

Recherche de solutions bifurquées et étude de leur stabilité dans les problèmes d'endommagement

Jérôme Beaurain

► To cite this version:

Jérôme Beaurain. Recherche de solutions bifurquées et étude de leur stabilité dans les problèmes d'endommagement. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie, 2011. Français. NNT: . tel-01498400

HAL Id: tel-01498400 https://theses.hal.science/tel-01498400

Submitted on 30 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License



Recherche de solutions bifurquées et étude de leur stabilité dans les problèmes d'endommagement

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

École Doctorale des Sciences Mécaniques, Acoustique et Électronique de Paris

Spécialité : Mécanique

Présentée par

M. Jérôme Beaurain

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Soutenue le 14 Décembre 2011 devant le jury composé de :

Président du Jury :	Djimédo Kondo	Professeur, UPMC
Directeur de thèse :	Jean-Jacques Marigo	Professeur, École Polytechnique
Rapporteurs :	Claudia Comi Michel Raous	Professeur, Politecnico di Milano Directeur de recherche CNRS, LMA Marseille
Examinateurs :	Ahmed Benallal	Directeur de recherche CNRS, LMT Cachan
	Kyrylo Kazymyrenko	Ingénieur de recherche, EDF R&D
	Clément Chavant	Ingénieur de recherche, EDF R&D

Université Pierre & Marie Curie - Paris 6 Bureau d'accueil, inscription des doctorants et base de données Esc G, 2^{ème} étage 15 rue de l'école de médecine 75270-PARIS CEDEX o6 Tél. Secrétariat : 01 42 34 68 35 Fax : 01 42 34 68 40 Tél. pour les étudiants de A à EL : 01 42 34 69 54 Tél. pour les étudiants de EM à MON : 01 42 34 68 41 Tél. pour les étudiants de MOO à Z : 01 42 34 68 51 E-mail : scolarite.doctorat@upmc.fr

Résumé : L'objectif de cette thèse est de développer un algorithme numérique permettant d'étudier la stabilité des solutions aux problèmes d'endommagement, obtenues en simulation numérique par la méthode des éléments finis et à l'aide de modèles régularisés par le gradient de l'endommagement, aussi appelés modèles nonlocaux. La notion de stabilité est fondamentale du fait du caractère adoucissant des lois de comportement utilisées pour représenter le comportement de matériaux tels que le béton, qui ne nous permet pas de garantir l'unicité de la solution. La recherche d'extremum de l'énergie par la méthode des éléments finis peut alors conduire à obtenir plusieurs solutions. Parmi ces solutions, celles qui sont susceptibles d'être physiquement observables sont les solutions d'équilibre stable, invariantes sous l'effet de petites perturbations. La difficulté étant de tenir compte de la condition unilatérale d'irréversibilité de l'endommagement, qui conduit à définir le critère de stabilité comme la positivité de la dérivée seconde de l'énergie dans la direction des endommagements croissants. Ramené au cadre numérique et à une discrétisation spatiale du problème étudié, le critère de stabilité se définit comme la positivité d'un quotient de Rayleigh, écrit à partir de l'opérateur tangent des dérivées secondes et soumis à des contraintes d'inégalités. Pour étudier le signe de cette quantité, il est nécessaire d'estimer son minimum à l'aide d'un algorithme d'optimisation sous contraintes. En conclusion, l'objectif de la thèse est de rechercher un algorithme d'optimisation sous contraintes d'inégalités suffisamment efficace et robuste pour traiter des problèmes industriels à grand nombre de degrés de liberté et pouvant être adapté à des modélisations différentes, de l'implémenter dans le logiciel libre Code Aster, développé à EDF R&D, puis de le tester et de le valider sur des cas tests extraits de la littérature.

Mots clés : endommagement, non-local, matériaux adoucissants, éléments finis, stabilité, optimisation numérique sous contraintes d'inégalités

Travaux effectués au sein du Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables (LaMSID), UMR EDF/CNRS/CEA 2832, 1 avenue du Général de Gaulle, 92140 Clamart. http://www.lamsid.cnrs-bellevue.fr **Abstract :** This work is concerned with the development and the implementation of a numerical optimization algorithm in an industrial software for studying the stability of non local gradient damage numerical solutions given by finite elements method. Stability is a fundamental concept, that takes into account the existence of multiple solutions which could emerge due to the softening constitutive laws generally used to represent the irreversible damage of materials like concrete. Among all those solutions, only stable ones, invariant by little perturbations, could be physically observed. The difficulty is to satisfy the irreversible constraint of damage which drives to define a stability criterion by the positivity of the second derivative of the total energy in the direction of increasing damage. It numerically leads to ensure the positivity of the minimum of a quadratic form, using the second derivative matrix and subjected to inequalities constraints. In conclusion, the aim of this work is to implement an efficient and robust numerical constraints minimization algorithm in Code_Aster, adapted to different damage modelling, and to improve it using test cases found in the literature.

Keywords : non local damage, softening constitutive laws, finite elements method, stability, numerical optimization algorithm

Table des matières

1 Introduction			on	5
	1.1	Contex	te de la thèse	5
	1.2	Introd	uction générale	5
	1.3	Résum	lé du rapport	7
	1.4	Présen	tation du logiciel libre <i>Code_Aster</i>	8
2	App	oroche	variationnelle de l'endommagement	9
	2.1	L'appr	oche locale	10
		2.1.1	Variable d'endommagement	10
		2.1.2	Fonction perte de rigidité	11
		2.1.3	Fonction de dissipation	12
		2.1.4	Deux types de comportement mécaniques	14
		2.1.5	Formulation du problème des structures	16
		2.1.6	Propriétés variationnelles et énergétiques des modèles d'endommagement .	18
		2.1.7	Formulation variationnelle du problème d'évolution	19
		2.1.8	Problème incrémental	21
	2.2	L'appr	oche non locale	23
		2.2.1	Les motivations	23
		2.2.2	Construction	24
		2.2.3	Problème d'évolution	25
2.3 Lien avec l'approche variationnelle de la rupture fragile		vec l'approche variationnelle de la rupture fragile	27	
	2.4	2.4 Exemple 1D d'une barre en traction		27
		2.4.1	Écriture du problème d'évolution	27
		2.4.2	Cas de la solution homogène	29
		2.4.3	Cas de la solution localisée	30
2.5 Exemples		Exemp	bles de lois de comportement	33
		2.5.1	Cas d'une loi sans seuil	33
		2.5.2	Cas d'une loi avec seuil	34
	2.6	Choix	d'une formulation en compression	37
		2.6.1	Expression des contraintes	39
		2.6.2	Critère d'endommagement	40

TABLE DES MATIÈRES

	2.7	Conclusion du chapitre	42	
3	Dév	veloppement d'une modélisation nodale en gradient d'endommagement	45	
	3.1	Algorithme de Newton	47	
	3.2	Algorithme de minimisation alternée	48	
	3.3	Prise en compte de l'irréversibilité	49	
	3.4	La modélisation Lagrangienne	49	
		3.4.1 Mise en place	49	
		3.4.2 Discrétisation de l'énergie	50	
		3.4.3 Résolution incrémentale	51	
		3.4.4 Intégration de la loi de comportement aux points de Gauss	52	
		3.4.5 Calcul des forces internes	53	
		3.4.6 Choix des éléments finis	54	
		3.4.7 Avantages et inconvénients de la modélisation Lagrangienne	54	
		3.4.8 Algorithme de pilotage	55	
	3.5	La modélisation nodale	56	
		3.5.1 Calcul des forces internes	56	
		3.5.2 Choix des éléments finis	57	
		3.5.3 Choix de la méthode de résolution	57	
		3.5.4 Description de l'algorithme en Newton global	58	
		3.5.5 Description de l'algorithme en Newton sécante	59	
		3.5.6 Avantages et inconvénients de la modélisation aux nœuds	62	
	3.6	Exemples d'application	63	
		3.6.1 Endommagement d'une fibre à matrice renforcée $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	63	
		3.6.2 Endommagement fragile d'une éprouvette entaillée \ldots \ldots \ldots \ldots	68	
	3.7	Conseils d'utilisation de la formulation aux nœuds	71	
	3.8	Conclusion	73	
4	Stal	bilité des solutions	75	
	4.1	Critère de stabilité	76	
		4.1.1 Cas de la formulation nodale	76	
		4.1.2 Cas de la formulation mixte Lagrangienne	79	
	4.2	Stabilité de la solution homogène d'une barre en traction	82	
	4.3	Conclusion du chapitre	86	
5	Mét	Méthode numérique pour l'étude de stabilité		
	5.1	Recherche d'algorithmes d'optimisation sous contraintes d'inégalités	88	
		5.1.1 Sequential Quadratic Programing	89	
		5.1.2 Méthode des puissances avec projection	91	
		5.1.3 Algorithme de découpage en sous-zones potentiellement instables	95	
		5.1.4 Test des algorithmes d'optimisation sous contraintes	103	

	5.2	Algorithme développé dans Aster		
		5.2.1	Méthode de Sorensen	108
		5.2.2	Méthode de redémarrage implicite	110
		5.2.3	Méthode des puissances dans un sous espace, projetées dans l'espace global	110
	5.3	Applic	eation	112
		5.3.1	Cas de la barre en traction $\ldots \ldots \ldots$	112
		5.3.2	Cas d'un biaxial	120
		5.3.3	Cas d'un triaxial \ldots	123
		5.3.4	Cas de la fibre à matrice renforcée $\hfill \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	124
	5.4	Conclu	ision	127
6	Con	clusio	ns et perspectives	129
-				

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte de la thèse

L'enjeu lié à l'allongement de la durée de vie de certains ouvrages de génie civil appartenant à EDF, nécessite de travailler sur des problèmatiques non linéaires de plasticité et d'endommagement pouvant conduire à la ruine de la structure ou à des défauts irréversibles, trop importants pour la sûreté des installations. C'est pourquoi les méthodes et outils numériques développés afin d'obtenir des solutions proches de la réalité sont en expansion ces dernières années. Toutefois, de nombreuses difficultés sont apparues au cours du temps et notamment la non unicité des solutions associées à ce type de problème. Dans le cadre du projet de stockage des déchets radioactifs, une première thèse a été mise en œuvre au sein de EDF R&D pour tester une méthode numérique de recherche de solutions multiples (Fernandes [17]) par des considérations proches de celles des problèmes de flambage. La méthode s'est révélée efficace et robuste dans le cas des modélisations en plasticité. La suite consistait alors à reproduire la recherche de solutions multiples dans le cas de l'endommagement et à ne conserver que celles dont la validité physique est avérée. Pour cela il était nécessaire d'introduire un critère énergétique. En considération, la thèse s'inscrivait dans les projets de génie civil et méthodes numériques avancées pour la mécanique.

1.2 Introduction générale

La modélisation des matériaux fragiles est complexe du fait des mécanismes de dégradation microstructurale qui peuvent apparaître pour de faibles valeurs de la déformation et des modifications brutales des propriétés mécaniques que peuvent subir des matériaux tel que le béton, avant la création d'une fissure à l'échelle macroscopique. Pour représenter la dégradation à l'échelle de la structure on utilise la mécanique de l'endommagement, dont l'apparition remonte aux premiers travaux de Kachanov [26]. Initialement, l'endommagement était phénoménologiquement défini comme une variable interne visant à représenter localement la perte de rigidité d'un matériau. Il était ensuite essentiel de définir une loi d'évolution contrôlant la valeur de l'endommagement pour éviter le passage direct d'un état sain à un état fissuré, plus favorable du point de vue des équations telles qu'elles étaient présentées. C'est là qu'intervient le formalisme des matériaux

standards généralisés (Halphen et Nguyen [24]) qui permet, dans le cadre de processus irréversibles comme l'endommagement, de définir un formalisme énergétique favorable à la construction de lois d'évolution en distinguant l'existence d'une énergie libre ainsi que d'un potentiel de dissipation. La formulation portant sur l'endommagement a ensuite été développée et écrite plus précisemment en termes de taux de restitution d'énergie par Marigo [31], afin de formuler le lien avec la mécanique de la rupture et les travaux de Griffith [23]. C'est ainsi qu'a été construit le modèle local de l'endommagement. Toutefois, on s'est rapidement rendu compte que cette formulation entraînait une forte dépendance à l'orientation des maillages du fait d'une localisation importante de l'endommagement qui se produisait fréquemment sur une seule maille. Les équations favorisant un endommagement maximal des mailles sur lesquelles le processus démarrait. On ne pouvait également pas retrouver les effets d'échelles (Nabarro et al. [35], Stelmashenko et al. [44]). Pour s'affranchir de cette difficulté sont apparus les modèles non locaux, régularisés par l'introduction de termes de premier gradient (Triantafyllidis et Aifantis [45]). D'abord développés pour les problèmes en plasticité (Aifantis [2], Muhlaus et Aifantis [34], de Borst et Muhlaus [15], Fleck et al. [18]), puis dans le cadre de l'endommagement (Geers et al. [21,22], Comi [13], Frémond et Nédjar [20]). Dans cette formulation apparaît une longueur caractéristique, intrinsèque au matétriau, dont la définition physique ou numérique pose encore question. L'influence de la régularisation sur le phénomène de localisation a été mesurée à partir des équations linéarisées du système (Linear Comparison Solid) et exprimée en terme de perte d'ellipticité et de propagation d'ondes (Hill[25], Benallal et al. [5], Pijaudier-Cabot et Benallal [40]). Si la dépendance à l'orientation du maillage a ainsi pu être améliorée, reste le problème de la non unicité des solutions. En effet, on traite des problèmes non linéaires, avec des lois de comportement la plupart du temps adoucissantes. Pour ce type de comportement mécanique, on perd les propriétés mathématiques d'unicité de la solution (Nguyen [36]). Or on ne cherche, numériquement, qu'à vérifier les conditions du premier ordre que sont l'équilibre et le critère d'endommagement. Il est donc important de définir les conditions de stabilité du second ordre afin de ne sélectionner que les solutions avant une validité physique et vérifiant le principe de minimisation de l'énergie. Ce critère a été développé par Benalall et Marigo [6], et a été testé analytiquement lors de travaux menés par Pham et al. [37], sur le cas d'une barre en traction uniaxiale. L'objectif était d'étudier la stabilité des solutions homogènes pour différentes lois de comportement et paramètres mécaniques associés. La thèse présentée dans ce manuscrit vise à étendre ces travaux à des études plus industrielles en développant un algorithme numérique permettant d'estimer le critère de stabilité, qui s'écrit comme la minimisation d'une fonction quadratique contrainte par la condition unilatérale d'irréversibilité de l'endommagement. Il existe certains algorithmes dans la littérature qui permettent de répondre à cette problèmatique, pour des structures discrétisées en un nombre faible de degrés de liberté. Une adaptation importante était donc nécessaire pour atteindre la taille des problèmes industriels. Les étapes de construction et de validation de l'algorithme final, développé dans Code_Aster, sont présentés ici.

1.3 Résumé du rapport

Comme dit précédemment, l'un des objectifs majeurs d'EDF est l'allongement de la durée de vie de structures nucléaires. Ce qui nécessite de réaliser des études d'initiation et de propagation de fissures dans les enceintes en béton. L'objectif de la thèse répond davantage à la partie initiation que l'on cherche à représenter à l'aide de modèles d'endommagement, qui définissent le taux de fissuration. Il existe actuellement plusieurs façons de modéliser l'endommagement d'une structure. La première dite "locale", dans laquelle on effectue un calcul éléments finis sur les déplacements et on résout la loi de comportement aux points d'intégration de la méthode. C'est le premier modèle développé et également le plus simple, puisqu'il ne fait intervenir que les grandeurs directement nécessaires. Son principal défaut est de créer de fortes localisations de l'endommagement sur un élément et donc une dépendance à l'orientation des maillages trop importante et des soucis de convergence. La seconde, dite "non locale", dont l'objectif est de proposer une alternative efficace au modèle local en permettant la diffusion de l'endommagement sous forme de bandes par régularisation à l'aide de l'introduction d'un terme en gradient. On peut alors écrire la densité d'énergie de déformation ϕ de la façon suivante :

$$\phi(\varepsilon, \alpha, \nabla \alpha) = \frac{1}{2}\sigma(\varepsilon, \alpha).\varepsilon + \omega(\alpha) + \frac{c}{2}\nabla\alpha.\nabla\alpha$$
(1.1)

où ε et α représentent la déformation et l'endommagement de la structure, tandis que σ représente la contrainte subie par la structure et associée à la loi de comportement choisie. ω est la densité d'énergie de dissipation qui permet de définir l'évolution de la variable d'endommagement et c est un paramètre qui définit la largeur de la bande d'endommagement en intervenant sur l'amplitude du gradient. La construction de cette approche régularisée est développée dans le chapitre 2 du manuscrit.

Il existe deux principales méthodes numériques permettant d'effectuer des calculs éléments finis avec ce type de modèle non local :

- La méthode de résolution de Newton, qui converge pour des propagations non brutales de l'endommagement.
- La minimisation alternée qui a l'avantage d'être un algorithme descendant et donc de toujours converger vers une solution, même dans le cas de calculs présentant de fortes instabilités structurelles par évolution brutale de l'endommagement.

On décrit dans le chapitre 3 du manuscrit la construction et le développement dans *Code_Aster*, d'une méthode numérique équivalente à la minimisation alternée, obtenue en s'adaptant à l'architecture du code plus favorable à la méthode de Newton.

Une autre difficulté liée aux problèmes d'endommagement est le caractère adoucissant des lois de comportement utilisées pour représenter la dégradation irréversible des matériaux, qui ne permet pas de conserver les propriétés mathématiques d'unicité de la solution à un état de chargement donné. Il est alors important d'être en mesure de détecter l'existence de solutions multiples au problème étudié, dites solutions bifurquées, et de mettre en place un critère évaluant la qualité physique du résultat. Le critère, présenté et défini dans le chapitre 4, se base sur une étude de stabilité répondant à la problématique physique de minimisation de l'énergie. Il s'agit alors de vérifier la positivité de la dérivée seconde de l'énergie dans la direction des endommagements croissants, de façon à tenir compte de la condition unilatérale d'irréversibilité. Ce qui amène finalement à étudier la positivité d'une fonction quadratique ayant la forme d'un quotient de Rayleigh contraint. Le dernier chapitre du manuscrit de thèse décrit l'algorithme d'optimisation sous contraintes d'inégalités développé, afin d'étudier la stabilité des solutions numériquement obtenues.

1.4 Présentation du logiciel libre Code_Aster

Pour EDF, il est important de garantir la maîtrise technique et économique de ses moyens de production et de transport d'éléctricité. Dans le cadre des décisions de maintenance et d'allongement de durée de vie des centrales nucléaires, il est nécessaire de développer des modélisations qui tiennent compte de la non linéarité des phénomènes irréversibles. Code_Aster est l'outil phare d'EDF pour répondre à ce type de simulation numérique en mécanique des structures. Aster signifie "Analyse des Structures et Thermomécanique pour des Études et des Recherches". Sa réalisation a débuté en 1989. Le language de programation utilisé est le FORTRAN77. Il existe également de nombreux modules complémentaires développés en PYTHON. L'objectif étant la mise à disposition d'un outil fiable, répondant au critère d'assurance qualité, le code est principalement géré au sein de la R&D par une équipe d'ingénieurs chercheurs qui contrôlent et valident les versions d'exploitation et de développement (dont les mises à jour sont le plus souvent hebdomadaires). Il s'agit principalement d'un solveur basé sur la théorie de la mécanique des milieux continus et s'appuyant sur la méthode des éléments finis. Son code source est librement téléchargeable. Ce qui facilite son exploitation par des utilisateurs externes à EDF et participe ainsi à l'amélioration de sa fiabilité et de sa robustesse. Il possède désormais une reconnaissance et un réseau d'utilisateurs qui facilitent les échanges avec d'autres partenaires du monde de la recherche industrielle ainsi que du monde académique. Intégrée au projet Méthodes Numériques Avancées pour la Mécanique, la thèse a pour objectif d'améliorer la robustesse et l'assurance qualité des résultats fournis par le code pour les calculs de génie civil.

Chapitre 2

Approche variationnelle de l'endommagement

Sommaire

2.1	L'ap	proche locale	10
	2.1.1	Variable d'endommagement	10
	2.1.2	Fonction perte de rigidité	11
	2.1.3	Fonction de dissipation	12
	2.1.4	Deux types de comportement mécaniques	14
	2.1.5	Formulation du problème des structures	16
	2.1.6	Propriétés variationnelles et énergétiques des modèles d'endommagement	18
	2.1.7	Formulation variation nelle du problème d'évolution	19
	2.1.8	Problème incrémental	21
2.2	L'ap	proche non locale	23
	2.2.1	Les motivations	23
	2.2.2	Construction	24
	2.2.3	Problème d'évolution	25
2.3	Lien	avec l'approche variationnelle de la rupture fragile	27
2.4	Exe	mple 1D d'une barre en traction	27
	2.4.1	Écriture du problème d'évolution	27
	2.4.2	Cas de la solution homogène	29
	2.4.3	Cas de la solution localisée	30
2.5 Exemples de lois de comportement		33	
	2.5.1	Cas d'une loi sans seuil	33
	2.5.2	Cas d'une loi avec seuil	34
2.6 Choix d'une formulation en compression		37	
	2.6.1	Expression des contraintes	39
	2.6.2	Critère d'endommagement	40
2.7	Con	clusion du chapitre	42

On présente dans ce chapitre la construction des modèles d'endommagement. Dans un premier temps un modèle local (Pham et Marigo [38]), en représentant la dégradation mécanique irréversible du matériau qui conduit à sa fissuration à l'aide d'une variable thermodynamique que l'on appelle endommagement, définie en chaque point matériel et que l'on notera α . On fait alors intervenir une fonction perte de rigidité $A(\alpha)$ qui représente la dégradation des propriétés d'élasticité du matériau et une fonction de dissipation $\omega(\alpha)$, qui permet de définir la loi d'évolution de l'endommagement. Cette modélisation est la plus standard car la plus simple à formuler. Elle a toutefois rapidement montrée ses limites. On rencontre assez fréquemment un phénomène de localisation sévère de l'endommagement sur une seule maille de la structure. Ce qui a pour conséquence de concentrer la dissipation de l'énergie et ce qui conduit à une forte dépendance à l'orientation du maillage. Pour s'affranchir de ces localisations pathologiques, des modèles non-locaux ont été introduit par l'ajoût d'une régularisation permettant de tenir compte d'un voisinage. Classiquement, on introduit un terme en gradient qui peut être soit le gradient de la déformation, soit le gradient de l'endommagement. Dans notre cas, on s'intéresse plus particulièrement au cas du modèle à gradient d'endommagement (Pham et Marigo [39]).

2.1 L'approche locale

On considère que les dégradations que subit le matériau ne peuvent provenir que de l'endommagement. On traite alors les comportements fragiles. On ne tient pas compte d'autres mécanismes dissipatifs comme la plasticité. L'objectif étant de représenter des matériaux tel que le béton, cela est raisonnable. On ne s'intéresse alors qu'au cas des petites déformations.

2.1.1 Variable d'endommagement

L'endommagement sert à représenter la dégradation de la microstructure qui conduit à la création d'une fissure. Lorsque sa valeur augmente, l'endommagement de la structure s'intensifie. Il peut être fait le choix de prendre un endommagement directionnel en représentant par les variables D_1 , D_2 et D_3 les dégradations dans les directions 1,2 et 3. Ceci afin de tenir compte de possibles anisotropies des mécanismes de fissuration (Lemaître et Chaboche [27]). Partant du principe que le béton a un comportement suffisamment isotrope, avec des caractéristiques mécaniques similaires dans toutes les directions, on choisit de prendre une simple variable scalaire α , dont l'évolution dépendra de l'énergie élastique stockée dans la structure. Là encore il existe plusieurs choix. On peut soit prendre une variable qui évolue de 0 (état sain du matériau) à $+\infty$, soit fixer une valeur maximale de l'endommagement α_m à partir de laquelle on considère que la matériau est fissuré. Le second choix à l'avantage de permettre d'atteindre la fissuration. On va donc procéder de cette manière. De façon assez classique on prendra $\alpha_m = 1$. Il est désormais possible de visualiser l'orientation d'une fissure, vue comme localisation de l'endommagement à α_m , en s'intéressant aux valeurs d'endommagement orthogonales aux lèvres de la fissure.

2.1.2 Fonction perte de rigidité

On assimile l'endommagement à la génération de microfissures, qui s'additionant, vont donner lieu à la création d'une fissure macroscopique. On s'intéresse ici à la façon d'exprimer la dégradation des propriétés mécaniques du matériau en fonction de l'endommagement.

Considérons une plaque de hauteur h, de longueur L. On note S_f la partie effective d'une surface microfissurée S, dans laquelle la présence de vides modifie les caractéristiques mécaniques du matériau à l'échelle macroscopique (cf Figure 2.1).



FIG. 2.1 – Coupe 2D d'une plaque microfissurée

En l'absence de microfissures, le comportement de la plaque est élastique. La contrainte σ est en tout point égale et on peut écrire le travail de déformation élastique linéaire de la façon suivante :

$$W_e = \int \sigma : d\varepsilon \tag{2.1}$$

où ε est le tenseur des déformations de la plaque, relié en tout point au tenseur des contraintes par la relation :

$$\sigma = R\varepsilon \tag{2.2}$$

avec R la rigidité saine du matériau constituant la plaque.

En présence d'une microfissure, la contrainte effective dans la direction du chargement, supportée localement dans la zone microfissurée, a pour expression :

$$\widetilde{\sigma} = \frac{F}{S_f} \tag{2.3}$$

Sa valeur est alors strictement supérieure à la contrainte effective obtenue sur la même surface, en l'absence de vides (cas particulier où $S_f = S$). En faisant l'hypothèse de l'équivalence en déformation on peut alors considérer que la déformation obtenue, en utilisant la relation (2.2) et l'expression de la contrainte effective (2.3), est égale à la déformation du matériau endommagé (les microfissures sont remplacées par l'endommagement tel qu'il a été défini dans la partie 2.1.1), qui supporte la contrainte : $\sigma = \frac{F}{S}$. Pour compenser l'augmentation locale de la déformation, il est alors nécessaire d'introduire une fonction multiplicatrice de la rigidité, notée $A(\alpha)$, strictement monotone décroissante pour toute valeur de l'endommagement comprise entre 0 et α_m ($\forall \alpha \in [0, \alpha_m[, A'(\alpha) < 0)$). La contrainte s'exprime alors comme une fonction de la déformation et de l'endommagement, de la façon suivante :

$$\sigma(\varepsilon, \alpha) = A(\alpha)R\varepsilon \tag{2.4}$$

La fonction $A(\alpha)$ est appellée fonction perte de rigidité et son évolution est régie par les conditions aux limites suivantes :

$$\alpha = 0 \implies A(\alpha) = 1 \tag{2.5}$$

$$\alpha = \alpha_m \implies A(\alpha) = 0 \tag{2.6}$$

Si on applique le principe de minimisation de l'énergie sur les variables d'endommagement et de déformation, en remplaçant le champ de contrainte σ par son expression (2.4), on obtient pour valeur d'endommagement : $\alpha = \alpha_m$, quel que soit l'état de déformation de la plaque. Il est donc nécessaire d'introduire dans l'expression de l'énergie de déformation une fonction supplémentaire, notée $\omega(\varepsilon, \alpha)$, qui permet de contrôler l'évolution de l'endommagement en fonction de l'énergie élastique stockée.

2.1.3 Fonction de dissipation

On décrit dans cette partie les principales propriétés de la fonction ω , obtenue à partir du principe de stabilité matérielle de Drücker-Ilyushin ou positivité nécessaire de la dissipation intrinsèque (Marigo [32,33]), qui permet de justifier le caractère standard de l'évolution pour une classe variée de matériaux.

Le critère de Drücker-Ilyushin permet d'écrire sur un cycle de déformation, l'inégalité suivante portant sur le travail de déformation :

$$W_e = \oint \sigma : d\varepsilon \ge 0 \tag{2.7}$$

Considèrons un cycle particulier de déformation, de la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 & \xrightarrow{1} \\ \alpha & \xrightarrow{2} \end{cases} \begin{cases} \varepsilon_1 & \xrightarrow{2} \\ \alpha & \xrightarrow{3} \end{cases} \begin{cases} \varepsilon_1 + \delta \varepsilon & \xrightarrow{3} \\ \alpha + \delta \alpha & \xrightarrow{3} \end{cases} \begin{cases} \varepsilon_0 \\ \alpha + \delta \alpha \end{cases}$$
(2.8)

Pour le premier chargement en déformation (1), au cours duquel l'endommagement n'évolue pas, l'intégrale s'écrit de façon exacte sous la forme suivante :

$$\int_{1} \sigma : d\varepsilon = \frac{A(\alpha)}{2} (R\varepsilon_{1} : \varepsilon_{1} - R\varepsilon_{0} : \varepsilon_{0})$$
(2.9)

Lors du second chargement (2) l'endommagement s'incrémente d'une valeur $\delta \alpha$. En considérant que la variation de l'endommagement $\delta \alpha$ est suffisamment faible, on peut écrire l'intégrale associée au chargement (2) sous la forme :

$$\int_{2} \sigma : d\varepsilon = A(\alpha) R\varepsilon_{1} : \delta\varepsilon + \circ(\delta\varepsilon)$$
(2.10)

La dernière étape du cycle (3) consiste alors à relacher la déformation, jusqu'à revenir à l'état initial. L'expression de l'intégrale est alors exactement de la forme :

$$\int_{3} \sigma : d\varepsilon = \frac{A(\alpha + \delta\alpha)}{2} \left[R\varepsilon_{0} : \varepsilon_{0} - R(\varepsilon_{1} + \delta\varepsilon) : (\varepsilon_{1} + \delta\varepsilon) \right]$$
(2.11)

En sommant (2.9), (2.10) et (2.11) dans l'expression du critère (2.7) et en se limitant aux termes d'ordre 1 en $\delta \varepsilon$, on obtient finalement l'inégalité suivante :

$$-\frac{A'(\alpha)R\varepsilon_0:\varepsilon_0}{2} \le -\frac{A'(\alpha)R\varepsilon_1:\varepsilon_1}{2}$$
(2.12)

Cela signifie, pour un endommagement α fixé, que le bord du domaine élastique est une fonction indépendante de la déformation. Notant $\omega'(\alpha)$ la valeur de cette fonction pour l'état de chargement considéré :

$$\omega'(\alpha) = -\frac{1}{2}A'(\alpha)R\varepsilon_1:\varepsilon_1$$
(2.13)

on peut alors exprimer la densité d'énergie de déformation ϕ en intégrant (2.13), pour un état de déformation ε et un état d'endommagement α , sous la forme suivante :

$$\phi = \frac{1}{2}A(\alpha)R\varepsilon: \varepsilon + \omega(\alpha) \tag{2.14}$$

Propriétés de la fonction $\omega(\alpha)$:

- 1. On déduit la positivité de $\omega'(\alpha)$ de la relation (2.13) et de la décroissance de la fontion $A(\alpha)$. La fonction de dissipation $\alpha \mapsto \omega(\alpha)$ est donc strictement croissante.
- 2. En absence d'endommagement la dissipation est nulle : $\omega(0) = 0$.

Le domaine élastique se définit alors dans l'espace des déformations, par l'inégalité suivante :

$$-\frac{1}{2}A'(\alpha)R\varepsilon:\varepsilon\leq\omega'(\alpha) \tag{2.15}$$

obtenue à partir des équations (2.12) et (2.13), et la zone de charge extraite de l'inégalité (2.15) se présente sous la forme d'une ellipsoïde (cf Figure 2.2).



FIG. 2.2 – Représentation en 2D de la zone de charge

Dans l'espace des contraintes, l'inégalité (2.15) se réécrit de la façon suivante :

$$-\frac{A'(\alpha)}{2}(A(\alpha)^{-1}R^{-1}\sigma): (A(\alpha)^{-1}R^{-1}\sigma) \le \omega'(\alpha)$$
(2.16)

qui définit à nouveau une ellipsoïde.

On a donc désormais deux fonctions caractéristiques de l'évolution de l'endommagement dans la structure $[A(\alpha), \omega(\alpha)]$. En considérant le changement de variable suivant sur l'endommagement :

$$\alpha \longmapsto \frac{\omega(\alpha)}{\omega'(0)} \tag{2.17}$$

on définit la fonction de dissipation comme une application linéaire. De façon générale, on peut donc toujours se ramener à une fonction de dissipation de la forme :

$$\omega: \alpha \longmapsto k\alpha \tag{2.18}$$

où k est une constante. Ce qui peut permettre de simplifier la description du problème.

2.1.4 Deux types de comportement mécaniques

Le matériau endommageable peut présenter deux formes de comportements mécaniques. Soit un comportement adoucissant, caractérisé par une diminution de la limite d'élasticité lors d'un chargement en déformation croissante. Soit un comportement durcissant qui, au contraire, permet une augmentation du seuil d'élasticité. On présente ci-dessous le lien entre ces comportements et les propriétés mathématiques des fonctions de perte de rigidité et de souplesse, définie comme l'inverse de la rigidité :

$$S(\alpha) = \frac{1}{A(\alpha)} \tag{2.19}$$

Définition de l'adoucissement :

Le domaine élastique, défini dans la partie précédente, diminue dans l'espace des contraintes alors qu'il augmente dans l'espace des déformations.

Définition du durcissement :

Les domaines d'élasticité augmentent dans l'espace des déformations et dans l'espace des contraintes.



FIG. 2.3 – Représentation des comportements durcissant et adoucissant à partir de la courbe de réponse contrainte-déformation

Propriété de la fonction $A(\alpha)$:

La fonction perte de rigidité est convexe dans les deux cas de comportement.

<u>Preuve :</u>

Considérons un état de déformation ε et un état d'endommagement α vérifiant le critère d'endommagement suivant :

$$-\frac{A'(\alpha)}{2}R\varepsilon:\varepsilon=k \tag{2.20}$$

obtenu en considérant la fonction de dissipation comme une application linéaire.

Alors l'état de déformation ε est également présent dans le domaine élastique pour une faible variation de l'endommagement $\alpha + \delta \alpha$:

$$-\frac{A'(\alpha+\delta\alpha)}{2}R\varepsilon:\varepsilon\leq k\tag{2.21}$$

En remplaçant k dans (2.21), par son expression (2.20), on obtient finalement :

$$A^{''}(\alpha) \ge 0 \tag{2.22}$$

La fonction perte de rigidité $A(\alpha)$ est donc convexe, que l'on se trouve dans le cas d'un matériau adoucissant ou durcissant.

Fin de la preuve.

Propriété de la fonction $S(\alpha)$:

- Dans le cas d'un matériau durcissant, la fonction souplesse est concave : $S''(\alpha) < 0$.
- Dans le cas d'un matériau adoucissant, la fonction souplesse est convexe : $S''(\alpha) > 0$.

Preuve :

En utilisant la définition (2.19) de la souplesse S et en considérant à nouveau une fonction de dissipation linéaire, on peut définir le bord du domaine élastique, à partir d'un état de contrainte σ et d'un état d'endommagement α vérifiant l'égalité :

$$\frac{S'(\alpha)}{2}R^{-1}\sigma:\sigma=k \tag{2.23}$$

Dans le cas durcissant, le domaine d'élasticité augmente. $\alpha + \delta \alpha$ doit donc vérifier l'inégalité :

$$\frac{S'(\alpha + \delta\alpha)}{2} R^{-1} \sigma : \sigma \le k \tag{2.24}$$

En remplaçant k dans (2.24) par son expression (2.23) on obtient finalement : $S''(\alpha) \leq 0$. Le matériau est donc durcissant si et seulement si la fonction souplesse associée est concave. Inversement, si l'on se place dans le cas adoucissant, $\alpha + \delta \alpha$ ne vérifie pas l'inégalité (2.24) et on montre alors que la fonction souplesse $\alpha \longmapsto S(\alpha)$ est convexe.

Fin de la preuve.

Expérimentalement, on observe que les courbes contraintes-déformations associées au béton sous chargement de traction simple, présentent une première phase durcissante après la phase élastique (Ramtani et al. [42]). Elles ne deviennent adoucissantes que dans une troisième phase.

2.1.5 Formulation du problème des structures

Soit Ω un domaine de définition de la structure, $\rho(t)$ une force volumique subie par la structure, F(t) un chargement en force imposée sur le bord $\partial_F \Omega$ et U(t) un chargement en déplacement imposé sur le bord $\partial_D \Omega$ (cf Figure 2.4).

On se donne un chargement qui ne tient pas compte de l'inertie, une dépendance au temps pour représenter l'importance de l'historique de chargement et une condition initiale en endommagement :

$$\alpha(x,t=0) = \alpha_0(x) \tag{2.25}$$



FIG. 2.4 – Représentation de la structure et des chargements

Il s'agit de trouver les états de déplacement u(x,t) et d'endommagement $\alpha(x,t)$ vérifiant l'équilibre de la structure, les conditions initiales et la loi d'évolution de l'endommagement.

Pour rappel, l'équilibre de la structure s'écrit dans Ω :

$$div\sigma + \rho(t) = 0 \tag{2.26}$$

et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \sigma.n = F(t) \operatorname{sur} \partial_F \Omega\\ u = U(t) \operatorname{sur} \partial_D \Omega \end{cases}$$
(2.27)

La loi de comportement s'écrit :

$$\sigma = A(\alpha)R\varepsilon \tag{2.28}$$

et la loi d'évolution :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} \ge 0 \\ -\frac{A'(\alpha)}{2} R\varepsilon : \varepsilon \le k \\ \left(k + \frac{A'(\alpha)}{2} R\varepsilon : \varepsilon\right) . \dot{\alpha} = 0 \end{cases}$$
(2.29)

Ajouter à la condition initiale sur l'endommagement (2.25), on définit le problème local, dont la résolution numérique est simplifiée par l'introduction d'une approche variationnelle.

2.1.6 Propriétés variationnelles et énergétiques des modèles d'endommagement

Le travail des déformations est une fonction d'état. Si l'on repart de l'expression intégrale :

$$\int_{0}^{t} \sigma(t) : \dot{\varepsilon}(t) dt = \int_{0}^{t} A(\alpha(t)) R\varepsilon(t) : \dot{\varepsilon}(t) dt$$
(2.30)

$$= \int_{0}^{t} A(\alpha(t)) R\varepsilon(t) : \dot{\varepsilon}(t) + \int_{0}^{t} \left(\frac{1}{2}A'(\alpha(t)) R\varepsilon(t) : \varepsilon(t) + k\right) \dot{\alpha}(t) dt (2.31)$$
$$= \int_{0}^{t} \frac{d}{2\pi} \left(\frac{1}{2}A(\alpha(t)) R\varepsilon(t) : \varepsilon(t) + k\alpha(t)\right) dt$$
(2.32)

$$= \int_0^t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} A(\alpha(t)) R\varepsilon(t) : \varepsilon(t) + k\alpha(t) \right) dt$$
(2.32)

et que l'on note :

$$\phi^{elas} = \frac{1}{2}A(\alpha)R\varepsilon:\varepsilon$$
(2.33)

la densité d'énergie élastique de la structure à un état d'endommagement α fixé, et :

$$\phi^{diss} = \omega(\alpha) = k\alpha \tag{2.34}$$

la densité d'énergie dissipée par le phénomène d'endommagement (cf Figure 2.5), on peut alors écrire la densité d'énergie totale de déformation ϕ sous la forme :

$$\phi(\varepsilon, \alpha) = \phi^{elas}(\varepsilon, \alpha) + \phi^{diss}(\alpha) \tag{2.35}$$



FIG. 2.5 – Représentation de l'énergie dissipée au cours d'un processus d'endommagement

où ϕ présente les propriétés suivantes :

Propriétés de ϕ

- 1. ϕ est convexe par rapport à ε à α fixé. Cela découle directement de la positivité de $A(\alpha)$.
- 2. ϕ est convexe par rapport à α à ε fixé par convexité de $A(\alpha)$.
- 3. ϕ est convexe par rapport au couple (ε, α) si et seulement si le modèle est durcissant :

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon \partial \alpha} \\ \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha \partial \varepsilon} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} A(\alpha)R & A'(\alpha)R\varepsilon \\ \\ \\ A'(\alpha)R\varepsilon & \frac{1}{2}A''(\alpha)R\varepsilon : \varepsilon \end{pmatrix} \ge 0 \iff S'' \le 0$$
(2.36)

Ce qui est la condition nécessaire sur la souplesse pour que le modèle soit durcissant (cf partie 2.1.4).

2.1.7 Formulation variationnelle du problème d'évolution

Les hypothèses quasi-statique et des petits déplacements sont conservées. L'équilibre et les conditions aux limites sont les mêmes que précédemment.

A partir de la densité d'énergie ϕ introduite en (2.35), on réécrit la loi de comportement, obtenue par dérivation première par rapport à la déformation :

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \alpha) \tag{2.37}$$

ainsi que le critère d'évolution de l'endommagement, obtenu par dérivation première par rapport à l'endommagement :

$$\dot{\alpha} \ge 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha) \ge 0$$
(2.38)
$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha) . \dot{\alpha} = 0$$

Propriété 1 :

On montre que l'on a équivalence entre la formulation du critère d'évolution (2.38) et la suivante, qui couple les deux dernières équations :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} \ge 0 \\ \\ \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha).(\beta - \dot{\alpha}) \ge 0, \, \forall \beta \ge 0 \end{cases}$$
(2.39)

Preuve :

L'implication de la première formulation à la seconde est évidente du fait de la positivité de β . Montrons que la seconde formulation implique la première. En prenant dans un premier temps : $\beta = 2\dot{\alpha}$ dans (2.39), on déduit l'inégalité :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha).\dot{\alpha} \ge 0 \tag{2.40}$$

Puis on prenant : $\beta = \frac{\dot{\alpha}}{2}$, on montre alors que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha).\dot{\alpha} \le 0 \tag{2.41}$$

En combinant (2.40) et (2.41) on retrouve donc l'égalité :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha).\dot{\alpha} = 0 \tag{2.42}$$

Ce qui donne, en reportant (2.42) dans (2.39), l'inégalité suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha).\beta \ge 0, \,\forall \beta \ge 0 \tag{2.43}$$

L'application linéaire $\beta \longmapsto \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha)$. β est donc à valeur de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ . Cela signifie exactement :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha) \ge 0 \tag{2.44}$$

Ce raisonnement est local, mais son intégration sur la structure entière Ω permet de retrouver l'équivalence globale.

Fin de la preuve.

Notons ensuite : $D = \{\beta \in H^1(\Omega) : \beta \ge 0\}$ et $V = \{v \in H^1(\Omega) : v = U \text{ sur } \partial_D \Omega\}$. Partant de l'équilibre (2.26), on peut écrire pour tout $v \in V$:

$$0 = \int_{\Omega} (div\sigma + \rho).(v - \dot{u})dx$$
(2.45)

$$\implies 0 = -\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v - \dot{u})dx + \int_{\partial\Omega} \sigma .n(v - \dot{u})dS + \int_{\Omega} \rho .(v - \dot{u})dx \qquad (2.46)$$

$$\implies 0 = -\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \left(\varepsilon \left(u \right), \alpha \right) : \varepsilon \left(v - \dot{u} \right) dx + \int_{\partial_F \Omega} F \left(v - \dot{u} \right) dS +$$
(2.47)

$$\int_{\Omega} \rho (v - \dot{u}) dx \tag{2.48}$$

En notant ensuite W le travail des forces extérieures :

$$W(v - \dot{u}) = \int_{\partial_F \Omega} F.(v - \dot{u})dS + \int_{\Omega} \rho.(v - \dot{u})dx$$
(2.49)

pour des raisons de simplification, on peut alors réécrire le problème variationnel sous la forme :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \left(\varepsilon \left(u \right), \alpha \right) : \varepsilon (v - \dot{u}) dx = W(v - \dot{u}), \, \forall v \in V \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \left(\varepsilon \left(u \right), \alpha \right) . (\beta - \dot{\alpha}) dx \ge 0, \, \forall \beta \in D \end{cases}$$

$$(2.50)$$

Ce problème variationnel est strictement équivalent au problème d'évolution écrit précédemment. En regoupant les deux intégrales, il peut également être mis sous la forme d'une seule inégalité :

$$\forall (v,\beta) \in V \times D, \tag{2.51}$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \left(\varepsilon \left(u \right), \alpha \right) : \varepsilon \left(v - \dot{u} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \left(\varepsilon \left(u \right), \alpha \right) . (\beta - \dot{\alpha}) \right] dx \ge W(v - \dot{u})$$
(2.52)

Si l'on introduit maintenant l'énergie totale de la structure P, dans un état (u, α) , qui s'exprime comme la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie dissipée :

$$P(u,\alpha) = \int_{\Omega} \phi(\varepsilon(u),\alpha) \, dx - W(u) \tag{2.53}$$

on obtient à partir de la dérivée première directionelle de P, le problème variationnel associé au problème d'évolution :

$$P'(u,\alpha).(v-\dot{u},\beta-\dot{\alpha}) \ge 0, \,\forall (v,\beta) \in V \times D$$
(2.54)

Remarque : P possède les mêmes propriétés de convexité que ϕ .

2.1.8 Problème incrémental

On effectue une discrétisation du problème en temps. Soit *i* l'indice du pas de temps correspondant à un certain incrément de chargement. On recherche alors la suite des (u_i, α_i) qui vérifie :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{\Delta t}; \, \dot{u} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \\ \beta = \frac{\gamma - \alpha_{i-1}}{\Delta t}; \, v = \frac{w - u_{i-1}}{\Delta t} \end{cases}$$
(2.55)

et le problème variationnel (2.54) écrit sous la forme discrétisée :

$$P_i'(u_i, \alpha_i).(w - u_i, \gamma - \alpha_i) \ge 0, \,\forall (w, \gamma \ge \alpha_{i-1}) \in V \times D$$
(2.56)

Il est dès lors possible de formuler la propriété suivante :

Propriété 1 :

Dans le cas d'un matériau durcissant, le problème incrémental est équivalent au problème de minimiastion de l'énergie totale de la structure au pas de temps i, sous le chargement correspondant et sous la contrainte $\alpha_i \ge \alpha_{i-1}$.

Preuve :

On considère le cas général. La propriété 1 et alors équivalente à la proposition :

Soit $J: X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe et K un sous ensemble convexe de X. Alors le problème de minimisation de J sur K est équivalent à l'inégalité variationnelle :

$$x \in K, J'(x).(y-x) \ge 0, \forall y \in K$$
 (2.57)

Démonstration de la première implication :

Soit $x \in K$ minimisant la fonctionnelle J sur K. Alors par définition du minimum :

$$\forall y \in K, \ J(y) - J(x) \ge 0 \tag{2.58}$$

Par convexité de K on a également :

$$\forall y \in K, \forall \theta \in]0, 1], \ (1 - \theta)x + \theta y \in K$$
(2.59)

A partir de (2.59) et (2.58) on peut alors écrire :

$$\forall y \in K, \forall \theta \in]0,1], \ \frac{1}{\theta} \left[J((1-\theta)x + \theta y) - J(x) \right] \ge 0$$
(2.60)

Puis par passage à la limite :

$$\forall y \in K, \ \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta} \left[J((1-\theta)x + \theta y) - J(x) \right] \ge 0$$
(2.61)

Soit exactement, par définition de la dérivée :

$$\forall y \in K, \ J'(x).(y-x) \ge 0$$
 (2.62)

Démonstration de la réciproque : Soit $x \in K$ tel que :

$$\forall y \in K, J'(x).(y-x) \ge 0$$
 (2.63)

Alors par convexité de K et de J :

$$\forall \theta \in]0,1], \ J((1-\theta)x + \theta y) \le (1-\theta)J(x) + \theta J(y)$$
(2.64)

Ce que l'on peut réécrire de la façon suivante :

$$\forall \theta \in]0,1], \ \frac{1}{\theta} \left[J((1-\theta)x + \theta y) - J(x) \right] \le J(y) - J(x)$$

$$(2.65)$$

Soit exactement, par passage à la limite et par définition de la dérivée :

$$\forall y \in K, \ J'(x).(y-x) \le J(y) - J(x)$$
 (2.66)

On déduit alors de l'inégalité (2.63) :

$$\forall y \in K, J(y) - J(x) \ge 0 \tag{2.67}$$

Ce qui singifie que x minimise la fonctionnelle J sur le sous-ensemble K. D'où l'équivalence.

Fin de la preuve.

En conséquence, si le matériau est strictement durcissant, l'énergie est strictement convexe et on a alors unicité de la réponse au problème incrémental. Dans le cas adoucissant, on sait seulement que le problème d'évolution est équivalent à l'inéquation variationnelle. On n'a donc plus de propriétés mathématiques d'unicité de la solution. Il est donc nécessaire d'introduire les notions de branches bifurquées et de stabilité. Ce qui sera fait dans le chapitre 4.

2.2 L'approche non locale

2.2.1 Les motivations

Les modèles locaux favorisent la localisation de l'endommagement sur des bandes infiniment étroites, car cela permet de diminuer l'énergie élastique dans la structure, sans dissipation. Pour empécher ce phénomène pathologique, il faut pénaliser la localisation en contraignant la diffusion de l'endommagement sur des bandes d'épaisseurs non négligeables. On construit ainsi des modèles régularisés, dits non locaux. On retrouve dans la littérature 3 principaux modèles non locaux :

Le modèle à déformation régularisée, dans lesquel on introduit une nouvelle variable liée à la déformation locale par une équation de régularisation de type moindre carré avec pénalisation du gradient, que l'on résout simultanément avec l'équation d'équilibre classique. Les déformations régularisées sont utilisées pour le calcul de l'évolution des variables internes seules. Cette méthode est une bonne alternative à la dépendance pathologique du modèle local à l'orientation des maillages. Toutefois, la largeur des bandes d'endommagement obtenues à la fin des calculs est bien souvent trop importante pour représenter un chemin de fissuration et a le désavantage de continuer à s'agrandir, même dans les zones en décharges, lors de la rupture.

- Le modèle de type intégral qui consiste à construire des domaines de contour semblables à ce qui est fait dans les modèles de rupture.
- Le modèle à gradient d'endommagement qui consiste à ajouter dans l'énergie de déformation un terme en gradient d'endommagement. Cela permet de diffuser l'endommagement sur une bande de largeur non nulle que l'on contrôle numériquement. C'est le modèle que l'on va privilégier pour sa simplicité et son aptitude à représenter une fissure.

2.2.2 Construction

La construction est purement énergétique. On commence par considérer que le gradient d'endommagement $\nabla \alpha$ est une variable du modèle, au même titre que l'endommagement α et la déformation ε . On se limite à un cadre linéaire et on suppose ainsi que ϕ peut se développer jusqu'au deuxième ordre au voisinage de $\varepsilon = 0$ et $\nabla \alpha = 0$. On postule alors la forme de la densité d'énergie de déformation ϕ en fonction de $(\varepsilon, \alpha, \nabla \alpha)$:

$$\phi(\varepsilon,\alpha,\nabla\alpha) = \omega(\alpha) + \sigma_0(\alpha) : \varepsilon + q(\alpha).\nabla\alpha + \frac{A(\alpha)}{2}R\varepsilon : \varepsilon + C(\alpha)\varepsilon.\nabla\alpha + \frac{1}{2}L(\alpha)\nabla\alpha.\nabla\alpha \quad (2.68)$$

où $A(\alpha)$ et $\omega(\alpha)$ sont les fonctions scalaires définies en (2.1.2) et (2.1.3), $\sigma_0(\alpha)$ est le tenseur des précontraintes, $q(\alpha)$ un vecteur et $C(\alpha)$ et $L(\alpha)$ sont respectivement des tenseurs d'ordre 3 et 2. Si l'on suppose en plus que le matériau est isotrope, alors par invariance de l'endommagement par changement de référentiel, on doit vérifier que $\phi(\varepsilon, \alpha, \nabla \alpha)$ ne dépend que des "invariants". Cette condition n'est possible que si $\sigma_0(\alpha)$ est un tenseur sphérique, $q(\alpha)$ et $C(\alpha)$ sont nuls et que $L(\alpha)$ est une matrice proportionnelle à l'idéntité I_d . Soit :

$$\implies \sigma_0(\alpha) = p_0(\alpha)I_d \tag{2.69}$$

$$q(\alpha) = 0 \tag{2.70}$$

$$C(\alpha) = 0 \tag{2.71}$$

$$L(\alpha) = l(\alpha)I_d \tag{2.72}$$

avec $p_0(\alpha)$ et $l(\alpha)$ des fonctions scalaires de l'endommagement.

En reportant (2.69), (2.70), (2.71) et (2.72) dans (2.68), on obtient l'expression suivante de ϕ :

$$\phi(\varepsilon, \alpha, \nabla \alpha) = \omega(\alpha) + p_0(\alpha)tr(\varepsilon) + \frac{A(\alpha)}{2}R\varepsilon : \varepsilon + \frac{l(\alpha)}{2}\nabla\alpha.\nabla\alpha$$
(2.73)

Par dérivation par rapport aux déformations, on obtient ensuite l'expression du champ de contrainte :

$$\sigma = p_0(\alpha)I_d + A(\alpha)R\varepsilon \tag{2.74}$$

Dans le modèle non local, on ne tient pas compte du terme des précontraintes. On néglige donc $p_0(\alpha)$.

Ensuite, pour des raisons évidentes de régularisation, on doit prendre $l(\alpha) > 0$. Dans le cas contraire on chercherait à diminuer localement l'énergie. Ce qui n'est pas la réponse souhaitée. En introduisant une longueur de référence l et en utilisant le changement de variable suivant :

$$\alpha \longmapsto \int_0^\alpha \sqrt{\frac{l(a)}{E_0 l^2}} da \tag{2.75}$$

où E_0 est le module de Young du matériau sain, on peut finalement exprimer la densité d'énergie de déformation sous la forme suivante :

$$\phi(\varepsilon, \alpha, \nabla \alpha) = \frac{1}{2} A(\alpha) R \varepsilon : \varepsilon + \omega(\alpha) + \frac{1}{2} E_0 l^2 \nabla \alpha . \nabla \alpha$$
(2.76)

2.2.3 Problème d'évolution

En intégrant le terme en gradient d'endommagement dans l'expression de l'énergie totale et en considérant que $\nabla \alpha$ n'est autre que l'application : $\alpha \mapsto \nabla \alpha$, on peut désormais écrire :

$$P(u,\alpha) = \int_{\Omega} \phi\left(\varepsilon\left(u\right), \alpha, \nabla\alpha\right) dx - \int_{\Omega} \rho.u dx - \int_{\partial_{F}\Omega} F.u dS$$
(2.77)

où $\phi(\varepsilon(u), \alpha, \nabla \alpha)$ reprend l'expression (2.76).

En reprenant les notations de la partie 2.1.7, on rappelle ensuite l'inéquation variationnelle (2.54), également valable pour l'approche non locale :

$$P'(u,\alpha).(v-\dot{u},\beta-\dot{\alpha}) \ge 0, \,\forall (v,\beta) \in V \times D$$
(2.78)

que l'on va développer, de sorte à obtenir le problème d'évolution.

On commence par dériver (2.77). On obtient alors pour tout $(v, \beta) \in V \times D$:

$$P'(u,\alpha).(v-\dot{u},\beta-\dot{\alpha}) = \int_{\Omega} A(\alpha)R\varepsilon(u):\varepsilon(v-\dot{u}) -$$
(2.79)

$$\int_{\Omega} \rho (v - \dot{u}) dx - \int_{\partial_F \Omega} F (v - \dot{u}) dS +$$
(2.80)

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} A^{'}(\alpha) R \varepsilon(u) : \varepsilon(u) + \omega^{'}(\alpha) \right) (\beta - \dot{\alpha}) +$$
(2.81)

$$\int_{\Omega} E_0 l^2 \nabla \alpha . \nabla (\beta - \dot{\alpha}) dx \tag{2.82}$$

Le cas particulier où $\beta = \dot{\alpha}$ permet ensuite de retrouver l'équilibre sur Ω et les conditions aux limites sur $\partial_F \Omega$ et $\partial_D \Omega$:

$$\begin{cases} div\sigma + \rho = 0 \text{ sur } \Omega \\ \sigma.n = F \text{ sur } \partial_F \Omega \\ u = U \text{ sur } \partial_D \Omega \end{cases}$$
(2.83)

Ce qui permet d'éliminer (2.79) et (2.80) de l'expression de la dérivée, de sorte à avoir désormais :

$$P'(u,\alpha).(v-\dot{u},\beta-\dot{\alpha}) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}A'(\alpha)R\varepsilon(u):\varepsilon(u)+\omega'(\alpha)\right)(\beta-\dot{\alpha})dx + (2.84)$$

$$\int_{\Omega} E_0 l^2 \nabla \alpha . \nabla (\beta - \dot{\alpha}) dx \tag{2.85}$$

Puis, en intégrant par parties (2.84) et (2.85), l'inéquation variationnelle (2.78) s'écrit finalement pour tout $\beta \ge 0$:

$$0 \leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} A'(\alpha) R\varepsilon(u) : \varepsilon(u) + \omega'(\alpha) - E_0 l^2 \Delta \alpha \right) . (\beta - \dot{\alpha}) dx + \int_{\partial_{\Omega}} E_0 l^2 \frac{\partial \alpha}{\partial n} (\beta - \dot{\alpha}) dS \qquad (2.86)$$

Différents choix de la fonction test β permettent alors d'obtenir les deux inégalités suivantes. La première écrite sous la forme volumique :

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}A'(\alpha)R\varepsilon(u):\varepsilon(u)+\omega'(\alpha)-E_0l^2\Delta\alpha\right).(\beta-\dot{\alpha})\geq 0, \,\forall\beta\geq 0\\ \dot{\alpha}\geq 0 \end{cases}$$
(2.87)

et la seconde écrite sous la forme surfacique :

$$\begin{cases} E_0 l^2 \frac{\partial \alpha}{\partial n} . (\beta - \dot{\alpha}) \ge 0, \, \forall \beta \ge 0 \\ \dot{\alpha} \ge 0 \end{cases}$$
(2.88)

En prenant dans (2.87) et (2.88) les cas particuliers $\beta = \frac{\dot{\alpha}}{2}$ puis $\beta = 2\dot{\alpha}$, on montre finalement :

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}A'(\alpha)R\varepsilon(u):\varepsilon(u)+\omega'(\alpha)-E_0l^2\Delta\alpha\right).\dot{\alpha}=0\\ E_0l^2\frac{\partial\alpha}{\partial n}.\dot{\alpha}=0 \text{ sur }\partial_\Omega \end{cases}$$
(2.89)

En reportant ensuite (2.89) dans (2.87), on déduit la forme non locale du problème d'évolution en α , sous la forme volumique :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}A'(\alpha)R\varepsilon(u):\varepsilon(u)+\omega'(\alpha)-E_0l^2\Delta\alpha\geq 0\\ \dot{\alpha}\geq 0 \end{cases}$$
(2.90)

Puis on fait de même en surfacique, en reportant (2.89) dans (2.88):

$$\begin{cases} E_0 l^2 \frac{\partial \alpha}{\partial n} \ge 0\\ \dot{\alpha} \ge 0 \end{cases}$$
(2.91)

2.3 Lien avec l'approche variationnelle de la rupture fragile

En mécanique de la rupture, la fissuration est représentée par la création et la propagation de surface de discontinuité du champ de déplacement. En considérant un solide $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, les fissures, notées Γ , sont représentées par des surfaces de dimension n-1. Le problème quasi-statique à résoudre en mécanique de la rupture revient alors à déterminer le champ de déplacement u et l'état d'avancement de la fissure Γ , en fonction du chargement imposé. L'approche variationnelle de la rupture fragile formule le problème d'évolution comme un problème de minimisation sur l'énergie fonctionnelle de Griffith, sous la contrainte d'irréversibilité de l'état de fissuration (Francfort et Marigo [19]) :

$$F(u,\Gamma) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} R\varepsilon(u) \varepsilon(u) d\Omega + G_c H^{n-1}(\Gamma)$$
(2.92)

où $H^{n-1}(\Gamma)$ est une mesure de Γ représentant l'énergie de surface nécessaire à la création de la fissure (une longueur de fissure si n = 2 et une surface si n = 3). L'énergie totale écrite en (2.92) est donc la somme de cette énergie de surface et de l'énergie élastique stockée dans la structure. La constante G_c , appellée constante de Griffith, désigne alors la dureté du matériau ou plus précisement l'énergie nécessaire à la création d'une fissure d'une unité de surface, en accord avec la théorie de Griffith (Griffith [23]).

Il existe une analogie directe entre la formulation énergétique du modèle régularisé en gradient de l'endommagement, présentée en (2.76) et la formulation associée à la mécanique de la rupture (2.92), qui s'écrivent toutes deux comme la somme d'une énergie élastique stockée dans la structure et d'une énergie de dissipation (volumique pour l'endommagement et surfacique pour la rupture). La théorie de la Gamma-Convergence montre d'ailleurs que le minimum global de la fonctionnelle régularisée en gradient d'endommagement (2.76) converge vers le minimum global de la fonctionnelle de Griffith (2.92) pour une longueur interne l qui tend vers 0. Démontrant par la même occasion, qu'il est possible de relier la fonction de dissipation $\omega(\alpha)$ au coefficient de Griffith G_c et à la longueur interne l par la relation :

$$G_c = 2\sqrt{2l} \int_0^1 \sqrt{E_0 \omega(\beta)} d\beta$$
(2.93)

2.4 Exemple 1D d'une barre en traction

2.4.1 Écriture du problème d'évolution

On considère une barre de taille L, représentée en Figure 2.6, que l'on fixe en sa base x = 0et que l'on charge en déplacements imposés $U_t = tL$ à son extrémité x = L.

Les déplacements admissibles dans la barre doivent satisfaire les conditions aux limites suivantes :

$$u_t(x=o) = 0, u_t(x=L) = U_t$$
 (2.94)



FIG. 2.6 – Représentation de la barre 1D en traction

et le cadre unidimensionnel permet d'écrire :

$$R = E_0 \tag{2.95}$$

L'expression de l'énergie totale peut donc être formulée de la façon suivante :

$$P(u_t, \alpha_t) = \int_0^L \left(\frac{1}{2}A(\alpha_t)E_0u_t^{\prime 2} + \omega(\alpha_t) + \frac{1}{2}E_0l^2\alpha_t^{\prime 2}\right)dx$$
(2.96)

L'absence de forces volumiques appliquées sur la barre permet d'écrire l'équation d'équilibre de la façon suivante :

$$\sigma' = 0 \tag{2.97}$$

Ce qui signifie que la contrainte est uniforme dans la barre et, notant $\sigma=\sigma_t$:

$$A(\alpha_t(x))E_0u_t' = \sigma_t \tag{2.98}$$

$$\implies \int_{0}^{L} u_t'(x) dx = \sigma_t \int_{0}^{L} S(\alpha_t(x)) dx \qquad (2.99)$$

où la souplesse $S(\alpha_t)$ est ici une fonction, définie comme l'inverse de la rigidité :

$$S(\alpha_t) = \frac{1}{A(\alpha_t)E_0} \tag{2.100}$$

Soit finalement :

$$\sigma_t = \frac{U_t}{\int\limits_0^L S(\alpha_t(x))dx}$$
(2.101)

Le critère, obtenu par dérivation par rapport à l'endommagement, a lui pour expression :

$$\frac{E'(\alpha_t(x))u_t^{\prime 2}}{2} + \omega'(\alpha_t(x)) + E_0 l^2 \alpha_t''(x) \ge 0$$
(2.102)

On peut donc écrire le problème d'évolution, associé au cas test de la barre en traction, sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\alpha_t} \ge 0, \, \alpha_0 = 0 \\ -E_0 l^2 {\alpha_t}'' + \frac{1}{2} A(\alpha_t)' E_0 {u_t}'^2 + \omega'(\alpha_t) \ge 0 \\ \dot{\alpha_t}. \left(-E_0 l^2 {\alpha_t}'' + \frac{1}{2} A(\alpha_t)' E_0 {u_t}'^2 + \omega'(\alpha_t) \right) = 0 \\ \alpha_t'(0) \ge 0, \, \alpha_t'(L) \ge 0 \end{cases}$$
(2.103)

où $\dot{\alpha}_t$ est la dérivée temporelle de α_t .

Il existe deux types de solutions en endommagement vérifiant le problème d'évolution (2.103). La première est la solution homogène que l'on traite en 2.4.2. La seconde est la solution localisée qui concentre l'endommagement sur un domaine d'épaisseur D, que l'on traite en 2.4.3.

2.4.2 Cas de la solution homogène

On s'intéresse ici uniquement à la solution homogène, associée à un endommagement et à une déformation uniforme dans toute la barre. Considérant les conditions aux limites (2.94) :

$$u_t(x) = tx, u_t'(x) = t \text{ et } \sigma_t = tA(\alpha_t)E_0$$
 (2.104)

on peut alors réécrire le critère d'endommagement, lui aussi homogène dans toute la barre, sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{t^2 A'(\alpha_t) E_0}{2} + \omega'(\alpha_t) \ge 0\\ \dot{\alpha}_t \left(\frac{t^2 A'(\alpha_t) E_0}{2} + \omega'(\alpha_t) \right) = 0 \end{cases}$$
(2.105)

Au cours de l'étude, le matériau va présenter deux phases de comportement :

Une première phase au cours de laquelle la barre est elastique. Elle se déforme sans s'endommager jusqu'à un certain chargement limite, que l'on note U_e et qui s'exprime sous la condition :

$$\frac{t^2 A'(0) E_0}{2} + \omega'(0) = 0 \Longrightarrow U_e = L \sqrt{\frac{-2\omega'(0)}{A'(0)E_0}}$$
(2.106)

On déduit alors de (2.101) l'expression suivante de la contrainte limite d'élasticité :

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{2\omega'(0)}{S'(0)}}$$
(2.107)

Puis une seconde phase, une fois le critère atteint, au cours de laquelle la barre s'endommage uniformément à α_t . On applique alors un chargement $U_t \ge U_e$ associé à une contrainte :

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{2\omega'(\alpha_t)}{S'(\alpha_t)}} \tag{2.108}$$

et on définit la contrainte maximale supportée par la barre σ_M de la façon suivante :

$$\sigma_M = \max_{\alpha \in [0,1(\sqrt{\frac{2\omega'(\alpha)}{S'(\alpha)}}}$$
(2.109)

2.4.3 Cas de la solution localisée

On s'intéresse au deuxième type de solution vérifiant le problème d'évolution (2.103), qui localise l'endommagement sur une zone délimitée par la longueur interne l. On montre ici les principales étapes de construction de ces solutions, qui permettent de retrouver la relation avec le coefficient de Griffith (2.93) établie dans la partie 2.3.

On commence par rechercher le profil d'endommagement. Pour cela, on note $\sigma \in [0, \sigma_M]$ la contrainte dans la barre à l'équilibre et $\Upsilon = (x_0 - D, x_0 + D)$ la zone de la barre endommagée, où $x_0 \in (0, L)$ est un point arbitraire de la barre et 2D l'épaisseur de la localisation vérifiant :

$$x_0 - D \ge 0 \text{ et } x_0 + D \le L \tag{2.110}$$

Le critère (2.102) s'annule en tout point de Υ :

$$-\sigma^2 S'(\alpha) + 2\omega'(\alpha) - 2E_0 l^2 \alpha'' = 0$$
(2.111)

et $\alpha = 0$ en dehors de Υ .

On a, par continuité de α et de α' :

$$\alpha(x_0 \pm D) = \alpha'(x_0 \pm D) = 0 \tag{2.112}$$

En multipliant ensuite (2.111) par α' , puis en intégrant par rapport à x, on obtient dans Υ la relation suivante :

$$-\sigma^{2}S(\alpha) + 2\omega(\alpha) - 2E_{0}l^{2}{\alpha'}^{2} = C$$
(2.113)

où C est une constante, que l'on détermine en se plaçant au point $x_0 \pm D$ et en utilisant les relations $S(0) = \frac{1}{E_0}$ et $\omega(0) = 0$:

$$C = \frac{-\sigma^2}{E_0} \tag{2.114}$$

Ce qui permet désormais d'écrire (2.113) sous la forme :

$$l^2 {\alpha'}^2 = H(\sigma, \alpha) \tag{2.115}$$

dans $\Upsilon,$ où H est la fonction définie par :

$$H(\sigma,\beta) = \frac{2\omega(\beta)}{E_0} - \frac{\sigma^2}{E_0^2} \left(E_0 S(\beta) - 1 \right), \, \beta \in [0,1[$$
(2.116)

Le profil d'endommagement associé à la résolution de l'équation différentielle (2.115) à la forme d'une cloche représentée à la Figure 2.7, où $\overline{\alpha}(\sigma)$ est la valeur maximale de l'endommagement, atteinte au centre de la localisation x_0 . La valeur de $\overline{\alpha}$ ne dépend que de la contrainte σ . Il en est alors de même pour l'épaisseur D. Lorsque le matériau se dégrade est que σ diminue de σ_M à 0, $\overline{\alpha}$ augmente de 0 à 1.



FIG. 2.7 – Évolution du profil d'endommagement de la solution localisée

En intégrant l'équation (2.115), on obtient ensuite la relation suivante entre D et $\overline{\alpha}$:

$$D(\sigma) = l \int_0^{\bar{\alpha}(\sigma)} \frac{d\beta}{\sqrt{H(\sigma,\beta)}}$$
(2.117)

qui repose sur une intégrale bien définie. La position du centre de la localisation x_0 peut alors être arbitrairement choisie dans l'intervalle $[min(D(\sigma), L - D(\sigma)), max(D(\sigma), L - D(\sigma))].$
Toujours en intégrant (2.115), cette fois entre un point x de Υ et x_0 , on déduit la valeur de l'endommagement $\alpha(x)$:

$$|x - x_0| = l \int_{\alpha}^{\alpha(\sigma)} \frac{d\beta}{\sqrt{H(\sigma, \beta)}}$$
(2.118)

Ce qui permet de retrouver le profil d'endommagement représenté à la Figure 2.7 et ce qui définit entièrement la solution localisée, associée au cas test de la barre en traction.

Si l'on s'intéresse ensuite à l'énergie totale de déformation P de la barre en traction :

$$P = \int_{0}^{L} \left(\frac{1}{2} S(\alpha) \sigma^{2} + \omega(\alpha) + \frac{1}{2} E_{0} l^{2} {\alpha'}^{2} \right) dx$$
(2.119)

on déduit de (2.113) et (2.114) qu'il est possible d'écrire P sous la forme d'une quantité dépendant uniquement de l'intégrale de la fonction de dissipation :

$$P = \frac{\sigma^2 L}{2E_0} + \int_0^L 2\omega(\alpha(x))dx$$
 (2.120)

En utilisant ensuite le changement de variable :

$$\beta: x \longmapsto \alpha(x) \tag{2.121}$$

et en considérant le profil symétrique de l'endommagement et la relation (2.118), on obtient finalement :

$$P = \frac{\sigma^2 L}{2E_0} + 4l \int_0^{\bar{\alpha}(\sigma)} \frac{\omega(\beta)d\beta}{\sqrt{H(\sigma,\beta)}}$$
(2.122)

La fissuration se produit alors lorsque $\overline{\alpha}(\sigma) = 1$ et pour un état d'équilibre dans la barre, associé à une contrainte nulle $\sigma = 0$. L'endommagement final est alors solution de l'équation différentielle suivante :

$$2\omega(\alpha(x)) - E_0 l^2 \alpha'(x)^2 = 0$$
(2.123)

obtenue à partir de (2.113) et (2.114) et l'épaisseur de la localisation obtenue est :

$$2D = 2l \int_0^1 \sqrt{\frac{E_0}{2\omega(\beta)}} d\beta \tag{2.124}$$

Enfin, le premier terme de l'énergie de déformation (2.122) s'annule et on peut réécrire le second à partir de l'expression de H (2.116), dans le cas particulier où $\sigma = 0$:

$$4l \int_0^1 \frac{\omega(\beta)d\beta}{\sqrt{H(\sigma,\beta)}} = 2\sqrt{2}l \int_0^1 \sqrt{2E_0\omega(\beta)}d\beta$$
(2.125)

Ce qui permet finalement de retrouver l'expression (2.93) de l'énergie dissipée pour la création d'une fissure, définie en 2.3 :

$$G_c = 2\sqrt{2l} \int_0^1 \sqrt{E_0 \omega(\beta)} d\beta \qquad (2.126)$$

2.5 Exemples de lois de comportement

Dans cette partie, on détaille plus explicitement deux comportements distincts obtenus à partir de deux formulations, l'une durcissante puis adoucissante et l'autre strictement adoucissante. Toutes deux à la fois quadratiques en déplacement et en endommagement. On présente la courbe de réponse force déplacement obtenue avec la solution homogène dans le cas test de la barre en traction et le coefficient de Griffith obtenu par la relation (2.126).

2.5.1 Cas d'une loi sans seuil

On prend comme fonctions perte de rigidité et dissipation :

$$A(\alpha) = (1 - \alpha)^2$$
 (2.127)

$$\omega(\alpha) = \frac{E_0}{8} \alpha^2 \tag{2.128}$$

On obtient alors, à partir de (2.126), la relation suivante entre le coefficient de Griffith G_c et le module de Young du matériau sain E_0 :

$$G_c = \frac{1}{2} E_0 l \tag{2.129}$$

Il est dès lors possible d'écrire la formulation énergétique avec les deux paramétrisations suivantes :

$$\phi(\varepsilon,\alpha) = \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 R\varepsilon.\varepsilon + \frac{E_0}{8}\alpha^2 + \frac{1}{2}E_0 l^2 \nabla \alpha.\nabla \alpha \qquad (2.130)$$

$$\phi(\varepsilon, \alpha) = \frac{1}{2} (1 - \alpha)^2 R \varepsilon \varepsilon + \frac{G_c}{4l} \alpha^2 + G_c l \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha$$
(2.131)

Pour des raisons de simplicité, on garde dans la suite l'expression (2.130) de la densité d'énergie.

La dérivée première de ϕ par rapport à la déformation ε permet d'obtenir la loi de comportement :

$$\sigma = (1 - \alpha)^2 R \varepsilon \tag{2.132}$$

et la dérivée première par rapport à l'endommagement α donne le critère :

$$-(1-\alpha)R\varepsilon.\varepsilon + \frac{E_0}{4}\alpha - E_0l^2 \bigtriangleup \alpha \ge 0$$
(2.133)

Si l'on s'intéresse maintenant à la solution homogène de la barre en traction ($R = E_0$, $\varepsilon = t$ et $\nabla \alpha = 0$), on remarque que l'une des principales caractéristiques de la formulation de l'énergie (2.130 et 2.131) est d'induire un endommagement strictement positif pour toute valeur de l'énergie

potentielle élastique, et donc pour tout chargement de traction. Cela signifie qu'il n'y a pas de phase élastique. En effet, si l'on réécrit le critère (2.133) dans le cas où $\alpha = 0$, on trouve :

$$-E_0 t^2 \ge 0 \tag{2.134}$$

Ce qui est possible si et seulement si t = 0. En conclusion, toute déformation non nulle est accompagnée d'un endommagement strictement positif.

L'expression de l'endommagement α en fonction de la déformation t est alors :

$$\alpha = \frac{t^2}{t^2 + \frac{1}{4}} \tag{2.135}$$

En reportant l'expression précédente de l'endommagement (2.135) dans la loi de comportement (2.132) on obtient la relation suivante :

$$\sigma = \left(\frac{1}{1+4t^2}\right)^2 E_0 t \tag{2.136}$$

Puis, en dérivant l'expression de la contrainte (2.136) par rapport à la déformation t on obtient finalement :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{E_0(1-12t^2)}{(1+4t^2)^3} \tag{2.137}$$

En considérant un état de déformation strictement positif, on déduit alors que :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t \le \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{2.138}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t \ge \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{2.139}$$

Notant :

$$t_e = \frac{1}{2\sqrt{3}}\tag{2.140}$$

(2.138) signifie que la réponse est dans un premier temps durcissante, lorsque $t \le t_e$, puis (2.139) montre qu'elle devient ensuite adoucissante, jusqu'à saturation de l'endommagement (cf Figure 2.8).

On retrouve alors la valeur de l'endommagement α_e , atteinte à $t = t_e$, en reportant l'expression (2.140) dans (2.135) :

$$\alpha_e = \frac{1}{4} \tag{2.141}$$

2.5.2 Cas d'une loi avec seuil

On conserve une fonction perte de rigidité de la forme :

$$A(\alpha) = (1 - \alpha)^2$$
 (2.142)



FIG. 2.8 – Représentation de la courbe contrainte-déformation associée en 1D

et on choisit, cette fois, une dissipation linéaire en α de la forme :

$$\omega(\alpha) = \frac{\sigma_M^2}{E_0} \alpha \tag{2.143}$$

où σ_M est la contrainte maximale, définie en (2.109).

Dans le cas de la barre en traction, le coefficient directeur de la dissipation ω peut être défini comme la *specific fracture energy*, c'est-à-dire la densité d'énergie nécessaire pour endommager jusqu'à rupture (Comi et Perego [14]).

L'expression (2.126) permet alors d'obtenir la relation suivante entre le coefficient de Griffith G_c et la contrainte σ_M :

$$G_c = \frac{4\sqrt{2}}{3}\sigma_M l \tag{2.144}$$

Par analogie avec ce qui a été fait la partie 2.5.1 et en tenant compte de la relation (2.144) établie, il est à nouveau possible de présenter la formulation énergétique de deux façons :

$$\phi(\varepsilon,\alpha) = \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 R\varepsilon.\varepsilon + \frac{\sigma_M^2}{E_0}\alpha + \frac{1}{2}E_0 l^2 \nabla \alpha.\nabla \alpha$$
(2.145)

$$\phi(\varepsilon,\alpha) = \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 R\varepsilon.\varepsilon + \frac{9G_c^2}{32l^2 E_0}\alpha + \frac{1}{2}E_0 l^2 \nabla \alpha.\nabla \alpha \qquad (2.146)$$

De même qu'en 2.5.1, on conserve dans la suite l'expression (2.145) de la densité d'énergie.

On déduit alors la loi de comportement, par dérivation de ϕ par rapport à la déformation :

$$\sigma = (1 - \alpha)^2 R \varepsilon \tag{2.147}$$

puis le critère d'endommagement, par dérivation par rapport à l'endommagement :

$$-(1-\alpha)R\varepsilon.\varepsilon + \frac{\sigma_M^2}{E_0} - E_0 l^2 \bigtriangleup \alpha \ge 0$$
(2.148)

Si l'on s'intéresse maintenant à la solution homogène de la barre en traction ($R = E_0, \varepsilon = t$ et $\nabla \alpha = 0$), on remarque que tant que la déformation n'atteint pas un certain niveau, l'endommagement est nul. On possède désormais un seuil qui est fixé par la valeur de la contrainte limite σ_M . Plus précisemment :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 0 \Longrightarrow \alpha = 1 - \left(\frac{\sigma_M}{E_0 t}\right)^2 \tag{2.149}$$

Ce qui impose par positivité de l'endommagement, la condition suivante sur la déformation t:

$$t \ge \frac{\sigma_M}{E_0} \tag{2.150}$$

Notant :

$$t_e = \frac{\sigma_M}{E_0} \tag{2.151}$$

la réponse associée à la formulation (2.145) de la densité d'énergie (équivalente à celle associée à la relation (2.146)) est donc élastique tant que $t \leq t_e$.

Dans le cas où $t \ge t_e$, on peut réécrire la loi de comportant (2.147), en reportant l'expression de l'endommagement (2.149) :

$$\sigma = \frac{\sigma_M^4}{(E_0 t)^3} \tag{2.152}$$

Puis, en dérivant (2.152) par rapport à la déformation t on obtient finalement :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{3}{t} \frac{\sigma_M^4}{(E_0 t)^3} \tag{2.153}$$

Par positivité de la déformation t en traction, on observe alors que lorsque la barre s'endommage, le comportement est adoucissant. L'une des informations que l'on peu extraire de ce résultat est alors que la contrainte maximale σ_M est égale à la contrainte limite d'élasticité σ_e définie par l'expression (2.107).

En conclusion, la barre a un comportement élastique tant que le niveau de déformation est inférieur à t_e , puis adoucissant jusqu'à saturation de l'endommagement (cf Figure 2.9).



FIG. 2.9 – Représentation de la courbe contrainte-déformation associée en 1D

2.6 Choix d'une formulation en compression

Le comportement d'un matériau comme le béton est très différent en traction et en compression. On observe experimentalement qu'il est beaucoup plus résistant à des chargements en compression. Or, la plupart des modèles que l'on développe ne distinguent pas la traction de la compression. L'endommagement est simplement fonction du niveau d'énergie élastique stockée. Les réponses obtenues pour des chargements de traction ou de compression sont les mêmes. Ce qui n'est pas physiquement admissible. Une autre difficulté liée aux formulations que l'on utilise généralement est le phénomène d'interpénétration que l'on peut observer numériquement. Afin d'apporter une première solution, on choisit d'introduire une nouvelle formulation distinguant traction et compression sur le modèle des travaux de Amor et al. [3] :

Dans un cas de traction ("ouverture de fissure") on corrige l'énergie élastique d'un facteur d'endommagement représenté par la fonction perte de rigidité $A(\alpha)$. Dans un cas de compression, on ne corrige que la partie associée au tenseur déviatorique des déformations, noté ε_D et défini par la relation :

$$\varepsilon_D = \varepsilon - \frac{tr(\varepsilon)}{3} J_6 \tag{2.154}$$

où ε admet désormais une écriture vectorielle et où J_6 est le vecteur de taille 6 suivant :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}, J_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
(2.155)

On peut alors écrire la densité d'énergie libre endommageable sous la forme :

$$\phi(\varepsilon,\alpha) = \frac{1}{2}A(\alpha) \left[k \left(tr(\varepsilon)^+ \right)^2 + 2\mu(\varepsilon_D)^2 \right] + k \left(tr(\varepsilon)^- \right)^2 + \phi^{diss}(\alpha)$$
(2.156)

où l'on définit le coefficient matériau k en fonction des coefficients de Lamé λ et μ de la façon suivante :

$$k = \lambda + \frac{2\mu}{3} \tag{2.157}$$

et où $tr(\varepsilon)^+$ est la projection de $tr(\varepsilon)$ sur \mathbb{R}_+ et $tr(\varepsilon)^-$ la projection sur \mathbb{R}_- .

La distinction entre les comportements de traction et de compression s'effectue donc sur le signe de la dilatation volumique (qui est exactement représentée par la quantité $tr(\varepsilon)$).

On a regroupé dans la quantité $\phi^{diss}(\alpha)$, la fonction de dissipation et la partie en gradient d'endommagement, qui ne sont pas modifiées par la distinction traction-compression :

$$\phi^{diss}(\alpha) = \omega(\alpha) + \frac{1}{2} E_0 l^2 \nabla \alpha. \nabla \alpha$$
(2.158)

Propriété 1 :

On remarque, pour un état endommagé ($\alpha \neq 0$), une discontinuité de la quantité $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$ lors du passage d'un régime de traction ($tr(\varepsilon) \ge 0$) à un régime de compression ($tr(\varepsilon) < 0$).

Preuve :

Dans un cas de traction $(tr(\varepsilon) \ge 0)$, lorsque l'on décharge une structure endommagée à $\alpha \ne 0$, le retour élastique s'effectue avec une matrice de rigidité de la forme suivante :

où I_6 est le tenseur identité d'ordre 6.

Une fois que l'on a suffisamment déchargé pour se retrouver dans un état de compression $(tr(\varepsilon) < 0)$, la matrice de rigidité prend la forme suivante :

Le comportement de décharge étant élastique, les matrices de rigidité correspondent exactement à la quantité $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$. On a donc bien perte de la continuité de cette quantité au changement de régime.

Fin de la preuve.

La propriété 1 peut expliquer des difficultés de convergence sur certains calculs pour lesquels la solution oscillerait localement entre un comportement en traction et un comportement en compression (pour une dilation volumique proche de $0 : tr(\varepsilon) \approx 0$).

Le choix du modèle est explicité dans la partie suivante.

2.6.1 Expression des contraintes

Par dérivation de la densité d'énergie libre (2.156) par rapport aux déformations, on obtient l'expression suivante du tenseur des contraintes :

$$\sigma = A(\alpha) \left(k \left(tr(\varepsilon)^+ \right) J_6 + 2\mu \varepsilon_D \right) + k \left(tr(\varepsilon)^- \right) J_6 \tag{2.161}$$

Si l'on s'intéresse plus particulièrement au cas de la compression $(tr(\varepsilon) < 0)$, on note que seule la partie déviatorique peut subir un saut de déformation, compensé par la fonction perte de rigidité $A(\alpha)$. Ce qui n'autorise donc que les sauts de glissement.

Schématiquement, considérons un saut de glissement dans la direction x d'une plaque par rapport à une autre (cf Figure 2.10).



FIG. 2.10 – Schéma du glissement d'une plaque sur une autre

On représente le saut de déplacement en fonction de y de la façon suivante :

$$[U_x(y)] = |U_x(y^+) - U_x(y^-)|$$
(2.162)

On obtient alors une réponse en Dirac au niveau de la zone en glissement. Ce qui se traduit mathématiquement de la façon suivante :

$$\left[\partial_y U_x\right] \xrightarrow[y \to 0]{} +\infty \tag{2.163}$$

Revenons maintenant à l'expression du champ de contrainte (2.161). Chacune de ses composantes devant être finies :

$$\forall (i,j) \in [1,3]^2, \ |\sigma_{ij}| < +\infty$$
(2.164)

il doit en être de même en compression $(tr(\varepsilon) < 0)$ pour les quantités suivantes :

$$\forall (i,j) \in [1,3]^2, |2\mu A(\alpha)\varepsilon_{D_{ij}}| < +\infty$$
(2.165)

$$|k(tr(\varepsilon))| < +\infty$$
(2.166)

L'inégalité (2.166) exprimée sur la trace du tenseur des déformations permet de contrôler les déplacements suivant la direction des efforts (suivant les axes principaux), contrairement au modèle en traction. Cela est notamment indispensable pour éviter les problèmes d'interpénétration. L'inégalité (2.165) autorise quant à elle l'explosion vers l'infini des termes du tenseur déviatorique lorsque l'endommagement tend vers 1 ($A(\alpha) \xrightarrow{\alpha \to 1} 0$, cf partie 2.1.2). C'est cela qui permet les sauts de déplacements en compression (cf Figure 2.10 et équation (2.163)), dans la direction du cisaillement. Ce modèle permet donc bien de représenter la re-fermeture de fissure en compression, tout en permettant à la structure de continuer à s'endommager. Ce qui est plus réaliste que dans le cas où l'on considère simplement un comportement élastique en compression.

2.6.2 Critère d'endommagement

Le critère d'endommagement est obtenu en minimisant l'énergie libre (2.156) par rapport à l'endommagement :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = \frac{A'(\alpha)}{2} \left(k \left(tr(\varepsilon)^+ \right)^2 + 2\mu \varepsilon_D^2 \right) + \phi^{diss'}(\alpha) \ge 0$$
(2.167)

Contrairement au cas de la traction, seule une partie de l'énergie élastique stockée permet d'endommager la structure en compression. Cela montre que l'endommagement est plus difficile à atteindre en compression qu'en traction.

Propriété 1 :

On trouve analytiquement un écart de $\sqrt{1.5}$ sur la contrainte limite d'élastictié entre traction et compression, sur un cas homogène unidimensionnel.

Preuve :

Considérons un tenseur de déformation lié à un cas de traction unidirectionnelle d'une barre (cf partie 2.4) :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(2.168)

On a alors, par définition des parties sphériques et déviatoriques :

$$\varepsilon_s = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_x \end{pmatrix}, \text{ et } \varepsilon_D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \varepsilon_x \end{pmatrix}$$
(2.169)

Si l'on s'intéresse ensuite plus particulièrement au cas de la solution homogène, le gradient de l'endommagement dans la barre est nul ($\nabla \alpha = 0$) et le critère d'endommagement s'écrit sous la forme :

$$A'(\alpha)\frac{E_0}{2}\varepsilon_x^2 + \omega'(\alpha) \ge 0 \tag{2.170}$$

en traction, et :

$$A'(\alpha)\frac{E_0\varepsilon_x^2}{3} + \omega'(\alpha) \ge 0 \tag{2.171}$$

en compression.

La fonction de dissipation $\omega(\alpha)$ ne distinguant pas la compression de la traction, il faudra en compression une déformation $\sqrt{1.5}$ fois supérieure à celle de la traction pour atteindre un niveau d'endommagement similaire dans la structure.

Fin de la preuve.

Cette marge reste toutefois insuffisante dans le cas du béton où l'on observe experimentalement une contrainte limite 7 fois supérieure en compression. Plusieurs pistes sont à l'étude pour résoudre cette difficulté, comme la possibilité de prendre une fonction de dissipation continue mais différente en traction et en compression (de type linéaire en traction et quadratique compression, de sorte à obtenir une première phase durcissante et une contrainte limite supérieure à la limite d'élasticité).

Les calculs de structures en compression, présentés dans la suite du manuscrit (cf cas 3 de la partie 3.6.1), utilisent la distinction introduite dans la formulation (2.156) décrite dans cette partie.

2.7 Conclusion du chapitre

Afin de rendre compte de la dégradation irréversible de matériaux tels que le béton, les notions d'endommagement et de perte de rigidité ont été introduites. Le critère thermodynamique de Drücker-Ilyushin a ensuite permis de définir l'évolution du taux d'endommagement à partir d'une fonction de dissipation et la formulation énergétique qui en découle. Une fois cette étape terminée, on s'est intéressé à la construction du problème d'évolution mécanique des structures adapté aux calculs éléments finis. On se rend toutefois rapidement compte des pathologies liées au phénomène de localisation que l'on peut observer avec ce type de modèle non régularisé (cf Figure 2.11).



FIG. 2.11 – Visualisation d'une localisation du modèle local, responsable de la dépendance au maillage

Pour s'affranchir de cette localisation qui génére une trop forte dépendance à l'orientation du maillage, une régularisation du modèle par ajout d'un terme en gradient d'endommagement a été mise en place. La non localité alors introduite s'intègre parfaitement dans le problème d'évolution variationnel. Le simple ajout du terme en gradient permet de conserver l'ensemble des propriétés mathématiques du modèle local et rend son utilisation tout aussi simple dans les codes de calcul éléments finis.

Enfin, on a décrit brièvement une modification de la formulation énergétique permettant de distinguer les comportements de traction et de compression à partir de l'analyse de la dilatation volumique. Une décomposition du tenseur des déformations permet alors d'obtenir des états d'endommagement en glissement, ainsi que de prendre en compte les re-fermetures de fissures en empêchant l'interpénétration. On va, dans la suite du rapport, conserver le modèle non local défini ainsi que la différenciation traction-compression introduite.

Chapitre 3

Développement d'une modélisation nodale en gradient d'endommagement

Sommaire

3.1	Algo	orithme de Newton	47
3.2	Algo	orithme de minimisation alternée	48
3.3	Pris	e en compte de l'irréversibilité	49
3.4	La n	nodélisation Lagrangienne	49
	3.4.1	Mise en place	49
	3.4.2	Discrétisation de l'énergie	50
	3.4.3	Résolution incrémentale	51
	3.4.4	Intégration de la loi de comportement aux points de Gauss	52
	3.4.5	Calcul des forces internes	53
	3.4.6	Choix des éléments finis	54
	3.4.7	Avantages et inconvénients de la modélisation Lagrangienne	54
	3.4.8	Algorithme de pilotage	55
3.5	La n	nodélisation nodale	56
	3.5.1	Calcul des forces internes	56
	3.5.2	Choix des éléments finis	57
	3.5.3	Choix de la méthode de résolution	57
	3.5.4	Description de l'algorithme en Newton global	58
	3.5.5	Description de l'algorithme en Newton sécante	59
	3.5.6	Avantages et inconvénients de la modélisation aux nœuds	62
3.6	Exe	mples d'application	63
	3.6.1	Endommagement d'une fibre à matrice renforcée	63
	3.6.2	Endommagement fragile d'une éprouvette entaillée	68
3.7	Con	seils d'utilisation de la formulation aux nœuds	71
3.8	Con	clusion	73

L'algorithme de minimisation alternée est le plus utilisé dans le milieu académique pour effectuer des calculs d'endommagement (Bourdin et al. [11]), du fait de ses caractéristiques qui le rendent simple d'utilisation et robuste, car c'est un algorithme descendant qui fournit toujours une solution. Ce dernier point est très important dans les problèmes d'endommagement où l'on rencontre assez souvent des propagations brutales de l'endommagement génèrant des phénomènes de snap-back (retour en arrière de la courbe force-déplacement) dans la réponse globale de la structure. Schématiquement, on peut représenter un calcul d'endommagement par deux plaques reliées entre elles par un réseau de ressorts parrallèles (cf Figure 3.1). Lorsque l'on écarte les plaques, les ressorts s'étirent. Une fois un chargement limite atteint, les ressorts vont casser un par un. À chaque fois que l'un des ressorts casse, les déplacements des zones coïncidantes avec le ressort peuvent augmenter brutalement. Ce qui a pour effet de soulager les autres ressorts. On observe alors un comportement global de compression au niveau des autres ressorts et donc de la structure globale. Ce qui se traduit par une chute de la contrainte équivalente associée à une diminution de la déformation globale dans la courbe de réponse force-déplacement. Il est alors nécessaire de tirer à



FIG. 3.1 – Schéma de deux plaques reliées par des ressorts

nouveau sur les deux plaques pour retendre l'ensemble des ressorts. Et ainsi de suite jusqu'à briser le dernier ressort et atteindre la rupture complète de la structure. Or, l'algorithme de Newton ne permet pas de franchir ces snap-back sans l'utilisation complémentaire d'un algorithme de pilotage dont la compréhension et l'utilisation ne sont pas simples pour un nouvel utilisateur (Lorentz et al. [29]). Le développement de la nouvelle formulation, qui permet de travailler avec un algorithme équivalent à la minimisation alternée, s'est effectué en deux étapes :

 Mise en place d'une formulation nodale de l'endommagement : On ne considère que des inconnues nodales de déplacement et d'endommagement. Ce qui permet d'obtenir une formulation moins coûteuse en degrés de liberté que la formulation mixte déjà existante dans *Code_Aster* (Lorentz et Andrieux [28]). La méthode de résolution reste, dans cette étape, l'algorithme de Newton. La difficulté est d'imposer l'irréversibilité de l'endommagement, qui nécessite de vérifier la positivité des incréments d'endommagement au début de chaque itération ainsi que la définition d'un nouveau résidu de convergence (cf partie 3.5.4). 2. Modification de l'algorithme de Newton : On ne conserve que la partie sécante de l'opérateur tangent. On considère alors que les dérivées croisées déplacements-endommagement sont nulles et donc que leurs évolutions sont indépendantes l'une de l'autre. Ce qui est la base de l'algorithme de minimisation alternée.

Une fois ce travail effectué, il est très facile d'introduire différentes lois de comportement, puisqu'il suffit simplement de renseigner les dérivées premières et secondes aux points d'intégration.

3.1 Algorithme de Newton

On rappelle ici les principes de base de l'algorithme de Newton (Abbas [1]) dont on parlera régulièrement dans la suite. Il s'agit d'une méthode classique de résolution des équations du type recherche de zéro, développée par le mathématicien anglais Isaac Newton. L'algorithme consiste à construire une bonne approximation d'un zéro d'une fonction f(x) en se basant sur son développement de Taylor à l'ordre 1. Partant d'un point initial x_0 , on construit la tangente en supposant la fonction à peu près égale à sa tangente en ce point :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{3.1}$$

Ensuite, comme on veut trouver un zéro de la fonction, on va rechercher le point x vérifiant :

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
(3.2)

Ce qui revient à trouver le point d'intersection entre la tangente et l'axe des abscisses. On obtient alors un nouveau point que l'on espère plus proche du zéro. Et ainsi de suite, on construit une suite $\{x_k\}_k$ vérifiant :

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{3.3}$$

Si le zéro de la fonction noté α est isolé, et que la fonction est régulière, il existe un voisinage de α , tel que si x_0 se trouve dans ce voisinage, la suite des x_k converge vers α et la convergence de la méthode est quadratique. Le choix du point initial joue donc un rôle important dans la méthode.



FIG. 3.2 – Représentation de la méthode itérative de Newton

Un mauvais choix peut conduire à de fortes oscillations entre les différentes solutions pouvant exister. De plus, on remarque tout de suite, pour cette méthode des tangentes successives, que si l'on trouve un point x^* tel que : $f'(x^*) = 0$, la méthode diverge. Cela se comprend assez bien, puisque l'on ne pourra pas trouver d'intersection entre la tangente et l'axe des abscisses.

3.2 Algorithme de minimisation alternée

L'algorithme de minimisation alternée est particulièrement adapté aux problèmes à deux variables, qui sont convexes en chacune des variables séparément. Ce qui est le cas du modèle à gradient d'endommagement. Il est basé sur une succession de minimisations jusqu'à convergence sur l'une des variables, puis sur l'autre. La convergence de la méthode est impliquée par son caractère descendant lorsque l'on travaille dans un espace minoré. Ce qui est le cas de tout problème énergétique, minoré par 0. Dans le cas particulier de la formulation en gradient d'endommagement, le fait de fixer l'endommagement permet de travailler avec un problème linéarisé en déplacement :

$$\frac{\partial P}{\partial u}(u,\alpha).(v,0) = \int_{\Omega} A(\alpha)\varepsilon(u).\varepsilon(v)dx$$
(3.4)

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha}(u,\alpha).(0,\beta) = \int_{\Omega} \left(\beta A'(\alpha)\varepsilon(u).\varepsilon(u) + \omega'(\beta) + c\nabla\alpha\nabla\beta\right) dx \tag{3.5}$$

Schématiquement, on peut décrire l'algorithme de minimisation alternée de la façon suivante :

1. <u>Initialisation</u>:

Soit un point de départ (u_0, α_0)

2. <u>Itération k</u> : $u_k = \underset{u_k = argmin}{argmin} P(u, \alpha_{k-1})$ $\alpha_k = argmin P(u_k, \alpha)$

A noter que chaque minimisation peut être effectuée à partir d'un algorithme de Newton. On remarque également que la première minimisation consiste à résoudre un problème d'élasticité linéaire.

Preuve qu'il s'agit d'un algorithme descendant :

Par définition des minima :

$$P(u_k, \alpha_{k-1}) \le P(u_{k-1}, \alpha_{k-1}) \text{ et } P(u_k, \alpha_k) \le P(u_k, \alpha_{k-1})$$
(3.6)

$$\implies P(u_k, \alpha_k) \le P(u_{k-1}, \alpha_{k-1}) \tag{3.7}$$

Ce qui démontre que la suite des énergies $\{P(u_k, \alpha_k)\}_k$ est bien décroissante. Puis étant minorée par zéro lorsque l'on travaille en déplacements imposés (cas de figure traité dans le manuscrit), la convergence est alors toujours obtenue. Ce qui est un avantage important de cette méthode de résolution.

3.3 Prise en compte de l'irréversibilité

Les algorithmes de Newton et de minimisation alternée sont susceptibles de fournir des solutions ne respectant pas l'irréversibilité de l'endommagement. Pour tenir compte de cette contrainte unilatérale, on doit ajouter à chacun des deux algorithmes une méthode de projection assurant de toujours accroître l'endommagement. Il existe pour cela plusieurs façons de procéder. Notant $\Delta \alpha^n$ l'incrément d'endommagement obtenu à un pas de temps *n* donné, on peut soit faire le choix d'imposer la condition :

$$\alpha^n = \max(\alpha^{n-1}, \alpha^{n-1} + \Delta \alpha^n) \tag{3.8}$$

après convergence du calcul, soit imposer à chaque itération k, du pas de temps n, la condition suivante sur l'incrément :

$$\Delta \alpha_k^n \ge 0 \tag{3.9}$$

La première façon de procéder est celle qui est plutôt privilégiée dans le cas de la minimisation alternée. Étant donné que l'on travaille alors à déplacements fixés, avoir des incréments d'endommagement négatifs au cours des itérations n'induit pas d'erreurs sur les déplacements à la convergence. Dans le cas où l'on utilise un algorithme de Newton, on travaille simultanément avec les degrés de liberté d'endommagement et de déplacement. Il est donc très important d'assurer la positivité de l'incrément d'endommagement au début de chaque itération. Le comportement élastique doit être assuré par la modification de la matrice de rigidité du problème aux degrés de liberté projetés. Dans les deux cas, cela impose des développements supplémentaires non standards et complexes car il est nécessaire d'intervenir aussi bien au niveau élémentaire, qu'au niveau global de la programmation.

Il existe toutefois une autre méthode qui permet de rendre cette condition beaucoup plus simple à imposer. En compensation, elle est plus lourde en degrés de liberté et plus coûteuse en temps calcul. Il s'agit de voir l'endommagement comme une variable interne déterminée aux points d'intégration. Ce qui nécessite de différencier les endommagements aux points de Gauss et l'endommagement des nœuds. On doit alors introduire une formulation dite mixte Lagrangienne, qui permet de satisfaire l'égalité des deux champs d'endommagement. Pour assurer l'irréversibilité, il suffit alors de réaliser la projection de la variable interne en chaque point d'intégration. Ce qui est plus aisé du point de vue de la programmation.

3.4 La modélisation Lagrangienne

3.4.1 Mise en place

Dans le cadre standard, on rappelle l'énergie totale sur un domaine Ω , exprimée à partir du modèle non local régularisé en gradient d'endommagement :

$$P(\varepsilon,\alpha) = \int_{\Omega} \phi dx = \int_{\Omega} \left(\phi^{loc}(\varepsilon,\alpha) + \phi^{grad}(\nabla\alpha) \right) dx$$
(3.10)

où ϕ^{local} et ϕ^{grad} sont respectivement les parties locales et en gradient de la densité d'énergie de déformation ϕ , définies de la façon suivante :

$$\phi^{local} = \frac{1}{2}A(\alpha)R\varepsilon.\varepsilon + \omega(\alpha)$$
(3.11)

$$\phi^{grad} = \frac{1}{2} E_0 l^2 \nabla \alpha . \nabla \alpha \tag{3.12}$$

où $A(\alpha)$ est la fonction perte de rigidité (cf partie 2.1.2), $\omega(\alpha)$ la fonction dissipation (cf partie 2.1.3), E_0 le module de Young du matériau sain et l la longueur interne.

On fait maintenant le choix de dupliquer l'endommagement, en introduisant un second champ a, vérifiant la contrainte suivante sur Ω :

$$a = \alpha \tag{3.13}$$

tel que l'on puisse désormais écrire l'énergie sous la forme suivante :

$$P(\varepsilon, \alpha, a) = \int_{\Omega} \left(\phi^{loc}(\varepsilon, a) + \phi^{grad}(\nabla \alpha) \right) dx$$
(3.14)

Afin de vérifier mathématiquement la condition $a = \alpha$ et de combiner les équations (3.13) et (3.14) en une seule, on utilise une formulation mixte Lagrangienne, à laquelle on ajoute un terme de pénalisation r favorisant la convergence des calculs :

$$P(\varepsilon, \alpha, a, \lambda) = \int_{\Omega} \left[\phi^{loc}(\varepsilon, a) + \phi^{grad}(\nabla \alpha) + \lambda(\alpha - a) + \right]$$
(3.15)

$$\frac{r}{2}(\alpha - a)^2 \bigg] dx \tag{3.16}$$

On se retrouve alors dans le cas d'une formulation mixte en Lagrangien augmenté.

3.4.2 Discrétisation de l'énergie

De façon classique en éléments finis, on découpe la structure en éléments notés e, puis on évalue en chaque élément l'intégrale par sommation sur les points d'intégrations, dits points de Gauss, notés g. On peut alors réécrire l'énergie sous la forme :

$$P(\varepsilon, \alpha, a, \lambda) = \sum_{\alpha} P_e(\varepsilon, \alpha, a, \lambda)$$
(3.17)

$$= \sum_{e}^{\circ} \sum_{g} \omega_{g} \phi_{e}(\varepsilon_{g}, \alpha_{g}, a_{g}, \lambda_{g})$$
(3.18)

$$= \sum_{e} \sum_{g} \left[\omega_g \phi_e^{loc}(\varepsilon_g, a_g) + \phi_e^{grad}(\nabla \alpha)_g + \lambda_g(\alpha_g - a_g) + \right]$$
(3.19)

$$\frac{r}{2}(\alpha_g - a_g)^2 \bigg] \tag{3.20}$$

où ω_g est le poids du point de Gauss g.

On choisit ici de définir l'endommagement aux points de Gauss a_g comme une variable interne, dont la valeur est déterminée par résolution locale du critère (cf partie 3.28). Cette variable ne nécessite donc pas de discrétisation nodale.

Si l'on note ensuite *i* l'indice relatif aux nœuds d'un élément *e* contenant le point de Gauss *g*, N^u , N^{α} et N^{λ} les fonctions de forme respectivement associées aux discrétisations des champs *u*, α et λ , on peut alors écrire les relations suivantes, obtenues par interpolation :

$$\varepsilon_g = \sum_i \left(\nabla_s N_i^u \left(x_g \right) \right) u_i \tag{3.21}$$

$$\alpha_g = \sum_i N_i^{\alpha}(x_g)\alpha_i \tag{3.22}$$

$$\lambda_g = \sum_i N_i^{\lambda}(x_g)\lambda_i \tag{3.23}$$

avec par définition : $\nabla_s = \frac{1}{2} ({}^t \nabla + \nabla).$

3.4.3 Résolution incrémentale

La recherche d'extremum correspond alors à une recherche de points selles. Le problème de minimisation de l'énergie, portant sur les incréments ($\Delta u, \Delta \alpha, \Delta \lambda$) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\min_{\Delta u} \min_{\Delta \alpha} \max_{\Delta \lambda} \left(P(u^{-} + \Delta u, \alpha^{-} + \Delta \alpha, a, \lambda^{-} + \Delta \lambda) - W_{ext}(u^{-} + \Delta u) \right)$$
(3.24)

où W_{ext} est le travail des forces extérieures.

Plus précisemment, la résolution incrémentale du problème disrétisé peut se décomposer en trois phases que l'on décrit ci-dessous :

1. 1ère phase globale :

Soit Δu , $\Delta \alpha$ et $\Delta \lambda$ les incréments nodaux que l'on utilise pour construire les nouveaux champs de déplacement, d'endommagement et de multiplicateurs de Lagrange. On actualise les champs d'inconnus nodaux au pas de temps courant :

$$u = u^{-} + \Delta u \tag{3.25}$$

$$\alpha = \alpha^- + \Delta \alpha \tag{3.26}$$

$$\lambda = \lambda^{-} + \Delta\lambda \tag{3.27}$$

2. <u>Phase locale :</u>

On calcule à chaque point de Gauss g les quantités ε_g , α_g et λ_g à partir des expressions (3.25), (3.26) et (3.27) et de la valeur des fonctions de forme évaluées au point g.

On détermine ensuite la valeur de a_g par la minimisation locale suivante :

$$\min_{\Delta a_g} \phi(\varepsilon_g, \alpha_g, a_g^- + \Delta a_g, \lambda_g) \tag{3.28}$$

Si a_g diminue, on réalise une projection sur son ancienne valeur, de façon à assurer la contrainte d'irréversibilité. On calcule ensuite les dérivées premières et secondes de l'énergie par rapport aux variables ε_g , α_g et λ_g , afin d'obtenir les forces et matrices élémentaires évaluées sur le point de Gauss g.

3. 2ème phase globale :

On assemble les forces et matrices élémentaires et on étudie la convergence du calcul. En absence de convergence, on retourne à la 1ère phase.

3.4.4 Intégration de la loi de comportement aux points de Gauss

Comme explicité précédemment, la résolution du critère s'effectue localement, point de Gauss par point de Gauss. L'évolution de la variable interne a_g est solution du critère :

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_g}(\varepsilon_g, \alpha_g, a_g, \lambda_g) = 0 \tag{3.29}$$

La dualisation de la variable interne permet alors de retrouver une loi d'écoulement normale au niveau de chaque point de Gauss, comme pour l'approche locale (cf partie 2.1). Comparativement à la modélisation locale, la force thermodynamique associée à la variable interne est obtenue par le simple ajout d'un terme issu de l'énergie de régularisation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_q} = \frac{\partial \phi^{loc}}{\partial a_q} - [\lambda_g + r(\alpha_g - a_g)] \tag{3.30}$$

Ce terme supplémentaire a pour effet de décaler le seuil. Ce qui permet de diffuser l'endommagement et d'éviter ainsi sa localisation sur une seule maille.

Afin de respecter la contrainte d'accroissement de l'endommagement, on vérifie que la résolution du critère amène bien à augmenter la valeur de l'endommagement en chaque point de Gauss. Dans le cas contraire, on projette l'endommagement sur son ancienne valeur et le comportement de la structure au point de Gauss correspondant est considéré comme élastique. Une fois l'évolution de la variable interne calculée, on exprime la contrainte en dérivant la densité d'énergie par rapport au champ de déformation :

$$\sigma_g = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_g} = \frac{\partial \phi^{loc}}{\partial \varepsilon_g} \tag{3.31}$$

L'expression de la contrainte est donc la même que dans l'approche locale.

3.4.5 Calcul des forces internes

Les forces internes évaluées par dérivation première de l'énergie par rapport aux variables nodales $(u_n, \alpha_n, \lambda_n)$, au nœud *n*, ont pour expression :

$$F_n^u = \frac{\partial P}{\partial u_n} = \sum_g \omega_g \sigma_g : \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial u_n}$$
(3.32)

$$F_{n}^{\alpha} = \frac{\partial P}{\partial \alpha_{n}} = \sum_{g} \omega_{g} \left(\frac{\partial \phi^{grad}}{\partial \left(\nabla \alpha \right)_{g}} \nabla N_{n}^{\alpha} + \left(\lambda_{g} + r \left(\alpha_{g} - a_{g} \right) \right) N_{n}^{\alpha} \right)$$
(3.33)

$$F_n^{\lambda} = \frac{\partial P}{\partial \lambda_n} = \sum_g \omega_g (\alpha_g - a_g) N_n^{\lambda}$$
(3.34)

On peut alors écrire la matrice tangente élémentaire de taille 3x3 de la façon suivante, à partir des dérivées secondes :

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^{u}}{\partial u} & \frac{\partial F^{u}}{\partial \alpha} & \frac{\partial F^{u}}{\partial \lambda} \\ \\ \frac{\partial F^{\alpha}}{\partial u} & \frac{\partial F^{\alpha}}{\partial \alpha} & \frac{\partial F^{\alpha}}{\partial \lambda} \\ \\ \frac{\partial F^{\lambda}}{\partial u} & \frac{\partial F^{\lambda}}{\partial \alpha} & \frac{\partial F^{\lambda}}{\partial \lambda} \end{pmatrix}$$
(3.35)

Compte-tenu du cadre des matériaux standards généralisés dans lequel s'inscrit la modélisation, la matrice tangente est symétrique. Il suffit donc de calculer sa partie triangulaire inférieure :

$$\frac{\partial F_n^u}{\partial u_m} = \sum_g \omega_g \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial u_m} : \frac{\partial \sigma_g}{\partial \varepsilon_g} : \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial u_n}$$
(3.36)

$$\frac{\partial F_n^{\alpha}}{\partial u_m} = -\sum_g \omega_g r \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial u_m} \frac{\partial a_g}{\partial \varepsilon_g} N_n^{\alpha}$$
(3.37)

$$\frac{\partial F_n^{\alpha}}{\partial \alpha_m} = \sum_g \omega_g \left(\nabla N_m^{\alpha} \frac{\partial^2 \phi^{grad}}{\partial^2 (\nabla \alpha)_g} \nabla N_n^{\alpha} + r N_m^{\alpha} \left(1 - \frac{\partial a_g}{\partial \alpha_g} \right) N_n^{\alpha} \right)$$
(3.38)

$$\frac{\partial F_n^{\lambda}}{\partial u_m} = -\sum_g \omega_g \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial u_m} \frac{\partial a_g}{\partial \varepsilon_g} N_n^{\lambda}$$
(3.39)

$$\frac{\partial F_n^{\lambda}}{\partial \alpha_m} = \sum_g \omega_g N_m^{\alpha} (1 - \frac{\partial a_g}{\partial \alpha_g}) N_n^{\lambda}$$
(3.40)

$$\frac{\partial F_n^{\lambda}}{\partial \lambda_m} = -\sum_g \omega_g N_m^{\lambda} \frac{\partial a_g}{\partial \lambda_g} N_n^{\lambda}$$
(3.41)

3.4.6 Choix des éléments finis

Compte-tenu de l'expression du champ de contrainte :

$$\sigma = A(a)R\varepsilon \tag{3.42}$$

on choisit de prendre le même degré d'interpolation pour la déformation et l'endommagement nodal. Dans le cas contraire on peut observer des oscillations sur les contraintes. En conséquence, on doit prendre une discrétisation d'un ordre supérieur pour les déplacements. Par suite, on prend le même degré d'interpolation pour l'endommagement et les multiplicateurs de Lagrange. On choisit donc de travailler avec des éléments P2 en déplacement et P1 en endommagement et en multiplicateur de Lagrange. On peut faire le choix d'utiliser des maillages quadrangles ou triangles. On présente ci-dessous en exemple une maille triangle (TRIA6, cf Figure 3.3), plus généralement utilisée pour construire des maillages libres.



FIG. 3.3 – Schéma d'un élément fini triangle quadratique à 6 nœuds et disposition des degrés de liberté

3.4.7 Avantages et inconvénients de la modélisation Lagrangienne

Dans cette partie, on liste l'ensemble des principaux avantages et inconvénients de la formulation mixte en Lagrangien augmenté.

Avantages de la formulation mixte

- 1. Cette modélisation permet une résolution en chaque point de Gauss du critère d'endommagement.
- 2. La contrainte unilatérale d'accroissement de l'endommagement est facile à imposer puisqu'il suffit de vérifier que l'endommagement obtenu par résolution locale du critère augmente bien. Dans le cas contraire, on reprend simplement la valeur précédente et le comportement de la strucrure au point de Gauss correspondant est considéré comme élastique (les dérivées de l'énergie par rapport aux variables d'endommagement nodal et par rapport aux multiplicateurs de Lagrange sont nulles).

Inconvénients de la formulation mixte

- 1. Le nombre important de degrés de liberté et la résolution locale du critère sont coûteux en temps calcul et en mémoire.
- 2. La méthode de résolution la plus naturelle pour ce type de formulation est l'algorithme de Newton. Cependant, si Newton est en général un algorithme efficace et rapide, il ne permet pas de converger lorsque l'on rencontre des phénomènes de snap-back (retour en arrière sur la courbe de réponse). Il est alors nécessaire d'utiliser un algorithme de pilotage supplémentaire, ce qui alourdit le coût du calcul.

3.4.8 Algorithme de pilotage

Comme dit précédemment, l'algorithme de Newton ne permet pas à lui seul de franchir des états d'instabilité structurelle caractérisés par des retours en arrière de la réponse forcedéplacement. C'est pourquoi on a recours à des artifices supplémentaires qui introduisent des équations pilotant l'évolution de l'endommagement dans la structure. Classiquement, on utilise dans *Code_Aster* un pilotage par prédiction élastique, qui permet de contrôler l'intensité du chargement en satisfaisant une certaine condition sur la fonction seuil $\frac{\partial \phi}{\partial a_g}$ (Lorentz et al. [29]).

L'algorithme qui prend en charge ce mode de chargement requiert la résolution en chaque point de Gauss de l'équation scalaire suivante, dans laquelle $\Delta \tau$ désigne l'incrément d'endommagement que l'on cherche à atteindre, qui est une donnée d'entrée, stipulée par l'utilisateur dans le fichier de commande :

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_g}(\varepsilon, a_g + \Delta \tau) = 0 \tag{3.43}$$

On considère que l'on se trouve dans le cas d'un essai élastique, tel que le champ de déplacement puisse se décomposer de la façon suivante, où η est un paramètre scalaire qui devient l'inconnu du problème :

$$u = u^d + \eta u^p \tag{3.44}$$

où u^p est la partie du déplacement pilotée. Grâce à la linéarité en petites déformations des opérateurs de déformation, on obtient la décomposition suivante :

$$\varepsilon = \varepsilon^d + \eta \varepsilon^p \tag{3.45}$$

Compte tenu que l'on travaille avec une formulation quadratique en déplacement et donc en déformation, la résolution de la fonction seuil (3.44) revient alors à trouver les racines d'un polynôme de degré 2. On fournit ensuite une linéarisation au voisinage de ses racines, puis on effectue une étude d'optimisation fixant le nouveau chargement en déplacement imposé que l'on va considérer, afin de faire évoluer l'endommagement dans la structure.

3.5 La modélisation nodale

Compte-tenu de la complexité de la formulation Lagrangienne présentée précédemment, avec notamment la présence de multiplicateurs de Lagrange qui découlent de la dualisation des variables d'endommagement, on choisit de s'intéresser à une formulation plus simple, ne faisant intervenir que des degrés de liberté de déplacement et d'endommagement aux nœuds. On reprend alors la formulation (3.10) de l'énergie. On évite ainsi de se poser la question de la projection de l'endommagement des points de Gauss aux nœuds. L'idée principale étant d'introduire dans *Code_Aster* un algorithme de minimisation alternée capable d'aboutir à la rupture complète d'une structure sans intervention de l'utilisateur au cours du calcul et de pouvoir ensuite comparer les résultats obtenus avec ceux que l'on trouve dans la littérature.

3.5.1 Calcul des forces internes

Contrairement à la formulation mixte, le critère admet désormais une résolution nodale. Les objets avec lesquels on travaille sont l'état d'équilibre et le critére de la formulation choisie, définis respectivement par les dérivées premières de l'énergie totale par rapport aux déplacements et à l'endommagement. L'endommagement aux points de Gauss est évalué par interpolation des endommagements aux nœuds. Si l'on note p le nombre de nœuds de l'élément, on a désormais :

$$\alpha_g = \sum_{i=1}^p N_i^{\alpha}(x_g)\alpha_i \tag{3.46}$$

Pour un nœud n, on a alors plus précisement, en reprenant les notations de la partie 3.4.5:

$$F_n^u = \sum_g \omega_g \sigma_g : \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial u_n}$$
(3.47)

$$F_n^{\alpha} = \sum_g \omega_g \left(\frac{\partial \phi^{loc}}{\partial \alpha_n} N_g^{\alpha} + \frac{\partial \phi^{grad}}{\partial (\nabla \alpha_g)} \nabla N_n^{\alpha} \right)$$
(3.48)

On observe alors que l'expression de l'équilibre reste inchangée. Ceci étant dû au fait que la partie non locale en gradient n'intervient pas dans l'expression des contraintes.

La matrice tangente élémentaire de taille 2x2 présente désormais une forme plus simple que pour la formulation mixte :

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^{u}}{\partial u} & \frac{\partial F^{u}}{\partial \alpha} \\ \\ \frac{\partial F^{\alpha}}{\partial u} & \frac{\partial F^{\alpha}}{\partial \alpha} \end{pmatrix}$$
(3.49)

avec, pour expressions des dérivées secondes :

$$\frac{\partial F_n^u}{\partial u_m} = \sum_g \omega_g \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial u_m} : \frac{\partial \sigma_g}{\partial \varepsilon_q} : \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial u_n}$$
(3.50)

$$\frac{\partial F_n^u}{\partial \alpha_m} = \sum_g \omega_g \frac{\partial \sigma_g}{\partial \alpha_g} : \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial u_n}$$
(3.51)

$$\frac{\partial F_n^{\alpha}}{\partial \alpha_m} = \sum_g \omega_g \left(N_n^{\alpha} \frac{\partial^2 \phi^{loc}}{\partial^2 \alpha_g} N_m^{\alpha} + \nabla N_m^{\alpha} \frac{\partial^2 \phi^{grad}}{\partial^2 (\nabla \alpha)_g} \nabla N_n^{\alpha} \right)$$
(3.52)

3.5.2 Choix des éléments finis

De même que pour la modélisation Lagrangienne, on conserve toujours un degré d'interpolation d'écart entre les déplacements et l'endommagement nodal (cf partie 3.4.6). On continue donc à travailler avec des éléments P2 en déplacement et P1 en endommagement (cf Figure 3.4).



FIG. 3.4 – Schéma d'un élément fini triangle quadratique à 6 nœuds et disposition des degrés de liberté

Le choix P1-P1 a été testé et peut toutefois être considéré comme une bonne alternative au P2-P1 dans le cas de calculs à trop grand nombre d'éléments.

3.5.3 Choix de la méthode de résolution

On sait que le problème de minimisation de la formulation régularisée en gradient d'endommagement n'est pas convexe simultanément par rapport aux variables de déplacement et d'endommagement. Cependant, il l'est séparément. C'est pourquoi on utilise généralement un algorithme de minimisation alternée en déduisant le déplacement de l'endommagement, puis l'endommagement en fonction du déplacement actualisé. Il n'est toutefois pas possible, ou alors au prix d'importants efforts de programmation, d'introduire une vraie minimisation alternée dans *Code_Aster*. C'est pourquoi on va plutôt s'intéresser à deux sortes de méthodes de résolution :

– Dans un premier temps, on va s'intéresser aux résultats obtenus si on choisit de continuer à travailler avec la méthode de Newton. En effet, cette méthode de résolution fonctionne bien dans la plupart des études en modélisation Lagrangienne, on s'attend donc à ce que se soit toujours le cas avec la modélisation nodale. – Dans un second temps, on va s'intéresser à la résolution en Newton sécante qui permet, en éliminant les dérivées croisées de l'opérateur tangent, de considérer les variables d'endommagement et de déplacement indépendamment les unes des autres. Ceci afin de reproduire un algorithme de minimisation alternée dans le cas de formulations énergétiques quadratiques en endommagement et en déplacement, puisque l'on élimine alors la dépendance à l'une des variables en dérivant deux fois l'énergie par rapport à celle-ci.

3.5.4 Description de l'algorithme en Newton global

L'algorithme de Newton global consiste à rechercher un point stationnaire par une méthode de tangentes successives, selon le modèle présenté dans la partie 3.1. La principale difficulté liée à la formulation uniquement nodale de l'endommagement réside dans la façon d'imposer la contrainte unilatérale d'irréversibilité de l'endommagement (cf partie 3.3). Pour cela, on doit définir au niveau de la résolution globale un nouveau résidu qui tient compte du critère, écrit sous sa forme factorisée (cf équation (2.86)). Plus précisément, on définit le résidu en endommagement en un nœud n de la façon suivante :

$$R_n^{\alpha} = F_n^{\alpha} \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} \tag{3.53}$$

De façon similaire à ce qui est fait dans les problèmes de contact, on s'assure de la positivité de chacun de ces termes. Si l'endommagement augmente, le critère est atteint et la dérivée première de l'énergie est nulle. Si la dérivée première est strictement positive, on est hors du critère et le comportement de la structure en ce nœud est élastique. Ce qui se traduit par :

1.
$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial t} > 0 \Longrightarrow F_n^{\alpha} = 0$$

2. $F_n^{\alpha} > 0 \Longrightarrow \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} = 0$

A chaque itération on va donc s'assurer que le nouvel incrément d'endommagement est bien positif. Dans le cas contraire, on remplace sa valeur par 0 dans la partie du code correspondant à l'actualisation du champ d'inconnues nodales. On modifie simultanément la matrice tangente en remplaçant les lignes et colonnes des degrés de liberté projetés par l'identité. Cela s'explique par le fait qu'à l'itération sur laquelle on se trouve, la solution obtenue peut être éloignée de la solution finale. Il faut donc penser aux incréments que l'on va ressortir à l'itération suivante, suite aux modifications apportées par la projection. En effet, s'il se trouve que le degré de liberté projeté a bien un comportement de décharge, la projection appliquée, accompagnée de l'identité dans la matrice et d'un résidu nul assurent bien que l'incrément restera nul à l'itération suivante. Dans le cas où la force interne calculée est strictement négative, on ne respecte pas les conditions imposées. Il est alors nécessaire de débloquer le degré de liberté. Pour cela, on reprend un résidu égal à la force interne ($R_n^{\alpha} = F_n^{\alpha}$) et via l'identité dans la matrice et une bonne normalisation (l'endommagement ne devant pas être plus grand que 1), on obtient un incrément strictement positif à l'itération suivante. Les détails de la projection sont explicités dans la partie suivante 3.5.5, dans le cas particulier de la résolution en matrice sécante.

3.5.5 Description de l'algorithme en Newton sécante

L'algorithme de minimisation alternée est un algorithme descendant qui présente donc l'avantage de converger nécessairement vers une solution (cf partie 3.2). C'est ce que l'on retrouve pour l'approche locale, lorsque l'on utilise la méthode de résolution de Newton avec la matrice sécante. Toutefois, ce résultat ne se retrouve plus dans l'approche non locale avec la formulation mixte Lagrangienne. C'est pourquoi on a développé une formulation nodale qui permet, dans le cas de formulations de l'énergie, quadratiques en endommagement et en déplacement, de travailler avec un algorithme de minimisation alternée lorsque l'on utilise la résolution en matrice sécante. On conserve ainsi le résultat obtenu avec l'approche locale.

La première idée de cette nouvelle méthode de résolution est d'éliminer les dérivées croisées (endommagement-déplacement) de l'opérateur tangent, tout en laissant la résolution s'effectuer sur l'ensemble des variables en une itération. Les forces internes étant inchangées, on applique le même résidu que celui décrit précédemment. Plus précisément, on peut écrire l'algorithme de minimisation alternée obtenu par la sécante de la façon suivante :

1. 1ère phase globale :

Soit Δu et $\Delta \alpha$ les incréments respectifs de déplacement et d'endommagement qui permettent de mettre à jour les champs d'inconnus nodaux.

Dans un premier temps, on regarde le signe de chacun des incréments d'endommagement et on projette à 0 ceux qui sont négatifs, de façon à éviter une diminution de l'endommagement :

$$\Delta \alpha_i < 0 \Longrightarrow \Delta \alpha_i = 0 \tag{3.54}$$

On construit simultanément le vecteur indicateur qui permettra par la suite de retrouver la place du degré de liberté projeté dans le système global. Initialement unitaire, on met 0 à la position correspondant au degré de liberté projeté :

$$Vect(\alpha_i) = 0 \tag{3.55}$$

On actualise ensuite les champs d'inconnus nodaux :

$$u = u^{-} + \Delta u \tag{3.56}$$

$$\alpha = \alpha^- + \Delta \alpha \tag{3.57}$$

(3.58)

2. <u>Phase locale :</u>

Une fois l'actualisation terminée, on construit le vecteur des forces internes élémentaires $F = \begin{pmatrix} F^u \\ F^{\alpha} \end{pmatrix}$ ainsi que la matrice tangente élémentaire sous sa forme sécante :

$$K = \begin{pmatrix} K_{uu}(\alpha^{-} + \Delta \alpha) & 0 \\ 0 & K_{\alpha\alpha}(u^{-} + \Delta u) \end{pmatrix}$$
(3.59)

Afin de tenir compte du comportement élastique des nœuds dont les degrés de liberté d'endommagement sont projetés, on modifie la matrice en changeant les lignes et colonnes correspondantes par l'identité :

$$\Delta \alpha_i = 0 \Longrightarrow K_{\alpha_k \alpha_i} = \delta_{ik} \tag{3.60}$$

3. 2ème phase globale :

Une fois la phase élémentaire terminée, on effectue l'assemblage et on s'intéresse au signe des forces internes associées aux degrés de liberté d'endommagement projetés.

Le critère d'endommagement impose la condition suivante :

$$F^{\alpha} \ge 0 \tag{3.61}$$

Si l'on suppose alors que $Vect(\alpha_i) = 0$, on obtient par définition du résidu (3.54) :

$$F^{\alpha_i} \ge 0 \Longrightarrow R^{\alpha_i} = 0 \tag{3.62}$$

Dans le cas où la force interne est strictement négative, la condition (3.62) n'est pas respectée. On conserve alors comme résidu la force interne afin de construire un nouvel incrément pour l'itération suivante :

$$F^{\alpha_i} < 0 \Longrightarrow R^{\alpha_i} = F^{\alpha_i} \tag{3.63}$$

On vérifie ensuite le critère de convergence.

Exemple

Considérons une itération de Newton au cours de laquelle deux incréments d'endommagement $\delta \alpha_{i_0}$ et $\delta \alpha_{i_1}$ sont strictement négatifs.

Dans un premier temps, on construit le vecteur indicateur valant 0 en ces degrés de liberté et 1 ailleurs :

$$Vect(\alpha_{i_0}) = 0 \tag{3.64}$$

$$Vect(\alpha_{i_1}) = 0 \tag{3.65}$$

et on projette les incréments correspondant à 0 :

$$\Delta \alpha_{i_0} = 0 \tag{3.66}$$

$$\Delta \alpha_{i_1} = 0 \tag{3.67}$$

On entre ensuite au niveau élémentaire et dans les routines calculant la matrice de rigidité et les forces internes sur chaque élément. À ce niveau, on remplace les lignes et les colonnes correspondant aux degrés de liberté d'endommagement ayant des incréments nuls par l'identité. Ce qui revient à éliminer ces degrés de liberté de la résolution. Les résidus sont quant à eux calculés entièrement.

On revient ensuite au niveau global. Lorsque les forces internes sont assemblées, on se sert du vecteur indicateur pour localiser les forces internes qui correspondent à des degrés de liberté projetés. Une fois localisés, on regarde leur signe. Supposons que l'on se trouve dans le cas particulier où :

$$F^{\alpha_{i_0}} \ge 0 \tag{3.68}$$

$$F^{\alpha_{i_1}} < 0 \tag{3.69}$$

Le signe de $F^{\alpha_{i_0}}$ respectant bien la condition (3.62), on prend comme résidu le produit :

$$R^{\alpha_{i_0}} = F^{\alpha_{i_0}} \Delta \alpha_{i_0} \tag{3.70}$$

qui est nul, puisque l'incrément est nul. Toutefois, la condition de positivité n'est pas respectée pour $\alpha_{i_1}^n$. On prend alors comme résidu la force interne négative :

$$R^{\alpha_{i_1}} = F^{\alpha_{i_1}} \tag{3.71}$$

Deux situations peuvent ensuite se produire. Soit tous les résidus sont suffisamment faibles pour converger. Dans ce cas l'incrément du degré de liberté α_{i_1} est tout de même projeté à 0. Sa valeur devant être en réalité très faible. Soit le résidu $R^{\alpha_{i_1}}$ est supérieur au critère de convergence et du fait

de l'identité dans la matrice tangente, on obtient à l'itération suivante les nouveaux incréments :

$$\Delta \alpha_{i_0} = 0 \tag{3.72}$$

$$\Delta \alpha_{i_1} = -\frac{F^{\alpha_{i_1}}}{\eta} > 0 \tag{3.73}$$

où η est un coefficient de normalisation permettant de rester dans les bornes d'endommagement admissible (entre 0 et 1). On obtient alors le nouveau vecteur indicateur suivant, déterminé sur ces deux degrés de liberté :

$$Vect(\alpha_{i_0}) = 1 \tag{3.74}$$

$$Vect(\alpha_{i_1}) = 0 \tag{3.75}$$

On ne modifiera cette fois la matrice tangente qu'aux lignes et colonnes de α_{i_0} . Puis, une fois l'assemblage des forces internes terminé, on regardera le signe de $F^{\alpha_{i_0}}$ uniquement. En fonction du signe, on continuera ou non à bloquer ce degré de liberté. Et ce jusqu'à convergence.

3.5.6 Avantages et inconvénients de la modélisation aux nœuds

La principale motivation du développement de cette formulation nodale dans *Code_Aster* est que la matrice sécante permet de travailler avec un algorithme de minimisation alternée, lorsque le critère d'endommagement se déduit d'un potentiel quadratique par rapport à l'endommagement. Compte tenu des différences avec la formulation mixte Lagrangienne, on peut déjà extraire les listes suivantes des avantages et inconvénients de la formulation nodale :

Avantages de la formulation aux nœuds

- 1. Plus faible nombre de degrés de liberté que la formulation mixte Lagrangienne.
- 2. Il est possible d'utiliser la matrice sécante pour travailler avec un algorithme de minimisation alternée dans le cas de formulations de l'énergie quadratiques en déplacement et en endommagement, ou avec un algorithme équivalent dans le cas de formulations plus complexes.
- 3. L'analyse de stabilité est simplifiée du fait de l'absence des multiplicateurs de Lagrange (cf chapitre 4).

Inconvénients de la formulation aux nœuds

- 1. La prise en compte de l'irréversibilité de l'endommagement remonte au niveau global de la programmation et génére un problème de type contact.
- 2. Il n'y a pas, pour le moment, de méthode de pilotage branchée à cette modélisation. Cela nécessiterait d'examiner plus précisemment les algorithmes disponibles et d'effectuer, peut être, certaines modifications afin de les adapter aux variables disponibles. Cela semble toutefois à notre portée.

3.6 Exemples d'application

On présente dans cette partie quelques cas d'application qui permettront de comparer la robustesse de chacune des modélisations présentées. Le premier cas testé est également un exemple de calcul d'endommagement possèdant de mulitples solutions. Ce qui justifie la notion de stabilité introduite dans le chapitre 4.

3.6.1 Endommagement d'une fibre à matrice renforcée

On s'intéresse désormais aux résultats obtenus sur un problème d'endommagement d'une fibre à matrice renforcée, ou inclusion, qui est un problème classique pour lequel on sait que les réponses peuvent être difficiles à obtenir, du fait de propagations brutales de l'endommagement (Bourdin et al. [10]). Les trois cas suivants sont étdudiés dans cette partie :

- 1. Dans un premier temps, on effectue la comparaison entre les résultats obtenus en traction, avec la formulation nodale, en utilisant la méthode de résolution de Newton global (cf partie 3.5.4), et avec la formulation mixte Lagrangienne (cf partie 3.4).
- 2. Dans un second temps, on observe la rupture complète de la structure à partir de la formulation nodale en utilisant la résolution en Newton sécante (cf partie 3.5.5).
- 3. Enfin, dans un dernier temps, on effectue le calcul en compression, à partir la formulation nodale et de la méthode de résolution en Newton sécante, en utilisant la distinction traction-compression définie dans la partie 2.6. (Aucune comparaison n'a été effectuée avec la formulation mixte Lagrangienne, pour laquelle la distinction traction-compression n'a pas été développée).

Présentation du problème

On considère une plaque carrée de longueur L, possédant un disque central D_r de rayon r (cf Figure 3.5), dont les déplacements sont entièrement bloqués. On soumet la plaque à un chargement uniforme en déplacements imposés sur son sommet. Ce chargement pouvant être positif (cas de la traction) ou négatif (cas de la compression). Dans [10] les auteurs ont utilisé une formulation de l'énergie quadratique en endommagement et en déplacement, sans phase élastique :

$$\phi(\varepsilon,\alpha) = \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 R\varepsilon : \varepsilon + \frac{G_c}{4l}\alpha^2 + G_c l\nabla\alpha\nabla\alpha$$
(3.76)

que l'on détaille dans la partie 2.5.1. La forme quadratique de la formulation choisie assure que l'on travaille avec un algorithme de minimisation alternée lorsque l'on utilise la méthode de résolution en Newton sécante avec la formulation nodale. On choisit de mailler la strucure à partir d'un maillage libre triangulaire (pour la disposition des degrés de liberté cf Figure 3.3 pour la formulation mixte Lagrangienne et Figure 3.4 pour la formulation nodale).

Les paramètres matériaux utilisés dans la formulation (3.77) de l'énergie ont pour valeur :

$$E = 4.10^3 N.m^{-2}, \nu = 0.2 \text{ et } G_c = 100 N.m^{-1}$$



FIG. 3.5 – Représentation schématique du problème

Les unités indiqués servent uniquement à donner un ordre de grandeur de la dimension physique des paramètres dont les valeurs pourraient être ramenées à celle du béton en considérant des unités différentes pour le module de Young E.

Cas 1 : Étude en traction et résolution en Newton global

L'endommagement commence à apparaître en haut du disque D_r et se propage tout d'abord de façon stable. Les pas de temps correspondant convergent généralement en deux ou trois itérations. Lorsque l'endommagement maximal atteint une valeur proche de 0.6, une première propagation brutale de l'endommagement se produit et le calul ne converge plus, quel que soit le critère de convergence choisi initialement. On présente en Figure 3.6 l'état d'endommagement trouvé au dernier chargement convergé et la courbe force-déplacement correspondante. Le même résultat est obtenu à partir de la formulation Lagrangienne. L'algorithme de Newton global ne permettant pas de passer cette instabilité structurelle. Il est alors nécessaire d'utiliser un algorithme de pilotage (cf partie 3.4.8) pour aller plus loin dans le calcul. Toutefois, l'objectif étant une comparaison de modèles et le pilotage n'étant pas développé dans le cas de la formulation nodale, on choisit de ne pas utiliser non plus l'algorithme de pilotage pour la formulation mixte Lagrangienne.

La comparaison montre que l'on obtient pour les deux formulations les mêmes états de contraintes et d'endommagement, ainsi que des courbes de réponses forces-déplacements similaires. La principale différence se situe au niveau du temps de calcul nécessaire pour atteindre le niveau de chargement correspondant à la perte de la convergence des calculs. Il est d'à peu près 755s pour la formulation nodale contre 2300s pour la formulation mixte Lagrangienne. Cette différence s'explique par le nombre de degrés de liberté plus faible pour la formulation nodale (52514 degrés de liberté contre 57476) et par le coût de la résolution locale du critère, en chaque point d'intégration. On observe également que le nombre d'itérations nécessaire pour la convergence de chaque pas de temps est plus important pour la formulation mixte Lagrangienne.



FIG. 3.6 – Endommagement et courbe force-déplacements obtenus au dernier chargement convergé par l'algorithme de Newton

Cas 2 : Étude en traction et résolution en Newton sécante

On utilise désormais la méthode de résolution en Newton sécante. Comme la formulation énergétique (3.77) est quadratique en endommagement et en déplacement, on travaille alors avec un algorithme de minimisation alternée. Ce qui permet de toujours converger et ainsi d'obtenir la rupture complète de l'éprouvette. On obtient alors le chemin de fissuration présenté en Figure 3.7. Comme dans le cas de la résolution en Newton global, on commence par observer l'endommagement de la structure en haut de l'inclusion, jusqu'à atteindre la première propagation brutale de l'endommagement, que l'on franchit sans difficulté avec approximativement 250 itérations. On observe ensuite l'endommagement s'étirer vers les bords de la matrice, d'abord de façon symétrique, avant de déchirer brutalement le bord droit. On observe donc une nouvelle propagation brutale que l'on franchit toujours sans difficulté. Puis, pour finir, l'endommagement progresse de nouveau vers le bord gauche de la structure, jusqu'à rupture complète. La solution qui endommagerait en premier le bord gauche est équivalente. Le fait que l'on progresse d'abord vers le bord droit est simplement causé par l'inhomogénéité du maillage, favorable à ce bord. On rappelle que le maillage est libre et il est plus facile d'endommager des mailles fines que des mailles grossières, car cela coûte moins cher énergétiquement. Dans le cas d'un maillage parfaitement symétrique, dont la construction est complexe, on suppose que si les arrondis numériques ne sont pas trop défavorables on retrouve une solution symétrique qui rompt les deux bords simultanément. On intuite donc ici l'existence de solutions multiples pour ce problème.

On note cette fois, un nombre plus important d'itérations nécessaire à la convergence (800 itérations peuvent être nécessaires pour obtenir la solution qui endommage brutalement le bord droit). Toutefois, il est important de se rappeller que l'on fait évoluer les degrés de liberté de déplacement et d'endommagement simultanément lors de chaque itération. Le nombre d'itérations donné cor-



FIG. 3.7 – Courbe force-déplacements et évolution de l'endomma gement obtenus par la méthode de résolution en Newton sécante

respond au nombre nécessaire pour converger sur l'ensemble des degrés de liberté. Dans le cas de l'algorithme de minimisation alternée présenté dans la partie 3.2, ce nombre correspondrait à la somme des itérations nécessaires à la convergence de l'endommagement, à déplacements fixés, et des itérations nécessaires à la convergence des déplacements, à endommagement fixé. Le temps de calcul total utilisé pour rompre la structure est d'à peu près 12h, ce qui est l'ordre de grandeur des temps de calcul que l'on trouve généralement pour ce type d'étude, en utilisant la formulation Lagrangienne avec pilotage.

Cas 3 : Étude en compression

On s'intéresse désormais à la réponse obtenue dans le cas d'un chargement de compression. On conserve le maillage utilisé dans le cas de la traction. On obtient alors un endommagement qui s'initie toujours en haut de l'inclusion avant de se propager brutalement jusqu'en haut de la structure, vers la gauche suivant un angle d'à peu près 45 degrés (cf Figure 3.8). On observe également que le calcul converge difficilement, voire plus du tout, lorsque l'on a atteint le haut de la



FIG. 3.8 – Endommagement en compression sur le maillage du modèle en traction

structure et que l'endommagement se propage le long du bord. Si l'on s'intéresse à la déformation des mailles, on voit alors des mailles qui se déforment anormalement vers le haut. Le problème est que la partie haute de l'inclusion est complétement fissurée, bien que l'on continue à vouloir contrôler l'ensemble des déplacements des mailles supérieures. Il n'y a alors plus de solutions réellement physiques associées au chargement que l'on cherche à imposer.

On choisit ensuite de raffiner le maillage. On trouve alors le même type de chemin de fissuration, mais dirigé vers la droite cette fois ci.

Comparativement, on trouve dans la littérature (Amor et al. [3]) un résultat dans lequel l'endommagement se propage verticalement vers le haut avant de faire le tour de l'inclusion. Or, pour cela, il a été nécessaire d'utiliser un maillage fortement raffiné. Compte tenu du fait que l'on travaille avec une discrétisation P2 du déplacement alors que le résultat présenté a été obtenu avec une discrétisation P1, le nombre de degrés de liberté avec lequel on devrait travailler pour obtenir un résultat similaire serait trop important. On a donc fait le choix de forcer le maillage en construisant une bande verticale d'éléments quadrangles, d'épaisseur non nulle, située juste au dessus de l'inclusion. Il se trouve alors que l'on obtient exactement les mêmes états de contraintes et d'endommagement que ceux présentés dans la littérature (cf Figure 3.9). On remarque que la contrainte σ_{yy} est dissymétrique sous l'inclusion. Cela s'explique par le fait que le maillage ne soit pas parfaitement symétrique.

On peut là encore extraire des solutions multiples. La recherche de solutions bifurquées et l'étude de leur stabilité sont donc également des problèmes intéressant à effectuer dans le cas d'une étude en compression. De plus, on observe bien en comparant les résultats obtenus pour des maillages différents, une dépendance résiduelle au maillage de la modélisation en gradient d'endommagement, pour la formulation énergétique utilisée.


FIG. 3.9 – Contrainte σ_{yy} et déformée de l'inclusion pour le maillage symétrisé

3.6.2 Endommagement fragile d'une éprouvette entaillée

On considère maintenant un essai de traction d'une éprouvette entaillée, axisymétrique. Pour cette étude, on sait que le comportement du béton est particulièrement fragile et que la propagation de l'endommagement est donc brutale. Si l'on effectue le calcul avec la formulation mixte Lagrangienne, le pilotage doit être déclenché quasi-immédiatement pour obtenir la rupture de l'éprouvette. On s'attend donc, dans le cas de la formulation nodale de l'endommagement avec la méthode de résolution en Newton sécante, à déchirer l'ensemble de la plaque en un pas de temps. Ce cas est également un bon cas test de la dépendance à l'orientation du maillage. On sait qu'en fonction de l'expression énergétique utilisée, on a ou non, indépendance à l'orientation du maillage. On choisit ici de travailler avec une énergie qui présente les bonnes caractéristiques d'indépendance au maillage, soit grossièrement une perte de rigidité $A(\alpha)$ qui s'annule en $(1-\alpha)^2$ au voisinage de $\alpha = 1$, ce qui permet dans le cas 1D d'une barre en traction uniforme d'éviter les phénomènes de snap-back locaux (retour en arrière de la réponse force-déplacement), et une dissipation $\omega(\alpha)$ linéaire (Lorentz et Godard [30]). L'objectif étant de vérifier que l'on conserve bien cette propriété avec la formulation nodale, pour l'algorithme sécante. On cherchera dans un second temps à comparer les résultats et temps de calcul avec ceux obtenus à partir de la formulation mixte Lagrangienne.

Présentation du problème

L'éprouvette est de hauteur totale 2m. On charge en déplacements imposés, en tirant sur l'arête du haut d'un déplacement vertical U et sur l'arrête du bas, d'un déplacement -U. On bloque simultanément les déplacements horizontaux de l'ensemble de l'arrête verticale gauche de la structure. Enfin, on s'intéresse au cas d'un maillage orienté. En effet, il a été observé sur les premiers calculs en gradient d'endommagement que le maillage pouvait garder une certaine influence sur le chemin de fissuration final, quand bien même on utilise une formulation régularisée. Afin d'évaluer plus précisement cette pathologie, on construit un maillage qui présente une bande quadrangle



FIG. 3.10 – Représentation de la géomètrie et du maillage

partant de l'entaille et orientée de façon diagonale vers le haut. Le but étant de voir si l'endommagement, qui s'initialise au bord de l'entaille, va ou non suivre la direction de cette bande maillée finement. Pour le reste, on utilise un maillage libre triangulaire, plus grossier (cf Figure 3.10).

On choisit de travailler avec une formulation de l'énergie d'endommagement quadratique en rigidité et linéaire en dissipation.

$$\phi(\varepsilon,\alpha) = \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 R\varepsilon : \varepsilon + \frac{\sigma_M^2}{E_0}\alpha + \frac{1}{2}E_0 l^2 \nabla \alpha . \nabla \alpha$$
(3.77)

que l'on détaille dans la partie 2.5.2, où σ_M est la contrainte limite du matériau.

Là encore, la formulation énergétique est quadratique en endommagement et en déplacement, ce qui permet de travailler avec un algorithme de minimisation alternée lorsque l'on utilise la méthode de résolution sécante.

Les paramètres matériaux correspondant à la formulation (3.78) sont ceux du béton :

$$E_0 = 3.10^{10} N.m^{-2}, \sigma_M = 3.10^6 N.m^{-2}$$
 et $\nu = 0.2$

Cas de la formulation mixte pilotée

Comme précisé précédemment, on est contraint de piloter l'endommagement de la plaque entaillée afin de faire converger l'algorithme de Newton dans ce cas de propagation brutale de l'endommagement. On observe que la valeur la plus efficace d'incrément d'endommagement recherché par le pilotage est 0, 2 par pas de temps (cf partie 3.4.8). On voit alors l'endommagement apparaître au bord de l'entaille avant de se propager de façon rectiligne, indépendamment de l'orientation du maillage (cf Figure 3.11).



FIG. 3.11 – Évolution de l'endommagement nodal obtenu avec la formulation mixte pilotée

Ce qui confirme l'intérêt de l'approche non locale, régularisée par le gradient de l'endommagement, et ce qui était le résultat attendu compte tenu des caractéristiques de la formulation énergétique utilisée (3.78). Du point de vue de la réponse force-déplacement, on observe un point d'inflexion, avec un snap-back important qui ramène quasiment à contraintes nulles pour une déformation inférieure à la limite élastique (cf Figure 3.12). Globalement, pour 104666 degrés de liberté le calcul prend 1h20mins avec le solveur MUMPS qui est le solveur le plus adapté aux formulations mixtes, disponible dans $Code_Aster$ (Boiteau [8]).



FIG. 3.12 – Réponse force-déplacement de la structure, obtenue avec la formulation mixte pilotée

Cas de la formulation nodale avec la méthode de résolution en Newton sécante

A nouveau, on observe que l'endommagement se propage bien de façon rectiligne, respectant ainsi les symétries géométriques et de chargement (cf Figure 3.13). On conserve donc l'indépendance à l'orientation du maillage. Cela démontre que l'algorithme développé ne détériore pas le caractère indépendant de l'orientation du maillage que l'on obtient avec l'approche non locale et ce choix de formulation énergétique. D'autre part, cet exemple met en avant l'algorithme de minimisation alternée sur ce type d'étude. En effet, le fait que la plaque se déchire de façon quasi-immédiatement fragile permet de trouver le chemin de fissuration en deux pas de temps (le premier pas correspond à un très léger endommagement en bord d'entaille. Il permet de marquer la fin de la phase élastique). On sait qu'avec cette méthode, on peut s'attendre à un nombre important d'itérations avant de converger et donc à un temps de calcul non négligeable (ici, à peu près 900 itérations suffisent pour 93369 degrés de liberté). Toutefois, on remarque que l'on a eu besoin que d'une vingtaine de minutes en tout. Le gain par rapport à la formulation mixte (avec pilotage) est donc considérable (le temps de calcul est ici divisé par 4).

3.7 Conseils d'utilisation de la formulation aux nœuds

Il est préférable d'utiliser la modélisation aux nœuds (GVNO dans *Code_Aster*) avec la méthode de Newton traditionelle dans le cas de calculs d'endommagement qui ne présentent pas d'instabilités structurelles de type snap-back. En effet, la méthode de Newton permet une convergence plus rapide mais elle ne permet pas de franchir les snap-back sans l'utilisation d'un algorithme supplémentaire de type pilotage, semblable à celui présenté dans le cas de la formulation mixte (GRAD_VARI dans *Code_Aster*, cf partie 3.4.8). Dans le cas contraire, il est préférable d'utiliser la méthode sécante qui permet de toujours converger vers une solution. Pour déclencher la méthode de résolution en matrice sécante, au cours d'un calcul d'endommagement, il suffit de déclarer dans le fichier de commande un PAS_MINLELAS (commande de *Code_Aster*, permettant de définir une taille minimale du pas de temps, en dessous de laquelle on utilise une résolution en matrice sécante.



FIG. 3.13 – Chemin de fissuration final de l'éprouvette obtenu dans le cas de la formulation nodale et avec la méthode de résolution en Newton sécante

Si l'on travaille avec un pas de temps plus grand que le PAS_MINLELAS, on utilise la matrice tangente) suffisement grand dans l'opérateur STAT_NON_LINE (opérateur de calcul de statique non linéaire) du fichier de commande. De façon à s'assurer que la condition soit toujours vérifiée. Le nombre d'itérations nécessaire à la convergence peut être assez important (on compte souvent 800 itérations pour des propagations brutales). Il faut donc autoriser un nombre maximal d'itération important (1200 est une bonne valeur par défaut). La rapidité de la convergence dépend alors de la formulation énergétique utilisée et de la discrétisation temporelle. Des pas de temps trop grands peuvent conduire à une convergence trop difficile. Cette méthode est particulièrement efficace dans le cas des formulations quadratiques en endommagement et en déplacement, puisqu'on se retrouve alors avec un algorithme de minimisation alternée robuste.

3.8 Conclusion

On possède donc désormais une seconde formulation en gradient d'endommagement dans *Code_Aster*, qui permet de travailler avec un algorithme de minimisation alternée, comme alternative à l'algorithme de Newton présent avec la formulation mixte Lagrangienne. Ses principaux atouts sont sa simplicté de compréhension et d'utilisation qui le rend accessible à tout nouvel utilisateur, non spécialiste des calculs d'endommagement. Les premières comparaisons ont montré que la formulation nodale permet de gagner en mémoire et temps de calcul sur des études 2D. Des études comparatives suivant la finesse du maillage utilisé et sur des exemples 3D permettront d'affiner la comparaison. De plus, on a pu vérifier que le choix de l'algorithme de résolution ne changeait pas le caractère indépendant ou non à l'orientation du maillage des différentes formulations énergétiques utilisées pour représenter la dégradation irréversible d'un matériau tel que le béton. Un autre atout, dont on verra l'importance dans la suite du manuscrit, est la simplification des études de stabilité.

Chapitre 4

Stabilité des solutions

Sommaire

4.1	4.1 Critère de stabilité								
	4.1.1	Cas de la formulation nodale	76						
	4.1.2	Cas de la formulation mixte Lagrangienne	79						
4.2	2 Stal	oilité de la solution homogène d'une barre en traction \ldots	82						
4.3	Con	clusion du chapitre	86						

La perte des propriétés mathématiques d'unicité de la solution dans le cas de lois de comportement adoucissantes a été mise en évidence dans les chapitres précédents. L'existence de solutions multiples a ainsi été, pour exemple, retrouvée sur le suivi de l'endommagement d'une matrice à fibre renforcée soumise à des chargements de traction et de compression. L'objectif qui fait suite à ces travaux est de déterminer, parmi l'ensemble des solutions que l'on est en mesure d'obtenir numériquement, lesquelles sont physiquement admissibles. Pour ce faire, on va vérifier qu'à un état de déplacement et d'endommagement trouvé, la solution se situe bien sur un minimum de l'énergie. La difficulté est de tenir compte de l'irréversibilité de l'endommagement. On présente dans ce chapitre la définition et la mise en place d'un critère de stabilité, puis son application sur le cas test d'une barre en traction.

4.1 Critère de stabilité

Dans les problèmes classiques qui consistent à vérifier qu'une position d'équilibre est stable, on vérifie que la dérivée seconde de la fonction énergie est positive au point correspondant. Cela implique que l'extremum est un minimum local de la fonction. Dans le cas particulier de l'endommagement, les seules perturbations susceptibles d'affecter la stabilité de l'équilibre trouvé sont celles qui respectent la contrainte unilatérale d'irréversibilité. Le critère qui consiste à vérifier que la dérivée seconde de l'énergie est positive est suffisant pour déduire la stabilité, mais non nécessaire. Il faut donc désormais vérifier la positivité uniquement dans la direction des endommagements croissants. Si le critère ainsi formulé paraît plus simple, du fait de la réduction du domaine étudié, il introduit un problème d'optimisation sous contraintes d'inégalités, plus complexe à résoudre.

4.1.1 Cas de la formulation nodale

Dans le cas de la formulation nodale (cf partie 3.5), on recherche un minimum en déplacement et en endommagement de l'énergie. Considérons un état (u, α) vérifiant les conditions premières que sont l'équilibre de la structure Ω et le critère d'endommagement. Pour vérifier que (u, α) réalise bien un minimum local de l'énergie, on utilise un développement de Taylor d'ordre 2 de l'énergie et on compare le niveau d'énergie $P(u, \alpha)$ atteint avec celui que l'on obtient en considérant de petites perturbations physiquement admissibles.

On note C^0 l'ensemble des directions admissibles telles que :

$$C^{0} = \{ v \in H^{1}(\Omega), v = 0 \text{ sur } \partial \Omega \}$$

$$(4.1)$$

et on note D l'ensemble des endommagements admissibles :

$$D = \{\beta \in H^1(\Omega), \, \beta \ge 0 \text{ sur } \Omega\}$$

$$(4.2)$$

Alors, la solution obtenue au point (u, α) est stable si et seulement si :

$$\forall (v,\beta) \in C^0 \times D, \ \exists \bar{h} > 0, \ \forall h \in \left[0,\bar{h}\right] : P(u+hv,\alpha+h\beta) \ge P(u,\alpha)$$

$$(4.3)$$

Par développement de Taylor au second ordre, cela s'écrit :

$$P(u+hv,\alpha+h\beta) - P(u,\alpha) = \int_{\Omega} \left(h \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,\alpha) \cdot v + h \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(u,\alpha) \cdot \beta \right) dx +$$
(4.4)

$$\int_{\Omega} \left(\frac{h^2}{2}(v,\beta) D^2 \phi(u,\alpha) . (v,\beta) \right) dx + \circ(h^2) \ge 0 \qquad (4.5)$$

où $D^2\phi$ est l'opérateur quadratique associé aux dérivées secondes de ϕ .

L'équilibre de la structure permet d'écrire :

$$\forall v \in C^0, \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, \alpha) . v \right) dx = 0$$
(4.6)

On peut donc éliminer de la différence (4.4) la dérivée première de l'énergie par rapport au déplacement.

On considère ensuite le critère d'irréversibilité associé à la loi d'évolution de l'endommagement (cf équation (2.90)) :

$$\forall \beta \in D, \, \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(u, \alpha) . \dot{\beta} = \left(\frac{1}{2}A'(\alpha)R\varepsilon(u) : \varepsilon(u) + \omega'(\alpha) - E_0 l^2 \Delta \alpha\right) . \dot{\beta} \ge 0 \tag{4.7}$$

et l'on note Ω^{α} l'ensemble des zones de Ω sur lesquelles le critère est atteint et Ω^{e} les zones élastiques, respectivement définies par :

$$\Omega^{\alpha} = \left\{ x \in \Omega, \, \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \left(u(x), \alpha(x) \right) = 0 \right\}$$
(4.8)

$$\Omega^{e} = \left\{ x \in \Omega, \, \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \left(u(x), \alpha(x) \right) > 0 \right\}$$
(4.9)

On remarque alors que si l'on considère des fonctions tests qui endommagent les zones élastiques Ω^e , le terme de degré 1 en h, associé à la dérivée première par rapport à l'endommagement, prédomine dans le développement de Taylor. Ce qui implique, par positivité de tous ses coefficients :

$$P(u+hv,\alpha+h\beta) \ge P(u,\alpha) \tag{4.10}$$

Il ne s'agit donc pas de perturbations susceptibles de déstabiliser l'état d'équilibre obtenu en (u, α) . Ces fonctions tests peuvent donc être éliminer de l'étude de stabilité. On va désormais considérer que les β test admissibles appartiennent à l'ensemble :

$$D^* = \{ \beta \in H^1(\Omega), \ \beta \ge 0 \ \text{sur } \Omega \text{ et } \beta = 0 \ \text{sur } \Omega^e \}$$

$$(4.11)$$

tel que :

$$\forall \beta \in D^*, \, \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(u, \alpha).\beta = 0 \tag{4.12}$$

En conclusion, l'état d'équilibre obtenu en (u, α) est stable si et seulement si le terme de degré 2 en h est positif :

$$\forall (v,\beta) \in C^0 \times D^*, \ \int_{\Omega} (v,\beta) . D^2 \phi(u,\alpha) . (v,\beta) \ dx \ge 0$$
(4.13)

Si l'on fait ensuite le choix de normer le critère de stabilité (4.13) en utilisant la norme $L^2(\Omega)$, de sorte à restreindre le champ des perturbations à étudier :

$$\forall (v,\beta) \in C^0 \times D^*, \ \frac{\int_{\Omega} (v,\beta) D^2 \phi(u,\alpha) . (v,\beta) \ dx}{\parallel (v,\beta) \parallel^2_{L^2(\Omega)}} \ge 0$$

$$(4.14)$$

on obtient finalement un critère ayant la forme d'un quotient de Rayleigh soumis à des contraintes d'inégalités.

<u>Remarque</u> : Le problème en vitesse montre qu'une condition nécessaire de non-bifurcation (i.e unicité du problème en vitesse) s'écrit :

$$\forall (v,\beta) \in C^0 \times D^{**}, \ \frac{\int_{\Omega} (v,\beta) . D^2 \phi(u,\alpha) . (v,\beta) \ dx}{\|(v,\beta)\|_{L^2(\Omega)}^2} > 0$$
(4.15)

où :

$$D^{**} = \{\beta \in H^1(\Omega), \beta = 0 \text{ sur } \Omega^e\}.$$
(4.16)

On voit donc qu'elle diffère de la condition de stabilité par l'ensemble des champs d'endommagement test β qui n'ont plus à être positifs. On en déduit immédiatement que non-bifurcation implique stabilité, mais l'inverse n'est pas vrai en général.

La résolution du problème d'évolution par la méthode des éléments finis permet ensuite de construire l'opérateur des dérivées secondes de l'énergie P sous la forme d'une matrice notée K. En tenant alors compte de la symétrie de la matrice des dérivées secondes, on déduit que la valeur minimale du quotient (4.15), établi pour le critère de non bifurcation, est atteinte pour une perturbation qui est exactement le mode propre associé à la plus petite valeur propre de K. Étudier l'existence de solutions multiples revient donc à effectuer une recherche de valeurs propres généralisées sur la matrice des dérivées secondes. Comme explicité précédemment à partir de la comparaison des critères de non-bifurcation et de stabilité, l'unicité de la solution au problème d'évolution suffit pour conclure sur sa stabilité. La minimisation d'une fonctionelle sous contraintes d'inégalités étant plus complexe, on procédera en deux étapes afin de discuter de la stabilité d'une solution :

1. $\forall (v, \beta) \in C^0 \times D^{**}, \ \frac{(v, \beta)^T K(v, \beta)}{\parallel (v, \beta) \parallel^2} > 0 \Longrightarrow$ unicité et stabilité de la solution

2.
$$\exists (v, \beta) \in C^0 \times D^{**}, \frac{(v, \beta)^T K(v, \beta)}{\parallel (v, \beta) \parallel^2} \leq 0 \Longrightarrow$$
 existence de solutions multiples.

On s'intéresse alors au critère de stabilité :

$$\begin{split} &1.1. \; \forall (v,\beta) \in C^0 \times D^*, \; \frac{(v,\beta)^T K(v,\beta)}{\parallel (v,\beta) \parallel^2} \geq 0 \Longrightarrow \text{la solution est stable.} \\ &1.2. \; \exists (v,\beta) \in C^0 \times D^*, \; \frac{(v,\beta)^T K(v,\beta)}{\parallel (v,\beta) \parallel^2} < 0 \Longrightarrow \text{la solution est instable.} \end{split}$$

4.1.2 Cas de la formulation mixte Lagrangienne

Dans le cas de la formulation mixte Lagrangienne, on effectue la recherche d'un point selle de l'énergie vérifiant les conditions d'extremum suivantes : $\min_{\substack{(u,\alpha,a) \ \lambda}} \max_{\lambda} P(u,\alpha,a,\lambda)$.

L'étude de stabilité est alors complexifiée par la présence des multiplicateurs de Lagrange λ . Il est nécessaire d'adapter les critères de stabilité (4.14) et de non bifurcation (4.15) à la formulation mixte en introduisant une relation supplémentaire de compatibilité entre la perturbation en endommagement apportée sur les degrés de liberté aux nœuds, notée $\delta \alpha$, et sur les points de Gauss, notée δa (cf partie 3.4). Autrement, on se rend rapidement compte, lorsque l'on utilise une discrétisation par éléments finis, que la plus petite valeur propre sans contrainte de l'opérateur tangent est toujours négative. Ce qui est une particularité des points selles et ce qui se jusitifie par le fait que l'on cherche à chaque pas de temps à minimiser l'énergie par rapport aux degrés de liberté de déplacement et d'endommagement, mais qu'a contrario, on cherche à la maximiser par rapport aux multiplicateurs de Lagrange. Le mode associé, lorsque la structure est encore dans un état de comportement élastique, est alors piloté par les degrés de liberté de Lagrange. On obtient ainsi des modes parasites, non physiques, qu'il faut éliminer

Propriété 1 :

La recherche de modes propres généralisés en formulation mixte Lagrangienne doit s'effectuer en annulant les multiplicateurs de Lagrange du second membre. On recherche alors des modes vérifiant l'équation :

$$K \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta \alpha \\ \delta \lambda \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$
(4.17)

La relation supplémentaire, définie par la dernière équation du système, permet d'assurer la condition suivante :

$$\delta a = \delta \alpha \tag{4.18}$$

nécessaire pour que la perturbation en endommagement que l'on cherche à produire au niveau des nœuds se répercute bien aux points de Gauss.

Preuve :

Pour plus de commodité, on présente la densité d'énergie de déformation associée à la formulation mixte en gradient d'endommagement (cf partie 3.4) de la façon suivante :

$$\phi(\alpha, a, \lambda) = \phi^{elas}(a) + \phi^{diss}(a) + \phi^{grad}(\alpha) + \lambda(\alpha - a) + \frac{r}{2}(\alpha - a)^2$$
(4.19)

où ϕ^{diss} et ϕ^{grad} désignent respectivement la partie dissipative et la partie en gradient de la densité d'énergie, et où ϕ^{elas} est la densité d'énergie élastique stockée. On ne présente pas ici les inconnues de déplacement, car elles n'interviennent pas dans la démonstration qui suit.

Dans un premier temps, on peut déduire du critère d'endommagement une relation entre les endommagements α et a:

$$\frac{\partial \phi}{\partial a}(\alpha, a, \lambda) = 0 \implies \frac{\partial \phi^{elas}}{\partial a}(a) + \frac{\partial \phi^{diss}}{\partial a}(a) - \lambda + r(\alpha - a) = 0 \tag{4.20}$$

$$\implies \frac{\partial \phi^{elas}}{\partial a}(a) + \frac{\partial \phi^{diss}}{\partial a}(a) - ra = \lambda - r\alpha \tag{4.21}$$

$$\implies a = a(\alpha, \lambda) \tag{4.22}$$

L'élimination des degrés de liberté d'endommagement des zones élastiques dans les études d'unicité et de stabilité assure que le critère d'endommagement soit atteint pour les degrés de liberté conservés. L'implication (4.22) se déduit de (4.21) à la condition qu'il existe un unique endommagement *a* solution de l'équation (4.21) à α et λ fixés. Ce résultat découle de la stricte monotonie des fonctions perte de rigidité (cf partie 2.1.2) et de dissipation (cf partie 2.1.3).

(4.22) permet alors d'écrire ϕ comme une fonction de α et λ :

$$\phi(\alpha, \lambda) = \phi(\alpha, a(\alpha, \lambda), \lambda) \tag{4.23}$$

Considérons ensuite le cas particulier où $a = \alpha$ (cas que l'on veut vérifier en moyenne avec la formulation mixte). Alors les multiplicateurs de Lagrange λ n'interviennent plus dans la formulation (4.19) et l'on peut écrire dans ce cas précis :

$$\phi(\alpha) = \phi^{elas}(\alpha) + \phi^{diss}(\alpha) + \phi^{grad}(\alpha)$$
(4.24)

L'objectif de la démonstration est alors de vérifier qu'on a équivalence des problèmes aux valeurs propres (P1), écrit sur l'endomagement α et déduit de (4.24), et (P2), écrit sur α et λ à partir de (4.23) :

$$(P1) : \delta a = \delta \alpha \text{ et } (\phi^{elas} + \phi^{diss} + \phi^{grad})''(\alpha)\delta \alpha = \mu \delta \alpha$$

$$(4.25)$$

$$(P2) : \phi''(\alpha, \lambda)(\delta\alpha, \delta\lambda) = \mu(\delta\alpha, 0)$$
(4.26)

Pour cela, on part de (P2) et on montre l'équivalence avec (P1).

Dans un premier temps on exprime les dérivées premières de ϕ , en tenant compte du critère d'endommagement (4.20) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \phi^{grad}}{\partial \alpha} + \lambda + r(\alpha - a) \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = \alpha - a \tag{4.28}$$

On déduit ensuite l'expression des dérivées secondes, en dérivant (4.27) et (4.28):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 \phi^{grad}}{\partial \alpha^2} + r(1 - \frac{\partial a}{\partial \alpha}) \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha \partial \lambda} = 1 - r \frac{\partial a}{\partial \lambda} = 1 - \frac{\partial a}{\partial \alpha} \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2} = -\frac{\partial a}{\partial \lambda} \tag{4.31}$$

On peut alors réécrire le problème (P2) sous la forme d'un système, en fonction de l'expression des dérivées (4.29), (4.30) et (4.31):

$$(P2) \iff \begin{cases} \delta\alpha - \frac{\partial a}{\partial \alpha} \delta\alpha - \frac{\partial a}{\partial \lambda} \delta\lambda = 0\\ \\ \frac{\partial^2 \phi^{grad}}{\partial \alpha^2} \delta\alpha + [r(\delta\alpha - \delta a) + \delta\lambda] = \mu \delta\alpha \end{cases}$$
(4.32)

On retrouve exactement (P1), en utilisant la dérivée de (4.21) par rapport à l'endommagement a:

$$(P2) \iff \begin{cases} \delta \alpha = \delta a \\ \frac{\partial^2 \left(\phi^{elas} + \phi^{diss} + \phi^{grad} \right)}{\partial a^2} \delta a = \mu \delta \alpha \end{cases}$$
(4.33)

On a donc bien équivalence des problèmes aux valeurs propres (P1) et (P2) et on peut ensuite étendre ce résultat à l'énergie totale P par intégration.

Fin de la preuve.

Dans le cas de la stabilité, il ne s'agit pas de rechercher un mode propre, mais une perturbation qui respecte la même condition :

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda}(u+\delta u,\alpha+\delta \alpha,\lambda+\delta \lambda) = \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial u}\delta u + \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda \partial \alpha}\delta \alpha + \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2}\delta \lambda = 0$$
(4.34)

L'équation supplémentaire qui intervient permet de retrouver le critère de stabilité de la formulation nodale (4.14), écrit sous la forme discrète. La perturbation en multiplicateur de Lagrange $\delta\lambda$ se déduit directement de δu et $\delta\alpha$.

4.2 Stabilité de la solution homogène d'une barre en traction

Le cas de la barre en traction est le seul pour lequel on peut actuellement trouver dans la littérature des résultats analytiques de stabilité (Pham et al. [37]). On peut ainsi retrouver les expressions des critères de bifurcation et de perte de stabilité de la solution homogène en fonction du rapport entre la longueur interne et le chargement appliqué.

On reprend les notations de la partie 2.4 et on s'intéresse plus particulièrement à la stabilité de la solution homogène présentée en 2.4.2.

On écrit, dans un premier temps, la dérivée seconde directionnelle de l'énergie au sens de Gâteaux :

$$D^{2}P(u_{t},\alpha_{t}).(v,\beta) = \int_{0}^{L} \left[A(\alpha_{t})E_{0}v^{'2} + \left(\frac{A^{''}(\alpha_{t})E_{0}u_{t}^{'2}}{2} + \omega^{''}(\alpha_{t})\right)\beta^{2} + (4.35)\right]$$

$$E_0 l^2 {\beta'}^2 + 2A'(\alpha_t) E_0 u'_t v' \beta \Big] dx$$
(4.36)

L'unicité est alors donnée par la stricte positivité de la dérivée seconde dans toutes les directions (v, β) , alors que la stabilité est donnée par la positivité dans la direction des endommagements β positifs.

En tenant compte de la définition de la souplesse $S(\alpha_t) = \frac{1}{A(\alpha_t)E_0}$ et des équations (2.104), on peut extraire l'égalité suivante :

$$\frac{A^{''}(\alpha_t)E_0u_t^{'2}}{2} = \frac{A^{'}(\alpha_t)^2 E_0t^2}{A(\alpha_t)} - \frac{S^{''}(\alpha_t)\sigma_t^2}{2}$$
(4.37)

En introduisant ensuite (4.37) dans (4.35), on peut réécrire la dérivée seconde sous la forme :

$$D^{2}P(u_{t},\alpha_{t}).(v,\beta) = \int_{0}^{L} \left[E_{0}l^{2}\beta^{'2} + A(\alpha_{t})E_{0}\left(v^{'} + \frac{A^{'}(\alpha_{t})}{A(\alpha_{t})}t\beta\right)^{2} - (4.38)\right]$$

$$\left(\frac{S''(\alpha_t)\sigma_t^2}{2} - \omega''(\alpha_t)\right)\beta^2 \right] dx \tag{4.39}$$

Propriété 1 :

les caractères homogène et adoucissant de la solution assurent que :

$$\left(\frac{S''(\alpha_t)\sigma_t^2}{2} - \omega''(\alpha_t)\right) > 0 \tag{4.40}$$

Preuve :

Par définition de l'adoucissement, la quantité $\frac{\omega'(\alpha_t)}{S'(\alpha_t)}$ est strictement décroissante. On a donc :

$$\frac{1}{S'(\alpha_t)} \left[\omega''(\alpha_t) - \frac{\omega'(\alpha_t)}{S'(\alpha_t)} S''(\alpha_t) \right] < 0$$
(4.41)

L'expression du critère d'endommagement (2.105) dans le cas prècis de la solution homogène, hors phase élastique, permet d'écrire la relation :

$$\omega'(\alpha_t) = \frac{1}{2}S'(\alpha_t)\sigma_t^2 \tag{4.42}$$

En introduisant ensuite (4.42) dans (4.41) on obtient alors :

$$\frac{1}{S'(\alpha_t)} \left[\omega''(\alpha_t) - \frac{1}{2} S''(\alpha_t) \sigma_t^2 \right] < 0$$

$$(4.43)$$

La positivité de $S'(\alpha_t)$ permet finalement de déduire l'inégalité (4.40).

Fin de la preuve.

Il est donc possible d'écrire un quotient de Rayleigh qui est le rapport de la partie positive de la dérivée seconde de l'énergie sur la partie négative :

$$R_{t}(v,\beta) = \frac{\int_{0}^{L} E_{0}l^{2}\beta'^{2} + A(\alpha_{t})E_{0}\left(v' + \frac{A'(\alpha_{t})}{A(\alpha_{t})}t\beta\right)^{2}dx}{\int_{0}^{L} \left(\frac{1}{2}S''(\alpha_{t})\sigma_{t}^{2} - \omega''(\alpha_{t})\right)\beta^{2}dx}$$
(4.44)

Critère explicite d'unicité :

On peut extraire de (4.44) le critère suivant d'unicité de la solution homogène, équivalent à celui défini dans l'équation (4.15):

$$R_t(v,\beta) > 1, \,\forall (v,\beta) \in C_0 \times D^{**} \tag{4.45}$$

où l'on rappelle que $D^{**} = \{\beta \in H^1(\Omega), \beta = 0 \in \Omega^e\}.$

<u>Remarque</u>: Dans le cas de la solution homogène $\Omega^e = [0, L]$ ou \emptyset . Le cas où $\Omega^e = [0, L]$ ne nous intéresse pas car cela signifie que le comportement de la barre est purement élastique. Auquel cas on a automatiquement unicité de la solution.

Une minimisation du quotient de Rayleigh R_t sur $C^0 \times D^{**}$ conduit à la valeur explicite suivante (Pham et al. [37]) :

$$\min_{(v,\beta)\in C^0\times D^{**}} R_t = \min\left(\frac{A(\alpha_t)E_0S'(\alpha_t)^2\sigma_t^2}{\frac{1}{2}S''(\alpha_t)\sigma_t^2 - \omega''(\alpha_t)}, \frac{E_0\pi^2}{\frac{1}{2}S''(\alpha_t)\sigma_t^2 - \omega''(\alpha_t)}\frac{l^2}{L^2}\right)$$
(4.46)

où L est la longueur de la barre (cf Figure 2.6) et l la longueur interne.

En appliquant le critère (4.45), on obtient alors la condition d'unicité suivante, exprimée sur la longueur de la barre :

$$L^{2} < \frac{E_{0}S'(\alpha_{t})\pi^{2}}{S''(\alpha_{t})\omega'(\alpha_{t}) - S'(\alpha_{t})\omega''(\alpha_{t})}l^{2}$$

$$(4.47)$$

Critère explicite de stabilité :

De même que pour le critère d'unicité, on extrait de (4.44) le critère suivant de stabilité de la solution homogène, équivalent à celui défini dans l'équation (4.14):

$$R_t(v,\beta) \ge 1, \,\forall (v,\beta) \in C_0 \times D^* \tag{4.48}$$

où l'on rappelle que $D^* = \{\beta \in H^1(\Omega), \beta \ge 0 \text{ et } \beta = 0 \in \Omega^e\}.$

<u>Remarque</u>: De façon similaire à ce qui a été fait pour l'écriture du critère explicite d'unicité, on considère $\Omega^e = \emptyset$.

Une minimisation de R_t sur $C^0 \times D^*$ conduit à la valeur explicite (Pham et al. [37]) :

$$\min_{(v,\beta)\in C^0\times D^*} R_t = \min\left(\frac{A(\alpha_t)E_0S'(\alpha_t)^2\sigma_t^2}{\frac{1}{2}S''(\alpha_t)\sigma_t^2 - \omega''(\alpha_t)}, \frac{E_0\left(\pi^2\frac{l^2}{L^2}A(\alpha_t)^2S'(\alpha_t)^4\sigma_t^4\right)^{1/3}}{\frac{1}{2}S''(\alpha_t)\sigma_t^2 - \omega''(\alpha_t)}\right)$$
(4.49)

L'application du critère (4.48) permet alors d'obtenir la condition de stabilité suivante, exprimée sur la longueur de la barre :

$$L^{2} \leq \frac{4\pi^{2} E_{0} S'(\alpha_{t})^{5} \omega'(\alpha_{t})^{2}}{S(\alpha_{t})^{2} (S''(\alpha_{t}) \omega'(\alpha_{t}) - S'(\alpha_{t}) \omega''(\alpha_{t}))^{3}} l^{2}$$
(4.50)

Exemple :

On fait ici le choix de prendre respectivement comme fonction perte de rigidité et comme dissipation :

$$A(\alpha_t) = (1 - \alpha_t)^2$$
 (4.51)

$$\omega(\alpha_t) = \frac{\sigma_M^2}{E_0} \alpha_t \tag{4.52}$$

où σ_M est la contrainte limite définie à partir de l'équation (2.109).

Les dérivées nécessaires au calcul des expressions, des inégalités (4.47) et (4.50), sont les suivantes :

$$S'(\alpha_t) = \frac{2}{E_0(1-\alpha_t)^3}$$
(4.53)

$$S''(\alpha_t) = \frac{6}{E_0(1-\alpha_t)^4}$$
(4.54)

$$\omega'(\alpha_t) = \frac{\sigma_M^2}{E_0} \tag{4.55}$$

$$\omega^{''}(\alpha_t) = 0 \tag{4.56}$$

On présente alors en Figure 4.1 la réponse de la structure et le graphe de stabilité obtenu à partir de (4.50), pour différentes valeurs du paramètre $\lambda = \frac{U_e}{l}$.

Les expressions des chargements à la perte d'unicité U_{t_1} et à la perte de stabilité U_{t_2} , sont obtenues à partir de (4.47), (4.50) et du critère d'endommagement (2.105) :

$$U_{t_1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}l\tag{4.57}$$

$$U_{t_2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}l$$
(4.58)



FIG. 4.1 – Réponse contraintes-déformations de la barre et diagramme de stabilité de la solution homogène

4.3 Conclusion du chapitre

La mise en place du critère de stabilité s'est effectuée mathématiquement en considération des principes de minimisation d'énergie et d'irréversibilité de l'endommagement. Sa justification analytique se basant sur la comparaison des niveaux d'énergie obtenus à partir de perturbations respectant la contrainte unilatérale d'irréversibilité de l'endommagement. Nous avons ensuite vu que la normalisation du critère établi amène à considérer un quotient de Rayleigh contraint par des inégalités directionnelles. Afin de s'assurer de la positivité de ce quotient, il est nécessaire de pouvoir calculer son minimum. C'est ce qui a été fait analytiquement dans le cas de la solution homogène associée à la traction uniforme d'une barre unidimensionnelle. L'objectif est désormais de mettre en place un algorithme numérique capable de déterminer ou d'approximer au mieux ce minimum, dans le cas de structures 2D ou 3D présentant des solutions plus complexes. L'exemple de la barre en traction sera le cas test de référence pour la validation de l'algorithme.

Chapitre 5

Méthode numérique pour l'étude de stabilité

Sommaire

5.1 Rec	herche d'algorithmes d'optimisation sous contraintes d'inégalités 88						
5.1.1	Sequential Quadratic Programing						
5.1.2	Méthode des puissances avec projection						
5.1.3	Algorithme de découpage en sous-zones potentiellement instables 95						
5.1.4	Test des algorithmes d'optimisation sous contraintes $\ldots \ldots \ldots$						
5.2 Alg	orithme développé dans Aster						
5.2.1	Méthode de Sorensen 108						
5.2.2	Méthode de redémarrage implicite 110						
5.2.3	Méthode des puissances dans un sous espace, projetées dans l'espace global 110						
5.3 Application							
5.3.1	Cas de la barre en traction 112						
5.3.2	Cas d'un biaxial						
5.3.3	Cas d'un triaxial						
5.3.4	Cas de la fibre à matrice renforcée						
5.4 Conclusion							

On a mis en évidence dans le chapitre précédent qu'étudier la stabilité des solutions aux problèmes d'endommagement revient à minimiser un quotient de Rayleigh contraint par des inégalités (positivité de l'incrément d'endommagement, cf équation (4.14)). Pour ce faire, on présente les algorithmes d'optimisation sous contraintes, les plus efficaces et adaptés aux calculs par la méthode des éléments finis, disponibles dans la littérature. On montre ensuite la façon dont on adapte le plus robuste à la structure de *Code_Aster*. Une fois le travail de développement terminé, on teste l'algorithme à partir du cas de la barre en traction, pour lequel on possède les résultats analytiques de stabilité exposés dans la partie 4.2. Des études de stabilités sur des solutions 2D et 3D complètent ce chapitre.

5.1 Recherche d'algorithmes d'optimisation sous contraintes d'inégalités

Le critère de stabilité défini dans la partie 4.1, consiste à vérifier la positivité d'une fonction quadratique sous contraintes. En général, pour vérifier qu'une fonction est toujours positive on recherche son minimum puis on conclut à partir de son signe. On s'intéresse désormais à l'implémentation d'une méthode numérique permettant d'étudier la stabilité de solutions obtenues par la méthode des éléments finis. On ne s'intéresse donc, dans la suite du rapport, uniquement au problème discrétisé, de dimension finie. On rappelle alors ci-dessous le critère de stabilité, écrit à partir du quotient de Rayleigh obtenu par normalisation par rapport aux degrés de liberté :

$$Q_{rc} = \min_{(v,\beta) \ge 0} \frac{(v,\beta)^T K(v,\beta)}{\|(v,\beta)\|^2} \ge 0$$
(5.1)

Ce type de minimisation est très facile à effectuer lorsque l'on travaille dans un espace de petite dimension. La principale difficulté est de trouver le minimum lorsque $dim(v,\beta) \gg 1$, ainsi que le vecteur minimisant le quotient de Rayleigh Q_{rc} . Dans le cas où l'on obtient une valeur négative de Q_{rc} , ce vecteur est appellé mode d'instabilité et son utilisation comme perturbation de la solution permet de rechercher une solution bifurquée stable.

Il existe dans la littérature, deux principaux algorithmes de minimisation sous contraintes d'inégalités, permettant d'obtenir à la fois la valeur du quotient de Rayleigh et le vecteur (v, β) associé :

- 1. L'algorithme SQP (Sequential Quadratic Programing)
- 2. Un algorithme qui consiste à ajouter à la méthode des puissances (très utilisée en mathématique appliquée, dans les problèmes de recherche de plus grande valeur propre) une projection dite de Rosen, respectant les conditions unilatérales imposée

On ajoute également dans cette partie, un algorithme intuitif de découpage en sous zones potentiellement instables, qui semble pouvoir présenter de sérieux avantages pour des problèmes de type "étude de stabilité en multifissuration". Dans la description de chaque algorithme, on considère le problème de minimisation exprimé uniquement à partir des degrés de liberté d'endommagement. Pour éliminer les degrés de liberté de déplacement, on considère l'équilibre de la structure. On travaille alors désormais avec la matrice tangente suivante :

$$K^* = -K_{\alpha u} K_{u u}^{-1} K_{u \alpha} + K_{\alpha \alpha} \tag{5.2}$$

et l'on peut réexprimer le critère de stabilité (5.1) sous la forme suivante, dans laquelle n'intervient plus qu'une minimisation sur l'endommagement :

$$Q_{rc} = \underset{\beta \ge 0}{Min} \frac{\beta^T K^* \beta}{\|\beta\|^2} \ge 0$$
(5.3)

Cette forme du critère de stabilité se justifie par la convexité du problème de minimisation par rapport à l'endommagement, à déplacements fixés. Pour simplifier les notations, on prendra dans les parties 5.1.1, 5.1.2 et 5.1.3 : $K = K^*$.

5.1.1 Sequential Quadratic Programing

L'algorithme SQP est une méthode locale de résolution de problèmes à contraintes d'égalités et d'inégalités (Bonnans et al. [9]). Elle est particulièrement appliquée en mathématique pour résoudre les problèmes de recherche de minimum avec contraintes complexes. Sa structure est toutefois assez lourde.

On commence par considérer un problème (P) type de minimisation d'une fonctionnelle f, définie sur un espace $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, soumise à des contraintes d'égalités notées C_E et d'inégalités C_I :

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Min}_{x} f(x) \\ C_{E}(x) = 0 \\ C_{I}(x) \leq 0 \\ x \in \Omega \end{bmatrix}$$
(5.4)

On définit, pour la suite, l'ensemble X suivant :

$$X = \{ x \in \Omega / C_E(x) = 0, C_I(x) \le 0 \}$$
(5.5)

En notant ensuite A la matrice des gradients respectivement associés à C_E et C_I , on peut alors définir les conditions premières d'optimalité (KKT : Karush, Khun, Tucker) sur (P). Soit $x^* \in X$ solution de (P). Alors il existe un vecteur de multiplicateurs de Lagrange λ^* tel que :

$$\begin{bmatrix} \nabla f(x^*) + A(x^*)^T \lambda^* = 0 \\ C_E(x^*) = 0, \ C_I(x^*) \le 0 \\ \lambda_I^* \ge 0 \\ (\lambda_I^*)^T C_I(x^*) = 0 \end{bmatrix}$$
(5.6)

L'algorithme SQP est construit pour résoudre ce type de problème par une approche de Newton, à partir d'une linéarisation des conditions premières d'optimalité. Il décompose le problème de manière séquentielle. Considérons que l'on se trouve sur un point courant (x_k, λ_k) . On note alors (d_k, μ_k) les incréments ou évolutions recherchées afin de trouver une solution au problème (5.6). En notant K_k la matrice des dérivées secondes de f au point x_k , on se retrouve alors à résoudre un système d'inconnues (d,μ) , de la forme :

$$\begin{cases}
K_k d + (A(x_k))^T \mu = -\nabla f(x_k) - (A(x_k))^T \lambda_k \\
C_E(x_k) + A_E(x_k) d = 0 \\
C_I(x_k) + A_I(x_k) d \le 0 \\
(\lambda_k + \mu)_I \ge 0 \\
(\lambda_k + \mu)_I (C_I(x_k) + A_I(x_k) d) = 0
\end{cases}$$
(5.7)

Ce qui se réécrit, si l'on introduit la notation $\lambda_k^{QP} = \lambda_k + \mu$, de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} K_k d + (A(x_k))^T \lambda_k^{QP} = -\nabla f(x_k) \\ C_E(x_k) + A_E(x_k) d = 0 \\ C_I(x_k) + A_I(x_k) d \le 0 \\ (\lambda_k^{QP})_I \ge 0 \\ (\lambda_k^{QP})_I (C_I(x_k) + A_I(x_k) d) = 0 \end{bmatrix}$$
(5.8)

On reconnait là les conditions premières d'optimalité du système (QP) suivant :

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Min}_{d} \nabla f(x_{k})^{T} d + \frac{1}{2} dK_{k} d \\ C_{E}(x_{k}) + A_{E}(x_{k}) d = 0 \\ C_{I}(x_{k}) + A_{I}(x_{k}) d \leq 0 \end{bmatrix}$$
(5.9)

On remarque alors que (QP) se déduit de (P) par linéarisation des contraintes. On appelle SQP l'algorithme de génération des séquences (x_k, λ_k) approximant (x^*, λ^*) par la recherche, à chaque itération, d'un point stationnaire (d_k, λ_k^{QP}) , solution d'un problème (QP), obtenu par une méthode de Newton.

Schématiquement, on peut représenter l'algorithme SQP de la façon suivante :

1. Soit un couple initial (x_0, λ_0) . On calcul les quantités $C(x_0)$, $\nabla f(x_0)$ et $A(x_o)$. Si ce couple vérifie les conditions KKT, on s'arrête. Sinon on pose k = 0 et on passe à l'étape 2.

2. $\begin{bmatrix} \text{Calcul de } K_k = K(x_k, \lambda_k) \text{ et résolution du système QP pour obtenir } (d_k, \lambda_k^{QP}) \\ x_{k+1} = x_k + d_k, \ \lambda_{k+1} = \lambda_k^{QP} \\ \text{Calcul de } C(x_{k+1}), \ \nabla f(x_{k+1}) \text{ et } A(x_{k+1}) \\ \text{Tant que les conditions KKT ne sont pas vérifiées : } k = k + 1 \end{bmatrix}$

La convergence est alors assurée lorsqu'il existe au moins une solution au problème (P) (cf équation (5.4)) et que l'on travaille dans un espace de dimension finie, borné (Bonnans et al. [9]). Ce qui est le cas des calculs d'endommagement effectués par la méthode des éléments finis, pour lesquels on travail en dimension finie, avec un endommagement compris entre 0 et 1. Les conditions premières d'optimalité ne garantissent pas que l'algorithme converge toujours sur un minimum, lorsque la matrice des dérivées seconde K_k n'est pas défnie positive. Toutefois cette méthode présente l'avantage de vérifier que l'on se situe bien sur un extremum par analyse de la norme du gradient.

En conclusion, cet algorithme est particulièrement adapté aux cas de contraintes complexes pouvant associer des relations entre plusieurs degrés de liberté. On le retrouve assez facilement dans une version Matlab téléchargeable. Du point de vue développement, la complexité de la formulation Lagrangienne alourdit la construction de l'algorithme et demande de renseigner et de gérer de nombreux paramètres.

5.1.2 Méthode des puissances avec projection

La méthode des puissances (ou puissances inverses si on travaille avec la matrice inverse) est classique en mathématique pour rechercher la valeur propre maximale, en valeur absolue, d'une matrice K (ou minimale via un décalage ou dans le cas des puissances inverses). Elle consiste, en partant d'un vecteur initial x_0 , à multiplier un certain nombre de fois ce vecteur par K, en renormalisant à chaque itération, jusqu'à trouver un vecteur stationnaire qui est le mode associé à la valeur propre maximale de la matrice. C'est un algorithme qui a l'avantage, en plus d'être rapide, d'être facile à programmer. Plus précisement, la méthode des puissances permet de générer une séquence $\{x_n \neq 0\}_{n>0}$, partant d'un état initial x_0 , par la formule récursive :

$$x_{n+1} = \frac{Kx_n}{\|x_n\|}$$
(5.10)

Si l'on veut obtenir des valeurs propres autres que la plus grande en valeur absolue, on introduit alors un décalage β et on travaille avec une matrice shiftée de la forme : $K - \beta I_d$. La méthode des puissances inverses, qui permet de trouver les plus petites valeurs propres, consiste alors à prendre la matrice inverse $(K - \beta I_d)^{-1}$.

La modification que l'on apporte est une projection sur la partie positive notée $\Pi_{\mathbb{R}_+}$ (Pinto Da Costa and Seeger [41]) à chaque itération, de sorte à respecter la contrainte de positivité sur les degrés de liberté d'endommagement :

$$\forall i \in [1, n], x_i < 0 \Longrightarrow \left(\Pi_{\mathbb{R}_+}(x) \right)_i = 0 \tag{5.11}$$

De façon plus détaillée, considérons le problème (P) qui consiste à trouver les couples (x, λ) de l'ensemble (S):

$$(S) = \left\{ (x,\lambda) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \text{ tel que } (Kx - \lambda x) \bot x \right\}$$
(5.12)

Ce qui revient à trouver, pour chaque vecteur $x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, la valeur du quotient :

$$\lambda = \frac{x^T \cdot Kx}{\|x\|^2} \tag{5.13}$$

n est un entier strictement positif, définissant la dimension du problème. La matrice réelle K, de taille $n \times n$, peut être non symétrique. Toutefois, dans le cas particulier des problèmes d'endommagement, l'opérateur tangent à une structure symérique. Ce qui présente de nombreux avantages numériques.

 $\frac{\text{Propriété 1}:}{\text{On note }\sigma(K)} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}, \, \exists x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\} : (x, \lambda) \in (S) \right\}. \text{ Alors il est évident que :}$

$$\sigma(K) \subset [\lambda_{min}(K), \lambda_{max}(K)]$$
(5.14)

où $\lambda_{min}(K)$ et $\lambda_{max}(K)$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre sans contrainte de K.

Cela signifie, dans un premier temps, que l'on peut trouver des bornes à la valeur du minimum sous contraintes.

\underline{Preuve} :

On a par la définition (5.12) de (S) :

$$(x,\lambda) \in (\mathbf{S}) \Longrightarrow \lambda = \frac{x^T \cdot Kx}{\|x\|^2}$$

$$(5.15)$$

et comme K est une matrice symétrique, les valeurs maximales et minimales de λ dans \mathbb{R} sont respectivement les plus grandes et plus petites valeurs propres de K. Ce qui implique la propriété 1 (5.14).

Fin de la preuve.

 $\frac{\text{Propriété 2 :}}{\text{Soit la fonction :}}$

$$\mu : \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
(5.16)

$$x \longmapsto \frac{x^T K x}{\|x\|^2} \tag{5.17}$$

alors si x^* réalise le minimum de la fonction μ , on a :

$$Kx^* - \mu(x^*)x^* \in \mathbb{R}^n_+$$
 (5.18)

Preuve :

La dérivée première de μ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mu'(x) = \frac{2\left(Kx - \mu\left(x\right)x\right)}{\|x\|^2} \tag{5.19}$$

Considérons maintenant i un entier quelconque de 1 à n. On a plus précisement :

$$\frac{\partial \mu(x)}{\partial x_i} = \frac{2\left(\sum_{j=1}^n K_{ij} x_j - \mu(x) x_i\right)}{\|x\|^2}$$
(5.20)

Supposons ensuite que :

$$\frac{\partial \mu(x)}{\partial x_i} < 0 \tag{5.21}$$

Alors il est possible de diminuer μ en augmentant x_i à $x_{j\neq i}$ fixés. Cela signifie que x ne réalise pas le minimum de μ sur \mathbb{R}^n_+ .

En conclusion :

$$\forall j \in [1, n], \sum_{p=1}^{n} K_{jp} x^*_{j} - \mu(x^*) x^*_{j} \ge 0$$
(5.22)

Ce qui signifie exactement :

$$Kx^* - \mu(x^*)x^* \in \mathbb{R}^n_+$$
 (5.23)

Fin de la preuve.

Notre objectif étant la recherche d'un minimum, on s'intéresse désormais non plus à l'ensemble (S) mais à l'ensemble (S^*) défini par :

$$(S^*) = \left\{ (x,\lambda) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}, \ (Kx - \lambda x) \in \mathbb{R}^n_+ \text{ et } (Kx - \lambda x) \bot x \right\}$$
(5.24)

où x et λ sont respectivement appellés vecteur propre et valeur propre au sens de Pareto.

Propriété 3 :

Considérons maintenant un décalage $\beta > \lambda_{max}(K)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(P1)
$$(x, \lambda) \in (S^*)$$

(P2) $\Pi_{\mathbb{R}_+}(\beta x - Kx) // x$

Preuve :

Supposons que $(x, \lambda) \in (S^*)$. On considère la décomposition suivante :

$$\beta x - Kx = (\beta - \lambda)x - (Kx - \lambda x)$$
(5.25)

On a alors par définition de β et grâce à la propriété 1 :

$$\beta > \lambda \Longrightarrow \gamma x = (\beta - \lambda)x \in \mathbb{R}^n_+ \tag{5.26}$$

La décomposition (5.25) permet donc d'écrire $\beta x - Kx$ comme la somme d'un vecteur de \mathbb{R}^n_+ et d'un vecteur de \mathbb{R}^n_- , par définition de (S^*) . La projection sur \mathbb{R}^n_+ d'un vecteur de \mathbb{R}^n_- étant le vecteur nul, le vecteur x est donc automatiquement un vecteur colinéaire à la partie positive :

$$\Pi_{\mathbb{R}_{+}}(\beta x - Kx) // \gamma x \tag{5.27}$$

Ce qui démontre (P2).

Réciproquement, soit $\gamma \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ tel que : $\gamma x = \Pi_{\mathbb{R}_+}(\beta x - Kx)$. Alors, par définition de la projection $\Pi_{\mathbb{R}_+}$:

$$\langle \gamma x, (\gamma - \beta)x + Kx \rangle = 0 \tag{5.28}$$

Posant $\lambda = \beta - \gamma$, on déduit de (5.28) que le couple (x, λ) appartient à l'ensemble (S).

Il reste alors à vérifier que $(Kx - \lambda x) \in \mathbb{R}^n_+$:

$$Kx - \lambda x = -[\beta x - Kx] + \gamma x \tag{5.29}$$

$$\Longrightarrow Kx - \lambda x = -\Pi_{\mathbb{R}_+}(\beta x - Kx) + \Pi_{\mathbb{R}_+}(Kx - \beta x) + \gamma x$$
(5.30)

$$\Longrightarrow Kx - \lambda x = \Pi_{\mathbb{R}_+}(Kx - \beta x) \ge 0$$
(5.31)

On déduit alors de (5.31) et de (5.28) que le couple (x, λ) appartient à l'ensemble (S^*) . Ce qu'il fallait démontrer pour retrouver (P1).

D'où l'équivalence des propositions (P1) et (P2).

Fin de la preuve.

On utilise ensuite cette propriété dans l'algorithme suivant, de recherche du minimum sous contraintes :

- Initialisation :
$$\beta > \lambda_{max}, u_0 \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}, x_0 = \frac{u_0}{\parallel u_0 \parallel}$$

- Itérations :
$$\begin{bmatrix} v_{n+1} = \Pi_{\mathbb{R}_+} (\beta x_n - K x_n) \\ x_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{\parallel v_{n+1} \parallel} \\ \lambda_{n+1} = \langle x_{n+1}, K x_{n+1} \rangle \end{bmatrix}$$

Propriété 4 :

La vérification que l'on est bien sur un minimum est automatique pour cette méthode, car comme démontré dans [41], par passage à la limite, si la méthode converge alors le vecteur obtenu n'est rien d'autre qu'un vecteur propre au sens de Pareto (cf définition de (S^*) , équation (5.24)).

Preuve :

Supposons que l'on ait trouvé une suite $\{x_t\}_{t>0}$ convergeante vers x^* . Alors par passage à la limite :

$$v^* = \Pi_{\mathbb{R}_+}(\beta x^* - Kx^*) \tag{5.32}$$

Puis :

$$x^* = \frac{v^*}{\|v^*\|} \tag{5.33}$$

 x^{\ast} et v^{\ast} sont donc colinéaires. Ce la implique d'après la propriété 3 :

$$\exists \lambda^* \in \mathbb{R}, \, (x^*, \lambda^*) \in (S^*) \tag{5.34}$$

Fin de la preuve.

Plus précisement, si l'on note :

$$\eta = \underset{x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}}{Min} \frac{x^T Kx}{||x||^2}$$
(5.35)

alors le vecteur x vérifie :

$$\begin{bmatrix} (Kx)_i = \eta x_i, & \text{si } x_i > 0 \\ (Kx)_i \ge 0, & \text{si } x_i = 0 \end{bmatrix}$$
(5.36)

En résumé, le principe de cet algorithme est de dire que si le minimum ne se trouve pas à l'intérieur du domaine (ce n'est pas un mode propre de K) alors il se trouve automatiquement sur un bord du domaine. On recherche donc un vecteur stationnaire sur les bords du domaine qui possède les propriétés d'un minimum.

5.1.3 Algorithme de découpage en sous-zones potentiellement instables

Dans cet algorithme, on s'intéresse plus en détail aux propriétés de l'opérateur tangent K, de taille $n \times n$, susceptibles de permettre d'exhiber l'ensemble des perturbations pouvant déstabiliser la solution numériquement obtenue.

L'idée directrice de l'algorithme de découpage est que pour obtenir une valeur négative du quotient de Rayleigh défini en (5.1), il est nécessaire que des coefficients K_{ij} , avec $i \neq j$, soient négatifs (les coefficients K_{ii} étant tous positifs). On dit alors que les endommagements des nœuds i et j, notés respectivement α_i et α_j , sont directement reliés par la relation de connectivité suivante :

$$K_{ij} < 0 \tag{5.37}$$

Par extension, on dit ensuite que deux degrés de liberté α_i et α_j sont indirectement liés s'ils ne vérifient pas la relation de connectivité (5.37), mais qu'il existe un troisième degré de liberté α_k tel que α_i et α_j soient directement reliés à α_k .

En regroupant les degrés de liberté directement et indirectement reliés entre eux, on crée des zones indépendantes les unes des autres, sur lesquelles la localisation de l'endommagement est susceptible de déstabiliser la solution.

Propriété 1 :

On montre que l'on peut conclure sur la stabilité globale, en étudiant séparément la stabilité de chacune des zones localisées, que l'on a construit à partir de la relation de connectivité (5.37).

Preuve :

Considérons que la relation de connectivité (5.37) ait permis de définir deux zones indépendantes. On note β_1 l'ensemble des degrés de liberté d'endommagement de la première zone et β_2 l'ensemble de la seconde zone, tels que : $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. On note $K_{\beta_1\beta_1}$ la sous-matrice de K obtenue en conservant les lignes et les colonnes associées aux degrés de liberté de β_1 et ainsi de suite. On peut alors écrire le quotient de Rayleigh (5.1) sous la forme suivante, en tenant compte de la symétrie de K :

$$Q_{rc} = \frac{\beta_1^{T} . K_{\beta_1 \beta_1} \beta_1 + 2\beta_1^{T} . K_{\beta_1 \beta_2} \beta_2 + \beta_2^{T} . K_{\beta_2 \beta_2} \beta_2}{\|\beta\|^2}$$
(5.38)

Par positivité des endommagements et comme les degrés de liberté des ensembles β_1 et β_2 sont indépendants, on a automatiquement :

$$\beta_1^T K_{\beta_1 \beta_2} \beta_2 > 0 \tag{5.39}$$

Donc si le quotient de Rayleigh (5.1), écrit sur les sous matrices $K_{\beta_1\beta_1}$ et $K_{\beta_2\beta_2}$ est positif, alors par sommation, la quantité (5.38) est positive. Le minimum du quotient de Rayleigh est donc forcément positif et la solution est stable.

Dans le cas où le critère écrit sur l'une des sous-matrices a une valeur négative, une perturbation localisant l'endommagement sur la zone correspondant aux degrés de liberté de la sous-matrice permet de déstabiliser la solution. La solution est donc instable. On a donc équivalence entre l'état de stabilité de la solution sur l'ensemble des zones construites par la relation de connectivité (5.37) et l'état de stabilité global de la solution.

Fin de la preuve.

Description de l'algorithme de découpage

Partant de la relation de connectivité, on applique à la matrice K l'algorithme de découpage suivant, qui se décompose en trois principales étapes :

(1) Parcours de la matrice et recherche des connectivités :

Dans cette étape, on construit la matrice $n \times n$ des connectivités *conec*, qui à chaque ligne *i* associée à un degré de liberté α_i , stocke les degrés de liberté α_j directement liés à α_i , ainsi que le vecteur *indic*, qui donne pour chaque ligne *i* le nombre de degrés de liberté directement reliés à α_i .

Description de l'algorithme associé à l'étape 1 :

On initialise le vecteur *indic* à 0, ainsi que la matrice *conec*, sauf pour les coefficients diagonaux conec(i, i) que l'on initialise à la valeur *i*. On parcourt ensuite chaque ligne *i* de la matrice *K*. Pour chaque colonne *j* où le coefficient $K_{ij} < 0$, on écrit l'entier *j* dans conec(i, j) et on augmente de 1 la valeur de *indic(i)*.

Schéma de l'algorithme associé à l'étape 1 :

$$\begin{bmatrix} \text{for } i \text{ from 1 to } n \\ indic(i) = 0 \\ conec(i,i) = i \\ \begin{bmatrix} \text{for } j \text{ from 1 to } n \\ & \text{if } (K_{ij} < 0.) \\ & conec(i,j) = j \\ & indic(i) = indic(i) + 1 \\ & \text{end} \\ & \text{end} \\ & \text{end} \\ \end{bmatrix}$$
(5.40)

Bilan de l'étape 1 :

On obtient finalement :

- dans la matrice *conec*, sur chaque ligne i, la colonne j des degrés de liberté directement liés à α_i et le coefficient diagonal i
- dans le vecteur *indic*, le nombre total de degrés de liberté α_j directement reliés à α_i

Exemple :

On note + les coefficients positifs de la matrice K et - les coefficients négatifs.

	(+)	+	+	+	+	+)		$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$		$\binom{1}{1}$	0	0	0	0	0)	
K =	+	+	_	+	+	+	\implies indic =	1	0	2	3	0	0	0		
	+	_	+	_	+	+		2	2 1 1	0	2	3	4	0	0	(5.41)
	+	+	_	+	+	+		1		0	0	3	4	0	0	
	+	+	+	+	+	_		1		0	0	0	0	5	6	
	(+	+	+	+	_	+)		$\binom{1}{1}$		$\left(0 \right)$	0	0	0	5	6/	

(2) Construction des zones de localisation potentielle de l'endommagement :

Rassembler les degrés de liberté directement reliés ne suffit pas pour construire des zones de localisation indépendantes. Pour cela, il est nécessaire d'ajouter également les degrés de liberté indirectement reliés. C'est l'objectif de l'étape 2, qui consiste donc à regrouper les degrés de liberté directement et indirectement reliés, à partir du tableau des connectivités *conec* construit à l'étape 1.

Description de l'algorithme associé à l'étape 2 :

On copie la matrice *conec* dans une matrice de travail notée *conec*2. Pour chaque indice $i \ge 2$ tel que indic(i) > 0, on somme, une à une, la ligne i de *conec*2 avec les (i - 1) lignes précédentes (m = i - 1, m = i - 2,...). A chaque fois que l'on effectue une somme, on stocke la ligne sommée dans la ligne i de *conec*2, si et seulement si les deux lignes i et m possèdent un coefficient commun. Si tel est le cas, on pose indic(m) = 0 et on remplace la ligne m de *conec*2 par 0. On s'assure ensuite qu'à chaque colonne j de *conec*2, le coefficient conec2(i, j) est soit nul, soit égal à j ($conec2(i, j) = 2j \Longrightarrow conec2(i, j) = j$). Puis on copie la matrice *conec*2 dans la matrice *connec*.

Schéma de l'algorithme associé à l'étape 2 :

```
for i from 2 to n
    if (indic(i) > 0.)
         for m from i - 1 to 1 by -1
              if (indic(m) > 0)
               test = 0
               conec2(i,.) = conec(i,.) + conec(m,.)
                  for k from 1 to n
                      if (conec2(i,k) = 2k)
conec2(i,k) = k
                         test = test + 1
                       {\rm end}
                                                                          (5.42)
                  end
                  if (test > 0)
                    indic(m) = 0
                    conec(m, .) = 0
                  else
                    conec2(i,.)=conec(i,.)
                  end
               conec(i,.) = conec2(i,.)
              end
         end
    end
end
```

Bilan de l'étape 2 :

On obtient, à la fin de l'étape 2 :

- à partir des lignes i du tableau *conec*, telles que $indic(i) \neq 0$, les localisations indépendantes constituées de l'ensemble des degrés de liberté directement ou indirectement reliés

- dans le tableau *indic*, le nombre total de degrés de liberté de chaque localisation moins un.

Exemple :

(3) Construction des sous-matrices et test de leur stabilité :

A partir des localisations stockées dans les lignes de la matrice *conec*, on construit les sous-matrices de K qui ne conservent que les lignes et colonnes des degrés de liberté de chaque localisation. On étudie ensuite la stabilité des localisations à partir des sous-matrices construites par le découpage.

Description de l'algorithme associé à l'étape 3 :

Pour chaque localisation, on copie la matrice K dans une matrice de travail K_2 que l'on modifie, de sorte à regouper les lignes et colonnes des degrés de liberté reliés dans *conec*. On obtient alors la matrice de changement de base notée Θ . Une fois regroupés, on ne conserve que la sous matrice K_3 associée aux degrés de liberté qui nous intéressent et on regarde le signe du quotient de Rayleigh obtenu à partir du test de stabilité sur K_3 . Le test de stabilité peut être effectué à partir de l'un des deux algorithmes de minimisation sous contraintes présentés précédemment (cf parties 5.1.1 et 5.1.2). Schéma de l'algorithme associé à l'étape 3 :

$$\label{eq:constraint} \left[\begin{array}{c} \text{for i from 1$ to n} \\ \text{if $(indic(i) > 0)$} \\ \Theta = Id(n,n), n_3 = 0 \\ \text{for j from 1$ to n} \\ \text{for j from 1$ to n} \\ \text{for j from 1$ to n} \\ \text{if $(conec(i,j) = j)$} \\ n_3 = n_3 + 1 \\ \Theta(j,n_3) = 1 \\ \Theta(n_3,j) = 1 \\ \Theta(n_3,n_3) = 0 \\ \Theta(j,j) = 0 \\ \text{end} \\ K_2 = \Theta \times K \times \Theta \\ \text{end} \\ K_2 = \Theta \times K \times \Theta \\ \text{end} \\ K_3 = K_2[1:n_3,1:n_3] \\ \text{Test de stabilité sur K_3} \\ \text{end} \\ \end{array} \right]$$

Bilan de l'étape 3 :

On conclut sur la stabilité de la solution à partir de la propriété 1 et on obtient, dans le cas où la solution est instable, un ou plusieurs modes d'instabilité (cf partie 5.1, équation (5.1)).

Exemple :

On construit ainsi, à l'aide de (5.43), les deux sous-matrices suivantes, dont l'étude va permettre de conclure sur la stabilité de la solution :

1. La sous-matrice K^* qui correspond à la localisation reliant les degrés de liberté 2,3 et 4 :

$$K^* = \begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix}$$
(5.45)

2. La sous-matrice K^{**} qui correspond à la localisation reliant les degrés de liberté 5 et 6 :

$$K^{**} = \begin{pmatrix} K_{55} & K_{56} \\ & & \\ K_{65} & K_{66} \end{pmatrix}$$
(5.46)

Test de l'algorithme de découpage

On observe, dans le cas d'une solution homogène, que l'algorithme de découpage ne permet pas de réduire la taille matricielle du problème. En effet, l'ensemble des degrés de liberté d'endommagement sont tous reliés avec leurs voisins de façon analogue. La matrice tangente possède une structure homogène et la relation de connectivité (5.37) ne permet d'obtenir que la seule localisation constituée de l'ensemble des degrés de liberté.

Dans le cas de matrices générées aléatoirement, on montre que l'algorithme de découpage permet d'obtenir plusieurs minimums locaux. Parmis ces minimums, on retrouve toujours ceux obtenus à partir de la méthode SQP et de la méthode des puissances projetées, appliquées à la matrice entière K. En comparant chaque minimum obtenu, on augmente la certitude de trouver le minimum global. De plus, dans le cas des solutions non homogènes, plus la taille du problème est importante, plus on gagne en temps de calcul. On augmente ainsi la robustesse et l'efficacité des algorithmes d'optimisation sous contraintes.

Conclusion

On a montré que l'on pouvait conclure sur la stabilité globale de la solution en étudiant la stabilité sur des zones localisées, de plus petites tailles. Par conséquent, il est déjà possible de déduire que ce n'est pas l'existence de multifissures qui rend une solution instable mais plutôt l'état de stabilité de chacun des chemins de fissuration. L'exemple type est celui de la barre unidimensionnelle en traction uniaxiale. Si l'on considère une solution à deux pustules d'endommagement, symétriques par rapport au milieu de la barre de sorte à respecter l'équilibre et la physique du problème (cf Figure 5.1), il suffit pour étudier la stabilité globale, de regarder si la zone correspondant à un seule des deux pustules est stable. Si tel est le cas, la zone correspondant au deuxième pustule l'est également par symétrie et la solution est stable. C'est alors le niveau de chargement, ou d'endommagement maximal atteint, qui détermine si la solution est ou non instable. L'instabilité peut être vue comme la création d'un saut d'endommagement par une petite perturbation. Le saut s'effectuant suivant l'un des chemins extraits par la relation de connectivité (5.37), énergétiquement attractif.



FIG. 5.1 – Représentation de deux localisations symétriques de l'endommagement dans le cas d'une barre 1D en traction

L'algorithme de découpage développé permet, dans un délai de temps assez rapide, de construire les sous-matrices associées aux localisations, susceptibles de déstabiliser la solution. On réduit ainsi la dimension du problème matriciel d'optimisation sous contraintes.

L'inconvénient de cet algorithme est qu'il ne semble pas facile à programmer dans un code de calcul et qu'il dépend du stockage de la matrice tangente, chose à laquelle il n'est pas toujours aiser d'accéder lorsque l'on traite des problèmes à grand nombre de degrés de liberté.

5.1.4 Test des algorithmes d'optimisation sous contraintes

On s'intéresse dans cette partie, à la robustesse et à la qualité des résultats fournis par les algorithmes SQP (cf partie 5.1.1) et la méthode des puissances projetées (cf partie 5.1.2) sur le cas test de la barre en traction (cf partie 4.2), en 1D puis en 2D. L'objectif étant de sélectionner le plus robuste et efficace pour l'implémenter dans *Code_Aster*. Les développements et calculs sont effectués à l'aide du logiciel Matlab.

Cas 1D :

On commence par construire l'opérateur tangent associé à la discrétisation du problème. Pour cela, on maille la barre de longueur L (cf Figure 2.6) à partir d'éléments finis linéiques, linéaires en endommagement et en déplacement. On utilise une discrétisation spatiale uniforme entre les n nœuds :

$$\delta l = \frac{L}{n-1} \tag{5.47}$$

Notant N_k la fonction de forme associée au nœud k, on peut exprimer les fonctions tests en déplacement v et en endommagement β de la façon suivante :

$$v(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k N_k(x) \Longrightarrow v'(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k N_k'(x)$$
 (5.48)

$$\beta(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k N_k(x) \Longrightarrow \beta'(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k N_k'(x)$$
(5.49)

avec, sur le segment défini par les nœuds i et i + 1:

$$N_i(x) = \frac{(i+1)\delta l - x}{\delta l} \tag{5.50}$$

$$N_{i+1}(x) = \frac{x - i\delta l}{\delta l} \tag{5.51}$$

On reprend la formulation énergétique traitée dans l'exemple de la partie 4.2 :

$$P = \int_0^L \left(\frac{1}{2} (1-\alpha)^2 E_0 t^2 + \frac{\sigma_M^2}{E_0} \alpha + \frac{1}{2} E_0 l^2 \nabla \alpha . \nabla \alpha \right) dx$$
(5.52)
où E_0 est le module de Young du matériau sain, t la déformation imposée dans la barre et σ_M la contrainte limite.

On obtient alors la forme suivante, discrétisée et développée, de la dérivée seconde de l'énergie :

$$D^{2}P(u,\alpha).(v,\beta) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{(1-\alpha)^{2}E_{0}}{\delta l} (v_{i+1}-v_{i})^{2} + \frac{E_{0}l^{2}}{\delta l} (\beta_{i+1}-\beta_{i})^{2} + (5.53) \right]$$

$$\frac{\Sigma_0 t^2 \delta l}{3} \left(\beta_i^2 + \beta_{i+1}^2 + 2\beta_i \beta_{i+1}\right) - \tag{5.54}$$

$$E(1-\alpha)E_0t(v_{i+1}-v_i)(\beta_{i+1}+\beta_i)]$$
(5.55)

On déduit de (5.53), (5.54) et (5.55) la matrice tangente du problème et on impose une valeur de la déformation t. On utilise ensuite le critère d'endommagement qui fournit la valeur de l'endommagement α dans la barre en fonction de la déformation t:

$$\alpha = 1 - \left(\frac{\sigma_M}{E_0 t}\right)^2 \tag{5.56}$$

On obtient ainsi une matrice symétrique, scalaire, sur laquelle on applique directement les algorithmes de minimisation sous contraintes. Deux façons de procéder peuvent être envisagées. On peut ou non, éliminer les degrés de liberté de déplacement en assurant l'équilibre. Dans le cas où l'on choisit de les éliminer du système global, on considère la matrice tangente modifiée obtenue à partir de la relation (5.2). Dans un premier temps, c'est avec cette formulation que l'on va étudier la stabilité de la solution homogène.

On observe alors les résultats suivants :

- L'algorithme SQP fournit des résultats similaires au cas analytique (cf partie 4.2) et converge tant que l'on ne dépasse pas une limite de 500 degrés de liberté contre 1000 pour la méthode des puissances projettées.
- L'algorithme SQP est plus lent en temps de calcul que la méthode des puissances projetées.
- Lorsque la solution homogène est instable, les deux algorithmes permettent de trouver un mode d'instabilité localisant l'endommagement en bout de barre.

Lorsque l'on tient compte des déplacements, on double la taille de la matrice tangente (on considère des éléments linéiques). Or, la limite de robustesse des algorithmes d'optimisation sous contraintes étant de l'ordre du millier de degrés de liberté, on ne peut pas considérer plus de 500 nœuds. Ce qui devient trop limitant. Par ailleurs, la convergence nécessite un nombre plus important d'itérations et donc un temps de calcul plus long.

Concernant la comparaison de l'algorithme SQP et de la méthode des puissance projetées, on peut donc en déduire deux choses :

- 1. La première est que la méthode des puissances projetées, en plus d'être plus simple à programmer, est plus robuste et plus rapide.
- 2. La seconde est qu'aucune des deux ne permet, sous leur forme actuelle, d'étudier la stabilité de solution à grand nombre de degrés de liberté.

La comparaison avec l'algorithme de découpage n'est pas intéressante sur ce cas test, étant donné que l'état d'endommagement de la barre est homogène. Ce qui implique que chaque degré de liberté d'endommagement est relié à son voisin de la même façon et il n'est alors pas possible de découper la structure en zones de localisation.

Cas 2D

On considère maintenant une barre 2D. Pour cela, on ajoute une épaisseur e (cf Figure 5.2). On utilise désormais des éléments finis quadrangles, toujours linéaires en déplacement et en endommagement. La discrétisation spatiale s'effectue alors suivant deux directions. Pour simplifier, on prendra une discrétisation uniforme suivant les deux directions. La largeur de chaque élément reste notée δl . On notera n le nombre de nœuds dans la longueur ($L = (n - 1)\delta l$) et m dans l'épaisseur ($e = (m - 1)\delta l$).



FIG. 5.2 – Représentation de la barre 2D en traction, de longueur L et d'épaisseur e

Sur un élément $[i,i+1]\times[j,j+1],$ on a pour fonctions de formes :

$$N_{ij} = \frac{(x - (i+1)\,\delta l)\,(y - (j+1)\,\delta l)}{\delta l^2}$$
(5.57)

$$N_{(i+1)j} = -\frac{(x-i\delta l) (y-(j+1)\delta l)}{\delta l^2}$$
(5.58)

$$N_{i(j+1)} = -\frac{(x - (i+1)\,\delta l)\,(y - j\delta l)}{\delta l^2}$$
(5.59)

$$N_{(i+1)(j+1)} = \frac{(x - i\delta l)(y - j\delta l)}{\delta l^2}$$
(5.60)

Les déplacements et endommagements tests s'expriment alors par interpolation dans les deux directions :

$$v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_{ij} N_{ij} \Longrightarrow \nabla v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_{ij} \nabla N_{ij}$$
(5.61)

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} N_{ij} \Longrightarrow \nabla v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} \nabla N_{ij}$$
(5.62)

En plus du chargement en déplacements U_t , imposé en bout de barre, on impose le blocage des déplacements verticaux des nœuds de hauteur moyenne dans la barre.

On considère que l'on se trouve dans le cas des déformations planes et dans l'état particulier où la contrainte σ_{12} est nulle. On reste bien sûr dans un ordre de grandeur inférieur à 1000 degrés de liberté d'endommagement (ce qui est assez limitant), qui était la limite de robustesse trouvée lors de l'étude 1D. Au niveau matriciel, les degrés de liberté dont les déplacements sont imposés sont retirés. On élimine ainsi les lignes et colonnes correspondantes dans l'opérateur tangent.

On représente ci-dessous les tenseurs de contrainte et de déformation dans la barre :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{-t\nu}{1-\nu} \end{bmatrix}$$
(5.63)

De façon analogue au cas 1D, on développe l'expression discrétisée de l'énergie qui permet ensuite de construire la matrice tangente du problème, puis on élimine les degrés de liberté de déplacement en considérant la matrice modifié construite à partir de la relation (5.2). On impose ensuite une valeur de la déformation horizontale t, à partir de laquelle on déduit l'endommagement de la barre. On obtient donc finalement la matrice tangente scalaire du cas test 2D, sur laquelle on teste la stabilité à partir des algorithmes d'optimisation sous contraintes.

Les résultats obtenus permettent alors de dégager deux observations principales :

- Quel que soit l'épaisseur e, lorsque le coefficient de Poisson $\nu = 0$, le critère de passage à l'instabilité est identique à celui du 1D et le mode d'instabilité présente un endommagement localisé en bout de barre, uniformément suivant l'axe orthogonal au chargement. Ce que l'on peut visualiser à la Figure 5.3.
- Lorsque $\nu \neq 0$, plus sa valeur est élévée, plus la solution se déstabilise pour un chargement faible. Le coefficient de Poisson est donc un facteur susceptible de déstabiliser la solution. Le mode d'instabilité, associé à la perte de stabilité de la solution homogène, localise toujours l'endommagement en bout de barre mais présente cette fois un profil moins uniforme suivant l'axe orthogonal au chargement. La zone endommagée semble s'arrondir lorsque l'on s'éloigne du bord.



FIG. 5.3 – Mode propre et mode d'instabilité de la barre

Les observations faites dans le cas 1D, sur la comparaison de l'algorithme SQP et de la méthode des puissance projetés, restent valables en 2D. En conclusion, la méthode des puissances projetés est celle que l'on privilégie pour l'implémentation dans le code. Pour résoudre la limitation en terme de nombre de degrés de liberté, on va effectuer la réduction classique, qui consiste à se ramener à un espace réduit, de plus petite taille, construit à partir des modes propres les plus significatifs de la structure étudiée. En effet, tenant compte de la symétrie de la matrice de rigidité, on sait que l'on peut construire une base constituée uniquement de modes propres. Cela signifie que le vecteur minimisant le quotient de Rayleigh (5.1) peut se décomposer dans cette base. En continuant notre reflexion, on se rend compte que si l'on espère obtenir un minimum négatif (cas d'une solution instable), il faut que les modes considérés soient parmis les plus petits. On peut donc finalement décomposer le vecteur minimisant le quotient de Rayleigh, dans un sous espace constitué de quelques uns des plus petits modes propres. En se limitant à un certain nombre et en cherchant le vecteur dans ce sous espace, on a donc de grandes chances d'obtenir la valeur exacte du minimum et ainsi de pouvoir étudier la stabilité de solutions obtenues à partir de discrétisations en millier de degrés de liberté.

5.2 Algorithme développé dans Aster

On a déduit dans la comparaison des algorithmes d'optimisation sous contraintes, effectuée dans la partie 5.1.4, que la méthode des puissances projetées est la plus robuste et possède l'avantage d'être simple à programmer. On fait donc le choix d'implémenter cette méthode dans $Code_Aster$, afin d'effectuer la minimisation sous contraintes d'inégalités qui permettra de déduire numériquement la stabilité des solutions. Pour résoudre les difficultés liées aux limitations de taille, on utilise une méthode de réduction basée sur la projection dans un sous espace constitué des pplus petits modes propres de la structure. Il en existe une grande variété. Dans notre cas, on se sert de la méthode de Sorensen, déjà existante dans le code pour la résolution de problème de minimisation sous contraintes d'égalités (Boiteau [7]). Du fait qu'il est toujours plus facile numériquement d'accéder aux plus grandes valeurs propres qu'aux plus petites, on travaille sur la matrice inverse de l'opérateur tangent. Cela modifie l'algorithme de départ. Schématiquement, l'algorithme développé se décompose en deux étapes :

- Dans un premier temps, on applique la méthode de Sorensen qui permet d'obtenir un sous-espace orthogonal stable, constitué des p plus petites modes propres de K (donc les p plus grands de K^{-1}).
- Dans un second temps, on applique la méthode des puissances projetées dans le sous-espace réduit. La projection est effectuée, à chaque itération de la méthode, dans l'espace global.

Ce qui revient finalement à appliquer la méthode des puissances projetées sur l'espace global, en vérifiant la convergence uniquement dans le sous-espace qui nous intéresse.

5.2.1 Méthode de Sorensen

En partant d'un vecteur initial q_1 , on construit une famille de m vecteurs q_k en projetant orthogonalement, à l'itération k, le vecteur $K^{-1}q_k$ sur les k vecteurs précedents. L'orthogonalité est alors assurée explicitement à partir d'un algorithme de Graam-Schmidt suffisamment robuste dans la plupart des cas. Pour que la méthode de Sorensen soit robuste, la condition $m \ge 2p$ doit être respectée (Boiteau[7]). Calcul de $q_1/||q_1|| = 1$ Pour k = 1, m faire $z = K^{-1}q_k$ Pour l = 1, k faire $b_{lk} = (z, q_l)$ $z = z - b_{lk}.q_l$ Fin boucle $b_{k+1,k} = ||z||$ Si $b_{k+1,k} \neq 0$ alors $q_{k+1} = \frac{z}{b_{k+1,k}}$ Sinon déflation Fin si Fin boucle

On aboutit alors à la sous-matrice dite de Hessenberg supérieure de la forme suivante :

$$B_m = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ 0 & \cdots & \cdots & b_{m-1,m} \\ 0 & 0 & b_{m,m-1} & b_{m,m} \end{bmatrix}$$
(5.65)

Notant Q_m la matrice de passage de la base canonique à la base réduite, constituée des m vecteurs q_k , on obtient en fait la relation :

$$K^{-1} = Q_m B_m Q_m^T \tag{5.66}$$

La qualité des modes propres obtenus est caractérisée à partir du vecteur résidu de la factorisation d'Arnoldi :

$$R_m = b_{m+1,m} q_{m+1} e_m^T (5.67)$$

Où e_m est le *m*-ième vecteur de la base canonique. Si on laisse croître indéfiniment la taille du sous-espace jusqu'à convergence complète sur l'ensemble des *p* valeurs propres souhaitées, les effets d'arrondi vont reprendre le dessus. D'où la nécessité de rendre ce processus itératif via des redémarrages. On utilise alors la méthode de redémarrage implicite.

5.2.2 Méthode de redémarrage implicite

Cet algorithme a été initié par Sorensen en 1992 et connaît un réel essor pour la résolution de grands systèmes modaux sur des super calculateurs parallèles. Il traite aussi bien les problèmes réels que complexes, hermitiens ou non. Il se résume en une succession de factorisation d'Arnoldi dont les résultat pilotent automatiquement des redémarrages statiques et implicites via des filtres polynomiaux modélisés par des QR implicites. Soit p le nombre de valeurs propres recherchées dans le spectre. On va dans un premier temps réalisé m = p + q factorisations d'Arnoldi (en général on prend q = p). Puis une fois ce prétraitement effectué, on itère un processus de filtrage de la partie du spectre indésirable. On commence par déterminer le spectre de la sous matrice et on en dissocie la partie non désirée qu'on utilise ensuite comme shift pour mettre en place une série de q QR implicite avec shift simple. A chaque fois, le vecteur initial est implicitement modifié afin qu'il engendre préférentiellement les modes souhaités. Cela permet de diminuer le résidu en amoindrissant les composantes du vecteur initial suivant les modes indésirables. Itération après itération, on améliore donc la qualité des modes recherchés en s'appuyant sur des modes auxiliaires. Le processus peut se résumer comme suit :

Factorisation d'Arnoldi d'ordre $m : K^{-1}Q_m = Q_m B_m + R_m$ Pour k = 1, MAXITER faire Calculer $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_p$, $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+q}$, QR avec shifts implicites, Mise à jour Q_m, B_m et R_m , Troncatures de ces matrices à l'ordre p, $K^{-1}Q_m = Q_m B_m + R_m \Rightarrow K^{-1}Q_p = Q_p B_p + R_p$, Estimation de la qualité des p modes Fin de la boucle

Une fois que l'on a obtenu la sous-matrice B_m de K^{-1} , dans la base des modes propres significatifs, on applique la méthode des puissances sur cette matrice de plus petite taille, en se ramenant à chaque itération dans la base globale afin d'effectuer la projection sur les endommagements positifs.

5.2.3 Méthode des puissances dans un sous espace, projetées dans l'espace global

Une fois la matrice de Hessenberg B_m construite, on applique la méthode des puissances projetées (cf partie 5.1.2). On note $\Pi^{\alpha}_{\mathbb{R}_+}$, la projection des degrés de liberté d'endommagement sur \mathbb{R}_+ , δ le critère de convergence et x_0 le vecteur initial aléatoire de la méthode. On peut alors présenter l'algorithme des puissances projetées, obtenu par réduction dans le sousespace, de la façon suivante :

$$\begin{split} \nu_{0} &= \Pi(Q_{m}x_{0}) \\ x_{0} &= \frac{Q_{m}^{T}\nu_{0}}{||Q_{m}^{T}\nu_{0}||} \\ \text{Pour } k &= 1, nbr_iter_max \\ x_{k} &= B_{m}x_{k-1} \\ \nu_{k} &= \Pi_{\mathbb{R}_{+}}^{\alpha}(Q_{m}x_{k}) \\ x_{k} &= \frac{Q_{m}^{T}\nu_{k}}{||Q_{m}^{T}\nu_{k}||} \\ \text{Si } (||x_{k} - x_{k-1}|| < \delta) \text{ alors } \\ mode &= x_{k} \\ Q_{rc} &= \frac{\nu_{k}^{T}K\nu_{k}}{||\nu_{k}||^{2}} \\ \text{Sinon déflation } \\ \text{Fin si } \\ \text{Fin boucle} \end{split}$$

Cet algorithme gagne en rapidité lorsque toutes les valeurs propres sont de même signe. On choisit donc, lorsqu'au moins une des valeurs propres est de signe négatif, d'effectuer un décalage sur la matrice tangente. La nouvelle matrice sur laquelle on applique alors l'algorithme (5.69) est de la forme :

$$A = (\rho(B_m) + \tau) I_{d_m} - B_m$$
(5.70)

où ρ désigne le rayon spectral, défini comme le maximum en valeur absolue des valeurs propres, I_{d_m} la matrice identité de taille $m \times m$ et où τ est un réel strictement positif.

Une fois la convergence obtenue, on aboutit en fait à une première estimation du minimum du quotient de Rayleigh (5.1), à partir du maximum sous contraintes de K^{-1} . Afin de tester la qualité de cette estimation, on effectue ensuite un redémarrage à partir du vecteur convergé, en appliquant cette fois la méthode des puissances projetées sur B_m^{-1} , via un décalage $\mu > \rho(B_m^{-1})$, assurant de travailler avec une matrice définie positive de la forme :

$$\mu I_{d_m} - B_m^{-1} \tag{5.71}$$

La convergence est alors plus difficile à obtenir compte tenu de la forme de la matrice B_m^{-1} , beaucoup moins avantageuse que B_m , et dépend du décalage μ qui doit être petit, mais suffisamment supérieur à la plus grande valeur propre sans contraintes.

5.3 Application

On présente dans cette partie quelques cas d'application permettant la validation de la méthode numérique d'optimisation sous contraintes d'inégalités, développée dans *Code_Aster* et présentée dans la partie 5.2. Pour chacun des cas d'application on utilise la formulation énergétique suivante :

$$\phi = \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 R\varepsilon.\varepsilon + \frac{\sigma_M^2}{E_0}\alpha + \frac{1}{2}E_0 l^2 \nabla \alpha.\nabla \alpha$$
(5.72)

qui est la formulation de référence utilisée précédemment pour le cas test de la barre en traction et dont les détails sont présentés dans la partie 2.5.2.

5.3.1 Cas de la barre en traction

On reprend le cas test de la barre en traction traité analytiquement dans la partie 4.2 puis à l'aide Matlab dans la partie 5.1.4. L'objectif étant de retrouver des résultats de stabilité similaires, à partir de *Code_Aster* et pour des discrétisations beaucoup plus fines que la limite trouvée avec Matlab (de l'ordre du millier de degrés de liberté).

Étude numérique de la stabilité de la solution homogène

On a réalise le cas test dans *Code_Aster* en optant pour des maillages triangles, puis quadrangles, quadratiques en déplacement et linéaires en endommagement, comme cela est fait classiquement pour les calculs d'endommagement non locaux dans le code (cf parties 3.4.6 et 3.5.2). Les calculs sont effectués à partir de la formulation nodale et de l'algorithme de résolution de Newton global (cf partie 3.5.4) qui, du fait de ses propriétés, permet de converger constamment sur la solution homogène, quel que soit l'état de stabilité de cette dernière. La barre est de longueur L = 100m. On prend comme paramètres matériaux :

$$E_0 = 1 \ N.m^{-2} \tag{5.73}$$

$$\sigma_M = 0.01 \ N.m^{-2} \tag{5.74}$$

et un coefficient de Poisson nul $\nu = 0$, de sorte à conserver le caractère quasi 1D.

De même que dans la partie 3.6.1, les unités indiqués servent uniquement à donner un ordre de grandeur de la dimension physique des paramètres dont les valeurs pourraient être ramenées à celle du béton en considérant des unités différentes. On applique alors l'algorithme d'optimisation sous contraintes développé, afin de comparer les résultats obtenus sur la stabilité de la solution homogène, avec ceux trouvés analytiquement (cf partie 4.2). Pour cela, on fait varier la longueur interne de notre modèle ainsi que le raffinement de la discretisation spatiale, et l'on recherche à chaque fois le chargement à partir duquel on détecte l'instabilité de la solution. On observe alors que l'algorithme sans redémarrage par la matrice B_m^{-1} , fournit globalement un retard d'à peu près 25% avec le chargement à l'instabilité analytique (4.58), et cela indépendamment du maillage. Lorsque l'on inclut le redémarrage, on se rapproche d'autant plus de la valeur attendue que le décalage μ est faible. On présente dans le tableau Tab 5.1 les écarts relatifs obtenus à partir d'une discrétisation en 11011 degrés de liberté d'endommagement (75053 degrés de liberté en tout) pour 3 différentes valeurs de décalage.

Décalage μ	$3\rho(B_m^{-1})$	$1.5\rho(B_m^{-1})$	$0.75\rho(B_m^{-1})$
Écart relatif avec l'analytique	10-13%	6-10%	3-6%

TAB. 5.1 – Écart relatif entre le déplacement à l'instabilité trouvé numériquement et sa valeur analytique, pour différentes valeurs de décalage



FIG. 5.4 – Diagramme de stabilité obtenu avec 11011 degrés de liberté d'endommagement

Dans tout les cas, on reproduit un diagramme de stabilité similaire à celui de la Figure 4.1 (cf Figure 5.4) et on retrouve exactement le chargement de bifurcation (4.57), par la méthode de Sorensen qui permet d'obtenir les plus petits modes propres de l'opérateur tangent. Si l'on veut obtenir un résultat dans un délai de temps très court, on utilise l'algorithme sans redémarrage. On recherche alors un maximum sous contrainte pour K^{-1} dont la précision varie autour de 25%. Si l'on veut estimer finement la stabilité, il faut effectuer l'algorithme avec redémarrage et accepter un temps de calcul plus long et non-négligeable du fait de la difficile convergence qui nécessite beaucoup d'itérations. Qualitativement, le mode d'instabilité présenté à la Figure 5.5 présente un bon état d'endommagement, puisqu'on obtient bien une localisation en bout de barre. Ce qui était le résultat attendu.



FIG. 5.5 – Mode d'instabilité de la solution homogène

La discrétisation la plus fine sur laquelle on a travaillé est de 11011 degrés de liberté d'endommagement. On comprend assez bien que le facteur pouvant complexifier l'étude de stabilité est le nombre de degrés de liberté d'endommagement qui atteignent le critère d'endommagement, et donc qui s'incrémentent à un certain niveau de chargement donné. Pour les études classiques en 2D, ce nombre dépasse rarement quelques milliers. En 3D, la qualité des résultats est plus difficile à assurer. Toutefois, on peut s'attendre à trouver une bonne estimation de la stabilité. À noter que l'on a reproduit exactement le même diagramme de stabilité dans le cas de la formulation mixte, en tenant compte de la relation supplémentaire qui permet de rechercher des modes propres indépendants des degrés de liberté de Lagrange (cf partie 4.1.2 et équation (4.34)). On se retrouve alors toujours avec 11011 degrés de liberté d'endommagement aux nœuds mais avec désormais 86064 degrés de liberté en totalité.

Étude de l'influence des coefficients m et p

Les résultats précédents ont été obtenus pour p = 25 fréquences propres calculées et un sous espace de taille m = 2p soit 50. Ce sont les paramètres optimaux déduits de l'analyse des résultats de stabilité qui suit. On se place dans le cas particulier où l = 1m et pour le maillage à 11011 degrés de liberté d'endommagement. On va comparer le chargement à partir duquel on détecte numériquement la perte de stabilité dans les cas p = 10, p = 15 et p = 50, avec ceux trouvés pour p = 25. Pour chaque choix de p on prendra comme taille de sous espace m = 2p, valeur minimale de m à prendre pour que l'algorithme de recherche de modes propres soit robuste, puis m = 50 si $p \le 25$ (on veut vérifier que l'on ne prend pas un sous-espace trop petit dans le cas contraire). La valeur du décalage μ est celle qui fournit les meilleurs résultats pour p = 25. On pourrait faire le choix de prendre une taille de sous-espace plus grande, mais cela perturberait l'algorithme d'optimisation sous contraintes d'inégalités développé, puisqu'il s'agirait alors de converger sur davantage de vecteurs qui ne sont pas des modes propres de la structure (on cherche en effet à converger dans le sous espace entier). On augmente le risque de converger vers un moins bon minimum et on ralentit la convergence de l'algorithme.

(a) On travaille avec $p=10\ {\rm fréquences}\ {\rm propres}$:

Dans le cas où m = 20, la valeur du minimum du quotient de Rayleigh (5.1) obtenue diminue au cours des incréments de chargement, mais reste toutefois supérieur à 0. La plus petite valeur trouvée est de 5.10^{-10} pour un chargement de 3.04m. Le nombre de fréquences propres déterminées semble donc être insuffisant. Dans le cas où m = 50, on capte l'instabilité au chargement 2.64m. Soit avec un écart de 10% avec la valeur analytique. Les résultats se sont donc nettement améliorés avec l'augmentation de la taille du sous-espace. Avec m = 20, on convergeait donc dans un espace trop petit, insuffisant pour une étude de stabilité.

(b) On travaille avec p = 15 fréquences propres :

Lorsque l'on travaille avec un sous-espace de taille m = 30, on obtient une valeur du minimum du quotient de Rayleigh (5.1) qui diminue régulièrement au fur et à mesure que l'on augmente le chargement. On capte la première valeur négative pour un chargement de 2.88m. Soit un écart de 20% avec le chargement théoriquement attendu à la perte de stabilité. Les résultats obtenus sont donc meilleurs que dans le cas précédent (p = 10, m = 20). Toutefois, l'écart reste encore trop important, et supérieur à celui trouvé avec p = 10 et m = 50. Le sous espace est encore de trop petite taille. Lorsqu'on fait le choix de prendre m = 50, on retrouve les mêmes résultats que pour p = 10. On en déduit que le choix m = 50 est un bon choix de taille du sous-espace. Cependant, le nombre de modes propres paraît encore insuffisant.

(c) On travaille avec p = 25 fréquences propres :

On retrouve les résultats de stabilité présentés. Le choix (p = 25, m = 50) s'impose comme un bon couple de paramètres pour l'étude de stabilité de la barre en traction, puisque l'on a un sous-espace de taille suffisante et le nombre maximal de fréquences propres que l'on puisse rechercher tout en respectant la condition $m \ge 2p$ (cf partie 5.2.1). On a testé le cas m = 200. On s'est alors rendu-compte que le minimum du quotient de Rayleigh (5.1) fourni dans les premiers chargements était plus difficile à atteindre que dans le cas m = 50. À même nombre d'itérations donné on trouve une moins bonne approximation de la valeur de Q_{rc} . Le calcul devient plus coûteux en nombre d'itérations et donc en temps.

(d) On travaille avec $p=50\ {\rm fréquences}\ {\rm propres}$:

On prend alors m = 100 pour respecter la condition $m \ge 2p$, inhérente à la méthode de Sorensen. On retrouve des valeurs du minimum du quotient de Rayleigh (5.1) du même ordre que dans le cas p = 25 (cf Figure 5.6 où l'on présente l'évolution de la valeur obtenue pour le minimum du quotient de Rayleigh, au voisinage du chargement analytique de perte de stabilité). L'instabilité est détectée pour le même chargement, soit 2.56m. Les résultats sont donc bien meilleurs que dans les deux premiers cas (a) et (b) présentés auparavant. Toutefois, la recherche de 50 modes propres coûte plus chère que la recherche de 25 modes. On est donc dans une situation moins optimale.



FIG. 5.6 – Évolution du minimum du quotient de Rayleigh Qrc en fonction du chargement imposé, pour le choix de paramètres p = 25 et m = 50

Bilan du cas test et choix des paramètres de l'algorithme

On déduit des études numériques de stabilité réalisées sur le cas test de la barre en traction que le nombre de modes propres recherchés et la taille du sous-espace sont des paramètres jouant un rôle important dans l'algorithme développé. Plus on construit un sous-espace de grande taille, plus le calcul du minimum du quotient de Rayleigh (5.1) devient alors coûteux. Quand bien même la taille du sous-espace est beaucoup plus faible que la taille totale du problème étudié, la convergence peut demander un grand nombre d'itérations et donc un temps de calcul bien plus important que la convergence du pas de temps par la méthode de Newton. Par ailleurs, on comprend assez bien que plus le nombre de modes propres demandés est important, plus le nombre de vecteurs complémentaires qui constituent le sous-espace l'est également (cf partie 5.2.1). L'algorithme va donc vouloir converger sur un vecteur stationnaire dans une base constituée d'un nombre non-négligeable de vecteurs qui ne sont pas des modes propres de la structure. Ce qui augmente le risque de retarder le chargement à partir duquel on est suceptible de capter l'instabilité. Il faut donc trouver un bon compromis dans le choix du nombre de fréquences propres recherchées et de la taille du sous-espace. On conseille de prendre le couple de paramètres (p = 25, m = 50) pour les problèmes n'excédant pas la centaine de milliers de degrés de liberté et (p = 50, m = 100) pour les problèmes de plus grande taille. Ce choix paraît suffisant quelque soit le type de géomètrie et de chargement. Le principal risque est de trouver un nombre non négligeable de valeurs propres très proches numériquement. Mais celui-ci dépend principalement du nombre de degrés de liberté ayant atteint le critère d'endommagement (plus particulièrement ceux dont la valeur de l'endommagement est la plus élevée) et donc de la discrétisation du modèle. Or, si l'on considère que plus le maillage est fin, plus on peut prendre une longueur interne l petite afin de mieux représenter le chemin de fissuration, on peut alors également considérer que la taille de la zone en état d'endommagement ne dépasse que très rarement la dizaine de milliers de degrés de liberté. Les couples de paramètres conseillés sont donc tout à fait cohérents.

Comparaison avec la stabilité de la solution obtenue par la méthode de résolution en Newton sécante

On suit désormais l'endommagement de la barre, obtenu à partir de la formulation nodale et de la méthode de résolution en Newton sécante (cf partie 3.5.5). La formulation (5.72) de l'énergie, quadratique en endommagement et en déplacement, assure l'équivalence entre la méthode de résolution en Newton sécante et la minimisation alternée. La solution obtenue présente alors trois phases :

- 1. Une phase de comportement élastique tant que le chargement imposé en bout de barre U_t est inférieur à la limite d'élasticité U_e (cf partie 2.5.2).
- 2. Une phase d'endommagement homogène de la barre, tant que le chargement est compris entre U_e et la valeur U_{t_1} (4.57), à partir de laquelle on ne vérifie plus la condition (4.47) d'unicité.
- 3. Une dernière phase d'endommagement, obtenue lorsque le chargement est supérieur à U_{t_1} , au cours de laquelle l'endommagement se localise sur le bord gauche de la barre en traction et cela alors que la solution homogène est toujours stable d'après la condition (4.50). La bifurcation s'effectue en deux temps. D'abord faiblement (cf Figure 5.7), puis fortement (cf Figure 5.8) jusqu'à entrainer la rupture complète de la barre.



FIG. 5.8 – Endommagement de la solution localisée au pas de temps suivant

Ce résultat a été obtenu pour différents maillages, réglés ou non, indépendamment de la discrétisation temporelle. On déduit que la localisation est une conséquence de la méthode de résolution utilisée, équivalente à la minimisation alternée. Méthode qui permet à la fois de franchir les instabilités structurelles de type snap-back et d'obtenir des solutions plus basses en énergie (ce qui est le cas de la solution localisée, qui présente un endommagement maximal plus élevé que la solution homogène) que la méthode de Newton globale, de part le caractère descendant de la minimisation alternée (cf partie 3.2). Les courbes forces-déplacements de la solution homogène (en rouge sur la Figure 5.9), obtenue par la méthode de Newton globale et de la solution localisée (en noir sur la Figure 5.9), obtenue par la méthode de Newton sécante, sont présentées simultanément sur la Figure 5.9. L'étude de stabilité de la solution localisée montre que celle ci est toujours stable. Le



FIG. 5.9 – Courbes de réponse forces-déplacements associées à la solution homogène et à la solution bifurquée localisant l'endommagement en bout de barre

plus petit mode propre associé à la matrice tangente conserve toujours une valeur propre positive. Ce qui est suffisant pour déduire la stabilité. On observe donc dans ce cas test, que la solution localisée est plus stable que la solution homogène, et de fait, que la solution fournie par la méthode de résolution en Newton sécante est plus stable que celle fournie par la méthode de Newton globale.

Passage de la résolution en Newton sécante à une résolution en Newton globale

On s'intéresse ici au passage de la méthode de résolution en Newton sécante, utilisée pour obtenir la localisation de l'endommagement de la solution, à la méthode de Newton globale pour les pas suivants, lorsque la courbe force-déplacement reprend une trajectoire en incrément de déformation positif. L'objectif étant un gain de temps de calcul sur les pas de temps stables (condition vérifiée pour la solution localisée). Pour le cas test de la barre en traction, le changement de méthode de résolution se ressent au niveau de la convergence de la solution. La convergence du premier pas de temps, qui suit le passage de la première méthode à la seconde, nécessite un découpage en deux sous pas de temps (on affine la discrétisation temporelle au voisinage de ce point). Une fois ce pas convergé, les suivants connaissent une convergence quadratique Newtonienne. Ce qui montre que l'on a bien réussi à passer de l'une à l'autre.

Faire le choix de travailler avec la méthode de résolution de Newton globale et d'autoriser le passage en sécante lorsque la convergence est plus difficile à obtenir, peut être une bonne stratégie pour obtenir la rupture complète d'une structure. À condition que le temps de calcul utilisé par le redécoupage ne soit pas trop important, comparativement à celui que l'on obtiendrait en utilisant la méthode de résolution en Newton sécante dès le départ.

Utilisation d'une méthode de changement de branche

On cherche maintenant à suivre la solution homogène tant que celle-ci est stable, puis à bifurquer vers la solution localisant l'endommagement une fois la perte de stabilité détectée. L'objectif étant de ne pas changer de branche de solution tant que celle obtenue est stable. Pour cela, on utilise une méthode de changement de branche mise en place par Fernandes [17] pour rechercher des solutions bifurquées dans des problèmes à plasticité. Cette méthode consiste à capter la bifurcation dans la direction du mode d'instabilité. Schématiquement on procède de la façon suivante :

- 1. On récupère la solution instable convergée, notée u_{cv} , ainsi que le mode d'instabilité v associé.
- 2. On recommence le pas de temps en donnant comme prédiction initiale de la méthode de résolution le déplacement :

$$u^* = u_{cv} + \theta v \tag{5.75}$$

où θ est un réel dont la valeur est bornée par la condition $\alpha \leq 1.$

En modifiant la prédiction, on introduit une perturbation qui permet à la méthode de résolution de se rapprocher de la solution que l'on souhaite finalement obtenir. Dans le cas d'une résolution par la méthode de Newton globale, la prédiction initiale ne suffit pas pour obtenir la convergence de la solution localisée. La localisation entraîne de trop importantes modifications de l'opérateur tangent au cours des itérations (on rappelle que les lignes et colonnes correspondant aux degrés de liberté d'endommagement projetés sont remplacées par l'identité). Lorsque l'on utilise la méthode de résolution en Newton sécante (à partir du chargement à la perte de stabilité), perturbée par la méthode de changement de branche, on capte la solution bifurquée. Si l'on modifie la prédiction initiale en considérant cette fois une prédiction homogène ($\theta = 0$), la méthode de résolution en Newton sécante, ainsi que la minimisation alternée par équivalence, peut elle aussi dépendre de la prédiction initiale. Ce qui justifie l'utilisation de la méthode de changement de branche dans le cas où la solution obtenue par la méthode de résolution en Newton sécante est instable.

5.3.2 Cas d'un biaxial

On considère un biaxial de côté L, de chargement $U_x = t_1 L$ suivant l'axe horizontal et $U_y = t_2 L$ suivant l'axe vertical (cf Figure 5.10). L'étude de stabilité de la solution homogène associée est très intéressante du fait de la multiplicité des solutions possibles et de son caractère non-uniaxial. On considère un état de déformation plane et l'hypothèse $\sigma_{12} = 0$. Les tenseurs de



FIG. 5.10 – Représentation du biaxial

contraintes et de déformations sont alors les suivants :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix} \text{ et } \xi = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix}$$
(5.76)

On conserve les paramètres matériaux (5.73) et (5.74) du cas test de la barre en traction. On se propose d'étudier la stabilité de la solution homogène pour de faibles longueurs caractéristiques l, à l'aide de Matlab dans un premier temps, puis de l'algorithme développé dans *Code_Aster*. De façon analogue avec ce qui a été fait dans le cas de la barre en traction, on s'intéresse également à la stabilité de la solution fournie par la méthode de résolution en Newton sécante. Cela afin de confirmer ou non les observations déduites au cours du cas test précédent (cf partie 5.3.1).

Étude de la stabilité de la solution homogène à l'aide de Matlab

On utilise seulement l'algorithme des puissances avec projection, comme décrit dans la partie 5.1.2. La structure est maillée en quadrangles reglés linéaires. On considère deux cas de figure. Un premier (cas (a)) au cours duquel la structure est chargée de façon uniforme dans les deux directions ($t_1 = t_2$). Un second (cas (b)) au cours duquel le chargement est favorisé dans l'une des deux directions ($t_2 \ll t_1$).

Cas(a):

On observe alors que :

- si l'on prend un coefficient de Poisson nul $\nu = 0$, la solution homogène est stable pour les longueurs internes considérées.
- − si le coefficient de Poisson est non nul ($\nu \neq 0$), on capte l'instabilité de la solution homogène pour des états d'endommagement dont la valeur maximale est fonction de la longueur interne. Le mode d'instabilité localise l'endommagement sur l'un des quatres coins de la structure (cf Figure 5.11), orthogonalement au chargement équivalent appliqué.



FIG. 5.11 – Mode propre et mode d'instabilité en endommagement du biaxial

Cas (b) :

On retrouve les résultats de stabilité du cas test de la barre en traction. Cela permet à nouveau de vérifier que l'instabilité de la solution homogène d'une barre en traction se produit au même chargement quel que soit son épaisseur.

Étude numérique de la stabilité à partir de Code_Aster

On représente un biaxial de côté L = 10m, maillé avec 35549 degrés de liberté (dont 3995 degrés de liberté d'endommagement). On considère un coefficient de Poisson non nul $\nu = 0.25$, pour tenir compte des résultats précédent. On applique un chargement linéaire et égal dans les deux directions. Une étude de l'influence des paramètres p et m de l'algorithme d'optimisation sous contraintes d'inégalités développé (cf partie 5.2.1) conduit à faire le choix suivant : p = 10 et m = 50. Pour de petites longueurs internes on est alors toujours capable de capter un chargement à partir duquel le minimum du quotient de Rayleigh (5.1) devient négatif. Celui-ci est d'autant plus proche de la limite d'élasticité que la longueur interne est petite. Dans le cas particulier où l = 0.3m, on capte l'instabilité dès la limite d'élasticité atteinte. Le mode d'instabilité associé localise l'endommagement sur un coin du biaxial (cf Figure 5.12), de façon similaire à ce qui a été trouvé à l'aide du logiciel Matlab (cf Figure 5.11).



FIG. 5.12 – Mode d'instabilité associé à la solution homogène du biaxial

Comparaison avec la stabilité de la solution obtenue par la méthode de résolution en Newton sécante

On a observé, dans le cas test de la barre en traction, que la méthode de résolution en Newton sécante permet d'obtenir la solution stable qui localise l'endommagement sur l'une des extremités de la barre. En s'appuyant sur ce résultat, on s'intéresse à la stabilité de la solution obtenue par cette méthode de résolution, dans le cas du biaxial. On conserve la longueur caractéristique l = 0.3m.

On trouve alors une solution localisant l'endommagement sur l'un des quatres coins de la structure (ce qui est en accord avec le mode d'instabilité présenté à la Figure 5.12) et déchirant simultanément une arrête verticale et une arrête horizontale (cf Figure 5.13) du biaxial. Ce qui a pour effet de libérer complétement la structure. L'étude de stabilité effectuée à partir de l'algorithme



FIG. 5.13 – Endommagement du biaxial obtenu avec la méthode sécante

développé montre que l'on obtient toujours un minimum du quotient de Rayleigh (5.1) positif. La solution obtenue est donc stable. Ce qui confirme les premières conclusions établies dans le cas de la barre en traction.

5.3.3 Cas d'un triaxial

On considère désormais un cube, de 50944 degrés de liberté (dont 4096 d'endommagement), soumis à un chargement uniforme dans les trois directions principales ($U_x = U_y = U_z$). Ce cas test est une extrusion du biaxial (cf Figure 5.10). On reprend donc les mêmes coefficients matériaux et les mêmes valeurs des paramètres p et m (p = 10 et m = 50). Conformément aux résultats de stabilité obtenus dans le cas du biaxial, on s'attend à trouver un chargement à partir duquel la solution homogène devient instable, pour des valeurs faibles de la longueur caractéristique l. L'application de l'algorithme d'optimisation sous contraintes développé dans *Code_Aster* (cf partie 5.2) montre que le minimum du quotient de Rayleigh (5.1) diminue régulièrement jusqu'à devenir négatif pour un chargement d'autant plus proche de la limite d'élasticité que la longueur interne est petite. Le mode d'instabilité associé localise l'endommagement sur l'un des coins du cube (cf Figure 5.14). Le résultat d'instabilité obtenu et le mode trouvé sont en accord avec les résultats du cas test du biaxial (cf Figure 5.12).

Les résultats de stabilité obtenus sur chacun des trois cas test précédents valident l'algorithme d'optimisation sous contraintes d'inégalités développé (cf partie 5.2) et ont permis de définir le couple de paramètres (p, m) en fonction du nombre de degrés de liberté du problème étudié.



FIG. 5.14 – Mode d'instabilité associé à la solution homogène du triaxial

5.3.4 Cas de la fibre à matrice renforcée

Lorsque l'on a appliqué la méthode de résolution en Newton sécante (cf partie 3.5.5) sur le problème de fibre à matrice renforcée (cf partie 3.6.1), avec une fonction de dissipation quadratique en endommagement et pour des chargements en traction et en compression, on a mis en évidence l'existence de solutions bifurquées. On s'intéresse ici plus particulièrement au cas de traction (cf Figure 3.5), en prenant cette fois la fonction de dissipation linéaire utilisée dans les trois cas test précédents. On étudie dans un premier temps la stabilité de la solution dissymétrique obtenue, que l'on compare dans un second temps avec celle de la solution symétrique, construite en considérant juste l'endommagement d'une moitié d'éprouvette. Les propriétés de symétrie permettent alors d'obtenir le même état d'endommagement sur la seconde moitié.

Cas 1 : Stabilité de la solution dissymétrique

Comme dans la partie 3.5.5, et malgré l'utilisation d'une fonction de dissipation différente, on retrouve la solution dissymétrique qui localise brutalement l'endommagement sur le bord droit de la structure (cf Figure 5.15). L'application de l'algorithme numérique développé dans le code avec les paramètres p = 25 et m = 50 (cf partie 5.2), permet d'obtenir une valeur du minimum du quotient de Rayleigh (5.1) qui reste toujours positive à chaque pas de temps. La solution dissymétrique est donc stable.



FIG. 5.15 – Endommagement de la structure entière au chargement $1.3\times10^{-4}~{\rm m}$

Cas 2 : Stabilité de la solution symétrique

On découpe l'éprouvette en deux suivant l'axe vertical. Le maillage que l'on utilise alors comporte 46364 degrés de liberté (dont 3944 d'endommagement). De même que dans le cas où l'on étudie la structure entière, on suit l'évolution de l'endommagement et à chaque pas de temps on regarde la stabilité de la solution trouvée. On observe qu'au pas de temps où la solution dissymétrique localise pour la structure entière, l'endommagement de la solution associée à la demi-structure n'a toujours pas atteint l'extremité (cf Figure 5.16 comparée à Figure 5.15). Il est alors possible de comparer l'état de stabilité de la solution symétrique avec celle de la solution dissymétrique. La valeur du minimum du quotient de Rayleigh (5.1), obtenue en ce pas de temps et par la méthode numérique développée (cf partie 5.2), est négative dans le cas de la solution symétrique (cf Figure 5.17). Ce qui signifie que la solution symétrique est instable.

Ce résultat conforte les observations faites lors des trois cas test précédents, où l'on avait trouvé que les localisations de l'endommagement sont plus favorables du point de vue de la stabilité. Les localisations permettent d'obtenir un niveau d'endommagement maximal plus élevé, associé à une contrainte plus faible et donc à une courbe de réponse force-déplacement plus basse. Une première analogie peut être faite entre ces propriétés et la stabilité.



FIG. 5.16 – Endommagement de la demi-structure au chargement $1.3\times 10^{-4}~{\rm m}$



FIG. 5.17 – Évolution du minimum du quotient de Rayleigh pour la solution symétrique

5.4 Conclusion

La méthode numérique d'optimisation sous contraintes d'inégalités développée (cf partie 5.2) permet d'obtenir une bonne approximation du minimum du quotient de Rayleigh (5.1) et donc de la stabilité des solutions obtenues à partir de discrétisations en centaines de millier de degrés de liberté. L'écart trouvé avec les résultats théoriques (cf Tab 5.1 de la partie 5.3.1) est suffisamment faible. Les études effectuées ont également permis d'observer que les solutions qui localisent l'endommagement sont plus stables et que la méthode de résolution en Newton sécante (id minimisation alternée par équivalence) semble fournir de meilleurs solutions que l'algorithme de Newton global du point de vue de la stabilité.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

L'objectif de la thèse était de mettre en place et de développer un algorithme numérique permettant d'évaluer la stabilité des solutions aux problèmes d'endommagement, obtenues à partir d'un algorithme de résolution numérique. Pour ce faire, il a été nécessaire de procéder en trois étapes.

On a tout d'abord développé dans *Code_Aster* une formulation nodale du modèle d'endommagement régularisé par le gradient de l'endommagement (cf chapitre 3). Cette formulation standard possède deux atouts majeurs :

- 1. Elle permet d'effectuer des calculs d'endommagement avec un algorithme de résolution équivalent à la minimisation alternée dans le cas de formulations quadratiques de l'énergie en endommagement et en déplacement. Algorithme qui a l'avantage d'être descendant et donc de toujours converger vers une solution.
- 2. Elle ne nécessite que le minimum d'inconnus indispensables à la résolution. Ce qui simplifie les études analytiques et la rend accessible à tout utilisateur non initié.

Les applications nécessaires à la validation des développements ont confirmé la robustesse de la méthode de résolution en Newton sécante (cf partie 3.5.5) obtenue dans le cas de formulations quadratiques de l'énergie, en endommagement et en déformation. Elles ont également mis en évidence l'existence de solutions multiples qui découle de la perte des propriétés mathématiques d'unicité de la solution dans le cas de lois de comportement adoucissantes.

Pour détecter l'existence de solutions multiples, un critère d'unicité a été mis en place. Lorsque celui-ci est violé, la solution numériquement obtenue n'est pas l'unique réponse de la structure au chargement imposé, vérifiant les conditions premières d'équilibre et d'évolution de l'endommagement. Il est alors nécessaire d'étudier la stabilité de la solution. On définit le critère de stabilité par la positivité de la dérivée seconde de l'énergie, sous contrainte d'irréversibilité de l'endommagement. Cela signifie que la solution obtenue doit être un minimum local de l'énergie. Si cette condition est vérifiée, les niveaux d'énergie obtenus à partir de petites perturbations respectant la contrainte unilatérale d'irréversibilité sont supérieurs à celui obtenu à partir de l'état de déplacement et d'endommagement de la solution numériquement trouvée. Dans le cas où le critère de stabilité n'est pas satisfait, la solution trouvée n'est pas physiquement admissible et il est alors nécessaire d'utiliser une méthode de changement de branche permettant d'obtenir une solution différente, stable.

Le critère de stabilité défini peut s'écrire sous la forme d'une condition sur la valeur du minimum d'un quotient de Rayleigh sousmis à des contraintes d'inégalités (positivité de l'endommagement), dont le calcul en dimension infinie est la plupart du temps impossible. La discrétisation spatiale utilisée dans le cas de la méthode des éléments finis permet de se ramener en dimension finie. Le calcul du minimum nécessite alors l'utilisation d'un algorithme d'optimisation sous contraintes d'inégalités. La robustesse de l'ensemble des algorithmes, disponibles dans la littérature, est limitée à des discrétisations ne dépassant pas le millier de degrés de liberté. La méthode numérique développée dans le code utilise l'algorithme le plus pertinant combiné à une méthode de réduction basée sur la projection dans un sous-espace propre (cf chapitre 5). La validation sur plusieurs cas tests confirme la qualité des résultats fournis sur des problèmes à grand nombre de degrés de liberté et a permis de mettre en évidence l'importance du mode d'instabilité (vecteur minimisant le quotient de Rayleigh), qui peut être utilisé comme direction de perturbation de la solution dans le cas où celle-ci s'avère instable. On a également pu observer que les solutions obtenues en utilisant une méthode de résolution équivalente à la minimisation alternée sont plus stables que celles obtenues en utilisant la méthode de résolution de Newton. Cela est une conséquence directe de la propriété descendante de l'algorithme de minimisation alternée, plus favorable aux localisations de l'endommagement.

L'application de l'algorithme numérique d'optimisation sous contraintes d'inégalités devra être mise en œuvre pour les études industrielles qui nécessitent l'utilisation d'un modèle d'endommagement pour détecter l'apparition d'une fissure. L'existence de solutions multiples est en effet un frein à la capitalisation des résultats. C'est pourquoi la physique de la solution obtenue par la simulation numérique doit être vérifiée.

On envisage en perspective d'étendre la méthode développée à l'étude de stabilité des solutions obtenues dans le cas des modèles de zones cohésives (Barenblatt [4], Charlotte et al. [12], Dugdale [16], Francfort et Marigo [19], Raous et al. [43]), qui comportent également une condition d'irréversibilité (sur le saut de déplacement lors de l'ouverture d'une fissure). Enfin, il serait intéressant de comparer la stabilité des solutions obtenues dans le cas de fortes localisations brutales de l'endommagement avec les solutions que l'on obtient en utilisant une méthode dynamique. Le phénomène qui se produit dans ces cas là tenant plus de la dynamique.

Bibliographie

- M.Abbas. Algorithme non linéaire quasi-statique. Documentation Code_Aster, R5.03.01, 6-22, June 2011.
- [2] E-C.Aifantis. On the microstructural origin of certain inelastic models. Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the Asme, 106(4): 326-330, 1984.
- [3] H.Amor, J-J.Marigo and C.Maurini. Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(8) : 1209-1229, 2009.
- [4] G-I.Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. Advan. Appl. Mech, 7: 55-129, 1962.
- [5] A.Benallal, R.Billardon and G.Geymonat. Bifurcation and localization in rate independent materials. In Q.S. Nguyen, editor, C.S.I.M Lecture Notes on Bifurcation and Stability of Dissipative Systems. Springer-Verlab, 1993.
- [6] A.Benallal and J-J.Marigo. Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 15: 283-295, 2007.
- [7] O.Boiteau. Solveurs modaux et résolution du problème généralisé (GEP). Documentation Code_Aster, R5.01.01 : 52-61, 2009.
- [8] O.Boiteau. Généralités sur les solveurs linéaires directs et utilisation de MUMPS. Documentation Code_Aster, R6.02.03, 1-33, February 2011.
- J-F.Bonnans, J-C.Gilbert, C.Lemaréchal and C-A. Sagastizabal. Numerical Optimization, Theoretical and Practical Aspects .*Second Edition, Springer-Verlag*, 256-259, 2006.

- [10] B.Bourdin, G-A.Francfort and J-J.Marigo. Numerical experiments in revisited brittle fracture. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48(4): 816-821, April 2000.
- [11] B.Bourdin, G-A.Francfort and J-J.Marigo. The variational approach to fracture. Journal of Elasticity, 91: 115-117, 2008.
- [12] M.Charlotte, J.Laverne et J-J.Marigo. Initiation of cracks with cohesive force models : a variational approach. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 25 : 649-669, 2006.
- [13] C.Comi. Computational modelling of gradient-enhanced damage in quasi-brittle materials. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 4(1): 17-36, January 1999.
- [14] C.Comi and U.Perego. Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. International Journal of Solids and Structures, 38(36-37): 6427-6454, September 2001.
- [15] R.de Borst and H-B.Muhlaus. Gradient dependent plasticity : Formulation and algorithmic aspects. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 35(3) : 521-539, August 1992.
- [16] D-S.Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. J. Mech. Phys. Solids, 8: 100-104, 1960.
- [17] R.Fernandes. Modélisation numérique objective des problèmes hydromécaniques couplés dans le cas des gématériaux. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble-1, 107-136, 2008.
- [18] N-A.Fleck, G-M.Muller, M-F.Ashby and J-W.Hutchinson. Strain gradient plasticity theory and experiment. Acta Metallurgica et Materialia, 42(2): 475-487, February 1994.
- [19] G.Francfort and J-J.Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. J. Mech. Phys. Solids, 46: 1319-1342, 1998.
- [20] M.Frémond and B.Nedjar. Damage, gradient of damage and principle of virtual power. International Journal of Solids and Structures, 33(8): 1083-1103, 1996.
- [21] M-G-D.Geers, R.de Borst, W-A-M.Brekelmans and R-H-J.Peerlings. Strain-based transientgradient damage model for failure analyses. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, 160(1-2) : 133-153, July 1998.

- [22] M-G-D.Geers, R-H-J.Peerlings, W-A-M.Brekelmans and R.de Borst. Phenomenological non local approaches based on implicit gradient-enhanced damage. *Acta Mechanica*, 144(1-2) : 1-15, 2000.
- [23] A.Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 221 : 163-198, 1920.
- [24] B.Halphen and Q-S.Nguyen. Sur les matériaux standard généralisés. Journal de Mécanique, 14: 39-63, 1975.
- [25] R.Hill. Acceleration waves in solids. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 10(1): 1-16, 1962.
- [26] L-M.Kachanov. On the time to failure under creep conditions. Otd. Tekhn. Nauk., 8: 26-31, 1958.
- [27] J.Lemaître and J-l.Chaboche Mécanique des Matériaux Solides. Dunod, Paris, 1985.
- [28] E.Lorentz and S.Andrieux. A variational formulation for non local damage models. Int. J. Plas., 15: 119-138, 1999.
- [29] E.Lorentz, P.Badel and J.Ghoussoub-El Gharib. Simuler l'endommagement d'une structure : traitement numérique des instabilités. *Mécanique & Industries*, 3 : 463-469, 2002.
- [30] E.Lorentz and V.Godard. Gradient damage models : Toward full scale computations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 200(21-22), 1927-1944, 2011.
- [31] J-J.Marigo. Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II, 292(19): 1309-1312, 1981.
- [32] J-J.Marigo. Constitutive relations in plasticity, damage and fracture mechanics based on a work property. *Nuclear Engineering and Design*, 114 : 249-272, 1989.
- [33] J-J.Marigo. From Clausius-Duhem and Drucker-Ilyushin inequalities to standard materials. In G.A.Maugin, R.Drouot, and Sidoroff, editors. *Continuum Thermodynamics : the art and science of modelling material behaviour*, volume 76 of *Solids Mechanics and its Applications : Paul Germain's anniversary*, 289-300. Kluwer Acad. Publ., 2000.

- [34] H-B.Muhlaus and E-C.Aifantis. A variational principle in gradient plasticity. International Journal of Solids and Structures, 28(7): 845-857, 1991.
- [35] F-R-N.Nabarro, S.Shrivastava and S-B.Luyckx. The size effect in microindentation. *Philosophical Magazine*, 86(25-26) : 4173-4180, September 2006.
- [36] Q-S.Nguyen. Stabilité et mécanique non linéaire. HERMES Sciences Publications, 2000.
- [37] K.Pham, H.Amor, J-J.Marigo and C.Maurini. Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture. *Preprint submitted to International Journal of Damage Mechanics*, December 2009.
- [38] K.Pham and J-J.Marigo. Approche variationnelle de l'endommagement : I. Les concepts fondamentaux. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(4) : 191-198, 2010.
- [39] K.Pham and J-J.Marigo. Approche variationnelle de l'endommagement : II. Les modèles à gradient *Comptes Rendus Mécanique*, 338(4) : 199-206, 2010.
- [40] G.Pijaudier-Cabot and A.Benallal. Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum. International Journal of Solids and Structures, 30(13): 1761-1775, 1993.
- [41] A.Pinto Da Costa and A.Seeger. Numerical resolution of cone-constrained eigenvalue problems. *Computational and Applied Mathematics*, 28(1): 37-61, 2009.
- [42] S.Ramtani, Y.Berthaud and J.Mazars. Orthotropic behavior of concrete with directional aspects : modelling and experiments. *Nuclear Engineering and Design*, 133(1): 97-111, February 1992.
- [43] M.Raous, L.Cangémi and M.cocou. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng, 77: 383-399, 1999.
- [44] N-A.Stelmashenko, M-G.Walls, L-M.Brown and Yu-V.Milman. Microindentations on w and mo oriented single crystals : An stm study. Acta Mettalurgica et Materialia, 41(10) : 2855-2865, 1993.
- [45] N.Triantafyllidis and E-C.Aifantis. A gradient approach to localization of deformation : I. hyperelastic materials. J. Elasticity, 16 : 225-237, 1986.