si elle est proche de la matrice identité alors cette distance est voisine de  $m \sigma^2$ .

De plus

$$E(\hat{b}-b)'(\hat{b}-b) = E(\hat{b}'\hat{b}) - ||\hat{b}||^2$$

d'où

$$E(||\hat{b}||^2) = E(||\hat{b}-b||^2) + ||\hat{b}||^2$$

On peut donc avoir avantage dans ce cas à renoncer à trouver la solution de norme minimale des moindres carrés, au profit d'une solution assurant  $||\hat{b}||^2$  plus faible.

Pour résoudre ce problème nous allons introduire la ridge régression [12ter].

Dans la ridge régression on impose au vecteur  $\hat{b}$  d'avoir une norme pas trop grande de façon à éviter une fausse reconstitution de la variable à expliquer.

$$\text{On cherche } \hat{b} / \left\| Y - X \hat{b} \right\|^2 = \text{Min } \left\| Y - X b \right\|^2 \\ \{b / \left\| b \right\|^2 = \alpha\}$$

où  $\alpha$  est fixé a priori.

Par la méthode de Lagrange ce problème est équivalent à minimiser

$$L(b, \lambda) = \left\| Y - X b \right\|^2 + \lambda (\left\| b \right\|^2 - \alpha)$$

où  $\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange.

Par dérivation nous obtenons

$$- 2 X' Y + 2 X' X \hat{b} + 2 \lambda \hat{b} = 0$$

$$\text{d'où } (X'X + \lambda I) \hat{b} = X'Y$$

$$\text{et } \hat{b} = [(X'X) + \lambda I]^{-1} X'Y = \hat{b}(\lambda)$$

$$\text{où } \lambda \text{ est choisi tel que } \left\| \hat{b} \right\|^2 = \alpha$$

#### Proposition

- .  $\forall \lambda > 0$   $(X'X + \lambda I)$  est une matrice inversible de sorte que  $\hat{b}(\lambda)$  est unique.
- .  $(X'X + \lambda I)$  est mieux conditionnée que  $(X'X)$  au sens où ses valeurs propre sont plus élevées de  $\lambda$ .

#### Démonstration

En effet soit  $A = X'X$ . On a  $A = SDS'$  où  $S$  est la matrice des vecteurs propres orthonormés de  $A$  et  $D$  la matrice diagonale des valeurs propres de  $A$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned} A+\lambda I &= SDS' + \lambda I \\ &= SDS' + \lambda SS' \text{ puisque } SS' = I \\ &= S (D+\lambda I) S' \end{aligned}$$

d'où  $(D+\lambda I)$  matrice diagonale des valeurs propres de  $(X'X+\lambda I)$ .

Ainsi  $(X'X+\lambda I)$  a mêmes vecteurs propres que  $X'X$ .

Si  $X'X$ , non négative, a pour valeurs propres  $\lambda_i \geq 0$  alors  $X'X+\lambda I$  a pour valeurs propres  $\lambda+\lambda_i > 0$  donc  $(X'X+\lambda I)$  régulière  $\forall \lambda > 0$ .

#### Proposition

La matrice de covariance des paramètres s'écrit

$$V(\hat{b}) = \sigma^2 (X'X+\lambda I)^{-1} (X'X) (X'X+\lambda I)^{-1}$$

#### démonstration

Soit  $\hat{b}$  l'estimateur de la ridge régression et  $\hat{\beta}$  celui des moindres carrés.

On a :

$$\begin{aligned} X'Y &= (X'X) \hat{\beta} \\ \text{et } \hat{b} &= (X'X+\lambda I)^{-1} X'Y \\ \text{d'où } \hat{b} &= (X'X+\lambda I)^{-1} (X'X) \hat{\beta} \\ \text{et } V\hat{b} &= (X'X+\lambda I)^{-1} (X'X) V\hat{\beta} (X'X) (X'X+\lambda I)^{-1} \\ \text{or } V\hat{\beta} &= \sigma^2 (X'X)^{-1} \\ \text{d'où } V\hat{b} &= \sigma^2 (X'X+\lambda I)^{-1} (X'X) (X'X+\lambda I)^{-1} \end{aligned}$$

#### Détermination de la valeur de $\lambda$

Suivant [12(4)], pour déterminer la valeur de  $\lambda$  on peut utiliser un processus itératif qui pour différentes valeurs de  $\lambda$  ( $\lambda=0; 0,1; 0,2\dots$ ) évalue  $\hat{b}$ . On s'arrête dès que les valeurs des coefficients se sont stabilisées, c'est-à-dire lorsque pour chaque composante l'accroissement relatif des coefficients correspondant à une variation de  $\lambda$ , devient inférieur à

un seuil fixé. Cette procédure est utile lorsqu'on ne connaît pas a priori la valeur à donner à  $\alpha$ . Elle est justifiée par le fait que  $\|\hat{b}(\lambda)\|^2$  est une fonction décroissante de  $\lambda$  au voisinage de 0 et pour  $\lambda \geq 0$ , et que le minimum est atteint pour une valeur positive de  $\lambda$  (cf. 12 [4])

### L'inverse généralisée

D'après MARQUARDT [16], les inverses généralisées sont particulièrement intéressantes dans le cas où une ou plusieurs valeurs propres de la matrice de corrélations sont nulles ; la ridge régression étant plus adaptée au cas de valeurs propres voisines de zéro.

Nous allons introduire une nouvelle méthode de calcul de l'inverse généralisée, en utilisant le calcul des valeurs propres. Soit  $A = X'X$ . Soient  $D$  la matrice diagonale des valeurs propres ordonnées  $\lambda_1 > \lambda_2 \dots > \lambda_m$  ;  $S$  la matrice des vecteurs propres orthonormés associés. On a  $S'AS = D$  où  $S'S = I$  d'où  $A^{-1} = S D^{-1} S'$  si  $A$  inversible.

Supposons  $A$  de rang  $r$ , de telle sorte que les  $(m-r)$  derniers éléments de  $D$  soient égaux à zéro (ou voisins).

On a ainsi  $S = (S_r, S_{m-r})$  où  $S_r$  est  $(m, r)$

$S_{m-r}$  est  $(m, m-r)$

$$D = \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & D_{m-r} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{où } D_r \text{ est } (r, r) \\ D_{m-r} \text{ est } (m-r, m-r) \end{array}$$

Si  $D_{m-r} = 0$  alors par définition  $D_{m-r}^{-1} = 0$

$$\text{d'où } A_r^{-1} = S_r D_r^{-1} S_r' \quad \text{ou } A_r^{-1} = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\lambda_i} S_i S_i'$$

où  $S_i$  est le vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda_i$ .

Pour choisir  $r$  on peut utiliser le critère suivant :

on teste  $\frac{\lambda_m}{\text{Trace D}}$  . Si  $\frac{\lambda_m}{\text{Trace D}} > \omega$  où  $\omega = 10^{-5}$  par exemple on admet  $r = m$

sinon on teste  $\frac{\lambda_m + \lambda_{m-1}}{\text{Trace D}}$  par rapport à  $\omega$

Si  $\frac{\lambda_m + \lambda_{m-1}}{\text{Trace D}} > \omega \Rightarrow r = m-1$ . Sinon on itère.

A l'ordre  $k$  si  $\frac{\sum_{i=m-k}^{m-1} \lambda_i}{\text{trace D}}$  est supérieur à  $\omega$  alors  $r = m-k$

sinon on passe à l'ordre  $(k+1)$ .

#### Interprétation géométrique de la détermination de l'inverse généralisée de Marquardt

Soit  $A$  matrice carrée  $(m,m)$  de rang  $r$  dont on veut une inverse généralisée. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^m$  associé à  $A$ . On considère  $\text{Im}(A) = f(\mathbb{R}^m)$ . La restriction de  $f$  à  $\text{Im}(A)$  rapportée à la base orthonormée engendrée par les  $r$  premiers vecteurs propres de  $A$  est représentée par la matrice  $D_r$ .  $D_r^{-1}$  représente dans  $\text{Im}(A)$  l'application inverse  $f^{-1}$  qui restreinte à  $\text{Im}(A)$  est une surjection.  $A_r^- = S_r D_r^{-1} S_r'$  représente alors la même application  $f^{-1}$  de  $\text{Im}(A)$  dans  $\text{Im}(A)$  rapportée à la base initiale de  $\mathbb{R}^m$ .

Si on veut appliquer  $A_r^-$  à  $\mathbb{R}^m$  tout entier on constate que puisque  $S_r' z = 0 \forall z \in \perp \text{Im}(A)$   $A_r^-$  représente la composition  $f^{-1} \circ$  (projection orthogonale sur  $\text{Im}(A)$ ) et  $\text{Im}(A_r^-) = \text{Im}(A)$ . On reconnaît donc en  $A_r^-$  l'inverse généralisée telle que  $A A_r^- A = A$ , d'où le résultat suivant :

#### Proposition

Quand  $X$  n'est pas de plein rang la méthode de Marquardt donne la solution des moindres carrés, orthogonale à  $V_{\hat{b}}$ , variété affine lieu des solution  $\hat{b}$  quand  $Y$  est fixé c'es-à-dire la solution unique de norme minimale qui est recherchée par la ridge régression en faisant varier  $\lambda$ .

Démonstration

En effet  $V_b^\wedge$  est l'image inverse par  $g$ , application linéaire de  $R^m$  associée à  $X$ , de la projection orthogonale de  $Y$  sur  $\text{Im}(X)$ , sous espace vectoriel de dimension  $r$  de  $R^n$ .

$V_b^\wedge$  est parallèle à  $\text{Ker}(X) = \text{Ker}(X'X)$  car  $\text{Ker}(X'X) \supset \text{Ker} X$  et a même dimension  $m-r$  puisque  $\text{Rang}(X'X) = \text{Rang} X = r$

Or  $\hat{b} = (X'X)_r^{-1} X'Y \in V_b^\wedge$  et  $\hat{b} \in \text{Im}(X'X) = \text{Ker}^\perp(X'X) = V_b^\perp$  donc  $\hat{b} \in V_b \cap V_b^\perp$  ■

Méthode paratique du choix de  $r$ 

Elle revient à faire une analyse en composantes principales sur les lignes de  $X$ , c'est-à-dire sur le nuage des  $n$  valeurs de la variable explicative vectorielle  $\vec{X} \in R^m$  et à ne conserver que les  $r$  premiers facteurs (ou composantes principales) comme variables explicatives, le critère de rejet des  $(m-r)$  derniers étant basé sur le taux d'inertie expliqué par l'ensemble des facteurs rejetés. Cette méthode s'apparente donc à la régression orthogonale.

Proposition

La matrice de covariance associée à la solution de Marquardt est

$$V(\hat{b}) = \sigma^2 (S_r D_r^{-1} S_r') (X'X) (S_r D_r^{-1} S_r')$$

Démonstration

Nous avons

$$\hat{b} = S_r D_r^{-1} S_r' X'Y$$

et si  $\hat{\beta}$  est la solution des moindres carrés

$$X'Y = (X'X) \hat{\beta}$$

d'où

$$\hat{b} = (S_r D_r^{-1} S_r') (X'X) \hat{\beta}$$

et

$$V\hat{b} = (S_r D_r^{-1} S_r') (X'X) (V\hat{\beta}) (X'X) (S_r D_r^{-1} S_r')$$

or

$$V\hat{\beta} = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

d'où 
$$V\hat{b} = \sigma^2 (S_r D_r^{-1} S_r') (X'X) (S_r D_r^{-1} S_r')$$
 ■

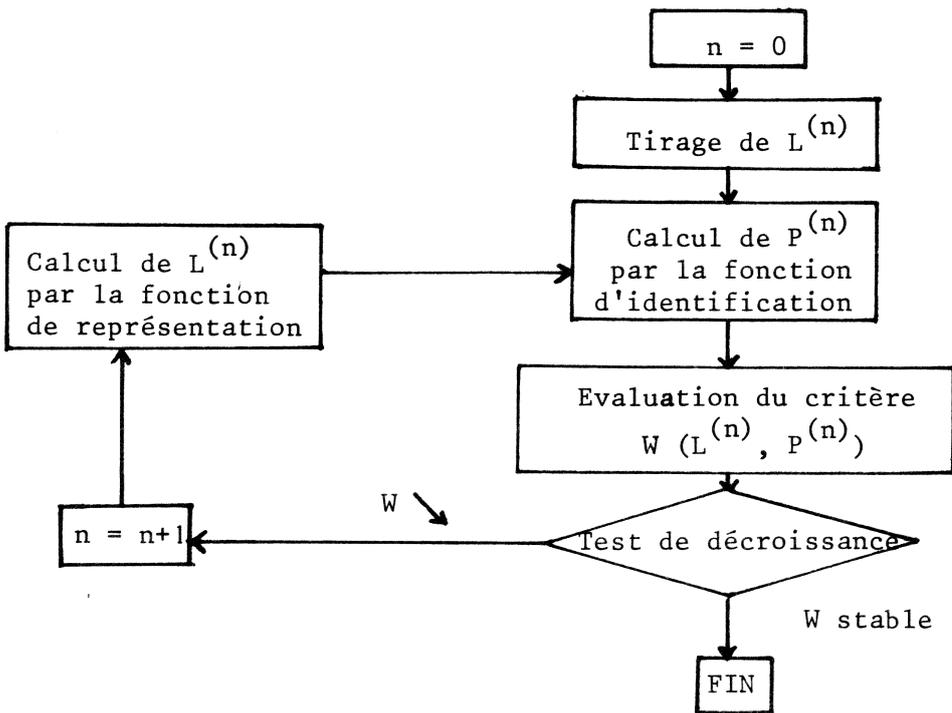
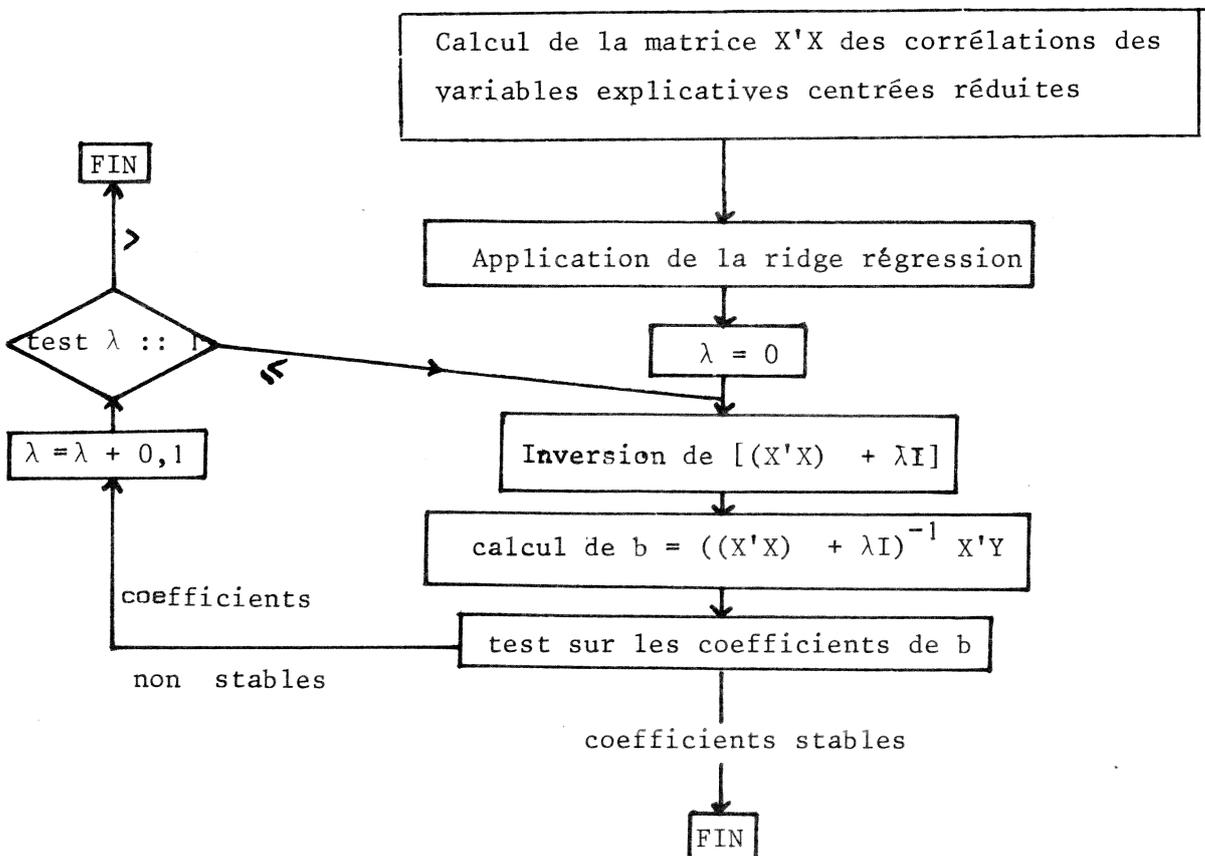
Remarque sur la convergence de l'algorithme

. La convergence de l'algorithme n'est généralement pas modifiée. Elle ne semble devoir l'être que lorsqu'on modifie la matrice  $(X'X)_j$  d'une classe  $j$  c'est-à-dire lors de l'utilisation de l'inverse généralisée au sens de Marquardt, si le rang  $r$  de  $(X'X)_j$  est mal évalué et si de plus les décroissances des variances résiduelles des autres classes ne compensent pas l'éventuelle croissance dans cette classe  $j$ .

✗ Le choix d'une inverse généralisée particulière ou d'un estimateur de la ridge régression pour une ou plusieurs classes lors d'une itération influe par l'intermédiaire de la fonction d'identification sur la construction de la partition suivante. Ainsi, bien que ne modifiant pas la valeur du critère lors de cette itération, cette procédure conduit à un certain minimum local à la convergence. Il se peut que le choix d'une autre inverse permette d'obtenir un meilleur minimum local.

← Très important

Reprendre les valeurs principales  
r comp. principale

3.2. - Schéma général de l'algorithmeCalcul de  $L^{(n)}$  (Ridge Régression)

### 3.3. - Programme informatique REGTYPO

L'algorithme précédemment décrit est programmé en Fortran.  
L'organigramme est semblable à 3.2. Il comporte 3 modes de calcul des estimateurs :

- . MODE = 0 inversion classique
- . MODE = 1 ridge regression  
(applicable aux modèles sans constante)
- . MODE = 2 inversion généralisée

Il nécessite en entrée :

- N : nombre d'observations
- K : nombre de classes
- m : nombre de variables explicatives
- ITER : nombre maximum d'itérations de l'algorithme
- $(L_1^{(0)} \dots L_K^{(0)})$  : noyaux initiaux (ou  $P_1^{(0)} \dots P_K^{(0)}$ )
- Y, X : données exogènes et endogènes

En sortie nous obtenons :

- .  $P = (P_1 \dots P_K)$ ,  $L = (L_1 \dots L_K)$ , W
  - . les estimateurs  $\sigma_j^2$   $j = 1, K$  des variances
  - . les matrices de variances des paramètres
- $$V(\hat{b}_j) = \sigma_j^2 (S_{rj} D_{rj}^{-1} S'_{rj}) (X'_j X_j) (S_{rj} D_{rj}^{-1} S'_{rj})$$

si  $\hat{b}_j$  est calculé par l'algorithme de Marquardt

et

$$V(\hat{b}_j) = \sigma_j^2 (X'_j X_j + \lambda_j I)^{-1} (X'_j X_j) (X'_j X_j + \lambda_j I)^{-1}$$

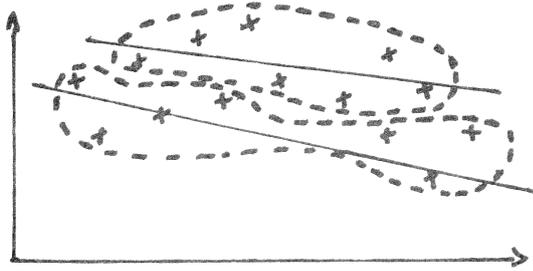
si  $\hat{b}_j$  est évalué par ridge régression

- . les  $R_j^2$   $j=1, K$ , carrés des coefficients de corrélation et un graphique des variables  $\hat{Y}$  et Y.

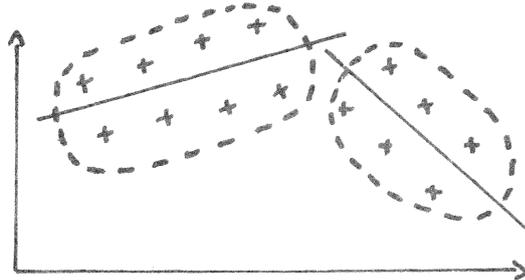
Ces derniers résultats sont donnés à titre indicatif puisque la partition changerait avec l'échantillon.

#### 4. - Elimination de l'effet de "cylindre"

L'effet de cylindre remarqué en analyse factorielle typologique ([17]) peut également s'introduire en régression typologique lorsque le tirage aléatoire de la partition initiale (ou des noyaux initiaux) est "malheureux", comme le montre l'exemple suivant :



Dans ce cas ( $m = 2$ ,  $K = 2$ ) le tirage aléatoire de  $P = (P_1 P_2)$  ne permettra pas de reconnaître la structure en deux classes homogènes de la population:



Il s'agit donc de modifier l'algorithme au niveau de ses premières itérations afin d'éliminer cet effet de cylindre.

##### 4.1. - Ellipsoïde d'un vecteur aléatoire ([15])

$$\text{Soient } z_i^j = (y_i^j, x_i^{j1}, \dots, x_i^{jm}) \quad \forall j = 1, K \\ \forall i = 1, n_j$$

les vecteurs à  $(m+1)$  dimensions définissant les individus.

Sur  $P_j$  nous avons ainsi  $n_j$  réalisations d'un vecteur  $Z^j$  à  $(m+1)$  dimensions

Soient  $\bar{Z}^j$  moyenne de  $Z_i^j$

$V_j$  matrice des covariances des  $Z_i^j$  de format  $(m+1, m+1)$  de rang  $r$

### Définition

Si  $r = m+1$  on appelle ellipsoïde du vecteur à  $(m+1)$  dimensions l'ensemble des vecteurs  $W$  à  $(m+1)$  dimensions tels que :

$$W' V_j^{-1} W \leq C_j^2 \text{ avec } C_j \text{ constante positive}$$

. Si  $C_j = 1$  alors on obtient l'ellipsoïde indicateur.

Si  $r < m+1$  alors il existe des vecteurs  $u$  non nuls tels que

$V_j u = 0$  d'où  $u' V_j u = 0$  donc par définition de  $V_j$  :

$$E \left[ u' (Z^j - \bar{Z}^j) \right]^2 = 0$$

$$\implies u' (Z^j - \bar{Z}^j) = 0$$

donc le vecteur  $(Z^j - \bar{Z}^j)$  appartient au sous espace vectoriel orthogonal à tous les vecteurs  $u$  vérifiant  $V_j u = 0$ .

On appelle support de  $Z^j - \bar{Z}^j$  cet espace de dimension  $r$

Soit  $R_j$  la matrice  $(m+1, m-r+1)$  de rang  $(m-r+1)$ , de vecteurs colonnes normés à 1 telle que  $V_j R_j = 0$ , définissant ce support. Ainsi  $R_j' Z_j = 0$

### Définition

Si  $r < m+1$  alors l'ellipsoïde est l'ensemble des vecteurs  $W$  tels que

$$W' (V_j + R_j R_j')^{-1} W \leq C_j^2$$

vérifiant  $R_j' W = 0$

4.2. - Les modifications apportées à l'algorithmeDéfinition

On appelle partie indicatrice de  $P_j$  l'ensemble des éléments de  $P_j$  intérieurs à l'ellipsoïde.

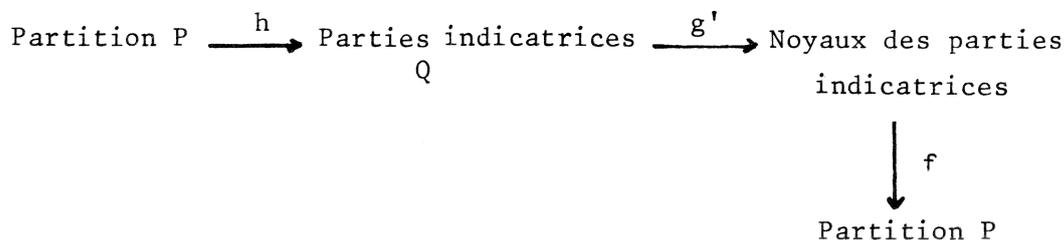
Soit  $Q_j$  cet ensemble défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} z \in P_j \quad (z \in Q_j \Leftrightarrow (z - \bar{z}_j)' v_j^{-1} (z - \bar{z}_j) \leq 1) \quad \text{si } r=m+1 \\ z \in P_j \quad (z \in Q_j \Leftrightarrow (z - \bar{z}_j)' (v_j + R_j R_j')^{-1} (z - \bar{z}_j) \leq 1) \quad \text{si } r < m+1 \end{array} \right.$$

Ainsi  $Q_j \subset P_j \quad \forall_j = 1, K$

$(Q_1 \dots Q_K)$  n'est pas une partition de  $E$

Pour les premières itérations l'algorithme aura la démarche suivante



avec :

$$h : \mathbb{P}_K \longrightarrow (\mathfrak{F}(E))^K$$

$$P_j \longrightarrow Q_j = \{z \in P_j \text{ intérieur à son ellipsoïde indicatrice}\}$$

$$g' : (\mathfrak{F}(E))^K \longrightarrow \mathbb{L}_K \text{ extension de } g \text{ à } (\mathfrak{F}(E))^K$$

$$f : \mathbb{L}_K \longrightarrow \mathbb{P}_K \text{ définie comme précédemment}$$

La convergence de l'algorithme n'est plus assurée lorsqu'on applique cette procédure (ceci est dû à la fonction h).

Toutefois n'étant appliquée que pendant quelques itérations la convergence est de nouveau acquise par la suite.

#### 4.3. - Taille des ellipsoïdes

Si on suppose que le vecteur  $Z^j$  à  $(m+1)$  composantes suit une loi de probabilité normale de moyenne  $\bar{Z}^j$  et de matrice de covariances  $V_j$  non singulière alors :

$$(Z^j - \bar{Z}^j)' V_j^{-1} (Z^j - \bar{Z}^j) \rightsquigarrow \chi_{m+1}^2$$

En effet si  $V_j$  inversible, il existe une matrice  $D$  telle que  $V_j = DD'$ . Alors  $\alpha = D^{-1} (Z^j - \bar{Z}^j)$  suit une loi normale de matrice de covariances

$$(D^{-1}) V_j (D^{-1})' = I$$

La somme des carrés de ses composantes suit un  $\chi_{m+1}^2$  et s'écrit :

$$\begin{aligned} \alpha' \alpha &= (Z^j - \bar{Z}^j)' (D^{-1})' (D^{-1}) (Z^j - \bar{Z}^j) \\ &= (Z^j - \bar{Z}^j)' V_j^{-1} (Z^j - \bar{Z}^j) \end{aligned}$$

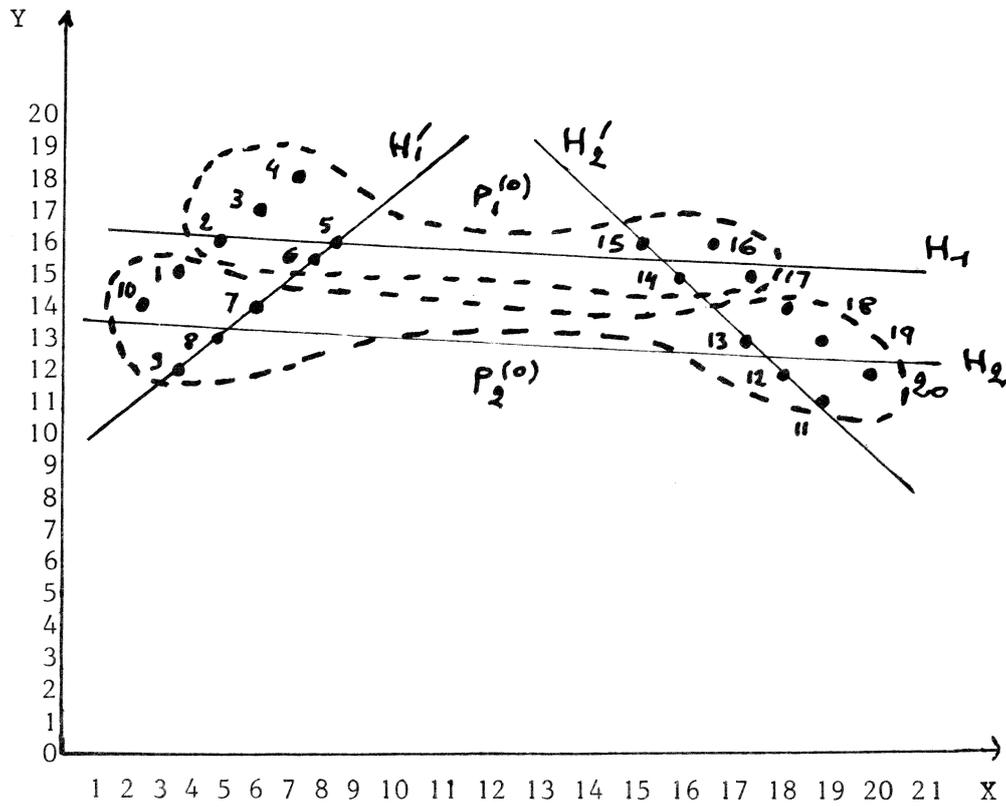
On peut ainsi calculer en fonction de  $(m+1)$  et du pourcentage  $\tau$  de la population désirée à l'intérieur de l'ellipsoïde la valeur de  $\chi_{m+1}^2$

telle que  $P(\chi^2 > \chi_{m+1}^2) = 1 - \tau$

et ainsi fixer  $C_j$

4.4. - Exemple d'application  $m = 2, K = 2$ 

Soit le nuage suivant :



$P_1^{(0)}, P_2^{(0)}$  classes initiales

Les hyperplans associés sont :

$$H_1 \quad y = -0,057 x + 16,5$$

$$H_2 \quad y = -0,05 x + 13,4$$

Calculons les ellipsoïdes indicateurs et les parties indicatrices.

$$P_1 \left| \begin{array}{l} V(x) = 32,06 \\ \text{Cov}(xy) = -1,8375 \\ V(y) = 0,822 \end{array} \right.$$

$$P_2 \left| \begin{array}{l} V(x) = 59,16 \\ \text{Cov}(xy) = -2,84 \\ V(y) = 0,96 \end{array} \right.$$

d'où

$$V_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0537 & 0,08 \\ 0,08 & 1,395 \end{bmatrix}$$

$$V_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0,02 & 0,058 \\ 0,058 & 1,214 \end{bmatrix}$$

On teste alors si pour  $j = 1$  ou  $2$

$$(x - \bar{x}, y - \bar{y}) V_j^{-1} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix} \leq 1$$

d'où

$$Q_1 = \{5,6\} \quad Q_2 = \{12, 13\}$$

qui donneront les hyperplans  $H_1^1$  et  $H_2^1$  passant par les points (5,6) et (12, 13) respectivement.

Autour de ces points s'agrégeront les classes

$$P_1^1 = \{1,2,3,\dots, 10\}$$

$$P_2^1 = \{11,12, \dots, 20\}$$

ainsi reconnues pour lesquelles on évaluera les hyperplans associés.

### 5. Choix optimal du nombre de classes

Quelle que soit la méthode de classification utilisée le problème du choix du nombre de classes se pose. En pratique on calcule un (ou plusieurs) indice permettant d'évaluer ce nombre de classes.

Nous en présenterons deux. Le premier est:

$$c(K) = \frac{\text{variance résiduelle inter-classes}}{\text{variance résiduelle totale}}$$

où  $K$  est le nombre de classes.

L'inertie résiduelle totale s'écrit:

$$\sum_{j=1}^K \sum_{i \in P_j} (Y_j^i - \hat{Y}_j^i)^2$$

où  $\hat{Y}_j^i$  est la valeur calculée de  $Y_j^i$  par une régression globale.

Soit  $\hat{Y}_j^{iL}$  la valeur calculée de  $Y_j^i$  par la méthode de régression typologique en  $K$  classes. Montrons que l'on a:

$$\sum_{j=1}^K \sum_{i \in P_j} (Y_j^i - \hat{Y}_j^i)^2 = \sum_{j=1}^K \sum_{i \in P_j} (Y_j^i - \hat{Y}_j^{iL})^2 + \sum_{j=1}^K \sum_{i \in P_j} (\hat{Y}_j^{iL} - \hat{Y}_j^i)^2$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} \text{variance résiduelle totale} &= \text{variance résiduelle intra-classes} \\ &+ \text{variance résiduelle inter-classes} \end{aligned}$$

Nous avons  $\forall j, \forall i$

$$Y_j^i - \hat{Y}_j^i = (Y_j^i - \hat{Y}_j^{iL}) + (\hat{Y}_j^{iL} - \hat{Y}_j^i)$$

d'où sous forme vectorielle:

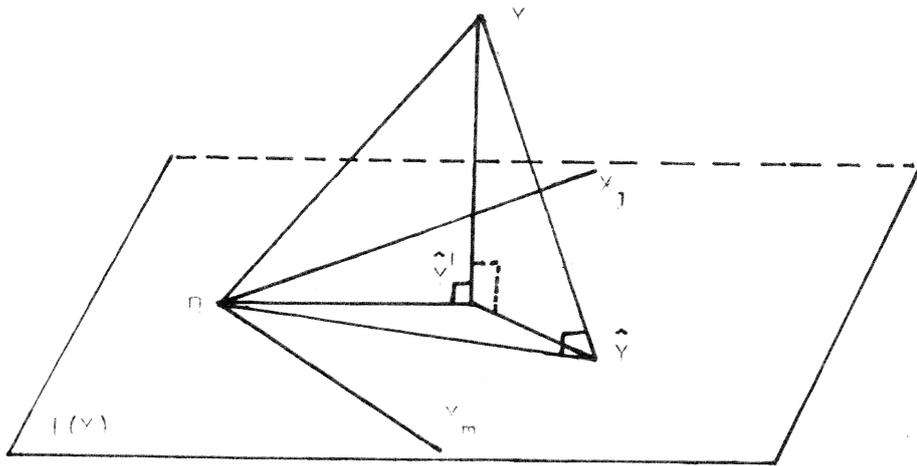
$$\|Y - \hat{Y}\|^2 = \|Y - \hat{Y}^L\|^2 + \|\hat{Y}^L - \hat{Y}\|^2 + 2 \langle Y - \hat{Y}^L, \hat{Y}^L - \hat{Y} \rangle$$

Il s'agit de montrer que ce dernier terme est nul. Or pour tout  $j$  nous avons:

$$\langle Y_j - \hat{Y}_j^L, \hat{Y}_j^L - \hat{Y}_j \rangle = 0$$

car  $Y_j$  se projette en  $\hat{Y}_j^L$  sur la variété linéaire engendrée par les variables explicatives dans chaque classe  $P_j$ .

Il reste alors à montrer  $\langle Y - \hat{Y}^L, \hat{Y} \rangle = 0$



Proposition

$$\left( \sum_{i=1}^K A_i \right)^{-1} = \left( K I + \sum_{i=1}^K \sum_{j=1, j \neq i}^K A_i^{-1} A_j \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^K A_i^{-1} \right)$$

si les matrices inverses existent.

démonstration: En effet soit M la matrice inversible telle que:

$$\left( \sum_{i=1}^K A_i \right)^{-1} = M \left( \sum_{i=1}^K A_i^{-1} \right)$$

On a:

$$\begin{aligned} I &= M \left( \sum_{i=1}^K A_i^{-1} \right) \left( \sum_{i=1}^K A_i \right) \\ &= M \left( K I + \sum_{j=1}^K \sum_{i=1, i \neq j}^K A_i^{-1} A_j \right) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } M = \left( K I + \sum_{i=1}^K \sum_{j=1, j \neq i}^K A_i^{-1} A_j \right)^{-1}$$

$$\text{et } \left( \sum_{i=1}^K A_i \right)^{-1} = (M) \left( \sum_{i=1}^K A_i^{-1} \right)$$

Proposition: Le vecteur des écarts résiduels locaux est orthogonal au vecteur des valeurs calculées globales.

$$\langle Y - \hat{Y}, \hat{Y} \rangle = 0$$

démonstration:

Soit  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$   $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_v \end{bmatrix}$  Les vecteurs des valeurs observées sur

$P_1 \dots P_k$ .

On a :  $\hat{Y} = X (X'X)^{-1} X'Y$

$$\hat{Y}_i = x_i (x_i' x_i)^{-1} x_i' y_i \quad \forall i=1, k$$

d'où  $y_i - \hat{Y}_i = (I - x_i (x_i' x_i)^{-1} x_i') y_i \quad \forall i=1, k$

Décomposons le vecteur  $\hat{Y}$  en :

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \vdots \\ \hat{Y}_k \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \left( kI + \sum_{i=1}^k \sum_{i \neq j} (x_i' x_i)^{-1} (x_j' x_j)^{-1} \sum_{i=1}^k (x_i' x_i)^{-1} \right)$$

$$\cdot \begin{bmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_v \end{bmatrix}$$

avec  $X'X = \sum_{i=1}^k y_i' y_i$  et la proposition précédente, d'où :

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \vdots \\ \hat{Y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1' B \left( \sum_{i=1}^k (x_i' x_i)^{-1} \right) \left( \sum_{i=1}^k y_i' y_i \right) \\ \vdots \\ y_k' B \left( \sum_{i=1}^k (x_i' x_i)^{-1} \right) \left( \sum_{i=1}^k y_i' y_i \right) \end{bmatrix}$$

avec  $B = (kI + \sum_{i=1}^k \sum_{i \neq j} (x_i' x_i)^{-1} (x_j' x_j)^{-1})^{-1}$

Ainsi avec  $\langle Y - \hat{Y}, \hat{Y} \rangle = \sum_{i=1}^k \langle y_i - \hat{Y}_i, \hat{Y}_i \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle Y - \hat{Y}^1, \hat{Y} \rangle &= \sum_{i=1}^K \langle (I - X_i (X_i' X_i)^{-1} X_i') Y_i, X_i M \left( \sum_{j=1}^K (Y_j' Y_j)^{-1} \right) \left( \sum_{j=1}^K X_j' Y_j \right) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^K Y_i' (I - X_i (X_i' X_i)^{-1} X_i') Y_i M \left( \sum_{j=1}^K (Y_j' Y_j)^{-1} \right) \left( \sum_{j=1}^K X_j' Y_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^K Y_i' (X_i - X_i (X_i' X_i)^{-1} X_i' X_i) M \left( \sum_{j=1}^K (Y_j' Y_j)^{-1} \right) \left( \sum_{j=1}^K X_j' Y_j \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On posera alors :

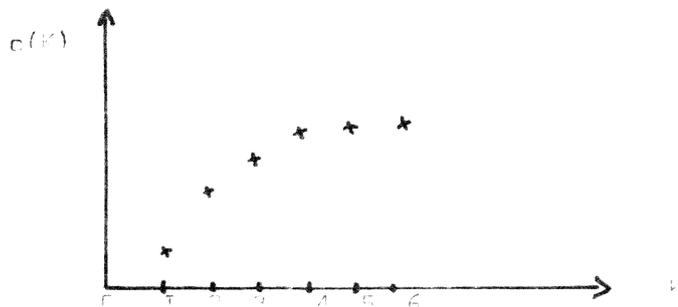
$$c(K) = \frac{\| \hat{Y}^1 - \hat{Y} \|^2}{\| Y - \hat{Y} \|^2} \quad \forall K \geq 1$$

On a  $c(K) = 0$  si  $K = 1$

$c(K) = 1$  si la variance intra-classes est nulle, c'est à dire quand le critère de l'algorithme de régression typologique est nul donc lorsque  $\forall i=1, \dots, K \quad |P_i| \leq m$  où  $m$  est le nombre de variables explicatives.

De plus  $c(K)$  est non décroissant lorsque  $K$  augmente en raison de l'algorithme de minimisation de la somme des carrés intra-classes.

Pour évaluer  $K$  on trace la courbe  $c(K)$  d'où par exemple :



En analysant cette courbe on peut conclure à une valeur optimale de  $K$ , qui serait pour notre exemple 4.

## 6. Méthode de prévision associée aux modèles linéaires locaux

### 6.1 Le problème

Nous désirons résoudre le problème suivant: soit  $X$  un nouvel individu  $X = (X^1, \dots, X^m)$

On suppose que  $X$  appartient à l'un des groupes mais on ignore lequel. On cherche alors à définir une règle de décision permettant d'affecter cet individu supplémentaire à l'une des classes  $P_1^* \dots P_k^*$  connaissant uniquement  $X$  et à en déduire une valeur de la variable à expliquer  $Y$  pour cet individu.

### 6.2 La régression par boules

La méthode de régression par boules (BENZECRI, 1974; CAZES, 1975) traite dans le cas empirique le problème de la régression fonctionnelle.

Aux  $n$  réalisations  $(Y_j, X_j^1, \dots, X_j^m)_{j=1, n}$  on associe le nuage des  $n$  points de  $\mathbb{R}^m$  (un point étant repéré par ses  $m$  coordonnées sur les variables explicatives). A chaque point est affecté une valeur  $Y_j$ . (Nous supposons qu'il y a une probabilité nulle pour que deux points soient confondus).

Pour prédire la variable  $Y$  d'un nouvel individu repéré par  $(X^1, \dots, X^m)$  nous cherchons les  $s$  points ( $s$  fixé) du nuage des individus les plus proches de  $(X^1, \dots, X^m)$ . La moyenne des valeurs de la variable à expliquer de ces  $s$  points nous donne la valeur de  $Y$ .

### 6.3 La règle d'affectation d'un nouvel individu

Soient  $P_1^* \dots P_k^*$  les  $K$  classes obtenues à la convergence de l'algorithme.

Soit  $X = (X^1, \dots, X^m)$  les  $m$  coordonnées d'un nouvel individu.

Soit  $S = \{s \in \mathbb{N} / s_{\text{Max}} \geq s \geq s_{\text{Min}}\}$  à  $s_{\text{Max}}$  et  $s_{\text{Min}}$  fixés.

Soit  $\forall s \in S, \forall j \in \{1, \dots, K\} p_j(s)$  le nombre des points du nuage *parmi les* plus proches de  $(X^1, \dots, X^m)$ , appartenant à  $P_j^*$

Soit  $\forall s \in S \quad J_s = \{j \in \{1, \dots, K\} : \rho_j(s) = \max_{l=1, K} \rho_l(s)\}$

Soit  $\forall j \in \{1, \dots, K\} \quad \gamma_j = \sum_{s=S}^{\text{Max}} \sum_{s=S}^{\text{Min}} x_{J_s}(j) \quad \text{où}$

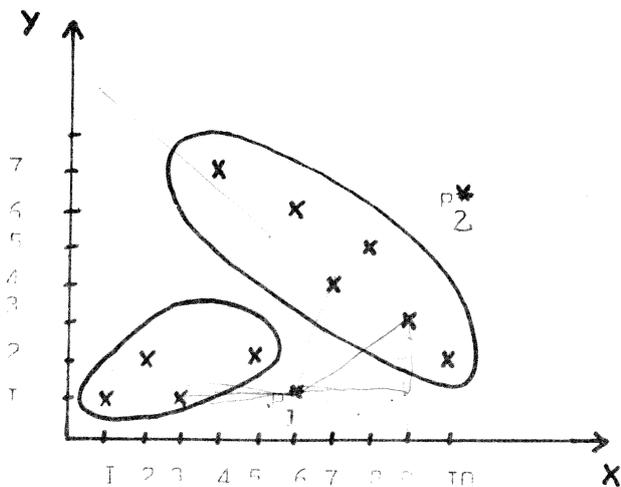
$$x_{J_s}(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in J_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $J^* = \{j^* / \gamma_{j^*} = \max_{j=1, K} \gamma_j\}$

Si  $|J^*|=1$  alors nous affectons  $X$  à  $P_j^*$ . Sinon nous modifions les bornes de variations de  $s$ . Ainsi nous obtenons la valeur prévue de  $Y$  :

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^m b_{j^*}^i X^i$$

6.4 Un exemple Nous supposons  $K=2, m=2, s_{\text{Min}} = 1, s_{\text{Max}} = 5$   
 $X = (5, 2; 1)$



Nous obtenons:

$$J_1 = (1)$$

$$J_2 = (1, 2)$$

$$J_3 = (2)$$

$$J_4 = (2)$$

$$J_5 = (2)$$

d'où  $Y \in P_2^*$



### III. - METHODE LOCALE DES MOINDRES CARRES GENERALISES

Ce modèle constitue une généralisation du modèle précédent au sens où les hypothèses probabilistes sur les aléas englobent celles déjà énoncées.

Nous avons le modèle suivant :

$$y_n = b_1 x_{n1} + b_2 x_{n2} \dots + b_m x_{nm} + \epsilon_n \quad \forall n = 1, N$$

$$[1] \quad E \epsilon_n = 0$$

$$\text{Cov}(\epsilon_n, \epsilon_{n'}) = \sigma_{nn'}$$

d'où matriciellement

$$\begin{array}{l} Y = X b + \epsilon \\ (N,1) \quad (N,m) \quad (m,1) \quad (N,1) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{avec } E \epsilon = 0 \\ V \epsilon = \sigma^2 \Omega \quad (\text{Trace } \Omega = N) \end{array}$$

$$\text{où } \Omega = (\omega_{ij})_{i,j=1,N} \quad \text{avec } \sigma_{nn'} = \sigma^2 \omega_{nn'}$$

(ainsi  $\sigma^2$  et  $\Omega$  sont définis de façon unique)

La matrice  $\Omega$  et  $\sigma^2$  sont inconnus.

#### 1. - Les estimateurs des moindres carrés généralisés

$$\text{On obtient } \hat{b} \text{ en minimisant } S = (Y - X b)' (Y - X b) \quad \text{avec :} \\ V \epsilon = \sigma^2 \Omega$$

On transforme le modèle [1] en

$$\left\{ \begin{array}{l} HY = HX b + H \epsilon \\ EH \epsilon = 0 \\ VH \epsilon = \sigma^2 I \end{array} \right.$$

(sphéricisation du modèle)

$$\text{avec } H H' = \Omega^{-1}, \quad H \Omega H' = I$$

On peut ainsi appliquer les moindres carrés ordinaires d'où en résolvant par les équations normales :

$$\hat{b} = (X'H'H X)^{-1} X'H' H Y \text{ (en supposant } X \text{ de rang } m)$$

soit  $\hat{b} = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} Y$

Une matrice H particulière est  $\Omega^{-1/2}$ .

On voit ainsi qu'il suffit de prémultiplier les observations par  $\Omega^{-1/2}$  pour pouvoir appliquer les moindres carrés ordinaires.

## 2. - La méthode des moindres carrés généralisés locale

Pour appliquer la méthode des moindres carrés généralisés locale il faut connaître la matrice  $\Omega$  des covariances des perturbations.

On calcule alors  $\Omega^{-1/2}$  et on applique les moindres carrés locaux sur le modèle transformé.

Lorsque  $\Omega$  est inconnue, plusieurs méthodes sont proposées : (cf. [16 bis]):

- estimation à partir des résidus de la méthode des moindres carrés ordinaires,
- estimation par le maximum de vraisemblance,
- estimateurs à distance minimale.

### 3. - Cas particulier : modèle avec hétéroscédasticité des perturbations

Le modèle s'écrit matriciellement :

$$\begin{aligned}
 Y &= Xb + \varepsilon \\
 [3] \quad E \varepsilon &= 0 \quad \text{où } \Omega = \\
 V \varepsilon &= \sigma^2 \Omega
 \end{aligned}
 \quad \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

avec  $\forall i = 1, N \quad \sigma_i$  connus

On obtient aisément  $\Omega^{-1/2}$

$$\Omega^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/\sigma_N \end{bmatrix}$$

#### Remarques

1) Liaison avec le schéma de dualité

$$\begin{array}{ccc}
 R^m = E & \xleftarrow{X'} & F^* \\
 \uparrow X'NX & & \uparrow N \\
 E^* & \xrightarrow{X} & F = R^N
 \end{array}$$

$N$  est la forme bilinéaire symétrique définie positive permettant de définir une métrique sur  $F$ .

D'après le théorème de Gauss-Markov, la dispersion des vecteurs de régression est minimum quand on choisit pour métrique  $N$  la matrice  $\Omega^{-1}$

2) Le programme REGTYPO s'applique après prémultiplication des observations par  $\Omega^{-1/2}$ .

#### IV. - METHODE DE REGRESSION MULTIDIMENSIONNELLE LOCALE

##### 1. Le modèle classique

Les modèles de régression multidimensionnelle se proposent d'estimer une relation liant  $G$  variables endogènes à  $m$  variables exogènes sur un ensemble de  $N$  observations.

Une observation consiste donc en  $(G + m)$  données :

$$(y_1 \dots y_G, X_1 \dots X_m)$$

La méthode proposée consiste à estimer localement cette relation entre variables endogènes et exogènes de façon à minimiser un certain critère  $W$ .

Matriciellement le modèle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & & & \\ & \cdot & 0 & \\ & & \cdot & \\ & 0 & & \cdot \\ & & & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_G \end{bmatrix}$$

$$\text{où } y_g : (N, 1) \quad \forall g = 1, G$$

$$X : (N, m)$$

$$\varepsilon_g : (N, 1) \quad \forall g = 1, G$$

$$\text{avec } E(\varepsilon_1) = \dots = E(\varepsilon_g) = 0$$

$$V(\varepsilon_1) = \sigma_1^2 I_N, \dots, V(\varepsilon_G) = \sigma_G^2 I_N$$

On supposera de plus que les perturbations relatives à différentes régressions sont sans corrélation sauf lorsqu'elles sont relatives à la même observation, c'est-à-dire :

$$E (\varepsilon_{ng} \varepsilon_{n'g'}) = \begin{cases} \sigma_{gg'} & \text{si } n = n' \\ 0 & \text{si } n \neq n' \end{cases}$$

Ce modèle peut se réécrire

$$Y = \underline{X} b + \varepsilon \quad \text{avec } E \varepsilon = 0$$

$$V \varepsilon = \Sigma \otimes I_N = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & I_N & \cdots & \sigma_{1G} & I_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{G1} & I_N & \cdots & \sigma_{GG} & I_N \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \underline{X} = \begin{bmatrix} X & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \cdot \\ & & & & X \end{bmatrix} \quad \text{matrice } (N G, m G)$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_G \end{bmatrix} \quad (m G, 1) \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_G \end{bmatrix} \quad (m G, 1)$$

. L'estimateur des moindres carrés ordinaires s'écrit, si X est de rang m :

$$\hat{b} = (\underline{X}' \underline{X})^{-1} \underline{X}' Y$$

Cet estimateur n'est rien d'autre que le vecteur constitué de l'empilement des estimateurs  $\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_G$  de chacune des régressions à une dimension, donc dans le cadre des moindres carrés ordinaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{modèle de régression} \\ \text{à } G \text{ dimensions} \\ \text{local} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} G \text{ modèles de régression} \\ (\text{à une dimension}) \\ \text{locaux} \end{array} \right\}$$

. L'estimateur des moindres carrés généralisés

Dans ce cas, toujours si  $X$  est de rang  $m$ , nous avons

$$\hat{b} = (\underline{X}' (\Sigma \otimes I_N)^{-1} \underline{X})^{-1} \underline{X}' (\Sigma \otimes I_N)^{-1} Y$$

qui grâce aux propriétés de  $\otimes$  devient :

$$\hat{b} = (\underline{X}' (\Sigma^{-1} \otimes I_N) \underline{X})^{-1} \underline{X}' (\Sigma^{-1} \otimes I_N) Y$$

Remarque

Si la matrice  $\Sigma$  est diagonale

$$\Sigma \otimes I_N = \begin{bmatrix} \sigma_1 I_N & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_G I_N \end{bmatrix}$$

alors les moindres carrés généralisés locaux sont équivalents aux moindres carrés ordinaires locaux d'où de nouveau :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{modèle de régression} \\ \text{à } G \text{ dimensions} \\ \text{local} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} G \text{ modèles de régression} \\ \text{à une dimension} \\ \text{locaux} \end{array} \right\}$$

2. Le modèle local

Pour appliquer la méthode des moindres carrés généralisés locaux il faut connaître la matrice des covariances  $\Sigma$ .

On utilisera une estimation de  $\Sigma$  à partir des résidus des régressions locales par les moindres carrés ordinaires.

On a  $\forall g = 1, G$        $\hat{\epsilon}_g = M Y_g =$  résidus d'estimation de la  $g^{\text{ième}}$  régression locale

avec  $M = I_N - X(X'X)^{-1} X'$

On estime  $\Sigma$  par :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{\hat{\epsilon}'_1 \hat{\epsilon}_1 \dots \dots \dots}{N} & \frac{\hat{\epsilon}'_1 \hat{\epsilon}_G}{N} \\ \frac{\hat{\epsilon}'_G \hat{\epsilon}_1}{N} & \frac{\hat{\epsilon}'_G \hat{\epsilon}_G}{N} \end{bmatrix}$$

La démarche générale sera alors :

- faire une régression locale par les moindres carrés
- estimer  $\Sigma$  à partir de  $\hat{\epsilon}_g$   $g = 1, G$
- calculer  $(\Sigma \otimes I_N)^{-1/2} = \Sigma^{-1/2} \otimes I_N$  et multiplier  $Y$  et  $\underline{X}$  par  $\Sigma^{-1/2} \otimes I_N$
- faire une régression locale par les moindres carrés ordinaires sur le modèle ainsi transformé.

### Remarques

Dans le cas où  $X$  serait de rang  $< m$  on utilisera l'inverse généralisée  $(\underline{X}'\underline{X})^-$  au lieu de  $(\underline{X}'\underline{X})^{-1}$ .

On peut également introduire la notion de ridge régression dans le cas de variables non orthogonales.

Le programme REGTYPO s'applique à nouveau. Il suffit d'entrer pour variable  $Y$  le vecteur préalablement multiplié par  $\Sigma^{-1/2} \otimes I_N$  d'où

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_G \end{bmatrix} \quad \text{et pour matrice } \underline{X} \quad \text{la matrice} \quad \begin{bmatrix} X & & & & & \\ & X & & & & 0 \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & \cdot \\ & & & & & & X \end{bmatrix}$$

prémultipliée par  $\Sigma^{-1/2} \otimes I_N$

## V. - METHODE LOCALE DE REGRESSION SIMULTANEE

Ces modèles constituent une généralisation des modèles locaux multidimensionnels.

Les modèles de régressions simultanées estiment simultanément plusieurs régressions multiples qui n'ont pas les mêmes variables explicatives.

Ces modèles présentent l'avantage de relier plusieurs régressions et donc de tenir compte des interrelations existant entre elles. Même si ces relations ne sont pas explicitement incorporées dans les variables explicatives, elles sont incorporées dans les perturbations et donc affectent les estimations.

Ce modèle se formalise de la façon suivante :

Considérons G régressions multiples :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = X_1 b_1 + \varepsilon_1 \quad \text{avec } E \varepsilon_1 = 0 \quad V \varepsilon_1 = \sigma_1^2 I_N \\ (N,1) \quad (N,m_1) \quad (m_1,1) \quad (N,1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_G = X_G b_G + \varepsilon_G \quad \text{avec } E \varepsilon_G = 0 \quad V \varepsilon_G = \sigma_G^2 I_N \\ (N,1) \quad (N,m_G) \quad (m_G,1) \quad (N,1) \end{array} \right.$$

On suppose de plus  $E(\varepsilon_{ng} \varepsilon_{n'g'}) = \sigma_{gg'} \delta_{nn'}$

Matriciellement nous avons :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & & & \\ & \cdot & 0 & \\ & & \cdot & \\ & 0 & & \cdot \\ & & & X_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_G \end{bmatrix}$$

$(NG,1) \quad (NG, \sum_{g=1}^G m_g) \quad (\sum_{g=1}^G m_g, 1) \quad (NG, 1)$

d'où  $Y = X b + \varepsilon$

Remarque

Si  $X_1 = X_2 = \dots = X_G = X$  alors nous retrouvons le modèle multidimensionnel.

Comme pour les modèles multidimensionnels locaux nous avons :

$$E \varepsilon = 0 \quad V \varepsilon = \Sigma \otimes I_N$$

Dans le cas des moindres carrés ordinaires locaux nous retrouvons le résultat suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{modèles de régressions} \\ \text{simultanées} \\ \text{locaux} \\ \text{(sur G regressions)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{G modèles de régressions} \\ \text{locaux} \end{array} \right\}$$

Si la matrice  $\Sigma$  est diagonale : idem

Si la matrice  $\Sigma$  est quelconque alors la démarche sera analogue à celle des régressions multidimensionnelles locales pour  $\Sigma$  quelconque.

## VI. - METHODE DE REGRESSION ORTHOGONALE LOCALE

Plutôt que de mesurer les distances entre valeurs calculées et valeurs observées le long de parallèles à l'un des axes, on peut s'en tenir à la notion courante de distance, c'est-à-dire mesurer perpendiculairement à l'hyperplan d'ajustement. Par minimisation de la moyenne quadratique des écarts on obtient alors la régression orthogonale. De plus la régression orthogonale est une méthode employée pour chercher des relations linéaires entre des variables que l'on ne peut qualifier d'endogènes ou d'exogènes et qui jouent par conséquent des rôles symétriques a priori.

La méthode que nous proposons consiste à rechercher de façon simultanée K hyperplans de régression orthogonale et une partition en K classes de l'ensemble des observations sur les variables, qui minimisent un certain critère W.

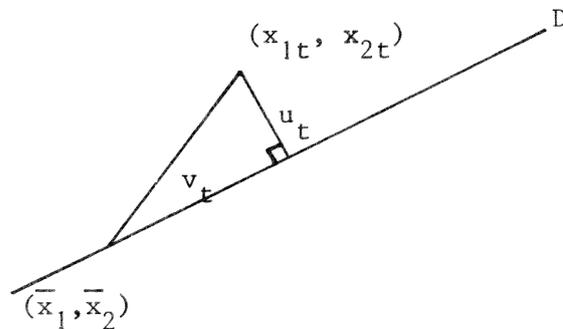
### 1. - Régression orthogonale et composantes principales [15]

Pour un ensemble d'observations sur n grandeurs la détermination des régressions orthogonales est équivalente à celle des composantes principales. En effet la composante principale sur deux grandeurs  $x_1$  et  $x_2$  est de toutes les formes linéaires

$$v = f_1 (x_1 - \bar{x}_1) + f_2 (x_2 - \bar{x}_2)$$

satisfaisant à  $f_1^2 + f_2^2 = 1$  celle qui a la plus grande moyenne quadratique sur l'ensemble des observations.

Pour déterminer la composante principale il faut donc trouver la droite D passant par le point moyen  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  et rendant maximale la somme des carrés des projections  $V_t$  sur D des vecteurs de composantes  $(x_{1t} - \bar{x}_1)$  et  $(x_{2t} - \bar{x}_2) \forall t = 1, T$ . Si  $u_t$  mesure la distance orthogonale de  $(x_{1t}, x_{2t})$  à la droite D, la somme  $u_t^2 + V_t^2$  égale à  $(x_{1t} - \bar{x}_1)^2 + (x_{2t} - \bar{x}_2)^2$  est indépendante de la position de D. La droite D qui rend maximal  $\sum_t V_t^2$  est donc aussi celle qui rend minimale  $\sum_t u_t^2$  : c'est bien la régression orthogonale.



De même la première composante principale d'un ensemble de T observations sur n grandeurs  $X_1 \dots X_n$  est de toutes les formes linéaires

$$v = f' (x - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x}_i)$$

avec  $f'f = 1$

celle qui maximise  $V = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T V_t^2 = f'M f$  où  $M = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})(X_t - \bar{X})'$

Pour que f maximise  $f'M f$  sous  $f'f = 1$  il faut

$$(M - \lambda I) f = 0$$

système exprimant l'égalité à zéro des dérivées premières de  $f' M f - \lambda f'f$  où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange. Comme M est définie positive (matrice de covariances), toutes les racines en  $\lambda$  de  $|M - \lambda I| = 0$  sont réelles.

A la plus grande valeur propre  $\lambda_1$  on associe  $f_1$  première composante principale - (vecteur propre associé à  $\lambda_1$ )

On appelle seconde composante principale la forme linéaire qui a la plus grande longueur parmi toutes les formes linéaires orthogonales à la première composante principale. Donc  $f_2$

$$\begin{aligned} & \text{maximise } f' M f \\ & \text{sous } f'f = 1 \text{ et } f' f_1 = 0 \end{aligned}$$

On montre que  $f_2$  est le vecteur propre associé à  $\lambda_2$ , deuxième plus grande valeur propre.

En procédant ainsi de proche en proche on définit  $n$  composantes principales correspondant à  $n$  vecteurs propres orthogonaux de  $M$  associés aux  $n$  valeurs propres classées par valeurs décroissantes.

La régression orthogonale d'ordre  $m$  est l'hyperplan à  $(n-m)$  dimensions qui, dans l'espace à  $n$  dimensions, passe le plus près possible des points observés, les distances étant mesurées orthogonalement. Un hyperplan à  $(n-m)$  dimensions est constitué des vecteurs  $x = (x_1 \dots x_n)$  dont les composantes satisfont  $m$  équations linéairement indépendantes.

On écrit ainsi

$$\begin{array}{ll} A x = b & A \text{ (m,n) de rang m} \\ & \times \text{ (n,1)} \\ & b \text{ (m,1)} \end{array}$$

[On supposera  $AA' = I$ , ce qui ne restreint pas la généralité du problème]

L'expression du carré de la distance entre le point  $x_t$  et l'hyperplan  $A x = b$  est donnée par :  $\text{Min } u_t^2 (y_t)$

$$[1] \quad u_t^2 = (x_t - y_t)' (x_t - y_t) \text{ où } y_t \text{ est tel que } A y_t = b$$

Pour obtenir le minimum de [1] sous les  $m$  conditions linéaires  $A y_t = b$  il faut dériver par rapport à  $y_t$  l'expression suivante

$$(x_t - y_t)' (x_t - y_t) + 2 \lambda_t' (A y_t - b)$$

où  $\lambda_t$  désigne le vecteur des  $m$  multiplicateurs de Lagrange

$$\text{On a donc } (x_t - y_t)' = \lambda_t' A$$

En postmultipliant par  $A'$  et avec  $AA' = I$ , puis en transposant on a

$$\lambda_t = A (x_t - y_t) = (A x_t - b) \Rightarrow x_t - y_t = A' \lambda_t = A' (A x_t - b)$$

$$\Rightarrow u_t^2 = (A x_t - b)' (A x_t - b)$$

$$\sum_{t=1}^T u_t^2 = W = \sum_{t=1}^T \|A x_t - b\|^2 \text{ avec } AA' = I$$

Cette quantité se réécrit

$$W = \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})' A' A (x_t - \bar{x}) + T (A \bar{x} - b)' (A \bar{x} - b)$$

Comme  $b$  n'intervient que dans le second terme qui est toujours positif on a au minimum  $A \bar{x} = b$ . Donc une fois  $A$  connu on obtient  $b$ .

Il reste donc à minimiser  $U = \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})' A' A (x_t - \bar{x})$  sous  $AA' = I$

Soit  $a_j'$  le  $j^{\text{ième}}$  vecteur ligne de  $A$  ( $j = 1, m$ )

On a  $U = T \sum_{j=1}^m a_j' M a_j$  où  $M$  est la matrice des covariances des  $x_t$

et  $AA' = I$  devient  $a_j' a_k = \delta_{jk} \quad \forall j, k = 1, m$

Par dérivation du Lagrangien  $L = U + \lambda (AA' - I)$  par rapport aux  $a_j$  on obtient

$$(M - \lambda_j I) a_j = 0 \quad \forall j = 1, m$$

avec  $a_j' M a_j = \lambda_j = j^{\text{ième}}$  valeur propre de  $M$ .

$$\text{d'où } U = T \sum_{j=1}^m \lambda_j$$

Pour minimiser  $U$  il convient de prendre les  $m$  plus petites valeurs propres de  $M$ .

La régression orthogonale d'ordre  $m$  est l'hyperplan à  $(n-m)$  dimensions, passant par le point moyen  $\bar{x}$ , et orthogonal aux  $m$  dernières composantes principales (qui sont les  $a_j$   $j = 1, m$ ), vecteurs propres de  $M$ , matrice de covariance empirique des variables  $(X^1, \dots, X^m)$ .

## 2. - La méthode de régression orthogonale locale

### 2.1. - Les notations

- $E$  = population à classer (ensemble des observations)
- $P = (P_1 \dots P_k)$  partition en  $k$  classes au plus de  $E$
- $T_j = \text{Card } P_j$  avec  $\sum_{j=1}^k T_j = T = \text{Card } E$
- $L = (L_1 \dots L_k)$  vecteur des  $k$  noyaux associés à  $P$  où

$$L_j = (A_j, b_j) \text{ avec } A_j \in \mathcal{L}(R^n, R^m), b_j \in R^m \text{ et}$$

$n$  = nombre de variables  $(X_i, i = 1, n)$

$m$  = ordre de la régression orthogonale

$$A_j = (a_{ie}^j) \quad i = 1, m \quad \text{où} \\ e = 1, n$$

$a_{ie}^j$  est le coefficient de la variable  $X_e$  dans la régression  $i$  dans la régression  $i, i = 1, \dots, m$  ; sur la partie  $P_j$ .

Soit  $X_t^j = (X_{t1}^j \dots X_{tn}^j)$  le  $t^{\text{ième}}$  élément de  $P_j$

## 2.2. - Le critère à optimiser

$$\begin{aligned}
 W &: \mathbb{L}_k \times \mathbb{P}_k \rightarrow \mathbb{R}^+ \\
 W(L, P) &= \sum_{j=1}^k \sum_{t=1}^{T_j} (A_j X_t^j - b_j)' (A_j X_t^j - b_j) \\
 &= \sum_{j=1}^k \sum_{t=1}^{T_j} \sum_{i=1}^m \left( \sum_{e=1}^n a_{ie}^j X_{te}^j - b_{ji} \right)^2
 \end{aligned}$$

Ce critère représente la somme des carrés des écarts pris orthogonalement entre les observations et les hyperplans de régression.

En fait pour les calculs il sera plus utile d'utiliser la formule équivalente suivante

$$W = \sum_{j=1}^k T_j \cdot \sum_{i=1}^m \lambda_{ij}$$

où  $\lambda_{ij}$  est la  $(n-i+1)^{\text{ième}}$  valeur propre de la matrice  $M_j$  des covariances des éléments de  $P_j$ .

[Les valeurs propres étant classées par ordre décroissant, on ne somme que sur les  $m$  dernières]

## 2.3. - La fonction de représentation

$$\begin{aligned}
 g &: \mathbb{P}_k \rightarrow \mathbb{L}_k \\
 \text{où } L_j &= (A_j, b_j) \quad P \rightarrow L = (L_1, \dots, L_k)
 \end{aligned}$$

avec  $A_j$  constitué des  $m$  dernières composantes principales de  $M_j$

$$b_j = A_j \bar{x}^j \quad \text{où } \bar{x}^j = \frac{1}{T_j} \sum_{t=1}^{T_j} x_t^j$$

## 2.4 - La fonction d'identification

$$\begin{aligned}
 f &: \mathbb{L}_k \rightarrow \mathbb{P}_k \\
 L &\rightarrow P = (P_1 \dots P_k)
 \end{aligned}$$

Soit  $D : E \times L \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$(X, L_j) \rightarrow D(X, L_j) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{e=1}^n a_{ie}^j X_e - b_{ji} \right)^2$$

mesure de proximité entre une observation et une régression orthogonale d'ordre  $m$ .

On définit :

$$P_i = \{X \in E / D(X, L_i) < D(X, L_j) \forall j \neq i\}$$

avec  $X \in P_i \wedge j$  si égalité

### 2.5. - Construction des suites $u_n, v_n$

La suite  $v^{(n)}$  est définie par  $v^{(0)} = (L^{(0)}, P^{(0)})$

$v^{(n+1)}$  est déduit de  $v^{(n)}$  par

$$L^{(n+1)} = g(P^{(n)}), P^{(n+1)} = f(L^{(n+1)})$$

La suite  $u_n$  est définie par  $u_n = W(v^{(n)})$

Théorème :

La suite  $u_n$  converge en décroissant

dem Nous montrerons successivement

$$[1] \quad W(L^{(n)}, P^{(n)}) \geq W(L^{(n+1)}, P^{(n)})$$

$$[2] \quad W(L^{(n+1)}, P^{(n)}) \geq W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)})$$

Pour [1]

$$W(L^{(n)}, P^{(n)}) = \sum_{j=1}^k \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m \left( \sum_{e=1}^n a_{ie}^j X_{te}^{(n)} - b_{ji}^{(n)} \right)^2$$

$$W(L^{(n+1)}, P^{(n)}) = \sum_{j=1}^k \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m \left( \sum_{e=1}^n a_{ie}^j X_{te}^{(n+1)} - b_{ji}^{(n+1)} \right)^2$$

or  $(a_{ie}^j)^{(n+1)}$ ,  $(b_{ji})^{(n+1)}$  sont par construction de la fonction de représentation  $g$ , les coefficients qui minimisent sur  $P_j^{(n)}$  la somme des carrés des écarts, mesurés orthogonalement, entre les observations et la régression d'ordre  $m$ . Ceci étant vrai  $\forall j = 1, K$ , on a [1].

Pour [2]

$$\text{On a : } W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)}) = \sum_{j=1}^K T_j^{(n+1)} \sum_{t=1}^m \sum_{i=1}^n ( \sum_{e=1}^n a_{ie}^j x_{te}^j - b_{ji} )^2$$

$$W(L^{(n+1)}, P^{(n)}) = \sum_{j=1}^K T_j^{(n)} \sum_{t=1}^m \sum_{i=1}^n ( \sum_{e=1}^n a_{ie}^j x_{te}^j - b_{ji} )^2$$

Dans  $W(L^{(n+1)}, P^{(n)})$  et  $W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)})$  on ne retrouve chaque élément qu'une fois et une seule.

Soit  $i(x)$  l'indice de la classe à laquelle appartient  $x$  dans  $P^{(n)}$ . Soit  $i'(x)$  ce même indice dans  $P^{(n+1)}$ .

On a alors

$$W(L^{(n+1)}, P^{(n)}) = \sum_{x \in E} D(x, L_{i(x)}^{(n+1)})$$

$$W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)}) = \sum_{x \in E} D(x, L_{i'(x)}^{(n+1)})$$

Par construction de  $P^{(n+1)}$  on a

$$D(x, L_{i(x)}^{(n+1)}) \geq D(x, L_{i'(x)}^{(n+1)}) \quad \forall x \in E$$

d'où en sommant [2].

De [1] et [2] on a  $u_n$  non croissante. Comme  $u_n$  est minorée par zéro, on a  $u_n$  convergente.

La convergence s'effectue en un nombre fini d'étapes puisque  $\mathbb{P}_K$  est fini et que les éléments de la suite  $L^{(n)}$  appartiennent à  $g(\mathbb{P}_K) \subset \mathbb{N}_K$  avec  $g(\mathbb{P}_K)$  fini.

Théorème :

La suite  $(L^{(n)}, P^{(n)}) \rightarrow (L, P) = (gof(L), f(L))$

dem

On sait que  $u_n$  converge et atteint sa limite donc  $\exists N/\forall n \geq N$   
 $W(L^{(n)}, P^{(n)}) = W(L^{(N)}, P^{(N)})$

Nous avons, d'autre part :

$W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)}) \leq W(L^{(n+1)}, P^{(n)}) \leq W(L^{(n)}, P^{(n)})$  d'où l'égalité de ces trois termes.

La dernière égalité implique [1] :

$$\sum_{j=1}^k \sum_{t=1}^{T_j} \sum_{i=1}^m \left( \sum_{e=1}^n a_{ie}^j \right)^{(n+1)} (X_{te}^j - b_{ji}^{(n+1)})^2$$

$$= \sum_{j=1}^k \sum_{t=1}^{T_j} \sum_{i=1}^m \left( \sum_{e=1}^n a_{ie}^j \right)^{(n)} (X_{te}^j - b_{ji}^{(n)})^2$$

Par construction de  $L_j^{(n+1)}$  nous avons [2] :

$$\sum_{t=1}^{T_j} \sum_{i=1}^m \left( \sum_{e=1}^n a_{ie}^j \right)^{(n+1)} (X_{te}^j - b_{ji}^{(n+1)})^2 \leq \sum_{t=1}^{T_j} \sum_{i=1}^m \left( \sum_{e=1}^n a_{ie}^j \right)^{(n)} (X_{te}^j - b_{ji}^{(n)})^2$$

$\forall j = 1, K$

L'égalité [1] n'est possible que si [2] est une égalité  $\forall j = 1, K$ .  
 donc  $A_j^{(n+1)} = A_j^{(n)} \Rightarrow b_j^{(n+1)} = b_j^{(n)} \Rightarrow L_j^{(n+1)} = L_j^{(n)} \quad \forall j = 1, K$

d'où  $L^{(n+1)} = L^{(n)}$

Comme  $P^{(n+1)} = f(L^{(n+1)}) = f(L^{(n)}) \Rightarrow P^{(n+1)} = P^{(n)}$

donc  $\exists N \forall n \geq N (L^{(n)}, P^{(n)}) = (L^{(N)}, P^{(N)})$

La suite  $(L^{(n)}, P^{(n)})$  est une suite convergente. Soit  $(L, P)$  sa limite.  
 On a  $(L, P) = (L^{(n)}, P^{(n)}) = (L^{(n+1)}, P^{(n+1)}) \quad \forall n \geq N$ .

De plus  $P^{(n)} = f(L^{(n)}) \Rightarrow P = f(L)$

et  $L^{(n+1)} = g(P^{(n)}) \Rightarrow L = g(P) = \text{gof}(L)$

donc  $(L, P) = (\text{gof}(L), f(L)) \Rightarrow (L, P)$  non biaisé.

### Remarques

#### 1) Cas de valeurs propres multiples

Dans le cas où l'ordre de multiplicité d'une des  $m$  dernières valeurs propres serait plus grand que 1, il existe une infinité de vecteurs propres associés. Soit  $p$  l'ordre de multiplicité.

Nous prendrons alors  $p$  vecteurs propres orthogonaux et de norme 1.  
 Dans ce cas la solution n'est plus un élément non biaisé.

#### 2) Transformation des unités de mesure

L'hyperplan de régression orthogonale peut-être calculé sur les données observées elles-mêmes  $x_t$ , ou sur les grandeurs réduites :

$$\frac{x_t - \bar{x}}{\left( \begin{array}{c} \frac{1}{T} \quad \Sigma \\ \Sigma \quad \Sigma \\ \Sigma \quad \Sigma \end{array} \right)^{1/2}}$$

dans le cas de données hétérogènes.

Les deux déterminations ne sont pas équivalentes, puisque la régression orthogonale est modifiée par changement d'échelle.

## 2.6. - Liens avec l'analyse factorielle typologique [17]

L'analyse en composantes principales d'un tableau M (matrice de covariances des observations) nous fournit avec le premier facteur  $f_1$  la combinaison linéaire des variables ayant une variance maximum. Nous sommes donc conduit à retenir la plus grande valeur propre  $\lambda_1$  de M.

L'analyse factorielle typologique recherche les variétés affines de dimension  $m = 0, 1, 2 \dots$  les plus proches d'éventuels agglomérats locaux du nuage des observations. Il s'agit donc de retenir les  $m$  valeurs propres de plus grand module des matrices de covariances locales, qui nous fourniront les facteurs locaux.

En régression orthogonale nous recherchons la combinaison linéaire des variables ayant une variance minimum. Ainsi nous retenons les plus petites valeurs propres.

La régression orthogonale locale recherche les sous-espaces locaux de dimension  $(n-m)$  définis par les  $m$  relations linéaires induites par les  $m$  vecteurs propres associés aux  $m$  valeurs propres de plus petit module des matrices de covariances locales.

## VII. - METHODE DE REGRESSION PONDEREE LOCALE

Au cours des méthodes précédentes nous avons admis que les variables étaient observées sans erreurs. Cette hypothèse est souvent justifiée en fait, car si les données sont sujettes à de nombreuses imperfections, leur précision est néanmoins suffisante pour l'estimation des relations : ceci revient à dire que les aléas sont prépondérants vis-à-vis des erreurs de mesure.

Cependant les variables d'un modèle ne sont pas toujours observées directement. On est souvent obligé de leur substituer d'autres variables, en relation étroite mais non rigoureuse, avec elles.

### 1. - Le nouveau modèle [15]

Sans distinguer les variables exogènes et les variables endogènes, on dira que  $x_{it}$  est la valeur prise par la  $i^{\text{ième}}$  variable à l'époque  $t$ .

( $\forall i = 1, n ; \forall t = 1, T$ ). Le vecteur  $x_t$  des ( $x_{it} ; i = 1, n$ ) s'écrit

$$x_t = y_t + u_t$$

où  $x_t$  = vecteur des variables observées ( $n, 1$ )

$y_t$  = vecteur des variables vraies ( $n, 1$ )

$u_t$  = vecteur des erreurs ( $n, 1$ )

Entre les variables vraies il existe la relation exacte :

$$Ay_t = b \quad \forall t = 1, T$$

[où  $A$  matrice ( $m, n$ ) de rang  $m < n$ ,  $b$  vecteur ( $m, 1$ )]  
que nous cherchons à estimer.

Nous supposons de plus que :  $E u_t = 0$

$$V u_t = \Omega \text{ où } \Omega$$

est une matrice (n,n) supposée connue :

### La méthode d'estimation de A et b

Pour estimer A et b nous utiliserons de nouveau la notion d'estimateur à distance minimale (cf : modèle de régression orthogonale locale) c'est-à-dire celui qui minimise

$$W = \sum_{t=1}^T (x_t - y_t)' \Omega^{-1} (x_t - y_t)$$

Nous déduisons les résultats qui suivent de la régression orthogonale.

Soit D matrice carrée non singulière telle que :

$$\Omega^{-1} = DD'$$

(on peut prendre  $\Omega^{-1/2} = D$ )

Soient  $\alpha_t = D x_t$

$$\beta_t = D y_t$$

d'où  $Ay_t = b \Rightarrow AD^{-1} \beta_t = b$

$$\Leftrightarrow H \beta_t = b \text{ avec } H = AD^{-1}$$

Puisque D est connu (comme  $\Omega$ ) il est équivalent de déterminer A, b,  $(y_t ; t = 1, T)$  ou H, b,  $(\beta_t, t = 1, T)$ .

La quantité à minimiser se réécrit

$$W = \sum_{t=1}^T (\alpha_t - \beta_t)' (\alpha_t - \beta_t)$$

donc H, b,  $(\beta_t, t = 1, T)$  sont déterminés par la régression orthogonale : l'estimateur à distance minimale correspond à une régression orthogonale multidimensionnelle sur les variables transformées.

$$\text{Soient : } M_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x}) (x_t - \bar{x})'$$

$$M_\alpha = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\alpha_t - \bar{\alpha}) (\alpha_t - \bar{\alpha})'$$

$$\text{avec } \bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t, \bar{\alpha} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \alpha_t$$

Les calculs à effectuer sont les suivants :

1) calculer les  $m$  plus petites valeurs propres de  $M_\alpha$  c'est-à-dire les racines de

$$|M_\alpha - \lambda I| = 0$$

$$\Leftrightarrow |DM_x D' - \lambda D \Omega D'| = 0$$

(puisque  $M_\alpha = D M_x D'$  et  $D \Omega D' = I$ )

d'où  $\Leftrightarrow |M_x - \lambda \Omega| = 0$  (puisque  $D$  est non singulière)

2) calculer  $h_j$ ,  $j^{\text{ième}}$  ligne de  $H$  en résolvant

$$(M_\alpha - \lambda_j I) h_j = 0 \text{ avec } \|h_j\| = 1$$

soit  $(DM_x D' - \lambda_j D \Omega D') h_j = 0$

$$\Leftrightarrow (M_x - \lambda_j \Omega) D' h_j = 0 \text{ avec } (D' h_j)' \Omega (D' h_j) = 1$$

donc on calcule directement la  $j^{\text{ième}}$  ligne de  $A = HD$  (puisque  $H = AD^{-1}$ ) en résolvant :

$$(M_x - \lambda_j \Omega) a_j = 0 \text{ avec } a_j' \Omega a_j = 1$$

3) On obtient  $b$  par  $b = \overline{Ax}$

Remarque :

Par la régression orthogonale on sait que le minimum de  $W$  est égal à  $T \sum_{j=1}^m \lambda_j$ .

## 2. - Le modèle de régression pondérée locale

Dans ce modèle nous recherchons simultanément une partition  $P = (P_1 \dots P_K)$  en  $K$  classes de l'ensemble des observations  $E$  et les estimations des matrices  $A_j$  et vecteurs  $b_j$  associés à  $P_j$  ( $\forall j = 1, K$ ) de façon à minimiser un critère  $W$ .

### 2.1. - Les notations

- .  $E$  = ensemble des observations
- .  $P = (P_1 \dots P_K)$  partition en  $K$  classes au plus de  $E$
- .  $T_j = \text{card}(P_j)$
- .  $L = (L_1 \dots L_K)$  vecteur des  $K$  noyaux associés à  $P$   
avec  $L_j = (A_j, b_j) = (H_j D, b_j)$   
où  $A_j, H_j \in \mathcal{L}(R^n, R^m)$ ,  $b_j \in R^m$
- .  $X_t^j = (x_{1t}^j \dots x_{nt}^j)$  est le  $t^{\text{ième}}$  élément de  $P_j$
- .  $\beta_t^j = (\beta_{1t}^j \dots \beta_{nt}^j)$  est le  $t^{\text{ième}}$  élément transformé de  $P_j$  par  $D$ .

## 2.2. - Le critère à optimiser

$$W : \mathbb{L}_k \times \mathbb{P}_k \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(L, P) \rightarrow W(L, P) \text{ avec}$$

$$W(L, P) = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{T_j} \sum_{e=1}^m \left( \sum_{e=1}^n h_{ie}^j \beta_{te}^j - b_{ji} \right)^2$$

### Remarque

Ce critère est équivalent à

$$W = \sum_{j=1}^k T_j \sum_{i=1}^m \lambda_{ij}$$

où  $\lambda_{ij}$  est la  $(n - i + 1)$  ième valeur propre de  $M_{\alpha}^j$

$$\text{avec } M_{\alpha}^j = \frac{1}{T_j} \sum_{t=1}^{T_j} (\alpha_t^j - \bar{\alpha}_j) (\alpha_t^j - \bar{\alpha}_j)'$$

$$\bar{\alpha}_j = \frac{1}{T_j} \sum_{t=1}^{T_j} \alpha_t^j$$

(les valeurs propres étant rangées par valeurs décroissantes).

## 2.3. - La fonction de représentation

$$g : \mathbb{P}_k \rightarrow \mathbb{L}_k \text{ où } L = (L_1 \dots L_k)$$

$$\text{avec } L_j = (A_j, b_j)$$

$$\text{et } A_j = H_j D$$

$$b_j = A_j \bar{x}^j = H_j D \bar{\beta}^j$$

$$\text{où } \bar{x}_j = \frac{1}{T_j} \sum_{t=1}^{T_j} x_t^j ; \bar{\beta}^j = \frac{1}{T_j} \sum_{t=1}^{T_j} \beta_t^j$$

Les  $A_j$ ,  $b_j$  sont les estimateurs à distance minimale sur la partie  $P_j$  c'est-à-dire ceux qui minimise

$$W_j = \sum_{t=1}^{T_j} (x_t^j - y_t^j)' \Omega^{-1} (x_t^j - y_t^j)$$

#### 2.4. - La fonction d'identification

$$f : \mathbb{L}_k \rightarrow \mathbb{P}_k$$

$$L \rightarrow P = (P_1 \dots P_k)$$

. Soit  $d : E \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , une mesure de proximité entre une observation  $X = (X_1 \dots X_n)$ , transformée en  $\beta = (\beta_1 \dots \beta_n)$  et la  $j^{\text{ième}}$  régression orthogonale

$$d : (\beta, L_j) \rightarrow d(\beta, L_j) \text{ où}$$

$$d(\beta, L_j) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{e=1}^n h_{ie}^j \cdot \beta_e - b_{ji} \right)^2$$

. On définit  $\forall i = 1, K$

$$P_i = \{ \beta / d(\beta, L_i) \leq d(\beta, L_j) \forall j \neq i \}$$

avec  $\beta \in P_i \cap_j$  si égalité

$$\Leftrightarrow P_i = \{ x \text{ transformé en } \beta \text{ par } D (= \Omega^{-1/2}) / d(\beta, L_i) \leq d(\beta, L_j) \forall j \neq i \}$$

avec  $x \in P_i \cap_j$  si égalité

#### 2.5. - La convergence de l'algorithme

Les suites  $u_n$  et  $v_n$  étant définies comme précédemment nous avons :

##### Théorème

La suite  $u_n = W(v_n)$  converge en décroissant.

dem : La démonstration est identique à celle de la régression orthogonale locale, donc  $\exists N / \forall n \geq N$

$$W(L^{(n)}, P^{(n)}) = W(L^{(N)}, P^{(N)})$$

Théorème

La suite  $(L^{(n)}, P^{(n)})$  converge vers un élément non biaisé

$$(L^{(n)}, P^{(n)}) \rightarrow (L, P) = (\text{gof}(L), f(L))$$

dem : Nous reprenons en partie la démonstration faite dans le cas de la régression orthogonale.

Nous obtenons avec  $W(L^{(n+1)}, P^{(n)}) = W(L^{(n)}, P^{(n)})$   
 que  $H_j^{(n+1)} = H_j^{(n)} \Rightarrow H_j^{(n+1)} D = H_j^{(n)} D$

$$\Rightarrow A_j^{(n+1)} = A_j^{(n)}$$

De plus  $b_j^{(n+1)} = b_j^{(n)}$  donc nous avons  $L_j^{(n+1)} = L_j^{(n)}$

Comme ceci est vrai  $\forall j = 1, K \Rightarrow L^{(n+1)} = L^{(n)}$

Avec  $P^{(n+1)} = f(L^{(n+1)}) = f(L^{(n)}) \Rightarrow P^{(n+1)} = P^{(n)}$

donc  $\exists N / \forall n \geq N (L^{(n)}, P^{(n)}) = (L^{(N)}, P^{(N)})$

$\Rightarrow (L^{(n)}, P^{(n)})$  converge vers  $(L, P)$  sa limite, d'où

$$(L^{(n)}, P^{(n)}) = (L^{(n+1)}, P^{(n+1)}) = (L, P) \quad \forall n \geq N$$

Avec  $P^{(n)} = f(L^{(n)}) \Rightarrow P = f(L)$

$$L^{(n+1)} = g(P^{(n)}) \Rightarrow L = g(P) = \text{gof}(L)$$

$\Rightarrow (L, P) = (\text{gof}(L), f(L)) = \text{élément non biaisé}$

Remarques

1) Les remarques de la régression orthogonale locale relatives au cas des valeurs propres multiples et à la transformation des unités de mesure s'appliquent également ici.

2) Lien avec l'analyse factorielle

En analyse factorielle on pose le modèle suivant :

$$x_{it} = \sum_{j=1}^p \lambda_{ij} f_{jt} + b_i + u_{it}$$

$$\forall i = 1, n ; \forall t = 1, T$$

où .  $x_{it}$  est la valeur prise au test  $i$  par l'individu  $t$

.  $f_{jt}$  est la valeur prise par l'individu  $t$  pour le facteur  $j$

.  $\lambda_{ij}, b_i$  : paramètres (les mêmes pour tous les individus)

.  $u_{it}$  = erreurs, écarts aléatoires d'espérance nulle, indépendants des  $f_{jt}$ .

Les facteurs  $f_{jt}$  ne sont pas observables directement, ils sont inconnus. L'analyse factorielle se propose d'estimer les paramètres  $\lambda_{jt}, b_i$  et les  $f_{jt}$ .

Ce modèle est identique à celui que nous venons de présenter, en effet soient

$\Lambda$  matrice  $(n,p)$  de rang  $p$  des  $\lambda_{ij}$

$f_j$  vecteur des  $f_{jt}$

$y_t$  vecteur des  $E(X_{it})$

Nous avons alors :  $y_t - \bar{y} = \Lambda (f_t - \bar{f})$

### VIII. - METHODE LOCALE DES MOINDRES VALEURS ABSOLUES

---

La méthode des moindres carrés ordinaires consiste en la minimisation de la somme des carrés des perturbations. Cette méthode a l'inconvénient de donner beaucoup de poids aux "points aberrants". D'où l'idée de ne plus minimiser les perturbations avec la norme de  $L^2$  mais avec une norme permettant de réduire le rôle joué par ces points : la norme de  $L^1$  sera donc utilisée et conduira à la méthode des moindres valeurs absolues.

Par cette méthode, on obtient de plus des estimateurs plus robustes vis à vis des écarts importants par rapport à la normalité, mais évidemment moins efficaces en cas de normalité.

*Remarque* : La méthode des moindres carrés ordinaires locale permet déjà de mieux isoler les points aberrants.

#### 1. Estimation par la méthode des moindres valeurs absolues [21]

Soit le modèle  $Y = Xb + \varepsilon$

avec  $\gamma$  vecteur  $(T, 1)$

$\varepsilon$  vecteur  $(T, 1)$

$b$  vecteur  $(n, 1)$

$X$  matrice  $(T, n)$

et  $E\varepsilon = 0$ . On ne suppose rien sur la matrice de variance.

On veut estimer  $b$  en minimisant :

$$S = \sum_{t=1}^T |\varepsilon_t| = \sum_{t=1}^T \left| y_t - \sum_{j=1}^n b_j X_{tj} \right|$$

par rapport à  $(b_1 \dots b_n)$ .

On ne peut comme précédemment rechercher les équations normales. On va transformer le problème en un programme linéaire équivalent :

En effet  $S$  s'écrit :

$$\sum_{t=1}^T S_t \quad \text{où } S_t = \left| y_t - \sum_{j=1}^n b_j X_{tj} \right|$$

La surface  $S_t$  est composée de deux demi-hyperplans de dimension  $n$ , dans le plan  $(S, b_1 \dots b_n)$  interceptant l'hyperplan  $(b_1 \dots b_n)$ .

$S$  étant la somme de ces  $2 T$  demi-hyperplans formera une surface polygonale dont les bords se trouvent sur les hyperplans de dimension  $(n-1)$  constitués par l'intersection des hyperplans constituant  $S$  avec  $(b_1 \dots b_n)$ . Comme chaque  $S_t$  est convexe,  $S$  l'est. Le minimum de  $S_t$ , si la solution est unique, se trouve à l'intersection de  $n$  de ces hyperplans de dimension  $(n-1)$ .

En fait, ces  $n$  observations déterminent l'hyperplan de régression. Avec  $n$  variables indépendantes, c'est un sous-ensemble de  $n$  observations qui détermine l'hyperplan de régression. Le problème d'estimation est alors réduit à un problème de combinatoire de façon à trouver parmi les  $\binom{T}{n}$  sous-ensembles celui qui rendra  $S$  minimum.

La programmation linéaire est une méthode qui permet de trouver ce sous-ensemble optimal.

### 1.1 Problème de programmation linéaire

Sous forme matricielle, un programme linéaire s'écrit :

$$\text{Min } Q = p' \alpha$$

sous les contraintes :

$$Aa \geq \beta$$

$$a \geq 0$$

Nous allons transformer en une fonction linéaire la fonction :

$$S = \sum_{t=1}^T \left| \varepsilon_t \right|$$

On écrit  $\varepsilon_t = v_t - w_t$  avec  $v_t, w_t \geq 0$

( $\Rightarrow \varepsilon_t$  de signe quelconque)

$$\text{d'où } \text{Min } S^x = \sum_{t=1}^T v_t + \sum_{t=1}^T w_t$$

Ce problème est équivalent à  $\text{Min } S = \sum_{t=1}^T \left| \varepsilon_t \right|$

au sens où les valeurs de  $v$  et  $w$  qui minimisent  $S^x$  minimisent  $S$  en  $\varepsilon = v - w$ . On montrera que la valeur qui minimise  $S^x$  est également optimale pour  $S$ .

Si l'on ajoute aux contraintes  $Aa \geq \beta$ ,  $a \geq 0$ , les contraintes  $v_t, w_t \geq 0$  ( $\forall t = 1, T$ ), on obtient le programme linéaire suivant :



Comme seul un des termes  $b_j, b_j^*$  peut être différent de zéro, l'inclusion de l'opposé de chaque variable permet à son coefficient d'avoir un signe quelconque.

De même comme  $v_t, w_t$  ne peuvent être tous deux non nuls, il est évident que la valeur de  $S^*$  est la même que celle de  $S$ . Comme les éléments correspondants aux variables indépendantes ont un coût nul dans la minimisation, les solutions dépendantes apparaîtront toujours dans la solution optimale. Donc  $(T-n)$  résidus non nuls dans la solution optimale et  $n$  égaux à zéro (Ceci provient de la détermination de l'hyperplan grâce à sous-ensemble de  $n$  observations).

1.2 Schéma général de la méthode des moindres valeurs absolues

$$y = Xb + \epsilon$$

On veut minimiser  $S = \sum_{t=1}^T |\epsilon_t|$  par rapport à  $b$  d'où le programme linéaire :

$$\epsilon_t = v_t - w_t$$

$$\text{Min } S^* = \sum_t v_t + \sum_t w_t$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 x_{11} & -x_{11} & x_{12} & \dots & -x_{1n} & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & 0 & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 x_{T1} & -x_{T1} & x_{T2} & \dots & -x_{Tn} & 0 & 0 & 1 & -1 & & \\
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c} b_1 \\ b_1^* \\ \vdots \\ b_n^* \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_T \end{array} \right] = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{array} \right]
 \end{array}$$

$(T, 2(n+T))$   $(2(n+T), 1)$   $(T, 1)$

Sous  $\left\{ \begin{array}{l} b_1 \dots b_n \geq 0 \\ v_t, w_t \geq 0 \end{array} \right. \quad \forall t = 1, T \quad \begin{array}{l} b_1^* \dots b_n^* \geq 0 \\ \end{array}$

## 2. La méthode locale des moindres valeurs absolues

Dans cette méthode, nous recherchons simultanément une partition en  $K$  classes ( $P_1 - - - P_K$ ) de l'ensemble des observations  $E$  et les  $K$  hyperplans de régression (au sens des moindres valeurs absolues) associés de façon à minimiser un critère  $W$ .

L'algorithme consiste en l'application successive des deux fonctions  $f$  et  $g$  et en l'évaluation du critère  $W$ .

2.1 Le critère  $W : \mathbf{L}_K \times \mathbf{P}_K \longrightarrow \mathbb{R}^+$   
 $(L, P) \longrightarrow W(L, P)$  où

$$W(L, P) = \sum_{j=1}^K \sum_{t=1}^{T_j} \left| y_t^j - \sum_{\ell=1}^n b_{\ell}^j X_{t\ell}^j \right|$$

où  $T_j = \text{Card } P_j$

$(y_{t1}^j, X_{t1}^j - - - - X_{tn}^j)$  est le  $t^{\text{ième}}$  élément de  $P_j$

$(b_{\ell}^j)_{\ell=1, n}$  sont les coefficients de l'hyperplan de régression

de  $P_j$ .

On a donc :

$$L_j = \begin{bmatrix} b_1^j \\ \vdots \\ b_n^j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Le problème est : trouver  $(L^x, P^x)$  tels que :

$$W(L^x, P^x) = \min_{L_K^x, P_K^x} W(L, P)$$

## 2.2 La fonction d'identification

$$f : L_K \longrightarrow P_K$$

$$L \longrightarrow P = (P_1 \dots P_K)$$

On définit la mesure de proximité entre une observation et un noyau par :

$$D : E \times L \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$D(y_t, L) = \left| y_t - \sum_{\ell=1}^n b_{\ell} X_{t\ell} \right|$$

On définit alors  $P_i \quad \forall i = 1, K$

$$P_i = \left\{ (y_t, X_{t1} \dots X_{tn}) / D(y_t, L_i) \leq D(y_t, L_j) \quad \forall j \neq i \right\}$$

avec  $(y_t, X_{t1} \dots X_{tn}) \in P_{i \wedge j}$  si égalité

### 2.3 La fonction de représentation

$$g : \mathbb{P}_K \longrightarrow \mathbb{L}_K$$

$$P \longrightarrow L = (L_1 \dots L_K)$$

où  $L_j$  est obtenu par la méthode des moindres valeurs absolues appliquée sur  $P_j$  pour tout  $j$  tel que  $|P_j| \geq n$

Pour les indices  $j / |P_j| < n$  on calculera le vecteur  $(b_1^j \dots b_n^j)$

de norme minimale sous les contraintes :

$$y_t^j = \sum_{l=1}^n b_l^j X_{tl}^i \quad \forall t \in P_j \quad (\text{cf. annexe 2})$$

Si  $\exists j / |P_j| \geq n$  et  $L_j$  non unique, on choisira le noyau de norme minimale.

### 2.4 La convergence de l'algorithme

. Les suites  $u_n$  et  $v_n$  sont définies comme pour les algorithmes précédents.

Théorème : La suite  $u_n$  converge en décroissant

Démonstration :

On montrera successivement :

$$\left[ 1 \right] \quad u_n = W(L^{(n)}, P^{(n)}) \leq W(L^{(n)}, P^{(n+1)})$$

$$[2] \quad W(L^{(n)}, P^{(n+1)}) \leq W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)}) = u_{n+1}$$

Pour [1]

$$W(L^{(n)}, P^{(n+1)}) = \sum_{j=1}^K \prod_{t=1}^{T_j^{(n+1)}} \left| y_t^j - \sum_{\ell=1}^n b_{\ell}^j x_{t\ell}^j \right|$$

$$u_n = \sum_{j=1}^K \prod_{t=1}^{T_j^{(n)}} \left| y_t^j - \sum_{\ell=1}^n b_{\ell}^j x_{t\ell}^j \right|$$

Dans ces deux expressions, on ne retrouve qu'une fois et une seule chaque élément. Soit  $X = (x_1 \text{ ----- } x_n)$ .

Soient  $\lambda(X,y)$  l'indice de  $(X,y)$  dans  $P^{(n)}$  et

$\lambda'(X,y)$  ce même indice dans  $P^{(n+1)}$ . Nous avons alors

si  $Z = (X,y)$

$$W(L^{(n)}, P^{(n)}) = \sum_{Z \in E} D(Z, L_{\lambda(X,y)}^{(n)})$$

$$W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)}) = \sum_{Z \in E} D(Z, L_{\lambda'(X,y)}^{(n)})$$

Par construction de  $P^{(n)}$  et de  $P^{(n+1)}$  on a :

$$D(Z, L_{\lambda(X,y)}^{(n)}) \geq D(Z, L_{\lambda'(X,y)}^{(n)})$$

d'où en sommant  $\left[ \begin{array}{c} 1 \end{array} \right]$

Montrons [2]

$$W(L^{(n)}, P^{(n+1)}) = \sum_{j=1}^K \sum_{t=1}^{T_j} \left| y_t^j - \sum_{\ell=1}^n b_{\ell}^{j(n)} x_{t\ell}^j \right|$$

$$u_{n+1} = \sum_{j=1}^K \sum_{t=1}^{T_j} \left| y_t^j - \sum_{\ell=1}^n b_{\ell}^{j(n+1)} x_{t\ell}^j \right|$$

Par définition de la fonction de représentation les  $(b_{\ell}^{j(n+1)})$  correspondent dans  $P_j$  aux coefficients de l'hyperplan de régression obtenus par la méthode des moindres valeurs absolues. Donc les  $(b_{\ell}^{j(n+1)})_{\ell=1, n}$  minimisent

$$\sum_{t=1}^{T_j} \left| y_t^j - \sum_{\ell=1}^n b_{\ell} x_{t\ell}^j \right| \quad \forall (b_{\ell})_{\ell=1, n}$$

si  $|P_j| \geq n$  et sont tels que cette expression est nulle si  $|P_j| < n$ , donc la minimisent.

On a ainsi [2]. De [1] et [2] on déduit que  $u_n$  converge en décroissant puisque minorée par zéro. Les ensembles  $\mathbb{P}_K$  et  $g(\mathbb{P}_K)$  sont finis donc l'ensemble  $(L^{(n)}, P^{(n)})$  et  $u_n = W(L^{(n)}, P^{(n)})$  sont finis : la convergence se fait en un nombre fini d'étapes.

Théorème : La suite  $(L^{(n)}, P^{(n)})$  converge vers un élément non biaisé c'est à dire que  $(L, P) = (gof(L), f(L))$

Démonstration : En effet, pour cela, il faudrait vérifier puisque

$W(L^{(n)}, P^{(n)})$  converge et atteint sa limite

$$\exists N / \forall n \geq N \quad W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)}) = W(L^{(n)}, P^{(n)})$$

Mais on a  $W(L^{(n)}, P^{(n)}) \leq W(L^{(n)}, P^{(n+1)}) \leq W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)})$

d'où l'égalité de ces trois termes :

La première égalité s'écrit :

$$[1] \quad \sum_{j=1}^K \sum_{t=1}^{T_j} \left| y_t^j - \sum_{l=1}^n b_{tl}^{j(n+1)} X_{tl}^j \right| = \sum_{j=1}^K \sum_{t=1}^{T_j} \left| y_t^j - \sum_{l=1}^n b_{tl}^{j(n)} X_{tl}^j \right|$$

Par construction des  $(b_{tl}^{j(n+1)})$  on a  $\forall j = 1, K$

$$[2] \quad \sum_{t=1}^{T_j} \left| y_t^j - \sum_{l=1}^n b_{tl}^{j(n+1)} X_{tl}^j \right| \leq \sum_{t=1}^{T_j} \left| y_t^j - \sum_{l=1}^n b_{tl}^{j(n)} X_{tl}^j \right|$$

donc [1] n'est possible que si  $\forall j = 1, K$  [2] est une égalité.

Pour montrer que  $(L^{(n)}, P^{(n)})$  est non biaisé, il faut que

$$L^{(n+1)} = L^{(n)} \text{ c'est-à-dire } (b_{tl}^{j(n+1)}) = (b_{tl}^{j(n)}), \quad \forall j = 1, K$$

Or par construction de la fonction de représentation ceci est vérifié

$\forall j = 1, K.$

La suite de la démonstration est analogue à celle du chapitre précédent.

IX. REGRESSION LOCALE ET TEST DE CHOW

Le test de Chow est un test d'homogénéité ou de stabilité. Il s'agit en fait simplement d'un cas particulier du test de l'hypothèse générale linéaire. Il suppose donc l'hypothèse de normalité des perturbations.

Il s'avère très intéressant dans le cas des modèles linéaires locaux puisqu'il nous permet de tester si les représentations locales que nous obtenons sont significativement différentes. Par exemple dans un cas économique, il s'agit de tester à partir des observations si une même loi économique est bien adaptée pour représenter le même phénomène à des époques différentes.

1. Le test de Chow

Soit le modèle constitué par les K régressions relatives à la partition en K classes de l'ensemble des observations E.

$$\left[ \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ K \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{lll} y_1 = X_1 b_1 + \varepsilon_1 & \text{avec } \sum_{E} \varepsilon_1 = 0 & \forall \varepsilon_1 = \sigma^2 I_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_K = X_K b_K + \varepsilon_K & \text{avec } \sum_{E} \varepsilon_K = 0 & \forall \varepsilon_K = \sigma^2 I_K \end{array} \right.$$

.../...

On supposera de plus que :

$\text{rang } X_1 = \text{rang } X_2 = \dots = \text{rang } X_K = q = \text{nombre de variables explicatives.}$

On admet également que les perturbations suivent une loi normale.

Le problème est le suivant :

tester  $H_0 \quad b_1 = b_2 = \dots = b_K$

contre  $H_a \quad b_1 \neq b_2 \neq \dots \neq b_K$

En empilant les  $K$  régressions  $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$  le modèle peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & & & 0 \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & X_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_K \end{bmatrix}$$

soit sous forme condensée :

$$y = Xb + \varepsilon$$

$$E\varepsilon = 0$$

$$V\varepsilon = \sigma^2 I$$

où  $y_i : (T_i, 1)$  avec  $T_i = \text{Card}(P_i)$

$X_i : (T_i, q)$

$b_i : (q, 1)$

$y : (T, 1)$  avec  $T = \sum_i T_i = \text{Card}(E)$

$X : (T, Kq)$

$b : (Kq, 1)$

$\epsilon : (T, 1)$

Le test de Chow [6] exprime que sous les hypothèses précédentes, dans l'hypothèse  $H_0$  on a :

$$F = \frac{T - qK}{n(K-1)} \cdot \frac{SCR_0 - SCR_a}{SCR_a} \rightsquigarrow F_{q(K-1), T-Kq}$$

où

.  $SCR_0$  = somme des carrés des résidus d'estimation dans le cas de l'hypothèse  $H_0$

( $SCR_0$  est obtenu en faisant une régression globale c'est-à-dire avec  $K = 1$ )

.  $SCR_a$  = somme des carrés des résidus d'estimation dans le cas de l'hypothèse  $H_a$

( $SCR_a$  est obtenu en choisissant la régression locale en  $K$  classes pour laquelle le critère  $W$  associé est minimum)

.  $F_{q(K-1), T-Kq}$  = Fisher à  $q(K-1)$  et  $T-Kq$  degrés de liberté.

Remarque :

- 1) Pour calculer  $SCR_a$ , on utilise le fait que dans un modèle de régressions empilées où les perturbations ne sont pas autocorrélées entre régressions il est équivalent d'effectuer un ajustement par les moindres carrés ordinaires sur l'ensemble du modèle empilé ou sur chaque régression séparément.

D'où :

$$SCR_a = SCR_1 + SCR_2 - - - + SCR_K$$

Dans l'hypothèse nulle  $H_0$ , le modèle s'écrit (en posant  $b_0 =$  valeur commune des  $(b_i)_{i=1,K}$ )

$$(H_0) \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_K \end{bmatrix} b_0 + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_K \end{bmatrix}$$

ou sous forme condensée

$$y = Zb_0 + \varepsilon$$

$$\text{d'où } SCR_0 = (\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon})_0 \quad \text{où} \quad \hat{\varepsilon} = \hat{y} - y$$

- 2) Dans le cas de séries temporelles, il se peut que plusieurs des  $K$ -échantillons soient de taille trop faible par rapport au nombre de variables explicatives (ce qui justifie l'utilisation des matrices inverses généralisées).

Dans ce cas, le calcul de  $SCR_0$  reste le même puisque

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_K \end{pmatrix} = q \quad \text{si} \quad \exists i \in ]K] \quad / \quad X_i \text{ soit de rang } q$$

Dans l'hypothèse alternative, en revanche, si l'on a toujours

$SCR_a = SCR_1 + \dots + SCR_K$ , il n'est plus possible de calculer les  $SCR_i / \text{Rang } X_i < q$  par les méthodes habituelles.

On s'aperçoit alors facilement que  $SCR_i = 0$ . En effet, par  $T_i$  points linéairement indépendants, on peut faire passer au moins un hyperplan de dimension égale à  $q > T_i$ ; donc :

$$SCR_i = 0 \quad \forall i \in ]K] \quad / \quad \text{Rang } X_i < q$$

Dans le cas où  $\exists i!$  tel que  $\text{Rang } X_i < q$  le test de Chow se réécrit :

$$F = \frac{\sum_{j \neq i} (T_j - q)}{n(k-2)} \cdot \frac{SCR_0 - SCR_a}{SCR_a} \rightsquigarrow F_{n(k-2), \sum_{j \neq i} (T_j - q)}$$

En définitive, pour tester si K régressions sont significativement différentes au seuil  $\epsilon$  il suffira de vérifier si :

$$F(\epsilon) > F_{\alpha(K-1), T-Kq}(\epsilon)$$

Dans ce cas, on rejette l'hypothèse  $H_0 : b_1 = b_2 = \dots = b_K$

## 2. Lien entre le test de Chow et le critère W

Le problème 
$$\text{Min}_{L, P} W(L, P)$$

où 
$$W(L, P) = \sum_{j=1}^K \| Y_j - X_j b_j \|^2$$

est équivalent au problème  $\text{Max } F$  où

$$F = \frac{T - Kq}{\alpha(K-1)} \cdot \frac{SCR_o - SCR_a}{SCR_a}$$

En effet, F s'écrit également :

$$F = \frac{T - Kq}{\alpha(K-1)} \left[ \frac{SCR_o}{SCR_a} - 1 \right]$$

or T, K et q sont constants  $\Rightarrow \frac{T - Kq}{\alpha(K-1)} = C^{te}$

$$SCR_o = \text{constante}$$

donc  $\text{Max } F \Leftrightarrow \text{Max } \frac{1}{SCR_a} \Leftrightarrow \text{Min } SCR_a \Leftrightarrow \text{Min } W(L, P)$

Toutefois le F de Chow est un critère statistique supposant la normalité, alors que notre critère W est uniquement métrique.

## X . NOTIONS SUR L'ANALYSE DES SERIES TEMPORELLES DISCRETES

### 1. Modèle autorégressif d'ordre p [13] [2] [4]

Soient  $(y_t)_{t=1,n}$  n observations d'une variable y.

On appelle modèle autorégressif d'ordre p un modèle de la forme :

$$\hat{y}_t = a_1 \hat{y}_{t-1} + a_2 \hat{y}_{t-2} + \dots + a_p \hat{y}_{t-p} + u_t$$

où .  $\hat{y}_t = y_t - \hat{\mu}$  avec  $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t$

.  $(a_i)_{i=1,p}$  coefficients d'autorégression

.  $(u_t)_{t=1,n}$  résidus, aléas

### 2. Modèle stationnaire

Soit L l'opérateur de retard tel que  $L(\hat{y}_t) = \hat{y}_{t-1}$

Le modèle autorégressif peut alors se réécrire :

$$\hat{y}_t = a_1 L(\hat{y}_t) + a_2 L^2(\hat{y}_t) + \dots + a_p L^p(\hat{y}_t) + u_t$$

d'où

$$(1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p) \hat{y}_t = u_t$$

Soit  $\mathcal{L}(L) = 1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p$  l'opérateur d'autorégression d'ordre  $p$ .

$$\text{On a ainsi } \mathcal{L}(L)\hat{y}_t = u_t \Rightarrow \hat{y}_t = \mathcal{L}^{-1}(L) u_t$$

(Si  $\mathcal{L}$  est inversible)

Si toutes les racines de  $\mathcal{L}(L)$ , polynôme d'ordre  $p$ , sont  $> 1$  en module, alors le processus est stationnaire. Un processus stationnaire est un processus dont la structure probabiliste ne varie pas avec le temps. On a donc moyenne et variance indépendantes du temps.

### 2.1 Autocovariance et autocorrélation théorique

Soit  $\gamma_k = \text{Cov}(y_t, y_{t+k})$ . Si  $\mu$  désigne  $E(y_t)$

alors  $\gamma_k = E(y_t - \mu)(y_{t+k} - \mu)$

$$= \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \mu)(y_{t+k} - \mu)$$

$\gamma_k$  est l'autocovariance d'ordre  $k$ .

On définit l'autocorrélation d'ordre  $k$  par :

$$\rho_k = \frac{E(y_t - \mu)(y_{t+k} - \mu)}{\sqrt{E(y_t - \mu)^2 E(y_{t+k} - \mu)^2}}$$

Comme le processus  $y_t$  est supposé stationnaire, nous avons :

$$E(y_t - \mu)^2 = E(y_{t+k} - \mu)^2 = \sigma^2 = \gamma_0$$

$$\text{Donc } p_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

On remarque que  $p_0 = 1$ . On définit la matrice d'autocovariance associée aux observations  $(y_1 \dots y_n)$  par :

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \gamma_{n-1} & & & \gamma_0 \end{bmatrix} \quad \text{matrice } (n,n)$$

et la matrice d'autocorrélation:

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} 1 & p_1 & \dots & p_{n-1} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ p_{n-1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{matrice } (n,n)$$

qui sont liées par la relation :

$$\Gamma_n = \sigma^2 \Lambda_n$$

## 2.2 Estimateurs de l'autocovariance et de l'autocorrélation

. Un estimateur de l'autocovariance de rang  $k$  est :

$$C_k = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \mu) (y_{t+k} - \mu) \quad \forall k = 0, p$$

$$\text{où} \quad \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t = \mu$$

. Un estimateur de l'autocorrélation de rang  $k$  est

$$r_k = \frac{C_k}{C_0}$$

## 2.3 Fonction d'autocorrélation et équations de Yule-Walker

Partant de l'équation :

$$\hat{y}_t = a_1 \hat{y}_{t-1} + a_2 \hat{y}_{t-2} + \dots + a_p \hat{y}_{t-p} + u_t$$

en multipliant par  $\hat{y}_{t-k}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{y}_t \hat{y}_{t-k} &= a_1 \hat{y}_{t-1} \hat{y}_{t-k} + a_2 \hat{y}_{t-2} \hat{y}_{t-k} + \dots + a_p \hat{y}_{t-p} \hat{y}_{t-k} \\ &\quad + u_t \hat{y}_{t-k} \end{aligned}$$

Si l'on prend l'espérance mathématique, et en notant que

$$E(u_t \hat{y}_{t-k}) = 0 \quad (\text{puisque à } \hat{y}_{t-k} \text{ est associé } u_{t-k} \text{ qui est}$$

non corrélé avec  $u_t$ ) on a :

$$\gamma_k = E(\hat{y}_t \hat{y}_{t-k}) = a_1 \gamma_{k-1} + \dots + a_p \gamma_{k-p} \quad \forall k > 0$$

donc en divisant par  $\gamma_0$

$$p_k = a_1 p_{k-1} + \dots + a_p p_{k-p} \quad \forall k > 0$$

En écrivant cette relation pour  $k = 1, 2, \dots, p$  on obtient le système des équations de Yule-Walker :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = a_1 p_0 + a_2 p_1 + \dots + a_p p_{p-1} \\ p_2 = a_1 p_1 + a_2 p_0 + \dots + a_p p_{p-2} \\ \vdots \\ p_p = a_1 p_{p-1} + a_2 p_{p-2} + \dots + a_p p_0 \end{array} \right.$$

Si on note

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_p \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & p_1 & \dots & p_{p-1} \\ p_1 & 1 & \dots & \vdots \\ p_2 & p_1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{p-1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

On a  $p = PA$  d'où  $A = P^{-1}p$

2.4 Fonction d'autocorrélation partielle théorique

Soit  $a_{kj}$  le  $j^{\text{ième}}$  coefficient d'un processus autorégressif d'ordre  $k$  ( $\forall j = 1, k$ )

On a la relation :

$$p_j = a_{k1} p_{j-1} + a_{k2} p_{j-2} + \dots + a_{kk} p_{j-k} \quad \forall j = 1, k$$

d'où le système de Yule-Walker

$$\begin{bmatrix} 1 & p_1 & p_2 & \dots & p_{k-1} \\ p_1 & 1 & p_1 & \dots & p_{k-2} \\ p_2 & p_1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_{k-1} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix}$$

Les autocorrélations partielles théoriques d'ordre  $h$  sont les autocorrélations entre  $\phi_t$  et  $\phi_{t-k}$  ayant éliminé les effets de  $(\phi_{t-1} \dots \phi_{t-h+1})$

En résolvant les équations de Yule-Walker pour  $k=1, 2, \dots$  on obtient:

$$a_{11} = p_1, \quad a_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & p_1 \\ p_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & p_1 \\ p_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

A l'ordre  $k$  on obtient  $a_{kk}$  comme le rapport de deux déterminants dont celui du numérateur a les mêmes éléments que celui du dénominateur mise à part la dernière colonne qui est :

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix}$$

$a_{kk}$  est appelé fonction d'autocorrélation partielle théorique.

### 2.5 Fonction d'autocorrélation partielle estimée

Elle est obtenue en substituant dans la fonction théorique  $r_k$  à  $p_k$

On calcule alors les  $\hat{a}_{kj}$   $\forall j = 1, k$  en utilisant les

relations :

$$r_j = \hat{a}_{k1} r_{j-1} + \hat{a}_{k2} r_{j-2} + \dots + \hat{a}_{kk} r_{j-k} \quad \forall j = 1, k$$

et en résolvant pour  $k = 1, 2, \dots, p$

Dans le cas d'un processus stationnaire, on peut utiliser l'algorithme dû à DURBIN.

Cet algorithme permet de calculer les estimateurs d'autocorrélation d'un modèle autorégressif d'ordre  $(p+1)$  en fonction des estimateurs du modèle d'ordre  $p$ .

Les  $\hat{a}_{p+1}$  sont donnés par l'équation réursive :

$$\hat{a}_{p+1,j} = \hat{a}_{pj} - \hat{a}_{p+1,p+1} \cdot \hat{a}_{p,p-j+1} \quad \forall j = 1, p$$

$$\text{avec } \hat{a}_{p+1,p+1} = \frac{r_{p+1} - \sum_{j=1}^p \hat{a}_{pj} \cdot r_{p+1-j}}{1 - \sum_{j=1}^p \hat{a}_{pj} \cdot r_j}$$

## XI ETUDE LOCALE DES SERIES TEMPORELLES

---

Plusieurs méthodes sont généralement proposées : méthode de lissage (moyenne mobile, approximation polynomiale), méthode des différences ([13])

Plusieurs cadres probabilistes sont possibles : erreurs corrélés, erreurs non corrélées. Plus précisément si le modèle s'écrit :

$$y_t = f(t) + \epsilon_t$$

où  $y_t$  est la série observée

$f(t)$  la tendance

$\epsilon_t$  l'erreur

nous supposons soit :

$$\begin{aligned} E(\epsilon_t) &= 0 \\ V(\epsilon_t) &= \sigma^2 \\ \text{COV}(\epsilon_t, \epsilon_s) &= 0 \end{aligned} \quad [\text{I}]$$

soit :

$$\begin{aligned} E(\epsilon_t) &= 0 \\ V(\epsilon_t) &= \sigma^2 \\ \text{COV}(\epsilon_t, \epsilon_s) &= \sigma_{t-s} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \epsilon_t \text{ stationnaire} \\ \text{au second ordre.} \end{array} \quad [\text{II}]$$

### 1. La méthode de lissage pour le modèle [I]

---

La méthode de lissage consiste à évaluer la tendance en un point donné par une moyenne pondérée des observations voisines. La valeur observée est considérée comme la somme d'un terme de tendance et d'une composante aléatoire. Plus précisément, étant donné les observations  $y_1 \dots y_T$

..//...

nous estimerons la tendance en  $t$  par :

$$y_t^* = \sum_{s=-m}^m c_s y_{t+s} \quad \forall t = m+1, T-m$$

où  $\sum_{s=-m}^m c_s = 1$  (cette normalisation des coefficients n'entraîne aucune perte de généralité).

La nouvelle série obtenue  $y_{m+1}^* \dots y_{T-m}^*$  est appelée moyenne mobile de la série  $y_t$

$$\text{Quand } y_t = f(t) + \varepsilon_t, \text{ on a } y_t^* = \sum_{s=-m}^m c_s f(t+s) + \varepsilon_t^*$$

$$\text{où } \varepsilon_t^* = \sum_{s=-m}^m u_{t+s}$$

Avec les hypothèses probabilistes [ 1 ] , nous avons :

$$\cdot E(\varepsilon_t^*) = 0$$

$$\cdot V(\varepsilon_t^*) = \sigma^2 \sum_{s=-m}^m c_s^2$$

$$\cdot \text{Cov}(\varepsilon_t^*, \varepsilon_{t+h}^*) = \sigma^2 \sum_{s=-m+h}^m c_s \cdot c_{s-h} \quad \forall h = 0, 2m$$

$$= 0 \quad \forall h \geq 2m + 1$$

Remarque : Un cas particulier consiste à prendre  $c_s = \frac{1}{2m+1}$

$$\forall s = -m, m. \text{ On a alors } y_t^* = \frac{1}{2m+1} \sum_{s=-m}^m y_{t+s}$$

$$= \frac{1}{2m+1} \sum_{-m}^m f(t+s) + \frac{1}{2m+1} \sum_{-m}^m \varepsilon_{t+s}$$

$$\text{D'où } V(\varepsilon_t^*) = \frac{\sigma^2}{2m+1}$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_t^*, \varepsilon_{t+h}^*) = \frac{2m+1-h}{(2m+1)^2} \sigma^2 \quad \forall h = 0, 2m$$

$$= 0 \quad \forall h \gg 2m+1$$

La méthode de lissage la plus générale consiste à ajuster un polynôme sur  $(2m+1)$  observations et à prendre pour évaluation de la tendance, la valeur du polynôme à l'observation centrale. Par exemple, soient  $y_1 \dots y_{2m+1}$  les  $(2m+1)$  premières observations. On ajuste un polynôme  $P(t)$  et on aura alors  $y_{m+1}^* = P(m+1)$ .

On s'aperçoit alors de l'inconvénient majeur de la méthode de lissage : on n'aura d'estimation de la tendance que pour  $t = m+1, T-m$ .

Cet inconvénient interdit pratiquement toutes prévisions et extrapolations. On sait en effet que ce sont les événements les plus récents qui auront la plus grande influence sur le futur. Or ici nous n'avons aucune estimation de la tendance pour les  $m$  dernières périodes.

De plus, dans le cas de séries économiques, le nombre d'observations est généralement faible et donc la perte de  $2m$  données est gênante.

## 2. L'estimation du "trend" par un polynôme (modèle [I])

Cette méthode présente l'avantage de ne faire perdre aucune observation. Malheureusement l'estimation du trend sur l'ensemble des données  $y_t$  ( $t = 1, T$ ) conduit à un polynôme dont le degré n'est pas toujours aussi faible qu'on le désirerait.

Prenons un exemple :

$$\text{Soit } f(t) = a \left[ 1 - \frac{(t-k)^2}{k^2} \right] \quad \forall t = 0, \dots, 2k$$

$$f(t) = -a \left[ 1 - \frac{(t-3k)^2}{k^2} \right] \quad \forall t = 2k, \dots, 4k$$

Ce sont deux paraboles l'une convexe, l'autre concave. Elles ont même valeur en  $t = 2k$ .

Si maintenant nous cherchons le polynôme approchant le trend sur  $t = 0, 4k$ , nous obtenons un polynôme de degré 3.

Or, nous désirons approcher le "trend" par un polynôme de degré le plus faible possible.

Le lissage permet d'atteindre ce but car il n'utilise que les données au voisinage d'un point précis, mais nous en avons vu les désavantages.

### 3. La méthode de régression polynomiale locale (modèle [1])

La méthode proposée ici consiste à rechercher localement un polynôme approchant le "trend". On recherchera simultanément la meilleure partition des observations et le meilleur polynôme ajustant le trend dans chaque partie au sens d'un certain critère. Cette méthode présente l'avantage de ne pas imposer arbitrairement un découpage de l'ensemble des observations, mais un découpage qui se modifiera au fur et à mesure du déroulement itératif de l'algorithme. On évitera ainsi les pertes d'observations (moyenne mobile) et les polynômes de degré élevé (trend polynomial).

#### 3.1 Le principe

Soit  $f(t)$  le "trend". On cherche les coefficients  $(\alpha_0^i \dots \alpha_{q_i}^i)$  ainsi que la valeur de  $q_i$  (degré du polynôme) tels que

$\sum_{t \in P_i} [f(t) - \alpha_0^i - \alpha_1^i t \dots - \alpha_{q_i}^i t^{q_i}]^2$  soit minimum dans la classe  $P_i$  ( $\forall i = 1, K$ ) où  $(P_i), i = 1, K$  est la partition en  $K$  classes des observations

On aura bien entendu  $q_i < |P_i|$ . Nous omettrons désormais l'indice  $i$ . Pour simplifier les calculs, nous utiliserons une base de polynômes orthogonaux au lieu de la base  $\{1, t, t^2 \dots t^q\}$

Soit  $\phi_0(t) \dots \phi_q(t)$  cette nouvelle base. Nous avons

$$\phi_0(t) = 1, \quad \phi_k(t) = t^k + C_{k-1}(k)t^{k-1} \dots + C_1(k)t + C_0(k)$$

$$\forall k = 1, q$$

où les  $C_j(k)$   $j = 0, k-1$  sont déterminés par

$$\sum_t \phi_i(t) \phi_j(t) = 0 \quad i \neq j$$

$$i, j = 0, q$$

../..

Par exemple, on obtient

$$\begin{aligned}\phi_0(t) &= 1 \\ \phi_1(t) &= t - \frac{T+1}{2} \\ \phi_2(t) &= t^2 - (T+1)t + \frac{(T+1)(T+2)}{6}\end{aligned}$$

La fonction  $f(t)$  se réécrit alors :

$$f(t) = \gamma_0 + \gamma_1 \phi_1(t) + \dots + \gamma_q \phi_q(t)$$

et  $\alpha_k = \gamma_k + C_k(k+1)\gamma_{k+1} + \dots + C_k(q)\gamma_q \quad k = 0, 1, q$

L'estimation des coefficients  $\gamma$  par la méthode des moindres carrés conduit à :

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum_t y_t \phi_k(t)}{\sum_t \phi_k^2(t)} \quad \forall k = 0, 1, \dots, q$$

On a de plus une estimation de  $\sigma^2, \hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_t \left[ y_t - \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1 \phi_1(t) - \dots - \hat{\gamma}_q \phi_q(t) \right]^2}{T - q - 1}$$

(estimateur sans biais)

Il reste à déterminer le degré  $q$  du polynôme. Il s'agit de tester les hypothèses :

$$H_0 : \hat{\gamma}_k = 0$$

$$H_a : \hat{\gamma}_k \neq 0$$

au seuil  $\varepsilon$ . La théorie des moindres carrés nous dit que l'on rejette  $H_0$

si :

$$\frac{|\hat{\gamma}_q| \sqrt{\sum_t \phi_q^2(t)}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}} \geq t_{T-q-1}(\varepsilon)$$

Remarque: Ce test de Student nécessite la normalité des perturbations, toutefois :

"si l'on ne suppose plus la normalité des perturbations les tests et régions de confiance peuvent être encore valablement appliqués. Bien qu'ils ne soient pas rigoureusement exacts ils reposent sur des approximations qui suffisent toujours."

(Malinvaud, [T5])

### 3.2 Construction de la base de polynômes orthogonaux

On cherche une base  $\phi_0, \phi_1 \dots \phi_q$  de l'espace vectoriel de dimension  $(q+1)$  de l'ensemble des polynômes de degré  $\leq$  à  $q$  telle que :

$$\forall 0 \leq k \leq q \quad \phi_k \text{ est un polynôme de degré } k$$

$$\text{et } \forall k, k' \quad 0 \leq k < k' \leq q \quad \langle \phi_k, \phi_{k'} \rangle = 0$$

On posera

$$\phi_0 = 1$$

On a les résultats suivants :

#### Proposition 1

1)  $\forall k \geq 0$  Le polynôme  $\phi_{k+1}$  qui s'exprime en fonction des polynômes  $\phi_k$  et  $\phi_{k-1}$  par la relation

$$\phi_{k+1}(t) = (t - a_k) \phi_k(t) - b_{k-1} \phi_{k-1}(t)$$

est orthogonal aux précédents si

$$a_k = \frac{\langle t \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle}{\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle}$$

$$b_{k-1} = \frac{\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle}{\langle \phi_{k-1}(t), \phi_{k-1}(t) \rangle}$$

2) Les coefficients du polynôme de régression (dans la base orthogonale) sont donnés par :

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\langle \phi_k(t), y_t \rangle}{\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle} \quad \forall k \geq 0$$

3) Le polynôme de degré  $q$  minimisant la somme des carrés des résidus s'écrit :

$$\hat{\phi}_q(t) = \sum_{k=0}^q \hat{\gamma}_k \phi_k(t)$$

Démonstration: Elle se trouve en Annexe 3.

### Proposition 2

Les coefficients de régression dans la base  $\{1, t, \dots, t^q\}$  sont donnés par :

$$\hat{\gamma}_k = \hat{\gamma}_k + C_k(k+1) \hat{\gamma}_{k+1} - \dots + C_k(q) \hat{\gamma}_q \quad \forall k = 0, q$$

où les  $C_i(\bullet)$  sont obtenus de façon récurrente par :

$$\cdot C_k(k+1) = C_{k-1}(k) - a_k$$

$$\cdot C_{k-1}(k+1) = C_{k-2}(k) - a_k C_{k-1}(k) - b_{k-1}$$

$$\cdot C_{k-i}(k+1) = C_{k-i-1}(k) - a_k C_{k-i}(k) - b_{k-1} C_{k-i}(k-1)$$

$$\forall i = 2, k-1$$

[1]

et

$$\cdot C_0(k+1) = -a_k C_0(k) - b_{k-1} C_0(k-1)$$

Démonstration: Elle se trouve en Annexe 3.

### 3.3 Le formalisme

#### - L'espace des noyaux

$$\mathbb{N}_K = \left\{ L / L = (A_1 \dots A_K) \right\}$$

Chaque noyau  $A_i$  ( $i = 1, K$ ) sera composé des coefficients  $\hat{\alpha}_0^i \dots \hat{\alpha}_q^i$

Nous supposons que  $q$  est le degré maximal des polynômes.

Alors :

$$A_i = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0^i \\ \hat{\alpha}_1^i \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_q^i \end{bmatrix} \quad \text{vecteur } (q+1, 1)$$

Dans ce vecteur, les derniers coefficients pourront être nuls si le test de signification (intervalle de confiance) est négatif.

On a ainsi :

$$\mathbb{N}_K = \underbrace{\mathbb{R}^{q+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{q+1}}_{K \text{ fois}} = \mathbb{R}^{K(q+1)}$$

#### - L'espace des partitions

$$\mathbb{P}_K = \left\{ P / P = (P_1 \dots P_K) \right\} \text{ est une partition de l'ensemble}$$

des observations  $E$  en  $K$  classes au plus contigües.

#### - Les notations

. Card  $P_j = n_j$  avec  $\sum_{j=1}^K n_j = n = \text{Card } E$

$\cdot T_j^i = (1, t_{ij}^1, \dots, t_{ij}^q)$  vecteur  $(1, q+1)$   $i^{\text{ème}}$  élément de  $P_j$

$$\cdot T_j = \begin{bmatrix} T_j^1 \\ \vdots \\ T_j^{n_j} \end{bmatrix}$$

matrice  $(n_j, q+1)$  des valeurs prises par le polynôme pour les  $t / y_t \in P_j$

$$\cdot Z_j = \begin{bmatrix} y_j^1 \\ \vdots \\ y_j^{n_j} \end{bmatrix}$$

vecteur  $(n_j, 1)$  des observations  $y_t \in P_j$

### 3.4 L'algorithmme

- Le critère  $W : \mathbb{R}_K^L \times \mathbb{R}_K^P \rightarrow \mathbb{R}^+$

$(L, P) \longrightarrow W(L, P)$  où

$$W(L, P) = \sum_{j=1}^K \left\| Z_j - T_j A_j \right\|^2$$

$$= \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (Z_j^i - T_j^i A_j)^2$$

$$= \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} \left( y_j^i - \sum_{k=0}^q \hat{a}_k^j t_{ij}^k \right)^2$$

Problème: trouver  $(L^*, P^*) / W(L^*, P^*) = \text{Min}_{L \in \mathbb{I}_K \times \mathbb{P}_K} W(L, P)$

- Obtention des parties contigües

Nous nous servons d'un algorithme procédant par transfert (Andenberg [1<sup>bis</sup>]).

Nous partons d'une partition en K classes  $(P_1 \dots P_K)$  contigües de E, cette partition étant soit estimée, soit tirée au hasard.

A une étape donnée, l'algorithme transfert un élément d'une classe dans une autre à condition que le critère W soit amélioré. En voici les quatre étapes :

- 1) Choisir une séparation entre deux classes (par exemple la plus à gauche)
- 2) Déplacer un élément d'un cran vers la droite. Si le critère W ne diminue pas, essayer vers la gauche. Sinon itérer jusqu'à ce qu'il ne diminue plus.
- 3) Répéter 2) pour chaque séparation
- 4) Répéter 1) 2) 3) jusqu'à ce que dans aucune classe un transfert n'améliore le critère.

Remarque : Cet algorithme converge vers un optimum local.

- la fonction de représentation

$$\begin{array}{ccc} \sigma : \mathbb{I}_K^P & \longrightarrow & \mathbb{I}_K \\ P & \longrightarrow & L = (l_1 \dots \dots \dots l_K) \end{array}$$

La méthode de calcul des noyaux est décrite précédemment ( § 3.1 )

- Les suites  $u_n$  et  $v_n$

On construit deux suites:

$$v_n = (L^{(n)}, P^{(n)})$$

$$u_n = W(L^{(n)}, P^{(n)})$$

### 3.5 la convergence de l'algorithme

Théorème : La suite  $u_n$  converge en décroissant.

Démonstration : A la  $n^{\text{ième}}$  itération, nous avons :

$$P^{(n)} = (P_1^{(n)} \dots P_K^{(n)})$$

Par la fonction  $g$  nous obtenons :  $(A_1^{(n)} \dots A_K^{(n)})$

$$\text{d'où } W(L^{(n)}, P^{(n)}) = u_n$$

Puis  $\forall j = 1, K-1$  on modifiera  $(P_j, P_{j+1})$

en déplaçant un élément. Après avoir calculé les nouveaux noyaux, nous évaluons le critère : Si celui-ci a **diminué**, alors nous conservons la modification. Sinon, c'est-à-dire s'il est resté stable ou a augmenté, le transfert n'est pas retenu. Après examen de toutes les classes, nous obtenons  $W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)}) = u_{n+1} \leq u_n$

Comme  $u_n$  est une suite positive et décroissante, elle converge vers un élément  $u^*$

Cette convergence se fait en un nombre fini d'étapes puisque  $\mathbb{P}_K$  et  $L^{(n)} \in g(\mathbb{P}_K) \subset \mathbb{L}_K$  sont finis.

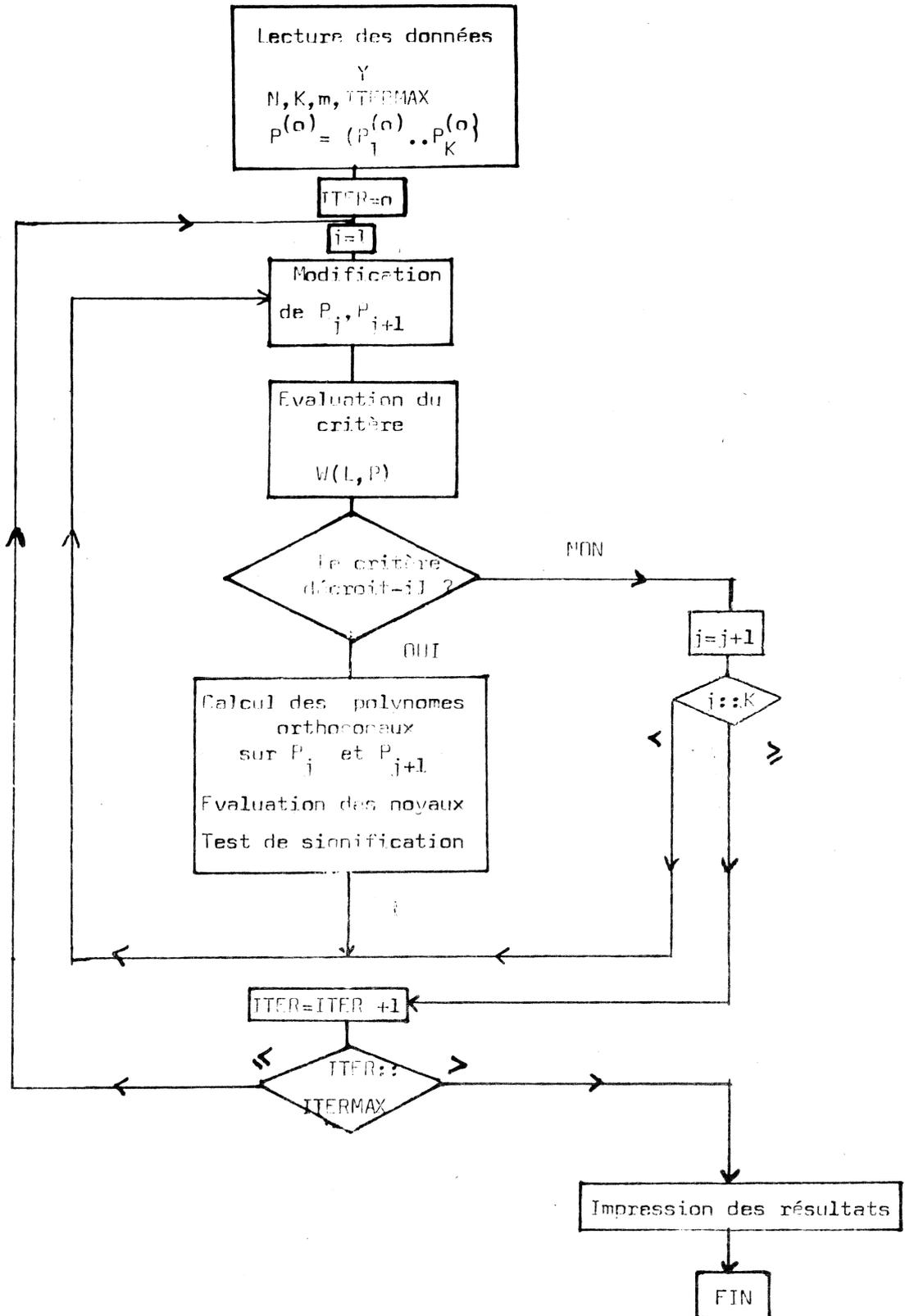
REMARQUES (1)

Si l'on ajoute à l'algorithme le test de signification des coefficients estimés, il est possible que lors du passage d'une itération à l'itération suivante le degré du polynôme approchant la tendance diminue dans certaines classes. De ce fait, la suite  $u_n$  peut être non décroissante même si en un certain sens on a une meilleure estimation. Toutefois lors de la convergence de l'algorithme, le degré des polynômes est stabilisé et donc le critère décroît.

(2) Pour chaque régression, on évalue la Durbin-Watson. On pourra ainsi vérifier l'indépendance des erreurs. Dans le cas de non-indépendance, on utilisera le modèle  $\left[ \text{II} \right]$ .

3.6 Le programme REGP 1

Ce programme écrit en FORTRAN IV IRIS 80 est organisé de la façon suivante :



#### 4. La méthode de régression polynomiale locale modèle [II]

##### 4.1 Le problème

Nous observons une série  $y_t$  ( $t = 1, n$ ) non stationnaire. Nous cherchons à décomposer cette série en la somme d'un terme de tendance  $m_t$  et d'une série stationnaire  $x_t$ .

$$y_t = m_t + x_t$$

$$\left. \begin{aligned} \text{où } .E(x_t) &= 0 \\ .V(x_t) &= \sigma^2 \\ .Cov(x_t, x_s) &= \sigma_{t-s} \end{aligned} \right\} x_t \text{ stationnaire au second ordre}$$

.  $m_t$  est le terme de tendance

$$\text{On a donc } E(y_t) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n m_t$$

$$V(y_t) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n m_t^2 - \frac{1}{n^2} \left( \sum m_t \right)^2 + \sigma^2 \frac{2}{X}$$

Nous désirons estimer cette tendance  $m_t$ . Pour cela, nous rechercherons le polynôme qui approchera le mieux  $m_t$ ; c'est-à-dire

$$m_t = \sum_{V=0}^P \gamma_V \varphi_V \quad [1]$$

où  $\gamma_V$  sont les coefficients à estimer

et  $\varphi_V = t^V$  (cas d'une régression polynomiale)

Lorsque les coefficients seront estimés, nous étudierons le processus

$$\text{résiduel } x_t = y_t - \sum_{V=0}^P \hat{\gamma}_V \varphi_V$$

La série  $x_t$  sera alors traitée comme une série stationnaire. Nous lui appliquerons les méthodes précédemment décrites. ( cf: chapitre X )

#### 4.2 L'estimation des coefficients de l'équation [1]

Vectoriellement le modèle s'écrit :  $Y = \phi \gamma + x$  où  $\phi \gamma = m$

L'estimation par les moindres carrés de  $\gamma$  conduit à l'estimateur :

$$\hat{\gamma} = (\phi' \phi)^{-1} \phi' Y = \gamma + (\phi' \phi)^{-1} \phi' X$$

Cet estimateur est sans biais, mais sa variance n'est pas minimale. L'estimateur le plus efficace, sans biais, parmi les fonctions linéaires de Y est :

$\tilde{\gamma} = (\phi' \Gamma^{-1} \phi)^{-1} \phi' \Gamma^{-1} Y$  où  $\Gamma$  est la matrice de variance covariance des X.

Cette matrice est généralement inconnue. On se servira alors de l'estimateur  $\hat{\gamma}$ . On montre que  $\hat{\gamma}$  est asymptotiquement efficace (même matrice de variance covariance que  $\tilde{\gamma}$ ) [12]

Le problème est alors de déterminer le degré du polynôme qui décrira la tendance. Il s'agit donc de tester la signification des coefficients calculés. On emploiera une méthode récursive :

On teste un polynôme de degré  $p$  ( $\forall p = 0, \dots, P$ ). Si le test du coefficient est positif, on teste un polynôme d'ordre  $p+1$ . Sinon on arrête la procédure.

(P est le degré maximum du polynôme).

Soit  $\hat{\gamma}_p$  l'estimateur de  $\gamma_p$   $\forall p = 0, 1, \dots, P$

Quand  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{(\hat{\gamma}_p - \gamma_p)}{\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_p}} \rightarrow N(0,1)$$

Au seuil de 5 %, on obtient l'intervalle de confiance :

$$I = \left[ \hat{\gamma}_p - 2 \hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_p}, \hat{\gamma}_p + 2 \hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_p} \right]$$

d'où si  $|\hat{\gamma}_p| < 2 |\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_p}|$  on rejette l'hypothèse que  $\hat{\gamma}_p$  est significativement différent de zéro.

L'estimation de  $\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_p}$  pour une régression polynomiale est donnée par 
$$\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_p} = \frac{2 f(0) m_{pp}}{n^{V+V'+1}}$$

où  $m_{pp} = \left\{ \frac{1}{V+V'+1} ; V, V' = 0, 1 \dots P \right\}^{-1}$   $p^{\text{ième}}$  élément diagonal de cette matrice

$f(0)$  est la densité spectrale du processus  $X_t$  calculée au point zéro.

Il faut donc calculer cette densité spectrale.

Si le processus  $x_t$  est un processus autorégressif d'ordre  $\alpha$  et s'écrit :

$$x_t = b_1 x_{t-1} - \dots + b_\alpha x_{t-\alpha} + \eta_t \quad \forall t = \alpha + 1, n$$

où  $E(\eta_t) = 0$   $V(\eta_t) = \sigma_\eta^2$ ,  $\text{Cov}(\eta_t, \eta_s) = 0$

.../...

La densité spectrale s'écrit :

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\hat{\sigma}_\eta^2}{\left| 1 - \sum_{v=1}^{\alpha} \hat{b}_v e^{i\lambda v} \right|^2} \text{ avec } \hat{\sigma}_\eta^2 = \frac{\sum_{t=\alpha+1}^n (x_t - \sum_{v=1}^{\alpha} \hat{b}_v x_{t-v})^2}{n - \alpha - 1}$$

(estimateur sans biais)

$$\text{donc } 2\pi f(0) = \frac{\hat{\sigma}_\eta^2}{\left| 1 - \sum_{v=1}^{\alpha} \hat{b}_v \right|^2}$$

$$\text{On a ainsi } \hat{\sigma}_p = \frac{m_{pp} \hat{\sigma}_\eta^2}{\left| 1 - \sum_{v=1}^{\alpha} \hat{b}_v \right|^2 n^{v+v'+1}}$$

L'estimation de la série  $y_t$

Dans chaque partie  $P_i$  ( $i=1, K$ ), nous avons estimé  $m_t^i$  et  $x_t^i$  - On a ainsi  $\forall t \in P_i$

$$\hat{x}_t^i = \sum_{\lambda=i}^{q_i} \hat{b}_\lambda^i x_{t-\lambda}^i \quad \forall t \geq q_i + 1$$

$$\text{Or } \hat{x}_t^i = \hat{y}_t^i - \sum_{v=0}^{\beta} \hat{\delta}_v^i t^v$$

$$\text{et } x_{t-\lambda}^i = y_{t-\lambda}^i - \sum_{v=0}^{\beta} \hat{\delta}_v^i (t-\lambda)^v \quad \forall \lambda = 1, q_i ; \forall t \geq q_i + 1$$

donc

$$\hat{y}_t^i = \sum_{v=0}^{\beta_i} \hat{\gamma}_v^i t^v + \sum_{\lambda=1}^{q_i} \hat{b}_\lambda^i \left[ y_{t-\lambda}^i - \sum_{v=0}^{\beta_i} \hat{\gamma}_v^i (t-\lambda)^v \right]$$

$$\hat{y}_t^i = \sum_{\lambda=1}^{q_i} \hat{b}_\lambda^i y_{t-\lambda}^i - \sum_{\lambda=0}^{q_i} \sum_{v=0}^{\beta_i} \hat{b}_\lambda^i \hat{\gamma}_v^i (t-\lambda)^v$$

$\forall t \geq q_i + 1$

(où  $\hat{b}_0^i = -1$   $\forall i = 1, K$ )

4.3 La démarche générale

L'algorithme adoptera la démarche suivante: recherche simultanée des évaluations de  $m_t$  et de  $(v_t - m_t)$  sur une partition contigue en K classes de l'ensemble des observations de façon à faire décroître le critère W.

4.4.1. L'espace des noyaux  $\mathbb{L}_K$

Il y aura K noyaux :  $L = (A_1 \dots A_K) \in \mathbb{L}_K$

où chaque  $A_i = (B_i, C_i)$  avec  $B_i \in \mathbb{B}_K, C_i \in \mathbb{C}_K$

$$B_i = \begin{pmatrix} -1 \\ \hat{b}_1^i \\ \vdots \\ \hat{b}_{q_i}^i \end{pmatrix} \quad C_i = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_0^i \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_{\beta_i}^i \\ -\hat{b}_1^i \hat{\gamma}_0^i \\ \vdots \\ -\hat{b}_1^i \hat{\gamma}_{\beta_i}^i \\ \vdots \\ -\hat{b}_{q_i}^i \hat{\gamma}_0^i \\ \vdots \\ -\hat{b}_{q_i}^i \hat{\gamma}_{\beta_i}^i \end{pmatrix}$$

$\left. \begin{array}{l} (\beta_i + 1) \text{ termes} \\ (\beta_i + 1) \text{ termes} \\ (\beta_i + 1)(q_i + 1) \text{ termes} \\ (\beta_i + 1) \text{ termes} \end{array} \right\}$

$B_i \in \mathbb{R}^{q_i+1}, C_i \in \mathbb{R}^{(q_i+1)(\beta_i+1)}$  d'où  $\mathbb{L}_K = \mathbb{R}^{\sum (q_i+1)(\beta_i+1)}$

#### 4.4.2 L'espace des partitions

Soit  $\mathcal{P}_K = \{P \mid P = (P_1 \dots P_K)\}$  l'ensemble des partitions en  $K$  classes contigües de l'ensemble des observations  $E$ .

#### 4.4.3 Notations

.  $\text{Card } P_j = n_j$

.  $O_j =$  ensemble des éléments de  $P_j$  sur lesquels on peut faire une autorégression d'ordre  $q_j$

.  $\text{Card } O_j = n_j - q_j$

.  $Z_{ti}^j =$   $i^{\text{ème}}$  élément de  $O_j$

$$Z_{t,i}^j = \left[ (y_{ti}^j \dots y_{t-q_j,i}^j), (t_{ij}^v)_{v=0, \beta_j} \dots, (t_{ij}^{q_j})_{v=0, \beta_j}^v \right]$$

vecteur  $\left[ 1, (q_j+1)(\beta_j+2) \right]$

.  $Z_t^j =$  matrice des éléments de  $O_j$

format  $[n_j - q_j, (\beta_j+2) (q_j+1)]$

#### 4.4.4 Le critère à optimiser

$$W : \mathbb{L}_K \times \mathcal{P}_K \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$L, P \longrightarrow W(L,P) \text{ où}$$

$$W(L,P) = \sum_{j=1}^K \| Z_t^j A_j \|_{\mathbb{R}}^2 \quad n_j - q_j = \sum_{j=1}^K \sum_{i=q_j+1}^{n_j} (Z_{ti}^j A_j)^2$$

$$= \sum_{j=1}^K \sum_{i=q_j+1}^{n_j} \left[ y_{t^j i} - \sum_{\lambda=1}^{q_j} \hat{b}_{\lambda}^j y_{t^j-\lambda}^j, i \right. \\ \left. + \sum_{\mu=0}^{q_j} \sum_{v=0}^{p_j} \hat{b}_{\mu}^j \hat{Y}_v^j (t_{t^j}^j)^v \right]$$

Le problème est alors le suivant :

$$\text{trouver } (L^*, P^*) / W(L^*, P^*) = \text{Min } W(L, P) \\ \mathbb{L}_K \times \mathbb{P}_K$$

#### 4.4.5 La fonction de représentation

$$g : \mathbb{P}_K \longrightarrow \mathbb{L}_K \\ P \longrightarrow L = (A_1 \dots A_K)$$

$$\text{où } A_i = \begin{bmatrix} B_i \\ C_i \end{bmatrix}$$

avec  $B_i$  constitué des coefficients d'autorégression estimés par les équations de Yule-Walker et de la première composante (-1).

$C_i$  constitué des coefficients associés au "trend" ..

#### 4.4.6 Obtention des parties contigues

Nous nous servons de l'algorithme procédant par transfert décrit au § 2.4

#### 4.4.7 La convergence de l'algorithme

Les suites  $u_n$  et  $v_n$  sont définies comme précédemment. Par une démonstration analogue à celle du § 3.5 nous avons:

Théorème: La suite  $u_n$  converge en décroissant.

#### 4.5 Le programme REGP3

Ce programme écrit en Fortran IV IRIS 80 adopte la démarche décrite ci-après pour le calcul des noyaux.

Il nécessite en entrée :

- . N nombre d'observations
- . K nombre de classes
- . ITER nombre maximal d'itérations
- . QM degré maximal du polynôme
- . QC ordre maximal du processus autorégressif
- .  $P^{(0)} = (P_1^{(0)} \dots P_K^{(0)})$  partition initiale contigüe.

En sortie, nous obtenons :

- .  $P^x = (P_1^x \dots P_K^x)$  partition optimale

- .  $L^x = (A_1^x \dots A_K^x)$  noyaux associés

où  $A_i^x = \begin{bmatrix} B_i^x \\ C_i^x \end{bmatrix} \quad \forall i = 1, K$

- . La valeur du critère  $W(L^x, P^x)$
  - . un graphique valeurs observées - valeurs calculées de la variable à expliquer
  - . un indice de détermination sur chaque classe
- Cet indice est calculé de la façon suivante :

$$\text{Soit } a_j = \sum_{t \in P_j} (y_{t+1} - y_t)^2$$

( $\alpha_j$  correspond à la prévision naïve qui consiste à prendre pour valeur future, la valeur précédente)

Soit  $P_j = \frac{1}{n} \sum_t (y_t - \hat{y}_t)^2$  où  $\hat{y}_t$  est la valeur prévue par le modèle pour l'observation  $t$ .

On définit alors l'indice  $R_j$  par :

$$R_j = \frac{\alpha_j - P_j}{\alpha_j} \quad \forall j = 1, K$$

On a ainsi :

$$0 \leq R_j \leq 1$$

et plus  $R_j$  est proche de 1, plus la prévision est bonne.

. une évaluation sur chaque classe des autocorrélations de la série résiduelle, ainsi on pourra juger la validité du modèle formé. En effet, la série résiduelle doit normalement se comporter comme un bruit blanc, donc ses termes ne doivent pas être autocorrélés. S'ils le sont, alors le modèle peut être amélioré puisqu'il reste une forme structurée dans la série résiduelle.

[1] Partition des observations  
 $P=(P_1 \dots P_K)$

[2]<sup>o</sup> Estimation sur chaque  $P_i$  de  $m_t$   
 par un polynôme d'ordre 0 donc  
 de K coefficients  $\hat{\gamma}_0^i \quad i = 1, K$

[3]<sup>o</sup> Calcul de  $X_t^i = y_t^i - \hat{\gamma}_0^i$

[4]<sup>o</sup> Estimation des coefficients d'autorégression  
 et de l'ordre d'autorégression de chaque  
 processus  $X_t^i$

[5]<sup>o</sup> Calcul de  $\hat{\sigma} \hat{\gamma}_0^i \quad i = 1, K$   
 Test de signification de  $\hat{\gamma}_0^i$

significatifs)  $i / \hat{\gamma}_0^i$  )  
 non significatifs)  $i / \hat{\gamma}_0^i$  )

Le degré du polynôme est  
 augmenté de 1.  
 On applique [2]<sup>1</sup>, [3]<sup>1</sup>  
 [4]<sup>1</sup>, [5]<sup>1</sup>  
 Pour les  $i / \hat{\gamma}_0^i$  est non si-  
 gnificatif on a  
 $m_t = \hat{\gamma}_0^i$  et les coefficients  
 d'autorégression de  $X_t$   
 sont ceux calculés en  
 [4]<sup>o</sup>. On connaît donc  
 $X_t$  et  $m_t \rightarrow y_t$

$X_t^i = y_t^i$   
 pas de tendance

Application de  
 l'algorithme  
 de calcul des coeffi-  
 cients d'autorégression  
 de  $X_t$

itération  
 jusqu'à  
 l'ordre  
 maximum  
 P



REMARQUE :

Pour les méthodes utilisant le schéma probabiliste [II] et dans le cas de séries temporelles linéaires, l'équation

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} \dots + a_p y_{t-p} \quad \forall t = p+1, n$$

peut être considérée comme une équation de récurrence d'ordre  $p$ . On peut donc associer à cette équation la solution :

$$y_t = \lambda_1 w_1^t + \lambda_2 w_2^t \dots + \lambda_p w_p^t$$

aux  $w_i \neq w_j \quad \forall i \neq j$  et où  $(w_i)_{i=1,p}$  sont les racines de l'équation caractéristique :

$$P(w) = w^p - a_1 w^{p-1} \dots - a_p w^0$$

Afin de fixer les coefficients  $(\lambda_1 \dots \lambda_p)$ , on utilise la suite des valeurs  $(y_1 \dots y_p)$ , suite des conditions initiales.

Plus généralement si les racines  $w_i$  ne sont pas toutes distinctes, on a :

$$y_t = \sum_{j=1}^r P_j(t) w_j^t$$

où  $w_1 \dots w_r$  sont les  $r$  racines de  $P(w)$

$$\text{et } P_j(t) = \sum_{s=0}^{\eta_j-1} \lambda_{js} t^s$$

avec  $\eta_j$  ordre de multiplicité de la racine  $w_j$

$\lambda_{js}$  constante dépendant des conditions initiales

## XII . - RECONNAISSANCE DES FORMES ET MEMORISATION CONDENSEE DE COURBES

### I. - INTRODUCTION

Le problème de la condensation de données surgit de plus en plus fréquemment dans tous les domaines où l'informatique intervient.

Lorsque les données sont représentées par des courbes, comme par exemple en cartographie automatique (courbes de niveaux) nous désirons mémoriser une quantité réduite d'informations permettant la reconstitution effective de la courbe originelle.

La reconnaissance de la courbe peut être effectuée suivant deux approches : segmentation puis description ou segmentation et description simultanées.

L'approximation locale d'une courbe (PAVLIDIS et HOROWITZ, 1973 [17<sup>bis</sup>]; Mc CLURE, 1974, [13<sup>(4)</sup>] ; LAVEEN KANAL, 1974 [13<sup>(1)</sup>] ; LAVIN, 1972, [13<sup>(2)</sup>] est faite relativement à un seuil maximal (fixé a priori) d'erreur. Ainsi on connaît la qualité de l'approximation mais non le nombre de segments de courbes. BELLMAN (1961, [2<sup>bis</sup>]) utilise la programmation dynamique, ALBANA (1973, [1]) et DUFOUR (1974 [8<sup>bis</sup>]) propose les techniques de régression (méthode des moindres carrés).

Notre approche fera la synthèse des techniques de régression et de classification non hiérarchique, ces deux méthodes étant employées de façon simultanée pour reconnaître et mémoriser une courbe.

## II. - LE MODELE

Nous supposerons le modèle suivant :

$$y_t = f(t) + u_t \quad \forall t = 1, T$$

où  $y_t$  : valeur en  $t$  de la variable observée  $y$

$f(t)$  : fonction polynomiale de  $t$  à reconstituer

$u_t$  : aléa tel que  $E(u_t) = 0$ ,  $\text{Cov}(u_t, u_s) = \delta_{ts} \sigma^2$

avec  $\delta_{ts} = 1$  si  $t=s$ ,  $0$  si  $t \neq s$

où  $0 \leq \sigma^2 < +\infty$

Remarque : Ce modèle suppose que chaque observation a un même poids. Nous pourrions aisément le généraliser en supposant :

$$\cdot E u_t = 0$$

$$\cdot V u_t = \sigma_t^2$$

$$\cdot \text{Cov}(u_t, u_s) = 0 \quad s \neq t$$

Il suffit alors d'appliquer l'algorithme sur les variables  $\frac{y_t}{\sigma_t}$

et  $\frac{1}{\sigma_t}$ ,  $\frac{t}{\sigma_t}$ ,  $\frac{t^2}{\sigma_t}$  ... au lieu de  $y_t$  et  $(1, t, t^2 \dots)$

Le problème est le suivant :

Trouver une partition de  $\{ 1, 2, \dots, T \}$  en  $K$  classes contigües et  $K$  fonctions  $f(t)$  associées à chacune des parties, de façon à optimiser un critère mesurant l'adéquation des fonctions  $f(t)$  aux observations  $v_t$ .

### 2.1 Obtention des parties contigües

Nous nous servons d'un algorithme procédant par transfert (Anderberg, [1<sup>bis</sup>]).

Nous partons d'une partition en  $K$  classes contigües  $P = (P_1 \dots P_K)$  de  $E$  ensemble des observations.

A une étape donnée, l'algorithme transfère un élément d'une classe dans une autre à condition que la nouvelle partition soit toujours formée de  $K$  parties contigües et qu'un certain critère  $W$  soit amélioré.

Plus précisément, l'algorithme se décompose en quatre étapes :

1) choisir une séparation entre 2 classes (par exemple la plus à gauche)

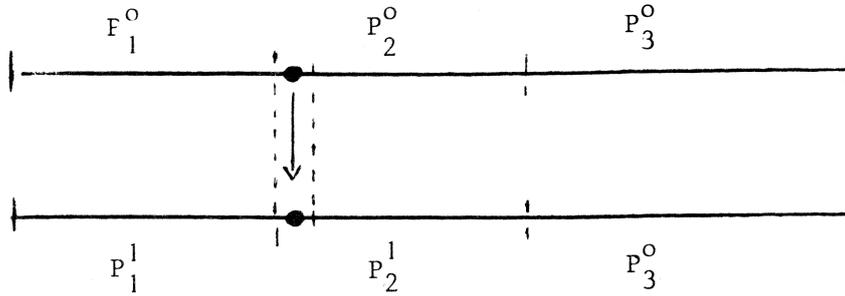
2) déplacer un élément d'un cran vers la droite.

Si le critère ne diminue pas, essayer vers la gauche, sinon itérer jusqu'à ce qu'il ne diminue plus.

3) répéter 2) pour chaque séparation

4) répéter 1) 2) 3) jusqu'à ce que dans chaque classe aucun nouveau déplacement ne fasse diminuer le critère.

../..

ExempleRemarque :

Cet algorithme converge vers un optimum local donc dépendant de la partition initiale.

2.2 Obtention des polynômes locaux

On recherche  $f(t)$  sous la forme  $\sum_{j=0}^q \alpha_j t^j$ , polynôme de degré  $q$ .

Pour chaque classe  $P_i$  ( $i = 1, K$ ), on recherche les coefficients

$(\alpha_0^i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_{q_i}^i)$  et l'ordre  $q_i$  tels que :

$$\sum_{t \in P_i} \left[ y_t - \sum_{j=0}^{q_i} \alpha_j^i t^j \right]^2 \quad (\text{critère des moindres carrés})$$

soit minimum

Nous omettons désormais l'indice de la classe.

Pour simplifier les calculs, nous utilisons une base de polynômes orthogonaux  $\left. \begin{array}{l} \phi_0(t) \dots \phi_q(t) \end{array} \right\}$  au lieu de la base  $\left. \begin{array}{l} 1, t, \dots, t^q \end{array} \right\}$

Nous avons alors :

$$\phi_0(t) = 1$$

$$\phi_k(t) = t^k + C_{k-1}(k)t^{k-1} - - - + C_1(k)t + C_0(k)$$

$$\forall k = 1, q$$

où les  $C_j(k) \quad \forall j = 0, k-1$  sont déterminés par :

$$\sum_t \phi_i(t) \phi_j(t) = 0 \quad \begin{array}{l} i \neq j \\ i, j = 0, q \end{array}$$

La fonction  $f(t)$  s'écrit alors :

$$f(t) = \gamma_0 + \gamma_1 \phi_1(t) + - - - + \gamma_q \phi_q(t)$$

$$\text{et} \quad a_k = \gamma_k + C_k(k+1) \gamma_{k+1} + - - - + C_k(q) \gamma_q \quad \forall k=0, q$$

L'estimation des coefficients  $\gamma_k$  par les moindres carrés conduit à :

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum_t t \phi_k(t)}{\sum_t \phi_k^2(t)} \quad \forall k = 0, \dots, q$$

et la signification de  $\hat{\gamma}_k$  est assurée au seuil  $\epsilon$  si

$$\frac{|\hat{\gamma}_k| \cdot \sqrt{\sum_t \phi_q^2(t)}}{\hat{\sigma}} \geq t_{T-q-1}(\epsilon)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_t \left[ y_t - \sum_{j=0}^q \hat{\gamma}_j \phi_j(t) \right]^2}{T - q - 1}$$

La construction de la base de polynômes orthogonaux ainsi que le calcul des coefficients de régression se trouvent au chapitre XI § 3.

### 2.3 Le formalisme

La formalisation utilise diverses notions introduites par E.DIDAY dans [7]

. L'espace des noyaux :  $\mathbb{L}_K$

$$\mathbb{L}_K = \left\{ L / L = (L_1 \dots L_K) \right\} \text{ où } L_i =$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0^i \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{q_j}^i \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{L}_K = \mathbb{R} \sum_{i=1}^K (q_i + 1)$$

. L'espace des partitions :  $\mathbb{P}_K$

$$\mathbb{P}_K = \left\{ P / P = (P_1 \dots P_K) \text{ contigües} \right\}$$

.  $\text{Card}(P_i) = n_i$  avec  $\sum_{i=1}^K n_i = n = \text{Card } E$

. La fonction de représentation :  $g$

$$g : \mathbb{P}_K \longrightarrow \mathbb{L}_K$$

$$P \longrightarrow L$$

La fonction  $g$  associe à chaque partie  $P_i$  un vecteur  $L_i$  constitué des coefficients déterminant l'hyperplan de régression associé (cf : 2.2)

#### 2.4 Le critère

Soit  $W : \mathbb{L}_K \times \mathbb{P}_K \longrightarrow \mathbb{R}^+$  le critère à optimiser.

$$\text{On a : } W(L, P) = \sum_{j=1}^K \sum_{t \in P_j} (y_t - \sum_{\ell=0}^{q_j} \hat{a}_j^{\ell} t^{\ell})^2$$

$W$  mesure la somme sur toutes les parties  $P_j$  des sommes des carrés des écarts entre valeurs observées et valeurs calculées.

Problème       $\text{Min}_{\mathbb{L}_K \times \mathbb{P}_K} W(L, P)$       d'où  $L^*$  et  $P^*$

## 2.5 L'algorithme et sa convergence

Une itération de l'algorithme consistera à examiner les  $K$  classes  $P_1 \dots P_K$  et à les modifier en déplaçant un ou plusieurs éléments vers la droite ou vers la gauche.

On partira de  $P^{(0)} = (P_1^{(0)} \dots P_K^{(0)})$  Par application de la fonction  $g$  on obtiendra  $(L_1^{(0)} \dots L_K^{(0)})$  Puis  $\forall j = 1, K-1$ . On modifiera  $(P_j, P_{j+1})$  en déplaçant un élément. Après avoir calculer les nouveaux noyaux associés on évaluera le critère  $W$ . Si celui-ci a diminué alors la modification sera retenue et on itèrera le processus. Après avoir examiné toutes les parties on obtient  $P^{(1)}$  et  $L^{(1)}$  ainsi que  $W(L^{(1)}, P^{(1)})$ . Plus généralement à la  $n^{\text{ième}}$  itération, on obtient  $L^{(n)}, P^{(n)}, W(L^{(n)}, P^{(n)})$

Nous avons les résultats suivants :

Proposition 1 L'algorithme décrit ci-dessus converge en faisant décroître la suite  $u_n = W(L^{(n)}, P^{(n)}) = W(v_n)$  où  $v_n = (L^{(n)}, P^{(n)})$ .

démonstration: La convergence de l'algorithme est assurée puisqu'un déplacement n'a lieu que si le critère décroît et puisque la suite  $u_n$  est positive ou nulle.

Proposition 2 L'application  $W: \mathbb{N}_K \times \mathbb{P}_K \rightarrow \mathbb{R}^+$  est non injective.

démonstration: En effet à la convergence nous avons:

$$\exists N / n \geq N \quad u_n = u_{n+1} \quad \text{c'est à dire } W(L^{(n)}, P^{(n)}) = W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)})$$

La partition  $P^{(n+1)}$  est déduite de la partition  $P^{(n)}$  soit par transfert d'un ou plusieurs éléments, soit lui est identique.

Dans le premier cas nous avons  $L^{(n)} \neq L^{(n+1)}$ . Nous choisissons alors :

$$L^* = L^{(n)} \quad \text{et} \quad P^* = P^{(n)}$$

Dans le second cas  $L^{(n)} = L^{(n+1)}$  et donc  $L^* = L^{(n)}, P^* = P^{(n)}$

## 2.6 Le programme

Ce programme écrit en FORTRAN IV IRIS 80 requiert en entrée :  
En entrée :

N nombre d'observations

K nombre de classes

QM degré maximal des polynômes

ITER nombre maximal d'itérations

$P^{(0)} = (P_1^{(0)} \dots P_K^{(0)})$  partition contigüe estimée ou tirée au hasard

En sortie, nous obtenons :

$$P^x = (P_1^x \dots P_K^x)$$

$$L^x = (L_1^x \dots L_K^x)$$

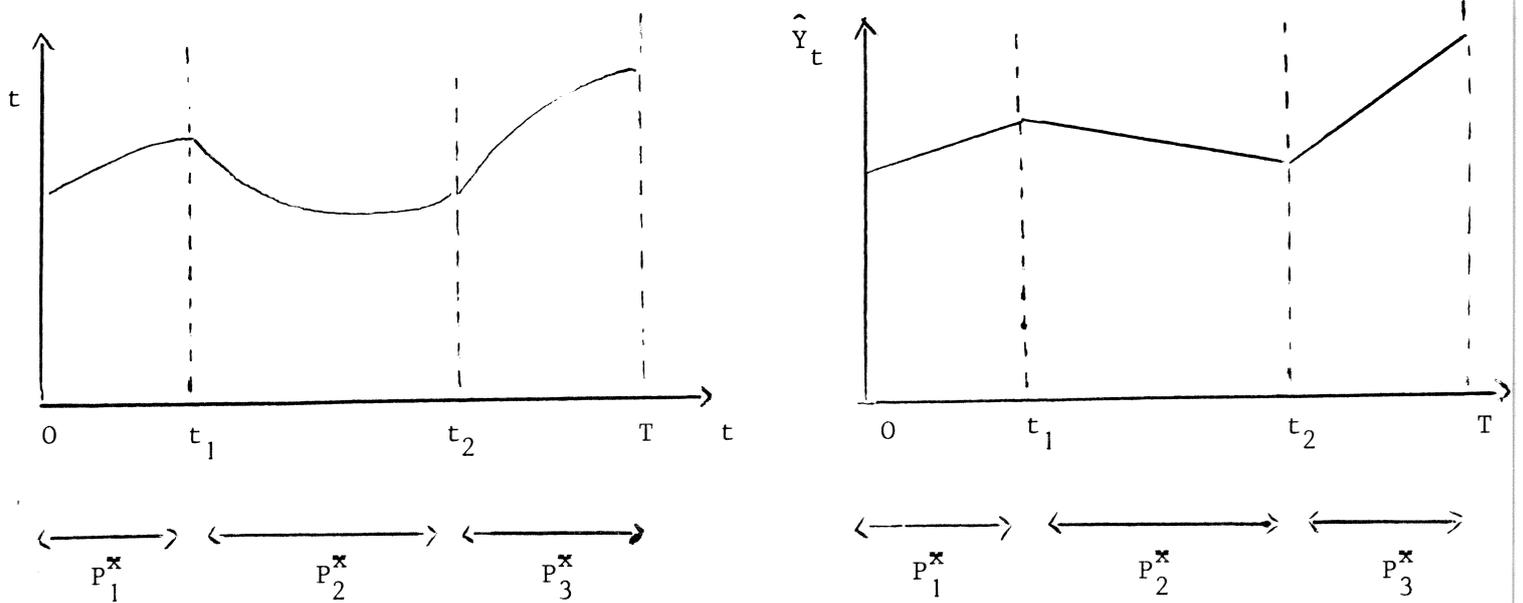
$$W(L^x, P^x)$$

ainsi qu'une représentation graphique des observations et des valeurs ajustées.

Nous donnons également la série des écarts (valeurs calculées moins valeurs observées), les coefficients de détermination  $R^2$ .

### Exemple :

Nous supposons  $K=3$   $QM=1$  (approximation PAR des droites)



La mémorisation nécessite  $(QM+1)(K)+(K-1) = 2 \times 3 + 2 = 8$   
valeurs qui sont :

$$\hat{\alpha}'_0, \hat{\alpha}'_1; \hat{\alpha}^2_0, \hat{\alpha}^2_1, \hat{\alpha}^3_0, \hat{\alpha}^3_1, t_1, t_2$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^j_0 &: \text{valeur à l'origine de la droite dans } P_j \\ \hat{\alpha}^j_1 &: \text{pente de la droite dans } P_j \end{aligned}$$

### 3. Le modèle modifié

La représentation de la série  $y_t$  par des polynômes locaux ne conduit pas à une fonction continue. Pour remédier à cet inconvénient dans certaines applications (par exemple en cartographie pour les courbes de niveaux) nous utiliserons une nouvelle fonction de représentation.

.../...

### 3.1 La nouvelle fonction de représentation

Soient  $Q_i = P_i \cup \{t_{i-1}\} \quad \forall i = 1, K$  avec  $\{t_0\} = \phi$

et  $t_{i-1}$  ( $\forall i = 2, K$ ) le dernier élément de  $P_{i-1}$

On définit alors  $g : \mathbb{Q}_K \longrightarrow \mathbb{L}_K$   
 $Q \longrightarrow L = (L_1, \dots, L_K)$

Dans chaque partie  $(Q_i)$   $\forall i = 2, K$  le modèle s'écrit :

$$y_t = \alpha_0^i + \alpha_1^i t + \dots + \alpha_{q_i}^i t^{q_i} + u_t$$

$$\hat{y}_{t_{i-1}} = \alpha_0^i + \alpha_1^i t_{i-1} \dots + \alpha_{q_i}^i t_{i-1}^{q_i}$$

où  $\hat{y}_{t_{i-1}}$  est la valeur estimée de  $y_{t_{i-1}}$  au dernier point de  $P_{i-1}$  par son polynôme représentatif

Pour  $P_1 = Q_1$ , il n'y a pas lieu d'ajouter de contrainte.

Le problème d'estimation des coefficients s'écrit alors sur  $P_1$  comme précédemment et sur  $Q_2 \dots Q_K$  :

$$\text{Min } \sum_{\substack{Q_i \\ i \neq 1}} u_t^2 \quad \text{sous } R_i \alpha_i = r_i$$

.../...

avec :  $R_i = [1, t_{i-1}, \dots, t_{i-1}^{q_i}]$

$$r_i = \hat{y}_{t_{i-1}}$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_0^i \\ \alpha_{q_i}^i \end{pmatrix}$$

ce qui est équivalent à  $\left. \begin{array}{l} \text{Min } (Y - T\alpha)' (Y - T\alpha) \\ \text{sous } R\alpha = r \end{array} \right\}$

où Y vecteur des  $y_t / t \in Q_i$

T matrice de ligne  $(1, t, \dots, t^{q_i}) \quad \forall t \in Q_i$

Nous avons la proposition suivante:

Proposition: Le problème d'optimisation  
Minimiser  $(Y - T\alpha)' (Y - T\alpha)$  sous  $R\alpha = r$   
a pour solution:

$$\hat{\alpha} = (T'T)^{-1} T'Y - (T'T)^{-1} R' \left[ R(T'T)^{-1} R' \right]^{-1} \left[ R(T'T)^{-1} T'Y - r \right]$$

démonstration: La démonstration de ce résultat est donnée en annexe 1.

Remarque: Si l'on emploie des polynômes orthogonaux (T'T) est diagonale donc on obtient aisément son inverse, de plus  $R(T'T)^{-1} R'$  est un scalaire,

### 3.2 Le formalisme et la convergence

Seule la fonction de représentation a été modifiée :  $g$  associe à chaque partie  $Q_i = P_i \cup \dots \cup t_{i-1}$  le vecteur des coefficients de régression associés aux moindres carrés sous contraintes linéaires. La décroissance de la suite  $u_n = W(L^{(n)}, Q^{(n)})$  est assurée par le choix de l'algorithme de transfert. Cette suite étant positive, elle converge donc vers  $u^x = W(L^x, Q^x)$ . Puisque le nombre d'éléments de  $E$  est fini,  $\mathcal{Q}_K$  est fini et donc

$$\{L^{(n)}\} \in \mathcal{g}(\mathcal{Q}_K) \subset \mathbb{L}_K.$$

$$\text{Donc } \exists N / \forall n \geq N \quad u_n = u_{n+1}$$

$$\Rightarrow W(L^{(n)}, Q^{(n)}) = W(L^{(n+1)}, Q^{(n+1)})$$

L'optimum sera  $u_N = u^x$  et les noyaux et la partition associés

$$\text{seront } L^{(N)} \text{ et } Q^{(N)}, \text{ déduite de } Q_i^{(N)} = P_i^{(N)} \cup \dots \cup t_{i-1}^{(N)} \quad \forall i=1, \dots, K$$

### 3.3 Généralisation du modèle sous contraintes

3.3.1 Cette méthode de régression locale sous contraintes a été généralisée de façon à obtenir une représentation continue et dont les dérivées 1<sup>ères</sup>, 2<sup>èmes</sup> ... sont continues.

Il suffit pour cela d'ajouter les contraintes imposant le raccord aux bords des dérivées.

#### 3.3.2 Cas SPLINE

Définition :

Une fonction  $S$  est une fonction spline de degré  $k$  s'il existe des points  $(X_i)_{i=0,m}$  tels que pour toute partition  $\Delta$  de  $[a,b]$  :  $a = x_0 < x_1 \dots < x_{m-1} < x_m = b$

$S$  soit sur  $[x_{i-1}, x_i]_{i=1,m}$  un polynôme de degré  $\leq k$   $(k-1)$  fois différentiable.

Construction de la fonction Spline :

Le modèle s'écrit sur  $Q_2 \dots Q_K$

$$[1] \quad y_t = \gamma_0 + \gamma_1 \phi_1(t) + \dots + \gamma_q \phi_q(t) + u_t$$

$$[2] \quad \hat{y}_{t_{i-1}}^{(j)} = \gamma_0 + \gamma_1 \phi_1^{(j)}(t_{i-1}) \dots + \gamma_q \phi_q^{(j)}(t_{i-1}) \quad \forall j = 0, q-1$$

avec  $E_{u_t} = 0$

$$Vu_t = \sigma^2 I_T$$

où les équations [2] sont les contraintes de continuité de la fonction ( $j=0$ ) et des dérivées d'ordre  $j$  ( $j = 1, q-1$ )

On a :

$\hat{y}_{t_{i-1}}^{(j)}$  = valeur calculée sur  $P_{i-1}$  pour la fonction ( $j=0$ ) et ses dérivées

( $j=1, q-1$ ) en  $t_{i-1}$

$\phi_k^{(j)}(t_{i-1})$  = dérivée d'ordre  $j$  du  $k^{\text{ième}}$  polynôme orthogonal de  $P_i$

évaluée en  $t_{i-1}$

Les estimateurs  $\hat{\delta}$  sont donnés par la formule de 3.1 où

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \phi_1(t_{i-1}) & \phi_2(t_{i-1}) & \dots & \phi_q(t_{i-1}) \\ 0 & \phi_1^{(1)}(t_{i-1}) & \phi_2^{(1)}(t_{i-1}) & & ' \\ & \phi_1^{(2)}(t_{i-1}) & \phi_2^{(2)}(t_{i-1}) & & ' \\ & & \dots & & ' \\ & & & \phi_{q-1}^{(q-1)}(t_{i-1}) & \phi_q^{(q-1)}(t_{i-1}) \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} \hat{y}_{t_{i-1}}^{(0)} \\ \hat{y}_{t_{i-1}}^{(1)} \\ ' \\ ' \\ \hat{y}_{t_{i-1}}^{(q-1)} \end{bmatrix}$$

### 3.3.3 CAS SPLINE d'interpolation

Définition : Une fonction S est une fonction Spline d'interpolation de degré k s'il existe des points  $(x_i)_{i=0,m}$  tels que

$$a = x_0 < x_1 \dots < x_{m-1} < x_m = b$$

où sur  $[x_{i-1}, x_i]$   $S$  est un polynôme de degré  $k$ ,  $(k-1)$  fois différentiable et tel que :

$$S(x_i) = y_{X_i}$$

$$S(x_{i-1}) = y_{X_{i-1}}$$

où  $Y_*$  est la fonction que l'on désire approcher.

Le modèle s'écrit sur  $(Q_2, \dots, Q_K)$

$$[1] \quad y_t = \gamma_0 + \gamma_1 \phi_1(t) \dots + \gamma_q \phi_q(t) + u_t$$

$$[2] \quad \begin{cases} y_{t_{i-1}} = \gamma_0 + \gamma_1 \phi_1(t_{i-1}) \dots + \gamma_q \phi_q(t_{i-1}) \\ y_{t_i} = \gamma_0 + \gamma_1 \phi_1(t_i) \dots + \gamma_q \phi_q(t_i) \end{cases}$$

(conditions aux bords)

$$[3] \quad \hat{y}_{t_{i-1}}^{(j)} = \sum_{k=0}^q \gamma_k \phi_k^{(j)}(t_{i-1}) \quad \forall j = 1, q-1$$

(conditions sur les dérivées)

Sur  $P_1 = Q_1$  on aura le système [1] [2] . On obtient en utilisant la méthode des moindres carrés sous contraintes le système [3] pour  $P_2$

Sur  $(Q_2 \dots Q_k)$ , il ne s'agit plus d'estimation puisque nous avons  $(q+1)$  contraintes sur  $(q+1)$  coefficients. Il s'agit de résoudre un système linéaire : (constitué de [2] et [3] )

$$R \gamma = r$$

où  $R$  est presque triangulaire. On le résout aisément avec la méthode de Gauss-Seidel.

#### 3.4 Le programme REGP2

Ce programme généralise le précédent. On introduit une variable MODE qui pour :

MODE = 0  $\Rightarrow$  algorithme présenté en 3.

MODE = 1  $\Rightarrow$  représentation continue 3.1

MODE =  $\lambda$   $\Rightarrow$  dérivées  $(\lambda-1)^{\text{ièmes}}$  continues ( $\forall \lambda=2, q-1$ ) 3.3.1 et 3.3.2

MODE = q  $\Rightarrow$  SPLINE d'interpolation 3.3.3

#### 4. Nouvel algorithme fournissant la partition en classes contigües

L'algorithme de transfert nous fournit un optimum local, donc nécessite afin d'approcher aux mieux l'optimum global plusieurs tirages de la partition aléatoire de départ.

L'algorithme que nous présentons maintenant généralise l'approche due à FISHER (1958) et présente l'avantage de fournir à nombre de classes fixé l'optimum global.

FISHER propose un algorithme de programmation dynamique dont le critère est la variance intra-classe.

Dans notre cas, le critère sera la somme sur tous les individus d'une classe des carrés des résidus d'estimation

c'est-à-dire  $\sum_{t \in P_i} u_t^2$

$$u_t = y_t - \sum_{\ell=0}^m a_{\ell} x_{\ell t}$$

Cet algorithme est efficace si l'on impose la condition d'ordre suivante :

Définition : Soit E l'ensemble des observations

$$E = \left( \begin{array}{c} y_1 \cdots y_t \cdots y_T \end{array} \right)$$

On dit qu'une partition  $P = (P_1 \dots P_K)$  en  $K$  classes de  $E$  possède la propriété d'ordre si pour deux éléments  $y_t$  et  $y_s$  de  $E$  classés dans la même classe  $P_\ell$  on a :

$$\forall y_u \in E / t < u < s \Rightarrow y_u \in P_\ell$$

Remarque :

Le critère que nous voulons optimiser généralise celui de FISHER au sens où

$$\text{Min} \sum_{j=1}^K \sum_{t \in P_j} \left( y_t - \sum_{\ell=0}^m \hat{a}_j^\ell x_{t\ell} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \text{Min} \sum_{j=1}^K \sum_{t \in P_j} (y_t - \bar{y}_j)^2$$

si on pose .  $m = 0$

$$. X_t^\bullet = 1 \quad \forall t \in P_j$$

Plusieurs généralisations du critère de FISHER ont été étudiées par LECHEVALLIER ( 1976 ). Nous avons ainsi le résultat suivant :

Proposition: L'algorithme de FISHER permet d'optimiser tout critère pouvant se décomposer de la façon suivante:

$$W(L,P) = \sum_{j=1}^K W(L_j, P_j)$$

où  $W(L_j, P_j)$  est un nombre réel positif pour toutes les classes  $P_j \in \mathcal{S}(E)$

démonstration: Elle se trouve dans T3(3)

Voici les différentes étapes de l'algorithme:

Etape 1 : énumération complète pour trouver la partition optimale en deux classes de E (étant entendu que chaque classe comporte au moins  $(m+1)$  éléments, où  $m$  est le degré maximal des polynômes de régression).

Etapes suivantes : On utilise la relation de récurrence :

$$F_j(t) = \begin{array}{ll} \text{Min} & [c_{ts} + F_{j-1}(s+1)] \\ 1 \leq t < s & \\ s-t > m & \end{array} \quad \begin{array}{l} \forall t = 1, T-(m+1)j \\ \forall s = m+1, T-(j-1)(m+1) \\ \forall j = 3, K \end{array}$$

permettant de passer de  $(j-1)$  classes à  $j$  classes, avec :

$$C_{ts} = \sum_{v=t+1}^s \left| \hat{u}_v \right|^2, \text{ somme des carrés des résidus d'estimation}$$

$$= \sum_{v=t+1}^s \left| y_v - \sum_{l=0}^m a_l \times \frac{1}{v} \right|^2$$

pour les éléments de E d'indice compris entre t et s avec  $s-t > m$

.  $F_j(t)$  est la valeur optimale du critère pour un partitionnement en  $j-1$  classes de la sous-population  $\{y_t \dots y_T\}$

Plus précisément l'étape 1 se fait ainsi :

- On construit la première partition  $( \{y_1 \dots y_{m+1}\} \{y_{m+2} \dots y_T\} )$

on calcule le critère associé c'est-à-dire :

.  $C_{1,m+1} = 0$  (puisque  $(m+1)$  termes et régression à  $(m+1)$  variables)

.  $F_2(m+2) =$  somme des carrés des résidus associés aux termes

$$y_{m+2} \quad \tilde{\alpha} \quad y_T$$

- la construction de la  $s^{\text{ième}}$  partition se fait ainsi :

$$\left\{ y_1 \dots y_s \right\}, \left\{ y_{s+1} \dots y_T \right\}$$

d'où .  $C_{1s} =$  somme des carrés des résidus associés à  $\left\{ y_1 \dots y_s \right\}$

.  $F_2(s+1)$  = somme des carrés des résidus associés à  $\left. \begin{array}{l} ) \\ ) \end{array} \right\} y_{s+1} \cdots y_T$

- la construction de la  $(T-m)^{\text{ième}}$  et dernière partition

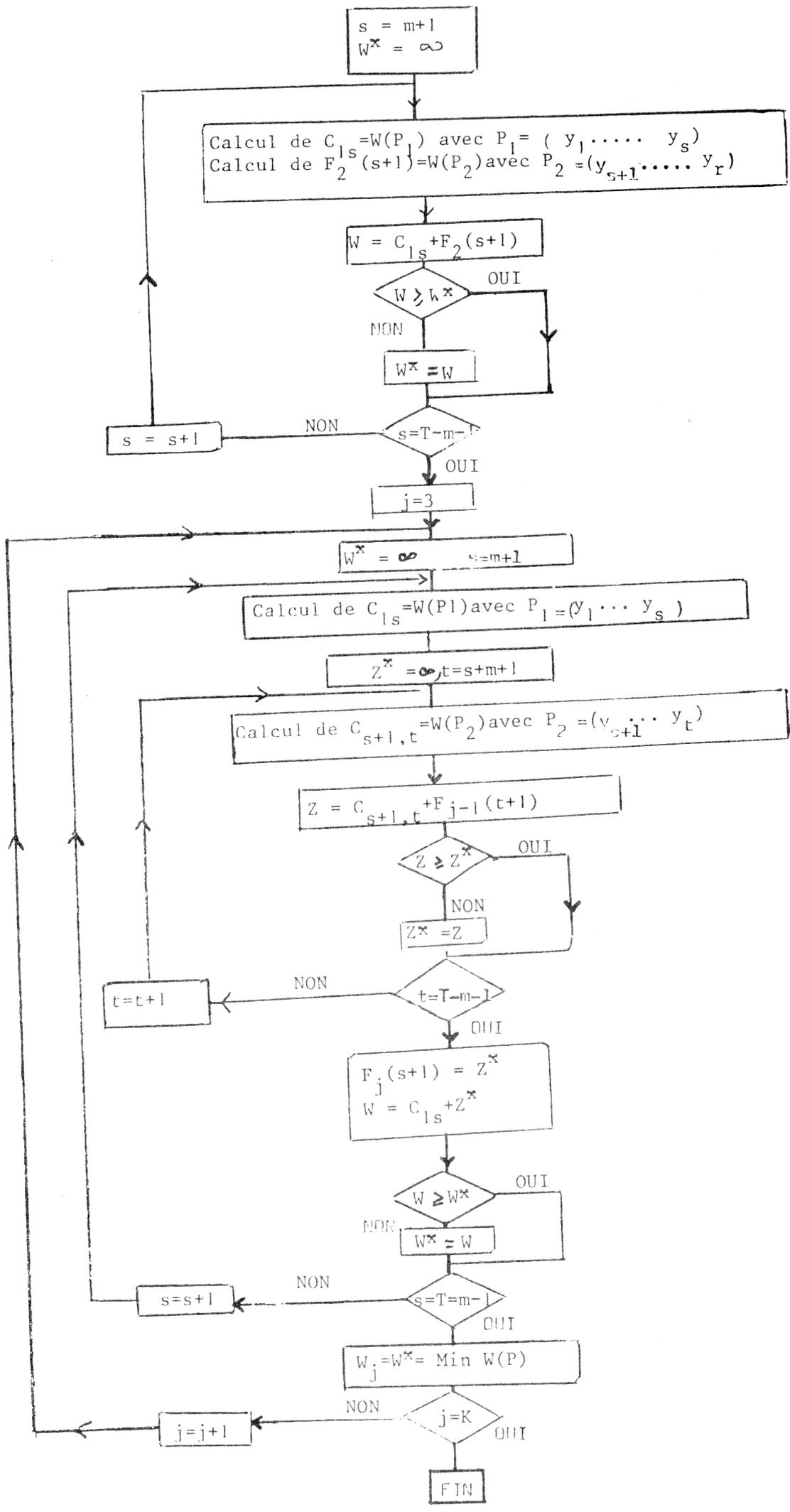
$\left. \begin{array}{l} ) \\ ) \end{array} \right\} y_1 \cdots y_{T-m-1}$  ,  $\left. \begin{array}{l} ) \\ ) \end{array} \right\} y_{T-m}, y_T$  nous donne :

.  $C_{1, T-m-1}$

.  $F_2(T-m)$

La meilleure partition en deux classes sera celle associée au plus faible critère.

Cette procédure ayant initialisé la relation de récurrence, nous pouvons passer de  $j=2$  à  $j=3$  et plus généralement de  $(j-1)$  à  $j$



## 5. Généralisations

### 5.1 Cas d'une fonction de $\mathbb{R}^2$

#### 5.1.1. Le formalisme

Il s'agit de généraliser les algorithmes précédents au cas d'une fonction définie par les couples  $(X_t, Y_t) \quad \forall t = 1, T$  observés

C'est le cas par exemple en cartographie des courbes de niveaux :  $(X_t, Y_t)$  sont l'abscisse et l'ordonnée des points  $t$  d'altitude définie. On recherche une partition  $P$  de  $\{1, \dots, T\}$  en  $K$  classes et les fonctions  $f_j$  et  $g_j$  telles que :

$$X_t = f_j(t) + u_t \quad \forall t \in P_j$$

$$Y_t = g_j(t) + v_t \quad \forall t \in P_j$$

vérifient :

$$\begin{aligned} \text{Min } W(L, P) &= \text{Min} \sum_{j=1}^K \sum_{t \in P_j} \left[ (X_t - f_j(t))^2 + (Y_t - g_j(t))^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^K \sum_{t \in P_j} \left[ (X_t - \hat{f}_j(t))^2 + (Y_t - \hat{g}_j(t))^2 \right] \end{aligned}$$

avec  $\hat{f}_j$  et  $\hat{g}_j$  estimations par les moindres carrés de  $f_j$  et  $g_j$

Si on recherche  $f_j$  et  $g_j$  sous forme polynomiale

$$\begin{aligned} \cdot f_j(t) &= \sum_{i=0}^q a_i^j t^i \\ \cdot g_j(t) &= \sum_{i=0}^{q'} b_i^j t^i \end{aligned}$$

alors on appliquera la méthode décrite en 2.2 pour calculer  $(\hat{a}_0^j \dots \hat{a}_q^j)$

et  $(\hat{b}_0^j \dots \hat{b}_q^j)$ . Puis on utilisera l'algorithme de transfert qui sera basé sur le nouveau critère W.

Le noyau  $L_j$  sera ainsi

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_0^j \\ \vdots \\ \hat{a}_q^j \\ \hat{b}_0^j \\ \vdots \\ \hat{b}_q^j \end{bmatrix}$$

et la mémorisation

se fera en conservant les points frontières des classes et ces noyaux.

#### 5.1.2 Le programme FORTRAN REGP.2.B

Ce programme écrit en FORTRAN IV IRI<sup>2</sup> 80 nécessite en entrée :

N : nombre d'observations

K : nombre de classes

QM : degré maximal du polynôme en Y

QX : degré maximal du polynôme en X

ITER : nombre maximal d'itérations

$P^{(0)} = (P_1^{(0)} \dots P_K^{(0)})$  partition contigue estimée ou tirée au hasard.

En sortie, nous obtenons :

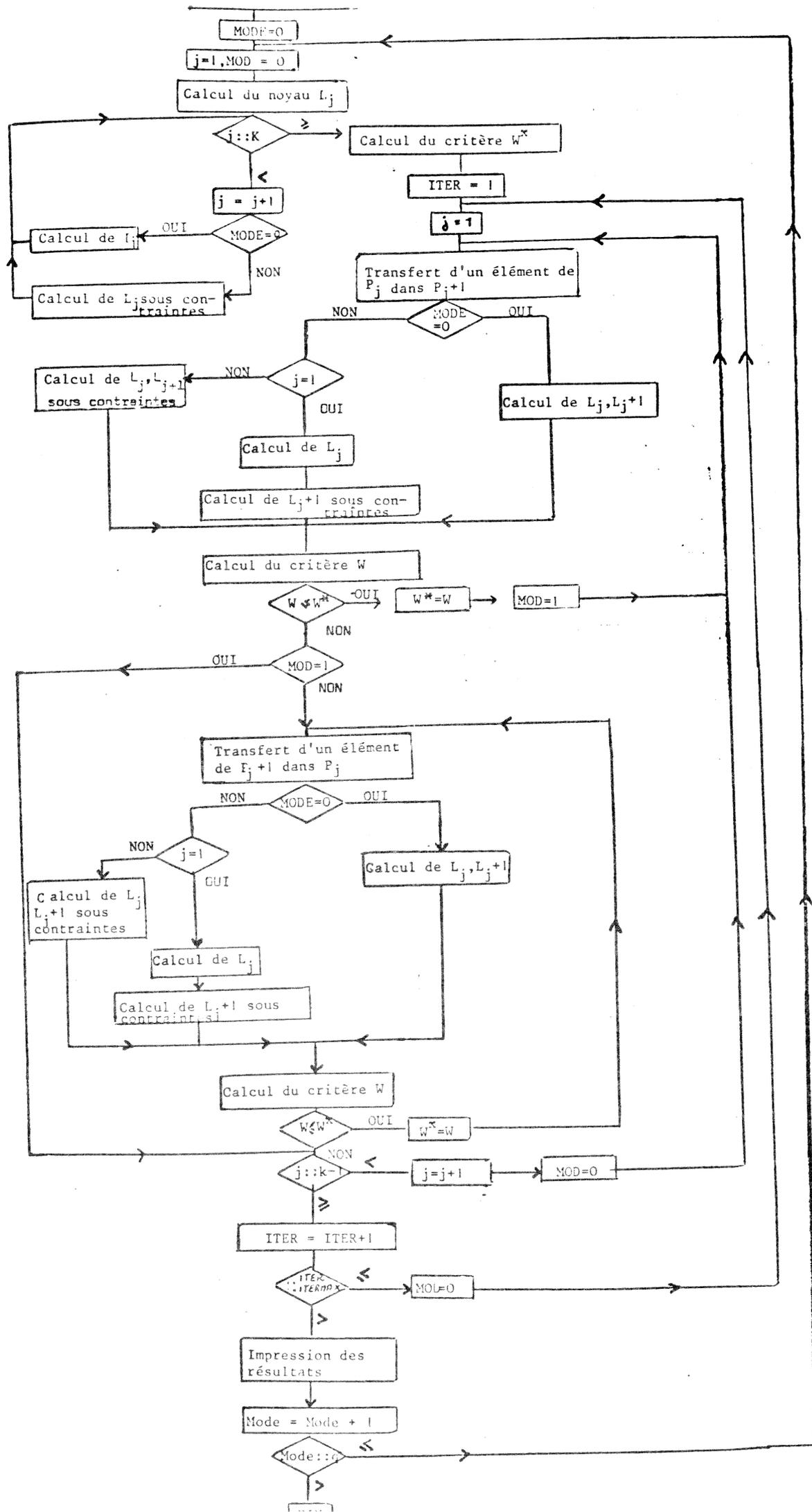
$$P^x = (P_1^x \dots P_K^x)$$

$$L^x = (L_1^x \dots L_K^x)$$

$$W(L^x, P^x)$$

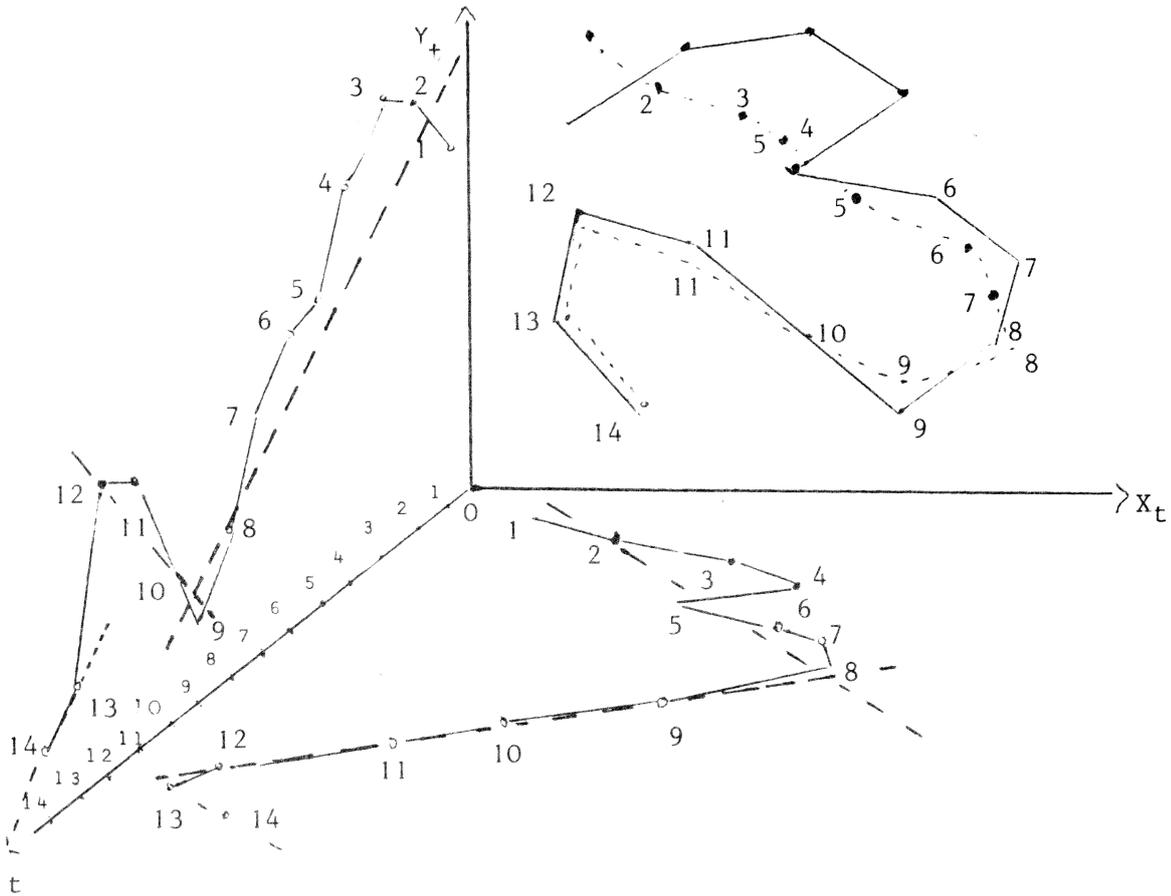
ainsi qu'une représentation graphique des observations et des valeurs calculées.

Nous imprimons également les séries des écarts résiduels.



Exemple "pédagogique"

Nous supposons  $K = 3$ ,  $QM = QX = 1$



Nous supposons ici que la partition optimale est :

$$P_1^* = (1 \dots 8)$$

$$P_2^* = (9 \dots 12)$$

$$P_3^* = (13, 14)$$

En trait continu les courbes observées, en trait discontinu les hyperplans de régression et la courbe en résultant dans le plan  $(X_t, Y_t)$

La mémorisation nécessite  $(QM+1)K + (QX+1)K + (K-1)$  valeurs.  
c'est-à-dire dans cet exemple :

$$2.3 + 2.3 + 2 = 14$$

valeurs pour 28 données initiales.

L'organigramme est voisin de celui du programme REGP.2. Le calcul des noyaux comprend le calcul des deux polynômes en X et en Y. Le transfert d'un élément d'une partie dans une autre se fait si le critère W mesurant les proximités entre valeurs observées et valeurs calculées à la fois en X et en Y décroît.

Remarque : On peut comme pour le programme REGP2 envisager la continuité de la fonction et de ses dérivées. Les estimations de chacun des polynômes se feront alors sous contraintes.

## 5.2 Cas de la minimisation de valeurs absolues

1. - L'approche est la même que celle décrite au paragraphe 2, mais plutôt que d'utiliser les moindres carrés (qui peuvent présenter le désavantage de mal approximer les valeurs extrêmes) nous utilisons les moindres valeurs absolues. Dans ce contexte, la recherche du noyau est équivalente à la recherche des coefficients  $(\hat{\alpha}_i^j)_{i=0,q} \quad \forall j = 1, K$  qui minimisent

$$\sum_{t \in P_j} \left| Y_t - \sum_{i=0}^q \alpha_i^j t^i \right|$$

Nous avons vu au chapitre VII comment obtenir ces coefficients.

Le critère se transpose alors en :

$$W(L, P) = \sum_{j=1}^K \sum_{t \in P_j} \left| Y_t - \sum_{i=0}^q \hat{\alpha}_i^j t^i \right|$$

2. - Si l'on adopte comme critère locale le critère du minimax (critère de Chebyshev) alors :

$$W(L, P) = \max_{j=1, K} \min_{L_j} \max_{t \in P_j} \left| Y_t - \sum_{i=0}^q \hat{\alpha}_i^j t^i \right|$$

La fonction de représentation

$$g : \mathbb{Q}_K \rightarrow \mathbb{L}_K$$

est celle définissant la solution des systèmes linéaires surdimensionnés :

$$\forall j = 1, K$$

$$(Y_t = \sum_{i=0}^q \alpha_i^j t^i, \quad \forall t \in P_j) \text{ au sens de Chebyshev.}$$

### XIII Modèle linéaire typologique sur variables hétérogènes

Souvent lorsque nous possédons des observations sur un ensemble de variables, nous désirons expliquer leur structure par l'intermédiaire du coefficient de corrélation multiple. Mais alors se pose le problème de la nature des variables : l'utilisation du coefficient de corrélation n'est possible que dans le cas de variables toutes quantitatives ou du moins toutes de même nature. Si nous possédons un groupe de variables hétérogènes (ordinales, quantitatives, qualitatives) alors cette démarche n'est plus adéquate, d'où la nécessité de "coder" les variables. Si l'on effectue un codage préalable, alors ce codage ne sera certainement pas optimal, c'est-à-dire qu'il déformera les informations dont nous disposons d'où l'idée d'un codage qui s'adaptera de façon itérative aux données ([20]). De plus, la recherche d'hyperplans locaux permet de détecter les tendances linéaires spécifiques aux différents régimes de régression.

L'algorithme présenté recherche, de façon itérative, une partition des observations (typologie), les hyperplans locaux de régression (modèle linéaire) et un ensemble de codages optimaux, ces codages transformant les données hétérogènes en données toutes quantitatives, permettant ainsi l'utilisation du coefficient de corrélation tout en minimisant sur chaque partie la déformation des données.

## 1. Notations et hypothèses

- . E = ensemble des individus
- . N = Card(E)
- . m = nombre de variables explicatives
- .  $(X^{\ell})_{\ell=1,m}$   $\ell$ ième variable explicative

On supposera qu'elle est ordinale, qualitative ou quantitative.

De plus, elle sera supposée de même nature sur E  $\forall \ell$

- . Y variable à expliquer

On fera les mêmes hypothèses que sur les variables  $(X^{\ell})_{\ell=1,m}$

- . X matrice des observations sur les variables explicatives de format (N,m)
- . Y vecteur des observations sur la variable à expliquer, de format (N,1)
- . P =  $(P_1 \dots P_K)$  partition en K classes disjointes de E
- .  $n_j = \text{Card}(P_j)$  ,  $\sum_{j=1}^K n_j = N$
- .  $Y_j$  vecteur des observations sur Y dans  $P_j$
- .  $X_j$  matrice des observations sur  $(X^{\ell})_{\ell=1,m}$  dans  $P_j$
- .  $Y_j$  de format  $(n_j, 1)$
- .  $X_j$  de format  $(n_j, m)$
- .  $\beta_j$  vecteur(m,1) des coefficients de régression associés à  $P_j$

- .  $t^{\ell}$  opérateur de codage de  $X^{\ell}$
- $\forall \ell=1, m$

- .  $t$  opérateur de codage de  $Y$
- .  $X_j^{\times}$  matrice image de  $X_j$  par  $(t^{\ell})_{\ell=1, m}$
- .  $Y_j^{\times}$  vecteur image de  $Y_j$  par  $(t)$

En fait, ces notations seront associées aux codages optimaux  $(t^{\ell^{\times}})_{\ell}$   
et  $(t^{\times})$

On a ainsi :

$$X_j = (X_j^1, \dots, X_j^m) \xrightarrow{(t^{\ell^{\times}})_{\ell}} X_j^{\times} = (t^{1^{\times}}(X_j^1), \dots, t^{m^{\times}}(X_j^m))$$

$$= (X_j^{1^{\times}}, \dots, X_j^{m^{\times}})$$

$$Y_j \longrightarrow Y_j^{\times} = t^{\times}(Y_j)$$

On définira :

$\tilde{X}_j$  et  $\tilde{Y}_j$  comme les éléments images de  $X_j$  et  $Y_j$  par les codages "non optimaux"

. A l'individu  $i$  de  $P_j$

$$Z_i^j = (Y_j^i, X_j^{1i}, \dots, X_j^{mi})$$

on associe :

$$z_j^x = (Y_j^{i^*}, X_j^{li^*}, \dots, X_j^{mi^*})$$

$i^{\text{ème}}$  individu de  $P_j$  après le codage optimal.

## 2. Le problème

Le problème que nous désirons résoudre est le suivant : nous cherchons une partition  $P = (P_1 \dots P_K)$  de  $E$  et sur chaque  $P_j \forall j=1, K$  les codages optimaux  $t^x$ ,  $(t_j^x)_{j=1, m}$  de  $Y_j$  et  $(X_j^x)_{j=1, m}$  ainsi que le vecteur  $\hat{\beta}_j$  des paramètres de façon à minimiser la somme des carrés des écarts résiduels sur toutes les classes. Ainsi sur chaque  $P_j$ , nous noterons la relation :

$$\hat{Y}_j^x = X_j^x \hat{\beta}_j$$

### 2.1 L'espace des partitions et des fonctions de codage

Nous les noterons :

$$\cdot IP_K = \left\{ P/P = (P_1 \dots P_K) \right\}$$

$$\cdot C = \left\{ C/C = (t^1 \dots t^m, t) \text{ admissibles} \right\}$$

## 2.2 L'espace des noyaux

Soit  $\mathbf{L}_K = \left\{ L / L = (L_1 \dots L_K) \right\}$

où  $\forall j = 1, K$

$$L_j = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_j^1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_j^m \end{bmatrix}$$

avec :

•  $(\hat{\beta}_j^l)_{l=1, m}$  coefficients de régression dans  $P_j$

## 2.3 Le critère à optimiser

Avec les notations précédentes, si  $W$  est le critère

alors  $W : \mathbf{L}_K \times \mathbf{P}_K \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$(L, P, C) \longrightarrow W(L, P, C)$  avec

$$\begin{aligned} W(L, P, C) &= \sum_{j=1}^K \left\| Y_j^x - X_j^x \hat{\beta}_j \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} \left( Y_j^{ix} - \sum_{l=1}^m \hat{\beta}_j^l X_j^{lix} \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} \left( E^*(Y_j^i) - \sum_{l=1}^m \hat{\beta}_j^l E^*(X_j^{li}) \right)^2 \end{aligned}$$

Nous cherchons le triplet  $(L^x, P^x, C^x)$  tel que

$$\text{Min}_{L^x \times P^x \times C^x} W(L, P, C) = W(L^*, P^*, C^*)$$

sous les conditions de normalisation :

$$\forall j = 1, K$$

$$\cdot \frac{1}{n_j} \hat{\beta}_j' X_j^{x'} X_j^x \hat{\beta}_j = 1$$

ou :

$$\cdot \frac{1}{n_j} \hat{Y}_j^{x'} \hat{Y}_j^x = 1$$

Ces conditions sont nécessaires pour définir une solution unique.

De plus, sans ces restrictions, on pourrait prendre :

$$\forall j \quad \frac{x}{j} = 0, \quad \frac{Y^x}{j} = 0 \quad \forall j = 1, K \quad \text{et ainsi on aurait}$$

$W(L, P, C) = 0$ , solution optimale mais triviale.

Remarque :

On peut également imposer les conditions de centrage et de réduction des variables :

$$\begin{aligned} \cdot \quad \sum_{i=1}^{n_j} X_j^{i*} &= 0 & \forall_j = 1, K ; \forall l = 1, m \\ \sum_{i=1}^{n_j} Y_j^{i*} &= 0 & \forall_j = 1, K \end{aligned}$$

$$\cdot \quad \left\| X_j^{e*} \right\|_{\mathbb{R}^{n_j}}^2 = n_j \quad \forall_j = 1, K ; \forall l = 1, m$$

$$\cdot \quad \left\| Y_j^{e*} \right\|_{\mathbb{R}^{n_j}}^2 = n_j \quad \forall_j = 1, K$$

Toutefois ces conditions n'assurent plus la convergence du critère.

#### 2.4 La fonction d'identification f

Soit  $f : \mathbb{L}_K \longrightarrow \mathbb{P}_K$  qui à

$$L \longrightarrow P = (P_1 \text{ --- } P_K)$$

Définition : Soit  $D : E \times L \longrightarrow \mathbb{R}^+$

une mesure de proximité entre un individu  $Z^x$  et un noyau  $L$

$$D(Z^x, L) = (Y^x - \sum_{\ell=1}^m \hat{\beta}_{\ell} X^{\ell x})^2$$

On définit alors  $\forall i = 1, K$

$$P_i = \left( Z^x / D(Z^x, L_i) < D(Z^x, L_j) \quad \forall j \neq i \right)$$

avec  $Z^x \in P_{i \wedge j}$  si égalité.

## 2.5 La fonction de représentation et les opérateurs de codage

Soit  $g: IP_K \longrightarrow L_K$  la fonction de représentation qui à

$$P \longrightarrow L = (L_1 \dots L_K)$$

$$\text{avec: } l_j = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_j^1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_j^m \end{bmatrix} \quad \forall j = 1, K$$

Nous allons définir plus précisément les opérateurs de codage puis la méthode fournissant les codages optimaux ainsi que les vecteurs des coefficients de régression.

### 2.5.I Les opérateurs de codage

Nous allons particulariser les restrictions à apporter aux opérateurs de codage permettant le passage de  $X$  à  $X^x$  et de  $Y$  à  $Y^x$

En effet, si nous n'imposons pas de restrictions sur les codages alors on pourra minimiser de façon optimale mais triviale le critère . Il suffira de choisir  $Y_j^x$  tel que

$$Y_j^x = X_i^x \hat{\beta}_i \quad \forall j = 1, K \quad \text{et ainsi } W(L, P) = 0$$

En fait, les restrictions dépendront de la nature des variables  $Y$  et  $(X^{\ell})_{\ell=1, m}$

Nous omettons l'indice  $j$  de la classe pour simplifier l'écriture dans la suite du paragraphe.

Trois types de variables sont possibles dans le cas d'un processus discret ou continu :

- quantitative
- qualitative
- ordinale

#### a) Cas d'une variable qualitative discrète

Soient  $t^{\ell}$  le codage de  $X^{\ell}$  et  $t$  le codage de  $Y$ .

$X^{\ell}$  est qualitative alors nous désirons que son image par  $t^{\ell}$  soit telle que  $\forall i$  indice d'un individu

$$(X^{\ell i} \sim X^{\ell i'}) \xrightarrow{t^{\ell}} (X^{\ell i x} = X^{\ell i' x})$$

où  $\sim$  indique que  $X^{\ell i}$  et  $X^{\ell i'}$  sont dans la même catégorie.

. Si Y est qualitative on désire de même que :

$$(Y^i \sim Y^{i'} ) \xrightarrow{t} (Y^{i^x} = Y^{i'^x})$$

Remarque : Un cas particulier de variable qualitative est la variable binaire, c'est-à-dire :

$$Y^i = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \quad \forall i$$

$$X^{i^x} = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \quad \forall i$$

d'où les liens avec l'analyse de la variance et de la covariance

b) Cas d'une variable ordinale discrète

Définition 1 : On appelle variable ordinale, toute variable de E dans (F,R) où R est une relation de préordre

Définition 2 : On appelle fonction isotone toute fonction t réelle sur (F,R) pour le préordre R telle que :

$$i \prec i' \Rightarrow t(i) \leq t(i')$$

On notera  $I = \left. \begin{array}{l} t \text{ isotone de } F \rightarrow \bar{R} \\ \text{de préordre usuelle} \end{array} \right\}$  muni de la relation

. Si  $X^{\ell}$  est ordinale alors nous désirons que

$$(X^{\ell i} \leq X^{\ell i'}) \xrightarrow{+t} (X^{\ell i^x} \leq X^{\ell i'^x})$$

. De même pour Y avec  $t \in I$

c) Cas d'une variable quantitative

. Si  $X^l$  est quantitative alors nous désirons que  $X^{lx}$  soit en relation linéaire avec  $X^l$  d'où

$$t^l : X^l \longrightarrow X^{lx} = \delta_0 + \delta_1 X^l$$

Plus généralement nous désirons que  $X^{lx}$  soit une transformation polynomiale de  $X^l$  d'où

$$t^l : X^l \longrightarrow X^{lx} = \sum_{q=0}^P \delta_q (X^l)^q$$

où P est fixé a priori.

De même pour Y

d) Cas d'une variable qualitative - phénomène continu

Dans ce cas on désire que  $\forall i$ , indice de l'individu,

$\forall l=1, m$

$$(X^{li} \sim X^{li'}) \xrightarrow{t^l} \left\{ \begin{array}{l} X_{-}^{li} = X_{-}^{li'} \leq X^{lix} \leq X_{+}^{li} = X_{+}^{li'} \\ X_{-}^{li} = X_{-}^{li'} \leq X^{li'x} \leq X_{+}^{li} = X_{+}^{li'} \end{array} \right\}$$

avec  $X_{-}^{li}$ ,  $X_{+}^{li}$  bornes inférieures et supérieures d'un intervalle.  
On aura la même relation sur Y.

e) Cas d'une variable ordinale - phénomène continu

Si  $X^e$  est ordinale on désire que

$$(X^{li} < X^{li'}) \xrightarrow{t^l} X^{li^*} < X^{li'^*}$$

On peut également associer des intervalles, comme ci-dessus. Il faut alors vérifier de plus :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{-}^{li} < X^{li^*} < X_{+}^{li} \\ X_{-}^{li'} < X^{li'^*} < X_{+}^{li'} \end{array} \right.$$

De même pour Y

2.5.2 La matrice  $\tilde{X}$  et le vecteur  $\tilde{Y}$

Soient  $\tilde{X}_j$  et  $\tilde{Y}_j$  de même format que  $X_j$  et  $Y_j$

le critère s'écrit :

$$\begin{aligned} W(L, P, C) &= \sum_{i=1}^K \left\| Y_i^* - X_i^* \hat{\beta}_i \right\|_{R^{n_i}}^2 \\ &= \sum_{i=1}^K \left\| X_i^{lx} \hat{\beta}_i^{lx} - (X_i^* \hat{\beta}_i - Y_j^* + X_i^{lx} \hat{\beta}_i^{lx}) \right\|^2 \end{aligned}$$

Si  $\forall i = 1, K$  on définit :

$$\tilde{X}_j^l \hat{\beta}_j^l = X_j^x \hat{\beta}_j - (Y_j^x - X_j^{lx} \hat{\beta}_j^l)$$

alors :

$$\begin{aligned} W(L, P, C) &= \sum_{j=1}^K \langle X_j^{lx} \hat{\beta}_j^l - \tilde{X}_j^l \hat{\beta}_j^l, X_j^{lx} \hat{\beta}_j^l - \tilde{X}_j^l \hat{\beta}_j^l \rangle_{\mathbb{R}^{n_j}} \\ &= \sum_{j=1}^K (\hat{\beta}_j^l)^2 \langle X_j^{lx} - \tilde{X}_j^l, X_j^{lx} - \tilde{X}_j^l \rangle_{\mathbb{R}^{n_j}} \end{aligned}$$

avec :

$$\tilde{X}_j^l = \left[ X_j^x \hat{\beta}_j - (Y_j^x - X_j^{lx} \hat{\beta}_j^l) \right] (\hat{\beta}_j^l)^{-1}$$

Le critère mesure alors la distance entre le codage optimal  $(X^x, Y^x)$  et le codage  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$

On obtient de même :

$$\begin{aligned} W(L, P, C) &= \sum_{j=1}^K \left\| Y_j^x - X_j^x \hat{\beta}_j \right\|_{\mathbb{R}^{n_j}}^2 \\ &= \sum_{j=1}^K \left\| Y_j^x - \tilde{Y}_j \right\|_{\mathbb{R}^{n_j}}^2 \end{aligned}$$

si on pose  $\tilde{Y}_j = X_j^x \hat{\beta}_j \quad \forall j = 1, K$

Alors  $W$  mesure la distance entre  $Y_j^x$  et  $\tilde{Y}_j$

### 2.5.3 L'algorithme de calcul des codages optimaux et des coefficients de régression

Il se compose de deux phases successives :

- 1) estimation par les moindres carrés de  $\hat{\beta}_j$   
(les codages restant constants)  $\forall j = 1, K$
- 2) estimation de  $t^{\mathcal{L}}$  (pour une valeur de  $\mathcal{L}$ ) ou de  $t$   
(avec  $\hat{\beta}_j$  constants)

#### 2.5.3.1 Calcul des coefficients de régression

Nous cherchons sur chaque classe  $P_j$  à minimiser :

$$\| Y_j^x - X_j^x \beta_j \|_{\mathbb{R}^{n_j}}^2$$

sous la contrainte :

$$\| X_j^x \beta_j \|_{\mathbb{R}^{n_j}}^2 = n_j$$

d'où le Lagrangien

$$\mathcal{L}_j = \| Y_j^x - X_j^x \beta_j \|^2 + \lambda_j (\| X_j^x \beta_j \|^2 - n_j)$$

En dérivant, nous obtenons :

$$\frac{\delta \xi_j}{\delta \beta_j} = 2 X_j^{x'} X_j^x \beta_j - 2 X_j^{x'} Y_j^x + 2 \lambda_j X_j^{x'} X_j^x \beta_j$$

d'où :

$$X_j^{x'} X_j^x (1 + \lambda_j) \hat{\beta}_j = X_j^{x'} Y_j^x$$

Si  $(X_j^{x'} X_j^x)$  est inversible, nous avons :

$$\hat{\beta}_j = (X_j^{x'} X_j^x)^{-1} X_j^{x'} Y_j^x \cdot \frac{1}{(1 + \lambda_j)}$$

D'où en utilisant la contrainte

$$|1 + \lambda_j| = \frac{\|X_j^x (X_j^{x'} X_j^x)^{-1} X_j^{x'} Y_j^x\|}{\sqrt{n_j}}$$

donc :

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sqrt{n_j} (X_j^{x'} X_j^x)^{-1} X_j^{x'} Y_j^x}{\|X_j^x (X_j^{x'} X_j^x)^{-1} X_j^{x'} Y_j^x\|_{\mathbb{R}^{n_j}}}$$

Si  $(X_j^{x'} X_j^x)$  n'est pas inversible, nous utilisons l'inverse généralisée et obtenons :

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sqrt{n_j} (X_j^{x'} X_j^x)^{-} X_j^{x'} Y_j^x}{\|X_j^x (X_j^{x'} X_j^x)^{-} X_j^{x'} Y_j^x\|_{\mathbb{R}^{n_j}}}$$

### 2.5.3.2 Obtention des codages optimaux

Dans cette phase, nous désirons obtenir le codage optimal de  $t^l$  (ou de  $t$ ) au sens des moindres carrés sous les restrictions du § 2-5-1 sachant que  $(t^{l'})_{l' \neq l}$  et  $t$  ou  $(t^l)_{\forall l=1,m}$  restent constants.

Cette procédure dépendant de la nature des variables à coder, nous examinerons successivement les cinq cas.

#### a) Cas d'une variable nominale discrète

Dans ce cas, on utilise un résultat dû à FISHER

On définit :  $\forall i = 1, N$

.  $X^{li*}$  comme la moyenne des  $\tilde{X}^{li}$  qui correspondent aux  $X^{li}$  ayant la même modalité.

Exemple : Imaginons qu'initialement (avec  $N = 7$ )

$$X^l = (1 ; 2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 3 ; 1)$$

et que

$$\tilde{X}^l = (0,8 ; 2,3 ; 0,9 ; 1,9 ; 3,1 ; 2,7 ; 1,3)$$

alors :

$$X^{l*} = (1 ; 2,1 ; 1 ; 2,1 ; 2,9 ; 2,9 ; 1)$$

. De même  $Y^{li*}$  est la moyenne des  $\tilde{Y}^{li}$  qui correspondent aux  $Y^i$  ayant même modalité.

Ainsi nous minimisons:

$$\langle X^{l*} - \tilde{x}^e, X^{l*} - \tilde{x}^e \rangle_{\mathbb{R}^N}$$

Plus précisément nous avons:

$$t^e(x^l, \tilde{x}^e) = x^{l*} = Z^e (Z^e Z^e)^{-1} Z^e \tilde{x}^e$$

$$\text{où: } Z^e = (Z_{\lambda}^{e,i})_{\lambda,i}$$

$$\text{avec } Z_{\lambda}^{e,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } X^{l,i} \text{ prend la modalité } \lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De même pour Y

$$t(Y, \tilde{Y}) = Y^x = Z(Z'Z)^{-1} Z' \tilde{Y}$$

$$\text{où } Z = (Z_{\lambda}^i)_{i,\lambda}$$

$$\text{avec } Z_{\lambda}^i = \begin{cases} 1 & \text{si } Y^i \text{ prend la modalité } \lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## b) Cas de variables ordinales discrètes

Dans le cas d'une variable ordinale, le codage optimal est obtenu par un algorithme de régression isotone.

Définition : Soit  $t$  une fonction sur  $E$

Une fonction  $t^x$  sur  $E$  est une régression isotone sur  $E$  relativement à l'ordre  $R$  si elle minimise sur la classe des fonctions isotones  $t$  sur  $E$  la somme

$$\sum_{i \in E} |t(i) - t^x(i)|^2$$

Remarque : Différents algorithmes de calcul de  $t^x$  sont donnés dans [2<sup>bis</sup>]  
 Toutefois ceux-ci ne sont valables que dans le cas où  $t$  est une fonction.  
 Or, ici  $t$  est une application multivoque.

### L'algorithme utilisé et son optimalité

. Soit  $t$  la multi-application qui à la modalité  $\lambda$  de la variable  $X^{\ell}$  associe

$$t(X^{\ell}, \lambda) = ( \tilde{X}_1^{\ell}(\lambda), \dots, \tilde{X}_{k_{\lambda}}^{\ell}(\lambda) )$$

$$\forall \ell = 1, m$$

$$\forall \lambda$$

$$\forall k_{\lambda} \text{ avec } 1 \leq k_{\lambda} \leq K = \text{nombre de classes.}$$

où  $k_{\lambda}$  = nombre de valeurs associées aux individus de même modalité

. Soit  $n_j^{\ell}(\lambda)$  le nombre d'individus prenant la valeur  $\tilde{X}_j^{\ell}(\lambda)$

$$\forall j = 1, k_{\lambda} \text{ avec } \sum_{\lambda} \sum_j n_j^{\ell}(\lambda) = N$$

. Soit  $t^x$  l'application qui, à la modalité  $\lambda$  de la variable  $X^{\ell}$  associe

$$t^x(X^{\ell}, \lambda) = X^x(\lambda)$$

$$\forall \ell = 1, m$$

$$\forall \lambda$$

. Soit  $t_j(X^{\ell}, \lambda) = \tilde{X}_j^{\ell}(\lambda) \quad j=1, k_{\lambda}$

Le problème est alors : trouver la fonction  $t^x$  qui minimise :

$$\sum_{\lambda} \sum_{j=1}^{k_{\lambda}} n_j^{\ell}(\lambda) (t_j(X^{\ell}, \lambda) - t^x(X^{\ell}, \lambda))^2$$

sous les contraintes :

$$(1) \quad \lambda \prec \lambda' \quad \Rightarrow \quad X^{x^{\ell}}(\lambda) \leq X^{x^{\ell}}(\lambda')$$

$$(2) \quad \lambda = \lambda' \quad \Rightarrow \quad X^{x^{\ell}}(\lambda) = X^{x^{\ell}}(\lambda')$$

L'algorithme de résolution est le suivant :

- on ordonne les modalités  $\lambda$  par ordre croissant
- on ordonne les  $t(X^{\ell}, \lambda)$  dans l'ordre des  $\lambda$

Ainsi, on obtient  $\lambda_1 \prec \lambda_2 \dots \prec \lambda_p$

où  $p$  est le nombre de modalités.

$\forall j=1, p-1$  . on calcule le barycentre associé à la multi-application

$$t(X^{\ell}, \lambda_j) \quad \text{soit } B(\lambda_j)$$

. De même, on calcule  $B(\lambda_{j+1})$

. Si  $B(\lambda_j) \leq B(\lambda_{j+1})$  alors  $t^x(X^{\ell}, \lambda_j) = B(\lambda_j)$

. Si  $B(\lambda_j) > B(\lambda_{j+1})$  alors on réunit les deux ensembles  $t(X^{\ell}, \lambda_j)$  et  $t(X^{\ell}, \lambda_{j+1})$  d'où  $B(\lambda_j)$

Puis on passe en  $j+2$  et on itère.

On démontre l'optimalité aisément puisque nous obtenons pour chaque modalité (ou regroupement de modalités) le barycentre associé à la multi-application, donc  $t^x(X^{\ell}, \lambda_j)$  réalise le minimum de :

$$\sum_{j=1}^k n_j^{\ell}(\lambda) (t_j(X^{\ell}, \lambda) - t(X^{\ell}, \lambda))^2$$

pour les  $t$  vérifiant (1) et (2).

On peut définir le codage optimal par:

$$t^e (X^e, \tilde{X}^e) = X^{e*} = Z^e (Z^e, Z^e)' Z^e \tilde{X}^e$$

où  $Z^e$  est une matrice binaire indiquant les  $\tilde{X}^e$  qui doivent être regroupés pour satisfaire la contrainte d'ordre.

On définit de même le codage pour Y.

c) Cas d'une variable quantitative

Dans le cas d'une variable quantitative les codages  $t^e$  ou  $t$  sont donnés par la relation :

$$t^e (X^e, \tilde{X}^e) = X^{e*} = \underline{X}^e \delta$$

où

$$\underline{X}^e = (1, X^e, (X^e)^2, \dots, (X^e)^P)$$

matrice (N,P+1)

(régression polynomiale d'ordre P)

On a le résultat suivant:

$\hat{\delta}$  estimateur des moindres carrés ordinaires est égal à

$$\hat{\delta} = (\underline{X}^l{}' \underline{X}^l)^{-1} \underline{X}^l{}' \tilde{Y}^l$$

L'utilisation de polynômes orthogonaux permet de calculer facilement  $\hat{\delta}$

(Cf. Chapitre XI 3-2)

d) Cas d'une variable nominale continue

On posera:

$$X^{li} = \begin{cases} \tilde{X}^{li} & \text{si } \tilde{X}^{li} \in [X_-^{li}, X_+^{li}] \\ X_-^{li} & \text{si } \tilde{X}^{li} < X_-^{li} \\ X_+^{li} & \text{si } \tilde{X}^{li} > X_+^{li} \end{cases}$$

si les intervalles sont connus a priori.

Si les intervalles ne sont pas connus a priori, alors nous les construisons de la façon suivante :

L'ensemble des individus est muni d'une structure d'ordre :

- on réordonne le vecteur des moyennes par catégorie

$\tilde{X}^l$  Soit  $\tilde{X}_{ord}^e$  ce nouveau vecteur.

(avec  $\tilde{X}^{li}$  = moyenne des  $\tilde{X}^{li}$  associés aux  $X^{li}$  de même modalité)

- on réordonne le vecteur  $\tilde{X}^l$  en fonction de l'ordre des  $\tilde{X}_{ord}^{li}$

Soit  $\tilde{X}_{ord}^e$  ce nouveau vecteur.

Puis nous appliquons l'algorithme de Kruskal sur  $\tilde{X}_{\text{ord}}^{\ell}$  (après avoir ordonné chaque catégorie par valeurs croissantes) et obtenons un vecteur que nous ordonnons en fonction de l'ordre de  $X^{\ell}$  d'où  $X^{\ell}$

Donnons un exemple. Soient les deux vecteurs :

$$X^{\ell} = (1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 1 ; 3 ; 2)$$

$$\tilde{X}^{\ell} = (1 ; 6 ; 4 ; 3 ; 3 ; 7 ; 2)$$

On a alors :

$$\tilde{X}^{\ell} = (2 ; 3 ; 3 ; 5 ; 2 ; 5 ; 3)$$

d'où  $\tilde{X}_{\text{ord}}^{\ell} = (2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 5 ; 5)$

et  $\tilde{X}_{\text{ord}}^{\ell} = (1 ; 3 ; 6 ; 4 ; 2 ; 3 ; 7)$

En ordonnant les éléments de chaque catégorie, nous avons :

$$(1 ; 3 ; 2 ; 4 ; 6 ; 3 ; 7)$$

puis en appliquant KRUSKAL

$$(1 ; 2 , 5 ; 2 , 5 ; 4 ; 4,5 ; 4,5 ; 7)$$

d'où  $X^{\ell} = (1 ; 4 , 5 ; 4 ; 4,5 ; 2,5 ; 7 ; 2,5)$

après avoir réordonné en fonction de  $X^{\ell}$

On obtient alors :

$$X_{-}^{li} = \text{Min } X^{lix} \\ ) i \text{ de même catégorie )}$$

$$X_{+}^{li} = \text{Max } X^{lix} \\ ) i \text{ de même catégorie )}$$

D'où  $X_{-}^l = (1 ; 2,5 ; 2,5 ; 4,5 ; 1 ; 4,5 ; 2,5)$

$$X_{+}^l = (2,5 ; 4,5 ; 4,5 ; 7 ; 2,5 ; 7 ; 4,5)$$

e) Cas d'une variable ordinale continue

On utilise l'algorithme de KRUSKAL. Si on introduit des intervalles, a priori on procède comme au début de d).

### 2.5.3.3 L'algorithme de codage et sa convergence

Pour démarrer l'algorithme de calcul des codages optimaux et des vecteurs de régression, nous devons spécifier les valeurs initiales.

Nous prendrons :

$$X_j^x = X_j \quad \Psi_j = 1, K$$

$$Y_j^x = Y_j \quad \Psi_j = 1, K$$

c'est-à-dire qu'au départ nous considérerons que les variables sont toutes de même nature quantitative. Nous donnerons également des valeurs arbitraires aux modalités des variables nominales et aux bornes des intervalles associés pour le cas continu.

Ainsi dans une première phase, nous calculerons  $\hat{\beta}_j$   $\forall j = 1, K$   
 (§ 2.5.3.1)

La structure d'une itération sera donc :

- 1) estimation de  $X^{lm}$   $\forall l = 1, m$
- 2) estimation de  $Y^x$
- 3) estimation de  $\hat{\beta}_j$   $\forall j = 1, K$

La convergence de cet algorithme est assurée par [20]

Pour chaque phase, nous obtenons les estimateurs par les moindres carrés des codages et des coefficients de régression.

Donc nous optimisons  $\forall j = 1, K$

$$\sum_{i=1}^{n_j} \left( Y_i^j - \sum_{l=1}^m \beta_j^l X_i^{l,j} \right)^2$$

Cette quantité, toujours positive, décroît, donc converge. L'arrêt se fait lorsque la décroissance devient trop faible ou lorsqu'un nombre maximal (fixé a priori) d'itérations est atteint.

### 3. La convergence de l'algorithme de régression typologique sur variables hétérogènes

#### 3.1 Les suites $u_n$ et $v_n$

Comme pour les algorithmes précédents, on définit :

$$v^{(n)} = (L^{(n)}, P^{(n)})$$

$$u_n = W(v^{(n)})$$

#### 3.2 La convergence

Il s'agit de montrer le théorème suivant :

Théorème : La suite  $u_n$  converge en décroissant.

Démonstration : Nous montrerons successivement :

$$[1] \quad W(L^{(n)}, P^{(n)}) \geq W(L^{(n+1)}, P^{(n)})$$

$$[2] \quad W(L^{(n+1)}, P^{(n)}) \geq W(L^{(n+1)}, P^{(n+1)})$$

Pour [1]

$$W(L^{(n)}, P^{(n)}) = \sum_{j=1}^K \left\| Y_j^x - X_j^{x(n)} \hat{\beta}_j^{(n)} \right\|^2$$

$$W(L^{(n+1)}, P^{(n)}) = \sum_{j=1}^K \left\| Y_j^{x(n+1)} - X_j^{x(n+1)} \hat{\beta}_j^{(n+1)} \right\|_{\mathbb{R}^{n_j}}^2$$

Par construction de la fonction de représentation, nous savons que [1] est vérifiée puisque l'algorithme donnant les codages optimaux et les coefficients de régression converge.

Pour [2]

D'après la construction de la fonction d'identification et par une démarche

analogue à celle des théorèmes précédents, nous avons [2]

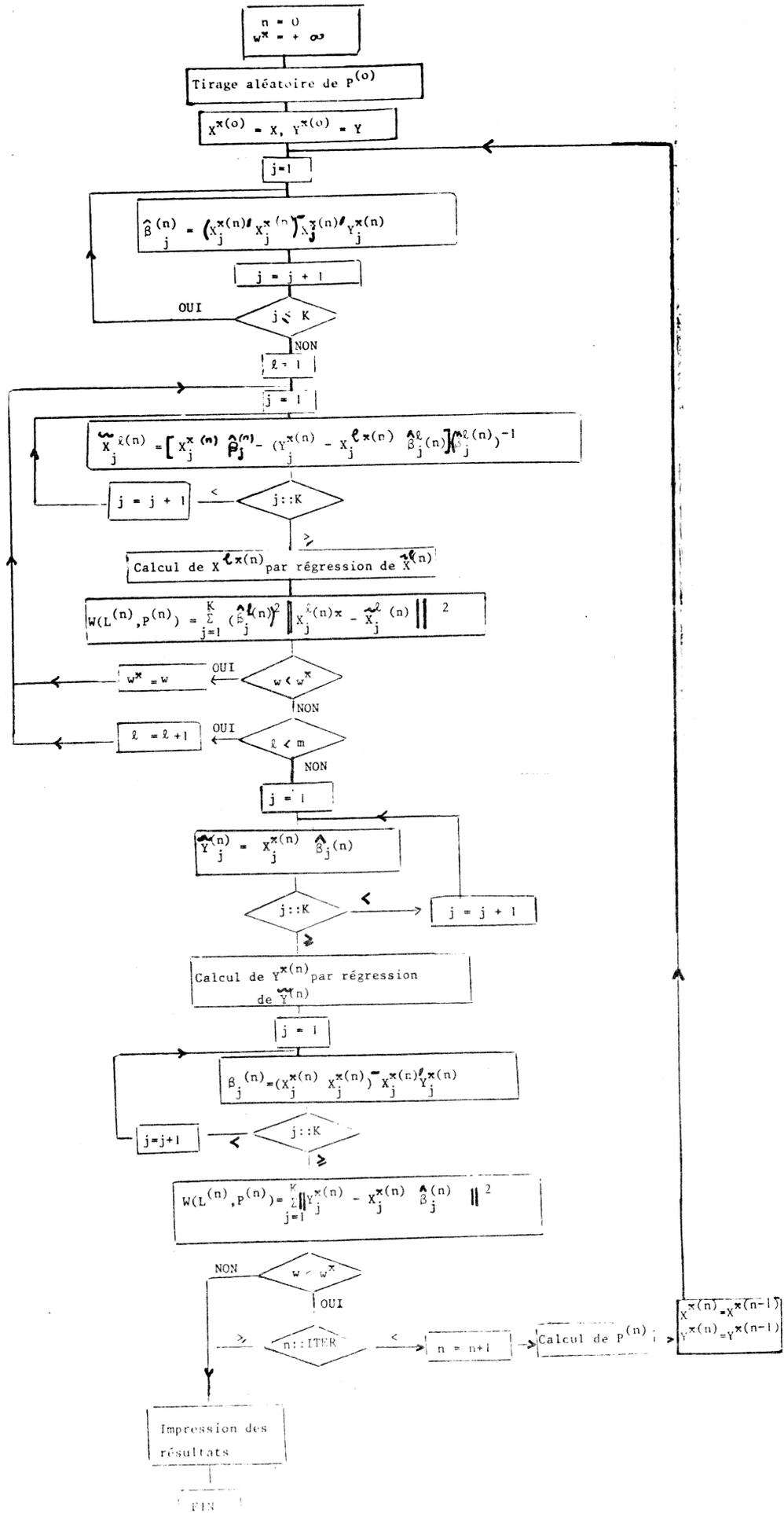
Donc  $u_n$  décroît et puisque toujours minorée par zéro converge.

Comme  $IP_K$  est fini et  $L^{(n)} \in g(IP_K) \subset IL_K$ , la convergence se fait en un nombre fini d'étapes.

#### 4. Applications et organigramme général

Si nous caractérisons la nature des variables explicatives et à expliquer, nous retrouvons des méthodes connues que nous avons localisées:

|   |   |                     |  |
|---|---|---------------------|--|
| Y | } | quantitative        | analyse typologique de la variance           |
| X |   | qualitatives        |  |
| Y | } | quantitative        | analyse typologique de la covariance         |
| X |   | qualitatives        |  |
|   |   | et<br>quantitatives |  |
| Y | } | ordinale            | analyse typologique isotone de la variance   |
| X |   | qualitatives        |  |
| Y | } | ordinale            | analyse typologique isotone de la covariance |
| X |   | qualitatives        |  |
|   |   | et<br>quantitatives |  |
| Y | } | quantitative        | régression typologique                       |
| X |   | quantitatives       |  |



#### XIV APPLICATIONS DES DIVERS ALGORITHMES

##### I Application de l'algorithme de régression typologique REGTYPO

Les données fournies par le B.R.G.M. (Bureau de recherches géologiques et minières) consistent en un lot de 990 prélèvements (carottes à 30 centimètres sous sol.

L'analyse de ces prélèvements indique la présence des éléments suivants :

- Cuivre
- Fer
- Manganèse
- Vanadium
- Chrome
- Cobalt
- Nickel
- Arsenic
- Bore
- Barium
- Phosphore

Le but de cette étude est d'expliquer la présence du cuivre , de l'arsenic et du zinc par les différentes teneurs des autres éléments et de fournir une typologie des prélèvements.

Grace à un découpage des variables en modalités nous pouvons fixer le nombre de classes à cinq.

##### I.I Explication de la teneur en cuivre

Nous expliquons le cuivre par les variables suivantes: fer, manganèse, vanadium, chrome.

Voici les résultats obtenus pour le meilleur tirage: W= I5034

.Classe n°1 317 individus

## -Hyperplan de régression

$$Cu = 6,33 Fe + 0,0018 Mn + 0,056 Va - 0,047 Cr - 0,45$$

## -Qualité de la régression

$$R^2 = 0,989$$

## -Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{fer} = 0,34 \quad \sigma_{Mn} = 0,00086 \quad \sigma_{Va} = 0,012 \quad \sigma_{Cr} = 0,0061$$

$$\sigma_{constante} = 0,63$$

## -Variance des perturbations = 9,5

.Classe n° 2 460 individus

## -Hyperplan de régression

$$Cu = 3,32 Fe + 0,0008 Mn + 0,026 Va + 0,06 Cr - 0,68$$

## -Qualité de la régression

$$R^2 = 0,977$$

## -Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{fer} = 0,26 \quad \sigma_{Mn} = 0,00074 \quad \sigma_{Va} = 0,01 \quad \sigma_{Cr} = 0,0064$$

$$\sigma_{constante} = 0,476$$

## -Variance des perturbations = 8,29

.Classe n° 3 60 individus

## -Hyperplan de régression

$$Cu = 29,6 Fe + 0,095 Mn - 0,678 Va - 0,36 Cr - 38,8$$

## -Qualité de la régression

$$R^2 = 0,987$$

## -Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{fer} = 1,07 \quad \sigma_{Mn} = 0,0026 \quad \sigma_{Va} = 0,041 \quad \sigma_{Cr} = 0,026$$

$$\sigma_{constante} = 2,45$$

-Variance des perturbations = 34,5

.Classe n° 4 18 individus

-Hyperplan de régression

$$Cu = 43 Fe + 0,17 Mn - 1,23 Va - 0,36 Cr - 16,4$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,987$$

-Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{Fe} = 13,2 \quad \sigma_{Mn} = 0,037 \quad \sigma_{Va} = 0,397 \quad \sigma_{Cr} = 0,198$$

$$\sigma_{\text{constante}} = 16,9$$

-Variance des perturbations = 326,6

.Classe n° 5 134 individus

-Hyperplan de régression

$$Cu = 2,07 Fe + 0,014 Mn + 0,036 Va + 0,23 Cr - 0,728$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,985$$

-Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{Fe} = 0,697 \quad \sigma_{Mn} = 0,0017 \quad \sigma_{Va} = 0,029 \quad \sigma_{Cr} = 1,1$$

-Variance des perturbations = 16,7

L'analyse de la série des écarts entre valeurs calculées et valeurs observées permet en prélevant les valeurs fortement positives de sélectionner les prélèvements susceptibles d'être riches en cuivre. En effet ces écarts indiquent que la forte teneur en cuivre n'est pas expliquée par l'environnement et est donc une anomalie.

Une cinquantaine de points sont ainsi décelés. La méthode de régression apporte donc un avantage à ce niveau. Donnant une image plus fidèle du nuage des observations elle permet de ne sélectionner que les points dont les écarts sont élevés à l'intérieur d'une sous population, nous évitons ainsi de retenir les prélèvements mal expliqués parce que noyés dans une population hétérogène.

## I.2 Explication de la teneur en arsenic

Nous expliquons l'arsenic par les variables suivantes: fer, manganèse, vanadium, nickel, chrome, cobalt.

Voici les résultats pour le meilleur tirage:  $N = 32356$

### Classe n° 1 319 individus

-Hyperplan de régression

$$\begin{aligned} \text{As} = & 0,535 \text{ Fe} + 0,0068 \text{ Mn} - 0,175 \text{ Va} + 0,743 \text{ Ni} \\ & - 0,0158 \text{ Cr} + 0,212 \text{ Co} \end{aligned}$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,967$$

-Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{\text{Fe}} = 0,505 \quad \sigma_{\text{Mn}} = 0,0014 \quad \sigma_{\text{Va}} = 0,019 \quad \sigma_{\text{Ni}} = 0,049$$

$$\sigma_{\text{Cr}} = 0,0134 \quad \sigma_{\text{Co}} = 0,117$$

-Variance des perturbations = 28,3

### Classe n° 2 239 individus

-Hyperplan de régression

$$\begin{aligned} \text{As} = & 8,87 \text{ Fe} + 0,0085 \text{ Mn} - 0,3 \text{ Va} - 1,25 \text{ Ni} + 0,0288 \text{ Cr} \\ & + 0,185 \text{ Co} \end{aligned}$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,972$$

-Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{\text{Fe}} = 0,79 \quad \sigma_{\text{Mn}} = 0,0022 \quad \sigma_{\text{Va}} = 0,036 \quad \sigma_{\text{Ni}} = 0,074$$

$$\sigma_{\text{Cr}} = 0,028 \quad \sigma_{\text{Co}} = 0,185$$

-Variance des perturbations = 46,3

### Classe n° 3 276 individus

-Hyperplan de régression

$$\begin{aligned} \text{As} = & 16,95 \text{ Fe} - 0,015 \text{ Mn} + 0,02 \text{ Va} + 0,019 \text{ Ni} - 0,118 \text{ Cr} \\ & - 2,34 \text{ Co} \end{aligned}$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,977$$

-Ecart-type des paramètres

$$\begin{aligned} \sigma_{Fe} &= 0,61 & \sigma_{Mn} &= 0,0018 & \sigma_{Va} &= 0,024 & \sigma_{Ni} &= 0,0256 \\ \sigma_{Cr} &= 0,0179 & \sigma_{Co} &= 0,125 \end{aligned}$$

-Variance des perturbations = 32,9

Classe n° 4            28 individus

-Hyperplan de régression

$$\begin{aligned} As &= -25,17 & Fe &+0,627 & Mn &+3,56 & Va &-0,675 & Ni &-0,0715 & Cr \\ & & & & & & & & & & -28,6 & Co \end{aligned}$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,994$$

-Ecart-type des paramètres

$$\begin{aligned} \sigma_{Fe} &= 2,47 & \sigma_{Mn} &= 0,014 & \sigma_{Va} &= 0,131 & \sigma_{Ni} &= 0,0506 \\ \sigma_{Cr} &= 0,0567 & \sigma_{Co} &= 0,725 \end{aligned}$$

-Variance des perturbations = 42,9

Classe n° 5            127 individus

-Hyperplan de régression

$$\begin{aligned} As &= 56,4 & Fe &+0,106 & Mn &-0,77 & Va &+0,045 & Ni &-0,382 & Cr \\ & & & & & & & & & & -10,78 & Co \end{aligned}$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,985$$

-Ecart-type des paramètres

$$\begin{aligned} \sigma_{Fe} &= 1,38 & \sigma_{Mn} &= 0,0025 & \sigma_{Va} &= 0,026 & \sigma_{Ni} &= 0,0616 \\ \sigma_{Cr} &= 0,0206 & \sigma_{Co} &= 0,216 \end{aligned}$$

-Variance des paramètres = 22,7

De nouveau l'analyse de la série des écarts résiduels nous permet de sélectionner 86 individus "mal expliqués" par les différentes régressions.

### I.3 Explication de la teneur en arsenic ( autres variables explicatives)

Nous expliquons la teneur en arsenic par les trois variables suivantes:  
barium, phosphore, bore.

Les résultats du meilleur tirage (  $N = 18445$  ) nous donnent:

.Classe n° 1 143 individus

-Hyperplan de régression

$$As = 0,0469 Ba + 0,0095 P + 1,07 B$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,963$$

-Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{Ba} = 0,0042 \quad \sigma_P = 0,0011 \quad \sigma_B = 0,078$$

-Variance des perturbations = 43

.Classe n° 2 331 individus

-Hyperplan de régression

$$As = 0,027 Ba + 0,0036 P + 0,67 B$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,991$$

-Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{Ba} = 0,00087 \quad \sigma_P = 0,00023 \quad \sigma_B = 0,015$$

-Variance des perturbations = 7,96

.Classe n° 3 311 individus

-Hyperplan de régression

$$As = -0,137 Ba + 0,155 P - 2,516 B$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,879$$

-Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{Ba} = 0,0089 \quad \sigma_p = 0,00548 \quad \sigma_R = 0,19$$

-Variance des perturbations = 125,2

.Classe n° 4 192 individus

-Hyperplan de régression

$$As = 0,0138 \quad Ba = +0,0043 \quad P = +0,408 \quad R$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,972$$

-Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{Ba} = 0,00138 \quad \sigma_p = 0,000347 \quad \sigma_R = 0,0211$$

-Variance des perturbations = 15,95

.Classe n° 5 292 individus

-Hyperplan de régression

$$As = 0,039 \quad Ba = +0,0044 \quad P = +0,88 \quad R$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,993$$

-Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{Ba} = 0,0012 \quad \sigma_p = 0,0003 \quad \sigma_R = 0,020$$

-Variance des perturbations = 11,34

L'analyse de la série résiduelle nous permet de sélectionner 67 prélèvements mal expliqués donc susceptibles de présenter une "anomalie".

#### I.4 Explication de la teneur en zinc

Nous voulons expliquer la teneur en zinc par les teneurs en barium phosphore et bore.

Voici les résultats associés au meilleur critère  $W = 350311$

Classe n° 1 76 individus

-Hyperplan de régression

$$Zn = 0,85 \text{ Ba} - 0,00052 \text{ P} - 1,477 \text{ B}$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,972$$

-Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{\text{Ba}} = 0,032 \quad \sigma_{\text{P}} = 0,0057 \quad \sigma_{\text{B}} = 0,4$$

-Variance des perturbations = 978

Classe n° 2 291 individus

-Hyperplan de régression

$$Zn = 0,0198 \text{ Ba} + 0,0066 \text{ P} + 3,77 \text{ B}$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,984$$

-Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{\text{Ba}} = 0,0043 \quad \sigma_{\text{P}} = 0,001 \quad \sigma_{\text{B}} = 0,0714$$

-Variance des perturbations = 180,0

Classe n° 3 317 individus

-Hyperplan de régression

$$Zn = 0,097 \text{ Ba} + 0,023 \text{ P} + 0,92 \text{ B}$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,979$$

-Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{Ba} = 0,0039 \quad \sigma_P = 0,0011 \quad \sigma_R = 0,06$$

-Variance des perturbations = 160

.Classe n° 4 47 individus

-Hyperplan de régression

$$Z_n = -0,857 Ba + 0,09 P + 19 B$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,976$$

-Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{Ba} = 0,046 \quad \sigma_P = 0,0096 \quad \sigma_R = 0,638$$

-Variance des perturbations = 1671

.Classe n° 5 258 individus

-Hyperplan de régression

$$Z_n = 0,17 Ba + 0,00013 P + 1,96 B$$

-Qualité de la régression

$$R^2 = 0,982$$

-Ecart-type des paramètres

$$\sigma_{Ba} = 0,0082 \quad \sigma_P = 0,002 \quad \sigma_R = 0,16$$

-Variance des perturbations = 392

L'analyse de la série résiduelle nous permet de sélectionner une cinquantaine de points intéressants .

## 2. Applications des programmes de mémorisation et de reconnaissance de courbes

Nous donnons dans ce paragraphe plusieurs exemples d'application des algorithmes décrits en XII 2,3,4,5.

### 2.1. Application du programme REGP 2

Nous désirons reconnaître et mémoriser de façon condensée une courbe de niveaux d'altitude issue d'une carte<sup>o</sup> de la région de Cluses (Haute Savoie).

Nous avons relevé 110 cotes de lieux compris entre la Pointe de la Botte (Ouest 51 gr 10) et les Chalets de Villy (Est 51 gr 10) éloignés de 250 mètres. Cette région a été choisie pour tester l'algorithme car elle comporte de fortes variations d'altitude sur de courtes longueurs.

Nous avons effectué les essais suivants:

| n° | N   | K | QM | P <sub>1</sub> | P <sub>2</sub> | P <sub>3</sub> | P <sub>4</sub> | P <sub>5</sub> | P <sub>6</sub> |
|----|-----|---|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1  | 110 | 5 | 3  | 30             | 20             | 20             | 20             | 20             | 00             |
| 2  | 110 | 5 | 3  | 25             | 25             | 25             | 15             | 20             | 00             |
| 3  | 110 | 5 | 4  | 25             | 25             | 25             | 15             | 20             | 00             |
| 4  | 110 | 6 | 3  | 20             | 20             | 20             | 20             | 20             | 10             |
| 5  | 110 | 6 | 4  | 20             | 20             | 20             | 20             | 20             | 10             |
| 6  | 110 | 6 | 4  | 30             | 25             | 25             | 10             | 10             | 10             |

où N= nombre d'observations

K= nombre de classes

QM= degré des polynomes

P<sub>i</sub>= nombre d'observations de la classe P<sub>i</sub>

Le paramètre MODE peut prendre les valeurs 0,1,2

<sup>o</sup> Carte Institut Géographique National n° XXV-30 au 1/50000 é (Type 1922)

← MODE →

| n° | 0 | I | 2 | Nombre de valeurs à mémoriser | % de l'information initiale |
|----|---|---|---|-------------------------------|-----------------------------|
| 1  |   | x |   | 10                            | 17                          |
| 2  | x |   |   | 10                            | 17                          |
| 3  | x | x |   | 24                            | 22                          |
| 4  | x |   |   | 23                            | 21                          |
| 5  | x | x |   | 29                            | 26                          |
| 6  |   |   | x | 29                            | 26                          |

Nous allons examiner les résultats obtenus:

• Cas n° I Mode=I

Nous obtenons un critère  $W=1575861$

Après quatre itérations nous avons:

$$P_1^* = (1, 2, \dots, 32)$$

$$P_2^* = (33, \dots, 50)$$

$$P_3^* = (51, \dots, 70)$$

$$P_4^* = (71, \dots, 85)$$

$$P_5^* = (86, \dots, 110)$$

Les nouveaux associés sont:

$$L_1^* = (1853, 387 / -58, 9625 / 2, 126207)$$

$$L_2^* = (2319, 68 / -180, 5552 / 4, 698293)$$

$$L_3^* = (293, 6223 / 183, 9474 / -4, 358957)$$

$$L_4^* = (2230, 104 / 5, 020116 / -0, 9054596)$$

$$L_5^* = (2101, 78 / 3, 4786 / -0, 96789)$$

Nous donnons en Figures 3-1 et 3-2 la série des observations, des valeurs calculées, des écarts et un graphique portant en abscisse le numéro de l'observation et en ordonnée les valeurs estimées (\*) et calculées (0).



.Cas n° 2 Mode=0

Nous obtenons un critère égal à 1125297

Après deux itérations nous avons:

$$P_1^* = (1, \dots, 29)$$

$$P_2^* = (30, \dots, 49)$$

$$P_3^* = (50, \dots, 76)$$

$$P_4^* = (77, \dots, 93)$$

$$P_5^* = (94, \dots, 110)$$

Les noyaux associés sont:

$$L_1^* = (1847, 936/-57, 34078/2, 049455)$$

$$L_2^* = (2392, 105/-129, 2905/1, 626794)$$

$$L_3^* = (3395, 43/175, 2134/-4, 036924)$$

$$L_4^* = (2646, 191/-136, 4834/7, 820562)$$

$$L_5^* = (2004, 853/65, 78044/-4, 513674)$$

Comme précédemment nous donnons les valeurs calculées et les écarts en Figure 3-3 et la représentation graphique en Figure 3-4.

.Cas n° 3 Mode=0

Le critère  $W$  optimal est  $W=592668,38$

La partition associée est:

$$P_1^* = (1, \dots, 22)$$

$$P_2^* = (23, \dots, 54)$$

$$P_3^* = (55, \dots, 72)$$

$$P_4^* = (73, \dots, 93)$$

$$P_5^* = (94, \dots, 110)$$

et les noyaux:

$$L_1^* = (1870, 772/-103, 4788/10, 14506/-0, 3081964)$$

$$L_2^* = (1137, 256/267, 5026/-22, 87821/0, 4519383)$$

$$L_3^* = (912, 5458/200, 7289/-8, 035662/0, 02280182)$$

$$L_4^* = (1986, 274/153, 3661/-20, 3132/0, 6937777)$$

$$L_5^* = (2326, 471/-122, 3/20, 87719/-0, 9404024)$$

| SERIE DES VALEURS ESTIMEES |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 92.65                      | 1741.65 | 1694.36 | 1651.36 | 1612.47 | 1577.67 | 1546.97 | 1520.38 | 1497.88 | 1479.47 |
| 45.17                      | 1656.97 | 1648.86 | 1646.86 | 1648.95 | 1655.14 | 1665.44 | 1679.83 | 1698.34 | 1570.90 |
| 27.59                      | 1578.88 | 1613.24 | 1657.24 | 1695.33 | 1742.54 | 1793.79 | 1849.17 | 1908.65 | 2264.44 |
| 16.89                      | 1498.88 | 1400.97 | 1786.32 | 1674.93 | 1566.78 | 1441.00 | 1369.26 | 1261.88 | 1148.75 |
| 7.78                       | 1024.24 | 909.29  | 814.78  | 739.93  | 664.31  | 594.94  | 529.84  | 457.01  | 378.38  |
| 1.70                       | 828.72  | 975.72  | 1144.80 | 1249.00 | 1368.14 | 1492.90 | 1589.38 | 1687.80 | 1778.38 |
| 1.24                       | 1914.90 | 2001.20 | 2059.35 | 2109.41 | 2151.41 | 2185.33 | 2211.18 | 2228.95 | 2218.38 |
| 1.24                       | 2233.88 | 2219.31 | 2196.71 | 2166.04 | 2127.30 | 2075.53 | 2011.51 | 2007.13 | 2225.30 |
| 1.29                       | 2118.88 | 2074.02 | 2054.84 | 2051.31 | 2063.41 | 2091.16 | 2131.55 | 2193.58 | 2248.25 |
| 1.57                       | 2444.52 | 2586.42 | 2866.12 | 2118.56 | 2161.57 | 2195.76 | 2229.91 | 2237.04 | 2244.15 |
| 2.22                       | 2231.27 | 2211.20 | 2182.28 | 2144.25 | 2097.19 | 2041.10 | 1975.98 | 1901.84 | 1818.67 |

| SERIE DES ECARTS |         |         |        |         |         |         |         |         |         |
|------------------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 12.65            | -41.45  | 3.64    | 48.64  | 7.53    | 22.33   | -6.97   | -40.38  | -97.88  | -19.47  |
| 94.83            | 145.03  | 91.14   | 93.14  | 151.05  | 104.86  | 214.56  | 20.17   | -58.31  | -220.98 |
| 47.59            | -328.38 | -153.26 | -52.24 | -15.33  | 37.49   | 56.21   | 110.83  | 191.35  | -44.44  |
| 40.03            | -18.88  | -8.07   | 111.68 | 165.07  | 13.22   | -61.60  | -60.26  | -61.88  | -46.75  |
| 5.12             | -28.24  | -8.07   | 41.22  | 60.08   | -4.31   | -51.96  | -22.86  | 42.99   | 129.17  |
| 26.27            | -28.74  | -55.72  | -64.60 | -85.40  | -88.14  | -62.80  | -29.38  | -7.89   | -58.31  |
| 19.10            | -165.01 | 138.00  | 102.65 | 90.59   | 68.59   | -5.33   | -51.18  | -78.95  | -98.65  |
| 20.28            | -133.88 | -90.31  | -34.71 | 93.94   | -172.70 | -117.53 | 18.49   | 42.87   | 74.41   |
| 97.71            | 51.17   | 65.98   | -54.84 | -171.31 | -163.61 | 28.84   | 85.45   | -66.42  | 31.75   |
| 81.57            | -14.52  | -8.12   | 231.88 | -18.56  | -21.57  | -95.76  | -140.91 | -177.04 | -144.15 |
| 22.22            | 108.73  | 258.71  | 117.72 | 75.75   | 2.81    | -1.10   | -75.98  | -21.84  | -58.67  |

FIGURE 3-3

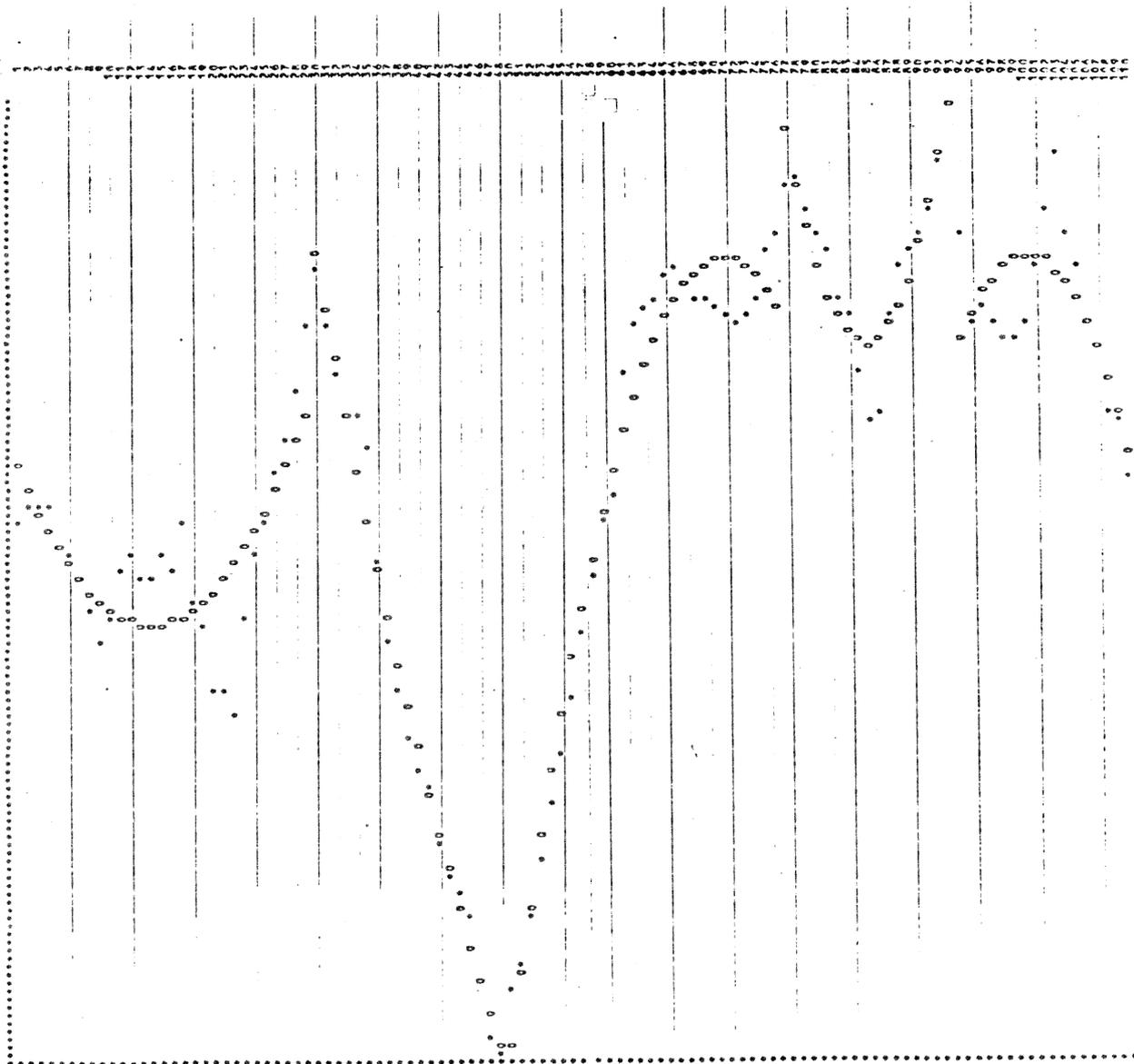


FIGURE 3-4

| SERIE DES VALEURS ESTIMEES |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 777.13                     | 1701.93 | 1643.32 | 1597.45 | 1568.48 | 1548.55 | 1537.82 | 1534.43 | 1536.54 | 1542.29 |
| 549.85                     | 1557.35 | 1542.05 | 1564.81 | 1551.06 | 1549.87 | 1559.39 | 1497.75 | 1453.12 | 1323.65 |
| 317.48                     | 1222.77 | 1382.33 | 1584.36 | 1744.06 | 1870.14 | 1989.31 | 2016.27 | 2043.76 | 2044.44 |
| 221.11                     | 1054.40 | 1013.05 | 1333.78 | 1741.08 | 1638.28 | 1537.49 | 1411.41 | 1293.37 | 1175.47 |
| 660.61                     | 751.53  | 850.02  | 761.50  | 685.99  | 627.06  | 587.47  | 1443.03 | 1577.11 | 1175.47 |
| 676.58                     | 774.28  | 907.57  | 1070.16 | 1105.26 | 1282.04 | 1443.03 | 1589.92 | 1718.55 | 1411.41 |
| 931.72                     | 2015.77 | 2004.84 | 2130.07 | 2178.60 | 2201.56 | 2234.03 | 2270.35 | 2302.46 | 1832.56 |
| 114.66                     | 2055.09 | 2120.02 | 2217.30 | 2282.29 | 2310.13 | 2337.00 | 2370.32 | 2392.41 | 2160.47 |
| 225.96                     | 2182.39 | 2138.82 | 2100.41 | 2071.33 | 2055.74 | 2037.79 | 2011.12 | 2002.46 | 2288.17 |
| 325.70                     | 2478.54 | 2473.01 | 2224.11 | 2157.86 | 2122.07 | 2111.12 | 2081.35 | 2054.11 | 2241.50 |
| 202.72                     | 2231.27 | 2250.79 | 2255.63 | 2240.17 | 2198.75 | 2125.75 | 2015.48 | 1862.34 | 1660.68 |

| SERIE DES ECARTS |        |        |         |         |         |         |         |         |         |
|------------------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 97.13            | -1.93  | 56.68  | 100.55  | 51.52   | 51.45   | 2.18    | -54.43  | -136.54 | -82.29  |
| 10.15            | 42.65  | -22.95 | -24.81  | 39.94   | 10.13   | 150.61  | 2.25    | -13.12  | -93.65  |
| 17.48            | 27.23  | -77.67 | 15.64   | -66.06  | -90.14  | -109.31 | -56.27  | 56.24   | 175.54  |
| 78.89            | 23.60  | -13.05 | 64.22   | 98.72   | -58.78  | -127.49 | -111.01 | -33.37  | -55.47  |
| 19.39            | 84.47  | 49.08  | 98.50   | 114.02  | 32.94   | -47.47  | -69.15  | -77.11  | 28.24   |
| 23.42            | 25.72  | 12.43  | -29.16  | 54.74   | -2.04   | -23.03  | -68.15  | -58.13  | -147.56 |
| 68.28            | 84.23  | 55.16  | 20.93   | 21.40   | 16.44   | -52.09  | -50.33  | -40.41  | -20.47  |
| 5.34             | 44.91  | -1.02  | -57.30  | -22.29  | -19.13  | 68.00   | 97.95   | 47.54   | 31.63   |
| 23.04            | -22.39 | -18.82 | -100.41 | -191.33 | -155.74 | 62.21   | 158.33  | 128.49  | 88.50   |
| 24.21            | -28.54 | -93.91 | 75.89   | -57.86  | 17.93   | -11.12  | -59.35  | -81.12  | -70.29  |
| 17.78            | 108.73 | 219.21 | 44.37   | -20.17  | -98.75  | -85.73  | -115.48 | 17.66   | 99.39   |

FIGURE 3-5

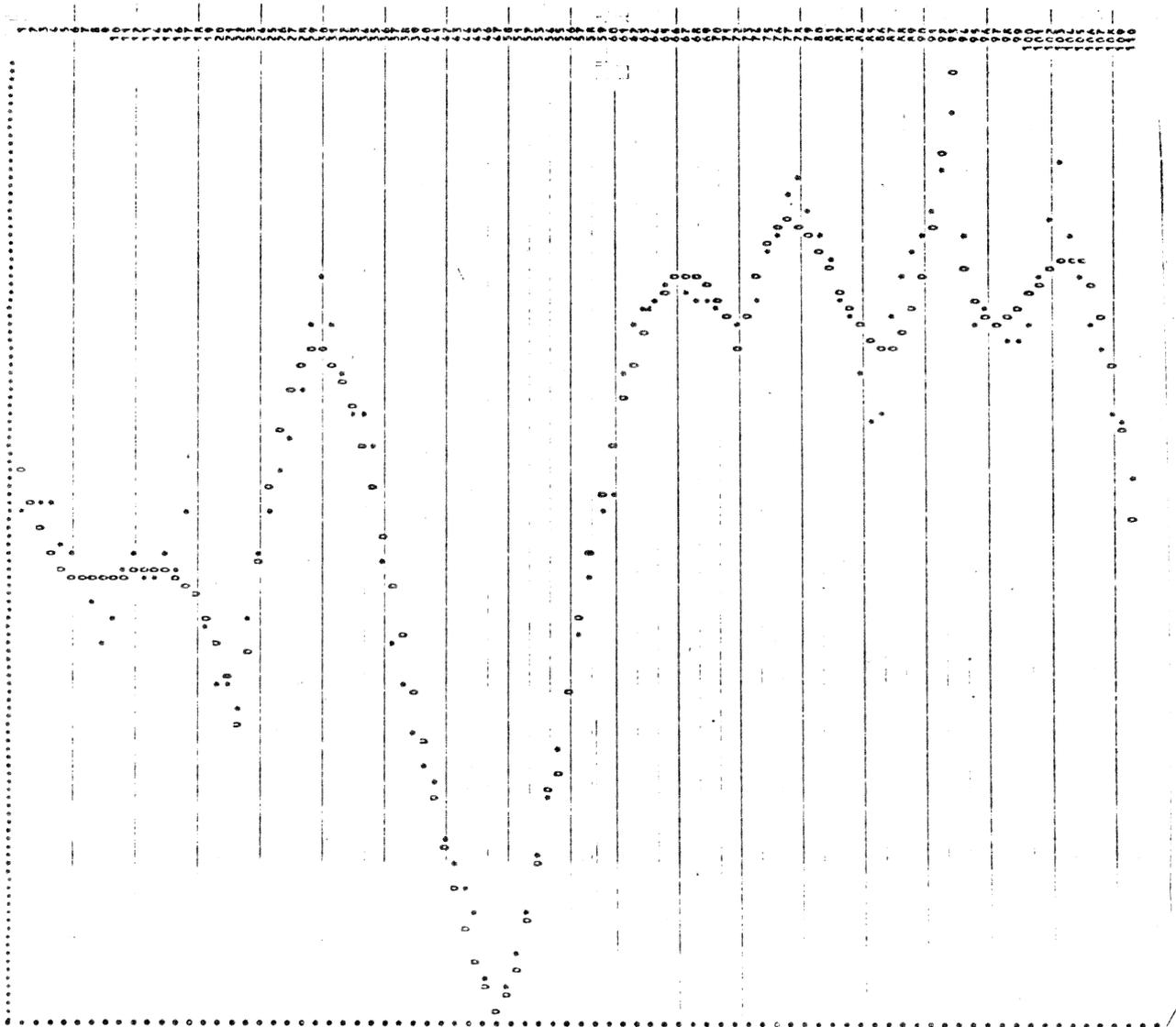


FIGURE 3-6

| SERIE DES VALEURS ESTIMEES |         |         |         |         |         |         |         |         |         |  |
|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--|
| 1777.13                    | 1781.43 | 1843.77 | 1597.45 | 1568.48 | 1548.55 | 1537.82 | 1534.43 | 1556.54 | 1542.20 |  |
| 1509.85                    | 4667.73 | 5822.05 | 1564.81 | 1561.06 | 1542.87 | 4520.79 | 4697.75 | 1453.12 | 1891.72 |  |
| 4177.29                    | 4222.77 | 4222.10 | 1594.46 | 1720.68 | 1833.97 | 1000.20 | 4257.87 | 4081.74 | 1002.20 |  |
| 4247.72                    | 4255.99 | 4821.02 | 1804.57 | 1721.05 | 1632.47 | 1533.81 | 4627.27 | 1321.89 | 1246.78 |  |
| 1101.00                    | 903.47  | 890.05  | 794.63  | 707.11  | 1230.37 | 566.50  | 517.59  | 484.72  | 648.79  |  |
| 666.10                     | 775.01  | 823.54  | 1019.26 | 1149.87 | 1283.06 | 1416.52 | 1547.03 | 1674.99 | 1795.38 |  |
| 1906.81                    | 2006.94 | 2073.49 | 2164.13 | 2216.56 | 2248.46 | 2257.53 | 2241.46 | 2174.93 | 2124.63 |  |
| 2019.26                    | 2073.96 | 2115.64 | 2145.78 | 2165.85 | 2177.32 | 2181.67 | 2180.35 | 2174.85 | 2166.63 |  |
| 2157.17                    | 2147.93 | 2140.38 | 2136.00 | 2136.26 | 2142.02 | 2156.56 | 2179.54 | 2213.05 | 2258.54 |  |
| 2317.49                    | 2391.38 | 2486.38 | 2029.15 | 1936.42 | 1898.16 | 1904.49 | 1945.34 | 2010.74 | 2090.72 |  |
| 2175.28                    | 2254.45 | 2318.25 | 2356.68 | 2359.77 | 2317.53 | 2219.97 | 2057.12 | 1818.98 | 1495.58 |  |

| SERIE DES ECARTS |        |        |         |         |         |         |         |         |        |  |
|------------------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|--|
| -97.13           | -1.43  | 50.68  | 100.55  | 51.52   | 51.45   | 2.18    | -54.43  | -136.54 | -82.29 |  |
| 40.15            | 42.65  | -22.95 | -24.81  | 38.94   | 10.13   | 150.61  | 2.25    | -13.12  | -93.65 |  |
| -17.48           | 27.23  | 33.81  | 5.54    | -49.68  | -53.93  | -59.29  | 2.13    | 118.26  | 237.01 |  |
| 136.28           | 34.01  | 28.88  | 96.43   | 116.95  | -32.43  | -133.81 | -129.27 | -120.89 | -97.78 |  |
| -21.00           | -33.67 | 9.15   | 65.37   | 92.89   | 29.63   | -26.58  | -17.59  | 14.28   | 71.21  |  |
| 31.00            | 24.99  | 26.46  | 30.74   | -10.13  | -7.08   | 3.48    | -7.93   | 5.01    | -75.38 |  |
| 93.19            | 23.06  | 46.51  | -4.13   | -16.56  | -28.48  | -77.33  | -81.46  | -47.93  | 15.37  |  |
| 100.74           | 26.04  | 4.38   | 14.72   | 94.15   | -122.88 | 218.33  | 242.65  | 175.15  | 133.37 |  |
| 92.83            | 12.07  | -20.38 | -138.00 | -254.26 | -242.62 | -36.48  | 40.46   | 46.95   | 41.44  |  |
| 32.51            | 38.62  | 393.62 | 278.85  | 163.58  | 241.81  | 195.51  | 114.66  | 49.26   | 0.28   |  |
| 44.72            | 85.55  | 151.75 | -56.68  | -139.77 | -217.53 | -179.97 | -157.12 | 61.02   | 264.42 |  |

FIGURE 3-7

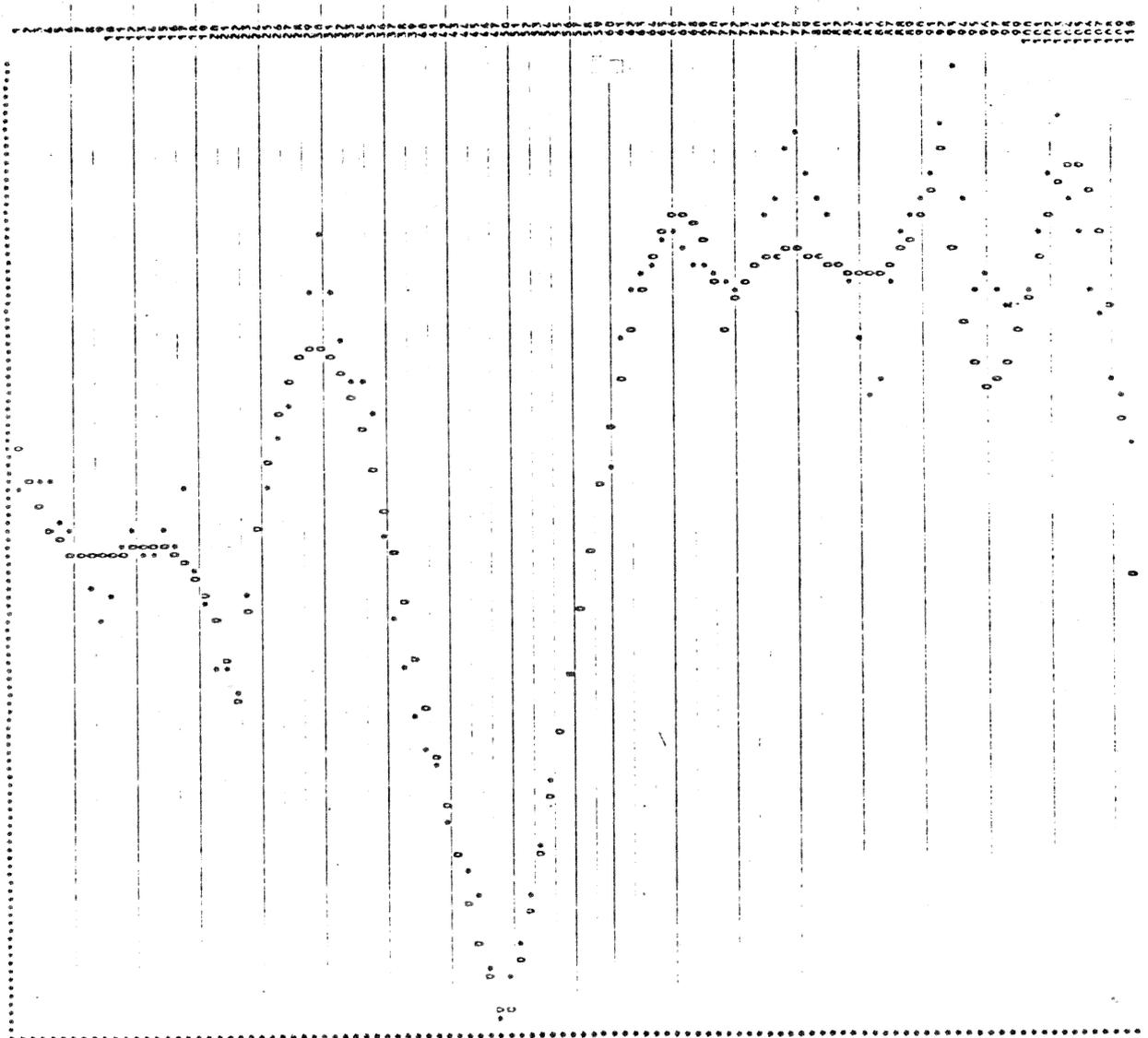


FIGURE 3-8

Comme pour le cas n° 2 les valeurs calculées et écarts sont en Figure 3-5 et le graphique en Figure 3-6.

.Cas n° 3 Mode=1

Le critère optimal vaut:  $W=130300I$

Après trois itérations nous obtenons:

$$P_1^* = (I, \dots, 22)$$

$$P_2^* = (23, \dots, 49)$$

$$P_3^* = (50, \dots, 71)$$

$$P_4^* = (72, \dots, 92)$$

$$P_5^* = (93, \dots, 110)$$

et les noyaux:

$$L_1^* = (1870, 772/-103, 4788/10, 14506/-0, 3081964)$$

$$L_2^* = (982, 1252/259, 9565/-19, 65886/0, 3479118)$$

$$L_3^* = (419, 0848/57, 64691/9, 373935/-0, 3850177)$$

$$L_4^* = (1950, 092/76, 90404/-7, 975916/0, 2450919)$$

$$L_5^* = (2734, 259/-361, 7291/47, 22317/-1, 664002)$$

Valeurs calculées et graphique sont en Figures 3-7 et 3-8

.Cas n° 4 Mode=0

Après quatre itérations nous obtenons:

$$W = 733903,3I$$

et la partition optimale:

$$P_1^* = (I, \dots, 21)$$

$$P_2^* = (22, \dots, 38)$$

$$P_3^* = (39, \dots, 60)$$

$$P_4^* = (61, \dots, 84)$$

$$P_5^* = (85, \dots, 97)$$

$$P_6^* = (98, \dots, 110)$$

ainsi que les noyaux:

$$L_1^* = (1677, 986/-10, 02/-0, 1277798)$$

$$L_2^* = (997, 5/234, 604/-12, 847)$$

| 1667.84 | SERIE DES VALEURS ESTIMEES |         |         | 1635.86 | 1624.09 | 1613.27 | 1601.58 | 1589.65 | 1577.46 | 1565.01 |
|---------|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|         | 1657.43                    | 1646.78 |         |         |         |         |         |         |         |         |
| 1552.39 | 1539.34                    | 1526.13 | 1512.66 | 1498.93 | 1484.95 | 1470.72 | 1456.22 | 1444.48 | 1424.47 |         |
| 1443.84 | 1429.25                    | 1415.52 | 1401.69 | 1387.56 | 1373.74 | 1359.83 | 1345.72 | 1331.72 | 1317.55 |         |
| 1335.91 | 1321.44                    | 1307.22 | 1292.71 | 1278.74 | 1264.83 | 1250.93 | 1236.78 | 1222.78 | 1208.99 |         |
| 1227.48 | 1213.09                    | 1198.95 | 1184.70 | 1170.83 | 1156.83 | 1142.58 | 1128.05 | 1113.71 | 1099.89 |         |
| 2041.16 | 2026.91                    | 2012.63 | 1998.50 | 1984.93 | 1971.51 | 1958.06 | 1944.06 | 1929.55 | 1915.01 |         |
| 2225.73 | 2211.11                    | 2196.39 | 2181.62 | 2167.81 | 2153.96 | 2140.07 | 2126.13 | 2112.13 | 2098.15 |         |
| 2208.05 | 2194.24                    | 2179.75 | 2165.59 | 2151.26 | 2137.85 | 2124.24 | 2110.46 | 2096.48 | 2082.33 |         |
| 2383.99 | 2369.46                    | 2354.75 | 2340.85 | 2326.77 | 2312.51 | 2298.06 | 2283.66 | 2269.48 | 2255.21 |         |
| 2248.83 | 2234.29                    | 2219.28 | 2204.80 | 2189.86 | 2174.45 | 2158.58 | 2142.24 | 2125.24 | 2108.43 |         |

| 12.16   | SERIE DES ECARTS |         |         | 64.14   | -4.09  | -13.27  | -61.58  | -109.65 | -177.46 | -105.01 |
|---------|------------------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 7.70    | 42.57            | 53.22   |         | 27.34   | 101.07 | 75.05   | 209.28  | 43.78   | -4.48   | -126.47 |
| -111.21 | 30.74            | 44.68   | 14.31   | -50.56  | -69.34 | -92.63  | -50.22  | 47.88   | 151.67  |         |
| 4.16    | -23.66           | -62.78  | 23.79   | 76.06   | -45.98 | -62.33  | -27.02  | -75.49  | -19.99  |         |
| 59.19   | 41.75            | 64.05   | 97.92   | 91.57   | -11.58 | -110.94 | -146.71 | -158.89 | -67.48  |         |
| -32.44  | 6.12             | 48.30   | 84.08   | 83.44   | 76.49  | 72.95   | 33.09   | -7.17   | -157.85 |         |
| -21.16  | 31.09            | 45.37   | 41.70   | 60.07   | 2.94   | 2.94    | -32.85  | 58.01   | -77.42  |         |
| -106.78 | -134.11          | -119.39 | -82.62  | 60.19   | 60.04  | 159.93  | 187.87  | 121.85  | 80.88   |         |
| 41.95   | -14.94           | -59.72  | -142.59 | 16.74   | -73.88 | 13.74   | 64.54   | -58.48  | -92.33  |         |
| -33.99  | 59.54            | 208.25  | -27.85  | -158.77 | -24.51 | 54.94   | 40.34   | -57.52  | -92.91  |         |
| -28.83  | 58.71            | 179.72  | 24.20   | -17.86  | -76.45 | -51.58  | -83.24  | 28.59   | 63.85   |         |

FIGURE 3-II

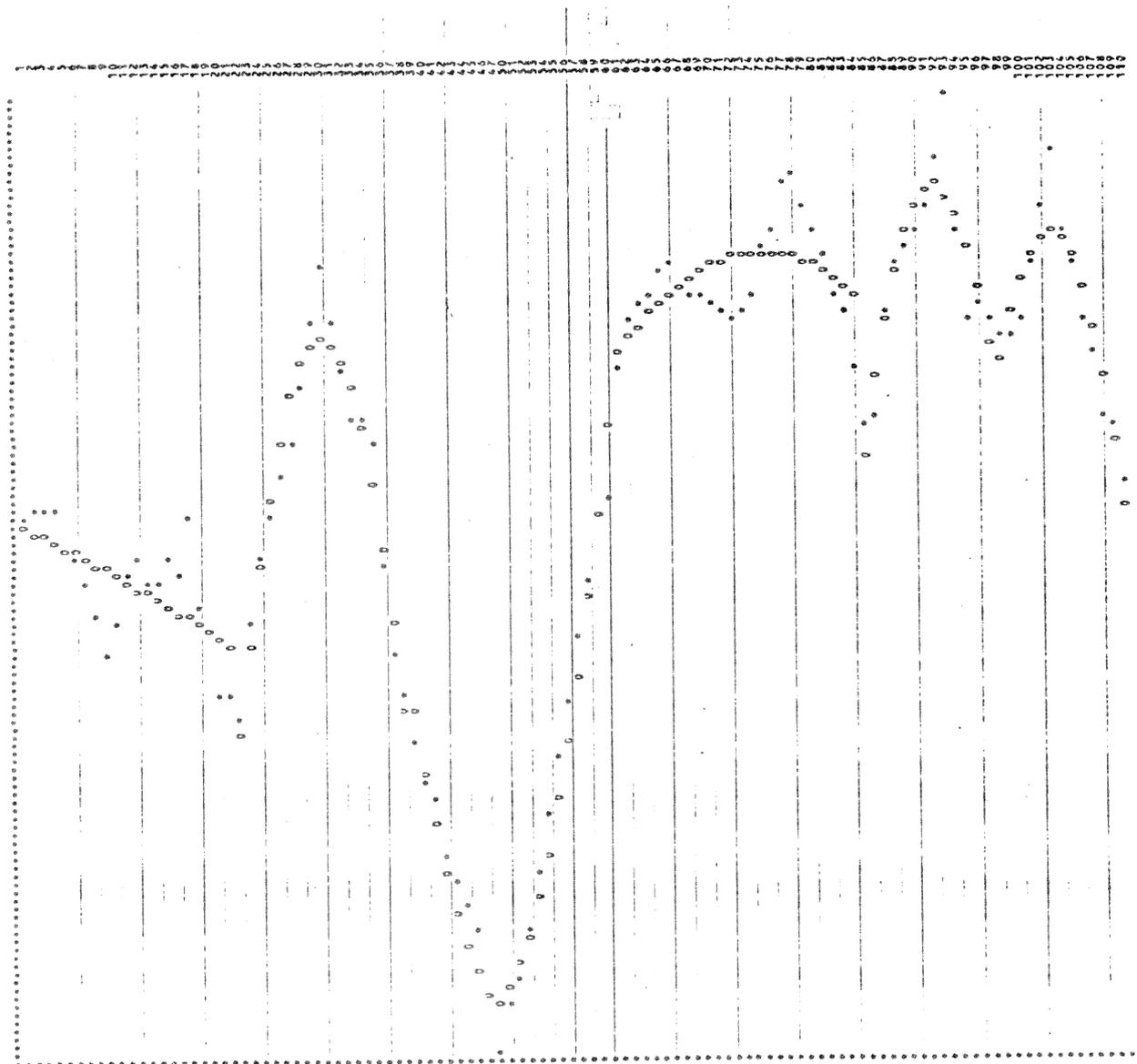


FIGURE 3-I2

$$L_3^* = (1427,403/-160,1129/8,204404)$$

$$L_4^* = (2011,353/30,82435/-1,021791)$$

$$L_5^* = (1633,496/195,3596/-12,59241)$$

$$L_6^* = (1884,336/138,0569/-11,73327)$$

Valeurs calculées et écarts , graphique sont en Figures 3-II et 3-I2.

.Cas n° 5 Mode=0

Après trois itérations nous avons:

$$W=406194,25$$

$$P_1^* = (1, \dots, 22)$$

$$P_2^* = (23, \dots, 43)$$

$$P_3^* = (44, \dots, 67)$$

$$P_4^* = (68, \dots, 85)$$

$$P_5^* = (86, \dots, 99)$$

$$P_6^* = (100, \dots, 110)$$

$$L_1^* = (1970,772/-103,4788/10,14506/-0,3081964)$$

$$L_2^* = (1075,459/298,736/-26,34434/0,5540271)$$

$$L_3^* = (1067,217/-216,1527/26,10226/-0,6322049)$$

$$L_4^* = (2224,19/-76,5484/15,47257/-0,6902732)$$

$$L_5^* = (1630,929/289,4244/-33,33402/1,047751)$$

$$L_6^* = (1795,002/347,7742/-62,03931/2,760278)$$

Les résultats graphiques sont en Figures 3-I7 et 3-I8.

.Cas n° 5 Mode=1

Nous obtenons  $W=2000056$

$$P_1^* = (1, \dots, 22)$$

$$P_2^* = (23, \dots, 38)$$

$$P_3^* = (39, \dots, 55)$$

$$P_4^* = (56, \dots, 79)$$

|         | SERIE DES VALEURS ESTIMEES |         |         |         |         |         |         |         |         |
|---------|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1777.13 | 1701.93                    | 1643.32 | 1599.45 | 1568.48 | 1548.55 | 1537.82 | 1534.43 | 1536.54 | 1544.29 |
| 1549.81 | 1557.35                    | 1562.95 | 1564.81 | 1561.06 | 1542.87 | 1529.39 | 1497.75 | 1458.12 | 1395.65 |
| 1317.42 | 1222.77                    | 1346.41 | 1471.99 | 1749.53 | 1884.35 | 1979.78 | 2039.15 | 2065.77 | 2042.77 |
| 2034.79 | 1922.41                    | 1911.36 | 1874.86 | 1724.03 | 1614.52 | 1498.86 | 1388.38 | 1262.59 | 1148.23 |
| 1261.21 | 944.66                     | 841.09  | 876.53  | 734.26  | 634.61  | 529.78  | 550.38  | 571.43  | 611.51  |
| 1743.35 | 75.25                      | 897.71  | 1066.45 | 1139.66 | 1279.56 | 1422.35 | 1544.24 | 1701.44 | 1831.15 |
| 2121.33 | 2066.06                    | 2127.43 | 2184.26 | 2213.03 | 2211.76 | 2174.85 | 2162.42 | 2127.46 | 2115.16 |
| 2221.33 | 2141.98                    | 2172.81 | 2209.74 | 2248.03 | 2281.32 | 2315.69 | 2335.58 | 2346.87 | 2327.37 |
| 2393.76 | 2227.62                    | 2134.03 | 2265.13 | 1833.76 | 1881.07 | 2084.82 | 2227.49 | 2329.34 | 2375.67 |
| 2264.48 | 2382.94                    | 2349.40 | 2299.51 | 2239.52 | 2175.74 | 2114.44 | 2061.91 | 2024.43 | 2083.59 |
|         | 2354.50                    | 2370.13 | 2327.93 | 2244.45 | 2136.27 | 2019.94 | 1912.03 | 1820.09 | 1787.69 |

|        | SERIE DES ECARTS |        |        |         |         |         |        |         |         |
|--------|------------------|--------|--------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|
| -47.13 | -1.43            | 36.68  | 100.55 | 51.52   | 51.45   | 2.18    | -54.43 | -136.24 | -62.29  |
| 10.15  | 42.65            | -22.95 | -24.81 | 38.94   | 10.13   | 150.61  | 2.25   | -17.12  | -93.65  |
| -17.48 | 27.23            | 111.59 | 28.01  | -69.53  | -104.35 | -129.78 | -79.15 | 34.23   | 157.33  |
| 63.92  | 17.59            | -11.30 | 75.94  | 115.97  | -34.52  | -98.86  | -80.38 | -62.59  | -26.25  |
| 38.79  | 15.24            | 38.10  | -13.53 | 62.74   | 23.39   | -39.78  | -59.98 | -71.43  | -23.69  |
| 13.15  | 24.74            | 36.10  | -43.55 | 50.54   | 8.44    | -2.35   | -24.24 | -21.44  | -110.15 |
| 51.46  | 21.09            | 17.57  | -24.26 | -13.03  | 8.24    | 5.15    | -2.42  | 22.54   | 24.84   |
| -1.38  | -21.08           | -52.81 | -49.74 | 11.37   | 14.68   | 84.31   | 87.42  | 0.13    | -27.39  |
| -41.03 | -67.62           | -13.03 | -3.13  | -46.24  | -11.93  | 35.18   | -7.49  | -62.36  | -75.67  |
| -43.78 | 67.09            | 230.60 | 1.49   | -139.52 | -35.74  | -14.74  | -1.91  | 35.57   | 15.50   |
| -42.48 | -14.50           | 99.87  | -27.93 | -24.45  | -36.27  | 20.06   | -12.03 | 50.91   | -27.09  |

FIGURE 3-17

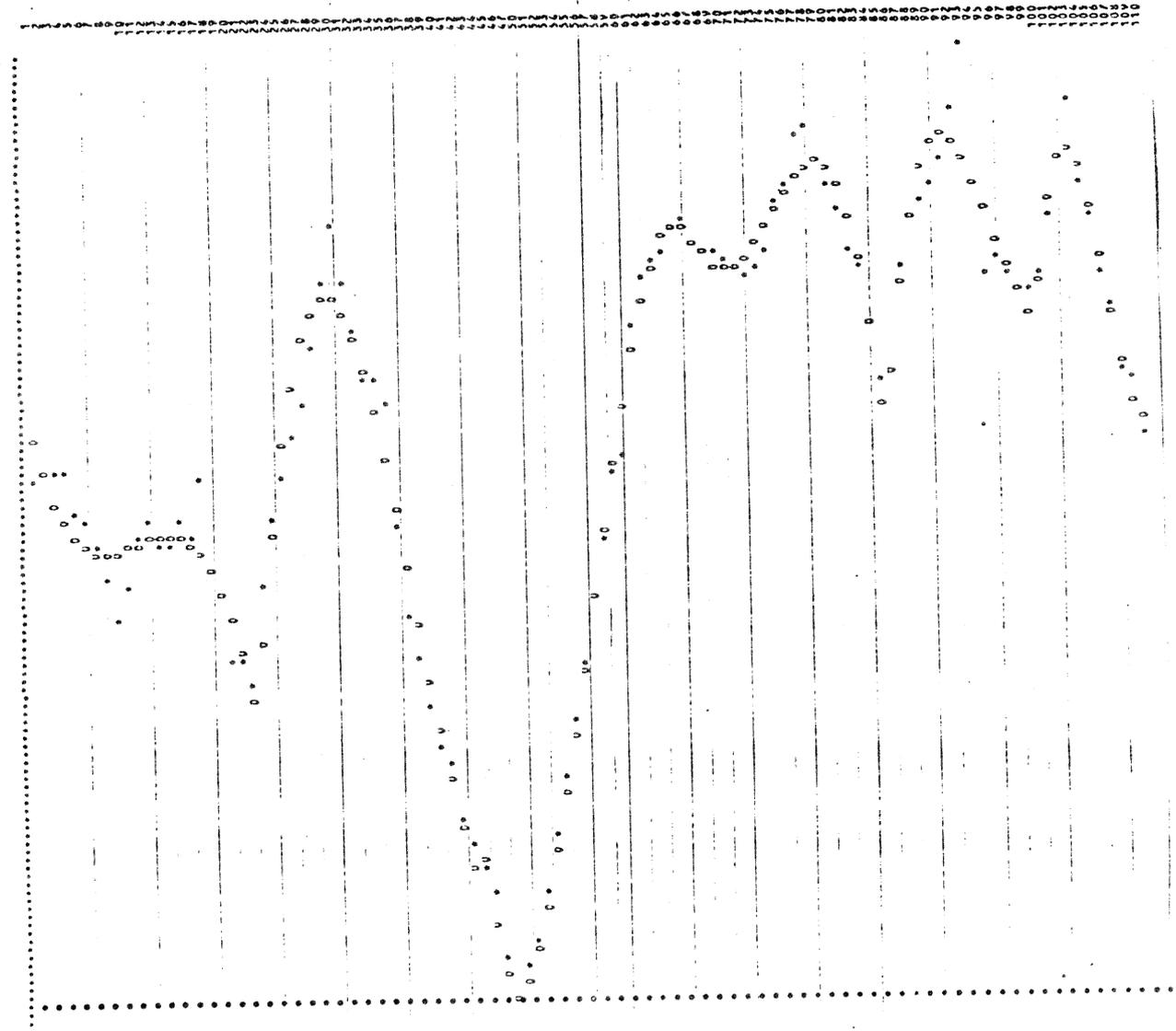


FIGURE 3-18

$$P_5^* = (80, \dots, 95)$$

$$P_6^* = (96, \dots, 110)$$

et les noyaux:

$$L_1^* = (1870, 772/-103, 4788/10, 14506/-0, 3081964)$$

$$L_2^* = (1140, 705/71, 28210/11, 72258/-0, 9391813)$$

$$L_3^* = (1205, 733/-79, 42056/-0, 4418611/0, 2601126)$$

$$L_4^* = (963, 6314/196, 998/-10, 86243/0, 2100193)$$

$$L_5^* = (2836, 762/-518, 2338/71, 80457/-2, 597843)$$

$$L_6^* = (2341, 927/-317, 2772/57, 01387/-2, 539343)$$

Valeurs calculées, écarts et graphique sont en Figures 3-19 et 3-20.

Cas n° 6 Mode=2

Nous obtenons  $W=1028825,2$  après trois itérations et:

$$P_1^* = (1, \dots, 28)$$

$$P_2^* = (29, \dots, 52)$$

$$P_3^* = (53, \dots, 78)$$

$$P_4^* = (79, \dots, 88)$$

$$P_5^* = (89, \dots, 102)$$

$$P_6^* = (103, \dots, 110)$$

ainsi que les noyaux associés:

$$L_1^* = (1631, 98/21, 50205/-4, 332763/0, 1400037)$$

$$L_2^* = (1780, 106/153, 2965/-23, 52624/0, 6373687)$$

$$L_3^* = (687, 6212/187, 8454/-8, 085161/0, 1253228)$$

$$L_4^* = (2279, 681/81, 5791/-31, 25098/2, 083485)$$

$$L_5^* = (1986, 736/215, 2135/-34, 59491/1, 446267)$$

$$L_6^* = (2096, 357/281, 9487/-69, 86/3, 789233)$$

Valeurs calculées et graphique sont en Figures 3-23 et 3-24.

| SERIE DES VALEURS ESTIMEES |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1777.13                    | 1701.93 | 1641.32 | 1599.45 | 1568.48 | 1548.55 | 1537.82 | 1534.43 | 1536.24 | 1542.29 |
| 1549.65                    | 1557.35 | 1562.95 | 1564.81 | 1561.06 | 1549.87 | 1529.39 | 1497.75 | 1437.12 | 1393.65 |
| 1347.44                    | 1222.77 | 1322.65 | 1414.70 | 1557.29 | 1672.78 | 1787.55 | 1891.95 | 1980.55 | 2047.11 |
| 1038.61                    | 2663.10 | 2661.22 | 1985.10 | 1859.17 | 1677.78 | 1435.32 | 1126.13 | 1047.21 | 970.52  |
| 839.53                     | 83.10   | 780.49  | 747.30  | 675.27  | 644.78  | 627.45  | 624.85  | 638.53  | 670.26  |
| 720.69                     | 799.89  | 887.31  | 1005.82 | 1149.88 | 1315.86 | 1460.53 | 1591.27 | 1707.51 | 1799.74 |
| 1339.39                    | 1951.95 | 2009.86 | 2057.39 | 2095.79 | 2126.33 | 2150.79 | 2158.26 | 2187.37 | 2199.75 |
| 1221.18                    | 2215.00 | 2225.78 | 2238.77 | 2255.25 | 2276.33 | 2300.66 | 2338.13 | 2384.11 | 2448.73 |
| 1005.86                    | 1746.74 | 1715.98 | 1751.19 | 1816.49 | 1856.29 | 1905.11 | 1977.04 | 2064.81 | 2162.76 |
| 2527.24                    | 2526.70 | 2451.56 | 2286.23 | 2015.11 | 1915.11 | 1874.66 | 1822.52 | 1807.67 | 1822.76 |
| 2043.67                    | 2152.45 | 2253.37 | 2331.20 | 2370.69 | 2356.61 | 2273.73 | 2106.81 | 1860.61 | 1459.80 |

| SERIE DES ECARTS |         |         |        |         |         |         |         |         |         |
|------------------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| -97.13           | -1.93   | -56.68  | 100.25 | 51.24   | 51.45   | 2.18    | -54.43  | -136.24 | -82.29  |
| 10.15            | 47.65   | -22.95  | -24.81 | 38.94   | 10.13   | 150.61  | 2.25    | -17.12  | -93.65  |
| -17.48           | 27.23   | -137.35 | 165.30 | 126.71  | 102.22  | 62.45   | 68.05   | 110.65  | 172.89  |
| 43.40            | -21.19  | -141.22 | -85.11 | -19.17  | -37.78  | -35.39  | -173.87 | -152.79 | 149.43  |
| 183.37           | 120.90  | 430.51  | 142.64 | 124.73  | 15.22   | -87.68  | -124.85 | -152.53 | -30.06  |
| -23.77           | 7.11    | 32.69   | 44.18  | 10.02   | -4.86   | -27.63  | -51.87  | -27.31  | -79.94  |
| 117.61           | 148.05  | -130.14 | 102.61 | 104.21  | 9.67    | -20.73  | -8.86   | -37.17  | -55.05  |
| -85.18           | -115.00 | -105.78 | -78.77 | 4.75    | 21.55   | 86.34   | -17.87  | -34.11  | 233.27  |
| 391.84           | 413.56  | 404.02  | 248.81 | 43.51   | -56.29  | 25.00   | -17.04  | -104.81 | -163.74 |
| -177.24          | -76.79  | 128.44  | 13.77  | 84.89   | 224.89  | 265.84  | 237.28  | 194.53  | 153.74  |
| 176.33           | 187.55  | 216.63  | -31.20 | -150.69 | -256.61 | -233.73 | -206.81 | 30.39   | 300.10  |

FIGURE 3-19

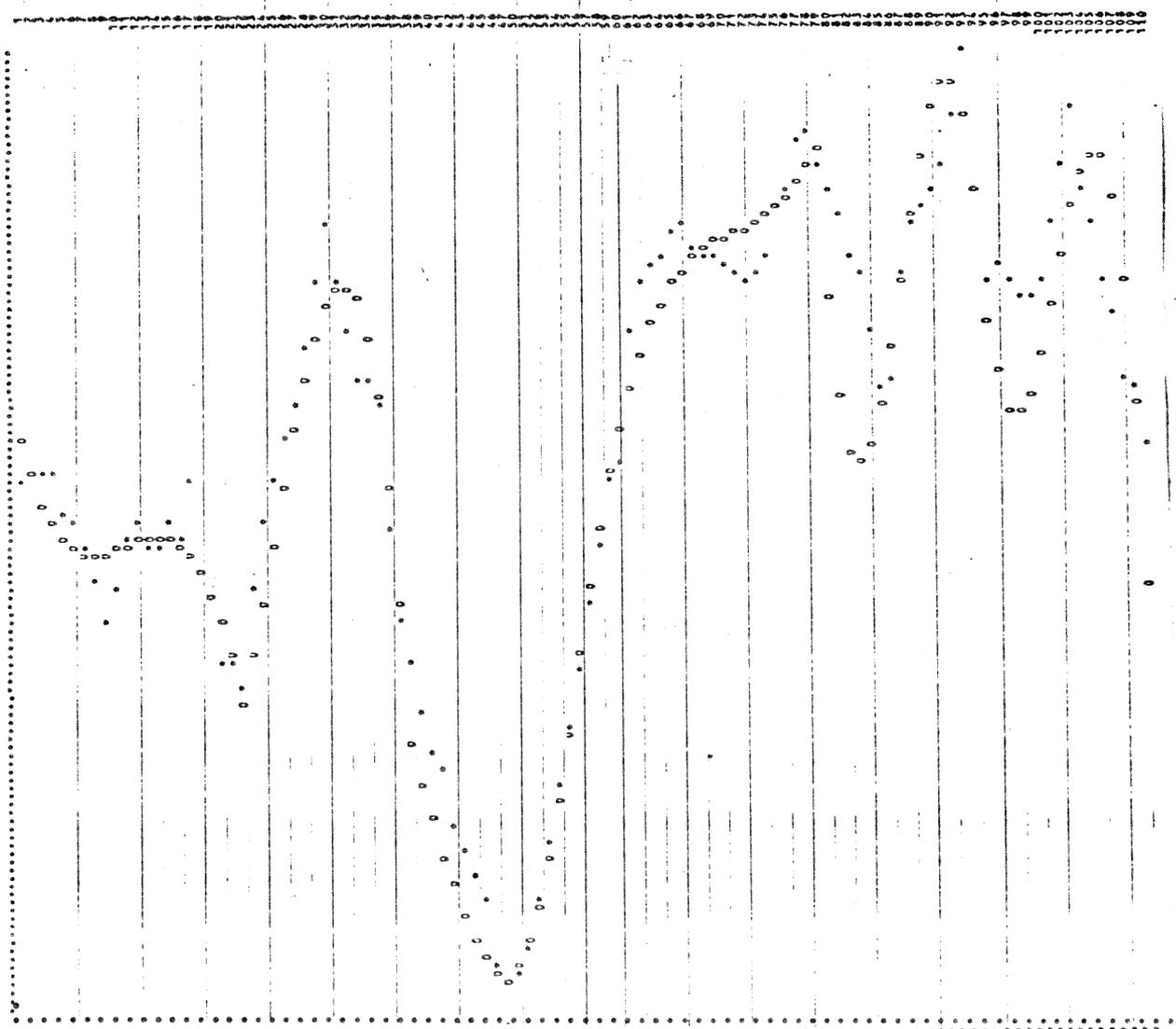


FIGURE 3-20

|       | SERIE DES VALEURS ESTIMEES |         |         |         |         |         |         |         |         |
|-------|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 49.27 | 1658.77                    | 1661.27 | 1657.62 | 1648.07 | 1635.25 | 1618.21 | 1598.38 | 1576.01 | 1555.73 |
| 30.58 | 1508.01                    | 1486.86 | 1467.96 | 1452.15 | 1440.28 | 1433.18 | 1411.70 | 1404.68 | 1448.95 |
| 69.35 | 1498.73                    | 1537.92 | 1587.77 | 1649.11 | 1722.79 | 1809.64 | 1910.51 | 1997.69 | 2043.47 |
| 57.66 | 2038.10                    | 1990.61 | 1919.01 | 1827.13 | 1718.79 | 1597.82 | 1468.03 | 1331.26 | 1107.11 |
| 64.65 | 237.27                     | 820.79  | 748.49  | 674.08  | 571.48  | 574.49  | 578.03  | 557.03  | 613.11  |
| 19.69 | 367.50                     | 1031.27 | 1181.77 | 1317.66 | 1440.38 | 1550.70 | 1649.35 | 1737.10 | 1816.69 |
| 82.28 | 1942.42                    | 1994.06 | 2038.55 | 2076.65 | 2109.11 | 2180.67 | 2160.09 | 2180.13 | 2107.53 |
| 13.65 | 2227.43                    | 2241.44 | 2255.82 | 2271.52 | 2288.70 | 2308.71 | 2332.80 | 2354.50 | 2294.11 |
| 39.63 | 2166.74                    | 2094.15 | 2034.07 | 1999.00 | 2001.42 | 2053.80 | 2118.80 | 2200.35 | 2260.07 |
| 86.61 | 2378.71                    | 2344.99 | 2294.15 | 2234.86 | 2175.80 | 2123.65 | 2093.08 | 2084.78 | 2115.42 |
| 87.68 | 2312.23                    | 2411.13 | 2415.77 | 2348.90 | 2233.25 | 2091.56 | 1946.36 | 1821.00 | 1737.58 |

FIGURE 3-23

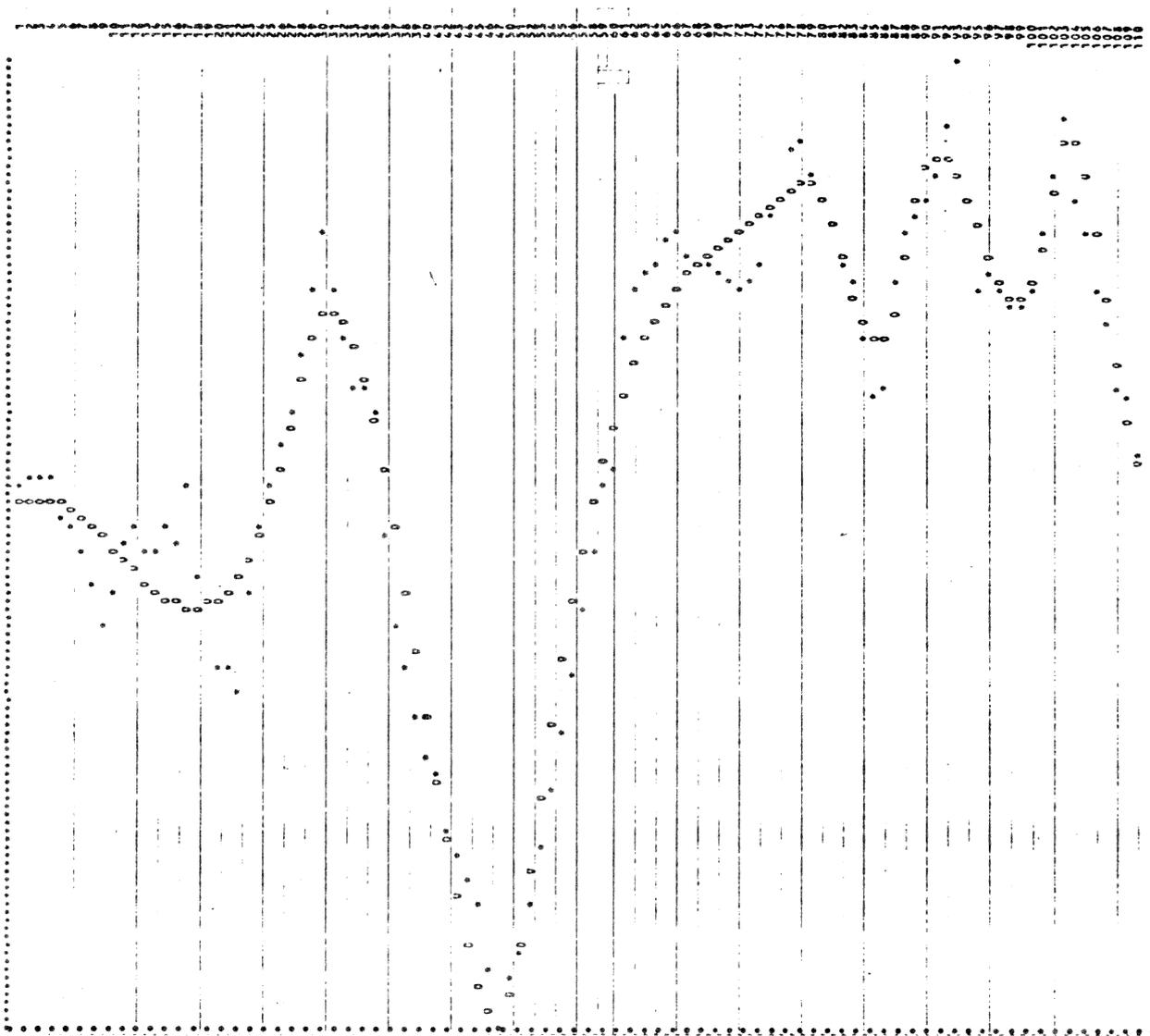


FIGURE 3-24

2.2 Applications du programme SPLINE.

Les données sont identiques. Nous avons effectué les essais suivants:

| N° | N   | K  | QM | P <sub>1</sub> | P <sub>2</sub> | P <sub>3</sub> | P <sub>4</sub> | P <sub>5</sub> | P <sub>6</sub> | P <sub>7</sub> | P <sub>8</sub> | P <sub>9</sub> | P <sub>10</sub> | P <sub>11</sub> |
|----|-----|----|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| J  | 110 | 8  | 2  | 20             | 10             | 10             | 20             | 20             | 10             | 10             | 10             | 00             | 00              | 00              |
| 2  | 110 | 9  | 2  | 20             | 10             | 10             | 20             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10             | 00              | 00              |
| 3  | 110 | 9  | 3  | 20             | 10             | 10             | 20             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10             | 00              | 00              |
| 4  | 110 | 10 | 2  | 20             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10              | 00              |
| 5  | 110 | 10 | 3  | 20             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10              | 00              |
| 6  | 110 | 11 | 2  | 10             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10             | 10              | 10              |

d'où:

| N° | Nombre de valeurs<br>à mémoriser | % de l'information<br>initiale |
|----|----------------------------------|--------------------------------|
| 1  | 23                               | 21                             |
| 2  | 26                               | 23                             |
| 3  | 35                               | 32                             |
| 4  | 29                               | 26                             |
| 5  | 39                               | 35                             |
| 6  | 32                               | 29                             |

Nous allons examiner les résultats obtenus:

Cas n° 1Après trois itérations nous avons:  $W=1884311$ 

La partition optimale est:

$$P_1^* = (1, \dots, 16)$$

$$P_5^* = (49, \dots, 64)$$

$$P_2^* = (17, \dots, 22)$$

$$P_6^* = (65, \dots, 70)$$

$$P_3^* = (23, \dots, 30)$$

$$P_7^* = (71, \dots, 91)$$

$$P_4^* = (31, \dots, 48)$$

$$P_8^* = (92, \dots, 110)$$

et les noyaux:

$$L_1^* = (1688/-8)$$

$$L_5^* = (396, 25/103, 75)$$

$$L_2^* = (1611, 67/-51, 7)$$

$$L_6^* = (2163, 33/-3, 33)$$

$$L_3^* = (1128, 75/121, 25)$$

$$L_7^* = (2130/10)$$

$$L_4^* = (2315, 55/-95, 55)$$

$$L_8^* = (2381, 05/-31, 05)$$

Les valeurs calculées, écarts et le graphique constituent les Figures 3-25 et 3-26.

Cas n° 2Après sept itérations nous avons  $W=1385732$  et:

$$P_1^* = (1, \dots, 21)$$

$$P_2^* = (22, \dots, 30)$$

$$P_3^* = (31, \dots, 48)$$

$$P_4^* = (49, \dots, 64)$$

$$P_5^* = (65, \dots, 71)$$

$$P_6^* = (72, \dots, 79)$$

$$P_7^* = (80, \dots, 87)$$

$$P_8^* = (88, \dots, 102)$$

$$P_9^* = (103, \dots, 110)$$

$$L_1^* = (1699/-19)$$

$$L_2^* = (1107, 77/102, 22)$$

$$L_3^* = (2315, 55/-95, 55)$$

$$L_4^* = (396, 25/103, 75)$$

$$L_5^* = (2165, 71/-5, 71)$$

$$L_6^* = (2091, 25/28, 75)$$

$$L_7^* = (2378, 75/-28, 75)$$

$$L_8^* = (2105, 33/14, 67)$$

$$L_9^* = (2412, 5/-72, 5)$$

Les résultats graphiques sont en Figures 3-29 et 3-30.

| SERIE DES VIL | CHDS       | CALCUL     | FFC        |            |            |            |            |            |            |            |
|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1672.00000    | 1672.00000 | 1664.00000 | 1656.00000 | 1648.00000 | 1640.00000 | 1632.00000 | 1624.00000 | 1616.00000 | 1608.00000 | 1600.00000 |
| 1572.00000    | 1572.00000 | 1574.00000 | 1576.00000 | 1568.00000 | 1560.00000 | 1552.00000 | 1544.00000 | 1536.00000 | 1528.00000 | 1520.00000 |
| 1472.00000    | 1472.00000 | 1474.00000 | 1476.00000 | 1468.00000 | 1460.00000 | 1452.00000 | 1444.00000 | 1436.00000 | 1428.00000 | 1420.00000 |
| 1372.00000    | 1372.00000 | 1374.00000 | 1376.00000 | 1368.00000 | 1360.00000 | 1352.00000 | 1344.00000 | 1336.00000 | 1328.00000 | 1320.00000 |
| 1272.00000    | 1272.00000 | 1274.00000 | 1276.00000 | 1268.00000 | 1260.00000 | 1252.00000 | 1244.00000 | 1236.00000 | 1228.00000 | 1220.00000 |
| 1172.00000    | 1172.00000 | 1174.00000 | 1176.00000 | 1168.00000 | 1160.00000 | 1152.00000 | 1144.00000 | 1136.00000 | 1128.00000 | 1120.00000 |
| 1072.00000    | 1072.00000 | 1074.00000 | 1076.00000 | 1068.00000 | 1060.00000 | 1052.00000 | 1044.00000 | 1036.00000 | 1028.00000 | 1020.00000 |
| 972.00000     | 972.00000  | 974.00000  | 976.00000  | 968.00000  | 960.00000  | 952.00000  | 944.00000  | 936.00000  | 928.00000  | 920.00000  |
| 872.00000     | 872.00000  | 874.00000  | 876.00000  | 868.00000  | 860.00000  | 852.00000  | 844.00000  | 836.00000  | 828.00000  | 820.00000  |
| 772.00000     | 772.00000  | 774.00000  | 776.00000  | 768.00000  | 760.00000  | 752.00000  | 744.00000  | 736.00000  | 728.00000  | 720.00000  |
| 672.00000     | 672.00000  | 674.00000  | 676.00000  | 668.00000  | 660.00000  | 652.00000  | 644.00000  | 636.00000  | 628.00000  | 620.00000  |
| 572.00000     | 572.00000  | 574.00000  | 576.00000  | 568.00000  | 560.00000  | 552.00000  | 544.00000  | 536.00000  | 528.00000  | 520.00000  |
| 472.00000     | 472.00000  | 474.00000  | 476.00000  | 468.00000  | 460.00000  | 452.00000  | 444.00000  | 436.00000  | 428.00000  | 420.00000  |
| 372.00000     | 372.00000  | 374.00000  | 376.00000  | 368.00000  | 360.00000  | 352.00000  | 344.00000  | 336.00000  | 328.00000  | 320.00000  |
| 272.00000     | 272.00000  | 274.00000  | 276.00000  | 268.00000  | 260.00000  | 252.00000  | 244.00000  | 236.00000  | 228.00000  | 220.00000  |
| 172.00000     | 172.00000  | 174.00000  | 176.00000  | 168.00000  | 160.00000  | 152.00000  | 144.00000  | 136.00000  | 128.00000  | 120.00000  |
| 72.00000      | 72.00000   | 74.00000   | 76.00000   | 68.00000   | 60.00000   | 52.00000   | 44.00000   | 36.00000   | 28.00000   | 20.00000   |

| SERIE DES ECAPTS |            |            |            |            |            |            |            |            |  |  |
|------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--|--|
| 28.00000         | 36.00000   | 44.00000   | -28.00000  | -40.00000  | -92.00000  | -144.00000 | -216.00000 | -148.00000 |  |  |
| 8.00000          | -44.00000  | -34.00000  | 32.00000   | 0.00000    | 171.46659  | 43.33333   | 35.00000   | -53.33333  |  |  |
| -1.66675         | 88.75000   | 107.50000  | 66.25000   | 45.00000   | -6.25000   | -17.50000  | 1.25000    | 0.00000    |  |  |
| -24.44458        | -28.00000  | -33.33350  | 67.77759   | -66.66675  | -151.11133 | -155.55546 | -160.00000 | -144.44458 |  |  |
| -88.88822        | -113.33350 | -77.77783  | -22.22241  | 13.33325   | -31.11133  | -55.55566  | 0.00000    | -103.75000 |  |  |
| -111.22200       | -115.00000 | -98.75000  | -72.50000  | -66.25000  | -50.00000  | -13.75000  | 2.50000    | 38.75000   |  |  |
| -151.25000       | 127.50000  | 83.75000   | 0.00000    | 47.33354   | 66.66675   | 30.00000   | 13.33350   | 4.66675    |  |  |
| -30.00000        | -60.00000  | -50.00000  | -21.00000  | 70.00000   | 100.00000  | 100.00000  | 203.00000  | 120.00000  |  |  |
| 0.00000          | -100.00000 | -150.00000 | -280.00000 | -410.00000 | -400.00000 | -100.00000 | -100.00000 | -70.00000  |  |  |
| 0.00000          | 111.05240  | 222.10522  | 44.15271   | -125.78955 | -54.78706  | -63.48433  | -72.43159  | -41.57710  |  |  |
| 180.52612        | 331.57884  | 602.63159  | 353.68408  | 304.73682  | 215.78931  | 186.84204  | 77.89453   | 88.94727   |  |  |

FIGURE 3-25

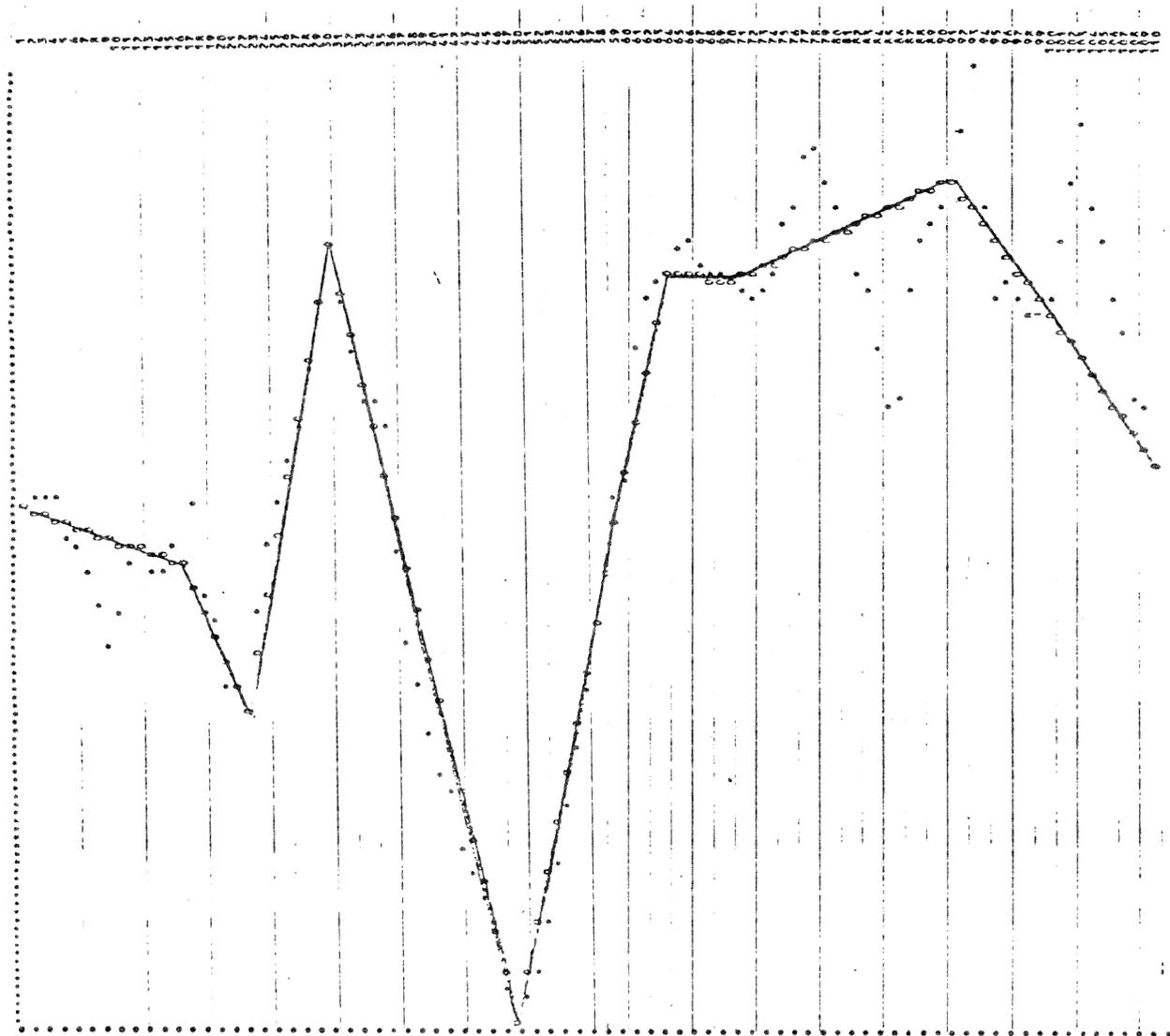


FIGURE 3-26

| DES VALEURS CALCULEES |            |            |            |            |            |            |            |            |            |
|-----------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 00000                 | 1461.00000 | 1642.00000 | 1623.00000 | 1604.00000 | 1585.00000 | 1566.00000 | 1547.00000 | 1528.00000 | 1509.00000 |
| 00000                 | 1471.00000 | 1452.00000 | 1433.00000 | 1414.00000 | 1395.00000 | 1376.00000 | 1357.00000 | 1338.00000 | 1319.00000 |
| 00000                 | 1477.22217 | 1514.44458 | 1476.66675 | 1428.88892 | 1381.11108 | 1333.33350 | 1285.55566 | 1237.77783 | 1190.00000 |
| 44458                 | 1023.33350 | 033.33350  | 183.77783  | 172.22241  | 164.66675  | 155.11133  | 145.55566  | 136.00000  | 126.44458  |
| 88922                 | 1173.33350 | 977.77783  | 863.77783  | 786.66675  | 691.11133  | 595.55566  | 500.00000  | 404.44458  | 308.88892  |
| 25000                 | 015.00000  | 1614.75000 | 1123.50000 | 1226.25000 | 1330.00000 | 1433.75000 | 1537.50000 | 1641.25000 | 1745.00000 |
| 75000                 | 1252.50000 | 2056.25000 | 2163.00000 | 2154.25000 | 2148.87500 | 2142.85714 | 2137.42857 | 2131.42857 | 2125.71429 |
| 00000                 | 2143.75000 | 2137.50000 | 2130.00000 | 2123.50000 | 2117.00000 | 2110.50000 | 2104.00000 | 2097.50000 | 2091.00000 |
| 50000                 | 2136.75000 | 2129.00000 | 2120.00000 | 2110.00000 | 2100.00000 | 2090.00000 | 2080.00000 | 2070.00000 | 2060.00000 |
| 44458                 | 2131.33325 | 2122.00000 | 2112.00000 | 2102.00000 | 2092.00000 | 2082.00000 | 2072.00000 | 2062.00000 | 2052.00000 |
| 33325                 | 2140.00000 | 2167.50000 | 2195.00000 | 2122.50000 | 2050.00000 | 1977.50000 | 1905.00000 | 1832.50000 | 1760.00000 |
| DES EGARTS            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |
| 00000                 | 39.00000   | 58.00000   | 77.00000   | 16.00000   | 15.00000   | -26.00000  | -67.00000  | -128.00000 | -49.00000  |
| 00000                 | 177.00000  | 28.00000   | 107.00000  | 186.00000  | 165.00000  | 304.00000  | 143.00000  | 102.00000  | -19.00000  |
| 00000                 | -152.22217 | -144.44458 | -4.66675   | -98.88892  | -31.11108  | -63.33350  | -55.55566  | -17.77783  | 0.00000    |
| 44458                 | -13.33350  | -33.33350  | 62.22217   | 97.77759   | 66.66675   | -151.11133 | -155.55566 | -160.00000 | -144.44458 |
| 88922                 | -113.33350 | -77.77783  | -22.22241  | 13.33325   | -31.11133  | -55.55566  | 0.00000    | -103.75000 | -67.50000  |
| 25000                 | -115.00000 | -98.75000  | -72.50000  | -66.25000  | -50.00000  | -33.75000  | 2.50000    | 38.75000   | -25.00000  |
| 75000                 | 147.50000  | 31.75000   | 0.00000    | 45.71411   | 71.42847   | 87.14282   | 2.85718    | 18.57129   | 14.28564   |
| 00000                 | -43.75000  | -57.50000  | -46.25000  | -25.00000  | -36.25000  | -107.50000 | 101.75000  | 0.00000    | -21.25000  |
| 50000                 | -163.75000 | -115.00000 | -266.25000 | -297.50000 | -248.75000 | -60.00000  | 85.33350   | 110.66675  | -136.00000 |
| 33350                 | 256.66674  | 372.00000  | 77.33350   | -137.33325 | -112.00000 | -166.66650 | -223.33325 | -236.00000 | -240.66650 |
| 33325                 | .00000     | 202.50000  | 105.00000  | 97.50000   | 50.00000   | 62.50000   | -5.00000   | 47.50000   | .00000     |

FIGURE 3-29

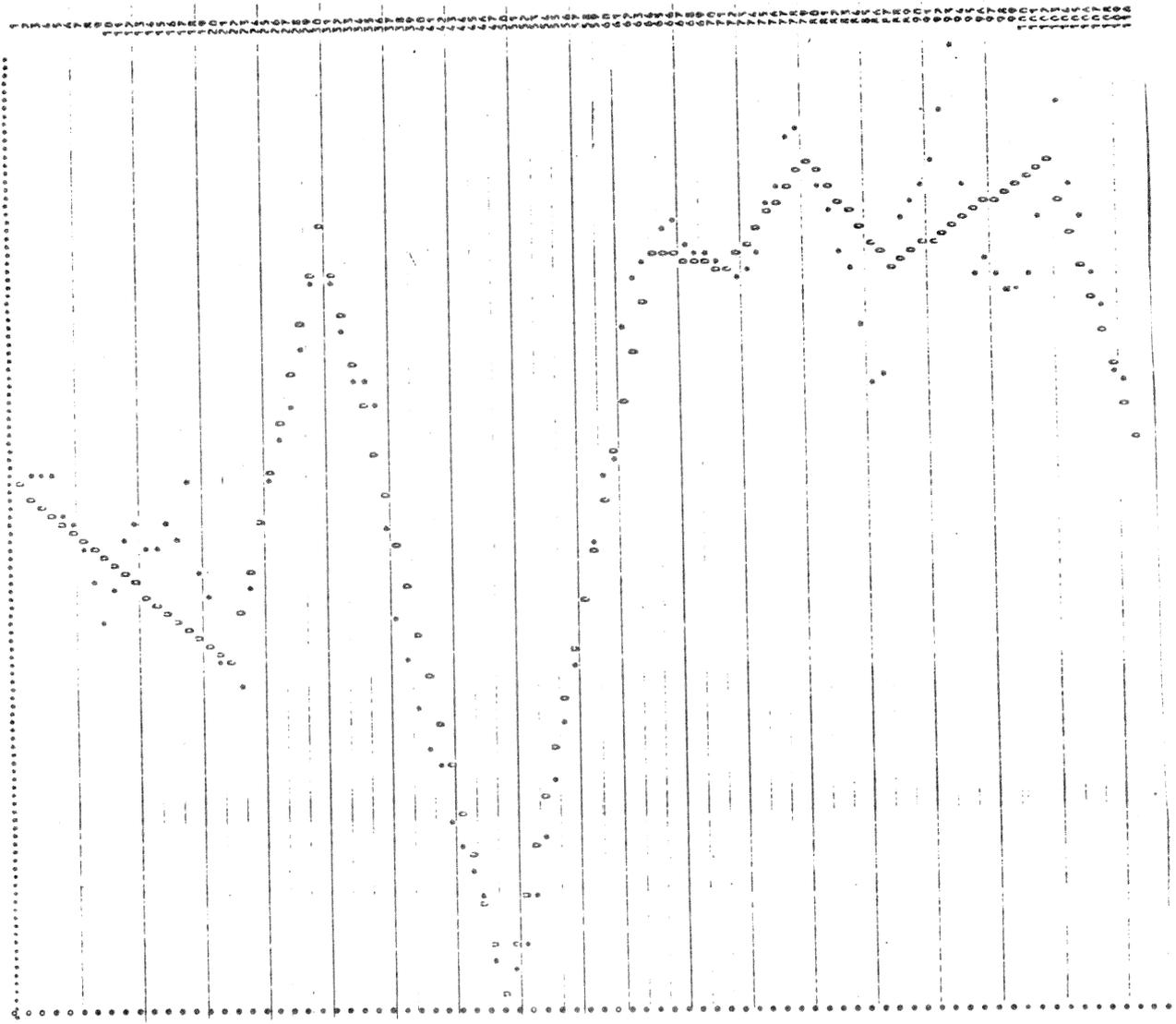


FIGURE 3-30

Cas n° 3

Après trois itérations nous avons  $W=I86I487$

$$\begin{array}{ll}
 P_1^* = (1, \dots, 19) & P_2^* = (20, \dots, 28) \\
 P_3^* = (29, \dots, 36) & P_4^* = (37, \dots, 59) \\
 P_5^* = (60, \dots, 67) & P_6^* = (68, \dots, 79) \\
 P_7^* = (80, \dots, 89) & P_8^* = (90, \dots, 101) \\
 P_9^* = (102, \dots, 110) & \\
 L_1^* = (1694, 5339/-14, 5971/0, 0632) & L_2^* = (1459, 97/-27, 74/7, 774) \\
 L_3^* = (1810, 34/171, 56/-21, 906) & L_4^* = (1736, 02/-162, 7/6, 683) \\
 L_5^* = (1510, 02/181, 918/-11, 941) & L_6^* = (2216, 96/-40, 90/3, 933) \\
 L_7^* = (2322, 97/30, 2984/-3, 2748) & L_8^* = (2304, 95/-48, 15/3, 201) \\
 L_9^* = (2175, 34/54, 23/-9, 577) & 
 \end{array}$$

Les résultats graphiques sont en Figures 3-31 et 3-32.

Cas n° 4

Après cinq itérations nous avons  $W=I249688$  et:

$$\begin{array}{ll}
 P_1^* = (1, \dots, 21) & P_2^* = (22, \dots, 30) \\
 P_3^* = (31, \dots, 40) & P_4^* = (41, \dots, 48) \\
 P_5^* = (49, \dots, 51) & P_6^* = (52, \dots, 63) \\
 P_7^* = (64, \dots, 80) & P_8^* = (81, \dots, 87) \\
 P_9^* = (88, \dots, 103) & P_{10}^* = (104, \dots, 110) \\
 L_1^* = (1699/-19) & L_2^* = (1197, 77/102, 22) \\
 L_3^* = (2330/-110) & L_4^* = (1197, 5/-77, 5) \\
 L_5^* = (433, 33/66, 67) & L_6^* = (580/120) \\
 L_7^* = (2130, 58/9, 41) & L_8^* = (2325, 71/-25, 71) \\
 L_9^* = (2105, 33/14, 67) & L_{10}^* = (2412, 5/-72, 5)
 \end{array}$$

Valeurs calculées et graphique sont en figures 3-33 et 3-34.



| ERIE DES VALEURS CALCULEES |            | 1642.00000 |            | 1623.00000 |            | 1604.00000 |            | 1585.00000 |            | 1566.00000 |            | 1547.00000 |            | 1528.00000 |            | 1509.00000 |            |
|----------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 622.00000                  | 1464.00000 | 1452.00000 | 1433.00000 | 1414.00000 | 1395.00000 | 1376.00000 | 1357.00000 | 1338.00000 | 1319.00000 | 1300.00000 | 1281.00000 | 1262.00000 | 1243.00000 | 1224.00000 | 1205.00000 | 1186.00000 | 1167.00000 |
| 322.00000                  | 1472.22217 | 1454.44458 | 1436.66675 | 1418.88892 | 1401.11108 | 1383.33350 | 1365.55566 | 1347.77783 | 1329.99999 | 1312.22217 | 1294.44458 | 1276.66675 | 1258.88892 | 1241.11108 | 1223.33350 | 1205.55566 | 1187.77783 |
| 112.00000                  | 2000.00000 | 1977.50000 | 1955.00000 | 1932.50000 | 1910.00000 | 1887.50000 | 1865.00000 | 1842.50000 | 1820.00000 | 1797.50000 | 1775.00000 | 1752.50000 | 1730.00000 | 1707.50000 | 1685.00000 | 1662.50000 | 1640.00000 |
| 042.50000                  | 2040.00000 | 2016.00000 | 1992.00000 | 1968.00000 | 1944.00000 | 1920.00000 | 1896.00000 | 1872.00000 | 1848.00000 | 1824.00000 | 1800.00000 | 1776.00000 | 1752.00000 | 1728.00000 | 1704.00000 | 1680.00000 | 1656.00000 |
| 200.00000                  | 2020.00000 | 2000.00000 | 1980.00000 | 1960.00000 | 1940.00000 | 1920.00000 | 1900.00000 | 1880.00000 | 1860.00000 | 1840.00000 | 1820.00000 | 1800.00000 | 1780.00000 | 1760.00000 | 1740.00000 | 1720.00000 | 1700.00000 |
| 245.00000                  | 2224.74584 | 2214.44743 | 2204.14902 | 2193.85061 | 2183.55220 | 2173.25379 | 2162.95538 | 2152.65697 | 2142.35856 | 2132.06015 | 2121.76174 | 2111.46333 | 2101.16492 | 2090.86651 | 2080.56810 | 2070.26969 | 2059.97128 |
| 272.00000                  | 2228.57153 | 2222.85718 | 2217.14283 | 2211.42848 | 2205.71413 | 2200.00000 | 2194.28587 | 2188.57174 | 2182.85761 | 2177.14348 | 2171.42935 | 2165.71522 | 2160.00109 | 2154.28696 | 2148.57283 | 2142.85870 | 2137.14457 |
| 178.00000                  | 2403.33325 | 2397.66675 | 2392.00000 | 2386.33350 | 2380.66675 | 2375.00000 | 2369.33350 | 2363.66675 | 2358.00000 | 2352.33350 | 2346.66675 | 2341.00000 | 2335.33350 | 2329.66675 | 2324.00000 | 2318.33350 | 2312.66675 |
| 325.33325                  | 2340.00000 | 2327.50000 | 2315.00000 | 2302.50000 | 2290.00000 | 2277.50000 | 2265.00000 | 2252.50000 | 2240.00000 | 2227.50000 | 2215.00000 | 2202.50000 | 2190.00000 | 2177.50000 | 2165.00000 | 2152.50000 | 2140.00000 |

| ERIE DES ECARTS |            | 58.00000  |           | 77.00000  |           | 16.00000  |           | 15.00000  |           | -26.00000 |           | -67.00000 |           | -128.00000 |           | -49.00000 |           |
|-----------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|
| 100.00000       | 39.00000   | 58.00000  | 77.00000  | 107.00000 | 184.00000 | 184.00000 | 165.00000 | 165.00000 | 164.00000 | 143.00000 | 143.00000 | 102.00000 | 102.00000 | 102.00000  | 102.00000 | 102.00000 | 102.00000 |
| 095.00000       | 120.00000  | 88.00000  | 107.00000 | 107.00000 | -4.66675  | -28.88892 | -31.11108 | -31.11108 | -43.33350 | -55.55566 | -55.55566 | -17.77783 | -17.77783 | -17.77783  | -17.77783 | -17.77783 | -17.77783 |
| 090.00000       | -152.22217 | -44.44458 | 120.00000 | 120.00000 | 120.00000 | 170.00000 | 70.00000  | 70.00000  | -50.00000 | -40.00000 | -40.00000 | -30.00000 | -30.00000 | -30.00000  | -30.00000 | -30.00000 | -30.00000 |
| 085.00000       | 37.50000   | -5.00000  | 12.50000  | 50.00000  | 67.50000  | 67.50000  | 5.00000   | 5.00000   | -37.50000 | -37.50000 | -37.50000 | -66.66650 | -66.66650 | -66.66650  | -66.66650 | -66.66650 | -66.66650 |

|           |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |
|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 100.00000 | -20.00000  | -20.00000  | -10.00000  | -20.00000  | -20.00000  | -20.00000  | -20.00000  | -20.00000  | -20.00000  | -20.00000  | -20.00000  | -20.00000  | -20.00000  | -20.00000  | -20.00000  | -20.00000  | -20.00000  |
| 095.00000 | 20.00000   | 20.00000   | 10.00000   | 20.00000   | 20.00000   | 20.00000   | 20.00000   | 20.00000   | 20.00000   | 20.00000   | 20.00000   | 20.00000   | 20.00000   | 20.00000   | 20.00000   | 20.00000   | 20.00000   |
| 090.00000 | -104.74584 | -114.44743 | -83.52930  | -107.52930 | -107.52930 | -7.05884   | 37.64772   | 37.64772   | 128.23535  | 141.82773  | 141.82773  | 50.41197   | 50.41197   | 50.41197   | 50.41197   | 50.41197   | 50.41197   |
| 085.00000 | 022.57153  | -102.85718 | -197.14282 | -291.42848 | -291.42848 | -291.42848 | -245.71436 | -245.71436 | -245.71436 | -245.71436 | -245.71436 | -245.71436 | -245.71436 | -245.71436 | -245.71436 | -245.71436 | -245.71436 |
| 080.00000 | 256.66675  | 372.00000  | 77.33350   | -137.33325 | -137.33325 | -137.33325 | -112.00000 | -112.00000 | -112.00000 | -112.00000 | -112.00000 | -112.00000 | -112.00000 | -112.00000 | -112.00000 | -112.00000 | -112.00000 |
| 075.00000 | 00000      | 202.50000  | 105.00000  | 97.50000   | 97.50000   | 97.50000   | 90.00000   | 90.00000   | 90.00000   | 90.00000   | 90.00000   | 90.00000   | 90.00000   | 90.00000   | 90.00000   | 90.00000   | 90.00000   |

FIGURE 3-33

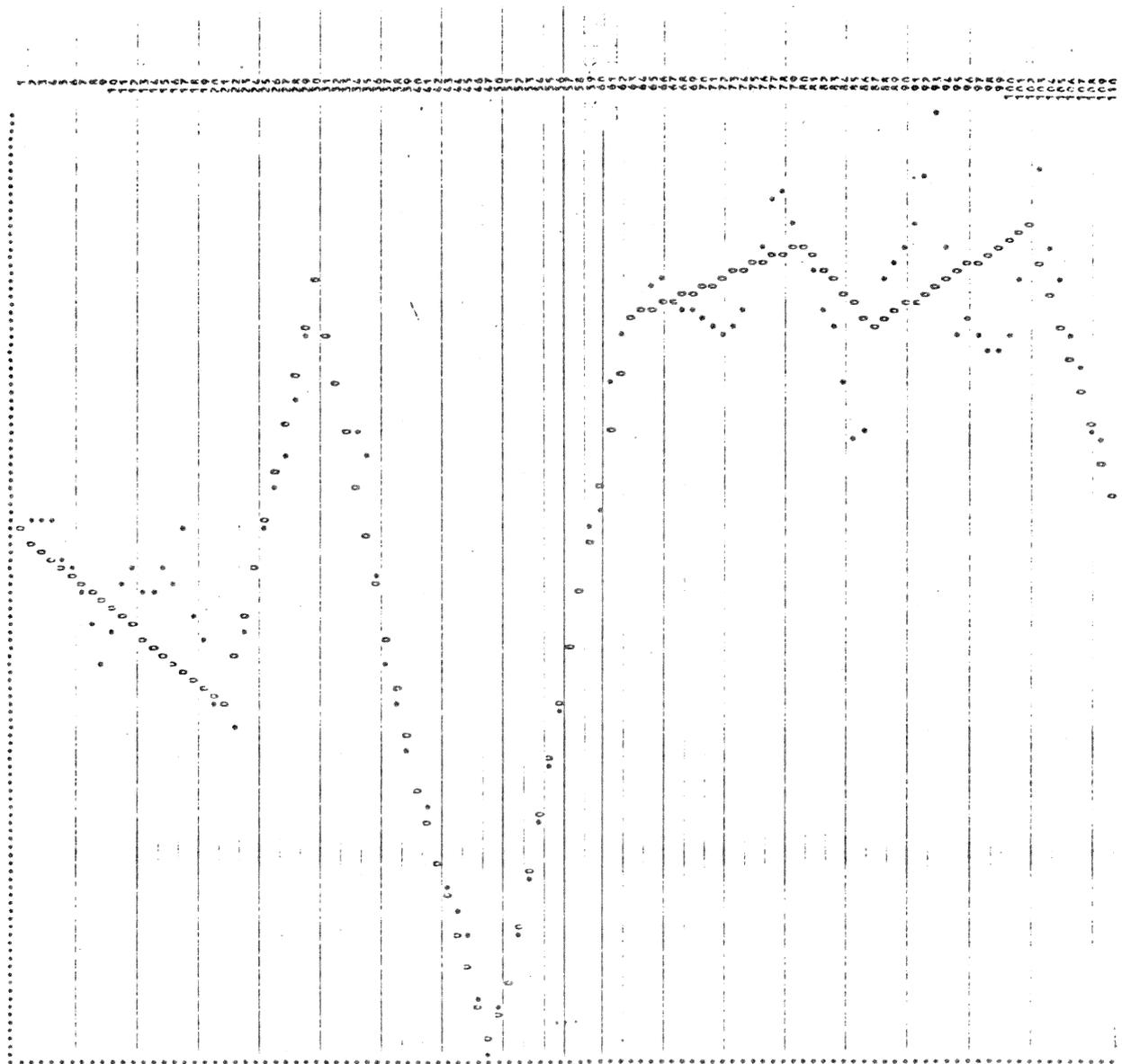


FIGURE 3-34

.Cas n° 5Après cinq itérations nous avons  $W=I369742$ 

$$P_1^* = (1, \dots, I9)$$

$$P_2^* = (20, \dots, 28)$$

$$P_3^* = (29, \dots, 36)$$

$$P_4^* = (37, \dots, 46)$$

$$P_5^* = (47, \dots, 57)$$

$$P_6^* = (58, \dots, 66)$$

$$P_7^* = (67, \dots, 83)$$

$$P_8^* = (84, \dots, 88)$$

$$P_9^* = (89, \dots, 99)$$

$$P_{10}^* = (100, \dots, 110)$$

$$L_1^* = (1694, 53/-14, 597/0, 0632)$$

$$L_2^* = (1459, 97/-27, 745/7, 77)$$

$$L_3^* = (1810, 34/171, 56/-21, 90)$$

$$L_4^* = (1735, 07/-160, 8/5, 733)$$

$$L_5^* = (704, 093/-53, 525/9, 43)$$

$$L_6^* = (1237, 82/191, 499/-9, 328)$$

$$L_7^* = (2214, 43/6, 207/-0, 6363)$$

$$L_8^* = (2144, 039/-31, 38/7, 339)$$

$$L_9^* = (2156, 82/69, 65/-6, 476)$$

$$L_{10}^* = (2048, 58/14, 64/-3, 224)$$

Nous donnons les graphiques en Figures 3-35 et 3-36.

.Cas n° 6Le critère vaut après cinq itérations  $W = 1125544$ 

Nous avons:

$$P_1^* = (1, \dots, 16)$$

$$P_2^* = (17, \dots, 22)$$

$$P_3^* = (23, \dots, 30)$$

$$P_4^* = (31, \dots, 40)$$

$$P_5^* = (41, \dots, 48)$$

$$P_6^* = (49, \dots, 51)$$

$$P_7^* = (52, \dots, 63)$$

$$P_8^* = (64, \dots, 80)$$

$$P_9^* = (81, \dots, 87)$$

$$P_{10}^* = (88, \dots, 102)$$

$$P_{11}^* = (103, \dots, 110)$$

$$L_1^* = (1688/-8)$$

$$L_2^* = (1611, 7/-51, 67)$$

$$L_3^* = (1128, 75/121, 25)$$

$$L_4^* = (2330/-110)$$

$$L_5^* = (1197, 5/-77, 5)$$

$$L_6^* = (433, 33/66, 67)$$

$$L_7^* = (580/120)$$

$$L_8^* = (2130, 59/9, 41)$$

$$L_9^* = (2325, 71/-25, 71)$$

$$L_{10}^* = (2105, 33/14, 67)$$

$$L_{11}^* = (2412, 5/-72, 5)$$

Les graphiques constituent les figures 3-37 et 3-38.

|            |             |             |             |            |            |            |             |            |              |
|------------|-------------|-------------|-------------|------------|------------|------------|-------------|------------|--------------|
| 101.00000  | 4645.50120  | 4451.74104  | 1637.13069  | 1023.12217 | 1002.22607 | 1595.45720 | 1581.84103  | 1568.27808 | 4584.88435   |
| 124.00000  | 4559.44777  | 4415.65020  | 1500.55000  | 1480.70222 | 1477.16425 | 1444.64453 | 1452.75000  | 1470.60071 | 4271.57024   |
| 144.00000  | 4473.39574  | 4315.74377  | 1378.87733  | 1464.74400 | 1475.50410 | 1424.12319 | 1420.70000  | 1465.84407 | 3957.80070   |
| 174.00000  | 4387.34398  | 4251.27444  | 1263.87733  | 1478.14400 | 1580.00000 | 1434.70526 | 1374.70000  | 1483.86662 | 3674.35070   |
| 204.00000  | 4301.29222  | 4151.20511  | 1158.87733  | 1492.14400 | 1690.00000 | 1444.70526 | 1324.70000  | 1501.88927 | 3421.80070   |
| 234.00000  | 4215.24046  | 4051.13578  | 1064.15733  | 1506.14400 | 1796.00000 | 1454.70526 | 1274.70000  | 1519.91192 | 3189.25070   |
| 264.00000  | 4129.18870  | 3951.06645  | 979.44233   | 1520.14400 | 1896.00000 | 1464.70526 | 1224.70000  | 1537.93457 | 2976.70070   |
| 294.00000  | 4043.13694  | 3851.00000  | 894.72733   | 1534.14400 | 1996.00000 | 1474.70526 | 1174.70000  | 1555.95722 | 2784.15070   |
| 324.00000  | 3957.08518  | 3751.00000  | 810.01233   | 1548.14400 | 2096.00000 | 1484.70526 | 1124.70000  | 1573.97987 | 2611.60070   |
| 354.00000  | 3871.03342  | 3651.00000  | 725.30000   | 1562.14400 | 2196.00000 | 1494.70526 | 1074.70000  | 1591.00252 | 2459.05070   |
| 384.00000  | 3785.00000  | 3551.00000  | 640.58733   | 1576.14400 | 2296.00000 | 1504.70526 | 1024.70000  | 1608.02517 | 2316.50070   |
| 414.00000  | 3699.00000  | 3451.00000  | 555.87733   | 1590.14400 | 2396.00000 | 1514.70526 | 974.70000   | 1625.04782 | 2184.00070   |
| 444.00000  | 3613.00000  | 3351.00000  | 471.16733   | 1604.14400 | 2496.00000 | 1524.70526 | 924.70000   | 1642.07047 | 2061.50070   |
| 474.00000  | 3527.00000  | 3251.00000  | 386.45733   | 1618.14400 | 2596.00000 | 1534.70526 | 874.70000   | 1659.09312 | 1949.00070   |
| 504.00000  | 3441.00000  | 3151.00000  | 301.74733   | 1632.14400 | 2696.00000 | 1544.70526 | 824.70000   | 1676.11577 | 1846.50070   |
| 534.00000  | 3355.00000  | 3051.00000  | 217.03733   | 1646.14400 | 2796.00000 | 1554.70526 | 774.70000   | 1693.13842 | 1754.00070   |
| 564.00000  | 3269.00000  | 2951.00000  | 132.32733   | 1660.14400 | 2896.00000 | 1564.70526 | 724.70000   | 1710.16107 | 1671.50070   |
| 594.00000  | 3183.00000  | 2851.00000  | 47.61733    | 1674.14400 | 2996.00000 | 1574.70526 | 674.70000   | 1727.18372 | 1599.00070   |
| 624.00000  | 3097.00000  | 2751.00000  | -38.09233   | 1688.14400 | 3096.00000 | 1584.70526 | 624.70000   | 1744.20637 | 1536.50070   |
| 654.00000  | 3011.00000  | 2651.00000  | -123.58233  | 1702.14400 | 3196.00000 | 1594.70526 | 574.70000   | 1761.22902 | 1484.00070   |
| 684.00000  | 2925.00000  | 2551.00000  | -189.07233  | 1716.14400 | 3296.00000 | 1604.70526 | 524.70000   | 1778.25167 | 1441.50070   |
| 714.00000  | 2839.00000  | 2451.00000  | -254.56233  | 1730.14400 | 3396.00000 | 1614.70526 | 474.70000   | 1795.27432 | 1409.00070   |
| 744.00000  | 2753.00000  | 2351.00000  | -320.05233  | 1744.14400 | 3496.00000 | 1624.70526 | 424.70000   | 1812.29697 | 1386.50070   |
| 774.00000  | 2667.00000  | 2251.00000  | -385.54233  | 1758.14400 | 3596.00000 | 1634.70526 | 374.70000   | 1829.31962 | 1374.00070   |
| 804.00000  | 2581.00000  | 2151.00000  | -451.03233  | 1772.14400 | 3696.00000 | 1644.70526 | 324.70000   | 1846.34227 | 1371.50070   |
| 834.00000  | 2495.00000  | 2051.00000  | -516.52233  | 1786.14400 | 3796.00000 | 1654.70526 | 274.70000   | 1863.36492 | 1379.00070   |
| 864.00000  | 2409.00000  | 1951.00000  | -582.01233  | 1800.14400 | 3896.00000 | 1664.70526 | 224.70000   | 1880.38757 | 1396.50070   |
| 894.00000  | 2323.00000  | 1851.00000  | -647.50233  | 1814.14400 | 3996.00000 | 1674.70526 | 174.70000   | 1897.41022 | 1424.00070   |
| 924.00000  | 2237.00000  | 1751.00000  | -713.00000  | 1828.14400 | 4096.00000 | 1684.70526 | 124.70000   | 1914.43287 | 1461.50070   |
| 954.00000  | 2151.00000  | 1651.00000  | -778.49233  | 1842.14400 | 4196.00000 | 1694.70526 | 74.70000    | 1931.45552 | 1509.00070   |
| 984.00000  | 2065.00000  | 1551.00000  | -843.98233  | 1856.14400 | 4296.00000 | 1704.70526 | 24.70000    | 1948.47817 | 1566.50070   |
| 1014.00000 | 1979.00000  | 1451.00000  | -909.47233  | 1870.14400 | 4396.00000 | 1714.70526 | -25.70000   | 1965.50082 | 1634.00070   |
| 1044.00000 | 1893.00000  | 1351.00000  | -974.96233  | 1884.14400 | 4496.00000 | 1724.70526 | -75.70000   | 1982.52347 | 1711.50070   |
| 1074.00000 | 1807.00000  | 1251.00000  | -1040.45233 | 1898.14400 | 4596.00000 | 1734.70526 | -125.70000  | 1999.54612 | 1809.00070   |
| 1104.00000 | 1721.00000  | 1151.00000  | -1105.94233 | 1912.14400 | 4696.00000 | 1744.70526 | -175.70000  | 2016.56877 | 1926.50070   |
| 1134.00000 | 1635.00000  | 1051.00000  | -1171.43233 | 1926.14400 | 4796.00000 | 1754.70526 | -225.70000  | 2033.59142 | 2064.00070   |
| 1164.00000 | 1549.00000  | 951.00000   | -1236.92233 | 1940.14400 | 4896.00000 | 1764.70526 | -275.70000  | 2050.61407 | 2231.50070   |
| 1194.00000 | 1463.00000  | 851.00000   | -1302.41233 | 1954.14400 | 4996.00000 | 1774.70526 | -325.70000  | 2067.63672 | 2439.00070   |
| 1224.00000 | 1377.00000  | 751.00000   | -1367.90233 | 1968.14400 | 5096.00000 | 1784.70526 | -375.70000  | 2084.65937 | 2686.50070   |
| 1254.00000 | 1291.00000  | 651.00000   | -1433.39233 | 1982.14400 | 5196.00000 | 1794.70526 | -425.70000  | 2101.68202 | 3074.00070   |
| 1284.00000 | 1205.00000  | 551.00000   | -1500.00000 | 1996.14400 | 5296.00000 | 1804.70526 | -475.70000  | 2118.70467 | 3601.50070   |
| 1314.00000 | 1119.00000  | 451.00000   | -1566.60733 | 2010.14400 | 5396.00000 | 1814.70526 | -525.70000  | 2135.72732 | 4279.00070   |
| 1344.00000 | 1033.00000  | 351.00000   | -1633.21467 | 2024.14400 | 5496.00000 | 1824.70526 | -575.70000  | 2152.75000 | 5116.50070   |
| 1374.00000 | 947.00000   | 251.00000   | -1700.00000 | 2038.14400 | 5596.00000 | 1834.70526 | -625.70000  | 2169.77265 | 6124.00070   |
| 1404.00000 | 861.00000   | 151.00000   | -1766.78733 | 2052.14400 | 5696.00000 | 1844.70526 | -675.70000  | 2186.79530 | 7311.50070   |
| 1434.00000 | 775.00000   | 51.00000    | -1833.57467 | 2066.14400 | 5796.00000 | 1854.70526 | -725.70000  | 2203.81795 | 8689.00070   |
| 1464.00000 | 689.00000   | -49.00000   | -1900.36200 | 2080.14400 | 5896.00000 | 1864.70526 | -775.70000  | 2220.84060 | 10266.50070  |
| 1494.00000 | 603.00000   | -149.00000  | -1967.14933 | 2094.14400 | 5996.00000 | 1874.70526 | -825.70000  | 2237.86325 | 12054.00070  |
| 1524.00000 | 517.00000   | -249.00000  | -2033.93667 | 2108.14400 | 6096.00000 | 1884.70526 | -875.70000  | 2254.88590 | 14051.50070  |
| 1554.00000 | 431.00000   | -349.00000  | -2100.72400 | 2122.14400 | 6196.00000 | 1894.70526 | -925.70000  | 2271.90855 | 16259.00070  |
| 1584.00000 | 345.00000   | -449.00000  | -2167.51133 | 2136.14400 | 6296.00000 | 1904.70526 | -975.70000  | 2288.93120 | 18686.50070  |
| 1614.00000 | 259.00000   | -549.00000  | -2234.29867 | 2150.14400 | 6396.00000 | 1914.70526 | -1025.70000 | 2305.95385 | 21344.00070  |
| 1644.00000 | 173.00000   | -649.00000  | -2301.08600 | 2164.14400 | 6496.00000 | 1924.70526 | -1075.70000 | 2322.97650 | 24231.50070  |
| 1674.00000 | 87.00000    | -749.00000  | -2367.87333 | 2178.14400 | 6596.00000 | 1934.70526 | -1125.70000 | 2339.99915 | 27359.00070  |
| 1704.00000 | 1.00000     | -849.00000  | -2434.66067 | 2192.14400 | 6696.00000 | 1944.70526 | -1175.70000 | 2357.02180 | 30746.50070  |
| 1734.00000 | -85.00000   | -949.00000  | -2501.44800 | 2206.14400 | 6796.00000 | 1954.70526 | -1225.70000 | 2374.04445 | 35494.00070  |
| 1764.00000 | -171.00000  | -1049.00000 | -2568.23533 | 2220.14400 | 6896.00000 | 1964.70526 | -1275.70000 | 2391.06710 | 41601.50070  |
| 1794.00000 | -257.00000  | -1149.00000 | -2635.02267 | 2234.14400 | 6996.00000 | 1974.70526 | -1325.70000 | 2408.08975 | 49069.00070  |
| 1824.00000 | -343.00000  | -1249.00000 | -2701.81000 | 2248.14400 | 7096.00000 | 1984.70526 | -1375.70000 | 2425.11240 | 57906.50070  |
| 1854.00000 | -429.00000  | -1349.00000 | -2768.59733 | 2262.14400 | 7196.00000 | 1994.70526 | -1425.70000 | 2442.13505 | 68124.00070  |
| 1884.00000 | -515.00000  | -1449.00000 | -2835.38467 | 2276.14400 | 7296.00000 | 2004.70526 | -1475.70000 | 2459.15770 | 79741.50070  |
| 1914.00000 | -601.00000  | -1549.00000 | -2902.17200 | 2290.14400 | 7396.00000 | 2014.70526 | -1525.70000 | 2476.18035 | 92759.00070  |
| 1944.00000 | -687.00000  | -1649.00000 | -2968.95933 | 2304.14400 | 7496.00000 | 2024.70526 | -1575.70000 | 2493.20300 | 107186.50070 |
| 1974.00000 | -773.00000  | -1749.00000 | -3035.74667 | 2318.14400 | 7596.00000 | 2034.70526 | -1625.70000 | 2510.22565 | 133024.00070 |
| 2004.00000 | -859.00000  | -1849.00000 | -3102.53400 | 2332.14400 | 7696.00000 | 2044.70526 | -1675.70000 | 2527.24830 | 160271.50070 |
| 2034.00000 | -945.00000  | -1949.00000 | -3169.32133 | 2346.14400 | 7796.00000 | 2054.70526 | -1725.70000 | 2544.27095 | 198929.00070 |
| 2064.00000 | -1031.00000 | -2049.00000 | -3236.10867 | 2360.14400 | 7896.00000 | 2064.70526 | -1775.70000 | 2561.29360 | 249096.50070 |
| 2094.00000 | -1117.00000 | -2149.00000 | -3302.89600 | 2374.14400 | 7996.00000 | 2074.70526 | -1825.70000 | 2578.31625 | 310774.00070 |
| 2124.00000 | -1203.00000 | -2249.00000 | -3369.68333 | 2388.14400 | 8096.00000 | 2084.70526 | -1875.70000 | 2595.33890 | 374061.50070 |
| 2154.00000 | -1289.00000 | -2349.00000 | -3436.47067 | 2402.14400 | 8196.00000 | 2094.70526 | -1925.70000 | 2612.36155 | 438959.00070 |
| 2184.00000 | -1375.00000 | -2449.00000 | -3503.25800 | 2416.14400 | 8296.00000 | 2104.70526 | -1975.70000 | 2629.38420 | 505466.50070 |
| 2214.00000 | -1461.00000 | -2549.00000 | -3570.04533 | 2430.14400 | 8396.00000 | 2114.70526 | -2025.70000 | 2646.40685 | 573584.00070 |
| 2244.00000 | -1547.00000 | -2649.00000 | -3636.83267 | 2444.14400 | 8496.00000 | 2124.70526 | -2075.70000 | 2663.42950 | 643311.50070 |
| 2274.00000 | -1633.00000 | -2749.00000 | -3703.62000 | 2458.14400 | 8596.00000 | 2134.70526 | -2125.70000 | 2680.45215 | 714649.00070 |
| 2304.00000 | -1719.00000 | -2849.00000 | -3770.40733 |            |            |            |             |            |              |



### 2.3 Application du programme REGP 2 B

Comme précédemment nous désirons reconnaître et mémoriser sous forme condensée un contour. Ce contour sera pour notre exemple celui des frontières définissant la France.

Nous avons pour cela inscrit la carte de la France dans un carré défini par l'ensemble des indices  $i$  et  $j$  variant de 0 à 57. Nous avons relevé ainsi 185 observations correspondant aux couples  $(i, j)$  indiqués par une étoile sur la Figure 3-4I.

Voici les différents essais effectués:

| n° | K  | QM | QN | P <sub>1</sub> | P <sub>2</sub> | P <sub>3</sub> | P <sub>4</sub> | P <sub>5</sub> | P <sub>6</sub> | P <sub>7</sub> | P <sub>8</sub> | P <sub>9</sub> | P <sub>10</sub> |
|----|----|----|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| 1  | 5  | 3  | 3  | 30             | 40             | 30             | 40             | 45             | 00             | 00             | 00             | 00             | 00              |
| 2  | 8  | 3  | 3  | 30             | 20             | 15             | 20             | 10             | 20             | 20             | 50             | 00             | 00              |
| 3  | 9  | 3  | 3  | 30             | 20             | 15             | 20             | 10             | 20             | 20             | 20             | 30             | 00              |
| 4  | 10 | 3  | 3  | 30             | 20             | 15             | 20             | 10             | 20             | 20             | 15             | 10             | 25              |

d'où:

| n° | Nombre de termes<br>à mémoriser | % de l'information<br>initiale |
|----|---------------------------------|--------------------------------|
| 1  | 34                              | 9                              |
| 2  | 55                              | 15                             |
| 3  | 62                              | 17                             |
| 4  | 69                              | 18                             |

Nous allons examiner les résultats obtenus:

| SERIE DES OBSERVATIONS EN Y |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |
|-----------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|--|--|--|
| 54                          | 54 | 56 | 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 51 |  |  |  |
| 49                          | 48 | 49 | 50 | 49 | 48 | 47 | 46 | 45 |  |  |  |
| 44                          | 44 | 43 | 42 | 42 | 42 | 42 | 41 | 40 |  |  |  |
| 37                          | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 31 |  |  |  |
| 20                          | 20 | 20 | 27 | 26 | 25 | 24 | 24 | 23 |  |  |  |
| 10                          | 10 | 9  | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 |  |  |  |
| 6                           | 6  | 7  | 8  | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  |  |  |  |
| 4                           | 4  | 0  | 10 | 11 | 10 | 9  | 8  | 7  |  |  |  |
| 17                          | 19 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |  |  |  |
| 21                          | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |  |  |  |
| 31                          | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |  |  |  |
| 37                          | 40 | 41 | 41 | 41 | 42 | 43 | 43 | 43 |  |  |  |
| 44                          | 45 | 45 | 46 | 46 | 46 | 46 | 46 | 46 |  |  |  |
| 47                          | 45 | 44 | 44 | 45 | 44 | 44 | 44 | 44 |  |  |  |
| 48                          | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 50 | 50 |  |  |  |
| 52                          | 47 | 47 | 47 | 48 | 49 | 50 | 50 | 50 |  |  |  |
| 53                          | 53 | 54 | 55 |    |    |    |    |    |  |  |  |
| SERIE DES OBSERVATIONS EN X |    |    |    |    |    |    |    |    |  |  |  |
| 31                          | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 36 | 37 | 39 |  |  |  |
| 40                          | 40 | 41 | 42 | 42 | 42 | 43 | 44 | 45 |  |  |  |
| 47                          | 49 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 |  |  |  |
| 54                          | 53 | 53 | 53 | 53 | 53 | 52 | 52 | 51 |  |  |  |
| 40                          | 48 | 47 | 46 | 45 | 44 | 43 | 42 | 41 |  |  |  |
| 48                          | 48 | 48 | 49 | 48 | 47 | 46 | 45 | 44 |  |  |  |
| 47                          | 48 | 50 | 50 | 49 | 47 | 45 | 43 | 41 |  |  |  |
| 37                          | 37 | 35 | 34 | 32 | 30 | 29 | 29 | 29 |  |  |  |
| 26                          | 23 | 21 | 21 | 19 | 17 | 16 | 15 | 14 |  |  |  |
| 11                          | 9  | 8  | 8  | 7  | 9  | 9  | 9  | 9  |  |  |  |
| 11                          | 11 | 12 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 |  |  |  |
| 14                          | 14 | 14 | 13 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 |  |  |  |
| 11                          | 11 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 9  | 9  |  |  |  |
| 6                           | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  | 0  | 1  | 2  |  |  |  |
| 2                           | 9  | 9  | 2  | 11 | 3  | 4  | 5  | 6  |  |  |  |
| 14                          | 15 | 15 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 14 |  |  |  |
| 14                          | 20 | 22 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 16 |  |  |  |
| 29                          | 29 | 29 | 29 | 24 | 23 | 24 | 25 | 26 |  |  |  |

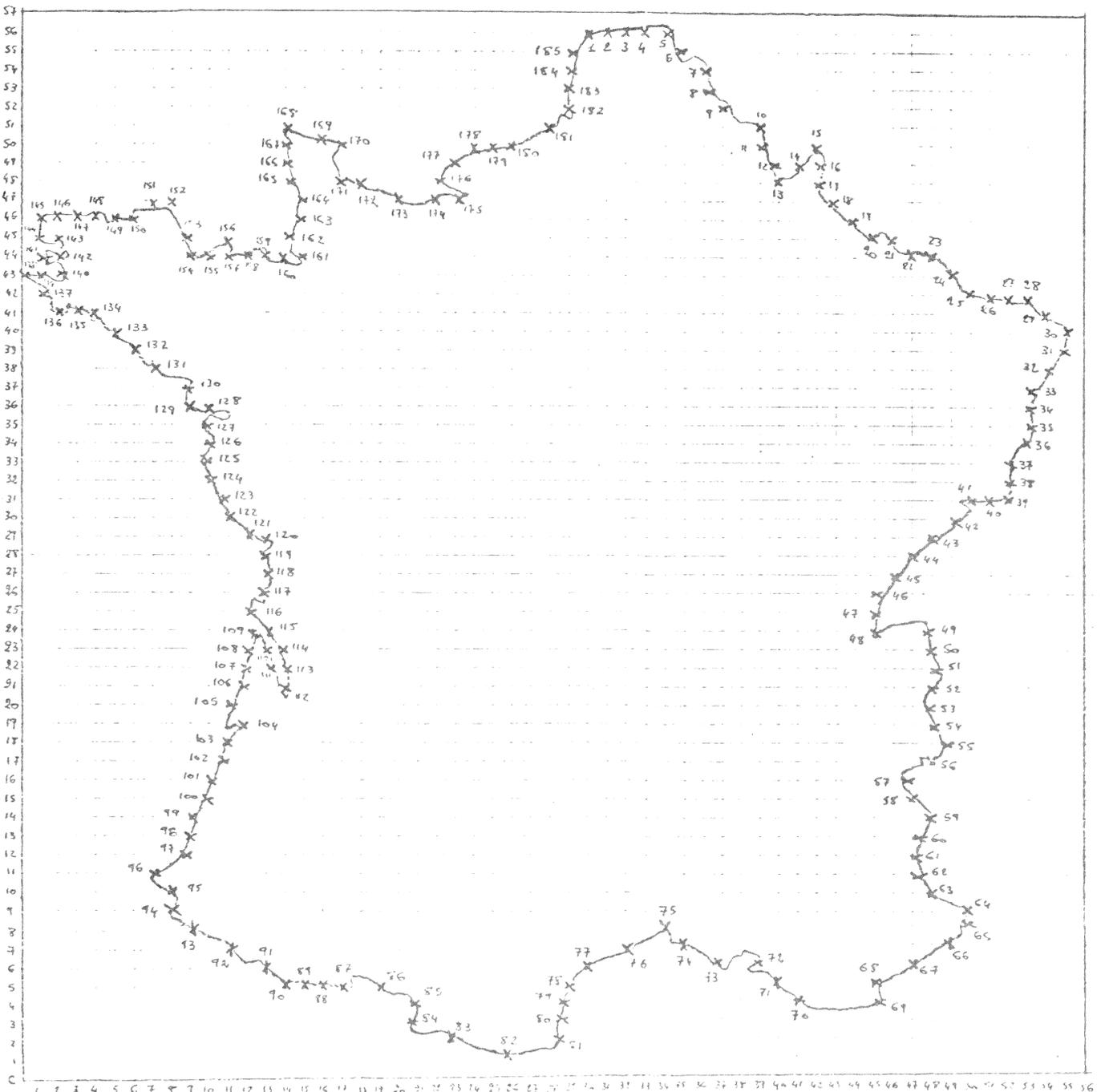


FIGURE 3-21

CAS N° I

## RESULTATS ITERATION: 2

## PARTITION N° 1

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |

## COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE N° 1

7355390+02    -.25641000+00    •19275470-02  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE N° 1

1189320+02    .70307790+00    •34950450-02  
 NOMBRE D'ELEMENTS DE LA PARTITION N° 1  
 31

## PARTITION N° 2

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 |
| 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 |
| 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 |
| 63 | 64 | 65 | 66 |    |    |    |    |    |

## COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE N° 2

3054890+02    -.72192990+00    -.48107690-02  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE N° 2

0405500+02    -.77332730+00    •17505280-01  
 NOMBRE D'ELEMENTS DE LA PARTITION N° 2  
 35

## PARTITION N° 3

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 |
| 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 |
| 86 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 |    |

## COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE N° 3

73475640+01    -.51448050+00    •19036460-01  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE N° 3

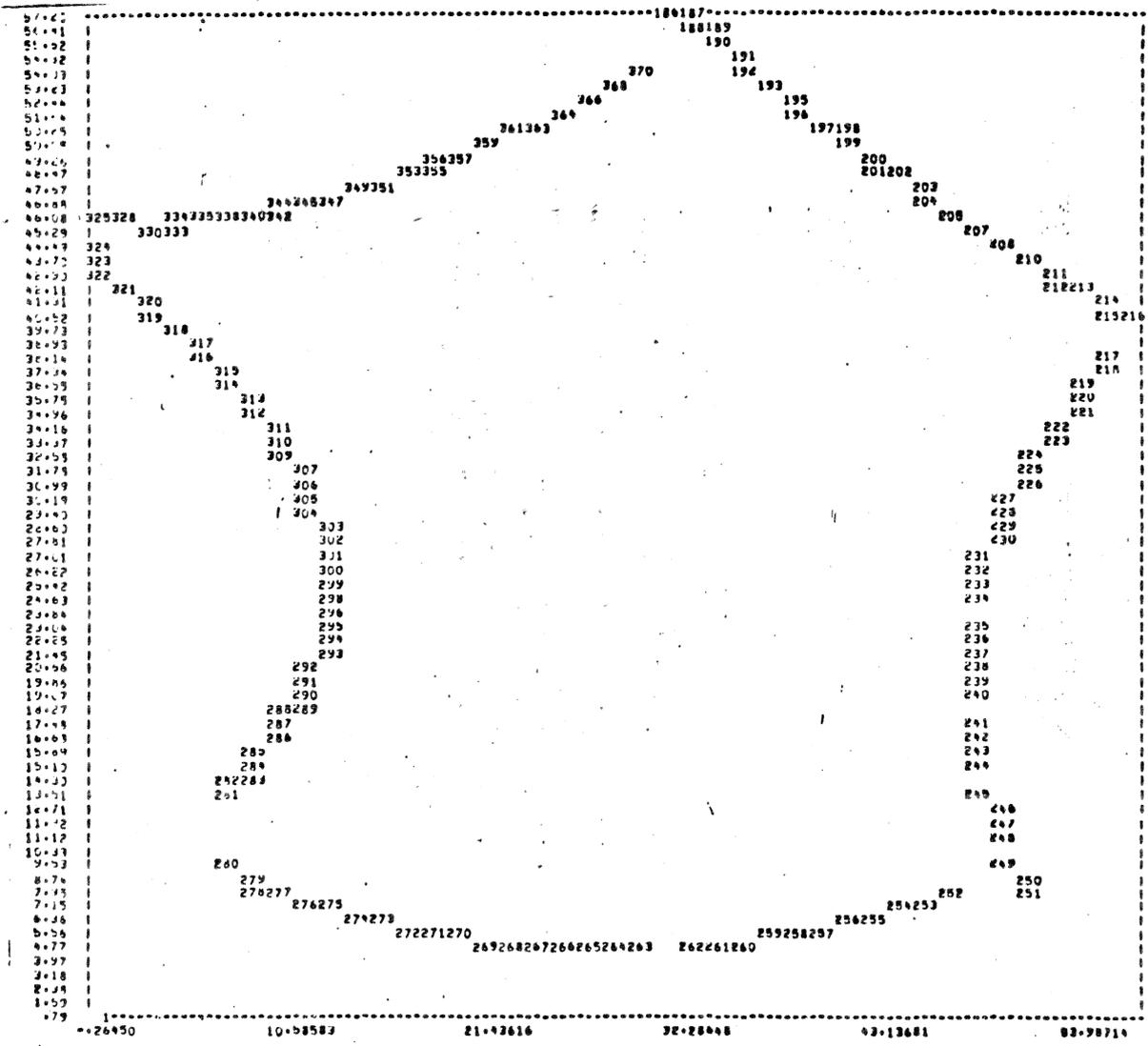
17942510+02    -.15555950+01    •46347790-02  
 NOMBRE D'ELEMENTS DE LA PARTITION N° 3  
 29

## PARTITION N° 4

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 96  | 97  | 98  | 99  | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 |
| 106 | 107 | 108 | 109 | 110 | 111 | 112 | 113 | 114 | 115 |
| 116 | 117 | 118 | 119 | 120 | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 |
| 126 | 127 | 128 | 129 | 130 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 |
| 136 | 137 | 138 | 139 |     |     |     |     |     |     |

| SERIE | DES   | VALEURS | ESTIMES | EN    | X     | SERIE | DES   | VALEURS | ESTIMES | EN    | X     | SERIE | DES   | VALEURS | ESTIMES | EN    | X     | SERIE | DES   | VALEURS | ESTIMES | EN    | X     |       |
|-------|-------|---------|---------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|-------|-------|-------|
| 37.22 | 37.22 | 37.22   | 37.22   | 37.22 | 37.22 | 37.22 | 37.22 | 37.22   | 37.22   | 37.22 | 37.22 | 37.22 | 37.22 | 37.22   | 37.22   | 37.22 | 37.22 | 37.22 | 37.22 | 37.22   | 37.22   | 37.22 | 37.22 | 37.22 |

FIGURE 3-42



COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 4

•1194125D+02    •6361767D+00    •2068205D-02

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 4

•6530565D+01    •7358070D+00    •2025856D-01  
 NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 4

44

PARTITION NO 5

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 140 | 141 | 142 | 143 | 144 | 145 | 146 | 147 | 148 | 149 |
| 150 | 151 | 152 | 153 | 154 | 155 | 156 | 157 | 158 | 159 |
| 160 | 161 | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 |
| 170 | 171 | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 |
| 180 | 181 | 182 | 183 | 184 | 185 |     |     |     |     |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 5

•4518748D+02    •2399661D-01    •5555671D-02

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 5

•2006589D+00    •4772226D+00    •3547851D-02  
 NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 5

46

VALEUR DU CRITERE A L ITERATION NO 2

•46376489E+03

Les résultats graphiques, valeurs estimées et écarts sont en Figure 3-42

CAS N° 2

RESULTATS ITERATION: 3

PARTITION NO 1

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |    |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 1

•3794033D+02    •6730070D+00    •2745955D-02  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 1

•3017021D+02    •7081466D+00    •3275244D-02  
 NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 1

29

PARTITION NO 2

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |    |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 2

•4065776D+02    •9308417D+00    •4349105D-02  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 2

•3497626D+02    •1872033D+00    •2063983D-01  
 NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 2

19

PARTITION NO 3  
 50 51 52 53 54 55 56 57 58  
 60 61 62 63 64 65 66 67  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 3

.2500000D+02 -.1000000D+01 .0000000D+00  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 3

.4845550D+02 -.1700427D+00 .9750205D-02  
 NOMBRE D'ÉLEMENTS DE LA PARTITION NO 3  
 19

PARTITION NO 4  
 69 70 71 72 73 74 75 76 77  
 79 80 81 82  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 4

.2257154D+01 .1259659D+01 -.9053585D-01  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 4

.4815191D+02 -.2277654D+01 .5753200D-01  
 NOMBRE D'ÉLEMENTS DE LA PARTITION NO 4  
 15

PARTITION NO 5  
 84 85 86 87 88 89 90 91 92  
 94 95 96  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 5

.2752747D+01 .1570055D+00 .2953297D-01  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 5

.2450549D+02 -.1476373D+01 .1373026D-01  
 NOMBRE D'ÉLEMENTS DE LA PARTITION NO 5  
 14

PARTITION NO 6  
 98 99 100 101 102 103 104 105 106  
 108 109 110 111 112 113 114  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 6

.4612748D+01 .1650022D+01 -.5224437D-01  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 6

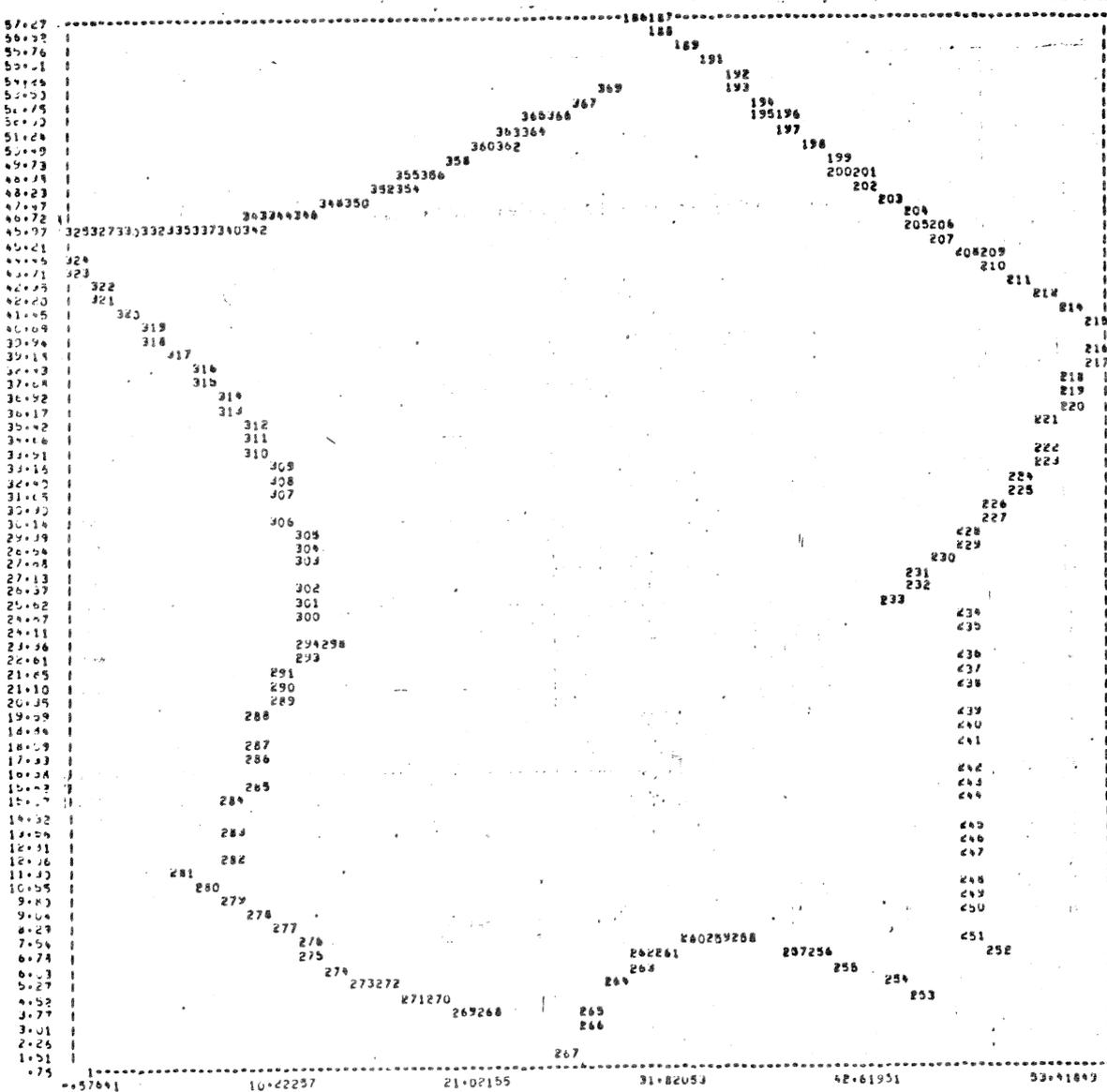
.8482857D+01 .3528724D+00 -.2386258D-02  
 NOMBRE D'ÉLEMENTS DE LA PARTITION NO 6  
 18

PARTITION NO 7  
 116 117 118 119 120 121 122 123 124  
 126 127 128 129 130 131 132 133 134  
 136 137 138 139  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 7

.2288869D+02 .1014991D+01 -.7617984D-02  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 7

.1278870D+02 .6182829D-01 -.2385730D-01  
 NOMBRE D'ÉLEMENTS DE LA PARTITION NO 7  
 25

| SERIE | DES | VALEURS | ESTI- | MEES | EN | Y |
|-------|-----|---------|-------|------|----|---|
| 57    |     |         |       |      |    |   |
| 56    |     |         |       |      |    |   |
| 55    |     |         |       |      |    |   |
| 54    |     |         |       |      |    |   |
| 53    |     |         |       |      |    |   |
| 52    |     |         |       |      |    |   |
| 51    |     |         |       |      |    |   |
| 50    |     |         |       |      |    |   |
| 49    |     |         |       |      |    |   |
| 48    |     |         |       |      |    |   |
| 47    |     |         |       |      |    |   |
| 46    |     |         |       |      |    |   |
| 45    |     |         |       |      |    |   |
| 44    |     |         |       |      |    |   |
| 43    |     |         |       |      |    |   |
| 42    |     |         |       |      |    |   |
| 41    |     |         |       |      |    |   |
| 40    |     |         |       |      |    |   |
| 39    |     |         |       |      |    |   |
| 38    |     |         |       |      |    |   |
| 37    |     |         |       |      |    |   |
| 36    |     |         |       |      |    |   |
| 35    |     |         |       |      |    |   |
| 34    |     |         |       |      |    |   |
| 33    |     |         |       |      |    |   |
| 32    |     |         |       |      |    |   |
| 31    |     |         |       |      |    |   |
| 30    |     |         |       |      |    |   |
| 29    |     |         |       |      |    |   |
| 28    |     |         |       |      |    |   |
| 27    |     |         |       |      |    |   |
| 26    |     |         |       |      |    |   |
| 25    |     |         |       |      |    |   |
| 24    |     |         |       |      |    |   |
| 23    |     |         |       |      |    |   |
| 22    |     |         |       |      |    |   |
| 21    |     |         |       |      |    |   |
| 20    |     |         |       |      |    |   |
| 19    |     |         |       |      |    |   |
| 18    |     |         |       |      |    |   |
| 17    |     |         |       |      |    |   |
| 16    |     |         |       |      |    |   |
| 15    |     |         |       |      |    |   |
| 14    |     |         |       |      |    |   |
| 13    |     |         |       |      |    |   |
| 12    |     |         |       |      |    |   |
| 11    |     |         |       |      |    |   |
| 10    |     |         |       |      |    |   |
| 9     |     |         |       |      |    |   |
| 8     |     |         |       |      |    |   |
| 7     |     |         |       |      |    |   |
| 6     |     |         |       |      |    |   |
| 5     |     |         |       |      |    |   |
| 4     |     |         |       |      |    |   |
| 3     |     |         |       |      |    |   |
| 2     |     |         |       |      |    |   |
| 1     |     |         |       |      |    |   |



|   |                |     |     |     |     |     |     |     |     |  |
|---|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| 0 | PARTITION NO 8 |     |     |     |     |     |     |     |     |  |
| 0 | 141            | 142 | 143 | 144 | 145 | 146 | 147 | 148 | 149 |  |
| 0 | 151            | 152 | 153 | 154 | 155 | 156 | 157 | 158 | 159 |  |
| 0 | 161            | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 |  |
| 0 | 171            | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 |  |
|   | 181            | 182 | 183 | 184 | 185 |     |     |     |     |  |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 8

.4518748D+02 - .8399661D-01 .5555671D-02  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 8

.2006589D+00 .4772226D+00 .3547851D-02  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 8  
46

VALEUR DU CRITERE A L ITERATION NO 3  
.31070117E+03

Les résultats graphiques, valeurs calculées et écarts sont en Figure 3-43

.CAS N° 3

RESULTATS ITERATION: 3

|                |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|--|
| PARTITION NO 1 |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
| 2              | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |  |
| 12             | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |  |
| 22             | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |    |  |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 1

.5794033D+02 - .6750070D+00 .2745355D-02  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 1

.5017021D+02 .7081466D+00 .3275244D-02  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 1  
29

|                |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|--|
| PARTITION NO 2 |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
| 31             | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |  |
| 41             | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |  |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 2

.4065776D+02 - .9308417D+00 .4349105D-02  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 2

.5497626D+02 - .1872033D+00 - .2063983D-01  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 2  
19

|                |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|--|
| PARTITION NO 3 |    |    |    |    |    |    |    |    |  |
| 50             | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 |  |
| 60             | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 |  |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 3

.2500000D+02 - .1000000D+01 .0000000D+00  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 3

.4843550D+02 - .1700427D+00 .9730205D-02  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 3

|    |                |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 68 | PARTITION NO 4 |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 78 | 69             | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 |
|    | 79             | 80 | 81 | 82 |    |    |    |    |    |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 4

.2257154D+01 .1259659D+01 -.9053585D-01  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 4

.4813191D+02 -.227654D+01 .5753200D-01  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 4  
15

|    |                |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 83 | PARTITION NO 5 |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 93 | 84             | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 |
|    | 94             | 95 | 96 |    |    |    |    |    |    |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 5

.2752747D+01 .1570055D+00 .2953297D-01  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 5

.2450549D+02 -.1476373D+01 .1373026D-01  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 5  
14

|     |                |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 97  | PARTITION NO 6 |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 107 | 98             | 99  | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 |
|     | 108            | 109 | 110 | 111 | 112 | 113 | 114 |     |     |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 6

.9612748D+01 .1650022D+01 -.5224437D-01  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 6

.0482857D+01 .3528724D+00 -.2386258D-02  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 6  
18

|     |                |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 115 | PARTITION NO 7 |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 125 | 116            | 117 | 118 | 119 | 120 | 121 | 122 | 123 | 124 |
| 135 | 126            | 127 | 128 | 129 | 130 | 131 | 132 | 133 | 134 |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 7

.2525014D+02 .9007591D+00 -.1901092D-02  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 7

.1256542D+02 .1254525D+00 -.2683580D-01  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 7  
21

|     |                |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 156 | PARTITION NO 8 |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 146 | 137            | 138 | 139 | 140 | 141 | 142 | 143 | 144 | 145 |
| 156 | 147            | 148 | 149 | 150 | 151 | 152 | 153 | 154 | 155 |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 8

.4008423D+02 .8749194D+00 -.3197086D-01  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 8

.1640612D+01 -.3111592D+00 .375725D-01  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 8  
21

| SERIE | DES | VALBURE | ESTIMES | EN  | Y   |
|-------|-----|---------|---------|-----|-----|
| 57    | 187 | 187     | 187     | 187 | 187 |
| 56    | 186 | 186     | 186     | 186 | 186 |
| 55    | 185 | 185     | 185     | 185 | 185 |
| 54    | 184 | 184     | 184     | 184 | 184 |
| 53    | 183 | 183     | 183     | 183 | 183 |
| 52    | 182 | 182     | 182     | 182 | 182 |
| 51    | 181 | 181     | 181     | 181 | 181 |
| 50    | 180 | 180     | 180     | 180 | 180 |
| 49    | 179 | 179     | 179     | 179 | 179 |
| 48    | 178 | 178     | 178     | 178 | 178 |
| 47    | 177 | 177     | 177     | 177 | 177 |
| 46    | 176 | 176     | 176     | 176 | 176 |
| 45    | 175 | 175     | 175     | 175 | 175 |
| 44    | 174 | 174     | 174     | 174 | 174 |
| 43    | 173 | 173     | 173     | 173 | 173 |
| 42    | 172 | 172     | 172     | 172 | 172 |
| 41    | 171 | 171     | 171     | 171 | 171 |
| 40    | 170 | 170     | 170     | 170 | 170 |
| 39    | 169 | 169     | 169     | 169 | 169 |
| 38    | 168 | 168     | 168     | 168 | 168 |
| 37    | 167 | 167     | 167     | 167 | 167 |
| 36    | 166 | 166     | 166     | 166 | 166 |
| 35    | 165 | 165     | 165     | 165 | 165 |
| 34    | 164 | 164     | 164     | 164 | 164 |
| 33    | 163 | 163     | 163     | 163 | 163 |
| 32    | 162 | 162     | 162     | 162 | 162 |
| 31    | 161 | 161     | 161     | 161 | 161 |
| 30    | 160 | 160     | 160     | 160 | 160 |
| 29    | 159 | 159     | 159     | 159 | 159 |
| 28    | 158 | 158     | 158     | 158 | 158 |
| 27    | 157 | 157     | 157     | 157 | 157 |
| 26    | 156 | 156     | 156     | 156 | 156 |
| 25    | 155 | 155     | 155     | 155 | 155 |
| 24    | 154 | 154     | 154     | 154 | 154 |
| 23    | 153 | 153     | 153     | 153 | 153 |
| 22    | 152 | 152     | 152     | 152 | 152 |
| 21    | 151 | 151     | 151     | 151 | 151 |
| 20    | 150 | 150     | 150     | 150 | 150 |
| 19    | 149 | 149     | 149     | 149 | 149 |
| 18    | 148 | 148     | 148     | 148 | 148 |
| 17    | 147 | 147     | 147     | 147 | 147 |
| 16    | 146 | 146     | 146     | 146 | 146 |
| 15    | 145 | 145     | 145     | 145 | 145 |
| 14    | 144 | 144     | 144     | 144 | 144 |
| 13    | 143 | 143     | 143     | 143 | 143 |
| 12    | 142 | 142     | 142     | 142 | 142 |
| 11    | 141 | 141     | 141     | 141 | 141 |
| 10    | 140 | 140     | 140     | 140 | 140 |
| 9     | 139 | 139     | 139     | 139 | 139 |
| 8     | 138 | 138     | 138     | 138 | 138 |
| 7     | 137 | 137     | 137     | 137 | 137 |
| 6     | 136 | 136     | 136     | 136 | 136 |
| 5     | 135 | 135     | 135     | 135 | 135 |
| 4     | 134 | 134     | 134     | 134 | 134 |
| 3     | 133 | 133     | 133     | 133 | 133 |
| 2     | 132 | 132     | 132     | 132 | 132 |
| 1     | 131 | 131     | 131     | 131 | 131 |

| SERIE | DES | VALBURE | ESTIMES | EN  | X   |
|-------|-----|---------|---------|-----|-----|
| 30    | 188 | 188     | 188     | 188 | 188 |
| 29    | 187 | 187     | 187     | 187 | 187 |
| 28    | 186 | 186     | 186     | 186 | 186 |
| 27    | 185 | 185     | 185     | 185 | 185 |
| 26    | 184 | 184     | 184     | 184 | 184 |
| 25    | 183 | 183     | 183     | 183 | 183 |
| 24    | 182 | 182     | 182     | 182 | 182 |
| 23    | 181 | 181     | 181     | 181 | 181 |
| 22    | 180 | 180     | 180     | 180 | 180 |
| 21    | 179 | 179     | 179     | 179 | 179 |
| 20    | 178 | 178     | 178     | 178 | 178 |
| 19    | 177 | 177     | 177     | 177 | 177 |
| 18    | 176 | 176     | 176     | 176 | 176 |
| 17    | 175 | 175     | 175     | 175 | 175 |
| 16    | 174 | 174     | 174     | 174 | 174 |
| 15    | 173 | 173     | 173     | 173 | 173 |
| 14    | 172 | 172     | 172     | 172 | 172 |
| 13    | 171 | 171     | 171     | 171 | 171 |
| 12    | 170 | 170     | 170     | 170 | 170 |
| 11    | 169 | 169     | 169     | 169 | 169 |
| 10    | 168 | 168     | 168     | 168 | 168 |
| 9     | 167 | 167     | 167     | 167 | 167 |
| 8     | 166 | 166     | 166     | 166 | 166 |
| 7     | 165 | 165     | 165     | 165 | 165 |
| 6     | 164 | 164     | 164     | 164 | 164 |
| 5     | 163 | 163     | 163     | 163 | 163 |
| 4     | 162 | 162     | 162     | 162 | 162 |
| 3     | 161 | 161     | 161     | 161 | 161 |
| 2     | 160 | 160     | 160     | 160 | 160 |
| 1     | 159 | 159     | 159     | 159 | 159 |

| SERIE | DES | VALBURE | ESTIMES | EN  | Y   |
|-------|-----|---------|---------|-----|-----|
| 1     | 187 | 187     | 187     | 187 | 187 |
| 2     | 186 | 186     | 186     | 186 | 186 |
| 3     | 185 | 185     | 185     | 185 | 185 |
| 4     | 184 | 184     | 184     | 184 | 184 |
| 5     | 183 | 183     | 183     | 183 | 183 |
| 6     | 182 | 182     | 182     | 182 | 182 |
| 7     | 181 | 181     | 181     | 181 | 181 |
| 8     | 180 | 180     | 180     | 180 | 180 |
| 9     | 179 | 179     | 179     | 179 | 179 |
| 10    | 178 | 178     | 178     | 178 | 178 |
| 11    | 177 | 177     | 177     | 177 | 177 |
| 12    | 176 | 176     | 176     | 176 | 176 |
| 13    | 175 | 175     | 175     | 175 | 175 |
| 14    | 174 | 174     | 174     | 174 | 174 |
| 15    | 173 | 173     | 173     | 173 | 173 |
| 16    | 172 | 172     | 172     | 172 | 172 |
| 17    | 171 | 171     | 171     | 171 | 171 |
| 18    | 170 | 170     | 170     | 170 | 170 |
| 19    | 169 | 169     | 169     | 169 | 169 |
| 20    | 168 | 168     | 168     | 168 | 168 |
| 21    | 167 | 167     | 167     | 167 | 167 |
| 22    | 166 | 166     | 166     | 166 | 166 |
| 23    | 165 | 165     | 165     | 165 | 165 |
| 24    | 164 | 164     | 164     | 164 | 164 |
| 25    | 163 | 163     | 163     | 163 | 163 |
| 26    | 162 | 162     | 162     | 162 | 162 |
| 27    | 161 | 161     | 161     | 161 | 161 |
| 28    | 160 | 160     | 160     | 160 | 160 |
| 29    | 159 | 159     | 159     | 159 | 159 |
| 30    | 158 | 158     | 158     | 158 | 158 |
| 31    | 157 | 157     | 157     | 157 | 157 |
| 32    | 156 | 156     | 156     | 156 | 156 |
| 33    | 155 | 155     | 155     | 155 | 155 |
| 34    | 154 | 154     | 154     | 154 | 154 |
| 35    | 153 | 153     | 153     | 153 | 153 |
| 36    | 152 | 152     | 152     | 152 | 152 |
| 37    | 151 | 151     | 151     | 151 | 151 |
| 38    | 150 | 150     | 150     | 150 | 150 |
| 39    | 149 | 149     | 149     | 149 | 149 |
| 40    | 148 | 148     | 148     | 148 | 148 |
| 41    | 147 | 147     | 147     | 147 | 147 |
| 42    | 146 | 146     | 146     | 146 | 146 |
| 43    | 145 | 145     | 145     | 145 | 145 |
| 44    | 144 | 144     | 144     | 144 | 144 |
| 45    | 143 | 143     | 143     | 143 | 143 |
| 46    | 142 | 142     | 142     | 142 | 142 |
| 47    | 141 | 141     | 141     | 141 | 141 |
| 48    | 140 | 140     | 140     | 140 | 140 |
| 49    | 139 | 139     | 139     | 139 | 139 |
| 50    | 138 | 138     | 138     | 138 | 138 |
| 51    | 137 | 137     | 137     | 137 | 137 |
| 52    | 136 | 136     | 136     | 136 | 136 |
| 53    | 135 | 135     | 135     | 135 | 135 |
| 54    | 134 | 134     | 134     | 134 | 134 |
| 55    | 133 | 133     | 133     | 133 | 133 |
| 56    | 132 | 132     | 132     | 132 | 132 |
| 57    | 131 | 131     | 131     | 131 | 131 |
| 58    | 130 | 130     | 130     | 130 | 130 |
| 59    | 129 | 129     | 129     | 129 | 129 |
| 60    | 128 | 128     | 128     | 128 | 128 |
| 61    | 127 | 127     | 127     | 127 | 127 |
| 62    | 126 | 126     | 126     | 126 | 126 |
| 63    | 125 | 125     | 125     | 125 | 125 |
| 64    | 124 | 124     | 124     | 124 | 124 |
| 65    | 123 | 123     | 123     | 123 | 123 |
| 66    | 122 | 122     | 122     | 122 | 122 |
| 67    | 121 | 121     | 121     | 121 | 121 |
| 68    | 120 | 120     | 120     | 120 | 120 |
| 69    | 119 | 119     | 119     | 119 | 119 |
| 70    | 118 | 118     | 118     | 118 | 118 |
| 71    | 117 | 117     | 117     | 117 | 117 |
| 72    | 116 | 116     | 116     | 116 | 116 |
| 73    | 115 | 115     | 115     | 115 | 115 |
| 74    | 114 | 114     | 114     | 114 | 114 |
| 75    | 113 | 113     | 113     | 113 | 113 |
| 76    | 112 | 112     | 112     | 112 | 112 |
| 77    | 111 | 111     | 111     | 111 | 111 |
| 78    | 110 | 110     | 110     | 110 | 110 |
| 79    | 109 | 109     | 109     | 109 | 109 |
| 80    | 108 | 108     | 108     | 108 | 108 |
| 81    | 107 | 107     | 107     | 107 | 107 |
| 82    | 106 | 106     | 106     | 106 | 106 |
| 83    | 105 | 105     | 105     | 105 | 105 |
| 84    | 104 | 104     | 104     | 104 | 104 |
| 85    | 103 | 103     | 103     | 103 | 103 |
| 86    | 102 | 102     | 102     | 102 | 102 |
| 87    | 101 | 101     | 101     | 101 | 101 |
| 88    | 100 | 100     | 100     | 100 | 100 |
| 89    | 99  | 99      | 99      | 99  | 99  |
| 90    | 98  | 98      | 98      | 98  | 98  |
| 91    | 97  | 97      | 97      | 97  | 97  |
| 92    | 96  | 96      | 96      | 96  | 96  |
| 93    | 95  | 95      | 95      | 95  | 95  |
| 94    | 94  | 94      | 94      | 94  | 94  |
| 95    | 93  | 93      | 93      | 93  | 93  |
| 96    | 92  | 92      | 92      | 92  | 92  |
| 97    | 91  | 91      | 91      | 91  | 91  |
| 98    | 90  | 90      | 90      | 90  | 90  |
| 99    | 89  | 89      | 89      | 89  | 89  |
| 100   | 88  | 88      | 88      | 88  | 88  |

| SERIE | DES | VALBURE | ESTIMES | EN  | X   |
|-------|-----|---------|---------|-----|-----|
| 1     | 188 | 188     | 188     | 188 | 188 |
| 2     | 187 | 187     | 187     | 187 | 187 |
| 3     | 186 | 186     | 186     | 186 | 186 |
| 4     | 185 | 185     | 185     | 185 | 185 |
| 5     | 184 | 184     | 184     | 184 | 184 |
| 6     | 183 | 183     | 183     | 183 | 183 |
| 7     | 182 | 182     | 182     | 182 | 182 |
| 8     | 181 | 181     | 181     | 181 | 181 |
| 9     | 180 | 180     | 180     | 180 | 180 |
| 10    | 179 | 179     | 179     | 179 | 179 |
| 11    | 178 | 178     | 178     | 178 | 178 |
| 12    | 177 | 177     | 177     | 177 | 177 |
| 13    | 176 | 176     | 176     | 176 | 176 |
| 14    | 175 | 175     | 175     | 175 | 175 |
| 15    | 174 | 174     | 174     | 174 | 174 |
| 16    | 173 | 173     | 173     | 173 | 173 |
| 17    | 172 | 172     | 172     | 172 | 172 |
| 18    | 171 | 171     | 171     | 171 | 171 |
| 19    | 170 | 170     | 170     | 170 | 170 |
| 20    | 169 | 169     | 169     | 169 | 169 |
| 21    | 168 | 168     | 168     | 168 | 168 |
| 22    | 167 | 167     | 167     | 167 | 167 |
| 23    | 166 | 166     | 166     | 166 | 166 |
| 24    | 165 | 165     | 165     | 165 | 165 |
| 25    | 164 | 164     | 164     | 164 | 164 |
| 26    | 163 | 163     | 163     | 163 | 163 |
| 27    | 162 | 162     | 162     | 162 | 162 |
| 28    | 161 | 161     | 161     | 161 | 161 |
| 29    | 160 | 160     | 160     | 160 | 160 |
| 30    | 159 | 159     | 159     | 159 | 159 |
| 31    | 158 | 158     | 158     | 158 | 158 |
| 32    | 157 | 157     | 157     | 157 | 157 |
| 33    | 156 | 156     | 156     | 156 | 156 |
| 34    | 155 | 155     | 155     | 155 | 155 |
| 35    | 154 | 154     | 154     | 154 | 154 |
| 36    | 153 | 153     | 153     | 153 | 153 |
| 37    | 152 | 152     | 152     | 152 | 152 |
| 38    | 151 | 151     | 151     | 151 | 151 |
| 39    | 150 | 150     | 150     | 150 | 150 |
| 40    | 149 | 149     | 149     | 149 | 149 |
| 41    | 148 | 148     | 148     | 148 | 148 |
| 42    | 147 | 147     | 147     | 147 | 147 |
| 43    | 146 | 146     | 146     | 146 | 146 |
| 44    | 145 | 145     | 145     | 145 | 145 |
| 4     |     |         |         |     |     |

PARTITION NO 9  
 158 159 160 161 162 163 164 165 166  
 168 169 170 171 172 173 174 175 176  
 178 179 180 181 182 183 184 185  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 9

57  
67  
77

.4406568D+02 .2697759D+00 .1158831D-02  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 9

.1199452D+02 .1203824D+00 .1879313D-01  
 NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 9  
 29

VALEUR DU CRITERE A L ITERATION NO 3  
 .24158391E+03

Les résultats graphiques, valeurs calculées et écarts résiduels sont en Figure 3-44

CAS N° 4

RESULTATS ITERATION: 3

PARTITION NO 1  
 2 3 4 5 6 7 8 9 10  
 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20  
 21 22 23 24 25 26 27 28 29  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 1

.5794033D+02 -.6730070D+00 .2745355D-02  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 1

.5017021D+02 .7081466D+00 .3275244D-02  
 NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 1  
 29

PARTITION NO 2  
 31 32 33 34 35 36 37 38 39  
 40 41 42 43 44 45 46 47 48  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 2

.4065776D+02 -.9308417D+00 .4349105D-02  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 2

.5497626D+02 -.1872033D+00 -.2063983D-01  
 NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 2  
 19

PARTITION NO 3  
 50 51 52 53 54 55 56 57 58  
 59 60 61 62 63 64 65 66 67  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 3

.2500000D+02 -.1000000D+01 .0000000D+00  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 3

.4843550D+02 -.1700427D+00 .9750205D-02  
 NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 3  
 19

8  
8  
PARTITION NO 4  
69 70 71 72 73 74 75 76 77  
79 80 81 82  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 4

.2257154D+01 .1259659D+01 -.9053585D-01  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 4

.4815191D+02 -.2277654D+01 .5753200D-01  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 4  
15

3  
3  
PARTITION NO 5  
84 85 86 87 88 89 90 91 92  
94 95 96  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 5

.2752747D+01 .1570055D+00 .2953297D-01  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 5

.2450549D+02 -.1476373D+01 .1373026D-01  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 5  
14

7  
7  
PARTITION NO 6  
98 99 100 101 102 103 104 105 106  
108 109 110 111 112 113 114  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 6

.4612748D+01 .1650022D+01 -.5224437D-01  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 6

.8482857D+01 .3528724D+00 -.2386258D-02  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 6  
18

5  
5  
5  
PARTITION NO 7  
116 117 118 119 120 121 122 123 124  
126 127 128 129 130 131 132 133 134  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 7

.2525014D+02 .9007591D+00 -.1901092D-02  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 7

.1256542D+02 .1254525D+00 -.2683580D-01  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 7  
21

6  
6  
PARTITION NO 8  
137 138 139 140 141 142 143 144 145  
147 148 149 150  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 8

.4042205D+02 .7527193D+00 -.2472553D-01  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 8

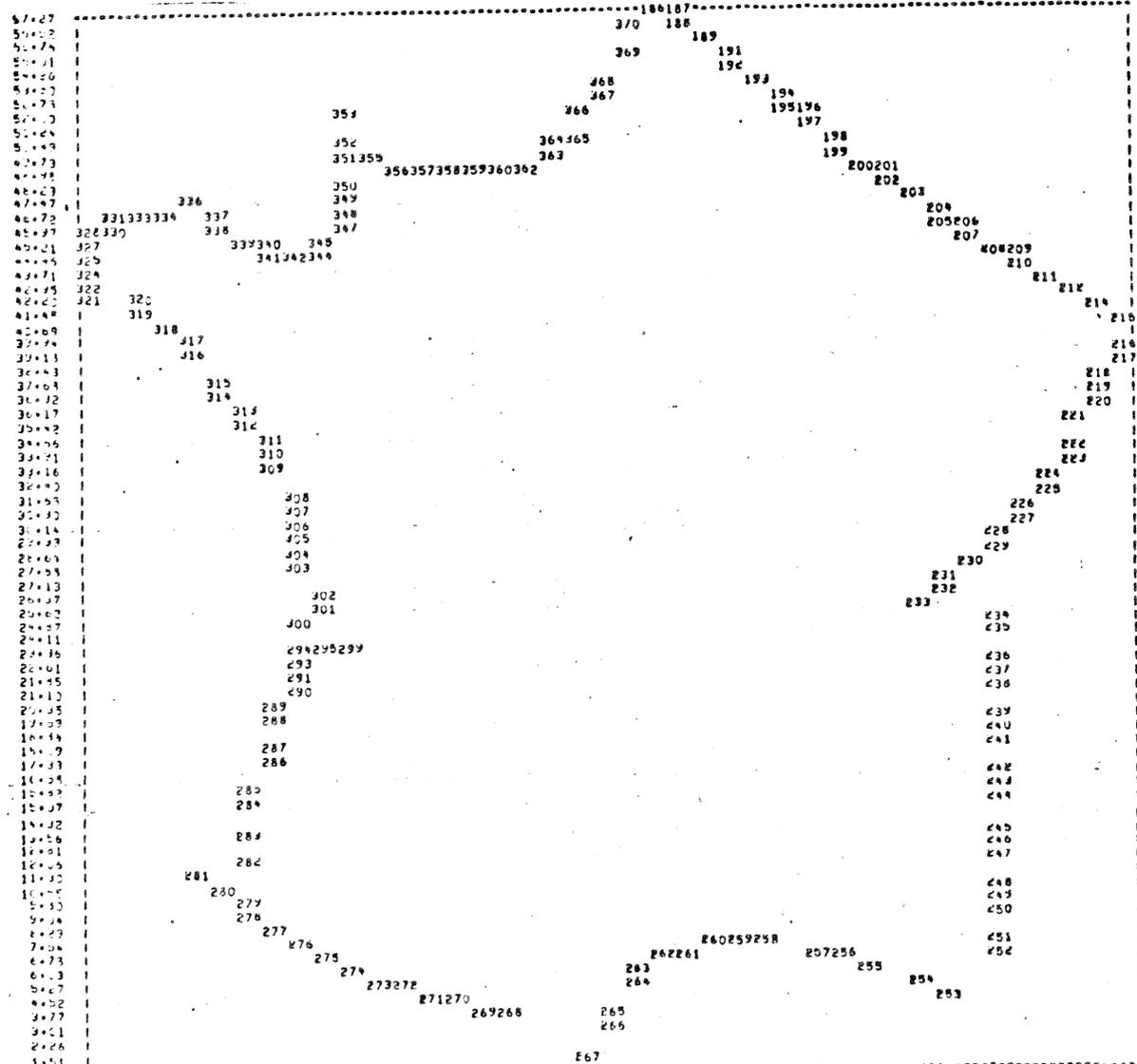
.2147259D+01 -.4893687D+00 .4799026D-01  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 8  
15

| SERIE | DES | VALEURS | ESTIMEES | EN | X  |
|-------|-----|---------|----------|----|----|
| 37    | 37  | 37      | 37       | 37 | 37 |
| 38    | 38  | 38      | 38       | 38 | 38 |
| 39    | 39  | 39      | 39       | 39 | 39 |
| 40    | 40  | 40      | 40       | 40 | 40 |
| 41    | 41  | 41      | 41       | 41 | 41 |
| 42    | 42  | 42      | 42       | 42 | 42 |
| 43    | 43  | 43      | 43       | 43 | 43 |
| 44    | 44  | 44      | 44       | 44 | 44 |
| 45    | 45  | 45      | 45       | 45 | 45 |
| 46    | 46  | 46      | 46       | 46 | 46 |
| 47    | 47  | 47      | 47       | 47 | 47 |
| 48    | 48  | 48      | 48       | 48 | 48 |
| 49    | 49  | 49      | 49       | 49 | 49 |
| 50    | 50  | 50      | 50       | 50 | 50 |

| SERIE | DES | VALEURS | ESTIMEES | EN | X  |
|-------|-----|---------|----------|----|----|
| 30    | 30  | 30      | 30       | 30 | 30 |
| 31    | 31  | 31      | 31       | 31 | 31 |
| 32    | 32  | 32      | 32       | 32 | 32 |
| 33    | 33  | 33      | 33       | 33 | 33 |
| 34    | 34  | 34      | 34       | 34 | 34 |
| 35    | 35  | 35      | 35       | 35 | 35 |
| 36    | 36  | 36      | 36       | 36 | 36 |
| 37    | 37  | 37      | 37       | 37 | 37 |
| 38    | 38  | 38      | 38       | 38 | 38 |
| 39    | 39  | 39      | 39       | 39 | 39 |
| 40    | 40  | 40      | 40       | 40 | 40 |
| 41    | 41  | 41      | 41       | 41 | 41 |
| 42    | 42  | 42      | 42       | 42 | 42 |
| 43    | 43  | 43      | 43       | 43 | 43 |
| 44    | 44  | 44      | 44       | 44 | 44 |
| 45    | 45  | 45      | 45       | 45 | 45 |
| 46    | 46  | 46      | 46       | 46 | 46 |
| 47    | 47  | 47      | 47       | 47 | 47 |
| 48    | 48  | 48      | 48       | 48 | 48 |
| 49    | 49  | 49      | 49       | 49 | 49 |
| 50    | 50  | 50      | 50       | 50 | 50 |

| SERIE | DES | ECARTS | EN | Y  |
|-------|-----|--------|----|----|
| 41    | 41  | 41     | 41 | 41 |
| 42    | 42  | 42     | 42 | 42 |
| 43    | 43  | 43     | 43 | 43 |
| 44    | 44  | 44     | 44 | 44 |
| 45    | 45  | 45     | 45 | 45 |
| 46    | 46  | 46     | 46 | 46 |
| 47    | 47  | 47     | 47 | 47 |
| 48    | 48  | 48     | 48 | 48 |
| 49    | 49  | 49     | 49 | 49 |
| 50    | 50  | 50     | 50 | 50 |

| SERIE | DES | ECARTS | EN | X  |
|-------|-----|--------|----|----|
| 41    | 41  | 41     | 41 | 41 |
| 42    | 42  | 42     | 42 | 42 |
| 43    | 43  | 43     | 43 | 43 |
| 44    | 44  | 44     | 44 | 44 |
| 45    | 45  | 45     | 45 | 45 |
| 46    | 46  | 46     | 46 | 46 |
| 47    | 47  | 47     | 47 | 47 |
| 48    | 48  | 48     | 48 | 48 |
| 49    | 49  | 49     | 49 | 49 |
| 50    | 50  | 50     | 50 | 50 |



|   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 7 | 158 | 159 | 160 | 161 | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 |
| 7 | 168 | 169 | 170 | 171 | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 |
| 7 | 178 | 179 | 180 | 181 | 182 | 183 | 184 | 185 |     |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 9

.4406568D+02 .2697759D+00 .1158831D-02  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 9

.1199452D+02 .1203824D+00 .1879213D-01  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 9  
29

VALEUR DU CRITERE A L ITERATION NO 3  
.24158391E+03

Les résultats graphiques, valeurs calculées et écarts résiduels sont en Figure 3-44

CAS N° 4

--- RESULTATS ITERATION: 3 ---

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 11 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |    |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 1

.5794033D+02 -.6750070D+00 .2745255D-02  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 1

.5017021D+02 .7081466D+00 .3275244D-02  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 1  
29

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 0  | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |    |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 2

.4065776D+02 -.9308417D+00 .4349105D-02  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 2

.5497626D+02 -.1872033D+00 -.2063983D-01  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 2  
19

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 9 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 |
| 9 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 |    |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 3

.2500000D+02 -.1000000D+01 .0000000D+00  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 3

.4843550D+02 -.1700427D+00 .9750205D-02  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 3  
19

|  | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 |
|--|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|  | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 |    |    |    |    |    |

PARTITION NO 4  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 4

.2257154D+01 .1259659D+01 -.9053585D-01  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 4

.4815191D+02 -.2277654D+01 .5753200D-01  
 NOMBRE D'ELEMENTS DE LA PARTITION NO 4  
 15

|  | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 |
|--|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|  | 93 | 94 | 95 | 96 |    |    |    |    |    |    |

PARTITION NO 5  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 5

.2752747D+01 .1570055D+00 .2953297D-01  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 5

.2450549D+02 -.1476373D+01 .1373026D-01  
 NOMBRE D'ELEMENTS DE LA PARTITION NO 5  
 14

|  | 97  | 98  | 99  | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 |
|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|  | 107 | 108 | 109 | 110 | 111 | 112 | 113 | 114 |     |     |

PARTITION NO 6  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 6

.7012748D+01 .1650022D+01 .5224437D-01  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 6

.8482857D+01 .3528724D+00 -.2386258D-02  
 NOMBRE D'ELEMENTS DE LA PARTITION NO 6  
 18

|  | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 | 121 | 122 | 123 | 124 |
|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|  | 125 | 126 | 127 | 128 | 129 | 130 | 131 | 132 | 133 | 134 |
|  | 135 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |

PARTITION NO 7  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 7

.2525014D+02 .9007591D+00 -.1901092D-02  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 7

.1256542D+02 .1254525D+00 -.2683580D-01  
 NOMBRE D'ELEMENTS DE LA PARTITION NO 7  
 21

|  | 136 | 137 | 138 | 139 | 140 | 141 | 142 | 143 | 144 | 145 |
|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|  | 146 | 147 | 148 | 149 | 150 |     |     |     |     |     |

PARTITION NO 8  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 8

.4042205D+02 .7527193D+00 -.2472553D-01  
 COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 8

.2147259D+01 -.4893687D+00 .4799026D-01  
 NOMBRE D'ELEMENTS DE LA PARTITION NO 8  
 15



|     |                |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 151 | PARTITION NO 9 |     |     |     |     |     |     | 159 | 160 |
| 152 | 153            | 154 | 155 | 156 | 157 | 158 |     |     |     |
| 161 | 162            | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 |     |     |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 9

.4809072D+02 - .1100693D+01 .7140142D-01  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 9

.5382363D+01 - .1220069D+01 - .4102150D-01  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 9  
18

|     |                 |     |     |     |     |     |  |     |     |     |
|-----|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|--|-----|-----|-----|
| 169 | PARTITION NO 10 |     |     |     |     |     |  | 176 | 177 | 171 |
| 170 | 171             | 172 | 173 | 174 | 175 |     |  |     |     |     |
| 179 | 180             | 181 | 182 | 183 | 184 | 185 |  |     |     |     |

COEFFICIENTS DU POLYNOME EN Y DE LA PARTIE NO 10

.5050881D+02 - .7978581D+00 .6488045D-01  
COEFFICIENTS DU POLYNOME EN X DE LA PARTIE NO 10

.1275000D+02 .1586945D+01 - .3500571D-01  
NOMBRE D ELEMENTS DE LA PARTITION NO 10  
17

VALEUR DU CRITERE A L ITERATION NO 3  
.13271538E+03

Les résultats graphiques, valeurs estimées et écarts sont en figure 3-45

## XV CONCLUSION

Les différents algorithmes de régression typologique proposés détectent au sein de populations importantes des groupes homogènes d'individus caractérisés par des régimes de régression propres. Ainsi une population aux comportements diversifiés fournissant un unique régime de régression par les méthodes habituelles est appréhendée de façon plus fidèle par la régression typologique, ce qui permet une meilleure modélisation du phénomène.

Différentes voies de recherche sont possible. Par exemple:

--construction d'une méthode de régression typologique pas à pas

L'introduction ascendante des variables ainsi que la classification des individus permettra de sélectionner les groupes d'observations et les variables décrivant au mieux la variable à expliquer. Ceci peut toutefois être effectué sur les algorithmes présentés, à la convergence en testant la signification statistique des coefficients de régression. L'algorithme pas à pas permettra de sélectionner les variables au cours du déroulement itératif.

-analyse typologique de la variance ( de la covariance )

Bien qu'abordée dans le dernier chapitre sous l'aspect du codage des variables qualitatives en variables quantitatives, il serait utile d'employer une approche plus traditionnelle permettant de dégager les variables ayant un effet sur les groupes d'individus obtenus par classification.

-Sur le plan reconnaissance des formes il serait intéressant d'incorporer aux algorithmes présentés une technique qui pour un seuil maximal d'erreur donné entre valeurs observées et calculées permettrait de fixer le nombre de classes tout en respectant les contraintes du nombre de paramètres à mémoriser.

XVI. - BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALBANA - Representation of digitized contours in terms of conic arcs and straight lines segments, N.Y. University - Academic Press (1974).
- [1 bis] ANDERBERG - Cluster analysis for application, N.Y. Academic Press (1973).
- [2] ANDERSON - The statistical analysis of time series, N.Y. Wiley (1971).
- [2 bis] BARLOW, BARTHOLOMEW, BREMNER, BRUNK - Statistical inference under order restrictions, N.Y. Wiley (1972)
- [2 ter] BELLMAN - On the approximation of curves lines segments using dynamic programming, Communication of the ACM, (4 juin 1961).
- [2 (4)] BENZECRI - Méthodes statistiques de la taxinomie, L.S.M. Paris VI (1974).
- [3] BERTIER-BOUROCHE - Analyse des données multidimensionnelles, P.U.F. (1975).
- [4] BOX-JENKINS - Time series analysis, Holden Day (1970).
- [5] BROWN-DURBIN - Methods for investigating wether a regression relationshi is constant over time, Congrès européen de statistique, Amsterdam 1968.
- [5 bis] CAZES - Techniques de prévision linéaire, Ecole d'été d'analyse numérique IRIA 1975.
- [6] CHOW - Test of equality between two sets of coefficients in two linear regressions, Econometrica 28 (Juillet 1970) pp. 561-605.
- [7] DIDAY - Nouvelles méthodes et nouveaux concepts en classification automatique et reconnaissance des formes, Thèse d'état 1972.
- [8] DIDAY - Classification et sélection de paramètres sous contraintes, Rapport de Recherche IRIA-LABORIA n°188.
- [8 bis] DUFOUR - Programme de mémorisation de profils et contours sous forme condensée, Institut Géographique National (1974).

- [9]] FAIR-JAFFE - Methods of estimation for markets in disequilibrium  
Econometrica.
- [10] FAIRLEY-HINICH - A test for a shifting slope coefficient in a linear model  
JASA 65 (Sept 1970) pp. 1320-29.
- [10 bis] FISHER - On grouping for maximum homogeneity  
JASA 53 (Dec 58).
- [11] GOLDFELD-QUANDT - Linear methods in econometrics  
Amsterdam-North Holland Publishing Co. (1972).
- [12] GRENANDER - Statistical analysis of time series
- [12 bis] GREVILLE - Introduction to spline functions : theory and application of  
spline functions,  
N.Y. Academic Press (1969).
- [12 ter] HOERL, KENNARD - Ridge regression : Biased estimation for nonorthogonal  
problems,  
Technometrics, vol 12, N° 1, février 1970.
- [12 (4)] CAZES - Protection de la régression par utilisation de contraintes linéaire  
et non linéaires,  
R.S.A. 1975, vol. 23, N°3.
- [13] HANNAN - Multiple time series,  
1970.
- [13 (1)] LAVEEN KANAL - Pattern in pattern recognition : 1968-1974,  
IEEE, vol. IT. 20, n° 6, Nov. 1974.
- [13 (2)] LAVIN - Stochastic feature selection  
Rapport n° 3 on pattern analysis  
Brown University Providence (1972).
- [13 (3)] LECHEVALLIER - Classification automatique optimale sous contrainte  
d'ordre total,  
Rapport de recherche IRIA-LABORIA n° 200, 1976.
- [13 (4)] MAC CLURE - Problems and methods of non linear feature generation in  
pattern analysis,  
Princeton Conf. on Inform. Sciences and Systems (1974).
- [14] Mac GEE-CARLETON - Piecewise regression,  
JASA 65 (Sept 70) 1109-24.
- [15] MALINVAUD - Méthodes statistiques de l'économétrie,  
DUNOD.
- [16] MARQUARDT - Generalized inverses, Ridge regression,  
Biased linear estimation and non linear estimation  
Technometrics vol.12, N° 3, pp. 591-611.

- [16 bis] MAZODIER - Méthodes statistiques de l'économétrie,  
Polycopié ENSAE.
- [17] OK-SAKUN Y. - L'analyse factorielle typologique,  
Thèse de 3° cycle 1975.
- [17 bis] PAVLIDIS-HOROWITZ - Picture segmentation by a directed split and merge  
procedure,  
Departement of electrical engineering, Princeton University 1974.
- [18] QUANDT - The estimation of the parameters of a linear regression  
system obeying two separate regimes,  
JASA 53 (Dec 58) pp. 873-880.
- [19] RAO-MITRA - Generalized inverses of matrices and applications  
N.Y. Wiley 1971.
- [20] YOUNG, de LEEUW, TAKANE - An alternating least squares method with optimal  
scaling features,  
University of North Carolina, The L.L. Thurstone Psychometric Laboratory  
Nov. 1975, Report n° 146.
- [21] ZAREMBKA - Frontiers in Econometrics,  
(Texte de Taylor).

ANNEXE N° 1

Nous voulons résoudre le problème suivant:

$$\text{Min}_a \langle Y - T a, Y - T a \rangle$$

sous la contrainte linéaire:

$$R a = r$$

Par la méthode de Lagrange ce problème est équivalent à:

$$\text{Min}_{a, \lambda} L(a, \lambda) \quad \text{avec} \quad L(a, \lambda) = \langle Y - T a, Y - T a \rangle + 2 \lambda (R a - r)$$

En dérivant par rapport à  $a$  nous obtenons les conditions nécessaires pour un optimum:

$$\frac{\delta L}{\delta a} = -2 T' Y + 2 T' T a + 2 R' \lambda' = 0$$

$$\text{d'où:} \quad a = (T' T)^{-1} (T' Y - R' \lambda')$$

Les conditions du second ordre nous assurent que l'on obtient un minimum. On a ainsi  $a$  réalisent ce minimum. Comme  $R a = r$  on en déduit:

$$\begin{aligned} R a &= R (T' T)^{-1} (T' Y - R' \lambda') \\ &= R (T' T)^{-1} T' Y - R (T' T)^{-1} R' \lambda' = r \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \lambda' = \left[ R (T' T)^{-1} R' \right]^{-1} \left[ R (T' T)^{-1} T' Y - r \right]$$

et ainsi:

$$a = (T' T)^{-1} T' Y - (T' T)^{-1} R' \left[ R (T' T)^{-1} R' \right]^{-1} \left[ R (T' T)^{-1} T' Y - r \right]$$

## ANNEXE N° 2

Nous recherchons le vecteur  $\hat{a} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \end{bmatrix}$  tel que  $\hat{a}$  soit de norme minimale

et vérifie le système de  $n$  équations linéaires:

$$[I] \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \sum_{i=1}^m a_i x_1^i \\ \vdots \\ y_n = \sum_{i=1}^m a_i x_n^i \end{array} \right.$$

d'où le problème de minimisation:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m a_i^2$$

sous les contraintes [I]

Par la méthode de Lagrange et puisque la fonction à minimiser est convexe et les contraintes linéaires les conditions du premier ordre sont nécessaires et suffisantes d'où:

$$L(a_1, \dots, a_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^m a_i^2 - \sum_{j=1}^n \lambda_j (y_j - \sum_{i=1}^m a_i x_j^i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_i} = 2 a_i + \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^i = 0 \quad \forall i=1, m$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = y_j - \sum_{i=1}^m a_i x_j^i = 0 \quad \forall j=1, n$$

d'où matriciellement:

$$\begin{array}{c} m \\ \left. \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} 2 \dots \dots 2 & x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 \dots \dots 2 & x_1^m & \dots & x_n^m \end{array} \right] \begin{array}{c} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{array} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{c} n \\ \left[ \begin{array}{ccc} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^m & \dots & x_n^m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^1 & \dots & x_n^m \end{array} \right] \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{array} \end{array} \right\} \end{array} = \begin{array}{c} m \\ \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{array} \right] \end{array}$$

ce qui est équivalent à:

$$\begin{bmatrix} I & X' \\ X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix}$$

En utilisant la méthode d'inversion par blocs nous obtenons:

$$\begin{bmatrix} a \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (I - X'(XX')^{-1} X) & X'(XX')^{-1} \\ X'(XX')^{-1} & -2(XX')^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix}$$

d'où:  $\hat{a} = X'(XX')^{-1} Y$

Proposition 1

- 1)  $\forall k \geq 0$  Le polynôme  $\phi_{k+1}$  qui s'exprime en fonction des polynômes  $\phi_k$  et  $\phi_{k-1}$  par la relation

$$\phi_{k+1}(t) = (t - a_k) \phi_k(t) - b_{k-1} \phi_{k-1}(t)$$

est orthogonal aux précédents si

$$a_k = \frac{\langle t \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle}{\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle}$$

$$b_{k-1} = \frac{\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle}{\langle \phi_{k-1}(t), \phi_{k-1}(t) \rangle}$$

- 2) Les coefficients du polynôme de régression (dans la base orthogonale) sont donnés par :

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\langle \phi_k(t), y_t \rangle}{\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle} \quad \forall k \geq 0$$

- 3) Le polynôme de degré  $q$  minimisant la somme des carrés des résidus s'écrit :

$$\hat{\phi}_q(t) = \sum_{k=0}^q \hat{\gamma}_k \phi_k(t)$$

Démonstration :

- 1) Par récurrence

Supposons qu'il existe  $a_0 \dots a_{k-1}$ ,  $b_0 \dots b_{k-2}$  tels que l'on ait  $\forall 0 < \beta \leq k$

$$\phi_\beta(t) = (t - a_{\beta-1}) \phi_{\beta-1}(t) - b_{\beta-2} \phi_{\beta-2}(t)$$

avec

$$\langle \phi_\beta(t), \phi_{\beta'}(t) \rangle = 0 \quad \forall 0 < \beta' < \beta < k$$

Soit la relation

$$\phi_{k+1}(t) = (t-a_k)\phi_k(t) - b_{k-1}\phi_{k-1}(t)$$

alors  $\forall \beta \leq k$  on a

$$\begin{aligned} \langle \phi_{k+1}(t), \phi_\beta(t) \rangle &= \langle t\phi_k(t), \phi_\beta(t) \rangle - a_k \langle \phi_k(t), \phi_\beta(t) \rangle \\ &\quad - b_{k-1} \langle \phi_{k-1}(t), \phi_\beta(t) \rangle \end{aligned}$$

Trois cas se présentent alors :

a)  $\beta < k-1$

$$\langle \phi_{k+1}(t), \phi_\beta(t) \rangle = \langle t\phi_k(t), \phi_\beta(t) \rangle$$

$$= \langle \phi_k(t), t\phi_\beta(t) \rangle$$

$$= \langle \phi_k(t), \sum_{\lambda=0}^{k-1} \gamma_\lambda \phi_\lambda(t) \rangle$$

car  $t\phi_\beta(t)$  est un polynôme de degré  $k-1$  et s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de la base.

b)  $\beta = k - 1$

$$\Rightarrow \langle \phi_{k+1}(t), \phi_{\beta}(t) \rangle = \langle t \phi_k(t), \phi_{k-1}(t) \rangle$$

$$- b_{k-1} \langle \phi_{k-1}(t), \phi_{k-1}(t) \rangle$$

d'où :

$$\langle \phi_{k+1}(t), \phi_{\beta}(t) \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b_{k-1} = \frac{\langle t \phi_k(t), \phi_{k-1}(t) \rangle}{\langle \phi_{k-1}(t), \phi_{k-1}(t) \rangle}$$

c)  $\beta = k$

$$\Rightarrow \langle \phi_{k+1}(t), \phi_k(t) \rangle = \langle t \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle$$

$$- a_k \langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle$$

$$\text{et } \langle \phi_{k+1}(t), \phi_k(t) \rangle = 0 \Rightarrow a_k = \frac{\langle t \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle}{\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle}$$

d) Enfin si  $\beta = k+1$  on a la relation :

$$\langle \phi_{k+1}(t), \phi_{k+1}(t) \rangle = \langle t \phi_k(t), \phi_{k+1}(t) \rangle$$

On a ainsi déterminé les coefficients :

$$a_k = \frac{\langle t \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle}{\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle} \quad \text{et} \quad b_{k-1} = \frac{\langle t \phi_k(t), \phi_{k-1}(t) \rangle}{\langle \phi_{k-1}(t), \phi_{k-1}(t) \rangle}$$

$$= \frac{\langle t \phi_{k-1}(t), \phi_k(t) \rangle}{\langle \phi_{k-1}(t), \phi_{k-1}(t) \rangle} = \frac{\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle}{\langle \phi_{k-1}(t), \phi_{k-1}(t) \rangle}$$

qui, à l'aide des polynômes orthogonaux jusqu'au degré  $k$ , permettent de construire le polynôme de degré  $k+1$ .

Remarque :

Afin de pouvoir définir le polynôme de degré 1, on posera  $b_{-1} = 0$

d'où :

$$\phi_1(t) = (t - a_0) \phi_0(t) \quad \text{où} \quad a_0 = \frac{\langle t \phi_0(t), \phi_0(t) \rangle}{\langle \phi_0(t), \phi_0(t) \rangle}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \phi_1(t) = t - \frac{T+1}{2} \quad \forall t = 1, T$$

$$\text{avec} \quad \phi_0(t) = 1 \quad \forall t = 1, T$$



Proposition 2

Les coefficients de régression dans la base  $\{1, t, \dots, t^q\}$  sont donnés par :

$$\hat{\alpha}_k = \hat{\alpha}_k + C_k(k+1) \hat{\alpha}_{k+1} - \dots + C_k(q) \hat{\alpha}_q \quad \forall k = 0, q$$

où les  $C_{\bullet}(\bullet)$  sont obtenus de façon récurrente par :

$$\cdot C_k(k+1) = C_{k-1}(k) - a_k$$

$$\cdot C_{k-1}(k+1) = C_{k-2}(k) - a_k C_{k-1}(k) - b_{k-1}$$

$$\cdot C_{k-i}(k+1) = C_{k-i-1}(k) - a_k C_{k-i}(k) - b_{k-1} C_{k-i}(k-1)$$

$$\forall i = 2, k-1$$

[1]

et

$$\cdot C_0(k+1) = -a_k C_0(k) - b_{k-1} C_0(k-1)$$

Démonstration

On a :

$$\phi_k(t) = t^k + C_{k-1}(k)t^{k-1} + \dots + C_1(k)t + C_0(k)$$

[2]

$$\phi_{k-1}(t) = t^{k-1} + C_{k-2}(k-1)t^{k-2} + \dots + C_1(k-1)t + C_0(k-1)$$

Par la proposition 1, on a :

$$\begin{aligned}
 \phi_{k+1}(t) &= (t - a_k) \phi_k(t) - b_{k-1} \phi_{k-1}(t) \\
 &= t^{k+1} + [C_{k-1}(k) - a_k] t^k + [C_{k-2}(k) - a_k C_{k-1}(k) - b_{k-1}] t^{k-1} \\
 &\quad + [C_{k-3}(k) - a_k C_{k-2}(k) - b_{k-1} C_{k-2}(k-1)] t^{k-2} \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + [C_0(k) - a_k C_1(k) - b_{k-1} C_1(k-1)] t \\
 &\quad - a_k C_0(k) - b_{k-1} C_0(k-1)
 \end{aligned}$$

D'où en identifiant avec [ 2 ] écrite en (k+1) le système [ 1 ]