UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON-SORBONNE

Thèse

Présentée pour obtenir le grade de

Docteur es-sciences
Spécialité : Mathématiques Appliquées

présentée par

Mamadou Ibrahima KONÉ

sous le titre

Contrôle optimal et calcul des variations en présence de retard sur l'état.

Thèse soutenue le 15 Mars 2016 devant le jury composé de :

M. ADIMY Mostafa	Rapporteur	Directeur de recherche INRIA-Grenoble-Rhône-Alpes
M. BLOT, Joël	Directeur	Professeur à l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
M. CARLIER Guillaume	Examinateur	Professeur à l'Université Paris-Dauphine
Mme FRANKOWSKA Hélène	Rapporteur	Directeur de recherche Université Pierre et Marie Curie
M. HADDAD Georges	Examinateur	Professeur à l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
M. NAZARET Bruno	Examinateur	Professeur à l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

† université Paris I - Pantheon Sorbonne, laboratoire SAMM.(EA 4543) mamadou.kone@malix.univ-paris1.fr, http://samm.univ-paris1.fr/-KONE-Mamadou-

Abstract

In this thesis, we have attempted to contribute to the optimization of dynamical problems with delay in state space.

We are specifically interested in the viewpoint of Pontryagin who outlined in his book published in 1962 the necessary conditions required for solving such problems. In his work published in 1972, Warga catalogued the possible solutions. Li and al. analyzed the case of periodic control.

We will treat an optimal control problem governed by a Delay Functional Differential Equation. Our method is close to the one of P. Michel on dynamical system governed by Ordinary Differential Equations. The main problem ariving out in this approach is the use of the resolvent of the Delay Functional Differential Equation. We also consider Euler-Lagrange condition in the framework of variational problems with delay.

Keywords : Optimal control, Pontryagin principle, Delay Functional Differential Equations, variational calculus with delay.

Résumé

L'objectif de cette thèse est de contribuer à l'optimisation de problèmes dynamiques en présence de retard. Le point de vue qui nous intéressera est celui de Pontryagin qui dans son ouvrage publié en 1962 a donné les conditions nécessaires d'existence de solutions pour ce type de problème. Warga dans son ouvrage publié en 1972 a fait un catalogue des solutions possible, Li et al. ont étudié le cas de contrôle périodique. Notre méthode de démonstration est directement inspirée de la démonstration de P. Michel du cas des systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires. La principale difficulté pour cet approche est l'utilisation de la résolvante de l'équation différentielle fonctionnelle linéarisée de l'équation différentielle fonctionnelle d'évolution qui gouverne le système.

Nous traitons aussi de condition d'Euler-Lagrange dans le cadre d'un problème de calcul variationnel avec retard.

Mots-clés : Contrôle optimal, principe de Pontryagin, Équation différentielle fonctionnelle avec retard, calcul des variations avec retard.

Remerciements

Je souhaite en premier lieu, exprimer ma gratitude à Joël BLOT, mon directeur de thèse, dont l'expertise et la patience m'ont été d'une grande aide dans mes recherches. J'ai une réelle admiration pour le sérieux de son travail, la clarté et la précision de sa compréhension des mathématiques.

Je remercie Mme Hélène FRANKOWSKA, Directeur de recherche au Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) et M. Mostafa ADIMY, directeur de recherche à l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA) d'avoir acceptés d'être les rapporteurs de ma thèse. Je remercie en particulier les Professeurs Georges HADDAD, Bruno NAZARET et Guillaume CARLIER d'avoir acceptés d'être membres du jury.

Je remercie le Professeur Marie COTTRELL, ancien directeur du laboratoire Statistique, Analyse, Modélisation Multidisciplinaire (EA 4543), de son accueil et pour l'environnement de travail qu'elle a su créée. Je remercie tous les membres du laboratoire pour leur soutien et leur conseils,en particulier le nouveau directeur le professeur Jean-Marc BARDET avec qui la transition se déroule bien, le Docteur Denis PENNEQUIN, dont les qualités humaines et pédagogiques m'ont indéniablement aidé à améliorer la qualité de mes enseignements, le professeur Fabrice ROSSI pour ces conseils et son soutien le long de la préparation de mon manuscrit, le docteur Julien RANDON-FURLING pour ces commentaires lors de la prṕaration de mon exposé. J'ai une pensée particulière pour le docteur Jean-Pierre LECA qui m'a ouvert les portes de l'enseignement à l'université et a été un excellent conseiller pédagogique. Je remercie Isidore NGONGO dont l'amitié, les conseils et le soutien m'ont permis de traverser de nombreuses difficultés.

Je remercie les doctorants du laboratoire SAMM, dont les encouragements permanents ont été d'un grand soutien. J'ai une pensée particulière pour Alexis FAUTH et Omar ABOURA dont l'amitié et la motivation ont été constant.

Je remercie Mme Marie-Lou MARGARIA, Mme Brigitte AUGARDE, Mme Corinne JOBERT-ABOULKER, Mme Astrid MASSIKA du service administratif de l'UFR 27 de l'université Paris 1, pour leur disponibilité et leur aide.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance aux membres du laboratoire SAMM, pour leurs conseils et le personnel administratif pour sa disponibilté et aussi l'équipe des doctorants pour la bonne ambiance qu'ils créent.

J'ai une pensée forte pour mes proches. Je remercie toute la famille KONÉ. Ma gratitude est destinée à tantie Rockya, à mes parents Sidiki et Mahoua qui m'ont supporté et guidé durant toutes ces années. Merci infiniment à ma soeur Ahoua, mes frères Idrissa et Mohamed qui à mon sens ne mesurent pas combien ils me sont chères et combien leur impact est positif dans ma vie. Je remercie mes tantes Aby, Fatou pour leur conseil et leur soutien. Je remercie mes oncles Solomane, Mamadou OUATTARA et Sory SIÉLÉ pour leur soutien et tout ce qu'ils font pour moi. Je ne saurais ne pas citer mon cousin Moumouni ZIBA qui a permis que toute cette aventure puisse prendre forme. Je m'arrête un moment, je me remémore, il y a quelques années de cela j'ai rencontré le Cheick

Moustapha SONTA par un heureux hasard (le hasard est ici la manifestation de ce que nous ne pouvons expliquer), qui m'a présenté Mahoua et Marcellin NGUESSAN, l'une des rencontres les plus importantes, puis j'ai fait la connaissance Siaka DIARRA et Abibou LASSISSI, ils sont, aujourd'hui, une seconde famille pour moi.

Je remercie Salimata DIAKHITÉ pour sa tendresse, sa patience et son soutien lorsque j'avais la tête dans le guidon.

J'ai une pensée particulière pour mes grand-parents qui n'ont malheureusement pas pu voir la fin de ma thèse, mais qui, je l'espère aurait été fiers de moi.

C'est un honneur et une fièrté pour moi de faire partie de cette famille. Je rend grâce au créateur de m'avoir permis de naître dans cette famille.

Je termine ces remerciements en me disant qu'au fond c'est, probablement la partie la plus importante de cette thèse.

Table des matières

Introduction **9**

1 Espaces fonctionnels et questions d'intégration **13**
1.1 Des espaces fonctionnels . . . 13
1.1.1 Notations . . . 13
1.1.2 Définitions . . . 14
1.2 Des dérivations sous intégrales. . . . 23
1.3 Théorème du point fixe de Schauder . . . 26
1.4 Fonctions à variation bornée . . . 27

2 Équations différentielles fonctionnelles générales **45**
2.1 Existence et unicité de solutions locales des problèmes de Cauchy . . . 45
2.1.1 L'énoncé du théorème . . . 45
2.1.2 La démonstration du théorème 2.1.1. . . . 46
2.2 Solutions non prolongeables . . . 54

3 Équations différentielles fonctionnelles linéaires **57**
3.1 Théorème de représentation des fonctions linéaires continues sur $C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ . . . 57
3.1.1 Prolongement de η à $[\sigma,T]\times[\sigma-r-T,T]$ . . . 64
3.1.2 La construction de $k(t,s)$ à partir de $\eta(t,\theta)$ et ses propriétés . . . 68
3.2 Équation intégrale . . . 72
3.3 Équations différentielles fonctionnelles linéaires . . . 82
3.3.1 Résolvante de l'équation linéaire (3.3.3). . . . 91
3.4 L'équation adjointe du problème linéaire et la forme bilinéaire associée . . . 104
3.4.1 Expression matricielle de la solution de (3.4.4). . . . 108
3.4.2 Expression explicite de z. . . . 108

4 Équations différentielles fonctionnelles contrôlées **113**
4.1 Représentation de $t\mapsto L(t)$ continue par morceaux sur $[\sigma,T]$ à valeurs dans $\mathfrak{C}^*$. . . . 113
4.2 Prolongement de η à $[\sigma,T]\times[\sigma-r-T,T]$ dans le cas continu par morceaux . . . 113
4.3 Existence et unicité locales de solutions du problème de Cauchy . . . 114
4.4 Solutions non prolongeables . . . 115
4.5 Problèmes linéaires continus par morceaux . . . 115
4.5.1 Résolvante de l'équation linéaire (4.5.1) . . . 117
4.6 L'équation adjointe du problème linéaire continu par morceaux et la forme bilinéaire associée . . . 118

5 Formulation du problème de contrôle optimal **127**

5.1 Un résultat d'optimisation statique 127
5.2 Variations en aiguilles 128
5.3 Résultats 130

6 Sur le calcul variationnel avec un processus à mémoire 143
6.1 Problème de calcul variationnel 143
6.2 Mise en place du cadre de travail 143
6.3 Théorème de représentation de Riesz 147
6.4 Une variante du lemme fondamental du calcul des variations 148
6.5 Condition d'Euler-Lagrange 151

Introduction

L'objectif de cette thèse est de contribuer à l'optimisation de problèmes dynamiques en présence de retard. C'est-à-dire qu'à chaque date t, non seulement la valeur de la fonction inconnue en t, $x(t)$, intervient mais aussi toutes les valeurs $x(s)$, quand $s \in [t-r, t]$, interviennent.
Le point de vue qui nous intérèssera est celui de Pontryagin [47] qui dans son ouvrage édité en 1962 a donné les conditions nécessaires d'existence de solutions pour ce type de problème. Warga [54] dans son ouvrage édité en 1972 a fait un catalogue des solutions possible, Li et al. [39] ont étudié le cas de contrôle périodique. Seront traités : un problème de **contrôle optimal** gouverné par une équation différentielle fonctionnelle (une classe d'équation différentielle à retard) du point de vue des conditions nécessaires d'optimalité sous forme d'un **principe de Pontryagin** et un problème de **calcul des variations**, là aussi du point de vue des conditions nécessaires d'optimalité sous forme **d'équation d'Euler-Lagrange**.

Dans la théorie des équations différentielles ordinaires et dans la théorie du calcul des variations, il existe **deux cadres basiques** couramment utilisés :

1. le cadre où les fonctions inconnues sont continûment dérivables.
2. le cadre où les fonctions inconnues sont absolument continues.

Les hypothèses de base pour ces deux cadres sont différentes :

1. champs de vecteurs et/ou intégrandes continus avec des conditions de Fréchet-différentiabilité partielle pour le premier cadre
2. champs de vecteurs et/ou intégrandes Lebesgue-mesurables avec des conditions de Lebesgue-intégrabilité partielles (Caratheodory) pour le second ordre.

Dans la théorie du contrôle optimal des problèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires, il existe aussi **deux cadres basiques** couramment utilisés :

1. les fonctions d'état sont continûment dérivables par morceaux (continues) et les fonctions de contrôle sont continues par morceaux.
2. Les fonctions d'état sont absolument continues et les fonctions de contrôle sont Lebesgue-mesurable bornées.

Les hypothèses de base pour ces deux cadres sont différentes :

1. champs de vecteurs et intégrandes continues partiellement Fréchet-différentiable par rapport à la variable d'état.
2. champs de vecteurs et intégrandes Lebesgue-mesurables avec des conditions de Lebesgue-intégrabilité partielles.

Pour le contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations différentielles fonctionnelles, le second cadre (absolument continue) est traité notamment par H. T. Banks [6], [7] qui utilise une méthode qui est proche de celle de Hale et Verduyn Lunel mais il change la notion de solution ;

il utilise les fonctions absolument continues qui satisfont l'équation Lebesgue presque partout et la fonction initiale est uniquement à variation bornée.

Ici nous traitons du premier cadre, celui des fonctions d'état continûment dérivables par morceaux et des fonctions continues par morceaux. Notre méthode de démonstration est directement inspirée de la démonstration de P. Michel [43] du cas des systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires. La principale difficulté pour cet approche est l'utilisation de la **résolvante** de **l'équation différentielle fonctionnelle linéarisée** de l'équation différentielle fonctionnelle d'évolution qui gouverne le système.

Naito [45] et Hino [32] se sont intéressés au cas d'équations différentielles fonctionnelles retardées avec un retard infini et Adimy [1] qui traite d'équation différentielle fonctionnelle autonome par des techniques de semi-groupes.

Elsgolc [24] a initié un calcul des variations pour les systèmes à retard et une théorie du contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations différentielles à retard, après lui Hughes [33] et Sabbagh [50] ont aussi travaillé sur ces sujets. Blot et Ayachi [5] ont développé des méthodes fonctionnelles et variationnelles pour l'existence des solutions presque-périodiques des équations différentielles ordinaires à retard, puis Ayachi [4] a développé des méthodes variationnelles pour la résolution d'équations différentielles fonctionnelles du second ordre avec un retard infini.

Pour l'étude de l'équation différentielle linéaire appelée "équation adjointe" nous nous sommes inspirés du travail de McClamroch [42].

Maintenant nous décrivons le contenu de chacun des chapitres.

Le chapitre 1 contient tout d'abord la description des espaces fonctionnels qui seront utilisés : espaces de fonctions continues, de fonctions bornées et continues à gauche, de fonctions bornées et continues à droite, de fonctions réglées, de fonctions Riemann-intégrables, de fonctions Lebesgue-intégrables, de fonctions continues par morceaux, de fonctions continûment dérivables par morceaux, de fonctions à variations bornées.
Il contient un rappel sur les différents énoncés du théorème de point fixe de Schauder.
Il contient des énoncés sur des passages à la limite à gauche ou à droite pour des fonctions définies par des intégrales et des résultats sur les dérivations à gauche ou à droite de fonctions définies par des intégrales.
Il contient un développement utile sur la fonction à variation bornée à paramètre qui représente des opérateurs linéaires continus non autonomes jouant un rôle crucial dans les questions de résolution d'équations différentielles fonctionnelles qui nous intéresseront.

Le chapitre 2 contient des rappels sur les résultats de base de la théorie des équations différentielles fonctionnelles : existence et unicité des solutions des problèmes de Cauchy, solutions non prolongeables. Par rapport au livre de Hale et Verduyn Lunel [29], nous avons seulement précisé quelques points de démonstration et précisé certaines hypothèses.

Dans le chapitre 3 nous traitons des équations différentielles fonctionnelles linéaires non autonomes. Dans un premier temps, en utilisant le théorème de représentation de Riesz du dual d'un espace de fonctions continues par des intégrales de Lebesgue-Stieltjès via des fonctions à variations bornées, nous décrivons le plus possible les propriétés de la matrice à variation bornée qui représente le champ de vecteurs linéaires en **utilisant comme seule hypothèse la continuité du champ de vecteurs**.

Pour la construction de la résolvante d'une équation différentielle fonctionnelle linéaire, nous

utilisons (comme Hale et Verduyn Lunel) la résolution d'une équation intégrale, mais sur un espace fonctionnel différent de celui utilisé par Hale et Verduyn Lunel.

La description précise des propriétés de la matrice à variation bornée qui représente le champ de vecteurs permet de décrire et de justifier les propriétés des différents termes de la formule de la résolvante. Ceci permet de démontrer rigoureusement la formule (usuelle) de la résolvante et d'établir une liste précise de ses propriétés dans le cadre des solutions continûment différentiables sans autre hypothèse que la continuité du champ de vecteurs.

Nous préciserons aussi les propriétés de l'équation différentielle fonctionnelle linéaire appelée "équation adjointe".

Dans le chapitre 4 nous traitons d'équations différentielles fonctionnelles retardées non autonomes. Le contrôle du système dynamique est ici une application continue par morceaux, cela entraîne des discontinuités en nombre fini dans le comportement du système dynamique. En nous appuyant sur les résultats du chapitre 2, nous énonçons les résultats d'existence et d'unicité locales de solution du problème de Cauchy, puis à l'aide du chapitre 3 en utilisant une forme adaptée du théorème de représentation de Riesz nous décrivons les propriétés de la matrice à variation bornée en utilisant comme hypothèse la continuité par morceaux du champs de vecteurs. Nous établissons une liste des propriétés de la formule de la résolvante dans le cadre des solutions continûment différentiables par morceaux. Enfin nous étendons au cas continu par morceaux les propriétés de l'équation fonctionnelle linéaire appelée "équation adjointe" explicitée dans le chapitre 4.

Dans le chapitre 5 nous établissons un principe de Pontryagin pour un problème de contrôle optimal, avec un critère de Mayer, d'un système gouverné par une équation différentielle fonctionnelle. La démonstration donnée ici est une adaptation de la démonstration réalisée par P. Michel dans le cas des systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires. Cette méthode consiste à se ramener à des problèmes d'optimisation statique en dimension finie. Une fois fixé un échantillon fini de dates, les seules inconnues sont la largeur des "aiguilles" de la variable de contrôle ; ces aiguilles étant des variations autour de la fonction de contrôle optimal. La principale difficulté conceptuelle et technique pour cette généralisation est le statut de la fonction adjointe (le multiplicateur dynamique). On obtient que le contrôle optimal maximise le hamiltonien, à chaque date, parmi toutes les valeurs possibles du contrôle. Pour l'équation dite adjointe, le hamiltonien n'apparaît pas. C'est **la matrice à variation bornée à paramètre** qui représente la différentielle partielle du champ de vecteurs (par rapport à la variable d'état retardée) qui permet de formuler cette équation adjointe. L'équation adjointe formulée ressemble à celle de Banks [7] et présente des analogies avec celle formulée par Colonius [22] pour les problèmes périodiques des systèmes gouvernés par des équations différentielles fonctionnelles. Banks et Colonius travaillent dans un cadre de fonctions d'état absolument continues et de fonctions de contrôle Lebesgue-mesurables bornées.

Dans le chapitre 6 nous établissons une équation que nous qualifions d'Euler-Lagrange pour un problème de Calcul des variations avec un critère sous forme intégrale où la fonction inconnue apparaît avec le retard sur un segment. Les fonctions inconnues sont continûment dérivables. Comme dans le cadre usuel du Calcul des variations, en utilisant les opérateurs de Nemytskii (encore appelés opérateurs de superposition) on peut traduire le fait qu'une fonction est un point critique de la fonctionnelle-critère par une condition, sous forme intégrale, qui utilise les différentielles partielles de l'intégrande du critère. La difficulté est alors de traduire cette condition en une formule valable à chaque date, sans intégrale. Pour réaliser ceci, c'est la **fonction à variation bornée à paramètre**, qui représente la différentielle partielle de l'intégrande du critère par rapport à la position (retardée),

qui va jouer le rôle essentiel.

Chapitre 1

Espaces fonctionnels et questions d'intégration

1.1 Des espaces fonctionnels

1.1.1 Notations

On considère :

— $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
— $a, b, T \in]0; +\infty[\,; n, m, p \in \mathbb{N}^*$.
— $S := [a, b], I = [0, T]$ des intervalles fermés et bornés de $\mathbb{R}$.
— $\mathfrak{S}$:= l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$.
— $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.
— $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une norme $|\cdot|$.
— Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
— U est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^m$.
— E est un espace vectoriel de dimension finie.
— F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.
— $\mathcal{B}(\Omega)$ la tribu de Borel de Ω.
— $\overline{\mathcal{B}}(\Omega)$ la tribu de Lebesgue de Ω.
— $B(S, E)$:= l'espace de Banach des applications bornées sur S à valeurs dans E muni de la norme de la convergence uniforme.
— $R(S, E)$:= l'espace des fonctions réglées sur S à valeurs dans E.
— $AC(S, E)$:= l'espace des fonctions absolument continues définies sur S à valeurs dans E.
— $C^0(S, E)$:= l'espace de Banach des applications continues sur S à valeurs dans E muni de la norme de la convergence uniforme.
— $PC^0(S, E)$:= l'espace de Banach des applications continues par morceaux sur S à valeurs dans E muni de la norme de la convergence uniforme.
— $C_b^0(S, E)$:= l'espace des applications continues et bornées sur S à valeurs dans E.
— $C_g^0(S, E)$:= l'espace des fonctions continues à gauche sur S à valeurs dans E. De plus on définit $BC_g^0(S, E) := B(S, E) \cap C_g^0(S, E)$ et $RC_g^0(S, E) := R(S, E) \cap C_g^0(S, E)$. Muni de la norme de la convergence uniforme $BC_g^0(S, E)$ et $RC_g^0(S, E)$ sont des espaces de Banach.
— $C_d^0(S, E)$:= l'espace des fonctions continues à droite sur S à valeurs dans E. De plus on définit $BC_d^0(S, E) := B(S, E) \cap C_d^0(S, E)$ et $RC_d^0(S, E) := R(S, E) \cap C_d^0(S, E)$. Muni de la norme

de la convergence uniforme $BC^0_d(S,E)$ et $RC^0_d(S,E)$ sont des espaces de Banach.
- $C^1(S,E)$:= l'espace des applications dérivables sur S, à dérivées continues, à valeurs dans E.
- $PC^1(S,E)$:= l'ensemble des fonctions continues de S dans E, qui sont dérivables sauf au plus en un nombre fini de points, et dont les dérivées aux points de discontinuité ont des limites à gauche et à droite.
- $UC(I,E)$ ensemble des fonctions uniformément continues définie sur I à valeurs dans E.
- $\mathfrak{C} := C^0([-r,0];\mathbb{R}^n)$ muni de la norme de la convergence uniforme.
- $\forall(\sigma,\phi),(\alpha,\psi) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{C}$ on définit la distance sur $\mathbb{R}\times\mathfrak{C}$ par $d((\sigma,\phi),(\alpha,\psi)) = \max\{|\sigma-\alpha|, \|\phi-\psi\|_{\mathfrak{C}}\}$.
- $RI(S,E)$:= l'espace des applications Riemann intégrables sur S à valeurs dans E muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach. On a $RI(S,E) \subset B(S,E)$, c'est aussi une algèbre quand $E = \mathbb{R}$.
- La norme de $\phi \in C^0([a,b];\mathbb{R}^d)$ est définie par $\|\phi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{a\le\theta\le b} |\phi(\theta)|$.
- λ_n est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.
- $L^1_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ est l'espace des (classes d') applications Lebesgue-intégrables sur tout compact de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, quand Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- $L^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ est l'espace des (classes d') applications Lebesgue-intégrables définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
- $L^p(\Omega,\mathbb{R}^n) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}^n / f$ mesurable et $|f|^p \in L^1(\Omega,\mathbb{R}^n\}$.
- $L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}^n / f$ mesurable et $\exists M > 0$ tel que $|f| \le M$ pp. dans $\Omega\}$.
- $\mathcal{L}(E,F)$ est l'espace des applications linéaires continues définies sur l'espace vectoriel normé E et à valeurs dans l'espace vectoriel normé F.
- $\mathcal{L}^0(X,Y)$ est l'ensemble des applications Lebesgue-mesurables définies sur X à valeurs dans Y, où X et Y sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ munis de la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.
- On note $Adh(X)$, l'adhérence topologique de X.
- $BV(S,E)$ est l'ensemble des fonctions à variation bornée de S dans E.
- $NBV(S,E)$ est l'ensemble des fonctions à variation bornée normalisée de S dans E.

□

1.1.2 Définitions

Notation 1 (Limite à gauche et à droite d'une fonction)**.** *Soit $f : S \longrightarrow E$ une application.*
- *Pour tout $t \in [a,b[$, $f(t+) := \lim_{s\to t+} f(s) = \lim_{s\to t, s>t} f(s)$ est, lorsqu'elle existe, la limite à droite de f en t.*
- *Pour tout $t \in]a,b]$, $f(t-) := \lim_{s\to t-} f(s) = \lim_{s\to t, s<t} f(s)$ est, lorsqu'elle existe, la limite à gauche de f en t.*

Lorsque $f(t+)$ (respectivement $f(t-)$) existe pour $t \in [a,b[$ (respectivement $t \in]a,b]$),
On définit la fonction $f+ : [a,b] \longrightarrow E$ (respectivement $f- : [a,b] \longrightarrow E$) en posant $\forall t \in [a,b[$ $(f+)(t) = f(t+)$ et $(f+)(b) = f(b)$ (respectivement $\forall t \in]a,b]$ $(f-)(t) = f(t-)$ et $(f-)(a) = f(a)$).

Définition 1.1.1 (Fonction réglée)**.** *Soit $f : S \longrightarrow E$. L'application f est* réglée *quand, $\forall t \in [a,b[$, $f(t+)$ et, $\forall t \in]a,b]$, $f(t-)$ existent dans E.*

Muni de la norme de la convergence uniforme, l'espace des fonctions réglées est un espace de Banach [23] et de plus $R(S,E) \subset RI(S,E)$ où $RI(S,E)$ est l'espace des applications Riemann intégrables sur S à valeurs dans E.

Définition 1.1.2 (Applications continues par morceaux)**.** *Une application $\phi : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) est* continue par morceaux *s'il existe $t_0, t_1, \ldots, t_p$ avec $0 = t_0 < \cdots < t_p = T$ tel que :*

- *$\forall i = 0, \ldots, p-1$, ψ est continue sur $]t_{i-1}, t_i[$,*
- *$\forall i = 0, \ldots, p$, $\psi(t_i-) := \lim\limits_{s \to t_i, s<t_i} \psi(s)$ existe,*
- *$\forall i = 0, \ldots, p$, $\psi(t_i+) := \lim\limits_{s \to t_i, s>t_i} \psi(s)$ existe.*

Notation 2 (Dérivées)**.** *Soit f une application d'une variable réelle.*
On note $f'_d(t)$ (respectivement $f'_g(t)$) la dérivée à droite de f en t (respectivement la dérivée à gauche de f en t).
Quand $\Phi : S \times A \longrightarrow F$ où A est un sous-ensemble de l'espace normé E.
On note $\frac{\partial \Phi}{\partial t+}(t,a)$ (respectivement $\frac{\partial \Phi}{\partial t-}(t,a)$) la dérivée à droite (respectivement à gauche) de l'application partielle $\Phi(\cdot, a)$ en t.

Définition 1.1.3 (Applications de classe C^1 par morceaux)**.** *Une application $f : [0,T] \times \mathfrak{C} \times U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est* de classe C^1 par morceaux *si :*

- *f est continue sur $[0,T] \times \mathfrak{C} \times U$.*
- *f est différentiable par rapport à la seconde variable et $D_2 f$ est continue par morceaux sur $[0,T] \times \mathfrak{C} \times U$*

Définition 1.1.4 (Fonctions à mémoire)**.** *Si $a \geqslant 0$ et $x \in C^0([-r,a];\mathbb{R}^n)$ alors, $\forall t \in [0,a]$, on définit $x_t \in \mathfrak{C}$ par $x_t(\theta) = x(t+\theta) \quad$ pour $\quad \theta \in [-r,0]$.*

Définition 1.1.5 (Équations différentielles fonctionnelles)**.** *Si D est un sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathfrak{C}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, on définit* l'équation différentielle fonctionnelle *:*

$$x'(t) = f(t, x_t). \tag{1.1.1}$$

Une application x est une solution *de (1.1.1) sur $[-r,a]$ si :*

- *$x \in C^0([-r,a],\mathbb{R}^n)$ et $x \in C^1([0,a],\mathbb{R}^n)$.*
- *$(t, x_t) \in D$ et x satisfait l'équation (1.1.1) pour tout $t \in [0,a]$.*

Définition 1.1.6 (Équations différentielles fonctionnelles contrôlées)**.** *Si D est un sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathfrak{C} \times \mathbb{R}^m$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue.*
On définira l'équation différentielle fonctionnelle contrôlée

$$x'(t) = f(t, x_t, u(t)). \tag{1.1.2}$$

Une application x est une solution *de (1.1.2) sur $[-r,a]$ si :*

— $x \in PC^0([-r, a], \mathbb{R}^n)$ *et est* PC^1 *sur* $[0, a]$.
— $(t, x_t, u(t)) \in D$ *et* $(x_t, u(t))$ *satisfait l'équation* (1.1.2), *pour tout* $t \in [0, a]$.

Pour $\sigma \in \mathbb{R}$, $\phi \in \mathfrak{C}$, *on dira que* $x(\sigma, \phi, u, f)$ *est une* solution *de l'équation* (1.1.2) *de valeur initiale* ϕ *en* σ, *s'il existe* $a > 0$ *tel que* $x(\sigma, \phi, u, f)$ *vérifie l'équation* (1.1.2) *sur* $[\sigma, \sigma + a[$ *et* $x_\sigma(\cdot, \phi, u, f) = \phi$.

On dit que l'équation (1.1.2) *est* linéaire *si* $f(t, \phi) = L(t) \cdot \phi + h(t)$ *où* $L(t) \cdot \phi$ *est linéaire en* ϕ, linéaire homogène *si* $h \equiv 0$ *et* linéaire non homogène *si* $h \neq 0$. *L'équation* (1.1.2) *est* autonome *si* $f(t, \phi, u(t)) = g(\phi, u(t))$ *où* g *ne dépend pas de* t.
Notons que l'application $t \mapsto f(t, \phi, u(t))$ *est continue par morceaux.*

Lemme 1.1.1. *Si* $x \in C^0([\sigma - r, \sigma + \alpha], \mathbb{R}^n)$ *alors* $[t \mapsto x_t]$ *est continue de* $[\sigma, \sigma + \alpha]$ *dans* $\mathfrak{C}$.

Démonstration. Puisque x est continue sur $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$, par le théorème de Heine ([36], p.109), x est uniformément continue donc

$$\forall \epsilon < 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall t, \tau \in [\sigma, \sigma + \alpha], |t - \tau| < \delta_\epsilon \Longrightarrow |x(t) - x(\tau)| < \epsilon.$$

Fixons $\tau \in [\sigma, \sigma + \alpha], \epsilon > 0$, et prenons $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$ tel que $|t - \tau| < \delta_\epsilon$. Alors :

$$\forall \theta \in [-r, 0], |(t + \theta) - (\tau + \theta)| = |t - \tau| < \delta_\epsilon$$

donc $|x(t + \theta) - x(\tau + \theta)| < \epsilon$, c.-à-d. $|x_t(\theta) - x_\tau(\theta)| < \epsilon$, donc $||x_t - x_\tau||_{\mathfrak{C}} < \epsilon$. □

Lemme 1.1.2. *Soit* $\sigma \in \mathbb{R}$, $\phi \in \mathfrak{C}$. *On suppose que* $(t, \phi) \mapsto f(t, \phi)$ *est continue de* $[\sigma, \sigma + a] \times \mathfrak{C}$ *dans* $\mathbb{R}^d$.
Alors trouver une solution de l'équation (1.1.1) *passant par* (σ, ϕ) *est équivalent à résoudre l'équation intégrale avec condition initiale :*

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & \phi(0) + \displaystyle\int_\sigma^t f(s, x_s) ds \quad \text{si} \quad t \geq \sigma \\ x_\sigma & = & \phi. \end{array}\right\} \tag{1.1.3}$$

Démonstration. Supposons que x soit une solution de $x'(t) = f(t, x_t)$ passant par ϕ en σ . On a $x_\sigma = \phi$.

De plus x étant continue sur $[\sigma - r, \sigma + a]$, par le lemme précédent, l'application $[t \mapsto x_t]$ est une fonction continue sur $[\sigma, \sigma + a[$, donc l'application $[t \mapsto f(t, x_t)]$ est une fonction continue, comme composée de fonctions continues $(t \mapsto (t, x_t)$ et $(t, \phi) \mapsto f(t, \phi))$, qui vérifie $x'(t) = f(t, x_t)$.
Par intégration on obtient :

$$\int_\sigma^t x'(s) ds = \int_\sigma^t f(s, x_s) \text{ si } t \geq \sigma.$$

Comme x' est continue, x est de classe C^1 sur $[\sigma, \sigma + a]$ donc

$$x(t) - x(\sigma) = \int_\sigma^t x'(s) ds.$$

Ainsi on a :

$$x(t) - x(\sigma) = \int_\sigma^t f(s, x_s)ds \Rightarrow$$
$$x(t) = x(\sigma) + \int_\sigma^t f(s, x_s)ds \Rightarrow$$
$$x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s)ds,$$

ce qui est l'équation (1.1.3) .

Réciproquement supposons que x satisfasse (1.1.3). La fonction $[s \mapsto f(s, x_s)]$ étant continue, comme composée de fonctions continues, son intégrale indéfinie est dérivable et a pour dérivée $f(s, x_s)$; x est dérivable et on a $x'(t) = f(t, x_t)$. On a bien l'équation (1.1.1). □

Les résultats suivants sont issus de [10].

Proposition 1.1.1. *Soit $\phi : [a, b] \longrightarrow E$. On suppose que*

$$(\forall x \in [a, b[,\ \phi(x+)\ \ \textit{existe dans } E)$$

Alors, en notant

$$(\phi+)(x) := \phi(x+),\ \ \textit{on a } (\phi+) \in C_d^0([a, b], E).$$

Démonstration. fixons $x \in [a, b[$, Alors, par hypothèse, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall y, x < y < x + \delta_\epsilon \Rightarrow \|\phi(x+) - \phi(y)\| \leq \epsilon. \tag{1.1.4}$$

Fixons $\epsilon > 0$. Soit y, z tel que $x < y < z < x+\delta_\epsilon$ alors, par l'équation (1.1.4) on a : $\|\phi(x+)-\phi(z)\| \leq \epsilon$. Faisons tendre z vers $y+$ alors on a : $\lim\limits_{z\to y+} \|\phi(x+) - \phi(z)\| \leq \epsilon$.
Or $\lim\limits_{z\to y+} \|\phi(x+) - \phi(z)\| = \|\phi(x+) - \lim\limits_{z\to y+} \phi(z)\|$ car $\|\cdot\|$ est continue, donc $\|\phi(x+) - \phi(y+)\| \leq \epsilon$.
On a prouvé :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, x < y < x + \delta_\epsilon \Rightarrow \|\phi(x+) - \phi(y+)\| \leq \epsilon;$$

donc $(\phi+)$ est continue à droite en x. □

Proposition 1.1.2. *Soit $\phi : [a, b] \longrightarrow E$. On suppose que :*
(i) *$\forall x \in [a, b[,\ \phi(x+)$ existe dans E.*
(ii) *ϕ bornée sur $[a, b]$.*
Alors $(\phi+)$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, et $(\phi+) = \phi$ Lebesgue-presque partout sur $[a, b]$.

Démonstration. D'après la proposition 1.1.1, $(\phi+) \in C_d^0([a, b], E)$. Avec (**ii**), cf [10], l'ensemble des points de discontinuité de $(\phi+)$ est au plus dénombrable, donc est Lebesgue-négligeable, donc, d'après un théorème de Lebesgue, $(\phi+)$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.
Toujours d'après [11], $\{x \in [a, b[: (\phi+)(x) \neq \phi(x)\}$ est au plus dénombrable, car inclus dans l'ensemble des points de $[a, b[$ où ϕ est discontinue qui est lui-même au plus dénombrable, donc Lebesgue-négligeable, donc $(\phi+) = \phi$ Lebesgue-presque partout sur $[a, b]$. □

Proposition 1.1.3. *Soit $\phi \in C_g^0([a,b],E)$. Alors, $\forall x \in]a,b]$, $\lim_{y\to x-}(\phi+)(y) = \phi(x)$.*

Démonstration. On fixe $x \in]a,b]$. Puisque ϕ est continue à gauche en x, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall y,\ x - \delta_\epsilon < y < x \Rightarrow \|\phi(y) - \phi(x)\| \leq \epsilon.$$

Fixons $\epsilon > 0$ et $y \in]x - \delta_\epsilon, x[$. Alors $\forall z \in]y, x[$, on a $z \in]x - \delta_\epsilon, x[\Rightarrow \|\phi(z) - \phi(x)\| \leq \epsilon$. Faisons $z \to y+$, alors, puisque $\|\cdot\|$ est continue, on obtient $\|\phi(y+) - \phi(x)\| \leq \epsilon$.
Ainsi on a prouvé :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall y,\ x - \delta_\epsilon < y < x \Rightarrow \|\phi(y+) - \phi(x)\| \leq \epsilon$$

c.-à-d. $\lim_{y\to x-} \phi(y+) = \phi(x)$. □

Conséquence 1.1.1. *Si $(\phi+)$ est continue, alors $(\phi+)$ est continue à gauche, donc, avec la proposition 1.1.3, $(\phi+) = \phi$, et donc ϕ est continue.*
Ainsi $(\phi+) \in C^0([a,b],E) \Rightarrow \phi \in C^0([a,b],E)$ et en contraposant : $\phi \notin C^0([a,b],E) \Rightarrow (\phi+) \notin C^0([a,b],E)$.

Théorème 1.1.1. *Soit X un ensemble et Y un espace de Banach.*
$B(X,Y) := \{f : X \longrightarrow Y : f$ bornée $\}$. Alors $(B(X,Y), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, où $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} \|f(x)\|$.

Démonstration. On vérifie aisément que $B(X,Y)$ est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $B(X,Y)$. Soit $(f_n)_n \in B(X,Y)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, c.-à-d. :

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ N_\epsilon, \forall p,q \in \mathbb{N}, p,q \geq N_\epsilon \Rightarrow \|f_p - f_q\|_\infty \leq \epsilon.$$

$\forall x \in X,\ \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p - f_q\|_\infty \leq \epsilon$, de quoi on déduit que : $\forall x \in X,\ (f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy de Y. Puisque Y est complet,

$$\forall x \in X,\ \exists!\ f(x) \in Y \text{ tel que } f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Soit $\epsilon > 0$, si $p,q \geq N_\epsilon$ alors $\forall x \in X,\ \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \epsilon$, et en faisant $q \to +\infty$ on obtient $\|f_p(x) - f(x)\| \leq \epsilon$.
Ainsi : $\forall \epsilon > 0, \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ p \geq N_\epsilon \Rightarrow \forall x \in X,\ \|f_p(x) - f(x)\| \leq \epsilon \Rightarrow \|f_p - f\|_\infty \leq \epsilon$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0. \tag{1.1.5}$$

$$\forall x \in X,\ \|f(x)\| \leq \|f_n(x) - f(x)\| + \|f_n(x)\| \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty < +\infty$$

donc $f \in B(X,Y)$, et (1.1.5) prouve la complétude. □

Remarque 1.1.1. *Lorsque $Y = \mathbb{R}$, ce résultat est établi dans [3], page 23. La démonstration donnée ici est très semblable.*

Théorème 1.1.2. *Soit $S = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, Y un espace de Banach et $BC_d^0(S, Y) := \{f : S \longrightarrow Y : f$ est bornée et continue à droite sur $S\}$. Alors $BC_d^0(S, Y), \|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.*

Démonstration. On vérifie que $BC_d^0(S, Y)$ est un espace vectoriel comme sous-espace vectoriel de $B(S, Y)$, et que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $BC_d^0(S, Y)$. Pour la complétude, soit $(\phi_n)_n$ une suite de Cauchy de $BC_d^0(S, Y)$. Puisque $B(S, Y)$ est complet et que $(\phi_n)_n$ est aussi une suite de Cauchy de $B(S, Y)$, $\exists \phi \in B(S, Y)$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\phi_n - \phi\| = 0$. Soit $t \in [a, b], t_1 \in [a, b]$ tel que $t_1 > t$, alors

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\phi(t) - \phi(t_1)\| & \leq & \|\phi(t) - \phi_n(t)\| + \|\phi_n(t) - \phi_n(t_1)\| + \|\phi_n(t_1) - \phi(t_1)\| \\ & \leq & 2\|\phi - \phi_n\|_\infty + \|\phi_n(t) - \phi_n(t_1)\| \end{array}$$

Soit $\epsilon > 0$ et $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\|\phi - \phi_{n_\epsilon}\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}$. Alors $\|\phi(t) - \phi(t_1)\| \leq \epsilon + \|\phi_{n_\epsilon}(t) - \phi_{n_\epsilon}(t_1)\|_\infty$, et donc

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & \liminf\limits_{t_1\to t+} \|\phi(t) - \phi(t_1)\| \leq \limsup\limits_{t_1\to t+} \|\phi(t) - \phi(t_1)\| \\ 0 & \leq & \epsilon + \lim\limits_{t_1\to t+} \|\phi_{n_\epsilon}(t) - \phi_{n_\epsilon}(t_1)\| \end{array}$$

comme $\lim\limits_{t_1\to t+} \|\phi_{n_\epsilon}(t) - \phi_{n_\epsilon}(t_1)\| = 0$, donc

$$\forall \epsilon > 0, 0 \leq \liminf_{t_1\to t+} \|\phi(t) - \phi(t_1)\| \leq \limsup_{t_1\to t+} \|\phi(t) - \phi(t_1)\| \leq \epsilon$$

$$\text{ainsi} \quad \lim_{t_1\to t+} \|\phi(t) - \phi(t_1)\| = 0.$$

Donc ϕ est continue à droite sur S, donc $\phi \in BC_d^0(S, Y)$. □

Proposition 1.1.4. *Soit E un espace de Banach et $g \in R(S, E)$.*
Les assertions suivantes sont vérifiées.

- **(i)** *$g+ \in R(S, E) \cap C_d^0(S, E)$ et $(g+)(t-) = (g-)(t)$ pour tout $t \in]a, b]$.*
- **(ii)** *$g- \in R(S, E) \cap C_g^0(S, E)$ et $(g-)(t+) = (g+)(t)$ pour tout $t \in [a, b[$.*

Démonstration. Comme g est réglée, l'existence de $g(t-)$ entraîne :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta_{t,\epsilon} > 0, \forall s, t - \delta \leq s < t \Longrightarrow \|g(t-) - g(s)\| \leq \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$. Si $t - \delta \leq s < r < t$ nous avons $\|g(t-) - g(r)\| \leq \epsilon$. Prenons $r \to s+$, nous obtenons $\|g(t-) - g(s+)\| \leq \epsilon$. Alors nous avons : $t - \delta \leq s < t \Longrightarrow \|g(t-) - g(s+)\| \leq \epsilon$, i.e. $\lim\limits_{s\to t-} \|g(t-) - g(s+)\| = 0$, de plus $\lim\limits_{s\to t-} (g+)(s) = g(t-)$. Nous avons prouvé $(g+)(t-) = g(t-)$.

La définition de $g(t+)$ donne

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta^1 = \delta^1_{t,\epsilon} > 0, \forall s, t - \delta \leq s < t \Longrightarrow \|g(t+) - g(s)\| \leq \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$. Si $t < s < r \leq t + \delta^1$ nous avons $\|g(t+) - g(r)\| \leq \epsilon$. Et ainsi nous avons $r \to s+ \Longrightarrow \|g(t+) - g(s+)\| \leq \epsilon$. Et ainsi nous avons

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta^1 = \delta^1_{t,\epsilon} > 0, \forall s, t - \delta \leq s < t \Longrightarrow \|g(t+) - g(s+)\| \leq \epsilon,$$

i.e. $\lim\limits_{s\to t+} (g+)(s) = (g+)(t)$. Ainsi nous avons prouvé $g+ \in C_d^0(S, E)$. Nous avons prouvé (**i**). La preuve de (**ii**) est similaire. □

Proposition 1.1.5. *E est un espace vectoriel de dimension finie. Soit $a < b$.*
Soit $M : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow E$ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

(α) $\forall s \in [a,b]$, $M(\cdot, s) \in R([a,b], E)$.

(β) $\forall t \in [a,b]$, $M(t, \cdot) \in RI([a,b], E)$.

(γ) $\exists m \in \mathbb{R}$, $\forall (t,s) \in [a,b] \times [a,b]$, $\|M(t,s)\| \leq m$.

Nous définissons la fonction $F : [a,b] \longrightarrow E$ en posant $F(t) := \int_a^t M(t,s)ds$ pour tout $t \in [a,b]$.
Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) $\forall t \in [a,b]$, $M(t+, \cdot) \in \mathcal{L}^1([a,b], E; \lambda_1)$ *et nous avons* $F(t+) := \int_{[a,t]} M(t+, s)d\lambda_1(s)$.

(ii) $\forall t \in [a,b]$, $M(t-, \cdot) \in \mathcal{L}^1([a,b], E; \lambda_1)$ *et nous avons* $F(t-) := \int_{[a,t]} M(t-, s)d\lambda_1(s)$.

Démonstration. **(i)** Soit $t \in]a,b[$.
Comme $RI([a,b], E) \subset \mathcal{L}^1([a,b], E; \lambda_1)$ et $m \in \mathcal{L}^1([a;b], E; \lambda_1)$, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue on obtient que $M(t+, \cdot) \in \mathcal{L}^1([a,b], E; \lambda_1)$. Pour tout $h > 0$ suffisamment petit, nous avons
$F(t+h) = \int_a^t M(t+h, s)ds + \int_t^{t+h} M(t+h, s)ds$. Comme $\| \int_t^{t+h} M(t+h, s)ds\| \leq h.m$ nous obtenons que $\lim_{h \to 0+} \int_t^{t+h} M(t+h, s)ds = 0$, et en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous obtenons
$\lim_{h \to 0+} \int_a^t M(t+h, s)ds = \int_{[a,t]} M(t+, s)d\lambda_1(s)$. Et ainsi (**i**) est prouvée. Le raisonnement est similaire pour (**ii**). □

Proposition 1.1.6. *Soit $S = [a,b]$. Soit $f_n : S \longrightarrow \mathbb{R}^d, f : S \longrightarrow \mathbb{R}^d$, tel que f_n+ et $f+$ existent partout et $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \|(f_n+) - (f+)\| = 0.$$

Démonstration. Par hypothèse, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\epsilon \Rightarrow \forall x \in S, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon. \tag{1.1.6}$$

Fixons $\epsilon > 0$; soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\epsilon$, soit $t \in [a,b[$, alors $\forall \delta \in]a, b-t[$, on a : $\|f_n(t+\delta) - f(t+\delta)\| \leq \epsilon$.
Fixons $t \in [a,b[$, alors en utilisant la conservation des inégalités larges par passage à la limite, on a :

$$\|f_n(t+) - f(t+)\| = \lim_{\delta \to 0^+} \|f_n(t+\delta) - f(t+\delta)\| \leq \epsilon.$$

On a prouvé :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\epsilon \Rightarrow \forall t \in S, \|(f_n+)(t) - (f+)(t)\| \leq \epsilon$$

donc : $\lim_{n \to +\infty} \|(f_n+) - (f+)\|_\infty = 0$ □

Proposition 1.1.7. *$(RC_d^0(S,E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach et $(RC_g^0(S,E), \|\cdot\|_\infty)$ l'est aussi.*

Démonstration. On a déjà vu que $(BC_d^0(S,E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. Il suffit de prouver que $(RC_d^0(S,E), \|\cdot\|_\infty)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(BC_d^0(S,E), \|\cdot\|_\infty)$.
Si $f \in R(S,E)$ alors $\exists (e_n)_n$ suite de fonctions en escalier de S dans E tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|e_n - f\|_\infty = 0$.
Toute fonction en escalier est bornée et $(B(S,E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, donc $f \in B(S,E)$.
On a prouvé :

$$RC_d^0(S,E) \subset BC_d^0(S,E). \tag{1.1.7}$$

Par ailleurs, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (RC_d^0(S,E), \|\cdot\|_\infty)^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, alors elle est aussi une suite de Cauchy à valeurs dans $(BC_d^0(S,E), \|\cdot\|_\infty)$. Donc

$$\exists f \in BC_d^0(S,E) \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

$\forall n \in \mathbb{N}_*$, $\exists e_n$ en escalier de S dans E tel que $\|f_n - e_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}_*$, $\|e_n - f\|_\infty \leq \|e_n - f_n\| + \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n} + \|f_n - f\|_\infty \to 0 \quad (n \to +\infty)$
donc $f \in RC_d^0(S,E)$. □

Lemme 1.1.3. *Soit I et J deux intervalles fermés de $\mathbb{R}$.*
Si $f \in C^1(I\times J, E)$ et si $g \in C^0(I, BV(J,E))$, alors le produit $fg \in C^0(I, BV(J,E))$.

Démonstration. Soit $p = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathfrak{S}_J$ et $t \in I$, on a alors :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} \|f(t,x_i)g(t,x_i) - f(t_1,x_i)g(t_1,x_i) - f(t,x_{i+1})g(t,x_{i+1}) + f(t_1,x_{i+1})g(t_1,x_{i+1})\| \\
&\qquad = \sum_{i=0}^{n} \|f(t,x_i)g(t,x_i) - f(t,x_i)g(t,x_{i+1}) + f(t,x_i)g(t,x_{i+1}) - f(t_1,x_i)g(t_1,x_i) \\
&\qquad + f(t_1,x_i)g(t_1,x_{i+1}) - f(t_1,x_i)g(t_1,x_{i+1}) - f(t,x_{i+1})g(t,x_{i+1}) + f(t_1,x_{i+1})g(t_1,x_{i+1})\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} \|f(t,x_i)[g(t,x_i) - g(t,x_{i+1})] + f(t,x_i)g(t,x_{i+1}) - f(t_1,x_i)[g(t_1,x_i) - g(t_1,x_{i+1})] \\
&\qquad - f(t_1,x_i)g(t_1,x_{i+1}) - f(t,x_{i+1})g(t,x_{i+1}) + f(t_1,x_{i+1})g(t_1,x_{i+1})\| \\
&\qquad = \sum_{i=0}^{n} \|[f(t,x_i) - f(t_1,x_i)][(g(t,x_i) - g(t_1,x_i)) - (g(t,x_{i+1}) - g(t_1,x_{i+1}))] \\
&\qquad + f(t,x_i)g(t,x_{i+1}) - f(t_1,x_i)g(t_1,x_{i+1}) - f(t,x_{i+1})g(t,x_{i+1}) + f(t_1,x_{i+1})g(t_1,x_{i+1})\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} \|[f(t,x_i) - f(t_1,x_i)][(g(t,x_i) - g(t_1,x_i)) - (g(t,x_{i+1}) - g(t_1,x_{i+1}))] \\
&\qquad + [f(t,x_i) - f(t,x_{i+1})]g(t,x_{i+1}) - [f(t_1,x_i) - f(t_1,x_{i+1})]g(t_1,x_{i+1})\| \\
&\qquad = \sum_{i=0}^{n} \|[f(t,x_i) - f(t_1,x_i)][(g(t,x_i) - g(t_1,x_i)) - (g(t,x_{i+1}) - g(t_1,x_{i+1}))] \\
&\qquad\quad + [f(t,x_i) - f(t,x_{i+1})]g(t,x_{i+1}) - [f(t_1,x_i) - f(t_1,x_{i+1})]g(t_1,x_{i+1}) \\
&\qquad = \sum_{i=0}^{n} \|[f(t,x_i) - f(t_1,x_i)][(g(t,x_i) - g(t_1,x_i)) - (g(t,x_{i+1}) - g(t_1,x_{i+1}))] \\
&\qquad\qquad + [(f(t,x_i) - f(t_1,x_i)) - (f(t,x_{i+1}) - f(t_1,x_{i+1}))]g(t,x_{i+1}) \\
&\qquad\qquad\qquad + [f(t_1,x_i) - f(t_1,x_{i+1})][g(t,x_{i+1}) - g(t_1,x_{i+1})]\|,
\end{aligned}
$$

et grâce à l'inégalité triangulaire, on a :

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=0}^{n} |f(t,x_i) - f(t_1,x_i)|\|(g(t,x_i) - g(t_1,x_i)) - (g(t,x_{i+1}) - g(t_1,x_{i+1}))\| \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{n} |(f(t,x_i) - f(t_1,x_i)) - (f(t,x_{i+1}) - f(t_1,x_{i+1}))|\|g(t,x_{i+1})\| \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=0}^{n} |f(t_1,x_i) - f(t_1,x_{i+1})|\|g(t,x_{i+1}) - g(t_1,x_{i+1})]\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=0}^{n} \|f(t,\cdot) - f(t_1,\cdot)\|_\infty \|(g(t,x_i) - g(t_1,x_i)) - (g(t,x_{i+1}) - g(t_1,x_{i+1}))\| \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{n} |(f(t,x_i) - f(t_1,x_i)) - (f(t,x_{i+1}) - f(t_1,x_{i+1}))|\|g(t,\cdot)\|_\infty \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=0}^{n} |\int_{x_i}^{x_{i+1}} D_y f(t_1,y)dy| \cdot \|g(t,\cdot) - g(t_1,\cdot)\|_\infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|f(t,\cdot) - f(t_1,\cdot)\|_\infty \sum_{i=0}^{n} \|(g(t,x_i) - g(t_1,x_i)) - (g(t,x_{i+1}) - g(t_1,x_{i+1}))\| \\
&\qquad + V_c^d(f(t,\cdot)) - f(t_1,\cdot))\|g(t,\cdot)\|_\infty + \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |D_y f(t_1,\cdot)|dy \cdot \|g(t,\cdot) - g(t_1,\cdot)\|_\infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|f(t,\cdot) - f(t_1,\cdot)\|_\infty V_c^d(g(t,\cdot) - g(t_1,\cdot)) \\
&\qquad + V_c^d(f(t,\cdot)) - f(t_1,\cdot))\|g(t,\cdot)\|_\infty + \int_{x_i}^{x_{i+1}} |D_y f(t_1,\cdot)|dy \cdot \|g(t,\cdot) - g(t_1,\cdot)\|_\infty \\
&\qquad \leq \|f(t,\cdot) - f(t_1,\cdot)\|_\infty \|g(t,\cdot) - g(t_1,\cdot)\|_{BV} + \|f(t,\cdot) - f(t_1,\cdot)\|_{BV}\|g(t,\cdot)\|_\infty \\
&\qquad\qquad + \|g(t,\cdot) - g(t_1,\cdot)\|_\infty \cdot (b-a)\|D_y f\|_\infty \\
&\qquad\qquad \leq [2\|f\|_\infty + (b-a)\|D_y f\|_\infty] \cdot \|g(t,\cdot) - g(t_1,\cdot)\|_{BV} + \|g\|_\infty \cdot \|f(t,\cdot) - f(t_1,\cdot)\|_{BV};
\end{aligned}
$$

on a bien $[t \mapsto f(t) \times g(t)] \in C^0(I, BV(J,E))$. □

1.2 Des dérivations sous intégrales.

Dans [48], pp. 221, on trouve le résultat suivant et son corollaire : nous considèrerons des résultats de différentiabilité de fonctions définies par des intégrales.

Théorème 1.2.1 (Théorème de dérivabilité)**.** *Soit $S := [a,b] \subset \mathbb{R}$, E espace de Banach. $f : S \longrightarrow E$ une fonction Riemann-intégrable sur S.*
Soit $t \in [a,b[$ (resp. $t \in]a,b]$) tel que $f(t+)$ (resp. $f(t-)$) existe. Alors $[y \mapsto \int_a^y f(x)dx]$ est dérivable à droite (resp. à gauche) en t et $\frac{d}{dt+}\int_a^t f(x)dx = f(t+)$ (resp. $\frac{d}{dt-}\int_a^t f(x)dx = f(t-)$).

Corollaire 1.2.1. *Soit $S = [a,b]$, E un espace de Banach, $f : S \longrightarrow E$, une fonction Riemann-intégrable sur S. Soit $t \in]a,b[$ tel que f est continue en t. Alors $[t \mapsto \int_a^t f(x)dx]$ est dérivable en t et $\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(t)$.*

Nous rappellerons un résultat dont la preuve est dans [20], p.81.

Lemme 1.2.1. *E est un espace vectoriel de dimension finie. Soit $a < b$. Soit $\Phi \in C^0([a,b],E)$ et $\varphi \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ tels que, pour tout $t \in]a,b[$, $\Phi'_d(t)$ et $\varphi'_d(t)$ existent et satisfont $\|\Phi'_d(t)\| \leq \varphi'_d(t)$ (respectivement $\Phi'_g(t)$ et $\varphi'_g(t)$ existent et satisfont $\|\Phi'_g(t)\| \leq \varphi'_g(t)$).*
Alors, pour tout $t < t_1$ appartenant à $[a,b]$, nous avons $\|\Phi(t) - \Phi(t_1)\| \leq \varphi(t) - \varphi(t_1)$.

Proposition 1.2.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $a < b$. Soit $f : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow E$ une application vérifiant les conditions suivantes.*

1. $\forall t \in [a,b]$, $f(t,\cdot) \in R([a,b],E)$.
2. $\forall s \in [a,b]$, $f(\cdot,s) \in C^0([a,b],E)$.
3. $\forall t \in [a,b[$, $\forall s \in [a,b]$, $\frac{\partial f(t,s)}{\partial t+}$ existe dans E.
4. $\exists m \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{R}_+;\lambda_1)$, $\forall t \in [a,b[$, $\forall s \in [a,b]$, $\|\frac{\partial f(t,s)}{\partial t+}\| \leq m(s)$.

Alors, pour tout $t \in [a,b]$, $\frac{\partial}{\partial t+}\int_a^t f(t,s)ds$ existe et nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t+}\int_a^t f(t,s)ds = \int_{[a,t]} \frac{\partial f(t,s)}{\partial t+} d\lambda_1(s) + f(t,t+).$$

Démonstration. On pose $F(t) := \int_a^t f(t,s)ds$, soit $t \in [a,b[$ et on considère $h \in]0, b-t]$. Nous avons

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h}(F(t+h) - F(t)) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{t+h} f(t+h,s)ds - \int_a^t f(t,s)ds\right) \\
= & \frac{1}{h}\left(\int_a^t f(t+h,s)ds + \int_t^{t+h} f(t+h,s)ds - \int_a^t f(t,s)ds\right) \\
= & \frac{1}{h}\int_a^t (f(t+h,s) - f(t,s))ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(t+h,s)ds \\
= & \int_a^t \frac{1}{h}(f(t+h,s) - f(t,s))ds + \int_t^{t+h} \frac{1}{h}(f(t+h,s) - f(t,s))ds \\
& + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(t,s)ds.
\end{aligned}$$

Nous introduisons

$$\left\{\begin{array}{rcl} I_h & := & \displaystyle\int_a^t \frac{1}{h}(f(t+h,s) - f(t,s))ds \\ II_h & := & \displaystyle\int_t^{t+h} \frac{1}{h}(f(t+h,s) - f(t,s))ds \\ III_h & := & \displaystyle\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(t,s)ds. \end{array}\right.$$

Les raisonnements précédents nous permettent d'obtenir la relation suivante.

$$\frac{1}{h}(F(t+h) - F(t)) = I_h + II_h + III_h. \tag{1.2.1}$$

On fixe s, soit $\Phi(t) := f(t,s)$ et $\varphi(t) := t.m(s)$, où m est obtenu par l'assertion **(4)**. De l'assertion **(3)** on a $\Phi'_d(t) = \frac{\partial f(t,s)}{\partial t+}$ et $\varphi'_d(t) = m(s)$ existent. De l'assertion **(2)**, on a que Φ est continue, et φ est clairement continue. De l'assertion **(4)** on obtient $\|\Phi'_d(t)\| \leq \varphi'_d(t)$. Et alors on peut utiliser le lemme 1.2.1 et on peut affirmer que $\|\Phi(t+h) - \Phi(t)\| \leq \varphi(t+h) - \varphi(t) = h.m(s)$, et ainsi les assertions suivantes sont vérifiées.

$$\left.\begin{array}{r} \forall t \in [a,b[, \forall h \in]0, b-t], \forall s \in [a,b], \\ \|\frac{1}{h}(f(t+h,s) - f(t,s))\| \leq m(s). \end{array}\right\} \tag{1.2.2}$$

On pose $g_h(s) := \frac{1}{h}(f(t+h,s) - f(t,s))$. De l'assertion **(1)**, nous savons que $f(t+h,\cdot)$ et $f(t,\cdot)$ sont Riemann-intégrables de plus elles sont Lebesgue-intégrables, de plus ils sont Lebesgue-mesurables, et conséquemment $g-h$ est Lebesgue-mesurable sur $[a,b]$. De l'assertion **(4)** et (1.2.2), nous savons qu'il existe $m \in \mathcal{L}^1([a,b], \mathbb{R}; \lambda)$ tel que $\|g_h(s)\| \leq m(s)$ pour tout $s \in [a,b]$. De l'assertion **(3)** nous savons que $\lim_{h\to 0+} g_h(s) = \dfrac{\partial f(t,s)}{\partial t+}$ pour tout $s \in [a,b]$. Et ainsi nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue et nous obtenons les propriétés suivantes.

$$\lim_{h\to 0+} I_h = \int_{[a,t]} \frac{\partial f(t,s)}{\partial t+} d\lambda_1(s). \tag{1.2.3}$$

Utilisant (1.2.2) nous avons

$$\|II_h\| = \|\int_t^{t+h} g_h(s)ds\| \leq \int_t^{t+h} \|g_h(s)\|ds \leq \int_{[t,t+h]} m(s)d\lambda_1(s).$$

Comme $[\xi \mapsto \int_{[t,\xi]} m(s)d\lambda_1(s)]$ est absolument continue, elle est continue et par conséquent, nous avons $\lim_{h\to 0+} \int_{[t,t+h]} m(s)d\lambda_1(s) = \int_{[t,t]} m(s)d\lambda_1(s) = 0$. Et ainsi nous avons prouvé les assertions suivantes.

$$\lim_{h\to 0+} II_h = 0. \tag{1.2.4}$$

De l'assertion **(1)** nous savons que $f(t,t+)$ existe et alors nous avons

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta_{t,\epsilon} > 0, \forall s, t < s \leq t+\delta \Longrightarrow \|f(t,s) - f(t,t+)\| \leq \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$ et $h \in]0,\delta]$; alors nous avons, pour tout $s \in]t,t+h]$, $\|f(t,s) - f(t,t+)\| \leq \epsilon$ ceci entraîne $\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f(t,s) - f(t,t+)\|ds \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \epsilon ds = \epsilon$. Et ainsi nous avons prouvé :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta_{t,\epsilon} > 0, \forall h, a < h \leq \delta \Longrightarrow \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f(t,s) - f(t,t+)\|ds \leq \epsilon,$$

i.e. $\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f(t,s) - f(t,t+)\|ds = 0$. Notons que nous avons

$$\begin{aligned} \|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(t,s)ds - f(t,t+)\| &= \|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} (f(t,s) - f(t,t+))ds\| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|f(t,s) - f(t,t+)\|ds, \end{aligned}$$

ceci entraîne

$$\lim_{h\to 0+} III_h = f(t,t+). \tag{1.2.5}$$

Le résultat est une cons équence de (1.2.2), (1.2.3), (1.2.4) et de (1.2.5). □

Par un raisonnement similaire on obtient le résultat suivant.

Proposition 1.2.2. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $a < b$. Soit $f : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow E$ une application qui satisfait les propriétés suivantes.*

1. $\forall t \in [a,b]$, $f(t,\cdot) \in R([a,b],E)$.
2. $\forall s \in [a,b]$, $f(\cdot,s) \in C^0([a,b],E)$.
3. $\forall t \in]a,b]$, $\forall s \in [a,b]$, $\frac{\partial f(t,s)}{\partial t-}$ *existe dans* E.
4. $\exists m_1 \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{R}_+;\lambda_1)$, $\forall t \in]a,b]$, $\forall s \in [a,b]$, $\|\frac{\partial f(t,s)}{\partial t-}\| \leq m_1(s)$.

Alors, pour tout $t \in [a,b]$, $\frac{\partial}{\partial t-}\int_a^t f(t,s)ds$ existe et nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t-}\int_a^t f(t,s)ds = \int_{[a,t]} \frac{\partial f(t,s)}{\partial t-} d\lambda_1(s) + f(t,t-).$$

1.3 Théorème du point fixe de Schauder

Il existe plusieurs énoncés qui portent le nom de "théorème de point fixe de Schauder" dans la littérature ; c'est pourquoi nous précisons l'énoncé qui sera utilisé plus loin et le vocabulaire associé. Dans Hale, (cf. [28], page 40), et Hale et Verduyn Lunel, (cf. [29], page 43), on trouve, sans démonstration et sans référence l'énoncé suivant :

Théorème 1.3.1 (Théorème du point fixe de Schauder)**.** *Si U est une partie convexe bornée fermée d'un espace de Banach X, et si $T : U \longrightarrow U$ est une fonction complètement continue alors T possède au moins un point fixe.*

Rappelons les deux définitions suivantes :

Définition 1.3.1. *Soit X et Y deux espaces topologiques et $F : X \longrightarrow Y$ une fonction continue.*

1. *F est dite* compacte *lorsque $F(X)$ est incluse dans un compact de Y.*
2. *Si, en outre, X est métrique, F est dite* complètement continue *lorsque : pour tout sous-ensemble borné B de X, $F(B)$ est incluse dans un compact de Y.*

L'énoncé le plus courant du théorème du point fixe de Schauder est le suivant. ([27], p119) :

Théorème 1.3.2. *Soit C un convexe d'un espace normé E, et $F : C \longrightarrow C$ une fonction compacte. Alors F a au moins un point fixe.*

Démontrons que le théorème 1.3.1 est un corollaire du théorème 1.3.2.

Démonstration. Soit U une partie convexe bornée fermée de l'espace de Banach X, et $T : U \longrightarrow U$ une fonction complètement continue. Puisque U est bornée, il existe un compact $K \subset U$ tel que $T(U) \subset K$. Donc T est compacte. Alors d'après le théorème 1.3.2, T possède au moins un point fixe. □

Remarque 1.3.1.

1. *L'énoncé de Hale ([28]) et de Hale et Verduyn Lunel contient deux hypothèses inutiles :*
   — *"X est un espace de Banach" ; X "espace vectoriel normé" suffit.*
   — *"U fermée".*
2. *La démonstration de Hale ([28], page 39) et de Hale et Verduyn Lunel ([29], page 42) contient une erreur. L'ensemble $\mathcal{K}$ tel qu'il est défini n'est pas inclus dans $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ (cf. (2.1.2)). Il convient de définir $\mathcal{K}$ comme suit :*

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \quad := \quad & \{g \in C^0([-r, \alpha], \mathbb{R}^n) : \forall t, \tau \in I_\alpha, \\ & |g(t) - g(\tau)| \leq M|t - \tau|, |g(t)| \leq M\alpha, g_0 = 0\} \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

pour que K soit inclus dans $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$.

Les références sur le théorème de Schauder :

1. R. F. Brown ([18]) et D.R. Smart ([52]) dans lequel le théorème est énoncé, à la page 25, de la façon suivante :

Théorème 1.3.3. *Soit M une partie convexe non vide d'un espace normé $\mathcal{B}$, soit $F : M \longrightarrow K$ une fonction continue où K est un compact inclus dans M. Alors F a au moins un point fixe.*

2. Dans Le livre de L. Kantorovitch and G. Akilov [34], on trouve à la page 179, le théorème suivant :

   Théorème 1.3.4. *Soit Ω un ensemble convexe fermé d'un espace de Banach X, et $P : \Omega \longrightarrow \Delta$ une fonction continue où Δ est une partie compacte de Ω. Alors P possède au moins un point fixe.*

3. Dans M. S. Berger ([9]), on trouve la définition d'opérateur compact au sens de ce que nous avons défini comme "complètement continu". Il énonce le théorème du point fixe de Schauder comme le théorème 1.3.1.
4. Dans L. Nirenberg ([46]), on trouve : "f compact" à notre sens "f complètement continu" et l'énoncé du théorème 1.3.1.

1.4 Fonctions à variation bornée

Les définitions suivantes sont issues de [36], p.328 et [38], p.278. Les fonctions à variation bornée sont aussi développées dans [2] et [25]. Soit $S = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.4.1. *Une fonction f définie sur S à valeurs dans E (espace vectoriel de dimension finie) est dite* à variation bornée *s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sum_{k=1}^{n} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq C \tag{1.4.1}$$

pour toute subdivision

$$p := (x_0, x_1, \cdots, x_n) \text{ telle que } a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \text{ de } S. \tag{1.4.2}$$

On notera $BV(S, \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions à variation bornée de S dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.4.2. *Soit f une fonction à variation bornée. Alors la* variation totale *de f est notée $V_a^b(f)$ définie par :*

$$V_a^b(f) = \sup_{p \in \mathfrak{S}} \sum_{k=1}^{n} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\|. \tag{1.4.3}$$

où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des subdivisions de S.

Définition 1.4.3. *Une fonction f définie sur un intervalle S de $\mathbb{R}$ est dite* à variation bornée normalisée *si :*

1. *f est à variation bornée.*
2. *f est continue à gauche sur $[a, b[$.*

On notera $NBV(S, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions à variation bornée normalisée de S dans $\mathbb{R}^n$
$NBV_0(S, E) := \{f \in BV(S, E) \cap C_g^0(S, E) : f(b) = 0\}$.

Les quatre résultats suivants sont issus de [8].

Théorème 1.4.1. *$BV(S,\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel.*

Théorème 1.4.2. *Muni de la norme*

$$\|f\|_{BV} := \|f(b)\| + V_a^b(f),$$

$BV(S,\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach.

Théorème 1.4.3. *Soit $f \in BV(S,\mathbb{R}^n)$. L'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.*

Théorème 1.4.4. *Soit $g \in BV(S,\mathbb{R}^n)$. Si f est Riemann-Stieltjès-intégrable par rapport à g sur S, alors :*

$$\| \int_a^b f dg \| \leq \|f\|_\infty V_a^b(g).$$

Proposition 1.4.1. *Soit $f \in BV(S,\mathbb{R}^n)$. Alors on a :*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in S} \|f(x)\| \leq 2\|f\|_{BV}.$$

Démonstration. $\forall x \in]a,b[,\ (a,x,b) \in \mathfrak{S}_a^b$ et donc

$$\|f(a)-f(x)\| + \|f(x)-f(b)\| \leq V_a^b(f) \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{rrcl} & \|f(a)-f(x)\| & \leq & V_a^b(f) \\ \text{or} & |\|f(a)\| - \|f(x)\|| & \leq & \|f(a)-f(x)\| \\ \text{donc} & |\|f(a)\| - \|f(x)\|| & \leq & V_a^b(f) \end{array}$$

d'où :

$$\|f(x)\| \leq \|f(a)\| + V_a^b(f) = \|f\|_{BV},$$

donc :

$$\forall x \in]a,b[,\ \|f(x)\| \leq \|f\|_{BV}. \tag{1.4.4}$$

On a $\|f(b)-f(x)\| \leq V_a^b(f)$, de même, comme $|\|f(b)\| - \|f(x)\|| \leq \|f(b)-f(x)\|$

on a $\|f(b)\| \leq \|f(x)\| + V_a^b(f)$

$$\text{d'où} \quad \|f(b)\| \leq \|f\|_{BV} + V_a^b(f), \text{ d'après (1.4.4)}, \quad \text{donc}$$

$$\|f(b)\| \leq 2\|f\|_{BV}. \tag{1.4.5}$$

Par définition de $\|\cdot\|_{BV}$, on a $\|f(a)\| \leq \|f\|_{BV} \leq 2\|f\|_{BV}$, donc on a avec (1.4.4) et (1.4.5) :

$$\forall x \in S,\ \|f(x)\| \leq 2\|f\|_{BV} \Longrightarrow \|f\|_\infty \leq 2\|f\|_{BV}.$$

□

Corollaire 1.4.1. *Si $f \in BV(S,\mathbb{R}^n)$, alors f est bornée sur S.*

Proposition 1.4.2. *Soit $f \in BV(S,\mathbb{R}^n)$. Alors f est Riemann-intégrable sur S, et donc aussi Lebesgue-intégrable sur S.*

Démonstration. Tout d'abord, f est bornée par 1.4.1 et définie sur un segment fermé borné. Puisque les parties au plus dénombrables de $\mathbb{R}$ sont Lebesgue-négligeables, l'ensemble des points de discontinuité de f est Lebesgue-négligeable par 1.4.3, et alors d'après un théorème de Lebesgue, f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Avec un autre théorème de Lebesgue, f est alors aussi Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$. □

Proposition 1.4.3. *Soit $f,g \in BV(S,\mathbb{R}^n)$. Alors on a :*

$$\|f-g\|_\infty \leq 2\|f-g\|_{BV}.$$

En conséquence, si $f \in BV(S,\mathbb{R}^n)$ et $(f_n)_n \in (BV(S,(\mathbb{R}^n))^{\mathbb{N}}$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{BV} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Démonstration. La première inégalité résulte du théorème 1.4.1 et de la proposition 1.4.1. La seconde assertion découle de la première. □

Proposition 1.4.4. *Soit $S=[a,b] \subset \mathbb{R}$, $g \in NBV(S,\mathbb{R})$, $f \in C^0(S,\mathbb{R})$ et $c \in]a,b[$. On définit la fonction $Q : S \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant, $\forall t \in [a,c]$, $Q(t) := \int_t^c f(x)dg(x)$. Alors $Q \in C_g^0([a,c],\mathbb{R})$.*

Démonstration. Première étape : $f \in C^1(S,\mathbb{R})$.
Par la formule de l'intégration par parties, on a :

$$Q(t) = \int_t^c f(x)dg(x) = f(c)g(c+) - f(t)g(t) - \int_t^c f'(x)g(x)dx$$

$[t \mapsto f(c)g(c+)]$ est constante donc continue
$[t \mapsto f(t)g(t)]$ est continue à gauche car f et g le sont
$[t \mapsto \int_t^c f'(x)g(x)dx]$ est absolument continue donc continue.
Ainsi $Q \in C_g^0([a,c],\mathbb{R})$ comme somme de trois fonctions continues à gauche.
Deuxième étape : $f \in C^0(S,\mathbb{R})$.
Il existe $(f_n)_n \in (C^1(S,\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [a,b]$, $Q_n(t) := \int_t^c f_n(x)dg(x)$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [a,c]$,

$$\begin{aligned} |Q_n(t) - Q(t)| &\leq |\int_t^c (f_n(x) - f(x))dg(x)| \\ &\leq V_t^c(g) \cdot \sup_{t\leq x\leq c} |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq V_a^b(g) \cdot \|f_n - f\|_\infty. \end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{a\leq t\leq c}|Q_n(t)-Q(t)|\leq V_a^b(g)\cdot\|f_n-f\|_\infty\to 0\quad(n\to+\infty)$$

ainsi

$$\sup_{a\leq t\leq c}|Q_n(t)-Q(t)|\to 0\quad(n\to+\infty). \tag{1.4.6}$$

Par ailleurs, $\forall t\in[a,c]$,

$$\begin{aligned}|Q(t)| &= |\int_t^c f(x)dg(x)|\\ &\leq V_t^c(g)\|f\|_\infty\\ &\leq V_a^b(g)\|f\|_\infty<+\infty,\end{aligned}$$

et de même : $\forall t\in[a,c],\quad |Q_n(t)|\leq V_a^b(g)\|f\|_\infty$, donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ Q_n\in BC_g^0([a,c],\mathbb{R})\text{ par la première étape.} \tag{1.4.7}$$

Puisque $(BC_g^0([a,c],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, les équations (1.4.6) et (1.4.7) impliquent que $Q\in BC_g^0([a,c],\mathbb{R})$. □

Rappelons (cf.[53], p.44) le résultat suivant :

Théorème 1.4.5. *Soit $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, une application croissante et continue à gauche. Alors $\exists!\ \mu[F]:\mathcal{B}(\mathbb{R})\longrightarrow[0,+\infty]$, mesure positive telle que :*

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mu[F]([\alpha,\beta[)=F(\beta)-F(\alpha).$$

Si $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est croissante et continue à gauche, on peut la prolonger en $\tilde{F}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ croissante et continue à gauche en posant :

$$\tilde{F}(x):=\begin{cases}F(a) & \text{si}\quad x<a\\ F(x) & \text{si}\quad a\leq x\leq b\\ F(b) & \text{si}\quad x>b.\end{cases}$$

Puisque $[a,b]$ est fermé, $[a,b]\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc tout $B\in\mathcal{B}([a,b])$ peut être considéré comme élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors en utilisant le théorème 1.4.5 sur $\tilde{F}$, on peut définir $\mu[F](B):=\mu[\tilde{F}](B)$ pour tout $B\in\mathcal{B}([a,b])$, et obtenir ainsi que $\mu[F]$ est une mesure positive sur $\mathcal{B}([a,b])$. Avec ceci on doit obtenir :

Théorème 1.4.6. *Soit $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une application croissante et continue à gauche. Alors $\exists!\ \mu[F]:\mathcal{B}([a,b])\longrightarrow\mathbb{R}_+$, mesure positive finie telle que*

$$\forall(\alpha,\beta)\in[a,b]\times[a,b],\ \alpha<\beta,\ \mu[F]([\alpha,\beta[)=F(\beta)-F(\alpha).$$

Corollaire 1.4.2. *Soit $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une application croissante et continue à gauche. Alors $\forall(\alpha,\beta)\in[a,b[\times[a,b[,\alpha<\beta$ on a :*

$$\begin{cases}\mu[F](]\alpha,\beta[) &= F(\beta)-F(\alpha+)\\ \mu[F]([\alpha,\beta]) &= F(\beta+)-F(\alpha)\\ \mu[F](]\alpha,\beta]) &= F(\beta+)-F(\alpha+)\end{cases}$$

En outre, $\forall\alpha\in[a,b[$, on a :

$$\begin{cases}\mu[F]([\alpha,b]) &= F(b)-F(\alpha)\\ \mu[F](]\alpha,b]) &= F(b)-F(\alpha+).\end{cases}$$

Démonstration. — $a \leq \alpha < \beta < b$;
$]\alpha, \beta[= \cup_{n \geq n_0} [\alpha + \frac{1}{n}, \beta[$ où $n_0 \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\alpha < \alpha + \frac{1}{n_0}$. $([\alpha + \frac{1}{n}, \beta[)_{n \geq n_0}$ est croissante. Par la continuité monotone séquentielle d'une mesure positive, on a :

$$\begin{aligned} \mu[F](]\alpha, \beta[) &= \lim_{n \to +\infty} \mu[F]([\alpha + \frac{1}{n}, \beta[) \\ &= \lim_{n \to +\infty} (F(\beta) - F(\alpha + \frac{1}{n})) \\ &= F(\beta) - \lim_{n \to +\infty} (\alpha + \frac{1}{n}) \\ &= F(\beta) - F(\alpha+). \end{aligned}$$

— $a \leq \alpha < \beta < b$.
$[\alpha, \beta] = \cap_{n \geq n_1} [\alpha, \beta + \frac{1}{n}[$ où $n_1 \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\beta < \beta + \frac{1}{n}$. $([\alpha, \beta + \frac{1}{n}[)_{n \geq n_1}$ est décroissante ;

$$\mu[F]([\alpha, \beta + \tfrac{1}{n_1}[) = F(\beta + \tfrac{1}{n_1}) - F(\alpha).$$

Donc on peut utiliser la continuité monotone séquentielle des mesures positives et affirmer :

$$\begin{aligned} \mu[F]([\alpha, \beta]) &= \lim_{n \to +\infty} \mu[F]([\alpha, \beta + \frac{1}{n}[) \\ &= \lim_{n \to +\infty} (F(\beta + \frac{1}{n}) - F(\alpha)) \\ &= F(\beta+) - F(\alpha). \end{aligned}$$

— $a \leq \alpha < \beta < b$
$]\alpha, \beta] = \cup_{n \geq n_0} [\alpha + \frac{1}{n}, \beta]$ où $n_0 \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\alpha + \frac{1}{n_0} < \beta$. $([\alpha + \frac{1}{n}, \beta])_{n \geq n_0}$ est croissante. Donc par la continuité monotone séquentielle des mesures, on a :

$$\begin{aligned} \mu[F](]\alpha, \beta]) &= \lim_{n \to +\infty} \mu[F]([\alpha + \frac{1}{n}, \beta]) \\ &= \lim_{n \to +\infty} (F(\beta + 0) - F(\alpha + \frac{1}{n})) \\ &= F(\beta+) - F(\alpha+). \end{aligned}$$

— $a \leq \alpha < b$
$[\alpha, b] = \cap_{n \geq 1} [\alpha, b + \frac{1}{n}[$, $([\alpha, b + \frac{1}{n}[)_{n \geq 1}$ est décroissante ;

$$\mu[\tilde{F}]([\alpha, b + \frac{1}{n}[) = \tilde{F}(b + \frac{1}{n}) - F(\alpha)$$

Donc on peut utiliser la continuité monotone séquentielle des mesures positives et affirmer :

$$\begin{aligned} \mu[F]([\alpha, b]) &= \mu[\tilde{F}]([\alpha, b]) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \mu[\tilde{F}]([\alpha, b + \frac{1}{n}[) \\ &= \lim_{n \to +\infty} (\tilde{F}(b + \frac{1}{n}) - \tilde{F}(\alpha)) \\ &= \lim_{n \to +\infty} (F(b) - F(\alpha)) \\ &= F(b) - F(\alpha). \end{aligned}$$

— $a \leq \alpha < b$
$]\alpha, b] = \cup_{n \geq n_0} [\alpha + \frac{1}{n}, b]$ où $n_0 \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\alpha + \frac{1}{n_0} < b$. $([\alpha + \frac{1}{n}, b])_{n \geq n_0}$ est décroissante. Donc par la continuité séquentielle des mesures positives, on a :

$$\begin{aligned} \mu[F](]\alpha, b]) &= \lim_{n \to +\infty} \mu[F]([\alpha + \frac{1}{n}, b]) \\ &= \lim_{n \to +\infty} (F(b) - F(\alpha + \frac{1}{n})) \\ &= F(b) - \lim_{n \to +\infty} F(\alpha + \frac{1}{n}) \\ &= F(b) - F(\alpha+). \end{aligned}$$

□

Remarque 1.4.1. *Soit $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante et continue à gauche. Soit $x \in [a, b[$. Alors $\mu[F](\{x\}) = F(x+) - F(x)$. Donc si F n'est pas continue à droite en x, on a : $\mu[F](\{x\}) > 0$; et ainsi $\{x\}$ n'est pas $\mu[F]$-négligeable alors que $\{x\}$ est Lebesgue-négligeable.*

Démonstration. $\{x\} = \cap_{n \geq q} [x, x + \frac{1}{n}[$ où $q \in \mathbb{N}^*$ est tel que $x + \frac{1}{q} < b$.
$([x, x + \frac{1}{n}[)_{n \geq q}$ est décroissante, et $\mu[F]([x, x + \frac{1}{q}[) = F(x + \frac{1}{q}) - F(x) < +\infty$. Donc par la continuité monotone séquentielle de $\mu[F]$, on a :

$$\begin{aligned} \mu[F](\{x\}) &= \lim_{n \to +\infty} \mu[F]([x, x + \frac{1}{n}[) \\ &= \lim_{n \to +\infty} (F(x + \frac{1}{n}) - F(x)) \\ &= F(x+) - F(x). \end{aligned}$$

□

Remarque 1.4.2. *Soit $G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante et continue à droite. Alors il n'existe pas de mesure positive $m : \mathcal{B}([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tel que $\forall (\alpha, \beta) \in [a, b] \times [a, b], m([\alpha, \beta[) = G(\beta) - G(\alpha)$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe une mesure positive
$m : \mathcal{B}([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tel que $\forall (\alpha, \beta) \in [a, b] \times [a, b]; m([\alpha, \beta[) = G(\beta) - G(\alpha)$.
Soit $x \in]a, b[$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $x - \frac{1}{q} > a$ et $x + \frac{1}{q} < b$. Alors $\{x\} = \cap_{n \geq q} [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$.
$([x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[)_{n \geq q}$ est décroissante ; $m([x - \frac{1}{q}, x + \frac{1}{q}[) < +\infty$, donc on peut utiliser la continuité séquentielle de m et affirmer :

$$\begin{aligned} m(\{x\}) &= \lim_{n \to +\infty} m([x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[) \\ &= \lim_{n \to +\infty} (G(x - \frac{1}{n}) - G(x + \frac{1}{n})) \\ &= \lim_{n \to +\infty} G(x - \frac{1}{n}) - \lim_{n \to +\infty} Gx + \frac{1}{n}) \\ &= G(x+) - G(x-) \\ &= G(x) - G(x-) \end{aligned}$$

car G est continue à droite. On a prouvé :

$$m(\{x\}) = G(x) - G(x-). \tag{1.4.8}$$

Mais on a aussi $\{x\} = \cap_{n\geq q}[x, x+\frac{1}{n}[$. $([x, x+\frac{1}{n}[)_{n\geq q}$ est décroissante et $m([x, x+\frac{1}{q}[) < +\infty$, donc on peut utiliser la continuité monotone séquentielle de m et affirmer :

$$\begin{aligned} m(\{x\}) &= \lim_{n\to+\infty} m([x, x+\frac{1}{n}[) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (G(x+\frac{1}{n}) - G(x)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} G(x+\frac{1}{n}) - G(x) \\ &= G(x+) - G(x) \\ &= G(x) - G(x) \\ &= 0 \text{ car } G \text{ est continue à droite.} \end{aligned}$$

Alors, avec (1.4.8), on obtient $G(x-) = G(x)$, c.-à-d. G est continue à gauche en x : ce qui est impossible si G n'est pas continue à gauche en x. □

Rappelons que si $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante continue à gauche, alors $\forall f \in \mathcal{L}^1([a,b], \mu[F])$,

$$\int_{[a,b]} f d\mu[F] = \int_{[a,b]} f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)dF(x)$$

Proposition 1.4.5. *Si $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante, continue à gauche, alors on a :*

(i) *si $a \leq \alpha < \beta < b$, $\int_\alpha^\beta 1dF(x) = F(\beta+) - F(\alpha)$,*

(ii) *si $a \leq \alpha < b$, $\int_\alpha^b 1dF(x) = F(b) - F(\alpha)$.*

Démonstration. **(i)**

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta 1dF(x) &= \int_a^b \mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}(x)dF(x) \\ &= \int_{[a,b]} \mathbb{1}_{[\alpha,\beta]} d\mu[F] \\ &= \mu[F]([\alpha,\beta]) \\ &= F(\beta+) - F(\alpha) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \int_\alpha^b 1dF(x) &= \int_a^b \mathbb{1}_{[\alpha,b]}(x)dF(x) \\ &= \int_{[a,b]} \mathbb{1}_{[\alpha,b]} d\mu[F] \\ &= \mu[F]([\alpha,b]) \\ &= F(b) - F(\alpha) \end{aligned}$$

□

Si $\Psi \in NBV([a,b],\mathbb{R})$ alors $\Psi = F - G$ où $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $G : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont croissantes et continues à gauche.
On définit $\mu[\Psi] : \mathcal{B}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall B \in \mathcal{B}([a,b]),\ \mu[\Psi](B) = \mu[F](B) - \mu[G](B)$. $\mu[\Psi]$ est une mesure signée.
Si $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mu[\Psi])$ alors $\int_{[a,b]} f d\mu[\Psi] = \int_{[a,b]} f d\mu[F] - \int_{[a,b]} f d\mu[G]$ notée encore

$$\int_a^b f(x)d\Psi(x) = \int_a^b f(x)dF(x) - \int_a^b f(x)dG(x).$$

En corollaire de la proposition 1.4.5 on obtient :

Proposition 1.4.6. *Soit $\Psi \in NBV([a,b],\mathbb{R})$.*

(i) *Si $a \leq \alpha < \beta < b$ alors $\int_\alpha^\beta 1 d\Psi(x) = \Psi(\beta+) - \Psi(\alpha)$.*

(ii) *Si $a \leq \alpha < b$ alors $\int_\alpha^b 1 d\Psi(x) = \Psi(b) - \Psi(\alpha)$.*

Soit $S = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

Proposition 1.4.7. *Soit $g \in NBV(S,\mathbb{R})$, $z \in S$ et $f \in C^0(S,\mathbb{R})$. Alors*

$$\int_{\{z\}} f dg = f(z)[(g+)(z) - g(z)].$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\int_{\{z\}} f(x)dg(x) &= \int_{\{z\}} f(z)dg(x)\\ &= f(z)\int_{\{z\}} dg(x)\\ &= f(z)\mu_g(\{x\})\\ &= f(z)[(g+)(z) - g(z)]\end{aligned}$$

□

Nous présentons ici une démonstration du théorème d'intégration par parties, puis nous énoncerons la version du résultat donnée dans le livre de Helson [31]. Ce résultat est essentiel dans plusieurs points des chapitres précédents.

Théorème 1.4.7. *Soit $g \in NBV(S,\mathbb{R})$ et $f \in C^1(S,\mathbb{R})$.*

(i) *Soit $a \leq \alpha \leq \beta < b$; alors on a :*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dg(x) = f(\beta)g(\beta+) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx.$$

(ii) *Soit $a \leq \alpha < b$; alors on a*

$$\int_\alpha^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_\alpha^b f'(x)g(x)dx.$$

Démonstration. $f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \Longrightarrow f \in \mathcal{L}^1([a,b],dg,\mathbb{R})$ car $\|f\|_\infty < +\infty$ et les constantes sont dg-intégrables sur $[a,b]$.

$\forall x \in [\alpha,\beta], f(x) - f(\alpha) = \int_\alpha^x f'(y)dy = \int_\alpha^\beta f'(y)\mathbb{1}_{[\alpha,x]}(y)dy.$

Notons que

$$\mathbb{1}_{[\alpha,x]}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha \leq y \leq x \\ 0 & \text{si} \quad x < y. \end{cases}$$

et

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y \leq x \\ 0 & \text{si} \quad x < y, \end{cases}$$

donc, quand $y \in [\alpha,\beta]$ on a $\mathbb{1}_{[\alpha,x]}(y) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-y)$, donc, on en déduit :

$$\forall x \in [\alpha,\beta], f(x) - f(\alpha) = \int_\alpha^\beta f'(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-y)dy. \tag{1.4.9}$$

Par ailleurs, on a :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dg(x) = \int_\alpha^\beta (f(x) - f(\alpha) + f(\alpha))dg(x)$$

ce qui entraîne :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dg(x) = \int_\alpha^\beta (f(x) - f(\alpha))dg(x) + \int_\alpha^\beta f(\alpha)dg(x). \tag{1.4.10}$$

Notons que

$$\int_\alpha^\beta f(\alpha)dg(x) = f(\alpha).\int_\alpha^\beta 1dg(x) = f(\alpha)(g(\beta+) - g(\alpha))$$

par le résultat (**ii**) de la proposition 1.4.6 ; donc

$$\int_\alpha^\beta f(\alpha)dg(x) = f(\alpha)g(\beta+) - f(\alpha)g(\alpha). \tag{1.4.11}$$

Notons que la fonction $[(x,y) \mapsto f'(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-y)]$ est mesurable comme produit de deux fonctions mesurables : $[(x,y) \mapsto y \mapsto f'(y)]$ et $[(x,y) \mapsto x-y \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-y)]$.

En outre : $\forall (x,y) \in [\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta], |f'(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-y)| \leq \|f'\|_\infty$, donc elle est $dg \otimes dt$-intégrable.

En utilisant (1.4.9) et le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta (f(x) - f(\alpha))dg(x) &= \int_\alpha^\beta [\int_\alpha^\beta f'(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-y)dy]dg(x) \\ &= \int_\alpha^\beta [\int_\alpha^\beta f'(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-y)dg(x)]dy \\ &= \int_\alpha^\beta f'(y)[\int_\alpha^\beta \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-y)dg(x)]dy, \end{aligned}$$

et puisque

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq y \\ 0 & \text{si} \quad x < y \end{cases}$$

et

$$\mathbb{1}_{[y,\beta]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq y \\ 0 & \text{si} \quad x < y \end{cases}$$

on voit que pour $x \in [\alpha, \beta]$, $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x-y) = \mathbb{1}_{[y,\beta]}(x)$, donc :

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (f(x)-f(\alpha))dg(x) &= \int_\alpha^\beta f'(y)[\int_\alpha^\beta \mathbb{1}_{[y,\beta]}(x)dg(x)]dy \\ &= \int_\alpha^\beta f'(y)[\int_y^\beta 1dg(x)]dy \\ &= \int_\alpha^\beta f'(y)[g(\beta+)-g(y)]dy\end{aligned}$$

d'après le résultat (**ii**) de la proposition 1.4.6, on a :

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (f(x)-f(\alpha))dg(x) &= \int_\alpha^\beta f'(y)g(\beta+)dy - \int_\alpha^\beta f'(y)g(y)dy \\ &= (f(\beta)-f(\alpha))g(\beta+) - \int_\alpha^\beta f'(y)g(y)dy \\ &= f(\beta)g(\beta+) - f(\alpha)g(\beta+) - \int_\alpha^\beta f'(y)g(y)dy;\end{aligned}$$

et ainsi on a prouvé :

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (f(x)-f(\alpha))dg(x) &= f(\beta)g(\beta+) - f(\alpha)g(\beta+) \\ &\quad - \int_\alpha^\beta f'(y)g(y)dy.\end{aligned} \tag{1.4.12}$$

En utilisant les équations (1.4.11) et (1.4.12) dans l'équation (1.4.10) on a :

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(x)dg(x) &= f(\alpha)g(\beta+) - f(\alpha)g(\alpha) + f(\beta)g(\beta+) \\ &\quad -f(\alpha)g(\beta+) - \int_\alpha^\beta f'(y)g(y)dy\end{aligned}$$

alors :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dg(x) = f(\beta)g(\beta+) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(y)g(y)dy.$$

Pour (**ii**), d'après (**ii**) de la proposition 1.4.5, lorsque $\beta = b$, $g(\beta+)$ devient $g(b)$. □

Proposition 1.4.8. *Soit $g \in NBV(S,\mathbb{R})$ et $f \in AC(S,\mathbb{R})$. Alors les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) *Quand $a \le \alpha < \beta < b$,*

$$\int_\alpha^\beta dg(t)f(t) = g(\beta+)f(\beta) - g(\alpha)f(\alpha) - \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)dt.$$

(ii) *Quand $a \le \alpha < b$,*

$$\int_\alpha^b dg(t)f(t) = g(b)f(b) - g(\alpha)f(\alpha) - \int_\alpha^b g(t)f'(t)dt.$$

La preuve de cette proposition est donnée dans [31], pp.176.

Théorème 1.4.8. *Soit $g \in NBV(S,\mathbb{R})$ et $f \in C^0(S,\mathbb{R})$.*
Alors, $\forall c \in]a,b[$, les relations suivantes sont vérifiées.

(i) $\int_c^c f(x)dg(x) = f(c)[g(c+) - g(c)]$.

(ii) *Pour $a < c < b$,*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x) - f(c)[g(c+) - g(c)].$$

(iii) $\int_a^b f(x)dg(x) = \int_{[a,c[} f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x)$

Démonstration. **(i)** on a

$$\begin{aligned}\int_c^c f(x)dg(x) &= \int_{\{c\}} f(x)d\mu[g](x)\\ &= \int_{\{c\}} f(c)d\mu[g](x)\\ &= f(c)\mu[g](\{c\}),\end{aligned}$$

ceci entraîne le résultat voulu.

(ii) Première étape $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$.
On utilise l'intégration par parties ; alors on a :

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b+) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{1.4.13}$$

$$\int_a^c f(x)dg(x) = f(c)g(c+) - f(a)g(a) - \int_a^c f'(x)g(x)dx \tag{1.4.14}$$

$$\int_c^b f(x)dg(x) = f(b)g(b+) - f(c)g(c) - \int_c^b f'(x)g(x)dx \tag{1.4.15}$$

Avec les équations (1.4.14) et (1.4.15) on obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x) &= f(b)g(b) - f(c)g(c) + f(c)g(c+) - f(a)g(a)\\ &\quad - \int_a^c f'(x)g(x)dx - \int_c^b f'(x)g(x)dx.\end{aligned}$$

Par la relation de Chasles sur l'intégrale de Riemann, on a :

$$\int_a^c f'(x)g(x)dx + \int_c^b f'(x)g(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

et en utilisant l'équation (1.4.13), on a :

$$\int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x) + f(c)[g(c+) - g(c)]$$

d'où :

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x) - f(c)[g(c+) - g(c)]. \tag{1.4.16}$$

Deuxième étape $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$. Par le théorème de Stone-Weierstrass, si $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, il existe $(f_n)_n \in (C^1([a,b],\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ tel que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, $(n \to +\infty)$, où $\|\phi\|_\infty := \sup_{a\le x\le b} |\phi(x)|$. D'après l'équation (1.4.16), on a :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \int_a^b f_n(x)dg(x) &= \int_a^c f_n(x)dg(x) + \int_c^b f_n(x)dg(x) \\ & \quad -f_n(c)[g(c+) - g(c)]. \end{cases} \tag{1.4.17}$$

$$\begin{aligned} |\int_a^b f_n(x)dg(x) - \int_a^b f(x)dg(x)| &= |\int_a^b (f_n(x) - f(x))dg(x)| \\ &\le V_a^b(g)\|f_n - f\|_\infty \to 0 \quad (n \to +\infty). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x). \tag{1.4.18}$$

$$\begin{aligned} |\int_c^b f_n(x)dg(x) - \int_c^b f(x)dg(x)| &= |\int_c^b (f_n(x) - f(x))dg(x)| \\ &\le V_c^b(g)\sup_{c\le x\le b}|f_n(x) - f(x)| \\ &\le V_c^b(g)\|f_n - f\|_\infty \to 0 \quad (n \to +\infty) \end{aligned}$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_c^b f_n(x)dg(x) = \int_c^b f(x)dg(x). \tag{1.4.19}$$

La convergence uniforme entraîne la convergence simple, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(c) = f(c). \tag{1.4.20}$$

En utilisant les équations (1.4),(1.4.18), (1.4.19), (1.4.20) dans l'équation (1.4.17) on obtient :

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x) - f(c)[g(c+) + g(c)].$$

(iii) Cette relation est une traduction de la relation $\pi([a,b]) = \pi([a,c[\cup[c,b]) = \pi([a,c[) + \pi([c,b])$. □

Remarque 1.4.3. *Soit $a < c < b$ dans $\mathbb{R}$. Alors :*

$$\begin{aligned} \int_a^b 1dg(x) &= \mu[g]([a,b]) = g(b+) - g(a) \\ \int_a^c 1dg(x) &= \mu[g]([a,c]) = g(c+) - g(a) \\ \int_c^b 1dg(x) &= \mu[g]([c,b]) = g(b+) - g(c). \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_a^c 1dg(x) + \int_c^b 1dg(x) = g(b+) - g(a) + [g(c+) - g(c)]$$

d'où :

$$\int_a^b 1dg(x) = \int_a^c 1dg(x) + \int_c^b 1dg(x) - [g(c+) - g(c)].$$

Proposition 1.4.9. *Soit $g \in NBV(S,\mathbb{R})$. On définit $g+ : S \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $(g+)(t) := g(t+)$ pour $t \in [a,b[$ et $(g+)(b) := g(b)$. Alors les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) $g+ \in BC_d^0(S,\mathbb{R}) \cap BV(S,\mathbb{R})$.

(ii) $\|g+\|_\infty \leq V_a^b(g+)$.

(iii) *Si g et $g+$ sont dérivables en $t \in]a,b[$ alors $(g+)'(t) = g'(t)$.*

Démonstration. **(i)** Comme $g \in NBV(S,\mathbb{R})$, g est réglée et ainsi $g+$ est bien définie. On fixe arbitrairement $t \in [a,b[$. Nous avons

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(t,\epsilon) > 0, \forall s, t < s < t+\delta \Longrightarrow |g(t+) - g(s)| \leq \epsilon.$$

On fixe arbitrairement $\epsilon > 0$. Quand s, r sont tels que $t < s < r < t+\delta$, on obtient $|g(t+) - g(r)| \leq \epsilon$, et quand $r \to s+$, on obtient $|g(t+) - g(s+)| \leq \epsilon$. Et ainsi on a $|(g+)(t) - (g+)(s)| \leq \epsilon$ quand $t < s < t+\delta$. Et ainsi on a prouvé que $g+ \in C_d^0(S,\mathbb{R})$. Soit $(t_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathfrak{S}(S)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} |(g+)(t_{i+1}) - (g+)(t_i)| \leq \sum_{i=0}^{n} |(g+)(t_{i+1}) - g(t_{i+1})| \\
&+ \sum_{i=0}^{n} |g(t_{i+1}) - g(t_i)| + \sum_{i=0}^{n} |g(t_i) - (g+)(t_i)| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} |\mu[g]|(\{t_{i+1}\}) + V_a^b(g) + \sum_{i=0}^{n} |\mu[g]|(\{t_i\}) \\
&= |\mu[g]|(\{t_i : i \in \{1,...,n+1\}) + V_a^b(g) + |\mu[g]|(\{t_i : i \in \{0,...,n\}) \\
&\leq 2|\mu[g]|(S) + V_a^b(g) < +\infty.
\end{aligned}$$

De plus on a $g+ \in BV(S,\mathbb{R})$. Comme $BV(S,\mathbb{R}) \subset B(S,\mathbb{R})$, nous obtenons (**i**).

(ii) Comme $(g+)(b) = 0$, en utilisant [35], on a $\|g+\|_\infty \leq V_a^b(g+) + |(g+)(b)| = V_a^b(g+)$.

(iii) Soit $t \in]a,b[$ tel que g et $g+$ sont dérivables en t. Comme $BV(S,\mathbb{R}) \subset R(S,\mathbb{R})$ il existe $D \subset S$, D au plus dénombrable, tel que g est continue en tout point de $S \setminus D$, [10]. En conséquence , si $s \in S \setminus D$, nous avons $g(s) = (g+)(s)$. $S \setminus D$ est dense dans S, comme le contraire impliquerait qu'un sous-ensemble au plus dénombrable contiendrait un sous-ensemble ouvert de S ceci est impossible. Nous pouvons trouver une suite $(r_q)_{q\in\mathbb{N}}$ telle que $t + r_q \in S \setminus D$, et telle que $\lim\limits_{q\to+\infty} r_q = 0$. Comme $t + r_q \in S \setminus D$, nous avons $(g+)(t+r_q) = g(t+r_q)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. Comme $(g+)'(t)$ existe, on a

$$(g+)'(t) = \lim_{q\to+\infty} \frac{(g+)(t+r_q) - (g+)(t)}{r_q} = \lim_{q\to+\infty} \frac{g(t+r_q) - g(t)}{r_q} = g'(t).$$

□

Proposition 1.4.10. *Soit $g \in NBV(S,\mathbb{R})$ et $f \in C^0(S,\mathbb{R})$. Nous considérons l'application $P : S \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $P(t) := \int_a^t dg(s)f(s)$. Alors les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) $P \in BV(S,\mathbb{R}) \cap BC_d^0(S,\mathbb{R})$.

(ii) *Pour tout $t \in]a,b]$, $P(t-) - P(t) = [g(t) - g(t+)]f(t)$.*

(iii) *Si en outre nous supposons que $f \in C^1(S,\mathbb{R})$, alors pour Lebesgue-presque tout $t \in S$, P et g sont dérivables en t et nous avons $P'(t) = g'(t)f(t)$.*

Démonstration. **(i)** Soit $(t_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathfrak{S}(S)$. En utilisant la propostion 1.4.8, nous obtenons, pour tout $i \in \{0, ..., n\}$,

$$\int_a^{t_{i+1}} dg(t)f(t) - \int_a^{t_i} dg(t)f(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} dg(t)f(t) - [(g+)(t_i) - g(t_i)]f(t_i).$$

Alors, en utilisant l'additivité de la variation des fonctions à variation bornée et l'additivité des mesures, nous avons

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} |P(t_{i+1}) - P(t_i)| = \sum_{i=0}^{n} |\int_a^{t_{i+1}} dg(t)f(t) - \int_a^{t_i} dg(t)f(t)| \\
&= \sum_{i=0}^{n} |\int_{t_i}^{t_{i+1}} dg(t)f(t) - [(g+)t_i) - g(t_i)]f(t_i)| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} |\int_{t_i}^{t_{i+1}} dg(t)f(t)| + \sum_{i=0}^{n} |[(g+)(t_i) - g(t_i)]f(t_i)| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} V_{t_i}^{t_{i+1}}(g)\|f\|_\infty + \sum_{i=0}^{n} |(g+)(t_i) - g(t_i)||f(t_i)| \\
&\leq V_a^b(g)\|f\|_\infty + \sum_{i=0}^{n} |\mu[g](\{t_i\})|\|f\|_\infty \\
&= V_a^b(g)\|f\|_\infty + |\mu[g](\{t_i : i \in \{0, ..., n\}\})|\|f\|_\infty \\
&\leq V_a^b(g)\|f\|_\infty + |\mu[g]|(S)\|f\|_\infty < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc nous avons prouvé que $P \in BV(S, \mathbb{R})$.

D'après le théorème de Stone-Weierstrass, $C^1(S, \mathbb{R})$ est dense dans $C^0(S, \mathbb{R})$. Soit $(f_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite de l'espace $C^1(S, \mathbb{R})$ tel que $\lim_{q\to+\infty} \|f_q - f\|_\infty = 0$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$ nous définissons la fonction $P_q : S \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $P_q(t) := \int_a^t dg(s)f_q(s)$. En utilisant la Proposition 1.4.8 nous avons, pour tout $t \in [a, b[$,

$$P_q(t) = (g+)(t)f_q(t) - g(a)f_q(a) - \int_a^t g(s)f_q'(s)ds. \tag{1.4.21}$$

Comme $f_q' \in C^0(S, \mathbb{R})$ et $g \in BV(S, \mathbb{R})$, f_q' et g sont Riemann-intégrables, et leur produit $g \cdot f_q'$ est aussi Riemann-intégrables, et en conséquence $g \cdot f_q'$ est Lebesgue-intégrable sur S, et ainsi nous avons

$$[t \mapsto \int_a^t g(s)f_q'(s)ds] \in AC(S, \mathbb{R}) \subset C^0(S, \mathbb{R}). \tag{1.4.22}$$

En utilisant la proposition 1.4.9, nous savons que $g+ \in C_d^0(S, \mathbb{R})$, et comme f_q est continue, nous obtenons $(g+)f_q \in C_d^0(S, \mathbb{R})$. Et ainsi $P_q \in C_d^0(S, \mathbb{R})$ comme une somme de fonction continue à droite sur S. En nous appuyant sur le début de cette preuve nous savons que $P_q \in BV(S, \mathbb{R}) \subset B(S, \mathbb{R})$, et donc nous obtenons $P_q \in BC_d^0(S, \mathbb{R})$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Pour tout $t \in S$, et pour tout $q \in \mathbb{N}$, en nous appuyant sur la linéarité de l'intégrale, nous avons

$$|P(t) - P_q(t)| = \left|\int_a^t dg(s)(f(s) - f_q(s))\right| \leq V_a^t(g)\|f - f_q\|_\infty,$$

cela implique $\|P - P_q\|_\infty \leq V_a^b(g)\|f - f_q\|_\infty$, et conséquemment nous avons $\lim_{q\to+\infty} \|P - P_q\|_\infty = 0$. Comme $BC_d^0(S, \mathbb{R})$ est complet pour $\|\cdot\|_\infty$, nous obtenons que $P \in BC_d^0(S, \mathbb{R})$.

(ii) Nous utilisons les suites $(f_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(P_q)_{q\in\mathbb{N}}$ comme précédemment. Fixons $t \in]a,b]$. En utilisant (1.4.21) en $s < t$ et $s \to t-$, nous obtenons

$$P_q(t-) = (g+)(t-)f_q(t) - g(a)f_q(a) - \int_a^{t-} g(s)f_q'(s)ds.$$

En utilisant **(i)** de la Proposition 1.1.4, et (1.4.22) nous obtenons

$$P_q(t-) = g(t)f_q(t) - g(a)f_q(a) - \int_a^{t} g(s)f_q'(s)ds,$$

et donc, en utilisant (1.4.21), nous avons $P_q(t-) - P_q(t) = [g(t) - (g+)(t)]f_q(t)$. À ce stade, en appliquant la convergence uniforme de $(f_q)_{q\in\mathbb{N}}$ vers f et la convergence uniforme de $(P_q)_{q\in\mathbb{N}}$ vers P nous obtenons le résultat annoncé.

(iii) Comme $P, g, g+ \in BV(S,\mathbb{R})$, [36], P, g et $g+$ sont différentiables λ_1-p.p. sur S. Comme une union de trois sous-ensembles λ_1-négligeable est λ_1-négligeable, il existe $N \subset S$, tel que N est λ_1-négligeable et tel que P, g, et $g+$ sont dérivables en chaque point de $S \setminus N$. Comme f' et g sont Riemann-intégrables, leurs produits $g \cdot f'$ est aussi Riemann-intégrables, donc $g \cdot f'$ est Lebesgue-intégrable sur S, et en conséquence, la fonction $[t \mapsto \int_a^t g(s)f'(s)ds]$ est absolument continue, et en conséquence, il existe $N_1 \subset S$, tel que N_1 est λ_1-négligeable et tel que $\frac{d}{dt}\int_a^t g(s)f'(s)ds = g(t)f'(t)$ pour tout $t \in S \setminus N_1$, [36]. En utilisant la proposition 1.4.8, nous avons

$$P(t) = (g+)(t)f(t) - g(a)f(a) - \int_a^t g(s)f'(s)ds.$$

Soit $N_2 := N \cup N_1$. Alors N_2 est λ_1-négligeable, et en dérivant dans la formule précédente en $t \in S \setminus N_2$ utilisant aussi **(iv)** de la proposition 1.4.9, nous obtenons

$$P'(t) = g'(t)f(t) + g(t)f'(t) - 0 - g(t)f'(t) = g'(t)f(t).$$

Notons que dans le dernier calcul, $(g+)(t) = g(t)$ comme g est dérivable en t, elle est continue en t. □

Proposition 1.4.11. *Soit $g \in NBV_0(S,\mathbb{R})$. Alors on a :*
(i) $(g+) \in C_d^0(S,\mathbb{R})$
(ii) $(g+) \in BV(S,\mathbb{R})$
(iii) *Si g et $(g+)$ sont dérivables en $x \in]a,b[$, alors $(g+)'(x) = g'(x)$.*

Démonstration. **(i)** découle de la proposition 1.1.1.

(ii) Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$ une subdivision de $\mathfrak{S}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} |(g+)(x_i) - (g+)(x_{i+1})| &= \sum_{i=0}^{n} |(g+)(x_i) - g(x_i) + g(x_i) - (g+)(x_{i+1}) \\
&\quad + g(x_{i+1}) - g(x_{i+1})| \\
&= \sum_{i=0}^{n} |[g(x_i) - g(x_{i+1})] + [(g+)(x_i) - g(x_i)] \\
&\quad - [(g+)(x_{i+1}) - g(x_{i+1})]| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} |g(x_i) - g(x_{i+1})| + \sum_{i=0}^{n} |(g+)(x_i) - g(x_i)| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n+1} |(g+)(x_i) - g(x_i)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}|(g+)(x_i)-(g+)(x_{i+1})| &\leq V_a^b(g)+\sum_{i=0}^{n}|\mu[g](\{x_i\})|+\sum_{i=1}^{n+1}|\mu[g](\{x_i\})|\\ &\leq V_a^b(g)+\sum_{i=0}^{n}|\mu[g]|(\{x_i\})+\sum_{i=1}^{n+1}|\mu[g]|(\{x_i\})\\ &\qquad\text{car } |\mu[g]| \text{ est positive.}\\ &\leq V_a^b(g)+|\mu[g]|(S)+|\mu[g]|(S)<+\infty\\ &\qquad\text{car } |\mu[g]| \text{ est une mesure positive finie.}\end{aligned}$$

(iii) Puisque g est dérivable en x, g est continue en x.
Puisque $BV(S,\mathbb{R})\subset\mathcal{R}(S,\mathbb{R})$, il existe $D\subset S$, D au plus dénombrable tel que, $\forall y\in(S\setminus D)^{\mathbb{N}}$, g est continue en y, cf. [10].
Soit $(r_n)_n$ tel que $(x+r_n)_n\in(S\setminus D)^{\mathbb{N}}$ et tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=0$. Alors, par la caractérisation séquentielle des limites dans les espaces métriques, on a :

$$\begin{aligned}(g+)(x) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{r_n}((g+)(x+r_n)-(g+)(x))\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{r_n}(g(x+r_n)-g(x))\\ &= g'(x).\end{aligned}$$

□

Proposition 1.4.12. *Soit $g\in NBV(S,\mathbb{R})$, $f\in C^0(S,\mathbb{R})$ et $c\in]a,b[$. Soit la fonction $Q:[a,c]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $Q(t):=\int_t^c dg(s)f(s)$.*
Alors nous avons $Q\in BC_g^0([a,c],\mathbb{R})$.

Démonstration. Nous fixons $t\in[a,c]$. En nous appuyant sur le théorème de Stone-Weierstrass, nous savons qu'il existe une suite $(f_q)_{q\in\mathbb{N}}$ in $C^1([a,c],\mathbb{R})$ tel que $\lim\limits_{q\to+\infty}\|f_q-f\|_\infty=0$. Pour tout $q\in\mathbb{N}$, nous définissons $Q_q:[a,c]\longrightarrow\mathbb{R}$ en posant $Q_q(t):=\int_t^c dg(s)f_q(s)$. En utilisant la proposition 1.4.8, nous avons

$$Q_q(t)=\int_t^c dg(s)f_q(s)=g(c+)f_q(c)-g(t)f_q(t)-\int_t^c g(s)f_q'(s)ds.$$

Comme f_q est continue et g est continue à gauche, le produit $g\cdot f_q$ est continue à gauche. Comme g et f_q' sont Riemann-intégrables, le produit $g\cdot f_q'$ est Riemann-intégrable, et aussi Lebesgue intégrable, et ainsi la fonction $[t\mapsto\int_t^c g(s)f_q'(s)ds]$ est absolument continue et aussi continue, et alors Q_q est la somme de deux fonctions continues à gauche et d'une constante, et ainsi nous avons prouvé que $Q_q\in C_g^0([a,c],\mathbb{R})$.

Comme $\lim\limits_{q\to+\infty}\|f_q\|_\infty=\|f\|_\infty$, la suite réelle $(\|f_q\|_\infty)_{q\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. Pour tout $t\in[a,c]$, nous avons

$$|Q_q(t)|=\left|\int_t^c dg(s)f(s)\right|\leq V_t^c(g)\|f_q\|_\infty\leq V_a^c(g)\sup_{q\in\mathbb{N}}\|f_q\|_\infty<+\infty.$$

Nous avons aussi $Q_q\in BC_g^0([a,c],\mathbb{R})$. Pour tout $q\in\mathbb{N}$, pour tout $t\in[a,c]$, nous avons

$$|Q_q(t)-Q(t)|=\left|\int_t^c dg(s)(f_q(s)-f(s))\right|\leq V_a^c(g)\|f_q-f\|_\infty,$$

ceci entraîne $\lim_{q\to+\infty} \|Q_q - Q\|_\infty = 0$. Comme $BC_g^0([a,c],\mathbb{R})$ est complet nous obtenons que $Q \in BC_g^0([a,c],\mathbb{R})$. □

Chapitre 2

Équations différentielles fonctionnelles générales

Dans ce chapitre, après avoir précisé les notations et les définitions dans les chapitres précédents, nous présentons les conditions d'existence et d'unicité locales de solutions des problèmes de Cauchy.

2.1 Existence et unicité de solutions locales des problèmes de Cauchy

2.1.1 L'énoncé du théorème

On s'intérèsse au problème de Cauchy :

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t,x_t) \\ x_\sigma & = & \phi, \end{array}\right\} \tag{2.1.1}$$

sur lequel nous considérons les ensembles :

$$\left.\begin{array}{rcl} I_\alpha & = & [0,\alpha] \\ B_\beta & = & \{\psi \in \mathfrak{C} : ||\psi||_{\mathfrak{C}} \leq \beta\} \\ \mathcal{A}(\alpha,\beta) & = & \{y \in C^0([-r,\alpha];\mathbb{R}^n) : y_0 = 0, y_t \in B_\beta, t \in I_\alpha\} \end{array}\right\} \tag{2.1.2}$$

où y_t est l'application définie sur $[-r,0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que $y_t(\theta) = y(t+\theta),\ \theta \in [-r,0]$, quand $t \in [0,\alpha]$, et les hypothèses suivantes :

— $(\sigma,\phi) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$

— $f \in C^0([\sigma,T] \times \mathfrak{C}, \mathbb{R}^n)$.

On cherche une solution $x \in C^0([\sigma - r, \sigma + r];\mathbb{R}^n)$ et de classe C^1 sur $[\sigma, r]$ de (2.1.1).

L'énoncé suivant figure dans les livres de Hale ([28], page 41) et de Hale et Verduyn Lunel ([29], page 43).

Théorème 2.1.1 (Existence)**.** *Supposons que :*

— Ω *est un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathfrak{C}$

— $f \in C^0(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

Si $(\sigma,\phi) \in \Omega$ *alors il existe au moins une solution de (2.1.1) passant par* (σ,ϕ)*. Plus généralement, si* W *est compact et* $f^0 \in C^0(\Omega,\mathbb{R}^n)$*,*

— *il existe un voisinage* $V \subseteq \Omega$ *de* W *tel que* $f^0 \in C_b^0(V;\mathbb{R}^n)$,
— *il existe un voisinage* $U \subseteq C_b^0(V;\mathbb{R}^n)$ *de* f^0 *et* $\alpha > 0$ *tel que* $\forall(\sigma,\phi) \in W$, $f \in U$ *il existe une solution* $x(\sigma,\phi,f)$ *de (2.1.1) passant par* (σ,ϕ) *définie sur* $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$.

2.1.2 La démonstration du théorème 2.1.1.

Nous proposons ici une démonstration qui a des différences avec celles données dans les ouvrages pré-cités de Hale et Verduyn Lunel. La première différence est l'utilisation du lemme de Heine-Schwartz.

La seconde différence est de modifier l'ensemble fonctionnel compact qui intervient dans l'utilisation du théorème de point fixe de Schauder. Nous commençons par les résultats suivants :

Lemme 2.1.1. *Trouver une solution de (1.1.1) est équivalent à trouver* $\alpha > 0$ *et une fonction* $y \in C^0([-r,\alpha],\mathbb{R}^n)$ *qui résout le problème :*

$$\left.\begin{array}{rcl} y_0 & = & 0 \\ y(t) & = & \displaystyle\int_0^t f(\sigma+s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds, \quad \text{si} \quad t \geq 0, \end{array}\right\} \tag{2.1.3}$$

pour $0 \leq t \leq \alpha$.

Démonstration. Pour $(\sigma,\phi) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$, soit $\tilde{\phi} \in C^0([\sigma - r, T];\mathbb{R}^n)$ définie par :

$$\left.\begin{array}{rcl} \tilde{\phi}_\sigma & = & \phi \\ \tilde{\phi}(t+\sigma) & = & \phi(0) \quad \text{si} \quad t \geq 0. \end{array}\right\} \tag{2.1.4}$$

Supposons que $x : [\sigma - r, \sigma + a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ soit une solution de l'équation (1.1.1) passant par $(\sigma,\phi) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$. On définit la fonction y en posant :

$$y(t) = x(t+\sigma) - \tilde{\phi}(t+\sigma) \quad \text{si} \quad -r \leq t \leq a. \tag{2.1.5}$$

Alors le lemme 1.1.2 entraîne que y vérifie :

$$\left.\begin{array}{rcl} y_0 & = & 0 \\ y(t) & = & \displaystyle\int_0^t f(\sigma+s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds, \quad \text{si} \quad t \geq 0. \end{array}\right\} \tag{2.1.6}$$

En effet, puisque x est solution de (1.1.1), on a :

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & \phi(0) + \displaystyle\int_\sigma^t f(s, x_s)ds, \quad \text{si} \quad \sigma \leq t \leq \sigma + a \\ x_\sigma & = & \phi \end{array}\right\} \tag{2.1.7}$$

donc

$$x(t+\sigma) = \phi(0) + \int_\sigma^{t+\sigma} f(s, x_s)ds \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq a.$$

Posons $u := s - \sigma$, alors par un changement de variable on a :

$$\forall t \in [0,a],\ x(t+\sigma) = \phi(0) + \int_0^t f(u+\sigma, x_{u+\sigma})du$$
$$\forall t \in [0,a],\ x(t+\sigma) - \phi(0) = \int_0^t f(u+\sigma, x_{u+\sigma})du$$
$$\forall t \in [0,a],\ y(t) = \int_0^t f(u+\sigma, x_{u+\sigma})du.$$

D'après (2.1.5) ; on a $y(t) = x(t+\sigma) - \tilde{\phi}(t+\sigma)$ alors pour $w \in [0,a],\ \theta \in [-r,0]$, on a $y(w+\theta) = x(w+\theta+\sigma) - \tilde{\phi}(w+\theta+\sigma) \Rightarrow y_w(\theta) = x_{w+\sigma}(\theta) - \tilde{\phi}_{w+\sigma}(\theta) \Rightarrow x_{w+\sigma} = y_w + \tilde{\phi}_{w+\sigma}$.

Quand $w = 0$ on a :

$$y_0 = x_\sigma - \tilde{\phi}_\sigma = \phi - \phi = 0. \tag{2.1.8}$$

D'où (2.1.3).

De même si y est une solution de (2.1.3), alors on a x solution de (1.1.1) par la transformation précédente : en effet pour $x(t+\sigma) = \tilde{\phi}(t+\sigma) + y(t)$ si $-r \leq t \leq a$, en posant $t = w + \theta$ avec $0 \leq w \leq a$, on a $x_{w+\sigma}(\theta) = \tilde{\phi}_{w+\sigma}(\theta) + y_w(\theta)$ si $-r \leq \theta \leq 0$, $y_0(\theta) = x_\sigma(\theta) - \tilde{\phi}_\sigma(\theta)$, or $y_0 = 0$ donc

$$\left.\begin{array}{rcl} x_\sigma(\theta) & = & \tilde{\phi}_\sigma(\theta), \quad -r \leq \theta \leq 0 \\ x_\sigma & = & \phi. \end{array}\right\} \tag{2.1.9}$$

Et ainsi $x_\sigma = \tilde{\phi}_\sigma = \phi$.

On a :

$$\begin{aligned} x(t+\sigma) - \tilde{\phi}(t+\sigma) &= \int_0^t f(\sigma+s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq a \\ x(t+\sigma) &= \tilde{\phi}(t+\sigma) + \int_0^t f(\sigma+s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds \\ x(t+\sigma) &= \phi(0) + \int_0^t f(\sigma+s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds. \end{aligned}$$

Posons $u := s + \sigma$ et effectuons le changement de variable, alors on a :

$$x(t+\sigma) = \phi(0) + \int_\sigma^{t+\sigma} f(s, x_s)ds$$

d'où, avec $\tau := t + \sigma$:

$$\left.\begin{array}{r} x(\tau) = \phi(0) + \displaystyle\int_\sigma^\tau f(s, x_s)ds \\ x_\sigma = \phi. \end{array}\right\} \tag{2.1.10}$$

D'où le lemme. □

Rappelons le lemme de Heine-Schwartz [51].

Lemme 2.1.2 (Heine-Schwartz). *Soit X et Y deux espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$ une fonction continue et K un compact de X, alors :*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon > 0,\ \forall x \in K,\ \forall z \in X, \quad d(x,z) < \delta_\epsilon \Rightarrow d(f(x), f(z)) < \epsilon.$$

Démonstration. Supposons la conclusion fausse :
$\exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x_\delta \in K,\ \exists z_\delta \in X, d(x_\delta, z_\delta) \leq \delta_\epsilon$ et $d(f(x_\delta), f(z_\delta)) > \epsilon$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prenons $\delta = \frac{1}{n}$ et posons $u_n = x_{\frac{1}{n}}$ et $v_n = z_{\frac{1}{n}}$. Puisque K est compact, il existe $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante, et il existe $\overline{u} \in K$ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_{\sigma(n)} = \overline{u}$.
On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*, d(u_{\sigma(n)}, v_{\sigma(n)}) \leq \frac{1}{\sigma(n)}$, et puisque $\lim_{n\to+\infty} \sigma(n) = +\infty$ on en déduit que $\lim v_{\sigma(n)} = \overline{u}$.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*, d(f(u_{\sigma(n)}), f(v_{\sigma(n)})) \geq \epsilon$. Or f étant continue, $\lim f(u_{\sigma(n)}) = f(\overline{u})$ et $\lim f(v_{\sigma(n)}) = f(\overline{u})$ donc
$0 = d(f(\overline{u}), f(\overline{u})) \geq \epsilon$: c'est la contradiction. □

Remarque 2.1.1. *Nous appelons le lemme précédent "lemme de Heine-Schwartz" car sa démonstration est très proche du théorème de Heine ("Toute fonction continue sur un espace métrique compact est uniformément continue") et la plus ancienne référence que nous connaissons qui contient le lemme 2.1.2 est le cours de l'X de Laurent Schwartz [51] à la page 355. Ce résultat n'a rien d'anodin, il permet de travailler sur des espaces normés de dimension infinie où les bornés ne sont pas relativement compacts. En dimension finie, pour démontrer ce lemme, il suffirait d'utiliser le fait que pour tout compact, il existe un ouvert qui contient ce compact et qui est d'adhérence compacte (cf. J. Dieudonné [23]), et puisque une fonction continue sur cette adhérence compacte est uniformément continue, on obtient le résultat. Ce raisonnement ne fonctionne plus en dimension infinie car une boule ne peut plus être d'adhérence compacte d'après un théorème de Riesz (cf.[23]). Ce lemme s'est avéré très utile dans l'étude des opérateurs de superposition, par exemple dans [13] et [14].*

Lemme 2.1.3. *Supposons que :*
- $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$ *est ouvert*
- $W \subseteq \Omega$ *est compact*
- $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Nous rappelons que $\mathcal{A}(\alpha, \beta) = \{y \in C^0([-r, \alpha]; \mathbb{R}^n) : y_0 = 0, y_t \in B_\beta, t \in I_\alpha\}$. *Alors :*

(i) *Il existe un voisinage* $V \subseteq \Omega$ *de* W *tel que* $f \in C_b^0(V, \mathbb{R}^n)$.

(ii) *Il existe un voisinage* $U \subseteq BC^0(V, \mathbb{R}^n)$ *de* f *et des constantes strictement positives* M, α, β *tels que*

$$\forall (\sigma, \phi) \in V, \quad \forall f \in V,\ \|f(\sigma, \phi)\| < M. \tag{2.1.11}$$

(iii) *De plus* $\forall t \in I_\alpha, \forall y \in \mathcal{A}(\alpha, \beta), \forall (\sigma, \phi) \in W$ *on a*

$$(\sigma + t, y_t + \tilde{\phi}_{\sigma+t}) \in V.$$

Démonstration. **(i)** Puisque f est continue sur le compact W on a :

$$\exists M \in]0; +\infty[\text{ tel que } \forall (\sigma, \phi) \in W, \|f(\sigma, \phi)\| \leq M.$$

D'après le lemme 2.1.2 on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall (\sigma, \phi) \in W, \forall (\sigma_1, \phi_1) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{C},$$

$$d((\sigma, \phi), (\sigma_1, \phi_1)) < \delta_\epsilon \Rightarrow \|f(\sigma, \phi) - f(\sigma_1, \phi_1)\| < \epsilon$$

et donc

$$\|f(\sigma_1, \phi_1)\| < \|f(\sigma, \phi)\| + \epsilon.$$

Nous fixons $\epsilon \in]0, +\infty[$ et nous posons
$V := \{(\sigma_1, \phi_1) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{C} \ : \ d((\sigma_1, \phi_1), W) < \delta_\epsilon\}$. Alors, par ce qui précède, on a :

$$\forall (\sigma_1, \phi_1) \in V, \quad \|f(\sigma_1, \phi_1)\| \leq \sup_{(\sigma,\phi)\in W} \|f(\sigma, \phi)\| + \epsilon.$$

Donc f est bien continue et bornée sur V ; ce qui prouve l'assertion (**i**).
(ii) Introduisons :

$$U := \{g \in C_b^0(V, \mathbb{R}^n) \ : \ \|g - f\|_C < r_\epsilon\}.$$

et

$$\xi := \sup_{(\sigma,\phi)\in W} \|f(\sigma, \phi)\| + \epsilon.$$

C'est la boule ouverte de centre f et de rayon r dans l'espace de Banach $(C_b^0(V, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_C)$.
Alors pour tout $(\sigma_1, \phi_1) \in V$, on a :

$$\begin{aligned} \|g(\sigma_1, \phi_1)\| &= \|g(\sigma_1, \phi_1) - f(\sigma_1, \phi_1) + f(\sigma_1, \phi_1)\| \\ \|g(\sigma_1, \phi_1)\| &\leq \|g(\sigma_1, \phi_1) - f(\sigma_1, \phi_1)\| + \|f(\sigma_1, \phi_1)\| \\ \|g(\sigma_1, \phi_1)\| &\leq r + \xi. \end{aligned}$$

Donc, $\forall g \in U$, $\sup_{(\sigma,\phi)\in W} \|g(\sigma, \phi)\| \leq r + \xi$. Et ainsi l'assertion (**ii**) est prouvée.

(iii) Soit $(\sigma, \phi) \in W$. Pour $t \in I_\alpha$, $y_t \in B_\beta$, $\alpha = \beta = \delta_\epsilon$, comme

$$d((\sigma + t, y_t + \tilde{\phi}_{\sigma+t}), (\sigma, \phi)) = \max\{|t|; \|\tilde{\phi}_{\sigma+t} + y_t - \phi\|\}$$

on a alors $|t| < \delta_\epsilon$ et $\|\tilde{\phi}_{\sigma+t} + y_t - \phi\| < \delta_\epsilon$ et donc $(\sigma + t, y_t + \tilde{\phi}_{\sigma+t}) \in V$.

□

Lemme 2.1.4. *Supposons que :*
— $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$ *est ouvert*
— $W \subseteq \Omega$ *est compact*
— $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$
— *les voisinages* U *et* V *et les constantes* M, α *et* β *sont ceux du lemme 2.1.3.*
Si l'opérateur $T : W \times U \times \mathcal{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow C^0([-r, \alpha], \mathbb{R}^n)$ *est défini par*

$$\left.\begin{aligned} T(\sigma, \phi, f, y)(t) &= 0 \quad si \quad t \in [-r, 0] \\ T(\sigma, \phi, f, y)(t) &= \int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds \quad si \ \ t \in I_\alpha \end{aligned}\right\} \tag{2.1.12}$$

alors T *est continu et il existe un compact* $\mathcal{K}$ *de* $C^0([-r, \alpha]; \mathbb{R}^n)$ *tel que*

$$T(W \times U \times \mathcal{A}(\alpha, \beta)) \subseteq \mathcal{K},$$

où $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ *est défini par* (2.1.2).
De plus si $M\alpha \leq \beta$ *alors :*

$$T(W \times U \times \mathcal{A}(\alpha, \beta)) \subseteq \mathcal{A}(\alpha, \beta).$$

Démonstration. Commençons par prouver que :
T est à valeurs dans $C^0([-r,\alpha];\mathbb{R}^n)$.
En effet l'application $[s \mapsto (\sigma+s, \tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)]$ est continue sur $[-r,\alpha]$ et l'application $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue sur Ω, ainsi $[s \mapsto f(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)]$ est continue sur $[-r,\alpha]$ d'où $[t \mapsto \int_0^t f(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s})ds]$ est continue sur $[-r,\alpha]$.
De plus la relation (2.1.11) implique que

$$\|T(\sigma,\phi,f,y)(t) - T(\sigma,\phi,f,y)(\tau)\| \leq M|t-\tau|,$$

d'où

$$\forall t,\tau \in I_\alpha,\ \|T(\sigma,\phi,f,y)(t)\| \leq M\alpha. \tag{2.1.13}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\|T(\sigma,\phi,f,y)(t) - T(\sigma,\phi,f,y)(\tau)\| &= \|\int_0^t f(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds \\
&\quad - \int_0^\tau f(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds\| \\
\Rightarrow \|T(\sigma,\phi,f,y)(t) - T(\sigma,\phi,f,y)(\tau)\| &= \|\int_\tau^t f(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds\| \\
\Rightarrow \|T(\sigma,\phi,f,y)(t) - T(\sigma,\phi,f,y)(\tau)\| &\leq |\int_\tau^t M ds| \\
\Rightarrow \|T(\sigma,\phi,f,y)(t) - T(\sigma,\phi,f,y)(\tau)\| &\leq M(t-\tau)
\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

et

$$\begin{aligned}
\|T(\sigma,\phi,f,y)(t)\| &= \|\int_0^t f(\sigma+s,\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds\| \\
\Rightarrow \|T(\sigma,\phi,f,y)(t)\| &\leq Mt \quad (\forall t \in I_\alpha) \\
\Rightarrow \|T(\sigma,\phi,f,y)(t)\| &\leq M\alpha.
\end{aligned}$$

Ainsi (2.1.13) est prouvée.
Posons

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} := \{&g \in C^0([-r,\alpha];\mathbb{R}^n) : \forall t,\tau \in I_\alpha, \|g(t)-g(\tau)\| \leq M|t-\tau|, \\
&\|g(t)\| \leq M\alpha,\ g_0 = 0\}.
\end{aligned}$$

Ainsi (2.1.13) se traduit par :

$$\forall (\sigma,\phi,f,y) \in W \times U \times \mathcal{A}(\alpha,\beta), T(\sigma,\phi,f,y) \in \mathcal{K}.$$

Nous allons montrer que $\mathcal{K}$ est compact .
La convergence uniforme entraînant la convergence simple sur $[-r,\alpha]$, on vérifie que $\mathcal{K}$ est fermé dans $C^0([-r,\alpha];\mathbb{R}^n)$ pour $||\cdot||_C$.
En effet, soit $(g_n)_n$ une suite convergente, de limite g, d'éléments de $\mathcal{K}$, montrons que $g \in \mathcal{K}$. Soit $t,\tau \in I_\alpha$, on a d'une part

$$\begin{aligned}
\|g(t)-g(\tau)\| &= \|g(t)-g_n(t)+g_n(t)-g_n(\tau)+g_n(\tau)-g(\tau)\| \\
\|g(t)-g(\tau)\| &\leq \|g(t)-g_n(t)\| + \|g_n(t)-g_n(\tau)\| + \|g_n(\tau)-g(\tau)\|.
\end{aligned}$$

Comme $\forall \epsilon > 0, \forall n \geq N_0, \|g_n(t)-g(t)\| < \frac{\epsilon}{2}$,
on a $\forall \epsilon > 0, \forall n \geq N_0, \|g(t)-g(\tau)\| < \epsilon + \|g_n - g_\tau\|$

$\Rightarrow \forall n \geq N_0, \|g(t) - g(\tau)\| \leq \|g_n(t) - g_n(\tau)\|$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in \mathcal{K}$, on a $\|g(t) - g(\tau)\| \leq M|t - \tau|$ d'autre part, on a aussi :

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}, \|g(t)\| & = & \|g(t) - g_n(t) + g_n(t)\| \\ \|g(t)\| & \leq & \|g(t) - g_n(t)\| + \|g_n(t)\| \\ \forall \epsilon > 0,\ \|g(t)\| & < & \epsilon + \|g_n(t)\| \end{array}$$

et puisque, $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in \mathcal{K}$, alors $\|g_n(t)\| \leq M\alpha$ d'où $\|g(t)\| \leq M\alpha$ et on a bien $g \in \mathcal{K}$.
Ainsi pour prouver que $\mathcal{K}$ est compact, il suffit de prouver que $\mathcal{K}$ est relativement compact. Pour cela d'après la version du théorème d'Ascoli-Arzèla donnée dans ([17], page 25), il suffit de prouver que $\mathcal{K}$ est uniformément équicontinu, puisque dim $\mathbb{R}^n < +\infty$ et les fonctions de $\mathcal{K}$ sont à valeurs dans un borné. En effet pour tout $\epsilon > 0$, en posant $\delta_\epsilon := \frac{\epsilon}{M}$, on a : $\forall t, \tau \in [-r, \alpha]$,
$|t - \tau| \leq \delta_\epsilon \Longrightarrow \forall g \in \mathcal{K}, \|g(t) - g(\tau)\| \leq M\delta_\epsilon = \epsilon$; ainsi $\mathcal{K}$ est bien uniformément équicontinu donc compact.
On a vu ci-dessus que $T(\sigma, \phi, f, y) \in \mathcal{K}$ dès que $(\sigma, \phi, f, y) \in W \times U \times \mathcal{A}(\alpha, \beta)$; d'où

$$T(W \times U \times \mathcal{A}(\alpha, \beta)) \subseteq \mathcal{K}. \tag{2.1.15}$$

On doit maintenant montrer que T est continu.
Soit $(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k)_k$ une suite à valeurs dans $W \times U \times \mathcal{A}(\alpha, \beta)$ qui converge vers $(\sigma, \phi, f, y) \in W \times U \times \mathcal{A}(\alpha, \beta)$. Il s'agit de démontrer que

$$\lim_{k \to +\infty} T(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k) = T(\sigma, \phi, f, y).$$

Dans un premier temps, montrons que $\lim_{k \to +\infty} f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}^k_{\sigma^k + s} + y^k_s) = f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)$.
Soit $s \in I_\alpha$; on a :

$$\begin{aligned} \|f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+s} + y^k_s) - f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)\| \leq \\ \|f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+s} + y^k_s) - f(\sigma^k + s, \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+s} + y^k_s)\| \\ + \|f(\sigma^k + s, \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+s} + y^k_s) - f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)\|, \end{aligned}$$

et comme $\lim_{k \to +\infty} \|f^k - f\|_{\mathfrak{C}} = 0$, on a, $\forall s \in I_\alpha$,

$$\lim_{k \to +\infty} \|f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+s} + y^k_s) - f(\sigma^k + s, \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+s} + y^k_s)\| = 0. \tag{2.1.16}$$

De plus on a,

$$\forall s \in I_\alpha, \lim_{k \to +\infty} f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+s} + y^k_s) = f(\sigma^k + s, \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+s} + y^k_s),$$

et la continuité de f nous permet d'obtenir que : $\forall s \in I_\alpha$,

$$\lim_{k \to +\infty} f(\sigma^k + s, \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+s} + y^k_s) = f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s). \tag{2.1.17}$$

Finalement, avec (2.1.16) et (2.1.17), $\forall s \in I_\alpha$, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+s} + y^k_s) = f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)$$

On a aussi vu précédemment que $\forall(\sigma, \phi) \in V$ et $\forall f \in V$ on a : $\|f(\sigma, \phi)\| \leq M$, ainsi puisque $\forall k \in \mathbb{N}, f^k \in W$, on a : $\forall(\sigma, \phi) \in V, \|f^k(\sigma, \phi)\| \leq M$.

Comme $\forall t \in I_\alpha, \forall k \in \mathbb{N}, (\sigma^k + t, \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+t} + y^k_t) \in V$, on a $\|f(\sigma^k + t, \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+t} + y^k_t)\| \leq M$. Puisque les constantes sont Lebesgue-intégrables sur $[\sigma, T]$, on a, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\begin{aligned}
\forall t \in I_\alpha, \lim_{k\to+\infty} T(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k)(t) &= \lim_{k\to+\infty} \int_0^t f^{\eta(k)}(\sigma^{\eta(k)} + s, \tilde{\phi}^{\eta(k)} + s, y_s^{\eta(k)})ds \\
&= \int_0^t \lim_{k\to+\infty} f^{\eta(k)}(\sigma^{\eta(k)} + s, \tilde{\phi}^{\eta(k)} + s, y_s^{\eta(k)})ds \\
&= \int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) \\
&= T(\sigma, \phi, f, y)(t).
\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure que T est continu. □

Maintenant, nous pouvons démontrer le théorème.

Démonstration. Supposons que $W = \{(\sigma, \phi)\}$, W est compact, d'après le lemme 1.1.1 et en considérant $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$ et $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, il existe un voisinage de W tel que $f \in C^0_b(V, \mathbb{R}^n)$ et il existe $U \subseteq C^0_b(V, \mathbb{R}^n)$ un voisinage de f et M, α, β positifs tels que

$$\forall (\sigma, \phi) \in V \quad et \quad \forall f \in U, |f(\sigma, \phi)| < M.$$

Si $T : W \times U \times \mathcal{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow C^0([-r, \alpha]; \mathbb{R}^n)$ est défini par :

$$\left.\begin{aligned}
T(\sigma, \phi, f, y)(t) &= 0 \quad si \quad t \in [-r, 0] \\
T(\sigma, \phi, f, y)(t) &= \int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds \quad si \quad t \in I_\alpha
\end{aligned}\right\},$$

σ, ϕ, f étant donnés, on peut considérer $T(\sigma, \phi, f, \cdot) = F$ et avec $M\alpha \leq \beta$

$$F : \mathcal{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow \mathcal{A}(\alpha, \beta).$$

Vérifions que F est continu et $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ est fermé, borné et convexe dans $C^0([-r, \alpha]; \mathbb{R}^n)$.
En effet, soit $t \in [0, 1]$ et $u, v \in \mathcal{A}(\alpha, \beta)$, alors

$$\begin{aligned}
&|tu + (1-t)v| \leq t|u| + (1-t)|v| \quad \text{et} \quad ||u||_C \leq \beta \text{ et } ||v||_C \leq \beta \Rightarrow \\
&\|tu + (1-t)v\| \leq t\beta + (1-t)\beta \Rightarrow \\
&\|tu + (1-t)v\| \leq \beta \quad \text{d'où} \quad tu + (1-t)v \in \mathcal{A}(\alpha, \beta).
\end{aligned}$$

De plus, pour tout sous-ensemble borné B de $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$, $F(B)$ est uniformément équicontinue.
En effet :
soit $\epsilon > 0$, $|t_1 - t_2| < \alpha \Rightarrow$
$\|Fy(t_1) - Fy(t_2)\| = \| \int_0^{t_1} f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds - \int_0^{t_2} f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds \|$

$$\begin{aligned}
\|Fy(t_1) - Fy(t_2)\| &= \| \int_{t_1}^{t_2} f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s+y_s})ds \| \\
\|Fy(t_1) - Fy(t_2)\| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s+y_s})\|ds \\
\|Fy(t_1) - Fy(t_2)\| &\leq M|t_1 - t_2| \quad \text{ainsi} \quad Ty \in T(B).
\end{aligned}$$

Posons $\epsilon = M\alpha$; on a alors

$$\|Fy(t_1) - Fy(t_2)\| < \epsilon, \quad Fy \in T(B),$$

donc $F(B)$ est bien uniformément équicontinue et donc par le théorème d'Ascoli ([51]) $F(B)$ est relativement compacte dans $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$.
Comme $T(B)$ est fermée alors $T(B)$ est compacte dans $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$, on peut ainsi utiliser le théorème du point fixe de Schauder (cf. sous-section 1.3.1) et donc il existe y tel que $Ty = y$.
Ainsi on a :

$$\left.\begin{array}{l} y(t) = \displaystyle\int_0^t f^0(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds \ \text{ si } \ t \geq 0 \\ y_0 = 0. \end{array}\right\}$$

□

Théorème 2.1.2 (Unicité)**.** *Supposons que :*
— $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$
— f *est continue*
— $f(t, \phi)$ *est lipschitzienne en* ϕ *sur chaque compact de* Ω.

Si $(\sigma, \phi) \in \Omega$ *alors il existe une solution unique* $x : [\sigma - r, \sigma + a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de l'équation passant par* (σ, ϕ) *tel que si* $y : [\sigma - r, \sigma + a_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *avec* $a_1 < a$, *est une solution de l'équation passant par* (σ, ϕ) *alors* $y = x_{|[\sigma-r,\sigma+a_1]}$.

Démonstration. Soit

$$x : [\sigma - r, \sigma + \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

une solution de l'équation passant par ϕ. Soit

$$0 < a_1 < \alpha \quad \text{et} \quad y : [\sigma - r, \sigma + a_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

une solution de l'équation passant par (σ, ϕ). Posons $\tilde{x} = x_{|[\sigma-r,\sigma+a_1]}$ et supposons $\tilde{x} \neq y$, alors

$$\begin{array}{rcl} \tilde{x}(t) - y(t) & = & \displaystyle\int_\sigma^t [f(s, \tilde{x}_s) - f(s, y_s)]ds \ \text{ pour } \ \sigma \leq t \leq \sigma + a_1 \\ \tilde{x}_\sigma - y_\sigma & = & 0. \end{array}$$

Soit k la constante de Lipstchitz de f pour un compact contenant $\{(t, x_t), (t, y_t) : \ t \in [\sigma, \sigma + \alpha]\}$.
Prenons $\bar{\alpha}$ suffisamment petit tel que $k\bar{\alpha} < 1$, alors pour $t \in [\sigma, \sigma + a_1]$,

$$\begin{array}{rcl} \|\tilde{x}(t) - y(t)\| & = & \| \displaystyle\int_\sigma^t [f(s, \tilde{x}_s) - f(s, y_s)]ds\| \\ \|\tilde{x}(t) - y(t)\| & \leq & \displaystyle\int_\sigma^t \|f(s, \tilde{x}_s) - f(s, y_s)\|ds \\ & \leq & k \displaystyle\int_\sigma^t \|\tilde{x}_s - y_s\|_C ds \\ & \leq & k \displaystyle\int_\sigma^t \sup_{\sigma \leq s \leq \sigma + a_1} \|\tilde{x}_s - y_s\|_C ds \\ & \leq & k \displaystyle\sup_{\sigma \leq s \leq \sigma + a_1} \|\tilde{x}_s - y_s\|_C \int_\sigma^t 1ds \\ & \leq & k\bar{\alpha} \displaystyle\sup_{\sigma \leq s \leq \sigma + a_1} \|\tilde{x}_s - y_s\|_C, \quad (\text{ si } \sigma \leq t \leq \bar{\alpha}) \end{array}$$

$$\text{Or on a } x_s : [-r,0] \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ [u \mapsto x(s+u)],\ \text{et}$$
$$\forall t \in [\sigma, \sigma+a_1],\ \|\tilde{x}(t) - y(t)\| \leq k\bar{\alpha} \sup_{\sigma \leq s \leq t} \|\tilde{x}(s+\cdot) - y(s+\cdot)\|_C,$$
$$\forall t \in [\sigma, \sigma+a_1],\ \|\tilde{x}(t) - y(t)\| \leq k\bar{\alpha} \sup_{\sigma \leq s \leq \sigma+a_1} \|\tilde{x}(s+\cdot) - y(s+\cdot)\|_C.$$

Comme $k\bar{\alpha} < 1$, on a si $t \in [\sigma, \sigma + A_1]$:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{x}(t) - y(t)\| &< \sup_{\sigma \leq s \leq \sigma+a_1} \|\tilde{x}(s+.) - y(s+.)\|_C \\
\|\tilde{x}(t) - y(t)\| &< \sup_{\sigma \leq s \leq \sigma+a_1} \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|\tilde{x}(s+\theta) - y(s+\theta)\|, \\
\|\tilde{x}(t) - y(t)\| &< \sup_{\sigma-r \leq z \leq \sigma+a_1} \|\tilde{x}(z) - y(z)\|,
\end{aligned}$$

$$\sup_{\sigma \leq t \leq \sigma+a_1} \|\tilde{x}(t) - y(t)\| < \sup_{\sigma-r \leq z \leq \sigma+a_1} \|\tilde{x}(z) - y(z)\|.$$

Par hypothèse on a $\tilde{x}_\sigma = \phi = y_\sigma$, or $\tilde{x}_\sigma : [-r, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par $\tilde{x}_\sigma(\theta) = \tilde{x}(\sigma + \theta)$ pour $-r \leq \theta \leq 0$. Ainsi on a $\tilde{x}(z) = y(z)$ pour $z \in [\sigma - r, \sigma]$; d'où

$$\sup_{\sigma-r \leq t \leq \sigma+a_1} \|\tilde{x}(t) - y(t)\| < \sup_{\sigma-r \leq z \leq \sigma+a_1} \|\tilde{x}(z) - y(z)\|.$$

Ce qui est impossible donc en fait $x_{|[\sigma-r,\sigma+a_1]} = y$ pour $a_1 < \alpha$, d'où l'unicité. □

2.2 Solutions non prolongeables

La section précédente traite des solutions locales des problèmes de Cauchy. Ici on s'intéresse aux solutions globales. Elle contient les énoncés de Hale ([28], page 43) et Hale et Verduyn ([29], page 45) dont nous explicitons les démonstrations.

Supposons l'application f de l'équation (1.1.1) continue. Si x est une solution de l'équation (1.1.1) sur un intervalle $[\sigma, a]$, où $a > \sigma$, on dit que $\tilde{x}$ est un prolongement de x s'il existe $b > a$ tel que $\tilde{x}$, définie sur $[\sigma - r, b[$, coïncide avec x sur $[\sigma - r, a[$ et x satisfait l'équation (1.1.1) sur $[\sigma, b[$.

Une solution x est dite *non prolongeable* si un tel prolongement n'existe pas ; ainsi, l'intervalle $[\sigma, a[$ est l'intervalle maximal d'existence de la solution x. L'existence de solutions non prolongeables est prouvée avec le lemme de Zorn.

Théorème 2.2.1. *Supposons que :*
— $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$ *un sous-ensemble ouvert*
— $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Si x est une solution non prolongeable de l'équation (1.1.1) sur $[\sigma, b[$ alors pour tout compact $W \subseteq \Omega$, il existe un $t_W \in [\sigma, b[$ tel que $(t, x_t) \notin W$ pour $t_W \leq t < b$.

Démonstration. Si $b = +\infty$, le graphe de la solution sort de tout compact donc il nous reste à traiter le cas où b est fini.
Cas $r = 0$, il s'agit d'une équation différentielle ordinaire .

Soit W un compact de Ω, alors il existe $U \subseteq C_b^0(V, \mathbb{R}^n)$ un voisinage de f et $\alpha > 0$ tel que $\forall (\sigma, y) \in W$ et $f \in U$, il existe une solution $x = x(\sigma, y, f)$ de (2.1.1) passant par (σ, y) qui existe sur $[\sigma, \sigma + \alpha]$. Maintenant supposons que l'assertion du théorème soit fausse, c.-à-d. : il existe un compact $W \subseteq \Omega$ tel que $\forall\, t_W \in [\sigma, b[, \exists\, t \in [t_W, b[$ tel que $(t, x(t)) \in W$.
Posons $M := \sup_{(s,y)\in W} ||f(s, y)||$, M est fini car f est continue et W est compact. Ceci entraîne que $[s \mapsto x(s)]$ est lipschitzienne, donc uniformément continue sur $[\sigma, b[$. En effet pour $t, \tau \in [\sigma, b[$ on a :

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(\tau)\| &= \| \int_\tau^t f(s, x(s))ds\| \\ &\leq M|t - \tau|. \end{aligned}$$

Soit $(t_n)_n$ une suite d'éléments de $[\sigma, b[$ qui converge vers b. Ainsi

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_0, |t_p - t_q| < \epsilon,$$

d'où

$$\forall p, q \geq N_0, \|x(t_p) - x(t_q)\| < M\epsilon,$$

qui entraîne que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, donc convergente dans $\mathbb{R}^n$; soit ℓ sa limite. Ainsi nous pouvons prolonger x par continuité en b, en posant $x(b) = \ell$ et $(b, x(b)) \in W$. Comme $x'(t) = f(t, x(t))$, on a x de classe C^1 sur $[\sigma, b]$. En considérant le problème de Cauchy :

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(b) &= \ell, \end{aligned}\right\}$$

le théorème de Cauchy-Lispchitz ([19]) d'existence et d'unicité locales, implique qu'il existe une solution locale $y : [b - \alpha, b + \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
On obtient ainsi un prolongement $\hat{x}$ de x sur $[\sigma, b + \alpha]$ en posant :

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x(t), \text{ pour } t \in [\sigma, b[\\ \hat{x}(t) &= y(t), \text{ pour } t \in [b, b + \alpha]. \end{aligned}\right\}$$

Et donc x ne serait plus solution non prolongeable et cela contredit l'hypothèse.

Cas $r > 0$. Si l'assertion du théorème est fausse, Il existe un compact $\mathcal{W} \subseteq \Omega$ tel que $\forall\, t_{\mathcal{W}} \in [\sigma, b[,\ \exists\, t \in [t_{\mathcal{W}}, b[$ tel que $(t, x_t) \in \mathcal{W}$.
Posons $M := \sup_{(s,\phi)\in\mathcal{W}} ||f(s, \phi)||$, M est fini car f est continue et $\mathcal{W}$ est compact. Ceci entraîne que $[s \mapsto x(s)]$ est lipschitzienne car sa dérivée est bornée, donc uniformément continue sur $[\sigma, b[$. Comme précédemment, il existe $\psi : [-r, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $\lim_{t\to b^-} x_t = \psi$; en effet soit $(t_k)_k$ une suite d'éléments de $[\sigma, b[$ convergeant vers b.
$\forall\, \theta \in [-r, 0]$ on a $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ on a

$$\left.\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} x_{t_k}(\theta) &= \lim_{k\to+\infty} x(t_k + \theta) \\ &= x(b + \theta) \\ &= \psi(\theta). \end{aligned}\right\} \tag{2.2.1}$$

Ainsi nous pouvons prolonger x par continuité en b, en posant $x_b = \psi$ et $(b, x_b) \in \mathcal{W}$. Comme $x'(t) = f(t, x_t)$, on a x de classe C^1 sur $[\sigma - r, b]$. En considérant le problème de Cauchy :

$$\left.\begin{aligned} x'(t) = f(t, x_t) \\ x_b = \psi, \end{aligned}\right\}$$

le théorème d'existence locale, (théorème 2.1.1), implique qu'il existe une solution locale $y : [b-\alpha, b+\alpha] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On obtient ainsi un prolongement $\hat{x}$ de x sur $[\sigma - r, b + \alpha]$ en posant :

$$\left.\begin{array}{rcl} \hat{x}(t) & = & x(t), \text{ pour } t \in [\sigma, b[\\ \hat{x}(t) & = & y(t), \text{ pour } t \in [b, b+\alpha]. \end{array}\right\}$$

Et donc x n'est plus une solution non prolongeable et cela contredit l'hypothèse. □

Introduisons l'ensemble :

$$L^\infty L^1(I \times J, E) = \{u \in L^0(I \times J, E) : [t \mapsto u(t, \cdot)] \in L^\infty(I, L^1(J, E))\}$$

Théorème 2.2.2. *Supposons que :*
- $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$ *un ouvert*
- $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est complètement continue*
- x *est une solution non prolongeable de l'équation* (1.1.1) *sur* $[\sigma - r, b[$.

Alors pour tout sous-ensemble fermé et borné U de $\mathbb{R} \times \mathfrak{C}$, $U \subseteq \Omega$, il existe t_u tel que $(t, x_t) \notin U$, pour tout $t \in [t_u, b[$.

Démonstration. Si $b = +\infty$ alors le graphe de la solution sort de tout compact donc la solution n'est pas bornée donc il ne peut rester dans un compact.
Si $b < +\infty$, nous considérons deux cas : $r = 0$ et $r > 0$.
cas $r = 0$ (alors $\mathfrak{C} = \mathbb{R}^n$), cela nous ramène à une équation différentielle ordinaire. De plus U est un fermé borné de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, il est donc compact. On se retrouve donc dans le cas du théorème 2.2.1 .
cas $r > 0$ supposons la conclusion du théorème fausse, c.-à-d. $\exists\ U$ fermé, borné de $\mathbb{R} \times \mathfrak{C}$, $U \subseteq \Omega$, $\forall\ T < b$, $\exists\ t_T \in [T, b[$ tel que $(t_T, x_{t_T}) \in U$. En posant $T := b - \frac{1}{k}, \forall\ k \in \mathbb{N}^*$, on a $(t_k, x_{t_k}) \in U$.
U étant borné, $\exists\ M \in]0; +\infty[$ tel que $(\forall (t, \phi) \in L^\infty L^1(I \times J, E), |t| + \|\phi\|_\infty < M)$, ainsi
$\forall\ k \in \mathbb{N}^*, \|x_{t_k}\|_\infty \leq M$ c.-à-d. $\sup\limits_{\theta \in [-r, 0]} \|x(t_k + \theta)\| \leq M$.
D'une part, comme $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = b-$, on a $: \exists\ K, \forall\ k \geq K, |t_k - b| < \dfrac{r}{2} \Rightarrow (\forall k \geq K, |t_k - t_{k+1}| < r)$
$\Rightarrow (\forall k \geq K, t_k \in [t_{k+1} - r, t_{k+1}]) \Rightarrow (\forall t \in [t_K, b[, ||x(t)|| \leq M)$.
D'autre part, puisque x est continue sur $[\sigma - r, t_K]$ qui est compact, x est bornée sur cet intervalle, et finalement x est bornée sur $[\sigma - r, b[$. f étant complètement continue sur l'ensemble borné $\{(t, x_t), t \in [\sigma, b[\}$, son image est relativement compacte. L' équation intégrale pour les solutions de (1.1.1) entraîne

$$\|x(t + \tau) - x(t)\| = \| \int_t^{t+\tau} f(s, x_s) ds\| \leq M\tau \text{ pour } t, t + \tau < b.$$

x est uniformément continue sur $[\sigma - r, b[$, donc prolongeable en b. En définitive $\{(t, x_t), t \in [\sigma, b[\}$ est contenu dans un compact de Ω et ceci contredit le théorème 2.2.1. □

Chapitre 3

Équations différentielles fonctionnelles linéaires

Dans toute la suite : $J = [\sigma, T]$, $S = [\sigma - r, T]$, $S^1 = [\sigma - r - T, T]$, $\Delta = [-r, 0] \subset \mathbb{R}$

3.1 Théorème de représentation des fonctions linéaires continues sur $C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$

Nous allons énoncer sans le démontrer la version du théorème de Riesz qui concerne l'espace des fonctions continues [36] :

Lemme 3.1.1. *Pour tout* $\Gamma \in \mathfrak{C}^*$, $\exists F \in BV([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ *telle que*

$$< \Gamma, \phi >= \int_{-r}^{0} dF(\theta)\phi(\theta),$$

et nous avons l'égalité suivante :

$$\|\Gamma\|_{\mathfrak{C}^*} = V_{-r}^0(F).$$

Pour tout $t \in J$, nous avons $L(t) \in \mathfrak{L}(C^0(\Delta, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$. Si $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(e_j^*)_{1 \leq j \leq n}$ sa base duale, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, posons $L^j(t) := e_j^* \circ L(t) \in \mathfrak{L}(C^0(\Delta, \mathbb{R}^n), \mathbb{R})$. Et alors, pour tout $\phi \in C^0(\Delta, \mathbb{R}^n)$, nous avons $L(t).\phi = (L^1(t).\phi, ..., L^n(t).\phi)$. Pour tout $\phi \in C^0(\Delta, \mathbb{R}^n)$, nous avons $\phi = (\phi^1, ..., \phi^n)$, où $\phi^k \in C^0(\Delta, \mathbb{R})$, et alors nous avons, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$,

$$L^j(t).\phi = L^j(t).(\phi^1, ..., \phi^n) = \sum_{k=1}^{n} L^j(t).(0, ..., 0, \phi^k, 0, ..., 0).$$

Nous définissons $\ell^{j,k}(t) \in \mathfrak{L}(C^0(\Delta, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ en posant
$\ell^{j,k}(t).\phi^k := L^j(t).(0, ..., 0, \phi^k, 0, ..., 0)$. Et ainsi nous avons

$$L(t).(\phi^1, ..., \phi^n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \ell^{1,k}(t).\phi^k, ..., \sum_{k=1}^{n} \ell^{n,k}(t).\phi^k \right). \tag{3.1.1}$$

En utilisant le théorème de représentation de Riesz de l'espace $\mathfrak{L}(C^0(\Delta, \mathbb{R}), \mathbb{R})$, dual de $C^0(\Delta, \mathbb{R})$, [35], [40], nous savons que, pour tout $t \in J$ et pour tout $j, k \in \{1, ..., n\}$, il existe $g^{j,k}[t] \in BV(\Delta, \mathbb{R})$

tel que, pour tout $\phi^k \in C^0(\Delta, \mathbb{R})$, nous avons

$$\ell^{j,k}(t).\phi^k = \int_\Delta dg^{j,k}[t]\phi^k = \int_{-r}^0 dg^{j,k}[t](\theta)\phi^k(\theta).$$

Comme expliqué dans [35], nous pouvons trouver $\eta^{j,k}[t] \in NBV(\Delta, \mathbb{R})$ tel que, pour tout $\phi^k \in C^0(\Delta, \mathbb{R})$, nous avons

$$\int_{-r}^0 dg^{j,k}[t](\theta)\phi^k(\theta) = \int_{-r}^0 d\eta^{j,k}[t](\theta)\phi^k(\theta).$$

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles $n \times n$, nous définissons l'application $\eta : J \times \Delta \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant $\eta(t, \theta) = (\eta^{j,k}(t, \theta))_{1 \le j,k \le n} := (\eta^{j,k}[t](\theta))_{1 \le j,k \le n}$ pour tout $t \in J$ et pour tout $\theta \in \Delta$. Et ainsi, pour tout $\phi = (\phi^1, ..., \phi^n) \in C^0(\Delta, \mathbb{R}^n)$, nous avons

$$L(t).\phi = \int_{-r}^0 d_2\eta(t, \theta)\phi(\theta) := \left(\sum_{k=1}^n \int_{-r}^0 d\eta^{j,k}[t](\theta)\phi^k(\theta) \right)_{1 \le j \le n}. \tag{3.1.2}$$

Nous établissons le résultat de régularité suivant :

Théorème 3.1.1. *Soit $L \in C^0(J, \mathfrak{L}(C^0(\Delta, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n))$. Alors il existe une application $\eta : J \times \Delta \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivantes.*

- **(i)** *Pour tout $t \in J$, $\eta(t, \cdot) \in NBV(\Delta, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.*
- **(ii)** *Pour tout $t \in J$, $\|\eta(t, \cdot)\|_{BV} = \|L(t)\|_{\mathfrak{L}}$.*
- **(iii)** *$[t \mapsto \eta(t, \cdot)] \in C^0(J, NBV(\Delta, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})))$.*
- **(iv)** *Pour tout $\phi \in C^0(\Delta, \mathbb{R}^n)$, pour tout $t \in J$, (3.1.2) est vérifiée.*
- **(v)** *η est Lebesgue-mesurable sur $J \times \Delta$.*
- **(vi)** *η est Riemann-intégrable sur $J \times \Delta$.*

Démonstration. **(i)** est vérifié par construction de η.

(ii) C'est une conséquence de la formule donnée dans [35], p.156 et au choix de la valeur 0 en 0.

(iii) Notons que, pour tout $t, t_1 \in J$, et pour tout $\phi \in C^0(\Delta, \mathbb{R}^n)$, en utilisant la linéarité de l'intégrale nous avons $(L(t) - L(t_1)) \cdot \phi = \int_\Delta d_2(\eta(t, \theta) - \eta(t_1, \theta))\phi(\theta)$, et en conséquence, comme pour **(ii)**, nous obtenons $\|L(t) - L(t_1)\|_{\mathfrak{L}} = \|\eta(t, \cdot) - \eta(t_1, \cdot)\|_{BV}$, et alors l'assertion découle de la continuité de $[t \mapsto L(t)]$.

(iv) Cette assertion est due à la construction de η.

(v) Si $A \in \mathfrak{B}(J)$ et $c \in NBV(\Delta, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, nous définissons l'application $u : J \times \Delta \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant $u(t, \theta) := 1_A(t) \cdot c$, où 1_A est l'indicatrice de A. Comme l'application $[(r, e) \mapsto r.e]$ est bilinéaire continue, c'est une mesure de Borel, $[(t, \theta) \mapsto t \mapsto 1_A(t)]$ est Borel-mesurable comme composition d'applications Borel-mesurables, $[(t, \theta) \mapsto \theta \mapsto c(\theta)]$ est Borel-mesurable comme composition d'applications Borel-mesurables, et ainsi u est Borel-mesurable comme composition d'applications Borel-mesurables.

Si $(A_i)_{1 \le i \le m} \in (\mathfrak{B}(J))^m$ est tel que $\cup_{1 \le i \le m} A_i = J$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ quand $i \neq j$, si $(c_i)_{1 \le i \le m} \in NBV(\Delta, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^m$, alors la fonction $v : J \times \Delta \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par $v(t, \theta) := \sum_{1 \le i \le m} 1_{A_i}(t) \cdot c_i(\theta)$, est Borel-mesurable comme une somme finie d'applications Borel-mesurables.

Comme $[t \mapsto \eta(t,\cdot)] \in C^0(J, NBV(\Delta, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{L}^1(J, NBV(\Delta, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, il existe une suite de fonctions étagées qui converge λ_1-presque partout vers $[t \mapsto \eta(t,\cdot)]$ sur J, [41]. Alors, [41], comme $\lambda_1(J) < +\infty$, il existe une sous-suite de cette suite qui converge simplement vers $[t \mapsto \eta(t,\cdot)]$ λ_1-presque partout.
Et ainsi il existe une suite $(f_q)_{q\in\mathbb{N}}$ telle que $f_q(t) = \sum_{1\leq i\leq m_q} 1_{A_{q,i}}(t).c_{q,i}$ est une fonction étagée, λ_1-presque partout. Pour tout $t \in J$, nous avons $\lim_{q\to+\infty} \|f_q(t) - \eta(t,\cdot)\|_{BV} = 0$.
Nous définissons $v_q : J \times \Delta \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $v_q(t,\theta) := f_q(t)(\theta)$. Nous avons donc montrer que v_q est Borel-mesurable sur $J \times \Delta$. Nous définissons

$$K := \{t \in T : \lim_{q\to+\infty} \|f_q(t) - \eta(t,\cdot)\|_{BV} = 0\}.$$

Nous savons que $K \in \overline{\mathfrak{B}}(J)$ et $\lambda_1(J \setminus K) = 0$. Nous définissons $C := K \times \Delta$. Comme $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_{BV}$ sur $NBV(\Delta, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, et ainsi la convergence uniforme implique la convergence simple, nous obtenons, pour tout $(t,\theta) \in C$, $\lim_{q\to+\infty} v_q(t,\theta) = \eta(t,\theta)$. Notons que $C \in \overline{\mathfrak{B}}(J) \otimes \overline{\mathfrak{B}}(\Delta)$, et $\lambda_2((J \times \Delta) \setminus C) = \lambda_2((J \setminus K) \times \Delta) = \lambda_1(J \setminus K) \cdot \lambda_1(\Delta) = 0$. Nous définissons $w_q : J \times \Delta \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $w_q(t,\theta) := v_q(t,\theta) \cdot 1_C(t,\theta)$. Alors w_q est Lebesgue-mesurable sur $J \times \Delta$ comme un produit de deux applications Lebesgue-mesurables. Nous définissons de plus $w : J \times \Delta \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $w(t,\theta) := \lim_{q\to+\infty} w_q(t,\theta) = \eta(t,\theta) \cdot 1_C(t,\theta)$ pour tout $(t,\theta) \in J \times \Delta$. Notons que w est Lebesgue-mesurable sur $J \times \Delta$ comme une limite simple d'une suite de fonctions Lebesgue-mesurables. Comme $(J \times \Delta) \setminus C$ est λ_2-négligeable en $J \times \Delta$, l'égalité $w = \eta.1_C$ entraîne que $\eta = w$ Lebesgue-presque partout sur $J \times \Delta$, et comme $\overline{\mathfrak{B}}(J \times \Delta)$ est une tribu complète, nous obtenons que η est Lebesgue-mesurable sur $J \times \Delta$.

(vi) Nous introduisons l'ensemble

$$D := \{(t,\theta) \in J \times \Delta : \eta(t,\theta+) \neq \eta(t,\theta)\}.$$

Notons que, comme une fonction à variation bornée est réglée, le terme $\eta(t,\theta+)$ existe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans un premier temps, nous prouvons que l'ensemble des points de discontinuité de η dans $J \times \Delta$ est égal à D. Il est clair que si $(t,\theta) \in D$ alors η n'est pas continue en (t,θ). Inversement, si η n'est pas continue en (t,θ) alors il existe $\epsilon \in (0,+\infty)$ et une suite $(t_q,\theta_q)_{q\in\mathbb{N}_*}$ dans $J \times \Delta$ telle que : $\|(t_q,\theta_q) - (t,\theta)\| \leq \frac{1}{q}$ et $\|\eta(t_q,\theta_q) - \eta(t,\theta)\| > \epsilon$, pour tout $q \in \mathbb{N}_*$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \epsilon &< \|\eta(t_q,\theta_q) - \eta(t,\theta)\| \\ &\leq \|\eta(t_q,\theta_q) - \eta(t,\theta_q)\| + \|\eta(t,\theta_q) - \eta(t,\theta)\| \\ &\leq \|\eta(t_q,\cdot) - \eta(t,\cdot)\|_{BV} + \|\eta(t,\theta_q) - \eta(t,\theta)\|, \end{aligned}$$

et après (**iii**) nous avons $\lim_{q\to+\infty} \|\eta(t_q,\cdot) - \eta(t,\cdot)\|_{BV} = 0$, nous obtenos pour tout q suffisamment grand, $\frac{\epsilon}{2} < \|\eta(t,\theta_q) - \eta(t,\theta)\|$, ceci implique que $\eta(t,\cdot)$ n'est pas continue en θ, et comme $\eta(t,\cdot)$ est réglée et continue à gauche nous avons nécéssairement $\eta(t,\theta+) \neq \eta(t,\theta)$, i.e. $(t,\theta) \in D$. Après (**v**), nous savons que η est Lebesgue-mesurable, et en utilisant la Proposition 1.4.9 et un raisonnement similaire nous pouvons prouver que la fonction $\eta+ := [(t,\theta) \mapsto \eta(t,\theta+)]$ est de plus Lebesgue-mesurable. Alors D est Lebesgue-mesurable comme $(\eta - \eta+)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Notons que $D_{t,\cdot} := \{\theta \in \Delta : (t,\theta) \in D\}$ est Lebesgue-mesurable dans $\mathbb{R}$; c'est l'ensemble des points de discontinuité de $\eta(t,\cdot)$. Comme l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction à variation bornée est au plus dénombrable, il est Lebesgue-négligeable, et ainsi nous avons

$\lambda_1(D_{t,.}) = 0$. En utilisant [36], nous avons $\lambda_2(D) = \int_J \lambda_1(D_{t,.})d\lambda_1(t) = \int_J 0 d\lambda_1(t) = 0$, et en conséquence, D est Lebesgue-négligeable dans $\mathbb{R}^2$. En utilisant [49] nous obtenons que η est Riemann-intégrable sur $J \times \Delta$.

□

Remarque 3.1.1. *La fonction $[\alpha \mapsto \eta(t, \alpha - t)]$ est continue à gauche. On a aussi :*

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \eta(t, \alpha - t + h) &= \lim_{h\to 0^+} \eta(t, \alpha + h - t) \\ &= \eta(t, (\alpha+) - t) \end{aligned}$$

et enfin : $\{\alpha \in [\sigma, t] : \eta(t, (\alpha+) - t) \neq \eta(t, \alpha - t)\}$ est au plus dénombrable, donc Lebesgue-négligeable.

Proposition 3.1.1. *Supposons que $L \in C^0(J, \mathfrak{L}(C^0(\Delta, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n))$; η est définie par le théorème 3.1.1. Soit $\phi \in C^0(\Delta, \mathbb{R}^n)$. Nous définissons la fonction $\psi : [\sigma, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en posant*

$$\psi(t) := \begin{cases} \int_{-r}^{\sigma - t} d_2\eta(t, \theta)\phi(t - \sigma + \theta) & \text{si} \quad t \in [\sigma, \sigma + r] \\ 0 \quad \text{si} \quad t \in]\sigma + r, T]. \end{cases}$$

Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

- **(i)** $\psi \in BC_g^0([\sigma, T], \mathbb{R}^n)$.
- **(ii)** *Pour tout $t \in [\sigma, \sigma + r]$, $\psi(t) - \psi(t+) = [\eta(t, (\sigma - t)+) - \eta(t, \sigma - t)] \cdot \phi(0)$.*
- **(iii)** $\psi(\sigma + r) = [\eta(t, (\sigma - t)+) - \eta(t, \sigma - t)] \cdot \phi(0)$.
- **(iv)** $\psi(\sigma) = L(\sigma) \cdot \phi$.

Démonstration. **(i)** Fixons $t \in]\sigma, \sigma + r]$. Soit $h \in]0, t - \sigma[$. Alors nous avons $t - h \in]\sigma, \sigma + r[$, et

$$\psi(t - h) - \psi(t) = \int_{-r}^{\sigma - t + h} d_2\eta(t - h, \theta)\phi(t - h - \sigma + \theta) - \int_{-r}^{\sigma - t} d_2\eta(t, \theta)\phi(t - \sigma + \theta).$$

Nous introduisons

$$I_h := \int_{-r}^{\sigma - t + h} d_2\eta(t - h, \theta)\phi(t - h - \sigma + \theta) - \int_{-r}^{\sigma - t + h} d_2\eta(t, \theta)\phi(t - h - \sigma + \theta),$$

$$II_h := \int_{-r}^{\sigma - t + h} d_2\eta(t, \theta)\phi(t - h - \sigma + \theta) - \int_{-r}^{\sigma - t + h} d_2\eta(t, \theta)\phi(t - \sigma + \theta),$$

et

$$III_h := \int_{-r}^{\sigma - t + h} d_2\eta(t, \theta)\phi(t - \sigma + \theta) - \int_{-r}^{\sigma - t} d_2\eta(t, \theta)\phi(t - \sigma + \theta).$$

Alors nous avons

$$\psi(t - h) - \psi(t) = I_h + II_h + III_h. \tag{3.1.3}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \|I_h\| &= \| \int_{-r}^{\sigma - t + h} d_2[\eta(t - h, \theta) - \eta(t, \theta)]\phi(t - h - \sigma + \theta) \\ &\leq V_{-r}^{\sigma - t + h}(\eta(t - h, \cdot) - \eta(t, \cdot)).\|\phi\|_\infty \\ &\leq V_{-r}^{0}(\eta(t - h, \cdot) - \eta(t, \cdot)).\|\phi\|_\infty = \|L(t - h) - L(t)\|_{\mathfrak{L}} \cdot \|\phi\|_\infty, \end{aligned}$$

et comme L est continue, nous avons $\lim_{h\to 0+} \|L(t-h)-L(t)\|_{\mathfrak{L}} = 0$ ceci implique

$$\lim_{h\to 0+} I_h = 0. \tag{3.1.4}$$

Suivant un théorème de Heine, ϕ est uniformément continue sur le compact $[-r,0]$ qui permet de prouver l'assertion suivante

$$\lim_{h\to 0+} \sup_{\theta\in[-r,\sigma-t+h]} \|\phi(t-h-\sigma+\theta)-\phi(t-\sigma+\theta)\| = 0.$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned} \|II_h\| &= \|\int_{|r}^{\sigma-t+h} d_2\eta(t,\theta)[\phi(t-h-\sigma+\theta)-\phi(t-\sigma+\theta)\| \\ &\leq V_{-r}^0(\eta(t,\cdot))\cdot \sup_{\theta\in[-r,\sigma-t+h]} \|\phi(t-h-\sigma+\theta)-\phi(t-\sigma+\theta)\|, \end{aligned}$$

et en utilisant la relation précédente, nous obtenons

$$\lim_{h\to 0+} II_h = 0. \tag{3.1.5}$$

Pour traiter III_h, posons $f^k(\theta) := \phi(t-\sigma+\theta)$, $g^{j,k}(\theta) := \eta^{j,k}(t,\theta)$,
et $P^j(x) := \sum_{k=1}^n \int_{-r}^{x} dg^{j,k}(\theta) f^k(\theta)$, notons que $III_h = (P^j(\sigma-t+h)-P^j(\sigma-t))_{1\leq j\leq n}$, et en utilisant (**i**) de la proposition 1.4.10, nous obtenons

$$\lim_{h\to 0+} III_h = 0. \tag{3.1.6}$$

Utilisant (3.1.4), (3.1.5) et (3.1.6) dans (3.1.3), nous obtenons
$\lim_{h\to 0+} (\psi(t-h)-\psi(t)) = 0$, i.e. $\psi(t-) = \psi(t)$ quand $t\in[\sigma,\sigma+r]$, et comme ψ est constant sur $]\sigma+r,T]$, nous avons prouvé

$$\psi \in C_g^0([\sigma,T],\mathbb{R}^n). \tag{3.1.7}$$

Comme L est continue et $[\sigma,\sigma+r]$ est compact, nous avons
$\sup_{t\in[\sigma,\sigma+r]} \|L(t)\|_{\mathfrak{L}} < +\infty$. Quand $t\in[\sigma,\sigma+r]$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\| &= \|\int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta)\| \leq V_{-r}^{\sigma-t}(\eta(t,\cdot))\cdot\|\phi\|_\infty \\ &\leq V_{-r}^0(\eta(t,\cdot))\cdot\|\phi\|_\infty = \|L(t)\|_{\mathfrak{L}}\cdot\|\phi\|_\infty \\ &\leq \sup_{t\in[\sigma,\sigma+r]} \|L(t)\|_{\mathfrak{L}}\cdot\|\phi\|_\infty < +\infty, \end{aligned}$$

et comme $\|\psi(t)\| = 0$ sur $]\sigma+r,T]$, nous avons $\psi\in B([\sigma,T],\mathbb{R}^n)$, et (**i**) est prouvé.

(ii) Fixons t. Soit $h > 0$.

$$\begin{aligned}
\psi(t) - \psi(t+h) &= \int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta) \\
&\quad - \int_{-r}^{\sigma-t-h} d_2\eta(t+h,\theta)\phi(t+h-\sigma-\theta) \\
&= \int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta) - \int_{-r}^{\sigma-t-h} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma-\theta) \\
&\quad + \int_{-r}^{\sigma-t-h} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta) \\
&\quad - \int_{-r}^{\sigma-t-h} d_2\eta(t,\theta)\phi(t+h-\sigma+\theta) \\
&\quad + \int_{-r}^{\sigma-t-h} d_2\eta(t,\theta)\phi(t+h-\sigma+\theta) \\
&\quad - \int_{-r}^{\sigma-t-h} d_2\eta(t+h,\theta)\phi(t+h-\sigma+\theta)
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\forall h > 0, \quad \psi(t) - \psi(t+h) = A_h + B_h + C_h. \tag{3.1.8}$$

En posant :

$$\begin{aligned}
A_h &= \int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta) - \int_{-r}^{\sigma-t-h} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma-\theta) \\
B_h &= \int_{-r}^{\sigma-t-h} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta) - \int_{-r}^{\sigma-t-h} d_2\eta(t,\theta)\phi(t+h-\sigma+\theta) \\
C_h &= \int_{-r}^{\sigma-t-h} d_2\eta(t,\theta)\phi(t+h-\sigma+\theta) - \int_{-r}^{\sigma-t-h} d_2\eta(t+h,\theta)\phi(t+h-\sigma+\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|C_h\| &= \| \int_{-r}^{\sigma-t-h} [d_2\eta(t,\theta) - d_2\eta(t+h-\sigma+\theta)]\phi(t+h-\sigma+\theta)\| \\
&\leq V_{-r}^{\sigma-t-h}(\eta(t,\cdot) - \eta(t+h,\cdot))\|\phi\|_\infty \\
&\leq V_{-r}^{0}(\eta(t,\cdot) - \eta(t+h,\cdot))\|\phi\|_\infty \\
&= \|L(t) - L(t+h)\|_* \cdot \|\phi\|_\infty \to 0 \quad (h \to 0+) \text{ car L est continue.}
\end{aligned}$$

donc :

$$\lim_{h\to 0+} C_h = 0. \tag{3.1.9}$$

$$\begin{aligned}
\|B_h\| &= \| \int_{-r}^{\sigma-t-h} d_2\eta(t,\theta)[\phi(t-\sigma+\theta) - \phi(t+h-\sigma+\theta)]\| \\
&\leq V_{-r}^{\sigma-t-h}(\eta(t,\cdot)) \cdot \sup_{-r\leq\theta\leq\sigma-t-h} \|\phi(t-\sigma+\theta) - \phi(t+h-\sigma+\theta)\| \\
&\leq V_{-r}^{0}(\eta(t,\cdot)) \cdot \sup_{-r\leq\theta\leq\sigma-t-h} \|\phi(t-\sigma+\theta) - \phi(t+h-\sigma+\theta)\|
\end{aligned}$$

comme $\sup_{-r\leq\theta\leq\sigma-t-h} \|\phi(t-\sigma+\theta) - \phi(t+h-\sigma+\theta)\| \to 0 \quad (t \to 0+)$ donc :

$$\lim_{h\to 0+} B_h = 0. \tag{3.1.10}$$

$$A_h = \int_{\sigma-t-h}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta) - \phi(-h)[\eta(t,(\sigma-t-h)+) - \eta(t,\sigma-t-h)] \tag{3.1.11}$$

d'après la relation de Chasles ;
par la proposition 1.1.3, puisque $\eta(t,(\sigma-t-h)+)-\eta(t,((\sigma-t)+)-h)$ on a :

$$\lim_{h\to 0+}\eta(t,(\sigma-t-h)+)=\eta(t,(\sigma-t)). \tag{3.1.12}$$

En outre, puisque $\eta(t,\cdot)$ est continue à gauche, on a

$$\lim_{h\to 0+}\eta(t,\sigma-t-h)=\eta(t,(\sigma-t)). \tag{3.1.13}$$

Puisque ϕ est continue, des équations (3.1.12) et (3.1.13), on a :

$$\lim_{h\to 0+}-\phi(-h)[\eta(t,(t-\sigma-h)+)-\eta(t,t-\sigma-h)]=0. \tag{3.1.14}$$

Appliquons la propostion 1.4.12 à $\int_{\sigma-t-h}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta)$ avec $c:=\sigma-t$
$g(\theta)=\eta(t,\theta),\quad f(\theta)=\phi(t-\sigma+\theta)$, on sait que, $Q(x):=\int_x^{\sigma-t} dg(\theta)f(\theta)$, Q est continue à gauche, donc, $\zeta(h):=Q(\sigma-t-h)$, ζ est continue à droite, et donc : $\lim_{h\to 0+}\zeta(h)=\zeta(0)=Q(\sigma-t)$ entraîne que

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{\sigma-t-h}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta)=\int_{\sigma-t}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta)$$

$$=[\eta(t,(\sigma-t)+)-\eta(t,\sigma-t)]\phi(t-\sigma+\sigma-t)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0+}\int_{\sigma-t-h}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta)=[\eta(t,(\sigma-t)+)-\eta(t,\sigma-t)]\phi(0). \tag{3.1.15}$$

Avec les équations (3.1.14) et (3.1.15) on obtient :

$$\lim_{h\to 0+}A_h=[\eta(t,(\sigma-t)+)-\eta(t,\sigma-t)]\phi(0). \tag{3.1.16}$$

En utilisant les équations (3.1.9), (3.1.10), (3.1.16) dans l'équation (3.1.8) on obtient :

$$\psi(t)-\psi(t+)=[\eta(t,(\sigma-t)+)-\eta(t,\sigma-t)]\phi(0).$$

(iii) En utilisant la proposition 1.4.8, nous avons

$$\psi(\sigma+r)=\int_{-r}^{-r} d_2\eta(t,\theta)\phi(r+\theta)=[\eta(\sigma+r,-r+)-\eta(\sigma+r,-r)].\phi(0).$$

(iv) En utilisant la définition de ψ, nous avons $\psi(\sigma)=\int_{-r}^{0} d_2\eta(\sigma,\theta)\phi(\theta)=L(\sigma).\phi$.

□

3.1.1 Prolongement de η à $[\sigma, T] \times [\sigma - r - T, T]$

Dans cette partie on souhaite étendre le domaine de définition de η.
$NBV([a,b],E) = BV([a,b],E) \cap C_g^0([a,b],E)$.
$NBV_0([a,b],E) := \{f \in NBV([a,b],E) : f(b) = 0\}$.
Alors $\|f\|_{NBV} := V_a^b(f)$ est une norme sur $NBV_0([a,b],E)$ qui devient un espace de Banach.

On prolonge η en $\bar{\eta}$ de la façon suivante :

$$\bar{\eta} : [\sigma, T] \times [\sigma - r - T, T] \longrightarrow E$$

$$\bar{\eta}(t,\theta) := \begin{cases} \eta(t,-r) & \text{si} \quad t \in [\sigma,T],\ \theta \in [\sigma - r - T, -r[\\ \eta(t,\theta) & \text{si} \quad t \in [\sigma,T],\ \theta \in [-r,0] \\ 0 & \text{si} \quad t \in [\sigma,T],\ \theta \in]0,T]. \end{cases} \tag{3.1.17}$$

On a le résultat suivant :

Proposition 3.1.2 (propriétés de $\bar{\eta}$)**.** *On a :*
(a) $\forall t \in [\sigma,T],\ \bar{\eta}(t,\cdot) \in NBV_0([\sigma - r - T, T], E)$
(b) $\forall t \in [\sigma,T],\ V_{\sigma-r-T}^T(\bar{\eta}(t,\cdot)) = V_{-r}^0(\eta(t,\cdot))$
(c) $[t \mapsto \bar{\eta}(t,\cdot)] \in C^0([\sigma,T], NBV_0([\sigma - r - T, T], E))$.
(d) *$\bar{\eta}$ est Lebesgue-mesurable sur* $[\sigma,T] \times [\sigma - r - T, T]$.
(e) *$\bar{\eta}$ est Riemann-intégrable sur* $[\sigma,T] \times [\sigma - r - T, T]$.
(f) *Pour tout* $t \in J$, $\psi(t) = \int_{-r}^{\sigma - t} d_2\bar{\eta}(t,\theta)\phi(t - \sigma + \theta)$.

Démonstration. — Soit $t \in [\sigma,T]$; $\eta(t,\cdot) \in C_g^0([-r,0],E) \Rightarrow$

$$\bar{\eta}(t,\cdot) \text{ est continue à gauche sur }]-r,0[. \tag{3.1.18}$$

Sur $[\sigma - r - T, -r[$, $\bar{\eta}(t,\cdot)$ est constante $\Rightarrow$

$$\bar{\eta}(t,\cdot) \text{ est continue à gauche sur } [\sigma - r - T, -r[. \tag{3.1.19}$$

$\lim_{\theta \to (-r)-} \bar{\eta}(t,\theta) = \bar{\eta}(t,-r)$ car $\bar{\eta}(t,\theta) = \eta(t,-r)$ et $\bar{\eta}(t,-r) = \eta(t,-r)$ quand $\theta \in [\sigma - r - T, -r[$, donc :

$$\bar{\eta}(t,\cdot) \text{ est continue à gauche en } -r. \tag{3.1.20}$$

Puisque $\eta(t,\cdot)$ est C_g^0 en 0, on a $\lim_{\theta \to 0-} \eta(t,\theta) = \eta(t,0) \Rightarrow \lim_{\theta \to 0-} \bar{\eta}(t,\theta) = \bar{\eta}(t,0)$ d'où :

$$\bar{\eta}(t,\cdot) \text{ est continue à gauche en 0.} \tag{3.1.21}$$

Enfin $\bar{\eta}(t,\cdot)$ est constante sur $]\sigma,T]$ donc :

$$\bar{\eta}(t,\cdot) \text{ est } C_g^0 \text{ sur }]\sigma,T]. \tag{3.1.22}$$

Avec (3.1.19), (3.1.18), (3.1.20), (3.1.21), (3.1.22) on a

$$\bar{\eta}(t,\cdot) \in C_g^0([\sigma - r - T, T], E). \tag{3.1.23}$$

D'après [21], p.100, Proposition 24.3 dit que :

$$V_{\sigma-r-T}^T(\bar{\eta}(t,\cdot)) = V_{\sigma-r-T}^{-r}(\bar{\eta}(t,\cdot)) + V_{-r}^0(\bar{\eta}(t,\cdot)) + V_0^T(\bar{\eta}(t,\cdot))$$

Puisque $\bar{\eta}(t,\cdot)$ est constante sur $[\sigma-r-T,-r]$ et sur $[\sigma,T]$, on a $V^{-r}_{\sigma-r-T}(\bar{\eta}(t,\cdot))=0$ et $V^{T}_{0}(\bar{\eta}(t,\cdot))=0$, et puisque $\bar{\eta}(t,\cdot)=\eta(t,\cdot)$ sur $[-r,0]$ on a

$$V^{T}_{\sigma-r-T}(\bar{\eta}(t,\cdot))=V^{0}_{-r}(\eta(t,\cdot)). \tag{3.1.24}$$

Ceci prouve **(a)** et **(b)**.

— En utilisant le même argument, on prouve que

$$\forall t,t_1\in[\sigma,T],\ V^{T}_{\sigma-r-T}(\bar{\eta}(t,\cdot)-\bar{\eta}(t_1,\cdot))=V^{0}_{-r}(\bar{\eta}(t,\cdot)-\bar{\eta}(t_1,\cdot))$$

ainsi $\bar{\eta}(t,\cdot)-\bar{\eta}(t_1,\cdot)\in NBV_0([-r,0],E)$. D'où on obtient **(c)**.

— Introduisons les sous-ensembles suivants de $J\times\Delta^1$: $A^1:=[\sigma,T]\times[\sigma-r-T,-r[$, $A^2:=[\sigma,T]\times[-r,0]$ et $A^3:=[\sigma,T]\times]0,T]$. Comme $[\sigma,T]\in\mathfrak{B}(J)$, et comme $[\sigma-r-t,-r[,\ [-r,0]$, $]0,T]\in\mathfrak{B}(\Delta^1)$, nous avons $A^1,\ A^2,\ A^3\in\mathfrak{B}(J\times\Delta^1)=\mathfrak{B}(J)\otimes\mathfrak{B}(\Delta^1)\subset\overline{\mathfrak{B}}(J\times\Delta^1)$. Notons de plus que $A^1\cup A^2\cup A^3=J\times\Delta^1$, et que $A^1,\ A^2,\ A^3$ sont deux à deux disjoints. La fonction $f_1:=[(t,\theta)\mapsto t\mapsto\eta(t,-r)]$ est Lebesgue-mesurable sur A^1 comme une composition d'applications Lebesgue-mesurables. L'application nulle 0 est Lebesgue-mesurable sur A^3 car constante. Grâce au théorème 3.1.1, nous savons que $\bar{\eta}$ est Lebesgue-mesurable sur A^2. Quand $B\in\mathfrak{B}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, nous avons $(\bar{\eta})^{-1}(B)=[f_1^{-1}(B)\cap A^1]\cup[\bar{\eta}^{-1}(B)\cap A^2]\cup[0^{-1}(B)\cap A^3]$. Comme $f_1^{-1}(B)\cap A^1,\ \bar{\eta}^{-1}(B)\cap A^2,\ 0^{-1}(B)\cap A^3\in\overline{\mathfrak{B}}(J\times\Delta^1)$, nous obtenons que $(\bar{\eta})^{-1}(B)\in\overline{\mathfrak{B}}(J\times\Delta^1)$.

— Utilisant la notation introduite dans la preuve de (c), on a $\bar{\eta}$ continue en tout point de A^1 et en tout point de A^3. Notons D^2 l'ensemble des points de discontinuité de η dans $J\times]-r,0[$, l'ensemble des points de discontinuité de $\bar{\eta}$ est inclus dans $(J\times\{-r\})\cup(J\times D^2)\cup(J\times\{0\})$. Comme $\lambda_2(J\times\{-r\})=\lambda_1(J)\cdot 0=0$, $\lambda_2(J\times\{0\})=\lambda_1(J)\cdot 0=0$, et comme $\lambda_2(D^2)=0$ grâce au théorème 3.1.1, $(J\times\{-r\})\cup(J\times D^2)\cup(J\times\{0\})$ est λ_2-négligeable, et comme un sous-ensemble d'un ensemble λ_2-négligeable est de plus λ_2-négligeable, l'ensemble des points de discontinuité de $\bar{\eta}$ est λ_2-négligeable. Nous concluerons en utilisant [49].

— Quand $t\leq\sigma+r$ nous avons $-r\leq\sigma-t\leq 0$ et alors, pour tout $\theta\in[-r,\sigma-t]$, nous avons $\bar{\eta}(t,\theta)=\eta(t,\theta)$ qui implique $\displaystyle\int_{-r}^{\sigma-t}d_2\bar{\eta}(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta)=\psi(t)$. Quand $t>\sigma+r$ nous avons $\sigma-t<-r$ et de plus
$\displaystyle\int_{-r}^{\sigma-t}d_2\bar{\eta}(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta)=-\int_{\sigma-t}^{-r}d_2\bar{\eta}(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta)$ et, pour tout $\theta\in[\sigma-t,-r]$, nous avons $\bar{\eta}(t,\theta)=\eta(t,-r)$ (constant par rapport à sa seconde variable) qui entraîne que $\displaystyle-\int_{\sigma-t}^{-r}d_2\bar{\eta}(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta)=0=\psi(t)$.

□

Proposition 3.1.3. *L'application $[s\mapsto\bar{\eta}(t,s+)]$ est continue à droite sur $[\sigma-r-T,T]$ et à valeurs dans E.*

Démonstration. On sait que $\bar{\eta}(t,\cdot)\in BV([\sigma-r-T,T],E)$ donc $\bar{\eta}(t,\cdot)\in\mathcal{R}([\sigma-r-T,T],E)$. Donc on peut appliquer la proposition 1.1.1. □

Proposition 3.1.4. *L'application $[t\mapsto\bar{\eta}(t,(\sigma-t)+)]$ est continue à gauche sur $[\sigma-r-T,T]$ et à valeurs dans E.*

Démonstration. Fixons $t \in]-T-r+\sigma, T]$. Posons $f(t) := \bar{\eta}(t,(\sigma-t)+)$.
Soit $k>0$, alors $f(t-k) = \bar{\eta}(t-k,(\sigma-t+k)+)$ entraîne que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(t-k) & = & [\bar{\eta}(t-k,(\sigma-t+k)+) - \bar{\eta}(t,(\sigma-t+k)+)] \\ & & +\bar{\eta}(t,(\sigma-t+k)+). \end{array} \right. \tag{3.1.25}$$

On sait que :

$$\lim_{\delta\to 0+} [\bar{\eta}(t-k,\sigma-t+k+\delta) - \bar{\eta}(t,\sigma-t+k+\delta)] = [\bar{\eta}(t-k,(\sigma-t+k)+) - \bar{\eta}(t,(\sigma-t+k)+)]. \tag{3.1.26}$$

Or, $\forall \delta > 0$, assez petit, on a

$$\begin{array}{rcl} \|\bar{\eta}(t-k,\sigma-t+k+\delta) - \bar{\eta}(t,\sigma-t+k+\delta)\| & \leq & \|\eta(t-k,\cdot) - \bar{\eta}(t,\cdot)\|_\infty \\ & \leq & \|L(t-k) - L(t)\|_*; \end{array}$$

ce qui entraîne :

$$\lim_{k\to 0+} \|\bar{\eta}(t-k,\sigma-t+k+\delta) - \bar{\eta}(t,\sigma-t+k+\delta)\| \leq \|L(t-k)-L(t)\|_*,$$

et puisque la norme est continue, on a :

$$\|\bar{\eta}(t-k,(\sigma-t+k)+) - \bar{\eta}(t,(\sigma-t+k)+)\| \leq \|L(t-k)-L(t)\|_*.$$

Puisque L est continue, $\lim_{k\to 0+} \|L(t-k)-L(t)\|_* = 0$, donc

$$\lim_{k\to 0+} [\bar{\eta}(t-k,(\sigma-t+k)+) - \bar{\eta}(t,(\sigma-t+k)+)] = 0. \tag{3.1.27}$$

D'après la proposition 3.1.3, on sait que :

$$\lim_{k\to 0+} \bar{\eta}(t,(\sigma-t+k)+) = \bar{\eta}(t,(\sigma-t)+). \tag{3.1.28}$$

En utilisant les équations (3.1.27) et (3.1.28), on obtient :
$\lim_{k\to 0+} f(t-k) = 0 + \bar{\eta}(t,(\sigma-t)+) \Rightarrow f(t-) = f(t)$. Donc f est continue à gauche en t. □

Proposition 3.1.5. *L'application $[s \mapsto \bar{\eta}(t,(s-t)+)]$ est continue à droite sur $[\sigma-r-T, T]$ et à valeurs dans E.*

Démonstration. Notons $\gamma(s) := \bar{\eta}(t,s-t)$; on sait que $\gamma \in C^0_g([\sigma-r-T,T],E)$. D'après la proposition 1.1.1, $(\gamma+) \in C^0_d([\sigma-r-T,T],E)$. Or $(\gamma+)(s) = (\gamma(s+)) = \bar{\eta}(t,(s+)-t) = \bar{\eta}(t,(s-t)+)$. D'où le résultat. □

Proposition 3.1.6. *Soit $\gamma : [\sigma,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction définie par :*

$$\gamma(t) := \left\{ \begin{array}{lll} -\eta(t,(\sigma-t)+)\phi(0) + \displaystyle\int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta) + H(t) & si & t \in [\sigma,\sigma+r] \\ -\eta(t,\sigma-r)\phi(0) + H(t) & si & t \in]\sigma+r,T]. \end{array} \right.$$

Alors $\gamma \in C^0([\sigma,T],\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Notons que $\eta(\cdot,\sigma-r)\phi(0)$ est continue sur $]\sigma+r,T]$ et H est continue sur $]\sigma+r,T]$ d'où

$$\gamma \text{ est continue sur }]\sigma+r,T]. \tag{3.1.29}$$

Notons que

$$\begin{aligned}\gamma(\sigma+r) &= -\eta(\sigma+r,(\sigma-r)+)\phi(0)+\int_{-r}^{-r} d_2\eta(\sigma+r,\theta)\phi(r+\theta)+H(\sigma+r)\\ &= -\eta(\sigma+r,(\sigma-r)+)\phi(0)+\eta(\sigma+r,(\sigma-r)+)\phi(0)\\ &\quad -\eta(\sigma+r,\sigma-r)\phi(0)+H(\sigma+r)\Rightarrow\\ &\quad \gamma(\sigma+r)=-\eta(\sigma+r,\sigma-r)\phi(0)+H(\sigma+r).\end{aligned} \tag{3.1.30}$$

Puisque $\eta(\cdot,-r)$ est continue sur $[\sigma+r,T]$ on a :

$$\gamma((\sigma+r)+)=-\eta(\sigma+r,\sigma-r)\phi(0)+H(\sigma+r). \tag{3.1.31}$$

Des équations (3.1.30) et (3.1.31) on obtient :

$$\gamma((\sigma+r)+)=\gamma(\sigma+r). \tag{3.1.32}$$

Notons $M(t):=-\eta(t,(\sigma-t)+)\phi(0)+H(t)$. Ainsi :

$$\forall t\in[\sigma,\sigma+r],\quad \gamma(t)=M(t)+\psi(t).$$

D'après la proposition 3.1.1 et la proposition 3.1.4, M est continue à gauche sur $]\sigma,\sigma+r]$ et ψ est continue à gauche sur $]\sigma,\sigma+r]$, donc :

$$\gamma \text{ est continue à gauche sur }]\sigma,\sigma+r]. \tag{3.1.33}$$

En particulier, de l'équation (3.1.33) on déduit :

$$\gamma((\sigma+r)-)=\gamma(\sigma+r). \tag{3.1.34}$$

Avec les équations (3.1.32) et (3.1.34) on obtient :

$$\gamma \text{ est continue au point } \sigma+r. \tag{3.1.35}$$

D'après les propositions 1.1.3 et 3.1.4, on a :

$$\begin{aligned}&\forall t\in[\sigma,\sigma+r[,\quad M(t+)=-\eta(t,\sigma-t)\phi(0)+H(t),\ \text{donc :}\\ &M(t)-M(t+)=\eta(t,(\sigma-t)+)\phi(0)+\eta(t,\sigma-t)\phi(0).\end{aligned} \tag{3.1.36}$$

D'après la proposition 3.1.1 on a :

$$\psi(t)-\psi(t+)=\eta(t,(\sigma-t)+)\phi(0)-\eta(t,\sigma-t)\phi(0). \tag{3.1.37}$$

Des équations (3.1.36) et (3.1.37), puisque $\gamma(t)-\gamma(t+)=M(t)-M(t+)+\psi(t)-\psi(t+)$, on obtient : $(\forall t\in[\sigma,\sigma+r[,\quad \gamma(t)=\gamma(t+))\Rightarrow$

$$\gamma \text{ est continue à droite sur} [\sigma,\sigma+r[. \tag{3.1.38}$$

Des équations (3.1.33) et (3.1.38) on déduit :

$$\gamma \text{ est continue sur } [\sigma,\sigma+r[. \tag{3.1.39}$$

Enfin, avec les équations (3.1.29), (3.1.35) et (3.1.39) on obtient que γ est continue sur $[\sigma,T]$. □

Lemme 3.1.2. *l'application* $[s\mapsto\bar\eta(t,s+)]$ *est continue à droite sur* $[\sigma-r-T,T]$.

Démonstration. On sait que $\bar\eta(t,\cdot)\in BV([\sigma-r-T,T],\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ donc $\bar\eta(t,\cdot)\in\mathcal{R}([\sigma-r-T,T],\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Donc on peut appliquer 1.4.9. □

3.1.2 La construction de $k(t,s)$ à partir de $\eta(t,\theta)$ et ses propriétés

On rappelle que $J := [\sigma, T]$, $S := [\sigma - r, T]$ et $S^1 = [\sigma - r - T, T]$.
On définit :

$$\begin{array}{rccc} k : J \times S & \longrightarrow & E \\ (t,s) & \longmapsto & \bar{\eta}(t, s-t) \end{array} \tag{3.1.40}$$

On suppose que $L \in C^0(J, \mathcal{L}(C^0(S, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n))$, on a donc :

Proposition 3.1.7 (Propriétés de k)**.** *Les assertions suivantes sont vérifiées*
(a) $k \in \mathcal{L}([\sigma, T] \times [\sigma - r, T], E)$
(b) $\forall t \in [\sigma, T],\ k(t, \cdot) \in NBV_0([\sigma - r, T], E)$
(c) $\forall s \in [\sigma - r, T],\ k(\cdot, s) \in C^0_d([\sigma, T], E)$

Démonstration. **(a)** Introduisons $M : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $M(t,s) := (t, s-t)$. M est linéaire. Notons que M est inversible, $M^{-1}(t,s) = (t, s+t)$ et que $M(J \times S) \subset J \times S^1$. Nous noterons M^0 la restriction de M à $J \times S$. Comme M est linéaire sur un espace vectoriel de dimension fini, M^0 est continue et en conséquence est mesurable de $(J \times S, \mathfrak{B}(J \times S))$ dans $(J \times S^1, \mathfrak{B}(J \times S^1))$. Pour $P \in \overline{\mathfrak{B}}(J \times S^1)$ il existe $B \in \mathfrak{B}(J \times S^1)$ et $Q \subset J \times S^1$ tel que $P = B \cup Q$ et Q est μ_2-négligeable. Alors il existe $Z \in \mathfrak{B}(J \times S^1)$ tel que $Q \subset Z$ et $\mu_2(Z) = 0$. Alors nous avons $(M^0)^{-1}(Q) \subset (M^0)^{-1}(Z)$, nous obtenons que $(M^0)^{-1}(Q)$ est μ_2-négligeable et en conséquence que $(M^0)^{-1}(Q) \in \overline{\mathfrak{B}}(J \times S)$. En utilisant la mesurabilité de M^0 pour la tribu Borélienne, nous avons $(M^0)^{-1}(B) \in \mathfrak{B}(J \times S) \subset \overline{\mathfrak{B}}(J \times S)$. Alors nous avons $(M^0)^{-1}(P) = (M^0)^{-1}(B \cup Q) = (M^0)^{-1}(B) \cup (M^0)^{-1}(Q) \in \overline{\mathfrak{B}}(J \times S)$. Et ainsi nous avons prouvé que M^0 est mesurable de $(J \times S, \overline{\mathfrak{B}}(J \times S))$ dans $(J \times S^1, \overline{\mathfrak{B}}(J \times S^1))$. Comme $\bar{\eta}$ est mesurable de $(J \times S^1, \overline{\mathfrak{B}}(J \times S^1))$ dans $(M_n(\mathbb{R}), \mathfrak{B}(M_n(\mathbb{R})))$, nous obtenons que $k = \bar{\eta} \circ M^0$ est mesurable de $(J \times S, \overline{\mathfrak{B}}(J \times S))$ dans $(M_n(\mathbb{R}), \mathfrak{B}(M_n(\mathbb{R})))$.

(b) Soit $t \in [\sigma, T]$. Soit $(x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_{|[\sigma-r,T]}$. On introduit $y_{-1} := \sigma - r - T, y_0 := x_0 - t, \dots, y_n := x_n - t, y_{n+1} := T$, Alors $(y_{-1}, \dots, y_{n+1}) \in \mathfrak{S}_{|[\sigma-r-T,T]}$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \|k(t,x_i) - k(t,x_{i+1})\| &= \sum_{i=0}^{n-1} \|\bar{\eta}(t, x_i - t) - \bar{\eta}(t, x_{i+1} - t)\| \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \|\bar{\eta}(t, y_j) - \bar{\eta}(t, y_{j+1})\| \\ &\leq \sum_{j=-1}^{n} \|\bar{\eta}(t, y_j) - \bar{\eta}(t, y_{j+1})\| \\ &\leq V^T_{-T-r}(\bar{\eta}(t, \cdot)) < +\infty \\ &\qquad \text{d'après proposition 3.1.2.} \end{aligned}$$

En passant au sup sur $\mathfrak{S}_{|[\sigma-r,T]}$, on obtient

$$V^T_{\sigma-r}(k(t,\cdot)) \leq V^T_{\sigma-r-T}(\bar{\eta}(t,\cdot)) < +\infty,$$

d'où l'on déduit :

$$k(t,\cdot) \in BV([\sigma - r, T], E). \tag{3.1.41}$$

Notons que :

$$k(t,T) = \bar{\eta}(t, T-t) = 0. \tag{3.1.42}$$

Soit $s \in]\sigma - r, T]$; alors $s - t \in]\sigma - r - T, T]$. Par la proposition 3.1.2, puisque $\bar{\eta}(t, \cdot)$ est continue à gauche en $s - t$, on a :

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists\, \delta_\epsilon > 0, \forall\, \theta \in]\sigma - r - T, T],\ 0 < (s-t) - \theta \leq \delta_\epsilon \Rightarrow \\ \qquad \|\bar{\eta}(t, \theta) - \bar{\eta}(t, s-t)\| \leq \epsilon, \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists\, \delta_\epsilon > 0, \forall\, s_1 \in]\sigma - r, T],\ 0 < s - s_1 \leq \delta_\epsilon \Rightarrow \\ \quad 0 < (s-t) - (s_1 - t) \leq \delta_\epsilon \Rightarrow \\ \qquad \|\bar{\eta}(t, s_1 - t) - \bar{\eta}(t, s-t)\| \leq \epsilon \Rightarrow \|k(t, s_1) - k(t, s)\| \leq \epsilon. \end{cases}$$

Ceci prouve :

$$k(t, \cdot) \in C^0_g([\sigma - r, T], E). \tag{3.1.43}$$

Avec (3.1.41), (3.1.42), (3.1.43), on a prouvé (b).

(c) Soit $s \in [\sigma - r, T]$. Soit $t \in [\sigma, T]$. Pour tout $t_1 \in [\sigma, T]$, on a

$$\begin{aligned} \|k(t,s) - k(t_1, s)\| &= \|\bar{\eta}(t, s-t) - \bar{\eta}(t_1, s - t_1)\| \\ &\leq \|\bar{\eta}(t, s-t) - \bar{\eta}(t, s-t_1)\| + \|\bar{\eta}(t, s-t_1) - \bar{\eta}(t_1, s-t_1)\| \\ &\leq \|\bar{\eta}(t, s-t) - \bar{\eta}(t, s-t_1)\| + \|\bar{\eta}(t, \cdot) - \bar{\eta}(t_1, \cdot)\|_\infty \\ &\leq \|\bar{\eta}(t, s-t) - \bar{\eta}(t, s-t_1)\| + \|\bar{\eta}(t, \cdot) - \bar{\eta}(t_1, \cdot)\|_{BV_0}. \end{aligned}$$

Puisque $\bar{\eta}(t, \cdot)$ est continue à gauche, on a :

$$\lim_{t_1 \to t+} \|\bar{\eta}(t, s-t) - \bar{\eta}(t, s-t_1)\| = 0.$$

Puisque $[t \mapsto \bar{\eta}(t, \cdot)]$ est continue, elle est continue à gauche et on a :

$$\lim_{t_1 \to t+} \|\bar{\eta}(t, \cdot) - \bar{\eta}(t_1, \cdot)\|_{BV_0} = 0.$$

Ainsi on obtient : $\forall s \in [\sigma - r, T], \lim_{t_1 \to t+} \|k(t,s) - k(t_1, s)\| = 0.$

□

Proposition 3.1.8. *La fonction $[t \mapsto k(t, \cdot)]$ est bornée de $[\sigma, T]$ dans $NBV_0([\sigma - r, T], E)$.*

Démonstration. On a prouvé dans la proposition précédente que ,

$$\forall t \in [\sigma, T], \|k(t, \cdot)\|_{BV_0} = V^T_{\sigma - r}(k(t, \cdot)) \leq V^T_{\sigma - r - T}(\bar{\eta}(t, \cdot)) = \|\bar{\eta}(t, \cdot)\|_{BV_0}.$$

Puisque $[t \mapsto \bar{\eta}(t, \cdot)] \in C^0([\sigma, T], NBV_0([\sigma - r - T, T], E))$, et puisque $[\sigma, T]$ est compact, on a :

$$\sup_{t \in [\sigma, T]} \|\bar{\eta}(t, \cdot)\|_{BV_0} < +\infty, \text{ donc } \sup_{t \in [\sigma, T]} \|k(t, \cdot)\|_{BV_0} < +\infty.$$

□

Proposition 3.1.9. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $k(\cdot, s)$ est réglée.*

Démonstration. On fixe t ; on sait que $k(\cdot, s)$ est continue à droite. Il reste à montrer que $k(t-, s)$ existe dans E.
On sait que $\bar{\eta}(t, \cdot)$ est BV donc réglée ainsi :

$$\bar{\eta}(t, \sigma+) \text{ existe en tout } \sigma. \tag{3.1.44}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}(t, (s-t)+) &= \lim_{h \to 0+} \bar{\eta}(t, (s-t)+h) \\
&= \lim_{h \to 0+} \bar{\eta}(t, s-t+h) \\
&= \lim_{h \to 0+} \bar{\eta}(t, s-(t-h)) \\
&= \bar{\eta}(t, s-(t-))
\end{aligned}$$

D'où :

$$\bar{\eta}(t, (s-t)+) = \bar{\eta}(t, s-(t-)). \tag{3.1.45}$$

$\forall h > 0$

$$\begin{aligned}
\|k(t-h, s) - \bar{\eta}(t, (s-t)+)\| &= \|\bar{\eta}(t-h, s-(t-h)) - \bar{\eta}(t, (s-t)+)\| \\
&\leq \|\bar{\eta}(t-h, s-(t-h)) - \bar{\eta}(t, s-(t-h))\| \\
&\quad + \|\bar{\eta}(t, s-(t-h)) - \bar{\eta}(t, (s-t)+)\| \\
&\leq \|\bar{\eta}(t-h, \cdot) - \bar{\eta}(t, \cdot)\|_{\infty} \\
&\quad + \|\bar{\eta}(t, s-(t-h)) - \bar{\eta}(t, (s-t)+)\| \\
&\leq \|\bar{\eta}(t-h, \cdot) - \bar{\eta}(t, \cdot)\|_{BV_0} \\
&\quad + \|\bar{\eta}(t, s-(t-h)) - \bar{\eta}(t, (s-t)+)\|
\end{aligned}$$

En résumé on a prouvé : $\forall h > 0$

$$\begin{aligned}
\|k(t-h, s) - \bar{\eta}(t, (s-t)+)\| &\leq \|\bar{\eta}(t-h, \cdot) - \bar{\eta}(t, \cdot)\|_{BV_0} \\
&\quad + \|\bar{\eta}(t, s-(t-h)) - \bar{\eta}(t, (s-t)+)\|
\end{aligned} \tag{3.1.46}$$

D'après (3.1.44) on a : $\lim_{h \to 0+} \|\bar{\eta}(t, (s-t)+h) - \bar{\eta}(t, (s-t)+)\| = 0$.
Puisque $[t \mapsto \bar{\eta}(t, \cdot)] \in C^0([\sigma, T], NBV_0(S, E))$ on a :

$$\lim_{h \to 0+} \|\bar{\eta}(t-h, \cdot) - \bar{\eta}(t, \cdot)\|_{BV_0} = \lim_{h \to 0} \|\bar{\eta}(t-h, \cdot) - \bar{\eta}(t, \cdot)\|_{BV_0} = 0.$$

En utilisant ces deux limites dans (3.1.46) on obtient :

$$\lim_{h \to 0+} \|k(t-h, s) - \bar{\eta}(t, (s-t)+)\| = 0.$$

Donc $k(t-, s)$ existe dans E. Ainsi $k(\cdot, s)$ est réglée. □

Proposition 3.1.10. *Pour tout t, pour tout $\sigma \leq t, k(t-, \sigma) = \eta(t, (\sigma - t)+)$.*

Démonstration. Fixons t, σ et $\delta > 0$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\|\eta(t-\delta, \sigma - t + \delta) - \eta(t, \sigma - t + \delta)\| &\leq \|\eta(t-\delta, \cdot) - \eta(t, \cdot)\|_{\infty} \\
&\leq \|\eta(t-\delta, \cdot) - \eta(t, \cdot)\|_{BV_0} \to 0 \quad (\delta \to 0+)
\end{aligned}$$

puisque $[t \mapsto \eta(t, \cdot)] \in C^0_d(J, NBV_0(S, E))$, donc on a : $\lim_{\delta \to 0+} (\eta(t-\delta, \sigma - t + \delta) - \eta(t, \sigma - t + \delta)) = 0$, ce qui entraîne que :

$$\lim_{\delta \to 0+} (k(t-\delta, \sigma) - \eta(t, \sigma - t + \delta)) = 0. \tag{3.1.47}$$

Puisque $\eta(t,\cdot) \in R(J,E)$ on a :

$$\lim_{\delta\to 0+} \eta(t,\sigma - t + \delta) = \eta(t,(\sigma - t)+). \tag{3.1.48}$$

Alors avec les équations (3.1.47) et (3.1.48), $k(t-,\sigma) = \lim_{\delta\to 0+} k(t-\delta,\sigma)$ existe et

$$\begin{aligned} k(t-,\sigma) &= \lim_{\delta\to 0+} k(t-\delta,\sigma) \\ &= \lim_{\delta\to 0+} \eta(t-\sigma,\sigma-t+\delta) \\ &= \lim_{\delta\to 0+} \eta(t,\sigma-t+\delta) \\ &= \eta(t,(\sigma-t)+). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.11. *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) *k est Riemann-intégrable sur $J\times S$.*

(ii) *$k(t,s) = 0$ quand $s \geq t$ dans J.*

(iii) *Soit $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $f \in RI(J,E)$. Nous définissons la fonction $K : J \longrightarrow E$ en posant $K(t) := \int_\sigma^t k(t,\theta)f(\theta)d\theta$. Alors $K \in C^0(J,E)$.*

Démonstration. **(i)** Comme Λ^{-1} est continue, $(\Lambda^0)^{-1}$ est de plus continue, et en notant D l'ensemble des points de discontinuité de k et par D^1 l'ensemble des points de discontinuité de $\bar\eta$ dans $\Lambda^{-1}(J\times S)$, nous avons $D = (\Lambda^0)^{-1}(D^1)$. Et alors, utilisant [26] et la preuve de (e) de la proposition 1.4.9, nous obtenons

$$\lambda_2(D) = \lambda_2((\Lambda^0)^{-1}(D^1)) = |\det(\Lambda^{-1})|\cdot\lambda_2(D^1) = \lambda_2(D^1) = 0.$$

Alors en utilisant [49], nous pouvons affirmer que k est Riemann-intégrable dans $J\times S$.

(ii) Quand $s \geq t$, nous avons $s - t \geq 0$ et par (3.1.17) nous obtenons $k(t,s) = \bar\eta(t,s-t) = 0$.

(iii) Fixons $t \in J$. Notons que $k(t,\cdot) \in RI(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $f \in RI(J,E)$ implique que

$$[\theta \mapsto k(t,\theta)f(\theta)] \in RI(J,E). \text{ Et ainsi } K(t) \text{ est bien définie.}$$

Du (a) de la proposition 1.4.9 nous savons que la fonction

$$[\theta \mapsto \bar\eta(t,\theta - t)] \in R([\sigma,t],\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \cap C_g^0([\sigma,t],\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$$

et l'ensemble de ces points de discontinuité est égal à

$$\{\theta\in[\sigma,t] : \bar\eta(t,(\theta+)-t) \neq \bar\eta(t,\theta-t)\} = \{\theta\in[\sigma,t] : \bar\eta(t,(\theta-t)+) \neq \bar\eta(t,\theta-t)\}$$

et cet ensemble est λ_1-négligeable. Utilisant la proposition 3.1.10 nous obtenons que $\{\theta\in[\sigma,t] : k(t-,\theta) \neq k(t,\theta)\}$ est λ_1-négligeable. Alors $\{\theta\in[\sigma,t] : k(t-,\theta)f(\theta) \neq k(t,\theta)f(\theta)\}$ est λ_1-négligeable. Et ainsi nous pouvons affirmer que $[\theta\mapsto k(t-,\theta)f(\theta)]$ appartient à $\mathcal{L}^1([\sigma,t],E)$ et, utilisant la proposition 1.1.5

$$\begin{aligned} K(t) &= \int_\sigma^t k(t,\theta)f(\theta)d\theta = \int_{[\sigma,t]} k(t,\theta)f(\theta)d\lambda_1(\theta) \\ &= \int_{[\sigma,t]} k(t-,\theta)f(\theta)d\lambda_1(\theta) = K(t-). \end{aligned} \tag{3.1.49}$$

Et ainsi nous avons prouvé que K est continue à gauche. Utilisant la proposition 1.1.5 et la continuité à droite de $k(\cdot,\theta)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} K(t) &= \int_\sigma^t k(t,\theta)f(\theta)d\theta = \int_{[\sigma,t]} k(t,\theta)f(\theta)d\lambda_1(\theta) \\ &= \int_{[\sigma,t]} k(t+,\theta)f(\theta)d\lambda_1(\theta) = K(t+). \end{aligned} \tag{3.1.50}$$

Et ainsi, K est continue.

□

3.2 Équation intégrale

Dans cette partie nous mettons en place les outils qui permettront la résolution de l'équation :

$$y(t) = g(t) - \int_\sigma^t k(t,s)y(s)ds. \tag{3.2.1}$$

Où le noyau k de l'équation (3.2.1) est défini par :

$$\begin{aligned} k(\cdot,\cdot) \quad : \quad & [\sigma,T]\times[\sigma-r-T,T] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & (t,s) \mapsto \bar{\eta}(t,s-t). \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Proposition 3.2.1. *Supposons que $L \in C^0(J,\mathfrak{L}(C^0(\Delta,\mathbb{R}^n),\mathbb{R}^n))$. k est définie par (3.2.2). On définit l'espace fonctionnel suivant*

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} := \{ \quad & R \in RI(J\times J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))) : \\ & \bullet\ [t \mapsto R(t,\cdot)] \in B(J,NBV(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ & \bullet\ \forall s \in J, R(\cdot,s) \in RC^0_d(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ & \bullet\ \forall s \le t \text{ dans } J, \int_s^t k(t,\alpha)R(\alpha,s)d\alpha = \int_s^t R(t,\alpha)k(\alpha,s)d\alpha \\ & \bullet\ \forall s > t \text{ dans } J, R(t,s) = 0\}. \end{aligned}$$

La formule $|||R||| := \sup_{t\in J}\|R(t,\cdot)\|_{BV}$ définie une norme sur $\mathfrak{R}$ et $(\mathfrak{R},|||\cdot|||)$ est un espace de Banach.

Démonstration. Premièrement, en utilisant les propositions, 3.1.7, 3.1.8, 3.1.9 et 3.1.11 nous voyons que la restriction de k à $J\times J$ est contenue dans $\mathfrak{R}$; ceci nous assure que $\mathfrak{R}$ est non vide. Comme toutes les conditions utilisées pour définir $\mathfrak{R}$ sont linéaires, $\mathfrak{R}$ est un sous-espace vectoriel de $RI(J\times J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R})))$. Il est simple de vérifier que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathfrak{R}$. Soit $(R_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathfrak{R}$. Comme nous avons

$$\sup_{t\in J}(\sup_{s\in J}\|R(t,s)\|) \le |||R|||, \tag{3.2.3}$$

$(R_q)_{q\in\mathbb{N}}$ est de plus une suite de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme sur $J\times J$. Comme $RI(J\times J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ est complet pour la norme de la convergence uniforme, il existe $R\in RI(J\times J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ tel que

$$\lim_{q\to+\infty}\sup_{t\in J}(\sup_{s\in J}\|R_q(t,s)-R(t,s)\|)=0. \tag{3.2.4}$$

Comme $(R_q)_{q\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour $|||.|||$, $([t\mapsto R_q(t,\cdot)])_{q\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $B(J,NBV(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Comme ce dernier espace est complet, il existe $R^1: J\times J\longrightarrow\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $[t\mapsto R^1(t,\cdot)]\in B(J,NBV(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et tel que $\lim_{q\to+\infty}|||R_q-R^1|||=0$. De (3.2.3), (3.2.4) et l'unicité de la limite dans un espace vectoriel normé, nous déduisons que $R^1=R$, et alors nous avons les deux propriétés suivantes.

$$[t\mapsto R(t,\cdot)]\in B(J,NBV(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R})). \tag{3.2.5}$$

$$\lim_{q\to+\infty}|||R_q-R|||=0. \tag{3.2.6}$$

Fixons $s\in J$. Alors nous avons

$$\sup_{t\in J}\|R_q(t,s)-R(t,s)\|\leq|||R_q-R|||,$$

ceci implique, en utilisant (3.2.6), $\lim_{q\to+\infty}\sup_{t\in J}\|R_q(t,s)-R(t,s)\|=0$.

Comme $RC^0_d(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ est complet, nous obtenons

$$\forall s\in J,\quad R(\cdot,s)\in RC^0_d(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R})). \tag{3.2.7}$$

Fixons $s<t$ dans J. Notons que, après (3.2.7) nous avons $R(\cdot,s)\in RI(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Comme $k(t,\cdot)\in RI(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, nous avons $k(t,\cdot)R(\cdot,s)\in RI(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, et de plus

$$\begin{aligned}&\|\int_s^t k(t,\xi)R_q(\xi,s)d\xi-\int_s^t k(t,\xi)R(\xi,s)d\xi\|\\ \leq&\int_s^t\|k(t,\xi)\|\cdot\|R_q(\xi,s)-R(\xi,s)\|d\xi\\ \leq&\int_s^t\|k(t,\xi)\|\cdot|||R_q-R|||.\end{aligned}$$

Alors, en utilisant (3.2.6), nous obtenons $\lim_{q\to+\infty}\int_s^t k(t,\xi)R_q(\xi,s)d\xi=\int_s^t k(t,\xi)R(\xi,s)d\xi$. Par un raisonnement analogue, nous obtenons $\lim_{q\to+\infty}\int_s^t R_q(t,\xi)k(\xi,s)d\xi=\int_s^t R(t,\xi)k(\xi,s)d\xi$. Comme $R_q\in\mathfrak{R}$, nous obtenons

$$\forall s<t\text{ dans }J,\int_s^t k(t,\alpha)R(\alpha,s)d\alpha=\int_s^t R(t,\alpha)k(\alpha,s)d\alpha. \tag{3.2.8}$$

Fixons $s>t$ dans J. Nous savons que nous avons $R_q(t,s)=0$ pour tout $q\in\mathbb{N}$. En utilisant (3.2.3) nous avons $\|R_q(t,s)-R(t,s)\|\leq|||R_q-R|||$ ceci implique, en faisant $q\to+\infty$,

$$\forall s>t\text{ dans }J,\ R(t,s)=0. \tag{3.2.9}$$

De (3.2.5), (3.2.7), (3.2.8) et (3.2.9) nous obtenons que $R\in\mathfrak{R}$, et de (3.2.6) nous obtenons la complétude de $\mathfrak{R}$. □

Lemme 3.2.1. *Supposons que $L \in C^0(J, \mathfrak{L}(C^0(\Delta, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n))$; k est définie par (3.1.40) et $\mathfrak{R}$ par la proposition 3.2.1. Pour tout $R \in \mathfrak{R}$, nous définissons*

$$\Gamma(R) := [(t,s) \mapsto k(t,s) - \int_s^t R(t,\xi)k(\xi,s)d\xi].$$

Alors

$$\Gamma(R) \in \mathfrak{R} \;\; et \;\; \forall (t,s) \in J \times J, \; \int_s^t k(t,\xi)\Gamma(R)(\xi,s) = \int_s^t \Gamma(R)(t,\xi)k(\xi,s)d\xi.$$

Démonstration. Fixons $R \in \mathfrak{R}$ et $(t,s) \in J \times J$. Comme $R(t,\cdot) \in RI(J, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $k(\cdot,s) \in RI(J, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $R(t,\cdot)k(\cdot,s) \in RI(J, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et ainsi $\Gamma(R)(t,s)$ est bien définie. Nous définissons $R^0(t,\xi,s) := R(t,\xi)$. Comme R^0 est l'application $[(t,\xi,s) \mapsto (t,\xi) \mapsto R(t,\xi)]$ et comme $[(t,\xi,s) \mapsto (t,\xi)]$ est continue, considérons N^{R^0} (respectivement N^R), l'ensemble des discontinuités de R^0 (respectivement R), en raisonnant par contraposition, nous obtenons que $N^{R^0} \subset N^R \times J$. Comme $R \in RI(J \times J, M_n(\mathbb{R}))$ nous savons que N^R est λ_2-négligeable (i.e. μ_2-négligeable) et ainsi il existe $A \in \mathfrak{B}(J \times J)$ tel que $N^R \subset A$ et $\mu_2(A) = 0$. Alors nous avons $\lambda(A \times J) = \mu_3(A \times J) = \mu_2(A) \cdot \mu_1(J) = 0 \cdot \mu_1(J) = 0$ puisque $\mu_3 = \mu$

$$\Gamma(R) \in RI(J \times J, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})). \tag{3.2.10}$$

Pour tout $\xi \in [t,T]$, nous avons $\xi - t \geq 0$ par conséquence $k(t,\xi) = \bar{\eta}(t, \xi - t) = 0$ d'après (3.1.17), ceci implique $k(t,\xi)R(\xi,T) = 0$, et ainsi nous obtenons

$$\Gamma(R)(t,T) = k(t,T) - \int_T^t R(t,\xi)k(\xi,T)d\xi = 0 - \int_T^t k(t,\xi)R(\xi,T)d\xi = 0.$$

Et ainsi nous obtenons

$$\forall t \in J, \; \Gamma(R)(t,T) = 0. \tag{3.2.11}$$

Posons $F(t,s) := \int_s^t R(t,\xi)k(\xi,s)d\xi$. Soit $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1} \in \mathfrak{S}(J)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n} \|F(t,x_{i+1}) - F(t,x_i)\| \\
= \; & \sum_{i=0}^{n} \| \int_{x_{i+1}}^t R(t,\xi)k(\xi,x_{i+1})d\xi - \int_{x_i}^t R(t,\xi)k(\xi,x_i)d\xi \| \\
\leq \; & \sum_{i=0}^{n} \| \int_{x_{i+1}}^t R(t,\xi)k(\xi,x_{i+1})d\xi - \int_{x_{i+1}}^t R(t,\xi)k(\xi,x_i)d\xi \| \\
& + \sum_{i=0}^{n} \| \int_{x_{i+1}}^t R(t,\xi)k(\xi,x_i)d\xi - \int_{x_i}^t R(t,\xi)k(\xi,x_i)d\xi \| \\
= \; & \sum_{i=0}^{n} \| \int_{x_{i+1}}^t R(t,\xi)[k(\xi,x_{i+1}) - k(\xi,x_i)]d\xi \| + \sum_{i=0}^{n} \| \int_{x_{i+1}}^{x_i} R(t,\xi)k(\xi,x_i)d\xi \| \\
\leq \; & \sum_{i=0}^{n} \int_{x_{i+1}}^t (\|R(t,\xi)\| \cdot \|k(\xi,x_{i+1}) - k(\xi,x_i)\|)d\xi \\
& + \sum_{i=0}^{n} \int_{x_{i+1}}^{x_i} \|R(t,\xi)\|d\xi \cdot |||k||| \\
\leq \; & \int_\sigma^T (\|R(t,\xi)\| \cdot \sum_{i=0}^{n} \|k(\xi,x_{i+1}) - k(\xi,x_i)\|)d\xi + \int_\sigma^T \|R(t,\xi)\|d\xi \cdot |||k||| \\
\leq \; & 2(T-\sigma) \cdot |||R||| \cdot |||k|||.
\end{aligned}$$

Par conséquence nous avons prouvé

$$\forall t \in J,\ V_\sigma^t(F(t,\cdot)) \leq 2(T-\sigma)|||R||| \cdot |||k|||. \tag{3.2.12}$$

De cette dernière relation, comme $k(t,\cdot) \in NBV(J, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, nous déduisons

$$\forall t \in J,\ \Gamma(R)(t,\cdot) \in BV(J, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})). \tag{3.2.13}$$

Soit $h > 0$ suffisamment petit. Alors nous avons

$$\begin{aligned} & F(t,s-h) - F(t,s) \\ = & \int_{s-h}^{t} R(t,\xi)k(\xi,s-h)d\xi - \int_{s}^{t} R(t,\xi)k(\xi,s-h)d\xi \\ & + \int_{s}^{t} R(t,\xi)k(\xi,s-h)d\xi - \int_{s}^{t} R(t,\xi)k(\xi,s)d\xi \\ = & \int_{s-h}^{s} R(t,\xi)k(\xi,s-h)d\xi + \int_{s}^{t} R(t,\xi)[k(\xi,s-h) - k(\xi,s)]d\xi. \end{aligned}$$

Notons que $\| \int_{s-h}^{s} R(t,\xi)k(\xi,s-h)d\xi\| \leq h|||R||| \cdot |||k|||$ de cela nous déduisons que $\lim_{h\to 0+} \int_{s-h}^{s} R(t,\xi)k(\xi,s-h)d\xi = 0$. Pour le second terme, nous avons, pour tout $\xi \in J$, $\lim_{h\to 0+} (R(t,\xi)[k(\xi,s-h) - k(\xi,s)]) = R(t,\xi)\cdot 0 = 0$ comme $k(t,\cdot)$ est continue à gauche. Nous avons de plus, pour tout $\xi \in J$ et pour tout $h > 0$, $\|R(t,\xi)[k(\xi,s-h) - k(\xi,s)]\| \leq 2|||R||| \cdot |||k|||$, et la constante $2|||R||| \cdot |||k|||$ est Lebesgue-intégrable sur J. Par conséquent, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons $\lim_{h\to 0+} \int_{s}^{t} R(t,\xi)[k(\xi,s-h) - k(\xi,s)]d\xi = 0$. Alors, nous avons prouvé que $\lim_{h\to 0+} F(t,s-h) = F(t,s)$, et ainsi $F(t,\cdot) \in C_g^0(J, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Comme $k(t,\cdot) \in C_g^0(J, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, nous obtenons

$$\forall t \in J,\ \Gamma(R)(t,\cdot) \in C_g^0(J, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})). \tag{3.2.14}$$

De (3.2.11), (3.2.13) et (3.2.14) nous obtenons

$$\forall t \in J,\ \Gamma(R)(t,\cdot) \in NBV(J, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})). \tag{3.2.15}$$

De (3.2.12) nous obtenons que, pour tout $t \in J$, $\|\Gamma(R)(t,\cdot)\|_{BV} \leq 2(T-\sigma)|||R||| \cdot |||k|||$, cela implique

$$[t \mapsto \Gamma(R)(t,\cdot)] \in B(J, NBV(J, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))). \tag{3.2.16}$$

Fixons $s \in J$. Soit $h > 0$ suffisamment petit. Alors nous avons

$$\begin{aligned} F(t+h,s) - F(t,s) &= \int_{s}^{t+h} R(t+h,\xi)k(\xi,s)d\xi - \int_{s}^{t} R(t,\xi)k(\xi,s)d\xi \\ &= \int_{t}^{t+h} R(t+h,\xi)k(\xi,s)d\xi + \int_{s}^{t} [R(t+h,\xi) - R(t,\xi)]k(\xi,s)d\xi. \end{aligned}$$

Notons que $\| \int_{t}^{t+h} R(t+h,\xi)k(\xi,s)d\xi\| \leq h|||R||| \cdot |||k|||$ cela implique que $\lim_{h\to 0+} \int_{t}^{t+h} R(t+h,\xi)k(\xi,s)d\xi = 0$. Pour le second terme, Comme $R(\cdot,s)$ est continue à droite, nous

avons $\lim_{h\to 0+}([R(t+h,\xi)-R(t,\xi)]k(\xi,s))=0$ pour tout $\xi\in J$. Nous avons aussi $\|[R(t+h,\xi)-R(t,\xi)]k(\xi,s)\| \leq 2|||R|||\cdot|||k|||$ pour tout $\xi\in J$, et la constante $2|||R|||\cdot|||k|||$ est Lebesgue-intégrable sur J. Alors nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue et affirmer que $\lim_{h\to 0+}\int_s^t [R(t+h,\xi)-R(t,\xi)]k(\xi,s)d\xi = 0$. Par conséquent nous avons prouvé que $\lim_{h\to 0+} F(t+h,s)=F(t,s)$, i.e. $F(\cdot,s)\in C^0_d(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Du (c) de la proposition 3.1.7 nous savons que $k(\cdot,s)\in C^0_d(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, et ainsi nous obtenons

$$\forall s\in J,\ \Gamma(R)(\cdot,s)\in C^0_d(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R})). \tag{3.2.17}$$

Fixons $s\in S$ et $t\in\,]\sigma,T]$. Soit $h>0$ suffisamment petit. Nous savons

$$F(t-h,s)=\int_s^{t-h} R(t-h,\xi)k(\xi,s)d\xi=\int_t^{t-h} R(t-h,\xi)k(\xi,s)d\xi+\int_s^t R(t-h,\xi)k(\xi,s)d\xi.$$

Notons que $\|\int_t^{t-h} R(t-h,\xi)k(\xi,s)d\xi\|\leq h|||R|||\cdot|||k|||$ cela implique que $\lim_{h\to 0+}\int_t^{t-h} R(t-h,\xi)k(\xi,s)d\xi=0$. Sur le second terme, comme $R(\cdot,s)$ est réglée, nous avons $\lim_{h\to 0+} R(t-h,\xi)k(\xi,s)=R(t-,\xi)k(\xi,s)$ pour tout $\xi\in J$. Nous avons aussi $\|R(t-h,\xi)k(\xi,s)\|\leq |||R|||\cdot|||k|||$ pour tout $\xi\in J$,et la constante $|||R|||\cdot|||k|||$ est Lebesgue-intégrable sur J. En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons $\lim_{h\to 0+}\int_s^t R(t-h,\xi)k(\xi,s)d\xi = \int_s^t R(t-,\xi)k(\xi,s)d\xi$. Alors nous avons prouvé que $F(t-,s)$ existe, et en utilisant la proposition 3.1.7 nous savons que $k(t-,s)$ existe. Par conséquent nous avons

$$\Gamma(R)(t-,s)=k(t-,s)-\int_s^t R(t-,\xi)k(\xi,s)d\xi. \tag{3.2.18}$$

De (3.2.17) et (3.2.18) nous obtenons

$$\forall s\in J,\ \Gamma(R)(\cdot,s)\in RC^0_d(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R})). \tag{3.2.19}$$

Fixons $(t,s)\in J\times J,\ s\leq j$. En utilisant l'égalité suivante

$$\{(\xi,\zeta): s\leq\xi\leq t,\ \xi\leq\zeta\leq t\}=\{(\xi,\zeta): s\leq\zeta\leq t,\ s\leq\xi\leq\zeta\},$$

et avec le théorème de Fubini nous avons

$$\begin{aligned}
\int_s^t \Gamma(R)(t,\xi)k(\xi,s)d\xi &= \int_s^t\Big(\int_\xi^t R(t,\zeta)k(\zeta,\xi)d\zeta\Big)k(\xi,s)d\xi\\
= \int_s^t\Big(\int_\xi^t k(t,\zeta)R(\zeta,\xi)d\zeta\Big)k(\xi,s)d\xi &= \int_s^t\Big(\int_s^\zeta k(t,\zeta)R(\zeta,\xi)k(\xi,s)d\xi\Big)d\zeta\\
= \int_s^t k(t,\zeta)\Big(\int_s^\zeta R(\zeta,\xi)k(\xi,s)d\xi\Big)d\zeta &= \int_s^t k(t,\zeta)\Gamma(R)(\zeta,s)d\zeta.
\end{aligned}$$

Et ainsi nous avons prouvé

$$\forall(t,s)\in J\times J,\ s\leq t,\ \int_s^t\Gamma(R)(t,\xi)k(\xi,s)d\xi=\int_s^t k(t,\xi)\Gamma(R)(\xi,s)d\xi. \tag{3.2.20}$$

Quand $s > t$ dans J, nous avons $\int_s^t R(t,\xi)k(\xi,s)d\xi = -\int_t^s R(t,\xi)k(\xi,s)d\xi$, et nous avons $s \geq \xi$ quand $\xi \in [t,s]$, par conséquent, en utilisant **(iii)** de la proposition 3.1.11, nous avons $k(\xi,s) = 0$, cela implique $\int_s^t R(t,\xi)k(\xi,s)d\xi = 0$. Même avec **(iii)** de la proposition 3.1.11, nous avons $k(t,s) = 0$. Et ainsi nous obtenons

$$\Gamma(R)(t,s) = 0 \text{ quand } s > t \text{ dans } J. \tag{3.2.21}$$

De (3.2.10), (3.2.16), (3.2.19), (3.2.20 et (3.2.21), nous obtenons $\Gamma(R) \in \mathfrak{R}$, et la dernière assertion. □

Théorème 3.2.1. *Supposons que $L \in C^0(J, \mathfrak{L}(C^0(\Delta,\mathbb{R}^n),\mathbb{R}^n))$; k est définie par (3.1.40). Alors il existe une unique fonction $R \in RI(J\times J, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ qui vérifie les conditions suivantes.*

(i) $\forall (t,s) \in J\times J,\ R(t,s) = k(t,s) - \int_s^t R(t,\xi)k(\xi,s)d\xi.$

(ii) $[t \mapsto R(t,\cdot) \in B(J, NBV(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))].$

(iii) $\forall s \in J,\ R(\cdot,s) \in RC_d^0(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$

(iv) $\forall (t,s) \in J\times J,\ \int_s^t R(t,\xi)k(\xi,s)d\xi = \int_s^t k(t,\xi)R(\xi,s)d\xi.$

(v) $\forall s > t$ *dans* $J,\ R(t,s) = 0.$

Démonstration. Première étape. Supposons que $|||k||| < \frac{1}{2(T-\sigma)}$. Nous utilisons $\mathfrak{R}$ définie par la proposition 3.2.1. d'après le lemme 3.2.1, on peut considérer Γ comme un opérateur de $\mathfrak{R}$ dans $\mathfrak{R}$. Maintenant nous montrons que Γ est une contraction stricte sur l'espace de Banach $\mathfrak{R}$.

Soit $R, R^1 \in \mathfrak{R}$, et $(x_i)_{0\leq i\leq n+1} \in \mathfrak{S}(J)$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} \|\Gamma(R)(t,x_{i+1}) - \Gamma(R^1)(t,x_{i+1}) - \Gamma(R)(t,x_i) + \Gamma(R^1)(t,x_i)\| \\
=\ &\sum_{i=0}^{n} \| \int_{x_{i+1}}^{t} k(t,\xi)R(\xi,x_{i+1})d\xi - \int_{x_{i+1}}^{t} k(t,\xi)R^1(\xi,x_{i+1})d\xi \\
&- \int_{x_i}^{t} k(t,\xi)R(\xi,x_i)d\xi - \int_{x_i}^{t} k(t,\xi)R^1(\xi,x_i)d\xi\| \\
=\ &\sum_{i=0}^{n} \| \int_{x_{i+1}}^{t} k(t,\xi)[R(\xi,x_{i+1}) - R^1(\xi,x_{i+1})]d\xi \\
&- \int_{x_i}^{t} k(t,\xi)[R(\xi,x_i) - R^1(\xi,x_i)]d\xi\| \\
=\ &\sum_{i=0}^{n} \| \int_{x_i}^{t} k(t,\xi)[R(\xi,x_{i+1}) - R^1(\xi,x_{i+1})]d\xi \\
&- \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(t,\xi)[R(\xi,x_{i+1}) - R^1(\xi,x_{i+1})]d\xi \\
&- \int_{x_i}^{t} k(t,\xi)[R(\xi,x_i) - R^1(\xi,x_i)]d\xi\| \\
=\ &\sum_{i=0}^{n} \| \int_{x_i}^{t} k(t,\xi)[R(\xi,x_{i+1}) - R^1(\xi,x_{i+1}) - R(\xi,x_i) + R^1(\xi,x_i)]d\xi \\
&- \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(t,\xi)[R(\xi,x_{i+1}) - R^1(\xi,x_{i+1})]d\xi\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n} \|\Gamma(R)(t,x_{i+1}) - \Gamma(R^1)(t,x_{i+1}) - \Gamma(R)(t,x_i) - \Gamma(R^1)(t,x_i)\| \\
\leq & \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|k(t,\xi)\| \cdot \|R(\xi,x_{i+1}) - R^1(\xi,x_{i+1})\| d\xi \\
& + \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{t} \|k(t,\xi)\| \cdot \|R(\xi,x_{i+1}) - R^1(\xi,x_{i+1}) - R(\xi,x_i) + R^1(\xi,x_i)\| d\xi \\
\leq & \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|k(t,\xi)\| \cdot \|R(\xi,\cdot) - R^1(\xi,\cdot)\|_{BV} d\xi \\
& + \sum_{i=0}^{n} \int_{\sigma}^{T} (|||k||| \cdot \|R(\xi,x_{i+1}) - R^1(\xi,x_{i+1}) - R(\xi,x_i) + R^1(\xi,x_i)\|) d\xi \\
\leq & \int_{\sigma}^{T} \|k(t,\xi)\| \cdot |||R - R^1||| d\xi \\
& + \int_{\sigma}^{T} (|||k||| \cdot \sum_{i=0}^{n} \|R(\xi,x_{i+1}) - R^1(\xi,x_{i+1}) - R(\xi,x_i) + R^1(\xi,x_i)\|) d\xi \\
\leq & 3(T-\sigma) \cdot |||k||| \cdot |||R - R^1|||.
\end{aligned}
$$

En prenant le sup sur $\mathfrak{S}(J)$, nous obtenons que

$$\forall t \in J,\ V_\sigma^T(\Gamma(R)(t,\cdot) - \Gamma(R^1)(t,\cdot)) \leq 3(T-\sigma)|||k||| \cdot |||R - R^1|||,$$

et en prenant le sup dans $t \in J$, nous obtenons

$$\forall R, R^1 \in \mathfrak{R},\ |||\Gamma(R) - \Gamma(R^1)||| \leq 3(T-\sigma)|||k||| \cdot |||R - R^1|||.$$

Et ainsi, en utilisant le théorème de Picard-Banach-Cacciopoli, nous pouvons affirmer qu'il existe un unique $R \in \mathfrak{R}$ tel que $R = \Gamma(R)$, qui est la solution voulue.

Deuxième étape. Dans cette partie, nous voulons éliminer la condition : $\|k\|_\infty < \frac{1}{3(T-\sigma)}$

- On introduit $\tilde{\eta}(t,s) := \bar{\eta}(t,s)e^{-\gamma s}$
- On ajuste γ pour avoir $\|\tilde{\eta}\| < \frac{1}{3(T-\sigma)}$.

En effet : On veut que $\|\bar{\eta}(t,s-t)\|e^{-\gamma(t-s)} \leq C < 1$
Quand $t - s = 0$, on a besoin de $\|\bar{\eta}(t,s-t)\| \leq \epsilon$ si $t - \delta_\epsilon \leq s \leq t$, or $\bar{\eta}(t,0) = 0$ donc

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \rho_\epsilon \text{ tel que } \forall t \in I, \forall z \in [0,\rho_\epsilon], \|\bar{\eta}(t,z)\| \leq \epsilon$$

En effet, on raisonne par l'absurde, on suppose la négation vraie :

$$\exists \epsilon > 0, \forall \rho > 0, \exists t_\rho \in J, \exists z_\rho \in [0,\rho], \|\bar{\eta}(t,z)\| > \epsilon$$

$\forall n \in \mathbb{N}_*,$ avec $\rho = \frac{1}{n}, \tau_n := t_{\frac{1}{n}}$ et $u_n := z_{\frac{1}{n}}$; on a :

$$\exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}_*, \exists \tau_n \in J, \exists u_n \in [0, \frac{1}{n}], \|\bar{\eta}(\tau_n, u_n)\| > \epsilon.$$

Puisque J compact, $\exists \beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ croissante, $\exists \tau^* \in J$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \tau_{\beta(n)} = \tau^*. \tag{3.2.22}$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}_*,\ \|\bar{\eta}(\tau_{\beta(n)}, u_{\beta(n)})\| > \epsilon. \tag{3.2.23}$$

$[t \mapsto \bar{\eta}(t,\cdot)]$ est continue de J dans NBV et $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_{BV}$ sur NBV, donc :

$$\forall \epsilon' > 0, \exists \delta_{\epsilon'} > 0, \forall t \in [\tau^* - \delta_{\epsilon'}, \tau^* + \delta_{\epsilon'}], \forall s, \|\bar{\eta}(t,s) - \bar{\eta}(\tau^*, s)\| \leq \epsilon'. \tag{3.2.24}$$

Donc

$$\begin{cases} \forall \epsilon' > 0, \exists n_{\epsilon'} \in \mathbb{N}_*, \forall n \geq n_{\epsilon'}, \forall s \\ \|\bar{\eta}(\tau_{\beta(n)}, s) - \bar{\eta}(\tau^*, s)\| \leq \epsilon' \end{cases}$$

en particulier : $\forall n \geq n_{\epsilon'}, \|\bar{\eta}(\tau_{\beta(n)}, u_{\beta(n)}) - \bar{\eta}(\tau^*, u_{\beta(n)})\| \leq \epsilon'$.
Fixons $\epsilon > 0$. Prenons $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$, alors $\exists\ m_\epsilon := n_{\frac{\epsilon}{2}} \in \mathbb{N}_*$ tel que

$$\forall n \geq m_\epsilon,\ \|\bar{\eta}(\tau_{\beta(n)}, u_{\beta(n)}) - \bar{\eta}(\tau^*, u_{\beta(n)})\| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & |\|\bar{\eta}(\tau^*, u_{\beta(n)})\| - \|\bar{\eta}(\tau^*, u_{\beta(n)})\|| < \frac{\epsilon}{2} \\ \Rightarrow & \epsilon < \|\bar{\eta}(\tau_{\beta(n)}, u_{\beta(n)})\| \leq \|\bar{\eta}(\tau^*, u_{\beta(n)})\| + \frac{\epsilon}{2} \\ \Rightarrow & \frac{\epsilon}{2} = \epsilon - \frac{\epsilon}{2} < \|\bar{\eta}(\tau^*, u_{\beta(n)})\| \end{array}$$

$$\text{pour } \ \forall n \geq m_\epsilon,\ \|\bar{\eta}(\tau^*, u_{\beta(n)})\| > \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.2.25}$$

Mais $\bar{\eta}(\tau^*,\cdot)$ est continue à gauche en 0 et $\bar{\eta}(\tau^*, 0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \bar{\eta}(\tau^*, u_{\beta(n)}) = \bar{\eta}(\tau^*, 0) = 0$ car $0 \leq u_{\beta(n)} \leq \frac{1}{\beta(n)} \to 0$ $(n \to +\infty)$. Donc en faisant $n \to +\infty$ dans (3.2.25), on arrive à : $0 \geq \frac{\epsilon}{2} > 0$: contradiction. Ainsi

$$\sup_{t\in I,\ t-R_\epsilon \leq s \leq t} \|\bar{\eta}(t, s-t)\| e^{-\gamma(t-s)} \leq \sup_{t\in I,\ t-R_\epsilon \leq s \leq t} \|\bar{\eta}(t, s-t)\|.$$

et :

$$\sup_{t\in I,\ s\leq t-R_\epsilon} \|\bar{\eta}(t, s-t)\| e^{-\gamma(t-s)} \leq \sup_{t\in I,\ s\leq t-R_\epsilon} \|\bar{\eta}(t, s-t)\| \leq \|\bar{\eta}\|_\infty \cdot e^{-\gamma R_\epsilon}$$

on ajuste γ pour que la relation précédente soit majorée par ϵ. Donc

$$\sup_{t,s} \|\bar{\eta}(t, s-t)\| e^{-\gamma(t-s)} \leq \epsilon.$$

— on applique le point fixe des contractions avec $\tilde{k}(t,s) = \tilde{\eta}(t, s-t)$ ce qui donne l'existence de $\tilde{R}(t,s)$ tel que

$$\forall t \geq s, \qquad \tilde{R}(t,s) = \tilde{\eta}(t, s-t) - \int_s^t \tilde{R}(t,\alpha)\tilde{\eta}(\alpha, s-\alpha)d\alpha. \tag{3.2.26}$$

— On pose $R(t,s) := \tilde{R}(t,s)e^{-\gamma(t-s)}$, alors en multipliant (3.2.26) par $e^{-\gamma(t-s)}$ on obtient :

$$\tilde{R}(t,s)e^{-\gamma(t-s)} = \tilde{\eta}(t, s-t)e^{-\gamma(t-s)} - \int_s^t e^{-\gamma(t-s)}\tilde{R}(t,\alpha)\tilde{\eta}(\alpha, s-\alpha)d\alpha.$$

— On exprime $\tilde{\eta}$ en fonction de $\bar{\eta}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} R(t,s) &= \bar{\eta}(t,s-t)e^{-\gamma(s-t)}e^{-\gamma(s-t)} \\ &\quad -\int_s^t e^{-\gamma(t-\alpha)}e^{-\gamma(\alpha-s)}\tilde{R}(t,\alpha)\bar{\eta}(\alpha,s-\alpha)e^{-\gamma(s-\alpha)} \\ &= \bar{\eta}(t,s-t)-\int_s^t (e^{-\gamma(t-\alpha)}\tilde{R}(t,\alpha))e^{-\gamma(\alpha-s)}e^{-\gamma(s-\alpha)}\bar{\eta}(\alpha,s-\alpha)d\alpha \\ &= \bar{\eta}(t,s-t)-\int_s^t R(t,\alpha)\bar{\eta}(\alpha,s-\alpha)d\alpha. \end{aligned}$$

— On doit maintenant s'assurer que $R \in C^0([\sigma,T],BV([\sigma-r-T,T],\mathcal{M}_n(\mathbb{R})))$, sachant que $\tilde{R} \in C^0([\sigma,T],BV([\sigma-r-T,T],\mathcal{M}_n(\mathbb{R})))$ où $R(t,s)=\tilde{R}(t,s)e^{-\gamma(t-s)}$. Pour cela, on utilise le lemme 1.1.3.

□

Proposition 3.2.2. *Supposons que $L \in C^0(J,\mathfrak{L}(C^0(\Delta,\mathbb{R}^n),\mathbb{R}^n))$; k est définie par (3.1.40) ; R est donnée par le théorème 3.2.1. Soit $E=\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) *Pour tout $(t,s)\in J\times J$, $R(t-,s)-R(t,s)=k(t-,s)-k(t,s)$.*

(ii) *Soit $\varphi\in RI(J,E)$. Alors la fonction $[t\mapsto \int_\sigma^t R(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi]$ est continue sur J.*

(iii) *Soit $\varphi\in RI(J,E)$. Alors, pour tout $t\in J$, les égalités suivantes sont vérifiées.*

$$\int_{[\sigma,t]} R(t-,\xi)\varphi(\xi)d\lambda_1(\xi)=\int_\sigma^t R(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

Démonstration. **(i)** Utilisant (**iii**) de la proposition 3.1.11 nous obtenons $R(t-,s)=k(t-,s)-\int_s^t k(t,\xi)R(\xi,s)d\xi$. Comme $R(t,s)=k(t,s)-\int_s^t k(t,\xi)R(\xi,s)d\xi$, nous obtenons l'égalité annoncée.

(ii) Grâce au théorème 3.2.1 nous obtenons

$$\int_\sigma^t R(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi=\int_\sigma^t k(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi-\int_\sigma^t\left(\int_\xi^t k(t,\alpha)R(\alpha,\xi)d\alpha\right)\varphi(\xi)d\xi.$$

Du (**iii**) de la Proposition 3.1.11, nous savons que $[t\mapsto\int_\sigma^t k(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi]$ est continue sur J. Pour travailler sur la seconde fonction du terme de droite de l'égalité précédente, nous notons que $[(\xi,\alpha)\mapsto\varphi(\xi)]$ est Riemann-intégrable sur $J\times J$ puisque $\varphi\in RI(J,E)$. Alors le produit $[(\xi,\alpha)\mapsto k(t,\alpha)R(\alpha,\xi)\varphi(\xi)]$ est Riemann-intégrables sur $J\times J$ comme un produit de trois fonctions Riemann-intégrable. Nous posons $\mathcal{D}:=\{(\xi,\alpha):\sigma\le\xi\le t,\xi\le\alpha\le t\}=\{(\xi,\alpha):\sigma\le\alpha\le t,\sigma\le\xi\le\alpha\}$, et en utilisant le théorème de Fubini nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_\sigma^t\left(\int_\xi^t k(t,\alpha)R(\alpha,\xi)d\alpha\right)\varphi(\xi)d\xi &= \int_{\mathcal{D}} k(t,\alpha)R(\alpha,\xi)\varphi(\xi)d\xi d\alpha \\ &= \int_\sigma^t\left(\int_\sigma^\alpha k(t,\alpha)R(\alpha,\xi)\varphi(\xi)\right)d\alpha \\ &= \int_\sigma^t k(t,\alpha)\left(\int_\sigma^\alpha R(\alpha,\xi)\varphi(\xi)\right)d\alpha \\ &= \int_\sigma^t k(t,\alpha)P(\alpha)d\alpha. \end{aligned}$$

De la proposition 1.1.5 nous obtenons l'existence de $P(t+)$ et de $P(t-)$ qui assure que $P \in R(J,E)$ et de plus $P \in RI(J,E)$, et alors nous pouvons utiliser la proposition 3.1.11, (**iii**), pour affirmer que $[t \mapsto \int_\sigma^t k(t,\alpha)P(\alpha)d\alpha]$ est continues. Et ainsi la fonction considérée est continue comme une somme de deux fonctions continues.

(iii) Fixons $t \in J$. Posons $P(t) := \int_\sigma^t R(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi$. De (**ii**), nous savons que $P(t-) = P(t)$. De la proposition 1.1.5 nous obtenons $P(t-) = \int_{[\sigma,t]} R(t-,\xi)\varphi(\xi)d\lambda_1(\xi)$. Et ainsi nous obtenons l'égalité annoncée.

□

À ce niveau, nous sommes en mesure de donner une expression explicite de la solution de (3.2.1).

Théorème 3.2.2. *Soit $\sigma \in [0,T]$ et $H \in C^0([\sigma,T],\mathbb{R}^n)$,*
soit $g(t) := -\bar{\eta}(t,\sigma-t)\phi(0) + \int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta) + H(t)$ pour tout $t \in [\sigma,T]$.

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes pour une fonction $y \in \mathcal{L}^1([\sigma,T],\mathbb{R}^n)$.

(i) $\forall t \in [\sigma,T], y(t) = g(t) - \int_\sigma^t k(t,s)y(s)ds$

(ii) $\forall t \in [\sigma,T], y(t) = g(t) - \int_\sigma^t R(t,s)g(s)ds.$

Démonstration. (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**) Par (**i**), $\forall \tau \in [\sigma,T]$, on a :

$$y(\tau) = g(\tau) - \int_\sigma^\tau k(\tau,s)y(s)ds \Rightarrow$$

$$R(t,\tau)y(\tau) = R(t,\tau)g(\tau) - R(t,\tau)\int_\sigma^\tau k(\tau,s)y(s)ds \Rightarrow$$

$$\int_\sigma^t R(t,\tau)y(\tau)d\tau = \int_\sigma^t R(t,\tau)g(\tau)d\tau - \int_\sigma^t R(t,\tau)\int_\sigma^\tau k(\tau,s)y(s)dsd\tau. \tag{3.2.27}$$

Notons que $\{(s,\tau) : \sigma \le \tau \le t,\ \sigma \le s \le \tau\} = \{(s,\tau) : \sigma \le s \le t,\ s \le \tau \le t\}$; alors en utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned}
\int_\sigma^t R(t,\tau)\int_\sigma^\tau k(\tau,s)y(s)ds &= \int_\sigma^t(\int_\sigma^\tau R(t,\tau)k(\tau,s)y(s)ds)d\tau \\
&= \int_\sigma^t(\int_s^t R(t,\tau)k(\tau,s)y(s)d\tau)ds \\
&= \int_\sigma^t(\int_s^t R(t,\tau)k(\tau,s)d\tau)y(s)ds \\
&= \int_\sigma^t (k(t,s) - R(t,s))y(s)ds \ \text{ car } R \text{ résolvante} \\
&= \int_\sigma^t k(t,s)y(s)ds - \int_\sigma^t R(t,s)y(s)ds.
\end{aligned}$$

En utilisant cette égalité dans (3.2.27) on obtient

$$\int_\sigma^t R(t,\tau)y(\tau)d\tau = \int_\sigma^t R(t,\tau)g(\tau)d\tau - \int_\sigma^t k(t,s)y(s)ds + \int_\sigma^t R(t,s)y(s)ds,$$

ce qui entraîne que

$$\int_\sigma^t R(t,\tau)g(\tau)d\tau = \int_\sigma^t k(t,s)y(s)ds.$$

Alors, avec (**i**), on a : $y(t) = g(t) - \int_\sigma^t R(t,s)g(s)ds$, qui est (**ii**).

(**ii**) $\Rightarrow$ (**i**) Par (**ii**), $\forall \tau \in [\sigma, T]$ on a :

$$y(\tau) = g(\tau) - \int_\sigma^\tau R(\tau,s)g(s)ds \Rightarrow$$

$$k(t,\tau)y(\tau) = k(t,\tau)g(\tau) - k(t,\tau)\int_\sigma^\tau R(\tau,s)g(s)ds \Rightarrow$$

$$\int_\sigma^t k(t,\tau)y(\tau)d\tau = \int_\sigma^t k(t,\tau)g(\tau)d\tau - \int_\sigma^t k(t,\tau)\int_\sigma^\tau R(\tau,s)g(s)dsd\tau. \tag{3.2.28}$$

Notons que $\{(\tau,s) : \sigma \le \tau \le t,\ \sigma \le s \le \tau\} = \{(\tau,s) : \sigma \le s \le t,\ s \le \tau \le t\}$ alors en utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned}
\int_\sigma^t k(t,\tau)\int_\sigma^\tau R(\tau,s)g(s)dsd\tau &= \int_\sigma^t (\int_\sigma^\tau k(t,\tau)R(\tau,s)g(s)ds)d\tau \\
&= \int_\sigma^t (\int_s^t k(t,\tau)R(\tau,s)g(s)d\tau)ds \\
&= \int_\sigma^t (\int_s^t k(t,\tau)R(\tau,s)d\tau)g(s)ds \\
&= \int_\sigma^t (k(t,s) - R(t,s))g(s)ds \quad \text{car } R \text{ résolvante} \\
&= \int_\sigma^t k(t,s)g(s)ds - \int_\sigma^t R(t,s)g(s)ds.
\end{aligned}$$

En utilisant cette égalité dans (3.2.28) on obtient

$$\int_\sigma^t k(t,\tau)y(\tau)d\tau = \int_\sigma^t k(t,\tau)g(\tau)d\tau - \int_\sigma^t k(t,s)g(s)ds + \int_\sigma^t R(t,s)g(s)ds$$

d'où

$$\int_\sigma^t k(t,\tau)y(\tau)d\tau = \int_\sigma^t R(t,s)g(s)ds. \tag{3.2.29}$$

En utilisant (**ii**) et (3.2.29) on arrive à :

$$y(t) = g(t) - \int_\sigma^t k(t,\tau)y(\tau)d\tau,$$

ce qui est (**i**). □

3.3 Équations différentielles fonctionnelles linéaires

Soit :
— $T > 0$.
— $(\sigma, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$ (où $\mathfrak{C} = C^0([-r, 0], \mathbb{R}^n)$).

— $\Omega \subseteq [\sigma - r, T] \times \mathfrak{C}$ un sous-ensemble ouvert.
— Pour $t \in [\sigma, T]$, $L(t) : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est linéaire et continue.
— $[t \mapsto L(t)]$ est définie et continue sur $[\sigma, T]$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{C}, \mathbb{R}^n)$.
— Pour tout $t \in [\sigma, T]$,

$$\begin{array}{rcl} L(t) & : & \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & & \phi \mapsto L(t)\phi \end{array}$$

est continue.

On considère le système linéaire :

$$x'(t) = L(t)x_t + H(t) \tag{3.3.1}$$

ou de manière équivalente :

$$x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t L(s)x_s ds + \int_\sigma^t H(s)ds \tag{3.3.2}$$

et si l'on fixe $\phi \in \mathfrak{C}$, on considère le problème de Cauchy :

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & L(t)x_t + H(t) \\ x_\sigma & = & \phi, \end{array}\right\} \tag{3.3.3}$$

où $H \in C^0([\sigma, T]; \mathbb{R}^n)$.

On a le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.3.1. *Soit $(\sigma, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$. Alors il existe une unique fonction $x(\cdot, \sigma, \phi)$ définie et continue sur $[\sigma - r, T]$, dérivable sur $[\sigma, T]$, satisfaisant le système (3.3.3) sur $[\sigma, T]$.*

Remarque 3.3.1. *Dans le système linéaire la solution est définie jusqu'à T, fixé à l'avance, dès que le champ de vecteurs est défini jusqu'à T.*

Démonstration. L'application $L(t) : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ étant continue sur Ω, le théorème 2.1.1 nous assure de l'existence d'une solution $x \in C^0([\sigma - r, \sigma + \alpha], \mathbb{R}^n)$ de l'équation (3.3.3). L'unicité résulte du fait que L est lipschitzienne en ϕ et de l'application du théorème 2.1.2. Pour montrer l'existence de la solution sur $[\sigma - r, T]$ tout entier, supposons que x est une solution non prolongeable de (3.3.3) sur $[\sigma - r, b[$ où $b < T$. L'intégration de (3.3.3) donne :

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in [\sigma, b[, \quad x(t) & = & x(\sigma) + \displaystyle\int_\sigma^t L(s)x_s ds + \int_\sigma^t H(s)ds \\ \text{comme } L \text{ est continue sur } [0, T], & & \text{alors } \exists M > 0, \text{ tel que } \|L(t)\| \leq M \\ \forall t \in [\sigma, b[\quad \|x(t)\| & \leq & \|\phi(0)\| + \displaystyle\int_\sigma^t M\|x_s\|_\infty ds + \int_\sigma^t \|H(s)\|ds. \end{array}$$

Si $t \in [\sigma, b[$, $\|x_t\|_\infty = \sup_{-r\leq\theta\leq 0} \|x(t+\theta)\|$, en posant $s = t+\theta$, on a $\|x_t\|_\infty = \sup_{\sigma-r\leq s\leq t} \|x(s)\|$,

$$\begin{aligned}
\|x_t\|_\infty &= \max\{\sup_{\sigma-r\leq s\leq\sigma} \|x(s)\|; \sup_{\sigma\leq s\leq t} \|x(t)\|\},\\
\|x_t\|_\infty &\leq \max\{\|\phi\|_\infty; \sup_{\sigma\leq s\leq t}\{\|\phi(0)\| + \int_\sigma^s M\|x_u\|_\infty du + \int_\sigma^s \|H(u)\|du\}\}\\
&\leq \max\{\|\phi\|_\infty; \|\phi(0)\| + \sup_{\sigma\leq s\leq t}\{\int_\sigma^s M\|x_u\|_\infty du + \int_\sigma^s \|H(u)\|du\}\}\\
&\leq \max\{\|\phi\|_\infty; (\|\phi\|_\infty + M\int_\sigma^t \|x_s\|_\infty ds + \int_\sigma^t \|H(s)\|ds)\},\\
\|x_t\|_\infty &\leq \|\phi\|_\infty + M\int_\sigma^t \|x_s\|_\infty ds + \int_\sigma^t \|H(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall ([29], p.15), on a :

$$\|x_t\| \leq [\|\phi\|_\infty + \int_\sigma^t \|H(s)\|ds]\exp[M(t-\sigma)] \quad \text{pour tout} \quad t \in [\sigma, b[. \tag{3.3.4}$$

En effet, posons $u(t) = \|\phi\|_\infty + \int_\sigma^t M\|x_s\|ds + \int_\sigma^t \|H(s)\|ds$; on a :

$$\begin{aligned}
u'(t) &= M\|x_t\|_\infty + \|H(t)\|\\
u'(t) &\leq Mu(t) + \|H(t)\|\\
u'(t) &- Mu(t) \leq \|H(t)\|.
\end{aligned}$$

Posons $v(t) = [u(t)]\exp(-M(t-\sigma))$; on a :

$$\begin{aligned}
v'(t) &= u'(t)\exp(-M(t-\sigma)) - Mu(t)\exp(-M(t-\sigma))\\
v'(t) &= [u'(t) - Mu(t)]\exp(-M(t-\sigma)),\\
v'(t) &\leq \|H(t)\|\exp(-M(t-\sigma)) \quad \text{si} \quad t \in [\sigma, b[,\\
\int_\sigma^t v'(s)ds &\leq \int_\sigma^t \|H(u)\|\exp(-M(u-\sigma))du\\
v(t) &\leq |\phi| + \int_\sigma^t \|H(u)\|\exp(-M(u-\sigma))du.
\end{aligned}$$

Comme $\exp(-M(u-\sigma)) \leq 1$, on a : $v(t) \leq \|\phi\|_\infty + \int_\sigma^t \|H(s)\|ds$, donc

$$[u(t)]\exp(-M(t-\sigma)) \leq \|\phi\|_\infty + \int_\sigma^t \|H(s)\|ds \text{ et}$$

$$u(t) \leq [\|\phi\|_\infty + \int_\sigma^t \|H(s)\|ds]\exp(M(t-\sigma)) \text{ ; ainsi on a :}$$

$$\|x_t\|_\infty \leq [\|\phi\|_\infty + \int_\sigma^t \|H(s)\|ds]\exp(M(t-\sigma)), \text{ pour tout } t \in [\sigma, b[.$$

En partant du fait que $\|x'(t)\| \leq M\|x_t\|_\infty + \|H(t)\|$ quand $t \in [\sigma, b[$, on peut en déduire que $\|x'(t)\|$ est majorée par une fonction dans $C^0([\sigma - r, T]; \mathbb{R}^n)$. Posons $f(t) = M\|x_t\|_\infty + \|H(t)\|$, on a donc

$\|x'(t)\| \leq f(t)$ pour tout $t \in [\sigma, b[$.
Puisque $x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s)ds$, on a : $\|x(t) - x(s)\| = \| \int_s^t f(u, x_u)du\|$.
Or on sait que $\|x(t) - x(s)\| = \| \int_s^t x'(u)du\|$, donc $\|x(t) - x(s)\| \leq \| \int_s^t f(u)du\|$ et ensuite $\|x(t) - x(s)\| \leq \sup_{s\leq u\leq t} f(u)|t-s|$; cela entraîne que x est lipschitzienne donc uniformément continue sur $[\sigma, b[$ donc x peut donc être prolongée en b avec $x(b) = \lim_{t\to b} x(t)$. On peut considérer le problème :

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t, x_t) \\ x_b & = & \psi. \end{array}\right\} \tag{3.3.5}$$

D'après le théorème 2.1.1, il existe une solution $\tilde{x} \in C^0([\sigma - r, b + \beta], \mathbb{R}^n)$ de l'équation qui est telle que $\tilde{x}_{|[\sigma-r,b[} = x$. x n'est donc pas la solution maximale du problème (3.3.3). □

On souhaite obtenir une représentation de la solution de (3.3.3). Pour ce faire il est utile de réécrire l'équation en mettant en évidence les paramètres dépendant de la condition initiale x_σ. Nous allons montrer un lemme technique puis le résultat voulu.

Lemme 3.3.1. *Si $x_\sigma = \phi \in C^0([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $\sigma \leq t$ et $-r \leq \theta \leq \sigma - t$, alors*

$$t + \theta - \sigma \in [-r, 0], \text{ et } \phi(t + \theta - \sigma) = x(t + \theta)$$

Démonstration. $(\sigma \leq t \text{ et } -r \leq \theta \leq \sigma - t) \Longrightarrow (\sigma - r \leq t - r \leq t + \theta \leq \sigma)$
$\Longrightarrow (\sigma - r \leq t + \theta \leq \sigma) \Longrightarrow (-r = -\sigma + \sigma - r \leq t + \theta - \sigma \leq 0) \Longrightarrow t + \theta - \sigma \in \text{Dom } \phi = [-r, 0]$.
Après, $\phi(t + \theta - \sigma) = x_\sigma(t + \theta - \sigma) = x(t + \theta - \sigma + \sigma) = x(t + \theta)$. □

Théorème 3.3.2. *Soit $\sigma \in [0, T]$, $\phi \in C^0([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ et $x : [\sigma - r, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $x_{|[\sigma-r,\sigma]} \in C^0([\sigma - r, \sigma], \mathbb{R}^n)$, $x_{|[\sigma,T]} \in C^1([\sigma, T], \mathbb{R}^n)$ et telle que x est solution de*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & L(t)x_t \\ x_\sigma & = & \phi. \end{array}\right.$$

Alors on a :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x'(t) & = & -\int_\sigma^t \bar{\eta}(t, \alpha - t)x'(\alpha)d\alpha - \bar{\eta}(t, (\sigma - t)+)\phi(0) & \\ & & -\int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t, \theta)\phi(t - \sigma + \theta) & \text{quand } t \in [\sigma, \sigma + r] \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcll} x'(t) & = & -\int_\sigma^t \bar{\eta}(t, \alpha - t)x'(\alpha)d\alpha - \bar{\eta}(t, (\sigma - t)+)\phi(0) & \\ & & \text{quand } t \in]\sigma + r, T] & \end{array}\right.$$

Démonstration. Premiér cas : $t \in [\sigma, \sigma + r]$. Par un changement de variable, on a :

$$x'(t) = \int_{-r}^0 d_\theta\eta(t, \theta)x(t + \theta) = \int_{t-r}^t d_\alpha\eta(t, \alpha - t)x(\alpha),$$

et $t \leq \sigma + r \Rightarrow t - r \leq \sigma \leq t$, donc par la relation de Chasles (proposition 1.4.8 **(ii)**), on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & \displaystyle\int_{t-r}^{\sigma} d_\alpha \eta(t, \alpha - t)x(\alpha) + \int_{\sigma}^{t} d_\alpha \eta(t, \alpha - t)x(\alpha) \\ & & -[\eta(t, (\sigma - t)+)\phi(0) - \eta(t, \sigma - t)\phi(0)]. \end{array} \right. \tag{3.3.6}$$

Quand $\alpha \in [t - r, \sigma]$, on a : $\alpha - \sigma \in [(t - \sigma) - r, 0] \subset [-r, 0]$ donc

$$x(\alpha) = x(\sigma - \sigma + \alpha) = x_\sigma(\alpha - \sigma) \Rightarrow$$

$$\int_{t-r}^{\sigma} d_\alpha \eta(t, \alpha - t)x(\alpha) = \int_{t-r}^{\sigma} d_\alpha \eta(t, \alpha - t)\phi(\alpha - \sigma). \tag{3.3.7}$$

Par le changement de variable $\beta = \alpha - t$, on a :

$$\int_{t-r}^{\sigma} d_\alpha \eta(t, \alpha - t)x(\alpha) = \int_{-r}^{\sigma-t} d_\beta \eta(t, \beta)\phi(t - \sigma + \beta). \tag{3.3.8}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties (proposition 1.4.8 **(ii)**), on a :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\sigma}^{t} d_\alpha \bar{\eta}(t, \alpha - t)x(\alpha) & = & \eta(t, 0+)x(t) - \eta(t, \sigma - t)x(\sigma) \\ & & \displaystyle - \int_{\sigma}^{t} \bar{\eta}(t, \alpha - t)x'(\alpha)d\alpha, \end{array}$$

donc :

$$\int_{\sigma}^{t} d_\alpha \bar{\eta}(t, \alpha - t)x(\alpha) = -\eta(t, \sigma - t)\phi(0) - \int_{\sigma}^{t} \bar{\eta}(t, \alpha - t)x'(\alpha)d\alpha. \tag{3.3.9}$$

En utilisant l'équation (3.3.8) et (3.3.9) dans l'équation (3.3.6), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & \displaystyle\int_{-r}^{\sigma-t} d_\theta \eta(t, \theta)\phi(t - \sigma + \theta) - \eta(t, \sigma - t)\phi(0) - \int_{\sigma}^{t} \bar{\eta}(t, \alpha - t)x'(\alpha)d\alpha \\ & & -\bar{\eta}(t, (\sigma - t)+)\phi(0) + \bar{\eta}(t, \sigma - t)\phi(0) \end{array} \right.$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & \displaystyle -\int_{\sigma}^{t} \bar{\eta}(t, \alpha - t)x'(\alpha)d\alpha - \bar{\eta}(t, (\sigma - t)+)\phi(0) \\ & & \displaystyle + \int_{-r}^{\sigma-t} d_\theta \bar{\eta}(t, \theta)\phi(t - \sigma + \theta) \end{array} \right. \tag{3.3.10}$$

qui est la formule annoncée quand $t \in [\sigma, \sigma + r]$.

Deuxième cas : $t \in]\sigma + r, T]$ $x'(t) = \displaystyle\int_{-r}^{0} d_\theta \eta(t, \theta)x(t + \theta)$.

Par un changement de variable, on a :

$$x'(t) = \int_{t-r}^{t} d_\alpha \eta(t, \alpha - t)x(\alpha). \tag{3.3.11}$$

Notons que : $t > \sigma + r \Rightarrow \sigma < t - r \Rightarrow \sigma - r < t - r$. Donc :

$$\forall \alpha \in [\sigma - r, t - r], \quad \alpha - t \in [\sigma - t - r, -r] \subset [-T - r + \sigma, -r] \Rightarrow \eta(t, \alpha - t) = \eta(t, -r) \Rightarrow$$

$$\int_{\sigma-r}^{t-r} d_\alpha \eta(t, \alpha - t)x(\alpha) = 0. \tag{3.3.12}$$

Notons qu'on peut toujours décider que :

$$\eta(t,(-r)+) = \eta(t,-r). \tag{3.3.13}$$

Par la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\sigma-r}^{t} d_\alpha\eta(t,\alpha-t)x(\alpha) &= \int_{\sigma-r}^{t-r} d_\alpha\eta(t,\alpha-t)x(\alpha) + \int_{t-r}^{t} d_\alpha\eta(t,\alpha-t)x(\alpha)\\ &\quad -[\eta(t,(-r)+) - \eta(t,-r)]x(+(-r)) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\int_{t-r}^{t} d_\alpha\eta(t,\alpha-t)x(\alpha) = \int_{\sigma-r}^{t} d_\alpha\eta(t,\alpha-t)x(\alpha) - \int_{\sigma-r}^{t-r} d_\alpha\eta(t,\alpha-t)x(\alpha). \tag{3.3.14}$$

Donc, on a :

$$x'(t) = \int_{\sigma-r}^{t} d_\alpha\eta(t,\alpha-t)x(\alpha). \tag{3.3.15}$$

Par la relation de Chasles, on a :

$$\left\{\begin{aligned}\int_{\sigma-r}^{t} d_\alpha\eta(t,\alpha-t)x(\alpha) &= \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_\alpha\eta(t,\alpha-t)x(\alpha) + \int_{\sigma}^{t} d_\alpha\eta(t,\alpha-t)x(\alpha)\\ &\quad -[\eta(t,(\sigma-t)+)\phi(0) - \eta(t,\sigma-t)\phi(0)]\end{aligned}\right.$$

Quand $\alpha \in [\sigma-r,\sigma]$ on a $\alpha - t \in [\sigma-t-r,\sigma-t] \subset [\sigma-r-T,-r] \Rightarrow \eta(t,\alpha-t) = \eta(t,-r) \Rightarrow$ $\int_{\sigma-r}^{\sigma} d_\alpha\eta(t,\alpha-t)x(\alpha) = 0$ d'où avec l'équation (3.3.15) :

$$x'(t) = \int_{\sigma}^{t} d_\alpha\eta(t,\alpha-t)x(\alpha) - \eta(t,(\sigma-t)+)\phi(0) + \eta(t,\sigma-t)\phi(0). \tag{3.3.16}$$

En utilisant la formule de l'intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\sigma}^{t} d_\alpha\eta(t,\alpha-t)x(\alpha) &= \eta(t,0+)x(t) - \eta(t,\sigma-t)\phi(0)\\ &\quad - \int_{\sigma}^{t} \eta(t,\alpha-t)x'(\alpha)d\alpha\end{aligned}$$

avec l'équation (3.3.16), on a :

$$\begin{aligned}x'(t) &= -\int_{\sigma}^{t} \eta(t,\alpha-t)x'(\alpha)d\alpha - \eta(t,\sigma-t)\phi(0)\\ &\quad -\eta(t,(\sigma-t)+) + \eta(t,\sigma-t)\phi(0)\end{aligned}$$

Cette expression entraîne que :

$$x'(t) = -\int_{\sigma}^{t} \eta(t,\alpha-t)x'(\alpha)d\alpha - \eta(t,(\sigma-t)+)\phi(0). \tag{3.3.17}$$

Et ceci est la formule annoncée. □

Le résultat suivant est la réciproque du théorème 3.3.2.

Lemme 3.3.2. — *Soit* $H \in C^0([\sigma,T],\mathbb{R}^n), \phi \in C^0([-r,0],\mathbb{R}^n)$, $g:[\sigma,T]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ *définie par :* $\forall t\in[\sigma,T]$,

$$g(t) := -\eta(t,\sigma-t)\phi(0) + \int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta) + H(t).$$

— *Soit* $y\in C^0([\sigma,T],\mathbb{R}^n)$ *qui satisfait :* $\forall t\in[\sigma,T]$, $y(t) = -\int_\sigma^t \eta(t,\alpha-t)y(\alpha)d\alpha + g(t)$. *On pose :*

$$x(t) := \begin{cases} \int_\sigma^t y(s)ds + \phi(0) & si \quad t\in[\sigma,T] \\ \phi(t-\sigma) & si \quad t\in[\sigma-r,\sigma]. \end{cases}$$

— *Alors :* $x\in C^0([\sigma-r,T],\mathbb{R}^n), x_{|[\sigma,T]}\in C^1([\sigma,T],\mathbb{R}^n)$,

$$\forall t\in[\sigma,T], x'(t) = L(t)x_t + H(t) \quad et\ x_\sigma = \phi.$$

Démonstration. (A) $x_{|[\sigma,T]}$ est C^1 comme primitive d'une fonction continue.

(B) D'après (A), x est continue sur $]\sigma,T]$; x est continue sur $[\sigma-r,\sigma[$ car ϕ est continue. Reste le point σ. On a $x(\sigma-) = \phi((\sigma-)+\sigma) = \phi(0-) = \phi(0)$ car ϕ est continue sur $[-r,0]$. On a $x(\sigma+) = 0+\phi(0) = x(\sigma)$. Donc $x(\sigma-) = \phi(0) = x(\sigma) = x(\sigma+)$, donc x est continue en σ.

(C) De la définition de x on déduit, $\forall t\in[\sigma,T]$,

$$x'(t) = y(t) = -\int_\sigma^t \eta(t,\alpha-t)y(\alpha)d\alpha + g(t),$$

et par la formule d'intégration par parties prouvée en 1.4.8, il vient :

$$\begin{aligned} x'(t) &= \int_\sigma^t d_\alpha\eta(t,\alpha-t)x(\alpha) + \eta(t,\sigma-t)x(\sigma) + g(t) \\ &= \int_{\sigma-t}^0 d_2\eta(t,\theta)x(t+\theta) + \eta(t,\sigma-t)x(\sigma) \\ &\quad +[-\eta(t,\sigma-t)\phi(0) + \int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta) + H(t)] \\ &= \int_{\sigma-t}^0 d_2\eta(t,\theta)x(t+\theta) + \int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)x(t+\theta) + H(t) \\ &= \int_{-r}^0 d_2\eta(t,\theta)x(t+\theta) + H(t) \\ &= L(t)x_t + H(t). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.1. *L'application* $t\mapsto \int_\sigma^t \eta(t,\alpha-t)x'(\alpha)d\alpha$ *est continue sur* $[\sigma,T]$.

Démonstration. Notons Ψ cette fonction. Fixons arbitrairement $t\in S$.

Démontrons que Ψ est continue à droite en t. Soit $h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\Psi(t+h) - \Psi(t) &= \int_\sigma^{t+h} \eta(t+h, \alpha - t - h)x'(\alpha)d\alpha - \int_\sigma^t \eta(t, \alpha - t)x'(\alpha)d\alpha \\
&= \int_\sigma^{t+h} \eta(t+h, \alpha - t - h)x'(\alpha)d\alpha - \int_\sigma^t \eta(t+h, \alpha - t - h)x'(\alpha)d\alpha \\
&\quad + \int_\sigma^t \eta(t+h, \alpha - t - h)x'(\alpha)d\alpha - \int_\sigma^t \eta(t, \alpha - t)x'(\alpha)d\alpha \\
&= \int_t^{t+h} \eta(t+h, \alpha - t - h)x'(\alpha)d\alpha \\
&\quad + \int_\sigma^t [\eta(t+h, \alpha - t - h) - \eta(t, \alpha - t)]x'(\alpha)d\alpha
\end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}
\|\Psi(t+h) - \Psi(t)\| &\leq \int_t^{t+h} \|\eta(t+h, \alpha - t - h)\| \cdot \|x'(\alpha)\|d\alpha \\
&\quad + \int_\sigma^t \|\eta(t+h, \alpha - t - h) - \eta(t, \alpha - t)\| \cdot \|x'(\alpha)\|d\alpha \\
&\leq h \sup_{\tau \in S} \|\eta(\tau, \cdot)\|_{BV_0} \cdot \|x'\|_\infty \\
&\quad + \|x'\|_\infty \cdot \int_\sigma^t \|\eta(t+h, \alpha - t - h) - \eta(t, \alpha - t - h)\|d\alpha \\
&\quad + \|x'\|_\infty \cdot \int_\sigma^t \|\eta(t, \alpha - t) - \eta(t, \alpha - t)\|d\alpha
\end{aligned}$$

et ainsi : $\forall h > 0$,

$$\begin{aligned}
\|\Psi(t+h) - \Psi(t)\| &\leq h \sup_{\tau \in S} \|\eta(\tau, \cdot)\|_{BV_0} \cdot \|x'\|_\infty \\
&\quad + \|x'\|_\infty \cdot (t - \sigma) \cdot \|\eta(t+h, \cdot) - \eta(t, \cdot)\|_{BV_0} \\
&\quad + \|x'\|_\infty \cdot \int_\sigma^t \|\eta(t, \alpha - t - h) - \eta(t, \alpha - t)\|d\alpha.
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Puisque $[\tau \mapsto \eta(\tau, \cdot)] \in C^0(S, NBV_0(J, E))$, $[\tau \mapsto \|\eta(\tau, \cdot)\|_{NBV}] \in C^0(S, \mathbb{R}^+)$ et puisque S est compact, par le théorème d'optimisation de Weierstrass, $\sup_{\tau \in S} \|\eta(\tau, \cdot)\|_{NBV} < +\infty$ et donc on a :

$$\lim_{h \to 0^+} (h \sup_{\tau \in S} \|\eta(\tau, \cdot)\| \cdot \|x'\|_\infty) = 0. \tag{3.3.19}$$

avec la continuité de $[t \mapsto \eta(t, \cdot)]$ on a :

$$\lim_{h \to 0^+} (\|x'\|_\infty \cdot (t - \sigma)\|\eta(t+h, \cdot) - \eta(t, \cdot)\|_{BV_0} = 0 \tag{3.3.20}$$

Soit une suite $(h_n)_n$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N},\ h_n > 0)$ et $\lim_{n \to +\infty} h_n = 0$. Introduisons la fonction

$$\phi_n(\alpha) := \|\eta(t, \alpha - t - h_n) - \eta(t, \alpha - t)\|.$$

Puisque $\eta(t, \cdot)$ est continue à gauche sur J, on a : $\forall \alpha$, $\lim_{n \to +\infty} \phi_n(\alpha) = 0$. En outre on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \phi_n(\alpha) 2\|\eta(t, \cdot)\|_{NBV} < +\infty$, et les constantes sont intégrables sur J compact, donc on peut utiliser le

théorème de convergence dominée de Lebesgue et affirmer : $\lim_{n\to+\infty}\int_\sigma^t \phi_n(\alpha)d\alpha = \int_\sigma^t \lim_{n\to+\infty}\phi_n(\alpha)d\alpha = \int_\sigma^t 0 d\alpha = 0$, d'où par la caractérisation séquentielle des limites dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_{h\to 0^+}\int_\sigma^t \|\eta(t,\alpha-t-h)-\eta(t,\alpha-t)\|d\alpha = 0. \tag{3.3.21}$$

En utilisant les équations (3.3.19), (3.3.20), (3.3.21) dans (3.3.18) on obtient : $\lim_{h\to 0^+}\|\Psi(t+h)-\Psi(t)\| = 0$, donc Ψ est continue à droite en t.

Démontrons que Ψ est continue à gauche en t. Soit $h>0$, alors

$$\begin{aligned}
\Psi(t-h)-\Psi(t) &= \int_\sigma^{t-h}\eta(t-h,\alpha-t+h)x'(\alpha)d\alpha - \int_\sigma^t \eta(t,\alpha-t)x'(\alpha)d\alpha\\
&= \int_\sigma^{t-h}\eta(t-h,\alpha-t+h)x'(\alpha)d\alpha - \int_\sigma^t \eta(t-h,\alpha-t+h)x'(\alpha)d\alpha\\
&\quad + \int_\sigma^t \eta(t-h,\alpha-t+h)x'(\alpha)d\alpha - \int_\sigma^t \eta(t,\alpha-t)x'(\alpha)d\alpha\\
&= \int_t^{t-h}\eta(t-h,\alpha-t+h)x'(\alpha)d\alpha\\
&\quad + \int_\sigma^t [\eta(t-h,\alpha-t-h)-\eta(t,\alpha-t)]x'(\alpha)d\alpha\\
&= \int_t^{t-h}\eta(t-h,\alpha-t+h)x'(\alpha)d\alpha\\
&\quad + \int_\sigma^t [\eta(t-h,\alpha-t+h)-\eta(t,\alpha-t+h)]x'(\alpha)d\alpha\\
&\quad + \int_\sigma^t [\eta(t,\alpha-t-h)-\eta(t,\alpha-t)]x'(\alpha)d\alpha
\end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}
\|\Psi(t-h)-\Psi(t)\| &\le h\sup_{\tau\in S}\|\eta(\tau,\cdot)\|_{BV_0}\cdot\|x'\|_\infty\\
&\quad + \int_\sigma^t \|\eta(t-h,\cdot)-\eta(t,\cdot)\|_{BV_0}\cdot\|x'(\alpha)\|d\alpha\\
&\quad + \int_\sigma^t \|\eta(t,\alpha-t+h)-\eta(t,\alpha-t)\|d\alpha\cdot\|x'\|_\infty,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|\Psi(t-h)-\Psi(t)\| &\le (\sup_{\tau\in S}\|\eta(\tau,\cdot)\|_{NBV}\cdot\|x'\|_\infty)h\\
&\quad +(\sigma-t)\|x'\|_\infty\cdot\|\eta(t-h,\cdot)-\eta(t,\cdot)\|_{BV_0}\\
&\quad +\|x'\|_\infty\cdot\int_\sigma^t\|\eta(t,\alpha-t+h)-\eta(t,\alpha-t)\|d\alpha.
\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

On a déjà vu que $\sup_{\tau\in S}\|\eta(\tau,\cdot)\|_{NBV} < +\infty$, donc on a

$$\lim_{h\to 0^+}[(\sup_{\tau\in S}\|\eta(\tau,\cdot)\|_{NBV}\cdot\|x'\|_\infty)h] = 0. \tag{3.3.23}$$

Puisque $[t\mapsto\eta(t,\cdot)]\in C^0(S,NBV_0(J,E))$ on a :

$$\lim_{h\to 0^+}[(\sigma-t)\|x'\|_\infty\cdot\|\eta(t-h,\cdot)\|_{NBV}] = 0. \tag{3.3.24}$$

Soit une suite réelle $(h_n)_n$ telle que $(\forall n \in \mathbb{N},\ h_n > 0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$.
Introduisons, $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $\zeta_n(\alpha) := \|\eta(t, \alpha - t + h_n) - \eta(t, \alpha - t)\|$. Puisque $\eta(t,\cdot)$ est BV, elle est réglée, et donc

$$\forall \alpha \in J,\ \lim_{n\to+\infty} \zeta_n(\alpha) = \|\eta(t,(\alpha-t)+) - \eta(t,\alpha-t)\|.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in J, 0 \leq \zeta_n(\alpha) \leq 2\|\eta(t,\cdot)\|_{NBV} < +\infty$, et puisque les constantes sont intégrables sur J, on peut utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et affirmer que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_\sigma^t \zeta_n(\alpha)d\alpha &= \int_\sigma^t \lim_{n\to+\infty} \zeta_n(\alpha)d\alpha \\ &= \int_\sigma^t \|\eta(t,(\alpha-t)+) - \eta(t,\alpha-t)\|d\alpha.\end{aligned}$$

Par la caractérisation séquentielle des limites dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{h\to0^+} \int_\sigma^t \|\eta(t,\alpha-t+h) - \eta(t,\alpha-t)\|d\alpha = \int_\sigma^t \|\eta(t,(\alpha-t)+) - \eta(t,\alpha-t)\|d\alpha. \tag{3.3.25}$$

Puisque $\eta(t,\cdot)$ est réglée, $\{s \in J : \eta(t,s+) \neq \eta(t,s)\}$ est au plus dénombrable donc Lebesgue-négligeable et donc $\int_\sigma^t \|\eta(t,(\alpha-t)+) - \eta(t,\alpha-t)\|d\alpha$. De l'équation (3.3.25) on obtient :

$$\lim_{h\to0^+} \int_\sigma^t \|\eta(t,\alpha-t+h) - \eta(t,\alpha-t)\|d\alpha = 0. \tag{3.3.26}$$

En utilisant les équations (3.3.23), (3.3.24) et (3.3.26) dans l'équation (3.3.22) on obtient : $\lim\limits_{h\to0^+} \|\Psi(t-h) - \Psi(t)\| = 0$, donc Ψ est continue à gauche en t. □

3.3.1 Résolvante de l'équation linéaire (3.3.3).

On définit la fonction $X : J \times J \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant

$$X(t,s) := I - \int_s^t R(\xi,s)d\xi \tag{3.3.27}$$

où I est la matrice identité $n \times n$.

Lemme 3.3.3. *On suppose que $L \in C^0(J, \mathfrak{L}(C^0(\Delta,\mathbb{R}^n),\mathbb{R}^n))$; R est donnée par le théorème 3.2.1 et X est donnée par (3.3.27). Alors les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) $\forall s \in J,\ X(\cdot,s) \in AC(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

(ii) $\forall s \in J,\ \forall t \in J,\ X(\cdot,s)$ *est différentiable à droite en* t, $\frac{\partial X(t,s)}{\partial t+} = -R(t,s)$, *et* $\frac{\partial X(\cdot,s)}{\partial t+} \in RC^0_d(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

(iii) $\forall s \in J,\ \forall t \in J,\ X(\cdot,s)$ *est différentiable à gauche en* t, $\frac{\partial X(t,s)}{\partial t-} = -R(t-,s)$, *et* $\frac{\partial X(\cdot,s)}{\partial t-} \in RC^0_g(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

(iv) $\forall s \in J$, *l'ensemble des points de* J *où* $X(\cdot,s)$ *n'est pas différentiable est au plus dénombrable.*

(v) $\forall t \in J,\ X(t,\cdot) \in BV(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \cap C^0_g(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

(vi) $\forall s \in J,\ \forall t \in J,\ X(t,s+) = I - \int_s^t R(\xi,s+)d\xi$.

Démonstration. Pour alléger l'écriture nous introduisons $N(t,s) := \int_s^t R(\xi,s)d\xi$.

(i) Fixons $s \in J$. De **(iii)** du théorème 3.2.1 nous déduisons que $R(\cdot,s) \in RI(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ par conséquence $R(\cdot,s)$ est Lebesgue-intégrable sur J, et en conséquence nous avons $N(\cdot,s) \in AC(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, [37].
Alors $X(\cdot,s) \in AC(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ comme une différence de deux fonctions qui sont $AC(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

(ii) Comme $R(\cdot,s) \in RI(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \cap C_d^0(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, en utilisant un théorème p.221 dans [48], nous obtenons que, pour tout $t \in J$, $N(\cdot,s)$ est différentiable à droite en t, $\frac{\partial N(t,s)}{\partial t+} = R(t,s)$, et $\frac{\partial N(\cdot,s)}{\partial t+} \in C_d^0(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Comme une constante est différentiable avec une différentielle égale à zéro, nous obtenons l'assertion.

(iii) Comme $R(\cdot,s) \in R(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, en utilisant un théorème p.221 dans [48], nous obtenons que, pour tout $t \in J$, $N(\cdot,s)$ est différentiable à gauche en t, $\frac{\partial N(t,s)}{\partial t-} = R(t-,s)$, et $\frac{\partial N(\cdot,s)}{\partial t-} \in C_g^0(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Comme une constante est différentiable avec une différentielle égale à zéro, nous obtenons l'assertion.

(iv) En utilisant **(ii)** et **(iii)**, nous voyons que l'ensemble des points de J où $X(\cdot,s)$ n'est pas différentiable est égal à l'ensemble $\{t \in J : R(t-,s) \neq R(t,s)\}$. Comme $R(\cdot,s)$ est réglé, en utilisant le théorème 1.1 de [10], nous pouvons affirmer que cet ensemble est au plus dénombrable.

(v) Soit $(x_i)_{0\leq i\leq n+1} \in \mathfrak{S}(J)$. Alors nous avons

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} \|N(t,x_i) - N(t,x_{i+1})\| \\
=\ &\sum_{i=0}^{n} \| \int_{x_i}^{t} R(\xi,x_i)d\xi - \int_{x_{i+1}}^{t} R(\xi,x_{i+1})d\xi\| \\
=\ &\sum_{i=0}^{n} \| \int_{x_i}^{x_{i+1}} R(\xi,x_i)d\xi + \int_{x_{i+1}}^{t} R(\xi,x_i)d\xi - \int_{x_{i+1}}^{t} R(\xi,x_{i+1})d\xi\| \\
\leq\ &\sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|R(\xi,x_i)\|d\xi + \sum_{i=0}^{n} \int_{x_{i+1}}^{t} \|R(\xi,x_i) - R(\xi,x_{i+1})\|d\xi \\
\leq\ &\sum_{i=0}^{n} (x_{i+1}-x_i)\cdot |||R||| + \sum_{i=0}^{n} \int_{\sigma}^{t} \|R(\xi,x_i) - R(\xi,x_{i+1})\|d\xi \\
\leq\ &(T-\sigma)|||R||| + \int_{\sigma}^{T} \sum_{i=0}^{n} \|R(\xi,x_i) - R(\xi,x_{i+1})\|d\xi \\
\leq\ &(T-\sigma)|||R||| + \int_{\sigma}^{T} V_{\sigma}^{T}(R(\xi,\cdot))d\xi \leq 2(T-\sigma)|||R|||.
\end{aligned}$$

En prenant le sup sur $\mathfrak{S}(J)$ nous obtenons $V_{\sigma}^{T}(N(t,\cdot)) \leq 2(T-\sigma)|||R||| < +\infty$. Et ainsi nous avons $N(t,\cdot) \in BV(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Comme une fonction constante est à variation bornée, nous obtenons que $X(t,\cdot) \in BV(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Maintenant nous fixons $t \in J$ et $s \in [\sigma,T[$. Soit $h > 0$ suffisamment petit. Alors nous avons

$$\begin{aligned}
&\|X(t,s-h) - X(t,s)\| = \| \int_{s-h}^{t} R(\xi,s-h)d\xi - \int_{s}^{t} R(\xi,s)d\xi\| \\
=\ &\| \int_{s-h}^{s} R(\xi,s-h)d\xi + \int_{s}^{t} [R(\xi,s-h) - R(\xi,s)]d\xi\| \\
\leq\ &\int_{s-h}^{s} \|R(\xi,s-h)\|d\xi + \int_{s}^{t} \|R(\xi,s-h) - R(\xi,s)\|d\xi \\
\leq\ &h|||R||| + \int_{s}^{t} \|R(\xi,s-h) - R(\xi,s)\|d\xi.
\end{aligned}$$

Il est clair que $\lim_{h\to 0+}(h|||R|||) = 0$. Pour le second terme de la somme précédente, nous notons que $\lim_{h\to 0+}\|R(\xi, s-h) - R(\xi, s)\| = 0$, pour tout $\xi \in J$, comme $R(\xi,\cdot)$ est continue à gauche, et nous notons que $\|R(\xi, s-h) - R(\xi, s)\| \leq 2|||R|||$ et la constante est Lebesgue-intégrable sur J. Et ainsi nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue et affirmer que $\lim_{h\to 0+}\int_s^t \|R(\xi, s-h) - R(\xi, s)\|d\xi = 0$. Et alors, en utilisant les inégalités précédentes, nous obtenons $\lim_{h\to 0+} X(t, s-h) = X(t, s)$, i.e. $X(t,\cdot) \in C_g^0(J, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Et ainsi **(v)** est prouvée.
(vi) Nous fixons $t \in J$ et $s \in [\sigma, T[$. Soit $h > 0$ suffisamment petit. Alors nous avons

$$\begin{aligned} X(t, s+h) &= I - \int_{s+h}^{t} R(\xi, s+h)d\xi \\ &= I + \int_{s}^{s+h} R(\xi, s+h)d\xi - \int_{s}^{t} R(\xi, s+h)d\xi. \end{aligned}$$

Comme $\|\int_s^{s+h} R(\xi, s+h)d\xi\| \leq h|||R|||$, nous obtenons que $\lim_{h\to 0+}\int_s^{s+h} R(\xi, s+h)d\xi = 0$. Pour le troisième terme de la somme précédente, nous notons que $\lim_{h\to 0+} R(\xi, s+h) = R(\xi, s+)$. Nous notons de plus que $\|R(\xi, s+h)\| \leq |||R|||$ pour tout $\xi \in J$ et pour tout $h > 0$, et la constante $|||R|||$ est Lebesgue-intégrable sur J. En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons que $\lim_{h\to 0+}\int_s^t R(\xi, s+h)d\xi = \int_s^t R(\xi, s+)d\xi$. Et ainsi nous obtenons la formule annoncée. □

Remarque 3.3.2. *Utilisant la proposition 3.2.2, la définition de k dans (3.1.40) et la proposition 3.1.10,* **(iii)** *du résultat précédent nous donne la relation suivante :*

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial X(t,s)}{\partial t+} - \tfrac{\partial X(t,s)}{\partial t-} &= R(t-, s) - R(t, s) \\ &= k(t-, s) - k(t, s) = \bar{\eta}(t, (s-t)+) - \bar{\eta}(t, s-t), \end{aligned}$$

et ainsi la discontinuité de $\bar{\eta}(t,\cdot)$ entraîne la non-différentiabilité de $X(\cdot, s)$.

Introduisons la fonction $\mathfrak{z} : J \times J \times C^0(\Delta, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie en posant

$$\mathfrak{z}(t, s, \phi) := \int_s^t X(t, \xi)\left(\int_{-r}^{s-\xi} d_2\eta^1(\xi, \theta)\phi(\xi - s + \theta) + H(\xi)\right)d\xi. \tag{3.3.28}$$

où $H \in C^0([\sigma, T], \mathbb{R}^n)$.

Lemme 3.3.4. *Supposons que $L \in C^0(J, \mathfrak{L}(C^0(\Delta, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n))$; X est donnée par (3.3.27) avec R donnée par le théorème 3.2.1.*
Fixons $\phi \in C^0(\Delta, \mathbb{R}^n)$. Alors les assertions suivantes sont satisfaites.

- **(i)** $\mathfrak{z}(\cdot, \sigma, \phi) \in C^0(J, \mathbb{R}^n)$.
- **(ii)** $\forall t \in J$, $\frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t+}$ *existe et* $\frac{\partial \mathfrak{z}(\cdot,\sigma,\phi)}{\partial t+}$ *est continue à droite sur J.*
- **(iii)** $\forall t \in J$, $\frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t-}$ *existe et* $\frac{\partial \mathfrak{z}(\cdot,\sigma,\phi)}{\partial t-}$ *est continue à gauche sur J.*
- **(iv)** $\forall t \in J$, $\frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t+} - \frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t-} = [R(t, \sigma) - R(t-, \sigma)]\phi(0)$.

Démonstration. Posons $f(t,\xi) := X(t,\xi)\left(\int_{-r}^{\sigma-\xi} d_2\eta^1(\xi,\theta)\phi(\xi-\sigma+\theta)+H(\xi)\right)d\xi$.
Notons que $f(t,\xi) = X(t,\xi)\psi(\xi)$ où ψ est définie dans la proposition 3.1.1, et nous avons $\mathfrak{z}(t,\sigma,\phi) = \int_\sigma^t f(t,\xi)d\xi$.

Dans un premier temps, nous prouvons que f satisfait l'assertion des propositions 1.1.5, 1.2.1 et 1.2.2. Utilisant (**i**) and (**ii**) de la proposition 3.1.1, nous savons que $\psi \in R(J,\mathbb{R}^n)$. Utilisant **(iv)** du Lemme 3.3.3 nous savons que $X(t,\cdot) \in R(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et en conséquence nous obtenons

$$\forall t \in J,\ f(t,\cdot) \in R(J,\mathbb{R}^n). \tag{3.3.29}$$

De **(i)** du Lemme 3.3.3 nous savons que $X(\cdot,\xi) \in C^0(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, et en conséquence nous avons

$$\forall \xi \in J,\ f(\cdot,\xi) \in C^0(J,\mathbb{R}^n). \tag{3.3.30}$$

Du **(ii)** du Lemme 3.3.3 nous savons que nous avons

$$\forall (t,\xi) \in J\times J,\ \frac{\partial f(t,\xi)}{\partial t+} \text{ existe et } \frac{\partial f(\cdot,\xi)}{\partial t+} \in C_d^0(J,\mathbb{R}^n)). \tag{3.3.31}$$

De **(iii)** du Lemme 3.3.3 nous savons que nous avons

$$\forall (t,\xi) \in J\times J,\ \frac{\partial f(t,\xi)}{\partial t-} \text{ existe et } \frac{\partial f(\cdot,\xi)}{\partial t-} \in C_g^0(J,\mathbb{R}^n)). \tag{3.3.32}$$

Comme R est bornée sur $J\times J$, et comme les constantes sont Lebesgue-intégrables $J\times J$, utilisant **(ii)** et **(iii)** du Lemme 3.3.3, et en posant $m(\xi) = m_1(\xi) := \sup_{(t,s)\in J\times J}\|R(t,s)\|$ pour tout $\xi \in J$, nous obtenons les propriétés suivantes.

$$\exists m \in \mathcal{L}^1(J,\mathbb{R};\lambda_1), \forall t \in J, \forall \xi \in J, \|\frac{\partial f(t,\xi)}{\partial t+}\| \le m(\xi). \tag{3.3.33}$$

$$\exists m_1 \in \mathcal{L}^1(J,\mathbb{R};\lambda_1), \forall t \in J, \forall \xi \in J, \|\frac{\partial f(t,\xi)}{\partial t-}\| \le m_1(\xi). \tag{3.3.34}$$

Et ainsi toutes les assertions des propositions 1.1.5, 1.2.1 et 1.2.2 sont vérifiées. Après ces préliminaires nous prouvons les assertions du lemme.

(i) Utilisant la proposition 1.1.5 et (3.3.29) nous avons

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}(t+,\sigma,\phi) &= \int_{[\sigma,t]} X(t+,\xi)(\psi(\xi)+H(\xi))d\lambda_1(\xi) = \int_{[\sigma,t]} X(t,\xi)(\psi(\xi)+H(\xi))d\lambda_1(\xi)\\ &= \int_\sigma^t X(t,\xi)(\psi(\xi)+H(\xi))d\xi = \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}(t-,\sigma,\phi) &= \int_{[\sigma,t]} X(t-,\xi)(\psi(\xi)+H(\xi))d\lambda_1(\xi) = \int_{[\sigma,t]} X(t,\xi)(\psi(\xi)+H(\xi))d\lambda_1(\xi)\\ &= \int_\sigma^t X(t,\xi)(\psi(\xi)+H(\xi))d\xi = \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi),\end{aligned}$$

et ainsi $\mathfrak{z}(\cdot,\sigma,\phi)$ est continue sur J.

(ii) Utilisant la proposition 1.2.1 nous pouvons affirmer que $\frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t+}$ existe et

$$\frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t+} = \int_{[\sigma,t]} \frac{\partial X(t,\xi)}{\partial t+}(\psi(\xi)+H(\xi))d\lambda_1(\xi) + X(t,t+)(\psi(t+)+H(t)).$$

Comme $R(t,s)=0$ quand $s>t$, nous obtenons $X(t,t+)=I-0=I$. Du lemme 3.3.3 nous savons que $\frac{\partial X(t,\xi)}{\partial t+} = -R(t,\xi)$, et comme R est Riemann-intégrable nous obtenons la formule suivante pour tout $t\in J$.

$$\frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t+} = -\int_\sigma^t R(t,\xi)(\psi(\xi)+H(\xi))d\xi + (\psi(t+)+H(t)). \tag{3.3.35}$$

De la proposition 1.1.4 nous savons que $\psi+\in C^0_d(J,\mathbb{R}^n)$. De la proposition 3.2.2 nous savons que $[t\mapsto \int_\sigma^t R(t,\xi)(\psi(\xi)+H(\xi))d\xi]$ est continue sur J. Comme la somme de deux fonctions continues à droite est continue à droite, nous obtenons que $\frac{\partial \mathfrak{z}(\cdot,\sigma,\phi)}{\partial t+}$ est continue à droite.

(iii) Utilisant la proposition 1.2.2 nous pouvons dire que $\frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t-}$ existe et

$$\frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t-} = \int_{[\sigma,t]} \frac{\partial X(t,\xi)}{\partial t-}(\psi(\xi)+H(\xi))d\lambda_1(\xi) + X(t,t-)(\psi(t-)+H(t)).$$

De **(i)** de la proposition 3.1.1 nous savons que ψ est continue à gauche, et alors $\psi(t-)=\psi(t)$. De **(v)** du Lemme 3.3.3 nous savons que $X(t,\cdot)$ est continue à gauche et ainsi $X(t,t-)=X(t,t)=I$. Utilisant **(iii)** du lemme 3.3.3 nous obtenons la formule suivante.

$$\frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t-} = -\int_{[\sigma,t]} R(t-,\xi)(\psi(\xi)+H(\xi))d\xi + (\psi(t)+H(t)).$$

Utilisant **(iii)** de la proposition 3.2.2 nous obtenons

$$\frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t-} = -\int_{[\sigma,t]} R(t,\xi)(\psi(\xi)+H(\xi))d\xi + (\psi(t-)+H(t)). \tag{3.3.36}$$

Utilisant **(ii)** de la proposition 3.2.2, comme la somme de deux fonctions continues à gauche est continue à gauche, nous obtenons que $\frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t}$ est continue à gauche.

(iv) Utilisant (3.3.35), (3.3.36) et **(ii)** de la proposition 3.1.1, nous obtenons

$$\frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t+} - \frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t-} = \psi(t+)-\psi(t) = [R(t,\sigma)-R(t-,\sigma)]\phi(0).$$

□

Lemme 3.3.5. *Supposons que $L\in C^0(J,\mathfrak{L}(C^0(\Delta,\mathbb{R}^n),\mathbb{R}^n))$; X est donnée (3.3.27) avec R donnée par le théorème 3.2.1, et $\mathfrak{z}$ est donnée par (3.3.28). Fixons $\phi\in C^0(\Delta,\mathbb{R}^n)$. Alors la fonction $[t\mapsto U(t,\sigma,\phi):=X(t,\sigma)\phi(0)+\mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)]$, de J à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est continûment différentiable sur J.*

Démonstration. De **(i)** du lemme 3.3.3 et **(i)** du lemme 3.3.4 nous déduisons que $U(\cdot,\sigma,\phi)$ est continue comme une somme de deux fonctions continues. De **(ii)** du lemme 3.3.3 et **(ii)** du lemme 3.3.4 nous déduisons que $\frac{\partial U(t,\sigma,\phi)}{\partial t+} = \frac{\partial X(t,\sigma)}{\partial t+}\phi(0) + \frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t+}$ existe pour tout $t \in J$ et $\frac{\partial U(\cdot,\sigma,\phi)}{\partial t+}$ est continue à droite comme somme de deux fonctions continues à droite. De **(iii)** Lemme 3.3.3 et **(iii)** du lemme 3.3.4 nous déduisons que $\frac{\partial U(t,\sigma,\phi)}{\partial t-} = \frac{\partial X(t,\sigma)}{\partial t-}\phi(0) + \frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t-}$ existe pour tout $t \in J$ et $\frac{\partial U(\cdot,\sigma,\phi)}{\partial t-}$ est continue à gauche comme somme de deux fonctions continues à gauche.

Fixons $t \in J$. De **(ii)** et **(iii)** du lemme 3.3.3 et du **(iv)** du lemme 3.3.4 nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(t,\sigma,\phi)}{\partial t+} - \frac{\partial U(t,\sigma,\phi)}{\partial t-} &= \frac{\partial X(t,\sigma)}{\partial t+}\phi(0) - \frac{\partial X(t,\sigma)}{\partial t-}\phi(0) + \frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t+} - \frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t-} \\ &= [-R(t,\sigma) + R(t-,\sigma)]\phi(0) + [R(t,\sigma) - R(t-,\sigma)]\phi(0) = 0.\end{aligned}$$

De plus $\frac{\partial U(t,\sigma,\phi)}{\partial t}$ existe et $\frac{\partial U(t,\sigma,\phi)}{\partial t} = \frac{\partial U(t,\sigma,\phi)}{\partial t+} = \frac{\partial U(t,\sigma,\phi)}{\partial t-}$ est continue puisque continue à droite et à gauche. □

Lemme 3.3.6. *Supposons que $L \in C^0(J, \mathfrak{L}(C^0(\Delta,\mathbb{R}^n),\mathbb{R}^n))$ et $\phi \in C^0(\Delta,\mathbb{R}^n)$; γ est définie dans* **(iii)** *de la proposition 3.1.6 et k est donnée par (3.1.40).*

(i) *Soit $x \in C^0([\sigma-r,T],\mathbb{R}^n)$, tel que $x_{|_{[\sigma,T]}} \in C^1([\sigma,T],\mathbb{R}^n)$, est une solution de (3.3.3) sur $[\sigma,T]$. Alors l'égalité suivante est vérifiée pour tout $t \in [\sigma,T]$:*

$$x'(t) = -\int_\sigma^t k(t,\xi)x'(\xi)d\xi + \gamma(t).$$

(ii) *Soit $y \in C^0([\sigma,T],\mathbb{R}^n)$ qui vérifie l'équation $y(t) = -\int_\sigma^t k(t,\xi)y(\xi)d\xi + \gamma(t)$ pour tout $t \in [\sigma,T]$. Alors la fonction $x : [\sigma-r,T] \to \mathbb{R}^n$, définie par*

$$x(t) := \begin{cases} \phi(t-\sigma) & \text{si} \quad t \in [\sigma-r,\sigma] \\ \phi(0) + \int_\sigma^t y(s)ds & \text{si} \quad t \in [\sigma,T], \end{cases}$$

est une solution de (3.3.3).

Démonstration. **(i) Premier cas :** $t \in [\sigma,\sigma+r]$. Alors nous avons $-r \le \sigma - t \le 0$, et en utilisant les propositions 1.4.8 et (3.1.2)) nous obtenons

$$\begin{aligned}x'(t) &= L(t)x_t = \int_{-r}^0 d_2\eta(t,\theta)x(t+\theta) \\ &= \int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)x(t+\theta) + \int_{\sigma-t}^0 d_2\eta(t,\theta)x(t+\theta) \\ &\qquad -[\eta(t,(\sigma-t)+) - \eta(t,\sigma-t)]x(t+\sigma-t),\end{aligned}$$

et comme $x(\sigma) = \phi(0)$ nous obtenons

$$\left.\begin{aligned}x'(t) &= \int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)x(t+\theta) + \int_{\sigma-t}^0 d_2\eta(t,\theta)x(t+\theta) \\ &\qquad -[\eta(t,(\sigma-t)+) - \eta(t,\sigma-t)]\phi(0).\end{aligned}\right\} \tag{3.3.37}$$

Quand $\theta \in [-r,\sigma-t]$ nous avons $-r \le (t-\sigma) - r \le (t-\sigma)+\theta \le 0$, de plus $\phi(t-\sigma+\theta) = x_\sigma(t-\sigma+\theta) = x(t+\theta)$, ceci implique que

$$\int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)x(t+\theta) = \int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta) = \psi(t), \tag{3.3.38}$$

où ψ est donnée par la proposition 3.1.1. En faisant un changement de variable nous obtenons $\int_{\sigma-t}^{0} d_2\eta(t,\theta)x(t+\theta) = \int_{\sigma}^{t} d_2\eta(t,\xi-t)x(\xi)$, et en utilisant la proposition 1.4.8 nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{\sigma}^{t} d_2\eta(t,\xi-t)x(\xi) &= \eta(t,0+)x(t) - \eta(t,\sigma-t)x(\sigma) - \int_{\sigma}^{t}\eta(t,\xi-t)x'(\xi)d\xi \\ &= 0 - \eta(t,\sigma-t)\phi(0) - \int_{\sigma}^{t}\bar{\eta}(t,\xi-t)x'(\xi)d\xi,\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\int_{\sigma-t}^{0} d_2\eta(t,\theta)x(t+\theta) = -\eta(t,\sigma-t)\phi(0) - \int_{\sigma}^{t} k(t,\xi)x'(\xi)d\xi. \tag{3.3.39}$$

Maintenant, utilisant (3.3.38) et (3.3.39) dans (3.3.37) nous obtenons

$$\begin{aligned}x'(t) &= -\int_{\sigma}^{t} k(t,\xi)x'(\xi)d\xi - \eta(t,\sigma-t)\phi(0) + \psi(t) \\ &\quad -[\eta(t,(\sigma-t)+) - \eta(t,\sigma-t)]\phi(0) \\ &= -\int_{\sigma}^{t} k(t,\xi)x'(\xi)d\xi - \eta(t,(\sigma-t)+) + \psi(t)\end{aligned}$$

et, notant que $-\eta(t,(\sigma-t)+) + \psi(t) = \gamma(t)$ quand $t \in [\sigma,\sigma+r]$, nous obtenons

$$x'(t) = -\int_{\sigma}^{t} k(t,\xi)x'(\xi)d\xi + \gamma(t), \quad \text{when } t \in [\sigma,\sigma+r]. \tag{3.3.40}$$

Deuxième cas : $t \in]\sigma+r, T]$. Alors nous avons $\sigma - t < -r$ et de plus $\bar{\eta}(t,\sigma-t) = \bar{\eta}(t,-r)$. Utilisant la proposition 1.4.8 et un changement de variable nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{\sigma}^{t} k(t,\xi)x'(\xi)d\xi &= \int_{\sigma}^{t}\bar{\eta}(t,\xi-t)x'(\xi)d\xi \\ &= \bar{\eta}(t,(t-t)+)x(t) - \bar{\eta}(t,\sigma-t)x(\sigma) - \int_{\sigma}^{t} d_\xi\bar{\eta}(t,\xi-t)x(\xi) \\ &= 0 - \bar{\eta}(t,\sigma-t)\phi(0) - \int_{\sigma-t}^{0} d_2\bar{\eta}(t,s)x(t+s) \\ &= -\bar{\eta}(t,-r)\phi(0) - \int_{\sigma-t}^{0} d_2\bar{\eta}(t,s)x(t+s).\end{aligned}$$

Nous déduisons de ces inégalités la relation suivante

$$-\int_{\sigma}^{t} k(t,\xi)x'(\xi)d\xi + \gamma(t) = \int_{\sigma-t}^{0} d_2\bar{\eta}(t,s)x(t+s). \tag{3.3.41}$$

Utilisant **(iii)** de la proposition 1.4.8 nous avons

$$\int_{\sigma-t}^{0} d_2\bar{\eta}(t,s)x(t+s) = \int_{[\sigma-t,-r[} d_2\bar{\eta}(t,s)x(t+s) + \int_{-r}^{0} d_2\bar{\eta}(t,s)x(t+s),$$

comme $\bar{\eta}(t,\cdot)$ est constant sur $[\sigma-t,-r]$ la mesure $\mu[\bar{\eta}(t,\cdot)]$ (notation de la sous-section 1.4) est nulle sur le Borélien de $[\sigma-t,-r]$ et en conséquence nous avons $\int_{[\sigma-t,-r[} d_2\bar{\eta}(t,s)x(t+s) = 0$, et ainsi nous obtenons $-\int_{\sigma}^{t} k(t,\xi)x'(\xi)d\xi + \gamma(t) = L(t)x_t = x'(t)$ qui implique

$$x'(t) = -\int_{\sigma}^{t} k(t,\xi)x'(\xi)d\xi + \gamma(t), \quad \text{quand } t \in [\sigma+r, T]. \tag{3.3.42}$$

Les relations (3.3.40) et (3.3.42) permettent d'obtenir la formule annoncée.

(ii) **Premier cas :** $t \in [\sigma, \sigma + r]$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) = -\int_\sigma^t k(t,\xi)y(\xi)d\xi + \gamma(t) \\ &= -\int_\sigma^t k(t,\xi)x'(\xi)d\xi - \bar{\eta}(t,(\sigma-t)+)\phi(0) + \int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)\phi(t-\sigma+\theta), \end{aligned}$$

et comme $\phi(t-\sigma+\theta) = x(t+\theta)$ quand $t \in [\sigma, \sigma+r]$ et utilisant la définition de k, nous obtenons

$$x'(t) = \int_{-r}^{\sigma-t} d_2\eta(t,\theta)x(t+\theta) - \int_\sigma^t \bar{\eta}(t,\xi-t)x'(\xi)d\xi - \bar{\eta}(t,(\sigma-t)+)\phi(0). \tag{3.3.43}$$

Utilisant la proposition 1.4.8 et $\bar{\eta}(t,0+) = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_\sigma^t \bar{\eta}(t,\xi-t)x'(\xi)d\xi &= \bar{\eta}(t,(t-t)+)x(t) - \bar{\eta}(t,\sigma-t)x(\sigma) \\ &\quad - \int_\sigma^t d_2\bar{\eta}(t,\xi-t)x(\xi) \\ &= -\bar{\eta}(t,\sigma-t)\phi(0) - \int_{\sigma-t}^0 d_2\bar{\eta}(t,\theta)x(t+\theta), \end{aligned}$$

et ainsi avec (3.3.43) nous obtenons

$$\begin{aligned} x'(t) &= \int_{-r}^{\sigma-t} d_2\bar{\eta}(t,\theta)x(t+\theta) + \int_{\sigma-t}^0 d_2\bar{\eta}(t,\theta)x(t+\theta) \\ &\quad -[\bar{\eta}(t,(\sigma-t)+) - \bar{\eta}(t,\sigma-t)]\phi(0), \end{aligned}$$

et en utilisant la Proposition 1.4.8 nous obtenons $x'(t) = \int_{-r}^0 d_2\bar{\eta}(t,\theta)x(t+\theta)$, et alors

$$x'(t) = L(t)x_t \text{ quand } t \in [\sigma, \sigma+r]. \tag{3.3.44}$$

Deuxième cas : $t \in]\sigma + r, T]$. Dans ce cas nous avons $\sigma - t < -r$. nous avons

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) = -\int_\sigma^t k(t,\xi)y(\xi)d\xi - \bar{\eta}(t,-r)\phi(0) \\ &= -\int_\sigma^t \bar{\eta}(t,\xi-t)x'(\xi)d\xi - \bar{\eta}(t,-r)\phi(0). \end{aligned}$$

Utilisant la proposition 1.4.8 nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_\sigma^t \bar{\eta}(t,\xi-t)x'(\xi)d\xi &= \bar{\eta}(t,0+)\phi(0) - \bar{\eta}(t,\sigma-t)\phi(0) \\ &\quad - \int_\sigma^t d_2\bar{\eta}(t,\xi-t)x(\xi) \\ &= -\bar{\eta}(t,-r)\phi(0) - \int_{\sigma-t}^0 d_2\bar{\eta}(t,\theta)x(t+\theta) \\ &= -\bar{\eta}(t,-r)\phi(0) - \int_{[\sigma-t,-r)} d_2\bar{\eta}(t,\theta)x(t+\theta) \\ &\quad - \int_{-r}^0 d_2\bar{\eta}(t,\theta)x(t+\theta) \\ &= -\bar{\eta}(t,-r)\phi(0) - 0 - L(t)x_t, \end{aligned}$$

et ainsi nous obtenons $x'(t) = \bar{\eta}(t,-r)\phi(0) + L(t)x_t - \bar{\eta}(t,-r)\phi(0)$ ceci entraîne que

$$x'(t) = L(t)x_t \text{ quand } t \in]\sigma + r, T]. \tag{3.3.45}$$

De (3.3.44) et (3.3.45) nous obtenons que x est une solution de (3.3.1) sur $[\sigma, T]$. La définition de x donne $x_\sigma = \phi$, et alors x est une solution de (3.3.3) sur $[\sigma, T]$.

□

Lemme 3.3.7. *Supposons que $L \in C^0(J, \mathfrak{L}(C^0(\Delta, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n))$; k est donnée par (3.1.40). Si $u \in C^0([\sigma, T], \mathbb{R}^n)$ satisfait $u(t) = -\int_\sigma^t k(t,\xi)u(\xi)d\xi$ pour tout $t \in [\sigma, T]$ alors $u(t) = 0$ pour tout $t \in [\sigma, T]$.*

Démonstration. Posons $N := \{\tau \in [\sigma, T] : \forall t \in [\sigma, \tau], u(t) = 0\}$. Notons d'abord que N est non vide puisque $\sigma \in N$. Si $(\tau_q)_q$ est une suite dans N qui converge vers $\tau \in [\sigma, T]$, alors nous avons $u(\tau_q) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, et alors $u(\tau) = 0$ comme u est continue. De plus, si $t \in [\sigma, \tau[$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\tau_q \in]t, \tau + \epsilon[$ qui entraîne que $t \in [\sigma, \tau_q]$ et alors nous avons $u(t) = 0$ comme $\tau_q \in N$. et ainsi nous avons prouvé que N est fermé dans $[\sigma, T]$.

Fixons $\tau_1 \in N$. Comme k est bornée, nous choisissons $\tau_2 \in]\tau_1, T]$ tel que $(\tau_2 - \tau_1).\|k\|_\infty < 1$. Introduisons l'opérateur $\mathcal{T} : C^0([\tau_1, \tau_2], \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^0([\tau_1, \tau_2], \mathbb{R}^n)$ en posant $\mathcal{T}(v) := [t \mapsto \int_{\tau_1}^t k(t,\xi)v(\xi)d\xi]$. De **(iii)** de la proposition 3.1.11 nous savons que cet opérateur est bien définie. $\mathcal{T}$ est clairement linéaire. Nous avons

$$\|\mathcal{T}(v)(t)\| \leq \int_{\tau_1}^t \|k(t,\xi)\|d\xi \cdot \|v\|_\infty \leq (\tau_2 - \tau_1) \cdot \|k\|_\infty$$

duquel nous déduisons que $\mathcal{T}$ est une contraction stricte. De plus $\mathcal{T}$ possède un unique point fixe, et la fonction nulle est clairement un point fixe, et ainsi son unique point fixe est l'application nulle. Notons que la restriction de u à $[\tau_1, \tau_2]$ est encore un point fixe de cet opérateur comme, pour tout $t \in [\tau_1, \tau_2]$, nous avons $u(t) = \int_\sigma^t k(t,\xi)u(\xi)d\xi = \int_\sigma^{\tau_1} k(t,\xi)0d\xi + \int_{\tau_1}^t k(t,\xi)v(\xi)d\xi$. Alors nous avons nécessairement $u(t) = 0$ pour tout $t \in [\tau_1, \tau_2]$. En conséquence $\tau_2 \in N$, et nous avons aussi $[\sigma, \tau_2] \subset N$, et $[\sigma, \tau_2]$ est un voisinage de τ_1 Dans N. Et ainsi nous avons prouvé que N est ouvert dans $[\sigma, T]$.

Comme l'intervalle $[\sigma, T]$ est connexe et N est un sous-ensemble fermé et ouvert de $[\sigma, T]$, nous obtenons $N = [\sigma, T]$ ceci implique que $u(t) = 0$ pour tout $t \in [\sigma, T]$. □

Lemme 3.3.8. *Supposons que $L \in C^0(J, \mathfrak{L}(C^0(\Delta, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n))$; k est donné par (3.1.40), R est donné par le théorème 3.2.1, et γ l'est par* **(iii)** *de la proposition 3.1.6. Si x est une solution de (3.3.3) alors, pour $t \in [\sigma, T]$, la relation suivante est vérifiée*

$$x'(t) = -\int_\sigma^t R(t,\xi)\gamma(\xi)d\xi + \gamma(t).$$

Démonstration. Posons $p(t) := -\int_\sigma^t R(t,\xi)\gamma(\xi)d\xi$ pour tout $t \in [\sigma, T]$. Dans les calculs suivants nous utilisons **(i)** du Théorème 3.2.1, l'égalité $\{(\xi, \beta) : \sigma \leq \xi \leq t, \xi \leq \beta \leq t\} = \{(\xi, \beta) : \sigma \leq \beta \leq t, \sigma \leq$

$\xi \leq \beta\}$ et le théorème de Fubini.

$$\begin{aligned} p(t) &= -\int_\sigma^t k(t,\xi)\gamma(\xi)d\xi + \int_\sigma^t \left(\int_\xi^t k(t,\beta)R(\beta,\xi)d\beta\right)\gamma(\xi)d\xi \\ &= -\int_\sigma^t k(t,\xi)\gamma(\xi)d\xi + \int_\sigma^t \left(\int_\sigma^\beta k(t,\beta)R(\beta,\xi)\gamma(\xi)d\xi\right)d\beta \\ &= -\int_\sigma^t k(t,\xi)\gamma(\xi)d\xi + \int_\sigma^t k(t,\beta)\left(\int_\sigma^\beta R(\beta,\xi)\gamma(\xi)d\xi\right)d\beta \\ &= -\int_\sigma^t k(t,\xi)\gamma(\xi)d\xi + \int_\sigma^t k(t,\beta)p(\beta)d\beta \\ &= -\int_\sigma^t k(t,\xi)[\gamma(\xi)+p(\xi)]d\xi \end{aligned}$$

ce qui implique $[\gamma(t)+p(t)] = -\int_\sigma^t k(t,\xi)[\gamma(\xi)+p(\xi)]d\xi + \gamma(t)$, et en conséquence, utilisant le lemme 3.3.6,

$$[\gamma(t)+p(t)-x'(t)] = -\int_\sigma^t k(t,\xi)[\gamma(\xi)+p(\xi)-x'(\xi)]d\xi.$$

Alors en utilisant le lemme 3.3.7 nous obtenons

$$x'(t) = \gamma(t)+p(t) = -\int_\sigma^t R(t,\xi)\gamma(\xi)d\xi + \gamma(t).$$

□

Théorème 3.3.3. *Supposons que $L \in C^0(J, \mathfrak{L}(C^0(\Delta,\mathbb{R}^n),\mathbb{R}^n))$. X est définie par (3.3.27), ψ par la proposition 3.1.1, U est définie dans le lemme 3.3.5 et $\bar\eta$ est définie par le théorème 3.1.1. Si $x : [\sigma-r, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution de (3.3.3) alors nous avons $x(t) = U(t,\sigma,\phi)$ pour tout $t \in [\sigma, T]$, i.e. $x(t) = X(t,\sigma)\phi(0) + \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)$, i.e.*

$$x(t) = X(t,\sigma)\phi(0) + \int_\sigma^t X(t,\xi)\left(\int_{-r}^{\sigma-\xi} d_2\bar\eta(\xi,\theta)\phi(\xi-\sigma+\theta) + H(\xi)\right)d\xi. \tag{3.3.46}$$

Démonstration. Fixons $t \in [\sigma, T]$. Utilisant le lemme 3.3.8 et la formule $x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t \gamma(s)ds$, nous obtenons l'égalité suivante

$$x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t \gamma(s)ds - \int_\sigma^t \left(\int_\sigma^s R(s,\xi)\gamma(\xi)d\xi\right)ds. \tag{3.3.47}$$

De la définition de γ nous obtenons $\int_\sigma^t \gamma(s)ds = -\int_\sigma^t \bar\eta(s,\sigma-s)\phi(0)ds + \int_\sigma^t \psi(s)ds$ ceci implique

$$\int_\sigma^t \gamma(s)ds = -\int_\sigma^t k(s,\sigma)\phi(0)ds + \int_\sigma^t \psi(s)ds. \tag{3.3.48}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \int_\sigma^t \left(\int_\sigma^s R(s,\xi)\gamma(\xi)d\xi\right)ds &= -\int_\sigma^t \left(\int_\sigma^s R(s,\xi)\bar\eta(\xi,\sigma-\xi)\phi(0)d\xi\right)ds + \int_\sigma^t \left(\int_\sigma^s R(s,\xi)\psi(\xi)d\xi\right)ds \\ &= -\int_\sigma^t \left(\int_\sigma^s R(s,\xi)k(\xi,\sigma)\phi(0)d\xi\right)ds + \int_\sigma^t \left(\int_\sigma^s R(s,\xi)\psi(\xi)d\xi\right)ds \end{aligned}$$

et comme $-\int_\sigma^s R(s,\xi)k(\xi,\sigma)\phi(0)d\xi = R(s,\sigma)\phi(0) - k(s,\sigma)\phi(0)$, nous obtenons

$$\left.\begin{aligned}\int_\sigma^t \left(\int_\sigma^s R(s,\xi)\gamma(\xi)d\xi\right)ds &= \int_\sigma^t R(s,\sigma)\phi(0)ds - \int_\sigma^t k(s,\sigma)\phi(0)ds \\ &\quad + \int_\sigma^t \left(\int_\sigma^s R(s,\xi)\psi(\xi)d\xi\right)ds.\end{aligned}\right\} \tag{3.3.49}$$

Utilisant (3.3.48) et (3.3.49) dans (3.3.47), et utilisant l'égalité $\{(s,\xi) : \sigma \le s \le t, \sigma \le \xi \le s\} = \{(s,\xi) : \sigma \le \xi \le t, \xi \le s \le t\}$ et le théorème de Fubini nous obtenons

$$\begin{aligned}x(t) &= \phi(0) - \int_\sigma^t R(s,\xi)\phi(0)d\xi + \int_\sigma^t \psi(s)ds - \int_\sigma^t \left(\int_\sigma^s R(s,\xi)\psi(\xi)d\xi\right)ds \\ &= (I - \int_\sigma^t R(s,\xi)d\xi)\phi(0) + \int_\sigma^t \psi(s)ds - \int_\sigma^t \left(\int_\xi^t R(s,\xi)\psi(\xi)ds\right)d\xi \\ &= X(t,\sigma)\phi(0) + \int_\sigma^t \psi(\xi)d\xi - \int_\sigma^t \left(\int_\xi^t R(s,\xi)ds\right)\psi(\xi)d\xi \\ &= X(t,\sigma)\phi(0) + \int_\sigma^t \left(I - \int_\xi^t R(s,\xi)ds\right)\psi(\xi)d\xi \\ &= X(t,\sigma)\phi(0) + \int_\sigma^t X(t,\xi)\psi(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

En utilisant le (f) de la proposition 3.1.2, nous obtenons la formule annoncée. □

Remarque 3.3.3. *Comme nous l'avons prouvé dans le lemme 3.3.5, l'application* $[t \mapsto U(t,\sigma,\phi)]$ *est de classe* C^1*, mais ces deux composantes* $[t \mapsto X(t,\sigma)\phi(0)]$ *et* $[t \mapsto z(t,\sigma,\phi)]$ *ne sont pas de classe* C^1 *comme montré dans la remarque 3.3.2 et dans le* **(ii)** *du lemme 3.3.4. Dans [29] les auteurs affirment que* $x(\cdot,\sigma,\phi)$ *est une solution de l'équation différentielle fonctionnelle, mais comme* X *n'est pas de classe* C^1*, il est nécessaire de modifier la notion de solution de l'équation différentielle fonctionnelle pour pouvoir affirmer cela.*

Nous allons rappeler dans les pages suivantes les principaux résultats de ce sous-paragraphe.

Proposition 3.3.2. *Soit* $L : [\sigma, T] \longrightarrow \mathfrak{L}(C^0([-r, 0], \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$. *Il existe une application* $\eta : [\sigma, T] \times [-r, 0] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *qui vérifie les propriétés suivantes.*

(i) $\forall t \in [\sigma, T]$, $\eta(t, \cdot) \in NBV([-r, 0], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

(ii) $\forall t \in [\sigma, T]$, $\|\eta(t, \cdot)\|_{BV} = \|L(t)\|_{\mathfrak{L}}$

(iii) $[t \mapsto \eta(t, \cdot)] \in C^0([\sigma, T], NBV([-r, 0], \mathcal{M}_n(\mathbb{R})))$

(iv) $\forall t \in [\sigma, T]$, $\forall \phi \in C^0([\sigma - r, T], \mathbb{R}^n)$, $L(t)\phi = \int_{-r}^{0} d_2\eta(t, \theta)\phi(\theta)$

(v) η *est Lebesgue-mesurable sur* $[\sigma, T] \times [-r, 0]$

(vi) η *est Riemann-intégrable sur* $[\sigma, T] \times [-r, 0]$.

Théorème 3.3.4. *Soit* $L : [\sigma, T] \longrightarrow \mathfrak{L}(C^0([-r, 0], \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$. *Alors il existe une application* $X : [\sigma, T] \times [\sigma, T] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *qui vérifie les propriétés suivantes.*

(i) $\forall s, t \in [\sigma, T]$ *tel que* $s \geq t$, $X(t, s) = I$ *(identité)*

(ii) $\forall s \in [\sigma, T]$, $X(\cdot, s) \in AC([\sigma, T], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

(iii) $\forall s, t \in [\sigma, T]$, $X(\cdot, s)$ *est différentiable à droite et différentiable à gauche en* t, $\frac{\partial X(\cdot,s)}{\partial t+} \in C^0_d([\sigma, T], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $\frac{\partial X(\cdot,s)}{\partial t-} \in C^0_g([\sigma, T], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

(iv) $\forall s, t \in [\sigma, T]$ *tel que* $s \geq t$, $\frac{\partial X(t,s)}{\partial t+} - \frac{\partial X(t,s)}{\partial t-} = \eta(t, (s-t)+) - \eta(t, (s-t)-)$

(v) $\forall s \in [\sigma, T]$, *l'ensemble des points de* $[\sigma, T]$ *où* $X(\cdot, s)$ *n'est pas différentiable est au plus dénombrable.*

(vi) $\forall t \in [\sigma, T]$, $X(t, \cdot) \in BV([\sigma, T], \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \cap C^0_g([\sigma, T], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Définissons l'application $\mathfrak{z} : \{(t, \alpha) \in [\sigma, T] \times [\sigma, T] : t \geq \alpha\} \times C^0([-r, 0], \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *en posant*

$$\mathfrak{z}(t, \sigma, \phi) := \int_\sigma^t X(t, \xi) \left(\int_{-r}^{\sigma - \xi} d_2\eta(\xi, \theta)\phi(\xi - \sigma + \theta) + H(\xi) \right) d\xi.$$

Alors les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout $\sigma \in [0, T]$ *et pour tout* $\phi \in C^0([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

(vii) $\mathfrak{z}(\cdot, \sigma, \phi) \in C^0([\sigma, T], \mathbb{R}^n)$

(viii) $\forall t \in [\sigma, T]$, $\mathfrak{z}(\cdot, \sigma, \phi)$ *est différentiable à droite et différentiable à gauche en* t, $\frac{\partial \mathfrak{z}(\cdot,\sigma,\phi)}{\partial t+} \in C^0_d(([\sigma, T], \mathbb{R}^n)$, *et* $\frac{\partial \mathfrak{z}(\cdot,\sigma,\phi)}{\partial t-} \in C^0_g(([\sigma, T], \mathbb{R}^n)$

(ix) $\forall t \in [\sigma, T]$, $\frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t+} - \frac{\partial \mathfrak{z}(t,\sigma,\phi)}{\partial t-} = \frac{\partial X(t,s)}{\partial t-} - \frac{\partial X(t,s)}{\partial t+}$.

Définissons l'ensemble $\mathfrak{D} := \{(t, \alpha) \in [\sigma, T] \times [\sigma, T] : t \geq \alpha - r\}$ *et l'application* $U : \mathfrak{D} \times C^0([-r, 0], \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *en posant*

$$U(t, \sigma, \phi) := \begin{cases} X(t, \sigma)\phi(0) + \mathfrak{z}(t, \sigma, \phi) & \text{si} \quad t \geq \sigma \\ \phi(t - \sigma) & \text{si} \quad \sigma - r \leq t \leq \sigma. \end{cases}$$

Alors les assertions suivantes sont vérifiées pour tout $\sigma \in [0, T]$, *pour tout* $\phi \in C^0([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

(x) $U(\cdot, \sigma, \phi)_{|_{[\sigma,t]}} \in C^1([\sigma, T], \mathbb{R}^n)$ *et* $U(\cdot, \sigma, \phi) \in C^0([\sigma - r, T], \mathbb{R}^n)$

(xi) $U(\cdot, \sigma, \phi)$ *est l'unique solution de* (1.4.22) *sur* $[\sigma, T]$.

De plus on définit l'application $V : \mathfrak{D} \times C^0([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times C^0([\sigma, T], \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *en posant*

$$V(t, \sigma, \phi, H) := \begin{cases} U(t, \sigma, \phi) + \int_\sigma^t X(t, \alpha)H(\alpha)d\alpha & \text{si} \quad t \geq \sigma \\ \phi(t - \sigma) & \text{si} \quad \sigma - r \leq t \leq \sigma. \end{cases}$$

Alors les assertions suivantes sont vérifiées pour tout $\sigma \in [0, T]$ *pour tout* $\phi \in C^0([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ *et pour tout* $H \in C^0([\sigma, T), \mathbb{R}^n)$

(xii) $V(\cdot, \sigma, \phi, H)_{|_{[\sigma,T]}} \in C^1([\sigma, T], \mathbb{R}^n)$ *et* $V(\cdot, \sigma, \phi, h) \in C^0([\sigma - r, T], \mathbb{R}^n)$

(xiii) $V(\cdot, \sigma, \phi, H)$ *est l'unique solution de* (3.3.1) *sur* $[\sigma, T]$.

3.4 L'équation adjointe du problème linéaire et la forme bilinéaire associée

Dans cette partie, nous considérons le système linéaire :

$$x'(t) = \int_{-r}^{0} [d_2\bar{\eta}(t,\theta)]x(t+\theta) \tag{3.4.1}$$

où nous rappelons que $\bar{\eta}(\cdot,\cdot)$ est définie en (3.1.17). On considère en plus l'équation non homogène :

$$x'(t) = L(t)x_t + H(t) \tag{3.4.2}$$

où $H \in C^0([\sigma,T],\mathbb{R}^n)$. Grâce au théorème 3.3.3, la solution $x(t)$ de (3.4.2) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t,\sigma)\phi(0) + \int_{\sigma}^{t} X(t,\alpha)\Big(\int_{-r}^{\sigma-\alpha} d_2\bar{\eta}(\alpha,\theta)\phi(\alpha-\sigma+\theta) \\ &\quad + \int_{\sigma}^{t} X(t,\alpha)H(\alpha)d\alpha \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Définition 3.4.1. L'équation adjointe *à l'équation* (3.4.1) *est :*

$$\frac{d}{ds}\left(z(s) + \int_{s}^{T+r} z(\alpha)\bar{\eta}(\alpha, s-\alpha)d\alpha\right) = 0, \ \textit{pour } \sigma \le s \le T \tag{3.4.4}$$

où $z \in NBV([\sigma,T+r],\mathbb{R}^{n*})$.

Le résultat suivant établit le lien entre la matrice résolvante $X(t,s)$ de (3.4.1) et la matrice résolvante $Y(\sigma,t)$ de l'équation adjointe (3.4.4).

Théorème 3.4.1. *si x est solution de* (3.4.2) *sur* $[\sigma,T]$, *alors pour* $t \in [\sigma,T]$,

$$\begin{aligned} x(t) &= Y(\sigma,t)x(\sigma) + \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_2\Big[\int_{\sigma}^{t} Y(\sigma,t)\bar{\eta}(\alpha,\beta-\alpha)d\alpha\Big]x(\beta) \\ &\quad + \int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)H(\alpha)d\alpha, \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

où Y est une matrice carrée $n \times n$ définie par :

$$\left.\begin{aligned} Y(\sigma,t) &= 0, \ \textit{pour } t < \sigma \\ Y(\sigma,t) &= I - \int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)\bar{\eta}(\alpha,\sigma-\alpha)d\alpha, \ \textit{pour } \sigma \le t. \end{aligned}\right\} \tag{3.4.6}$$

Et en outre on a :

$$Y(\sigma,t) = X(t,\sigma) \tag{3.4.7}$$

où X vient de (4.5.11).

Démonstration. Soit x une solution de (3.4.2) passant par (σ, ϕ). Multiplions (3.4.2) par $Y(\alpha,t)$ et intégrons de σ à t, ce qui donne :

$$Y(\alpha,t)x'(\alpha) = Y(\alpha,t)L(\alpha)x_\alpha + Y(\alpha,t)H(\alpha),$$

$$\int_\sigma^t Y(\alpha,t)x'(\alpha)d\alpha = \int_\sigma^t Y(\alpha,t)L(\alpha)x_\alpha d\alpha + \int_\sigma^t Y(\alpha,t)H(\alpha)d\alpha.$$

Une intégration par parties (cf.[31],p.179) du terme de gauche de l'égalité donne :

$$\begin{aligned}\int_\sigma^t Y(\alpha,t)x'(\alpha)d\alpha &= [Y(\alpha,t)x(\alpha)]_\sigma^t - \int_\sigma^t D_\alpha Y(\alpha,t)x(\alpha)d\alpha \\ &= x(t) - Y(\sigma,t)x(\sigma) - \int_\sigma^t D_\alpha Y(\alpha,t)x(\alpha)d\alpha.\end{aligned}$$

On a donc :

$$x(t) - Y(\sigma,t)x(\sigma) - \int_\sigma^t D_\alpha Y(\alpha,t)x(\alpha)d\alpha - \int_\sigma^t Y(\alpha,t)h(\alpha)d\alpha = \int_\sigma^t Y(\alpha,t)L(\alpha)x_\alpha d\alpha.$$

On s'intéresse au membre de droite de l'égalité précédente ; on a :

$$L(\alpha)x_\alpha = \int_{-r}^0 [d_\theta \bar\eta(\alpha,\theta)]x(\alpha+\theta)$$

qui, par le changement de variable $u = \alpha + \theta$, devient

$$L(\alpha)x_\alpha = \int_{\alpha-r}^\alpha [d_u \bar\eta(\alpha, u-\alpha)]x(u).$$

Ainsi on a :

$$\int_\sigma^t Y(\alpha,t)L(\alpha)x_\alpha d\alpha = \int_\sigma^t \{Y(\alpha,t)\int_{\alpha-r}^\alpha [d_u\bar\eta(\alpha,u-\alpha)]x(u)\}d\alpha.$$

Pour $\alpha \le u \le t$, on a $0 \le u-\alpha \le t-\alpha$, et comme $\bar\eta(\alpha,\theta) = 0$, pour $\theta \ge 0$ on a :

$$\int_\sigma^t Y(\alpha,t)L(\alpha)x_\alpha d\alpha = \int_\sigma^t \{Y(\alpha,t)\int_{\alpha-r}^t [d_u\bar\eta(\alpha,u-\alpha)]x(u)\}d\alpha,$$

or, en posant $k(\alpha,u) = \overline{\eta}(\alpha, u-\alpha)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha-r}^t d_u k(\alpha,u)x(u) &= \int_{\sigma-r}^t d_u k(\alpha,u)x(u) + \int_{\alpha-r}^{\sigma-r} d_u k(\alpha,u)x(u) \\ \int_{\sigma-r}^t d_u k(\alpha,u)x(u) &= \int_{\alpha-r}^t d_u k(\alpha,u)x(u) - \int_{\alpha-r}^{\sigma-r} d_u k(\alpha,u)x(u) \\ &= \int_{\alpha-r}^t d_u k(\alpha,u)x(u) + \int_{\sigma-r}^{\alpha-r} d_u k(\alpha,u)x(u)\end{aligned}$$

et comme $\alpha \le u \le t$, on a $k(\alpha,u) = 0$ ainsi

$$\int_{\sigma-r}^t d_u k(\alpha,u)x(u) = \int_{\alpha-r}^t d_u k(\alpha,u)x(u).$$

Donc :

$$\int_\sigma^t Y(\alpha,t)L(\alpha)x_\alpha d\alpha = \int_\sigma^t Y(\alpha,t)\{\int_{\sigma-r}^t d_u k(\alpha,u)x(u)\}d\alpha. \tag{3.4.8}$$

Grâce à l'intégration par parties prouvée au théorème 1.4.7, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\sigma-r}^{t} d_u k(\alpha,u)x(u) &= k(\alpha,t+)x(t)-k(\alpha,\sigma-r)x(\sigma-r)-\int_{\sigma-r}^{t} k(\alpha,u)x'(u)du\\ \int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)\{\int_{\sigma-r}^{t} d_u k(\alpha,u)x(u)\}d\alpha &= \int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,t+)x(t)d\alpha\\ &\quad -\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,\sigma-r)x(\sigma-r)d\alpha\\ &\quad -\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)\{\int_{\sigma-r}^{t} k(\alpha,u)x'(u)du\}d\alpha.\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini ([36], p.359) au second terme à droite de l'égalité, on a :

$$\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)\{\int_{\sigma-r}^{t} k(\alpha,u)x'(u)du\}d\alpha=\int_{\sigma-r}^{t}\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,u)x'(u)d\alpha du. \tag{3.4.9}$$

Par une intégration par parties du terme de droite de l'égalité, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\sigma-r}^{t}\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,u)x'(u)d\alpha du &= \int_{\sigma-r}^{t}\{\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha\}x'(u)du\\ &= [\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,u)x(u)d\alpha]_{\sigma-r}^{t}\\ &\quad -\int_{\sigma-r}^{t}\{d_u\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha\}x(u)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{\sigma-r}^{t}\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,u)x'(u)d\alpha du &= \int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,t+)x(t)d\alpha\\ &\quad -\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,\sigma-r)x(\sigma-r)d\alpha\\ &\quad -\int_{\sigma-r}^{t}\{d_u\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha\}x(u).\end{aligned}\right\} \tag{3.4.10}$$

Ainsi, avec (3.4.8), (3.4.9), (3.4.10), on a :

$$\begin{aligned}\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)L(\alpha)x_\alpha d\alpha &= \int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,t+)x(t)d\alpha\\ &\quad -\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,\sigma-r)x(\sigma-r)d\alpha-\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,t+)x(t)d\alpha\\ &\quad +\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,\sigma-r)x(\sigma-r)d\alpha+\int_{\sigma-r}^{t}\{d_u\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha\}x(u).\end{aligned}$$

Donc

$$x(t)-Y(\sigma,t)\phi(0)-\int_{\sigma}^{t} D_\alpha Y(\alpha,t)x(\alpha)-\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)H(\alpha)d\alpha=\int_{\sigma-r}^{t} d_u\{\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha\}x(u). \tag{3.4.11}$$

Comme

$$\begin{aligned}\int_{\sigma-r}^{t} d_u\{\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha\}x(u) &= \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_u\{\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha\}x(u)\\ &\quad +\int_{\sigma}^{t} d_u\{\int_{\sigma}^{t} Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha\}x(u),\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

sachant que $Y(\sigma,t) = I - \int_\sigma^t Y(\alpha,t)k(\alpha,\sigma)d\alpha$, on a :

$$Y(u,t) = I - \int_u^t Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha.$$

Or :

$$\int_u^t Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha = \int_u^\sigma Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha + \int_\sigma^t Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha$$
$$\int_u^t Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha + \int_\sigma^u Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha = \int_\sigma^t Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha$$

Comme $\sigma \leq \alpha \leq u$ on a $k(\alpha,u) = 0$; d'où :

$$\int_u^t Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha = \int_\sigma^t Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha,$$

et ainsi on a :

$$\int_\sigma^t Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha = I - Y(u,t).$$

Soit $\phi \in C^1([\sigma-r,\sigma],\mathbb{R}^n)$ et d'après le théorème 1.4.7, on a :

$$\int_\sigma^t d_u\{\int_\sigma^t Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha\}\phi(u) = \int_\sigma^t d_u\{I - Y(u,t)\}\phi(u)$$

et on a :

$$\begin{aligned}\int_\sigma^t d_u\{I - Y(u,t)\}\phi(u) &= [(I - Y(u,t))\phi(u)]_\sigma^t - \int_{\sigma-r}^t (I - Y(u,t))\phi'(u)du \\ &= (I - Y(t,t))\phi(t) - (I - Y(\sigma-r,t))\phi(\sigma-r) \\ &\quad - \int_{\sigma-r}^t (I - Y(u,t))\phi'(u)du \\ &= -(I - Y(\sigma-r,t))\phi(\sigma-r) - ((I - Y(t,t))\phi(t) \\ &\quad -(I - Y(\sigma-r,t))\phi(\sigma-r) - \int_{\sigma-r}^t -D_uY(u,t)\phi(u)du)\end{aligned}$$

$$\int_\sigma^t d_u\{I - Y(u,t)\}\phi(u) - \int_\sigma^t D_uY(u,t)\phi(u)du. \tag{3.4.13}$$

Finalement avec (3.4.12) et (3.4.13) dans (3.4.11) on obtient :

$$x(t) - Y(\sigma,t)\phi(0) - \int_\sigma^t D_\alpha Y(\alpha,t)x(\alpha)d\alpha - \int_\sigma^t Y(\alpha,t)H(\alpha)d\alpha = \int_{\sigma-r}^\sigma d_u\{\int_\sigma^t Y(\alpha,t)k(\alpha,u)d\alpha\}x(u) - \int_\sigma^t D_uY(u,t)x(u)du.$$

On a bien le résultat du théorème :

$$x(t) = Y(\sigma,t)x(\sigma) + \int_{\sigma-r}^\sigma d_2[\int_\sigma^t Y(\sigma,t)\eta(\alpha,u-\alpha)d\alpha]x(u) + \int_\sigma^t Y(\alpha,t)H(\alpha)d\alpha. \tag{3.4.14}$$

Ainsi avec (3.4.3), on peut conclure que $X(t,\sigma) = Y(\sigma,t)$.

□

3.4.1 Expression matricielle de la solution de (3.4.4).

On remarque aussi que l'application Y définie en (3.4.6) est solution de la forme matricielle

$$\frac{d}{ds}\left(M(s)+\int_s^{T+r} M(\alpha)\eta(\alpha,s-\alpha)d\alpha\right)=0$$

de l'équation adjointe (3.4.4). En effet, pour $\sigma \le t \le T$, on a :

$$Y(t,T)=I-\int_t^T Y(\alpha,T)\eta(\alpha,t-T)d\alpha,$$

et, comme $\int_T^{T+r} Y(\alpha,T)\eta(\alpha,t-\alpha)d\alpha=0$, (sachant que $T\le\alpha\le T+r,$ on a $\alpha>T$), on a :

$$Y(t,T)=I-\int_t^{T+r} Y(\alpha,T)\eta(\alpha,t-\alpha)d\alpha$$
$$Y(t,T)+\int_t^{T+r} Y(\alpha,T)\eta(\alpha,t-\alpha)d\alpha=I,\ \sigma\le t\le T.$$

□

3.4.2 Expression explicite de z.

Nous allons donner une expression explicite de z en fonction de Y. Pour ce faire on considère x une solution de (3.4.1) sur $[\sigma,T]$ avec $x(\theta)=\phi(\theta)$ pour $\theta\in[\sigma-r,\sigma]$.
Soit $z\in NBV([\sigma,T+r];\mathbb{R}^{n*})$ solution de (3.4.4), c.-à-d. vérifiant

$$\frac{d}{ds}\left(z(s)+\int_s^{T+r} z(\alpha)\bar{\eta}(\alpha,s-\alpha)d\alpha\right)=0,\ \text{si } s\in[\sigma,T]. \tag{3.4.15}$$

Soit $\sigma<t<T$, en utilisant l'intégration par parties prouvée dans l'annexe de [31], on a :

$$\begin{aligned}\int_\sigma^t dz(\alpha)x(\alpha) &= [z(\alpha)x(\alpha)]_\sigma^t-\int_\sigma^t z(\alpha)x'(\alpha)d\alpha\\ &= z(t)x(t)-z(\sigma)x(\sigma)-\int_\sigma^t z(\alpha)x'(\alpha)d\alpha,\end{aligned}$$

et ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}z(t)x(t)-z(\sigma)x(\sigma) &= \int_\sigma^t dz(\alpha)x(\alpha)+\int_\sigma^t z(\alpha)x'(\alpha)d\alpha\\ &= \int_\sigma^t dz(\alpha)x(\alpha)+\int_\sigma^t z(\alpha)(\int_{\alpha-r}^{\alpha} d_sp(\alpha,s)x(s))d\alpha,\end{aligned}$$

en posant : $p(\alpha,s)=\bar{\eta}(\alpha,s-\alpha)$. Or on a :

$$\int_\sigma^t z(\alpha)(\int_{\alpha-r}^{\alpha} d_sp(\alpha,s)x(s))d\alpha=\int_\sigma^t z(\alpha)\int_{\alpha-r}^{t} d_sp(\alpha,s)x(s)d\alpha,$$

car pour $s\ge\alpha$, on a $p(\alpha,s)=0$, et par le même calcul que (3.4.9), (3.4.10), (3.4.11), (3.4.12), (3.4.13), on a :

$$\int_\sigma^t z(\alpha)\int_{\alpha-r}^{\alpha} d_sp(\alpha,s)x(s)d\alpha=\int_{\sigma-r}^t d_s(\int_\sigma^t z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s),$$

et ainsi on obtient :

$$z(t)x(t) - z(\sigma)x(\sigma) = \int_\sigma^t dz(\alpha)x(\alpha) + \int_{\sigma-r}^t d_s(\int_\sigma^t z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s). \tag{3.4.16}$$

On s'intérèsse particulièrement au second terme du membre de droite de l'égalité :

$$\begin{aligned}\int_{\sigma-r}^t d_s(\int_\sigma^t z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s) &= \int_{\sigma-r}^\sigma d_s(\int_\sigma^t z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\\ &+ \int_\sigma^{t-r} d_s(\int_\sigma^t z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\\ &+ \int_{t-r}^t d_s(\int_\sigma^t z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s),\end{aligned}$$

or comme

$$\int_{\sigma-r}^\sigma d_s(\int_\sigma^t z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s) = \int_{\sigma-r}^\sigma d_s(\int_\sigma^{\sigma+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s) + \int_{\sigma-r}^\sigma d_s(\int_{\sigma+r}^\sigma z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)$$

et

$$\begin{gathered}\sigma - r \le s \le \sigma\\ \sigma + r \le \alpha \le t \Rightarrow \sigma \le \alpha - r \le t - r \Rightarrow s \le \alpha - r,\\ \text{d'où } p(\alpha,s) = p(\alpha,\alpha-r),\end{gathered}$$

on obtient alors $\int_{\sigma-r}^\sigma d_s(\int_{\sigma+r}^\sigma z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s) = 0$, et ainsi

$$\int_{\sigma-r}^\sigma d_s(\int_\sigma^t z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s) = \int_{\sigma-r}^\sigma d_s(\int_\sigma^{\sigma+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s).$$

On a aussi

$$d_s\int_\sigma^t z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha = d_s\int_\sigma^s z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha + d_s\int_s^t z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha,$$

et comme $\sigma < \alpha < s$ alors $p(\alpha,s) = 0$, et ainsi on obtient

$$\int_\sigma^t z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha = \int_s^t z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha.$$

Par ailleurs,

$$d_s\int_s^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha = d_s\int_s^t z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha + d_s\int_t^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha;$$

$$\begin{gathered}\text{or } t < \alpha < t + r,\\ \sigma < s < t - r,\\ t - r < \alpha - r < t,\end{gathered}$$

donc pour $s < \alpha - r,$ on a $p(\alpha,s) = p(\alpha,\alpha-r)$ d'où

$$d_s\int_s^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha = d_s\int_s^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,\alpha-r)d\alpha = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}\int_{\sigma-r}^{t} d_s(\int_{\sigma}^{t} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s) &= \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_s(\int_{\sigma}^{\sigma+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\\ &+\int_{\sigma}^{t-r} d_s(\int_{s}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\\ &+\int_{t-r}^{t} d_s(\int_{s}^{t} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s).\end{aligned}$$

Ensuite on va ajouter et retrancher $\int_{t-r}^{t} d_s(\int_{t}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)$ à l'expression précédente, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_{\sigma-r}^{t} d_s(\int_{\sigma}^{t} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s) &= \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_s(\int_{\sigma}^{\sigma+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\\ &+\int_{\sigma}^{t-r} d_s(\int_{s}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\\ &+\int_{t-r}^{t} d_s(\int_{s}^{t} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\\ &+\int_{t-r}^{t} d_s(\int_{t}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\\ &-\int_{t-r}^{t} d_s(\int_{t}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\sigma-r}^{t} d_s(\int_{\sigma}^{t} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s) &= \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_s(\int_{\sigma}^{\sigma+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\\ &+\int_{\sigma}^{t-r} d_s(\int_{s}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\\ &+\int_{t-r}^{t} d_s(\int_{s}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\\ &-\int_{t-r}^{t} d_s(\int_{t}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\sigma-r}^{t} d_s(\int_{\sigma}^{t} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s) &= \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_s(\int_{\sigma}^{\sigma+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\\ &+\int_{\sigma}^{t} d_s(\int_{s}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\\ &-\int_{t-r}^{t} d_s(\int_{t}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s).\end{aligned}$$

En réinjectant cette dernière égalité dans (3.4.16), on a :

$$\begin{aligned}z(t)x(t)-z(\sigma)x(\sigma) &= \int_{\sigma}^{t} dz(\alpha)x(\alpha)\\ &+\int_{\sigma}^{t} d_s(\int_{s}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\\ &+\int_{\sigma-r}^{\sigma} d_s(\int_{\sigma}^{\sigma+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s)\\ &-\int_{t-r}^{t} d_s(\int_{t}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s),\end{aligned}$$

d'où :

$$z(t)x(t)+\int_{t-r}^{t} d_s(\int_{t}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s) = \\ + z(\sigma)x(\sigma)+\int_{\sigma-r}^{\sigma} d_s(\int_{\sigma}^{\sigma+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s) \\ + \int_{\sigma}^{t} dz(\alpha)x(\alpha)+\int_{\sigma}^{t} d_s(\int_{s}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s).$$

Notons que

$$\int_{\sigma}^{t} dz(s)x(s)+\int_{\sigma}^{t} d_s(\int_{s}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s) = \int_{\sigma}^{t} d_s\{z(s)+\int_{s}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha\}x(s).$$

Comme $\int_{t+r}^{T+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha = \int_{t+r}^{T+r} z(\alpha)p(\alpha,\alpha-r)d\alpha$, et puisque

$$\begin{aligned} t+r<\alpha<T+r \\ t<\alpha-r<T \\ \sigma<s<t \text{ alors } s<\alpha-r, \end{aligned}$$

on a $\int_{t+r}^{T+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha = 0$. Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\sigma}^{t} dz(s)x(s)+\int_{\sigma}^{t} d_s(\int_{s}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s) \\ &= \int_{\sigma}^{t} d_s\{z(s)+\int_{s}^{T+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha\}x(s) \\ &= 0 \quad \text{grâce à (3.4.4).} \end{aligned}$$

En posant

$$\mathcal{B}_t(x,y) = z(t)x(t)+\int_{t-r}^{t} d_s(\int_{t}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s) \tag{3.4.17}$$

avec x et z solutions respectives de (3.4.1) et (3.4.4), et $F(t) = \mathcal{B}_t(x,z)$, on a,

$$\text{pour tout } t>\sigma, F(t) = F(\sigma).$$

Cela entraîne que F est constante.
De la relation (3.4.17), on souhaite déduire une expression de la solution de (3.4.4).
Si $\sigma<t$, $\mathcal{B}_\sigma(x,z) = \mathcal{B}_t(x,z) \Rightarrow$

$$z(\sigma)x(\sigma)+\int_{\sigma-r}^{\sigma} d_s(\int_{\sigma}^{\sigma+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s) = z(t)x(t)+\int_{t-r}^{t} d_s(\int_{t}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)x(s).$$

On considère $X(\cdot,\cdot)$ la matrice solution de la version matricielle de (3.4.1), on a :

$$z(\sigma)X(\sigma,\sigma)+\int_{\sigma-r}^{\sigma} d_s(\int_{\sigma}^{\sigma+r} p(\alpha,s)y(\alpha)d\alpha)X(s,\sigma) = z(t)X(t,\sigma)+\int_{t-r}^{t} d_s(\int_{t}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)X(s,\sigma),$$

d'où $z(\sigma) = z(t)X(t,\sigma) + \int_{t-r}^{t} d_s(\int_{t}^{t+r} p(\alpha,s)y(\alpha)d\alpha)X(s,\sigma)$. Comme nous avions vu précédemment que $X(t,\sigma) = Y(\sigma,t)$, alors on obtient :

$$z(\sigma) = z(t)Y(\sigma,t) + \int_{t-r}^{t} d_s(\int_{t}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)Y(\sigma,s).$$

□

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant :

Théorème 3.4.2. *Si z est la solution de l'équation (3.4.4) sur $[\sigma,T]$, alors pour tout $t \in [\sigma,T]$, on a :*

$$z(\sigma) = z(t)Y(\sigma,t) + \int_{t-r}^{t} d_s(\int_{t}^{t+r} z(\alpha)p(\alpha,s)d\alpha)Y(\sigma,s). \tag{3.4.18}$$

Chapitre 4

Équations différentielles fonctionnelles contrôlées

4.1 Représentation de $t \mapsto L(t)$ continue par morceaux sur $[\sigma, T]$ à valeurs dans $\mathfrak{C}^*$.

L étant continue par morceaux, il existe $t_0, t_1, \ldots, t_p$ avec $\sigma = t_0 < \cdots < t_p = T$ tel que :
— $\forall i = 0, \ldots, p-1$, L est continue sur $]t_{i-1}, t_i[$,
— $\forall i = 0, \ldots, p$, $L(t_i-) := \lim_{s \to t_i, s<t_i} L(s)$ existe,
— $\forall i = 0, \ldots, p$, $L(t_i+) := \lim_{s \to t_i, s>t_i} L(s)$ existe.

Ainsi, soit $t \in [\sigma, T]$, il existe $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ tel que $t \in [t_i, t_{i+1}]$, L ayant une limite finie à droite en t_i et à gauche en t_{i+1}, on peut prolonger L par continuité sur $[t_i, t_{i+1}]$ et alors, l'application linéaire continue $L(t) : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ peut être représentée par :

$$L(t)\phi = \int_{-r}^{0} d_s\eta_0(t,s)\phi(s)\mathbb{1}_{[t_0,t_1]}(s) + \sum_{i=1}^{p-1} \int_{-r}^{0} d_s\eta_i(t,s)\phi(s)\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s), \text{ où } \phi \in \mathfrak{C} \tag{4.1.1}$$

avec $\eta_i(\cdot,\cdot)$ vérifiant :

(C1') η_i est mesurable de $[t_i, t_{i+1}] \times \Delta$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(C2') Pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $\eta_i(t,\cdot) \in NBV(\Delta, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
(C3') Pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $\|\eta_i(t,\cdot)\|_{BV} = \|L(t)\|_{\mathfrak{L}}$
(C4') L'application $[t \mapsto \eta_i(t,\cdot)]$ est continue par morceaux sur $[\sigma, T]$ à valeurs dans $BV([\sigma - r, \sigma], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, quand $BV([\sigma - r, \sigma], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ est muni de la norme $V_{-r}^0(\cdot)$.
(C5') η est Riemann-intégrable sur $[t_i, t_{i+1}] \times \Delta$

4.2 Prolongement de η à $[\sigma, T] \times [\sigma - r - T, T]$ dans le cas continu par morceaux

On pose

$$\bar{\eta}_0(t,z) = \begin{cases} \eta_0(t,z) & \text{si} \quad z \in [\sigma - r, \sigma] \\ 0 & \text{si} \quad z \in [\sigma, t_1] \\ \eta_0(t, \sigma - r) & \text{si} \quad z \in [\sigma - r - t_1, \sigma - r] \end{cases} \tag{4.2.1}$$

et, pour $i \in \{1, \dots, p-1\}$:

$$\bar{\eta}_i(t,z) = \begin{cases} \eta_i(t,z) & \text{si} \quad z \in [t_i - r, t_i] \\ 0 & \text{si} \quad z \in]t_i, t_{i+1}] \\ \eta_i(t, t_i - r) & \text{si} \quad z \in]t_i - r - t_{i+1}, t_i - r]. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Le résultat suivant peut être vu comme un corollaire du précédent :

Lemme 4.2.1. *Avec $\bar{\eta}_0$ et $\bar{\eta}_i$, $i \in \{1, \dots, p-1\}$ définies en (4.2.1) et (4.2.2), on a :*
(i) $\bar{\eta}_0(t,\cdot) \in BV([-t_1 - r - \sigma, t_1], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ *et pour tout* $i \in \{1, \dots, p-1\}$,
$\bar{\eta}_i(t,\cdot) \in BV(]-t_{i+1} - r - t_i, t_{i+1}], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
(ii) $V_{-t_1-r+\sigma}^{t_1}(\bar{\eta}_0(t,\cdot)) = V_{\sigma-r}^{\sigma}(\bar{\eta}_0(t,\cdot))$ *et pour* $i \in \{1, \dots, p-1\}$, $V_{-t_{i+1}-r-t_i}^{t_{i+1}}(\bar{\eta}_i(t,\cdot)) = V_{t_i-r}^{t_i}(\bar{\eta}_i(t,\cdot))$.
(iii) $\bar{\eta}_0(t,\cdot) \in NBV([-t_1 - r - \sigma, t_1], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ *et pour tout* $i \in \{1, \dots, p-1\}$,
$\bar{\eta}_i(t,\cdot) \in BV(]-t_{i+1} - r - t_i, t_{i+1}], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
(iv) $[t \mapsto \bar{\eta}_0(t,\cdot)] \in C^0([\sigma, t_1], NBV([-t_1 - r + \sigma, t_1], \mathcal{M}_n(\mathbb{R})))$ *et pour tout* $i \in \{1, \dots, p-1\}$,
$[t \mapsto \bar{\eta}_i(t,\cdot) \in C^0(]t_i, t_{i+1}], NBV(]-t_{i+1} - r - t_i, t_{i+1}], \mathcal{M}_n(\mathbb{R})))]$.
(v) $\bar{\eta}_0$ *est Lebesgue-mesurable sur* $[\sigma, t_1] \times [-r, 0]$ *et* $\bar{\eta}_i$ *est Lebesgue-mesurable sur* $]t_i, t_{i+1}] \times [-r, 0]$ *pour* $i \in \{1, \dots, p-1\}$.
(vi) $\bar{\eta}_0$ *est Riemann-intégrable sur* $[\sigma, t_1] \times [-r, 0]$ *et* $\bar{\eta}_i$ *est Riemann-intégrable sur* $]t_i, t_{i+1}] \times [-r, 0]$ *pour* $i \in \{1, \dots, p-1\}$.

4.3 Existence et unicité locales de solutions du problème de Cauchy

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1.1.2) nous nous appuierons sur le théorème 2.1.1.
En effet l'application f est continue par morceaux sur $[\sigma - r, T] \times \mathfrak{C} \times U$ et continue sur $[\sigma - r, t_1] \times \mathfrak{C} \times U$.
L'idée est d'étudier l'existence sur $[\sigma, t_1]$ car sur cet intervalle $[s \mapsto f(s, x_s, u(s))]$ est continue et on se retrouve bien dans le cas du théorème 2.1.1.

$$f : [\sigma - r, t_1] \times \mathfrak{C} \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

En posant :

$$\tilde{f} = f_{|[\sigma-r,t_1]\times\mathfrak{C}\times U},$$

on a les théorèmes d'existence et d'unicité suivants :

Théorème 4.3.1 (existence)**.** *Supposons que :*
— $\tilde{\Omega}$ *est un sous-ensemble non vide de* $[\sigma - r, t_1] \times \mathfrak{C} \times U$
— $\tilde{f} \in C^0(\tilde{\Omega}; \mathbb{R}^n)$.
Si $(\sigma, \phi, u(\sigma)) \in \tilde{\Omega}$, *alors : il existe une solution de (1.1.2) passant par* $(\sigma, \phi, u(\sigma))$.
Plus généralement, si $\tilde{W} \subseteq \tilde{\Omega}$ *est compact et* $\tilde{f} \in C^0(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *:*
— *Il existe un voisinage* $\tilde{V} \subseteq \tilde{\Omega}$ *de* $\tilde{W}$ *tel que* $\tilde{f} \in C_b^0(\tilde{V}; \mathbb{R}^n)$.
— *Il existe un voisinage* $\tilde{U} \subseteq C_b^0(\tilde{V}; \mathbb{R}^n)$ *de* $\tilde{f}$ *et* $\alpha > 0$ *tel que*
$\forall (\sigma, \phi, u(\sigma)) \in \tilde{W}$, $g \in \tilde{U}$.
— *Il existe une solution* $x(\sigma, \phi, u, f)$ *de (1.1.2) passant par* $(\sigma, \phi, u(\sigma))$ *définie sur* $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$.

Théorème 4.3.2 (Unicité)**.** *Supposons que :*
— $f : \tilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

— *f est continue*
— *$\phi \mapsto f(t, \phi, u(t))$ est lipschitzienne.*
Si $(\sigma, \phi, u(\sigma)) \in \tilde{\Omega}$, alors :

il existe une solution unique $x : [\sigma - r, \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de l'équation passant par $(\sigma, \phi, u(\sigma))$ tel que si $y : [\sigma - r, \alpha_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, avec $\alpha_2 < \alpha$, est une solution de l'équation passant par $(\sigma, \phi, u(\sigma))$ alors $y = x_{|[\sigma-r,\alpha_2]}$.

4.4 Solutions non prolongeables

Théorème 4.4.1. *Supposons que :*
— *$\tilde{\Omega} \subseteq [\sigma - r, \sigma + t_1] \times \mathfrak{C} \times U$ un sous-ensemble non vide.*
— *$f \in C^0(\tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$.*

Si x est une solution non prolongeable de l'équation (1.1.1) sur $[\sigma - r, b[$, alors : pour tout compact $\tilde{W} \subseteq \tilde{\Omega}$, il existe un $t_{\tilde{W}}$ tel que $(t, x_t, u(t)) \notin \tilde{W}$ pour $t_{\tilde{W}} \leq t < b$.

4.5 Problèmes linéaires continus par morceaux

Soit :
— $T > 0$.
— $(\sigma, \phi, u(\sigma)) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{C} \times \mathbb{R}^m$.
— $\mathcal{O} \subseteq [\sigma - r, T] \times \mathfrak{C} \times \mathbb{R}^m$ un sous-ensemble ouvert.
— Pour $t \in [\sigma, T]$, $L(t) : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire.
On considère le système linéaire :

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & L(t)x_t + H(t) \\ x_\sigma & = & \phi \end{array}\right\} \tag{4.5.1}$$

ou

$$x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t L(s)x_s ds + \int_\sigma^t H(s)ds \tag{4.5.2}$$

où $H \in PC^0([\sigma, T]; \mathbb{R}^n)$ et L tel que :
— $t \mapsto L(t)$ est définie et continue par morceaux sur $[\sigma, T]$ à valeurs dans $\mathfrak{C}^*$.
Soit $(t_i')_{0 \leq i \leq p'}$ les instants de discontinuité de H et $(\tau_i)_{0 \leq i \leq p}$ ceux de L. En tenant compte de ces partitions de $[\sigma, T]$, nous les rénumérotons pour former une seule partition notée $(t_i)_{0 \leq i \leq p+p'}$. On a donc le résultat suivant :

Théorème 4.5.1. *Soit $(\sigma, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{C}$.*
Alors il existe une unique fonction $x(\cdot, \sigma, \phi, h)$ définie et dérivable par morceaux sur $[\sigma - r, T]$ satisfaisant (4.5.1) sur $[\sigma, T]$.

Démonstration. Nous avons vu dans le cas continu que sur $[\sigma, t_1]$, il existe une unique fonction $x^0(\cdot, \sigma, \phi)$ définit et continue sur $[\sigma - r, t_1]$ satisfaisant (4.5.1) sur $[\sigma, t_1]$.
Considérons le problème sur $[t_1, t_2]$

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & L(t)x_t + H(t) \\ x_{t_1} & = & \phi_1. \end{array}\right\}$$

En réappliquant le théorème 3.3.1, il existe une unique fonction $x^1(\cdot,\sigma,\phi)$ définie et continue sur $[t_1-r,t_2]$ satisfaisant (3.3.1) sur $[t_1,t_2]$.
En procédant ainsi sur chaque intervalle $[t_i,t_{i+1}]$, pour i variant de 0 à $p+p'-1$, on obtient une solution de (4.5.1) définie sur $[\sigma,T]$ par
$x(t)=x^0\mathbb{1}_{[t_0,t_1]}(t)+\sum_{i=1}^{p+p'-1}x^i\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$. □

On considère l'application

$$\begin{aligned}\hat{k} \;:\; & [\sigma,T]\times[-T-r+\sigma,T]\longrightarrow\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ & (t,s)\mapsto\eta_0(t,s-t)\mathbb{1}_{[t_0,t_1]}+\sum_{i=1}^{p+p'-1}\eta_i(t,s-t)\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t).\end{aligned}\tag{4.5.3}$$

Elle a les propriétés suivantes.

On suppose que $L\in PC^0(J,\mathfrak{L}(C^0(\Delta,\mathbb{R}^n)))$, on a :

Proposition 4.5.1. *Soit $E=\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les assertions suivantes sont vérifiées*

(i) $\hat{k}\in\mathfrak{L}^0([\sigma,T]\times[\sigma-r-T,T],E)$.

(ii) $\forall t\in[\sigma,T]$, $\hat{k}(t,\cdot)\in NBV_0([\sigma-r-T,T],E)$.

(iii) $\forall s\in[\sigma-r-T,T]$, $\hat{k}(\cdot,s)\in PC^0_d([\sigma,T],E)$.

(iv) $[t\mapsto\hat{k}(t,\cdot)]\in B([\sigma,T],NBV_0([\sigma-r-T,T],E))$.

(v) *Pour tout $s\in\mathbb{R}$, $\hat{k}(\cdot,s)$ est réglée.*

(vi) *$\hat{k}$ est Riemann-intégrable sur $[\sigma,T]\times[\sigma-r-T,T]$.*

(vii) $\hat{k}(t,s)=0$ *quand $s\geq t$ dans $[\sigma,T]$.*

(viii) *Soit $f\in RI([\sigma,T],E)$. Nous définissons la fonction $K:[\sigma,T]\longrightarrow E$ en posant $K(t):=\int_\sigma^t\hat{k}(t,\alpha)f(\alpha)d\alpha$. Alors $K\in PC^0([\sigma,T],E)$.*

Théorème 4.5.2. *$\hat{k}$ est définie par (4.5.3). Alors il existe une unique fonction $\hat{R}\in RI(J\times J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par $\hat{R}(t,s)=R^0(t,s)\mathbb{1}_{[t_0,t_1]}(t)+\sum_{i=1}^{p+p'-1}R^i(t,s)\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$ qui vérifie les conditions suivantes.*

(i) $\forall(t,s)\in J\times J$, $\hat{R}(t,s)=\hat{k}(t,s)+\int_s^t\hat{R}(t,\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha$.

(ii) $[t\mapsto\hat{R}(t,\cdot)\in B(J,NBV(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))]$.

(iii) $\forall s\in J$, $\hat{R}(\cdot,s)\in RC^0_d(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

(iv) $\forall(t,s)\in J\times J$, $\int_s^t\hat{R}(t,\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha=\int_s^t\hat{k}(t,\xi)\hat{R}(\alpha,s)d\alpha$.

(v) $\forall s>t$ *dans* J, $\hat{R}(t,s)=0$.

Démonstration. Considérons les points de discontinuité $(t_i)_{0\leq i\leq p+p'}$. Posons $J^0=[t_0,t_1]$.
Sur J^0, L est continue et vérifie les résultats du lemme 3.2.1, c.-à-d. pour le **(i)**, $\exists R^0\in RI(J^0\times J^0,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ tel que $\forall(t,s)\in J^0\times J^0$, $R^0(t,s)=k^0(t,s)+\int_s^t R^0(t,\alpha)k^0(\alpha,s)d\alpha$ avec $k^0(t,s)=\bar{\eta}_0(t,s-t)$.
On considère $J^1=]t_1,t_2]$ sur lequel L est continue et vérifie les mêmes conditions, on notera R^1 la résolvante et $k^1(t,s)=\bar{\eta}_1(t,s-t)$, on procède de la même façon pour la famille $([t_0,t_1],]t_i,t_{i+1}])_{1\leq i\leq p+p'-1}$ et en posant $\hat{R}(t,s)=R^0(t,s)\mathbb{1}_{[t_0,t_1]}(t)+\sum_{i=1}^{p+p'-1}R^i(t,s)\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$, on a l'application $\hat{R}\in RI(J\times J,E)$. □

4.5.1 Résolvante de l'équation linéaire (4.5.1)

On définit la fonction $X:J\times J\longrightarrow\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant

$$\hat{X}(t,s)=I-\int_s^t(R^0(t,\alpha)\mathbb{1}_{[t_0,t_1]}(t)+\sum_{i=1}^{p+p'-1}R^i(t,\alpha)\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t))d\alpha \tag{4.5.4}$$

où I est la matrice identité $n\times n$.

Lemme 4.5.1. *On suppose que $L\in PC^0(J,\mathcal{L}(C^0(\Delta,\mathbb{R}^n),\mathbb{R}^n))$, $\hat{R}$ est donnée par le théorème 4.5.2 et $\hat{X}$ est donnée par (4.5.4). Alors les assertions suivantes sont vérifiées.*

- **(i)** $\forall s\in J,\hat{X}(\cdot,s)\in APC^0(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
- **(ii)** $\forall s\in J,\forall t\in J,\hat{X}(\cdot,s)$ *est différentiable à droite en* $t,\frac{\partial\hat{X}}{\partial t+}(t,s)=-\hat{R}(t,s)$ *et* $\frac{\partial\hat{X}}{\partial t+}(\cdot,s)\in RPC^0_d(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
- **(iii)** $\forall s\in J,\forall t\in J,\hat{X}(\cdot,s)$ *est différentiable à gauche en* $t,\frac{\partial\hat{X}}{\partial t-}(t,s)=-\hat{R}(t,s)$ *et* $\frac{\partial\hat{X}}{\partial t-}(\cdot,s)\in RPC^0_g(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
- **(iv)** $\forall s\in J$, *l'ensemble des points de* J *où* $X(\cdot,s)$ *n'est pas différentiable est au plus dénombrable.*
- **(v)** $\forall t\in J$, $X(t,\cdot)\in BV(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))\cap C^0_g(J,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
- **(vi)** $\forall s\in J,\forall t\in J,X(t,s+)=I-\int_s^t\hat{R}(\theta,s+)d\theta$

Théorème 4.5.3. *Supposons que $L\in PC^0([\sigma,T],\mathfrak{L}(C^0(\Delta,\mathbb{R}^n),\mathbb{R}^n))$. $\hat{X}$ est définie par (4.5.4), alors pour σ et ϕ donnés, $H\in PC^0([\sigma,T],\mathbb{R}^n)$, il existe une unique solution $x(\cdot;\sigma,\phi)$ définie sur $[\sigma-r,T]$ qui vérifie le système (4.5.1) sur $[\sigma,T]$. De plus cette solution est donnée par :*

$$\begin{aligned}x(t,\sigma,\phi,H) &= \hat{X}(t,\sigma)\phi(0)+\int_\sigma^t\hat{X}(t,\alpha)(\int_{-r}^{\sigma-\alpha}d_2\bar{\eta}_0(\alpha,\theta)\mathbb{1}_{[t_0,t_1]}(\alpha)x(\alpha+\theta)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{p-1}\hat{X}(t,\alpha)\int_{-r}^{t_i-\alpha}d_2\bar{\eta}(\alpha,\theta)\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(\alpha)x(\alpha+\theta))d\alpha\\ &\quad+\int_\sigma^t\hat{X}(t,\alpha)H(\alpha)d\alpha,\ \ si\ \sigma\leq t\leq T,\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

Démonstration. Considérons la partition $(t_i)_{0\leq i\leq p+p'}$ de $[\sigma,T]$ où les t_i sont les intants de discontinuités introduits par le contrôle. Ainsi sur $[\sigma,t_1]$, $L\in C^0([\sigma,t_1],\mathfrak{L}(C^0(\Delta,\mathbb{R}^n),\mathbb{R}^n))$, grâce au théorème 3.3.3 on a $\forall t\in[\sigma,t_1]$

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{X}(t,\sigma)\phi(0)+\int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)(\int_{-r}^{\sigma-\alpha} d_2\bar{\eta}_0(\alpha,\theta)\phi(\alpha-\sigma+\theta))d\alpha \\ &\quad +\int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)H(\alpha)d\alpha \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

et

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \hat{X}(t_1,\sigma)\phi(0)+\int_\sigma^{t_1} \hat{X}(t_1,\alpha)(\int_{-r}^{\sigma-\alpha} d_2\bar{\eta}_0(\alpha,\theta)\phi(\alpha-\sigma+\theta))d\alpha \\ &\quad +\int_\sigma^{t_1} \hat{X}(t_1,\alpha)H(\alpha)d\alpha \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

On considère maintenant le problème $x'(t)=L(t)x_t+H(t),\ t\in[t_1,t_2]$ de condition initiale $x(t_1)$. De même $L\in C^0([t_1,t_2],\mathfrak{L}(C^0(\Delta,\mathbb{R}^n),\mathbb{R}^n))$, ainsi

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{X}(t,t_1)x(t_1)+\int_{t_1}^t \hat{X}(t,\alpha)(\int_{-r}^{t_1-\alpha} d_2\bar{\eta}_1(\alpha,\theta)\phi(\alpha-\sigma+\theta))d\alpha \\ &\quad +\int_{t_1}^t \hat{X}(t,\alpha)H(\alpha)d\alpha \end{aligned} \tag{4.5.8}$$

en multipliant $x(t_1)$ par $\hat{X}(t,t_1)$ on a

$$\begin{aligned} \hat{X}(t,t_1)x(t_1) &= \hat{X}(t,\sigma)x(\sigma)+\hat{X}(t,t_1)\int_\sigma^{t_1} \hat{X}(t_1,\alpha)(\int_{-r}^{\sigma-\alpha} d_2\bar{\eta}_0(\alpha,\theta)x(\alpha+\theta))d\alpha \\ &\quad +\int_\sigma^{t_1} \hat{X}(t,\alpha)H(\alpha)d\alpha \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

donc pour $t\in[t_1,t_2]$, on a

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{X}(t,\sigma)x(\sigma)+\int_\sigma^{t_1} \hat{X}(t,\alpha)(\int_{-r}^{\sigma-\alpha} d_2\bar{\eta}_0(\alpha,\theta)x(\alpha+\theta))d\alpha \\ &\quad +\int_{t_1}^t \hat{X}(t,\alpha)(\int_{-r}^{t_1-\alpha} d_2\bar{\eta}_1(\alpha,\theta)x(\alpha+\theta))d\alpha+\int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)H(\alpha)d\alpha. \end{aligned} \tag{4.5.10}$$

On peut procéder ainsi sur $(]t_i,t_{i+1}])_{2\leq i\leq p+p'-1}$ et on a

$$\begin{aligned} x(t,\sigma,\phi,H) &= \hat{X}(t,\sigma)\phi(0)+\int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)(\int_{-r}^{\sigma-\alpha} d_2\bar{\eta}_0(\alpha,\theta)\mathbb{1}_{[t_0,t_1]}(\alpha)x(\alpha+\theta) \\ &\quad +\sum_{i=1}^{p+p'-1}\hat{X}(t,\alpha)\int_{-r}^{t_i-\alpha} d_2\bar{\eta}(\alpha,\theta)\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(\alpha)x(\alpha+\theta))d\alpha \\ &\quad +\int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)H(\alpha)d\alpha,\ \text{si } \sigma\leq t\leq T, \end{aligned} \tag{4.5.11}$$

□

4.6 L'équation adjointe du problème linéaire continu par morceaux et la forme bilinéaire associée

Dans cette partie, nous considérons le système linéaire

$$x'(t)=D_2f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))x_t. \tag{4.6.1}$$

L'application $t \mapsto D_2 f(t, \overline{x}_t, \overline{u}(t))$ étant continue par morceaux et $\phi \mapsto D_2 f(t, \overline{x}_t, \overline{u}(t))\phi$ linéaire et continue, on a d'après le théorème de représentation des fonctions linéaires continues, qu'il existe $\bar{\eta}$ définie sur $[\sigma, T] \times [\sigma - r - T, T]$ à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifiant les hypothèses du lemme 4.2.1 telle que :

$$x'(t) = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{-r}^{0} d_\theta [\bar{\eta}_0(t,\theta) \mathbb{1}_{[t_0,t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{p-1} \bar{\eta}_i(t,\theta) \mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)] x(t+\theta) \tag{4.6.2}$$

On considère en plus l'équation non homogène :

$$x'(t) = D_2 f(t, \overline{x}_t, \overline{u}(t)) x_t + H(t), \tag{4.6.3}$$

où H est $PC^0([\sigma, T], \mathbb{R}^n)$. Dans un soucis d'allègement des écritures, posons :

$$L(t)x_t = D_2 f(t, \overline{x}_t, \overline{u}(t)) x_t, \tag{4.6.4}$$

et

$$\hat{\eta}(t,\alpha) = \bar{\eta}_0(t,\alpha) \mathbb{1}_{[t_0,t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{p-1} \bar{\eta}_i(t,\alpha) \mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t).$$

Ainsi (4.6.3) s'écrit

$$x'(t) = L(t)x_t + H(t) \tag{4.6.5}$$

et le théorème 4.5.3 permet, en développant et réorganisant l'expression, de dire que la solution $x(t, \sigma, \phi, H)$ de (4.6.4) s'écrit

$$\begin{aligned} x(t,\sigma,\phi,H) &= \hat{X}(t,\sigma)\phi(0) + \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_\beta \int_{\sigma}^{t} \{\hat{X}(t,\alpha)\hat{\eta}(\alpha, \beta-\alpha)\} x(\beta) \\ &\quad + \int_{\sigma}^{t} \hat{X}(t,\alpha) H(\alpha) d\alpha \\ &= \hat{X}(t,\sigma)\phi(0) + \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_\beta \int_{\sigma}^{t} \hat{X}(t,\alpha)\hat{\eta}(\alpha, \beta-\alpha) x(\beta) \\ &\quad + \int_{\sigma}^{t} \hat{X}(t,\alpha) H(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \tag{4.6.6}$$

d'où

$$x(t,\sigma,\phi,H) = \hat{X}(t,\sigma)\phi(0) + \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_\beta \int_{\sigma}^{t} \hat{X}(t,\alpha)\hat{k}(\alpha,\beta) x(\beta) d\alpha + \int_{\sigma}^{t} \hat{X}(t,\alpha) H(\alpha) d\alpha, \tag{4.6.7}$$

où

$$\hat{k}(\alpha,\beta) = \hat{\eta}(\alpha, \beta - \alpha). \tag{4.6.8}$$

En effet, comme

$$x(t,\sigma,\phi,H) = \hat{X}(t,\sigma)\phi(0) + \int_{\sigma}^{t} \hat{X}(t,\alpha)[\hat{G}(\alpha,\sigma,\phi,H)] d\alpha \quad \text{si } \sigma \leq t \leq T, \tag{4.6.9}$$

avec

$$\hat{G}(\alpha,\sigma,\phi,H) = \int_{-r}^{\sigma-s} d_\theta [\hat{\eta}(s,\theta)] \phi(s - \sigma + \theta) + H(\alpha), \tag{4.6.10}$$

on peut, de même que précédemment, multiplier (4.6.10) à gauche par $\hat{X}(t,\alpha)$ puis intégrer de σ à t, pour obtenir :

$$\begin{aligned}\int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)\hat{G}(\alpha,\sigma,\phi,H)d\alpha &= \int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)\int_{-r}^{\sigma-\alpha} d_2[\hat{\eta}(\alpha,\theta)]\phi(\alpha-\sigma+\theta)d\alpha + \int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)H(\alpha)d\alpha \\ &= \int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)\int_{-r}^{\sigma-\alpha} d_2[\hat{\eta}(\alpha,\theta)]x(\alpha+\theta)d\alpha + \int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)H(\alpha)d\alpha.\end{aligned}$$

Par le changement de variable $\beta = \alpha + \theta$, on a alors :

$$\int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)\hat{G}(\alpha,\sigma,\phi,H)d\alpha = \int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)\int_{\alpha-r}^{\sigma} d_2[\hat{\eta}(\alpha,\beta-\alpha)]x(\beta)d\alpha + \int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)H(\alpha)d\alpha$$

et grâce au théorème de Fubini, on a

$$\int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)\int_{\alpha-r}^{\sigma} d_2[\hat{\eta}(\alpha,\beta-\alpha)]x(\beta)d\alpha = \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_2\int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)[\hat{\eta}(\alpha,\beta-\alpha)]x(\beta)d\alpha.$$

Ainsi :

$$x(\cdot,\sigma,\phi,H)(t) = \hat{X}(t,\sigma)\phi(0) + \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_2\int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)\hat{k}(\alpha,\beta)x(\beta)d\alpha + \int_\sigma^t \hat{X}(t,\alpha)H(\alpha)d\alpha.$$

Définition 4.6.1 (L'équation adjointe)**.** *L'équation adjointe à l'équation* (4.6.1) *est :*

$$\frac{d}{ds}\left(z(s) + \int_s^{T+r} z(\alpha)(\bar{\eta}_0(\alpha,s-\alpha)\mathbb{1}_{[t_0,t_1]}(s) + \sum_{i=1}^{p-1}\bar{\eta}_i(\alpha,s-\alpha)\mathbb{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s))d\alpha\right) = 0, \tag{4.6.11}$$

pour $\sigma \le s \le T$ où $z \in NBV([\sigma,T+r],\mathbb{R}^{n*})$.

Nous souhaitons établir un lien entre la matrice "résolvante" $\hat{X}(t,s)$ de (4.6.1) et la matrice résolvante de l'équation adjointe (4.6.11).

Théorème 4.6.1. *Soit x solution de* (4.6.5) *sur $[\sigma,T]$. Alors pour tout $t \in [\sigma,T]$,*

$$x(t) = \hat{Y}(\sigma,t)x(\sigma) + \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_\beta[\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,t)d\alpha]x(\beta) + \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)H(\alpha)d\alpha$$

où $\hat{Y}(\sigma,t)$ est une matrice carrée définie par :

$$\begin{aligned}\hat{Y}(\sigma,t) &= 0 \text{ pour } \sigma > t \\ \hat{Y}(\sigma,t) &= I - \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,\sigma)d\alpha \text{ pour } \sigma \le t.\end{aligned} \tag{4.6.12}$$

Et on a :

$$\hat{Y}(\sigma,t) = \hat{X}(t,\sigma). \tag{4.6.13}$$

Remarque 4.6.1. *Avant de débuter la preuve du résultat précédent, nous observons que dans l'énoncé, l'application* $\beta \mapsto \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,\beta)d\alpha$ *est à variation bornée.*
En effet, soit $p = (\beta_0, \ldots, \beta_k) \in \mathfrak{S}_{[\sigma-r,\sigma]}$.
Soit

$$F(\beta) = \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,\beta)d\alpha.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k-1} \|F(\beta_i) - F(\beta_{i+1})\| &= \sum_{i=1}^{k-1} \| \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,\beta_i)d\alpha - \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,\beta_{i+1})d\alpha\| \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \| \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)[\hat{k}(\alpha,\beta_i) - \hat{k}(\alpha,\beta_{i+1})]d\alpha\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} \int_\sigma^t \|\hat{Y}(\alpha,t)\| \cdot \|\hat{k}(\alpha,\beta_i) - \hat{k}(\alpha,\beta_{i+1})\|d\alpha \\
&= \int_\sigma^t \|\hat{Y}(\alpha,t)\| \cdot (\sum_{i=1}^{k-1} \|\hat{k}(\alpha,\beta_i) - \hat{k}(\alpha,\beta_{i+1})\|)d\alpha \\
&\leq \int_\sigma^t \|\hat{Y}(\alpha,t)\| \cdot V_{\sigma-r}^\sigma(\hat{k}(\alpha,\cdot))d\alpha \\
&\leq \sup_{\alpha\in[0,t]} V_{\sigma-r}^\sigma(\hat{k}(\alpha,\cdot)) \cdot \int_\sigma^t \|\hat{Y}(\alpha,t)\|d\alpha
\end{aligned}$$

or, d'une part pour tout $\alpha \in [\sigma,t]$ *l'application* $\alpha \mapsto \|\hat{Y}(\alpha,t)\|$ *est continue donc* $\int_\sigma^t \|\hat{Y}(\alpha,t)\|d\alpha < +\infty$*, d'autre part comme* $\alpha \mapsto \hat{k}(\alpha,\cdot)$ *est continue par morceaux sur* $[\sigma,t]$ *dans* $BV([\sigma-r,\sigma],\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$*, alors* $\alpha \mapsto V_{\sigma-r}^\sigma(\hat{k}(\alpha,\cdot))$ *est continue par morceaux sur* $[\sigma,t]$*. Ainsi :*

$$\sum_{i=1}^{k-1} \|F(\beta_i) - F(\beta_{i+1})\| < +\infty, \quad \textit{pour tout } p \in \mathfrak{S}_{([\sigma-r,\sigma])}.$$

Démonstration. Soit x, solution de (4.6.5) passant par (σ,ϕ). Multiplions (4.6.5) par $\hat{Y}(\alpha,t)$ et intégrons de σ à t, on a :

$$\begin{aligned}
\hat{Y}(\alpha,t)x'(\alpha) &= \hat{Y}(\alpha,t)L(\alpha)x_\alpha + \hat{Y}(\alpha,t)H(\alpha) \\
\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)x'(\alpha)d\alpha &= \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)L(\alpha)x_\alpha d\alpha + \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)H(\alpha)d\alpha.
\end{aligned}$$

Une intégration par parties du terme à gauche de l'égalité donne :

$$\begin{aligned}
\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)x'(\alpha)d\alpha &= [\hat{Y}(\alpha,t)x(\alpha)]_\sigma^t - \int_\sigma^t D_\alpha\hat{Y}(\alpha,t)x(\alpha)d\alpha \\
&= \hat{Y}(t,t)x(t) - \hat{Y}(\sigma,t)x(\sigma) - \int_\sigma^t D_\alpha\hat{Y}(\alpha,t)x(\alpha)d\alpha \\
&= x(t) - \hat{Y}(\sigma,t)x(\sigma) - \int_\sigma^t D_\alpha\hat{Y}(\alpha,t)x(\alpha)d\alpha.
\end{aligned}$$

On a :

$$x(t) - \hat{Y}(\sigma,t)x(\sigma) - \int_\sigma^t D_\alpha \hat{Y}(\alpha,t)x(\alpha)d\alpha - \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)H(\alpha)d\alpha = \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)L(\alpha)x_\alpha d\alpha. \quad (4.6.14)$$

On s'intérèsse au membre de droite ; on a :

$$L(\alpha)x_\alpha = \int_{-r}^0 d_\theta[\hat{\eta}(\alpha,\theta)]x(\alpha+\theta),$$

qui, par le changement de variable $u = \alpha + \theta$, devient

$$\begin{aligned} L(\alpha)x_\alpha &= \int_{\alpha-r}^{\alpha} d_u[\hat{\eta}(\alpha,u-\alpha)]x(u) \\ &= \int_{\alpha-r}^{\alpha} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u). \quad \text{(d'après (4.6.8))} \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)L(\alpha)x_\alpha d\alpha = \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\{\int_{\alpha-r}^{\alpha} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u)du\}d\alpha.$$

Comme

$$\begin{aligned} \hat{k}(\alpha,\theta) &= \hat{k}(\alpha,-r) \text{ si } \theta \le \alpha - r \\ \hat{k}(\alpha,\theta) &= 0 \text{ si } \theta \ge 0, \end{aligned}$$

on a :

$$\int_{\alpha-r}^{\alpha} \hat{k}(\alpha,u)x(u)du = \int_{\alpha-r}^{t} \hat{k}(\alpha,u)x(u)du,$$

et donc on a :

$$\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)L(\alpha)x_\alpha d\alpha = \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\{\int_{\alpha-r}^{t} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u)\}d\alpha,$$

or :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha-r}^{t} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u) &= \int_{\sigma-r}^{t} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u) + \int_{\alpha-r}^{\sigma-r} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u) \\ \int_{\sigma-r}^{t} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u) &= \int_{\alpha-r}^{t} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u) - \int_{\alpha-r}^{\sigma-r} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u) \\ &= \int_{\alpha-r}^{t} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u) - \int_{\sigma-r}^{\alpha-r} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u) \end{aligned}$$

et comme $\sigma - r \le u \le \alpha - r \le \alpha$, on a $\hat{k}(\alpha,u)$ ainsi $\int_{\sigma-r}^{t} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u) = \int_{\alpha-r}^{t} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u)$. Donc :

$$\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)L(\alpha)d\alpha = \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\{\int_{\sigma-r}^{t} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u)\}d\alpha. \quad (4.6.15)$$

Grâce à l'intégration par parties prouvée en annexe, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\sigma-r}^{t} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u) &= \hat{k}(\alpha,t)x(t) - \hat{k}(\alpha,\sigma-r)x(\sigma-r) - \int_{\sigma-r}^{t} \hat{k}(\alpha,u)x'(u)du \\ &= \hat{k}(\alpha,t)x(t) - \int_{\sigma-r}^{t} \hat{k}(\alpha,u)x'(u)du \end{aligned}$$

$$\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\{\int_{\sigma-r}^{t} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u)\}d\alpha = \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,t)x(t)d\alpha - \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\{\int_{\sigma-r}^{t} \hat{k}(\alpha,u)x'(u)du\}d\alpha.$$

En appliquant le théorème de Fubini ([36], p.359) au second terme à droite de l'égalité, on a :

$$\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\{\int_{\sigma-r}^t \hat{k}(\alpha,u)x'(u)du\}d\alpha = \int_{\sigma-r}^t \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)x'(u)d\alpha du. \tag{4.6.16}$$

Par une intégration par parties du terme à droite de l'égalité, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\sigma-r}^t \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)x'(u)d\alpha du &= \int_{\sigma-r}^t \{\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha\}x'(u)du \\ &= [\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)x(u)d\alpha]_{\sigma-r}^t \\ &\quad -\int_{\sigma-r}^t \{d_u \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha\}x(u)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{\sigma-r}^t \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)x'(u)d\alpha du &= \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,t)x(t)d\alpha \\ &\quad -\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,\sigma-r)x(\sigma-r)d\alpha \\ &\quad -\int_{\sigma-r}^t \{d_u \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha\}x(u)\end{aligned}\right\} \tag{4.6.17}$$

Ainsi, avec (4.6.15), (4.6.16), (4.6.17), on a :

$$\begin{aligned}\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)L(\alpha)x_\alpha d\alpha &= \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,t)x(t)d\alpha - \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,t)x(t)d\alpha \\ &\quad + \int_{\sigma-r}^t \{d_u \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha\}x(u).\end{aligned}$$

Donc

$$x(t) - \hat{Y}(\sigma,t)\phi(0) - \int_\sigma^t D_\alpha \hat{Y}(\alpha,t)x(\alpha) - \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)H(\alpha)d\alpha = \int_{\sigma-r}^t d_u\{\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha\}x(u). \tag{4.6.18}$$

Comme

$$\begin{aligned}\int_{\sigma-r}^t d_u\{\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha\}x(u) &= \int_{\sigma-r}^\sigma d_u\{\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha\}x(u) \\ &\quad + \int_\sigma^t d_u\{\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)_h k(\alpha,u)d\alpha\}x(u),\end{aligned} \tag{4.6.19}$$

sachant que $\hat{Y}(\sigma,t) = I - \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,\sigma)d\alpha$, on a :

$$\hat{Y}(u,t) = I - \int_u^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha.$$

Or :

$$\int_u^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha = \int_u^\sigma \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha + \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha$$

$$\int_u^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha + \int_\sigma^u \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha = \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha,t)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha$$

Comme $\sigma \leq \alpha \leq u$ alors $\hat{k}(\alpha, u) = 0$, d'où :

$$\int_u^t \hat{Y}(\alpha, t)\hat{k}(\alpha, u)d\alpha = \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha, t)\hat{k}(\alpha, u)d\alpha$$

ainsi on a :

$$\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha, t)\hat{k}(\alpha, u)d\alpha = I - \hat{Y}(u, t).$$

Soit $\phi \in C^1([\sigma - r, \sigma], \mathbb{R}^n)$, on a :

$$\int_\sigma^t d_u\{\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha, t)\hat{k}(\alpha, u)d\alpha\}\phi(u) = \int_\sigma^t d_u\{I - \hat{Y}(u, t)\}\phi(u)$$

d'après le théorème d'intégration par parties 1.4.8, on a :

$$\begin{aligned}
\int_\sigma^t d_u\{I - \hat{Y}(u, t)\}\phi(u) &= [(I - \hat{Y}(u, t))\phi(u)]_\sigma^t - \int_{\sigma-r}^t (I - \hat{Y}(u, t))\phi'(u)du \\
&= (I - \hat{Y}(t, t))\phi(t) - (I - \hat{Y}(\sigma - r, t))\phi(\sigma - r) \\
&\quad - \int_{\sigma-r}^t (I - \hat{Y}(u, t))\phi'(u)du \\
&= -(I - \hat{Y}(\sigma - r, t))\phi(\sigma - r) - ((I - \hat{Y}(t, t))\phi(t) \\
&\quad -(I - \hat{Y}(\sigma - r, t))\phi(\sigma - r) - \int_{\sigma-r}^t -D_u\hat{Y}(u, t)\phi(u)du)
\end{aligned}$$

$$\int_\sigma^t d_u\{I - \hat{Y}(u, t)\}\phi(u) - \int_\sigma^t D_u\hat{Y}(u, t)\phi(u)du. \tag{4.6.20}$$

Finalement avec (4.6.19) et (4.6.20) dans (4.6.18) on obtient :

$$\begin{aligned}
x(t) - \hat{Y}(\sigma, t)\phi(0) - \int_\sigma^t D_\alpha\hat{Y}(\alpha, t)x(\alpha) - \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha, t)H(\alpha)d\alpha &= \int_{\sigma-r}^\sigma d_u\{\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha, t)\hat{k}(\alpha, u)d\alpha\}x(u) \\
&\quad - \int_\sigma^t D_u\hat{Y}(u, t)x(u).
\end{aligned}$$

On a bien le résultat énoncé dans le théorème :

$$x(t) = \hat{Y}(\sigma, t)\phi(0) + \int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha, t)H(\alpha)d\alpha + \int_{\sigma-r}^\sigma d_u\{\int_\sigma^t \hat{Y}(\alpha, t)\hat{k}(\alpha, u)d\alpha\}x(u),$$

et ainsi, avec (4.6.4), on peut conclure que $\hat{X}(t, \sigma) = \hat{Y}(\sigma, t)$.

□

On remarque aussi que la matrice $\hat{Y}(t, \sigma)$ définie en (4.6.12) est solution de l'équation adjointe (4.6.11). En effet, pour $\sigma \leq t \leq T$, on a :

$$\hat{Y}(t, T) = I - \int_t^T \hat{Y}(\alpha, T)\hat{k}(\alpha, t)d\alpha,$$

et comme

$$\int_T^{T+r} \hat{Y}(\alpha, T)\hat{k}(\alpha, t)d\alpha = 0 \quad (\text{car } \hat{Y}(\alpha, T) = 0 \text{ pour } \alpha > T),$$

on a :

$$\hat{Y}(t,T) = I - \int_t^{T+r} \hat{Y}(\alpha,T)\hat{k}(\alpha,t)d\alpha$$
$$\hat{Y}(t,T) + \int_t^{T+r} \hat{Y}(\alpha,T)\hat{k}(\alpha,t)d\alpha = I, \text{ pour } \sigma \leq t \leq T.$$

□

On considère x, solution de (4.6.1) sur $[\sigma,T]$ avec $x(\theta) = \phi(\theta)$ pour $\theta \in [\sigma - r, \sigma]$. Soit $z \in NBV([\sigma, T+r];\mathbb{R}^n)$ solution de

$$\frac{d}{ds}\{z(s) + \int_s^{T+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\} = 0, \text{ si } s \in [\sigma,T]$$

Si $\sigma < t < T$, en utilisant l'intégration par parties prouvées dans [31], on a :

$$\begin{aligned}\int_\sigma^t dz(\alpha)x(\alpha) &= [z(\alpha)x(\alpha)]_\sigma^t - \int_\sigma^t z(\alpha)x'(\alpha)d\alpha \\ &= z(t+)x(t) - z(\sigma)x(\sigma) - \int_\sigma^t z(\alpha)x'(\alpha)d\alpha.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}z(t+)x(t) - z(\sigma)x(\sigma) &= \int_\sigma^t dz(\alpha)x(\alpha) + \int_\sigma^t z(\alpha)x'(\alpha)d\alpha \\ &= \int_\sigma^t dz(\alpha)x(\alpha) + \int_\sigma^t z(\alpha)\int_{\alpha-r}^{\alpha} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u)d\alpha\end{aligned} \tag{4.6.21}$$

or $\int_\sigma^t z(\alpha)\int_{\alpha-r}^{\alpha} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u)d\alpha = \int_\sigma^t z(\alpha)\int_{\alpha-r}^{t} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u)d\alpha$ car, pour $u \geq \alpha$, on a $\hat{k}(\alpha,u) = 0$.
Grâce au théorème de Fubini, on a :

$$\int_\sigma^t z(\alpha)\int_{\alpha-r}^{t} d_u\hat{k}(\alpha,u)x(u)d\alpha = \int_{\sigma-r}^t d_u\{\int_\sigma^t z(\alpha)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha\}x(u)$$

ainsi :

$$z(t+)x(t) - z(\sigma)x(\sigma) = \int_\sigma^t dz(\alpha)x(\alpha) + \int_{\sigma-r}^t d_u\{\int_\sigma^t z(\alpha)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha\}x(u).$$

Comme précédemment, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\sigma-r}^t d_u\{\int_\sigma^t z(\alpha)\hat{k}(\alpha,u)d\alpha\}x(u) &= \int_{\sigma-r}^\sigma d_s\{\int_\sigma^{\sigma+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}x(s) \\ &\quad + \int_\sigma^t d_s\{\int_s^{t+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}x(s) \\ &\quad - \int_{t-r}^t d_s\{\int_t^{t+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}x(s).\end{aligned}$$

En réinjectant dans (4.6.21) on a :

$$\begin{aligned}z(t+)x(t) - z(\sigma)x(\sigma) = \int_\sigma^t dz(\alpha)x(\alpha) &+ \int_{\sigma-r}^\sigma d_s\{\int_\sigma^{\sigma+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}x(s) \\ &+ \int_\sigma^t d_s\{\int_s^{t+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}x(s) - \int_{t-r}^t d_s\{\int_t^{t+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}x(s)\end{aligned}$$

d'où :

$$z(t+)x(t) + \int_{t-r}^{t} d_s\{\int_{t}^{t+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}x(s) = z(\sigma)x(\sigma)+ \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_s\{\int_{\sigma}^{\sigma+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}x(s) + \int_{\sigma}^{t} dz(\alpha)x(\alpha) + \int_{\sigma}^{t} d_s\{\int_{s}^{t+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}x(s).$$

Or

$$\int_{\sigma}^{t} dz(\alpha)x(\alpha) + \int_{\sigma}^{t} d_s\{\int_{s}^{t+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}x(s) = \int_{\sigma}^{t}\{dz(s) + d_s\int_{s}^{t+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}x(s) = 0.$$

En posant :

$$\hat{\mathcal{B}}_t(x,z) = z(t+)x(t) + \int_{t-r}^{t} d_s\{\int_{t}^{t+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}x(s), \tag{4.6.22}$$

avec x et z respectivement solutions de (4.6.2) et (4.6.11) et $\hat{F}(t) = \hat{\mathcal{B}}_t(x,z)$, on a, pour tout $t > \sigma, \hat{F}(t) = \hat{F}(\sigma)$. Cela entraîne que $\hat{F}$ est constante.
De la relation (4.6.22), on souhaite déduire une expression de la solution de (4.6.11).
Si $\sigma < t$, $\hat{\mathcal{B}}_\sigma(x,z) = \hat{\mathcal{B}}_t(x,z) \Rightarrow$

$$z(\sigma)x(\sigma) + \int_{\sigma-r}^{\sigma} d_s\{\int_{\sigma}^{\sigma+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}x(s) = z(t+)x(t) + \int_{t-r}^{t} d_s\{\int_{t}^{t+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}x(s).$$

On considère $\hat{X}(t,\sigma)$ la matrice solution de (4.6.2) ; on a :

$$z(\sigma)\hat{X}(t,\sigma)+\int_{\sigma-r}^{\sigma} d_s\{\int_{\sigma}^{\sigma+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}\hat{X}(s,\sigma) = z(t+)\hat{X}(t,\sigma)+\int_{t-r}^{t} d_s\{\int_{t}^{t+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}\hat{X}(s,\sigma),$$

d'où :

$$z(\sigma) = z(t+)\hat{X}(t,\sigma) + \int_{t-r}^{t} d_s\{\int_{t}^{t+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}\hat{X}(s,\sigma).$$

Comme précédemment, on a vu que $\hat{X}(t,\sigma) = \hat{Y}(\sigma,t)$, alors

$$z(\sigma) = z(t+)\hat{Y}(\sigma,t) + \int_{t-r}^{t} d_s\{\int_{t}^{t+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}\hat{Y}(\sigma,s).$$

□

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant :

Théorème 4.6.2. *Si z est la solution de l'équation (4.6.11) sur $[\sigma,T]$, alors pour tout $t \in [\sigma,T]$, on a :*

$$z(\sigma) = z(t+)\hat{Y}(\sigma,t) + \int_{t-r}^{t} d_s\{\int_{t}^{t+r} z(\alpha)\hat{k}(\alpha,s)d\alpha\}\hat{Y}(\sigma,s).$$

Chapitre 5

Formulation du problème de contrôle optimal

Nous considérons le problème de contrôle optimal avec un critère de type Mayer suivant, en présence d'un retard sur l'état :

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Maximiser} & J(x(\cdot),u(\cdot)) := g^0(x(T)) \\ \text{quand} & x \in C^0([-r,0];\Omega), x \in PC^1([0,T];\Omega), u \in PC^0([0,T];U) \\ & (i)\ \forall t \in [0,T], x'(t) = f(t,x_t,u(t)) \\ & (ii)\ x_0 = \phi \\ & (iii)\ \forall j = 1,\ldots,n_i,\ g^j(x(T)) \geq 0 \\ & (iv)\ \forall j = n_i+1,\ldots,n_i+n_e,\ g^j(x(T)) = 0. \end{array}\right\} \tag{5.0.1}$$

On suppose les conditions suivantes vérifiées :

1. $f \in C^1([0,T] \times \mathfrak{C} \times U, \mathbb{R}^n)$.
2. $\forall j = 0,\ldots,n_i+n_e,\ g^j \in C^1(\Omega,\mathbb{R})$.

5.1 Un résultat d'optimisation statique

Ce résultat issu de [44], dû à Halkin [30], est donné par Blot et Hayek [15] avec une reformulation de la démonstration de Philippe Michel [44], est appelé règle des multiplicateurs :

Théorème 5.1.1. *Soit : A un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^N$.*
Soit $q, q' \in \mathbb{N}$. Pour tout $j = 0,...,q+q'$, soit $\phi^j : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un voisinage de 0 et différentiable en 0.
On suppose que 0 est solution du problème suivant :

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Maximiser} & \phi^0(a) \\ \text{quand} & a \in A \\ & \forall j = 1,\cdots,q, \quad \phi^j(a) \geq 0 \\ & \forall j = q+1,\cdots,q+q', \quad \phi^j(a) = 0. \end{array}\right\} \tag{5.1.1}$$

Alors il existe $(\mu_0,...,\mu_{q+q'}) \in R^{1+q+q'}$ tel que :

1. *$(\mu_0,...,\mu_{q+q'})$ est non nulle*

2. $\forall j = 0, ..., r,\ \mu_j \geq 0$

3. $\forall j = 1, \cdots, r,\ \mu_j \phi^j(0) = 0$

4. $\forall a \in \mathbb{R}^N_+,\ \sum_{q+q'}^{j=0} \mu_j D\phi^j(0) \cdot a \leq 0.$

5.2 Variations en aiguilles

Nous allons perturber $u(\cdot)$ en des variations dites "en aiguilles" ce qui induit des variations de la trajectoire d'état correspondante.
Ces variations en aiguilles sont introduites, dans le cadre de systèmes gouvernés par une équation différentielle ordinaire sans retard, par Philippe Michel dans [43], puis explicité par Blot dans son polycopié de cours [12].
Dans cette partie, nous considérons que les commandes $u(\cdot)$ sont continues par morceaux sur $[0, T]$.
On fixe arbitrairement $N \in \mathbb{N}^*$, on introduit :

$$S = ((t_i, v_i))_{i=1,\cdots,N} \tag{5.2.1}$$

où, pour tout $i = 1, \cdots, N$, $t_i \in [0, T],\ v_i \in U,$ et $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_N < T$.
Nous noterons : $\mathcal{S}$ l'ensemble de telles listes S. À un tel S qu'on fixe pour l'instant, on associe, pour tout $i = 1, \ldots, N$,

$$J_S(i) := \{j \in \mathbb{N} / 1 \leq j \leq i, t_j = t_i\}. \tag{5.2.2}$$

À chaque $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N_+$, on associe la liste $(b_i)_{1 \leq i \leq N}$ définie par :

$$b_i = b_i(S, a) = \begin{cases} 0 & \text{si } J_S(i) = \emptyset \\ \displaystyle\sum_{j \in J_S(\mathbf{i})} a_j & \text{si } J_S(i) \neq \emptyset \end{cases}$$

et on note, pour tout $i = 1, \ldots, N$,

$$I_i = I_i(S, a) := [t_i + b_i, t_i + b_i + a_i[.$$

Ces notions nécessitent quelques commentaires. Pour $i = 1$, nous avons $J_S(1) = \emptyset$, donc $b_1 = 0$, donc $I_1 = [t_1, t_1 + a_1[$ (et $I_1 = \emptyset$ si $a_1 = 0$).
Pour $i = 2$, on a :

$$J_S(2) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t_2 > t_1 \\ \{1\} & \text{si } t_2 = t_1. \end{cases}$$

Premier cas : $J_S(2) = \emptyset$.
Alors $b_2 = 0$, donc $I_2 = [t_2, t_2 + a_2[$ (et $I_2 = \emptyset$ si $a_2 = 0$).
Deuxième cas : $J_S(2) = \{1\}$.
Alors $b_2 = a_1$, donc $I_2 = [t_1 + a_1, t_1 + a_1 + a_2[$.
Si $a_1 = 0, a_2 = 0$, alors $I_2 = \emptyset$ (et $I_1 = \emptyset$).
Si $a_1 = 0, a_2 > 0$, alors $I_2 = [t_1, t_1 + a_2[$ (et $I_1 = \emptyset$).
Si $a_1 > 0, a_2 = 0$, alors $I_2 = \emptyset$ (et $I_1 = [t_1, t_1 + a_1[$).
Si $a_1 > 0, a_2 > 0$, alors $I_2 = [t_1 + a_1, t_1 + a_1 + a_2[$ (et $I_1 = [t_1, t_1 + a_1[$).
Donc même lorsque $t_1 = t_2$ on a $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Ceci est la motivation pour introduire les b_i.
lorsqu'on a $t_2 > t_1, a_1 > 0, a_2 > 0$, on a $T_1 = [t_1, t_1 + a_1[$ et $I_2 = [t_2, t_2 + a_2[$, et donc pour avoir $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, on doit prendre a_1 assez petit.

Lemme 5.2.1. *Notons*

$$\delta(S) := \min\{t_{i+1} - t_i \ / \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, t_i < t_{i+1}\}.$$

Si $\|a\|_1 := \sum_{i=1}^{N} |a_i| = \sum_{i=1}^{N} a_i \leq \delta(S)$, *alors on a :*

(i) $\forall i = 1, \cdots, N-1, \quad \sup I_i \leq \inf I_{i+1}$

(ii) $\forall i \neq j, \quad I_i \cap I_j = \emptyset.$

Démonstration. **(i)** Fixons arbitrairement $i \in \{1, \dots, N-1\}$.
Si $t_{i+1} = t_i$ alors $b_{i+1} = b_i + a_i$, donc $t_i + b_i + a_i = t_i + b_{i+1}$, donc $\sup I_i = \inf I_{i+1}$.
Si $t_{i+1} > t_i$ alors $J_S(i+1) = \emptyset$, donc $b_{i+1} = 0$ et

$$b_i + a_i \leq \sum_{j<i} a_j + a_i \leq \sum_{1 \leq j \leq N} a_j \leq \delta(S) \leq (t_{i+1} - t_i)$$

$$\Longrightarrow t_i + b_i + a_i \leq t_{i+1} = t_{i+1} + b_{i+1} \Longrightarrow \sup I_i \leq \sup I_{i+1}.$$

(ii) Supposons qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, N-1\}$ tel que $t \in I_{i_0} \cap I_{i_0+1}$, dans ce cas $\inf I_{i_0+1} < \sup I_{i_0}$, ce qui contredirait le (**i**).

□

On introduit la **variation en aiguilles** de $\overline{u}(\cdot)$ de la façon suivante : pour tout $S \in \mathcal{S}$, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ tel que $||a||_1 \leq \delta(S)$, pour tout $t \in [0, T]$,

$$u(t, S, a) = \begin{cases} v_i & \text{si } t \in I_i (i \in \{1, \dots, N\})) \\ \overline{u}(t) & \text{si } t \in [0,T] \backslash \bigcup_{1 \leq i \leq N} I_i. \end{cases}$$

On considère l'équation différentielle controlée retardée linéaire homogène suivante :

$$y'(t) = D_2 f(t, \overline{x}_t, \overline{u}(t)) y_t, \tag{5.2.3}$$

l'application $t \mapsto f(t, \overline{x}_t, \overline{u}(t))$ étant continue par morceaux et $D_2 f(t, \overline{x}_t, \overline{u}(t)) : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linéaire continue, on a d'après le théorème de représentation de Riesz (4.1.1) de la section 3.1

$$D_2 f(t, \overline{x}_t, \overline{u}(t))\phi = \int_{-r}^{0} d_\theta [\eta_0(t, \theta) \mathbb{1}_{[t_0, t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{N-1} \eta_i(t, \theta) \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)] \phi(\theta). \tag{5.2.4}$$

La résolvante de l'équation (5.2.3) est donnée page 115 (4.5.4) , nous la rappelons :

$$\hat{X}(t, s) = I - \int_s^t (R^0(t, \alpha) \mathbb{1}_{[t_0, t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{p+p'-1} R^i(t, \alpha) \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)) d\alpha. \tag{5.2.5}$$

Définition 5.2.1. *Soit $\mathcal{B}$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, une fonction $F : \mathcal{B} \cap \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}^k$. On dit que F est différentiable en 0 lorsque :*

il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, il existe $\rho : \mathcal{B} \cap \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^k$ vérifiant $\lim_{a \to 0} \rho(a) = 0$, telles que, pour tout $a \in \mathcal{B} \cap \mathbb{R}_+^N$:

$$F(a) = F(0) + L \cdot a + \|a\|_1 \rho(a).$$

Alors L est appelée la différentielle de F en 0, et on notera $L := DF(0)$. Les dérivées partielles de F en 0 sont, pour tout $i = 1, \dots, N$, $F_{a_i}(0) = DF(0) \cdot e_i$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$.

Lemme 5.2.2. *Soit $F : \mathcal{B} \cap \mathbb{R}^N_+ \longrightarrow \mathbb{R}^k$, où $\mathcal{B}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^N$. On suppose qu'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^k)$, et pour tout $i = 1, \ldots, N$, qu'il existe une fonction $\phi_i : \mathcal{B} \cap \mathbb{R}^N_+ \longrightarrow \mathbb{R}^k$ vérifiant $\lim_{a\to 0} \phi_i(a) = 0$, telles que, pour tout $a \in \mathcal{B} \cap \mathbb{R}^N_+$:*

$$F(a) = F(0) + L \cdot a + \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(a).$$

Alors F est différentiable en 0, et $Df(0) = L$.

Démonstration. Définissons la fonction $\rho : \mathcal{B} \cap \mathbb{R}^N_+ \longrightarrow \mathbb{R}^k$ en posant

$$\rho(a) := \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \\ \frac{1}{\|a\|_1} \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(a) & \text{si } a \neq 0. \end{cases}$$

Alors, pour tout $a \neq 0$,

$$\|\rho(a)\|_1 = \frac{1}{\|a\|_1} \| \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(a)\|_1 \leq \frac{1}{\|a\|_1} \sum_{i=1}^{N} a_i \|\phi_i(a)\|_1$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{\|a\|_1} \|\phi_i(a)\|_1 \leq \sum_{i=1}^{N} \|\phi_i(a)\|_1 \to 0 \ (a \to 0)$$

donc $\rho(a) \to 0$ quand $a \to 0$, $a \neq 0$, et comme $\rho(0) = 0$, on a $\lim_{a\to 0} \rho(a) = 0$.
On note que $F(a) = F(0) + L \cdot a + \|a\|_1 \rho(a)$, ce qui prouve que F est différentiable en 0.

□

5.3 Résultats

Le résultat suivant établit des propriétés de régularité de la trajectoire d'état associée à la fonction de contrôle obtenue par variation en aiguilles à partir de la fonction de contrôle optimal. Précisement, il s'agit de la régularité par rapport aux largeurs des aiguilles à la date finale.

Théorème 5.3.1. *Soit S fixé, il existe un voisinage convexe V_S de 0 tel que la solution $x(\cdot, S, a)$ du système :*

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial x(t,S,a)}{\partial t} & = & f(t, x(\cdot, S, a)_t, u(t, S, a)), \ \text{pour } 0 \leq t \leq T \\ x(\cdot, S, a)_0 & = & \phi \end{array}\right\} \tag{5.3.1}$$

est définie pour $a \in V_S \cap A_S$ et la valeur en T est continue par rapport à a et différentiable en 0, de dérivées partielles :

$$\frac{\partial x(T, S, 0)}{\partial a_i} = \hat{X}(T, t_i)[f(t_i, \bar{x}_{t_i}, v_i) - f(t_i, \bar{x}_{t_i}, \overline{u}(t_i))] \tag{5.3.2}$$

pour $1 \leq i \leq N$, où $\hat{X}$ est définie en (5.2.5).

La preuve de ce théorème nécessitera les trois lemmes suivants :

Lemme 5.3.1. *Soit $S = ((t_i, v_i))_{1\leq i\leq N} \in \mathcal{S}$. Pour chaque $a \in \mathbb{R}^N_+$ tel que $\|a\|_1 \leq \delta(S)$ (cf. lemme 5.2.1), on note $z(\cdot, S, a)$ la solution non prolongeable de*

$$\left.\begin{array}{rcl} z'(t) & = & D_2 f(t, \overline{x}_t, \overline{u}(t))z_t + [f(t, \overline{x}_t, u(t, S, a)) - f(t, \overline{x}_t, \overline{u}(t))] \\ z_0 & = & 0. \end{array}\right\} \tag{5.3.3}$$

Alors la fonction $a \mapsto z(T, S, a)$ est différentiable en 0 (au sens de la définition 5.2.1) et, pour tout $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^N_+$ on a :

$$D_a z(T, S, 0) \cdot a = \sum_{i=1}^{N} a_i \hat{X}(t, t_i)[f(t_i, \bar{x}_{t_i}, v_i) - f(t_i, \bar{x}_{t_i}, \overline{u}(t_i))] \tag{5.3.4}$$

où $\hat{X}(T, t_i)$ est définie en (5.2.5).

Démonstration. Tout d'abord, notons que le problème (5.3.3) vérifie les hypothèses du théorème 4.5.1 (section 4.5, chapitre 4) et ainsi $z(\cdot, S, a)$ est définie sur $[0, T]$ tout entier.
Si $t \in [0, T]$ et $a \in \mathbb{R}^N_+$, introduisons

$$\Delta(t, a) = f(t, \overline{x}_t, u(t, s, a)) - f(t, \overline{x}_t, \overline{u}(t)). \tag{5.3.5}$$

En utilisant la construction de $u(t, S, a)$ on note que

$$\Delta(t, a) := \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } t \in [0, T] \setminus \cup_{i=1}^N I_i \\ f(t, \overline{x}_t, v_i) - f(t, \overline{x}_t, \overline{u}(t)) & \text{si } t \in I_i \ (i \in \{1, \ldots, N\}). \end{array}\right. \tag{5.3.6}$$

En utilisant la formule de variation des constantes (cf. 4.5.3, section 4.5, chapitre 4), on a, $\forall t \in [0, T]$,

$$z(t, S, a) = \hat{X}(t, 0) \cdot 0 + \int_0^t \hat{X}(t, s)\Delta(s, a)ds. \tag{5.3.7}$$

En particulier, on a :

$$z(T, S, a) = \int_0^T \hat{X}(T, s)\Delta(s, a)ds, \tag{5.3.8}$$

et en utilisant l'additivité par rapport au domaine d'intégration, on a :

$$z(T, S, a) = \int_{[0,T]\setminus \cup_{i=1}^N I_i} \hat{X}(T, s)\Delta(s, a)ds + \int_{\cup_{i=1}^N I_i} \hat{X}(T, s)\Delta(s, a)ds.$$

Avec la relation (5.3.6), le premier terme est nul, et ainsi on obtient, puisque les I_i sont deux à deux disjoints,

$$z(T, S, a) = \sum_{i=1}^{N} \int_{I_i} \hat{X}(T, s)\Delta(s, a)ds,$$

donc

$$z(T, S, a) = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} \hat{X}(T, s)\Delta(s, a)ds. \tag{5.3.9}$$

Notons que, $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\Delta[i] := \Delta(t_i, a) = f(t_i, \overline{x}_{t_i}, v_i) - f(t_i, \overline{x}_{t_i}, \overline{u}(t_i)) \tag{5.3.10}$$

ne dépend pas de a. En outre, puisque $a_i \cdot \hat{X}(T,t_i)\Delta[t_i]$ ne dépend pas de s, on a :

$$a_i \cdot \hat{X}(T,t_i)\Delta[t_i] = \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} \hat{X}(T,t_i)\Delta[t_i]ds. \tag{5.3.11}$$

Notons que $u(s,S,0) = \overline{u}(s)$, donc

$$\Delta(s,0) = f(s,\overline{x}_s,\overline{u}(s)) - f(s,\overline{x}_s,\overline{u}(s)) = 0,$$

et par la formule (5.3.8),

$$z(T,S,0) = \int_0^T \hat{X}(T,s)\cdot 0 ds.$$

Alors on a, avec (5.3.9) et (5.3.11)

$$\begin{aligned} z(T,S,a) - z(T,S,0) - \sum_{i=1}^N a_i \cdot \hat{X}(T,t_i)\Delta[t_i] &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} \hat{X}(T,s)\Delta(s,a)ds - 0 \\ &\quad - \sum_{i=1}^N a_i \cdot \hat{X}(T,t_i)\Delta[t_i] \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} [\hat{X}(T,s)\Delta(s,a) - \hat{X}(T,t_i)\delta[t_i]]ds. \end{aligned}$$

Donc :

$$z(T,S,a) - z(T,S,0) - \sum_{i=1}^N a_i \cdot \hat{X}(T,t_i)\Delta[t_i] = \sum_{i=1}^N a_i\phi_i(a) \tag{5.3.12}$$

où

$$\phi_i(a) := \begin{cases} 0 & \text{si } a_i = 0 \\ \frac{1}{a_i}\int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} [\hat{X}(T,s)\Delta(s,a) - \hat{X}(T,t_i)\Delta[t_i])]ds & \text{si } a_i \neq 0. \end{cases} \tag{5.3.13}$$

$$\phi_i : \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}^N.$$

Avec le lemme 5.2.2, il suffit de prouver que $\forall i \in \{1,\dots,N\}$, $\lim_{a\to 0}\phi_i(a) = 0$. En effectuant le changement de variable $\theta := \frac{s-t_i-b_i}{a_i}$, si $a_i \neq 0$, on obtient $s = t_i + b_i + \theta a_i$ avec $\theta \in [0,1]$ et

$$\phi_i(a) = \int_0^1 [\hat{X}(T,t_i+b_i+\theta a_i)\Delta(t_i+b_i+\theta a_i,a) - \hat{X}(T,t_i)\Delta[t_i]]dt. \tag{5.3.14}$$

Introduisons

$$\psi_i(\theta,a) := \hat{X}(T,t_i+b_i+\theta a_i)\Delta(t_i+b_i+\theta a_i,a) - \hat{X}(T,t_i)\Delta[t_i]. \tag{5.3.15}$$

En utilisant la continuité de $\overline{x}(\cdot)$, de $t \mapsto \overline{x}_t$, la continuité à droite de $\overline{u}(\cdot)$ et la continuité de f, en notant que :

$$a \to 0 \Longrightarrow \forall i \in \{1,\dots,N\},\ b_i \to 0 \ \text{ et } \ \forall \theta \in [0,1],\ b_i + \theta a_i \to a_i,$$

$$\begin{cases} \lim_{a\to 0} f(t_i+b_i+\theta a_i, \overline{x}_{t_i+b_i+\theta a_i}, \overline{u}(t_i+b_i+\theta a_i)) &= f(t_i,\overline{x}_{t_i},\overline{u}(t_i)) \\ \lim_{a\to 0} f(t_i+b_i+\theta a_i, \overline{x}_{t_i+b_i+\theta a_i}, v_i) &= f(t_i,\overline{x}_{t_i},v_i), \end{cases}$$

donc on a

$$\forall \theta \in [0,1], \lim_{a\to 0}\Delta(t_i+b_i+\theta a_i,a) = \Delta[t_i]. \tag{5.3.16}$$

Par ailleurs, en utilisant la continuité de $\hat{X}(T,\cdot)$ (car c'est une solution de (5.2.5)), on a :

$$\forall \theta \in [0,1],\ \lim_{a\to 0} \hat{X}(T, t_i + b_i + \theta a_i) = \hat{X}(T, t_i). \tag{5.3.17}$$

Puisque la fonction $(L,x) \mapsto L \cdot x$ est bilinéaire continue (dimension finie), (5.3.23) et (5.3.17) on déduit :

$$\forall \theta \in [0,1],\ \lim_{a\to 0} \hat{X}(T, t_i + b_i + \theta a_i)\Delta(t_i + b_i + \theta a_i) = \hat{X}(T, t_i)\Delta[t_i],$$

c.-à-d.

$$\forall \theta \in [0,1], \quad \lim_{a\to 0} \psi_i(\theta, a). \tag{5.3.18}$$

$$\begin{array}{rcl} \|\psi_i(\theta,a)\| & \leq & \|\hat{X}(T, t_i + b_i + \theta a_i)\| \cdot \|\Delta(t_i + b_i + \theta a_i, a)\| \\ & & \quad + \|\hat{X}(T,t_i)\Delta[t_i]\| \\ & \leq & \|\hat{X}(T, t_i + b_i + \theta a_i)\| \cdot \|\Delta(t_i + b_i + \theta a_i)\| \\ & & \quad + \max\limits_{1\leq i\leq N} \|\hat{X}(T,t_i)\Delta[t_i]\|. \end{array} \tag{5.3.19}$$

$\hat{X}(T,\cdot)$ est continue sur $[0,T]$ donc,

$$\forall a_i \in \mathbb{R}^N_+,\ \sup_{1\leq i\leq N} \|\hat{X}(T, t_i + b_i + \theta a_i)\| \leq \sup_{t\in[0,T]} \|\hat{X}(T,t)\| < +\infty.$$

On a, $\forall i \in \{1,\dots,N\}$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta(t_i + b_i + \theta a_i, a) & = & f(t_i + b_i + \theta a_i, \overline{x}_{t_i+b_i+\theta a_i}, v_i) \\ & & -f(t_i + b_i + \theta a_i, \overline{x}_{t_i+b_i+\theta a_i}, \overline{u}(t_i + b_i + \theta a_i)). \end{array} \right.$$

$[s \mapsto \overline{x}_s]$ est continue sur le compact $[0,T]$ donc $\{\overline{x}_s : s \in [0,T]\} =: K_1$ est compact dans $\mathfrak{C}$.
$\overline{u}(\cdot)$ est PC^0 donc bornée sur $[0,T]$ ainsi $K_2 :=$Adh$(\overline{u}([0,T]))$ est compacte dans $\mathbb{R}^n$.
Pour tout a telle que $\|a\|_1 \leq \delta(S), \forall i \in \{1,\dots,N\}$, et pour tout $\theta \in [0,1]$, on a $(t_i+b_i+\theta a_i, \overline{x}_{t_i+b_i+\theta a_i}, \overline{u}(t_i+b_i+\theta a_i)) \in [0,T]\times K_1 \times K_2$ qui est compact comme produit de compact, et puisque f est continue, $f([0,T]\times K_1 \times K_2)$ est compacte donc bornée.
Puisque $\{v_i : i \in \{1,\dots,N\}\} = K_3$ est fini, il est compact et puisque f est continue, $f([0,T]\times K_1 \times K_2)$ est compact donc bornée. Ainsi finalement en notant

$$\begin{array}{rcl} M & := & \sup\{\|f(t,\phi,v) : (t,\phi,v) \in [0,T]\times K_1 \times K_2\|\} \\ & & + \sup\{\|f(t,\phi,v) : (t,\phi,v) \in [0,T]\times K_1 \times K_3\|\} < +\infty, \end{array}$$

on a prouvé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1,\dots,N\}, \forall a \in B(0,\delta(S)) \cap \mathbb{R}^N_+, \\ \quad \forall \theta \in [0,1],\ \|\Delta(t_i + b_i + \theta a_i, a)\| \leq M. \end{array} \right. \tag{5.3.20}$$

Avec la formule (5.3.19) on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1,\dots,N\}, \forall a \in B(0,\delta(S)) \cap \mathbb{R}^N_+, \\ \quad \forall \theta \in [0,1],\ \|\psi_i(\theta,a)\| \leq M_1 < +\infty \end{array} \right. \tag{5.3.21}$$

où $M_1 := \sup\limits_{t\in[0,T]} \|\hat{X}(T,t)\| \cdot M + \max\limits_{1\leq i\leq N} \|\hat{X}(T,t_i)\Delta[t_i]\|$.
Puisque les constantes sont Lebesgue-intégrables sur $[0,1]$, puisque $\psi_i(\cdot,a)$ est PC^0 ; elle est Riemann-intégrable sur $[0,1]$ donc Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$ pour tout $a \in B(0,\delta(S)) \cap \mathbb{R}^N_+$, et par (5.3.18)

on peut utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et affirmer, $\forall (a^k)_k \in (B(0,\delta(S))\cap \mathbb{R}_+^N)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k\to+\infty} a^k = 0$,

$$\lim_{k\to+\infty} \phi_i(a^k) = \lim_{k\to+\infty} \int_0^1 \psi_i(\theta, a^k)d\theta = \int_0^1 0 d\theta.$$

Par le théorème de caractérisation séquentielle des limites de fonctions dans les espaces métriques on en déduit que :

$$\forall i \in \{1,\dots,N\},\ \lim_{a\to 0} \phi_i(a) = 0.$$

□

Lemme 5.3.2. *Soit $(t_i, v_i)_{1\le i\le N} \in \mathcal{S}$. Il existe une constante $k \in \mathbb{R}_+$ et un voisinage W de 0 tels que l'on ait, $\forall a \in W \cap \mathbb{R}_+^N$,*

$$\int_0^T ||f(t, \overline{x}_t, u(t,S,a)) - f(t, \overline{x}_t, \overline{u}(t))||dt \le k||a||_1.$$

Démonstration. Posons

$$\Delta(s,a) := f(t, \overline{x}_t, u(t,S,a)) - f(t, \overline{x}, \overline{u}(t))$$

et

$$\sigma(t,a) := \int_0^t \|\Delta(s,a)\|ds.\ (\forall t \in [0,T])$$

Si $\Delta(t,0) = 0$ alors $\sigma(T,0) = 0$ et aussi $\forall\ t \in [0,T] \setminus \cup_{i=1}^N I_i,\ \Delta(t,a) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sigma(T,a) - \sigma(T,0) - \sum_{i=1}^N a_i \cdot \|\Delta[t_i]\| &= \int_0^T \|\Delta(t,a)\|dt - 0 - \sum_{i=1}^N a_i \cdot \|\Delta[t_i]\| \\
&= \int_{[0,T]\setminus \cup_{i=1}^N} \|\Delta(t,a)\|dt + \int_{\cup_{i=1}^N I_i} \|\Delta(t,a)\|dt \\
&\quad - \sum_{i=1}^N a_i \cdot \|\Delta[t_i]\| \\
&= 0 + \sum_{i=1}^N \int_{I_i} \|\Delta(t,a)\|dt - \sum_{i=1}^N a_i \cdot \|\Delta[t_i]\| \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} \|\Delta(t,a)\|dt - \sum_{i=1}^N \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} \|\Delta[t_i]\|dt \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} (\|\Delta(t,a)\| - \|\Delta[t_i]\|)dt \\
&= \sum_{i=1}^N a_i \cdot \frac{1}{a_i} \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} (\|\Delta(t,a)\| - \|\Delta[t_i]\|)dt, \\
&\quad \text{si les } a_i > 0.
\end{aligned}$$

On introduit :

$$\nu_i(a) := \begin{cases} 0 & \text{si } a_i = 0 \\ \frac{1}{a_i} \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i} (\|\Delta(t,a)\| - \|\Delta[t_i]\|)ds & \text{si } a_i > 0. \end{cases}$$

Alors on a :

$$\forall a \in B(0,\delta(S)) \cap \mathbb{R}^N_+, \quad \sigma(T,a) = \sigma(T,0) + \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \|\Delta[t_i]\| + \sum_{i=1}^{N} a_i \nu_i(a)$$

avec $\nu_i : B(0,\delta(S)) \cap \mathbb{R}^N_+ \longrightarrow \mathbb{R}$.
Effectuons le changement de variable $t = t_i + b_i + \theta a_i, 0 \leq \theta \leq 1$, on obtient :

$$\nu_i(a) = \int_0^1 (\|\Delta(t_i + b_i + \theta a_i)\| - \|\Delta[t_i]\|) d\theta. \tag{5.3.22}$$

On a déjà vu que :

$$\lim_{a \to 0} (\|\Delta(t_i + b_i + \theta a_i, a)\| - \|\Delta[t_i]\|) = 0, \quad (\forall i \in \{1,\ldots,N\}, \forall \theta \in [0,1]) \tag{5.3.23}$$

On a aussi déjà vu que :

$$\begin{array}{c} \exists M \in \mathbb{R}^+_*, \forall a \in B(0,\delta(S)) \cap \mathbb{R}^N_+, \forall \theta \in [0,1], \\ \forall i \in \{1,\ldots,N\}, \|\Delta(t_i + b_i + \theta a_i, a)\| \leq M. \end{array} \tag{5.3.24}$$

Posons : $M' := M + \max\limits_{1 \leq i \leq N} \|\Delta[t_i]\| < +\infty$. Alors :

$$\begin{array}{c} \exists M' \in \mathbb{R}^+_*, \forall a \in B(0,\delta(S)) \cap \mathbb{R}^N_+, \forall \theta \in [0,1], \\ \forall i \in \{1,\ldots,N\}, |\|\Delta(t_i + b_i + \theta a_i, a)\| - \|\Delta[t_i]\|| \leq M'. \end{array} \tag{5.3.25}$$

L'application : $[\theta \mapsto \|\Delta(t_i + b_i + \theta a_i)\| - \|\Delta(t_i)\|]$ est PC^0 sur $[0,1]$ elle est alors Riemann-intégrable sur $[0,1]$ donc Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$. Avec (5.3.22), (5.3.25) on peut utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et affirmer que :

$$\lim_{a \to 0} \nu_i(a) = \int_0^1 0 d\theta = 0 \tag{5.3.26}$$

Il est clair en outre que

$$\begin{array}{rcl} \nu_i(0) & = & \displaystyle\int_0^1 (\|f(t_i + 0, \overline{x}_{t_i+0}, v_i) - f(t_i + 0, \overline{x}_{t_i+0}, \overline{u}(t_i))\| \\ & & -\|f(t_i, \overline{x}_{t_i}, v_i) - f(t_i, \overline{x}_{t_i}, \overline{u}(t_i))\|) d\theta \\ & = & \displaystyle\int_0^1 0 d\theta = 0. \end{array}$$

Donc, en utilisant le lemme 5.2.2 et (5.3.26) on peut affirmer que $\sigma(T,\cdot)$ est différentiable en 0 et donc $\exists \rho : B(0,\delta(S)) \cap \mathbb{R}^N_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{a \to 0} \rho(a) = 0$ et

$$\begin{array}{c} \forall a \in B(0,\delta(S)) \cap \mathbb{R}^N_+, \sigma(T,a) = \sigma(T,0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \|\Delta[t_i]\| + \|a\|_i \rho(a) \\ \text{et } D_a\sigma(T,0) \cdot a = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \|\Delta[t_i]\|. \end{array} \tag{5.3.27}$$

Alors $\exists r \in]0,\delta(S)[$ tel que $a \in B(0,r) \cap \mathbb{R}^N \Longrightarrow |\rho(a)| < 1$.
Donc : $\forall a \in B(0,r) \cap \mathbb{R}^N_+$,

$$\begin{array}{rcl} \sigma(T,a) = |\sigma(T,a)| & \leq & \|D_a\sigma(T,0)\| \cdot \|a\|_1 \cdot 1 \\ & =: & k \cdot \|a\|_1 \end{array} \tag{5.3.28}$$

en prenant $k := \|D_a\sigma(t,0)\| + 1$; d'où le résultat. □

Lemme 5.3.3. *Il existe une constante k_1 et un voisinage V_1 de 0 tel qu'on a, $\forall a \in V_1 \cap A_S$, le système :*

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t, x(\cdot, S, a)_t, u(t, S, a)) \\ x_0 & = & \phi \end{array}\right\} \tag{5.3.29}$$

admet sur $[0,T]$ une solution qui vérifie, $\forall t \in [0,T]$,

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| \leq k_1 \|a\|.$$

Démonstration. On définit par récurrence la suite de fonctions $(x^n(\cdot))_n$ dont le premier terme x^0 est défini comme solution de (5.3.29) pour $a = 0$. Et, pour $n \geq 0$, on définit :

$$x^n(t) = \phi(0) + \int_0^t f(s, x_s^{n-1}, u^a(s)).$$

Pour $a = 0$ on a

$$x^1(t) - x^0(t) = \int_0^t [f(s, \bar{x}_s, u^a(s)) - f(s, \bar{x}_s, \overline{u}(s))].$$

D'après le lemme 5.3.2, pour $a \in W \cap A_S$, on a : $\|x^1(t) - x^0(t)\| \leq k\|a\|$. On définit maintenant :

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{(t,x,v) \in [0,T] \times \mathfrak{C}([-r,T], \mathbb{R}^n) \times U / ||x - x^0||_{\mathfrak{C}} \leq r \text{ et} \\ & & v \in \{u^0(t), v_1, ..., v_N\}\}. \end{array}$$

On pose $k_2 = \sup\{||D_2 f(t,x,v)|| : (t,x,v) \in B\}$. On choisit $r \in]0,1]$ tel que $k_2 < +\infty$. Montrons que, $\forall a \in W \cap A_S$ tel que

$$||a|| \leq \frac{r}{k} \exp(-k_2 T), \tag{5.3.30}$$

la suite $(x^n)_n$ vérifie, pour tout $n \geq 0$:

$$||x^{n+1}(t) - x^n(t)|| \leq \frac{1}{n!} k ||a|| (k_2 t)^n. \tag{5.3.31}$$

Pour $n = 0$, on a :

$$\|x^1(t) - x^0(t)\| \leq rk\|a\|.$$

Comme on suppose l'inégalité (5.3.31) vraie pour $n \leq p-1$, on somme de 0 à n et on a : $\|x^{n+1}(t) - x^0(t)\| \leq \sum_{i=0}^n \|x^{i+1}(t) - x^i(t)\|$ d'où $||x^{n+1}(t) - x^0(t)|| \leq k\|a\| \sum_{i=1}^n \frac{(k_2 t)^i}{i!} \leq r$ alors $(t, x^{n+1}, u^a(t)) \in B$. Le théorème de la moyenne nous assure que :

$$\begin{array}{c} ||f(t, x_t^a, u^a(t)) - f(t, x_t^{p-1}, u^a(t))|| \leq k_2 ||x_t^p - x_t^{p-1}|| \\ ||f(t, x_t^p, u^a(t)) - f(t, x_t^{p-1}, u^a)(t)|| \leq k_2 \frac{1}{(p-1)!} k ||a|| (k_2 t)^{p-1}, \end{array}$$

et comme $x^{p+1}(t) - x^p(t) = \int_0^t (f(s, x_s^p, u^a(s)) - f(s, x_s^{p-1}, u^a(s)))ds$, alors on a :

$$||x^{p+1}(t) - x^p(t)|| \leq \int_0^t ||f(s, x_s^p, u^a(s)) - f(s, x_s^{p-1}, u^a(s))||ds$$

et par intégration sur $[0,T]$ on a :

$$||x^{p+1}(t)-x^p(t)|| \leq \frac{1}{p!}k||a||(k_2t)^p,$$

et ainsi la suite $(x^n)_n$ est de Cauchy sur $(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^n),\|\cdot\|_\infty)$ donc uniformément continue vers x qui est continue. $x(\cdot)$ vérifie la formule de récurrence $x^n(t)$ et en utilisant (5.3), on a :
$||x(t)-x^0(t)|| \leq k||a||e^{k_2T}$. □

Corollaire 5.3.1. *Pour tout $t\in[0,T]$, on a :*

$$\|x_t^a - x_t^0\|_{\mathfrak{C}} \leq k_1\|a\|.$$

Démonstration. Pour tout $z\in[0,T]$, on a, d'après le lemme 5.3.3, $\|x^a(z)-x^0(z)\|\leq k_1\|a\|$.
Pour $t=0$ on a $\|x_0^a(\theta)-x_0^0(\theta)\|=0$ grâce à la condition initiale (5.3.29), $\forall z\in[-r,0]$, $\|x^a(z)-x^0(z)\|\leq k_1\|a\|$ donc, $\forall z\in[-r,T]$, on a : $\|x^a(z)-x^0(z)\|\leq k_1\|a\|$; d'où, $\forall t\in[0,T],\forall\theta\in[-r,0]$, $\|x_t^a(\theta)-x_t^0(\theta)\|\leq k_1\|a\|$ et ainsi on a le résultat. □

Démonstration du théorème 5.3.1

On pose

$$\left.\begin{array}{rcl}\Gamma_t^a &=& (x_t^a-z_t^a)-(x_t^0-z_t^0)\\ &=& x_t^a-\overline{x}_t-z_t^a,\end{array}\right\} \tag{5.3.32}$$

et

$$\gamma(t,a)=D_1\Gamma(t,a)-D_2f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))\Gamma_t^a.$$

On sait que $D_1x(t,a)=f(t,x_t(\cdot,a),u(t,a))$ et $\overline{x}'(t)=f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))$, et
$D_1z(t,a)=D_2f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))z_t(\cdot,a)+[f(t,\overline{x}_t,u(t,a))-f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))]$. Ainsi on a

$$\Gamma(t,a)=x(t,a)-\bar{x}(t)-z(t,a),$$

et

$$\begin{array}{rcl}D_1\Gamma(t,a) &=& D_1x(t,a)-\overline{x}'(t)-z(t,a)\\ &=& f(t,x_t(\cdot,a),u(t,a))-f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))-D_1f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))z_t(\cdot,a)\\ && -[f(t,\overline{x}_t,u(t,a)-f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))]\\ &=& f(t,x_t(\cdot,a),u(t,a))-f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))-D_1f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))z_t(\cdot,a),\end{array}$$

et

$$\left.\begin{array}{rcl}\gamma(t,a) &=& f(t,x_t(\cdot,a),u(t,a))-f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))-D_2f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))z_t(\cdot,a)\\ && -D_2f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))(x_t^a-\overline{x}_t)+D_2f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))z_t(\cdot,a).\end{array}\right\} \tag{5.3.33}$$

$$\begin{array}{rcl}\gamma(t,a) &=& (\int_0^1 D_2f(t,\overline{x}_t+\theta(x_t^a-\overline{x}_t),u(t,a))d\theta).(\overline{x}_t-x_t^a)\\ && -D_2f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t)).(\overline{x}_t-x_t^a)\\ &=& \|\overline{x}_t-x_t^a\|\epsilon(t,a)\text{ où }\epsilon(t,a)=0\text{ si }x_t^a=\overline{x}_t,\\ \text{et }\epsilon(t,a) &=& [\int_0^1 D_2f(t,\overline{x}_t+\theta(x_t^a-\overline{x}_t),u(t,a))d\theta\\ && -D_2f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))]\frac{x_t^a-\overline{x}_t}{\|x_t^a-\overline{x}_t\|}\end{array}$$

$$\begin{aligned}\|\epsilon(t,a)\| &\leq \int_0^1 \|D_2 f(t,\overline{x}_t+\theta(x_t^a-\overline{x}_t),u(t,a))\|d\theta + \|D_2 f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))\| \\ &\leq k_2+k_2 \\ \|\epsilon(t,a)\| &\leq 2k_2\end{aligned}$$

$\forall t\in[0,T], \forall a\in V_S\cap\mathbb{R}_+^N, \|\epsilon(t,a)\|\leq 2k_2$.

Montrons que $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^T \|\epsilon(t,a)\|dt = 0$.

On sait que $\epsilon(t,a)=0$ lorsque $t\in[0,T]\setminus\bigcup_{i=1}^N I_i$, ainsi on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\epsilon(t,a)\|dt &= \sum_{i=1}^N \int_{I_i}\|\epsilon(t,a)\|dt \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i+b_i}^{t_i+b_i+a_i}\|\epsilon(t,a)\|dt \\ &\leq \sum_{i=1}^N a_i 2k_2,\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{a\to 0} 2k_2\|a\|=0$, on a bien le résultat.

Montrons que $\Gamma(t,a)=\int_0^t \hat{X}(t,s)\gamma(s,a)ds$.

$$\text{Comme } \gamma(t,a)=D_1\Gamma(t,a)-D_2 f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))\Gamma_t^a,$$

on a

$$\begin{aligned}D_1\Gamma(t,a) &= D_2 f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))\Gamma_t^a+\gamma(t,a) \\ \Gamma(0,a) &= x(0,a)-\bar{x}(t)-z(0,a)=0,\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\Gamma(t,a) &= \hat{X}(t,0)\Gamma(0,a)+\int_0^t \hat{X}(t,s)\gamma(s,a)ds \\ &= \int_0^t \hat{X}(t,s)\gamma(s,a)ds.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x(T,a)-z(T,a)-(x(T,0)-z(T,0))\| &= \|\Gamma(T,a)\| \\ &\leq \int_0^T \|\hat{X}(T,s)\|\|\gamma(s,a)\|ds \\ &\leq \int_0^T M\|\gamma(s,a)\|ds \\ \|x(T,a)-z(T,a)-(x(T,0)-z(T,0))\| &\leq \int_0^T M\|x_s^a-\bar{x}_s\|\|\epsilon(s,a)\|ds \\ \|x(T,a)-z(T,a)-(x(T,0)-z(T,0))\| &\leq \int_0^T Mk_1\|a\|\|\epsilon(s,a)\|ds,\end{aligned}$$

et ainsi $\forall \epsilon > 0, \exists \beta_\epsilon > 0$ tel que $\forall a \in \mathbb{R}^N_+,\ \|a\| \leq \beta_\epsilon,\ \|x(T,a) - z(T,a) - (x(T,0) - z(T,0))\| \leq \epsilon \|a\|$.
Ceci prouve que $x(T,0) - z(T,0)$ est différentiable en 0. On remarque aussi que :

$$\begin{aligned} D_a x(T,0) &= D_a(x(T,\cdot) - z(T,\cdot))(0) + D_a z(T,0) \\ &= 0 + D_a z(T,0). \end{aligned}$$

Précédemment on avait obtenu dans le lemme 5.3.1 que :

$$D_a z(T,0) \cdot a = \sum_{i=1}^{N} a_i \hat{X}(t,t_i)[f(t_i, \bar{x}_{t_i}, v_i) - f(t_i, \bar{x}_{t_i}, \overline{u}(t_i))].$$

Ainsi :

$$D_{a_i} x(T,0) = \hat{X}(t,t_i)[f(t_i, \bar{x}_{t_i}, v_i) - f(t_i, \bar{x}_{t_i}, \overline{u}(t_i))].$$

Théorème 5.3.2. *Soit S fixé, si $(\bar{x}, \overline{u})$ est une solution optimale du problème, alors il existe $\lambda_j, 0 \leq j \leq n_i + n_e$, satisfaisant :*

$$\sum_{j=0}^{n_i+n_e} |\lambda_j| = 1 \tag{5.3.34}$$

$$\lambda_j \geq 0, \ \textit{pour}\ \ 0 \leq j \leq n_i \tag{5.3.35}$$

$$\lambda_j g_j(\bar{x}(T)) = 0,\ 1 \leq j \leq n_i \tag{5.3.36}$$

$$d(\lambda).\hat{X}(T,t_i)[f(t_i, \bar{x}_{t_i}, v_i) - f(t_i, \bar{x}_{t_i}, \overline{u}(t_i))] \leq 0,\ 1 \leq i \leq N \tag{5.3.37}$$

où $d(\lambda)$ est défini par :

$$d(\lambda) = \sum_{j=0}^{n_i+n_e} \lambda_j D g_j(\bar{x}(T)).$$

Démonstration. grâce à 5.1 on obtient les relations (5.3.34) et (5.3.35) ; comme

$$\begin{aligned} \phi^j(0) &= g^j(x(T,0)) && (5.3.38) \\ &= g^j(\bar{x}(T)) && (5.3.39) \end{aligned}$$

implique, que pour tout $j = 1, \cdots, n_i$, $\lambda_j g^j(\bar{x}(T)) = 0$.
Pour $a \in V_S \cap \mathbb{R}^N_+$, on a : $\phi^j(a) = g^j(x(T,a))$ entraîne que $D\phi^j(0) = Dg^j(x(T,a)) \cdot \dfrac{\partial}{\partial a} x(T,a)$
donc, pour tout $a \in \mathbb{R}^N_+$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n_i+n_e} \lambda_j D\phi^j(0) \cdot a &= \sum_{j=0}^{n_i+n_e} \lambda_j Dg^j(x(T,a)) \circ \frac{\partial}{\partial a} x(T,a) \cdot a \\ &= d(\lambda) \circ \frac{\partial}{\partial a} x(T,a) \cdot a, \end{aligned}$$

et ainsi, $\forall a \in \mathbb{R}^N_+ \quad d(\lambda) \circ \dfrac{\partial}{\partial a} x(T,a) \cdot a \leq 0$, et alors en prenant $a = e_i$, le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^N$.
On obtient :

$$\begin{aligned} d(\lambda) \circ \frac{\partial}{\partial a} x(T,a) \cdot e_i &\leq 0 \\ d(\lambda) \circ \frac{\partial}{\partial a} x(T,a) &\leq 0 \end{aligned}$$

et grâce au lemme 5.3.1 : $d(\lambda)\cdot\hat{X}(T,t_i)[f(t_i,\bar{x}_{t_i},u_i)-f(t_i,\bar{x}_{t_i},\overline{u}(t_i))]\leq 0$.

□

Théorème 5.3.3. *Si $(\bar{x},\overline{u})$ est une solution optimale du problème, il existe λ_j, $0\leq j\leq n_i+n_e$, vérifiant les conclusions du théorème 5.3.2, pour tout $t_i\in[0,T]$ et pour tout $v_i\in L^\infty L^1(I\times J,E)$.*

Démonstration. À chaque $S\in\mathcal{S}$, on associe :

$$\begin{aligned}K(S) \;:=\; &\{(\lambda_j)_{0\leq j\leq r+r'}\in\mathbb{R}^{1+r+r'}/\sum_{j=0}^{r+r'}|\lambda_j|=1,(\forall j=0,\cdots,r)\\ &(\forall j=1,\cdots,r,\lambda_j g^j(\bar{x}(T))=0),(\forall i=1,\cdots,N,d(\underline{\lambda}).D_{a_i}x(T,0)\leq 0)\}.\end{aligned}$$

D'après le théorème 5.3.2, on a pour tout $S\in\mathcal{S}, K(S)\neq\varnothing$.
Pour tout $S\in\mathcal{S}, K(S)$ est fermé car construit avec des égalités, des inégalités larges et des fonctions continues de $(\lambda_j)_{0\leq j\leq r+r'}$.
Pour tout $S\in\mathcal{S}$, on a $K(S)\subset S_{1+r+r'}(0,1)$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{1+r+r'}$.
Soit une liste finie $(S_k)_{1\leq k\leq l}$ tel que $S_k=(t_{i,k},v_{i,k})_{1\leq i\leq N_k}$ d'éléments de S. Considérons $\hat{S}=(\hat{t}_i,\hat{v}_i)_{1\leq i\leq\hat{N}_k}$, la liste constituée de la réunion des $S_k, k=1,\cdots,l$. Les $\hat{t}_i$ sont les $t_{i,k}(k=1,\cdots,l,i=1,\cdots,N_k)$ réordonnés par ordre croissant et $\hat{v}_i=v_{i,k}$ quand $\hat{t}_i=t_{i,k}$. Alors $\hat{S}\in\mathcal{S}$.
Montrons que $K(\hat{S})\subset K(S_k)$ pour tout $k=1,\cdots,l$.
Soit $(\lambda_j)_{0\leq j\leq r+r'}\in K(\hat{S})$, alors on a :

$$\begin{aligned}&(\textstyle\sum_{j=0}^{r+r'}|\lambda_j|=1),(\forall j=0,\cdots,r,\ \lambda_j\geq 0),(\forall j=1,\cdots,r,\ \lambda_j g^j(\bar{x}(T)))\\ &(\forall i=1,\cdots,\hat{N},\ d(\underline{\lambda})\cdot X(T,\hat{t}_i)\cdot[f(\hat{t}_i,\bar{x}_{t_i},v_i)-f(\hat{t}_i,\bar{x}_{t_i},\overline{u}(\hat{t}_i))]\geq 0)\end{aligned}$$

or, pour tout $i=1,\cdots,N_k$, il existe $j\in\{1,\cdots,\hat{N}\}$ tel que $t_{i,k}=\hat{t}_j$, et donc $v_{i,k}=\hat{v}_j$. Donc on a :

$$d(\underline{\lambda})\cdot\hat{X}(T,t_{i,k})\cdot[f(t_{i,k},\bar{x}_{t_{i,k}},v_{i,k})-f(t_{i,k},\bar{x}_{t_{i,k}},\overline{u}(t_{i,k}))],$$

ce qui prouve $(\lambda_j)_{0\leq j\leq r+r'}\in K(S)$.
Ainsi on a démontré que, pour tout $k=1,\cdots,l, K(\hat{S})\subset K(S_k)$, donc : $K(\hat{S})\subset\cap_{k=1}^{l}K(S_k)$, par le théorème 5.3.2 on sait que $K(\hat{S})\neq\varnothing$, donc on a : $\cap_{k=1}^{l}K(S_k)\neq\varnothing$. Ainsi on a démontré : pour toute liste finie $(S_k)_{1\leq k\leq l}$ d'élements de $\mathcal{S}$, $\cap_{k=1}^{l}K(S_k)\neq\varnothing$.
Puisque les $K(S)$ sont des parties fermées du compact $S(0,1)$, par la propriété de l'intersection finie des espaces compacts, on peut affirmer :

$$\cap_{S\in\mathcal{S}}K(S)\neq\varnothing.$$

Nous pouvons donc prendre un élément $(\lambda_j)_{0\leq j\leq r+r'}\in\cap_{S\in\mathcal{S}}K(S)$. □

Énoncé du Principe de Pontryagin

Dans un premier temps nous donnons les conditions de qualification de Michel [43], où $(\overline{x},\overline{u})$ est un processus admissible de (5.0.1).

$$(\mathrm{QC})\begin{cases}&\forall(\lambda_j)_{0\leq j\leq ni+n_e}\in\mathbb{R}^{1+n_i+n_e}\\ \text{si}\quad&\forall j=0,...,n_i,\ \lambda_j\geq 0\\ &\forall j=1,...,n_i,\ \lambda_j g^j(\overline{x}(T))=0\\ &\textstyle\sum_{j=0}^{n_i+n_e}\lambda_j Dg^j(\overline{x}(T))=0\\ \text{alors}\quad&\forall j=0,...,n_i+n_e,\ \lambda_j=0.\end{cases}\tag{5.3.40}$$

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 5.3.4. *Une condition nécessaire pour que $(\overline{x},\overline{u})$ soit une solution optimale du problème posé est qu'il existe des réels λ_j, $0\leq j\leq n_i+n_e$ et une application $p(\cdot)\in BV([\sigma,T+r];\mathbb{R}^n)\cap C^0_g([\sigma,T+r],\mathbb{R}^n)$ tels que :*

1. *les λ_j vérifient :*

$$\begin{aligned}(\lambda_0,\dots,\lambda_{n_i+n_e})&\neq(0,\dots,0)\\ \lambda_j&\geq 0\quad \textit{pour } 0\leq j\leq n_i\\ \lambda_j g_j(\bar{x}(T))&=0\quad \textit{pour } 1\leq j\leq n_i\end{aligned}$$

2. *$p(\cdot)$ est solution de l'équation*

$$\forall t\in[\sigma,T]\qquad \frac{d}{dt}\left(p(t)+\int_t^{T+r}p(\alpha)[\hat{k}(\alpha,t)]d\alpha\right)=0$$
$$p(T)=\sum_{j=0}^{n_i+n_e}\lambda_j Dg^j(\bar{x}(T))$$

3. $\forall s\leq T,\ \forall\omega\in U,\ p(s)\cdot f(\bar{x}_s,\overline{u}(s),s)\geq p(s)\cdot f(\bar{x}_s,\omega,s)$.

Si de plus la condition de qualification (QC) est vérifiée, nous obtenons la conclusion additionnelle suivante :

4. *il existe $\epsilon>0$ tel que $p(t)\neq 0$ pour tout $t\in\,]T-\epsilon,T]$.*

Dans ce résultat, l'application $\hat{k}$ est celle définie en 4.5.3 avec $L(t)=D_2f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))$.

Preuve du théorème. Notre preuve s'appuie sur celle de Michel [43] ; nous y apportons les changements adaptés au cas d'un système gouverné par une équation différentielle fonctionnelle. Soit $\underline{\lambda}$ vérifiant les conclusions du théorème 5.3.3. On pose $p(t)=d(\underline{\lambda})\cdot\hat{X}(T,t)$, avec $d(\underline{\lambda})=\sum_{j=0}^{n_i+n_e}\lambda_j Dg_j(\bar{x}(T))$ et alors on a $p(T)=d(\underline{\lambda})\cdot\hat{X}(T,T)$, $p(t)=d(\underline{\lambda})$ d'où $p(T)=\sum_{j=0}^{n_i+n_e}\lambda_j Dg_j(\bar{x}(T))$.
L'appartenance de p à $BV([\sigma,T+r];\mathbb{R}^n)\cap C^0_g([\sigma,T+r],\mathbb{R}^n)$ est issu de $(\mathbf{v})$ du lemme 4.5.1.
La première relation est issue du théorème 5.3.2. Ensuite, on considère $(t,u)\in\mathcal{S}$, alors $(\lambda_j)_{0\leq j\leq n_i+n_e}\in K(t,u)$ et on a
$d(\underline{\lambda})\cdot\hat{X}(T,t)\left(f(t,\overline{x}_t,u)-f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))\right)\leq 0$,
$d(\underline{\lambda})\cdot\hat{X}(T,t)\left(f(t,\overline{x}_t,u)\right)\leq d(\underline{\lambda})\cdot\hat{X}(T,t)f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))$,
et comme $p(t)=d(\underline{\lambda})\cdot\hat{X}(T,t)$ on a

$$p(t)\left(f(t,\overline{x}_t,u)\right)\leq p(t)(f(t,\overline{x}_t,\overline{u}(t))).$$

On veut montrer que $p(t)=d(\underline{\lambda})\cdot\hat{X}(T,t)$ est solution de l'équation adjointe

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)+\int_t^{T+r}p(\alpha)[\hat{k}(\alpha,t)]d\alpha\right)=0$$

or comme $\hat{X}(T,t) = \hat{Y}(t,T)$, on a : $p(t) = d(\underline{\lambda})\hat{Y}(t,T)$, ainsi, $\forall t \in [\sigma, T]$:

$$\begin{aligned} p(t) &= d(\underline{\lambda})[I - \int_t^T \hat{Y}(\alpha,T)\hat{k}(\alpha,t)d\alpha] \\ &= d(\underline{\lambda})I - \int_t^T d(\underline{\lambda})\hat{Y}(\alpha,T)\hat{k}(\alpha,t)d\alpha \\ &= d(\underline{\lambda})I - \int_t^T d(\underline{\lambda})\hat{X}(T,\alpha)\hat{k}(\alpha,t)d\alpha \\ &= d(\underline{\lambda})I - \int_t^T p(\alpha)\hat{k}(\alpha,t)d\alpha \end{aligned}$$

d'où on a : $\forall t \in [\sigma, T], p(t) + \int_t^T p(\alpha)\hat{k}(\alpha,t)d\alpha = d(\underline{\lambda})I$. La fonction $[t \mapsto p(t) + \int_t^T p(\alpha)\hat{k}(\alpha,t)d\alpha]$ est dérivable sur $[\sigma, T]$ de dérivée nulle, donc :

$$\frac{d}{dt}\left(p(t) + \int_t^T p(\alpha)\hat{k}(\alpha,t)d\alpha\right) = 0$$

et $p(\cdot)$ est bien solution de l'équation adjointe, avec $p(T) = d(\underline{\lambda})$.

En partant de la condition de qualification (QC), si $p(T) = 0$, comme 1. est vérifiée on a une contradiction, donc $p(T) \neq 0$. Comme $\hat{X}(T,t) = I - \int_t^T \hat{R}(\alpha,t)d\alpha$, et $\hat{R}$ est bornée, si on prend $\epsilon \in]0, \|\hat{R}\|_\infty^{-1}]$, alors quand $t \in]T-\epsilon, T]$, nous obtenons que $\hat{X}(T,t)$ est inversible. En nous servant de l'expression de $p(T)$ on a $p(t) = p(T)\hat{X}(T,t)$, et $p(T)$ étant non nulle, on a bien $p(t) \neq 0$ d'où le 4..

□

Remarque 5.3.1. *A priori, l'application* $[t \mapsto \int_t^{T+r} p(\alpha)\hat{k}(\alpha,t)d\alpha]$ *n'est pas dérivable car* $[t \mapsto \hat{k}(\cdot,t)]$ *ne l'est pas, mais nous avons montrer que dans notre cas, elle l'est avec une dérivée nulle.*

Chapitre 6

Sur le calcul variationnel avec un processus à mémoire

6.1 Problème de calcul variationnel

— Soit $r \in]0, +\infty[$, $\Delta = [-r, 0]$, $T \in]0, +\infty[$.
— Soit $L : [0, T] \times C^0(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.
— Les hypothèses sur L sont :

$$(H)\begin{cases} \bullet L \in C^0([0,T] \times C^0(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \\ \bullet \forall (t, \phi, v) \in [0,T] \times C^0(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n,\ D_2L(t, \phi, v) \text{ existe et} \\ \quad D_2L \in C^0([0,T] \times C^0(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n; \mathfrak{L}(C^0(\Delta, \mathbb{R}^n), \mathbb{R})) \\ \bullet \forall (t, \phi, v) \in [0,T] \times C^0(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n, D_3L(t, \phi, v) \text{ existe et} \\ \quad D_3L \in C^0([0,T] \times C^0(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n; \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})). \end{cases}$$

On considère la fonctionnelle

$$I : x \mapsto \int_0^T L(t, x_t, x'(t))dt. \tag{6.1.1}$$

Dans cette partie, nous souhaitons exprimer une variante du lemme fondamentale du calcul des variations et une version des conditions d'Euler-Lagrange.

6.2 Mise en place du cadre de travail

on définit l'espace fonctionnel

$$\mathfrak{X} = \{x \in C^0([-r, T], \mathbb{R}^n) : x_{|[0,T]} \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)\}$$

Lemme 6.2.1. *Muni de la norme* $\|x\|_{\mathfrak{X}} := \sup_{-r \le t \le T} \|x(t)\| + \sup_{0 \le t \le T} \|x'(t)\|$, $\mathfrak{X}$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. Puisque $C^0([-r, T], \mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel et puisque $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel, $\mathfrak{X}$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([-r, T], \mathbb{R}^n)$. $\forall x \in \mathfrak{X}, x([-r, T])$ et $x'([0, T])$ sont compactes comme images continues de compacts, donc bornées, ce qui assure que $\|x\|_{\mathfrak{X}}$ est bien définie

dans $\mathbb{R}_+$. $\|0\|_{\mathfrak{X}} = 0 + 0 = 0$. Réciproquement, si $\|x\|_{\mathfrak{X}} = 0$ alors $(\forall t \in [-r, T], \|x(t)\| \leq 0) \Rightarrow x = 0$.
Si $x \in \mathfrak{X}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_{\mathfrak{X}} &= \sup_{-r\leq t\leq T} \|\lambda x(t)\| + \sup_{0\leq t\leq T} \|\lambda x'(t)\| \\ &= |\lambda| \cdot \sup_{-r\leq t\leq T} \|x(t)\| + |\lambda| \cdot \sup_{0\leq t\leq T} \|x'(t)\| \\ &= |\lambda| \cdot \|x\|_{\mathfrak{X}}.\end{aligned}$$

Si $x, y \in \mathfrak{X}$ alors

$$\begin{aligned}\|x + y\|_{\mathfrak{X}} &= \sup_{-r\leq t\leq T} \|x(t) + y(t)\| + \sup_{0\leq t\leq T} \|x'(t) + y'(t)\| \\ &\leq \sup_{-r\leq t\leq T} \|x(t)\| + \sup_{-r\leq t\leq T} \|y(t)\| + \sup_{0\leq t\leq T} \|x'(t)\| + \sup_{0\leq t\leq T} \|y'(t)\| \\ &= \|x\|_{\mathfrak{X}} + \|y\|_{\mathfrak{X}}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ est une norme sur $\mathfrak{X}$. Notons

$$\begin{aligned}\|x\|_{\infty,[-r,T]} &:= \sup_{-r\leq t\leq T} \|x(t)\| \\ \|x\|_{\infty,[0,T]} &:= \sup_{0\leq t\leq T} \|x(t)\| \\ \|x\|_{C^1,[0,T]} &:= \|x(t)\|_{\infty,[0,T]} + \|x'\|_{\infty,[0,T]}.\end{aligned}$$

Soit $(x_q)_{q\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{X}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$.
Puisque $\|x\|_{\infty,[-r,T]} \leq \|x\|_{\mathfrak{X}}, (x_q)_q$ est aussi une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\infty,[-r,T]}$.
Comme $(C^0([-r, T], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\infty,[-r,T]})$ est complet, $\exists \hat{x} \in C^0([-r, T], \mathbb{R}^n)$ tel que $\lim_{q\to+\infty} \|x_q - \hat{x}\|_{\infty,[-r,T]} = 0$.
Puisque $\|x\|_{C^1,[0,T]} \leq \|x\|_{\mathfrak{X}}, (x_q)_q$ est aussi une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_{C^1,[0,T]}$.
Comme $(C^1([0, T], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{C^1,[0,T]})$ est complet, $\exists \hat{z} \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ tel que $\lim_{q\to+\infty} \|x_q - \hat{z}\|_{C^1,[0,T]} = 0$.
Puisque $\|x\|_{\infty,[0,T]} \leq \|x\|_{\infty,[-r,T]}$, on a aussi $\lim_{q\to+\infty} \|x_q - \hat{x}\|_{\infty,[0,T]} = 0$.
Comme $\|x\|_{\infty,[0,T]} \leq \|x\|_{C^1,[0,T]}$, on a aussi $\lim_{q\to+\infty} \|x_q - \hat{z}\|_{\infty,[0,T]} = 0$.
Par unicité de la limite dans $((C^0([0, T]), \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\infty,[0,T]})$ on a : $\hat{x}_{|[0,T]} = \hat{z} \Rightarrow \hat{x}_{|[0,T]} \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{x} \in \mathfrak{X}$.

$$\begin{aligned}\forall q \in \mathbb{N}, \|x_q - \hat{x}\|_{\mathfrak{X}} &= \|x_q - \hat{x}\|_{\infty,[-r,T]} + \|x'_q - \hat{x}'\|_{\infty,[0,T]} \\ &\leq \|x_q - \hat{x}\|_{\infty,[-r,T]} + \|x_q - \hat{x}\|_{C^1,[0,T]} \to 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

quand $q \to +\infty \Rightarrow \lim_{q\to+\infty} \|x_q - \hat{x}\|_{\mathfrak{X}} = 0$. □

On fixe $\hat{\phi} \in C^0([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On définit

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathfrak{X} : x_0 = \hat{\phi}, x(T) = b\}.$$

Lemme 6.2.2. *L'ensemble $\mathcal{A}$ a les propriétés suivantes*

(i) $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

(ii) *$\mathcal{A}$ est un sous-ensemble affine fermé de $\mathfrak{X}$.*

(iii) *Le sous espace vectoriel directeur de $\mathcal{A}$ est*

$$\mathcal{V} = \{h \in \mathfrak{X} : h_0 = 0, h(T) = 0\}.$$

Démonstration. **(i)** Soit $u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :
$\forall t \in [0,T], u(t) := (1-\frac{t}{T})\hat{\phi}(0) + \frac{t}{T}b$. Alors $u \in C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, $u(0) = \hat{\phi}(0), u(T) = b$. Posons

$$x(t) := \begin{cases} \hat{\phi}(t) \text{ si } t \in [-r,0] \\ u(t) \text{ si } t \in]0,T]. \end{cases}$$

(ii) Soit $x, y \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $z := (1-\lambda)x + \lambda y$. Alors $z \in \mathfrak{X}$ (car $\mathfrak{X}$ est un espace vectoriel),

$$\begin{aligned} z_0 &= (1-\lambda)x_0 + \lambda y_0 \\ &= (1-\lambda)\hat{\phi} + \lambda\hat{\phi} \\ &= \hat{\phi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(T) &= (1-\lambda)x(T) + \lambda y(T) \\ &= (1-\lambda)b + \lambda b. \end{aligned}$$

Donc $z \in \mathcal{A}$. Ceci prouve que $\mathcal{A}$ est affine.
Pour la fermeture, soit $(x^q)_q \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ et $x \in \mathfrak{X}$ tel que $\lim\limits_{q\to+\infty} \|x_q - x\|_{\mathfrak{X}} = 0$. Alors, $\forall \theta \in [-r,0], \forall q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|\hat{\phi}(\theta) - x(\theta)\| &= \|x^q(\theta) - x(\theta)\| \\ &\leq \|x^q - x\|_{\mathfrak{X}} \end{aligned}$$

lorsque $q \to +\infty$, on a $\hat{\phi}(\theta) = x(\theta)$, donc $x_0 = \hat{\phi}$. En outre, $\forall q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|b - x(T)\| &= \|x^q(T) - x(T)\| \\ &\leq \|x^q - x\|_{\mathfrak{X}} \end{aligned}$$

de même lorsque $q \to +\infty$, on a $b = x(T)$. Donc $x \in \mathcal{A}$.

(iii) On vérifie que $\mathcal{V}$ est un sous espace vectoriel de $\mathfrak{X}$.
Fixons $\tilde{x} \in \mathcal{A}$. Si $h \in \mathcal{V}$ alors $\tilde{x} + h \in \mathfrak{X}, \tilde{x}_0 + \tilde{h}_0 = \hat{\phi} + 0 = \hat{\phi}$,
$\tilde{x}(T) + h(T) = b + 0 = b$; donc $\tilde{x} + h \in \mathcal{A}$. Ceci prouve que $(\tilde{x} + \mathcal{V}) \subset \mathcal{A}$.
Si $x \in \mathcal{A}$ alors $x - \tilde{x} \in \mathfrak{X}, x_0 - \tilde{x}_0 = \hat{\phi} - \hat{\phi} = 0, x(T) - \tilde{x}(T) = b - b = 0$, donc $x - \tilde{x} \in \mathcal{V}$.
Puisque $x = \tilde{x} + (x - \tilde{x})$, ceci prouve que $\mathcal{A} \subset (\tilde{x} + \mathcal{V})$. D'où : $\mathcal{A} = \tilde{x} + \mathcal{V}$.

□

Remarque 6.2.1. *Dans le langage des sous-variétés différentielles, $\mathcal{V} = T_x\mathcal{A}$, si $x \in \mathcal{A}$, c.-à-d. $\mathcal{V}$ est l'espace vectoriel tangent à $\mathcal{A}$ au point x.*

Si $x \in C^0([-r,T];\mathbb{R}^n)$ on définit $\underline{x} : [0,T] \longrightarrow C^0([-r,0];\mathbb{R}^n)$ par : $\forall t \in [0,T]$, $\underline{x}(t) = x_t$.

Lemme 6.2.3. *Si $x \in C^0([-r,T],\mathbb{R}^n)$ alors $\underline{x} \in C^0([0,T];C^0([-r,0],\mathbb{R}^n))$.*

Démonstration. Puisque $[-r,T]$ est compact, par le théorème de Heine, x est uniformément continu sur $[-r,T]$, donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall s,t \in [-r,T], |s-t| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow \|x(s) - x(t)\| \leq \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$, soit $t, t_1 \in [0,T]$ tel que $|t - t_1| \leq \delta_\epsilon$. Alors $\forall \theta \in [-r,0]$, $|(t+\theta) - (t_1+\theta)| = |t - t_1| \leq \delta_\epsilon$ donc $\|x(t+\theta) - x(t_1+\theta)\| \leq \epsilon$, c.-à-d. $\|\underline{x}(t) - \underline{x}(t_1)\|_{\infty,[-r,0]} \leq \epsilon$. □

Ce lemme permet de définir l'opérateur :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S} & : & C^0([-r,T],\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^0([0,T],C^0([-r,0],\mathbb{R}^n)) \\ & & x \mapsto \underline{x}. \end{array}$$

Lemme 6.2.4. *$\mathcal{S}$ est un opérateur linéaire continu de $C^0([-r,T],\mathbb{R}^n)$ dans $C^0([0,T],C^0([-r,0],\mathbb{R}^n))$.*

Démonstration. Soit $x, y \in C^0([-r,T],\mathbb{R}^n)$; alors $x+y \in C^0([-r,T],\mathbb{R}^n)$ et

$$\begin{array}{rcl} \underline{x+y}(t) & = & [\theta \mapsto (x+y)(t+\theta)] \\ & = & [\theta \mapsto x(t+\theta)+y(t+\theta)] \\ & = & [\theta \mapsto \underline{x}(t)(\theta)+\underline{y}(t)(\theta)] \\ & = & \underline{x}(t)+\underline{y}(t). \end{array}$$

Donc $\mathcal{S}(x+y) = \mathcal{S}(x) + \int(y)$.
Soit $x \in C^0([-r,T],\mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; alors $\lambda x \in C^0([-r,T],\mathbb{R}^n)$ et

$$\begin{array}{rcl} \underline{\lambda x}(t) & = & [\theta \mapsto (\lambda x)(t+\theta)] \\ & = & [\theta \mapsto \lambda \underline{x}(t)(\theta)] \\ & = & \lambda \underline{x}(t). \end{array}$$

Donc $\mathcal{S}(\lambda x) = \lambda \mathcal{S}(x)$. Ceci prouve que $\mathcal{S}$ est linéaire.
Pour la continuité, $\forall x \in C^0([-r,T],\mathbb{R}^n), \forall t \in [0,T]$,

$$\begin{array}{rcl} \|\mathcal{S}(x)(t)\|_{\infty,[-r,0]} & = & \|\underline{x}(t)\|_{\infty,[-r,0]} \\ & = & \sup\limits_{\theta\in[-r,0]} \|x(t+\theta)\| \\ & \leq & \|x\|_{\infty,[-r,T]}, \end{array}$$

donc $\|\mathcal{S}(x)\|_{\infty,[0,T]} \leq \|x\|_{\infty,[-r,T]}$, ce qui assure la continuité de $\mathcal{S}$. □

Lemme 6.2.5. *Notons $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}|_{\mathfrak{X}}$. Alors $\mathcal{S}_1$ est linéaire continu de $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}})$ dans $C^0([0,T],C^0([-r,0],\mathbb{R}^n))$.*

Démonstration. La restriction d'un opérateur linéaire est linéaire, donc $\mathcal{S}_1$ est linéaire. Pour sa continuité, on a, $\forall x \in \mathfrak{X}$, $\|\mathcal{S}_1\|_{\infty,[0,T]} = \|\mathcal{S}(x)\|_{\infty,[0,T]} \leq \|x\|_{\infty,[-r,T]} \leq \|x\|_{\mathfrak{X}}$ d'après un argument de la preuve du lemme précédent. Donc $\mathcal{S}_1$ est continue. □

Introduisons l'opérateur :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D} & : & \mathfrak{X} \longrightarrow C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \\ & & x \mapsto x' \end{array}$$

Il a la propriété suivante :

Lemme 6.2.6. *$\mathcal{D}$ est un opérateur linéaire continu.*

Démonstration. La linéarité de $\mathcal{D}$ provient de celle de $\dfrac{d}{dt}$.
Pour la continuité, si $x \in \mathfrak{X}$ alors $\|\mathcal{D}(x)\|_{\infty,[0,T]} = \|x'\|_{\infty,[0,T]} \leq \|x\|_{\mathfrak{X}}$. □

Introduisons l'opérateur de Nemytskii sur L :

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{N}_L & : & C^0([0,T];C^0([-r,0],\mathbb{R}^n)) \times C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \\ & & \mathcal{N}_L(u,v) := [t \mapsto L(t,u(t),v(t))].\end{array}$$

Lemme 6.2.7. *Sous les hypothèses (H), $\mathcal{N}_L$ est de classe C^1, et*

$$\begin{array}{l}\forall u, \delta u \in C^0([0,T];C^0([-r,0],\mathbb{R}^n)), \\ \forall v, \delta v \in C^0([0,T],\mathbb{R}^n),\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}D\mathcal{N}_L(u,v)\cdot(\delta u,\delta v) & := & [t \mapsto D_{(2,3)}L(t,u(t),v(t))\cdot(\delta u(t),\delta v(t))] \\ & := & [t \mapsto D_2L(t,u(t),v(t))\delta u(t) + D_3L(t,u(t),v(t))\delta v(t)]\end{array}$$

La preuve de ce lemme résulte de [13].

Introduisons la fonctionnelle

$$\begin{array}{rcl}J & : & \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & J(x) := \displaystyle\int_0^T L(t,x_t,x'(t))dt\end{array}$$

Lemme 6.2.8. *Sous les hypothèses (H), J est de classe C^1 sur $\mathfrak{X}$, et $\forall x, h \in \mathfrak{X}$,*

$$DJ(x)\cdot h = \int_0^T (D_2L(t,x_t,x'(t))\cdot h_t + D_3L(t,x_t,x'(t))\cdot h'(t))dt.$$

Démonstration. Considérons l'opérateur $\mathcal{I} : C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{I}(\psi) := \displaystyle\int_0^T \psi(t)dt$; $\mathcal{I}$ est linéaire et puisque $(\forall \psi \in C^0([0,T],\mathbb{R}^n), |\mathcal{I}(\psi)| \leq T\cdot\|\psi\|_{\infty,[0,T]})$, $\mathcal{I}$ est continue, donc de classe C^1.
Puisque les applications linéaires continues sont C^1, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{D}$ sont C^1, et on a aussi $(\mathcal{S}_1,\mathcal{D})$ de classe C^1 car ses coordonnées le sont. Notons que $J = \mathcal{I}\circ\mathcal{N}_L\circ(\mathcal{S}_1,\mathcal{D})$; ainsi J est C^1 comme composée de C^1.
Passons au calcul de la différentielle de J.

$$\begin{array}{rcl}DJ(x)\cdot h & = & DJ(\mathcal{N}_L\circ(\mathcal{S}_1,\mathcal{D})(x))\cdot(D\mathcal{N}_L(\mathcal{S}_1(x),\mathcal{D}(x))\cdot(D\mathcal{S}_1(x)\cdot h, D\mathcal{D}(x))) \\ & = & \mathcal{I}(D\mathcal{N}_L(\underline{x},x')\cdot(h,h')) \\ & = & \displaystyle\int_0^T D_{(2,3)}L(t,x_t,x'(t))\cdot(h_t,h'(t))dt \\ & = & \displaystyle\int_0^T (D_2L(t,x_t,x'(t))\cdot h_t + D_2L(t,x_t,x'(t))\cdot h'(t))dt.\end{array}$$

□

6.3 Théorème de représentation de Riesz

Comme le théorème 4.1 de l'article [16] on établit le résultat suivant :

Théorème 6.3.1. *Il existe $\Gamma : [0,T]\times[-r,0] \longrightarrow \mathbb{R}^{n*}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\forall t \in [0,T], \Gamma(t,\cdot) \in NBV([-r,0],\mathbb{R}^{n*}).0$
(ii) $\forall t \in [0,T], \|\Gamma(t,\cdot)\|_{BV} = \|D_2L(t,x_t,x'(t))\|_{\mathcal{L}}$.
(iii) $[t \mapsto \Gamma(t,\cdot)] \in C^0([0,T], NBV([-r,0],\mathbb{R}^{n*}))$.
(iv) $\forall \phi \in C^0([-r,0],\mathbb{R}^n), \forall t \in [0,T], D_2L(t,x_t,x'(t))\phi = \int_{-r}^{0} d_2\Gamma(t,\theta)\phi(\theta)$.
(v) Γ *est Lebesgue-mesurable sur* $[0,T]\times[-r,0]$.
(vi) Γ *est Riemann-intégrable sur* $[0,T]\times[-r,0]$.

On prolonge Γ en $\Gamma^1 : [0,T+r]\times[-r,0] \longrightarrow \mathbb{R}^{n*}$ en posant

$$\Gamma^1(t,\theta) := \begin{cases} \Gamma(t,\theta) \text{ si } t \in [0,T],\ \theta \in [-r,0] \\ \Gamma(T,\theta) \text{ si } t \in]T,T+r],\ \theta \in [-r,0]. \end{cases}$$

Proposition 6.3.1. *Les assertions suivantes sont vérifiées.*
(i) $\forall t \in [0,T+r],\ \Gamma^1(t,\cdot) \in NBV([-r,0],\mathbb{R}^{n*})$.
(ii) $[t \mapsto \Gamma^1(t,\cdot)] \in C^0([0,T], NBV([-r,0],\mathbb{R}^{n*}))$
(iii) Γ^1 *est Lebesgue-mesurable sur* $[0,T+r]\times[-r,0]$
(iv) Γ^1 *est Riemann-intégrable sur* $[0,T+r]\times[-r,0]$.

6.4 Une variante du lemme fondamental du calcul des variations

Proposition 6.4.1. *Sous les hypothèses* (H)*, soit* $p : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^{n*}$ *définie par :* $\forall s \in [0,T],\ p(s) := \int_s^{s+r} \Gamma(t,s-t)dt$. *Alors on a :*

(i) $\forall s \in [0,T],\ p(s) = \int_{-r}^{0} \Gamma(s-u,u)du$
(ii) $p \in C^0([0,T],\mathbb{R}^{n*})$

Démonstration. **(i)** Soit $\phi : [-r,0] \longrightarrow \mathbb{R}, \phi(u) = s-u$. On note que ϕ est C^1, $\phi(0) = s, \phi(-r) = s+r$. Alors par la formule du changement de variable, on a

$$\begin{aligned} \int_s^{s+r} \Gamma^1(t,s-t)dt &= \int_{\phi(0)}^{\phi(-r)} \Gamma^1(t,s-t)dt \\ &= \int_0^{-r} \Gamma^1(\phi(u),s-\phi(u))\cdot\phi'(u)du \\ &= \int_{-r}^{0} \Gamma^1(s-u,u)du \end{aligned}$$

(ii) Soit $s \in [0,T]$. Soit $(s_q)_q \in [0,T]^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{q\to+\infty} s_q = s$. Alors, $\forall u \in [-r,0], \Gamma^1(s_q-u,u)$ tend vers $\Gamma^1(s-u,u)$ lorsque $q \to +\infty$, en outre $\|\Gamma^1(s_q-u,u)\| \le c$ car Γ est Riemann-intégrable, donc par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a : $\lim_{q\to+\infty} \int_{-r}^{0} \Gamma^1(s_q-u,u)du = \int_{-r}^{0} \Gamma^1(s-u,u)du$ d'où $\lim_{q\to+\infty} p(s_q) = p(s)$. On conclut avec la caractérisation séquentielle de la limite.

□

Remarque 6.4.1. *On peut exprimer p en termes de Γ au lieu de Γ^1.*

1) Si $0 \leq s \leq T-r$ alors $s \leq t \leq s+r \Rightarrow -s \geq -t \geq -s-r \Rightarrow$
$0 \geq s-t \geq -r$, *donc* $p(s) = \int_s^{s+r} \Gamma(t, s-t)dt$.

2) Si $T-r < s \leq T$ alors $T < s+r$ et

$$\begin{aligned} p(s) &= \int_s^T \Gamma^1(t, s-t)dt + \int_T^{s+r} \Gamma^1(t, s-t)dt \\ &= \int_s^T \Gamma(t, s-t)dt + \int_T^{s+r} \Gamma(T, s-t)dt. \end{aligned}$$

Définissons $q : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{n*}$ en posant

$$q(s) := \begin{cases} p(s) & \text{si } 0 \leq s \leq T-r \\ \int_s^T \Gamma^1(t, s-t)dt & \text{si } T-r < s \leq T. \end{cases}$$

Proposition 6.4.2. *L'application q a les propriétés suivantes*

(i) $\forall s \in]T-r, T], \quad q(s) = \int_{s-T}^0 \Gamma^1(s-u, u)du.$

(ii) $q \in C^0([0, T], \mathbb{R}^{n*})$.

Démonstration. **(i)** Si $s \in]T-r, T]$, posons $\phi : [0, s-t] \longrightarrow \mathbb{R}, \phi(u) := s-u$, ϕ est C^1, $\phi'(u) = -1, \phi(0) = s, \phi(s-T) = T$. Alors par la formule du changement de variable, on a

$$\begin{aligned} q(s) &= \int_s^T \Gamma^1(t, s-t)dt \\ &= \int_{\phi(0)}^{\phi(s-T)} \Gamma^1(t, s-t)dt \\ &= \int_0^{s-T} \Gamma^1(\phi(u), s-\phi(u))\phi'(u)du \\ &= \int_{s-T}^0 \Gamma^1(s-u, u)du. \end{aligned}$$

(ii) On sait par la proposition 6.4.1 que $q_{|[0,T-r]} \in C^0$.
Par la proposition 2.2 [16], et par **(i)**, on sait que $q_{|[T-r,T]}$ est C^0.

$$\begin{aligned} q((T-r)-) &= q(T-r) \\ &= p(T-r) \\ &= \int_{-r}^0 \Gamma^1(s-u, u)du \end{aligned}$$

par la proposition 2.2, on a

$$\begin{aligned} q((T-r)+) &= \int_{(T-r)-T}^0 \Gamma^1(T-r-u, u)du \\ &= \int_{-r}^0 \Gamma^1(T-r-u, u)du \\ &= q(T-r). \end{aligned}$$

Donc q est continue en $T-r$, donc q est C^0 sur $[0,T]$.

□

Lemme 6.4.1. *Soit $h \in \mathcal{V}$. Alors on a,*

$$\forall s \in [0,T], \quad \int_0^T (\int_{t-r}^t \Gamma^1(t,s-t)h'(s)ds)dt = \int_0^T q(s)h'(s)ds.$$

Démonstration. Notons $f(t,s) := \Gamma^1(t,s-t)h'(s)$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[0,T+r] \times [-r,0]$ donc y est Lebesgue-intégrable. Soit $A := \{(t,s) : 0 \leq t \leq T, t-r \leq s \leq t\}$. Par le théorème de Tonelli on a :

$$\forall s \in [0,T], \int_0^T (\int_{t-r}^t \Gamma^1(t,s-t)h'(s)ds)dt = \int_A f(t,s)dsdt. \tag{6.4.1}$$

Nous découpons A en trois parties :

$$\begin{aligned} I &:= \{(t,s) : T-r \leq s \leq T,\ s \leq t \leq T\} \\ II &:= \{(t,s) : 0 \leq s \leq T-r,\ s \leq t \leq s+r\} \\ III &:= \{(t,s) : -r \leq s \leq 0,\ 0 \leq t \leq s+r\} \end{aligned}$$

— On a $A = I \cup II \cup III$

— $I \cap II = [(T-r,T-r),(T,T-r)]$ qui est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^2$.
— $I \cap II = \emptyset$.
— $II \cap III = [(0,0),(r,0)]$ qui est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^2$, donc on a :

$$\begin{aligned} \int_A f(t,s)dsdt &= \int_I f(t,s)dsdt + \int_{II} f(t,s)dsdt + \int_{III} f(t,s)dsdt \\ &\quad - \int_{I\cap II} f(t,s)dsdt - \int_{II\cap III} f(t,s)dsdt - \int_{I\cap III} f(s,t)dsdt \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\int_A f(t,s)dsdt = \int_I f(t,s)dsdt + \int_{II} f(t,s)dsdt + \int_{III} f(t,s)dsdt. \tag{6.4.2}$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned} \int_I f(t,s)dsdt &= \int_{T-r}^T (\int_s^T \Gamma^1(t,s-t)dt)h'(s)ds \\ &= \int_0^{T-r} q(s)h'(s)ds \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

d'où

$$\int_I f(t,s)dsdt = \int_{T-r}^T q(s)h'(s)ds. \tag{6.4.4}$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned} \int_{II} f(t,s)dsdt &= \int_0^{T-r} (\int_s^{s+r} \Gamma^1(t,s-t)dt)h'(s)ds \\ &= \int_0^{T-r} p(s)h'(s)ds \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{II} f(t,s)dsdt = \int_0^{T-r} q(s)h'(s)ds. \tag{6.4.5}$$

En utilisant le théorème de Fubini

$$\int_{III} f(t,s)dsdt = \int_{-r}^{0}(\int_0^{s+r} \Gamma^1(t,s-t)dt)h'(s)ds = 0$$

d'où

$$\int_{III} f(t,s)dsdt = 0. \tag{6.4.6}$$

En utilisant (6.4.2), (6.4.4), (6.4.5), (6.4.6) dans (6.4.1) on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T(\int_{t-r}^t \Gamma^1(t,s-t)h'(s)ds)dt &= \int_{T-r}^T q(s)h'(s)ds + \int_0^{T-r} q(s)h'(s)ds + 0\\ &= \int_0^T q(s)h'(s)ds.\end{aligned}$$

□

6.5 Condition d'Euler-Lagrange

Lemme 6.5.1. *Soit $x \in \mathcal{A}, h \in \mathcal{V}$. Alors on a :*

$$\int_0^T D_2L(t,x_t,x'(t))dt = -\int_0^{T-r}\Gamma^1(s+r,-r)h(s)ds - \int_0^T q(s)h'(s)ds.$$

Démonstration. Avec la proposition 3.2 de [16], on a

$$\begin{aligned}\int_{-r}^0 d_2\Gamma^1(t,\theta)h(t+\theta) &= \Gamma^1(t,0+)h(t) - \Gamma^1(t,-r)h(t-r)\\ &\quad - \int_{-r}^0 \Gamma^1(t,\theta)h'(t+\theta)d\theta,\end{aligned}$$

et $\Gamma^1(t,0+) = 0$ entraîne que :

$$\int_{-r}^0 d_2\Gamma^1(t,\theta)h(t+\theta) = -\Gamma^1(t,-r)h(t-r) - \int_{-r}^0 \Gamma^1(t,\theta)h'(t+\theta)d\theta. \tag{6.5.1}$$

Donc $\int_0^T D_2L(t,x_t,x'(t))h_t dt = \int_0^T(\int_{-r}^0 d_2\Gamma^1(t,\theta)h'(t+\theta))dt$ et avec (6.5.1), on a

$$\int_0^T D_2L(t,x_t,x'(t))h_t = -\int_0^T \Gamma^1(t,-r)h(t-r)dt - \int_0^T(\int_{-r}^0 \Gamma^1(t,\theta)h'(t+\theta)d\theta)dt. \tag{6.5.2}$$

Soit $\phi : [-r, T-r] \longrightarrow \mathbb{R}, \phi(u) := u + r$, ϕ est C^1, $\phi'(u) = 1, \phi(-r) = 0, \phi(T-r) = T$, donc par la formule du changement de variable on a :

$$\begin{aligned}\int_0^T \Gamma^1(t,-r)h(t-r)dt &= \int_{\phi(-r)}^{\phi(T-r)} \Gamma^1(t,-r)h(t-r)dt\\ &= \int_{-r}^{T-r} \Gamma^1(\phi(u),-r)h(\phi(u)-r)\phi'(u)du\\ &= \int_{-r}^{T-r} \Gamma^1(u+r,-r)h(u)du\end{aligned}$$

comme $h_{|[-r,0]} = 0$, on a

$$\int_0^T \Gamma^1(t,-r)h(t-r)dt = \int_0^{T-r} \Gamma^1(u+r,-r)h(u)du. \tag{6.5.3}$$

Soit $\psi : [t-r,t] \longrightarrow \mathbb{R}, \psi(u) := u-t$, ψ est C^1, $\psi'(u) = 1, \psi(t) = 0, \psi(t-r) = -r$, et par la formule du changement de variable, on a

$$\begin{aligned}\int_{-r}^0 \Gamma^1(t,\theta)h'(t+\theta)d\theta &= \int_{\psi(t-r)}^{\psi(t)} \Gamma^1(t,\theta)h'(t+\theta)d\theta \\ &= \int_{t-r}^{t} \Gamma^1(t,\psi(u))h'(t+\psi(u))\psi'(u)du \\ &= \int_{t-r}^{t} \Gamma^1(t,u-t)h'(u)du\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{-r}^0 \Gamma^1(t,\theta)h'(t+\theta)d\theta = \int_{t-r}^{t} \Gamma^1(t,u-t)h'(u)du. \tag{6.5.4}$$

En utilisant les équations (6.5.3) et (6.5.4) dans (6.5.2), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^T D_2L(t,x_t,x'(t))h_t dt &= -\int_0^{T-r} \Gamma^1(u+r,-r)h(u)du \\ &\quad -\int_0^T (\int_{t-r}^{t} \Gamma^1(t,u-t)h'(u)du)dt,\end{aligned}$$

et on conclut avec le lemme 6.4.1. □

Lemme 6.5.2. *Soit $x \in \mathcal{A}$ qui réalise un minimum local de J sur $\mathcal{A}$. Alors :*

$$\forall h \in \mathcal{V},\ DJ(x)h = 0.$$

Démonstration. $\exists r \in]0,+\infty[$ tel que $\forall y \in \mathcal{A} \cap B_{\mathfrak{X}}(x,r)$, $J(y) \geq J(x)$ où $B_{\mathfrak{X}}(x,r) = \{y \in \mathfrak{X} : \|y-x\|_{\mathfrak{X}} < r\}$.
Définissons $K : \mathcal{V} \cap B_{\mathfrak{X}}(0,r) \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $K(h) := J(x+h)$. $\forall h \in \mathcal{V} \cap B_{\mathfrak{X}}(0,r)$ on a $x+h \in \mathcal{A} \cap B_{\mathfrak{X}}(x,r)$, donc : $\forall h \in \mathcal{V} \cap B_{\mathfrak{X}}(0,r), K(h) \geq K(0)$. Puisque K est C^1 comme composée de C^1 et $\mathcal{V} \cap B_{\mathfrak{X}}(0,r)$ est un ouvert de $\mathcal{V}$, on en déduit : $DK(0) = 0$ (c.-à-d. $\forall h \in \mathcal{V}, DK(0)\cdot h = 0$). Or $DK(0) = DJ(x)$; d'où la conclusion. □

Nous allons rappeler un résultat très important prouvé par Paul David Gustav du Bois-Reymond.

Rappel 6.5.1. *Soit $\alpha < \beta$ dans $\mathbb{R}$, $a \in C^0([\alpha,\beta],\mathbb{R}^{n*}), b \in C^0([\alpha,\beta],\mathbb{R}^{n*})$. On suppose que :*

$$\forall h \in C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R}^n) \text{ tel que } h(\alpha) = h(\beta) = 0, \qquad \int_\alpha^\beta (a(t)h(t) + b(t)h'(t))dt = 0.$$

Alors

$$b \in C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R}^{n*}) \text{ et } b' = a.$$

Lemme 6.5.3. *Soit $a, b \in C^0([\alpha,\beta],\mathbb{R}^{n*})$ tel que $\forall \phi \in C^1_c([\alpha,\beta],\mathbb{R}^n) := \{\phi \in C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R}^n) : supp\,\phi \subset]\alpha,\beta[\}$, $\int_\alpha^\beta (a(t)\phi(t) + b(t)\phi'(t))dt = 0$. Alors $\forall h \in C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R}^n)$ tel que $h(\alpha) = h(\beta) = 0$, on a :*

$$\int_\alpha^\beta (a(t)h(t) + b(t)h'(t))dt = 0.$$

Démonstration. $C^1_c([\alpha,\beta],\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1_0(\alpha,\beta,\mathbb{R}^n)$, cf.[17], Remarque 14, p.133.
$\forall \phi \in H^1_0(\alpha,\beta;\mathbb{R}^n), |\int_\alpha^\beta (a(t)h(t) + b(t)\phi'(t))dt| \leq \|a\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2} + \|b\|_{L^2}\|\phi'\|_{L^2}$, l'opérateur linéaire $[\phi \mapsto \int_\alpha^\beta (a(t)\phi(t) + b(t)\phi'(t))dt]$ est linéaire continu sur $H^1_0(\alpha,\beta;\mathbb{R}^n)$, et donc avec l'hypothèse, on a :

$$\forall \phi \in H^1_0(\alpha,\beta;\mathbb{R}^n),\ \int_\alpha^\beta (a(t)\phi(t) + b(t)\phi'(t))dt = 0 \tag{6.5.5}$$

$\forall \phi \in C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R}^n)$, $\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t \phi'(s)ds$ alors ϕ est absolument continue, ϕ, ϕ' sont continues, ainsi $\phi, \phi' \in L^2([\alpha,\beta],\mathbb{R}^n)$, enfin :

$$C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R}^n) \subset H^1(\alpha,\beta;\mathbb{R}^n). \tag{6.5.6}$$

Introduisons $C^1_z([\alpha,\beta],\mathbb{R}^n) := \{\phi \in C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R}^n) : \phi(\alpha) = \phi(\beta) = 0\}$. Soit $\phi \in C^1_z([\alpha,\beta],\mathbb{R}^n)$. Alors par l'équation (6.5.6) on a : $\phi \in H^1(\alpha,\beta;\mathbb{R}^n)$. D'après le théorème VIII.11 p.133 de [17], puisque $\phi(\alpha) = \phi(\beta) = 0$, on a $\phi \in H^1_0(\alpha,\beta;\mathbb{R}^n)$.
Ceci prouve :

$$C^1_z([\alpha,\beta],\mathbb{R}^n) \subset H^1_0(\alpha,\beta;\mathbb{R}^n). \tag{6.5.7}$$

De l'équation (6.5.5), avec la relation 6.5.7, on obtient la conclusion annoncée. □

Théorème 6.5.1. *Soit $x \in \mathcal{A}$ qui réalise un minimum local de J sur $\mathcal{A}$. On suppose (H) vérifiée. Rappelons que*

$$q(t) := \begin{cases} \int_t^{t+r} \Gamma^1(u, t-u)du \ \ si\ \ t \in [0, T-r] \\ \int_t^T \Gamma^1(u, t-u)du \ \ si\ \ t \in]T-r, T]. \end{cases}$$

Alors $[t \mapsto D_3L(t, x_t, x'(t)) - q(t)]$ est de classe C^1 sur $[0, T-r]$ et est de classe C^1 sur $[T-r, T]$, et on a

(i) $\forall t \in [0, T-r]$, $\quad \frac{d}{dt}[D_3L(t, x_t, x'(t)) - q(t)] = -\Gamma^1(t+r, -r)$

(ii) $\forall t \in]T-r, T]$, $\quad \frac{d}{dt}[D_3L(t, x_t, x'(t)) - q(t)] = 0.$

Démonstration. Pour alléger les écritures nous noterons, quand $k \in \{2,3\}$, $D_kL[t] := D_kL(t, x_t, x'(t))$. D'après le lemme 6.5.2, on a : $\forall h \in \mathcal{V}, DJ(x)h = 0$, et d'après le lemme 6.2.8, on a :

$$\forall h \in \mathcal{V}, \int_0^T D_2L[t]h_t dt + \int_0^T D_3L[t]h'(t)dt = 0.$$

en utilisant le lemme 6.5.1, on arrive à :

$$\forall h \in \mathcal{V}, \int_0^{T-r} -\Gamma^1(t+r,-r)h(t)dt + \int_0^T (D_3L[t]-q(t))h'(t)dt = 0. \tag{6.5.8}$$

Soit $\phi \in C_c^1([0,T-r],\mathbb{R}^n)$, alors en prolongeant ϕ en $\tilde{\phi}$ par 0, on obtient $\tilde{\phi} \in C^1([-r,T],\mathbb{R}^n)$ avec $\tilde{\phi}_0 = 0$ et $\tilde{\phi}(T) = 0$, donc $\tilde{\phi} \in \mathcal{V}$. Puisque $supp\,\tilde{\phi} \subset]0,T-r[$, on en déduit de l'équation (6.5.8) : $\int_0^{T-r} (-\Gamma^1(t+r,-r)\tilde{\phi}(t) + (D_3L[t]-q(t))\tilde{\phi}'(t))dt = 0$ donc :

$$\forall \phi \in C_c^1([0,T-r],\mathbb{R}^n), \int_0^{T-r} (-\Gamma^1(t+r,-r)\phi(t) + (D_3L[t]-q(t))\phi'(t))dt = 0. \tag{6.5.9}$$

Alors avec le lemme 6.5.3, on obtient :

$$\begin{array}{l} \forall k \in C^1([0,T-r],\mathbb{R}^n) \text{ tel que } k(0) = k(T-r) = 0, \\ \int_0^{T-r} (-\Gamma^1(t+r,-r)k(t) + (D_3L[t]-q(t))k'(t))dt = 0 \end{array} \tag{6.5.10}$$

Soit $\psi \in C_c^1([T-r,T];\mathbb{R}^n)$, alors en prolongeant ψ à $\tilde{\psi}$ par 0, on obtient $\tilde{\psi} \in C^1([-r,T],\mathbb{R}^n)$ avec $\tilde{\psi}_0 = 0$ et $\tilde{\psi}(T) = 0$; et puisque $supp\,\tilde{\psi} \subset]T-r,T[$ on obtient de l'équation (6.5.8) :

$$\int_0^{T-r} -\Gamma^1(t+r,-r)\tilde{\psi}(t)dt + \int_0^T (d_3L[t]-q(t))\tilde{\psi}'(t)dt = 0$$

d'où : $0 + \int_0^T (D_3L[t]-q(t))\tilde{\psi}'(t)dt = 0$. Donc on a prouvé :

$$\forall \psi \in C_c^1([T-r,T];\mathbb{R}^n), \int_{T-r}^T (D_3L[t]-q(t))\tilde{\psi}'(t)dt = 0. \tag{6.5.11}$$

Alors avec le lemme 6.5.3, on obtient :

$$\begin{array}{l} \forall l \in C_c^1([T-r,T];\mathbb{R}^n) \text{ tel que } l(T-r) = l(T) = 0, \\ \int_{T-r}^T (D_3L[t]-q(t))l'(t)dt = 0. \end{array} \tag{6.5.12}$$

Alors on peut appliquer le lemme de Dubois-Reymond à l'équation (6.5.12) et obtenir

$$\begin{array}{l} [t \mapsto (D_3L[t]-q(t))] \in C^1([T-r,T],\mathbb{R}^{n*}) \\ \text{et}, \forall t \in [T-r,T], \frac{d}{dt}(D_3L[t]-q(t)) = 0 \end{array} \tag{6.5.13}$$

Avec les équations (6.5.11) et (6.5.13) le théorème est démontré. □

Remarque 6.5.1. *On peut écrire* $q(t) = \int_t^{\min\{t+r,T\}} \Gamma(u,t-u)du$, *ce qui permet d'utiliser seulement la représentation* Γ *au lieu de son prolongement* Γ^1.

Bibliographie

[1] M. Adimy, *Integrated semigroups and delay differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **177** (1993), pp. 125–134.

[2] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Science Publications, New York, 2000.

[3] J.-P. Aubin, *Abstract applied analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1977.

[4] M. Ayachi, *Variational methos and almost periodic solutions of second order functional differential equations with infinite delay*, Communications in Mathematical Analysis, **9** (2010), pp. 15–31.

[5] M. Ayachi and J. Blot, *Variational method for almost periodic solutions of a class of neutral delay equations*, Abstract and Applied Analysis, article ID 153285, 2008, p. 13 pages.

[6] H. T. Banks, *A maximum principle for optimal control problems with functional differential systems*, Bulletin of American Mathematical Society, **5** (1969), pp. p.158–161.

[7] ——, *Representations for solutions of linear functional differential equations*, Journal of Differential Equations, **5** (1969), pp. p.399–409.

[8] S. Benzoni-Gavage, *VB(ℝ)*, http ://math.univ-lyon1.fr/ benzoni/vb.pdf.

[9] M. S. Berger, *Nonlinearity and functional analysis*, Academic Press, New York, 1977.

[10] J. Blot, *On the almost everywhere continuity*, ArXiv : 1411.3582v1[math.FA] 13 November 2014.

[11] ——, *On the multiplier rules*, ArXiv : 1409.2087v1 [math.OC] 7 September 2014.

[12] ——, *Cours de commande optimale*, polycopié Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, 2007.

[13] J. Blot, P. Cieutat, G. M. N'Guérékata, and D. Pennequin, *Superposition operators between various almost periodic function spaces and applications*, Communication in Mathematical Analysis, **6** (2009), pp. 42–70.

[14] J. Blot and B. Crettez, *On the smoothness of optimal paths*, Decision in Economics and Finance, **27** (2004), pp. 1–34.

[15] J. Blot and N. Hayek, *Infinite-horizon optimal control in the discrete-time framework*, Springer-Verlag, New York, 2014.

[16] J. Blot and M. I. Koné, *Resolvent of nonautonomous linear delay functional differential equations*, Nonautonomous dynamical systems, **2**, pp. 77–101.

[17] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[18] R. F. Brown, *A topological introduction to nonlinear analysis*, Birkhauser, Boston, 1993.

[19] H. Cartan, *Calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1967.

[20] L. Chambadal and J.-L. Ovaert, *Cours de mathématiques, tome 2 : Analyse II*, Gauthier-Villars, Paris, 1972.

[21] G. Choquet, *Cours d'analyse, tome 2 : Topologie*, Masson et Cie, Paris, 1973.

[22] F. Colonius, *Optimal periodic control*, Lectures Notes in Mathematics, vol 1313, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[23] J. Dieudonné, *Élements d'analyse, tome 1 : Fondements de l'analyse réelle*, Édition française, Gauthiers-Villars, Paris, 1969.

[24] L. D. Elsgolc, *Qualitative methods in mathematical analysis*, Translation of mathematical monograph, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (1964).

[25] L. C. Evans and F. R. Gariepy, *Measure theory and fine properties functions*, CRC press, Studies in Mathematics, Boca Raton, 1992.

[26] W. Fleming, *Functions of several variables*, Springer-Verlag, New york, 1977.

[27] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed point theory*, Springer-Verlag, New york, 2003.

[28] J. K. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[29] J. K. Hale and S. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[30] H. Halkin and L. W. Neustad, *General necessary conditions for optimization problems*, Proceeding of National Academy of Science, **56** (1966), pp. 1066–1071.

[31] H. Helson, *Harmonic analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachussetts, 1983.

[32] Y. Hino, S. Murakami, and T. Naito, *Functional differential equations with infinite delay*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[33] D. K. Hughes, *Variational and optimal control problems with delayed argument*, Journal of Optimization Theory and Applications, **2** (1968).

[34] L. V. Kantorovitch and G. P. Akilov, *Analyse fonctionnelle, tome 2 : Equations fonctionnelles*, vol. 1, édition française, MIR, Moscou, 1977.

[35] ——, *Analyse fonctionnelle, tome 1 : Opérateurs et fonctionnelles linéaires*, traduit du russe, éditions MIR, Moscou, 1981.

[36] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover Publication, New York, 1970.

[37] ——, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, French edition, MIR, Moscow, 1974.

[38] S. Lang, *Real and functional analysis*, Third edition, Springer-Verlag, New York, 1983.

[39] X. J. Li and S. N. Chow, *Maximum principle of optimal control for functional differential systems*, Journal of Optimization Theory and Applications, **54** (1987), pp. 335–.

[40] L. Lusternik and S. Sobolev, *Elements of functional analysis*, Frederick Ungar publishing company, New York, 1961.

[41] C.-M. Marle, *Mesures et probabilités*, Hermann, Paris, 1974.

[42] N. H. McClamroch, *A general adjoint relation for functional differential and Volterra integral equations with application to control*, Journal of Optimization Theory and Applications, **7** (1971), pp. 346–356.

[43] P. Michel, *Une démonstration élémentaire du principe du maximum de Pontriaguine*, Bulletin de Mathématiques Economiques, 14 (1977), pp. 9–23.

[44] ——, *Cours de mathématiques pour économistes*, Economica, deuxième édition, Paris, 1989.

[45] T. Naito, *Adjoint equations of autonomous linear functional differential equations with infinite retardations*, Tôhoku Mathematical Journal, **28** (1976), pp. 135–143.

[46] L. Niremberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, Courant Insitute of Mathematical Sciences, New York University, New york, 1974.

[47] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanski, R. V. Gamkrelidge, and E. F. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*, Interscience Publishers, New York, 1962.

[48] E. Ramis, C. Deschamps, and J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales ; tome 3 : topologie et éléments d'analyse*, Masson, Paris, troisième édition ed., 1991.

[49] ——, *Cours de Mathématiques spéciales ; tome 4 : séries et équations différentielles*, Masson, Paris, troisième édition ed., 1991.

[50] L. D. Sabbagh, *Variational problems with lags*, Journal of Optimization Theory and Applications, **3** (1969).

[51] L. Schwartz, *Cours d'analyse*, Hermann, Paris, 1967.

[52] D. R. Smart, *Fixed point theorems*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1974.

[53] K. Vo Khac, *Mesure, intégration, convolution et analyse de Fourier*, Ellipses, Paris, 1984.

[54] J. Warga, *Optimal control of differential and functional equations*, Academic Press, New York, 1972.