



HAL
open science

Étude asymptotique des processus de branchement sur-critiques en environnement aléatoire

Éric Miqueu

► **To cite this version:**

Éric Miqueu. Étude asymptotique des processus de branchement sur-critiques en environnement aléatoire. Statistiques [math.ST]. Université de Bretagne Sud, 2016. Français. NNT : 2016LORIS426 . tel-01501867

HAL Id: tel-01501867

<https://theses.hal.science/tel-01501867>

Submitted on 4 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE / UNIVERSITE DE BRETAGNE-SUD
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE BRETAGNE-SUD

Mention : Mathématiques
**Ecole doctorale: Santé, Information, Communication,
Mathématiques, Matière**

Présentée par Eric Miqueu

Préparée à l'unité mixte de recherche : UMR CNRS 6205

Etablissement de rattachement : Université de Bretagne Sud

Nom développé de l'unité : Laboratoire de Mathématiques de
Bretagne Atlantique

Etude asymptotique des processus de branchement sur- critiques en environnement aléatoire

Thèse soutenue à Vannes le 9 décembre 2016

devant le jury composé de :

Vincent BANSAYE

Professeur chargé de cours à l'Ecole Polytechnique / Examineur

Julien BERESTYCKI

Professeur à l'Université d'Oxford / Rapporteur

Loïc CHAUMONT

Professeur à l'Université d'Angers / Examineur

Brigitte CHAUVIN

Professeur à l'Université Paris-Saclay / Examinatrice

Elena DYAKONOVA

Directeur de recherche à l'Institut Mathématique Steklov / Rapporteur

Ion GRAMA

Professeur à l'Université de Bretagne Sud / Directeur de thèse

Yves GUIVARC'H

Professeur à l'Université de Rennes 1 / Examineur

Quansheng LIU

Professeur à l'Université de Bretagne Sud / Directeur de thèse

Résumé

L'objet de cette thèse concerne l'étude des processus de branchement en environnement aléatoire, notés (Z_n) , qui sont une généralisation du processus de Galton-Watson, avec une loi de reproduction choisie aléatoirement et de manière indépendante et identiquement distribuée suivant les générations. Nous considérons le cas d'un processus sur-critique, avec la condition que chaque individu donne naissance à au moins un enfant.

Le premier chapitre est consacré à l'étude de l'écart relatif et absolu entre le processus $\log Z_n$ normalisé et la loi normale. Nous établissons un résultat de type Berry-Esseen ainsi qu'un développement pour des déviations de type Cramér, généralisant ainsi le théorème central limite et le principe des déviations modérées pour $\log Z_n$ établis précédemment dans la littérature.

Le second chapitre étudie l'asymptotique de la distribution du processus Z_n ainsi que le moment harmonique critique de la limite W de la population normalisée $W_n = Z_n/\mathbb{E}_\xi Z_n$. Nous établissons un équivalent de l'asymptotique de la distribution du processus Z_n et donnons une caractérisation des constantes via une équation fonctionnelle similaire au cas du processus de Galton-Watson. Dans le cas des processus de branchement en environnement aléatoire, les résultats améliorent l'équivalent asymptotique de la distribution de Z_n établi dans des travaux antérieurs sous normalisation logarithmique, sous la condition que chaque individu donne naissance à au moins un individu. Nous déterminons aussi la valeur critique pour l'existence du moment harmonique de W sous des conditions simples d'existence de moments, qui sont bien plus faibles que les hypothèses imposées dans la littérature, et généralisons le résultat à $Z_0 = k$ individus initiaux.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'asymptotique des moments harmoniques d'ordre $r > 0$ de Z_n . Nous établissons un équivalent et donnons une expression des constantes. Le résultat met en évidence un phénomène de transition de phase, relié aux transitions de phase des grandes déviations inférieures du processus (Z_n) . En application de ce résultat, nous établissons un résultat de grandes déviations inférieures pour le processus (Z_n) sous des hypothèses plus faibles que celles imposées dans des travaux précédents. Nous améliorons également la vitesse de convergence dans un théorème central limite vérifié par $W_n - W$, et déterminons l'asymptotique de la probabilité de grandes déviations pour le ratio Z_{n+1}/Z_n .

Abstract

The purpose of this Ph.D. thesis is the study of branching processes in a random environment, say (Z_n) , which are a generalization of the Galton-Watson process, with the reproduction law chosen randomly in each generation in an i.i.d. manner. We consider the case of a supercritical process, assuming the condition that each individual gives birth to at least one child.

The first part of this work is devoted to the study of the relative and absolute distance between the normalized process $\log Z_n$ and the normal law. We show a Berry-Esseen bound and establish a Cramér type large deviation expansion, which generalize the central limit theorem and the moderate deviation principle established for $\log Z_n$ in previous studies.

In the second chapter we study the asymptotic of the distribution of Z_n , and the critical value for the existence of harmonic moments of the limit variable W of the normalized population size $W_n = Z_n/\mathbb{E}_\xi Z_n$. We give an equivalent of the asymptotic distribution of Z_n and characterize the constants by a functional relation which is similar to that obtained for a Galton-Watson process. For a branching process in a random environment, our result generalizes the equivalent of the asymptotic distribution of Z_n established in a previous work in a log-scale, under the condition that each individual gives birth to at least one child. We also characterize the critical value for the existence of harmonic moments of the limit variable W under weaker conditions than in previous studies and generalize this result for processes starting with $Z_0 = k$ initial individuals.

The third chapter is devoted to the study of the asymptotic of the harmonic moments of order $r > 0$ of Z_n . We show the exact decay rate of the quantity $\mathbb{E}[Z_n^r | Z_0 = k]$ and give an expression of the limiting constants. The result reveals a phase transition phenomenon which is linked to the phase transitions in the lower large deviations established in earlier studies. As an application, we improve a lower large deviation result for the process (Z_n) under weaker hypothesis than those stated in the literature. Moreover, we also improve the rate of convergence in a central limit theorem for $W - W_n$ and give the asymptotic of the large deviation for the ratio Z_{n+1}/Z_n .

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mes directeurs de thèse, Ion Grama et Quansheng Liu. Ils ont été des directeurs présents qui m'ont accompagné et formé durant toutes mes années de thèse. Je leur dois beaucoup. J'ai énormément appris à leur côté. Ion, votre dynamisme et votre capacité à travailler sans relâche et envisager sans cesse de nouvelles idées m'ont énormément apporté dans les moments où je n'arrivais pas à faire face, ne sachant plus quoi faire dans les preuves. Quansheng, votre faculté à clarifier les preuves et à percevoir immédiatement les points critiques d'une démonstration m'ont été d'une aide précieuse dans la rédaction rigoureuse des articles et pour corriger les erreurs. Je vous remercie également de m'avoir fait confiance et permis d'explorer mes propres pistes de recherche, ainsi que de m'avoir toujours soutenu. Je tiens également à remercier vivement Elena Dyakonova et Julien Berestycki d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Leur avis compte beaucoup pour moi et je les en remercie. Merci aussi à Vincent Bansaye, Julien Berestycki, Loïc Chaumont, Brigitte Chauvin et Yves Guivarc'h, d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Avoir tous ces spécialistes des processus de branchement le jour de ma soutenance, dont les articles de certains d'entre eux m'ont beaucoup inspiré dans mes recherches, est pour moi un plaisir immense.

Je remercie également toute l'équipe d'enseignants-chercheurs du LMBA de Brest et Vannes. J'ai vécu mes années de thèse dans un cadre de travail extrêmement dynamique et convivial, qui m'a énormément apporté d'un point de vue mathématique et dans lequel je me suis épanoui. J'ai notamment beaucoup apprécié les discussions chaleureuses de la salle à café, les parties d'échecs, la minute de la jongle... et les baignades à Conleau après le boulot ! Je tiens aussi à remercier ma hiérarchie, des directeurs du laboratoire Gilles Durrieu et Benoît Saussol, au directeur de l'UFR Frédéric Bedel, pour m'avoir toujours soutenu et conseillé dans les moments où j'en ai eu besoin. Je remercie aussi tout le personnel administratif, Véronique Vellet notamment (que j'ai souvent pu embêter avec des ordres de mission de dernière minute), pour sa gentillesse et son travail phénoménal dans la logistique du laboratoire. Merci aussi à tous les doctorants du LMBA (les jeunes et les moins jeunes !), pour la bonne ambiance, la chambre, les gâteaux d'anniversaires, les nems, et le choc des cultures ! Désolé pour ceux qui voulaient être cités, mais vous êtes hélas trop nombreux pour ça... de toute façon, je n'ai plus le temps d'apprendre à écrire les caractères arabes, chinois et vietnamiens en \LaTeX ! ;) Merci également aux probabilistes de Rennes et

d'ailleurs, avec qui j'ai passé de supers moments dans les colloques (et les repas de conf').

J'ai également adoré donner des cours à l'université. Merci à l'école doctorale SICMA de m'avoir permis d'effectuer trois années de missions d'enseignement, et merci à tous les enseignants-chercheurs du laboratoire de m'avoir chargé d'enseignements riches et variés, de la Licence au Master, avec beaucoup de liberté pédagogique (en monitorat et durant mes années d'ATER). Merci également à tous mes petits étudiants! Un prof sans ses élèves, c'est ~~les vacances~~ triste... merci donc à tous les groupes d'élèves à qui j'ai pu enseigner. J'espère que je continuerai à avoir des classes comme vous. Merci également à tous les professeurs et enseignants-chercheurs que j'ai pu avoir au cours de ma scolarité ou au travers de mes stages de recherche, pour leur disponibilité, et pour m'avoir donné le goût des mathématiques, de l'enseignement et de la recherche.

Merci aussi à celles et ceux qui sont venus me voir lors de ma soutenance! ou simplement boire un petit verre au pot de thèse (vendéen!).

Merci également à tous mes amis, d'être présents à mes côtés. La liste est là encore trop longue pour que je puisse tous vous citer, mais vous vous reconnaitrez! Merci aux Daddy cop's (sacré bande de jeunes), au groupe des avengers (pôpôlopôpôpô), aux cousins bramards (hééé), au groupe du tournevis (complètement marteau celles-là), aux dompierois (yéyé), aux beignonnais (ouiouioui), aux futurs mariés, au biologiste et au rugbyman, aux réunionnais(es), et au groupe de Roland Garros (Vamooooo)!

Merci également à toute ma famille et belle-famille, pour tout ce que vous m'apportez au quotidien. Merci à mon papi et ma mamie, ma tatie, ma maman, mon papa, ma soeur, et mon "petit" frère! :) Je n'aurais pas pu devenir l'homme que je suis sans l'amour inconditionnel que vous m'avez donné. Toute ma reconnaissance et mes remerciements vont au delà des mots.

J'ai également une pensée pour celles et ceux qui ne sont plus là. Je les remercie de tout coeur pour tout ce qu'ils m'ont apporté dans ma vie. De là où ils sont, j'espère qu'ils sont fiers de moi, et qu'ils verront la soutenance qu'ils auraient tant voulu voir.

Enfin, merci à toi, Lucie, pour ton Amour, et sans qui tout ceci n'aurait aucun sens.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Remerciements	vii
1 Introduction	1
1.1 Remarques historiques	1
1.2 Description du modèle	2
1.3 Etat de l'art - présentation des résultats récents	6
1.3.1 Cas critique et sous-critique	7
1.3.2 Cas sur-critique	10
1.4 Présentation des résultats de la thèse	16
1.4.1 Borne de Berry-Esseen et grandes déviations de type Cramér .	16
1.4.2 Asymptotique de la loi de Z_n et moment harmonique de W . .	19
1.4.3 Asymptotique des moments harmoniques de Z_n et grandes déviations	23
1.4.4 Enoncé des théorèmes et corollaires	30
2 Borne de Berry-Esseen et grandes déviations de type Cramér	35
2.1 Introduction and main results	36
2.2 The Berry-Essen bound for $\log Z_n$	40
2.2.1 Auxiliary results	41
2.2.2 Proof of Theorem 2.1.1	46
2.3 Harmonic moments of W	48
2.3.1 Existence of harmonic moments under \mathbb{P}	49
2.3.2 Existence of harmonic moments under \mathbb{P}_λ	50
2.4 Proof of Cramér's large deviation expansion	53
2.4.1 Auxiliary results	53
2.4.2 Proof of Theorem 2.1.3	57
2.5 Appendix 1 : Bound for the Wasserstein distance using Stein's method	60

2.5.1	Background on Stein's method	60
2.5.2	Bound for the Wasserstein distance	61
2.5.3	Proof of Theorem 2.5.5	62
2.6	Appendix 2 : Proof of Lemma 2.4.3	64
3	Asymptotique de la distribution de Z_n et moment harmonique critique de W	67
3.1	Introduction	68
3.2	Main results	69
3.3	Harmonic moments of W	74
3.4	Asymptotic of the distribution of Z_n	79
4	Moments harmoniques de Z_n et grandes déviations	85
4.1	Introduction	87
4.2	Main results	90
4.3	Proof of main theorems	99
4.3.1	Auxiliary results	100
4.3.2	Proof of Theorem 4.2.1	101
4.3.3	Proof of Theorem 4.2.3	104
4.3.4	Proof of Proposition 4.2.2 for the Galton-Watson case	105
4.3.5	Proof of Proposition 4.2.2	106
4.4	Applications	108
4.4.1	Central Limit Theorem for $W - W_n$	108
4.4.2	Large deviation rate for R_n	109

Lorsque tu désires obtenir quelque chose, tout l'univers conspire à te permettre de réaliser ton désir.

Paulo Coelho, *L'alchimiste*

Introduction

1.1 Remarques historiques

Les processus de branchement en environnement aléatoire (PBEA en abrégé) sont une généralisation du processus de Galton-Watson, où la loi de reproduction est choisie aléatoirement parmi un ensemble de lois, et de manière i.i.d. suivant les générations. Ils ont été introduits pour la première fois dans Smith et Wilkinson [48] afin de modéliser la croissance de populations soumises à un environnement. Ces processus sont encore largement étudiés aujourd’hui, d’une part pour leur intérêt et leurs applications en biologie, mais aussi car leur étude mathématique est extrêmement riche, et combine à la fois des aspects sur les processus de branchement et sur la théorie des fluctuations pour des marches aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Les résultats de base sur les processus de branchement en environnement aléatoire sont disponibles dans Athreya et Karlin [3, 4] et Tanny [49, 50]. Dans les régimes critiques et sous-critiques, la population s’éteint presque sûrement et les recherches récentes se sont focalisées sur l’asymptotique de la probabilité de survie ainsi que sur des théorèmes de convergence fonctionnels. Les publications sont nombreuses, mais on peut se référer entre autre aux récents travaux de Afanasyev, Böinghoff, Kersting, Vatutin [1, 2], Bansaye [9], Bansaye et Vatutin [14], Böinghoff et Kersting [21], Böinghoff, Dyakonova, Kersting et Vatutin [19], Dyakonova et Vatutin [54], Vatutin [52], Vatutin et Zheng [53]. Dans le régime sur-critique, de nombreux articles ont étudié les grandes déviations, comme dans Bansaye et Berestycki [10], Böinghoff et Kersting [20], Bansaye et Böinghoff [11–13], Huang et Liu [36]. Le cas particulier où la loi de reproduction est linéaire fractionnaire a été traité dans Böinghoff [18], Nakashima [44], Kozlov [39, 40], avec des résultats généralement plus fins que dans le cas général. Des résultats de statistiques concernant la convergence de certains estimateurs de la moyenne et de la variance ont été obtenus dans [25]. Concernant les applications des processus de branchement en environnement aléatoire en biologie cellulaire, on peut se référer aux travaux de Bansaye et Berestycki [10], Bansaye [7, 8], Dombry, Mazza et Bansaye [26].

1.2 Description du modèle

Un processus de branchement en environnement aléatoire (Z_n) est décrit de la manière suivante. L'environnement aléatoire est modélisé par une suite $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots)$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) à valeur dans un espace abstrait Ξ . À chaque variable aléatoire ξ_0, ξ_1, \dots de l'environnement est associée la fonction génératrice f_0, f_1, \dots définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$f_n(t) = f(\xi_n, t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\xi_n) t^i, \quad t \in [0, 1], \quad p_i(\xi_n) \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\xi_n) = 1. \quad (1.2.1)$$

Le processus $(Z_n)_{n \geq 0}$ est alors défini par l'équation de récurrence

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} N_{n,i}, \quad \text{pour } n \geq 0, \quad (1.2.2)$$

où les variables aléatoires $N_{n,i}$ ($1 \leq i$) représentent le nombre de descendants du i -ème individu de la génération n , et sont indépendantes du nombre d'individus Z_n présents à la génération n . De plus, conditionnellement à l'environnement ξ , les variables aléatoires $N_{n,i}$ ($i = 1, 2, \dots$) sont indépendantes mutuellement avec pour même fonction génératrice f_n .

Notons qu'il y a dans ce processus deux types d'aléa :

1. L'aléa dit 'environnemental', représenté par l'environnement ξ .
2. L'aléa dit 'démographique', représenté par la loi de reproduction f .

Ce sont ces deux aléas, partiellement liés, qui font la richesse de ce processus, comme nous le verrons tout au long de cette thèse. Notons que dans le cas particulier où l'environnement ξ est constant, on retrouve le processus de Galton-Watson, où la loi de reproduction des individus est identique suivant les générations, de fonction génératrice f .

Une conséquence immédiate de l'équation (3.2.2) est la propriété dite de branchement : Pour $n \geq 1$ et $m \geq 0$, on a

$$Z_{n+m} = \sum_{i=1}^{Z_m} Z_{n,i}^{(m)}, \quad (1.2.3)$$

où les variables aléatoires $Z_{n,i}^{(m)}$ ($i \geq 1$) sont indépendantes de Z_m . De plus, conditionnellement à l'environnement ξ , les variables aléatoires $Z_{n,i}^{(m)}$ ($i \geq 1$) sont i.i.d. avec pour loi de probabilité $\mathbb{P}_\xi(Z_{n,i}^{(m)} \in \cdot) = \mathbb{P}_{T^m \xi}(Z_n \in \cdot)$, où T^m est l'opérateur de shift défini par $T^m(\xi_0, \xi_1, \dots) = (\xi_m, \xi_{m+1}, \dots)$. Intuitivement, la relation (1.2.3) signifie que, conditionnellement à $Z_m = i$, le processus Z_{n+m} a la même loi (sous \mathbb{P}) qu'un nouveau processus Z_n démarrant avec $Z_0 = i$ individus initiaux.

Dans la suite nous désignons par \mathbb{P}_ξ la loi conditionnellement à l'environnement ξ ,

et par τ la loi de l'environnement ξ . La probabilité $\mathbb{P}(dx, d\xi) = \mathbb{P}_\xi(dx)\tau(d\xi)$ est la loi totale du processus. Les espérances en loi totale et conditionnellement à l'environnement ξ sont notées \mathbb{E} et \mathbb{E}_ξ respectivement. Nous notons aussi par \mathbb{P}_k et \mathbb{E}_k la probabilité et l'espérance en loi totale du processus démarrant avec $Z_0 = k$ individus, avec $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}$ et $\mathbb{E}_1 = \mathbb{E}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant (1.2.2) de manière récursive, la fonction génératrice des probabilités de Z_n conditionnellement à l'environnement ξ vaut

$$g_n(t) = \mathbb{E}_\xi[t^{Z_n}] = f_0 \circ \dots \circ f_{n-1}(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (1.2.4)$$

Les variables aléatoires ξ_0, ξ_1, \dots étant i.i.d., la fonction génératrice en loi totale $G_{k,n}$ de Z_n sachant $Z_0 = k$ vaut

$$G_{k,n}(t) = \mathbb{E}_k[t^{Z_n}] = \mathbb{E}[g_n^k(t)], \quad t \in [0, 1]. \quad (1.2.5)$$

Pour $n \geq 0$, on définit également

$$m_n = f'_n(1) = \sum_{i=0}^{\infty} ip_i(\xi_n) \quad \text{et} \quad \Pi_n = \mathbb{E}_\xi Z_n = m_0 \dots m_{n-1},$$

avec $\Pi_0 = 1$. La variable aléatoire m_n représente le nombre moyen d'individus de la génération n sachant l'environnement ξ .

Comme pour le processus de Galton-Watson, un objet important pour l'étude des PBEA est la population normalisée définie par

$$W_n = \frac{Z_n}{\Pi_n}, \quad n \geq 0. \quad (1.2.6)$$

Nous en résumons ici les propriétés principales. Sous \mathbb{P}_ξ et sous \mathbb{P} , $(W_n)_{n \geq 0}$ est une martingale positive par rapport à la filtration

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi, N_{j,i}, 0 \leq j \leq n-1, i = 1, 2, \dots),$$

avec, par convention, $\mathcal{F}_0 = \sigma(\xi)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}W_n = \mathbb{E}W = 1$. La martingale W_n est bornée dans L^1 , et donc $W = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ existe \mathbb{P} -presque sûrement, et $\mathbb{E}W \leq 1$. Sous la condition

$$\mathbb{E} \frac{Z_1}{m_0} \log^+ Z_1 < \infty, \quad (1.2.7)$$

la martingale (W_n) converge vers W dans $L^1(\mathbb{P})$ (c.f. [50]) et

$$\mathbb{P}(W > 0) = \mathbb{P}(Z_n \rightarrow \infty)$$

De plus, d'après (1.2.3) appliquée à $m = 1$ et $n \rightarrow \infty$, obtient une équation de point fixe réalisée par la variable W :

$$W = \frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^{Z_1} W(i), \quad (1.2.8)$$

où les variables aléatoires $W(i)$ ($i \geq 1$) sont indépendantes de Z_1 (sous \mathbb{P} et \mathbb{P}_ξ). De plus, conditionnellement à l'environnement ξ , les variables aléatoires $W(i)$ ($i \geq 1$) sont i.i.d. de loi $\mathbb{P}_\xi(W(i) \in \cdot) = \mathbb{P}_{T\xi}(W \in \cdot)$.

L'étude de la variable limite W est fondamentale, car celle-ci résume la proportion du processus Z_n à dévier de son comportement moyen Π_n en temps long. Ses propriétés ont été très étudiées dans le cas du processus de Galton-Watson (c.f. [5]). Dans le cas des PBEA, on peut se référer aux travaux de [33, 37, 41] pour l'existence des moments positifs d'ordre p , avec poids, et la vitesse de convergence dans L^p ; ainsi qu'aux travaux de [34] et [36] pour l'étude des moments harmoniques, nous renseignant sur son comportement en 0. Notons que sur ce dernier point, un objet d'importance est la transformée de Laplace conditionnelle de W , définie pour tout $t \geq 0$ par

$$\phi_\xi(t) = \mathbb{E}_\xi \left[e^{-tW} \right]. \quad (1.2.9)$$

D'après (1.2.8) et (1.2.9), on déduit aisément la relation fonctionnelle suivante :

$$\phi_\xi(t) = f_0 \left(\phi_{T\xi} \left(\frac{t}{m_0} \right) \right), \quad (1.2.10)$$

qui sera utilisée à plusieurs reprises dans ce manuscrit. Notons qu'il reste beaucoup de questions ouvertes concernant les propriétés de W dans le cas des PBEA. En particulier, et contrairement au cas du processus de Galton-Watson, on ne sait toujours pas si W admet une densité.

Un outil également primordial dans l'étude des processus de branchement en environnement aléatoire est la marche aléatoire associée, définie par

$$S_n = \log \Pi_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \geq 1,$$

où les variables aléatoires $X_i = \log m_{i-1}$ ($i \geq 1$) sont i.i.d. d'espérance et de variance notées respectivement

$$\mu = \mathbb{E}[X] \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]. \quad (1.2.11)$$

La marche aléatoire associée représente le comportement exponentiel moyen du processus à environnement fixé, puisque $\mathbb{E}_\xi Z_n = e^{S_n}$. L'impact de l'environnement $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots)$ sur le processus Z_n se résume donc essentiellement à sa marche aléatoire associée. Aussi, celle-ci est parfois abusivement appelée 'environnement'.

Les quantités Z_n , S_n et $W_n = \frac{Z_n}{e^{S_n}}$ synthétisent de manière pertinente la dynamique du processus Z_n :

1. La variable S_n est la composante 'marche aléatoire' du processus, et décrit la dynamique de l'aléa environnemental.
2. Conditionnellement à l'environnement ξ , Z_n est la composante 'branchante' du processus, et décrit la dynamique de l'aléa démographique.

3. La martingale (W_n) représente les fluctuations du processus Z_n par rapport à son comportement moyen e^{S_n} .

D'après les remarques précédentes et en vue de l'étude des grandes déviations à venir, il est naturel d'introduire le changement de mesure de Cramér pour la marche aléatoire associée : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $\mathbb{P}^{(\lambda)}$ la nouvelle mesure de probabilité définie pour toute variable aléatoire \mathcal{F}_n -mesurable T_n par

$$\mathbb{E}^{(\lambda)}[T_n] = \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda S_n} T_n]}{(\mathbb{E}[e^{\lambda X}])^n}. \quad (1.2.12)$$

Notons que la définition précédente pourra par la suite s'écrire légèrement différemment suivant ce que l'on souhaite étudier. Sous la nouvelle mesure $\mathbb{P}^{(\lambda)}$, le processus (Z_n) est toujours un PBEA sur-critique, avec $\mathbb{P}^{(\lambda)}(Z_1 = 0) = 0$, et (W_n) reste une martingale positive qui converge presque sûrement vers W . De plus, si la condition

$$\mathbb{E}^{(\lambda)} \left[\frac{Z_1}{m_0} \log^+ Z_1 \right] = \mathbb{E} \left[\frac{Z_1}{m_0^{1-\lambda}} \log^+ Z_1 \right] / \mathbb{E} [m_0^\lambda] < \infty$$

est satisfaite, alors d'après (1.2.7),

$$W_n \rightarrow W \quad \text{dans} \quad L^1(\mathbb{P}^{(\lambda)}). \quad (1.2.13)$$

Nous allons maintenant traiter le cas particulier linéaire fractionnaire. Un processus de branchement en environnement aléatoire est dit linéaire fractionnaire lorsque la loi de reproduction de Z_1 conditionnellement à l'environnement ξ_0 est de la forme

$$p_0(\xi_0) = a_0, \quad p_k(\xi_0) = \frac{(1-a_0)(1-b_0)}{b_0} b_0^k, \quad (1.2.14)$$

où $(a_0, b_0) \in [0, 1) \times (0, 1)$ est un couple de variables aléatoires dépendant de l'environnement ξ_0 . Ainsi, la fonction génératrice conditionnelle f_0 vaut

$$f_0(t) = a_0 + \frac{(1-a_0)(1-b_0)t}{1-b_0t}. \quad (1.2.15)$$

De plus, la moyenne conditionnelle et la marche aléatoire associée s'écrivent

$$m_0 = \frac{(1-a_0)}{(1-b_0)}, \quad X = \log m_0. \quad (1.2.16)$$

L'intérêt de ce cas particulier est que les calculs de la fonction génératrice conditionnelle f_n de Z_n sont explicites et s'expriment directement en terme de la marche aléatoire associée. En effet, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a (c.f. par exemple [39])

$$\mathbb{P}_\xi(Z_n = j) = \frac{e^{-S_n}}{\left(e^{-S_n} + \sum_{k=0}^{n-1} \eta_{k+1} e^{-S_k}\right)^2} \left(\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \eta_{k+1} e^{-S_k}}{e^{-S_n} + \sum_{k=0}^{n-1} \eta_{k+1} e^{-S_k}} \right)^{j-1} \quad \text{p.s.},$$

avec $\eta_k = \frac{2b_k}{1-a_k}$.

Dans le cas où $a_0 = 0$, la loi de reproduction est géométrique de paramètre $(1 - b_0)$, et le PBEA est dit géométrique. En particulier on a

$$e^{-X} = p_1(\xi_0) = (1 - b_0). \quad (1.2.17)$$

Les premiers résultats sur les processus de branchement en environnement aléatoire concernent les conditions d'extinction du processus. Celles-ci sont sans surprise principalement dictées par la moyenne de la marche aléatoire associée. On a en effet le résultat suivant (c.f. [48]) :

1. Si $\mathbb{E}[X] < 0$, le processus est dit sous-critique, et la population s'éteint presque sûrement.
2. Si $\mathbb{E}[X] = 0$, le processus est dit critique, et la population s'éteint presque sûrement.
3. Si $\mathbb{E}[X] > 0$, le processus est dit sur-critique, et sous la condition supplémentaire $\mathbb{E}|\log(1 - p_0(\xi_0))| < \infty$, on a $\mathbb{P}(Z_n \rightarrow \infty) > 0$.

On retrouve la même classification qu'avec le processus de Galton-Watson, à la différence notable que la dichotomie ne se fait plus sur le nombre moyen d'enfants inférieur, égal ou supérieur à 1, mais sur le drift de la marche aléatoire associée. Le comportement d'un PBEA n'est ainsi pas aussi intuitif que pour le processus à environnement constant, puisque la population Z_n peut en moyenne tendre vers l'infini et s'éteindre presque sûrement !

En particulier pour le cas sur-critique, la condition $\mathbb{E}|\log(1 - p_0(\xi_0))| < \infty$ permet d'éviter l'apparition d'environnements "catastrophiques" empêchant ce type de phénomènes. La probabilité d'extinction p_e du processus Z_n démarré à $Z_0 = 1$ individus vaut alors

$$p_e = \mathbb{P}(\cup_{n=0}^{\infty} \{Z_n = 0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow G_{1,n}(0),$$

l'union $\cup_{n=0}^{\infty} \{Z_n = 0\}$ étant croissante. De (1.2.4) et (1.2.5), on déduit aisément que la probabilité d'extinction $p_e(\xi)$ conditionnellement à l'environnement ξ est caractérisée par l'équation fonctionnelle (c.f. [48])

$$p_e(\xi) = f_0(p_e(T\xi)),$$

où T est l'opérateur shift défini par $T(\xi_0, \xi_1 \dots) = (\xi_1, \xi_2 \dots)$, et alors $p_e = \mathbb{E}p_e(\xi)$ est la probabilité d'extinction du processus en loi totale.

1.3 Etat de l'art - présentation des résultats récents

Dans cette section nous présentons les résultats majeurs établis pour les processus de branchement en environnement aléatoire et en lien avec la présente thèse. La première section est consacrée au cas des PBEA critiques et sous-critiques. En seconde section nous présentons les travaux de la littérature relatifs au cas sur-critique.

1.3.1 Cas critique et sous-critique

Lorsque le PBEA est sous-critique, le processus s'éteint presque sûrement et de nombreux articles récents ont étudié l'asymptotique de la probabilité de survie $\mathbb{P}(Z_n > 0)$ ainsi que le comportement du processus $Z_n | Z_n > 0$ conditionné à la non-extinction. Rappelons que dans le cas du processus de Galton-Watson, l'asymptotique de la probabilité de survie vaut

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} cm^n, \quad (1.3.1)$$

où $m = f'(1)$ désigne la moyenne de la loi de reproduction. Dans le cas du processus de branchement en environnement aléatoire, la quantité $m_0 = f'(1) = e^X$ est une variable aléatoire, et contrairement au processus de Galton-Watson, on observe des transitions de phase dans l'asymptotique de la probabilité de survie suivant le signe de la quantité $\mathbb{E}[Xe^X]$. De manière simple et intuitive, cela correspond au fait que, même si le processus est globalement sous-critique ($\mathbb{E}[X] < 1$), on peut cependant avoir certains environnements extrêmement favorables (et alors $\mathbb{E}[Xe^X] > 0$), ce qui aura pour effet d'augmenter taille de la population sur une génération, et ainsi retarder l'extinction. Lorsque de tels environnements n'existent pas ou peu (et alors $\mathbb{E}[Xe^X] < 0$), le phénomène précédent ne peut se produire et l'asymptotique de la probabilité de survie est similaire à celle du processus de Galton-Watson. Précisément, et sous des hypothèses naturelles d'existence de moments, on a (c.f. [29, Théorème 1.1]) :

1. Si $\mathbb{E}[Xe^X] < 0$ (cas fortement sous-critique), alors

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} c_1 \left(\mathbb{E}e^X\right)^n, \quad (1.3.2)$$

avec $0 < c_1 \leq 1$. De plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = k | Z_n > 0) = q_1(k), \quad k \geq 1,$$

où

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_1(k) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} kq_1(k) < \infty.$$

2. Si $\mathbb{E}[Xe^X] = 0$ (cas moyennement sous-critique), alors

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} c_2 n^{-1/2} \left(\mathbb{E}e^X\right)^n \quad (1.3.3)$$

avec $0 < c_2 < \infty$. De plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = k | Z_n > 0) = q_2(k), \quad k \geq 1,$$

où $\sum_{k=1}^{\infty} q_2(k) = 1$.

3. Si $0 < \mathbb{E}[Xe^X] < \infty$ (cas faiblement sous-critique). Soit

$$\gamma_\beta = \mathbb{E}e^{\beta X} = \inf_{t \in [0,1]} \mathbb{E}e^{tX}, \quad (1.3.4)$$

où $\beta \in [0, 1]$ est la solution de l'équation $\mathbb{E}[Xe^{\beta X}] = 0$. Alors

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} c_3 n^{-3/2} \gamma_\beta^n \quad (1.3.5)$$

avec $0 < c_3 < \infty$. De plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = k | Z_n > 0) = q_3(k), \quad k \geq 1,$$

où $\sum_{k=1}^{\infty} q_3(k) = 1$.

Dans le cas où le processus de branchement est critique, le processus s'éteint presque sûrement, mais la vitesse de convergence devient polynômiale. Dans le cas du processus de Galton-Watson, on a (c.f. [5])

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{\sigma^2 n}. \quad (1.3.6)$$

Dans le cas des PBEA, on a (c.f. [51])

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} cn^{\alpha-1} l(n), \quad (1.3.7)$$

où c est une constante, α est l'exposant d'attraction d'une loi stable relié à l'environnement X , et $l(\cdot)$ une fonction à variation lente.

Expliquons brièvement ces résultats et l'idée intuitive de la preuve. Par l'inégalité de Markov, on a :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0 | \xi) = \mathbb{P}(Z_m > 0, \forall m \leq n | \xi) \leq \exp\left(\min_{m \leq n} S_m\right),$$

Cette majoration simple donne en fait la bonne vitesse asymptotique, d'où

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \simeq c \mathbb{E}\left[\exp\left(\min_{m \leq n} S_m\right)\right].$$

avec c une constante. Dans le cas critique, la marche aléatoire est récurrente avec $\mathbb{E}[X] = 0$. Alors la contribution principale de la quantité $\mathbb{E}[\exp(\min_{m \leq n} S_m)]$ est donnée par l'événement $\{\min_{m \leq n} S_m \geq 0\}$. Dans le cas où la variance est finie, on a $\mathbb{P}(\min_{m \leq n} S_m \geq 0) \simeq n^{-1/2}$, et alors

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \simeq cn^{-1/2},$$

qui est un cas particulier de (1.3.7) qui s'applique à un contexte plus général où une transformation de X appartient au domaine d'attraction $\alpha \in (1, 2]$ d'une loi stable (c.f. [51]).

Dans le cas sous-critique, dans l'esprit de la transformation de Cramér, on aura par un changement de mesure de paramètre β :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n > 0) &= \left(\mathbb{E}\left[e^{\beta X}\right]\right)^n \hat{\mathbb{E}}_\beta \left[e^{-\beta S_n} \mathbb{P}(Z_n > 0 | \xi)\right] \\ &\leq (\gamma_\beta)^n \hat{\mathbb{E}}_\beta \left[\exp\left(\min_{m \leq n} S_m - \beta S_n\right)\right],\end{aligned}$$

où le paramètre $\beta \in (0, 1]$ est optimisé de telle sorte que $\hat{\mathbb{E}}_\beta \left[\exp\left(\min_{m \leq n} S_m - \beta S_n\right)\right]$ ne soit plus d'un ordre exponentiel. Ceci revient donc à choisir β de telle sorte que $\min(S_0, \dots, S_n) - \beta S_n \simeq 0$ avec une forte probabilité, ce qui arrive lorsque la marche aléatoire sous la nouvelle probabilité $\hat{\mathbb{P}}_\beta$ est de dérive nulle : $\hat{\mathbb{E}}_\beta X = 0$ avec $\beta \in (0, 1]$. Ainsi le paramètre β est solution de l'équation

$$\mathbb{E}\left[X e^{\beta X}\right] = 0,$$

ce qui de manière équivalente, revient à dire que β réalise $\inf_{\lambda \in [0, 1]} \mathbb{E}\left[e^{\lambda X}\right]$. Il y a alors trois cas de figure :

1. $\hat{\mathbb{E}}_\beta[X] = 0$ avec $\beta < 1$. Alors $\min(S_0, \dots, S_n) - \beta S_n$ est proche de zéro si et seulement si $\min(S_0, \dots, S_n)$ et S_n sont proches de zéro. Or, pour une marche aléatoire centrée et de variance finie, la probabilité de l'événement $\{S_0, \dots, S_{n-1} \geq 0, S_n \leq 0\}$ est d'ordre $n^{-3/2}$. On obtient ainsi l'approximation suivante :

$$\hat{\mathbb{E}}_\beta \left[\exp\left(\min_{m \leq n} S_m - \beta S_n\right)\right] \simeq n^{-3/2}.$$

2. $\hat{\mathbb{E}}_\beta[X] = 0$ avec $\beta = 1$. Alors $\min(S_0, \dots, S_n) - \beta S_n$ est proche de zéro si et seulement si $\min(S_0, \dots, S_n)$ et S_n sont proches l'un de l'autre, ce qui implique que le minimum de la marche se réalise à la fin. Or, pour une marche aléatoire centrée et de variance finie, la probabilité de l'événement $\{S_0, \dots, S_{n-1} \geq S_n\}$ est d'ordre $n^{-1/2}$. Ainsi

$$\hat{\mathbb{E}}_\beta \left[\exp\left(\min_{m \leq n} S_m - \beta S_n\right)\right] \simeq n^{-1/2}.$$

3. $\hat{\mathbb{E}}_1[X] < 0$. La marche est alors de drift négatif, et alors $\min(S_0, \dots, S_n) - S_n$ est d'ordre constant. Ainsi

$$\hat{\mathbb{E}}_1 \left[\exp\left(\min_{m \leq n} S_m - \beta S_n\right)\right] \simeq \text{const.}$$

L'heuristique précédente explique l'asymptotique de la probabilité de survie dans le cas critique et sous-critique. Notons qu'à la place de la majoration de Markov, la démonstration précise utilise la fameuse construction de Geiger (c.f. [28]) afin d'obtenir une relation exacte entre la probabilité de survie et les termes exponentiels de la marche aléatoire associée (c.f. [29]).

1.3.2 Cas sur-critique

Dans le cas où le processus Z_n est sur-critique, les recherches actuelles se sont principalement focalisées sur les grandes déviations. Nous détaillons dans la suite les résultats de la littérature concernant les déviations inférieures et supérieures.

Grandes déviations inférieures

L'étude générale des grandes déviations inférieures, i.e. du comportement asymptotique de la probabilité $n^{-1} \log \mathbb{P}(Z_n \leq e^{\theta n})$ avec $\theta \in (0, \mathbb{E}[X])$, a été effectuée dans [10, 12, 13, 36, 44]. En particulier le résultat le plus abouti a été obtenu dans [12] et est détaillé dans les lignes suivantes. Soit

$$\Lambda(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{\lambda X}]$$

la log-Laplace de X et

$$\Lambda^*(\theta) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda \theta - \Lambda(\lambda)\}$$

la transformée de Fenchel-Legendre de Λ .

Lorsque $\mathbb{P}(Z_1 = 0) > 0$, sous des hypothèses naturelles d'existence de moments, pour tout $k \geq 1$ et $\theta \in (0, \mathbb{E}[X])$, on a (c.f. [12, Théorème 3.1(i)])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n \leq e^{\theta n}) = I(\theta), \quad (1.3.8)$$

avec

$$I(\theta) = \inf_{t \in [0, 1]} \left\{ t \rho + (1-t) \Lambda^* \left(\frac{\theta}{1-t} \right) \right\} \quad (1.3.9)$$

$$= \begin{cases} \rho \left(1 - \frac{\theta}{\theta^*} \right) + \frac{\theta}{\theta^*} \Lambda^*(\theta^*) & \text{si } 0 < \theta \leq \theta^*, \\ \Lambda^*(\theta) & \text{si } \theta^* \leq \theta < \mathbb{E}[X], \end{cases} \quad (1.3.10)$$

où, pour tout entier $j, k \geq 1$,

$$\rho = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n = j) > 0 \quad (1.3.11)$$

est une quantité qui est indépendante de j et du nombre initial d'individus $Z_0 = k$ (c.f. [13]). La transition de phase θ^* est la solution de l'équation

$$\frac{\rho - \Lambda^*(\theta^*)}{\theta^*} = \inf_{0 \leq \theta \leq \mathbb{E}[X]} \frac{\rho - \Lambda^*(\theta)}{\theta}. \quad (1.3.12)$$

De plus, pour $\theta \leq \theta^*$, l'infimum de (1.3.9) est réalisé en

$$t_\theta = \left(1 - \frac{\theta}{\theta^*} \right). \quad (1.3.13)$$

Dans le cas particulier où le processus est linéaire fractionnaire avec $a_0 > 0$, la fonction de taux $I(\theta)$ s'écrit (c.f. [12, Corollaire 3.3])

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \min \left\{ -\theta - \log \mathbb{E}[e^{-X}], \Lambda^*(\theta) \right\} \\ &= \begin{cases} -\theta - \log \mathbb{E}[e^{-X}] & \text{si } 0 < \theta \leq \theta^*, \\ \Lambda^*(\theta) & \text{si } \theta^* \leq \theta < \mathbb{E}[X], \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

avec

$$\theta^* = \mathbb{E}[X \exp(-X)] / \mathbb{E}[\exp(-X)]. \quad (1.3.15)$$

Lorsque $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et $Z_0 = 1$, les résultats (1.3.8) et (1.3.9) restent valides et ont été initialement établis dans [10]. Dans ce cas, on a $\rho = -\log \mathbb{P}(Z_1 = 1)$.

Lorsque $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et $Z_0 = k$, les résultats (1.3.8) à (1.3.15) restent valides, mais les valeurs de ρ et θ_* dépendent alors du nombre initial d'individus k . Ceci a été étudié dans [12, Théorème 3.1(ii) et Corollaire 3.3]) mais les énoncés sont incorrects et seront commentés ultérieurement.

En complément des résultats de grandes déviations inférieures précédents, l'étude de la trajectoire d'un PBEA général (Z_n) conditionné à réaliser la déviation $\{Z_n \leq e^{\theta n}\}$ a été effectuée dans [10] et est décrite par le théorème fonctionnel suivant.

Lorsque $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$, sous l'hypothèse que les moyennes et variances conditionnelles $\mathbb{E}_\xi[Z_1]$ et $\mathbb{E}_\xi[Z_1^2]$ des lois de reproduction sont uniformément bornées, conditionnellement à $\{Z_n \leq e^{\theta n}\}$, on a la convergence en probabilité suivante (c.f. [10, Théorème 2])

$$\sup_{t \in [0,1]} \left\{ \left| \log \left(Z_{[nt]} \right) / n - f_\theta(t) \right| \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (1.3.16)$$

avec

$$f_\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq t_\theta, \\ \frac{\theta}{1-t_\theta}(t - t_\theta) & \text{si } t_\theta \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.3.17)$$

Lorsque $\mathbb{P}(Z_1 = 0) > 0$, (1.3.16) et (1.3.17) devraient rester valides sous des hypothèses de moments similaires à [12, Théorème 3.1], mais ceci reste à démontrer.

Les résultats précédents s'interprètent qualitativement de la manière suivante : pour $\theta \in [\theta^*, \mathbb{E}[X]]$, la fonction de taux du processus (Z_n) est identique à celle de la marche aléatoire associée. Un nombre d'individus en dessous du comportement exponentiel moyen est donc réalisé en temps long par une succession d'événements défavorables. En d'autres termes, une croissance 'anormalement faible' du processus est uniquement due à l'impact de la stochasticité environnementale. Dans le cas où $\theta \in (0, \theta^*)$, les déviations inférieures sont réalisées à la fois par la stochasticité démographique et environnementale : jusqu'à un temps optimal nt_θ , le processus Z_n dévie de son comportement moyen en restant avec un petit nombre d'individus. Ainsi $\{Z_{nt_\theta} \simeq \text{'constante'}\}$ et la probabilité d'occurrence d'un tel événement est de l'ordre de $e^{-nt_\theta \rho}$. Ensuite, le processus croît avec une suite d'environnements défavorables jusqu'à réaliser l'événement $\{Z_n \leq e^{\theta n}\}$. Le processus réalise alors l'événement $\{e^{S_n(1-t_\theta)} \leq e^{\theta n}\} = \{e^{S_n(1-t_\theta)} \leq e^{\theta^* n(1-t_\theta)}\}$, dont la probabilité est de l'ordre de $e^{-n(1-t_\theta)\Lambda^*(\theta^*)}$.

La démonstration de (1.3.8) s'appuie sur l'étude toute aussi importante de l'asymptotique de la distribution de Z_n . Rappelons que dans le cas du processus de Galton-Watson, pour tout état $j \geq 1$ accessible dans le sens où il existe un entier $l \geq 1$ tel que $\mathbb{P}(Z_l = j) > 0$, on a (c.f. [5])

$$\mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = 1) \sim c_j f'(q)^n, \quad (1.3.18)$$

avec c_j une constante strictement positive et $q = \inf\{s \in [0, 1], f(s) = s\}$ est le plus petit point fixe de la fonction génératrice f . Soulignons que cette formule englobe aussi l'équivalent (1.3.1) du cas sous-critique, puisqu'alors $q = 1$ et $f'(1) = m$. Dans le cas des PBEA sur-critiques, un analogue de (1.3.18) sous normalisation logarithmique a été établi dans [13] :

Lorsque $\mathbb{P}(Z_1 = 0) > 0$, pour tout $k \geq 1$ et tout état $j \geq 1$ accessible dans le sens où il existe un entier $l \geq 1$ tel que $\mathbb{P}(Z_l = j | Z_0 = k) > 0$, on a (c.f. [13, Théorème 2.1])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = k) \rightarrow -\rho,$$

où $\rho > 0$ est défini en (1.3.11). Notons que la constante ρ est en général non explicite (ou plutôt non explicitée dans le cas général). Par analogie avec le processus de Galton-Watson, une conjecture probable serait

$$\rho = -\log \mathbb{E}[f'(q)], \quad (1.3.19)$$

où $q = q(\xi) = \inf\{s \in [0, 1], f_\xi(s) = s\}$ est le plus petit point fixe aléatoire de la fonction génératrice aléatoire f . Il s'avère que cette conjecture est fautive en général. En effet, dans le cas où la loi de reproduction est linéaire fractionnaire, la constante ρ a été explicitée dans [13] et vaut, dans le cas où $a_0 > 0$, (c.f. [13, Corollaire 2.3])

$$\rho = \begin{cases} -\log \mathbb{E}[e^{-X}] & \text{si } \mathbb{E}[Xe^{-X}] \geq 0 \quad (\text{cas moyennement et} \\ & \text{fortement sur-critiques)} \\ -\log \inf_{\lambda \geq 0} \mathbb{E}[e^{\lambda X}] & \text{si } \mathbb{E}[Xe^{-X}] < 0 \quad (\text{cas faiblement sur-critique)}. \end{cases} \quad (1.3.20)$$

De plus, toujours dans le cas où le processus est linéaire fractionnaire, des résultats asymptotiques plus fins ont été obtenus dans [18] pour les cas fortement et moyennement sur-critiques. On a (c.f. [18, Théorèmes 2.1.1 et 2.2.1])

1. Si $\mathbb{E}[Xe^{-X}] > 0$ (cas fortement sur-critique),

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) \sim \nu \left(\mathbb{E}[e^{-X}] \right)^n, \quad (1.3.21)$$

2. Si $\mathbb{E}[Xe^{-X}] = 0$ (cas moyennement sur-critique),

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) \sim \theta \left(\mathbb{E}[e^{-X}] \right)^n l(n) n^{-(1-s)}, \quad (1.3.22)$$

où θ, ν, s sont des constantes positives et $l(\cdot)$ désigne une fonction à variations lentes.

Remarquons la symétrie entre les résultats précédents et ceux relatifs aux processus de branchement en environnement aléatoire sous-critiques, comme résumé dans le tableau suivant (d'après les résultats de [18, 18, 29, 51]).

PBEA général sous-critique	PBEA sur-critique linéaire fractionnaire
fortement sous-critique	fortement sur-critique
$\mathbb{E}X e^X < 0$	$\mathbb{E}X e^X > 0$
$\mathbb{P}(Z_n = k) \sim q_1(k) (\mathbb{E}e^X)^n$	$\mathbb{P}(Z_n = 1) \sim \nu (\mathbb{E}[e^{-X}])^n$
moyennement sous-critique	moyennement sur-critique
$\mathbb{E}X e^X = 0$	$\mathbb{E}X e^X = 0$
$\mathbb{P}(Z_n = k) \sim q_2(k) n^{-1/2} (\mathbb{E}e^X)^n$	$\mathbb{P}(Z_n = 1) \sim \theta (\mathbb{E}[e^{-X}])^n l(n) n^{-(1-s)}$
faiblement sous-critique	faiblement sur-critique
$\mathbb{E}X e^X > 0$	$\mathbb{E}X e^X < 0$
$\mathbb{P}(Z_n = k) \sim q_3(k) c n^{-3/2} \inf_{\lambda \in [0,1]} (\mathbb{E}e^{\lambda X})^n$	$n^{-1} \log \mathbb{P}(Z_n = k) \rightarrow - \inf_{\lambda \geq 0} (\mathbb{E}e^{\lambda X})$

Notons que l'asymptotique exacte de la probabilité $\mathbb{P}(Z_n = k)$ dans le cas linéaire fractionnaire faiblement sur-critique n'est pas encore connue et pourrait constituer une piste de recherche future. L'asymptotique exacte de la probabilité $\mathbb{P}(Z_n = k)$ d'un PBEA sur-critique général reste une question ouverte et complexe.

Grandes déviations supérieures

L'étude des grandes déviations supérieures a été traitée dans [10, 11, 20, 36, 39]. Bansaye et Boinghoff ont établi dans [11] un principe des grandes déviations supérieures pour un processus de branchement général (non nécessairement sur-critique). Dans le cas sur-critique, et sous l'hypothèse que la distribution de Z_1 conditionnellement à l'environnement ξ admette une queue lourde d'ordre $\beta \in (0, \infty)$ pour certains environnements et soit au plus d'ordre β uniformément sur tous les environnements, on a (c.f. [11, Théorème 1])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z_n \geq e^{\theta n}) = \psi^*(\theta), \tag{1.3.23}$$

$$\begin{aligned}
\psi^*(\theta) &= \inf_{s \in [0, \theta]} \{\beta s + \Lambda^*(\theta - s)\} \\
&= \begin{cases} \Lambda^*(\theta) & \text{si } \theta \leq \theta_+, \\ \beta(\theta - \theta^+) + \Lambda^*(\theta^+) & \text{si } \theta \geq \theta_+, \end{cases} \quad (1.3.24)
\end{aligned}$$

où, Λ^* est la fonction de taux de la marche aléatoire associée, et pour $\theta \geq \theta^+$, l'infimum est réalisé en $s_\theta = \theta - \theta^+$, avec

$$\theta^+ = \sup \{\theta \geq \mathbb{E}[X], (\Lambda^*)'(\theta) \leq \beta \text{ et } \Lambda^*(\theta) < \infty\}.$$

De plus, la trajectoire du processus Z_n conditionné à réaliser la déviation $\{Z_n \geq e^{\theta n}\}$ est décrite par le théorème fonctionnel suivant.

Lorsque $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et sous l'hypothèse d'absence de queues lourdes $\mathbb{E}[Z_1^t] < \infty$ pour tout $t > 0$, conditionnellement à $\{Z_n \geq e^{\theta n}\}$, on a la convergence en probabilité suivante (c.f. [10, Théorème 3])

$$\sup_{t \in [0, 1]} \left\{ \left| \log \left(Z_{[nt]} \right) / n - \theta t \right| \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (1.3.25)$$

Sous les hypothèses plus générales de [11, Théorème 1], il a été conjecturé dans [11] que, dans le cas d'un PBEA sur-critique, conditionnellement à $\{Z_n \geq e^{\theta n}\}$, on a la convergence en probabilité suivante :

$$\sup_{t \in [0, 1]} \left\{ \left| \log \left(Z_{[nt]} \right) / n - f_\theta(t) \right| \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad (1.3.26)$$

avec

$$f_\theta(t) = s_\theta \beta + \theta t. \quad (1.3.27)$$

Les résultats précédents s'interprètent qualitativement de la manière suivante : pour $\theta \in (0, \theta^+)$, la fonction de taux est identique à celle de la marche aléatoire associée. Une croissance anormalement élevée du processus est alors dûe uniquement à une succession d'environnements favorables. Dans le cas où $\theta \in (\theta^+, \infty)$, les grandes déviations supérieures sont réalisées à la fois par la stochasticité démographique et environnementale : dans les premières générations, un individu donne naissance à un nombre exponentiel d'individus, et la probabilité de l'événement $\{Z_1 \geq e^{\theta n}\}$ est de l'ordre de $e^{\beta(\theta - \theta^+)}$. Le processus dévie ensuite linéairement en lien avec l'environnement et réalise l'événement $\{e^{S_n} \leq e^{n\theta^+}\}$ pour rejoindre l'événement $\{Z_n \leq e^{\theta n}\}$, et la probabilité d'occurrence de cet événement est de l'ordre de $e^{-n\Lambda^*(\theta^+)}$.

Grandes déviations précises et moments harmoniques

Des résultats plus fins que l'obtention du principe de grandes déviations ont été obtenus dans des cas particuliers. Il a été démontré dans [39] que, dans le cas où la loi de reproduction est la loi géométrique généralisée (i.e. de loi $G - 1$, avec G une v.a. de loi géométrique), pour tout $\theta \in (\mu, \theta^+)$, on a (c.f. [39, Théorème 1])

$$\mathbb{P} \left(Z_n > e^{\theta n} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} I(\theta) \mathbb{P}(S_n > \theta n), \quad (1.3.28)$$

avec

$$I(\theta) = \Gamma(h(\theta)) \int_1^\infty v^{h(\theta)-1} dG_\theta(v), \quad G_\theta(v) = \mathbb{P} \left(\sum_{j=0}^\infty \exp(-S_j^{(h(\theta))}) \leq v \right),$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma, et $h(\theta)$ est la solution de l'équation $L'(h)/L(h) = \theta$, avec $L(h) = \mathbb{E}[e^{hX}]$ la transformée de Laplace de X .

L'article [36] considère un processus de branchement sur-critique général et établit un principe de grandes déviations inférieures et supérieures pour le processus Z_n (c.f. [36, Théorèmes 1.2 et 4.1]), sous la condition $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et l'hypothèse principale - notée (H) - que les environnements sont uniformément séparés de 1 et l'infini :

$$(H) \quad \exists \delta > 0 \text{ et } A > A_1 > 1 \text{ t. q. } A_1 \leq m_0 \text{ et } \sum_{i=1}^\infty i^{1+\delta} p_i(\xi_0) \leq A^{1+\delta} \text{ p.s.} \quad (1.3.29)$$

Dans le cas des grandes déviations inférieures, les résultats de [36, Théorèmes 1.2 et 4.1] sont antérieurs et moins aboutis que les résultats de [12], mais leur approche est intéressante car le principe des grandes déviations découle de l'étude des moments harmoniques de Z_n et de W : pour tout $t < 0$ tel que $\mathbb{E}p_1 < \mathbb{E}m_0^t$, on a (c.f. [36, Théorème 1.3])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}Z_n^t}{(\mathbb{E}m_0^t)^n} = C(t) \in (0, \infty). \quad (1.3.30)$$

ce qui, d'après le théorème de Gärtner-Ellis, implique le principe des grandes déviations.

La preuve repose de manière cruciale sur l'étude de la valeur critique du moment harmonique de la variable limite W . Sous l'hypothèse (H), on a, pour tout $a > 0$, (c.f. [42, Théorème 1.4])

$$\mathbb{E}W^{-a} \quad \text{si et seulement si} \quad \mathbb{E}[p_1(\xi_0)m_0^a] < 1.$$

Une autre conséquence de (1.3.30) est l'obtention d'un principe de déviations modérées pour le processus $\log Z_n$ normalisé. Précisément, sous les hypothèses (H) et $\sigma^2 = \text{Var}(X) < \infty$, on a (c.f. [36, Théorème 1.6])

$$\begin{aligned} - \inf_{x \in B^0} \frac{x^2}{2\sigma^2} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n^2} \log \mathbb{P} \left(\frac{\log Z_n - n\mu}{a_n} \in B \right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n^2} \log \mathbb{P} \left(\frac{\log Z_n - n\mu}{a_n} \in B \right) \leq - \inf_{x \in \bar{B}} \frac{x^2}{2\sigma^2}, \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

où $\mu = \mathbb{E}[X]$, $\sigma = \text{Var}(X)$ et B est un ensemble mesurable de \mathbb{R} , avec B^0 et \bar{B} désignant respectivement l'intérieur et la fermeture de B .

La généralisation des résultats de [36] (notamment l'étude complète des moments harmoniques de W et Z_n en relaxant l'hypothèse (H)) afin d'obtenir des résultats plus fins de grandes déviations et déviations modérées a motivé la présente thèse, dont les résultats des Chapitres 1,2 et 3 répondent à ces interrogations premières.

Notons de plus qu'il a été établi dans [36] un TCL pour le processus $\log Z_n$ normalisée : sous la condition $\sigma < \infty$ on a (c.f. [36, Théorème 1.8])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) = \Phi(x), \quad (1.3.32)$$

où $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$ est la fonction de répartition de la loi normale standard.

1.4 Présentation des résultats de la thèse

La présente thèse complète les résultats récemment obtenus dans la littérature, dans le cas où le processus est sur-critique. Précisément, et sous l'hypothèse principale que chaque individu de la population donne naissance à au moins un individu, nous démontrons une succession de résultats asymptotiques plus fins que les équivalents logarithmiques obtenus dans les travaux cités précédemment.

Le premier chapitre est consacré à l'étude des déviations modérées pour le processus Z_n et les résultats sont détaillés en Section 1.4.1. Nous établissons un théorème de type Berry-Esseen ainsi qu'un résultat de grandes déviations de type Cramér, c'est-à-dire un développement asymptotique de l'écart relatif entre le processus Z_n normalisé et la loi normale.

Le second chapitre est consacré à l'étude de l'asymptotique de la loi de Z_n ainsi qu'aux moments harmoniques de la variable limite W , détaillés en Section 1.4.2. Nous déterminons un équivalent de la probabilité $\mathbb{P}_k(Z_n = j)$ quand $n \rightarrow \infty$ ainsi que la valeur critique pour laquelle $\mathbb{E}_k[W^{-a}] < \infty$.

Le troisième chapitre étudie le comportement asymptotique des moments harmoniques de Z_n , détaillé en Section 1.4.3. En conséquence de cette étude, nous établissons un résultat de grandes déviations inférieures sous des hypothèses plus faibles que celles imposées dans des travaux ultérieurs. Nous améliorons aussi la vitesse de convergence dans un théorème central limite vérifié par $W_n - W$ et établissons un résultat de grandes déviations vérifié par le ratio Z_{n+1}/Z_n .

1.4.1 Borne de Berry-Esseen et grandes déviations de type Cramér

Dans cette section nous détaillons les résultats du Chapitre 1 consacrés à l'étude de l'écart relatif et absolu entre le processus $\log Z_n$ normalisé et la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Le premier résultat précise la vitesse de convergence dans le TCL vérifié par $(\sigma\sqrt{n})^{-1}(\log Z_n - n\mu)$ et établi dans [36]. Sous les conditions $\mathbb{E}X^3 < \infty$ et $\mathbb{E}\left(\frac{Z_1}{m_0}\right)^{1+\varepsilon} < \infty$ avec $\varepsilon > 0$, on a (c.f. Chap 1. Théorème 2.1.1)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}, \quad (1.4.1)$$

où $\mu = \mathbb{E}[X]$, $\sigma = \text{Var}(X)$ et $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ désigne la loi normale standard. La méthode utilisée s'appuie sur la décomposition

$$\log Z_n = S_n + \log W_n, \quad (1.4.2)$$

où S_n est la marche aléatoire associée et W_n une martingale convergente, qui suggère que les fluctuations de Z_n coïncident avec celles de S_n . Les hypothèses du théorème imposent que le processus Z_n ne dévie pas trop du comportement moyen Π_n , ce qui a pour but d'assurer l'existence des moments logarithmiques de la variable limite $\log W$ et la convergence dans $L^1(\mathbb{P})$ de $\log W_n$ vers $\log W$. Ceci permet alors d'établir la vitesse de convergence de la loi jointe $\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$, qui peut être vue comme une version quantitative de (1.4.2).

Nous avons aussi considéré la méthode de Stein, qui s'adapte très bien à la convergence de sommes de variables aléatoires dépendantes telles que (1.4.2). Elle permet de démontrer une vitesse de convergence en $1/\sqrt{n}$ pour la distance de Wasserstein, sous des hypothèses similaires (c.f. Chap 1. Théorème 2.5.5). Notons que l'approche par la méthode de Stein permet aussi d'obtenir la borne de Berry-Esseen (1.4.1), mais sous l'hypothèse plus forte $\mathbb{E}X^{3+\varepsilon} < \infty$.

De manière complémentaire avec le théorème de type Berry-Esseen pour $\log Z_n$, nous établissons ensuite un résultat de grandes déviations de type Cramér. Cela consiste en l'obtention d'un développement asymptotique de l'écart relatif entre la loi du processus $\log Z_n$ normalisé et la loi normale. Précisément, on étudie le comportement asymptotique du ratio

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right)}{1 - \Phi(x)},$$

avec $x = x(n)$ une quantité qui est croissante avec n . En particulier on s'intéresse à la zone normale de convergence, c'est à dire l'ensemble des $x = x(n)$ tel que le ratio précédent converge vers 1 quand $n \rightarrow \infty$. Dans le cas d'une somme de variables aléatoires i.i.d., le comportement asymptotique de cet écart a été établi par Harald Cramér dans son article fondateur [23], et a ensuite été généralisé pour des variables indépendantes par de nombreux auteurs (c.f. par exemple Petrov [46]). Précisément, soit X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance μ et de variance σ^2 , et $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Sous l'hypothèse que la transformée de Laplace $L(\lambda) = \mathbb{E}e^{\lambda X}$

est définie sur un voisinage de 0, pour $0 \leq x = o(\sqrt{n})$, on a, quand $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right)}{1 - \Phi(x)} = \exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\} \left[1 + O\left(\frac{1+x}{\sqrt{n}}\right)\right], \quad (1.4.3)$$

où

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\gamma_3}{6\gamma_2^{3/2}} + \frac{\gamma_4\gamma_2 - 3\gamma_3^2}{24\gamma_2^3}t + \frac{\gamma_5\gamma_2^2 - 10\gamma_4\gamma_3\gamma_2 + 15\gamma_3^3}{120\gamma_2^{9/2}}t^2 + \dots, \quad (1.4.4)$$

est une série entière convergente pour tout $|t|$ dans un voisinage de 0, appelée série de Cramér, et s'exprime en fonction des coefficients de la série entière $\Lambda(\lambda) = \log L(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!} \lambda^k$. Le coefficient $\gamma_k = \left. \frac{d^k \Lambda(\lambda)}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=0}$ est appelé cumulatif d'ordre k de la variable aléatoire X . En particulier pour $k = 1, 2$, on a $\gamma_1 = \mu$ et $\gamma_2 = \sigma^2$. Pour le détail de la construction de la série de Cramér, on pourra se référer à l'Appendice 2 du Chapitre 1 ou au livre de Petrov [46]. Notons qu'en conséquence du résultat précédent, on obtient la zone normale de convergence $0 \leq x = o(n^{1/6})$ pour laquelle l'approximation relative par la loi normale est valide. La preuve du théorème est basée sur le changement de mesure de type Cramér. Le paramètre λ est optimisé de telle sorte que l'approximation par le TCL soit contrôlée par la borne de Berry-Esseen sous la nouvelle mesure.

Les idées restent les mêmes pour les processus de branchement en environnement aléatoire, la preuve étant basée sur le changement de mesure (1.2.12) correspondant à la transformation de Cramér pour la marche aléatoire associée S_n . La différence notable réside dans le contrôle de loi jointe $\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ similaire à l'établissement de la borne de Berry-Esseen, mais uniformément sur la mesure changée \mathbb{P}_λ définie en (1.2.12). Notons que la preuve nécessite de manière cruciale l'existence de moments harmoniques pour la variable aléatoire limite W . Finalement, sous la condition d'existence de la transformée de Laplace L_X de la marche aléatoire associée dans un voisinage de zéro, et sous l'hypothèse $\mathbb{E} \frac{Z_1^{1+\varepsilon}}{m_0} < \infty$, avec $\varepsilon > 0$, qui impose que le processus (Z_n) ne dévie pas trop du comportement moyen Π_n , pour $0 \leq x = o(\sqrt{n})$ et $n \rightarrow \infty$, on a (c.f. Chap 1. Théorème 2.1.3)

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right)}{1 - \Phi(x)} = \exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\} \left[1 + O\left(\frac{1+x}{\sqrt{n}}\right)\right] \quad (1.4.5)$$

et

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < -x\right)}{\Phi(-x)} = \exp\left\{-\frac{x^3}{\sqrt{n}} \mathcal{L}\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\} \left[1 + O\left(\frac{1+x}{\sqrt{n}}\right)\right], \quad (1.4.6)$$

où $\mathcal{L}(\cdot)$ est la série de Cramér de la marche aléatoire associée. En conséquence du résultat précédent, nous obtenons la zone de convergence $x = o(n^{1/6})$ pour laquelle

l'approximation relative par la loi normale reste valide. Pour $0 \leq x = o(n^{1/6})$ et $n \rightarrow \infty$, on a (c.f. Chap 1. Corollaire 2.1.4)

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right)}{1 - \Phi(x)} = 1 + O\left(\frac{1 + x^3}{\sqrt{n}}\right) \quad (1.4.7)$$

et

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < -x\right)}{\Phi(-x)} = 1 + O\left(\frac{1 + x^3}{\sqrt{n}}\right). \quad (1.4.8)$$

Notons que le développement de Cramér (1.4.5) est plus précis que le principe de déviations modérées établi dans [36], et est de plus énoncé sous des hypothèses plus faibles. En effet, soit a_n une suite de réels positifs tels que $\frac{a_n}{n} \rightarrow 0$ et $\frac{a_n}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty$. Alors, d'après le Théorème 1.6 de [36], sous l'hypothèse (1.3.29), on a, pour $x_n = \frac{x a_n}{\sigma\sqrt{n}}$ et $x \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\log \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{a_n} > x\right) \sim -\frac{x_n^2}{2}. \quad (1.4.9)$$

Sous les conditions précédentes (au lieu de la condition (H)), (1.4.5) implique

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x_n\right) = (1 - \Phi(x_n)) \exp\left(\frac{x_n^3}{\sqrt{n}} \mathcal{L}\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{1 + x_n}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

qui est bien plus précis que l'équivalent (1.4.9).

1.4.2 Asymptotique de la loi de Z_n et moment harmonique de W

Dans cette section nous détaillons les résultats du Chapitre 2 consacrés à l'asymptotique de la probabilité $\mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = k)$ quand $n \rightarrow \infty$ dans le cas où $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$, ainsi qu'à l'étude des moments harmoniques de la variable limite W .

Pour tout $k \geq 1$ et pour tout état accessible $j \geq k$ dans le sens où $\mathbb{P}_k(Z_l = j) > 0$ pour un certain $l \geq 0$, on a (c.f. Chap 2. Théorème 3.2.3 (a))

$$\mathbb{P}_k(Z_n = j) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \gamma_k^n q_{k,j}, \quad (1.4.10)$$

avec

et, pour tout $j \geq k$, le coefficient $q_{k,j} \in (0, +\infty)$ se définit comme l'unique solution de l'équation de récurrence

$$\gamma_k q_{k,j} = \sum_{i=k}^j p(i, j) q_{k,i}, \quad (1.4.11)$$

où

$$p(i, j) = \mathbb{P}(Z_1 = j | Z_0 = i), \quad (1.4.12)$$

avec la condition $q_{k,k} = 1$ et $q_{k,i} = 0$ pour tout état i non accessible, i.e. $\mathbb{P}_k(Z_l = i) = 0$ pour tout $l \geq 0$.

La preuve de (1.4.10) et (1.4.11) est basée sur la propriété de Markov et un argument simple de monotonie. De plus, l'équivalent (1.4.10) améliore et complète les travaux récents dans le cas des branchements aléatoires. En effet, dans le cas où $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et $Z_0 = 1$, l'équivalent (1.4.10) améliore et généralise la majoration $\mathbb{P}(Z_n \leq j) \leq n^j \gamma_1^n$ obtenue dans [10, Lemme 7] et la convergence asymptotique (c.f. [13])

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z_n = j) = -\log \gamma_1. \quad (1.4.13)$$

Notons de plus que, dans le cas où $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et $Z_0 = k$, il a été énoncé à tort dans [13] que

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n = j) = -k \log \gamma_1. \quad (1.4.14)$$

D'après (1.4.10), la bonne asymptotique est

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n = j) = -\log \gamma_k. \quad (1.4.15)$$

Idem pour le cas d'un processus de branchement en environnement aléatoire linéaire fractionnaire, où la valeur de ρ en (1.3.20) et établie dans [13, Corollaire 2.3] n'est valide que dans le cas $a_0 > 0$. Dans le cas géométrique où $a_0 = 0$, le facteur k est manquant dans (1.3.20) et d'après (1.2.17) et (1.4.15), la valeur correcte est

$$\rho_k = -\log \mathbb{E}[e^{-kX}]. \quad (1.4.16)$$

De plus, dans le cas d'un PBEA géométrique avec $a_0 = 0$ et $Z_0 = 1$, l'équivalent (1.4.10) recouvre l'équation (1.3.21) établie dans [18, Théorèmes 2.1.1]). En effet, d'après (1.2.17), on a $p_1(\xi_0) = 1/m_0$, $X := \log m_0 > 1$ et $\mathbb{E}[Xe^{-X}] > 0$. Ainsi le processus est fortement sur-critique et (1.4.10) devient

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) \sim \nu \left(\mathbb{E}[e^{-X}] \right)^n = \gamma^n,$$

qui coïncide avec (1.3.21) avec $\nu = 1$.

Décrivons maintenant les résultats obtenus concernant la valeur critique a_k pour l'existence des moments harmoniques de la variable limite W sous $Z_0 = k$. Pour tout $a > 0$, sous la condition $\mathbb{E}[m_0^a] < \infty$ pour un certain $p > a$, on a (c.f. Chap 2. Théorème 3.2.1)

$$\mathbb{E}_k W^{-a} < \infty \quad \text{si et seulement si} \quad \mathbb{E}[p_1^k(\xi_0) m_0^a] < 1. \quad (1.4.17)$$

Ce résultat généralise le Théorème 1.4 de [36], où l'équivalence précédente a été établie dans le cas particulier où $Z_0 = 1$, et avec une hypothèse de bornitude (1.3.29) sur la marche aléatoire associée très restrictive. En conséquence, on obtient la valeur

critique $a_k > 0$ pour l'existence des moments harmoniques de la variable limite W , où $a_k > 0$ est la solution de l'équation

$$\mathbb{E}[p_1^k(\xi_0)m_0^{a_k}] = 1. \quad (1.4.18)$$

Précisément, sous l'hypothèse $\mathbb{E}m_0^{a_k} < \infty$, on a (c.f. Chap 2. Corollaire 3.2.2)

$$\begin{cases} \mathbb{E}_k W^{-a} < \infty & \text{pour } a \in [0, a_k), \\ \mathbb{E}_k W^{-a} = \infty & \text{pour } a \in [a_k, \infty). \end{cases}$$

La preuve de (1.4.17) s'effectue en deux étapes : Dans un premier temps nous établissons l'existence des moments harmoniques de W d'un certain ordre $a > 0$, en itérant la relation fonctionnelle

$$\phi_\xi(t) = f_0 \left(\phi_{T\xi} \left(\frac{t}{m_0} \right) \right). \quad (1.4.19)$$

Dans la seconde étape, l'argument clé de la preuve est basé sur une méthode développée dans [42, Lemme 4.1] afin d'obtenir la décroissance polynômiale exacte de la transformée de Laplace de W , $\phi(t) = \mathbb{E}e^{-tW}$, quand $t \rightarrow \infty$, à partir d'une inéquation de la forme

$$\phi(t) \leq q\mathbb{E}\phi(Yt) + Ct^{-a}, \quad (1.4.20)$$

avec Y une variable positive. Une telle inéquation est obtenue en itérant la relation fonctionnelle (1.4.19) d'un processus Z_n démarrant avec $Z_0 = k$ individus, et en choisissant k suffisamment grand. L'intuition relative à cette idée est la suivante : D'après (3.2.2) et l'indépendance des variables aléatoires $N_{1,i}$ ($i \geq 1$), la fonction de Laplace de W sachant $Z_0 = k$ vaut $\phi_\xi^k(t)$. Ainsi on peut s'attendre, pour k suffisamment grand, à ce que la vitesse de décroissance de $\phi_k(\cdot)$ soit supérieure à celle de $\phi(\cdot)$, ce qui nous permet d'obtenir l'inéquation désirée.

En conséquence de ce résultat, on est en mesure de compléter les relations (1.4.10) et (1.4.11) concernant l'asymptotique de la distribution limite $\mathbb{P}_k(Z_n = j)$ avec ($j \geq k$), qui constitue la partie non triviale du Théorème 3.2.3.

La décroissance des coefficients ($q_{k,j}$) ($j \geq k$) est donnée par la finitude de la série suivante : soit r_k la solution de l'équation

$$\gamma_k = \mathbb{E}m_0^{-r_k}. \quad (1.4.21)$$

Alors, pour tout $r > r_k$, on a (c.f. Chap 2. Théorème 3.2.3 (b))

$$\sum_{j=k}^{\infty} j^{-r} q_{k,j} < \infty. \quad (1.4.22)$$

La relation (1.4.22) permet d'assurer la convergence de la suite de fonctions génératrices normalisées $G_{k,n}$ de Z_n vers une série entière Q_k de rayon de convergence non nul : pour $t \in [0, 1)$ et $k \geq 1$, on a (c.f. Chap 2. Théorème 3.2.3 (c))

$$\frac{G_{k,n}(t)}{\gamma_k^n} \uparrow Q_k(t) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (1.4.23)$$

où $G_{k,n}$ est la fonction génératrice de Z_n quand $Z_0 = k$, définie en (1.2.5), et la série entière

$$Q_k(t) = \sum_{j=k}^{\infty} q_{k,j} t^j \quad (1.4.24)$$

admet un rayon de convergence égal à 1. Elle est de plus caractérisée par l'équation fonctionnelle (c.f. Chap 2. Théorème 3.2.3 (d))

$$\gamma_k Q_k(t) = \mathbb{E} Q_k(f_0(t)), \quad t \in [0, 1), \quad (1.4.25)$$

avec la condition $Q^{(k)}(0) = 1$. Le comportement asymptotique des coefficients $q_{k,j}$ donné par (1.4.22) semble être un résultat nouveau même pour le processus de Galton-Watson. Les résultats (1.4.23) – (1.4.25) généralisent ceux obtenus dans le cas du processus de Galton-Watson (c.f. [5]), avec des différences significatives. En effet, lorsque l'environnement est aléatoire et non constant, on a, pour $k \geq 2$, $G_{k,1}(t) = \mathbb{E} f_0^k(t) \neq G_1^k(t)$ et ainsi $Q_k(t) \neq Q^k(t)$, alors que l'on a la relation $Q_k(t) = Q^k(t)$ pour le processus de Galton-Watson.

Dans la preuve du Théorème 3.2.3 (b), la décroissance polynômiale des coefficients $q_{k,j}$ est établie en démontrant que, pour tout $r > r_k$,

$$\sum_{j=k}^{\infty} j^{-r} q_{k,j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_k Z_n^{-r}}{\gamma_k^n} < \infty. \quad (1.4.26)$$

La démonstration de ce résultat nécessite d'étudier (au moins partiellement) l'asymptotique des moments harmoniques $\mathbb{E}_k Z_n^{-r}$ d'ordre $r > 0$ de Z_n , dont l'étude exhaustive est détaillée dans la section suivante. Donnons l'idée intuitive de la convergence (1.4.26). D'après la relation de récurrence (1.2.2), on a

$$\mathbb{E}_k [Z_{n+1}^{-r}] = \gamma_k \mathbb{E}_k [Z_n^{-r}] + \sum_{j=k+1}^{\infty} \mathbb{E}_j [Z_n^{-r}] \mathbb{P}_k(Z_1 = j).$$

Pour j assez grand, un phénomène de loi des grands nombres implique que le processus Z_n suit son comportement moyen, on a alors l'approximation $\mathbb{E}_j [Z_n^{-r}] \simeq (\mathbb{E} m_0^{-r})^n$, et ainsi

$$\mathbb{E}_k [Z_{n+1}^{-r}] \simeq \gamma_k \mathbb{E}_k [Z_n^{-r}] + (\mathbb{E} m_0^{-r})^n.$$

Par itération et en posant $c_r = \mathbb{E} m_0^{-r}$, on obtient

$$\mathbb{E}_k [Z_{n+1}^{-r}] \simeq \gamma_k^{n+1} + \sum_{j=0}^n \gamma_k^j c_r^{n-j}. \quad (1.4.27)$$

Ainsi, suivant les valeurs de r pour lesquelles $\gamma_k > c_r$ ($r > r_k$) ou $\gamma_k < c_r$ ($r < r_k$), on a $\mathbb{E}_k [Z_n^{-r}] \simeq \gamma_k^n$ ou $\mathbb{E}_k [Z_n^{-r}] \simeq c_r^n$, le membre de droite de l'équation (1.4.27) devenant alors une série géométrique de raison $(c_r/\gamma_k) < 1$ si $\gamma_k > c_r$ ($r > r_k$) ou $(\gamma_k/c_r) < 1$ si $\gamma_k < c_r$ ($r < r_k$). Le cas critique $\gamma_k = c_r$ ($r = r_k$) donne $\mathbb{E}_k [Z_n^{-r}] \simeq n\gamma_k^n$.

L'étude complète des moments harmoniques $\mathbb{E}_k [Z_n^{-r}]$ d'ordre $r > 0$ de Z_n et ses applications sont détaillées dans la section suivante et au Chapitre 3.

1.4.3 Asymptotique des moments harmoniques de Z_n et grandes déviations

Dans cette section nous détaillons les résultats du Chapitre 3 consacré à l'étude des moments harmoniques $\mathbb{E}_k[Z_n^{-r}]$ d'ordre $r > 0$ de Z_n , avec $k \geq 1$. L'importance de cette asymptotique est capitale pour une meilleure compréhension des rôles combinés que jouent le processus de branchement et la marche aléatoire associée. Elle est de plus fortement reliée aux grandes déviations inférieures.

Le résultat principal ci-dessous détermine l'asymptotique exacte des moments harmoniques de tout ordre avec une expression des constantes sous forme d'intégrales. Supposons $\mathbb{P}(Z_1 = 1) > 0$. Soit r_k la solution de l'équation

$$\mathbb{E}m_0^{-r_k} = \gamma_k, \quad (1.4.28)$$

avec

$$\gamma_k = \mathbb{P}_k(Z_1 = k). \quad (1.4.29)$$

On définit de plus la fonction génératrice "partielle" de Z_1 sachant $Z_0 = k$ par

$$\bar{G}_{k,1}(t) = G_{k,1}(t) - \gamma_k t^k = \sum_{j=k+1}^{\infty} t^j \mathbb{P}(Z_1 = j), \quad t \in [0, 1). \quad (1.4.30)$$

Sous la condition $\mathbb{E}m_0^{r_k+\varepsilon} < +\infty$, on a (c.f. Chap 3. Théorème 4.2.1)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\mathbb{E}_k [Z_n^{-r}]}{\gamma_k^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} Q_k(e^{-t}) t^{r-1} dt, & \text{si } r > r_k, \\ \frac{\mathbb{E}_k [Z_n^{-r}]}{n \gamma_k^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_k^{-1}}{\Gamma(r)} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^{\infty} \bar{G}_{k,1}(\phi_{\xi}(t)) t^{r-1} dt \right] & \text{si } r = r_k, \\ \frac{\mathbb{E}_k [Z_n^{-r}]}{(\mathbb{E}m_0^{-r})^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} \phi_k^{(r)}(t) t^{r-1} dt, & \text{si } r < r_k, \end{array} \right. \quad (1.4.31)$$

où $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx$ est la fonction Gamma, Q_k est la série entière définie en (1.4.24) et $\phi_k^{(r)}(t) = \mathbb{E}_k^{(r)}[e^{-tW}]$ est la transformée de Laplace de W sous la mesure $\mathbb{P}_k^{(r)}$, où $\mathbb{P}_k^{(r)}$ est une nouvelle mesure de probabilité (dépendant de r) définie, pour toute variable aléatoire T_n \mathcal{F}_n -mesurable, par

$$\mathbb{E}_k^{(r)}[T_n] = \frac{\mathbb{E}_k [\Pi_n^{-r} T_n]}{c_r^n}, \quad (1.4.32)$$

avec par convention $\mathbb{P}_1^{(r)} = \mathbb{P}^{(r)}$ et $\mathbb{E}_1^{(r)} = \mathbb{E}^{(r)}$. Le résultat (1.4.31) souligne l'existence de transitions de phase dans la vitesse de convergence des moments harmoniques de Z_n , avec pour valeur critique $r_k > 0$, solution de (1.4.28). Il généralise les résultats de [45] pour le processus de Galton-Watson. De plus, contrairement au cas du processus

à environnement constant, la valeur critique r_k est, en général, différente de la valeur critique a_k concernant l'existence des moments harmoniques de W . En effet, d'après (1.4.18), la constante de Schröder a_k est solution de l'équation

$$\mathbb{E} \left[p_1^k(\xi_0) m_0^{a_k} \right] = 1, \quad (1.4.33)$$

qui est en général différente de r_k , solution de

$$\mathbb{E}[m_0^{-r_k}] = \mathbb{E}[p_1^k(\xi_0)]. \quad (1.4.34)$$

Pour le processus de Galton-Watson, les constantes a_k et r_k , solutions de l'équation $p_1^k m_0^{r_k} = p_1^k m_0^{a_k} = 1$, coïncident.

Dans le cas des processus de branchement en environnement aléatoire, l'équivalent (1.4.31) complète et améliore le résultat de [36], où l'équivalent asymptotique de $\mathbb{E}_k[Z_n^{-r}]$ est déterminé dans le cas où $k = 1$ et $r < r_k$, et sous l'hypothèse de bornitude (1.3.29) plus forte que notre simple condition de moments.

La preuve de ce résultat est nouvelle et plus directe que celle proposée dans [45] pour le processus de Galton-Watson. L'heuristique (1.4.27) est ici reprise de manière plus rigoureuse et en utilisant les résultats du chapitre 2 :

Dans le cas où $r < r_k$, d'après le changement de mesure (1.4.32), on a

$$\mathbb{E}_k[Z_n^{-r}] = \mathbb{E}_k^{(r)}[W_n^{-r}] c_r^n,$$

où, d'après (1.4.18), $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_k^{(r)}[W_n^{-r}] = \mathbb{E}_k^{(r)}[W^{-r}] < \infty$ si et seulement si $\mathbb{E}_k^{(r)}[p_1(\xi_0)^k m_0^r] < 1$, ce qui équivaut à $r < r_k$.

Dans le cas où $r > r_k$, on a d'après (1.4.22)

$$\gamma_k^{-n} \mathbb{E}_k[Z_n^{-r}] = \sum_{j=k}^{\infty} j^{-r} \gamma_k^{-n} \mathbb{P}_k(Z_n = j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{j=k}^{\infty} j^{-r} q_{k,j} < \infty.$$

Dans le cas où $r = r_k$, l'équivalent (1.4.31) est démontré en utilisant la propriété de branchement

$$Z_{n+m} = \sum_{i=1}^{Z_m} Z_{n,i}^{(m)},$$

où conditionnellement à l'environnement ξ , pour $i \geq 1$, les processus $\{Z_{n,i}^{(m)} (i \geq 1) : n \geq 0\}$ sont des processus de branchement i.i.d. et évoluant sous l'environnement décalé $T^m(\xi_0, \xi_1, \dots) = (\xi_m, \xi_{m+1}, \dots)$, et sont de plus indépendants de Z_m . Cette approche à la fois simple et probabiliste aboutit à l'équation clé

$$\mathbb{E}_k[Z_{n+1}^{-r}] = \gamma_k^{n+1} + \sum_{j=0}^n b_j \gamma_k^{n-j} c_r^j,$$

avec $c_r = \mathbb{E} m_0^{-r}$, et $(b_j)_{j \geq 0}$ est une suite croissante bornée. La relation précédente souligne le rôle principal joué par les constantes γ_k et c_r dans l'asymptotique des

moments harmoniques $\mathbb{E}_k[Z_n^{-r}]$ de Z_n , pour lequel le comportement limite dépend des cas $\gamma_k < c_r$, $\gamma_k = c_r$ et $\gamma_k > c_r$. Soulignons de plus que les arguments clés précités utilisent les résultats du chapitre 2 concernant la valeur critique du moment harmonique de W ainsi que l'asymptotique de la probabilité $\mathbb{P}_k(Z_n = j)$ quand $n \rightarrow \infty$, avec $j \geq k \geq 1$.

Discutons maintenant de l'expression des constantes obtenues dans (1.4.31). Dans les cas $r > r_k$ et $r < r_k$, celles-ci généralisent celles obtenues dans [45], dans le sens où l'on retrouve l'expression des constantes [45, Théorème 1] lorsque l'environnement est constant. Pour le cas critique $r = r_k$, en considérant le cas particulier du processus de Galton-Watson avec $Z_0 = 1$ individus initiaux, et en comparant l'expression obtenue dans (1.4.31) avec celle obtenue dans [45, Théorème 1], on obtient une nouvelle et élégante identité vérifiée par les fonctions G , Q et ϕ : rappelons d'abord que

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbb{P}(Z_1 = k), \\ Q(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^{-n} G^{(n)}(t), \\ \phi(t) &= \mathbb{E}[e^{-tW}], \end{aligned}$$

et $m = \mathbb{E}[Z_1]$, $\gamma = \gamma_1 = \mathbb{P}(Z_1 = 1)$ et $\bar{G}(t) = G(t) - \gamma t$. Alors on a la relation

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} \bar{G}(\phi(u)) u^{r-1} du = \int_1^m Q(\phi(u)) u^{r-1} du. \quad (1.4.35)$$

Cette identité se généralise au cas des PBEA avec $Z_0 = k$ individus initiaux, et on a le résultat plus général suivant (c.f. Chap 3. Proposition 4.2.2)

$$\frac{1}{\gamma_k} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^{\infty} \bar{G}_{k,1}(\phi_{\xi}(u)) u^{r-1} du \right] = \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^{m_0} Q_k(\phi_{\xi}(u)) u^{r-1} du \right]. \quad (1.4.36)$$

En conséquence du résultat principal (1.4.31), on démontre un résultat de grandes déviations inférieures pour le processus Z_n . En effet, $\mathbb{E}[Z_n^{\lambda}] = \mathbb{E}[e^{\lambda \log Z_n}]$ est la transformée de Laplace de $\log Z_n$. D'après (1.4.31), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}_k[Z_n^{\lambda}] = \chi_k(\lambda) = \begin{cases} \log \gamma_k & \text{if } \lambda \leq \lambda_k, \\ \Lambda(\lambda) & \text{if } \lambda \in [\lambda_k, 0], \end{cases} \quad (1.4.37)$$

où $\Lambda(\lambda) = \log \mathbb{E} e^{\lambda X}$ est la log-Laplace de $X = \log m_0$. Alors, en utilisant une version du théorème de Gärtner-Ellis adaptée aux ensembles de la forme $\{Z_n \leq e^{\theta n}\}$ (c.f. [36, Lemme 3.1]), sous la condition $\mathbb{E} m_0^{r_k + \varepsilon} < \infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$, pour tout $k \geq 1$ et tout $\theta \in (0, \mathbb{E}[X])$, on a (c.f. Chap 3. Théorème 4.2.3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n \leq e^{\theta n}) = \chi_k^*(\theta), \quad (1.4.38)$$

où

$$\begin{aligned}\chi_k^*(\theta) &= \sup_{\lambda \leq 0} \{\lambda\theta - \chi_k(\lambda)\} \\ &= \begin{cases} -r_k\theta - \log \gamma_k & \text{si } 0 < \theta \leq \theta_k, \\ \Lambda^*(\theta) & \text{si } \theta_k \leq \theta < \mathbb{E}[X], \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4.39)$$

où Λ^* est la transformée de Fenchel-Legendre de Λ et

$$\theta_k = \Lambda'(-r_k). \quad (1.4.40)$$

La fonction de taux $\chi_k^*(\theta)$ s'interprète géométriquement comme la distance maximale entre le graphe de la fonction linéaire $l_\theta : \lambda \mapsto \theta\lambda$ de pente θ et le graphe de la fonction $\chi : \lambda \mapsto \chi(\lambda)$. Étant donné que $\chi(\lambda) = \Lambda(\lambda)$ pour $\lambda \in [-r_k, 0]$ et est ensuite constante $\chi(\lambda) = \log \gamma_k$ pour $\lambda \leq -r_k$, on peut aisément décrire les transitions de phase de $\chi^*(\theta)$ en fonction des valeurs de la pente θ de la fonction l_θ (c.f. Figures 1, 2, 3 suivantes).

1. Dans le cas où $\theta \in (\theta_k, \mathbb{E}[X])$, le maximum $\sup_{\lambda \leq 0} \{\lambda\theta - \chi(\lambda)\}$ est atteint pour $\lambda \in (-r_k, 0)$ tel que $\chi'(\lambda_\theta) = \Lambda'(\lambda_\theta) = \theta$, dont la valeur vaut $\chi^*(\theta) = \Lambda^*(\theta)$ (c.f. Figure 1.).
2. Dans le cas où $\theta = \theta_k$, on obtient la valeur critique pour laquelle l'équation $\Lambda'(\lambda) = \theta_k$ a une unique solution donnée par $\lambda = -r_k$ (c.f. Figure 2.).
3. Dans le cas où $\theta \in (0, \theta_k)$, le maximum $\sup_{\lambda \leq 0} \{\lambda\theta - \Lambda(\lambda)\}$ est atteint en $\lambda = -r_k$, et alors $\chi^*(\theta) = -r_k\theta - \log \gamma_k$ devient linéaire en θ (c.f. Figure 3.).

Fig. 1,2,3 : Interprétation géométrique de $\chi^*(\theta)$

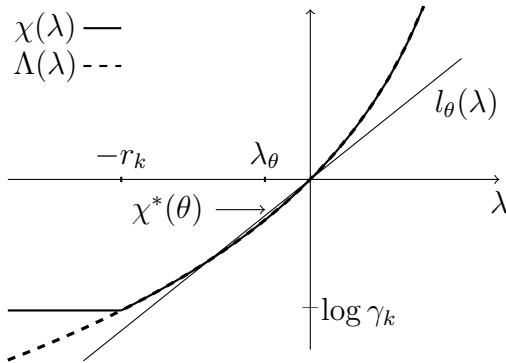


Fig. 1 : $\theta \in (\theta_k, \mathbb{E}[X])$

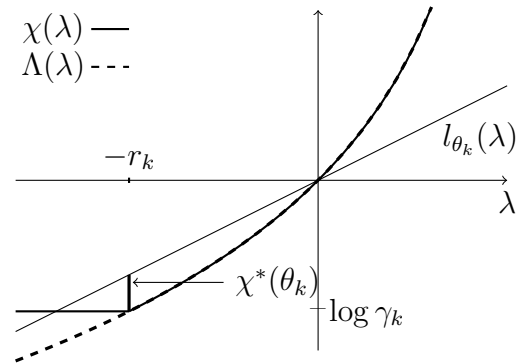
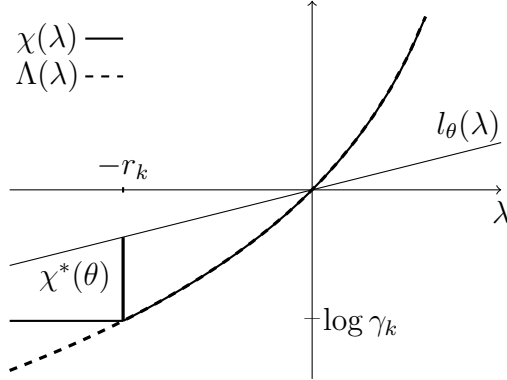


Fig. 2 : $\theta = \theta_k$

Fig. 3 : $\theta \in (0, \theta_k)$

Le résultat (1.4.38) corrige et améliore le Théorème 3.1 (ii) de [12] dans le cas où $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. De plus, (1.4.39) et (1.4.40) donnent une expression alternative de la fonction de taux et de la transition de phase. En effet, il est établi dans [12, Théorème 3.1 (ii)] que, sous les hypothèses $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et $\mathbb{E}[m_0^t] < \infty$ pour tout $t > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n \leq e^{\theta n}) = I_k(\theta), \quad (1.4.41)$$

avec

$$I_k(\theta) = \begin{cases} \rho_k \left(1 - \frac{\theta}{\theta_k^*}\right) + \frac{\theta}{\theta_k^*} \Lambda^*(\theta_k^*) & \text{si } 0 < \theta < \theta_k^*, \\ \Lambda^*(\theta) & \text{si } \theta_k^* \leq \theta < \mathbb{E}[X], \end{cases} \quad (1.4.42)$$

θ_k^* est l'unique solution de l'équation

$$\frac{\rho_k - \Lambda^*(\theta_k^*)}{\theta_k^*} = \inf_{0 \leq \theta \leq \mathbb{E}[X]} \frac{\rho_k - \Lambda^*(\theta)}{\theta} \quad (1.4.43)$$

et

$$\rho_k = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n = j). \quad (1.4.44)$$

Lorsque $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$, il a été établi à tort dans [13] et [12, Théorème 3.1 (ii)] que $\rho_k = -k \log \gamma$ (ceci a déjà été commenté dans la Section 1.4.2 (c.f. (1.4.14))). La valeur exacte de ρ_k est (c.f. Chap. 2, Théorème 3.2.3)

$$\rho_k = -\log \gamma_k. \quad (1.4.45)$$

Avec la correction précédente, les valeurs critiques θ_k et θ_k^* et les fonctions de taux I_k et χ_k^* coïncident, c'est à dire

$$\theta_k = \theta_k^* \quad \text{et} \quad \chi_k^*(\theta) = I_k(\theta) \quad \text{pour tout } \theta \in (0, \mathbb{E}[X]). \quad (1.4.46)$$

En effet, d'après la définition de θ_k^* en (1.4.43), la dérivée de la fonction $\theta \mapsto \frac{\rho_k - \Lambda^*(\theta)}{\theta}$ s'annule pour $\theta = \theta_k^*$. De plus, par dualité, on a $(\Lambda^*)'(\theta) = \lambda_\theta$, avec $\Lambda'(\lambda_\theta) = \theta$. Ainsi, pour $\theta = \theta_k^*$,

$$\Lambda^*(\theta) = \lambda_\theta \theta + \rho_k. \quad (1.4.47)$$

En utilisant la relation $\Lambda^*(\theta) = \lambda_\theta \theta - \Lambda(\lambda_\theta)$, on obtient

$$\Lambda(\lambda_\theta) = -\rho_k,$$

et ainsi $\lambda_\theta = -r_k$ et $\theta_k^* = \Lambda'(-r_k) = \theta_k$.

De plus, d'après (1.4.47) et les relations $\Lambda(-r_k) = \log \gamma_k = -\rho_k$ et $\theta_k = \Lambda'(-r_k)$, on a

$$-r_k \theta_k - \Lambda(-r_k) = -r_k \theta_k + \rho_k = \Lambda_k^*(\theta_k).$$

Ainsi, pour tout $\theta \in (0, \theta_k]$,

$$\begin{aligned} -r_k \theta - \log \gamma_k &= -r_k \theta - \Lambda(-r_k) \\ &= \frac{\theta}{\theta_k} (-r_k \theta_k - \Lambda(-r_k)) + \frac{\theta}{\theta_k} \Lambda(-r_k) - \Lambda(-r_k) \\ &= \frac{\theta}{\theta_k} \Lambda_k^*(\theta_k) - \left(1 - \frac{\theta}{\theta_k}\right) \log \gamma_k, \end{aligned}$$

et donc $I_k(\theta) = \chi_k^*(\theta)$, ce qui démontre (1.4.46). Ainsi, dans le cas où $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$, d'après (1.4.46) et (1.4.31), (1.4.41) est valide sous l'hypothèse $\mathbb{E}[m_0^{r_k+\varepsilon}] < \infty$.

De la même manière, l'équivalent (1.4.31) peut s'appliquer à majorer la probabilité d'événements "sous-exponentiels". Précisément, pour toute suite k_n dite sous-exponentielle dans le sens où $k_n \rightarrow \infty$ et $k_n / \exp(\theta n) \rightarrow 0$ pour $\theta > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n \leq k_n) = \log \gamma_k. \quad (1.4.48)$$

Ce résultat découle directement de (1.4.31) et de l'inégalité de Markov : pour tout $r \geq r_k$, on a (c.f. Chap 3, Corollaire 4.2.5)

$$\gamma_k^n = \mathbb{P}_k(Z_n = k) \leq \mathbb{P}_k(Z_n \leq k_n) \leq \mathbb{E}[Z_n^{-r}] k_n^r \leq \min\{\gamma_k^n k_n^r, \gamma_k^n k_n^{r_k} n\}.$$

De plus, (1.4.48) corrige l'erreur $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n \leq k_n) = k \log \gamma$ établie dans [12, Theorem 3.1(ii)] et qui est une conséquence de l'incorrect (1.4.14).

L'inégalité de Markov peut aussi s'appliquer pour démontrer une borne pour les grandes déviations inférieures précises : pour tout $k \geq 1$, on a (c.f. Chap 3, Corollaire 4.2.6)

$$\mathbb{P}_k(Z_n \leq e^{\theta n}) \leq \inf_{r>0} \frac{\mathbb{E}_k[Z_n^{-r}]}{e^{\theta r n}} = \begin{cases} e^{-n(-\theta r_k - \Lambda(-r_k))} & \text{si } 0 < \theta \leq \theta_k, \\ n e^{-n(-\theta_k r_k - \Lambda(-r_k))} & \text{si } \theta = \theta_k, \\ e^{-n\Lambda^*(\theta)} & \text{si } \theta_k \leq \theta < \mathbb{E}[X]. \end{cases} \quad (1.4.49)$$

La question d'un équivalent asymptotique des quantités $\mathbb{P}_k(Z_n \leq k_n)$ et $\mathbb{P}_k(Z_n \leq e^{\theta n})$ est l'objet de travaux en cours.

Discutons maintenant du cas où le processus est linéaire fractionnaire avec $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. Dans ce cas, on a $\log \gamma_k = \log \mathbb{E}[e^{-kX}] = \Lambda(-k)$ et donc $r_k = k$, d'où

$$\chi_k^*(\theta) = \begin{cases} -k\theta - \log \mathbb{E}[e^{-kX}] & \text{si } 0 < \theta \leq \theta_k, \\ \Lambda^*(\theta) & \text{si } \theta_k \leq \theta < \mathbb{E}[X], \end{cases} \quad (1.4.50)$$

avec

$$\theta_k = \mathbb{E}[Xe^{-kX}]/\mathbb{E}[e^{-kX}]. \quad (1.4.51)$$

Les équations (1.4.50) (1.4.51) complètent et corrigent les résultats de [12, Corollaire 3.3]. En effet, le facteur k est manquant dans les équations (1.3.14) et (1.3.15), et celles-ci ne sont valides que dans le cas où $a_0 > 0$ et $k \geq 1$ (car alors ρ est indépendant de k), ou dans le cas où $a_0 = 0$ et $k = 1$.

En autre conséquence du résultat principal (1.4.31), nous améliorons la vitesse de convergence dans le théorème central limite vérifié par $W - W_n$ et établi dans [36] : sous les conditions $\text{essinf } \frac{m_0(2)}{m_0^2} > 1$ et $\mathbb{E}Z_1^{2+\varepsilon} < \infty$ avec $\varepsilon \in (0, 1]$, il existe une constante $C > 0$ tel que, pour tout $k \geq 1$, (c.f. Chap 3. Théorème 4.2.8)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}_k \left(\frac{\Pi_n(W - W_n)}{\sqrt{Z_n} \delta_\infty(T^n \xi)} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq CA_{k,n}(\varepsilon/2), \quad (1.4.52)$$

où

$$A_{k,n}(r) := \begin{cases} \gamma_k^n & \text{si } r > r_k, \\ n\gamma_k^n & \text{si } r = r_k, \\ c_r^n & \text{si } r < r_k \end{cases} \quad (1.4.53)$$

est la quantité donnant la vitesse asymptotique de $\mathbb{E}_k[Z_n^{-r}]$. L'équation (1.4.52) améliore la vitesse de convergence établie dans [36, Theorem 1.7]. Notons que notre approche nécessite l'hypothèse $\text{essinf } \frac{m_0(2)}{m_0^2} > 1$ qui permet d'assurer que la variance conditionnelle $\delta_\infty(\xi)$ de W est séparée de 0 uniformément sur tous les environnements ξ . Cette condition n'est pas satisfaisante et devrait pouvoir être relaxée. Il suffirait de trouver une hypothèse convenable permettant d'assurer l'existence de moments harmoniques pour la variable $\delta_\infty(\xi)$.

Une autre application du résultat principal (1.4.31) concerne le taux de décroissance des grandes déviations pour le ratio $R_n = \frac{Z_{n+1}}{Z_n}$. Soit

$$M_{n,j} = j^{-1} \sum_{i=1}^j N_{n,i},$$

où, conditionnellement à l'environnement ξ , les variables aléatoires $N_{n,i}$ ($i = 1, \dots, j$) sont i.i.d. et avec pour fonction génératrice f_n . La quantité $M_{n,j}$ est l'estimateur de m_n de taille j sous l'environnement ξ . Pour tout $k \geq 1$, en supposant qu'il existe un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ et des constantes $C_1 > 0$ et $r > 0$ telles que, pour tout $j \geq 1$,

$$\mathbb{P}(M_{0,j} - m_0 \in D) \leq \frac{C_1}{j^r}, \quad (1.4.54)$$

alors il existe une constante $B_1 \in (0, \infty)$ tel que (c.f. Chap 3. Théorème 4.2.9)

$$\mathbb{P}_k(R_n - m_n \in D) \leq B_1 A_{k,n}(r). \quad (1.4.55)$$

De plus, s'il existe une constante $C_2 > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(M_{0,j} - m_0 \in D) \geq \frac{C_2}{j^r}, \quad (1.4.56)$$

alors il existe une constante $B_2 \in (0, \infty)$ tel que (c.f. Chap 3. Théorème 4.2.9)

$$\mathbb{P}_k(R_n - m_n \in D) \geq B_2 A_{k,n}(r), \quad (1.4.57)$$

En particulier on observe des transitions de phase dans le taux de convergence en fonction des cas $r > \gamma_k$, $r = \gamma_k$ et $r < \gamma_k$.

Le résultat suivant donne une majoration de la probabilité de grande déviation de $R_n - m_n$, en supposant une hypothèse plus naturelle d'existence de moments pour $Z_1 - m_0$. Soit $k \geq 1$. Supposons qu'il existe $p > 1$ tel que $\mathbb{E}|Z_1 - m_0|^p < \infty$. Alors, il existe une constante positive C_p tel que, pour tout $k \geq 1$ et $a > 0$, (c.f. Chap 3. Théorème 4.2.10)

$$\mathbb{P}_k(|R_n - m_n| > a) \leq \begin{cases} C_p a^{-p} A_{k,n}(p-1) & \text{si } p \in (1, 2], \\ C_p a^{-p} A_{k,n}(p/2) & \text{si } p \in (2, \infty), \end{cases} \quad (1.4.58)$$

où $A_{k,n}$ est défini en (1.4.53).

1.4.4 Énoncé des théorèmes et corollaires

Dans cette section nous énonçons précisément les résultats principaux de la thèse relatifs aux trois chapitres. La numérotation des théorèmes fait référence à leur numérotation dans les différents chapitres.

Chap 1. Borne Berry-Esseen et grandes déviations de type Cramér

Théorème 2.1.1. *Supposons qu'il existe des constantes $\varepsilon > 0$ et $p > 1$ telles que $\mathbb{E}X^{3+\varepsilon} < \infty$ et $\mathbb{E}W_1^p < \infty$. Alors*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

où $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ désigne la loi normale standard.

Théorème 2.5.5. *Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{E}X^{3+\varepsilon} < \infty$. Alors*

$$d_W \left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \mathcal{N} \right) = \sup_{h \in \mathcal{H}_W} \left| \mathbb{E}h \left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right) - \mathbb{E}h(\mathcal{N}) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

où $d_W(X, \mathcal{N})$ désigne la distance de Wasserstein entre la loi de X et la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, définie en (2.5.3) du Chapitre 1.

Théorème 2.1.3. *Supposons qu'il existe des constantes $\lambda_0 > 0$ et $p > 1$ telles que $\mathbb{E}e^{\lambda_0 X} < \infty$ et $\mathbb{E}\frac{Z_1^p}{m_0} < \infty$. Alors, pour $0 \leq x = o(\sqrt{n})$, on a, quand $n \rightarrow \infty$,*

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right)}{1 - \Phi(x)} = \exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\} \left[1 + O\left(\frac{1+x}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

et

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < -x\right)}{\Phi(-x)} = \exp\left\{-\frac{x^3}{\sqrt{n}} \mathcal{L}\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\} \left[1 + O\left(\frac{1+x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

où $\mathcal{L}(\cdot)$ est la série de Cramér de la marche aléatoire associée S_n , définie en (1.4.4) de l'introduction.

Corollaire 2.1.4. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1.3, on a, pour $0 \leq x = o(n^{1/6})$ et $n \rightarrow \infty$,*

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right)}{1 - \Phi(x)} = 1 + O\left(\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}\right)$$

et

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < -x\right)}{\Phi(-x)} = 1 + O\left(\frac{1+x^3}{\sqrt{n}}\right).$$

Chap 2. Asymptotique de la loi de Z_n et moment harmonique de W

Théorème 3.2.1. *Supposons qu'il existe $p > 0$ tel que $\mathbb{E}[m_0^p] < \infty$. Alors, pour tout $a \in (0, p)$,*

$$\mathbb{E}_k W^{-a} < \infty \quad \text{si et seulement si} \quad \mathbb{E}[p_1^k(\xi_0)m_0^a] < 1.$$

Corollaire 3.2.2. *Soit $a_k > 0$ la solution de l'équation*

$$\mathbb{E}[p_1^k(\xi_0)m_0^{a_k}] = 1.$$

Supposons que $\mathbb{E}m_0^{a_k} < \infty$. Alors,

$$\begin{cases} \mathbb{E}_k W^{-a} < \infty & \text{pour } a \in [0, a_k), \\ \mathbb{E}_k W^{-a} = \infty & \text{pour } a \in [a_k, \infty). \end{cases}$$

Théorème 3.2.3. *Supposons $\mathbb{P}(Z_1 = 1) > 0$. Alors :*

a) *Pour tout $k \geq 1$ et pour tout état accessible $j \geq k$, i.e. $\mathbb{P}_k(Z_l = j) > 0$ pour un certain $l \geq 0$, on a*

$$\mathbb{P}_k(Z_n = j) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \gamma_k^n q_{k,j},$$

avec

$$\gamma_k = \mathbb{P}_k(Z_1 = k),$$

et les coefficients $q_{k,j} \in (0, +\infty)$ peuvent se calculer comme l'unique solution de l'équation de récurrence

$$\gamma_k q_{k,j} = \sum_{i=k}^j p(i, j) q_{k,i},$$

avec

$$p(i, j) = \mathbb{P}(Z_1 = j | Z_0 = i)$$

et sous la condition $q_{k,k} = 1$ et $q_{k,i} = 0$ pour tout état i non accessible, i.e. $\mathbb{P}_k(Z_l = i) = 0$ pour tout $l \geq 0$.

- b) Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{E}[m_0^{r_k+\varepsilon}] < \infty$, avec r_k la solution de (1.4.28). Alors, pour tout $r > r_k$ et $j \geq k$, on a

$$\sum_{j=k}^{\infty} q_{k,j} j^{-r} < \infty.$$

En particulier le rayon de convergence de la série entière

$$Q_k(t) = \sum_{j=k}^{+\infty} q_{k,j} t^j$$

vaut 1.

- c) Pour tout $t \in [0, 1)$ et $k \geq 1$, on a

$$\frac{G_{k,n}(t)}{\gamma_k^n} \uparrow Q_k(t) \quad (n \rightarrow \infty),$$

où $G_{k,n}$ est la fonction génératrice de Z_n sachant $Z_0 = k$, définie en (1.2.5).

- d) $Q_k(t)$ est l'unique série entière satisfaisant l'équation fonctionnelle

$$\gamma_k Q_k(t) = \mathbb{E}[Q_k(f_0(t))], \quad t \in [0, 1),$$

sous la condition $Q_k^{(k)}(0) = 1$.

Chap 3. Moments harmoniques de Z_n et grandes déviations

Théorème 4.2.1. Soit $k \geq 1$ et supposons que $\mathbb{E}m_0^{r_k+\varepsilon} < +\infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$, avec r_k la solution de (1.4.28). Alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\mathbb{E}_k[Z_n^{-r}]}{\gamma_k^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty Q_k(e^{-t}) t^{r-1} dt, & \text{si } r > r_k, \\ \frac{\mathbb{E}_k[Z_n^{-r}]}{n \gamma_k^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_k^{-1}}{\Gamma(r)} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^\infty \bar{G}_{k,1}(\phi_\xi(t)) t^{r-1} dt \right] & \text{si } r = r_k, \\ \frac{\mathbb{E}_k[Z_n^{-r}]}{(\mathbb{E}m_0^{-r})^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \phi_k^{(r)}(t) t^{r-1} dt, & \text{si } r < r_k, \end{array} \right.$$

où $C(k, r) \in (0, \infty)$, $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx$ est la fonction Gamma, et $\phi_k^{(r)}(t) = \mathbb{E}_k^{(r)} e^{-tW}$ est la transformée de Laplace de W sous la mesure $\mathbb{P}_k^{(r)}$, et $G_{k,1}$ est la fonction génératrice partielle de Z_1 définie en (1.4.30).

Proposition 4.2.2. *Soit $r = r_k$. On a*

$$\frac{1}{\gamma_k} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^\infty \bar{G}_{k,1}(\phi_\xi(u)) u^{r-1} du \right] = \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^{m_0} Q_k(\phi_\xi(u)) u^{r-1} du \right].$$

Théorème 4.2.3. *Soit $k \geq 1$ et r_k la solution de l'équation (1.4.28). On suppose que $\mathbb{E}m_0^{r_k+\varepsilon} < \infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Alors, pour tout $\theta \in (0, \mathbb{E}[X])$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k \left(Z_n \leq e^{\theta n} \right) = \chi_k^*(\theta),$$

où

$$\chi_k^*(\theta) = \begin{cases} -r_k \theta - \log \gamma_k & \text{si } 0 < \theta \leq \theta_k, \\ \Lambda^*(\theta) & \text{si } \theta_k \leq \theta < \mathbb{E}[X], \end{cases}$$

avec

$$\theta_k = \Lambda'(-r_k),$$

et $\Lambda(\lambda) = \log \mathbb{E} e^{\lambda X}$ est la log-Laplace de $X = \log m_0$, et $\Lambda^*(\cdot)$ est la transformée de Fenchel-Legendre de $\Lambda(\cdot)$.

Corollaire 4.2.5. *Supposons que $\mathbb{E}m_0^{r_k+\varepsilon} < +\infty$, avec r_k la solution de (1.4.28). Soit k_n une suite vérifiant $k_n \rightarrow \infty$ et $k_n / \exp(\theta n) \rightarrow 0$ pour tout $\theta > 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors, pour tout $k \geq 1$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k \left(Z_n \leq k_n \right) = \log \gamma_k.$$

Corollaire 4.2.6. *Supposons que $\mathbb{E}m_0^{r_k+\varepsilon} < +\infty$, avec r_k la solution de (1.4.28). Pour tout $k \geq 1$, on a*

$$\mathbb{P}_k \left(Z_n \leq e^{\theta n} \right) \leq \inf_{r>0} \frac{\mathbb{E}_k [Z_n^{-r}]}{e^{\theta r n}} = \begin{cases} e^{-n(-\theta r_k - \Lambda(-r_k))} & \text{si } 0 < \theta \leq \theta_k, \\ n e^{-n\Lambda^*(\theta_k)} & \text{si } \theta = \theta_k, \\ e^{-n\Lambda^*(\theta)} & \text{si } \theta_k \leq \theta < \mathbb{E}[X]. \end{cases}$$

Corollaire 4.2.7. *Soit Z_n un PBEA géométrique. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{E}[e^{(k+\varepsilon)X}] < \infty$. Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k \left(Z_n \leq e^{\theta n} \right) = \chi_k^*(\theta),$$

avec

$$\chi_k^*(\theta) = \begin{cases} -k\theta - \log \mathbb{E}[e^{-kX}] & \text{si } 0 < \theta \leq \theta_k, \\ \Lambda^*(\theta) & \text{si } \theta_k \leq \theta < \mathbb{E}[X], \end{cases}$$

et

$$\theta_k = \mathbb{E}[X e^{-kX}] / \mathbb{E}[e^{-kX}].$$

Théorème 4.2.8. *Supposons que $\mathbb{E}m_0^{r_k+\varepsilon} < +\infty$, $\text{essinf } \frac{m_0(2)}{m_0^2} > 1$ et $\mathbb{E}Z_1^{2+\varepsilon} < \infty$ pour un certain $\varepsilon \in (0, 1]$. Alors il existe une constante $C > 0$ tel que, pour tout $k \geq 1$,*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}_k \left(\frac{\Pi_n(W - W_n)}{\sqrt{Z_n} \delta_\infty(T^n \xi)} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq CA_{k,n}(\varepsilon/2),$$

où $A_{k,n}$ est défini en (1.4.53) de l'introduction.

Théorème 4.2.9. *Soit $k \geq 1$ et $\mathbb{E}m_0^{r_k+\varepsilon} < +\infty$. Si, pour un sous ensemble $D \subset \mathbb{R}$, il existe des constantes $C_1 > 0$ et $r > 0$ telles que, pour tout $j \geq 1$,*

$$\mathbb{P}(M_{0,j} - m_0 \in D) \leq \frac{C_1}{j^r},$$

alors il existe $B_1 \in (0, \infty)$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}_k(R_n - m_n \in D) \leq B_1 A_{k,n}(r).$$

De même, s'il existe des constantes $C_2 > 0$ et $r > 0$ telles que, pour tout $j \geq 1$,

$$\mathbb{P}(M_{0,j} - m_0 \in D) \geq \frac{C_2}{j^r},$$

alors il existe $B_2 \in (0, \infty)$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}_k(R_n - m_n \in D) \geq B_2 A_{k,n}(r).$$

Théorème 4.2.10. *Soit $k \geq 1$ et $\mathbb{E}m_0^{r_k+\varepsilon} < +\infty$. Supposons qu'il existe $p > 1$ tel que $\mathbb{E}|Z_1 - m_0|^p < \infty$. Alors il existe une constante $C_p > 0$ telle que, pour tout $a > 0$,*

$$\mathbb{P}_k(|R_n - m_n| > a) \leq \begin{cases} C_p a^{-p} A_{k,n}(p-1) & \text{si } p \in (1, 2], \\ C_p a^{-p} A_{k,n}(p/2) & \text{si } p \in (2, \infty). \end{cases}$$

Chapitre 2

Borne de Berry-Esseen et grandes déviations de type Cramér

Résumé

Soit (Z_n) un processus de branchement sur-critique en environnement aléatoire noté $\xi = (\xi_n)$. Nous démontrons un théorème type Berry-Esseen ainsi qu'un résultat de grandes déviations de type Cramér pour le processus $\log Z_n$ sous la loi totale \mathbb{P} . Nous améliorons aussi certains résultats ultérieurs concernant l'existence de moments harmoniques pour la variable limite $W = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n$, où $W_n = Z_n / \mathbb{E}_\xi Z_n$ est la population normalisée.

Abstract

Let (Z_n) be a supercritical branching process in a random environment $\xi = (\xi_n)$. We establish a Berry-Esseen bound and a Cramér's type large deviation expansion for $\log Z_n$ under the annealed law \mathbb{P} . We also improve some earlier results about the harmonic moments of the limit variable $W = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n$, where $W_n = Z_n / \mathbb{E}_\xi Z_n$ is the normalized population size.

This chapter has been published in
Stochastic Processes and their Applications.

Title : Berry-Esseen's bound and Cramér's type large deviation expansion for a branching process in a random environment.

DOI : 10.1016/j.spa.2016.07.014

<http://dx.doi.org/10.1016/j.spa.2016.07.014>

It has been written in collaboration with Ion Grama and Quansheng Liu.

2.1 Introduction and main results

A branching process in a random environment (BPRE) is a natural and important generalization of the Galton-Watson process, where the reproduction law varies according to a random environment indexed by time. It was introduced for the first time in Smith and Wilkinson [48] to modelize the growth of a population submitted to an environment. For background concepts and basic results concerning a BPRE we refer to Athreya and Karlin [3, 4]. In the critical and subcritical regimes the process goes out and the research interest is concentrated mostly on the survival probability and conditional limit theorems for the branching process, see e.g. Afanasyev, Böinghoff, Kersting and Vatutin [1, 2], Vatutin [52], Vatutin and Zheng [53], and the references therein. In the supercritical case, a great deal of current research has been focused on large deviation principle, see Bansaye and Berestycki [10], Böinghoff and Kersting [20], Bansaye and Böinghoff [11–13], Huang and Liu [36]. In the particular case when the offspring distribution is geometric, precise asymptotics can be found in Kozlov [39], Böinghoff [18], Nakashima [44]. In this article, we complete on these results by giving the Berry-Esseen bound and asymptotics of large deviations of Cramér’s type for a supercritical BPRE.

A BPRE can be described as follows. The random environment is represented by a sequence $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots)$ of independent and identically distributed random variables (i.i.d. r.v.’s) taking values in an abstract space Ξ . The random variable ξ_n represents the random environment at time n ; to each realization of ξ_n corresponds a probability law $\{p_i(\xi_n) : i \in \mathbb{N}\}$ on $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, whose probability generating function is

$$f_{\xi_n}(s) = f_n(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\xi_n) s^i, \quad s \in [0, 1], \quad p_i(\xi_n) \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\xi_n) = 1. \quad (2.1.1)$$

Define the process $(Z_n)_{n \geq 0}$ by the relations

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} N_{n,i}, \quad \text{for } n \geq 0, \quad (2.1.2)$$

where $N_{n,i}$ is the number of children of the i -th individual of the generation n . Conditionally on the environment ξ , the r.v.’s $N_{n,i}$ ($i = 1, 2, \dots$) are independent of each other with common probability generating function f_n , and also independent of Z_n .

In the sequel we denote by \mathbb{P}_ξ the *quenched law*, i.e. the conditional probability when the environment ξ is given, and by τ the law of the environment ξ . Then $\mathbb{P}(dx, d\xi) = \mathbb{P}_\xi(dx)\tau(d\xi)$ is the total law of the process, called *annealed law*. The corresponding quenched and annealed expectations are denoted respectively by \mathbb{E}_ξ and \mathbb{E} . We also define, for $n \geq 0$,

$$m_n = m_n(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i(\xi_n) \quad \text{and} \quad \Pi_n = \mathbb{E}_\xi Z_n = m_0 \dots m_{n-1},$$

where m_n represents the average number of children of an individual of generation n when the environment ξ is given. Let

$$W_n = \frac{Z_n}{\Pi_n}, \quad n \geq 0, \quad (2.1.3)$$

be the normalized population size. It is well known that the sequence $(W_n)_{n \geq 0}$ is a positive martingale both under the quenched law \mathbb{P}_ξ and under the annealed law \mathbb{P} with respect to the natural filtration

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi, N_{k,i}, 0 \leq k \leq n-1, i = 1, 2, \dots),$$

where by convention $\mathcal{F}_0 = \sigma(\xi)$. Then the limit $W = \lim W_n$ exists \mathbb{P} -a.s. and $\mathbb{E}W \leq 1$.

An important tool in the study of a BPFE is the associated random walk

$$S_n = \log \Pi_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \geq 1,$$

where the r.v.'s $X_i = \log m_{i-1}$ ($i \geq 1$) are i.i.d. depending only on the environment ξ . It turns out that the behavior of the process (Z_n) is mainly determined by the associated random walk which is seen from the decomposition

$$\log Z_n = S_n + \log W_n. \quad (2.1.4)$$

For the sake of brevity set $X = \log m_0$,

$$\mu = \mathbb{E}X \quad \text{and} \quad \sigma^2 = \mathbb{E}(X - \mu)^2.$$

We shall assume that the BPFE is supercritical, with $\mu \in (0, \infty)$; together with $\mathbb{E}|\log(1 - p_0(\xi_0))| < \infty$ this implies that the population size tends to infinity with positive probability (see [4]). We also assume that the random walk (S_n) is non-degenerate with $0 < \sigma^2 < \infty$; in particular this implies that

$$\mathbb{P}(Z_1 = 1) = \mathbb{E}p_1(\xi_0) < 1. \quad (2.1.5)$$

Throughout the paper, we assume the following condition :

$$\mathbb{E} \frac{Z_1 \log^+ Z_1}{m_0} < \infty, \quad (2.1.6)$$

which implies that the martingale W_n converges to W in $L^1(\mathbb{P})$ (see e.g. [50]) and

$$\mathbb{P}(W > 0) = \mathbb{P}(Z_n \rightarrow \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) > 0.$$

Furthermore, we assume in the sequel that each individual has at least one child, which means that

$$p_0 = 0 \quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \quad (2.1.7)$$

In particular this implies that the associated random walk has positive increments, $Z_n \rightarrow \infty$ and $W > 0$ \mathbb{P} -a.s. Throughout the paper, we denote by C an absolute constant whose value may differ from line to line.

Our first result is a Berry-Esseen type bound for $\log Z_n$, which holds under the following additional assumptions :

A1. There exists a constant $\delta \in (0, 1]$ such that

$$\mathbb{E}X^{2+\delta} < \infty. \quad (2.1.8)$$

A2. There exists a constant $p > 1$ such that

$$\mathbb{E} \left(\frac{Z_1}{m_0} \right)^p < \infty. \quad (2.1.9)$$

Theorem 2.1.1. *Under conditions **A1** and **A2**, we have*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C}{n^{\delta/2}},$$

where $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ is the standard normal distribution function.

Theorem 2.1.1 completes the results of [36] by giving the rate of convergence in the central limit theorem for $\log Z_n$. The proof of this theorem is based on the decomposition (2.1.4) and the asymptotic properties of the joint law of $(S_n, \log Z_n)$. In Appendix we also give a bound of the Wasserstein distance and an alternative proof of Theorem 2.1.1 using Stein's method under a moment condition slightly stronger than **A1**.

Our next result concerns the asymptotic behavior of the left-tail of the r.v. W . For the Galton-Watson process this problem is well studied, see e.g. [27] and the references therein. For a BPRE, some interesting results have been obtained in [34] and [36]. In particular, for the annealed law, Huang and Liu ([36], Theorem 1.4) have found a necessary and sufficient condition for the existence of harmonic moments of W , under the following hypothesis :

$$\exists \delta > 0 \text{ and } A > A_1 > 1 \text{ such that } A_1 \leq m_0 \text{ and } \sum_{i=1}^{\infty} i^{1+\delta} p_i(\xi_0) \leq A^{1+\delta} \text{ a.s.} \quad (2.1.10)$$

However, this hypothesis is very restrictive ; it implies in particular that $1 < A_1 \leq m_0 \leq A$. We will show (see Theorem 2.1.2) the existence of harmonic moments under the following significantly less restrictive assumption :

A3. The r.v. $X = \log m_0$ has an exponential moment, i.e. there exists a constant $\lambda_0 > 0$ such that

$$\mathbb{E}e^{\lambda_0 X} = \mathbb{E}m_0^{\lambda_0} < \infty. \quad (2.1.11)$$

Under this hypothesis, since X is a positive random variable, the function $\lambda \mapsto \mathbb{E}e^{\lambda X}$ is finite for all $\lambda \in (-\infty, \lambda_0]$ and is increasing.

Theorem 2.1.2. *Assume condition **A3**. Let*

$$a_0 = \begin{cases} \frac{\lambda_0}{1 - \log \mathbb{E} m_0^{\lambda_0} / \log \mathbb{E} p_1} & \text{if } \mathbb{P}(p_1 > 0) > 0, \\ \lambda_0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.1.12)$$

Then, for all $a \in (0, a_0)$,

$$\mathbb{E} W^{-a} < \infty.$$

Yet, a necessary and sufficient condition for the existence of harmonic moments of order $a > 0$ under condition **A3** is still an open question.

The previous theorem allows us to obtain a Cramér type large deviation expansion for a BPRE. To state the corresponding result we need more notations. Let L and Λ be respectively the moment and cumulant generating function of the random variable X :

$$L(\lambda) = \mathbb{E} e^{\lambda X} = \mathbb{E} (m_0^\lambda), \quad (2.1.13)$$

$$\Lambda(\lambda) = \log L(\lambda). \quad (2.1.14)$$

Then Λ is analytical for $\lambda \leq \lambda_0$ and we have $\Lambda(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!} \lambda^k$, where $\gamma_k = \frac{d^k \Lambda}{d\lambda^k}(0)$ is the cumulant of order k of the random variable X . In particular for $k = 1, 2$, we have $\gamma_1 = \mu$ and $\gamma_2 = \sigma^2$. We shall use the Cramér's series of the associated random walk $(S_n)_{n \geq 0}$ defined by

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\gamma_3}{6\gamma_2^{3/2}} + \frac{\gamma_4\gamma_2 - 3\gamma_3^2}{24\gamma_2^3} t + \frac{\gamma_5\gamma_2^2 - 10\gamma_4\gamma_3\gamma_2 + 15\gamma_3^3}{120\gamma_2^{9/2}} t^2 + \dots \quad (2.1.15)$$

(see Cramér [23] and Petrov [46]) which converges for $|t|$ small enough.

Consider the following assumption :

A4. There exists a constant $p > 1$ such that

$$\mathbb{E} \frac{Z_1^p}{m_0} < \infty. \quad (2.1.16)$$

Note that under (2.1.7) condition **A4** implies **A2**. The intuitive meaning of these conditions is that the process (Z_n) cannot deviate too much from its mean Π_n .

The following theorem gives a Cramér's type large deviation expansion of a BPRE.

Theorem 2.1.3. *Assume conditions **A3** and **A4**. Then, for $0 \leq x = o(\sqrt{n})$, we have, as $n \rightarrow \infty$,*

$$\frac{\mathbb{P} \left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x \right)}{1 - \Phi(x)} = \exp \left\{ \frac{x^3}{\sqrt{n}} \mathcal{L} \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right\} \left[1 + O \left(\frac{1+x}{\sqrt{n}} \right) \right] \quad (2.1.17)$$

and

$$\frac{\mathbb{P} \left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < -x \right)}{\Phi(-x)} = \exp \left\{ -\frac{x^3}{\sqrt{n}} \mathcal{L} \left(-\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right\} \left[1 + O \left(\frac{1+x}{\sqrt{n}} \right) \right]. \quad (2.1.18)$$

As a consequence of this result we obtain a large deviation approximation by the normal law in the normal zone $x = o(n^{1/6})$:

Corollary 2.1.4. *Under the assumptions of Theorem 2.1.3, we have for $0 \leq x = o(n^{1/6})$, as $n \rightarrow \infty$,*

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right)}{1 - \Phi(x)} = 1 + O\left(\frac{1 + x^3}{\sqrt{n}}\right) \quad (2.1.19)$$

and

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < -x\right)}{\Phi(-x)} = 1 + O\left(\frac{1 + x^3}{\sqrt{n}}\right). \quad (2.1.20)$$

Note that Theorem 2.1.3 is more precise than the moderate deviation principle established in [36], and, moreover, is stated under weaker assumptions. Indeed, let a_n be a sequence of positive numbers satisfying $\frac{a_n}{n} \rightarrow 0$ and $\frac{a_n}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty$. Then by Theorem 1.6 of [36], under hypothesis (2.1.10), we have, for $x_n = \frac{xa_n}{\sigma\sqrt{n}}$ with fixed $x > 0$,

$$\log \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{a_n} > x\right) \sim -\frac{x_n^2}{2}. \quad (2.1.21)$$

Using the weaker condition **A3** (instead of condition (2.1.10)), Theorem 2.1.3 implies that

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x_n\right) = (1 - \Phi(x_n)) \exp\left(\frac{x_n^3}{\sqrt{n}} \mathcal{L}\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{1 + x_n}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad (2.1.22)$$

which sharpens (2.1.21) without the log-scaling.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2, we prove Theorem 2.1.1. In Section 3, we study the existence of harmonic moments of W and give a proof of Theorem 2.1.2. Section 4 is devoted to the proof of Theorem 2.1.3.

2.2 The Berry-Essen bound for $\log Z_n$

In this section we establish a Berry-Esseen bound for the normalized branching process

$$\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

In Section 2.2.1 we give a series of lemmas in order to prove that $\log W_n$ converges toward $\log W$ in $L^1(\mathbb{P})$ exponentially fast. With this rate of convergence, we are able to quantify the convergence of the joint law of the r.v. $\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ (see Section 2.2.2, Lemma 2.2.5), which implies Theorem 2.1.1.

2.2.1 Auxiliary results

The first lemma is a direct consequence of the Marcinkiewicz-Zygmund inequality (see [22, p. 356]) which will be used several times.

Lemma 2.2.1 ([43], Lemma 1.4). *Let $(X_i)_{i \geq 1}$ be a sequence of i.i.d. centered r.v.'s. Then we have for $p \in (1, \infty)$,*

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n X_i \right|^p \leq \begin{cases} (B_p)^p \mathbb{E} (|X_i|^p) n, & \text{if } 1 < p \leq 2, \\ (B_p)^p \mathbb{E} (|X_i|^p) n^{p/2}, & \text{if } p > 2, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

where $B_p = 2 \min \{k^{1/2} : k \in \mathbb{N}, k \geq p/2\}$ is a constant depending only on p (so that $B_p = 2$ if $1 < p \leq 2$).

The second one is a result concerning the exponential rate of convergence of W_n to W in $L^p(\mathbb{P})$ from [37], Theorem 1.5.

Lemma 2.2.2. *Under **A2**, there exist two constants $C > 0$ and $\delta \in (0, 1)$ such that*

$$(\mathbb{E} |W_n - W|^p)^{1/p} \leq C \delta^n.$$

The next result concerns the existence of positive moments of the r.v. $\log W$.

Lemma 2.2.3. *Assume that $\mathbb{E} |\log m_0|^{2p} < \infty$, for some $p > 1$. Then we have, for all $q \in (0, p)$,*

$$\mathbb{E} |\log W|^q < \infty \quad \text{and} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} |\log W_n|^q < \infty.$$

We prove Lemma 2.2.3 by studying the asymptotic behavior of the Laplace transform of W . Define the quenched and annealed Laplace transform of W by

$$\phi_\xi(t) = \mathbb{E}_\xi e^{-tW} \quad \text{and} \quad \phi(t) = \mathbb{E} \phi_\xi(t) = \mathbb{E} e^{-tW},$$

where $t \geq 0$. Then by Markov's inequality, we have for $t > 0$,

$$\mathbb{P}(W < t^{-1}) \leq e \mathbb{E} e^{-tW} = e \phi(t). \quad (2.2.2)$$

Proof of Lemma 2.2.3. By Hölder's inequality, it is enough to prove the assertion of the lemma for $q \in (1, p)$. It is obvious that there exists a constant $C > 0$ such that $\mathbb{E} |\log W|^q \mathbf{1}(W \geq 1) \leq C \mathbb{E} W < \infty$. So it remains to show that $\mathbb{E} |\log W|^q \mathbf{1}(W \leq 1) < \infty$. By (2.2.2) and the fact that

$$\mathbb{E} |\log W|^q \mathbf{1}(W \leq 1) = q \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} (\log t)^{q-1} \mathbb{P}(W \leq t^{-1}) dt, \quad (2.2.3)$$

it is enough to show that, as $t \rightarrow \infty$,

$$\phi(t) = O\left(\frac{1}{\log^p t}\right).$$

It is well-known that $\phi_\xi(t)$ satisfies the functional relation

$$\phi_\xi(t) = f_0 \left(\phi_{T\xi} \left(\frac{t}{m_0} \right) \right), \quad (2.2.4)$$

where f_0 is the generating function defined by (2.1.1) and T^n is the shift operator defined by $T^n(\xi_0, \xi_1, \dots) = (\xi_n, \xi_{n+1}, \dots)$ for $n \geq 1$. Using (2.2.4) and the fact that $\phi_{T\xi}^k \left(\frac{t}{m_0} \right) \leq \phi_{T\xi}^2 \left(\frac{t}{m_0} \right)$ for all $k \geq 2$, we obtain

$$\begin{aligned} \phi_\xi(t) &\leq p_1(\xi_0) \phi_{T\xi} \left(\frac{t}{m_0} \right) + (1 - p_1(\xi_0)) \phi_{T\xi}^2 \left(\frac{t}{m_0} \right) \\ &= \phi_{T\xi} \left(\frac{t}{m_0} \right) \left(p_1(\xi_0) + (1 - p_1(\xi_0)) \phi_{T\xi} \left(\frac{t}{m_0} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

By iteration, taking into account that ϕ_ξ is non-increasing and $\phi_\xi(t) \leq \phi_{T\xi}(t/m_0)$, we obtain

$$\phi_\xi(t) \leq \phi_{T^n \xi} \left(\frac{t}{\Pi_n} \right) \prod_{j=0}^{n-1} \left(p_1(\xi_j) + (1 - p_1(\xi_j)) \phi_{T^n \xi} \left(\frac{t}{\Pi_n} \right) \right). \quad (2.2.6)$$

Taking expectation and using the inequality $\phi_{T^n \xi}(t) \leq 1$, we get

$$\phi(t) \leq \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(p_1(\xi_j) + (1 - p_1(\xi_j)) \phi_{T^n \xi} \left(\frac{t}{\Pi_n} \right) \right) \right].$$

Using a simple truncation and the fact that ϕ_ξ is non-increasing, we have, for all $A > 1$,

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(p_1(\xi_j) + (1 - p_1(\xi_j)) \phi_{T^n \xi} \left(\frac{t}{A^n} \right) \right) \mathbf{1}(\Pi_n \leq A^n) \right] + \mathbb{P}(\Pi_n \geq A^n) \\ &\leq \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(p_1(\xi_j) + (1 - p_1(\xi_j)) \phi_{T^n \xi} \left(\frac{t}{A^n} \right) \right) \right] + \mathbb{P}(\Pi_n \geq A^n). \end{aligned}$$

Since $T^n \xi$ is independent of $\sigma(\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$, and the r.v.'s $p_1(\xi_i)$ ($i \geq 0$) are i.i.d., we have

$$\phi(t) \leq \left[\mathbb{E} p_1(\xi_0) + (1 - \mathbb{E} p_1(\xi_0)) \phi \left(\frac{t}{A^n} \right) \right]^n + \mathbb{P}(\Pi_n \geq A^n).$$

By the dominated convergence theorem and the fact that W is positive with probability one, we have $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$. Thus, for any $\gamma \in (0, 1)$, there exists a constant $K > 0$ such that, for all $t \geq K$, we have $\phi(t) \leq \gamma$. Then for all $t \geq KA^n$, we have $\phi \left(\frac{t}{A^n} \right) \leq \gamma$. Consequently, for $t \geq KA^n$,

$$\phi(t) \leq \alpha^n + \mathbb{P}(\Pi_n \geq A^n), \quad (2.2.7)$$

where, by (2.1.5),

$$\alpha = \mathbb{E} p_1(\xi_0) + (1 - \mathbb{E} p_1(\xi_0)) \gamma \in (0, 1). \quad (2.2.8)$$

Recall that $\mu = \mathbb{E}X$ and $S_n = \log \Pi_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Choose A such that $\log A > \mu$ and let $\delta = \log A - \mu > 0$. By Markov's inequality and Lemma 4.4.1, there exists a constant $C > 0$ such that, for $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Pi_n \geq A^n) &\leq \mathbb{P}(|S_n - n\mu| \geq n\delta) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}|\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)|^{2p}}{n^{2p}\delta^{2p}} \\ &\leq \frac{C}{n^p}. \end{aligned}$$

Then, by (2.2.7), we get, for n large enough and $t \geq KA^n$,

$$\phi(t) \leq \frac{C}{n^p}. \quad (2.2.9)$$

For $t \geq K$, define $n_0 = n_0(t) = \left\lceil \frac{\log(t/K)}{\log(A)} \right\rceil \geq 0$, where $[x]$ stands for the integer part of x , so that

$$\frac{\log(t/K)}{\log(A)} - 1 \leq n_0 \leq \frac{\log(t/K)}{\log(A)} \quad \text{and} \quad t \geq KA^{n_0}.$$

Coming back to (2.2.9), with $n = n_0$, we get for $t \geq K$,

$$\phi(t) \leq \frac{C(\log A)^p}{(\log(t/K))^p} \leq C(\log t)^{-p},$$

which proves that $\mathbb{E}|\log W|^q < \infty$ for all $q \in (1, p)$, (see (2.2.3)). Furthermore, since $x \mapsto |\log^q(x)|\mathbf{1}(x \leq 1)$ is a non-negative and convex function for $q \in (1, p)$, by Lemma 2.1 of [36] we have

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|\log W_n|^q \mathbf{1}(W_n \leq 1) = \mathbb{E}|\log W|^q \mathbf{1}(W \leq 1).$$

By a standard truncation we obtain

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|\log W_n|^q \leq C\mathbb{E}W + \mathbb{E}|\log W|^q \mathbf{1}(W \leq 1) < \infty, \quad (2.2.10)$$

which ends the proof of the lemma. \square

The next result concerns the exponential speed of convergence of $\log W_n$ to $\log W$.

Lemma 2.2.4. *Assume **A2** and there exists a constant $q > 2$ such that $\mathbb{E}|\log m_0|^q < \infty$. Then there exist two constants $C > 0$ and $\delta \in (0, 1)$ such that for all $n \geq 0$,*

$$\mathbb{E}|\log W_n - \log W| \leq C\delta^n. \quad (2.2.11)$$

Proof. From (2.1.2) and (2.1.3) we get the following useful decomposition :

$$W_{n+1} - W_n = \frac{1}{\prod_n} \sum_{i=1}^{Z_n} \left(\frac{N_{n,i}}{m_n} - 1 \right), \quad (2.2.12)$$

which reads also

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} - 1 = \frac{1}{Z_n} \sum_{i=1}^{Z_n} \left(\frac{N_{n,i}}{m_n} - 1 \right). \quad (2.2.13)$$

By (2.2.15) we have the decomposition

$$\log W_{n+1} - \log W_n = \log(1 + \eta_n), \quad (2.2.14)$$

with

$$\eta_n = \frac{W_{n+1}}{W_n} - 1 = \frac{1}{Z_n} \sum_{i=1}^{Z_n} \left(\frac{N_{n,i}}{m_n} - 1 \right). \quad (2.2.15)$$

Under \mathbb{P}_ξ the r.v.'s $\frac{N_{n,i}}{m_n} - 1$ ($i \geq 1$) are i.i.d., centered and independent of Z_n .

Choose $p \in (1, 2]$ such that **A2** holds. We first show that

$$(\mathbb{E}|\eta_n|^p)^{1/p} \leq C\delta^n, \quad (2.2.16)$$

for some constants $C > 0$ and $\delta \in (0, 1)$. Applying Lemma 4.4.1 under \mathbb{P}_ξ and using the independence between the r.v.'s $\frac{N_{n,i}}{m_n}$ ($i \geq 1$) and Z_n , we get

$$\mathbb{E}_\xi |\eta_n|^p \leq 2^p \mathbb{E}_\xi [Z_n^{1-p}] \mathbb{E}_\xi \left| \frac{N_{n,1}}{m_n} - 1 \right|^p.$$

By **A2** and the fact that under the probability \mathbb{P} , the random variables $\mathbb{E}_\xi [Z_n^{1-p}]$ and $\mathbb{E}_\xi \left| \frac{N_{n,1}}{m_n} - 1 \right|^p$ are independent, and $\frac{N_{n,1}}{m_n}$ has the same law as $\frac{Z_1}{m_0}$, we obtain

$$\mathbb{E} |\eta_n|^p \leq 2^p \mathbb{E} \left| \frac{Z_1}{m_0} - 1 \right|^p \mathbb{E} [Z_n^{1-p}]. \quad (2.2.17)$$

We shall give a bound of the harmonic moment $\mathbb{E} Z_n^{1-p}$. By (2.1.2), using the convexity of the function $x \mapsto x^{1-p}$ and the independence between the r.v.'s Z_n and $N_{n,i}$ ($i \geq 1$), we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Z_{n+1}^{1-p}] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{Z_n} N_{n,i} \right)^{1-p} \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[Z_n^{1-p} \frac{1}{Z_n} \left(\sum_{i=1}^{Z_n} N_{n,i}^{1-p} \right) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(Z_n^{1-p} \frac{1}{Z_n} \left(\sum_{i=1}^{Z_n} N_{n,i}^{1-p} \right) \middle| Z_n \right) \right] \\ &= \mathbb{E} [Z_n^{1-p}] \mathbb{E} [N_{n,1}^{1-p}] \\ &= \mathbb{E} [Z_n^{1-p}] \mathbb{E} [Z_1^{1-p}]. \end{aligned}$$

By induction, we obtain

$$\mathbb{E} \left[Z_{n+1}^{1-p} \right] \leq \left(\mathbb{E} Z_1^{1-p} \right)^{n+1}.$$

By (2.1.7), we have $\mathbb{E} Z_1^{1-p} < 1$. So the above inequality (2.2.17) gives (2.2.16) with $C = 2 \left(\mathbb{E} \left| \frac{Z_1}{m_0} - 1 \right|^p \right)^{1/p} < \infty$ and $\delta = \left(\mathbb{E} Z_1^{1-p} \right)^{1/p} < 1$.

Now we prove (2.2.11). Let $K \in (0, 1)$. Using the decomposition (2.2.14) and a standard truncation, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\log W_{n+1} - \log W_n| &= \mathbb{E} |\log(1 + \eta_n)| \mathbb{1}(\eta_n \geq -K) + \mathbb{E} |\log(1 + \eta_n)| \mathbb{1}(\eta_n < -K) \\ &= A_n + B_n. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

We first find a bound for A_n . It is obvious that there exists a constant $C > 0$ such that for all $x > -K$, $|\ln(1 + x)| \leq C|x|$. By (2.2.16), we get

$$A_n \leq C \mathbb{E} |\eta_n| \leq C \left(\mathbb{E} |\eta_n|^p \right)^{1/p} \leq C \delta^n. \quad (2.2.19)$$

Now we find a bound for B_n . Note that by (2.2.14) and Lemma 2.2.3, we have, for any $r \in (0, q/2)$,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} |\log(1 + \eta_n)|^r < \infty. \quad (2.2.20)$$

Let $r, s > 1$ be such that $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$ and $r < q/2$. By Hölder's inequality, (2.2.20), Markov's inequality and (2.2.16), we have

$$\begin{aligned} B_n &\leq \left(\mathbb{E} |\log(1 + \eta_n)|^r \right)^{1/r} \mathbb{P}(\eta_n < -K)^{1/s} \\ &\leq C \mathbb{P}(|\eta_n| > K)^{1/s} \\ &\leq C \left(\mathbb{E} |\eta_n|^p \right)^{1/s} \\ &\leq C \delta^n. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Thus by (2.2.18), (2.2.19) and (2.2.21), there exist two constants $C > 0$ and $\delta \in (0, 1)$ such that

$$\mathbb{E} |\log W_{n+1} - \log W_n| \leq C \delta^n. \quad (2.2.22)$$

Using the triangular inequality, we have for all $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\log W_{n+k} - \log W_n| &\leq C \left(\delta^n + \dots + \delta^{n+k-1} \right) \\ &\leq \frac{C}{1 - \delta} \delta^n. \end{aligned}$$

Letting $k \rightarrow \infty$, we get

$$\mathbb{E} |\log W - \log W_n| \leq \frac{C}{1 - \delta} \delta^n,$$

which proves Lemma 2.2.4. □

2.2.2 Proof of Theorem 2.1.1

We now prove a concentration inequality for the joint law of $(S_n, \log Z_n)$.

Lemma 2.2.5. *Assume **A1** and **A2**. Then for all $x \in \mathbb{R}$, we have*

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq x\right) \leq \frac{C}{n^{\delta/2}} \quad (2.2.23)$$

and

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \leq \frac{C}{n^{\delta/2}}. \quad (2.2.24)$$

Before giving the proof of Lemma 2.2.5, let us give some heuristics of the proof, following Kozlov [39]. By (2.2.15), we can write

$$W_{n+1} = W_n \times \left(Z_n^{-1} \sum_{i=1}^{Z_n} \frac{N_{n,i}}{m_n} \right). \quad (2.2.25)$$

Since $Z_n \rightarrow \infty$, by the law of large numbers, $Z_n^{-1} \sum_{i=1}^{Z_n} \frac{N_{n,i}}{m_n}$ is close to 1, and then W_{n+1}/W_n is also close to 1 when n is large enough. Therefore we can hope to replace $\log W_n$ by $\log W_m$ without losing too much, when $m = m(n)$ is an increasing subsequence of integers such that $m/n \rightarrow 0$. Denote

$$Y_{m,n} = \sum_{i=m+1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}}, \quad Y_n = Y_{0,n} \quad \text{and} \quad V_m = \frac{\log W_m}{\sigma\sqrt{n}}. \quad (2.2.26)$$

Then, the independence between $Y_{m,n}$ and (Y_m, V_m) allows us to use a Berry-Esseen approximation on $Y_{m,n}$ to get the result.

Proof of Lemma 2.2.5. We only prove (2.2.23), since the inequality (2.2.24) is obtained in the same way.

Let $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ and $m = m(n) = \lfloor n^{1/2} \rfloor$, where $\lfloor x \rfloor$ stands for the integer part of x . Let $D_{m,n} = V_n - V_m$. By Markov's inequality and the exponential convergence of $\log W_n$ toward $\log W$ in L^1 (cf. Lemma 2.2.4), we have

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|D_{m,n}| \geq \alpha_n) &\leq \frac{\mathbb{E}|D_{m,n}|}{\alpha_n} = \frac{\sqrt{n}\mathbb{E}|\log W_n - \log W_m|}{\sigma\sqrt{n}} \\ &\leq \sigma^{-1} (\mathbb{E}|\log W_n - \log W| + \mathbb{E}|\log W_m - \log W|) \\ &\leq C\delta^n + C\delta^m \leq 2C\delta^m. \end{aligned}$$

Then using a standard truncation and Lemma 2.2.4, there exists $\delta \in (0, 1)$ such that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n + V_n \leq x, Y_n \geq x) &\leq \mathbb{P}(Y_n + V_m \leq x + \alpha_n, Y_n \geq x) + \mathbb{P}(|D_{m,n}| > \alpha_n) \\ &\leq \mathbb{P}(Y_n + V_m \leq x + \alpha_n, Y_n \geq x) + C\delta^m. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Now we find a bound for the right-hand side of (2.2.27). Obviously we have the decomposition

$$Y_n = Y_m + Y_{m,n}. \quad (2.2.28)$$

For $x \in \mathbb{R}$, let $G_{m,n}(x) = \mathbb{P}(Y_{m,n} \leq x)$ and $G_n(x) = G_{0,n}(x)$. Denote by $\nu_m(ds, dt) = \mathbb{P}(Y_m \in ds, V_m \in dt)$ the joint law of (Y_m, V_m) . By conditioning and using the independence between $Y_{m,n}$ and (Y_m, V_m) , we have

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Y_n + V_m \leq x + \alpha_n, Y_n \geq x) \\ &= \mathbb{P}(Y_{m,n} + Y_m + V_m \leq x + \alpha_n, Y_{m,n} + Y_m \geq x) \\ &= \int \mathbb{P}(Y_{m,n} + s + t \leq x + \alpha_n, Y_{m,n} + s \geq x) \nu_m(ds, dt) \\ &= \int \mathbf{1}(t \leq \alpha_n) (G_{m,n}(x - s - t + \alpha_n) - G_{m,n}(x - s)) \nu_m(ds, dt). \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

For the terms $G_{m,n}(x - s - t + \alpha_n)$ and $G_{m,n}(x - s)$ we are going to use the normal approximation with the Berry-Esseen bound. Since $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ ($x \rightarrow 0$), we have $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-m}} = (1 - \frac{m}{n})^{-1/2} = 1 + R_n$, where $0 \leq R_n \leq C/\sqrt{n}$ and $n \geq 2$. Therefore, we obtain

$$G_{m,n}(x) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=m+1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = G_{n-m}\left(\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{n-m}}\right) = G_{n-m}(x(1 + R_n)).$$

Furthermore, by the mean value theorem, we have

$$|\Phi(x(1 + R_n)) - \Phi(x)| \leq R_n |x\Phi'(x)| \leq \frac{R_n e^{-1/2}}{2\pi} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}, \quad (2.2.30)$$

where we have used the fact that the function $x \mapsto x\Phi'(x) = xe^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ attains its maximum at $x = \pm 1$. Therefore, by **A1** and the Berry-Esseen theorem, we have for all $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |G_{m,n}(x) - \Phi(x)| &\leq |G_{n-m}(x(1 + R_n)) - \Phi(x(1 + R_n))| + |\Phi(x(1 + R_n)) - \Phi(x)| \\ &\leq \frac{C}{n^{\delta/2}} + \frac{C}{\sqrt{n}} \leq \frac{C}{n^{\delta/2}}. \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

From this and (2.2.29), we get

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Y_n + V_m \leq x + \alpha_n, Y_n \geq x) \\ &\leq \int \mathbf{1}(t \leq \alpha_n) |\Phi(x - s - t + \alpha_n) - \Phi(x - s)| \nu_m(ds, dt) + \frac{C}{n^{\delta/2}}. \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

Using again the mean value theorem and the fact that $|\Phi'(x)| \leq 1$, we obtain

$$|\Phi(x - s - t + \alpha_n) - \Phi(x - s)| = |-t + \alpha_n| \leq |t| + \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (2.2.33)$$

Moreover, by Lemma 2.2.3 and the definition of ν_m , we have

$$\int |t| \nu_m(ds, dt) = \frac{\mathbb{E}|\log W_m|}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}. \quad (2.2.34)$$

Hence, from (2.2.32) and (2.2.33), we get

$$\mathbb{P}(Y_n + V_m \leq x + \alpha_n, Y_n \geq x) \leq \frac{C}{n^{\delta/2}}.$$

Implementing this bound into (2.2.27) gives (2.2.23). \square

Therefore, Theorem 2.1.1 is a direct consequence of Lemma 2.2.5 and the Berry-Esseen theorem for a sum of i.i.d. r.v.'s, since we have

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \\ = & \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) \\ = & \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) \\ & - \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right). \end{aligned}$$

Applying Lemma 2.2.5, one gets

$$\left| \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \right| \leq \frac{C}{n^{\delta/2}}.$$

Theorem 2.1.1 follows from the classical Berry-Esseen inequality for sums of independent identically distributed random variables.

2.3 Harmonic moments of W

In this section, we study the existence of harmonic moments of the random variable W . Section 2.3.1 is devoted to the proof of Theorem 2.1.2. For the needs of Cramér's type large deviations, in Section 2.3.2 we shall prove the existence of the harmonic moments of W under the changed probability measure, which generalizes the result of Theorem 2.1.2.

2.3.1 Existence of harmonic moments under \mathbb{P}

Following the line of Lemma 2.2.3 we prove Theorem 2.1.2 by studying the asymptotic behavior of the Laplace transform of W . Actually Theorem 2.1.2 is a simple consequence of Theorem 2.3.1. Recall that

$$\phi_\xi(t) = \mathbb{E}_\xi e^{-tW} \quad \text{and} \quad \phi(t) = \mathbb{E}\phi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{-tW}, \quad t \geq 0.$$

Theorem 2.3.1. *Assume condition **A3**. Let $a_0 > 0$ be defined by (2.1.12). Then for any $a \in (0, a_0)$, there exists a constant $C > 0$ such that for all $t > 0$,*

$$\phi(t) \leq Ct^{-a}.$$

In particular $\mathbb{E}W^{-a} < \infty$ for all $a \in (0, a_0)$.

Proof. By (2.2.7), we have for $A > 1$ and $t \geq KA^n$,

$$\phi(t) \leq \alpha^n + \mathbb{P}(\Pi_n \geq A^n), \quad (2.3.1)$$

where

$$\alpha = \mathbb{E}p_1(\xi) + (1 - \mathbb{E}p_1(\xi))\gamma \in (0, 1). \quad (2.3.2)$$

Using Markov's inequality and condition **A3**, there exists $\lambda_0 > 0$ such that

$$\mathbb{P}(\Pi_n \geq A^n) \leq \frac{\mathbb{E}\Pi_n^{\lambda_0}}{A^{n\lambda_0}} = \left(\frac{\mathbb{E}m_0^{\lambda_0}}{A^{\lambda_0}} \right)^n.$$

Setting $A = \left(\frac{\mathbb{E}m_0^{\lambda_0}}{\alpha} \right)^{1/\lambda_0} > 1$, we get for any $n \in \mathbb{N}$ and $t \geq KA^n$,

$$\phi(t) \leq 2\alpha^n. \quad (2.3.3)$$

Now, for any $t \geq K$, define $n_0 = n_0(t) = \left\lfloor \frac{\log(t/K)}{\log A} \right\rfloor \geq 0$, where $[x]$ stands for the integer part of x , so that

$$\frac{\log(t/K)}{\log A} - 1 \leq n_0 \leq \frac{\log(t/K)}{\log A} \quad \text{and} \quad t \geq KA^{n_0}.$$

Then, for $t \geq K$,

$$\phi(t) \leq 2\alpha^{n_0} \leq 2\alpha^{-1}(t/K)^{\frac{\log \alpha}{\log A}} = C_0 t^{-a},$$

with $C_0 = 2\alpha^{-1}K^a$ and $a = -\frac{\log \alpha}{\log A} > 0$. Thus we can choose a constant $C > 0$ large enough such that for all $t > 0$,

$$\phi(t) \leq Ct^{-a}. \quad (2.3.4)$$

This proves the first inequality of Theorem 2.3.1. The existence of harmonic moments of W of order $s \in (0, a)$ is deduced from (2.3.4) and the fact that

$$\mathbb{E}W^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \phi(t)t^{s-1} dt,$$

where Γ is the Gamma function.

Now we prove (ii). By the definition of a , A and α , we have

$$\begin{aligned} a &= -\lambda_0 \frac{\log \alpha}{\log \mathbb{E}m_0^{\lambda_0} - \log \alpha} \\ &= -\lambda_0 \frac{\log (\mathbb{E}p_1 + (1 - \mathbb{E}p_1)\gamma)}{\log \mathbb{E}m_0^{\lambda_0} - \log (\mathbb{E}p_1 + (1 - \mathbb{E}p_1)\gamma)}, \end{aligned}$$

where $\gamma \in (0, 1)$ is an arbitrary constant. Since $a \rightarrow a_0$ as $\gamma \rightarrow 0$, this concludes the proof of Theorem 2.3.1. \square

2.3.2 Existence of harmonic moments under \mathbb{P}_λ

In this section, we establish a uniform bound for the harmonic moments of W under the probability measures \mathbb{P}_λ , uniformly in $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

Let $m(x) = \mathbb{E}[Z_1 | \xi_0 = x] = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k(x)$. By **A3**, for all $\lambda \leq \lambda_0$, we can define the conjugate distribution function $\tau_{0,\lambda}$ as

$$\tau_{0,\lambda}(dx) = \frac{m(x)^\lambda}{L(\lambda)} \tau_0(dx). \quad (2.3.5)$$

Note that (2.3.5) is just Cramér's change of measure for the associated random walk $(S_n)_{n \geq 1}$. Consider the new branching process in a random environment whose environment distribution is $\tau_\lambda = \tau_{0,\lambda}^{\otimes \mathbb{N}}$. The corresponding annealed probability and expectation are denoted by

$$\mathbb{P}_\lambda(dx, d\xi) = \mathbb{P}_\xi(dx) \tau_\lambda(d\xi) \quad (2.3.6)$$

and \mathbb{E}_λ respectively. Note that, for any \mathcal{F}_n -measurable random variable T , we have

$$\mathbb{E}_\lambda T = \frac{\mathbb{E}e^{\lambda S_n T}}{L(\lambda)^n}. \quad (2.3.7)$$

It is easily seen that under \mathbb{P}_λ , the process (Z_n) is still a supercritical branching process in a random environment, which verifies the condition (2.1.7), and that $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is still a non-negative martingale which converges a.s. to W . We shall show under the additional assumption **A4** that there exists a constant $a > 0$ such that for all $b \in (0, a)$,

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \mathbb{E}_\lambda W^{-b} < \infty.$$

Denote the Laplace transforms of W under \mathbb{P}_λ by

$$\phi_\lambda(t) = \mathbb{E}_\lambda \phi_\xi(t) = \mathbb{E}_\lambda e^{-tW},$$

where $t \geq 0$ and $\lambda \leq \lambda_0$. The following theorem gives a bound on $\phi_\lambda(t)$ and $\mathbb{E}_\lambda W^{-a}$ uniformly in $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

Theorem 2.3.2. *Assume conditions **A3** and **A4**. Then for λ_0 small enough, there exist constants $a > 0$ and $C > 0$ such that for all $t > 0$,*

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \phi_\lambda(t) \leq Ct^{-a}.$$

In particular, we have $\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \mathbb{E}_\lambda W^{-b} < \infty$ for all $b \in (0, a)$.

For the proof of the previous theorem we need to control the exponential speed of convergence in L^p of W_n to W , uniformly under the class of probability measures $(\mathbb{P}_\lambda)_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0}$.

Lemma 2.3.3. *Assume that **A3** holds for some $\lambda_0 > 0$, and **A4** holds for some $p \in (1, 2]$. Then for $\lambda_0 > 0$ small enough, there exist constants $C > 0$ and $\delta_0 \in (0, 1)$ such that, for all $n \geq 1$,*

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} (\mathbb{E}_\lambda |W_n - W|^p)^{1/p} \leq C\delta_0^n.$$

Proof. Applying Lemma 4.4.1 under \mathbb{E}_ξ to the decomposition (2.2.12) and using the independence between Z_n and $\frac{N_{n,i}}{m_n}$ ($i \geq 1$), we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\xi |W_{n+1} - W_n|^p &\leq 2^p \Pi_n^{-p} \mathbb{E}_\xi Z_n \mathbb{E}_\xi \left| \frac{N_n}{m_n} - 1 \right|^p \\ &= 2^p \Pi_n^{1-p} \mathbb{E}_\xi \left| \frac{N_n}{m_n} - 1 \right|^p. \end{aligned}$$

Note that under \mathbb{P}_λ , the r.v.'s m_0, \dots, m_{n-1} are i.i.d., independent of $\frac{N_n}{m_n}$, and $\frac{N_n}{m_n}$ has the same law as $\frac{Z_1}{m_0}$. Thus, taking expectation \mathbb{E}_λ , we get

$$\mathbb{E}_\lambda |W_{n+1} - W_n|^p \leq 2^p (\mathbb{E}_\lambda m_0^{1-p})^n \mathbb{E}_\lambda \left| \frac{Z_1}{m_0} - 1 \right|^p. \quad (2.3.8)$$

Recall that $m_0 > 1$. Choose $\lambda_0 > 0$ small enough such that $p - \lambda_0 > 1$. By condition **A4**, for all $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$,

$$\mathbb{E}_\lambda \left(\frac{Z_1}{m_0} \right)^p = \frac{1}{\mathbb{E} m_0^\lambda} \mathbb{E} \left(\frac{Z_1^p}{m_0^{p-\lambda}} \right) \leq \mathbb{E} \left(\frac{Z_1^p}{m_0} \right) < +\infty.$$

Since $1 - p + \lambda_0 < 0$, we have, for all $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, $\mathbb{E}_\lambda m_0^{1-p} = \frac{1}{\mathbb{E} m_0^\lambda} \mathbb{E} m_0^{1-p+\lambda} \leq \mathbb{E} m_0^{1-p+\lambda_0} < 1$. Hence by (2.3.8), for $\delta_0 = (\mathbb{E} m_0^{1-p+\lambda_0})^{1/p} < 1$ and $C = 2 \left(\mathbb{E} \left(\frac{Z_1^p}{m_0} \right)^{1/p} + 1 \right) < \infty$, we have

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} (\mathbb{E}_\lambda |W_{n+1} - W_n|^p)^{1/p} \leq C\delta_0^n. \quad (2.3.9)$$

Using the triangular inequality, for all $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} (\mathbb{E}_\lambda |W_{n+k} - W_n|^p)^{1/p} &\leq C (\delta_0^n + \dots + \delta_0^{n+k-1}) \\ &\leq \frac{C}{1 - \delta_0} \delta_0^n. \end{aligned}$$

Letting $k \rightarrow \infty$, we get

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} (\mathbb{E}_\lambda |W - W_n|^p)^{1/p} \leq \frac{C}{1 - \delta_0} \delta_0^n, \quad (2.3.10)$$

which concludes the proof of Lemma 2.3.3. \square

Now we proceed to prove Theorem 2.3.2.

Proof of Theorem 2.3.2. Let $\varepsilon \in (0, 1)$. By a truncation argument, we have for all $\lambda \in [0, \lambda_0]$, and $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(t) &= \mathbb{E}_\lambda e^{-tW} [\mathbf{1}(|W_n - W| \leq \varepsilon^n) + \mathbf{1}(|W_n - W| > \varepsilon^n)] \\ &\leq e^{t\varepsilon^n} \mathbb{E}_\lambda e^{-tW_n} + \mathbb{P}_\lambda(|W_n - W| > \varepsilon^n). \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Using Markov's inequality and Lemma 2.3.3, there exists $\delta_0 \in (0, 1)$ such that

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \mathbb{P}_\lambda(|W_n - W| > \varepsilon^n) \leq C\beta_1^n, \quad (2.3.12)$$

where $\beta_1 = \delta_0/\varepsilon < 1$ for $\varepsilon > \delta_0$.

Now we proceed to bound the first term in the right-hand side of (2.3.11). Recall that $L(\cdot)$ is increasing. Furthermore, since $x \mapsto e^{-tx}$ is a non-negative and convex function, we have (see Lemma 2.1 of [36]) that $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} e^{-tW_n} = \mathbb{E} e^{-tW} = \phi(t)$. Then, again using truncation, we have for all $\lambda \in [0, \lambda_0]$, $n \in \mathbb{N}$ and $c > \mu$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\lambda e^{-tW_n} &= \mathbb{E}_\lambda e^{-tW_n} [\mathbf{1}(S_n \leq cn) + \mathbf{1}(S_n > cn)] \\ &\leq e^{\lambda_0 cn} \phi(t) + \mathbb{P}_\lambda(S_n > cn). \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

By the exponential Markov's inequality, we have for $\lambda \leq \lambda_0/2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda(S_n > cn) &\leq (\mathbb{E}_\lambda e^{\lambda X})^n e^{-\lambda cn} \\ &= e^{n(\Lambda(2\lambda) - \Lambda(\lambda) - \lambda c)}, \end{aligned}$$

where $\Lambda(\lambda) = \log \mathbb{E} e^{\lambda X}$ and $\Lambda(2\lambda) - \Lambda(\lambda) - \lambda c = \lambda\mu - \lambda c + o(\lambda)$ as $\lambda \rightarrow 0$. Since $c > \mu$ we can choose $\lambda_0 > 0$ small enough, such that for all $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, $\Lambda(2\lambda) - \Lambda(\lambda) - \lambda c \leq \lambda(\mu - c)/2 < 0$. Thus we have

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \mathbb{P}_\lambda(S_n > cn) \leq \beta_2^n, \quad (2.3.14)$$

where $\beta_2 = e^{\lambda(\mu-c)/2} < 1$. Furthermore by Theorem 2.3.1, for all $a \in (0, a_0)$, there exists $C > 0$ such that $\phi(t) \leq Ct^{-a}$ for all $t > 0$. Thus implementing (2.3.12), (2.3.13) and (2.3.14) into (2.3.11) leads to

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \phi_\lambda(t) \leq e^{t\varepsilon^n} \left(e^{\lambda_0 c n} C t^{-a} + \beta_2^n \right) + C \beta_1^n. \quad (2.3.15)$$

Since $\phi_\lambda(t)$ is decreasing in t , we have for any $t \geq t_n = \varepsilon^{-n}$,

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \phi_\lambda(t) \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \phi_\lambda(t_n) \leq e \left(e^{\lambda_0 c n} C \varepsilon^{an} + \beta_2^n \right) + C \beta_1^n. \quad (2.3.16)$$

Choosing $\lambda_0 > 0$ small enough such that $\beta_3 = e^{\lambda_0 c} \varepsilon^a < 1$, we find that there exists a constant $C > 0$ and $\beta = \max \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} \in (0, 1)$ such that, for any $t \geq \varepsilon^{-n}$,

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \phi_\lambda(t) \leq C \beta^n. \quad (2.3.17)$$

The rest of the proof is similar to that of Theorem 2.1.2, starting from (3.3.10). \square

2.4 Proof of Cramér's large deviation expansion

In this section, we prove Theorem 2.1.3. The starting point is the decomposition (2.1.4). We will show that the Cramér-type large deviation expansion of $\log Z_n$ is determined by that of the associated random walk (S_n) . Our proof is based on Cramér's change of measure \mathbb{P}_λ defined by (2.3.6). An important step in the approach is to have a good control of the joint law of the couple $(S_n, \log Z_n)$ under the changed measure \mathbb{P}_λ uniformly in $\lambda \in [0, \lambda_0]$, for some small λ_0 , which is done in Section 2.4.1. The proof of Theorem 2.1.3 is deferred to Section 2.4.2.

In the sequel we shall use the first three moments of the r.v. $X = \log m_0$ under the changed probability measure \mathbb{P}_λ :

$$\mu_\lambda = \mathbb{E}_\lambda X = \Lambda'(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{(k-1)!} \lambda^{k-1}, \quad (2.4.1)$$

$$\sigma_\lambda = \mathbb{E}_\lambda (X - \mu_\lambda)^2 = \Lambda''(\lambda) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_k}{(k-2)!} \lambda^{k-2}, \quad (2.4.2)$$

$$\rho_\lambda = \mathbb{E}_\lambda |X - \mu_\lambda|^3, \quad (2.4.3)$$

with Λ defined in (2.1.14).

2.4.1 Auxiliary results

In this section we prove a uniform concentration inequality bound for the class of probability measures $(\mathbb{P}_\lambda)_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0}$. First we give uniform bounds for the first three

moments of X under \mathbb{P}_λ . It is well known that, for λ_0 small enough and for any $\lambda \in [0, \lambda_0]$,

$$|\mu_\lambda - \mu| \leq C_1\lambda, \quad |\sigma_\lambda - \sigma| \leq C_2\lambda, \quad |\rho_\lambda - \rho| \leq C_3\lambda, \quad (2.4.4)$$

where C_1, C_2, C_3 are absolute constants. These bounds allow us to obtain a uniform rate of convergence for the process $(\log W_n)$ under \mathbb{P}_λ .

Lemma 2.4.1. *Assume **A3** and **A4**. Then there exists $\delta_0 \in (0, 1)$ such that*

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \mathbb{E}_\lambda |\log W_n - \log W| \leq \delta_0^n. \quad (2.4.5)$$

Proof. The proof is similar to that in Lemma 2.2.4 : it is enough to replace \mathbb{E} by \mathbb{E}_λ and to ensure that all the bounds in that proof still hold uniformly in $\lambda \in [0, \lambda_0]$, for $\lambda_0 > 0$ small enough.

We first prove that for some constants $\lambda_0 > 0$, $\delta \in (0, 1)$ and $C > 0$,

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} (\mathbb{E}_\lambda |\eta_n|^p)^{1/p} \leq C\delta^n, \quad (2.4.6)$$

where η_n is defined in (2.2.15). In fact, we have, for $p \in (1, 2)$,

$$\mathbb{E}_\lambda |\eta_n|^p \leq 2^p \mathbb{E}_\lambda \left| \frac{Z_1}{m_0} - 1 \right|^p \left(\mathbb{E}_\lambda [Z_1^{1-p}] \right)^n.$$

By the dominated convergence theorem and the fact that $m_0 > 1$, we have $\mathbb{E}_\lambda Z_1^{1-p} \leq \mathbb{E} Z_1^{1-p} m_0^\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \mathbb{E} Z_1^{1-p} < 1$. Thus there exists a $\lambda_0 > 0$ small enough such that

$$\mathbb{E}_\lambda Z_1^{1-p} \leq \mathbb{E} Z_1^{1-p} m_0^{\lambda_0} < 1.$$

By **A3** and **A4**, for some small enough $\lambda_0 \in (0, p-1]$ and all $\lambda \in [0, \lambda_0]$ we have,

$$\mathbb{E}_\lambda \left(\frac{Z_1}{m_0} \right)^p = \left(\mathbb{E} m_0^\lambda \right)^{-1} \mathbb{E} \frac{Z_1^p}{m_0^{p-\lambda_0}} \leq \mathbb{E} \frac{Z_1^p}{m_0^{p-\lambda_0}} \leq \mathbb{E} \frac{Z_1^p}{m_0} < \infty.$$

Therefore, (2.4.6) holds with $C \leq 2 \left[\left(\mathbb{E} \frac{Z_1^p}{m_0} \right)^{1/p} + 1 \right] < \infty$ and $\delta \leq \left(\mathbb{E} Z_1^{1-p} m_0^{\lambda_0} \right)^{1/p} < 1$.

Next we show that

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \mathbb{E}_\lambda |\log(1 + \eta_n)|^r < \infty, \quad (2.4.7)$$

for all $r > 0$. It is easily seen that there exists a constant $C_r > 0$ such that $\mathbb{E}_\lambda |\log W|^r \leq C_r (\mathbb{E}_\lambda W^{-\alpha} + \mathbb{E}_\lambda W) \leq C_r (\mathbb{E}_\lambda W^{-\alpha} + 1)$. Then, by **A3** and Theorem 2.3.2, for all $r > 0$, we have

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \mathbb{E}_\lambda |\log W|^r < \infty. \quad (2.4.8)$$

Thus by (2.2.10) and (2.2.14) we get (2.4.7).

We finally end the proof in the same way as in Lemma 2.2.4, using the uniform bounds (2.4.7) and (2.4.6). \square

Now we give a control of the joint law of $(S_n, \log Z_n)$ for the convergence to the distribution function $\Phi([0, x])\mathbb{1}(x \geq 0)$, $x \in \mathbb{R}$, uniformly in $\lambda \in [0, \lambda_0]$, where $\Phi([0, x]) = \Phi(x) - \Phi(0)$ (recall that Φ is the distribution function of the standard normal law).

Lemma 2.4.2. *Assume **A3** and **A4**. There exist positive constants C , β_1 , β_2 and $\delta \in (0, 1)$ such that for any $x > 0$,*

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \left| \mathbb{P}_\lambda \left(\frac{S_n - n\mu_\lambda}{\sigma_\lambda \sqrt{n}} \leq x, \frac{\log Z_n - n\mu_\lambda}{\sigma_\lambda \sqrt{n}} \geq 0 \right) - \Phi([0, x]) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}, \quad (2.4.9)$$

and

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \lambda \leq \lambda_0} \mathbb{P}_\lambda \left(\frac{S_n - n\mu_\lambda}{\sigma_\lambda \sqrt{n}} \leq -x, \frac{\log Z_n - n\mu_\lambda}{\sigma_\lambda \sqrt{n}} \geq 0 \right) \\ \leq C \left(x + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) e^{-\beta_1 x \sqrt{n}} + \min \left(e^{-\beta_2 x \sqrt{n}}, \delta \sqrt{n} x^{-1/2} n^{-1/4} \right). \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Proof. Let $m = m(n) = \lceil n^{1/2} \rceil$, with $[x]$ denoting the integer part of x , and

$$Y_{m,n}^\lambda = \sum_{i=m+1}^n \frac{X_i - \mu_\lambda}{\sigma_\lambda \sqrt{n}}, \quad Y_n^\lambda = Y_{0,n}^\lambda \quad \text{and} \quad V_m^\lambda = \frac{\log W_m}{\sigma_\lambda \sqrt{n}}. \quad (2.4.11)$$

The proof of (2.4.9) is similar to that of Lemma 2.2.5 with \mathbb{P} replaced by \mathbb{P}_λ . The only difference is that the bounds (2.2.31) and (2.2.34) have to be uniform in $\lambda \in [0, \lambda_0]$. The uniformity in (2.2.31) is ensured by the Berry-Esseen theorem and (2.4.4) which imply that

$$\sup_{\lambda \in [0, \lambda_0]} \left| G_{m,n}^\lambda(x) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}, \quad (2.4.12)$$

where $G_{m,n}^\lambda(x) = \mathbb{P}_\lambda \left(Y_{m,n}^\lambda \leq x \right)$. The uniformity in (2.2.34) is a consequence of Lemma 2.4.1. Further details of the proof are left to the reader.

Now we prove (2.4.10). Let $D_{m,n}^\lambda = V_n^\lambda - V_m^\lambda$. By considering the events $\{|D_{m,n}^\lambda| \leq \frac{x}{2}\}$ and $\{|D_{m,n}^\lambda| > \frac{x}{2}\}$ we have

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda \left(Y_n^\lambda \leq -x, Y_n^\lambda + V_n^\lambda \geq 0 \right) &\leq \mathbb{P}_\lambda \left(Y_n^\lambda \leq -x, Y_n^\lambda + V_m^\lambda \geq -\frac{x}{2} \right) \\ &\quad + \mathbb{P}_\lambda \left(|D_{m,n}^\lambda| > \frac{x}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

We first find a suitable bound of the first term of the right-hand side of (2.4.13). Again by decomposing $Y_n^\lambda = Y_{m,n}^\lambda + Y_m^\lambda$, using (2.4.12) and the fact that $\Phi([a, b]) \leq$

$b - a$, we have

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_\lambda \left(Y_n^\lambda \leq -x, Y_n^\lambda + V_m^\lambda \geq -\frac{x}{2} \right) \\
&= \int \mathbf{1} \left(t > \frac{x}{2} \right) \mathbb{P}_\lambda \left(Y_{m,n}^\lambda \in \left[-\frac{x}{2} - s - t, -x - s \right] \right) \nu_m^\lambda(ds, dt) \\
&\leq \int \mathbf{1} \left(t > \frac{x}{2} \right) \left[\Phi \left(\left[-\frac{x}{2} - s - t, -x - s \right] \right) + \frac{C}{\sqrt{n}} \right] \nu_m^\lambda(ds, dt) \\
&\leq \int \mathbf{1} \left(t > \frac{x}{2} \right) \left[\left(t - \frac{x}{2} \right) + \frac{C}{\sqrt{n}} \right] \nu_m^\lambda(ds, dt) \\
&\leq \mathbb{E}_\lambda \left[V_m^\lambda \mathbf{1} \left(V_m^\lambda \geq \frac{x}{2} \right) \right] + \left[\frac{x}{2} + \frac{C}{\sqrt{n}} \right] \mathbb{P}_\lambda \left(V_m^\lambda > \frac{x}{2} \right).
\end{aligned}$$

By Markov's inequality, we have $\mathbb{P}_\lambda \left(V_m^\lambda > \frac{x}{2} \right) \leq e^{-\frac{x}{2}\sigma_\lambda\sqrt{n}}$. Moreover, using Hölder's and Markov's inequalities, we get by (2.4.8) and the definition of V_m that

$$\mathbb{E}_\lambda \left[V_m^\lambda \mathbf{1} \left(V_m^\lambda \geq \frac{x}{2} \right) \right] \leq \left(\mathbb{E}_\lambda |V_m^\lambda|^2 \right)^{1/2} \mathbb{P}_\lambda \left(V_m^\lambda \geq \frac{x}{2} \right)^{1/2} \leq \frac{C}{\sigma_\lambda\sqrt{n}} e^{-\frac{x}{4}\sigma_\lambda\sqrt{n}}.$$

Since, by (2.4.4), σ_λ is bounded uniformly in $\lambda \in [0, \lambda_0]$, there exists $\beta_1 > 0$ such that for any $\lambda \in [0, \lambda_0]$,

$$\mathbb{P}_\lambda \left(Y_n^\lambda \leq -x, Y_n^\lambda + V_m^\lambda \geq -\frac{x}{2} \right) \leq C \left(x + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) e^{-\beta_1 x \sqrt{n}}. \quad (2.4.14)$$

We now search for a suitable bound for the second term of the right-hand side of (2.4.13). By Hölder's inequality and Theorem 2.3.2, there exist some constants $C > 0$, $a > 0$ and $0 < \alpha < \min(1/2, a/2)$ such that, for all $\lambda \in [0, \lambda_0]$ and $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}_\lambda \left(\frac{W_n}{W_m} \right)^\alpha \leq \left(\mathbb{E}_\lambda W_n^{2\alpha} \right)^{1/2} \left(\mathbb{E}_\lambda W_m^{-2\alpha} \right)^{1/2} \leq \left(\mathbb{E}_\lambda W^{2\alpha} \right)^{1/2} \left(\mathbb{E}_\lambda W^{-2\alpha} \right)^{1/2} \leq C.$$

Thus, by Markov's inequality and (2.4.4), there exists a constant $\beta_2 > 0$ (independent of (λ, n, x)) such that, for all $\lambda \in [0, \lambda_0]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\lambda \left(|D_{m,n}^\lambda| > \frac{x}{2} \right) &\leq \mathbb{P}_\lambda \left(\left(\frac{W_n}{W_m} \right)^\alpha > e^{\alpha\sigma_\lambda\sqrt{n}\frac{x}{2}} \right) + \mathbb{P}_\lambda \left(\left(\frac{W_m}{W_n} \right)^\alpha > e^{\alpha\sigma_\lambda\sqrt{n}\frac{x}{2}} \right) \\
&\leq C e^{-\beta_2 x \sqrt{n}}.
\end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Moreover, by Markov and Jensen's inequalities and Lemma 2.4.1, there exists $\delta_0 \in (0, 1)$ such that for $\lambda \in [0, \lambda_0]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\lambda \left(|D_{m,n}^\lambda| > \frac{x}{2} \right) &\leq \mathbb{P}_\lambda \left(|\log W_n - \log W_m|^{1/2} > \frac{x^{1/2} n^{1/4}}{\sqrt{2}} \right) \\
&\leq C \delta_0^{m/2} x^{-1/2} n^{-1/4}.
\end{aligned} \quad (2.4.16)$$

From (2.4.15) and (2.4.16) we have, for any $\lambda \in [0, \lambda_0]$,

$$\mathbb{P}_\lambda \left(|D_{m,n}^\lambda| > \frac{x}{2} \right) \leq C \min \left(e^{-\beta_2 x \sqrt{n}}, \delta_0^{\sqrt{n}/2} x^{-1/2} n^{-1/4} \right). \quad (2.4.17)$$

Using (2.4.13), (2.4.14) and (2.4.17), we get (2.4.10) with $\delta = \delta_0^{1/2}$. This ends the proof of the lemma. \square

2.4.2 Proof of Theorem 2.1.3

We shall prove only the first assertion, the second one being proved in the same way.

For $0 \leq x \leq 1$, the theorem follows from the Berry-Esseen estimate in Theorem 2.1.1. So we assume that $1 \leq x = o(\sqrt{n})$. Using the change of measure (2.3.7), for any $\lambda \in [0, \lambda_0]$, we have

$$\mathbb{P} \left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x \right) = L(\lambda)^n \mathbb{E}_\lambda \left[e^{-\lambda S_n} \mathbf{1}(\log Z_n - n\mu > x\sigma\sqrt{n}) \right].$$

Denote

$$Y_n^\lambda = \frac{S_n - n\mu_\lambda}{\sigma_\lambda\sqrt{n}} \quad \text{and} \quad V_n^\lambda = \frac{\log W_n}{\sigma_\lambda\sqrt{n}}. \quad (2.4.18)$$

Using the decomposition (2.1.4), centering and reducing S_n under \mathbb{P}_λ , we get

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x \right) \\ &= \exp(n\Lambda(\lambda) - n\mu_\lambda) \mathbb{E}_\lambda \left[e^{-\lambda\sigma_\lambda\sqrt{n}Y_n^\lambda} \mathbf{1} \left(Y_n^\lambda + V_n^\lambda > \frac{x\sigma\sqrt{n} - n(\mu_\lambda - \mu)}{\sigma_\lambda\sqrt{n}} \right) \right], \end{aligned}$$

where Y_n^λ and V_n^λ are defined in (2.4.11) and Λ is defined in (2.1.14). It is well known that for $x = o(\sqrt{n})$ as $n \rightarrow \infty$, the equation

$$x\sigma\sqrt{n} = n(\mu_\lambda - \mu), \quad (2.4.19)$$

has a unique solution $\lambda(x)$ which can be expressed as the power series

$$\lambda(x) = \frac{t}{\sqrt{\gamma_2}} - \frac{\gamma_3}{2\gamma_2^2} t^2 - \frac{\gamma_4\gamma_2 - 3\gamma_3^2}{6\gamma_2^{7/2}} t^3 + \dots \quad (2.4.20)$$

with $t = \frac{x}{\sqrt{n}}$ (see [46] for details). Choosing $\lambda = \lambda(x)$, it follows that

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x \right) &= \exp(n\Lambda(\lambda) - n\mu_\lambda) \mathbb{E}_\lambda \left[e^{-\lambda\sigma_\lambda\sqrt{n}Y_n^\lambda} \mathbf{1}(Y_n^\lambda + V_n^\lambda > 0) \right] \\ &= \exp(n\Lambda(\lambda) - n\mu_\lambda) I, \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

where

$$\begin{aligned} I &= \mathbb{E}_\lambda \left[e^{-\lambda\sigma_\lambda\sqrt{n}Y_n^\lambda} \mathbf{1}(Y_n^\lambda + V_n^\lambda > 0) \right] \\ &= \int e^{-\lambda\sigma_\lambda\sqrt{n}Y_n^\lambda} \mathbf{1}(Y_n^\lambda + V_n^\lambda > 0) d\mathbb{P}_\lambda. \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

Using the fact that

$$e^{-\lambda\sigma_\lambda\sqrt{n}Y_n^\lambda} = \lambda\sigma_\lambda\sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}(Y_n^\lambda < y) e^{-\lambda\sigma_\lambda\sqrt{n}y} dy$$

and Fubini's theorem, we obtain

$$I = \lambda\sigma_\lambda\sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda\sigma_\lambda\sqrt{n}y} \mathbb{P}_\lambda \left(Y_n^\lambda < y, Y_n^\lambda + V_n^\lambda > 0 \right) dy.$$

Obviously $I = I_+ + I_-$, with

$$\begin{aligned} I_+ &= \lambda\sigma_\lambda\sqrt{n} \int_0^\infty e^{-\lambda\sigma_\lambda\sqrt{n}y} \mathbb{P}_\lambda \left(Y_n^\lambda < y, Y_n^\lambda + V_n^\lambda > 0 \right) dy, \\ I_- &= \lambda\sigma_\lambda\sqrt{n} \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda\sigma_\lambda\sqrt{n}y} \mathbb{P}_\lambda \left(Y_n^\lambda < y, Y_n^\lambda + V_n^\lambda > 0 \right) dy. \end{aligned}$$

We shall show that

$$I = I_1(1 + O(\lambda)), \quad (2.4.23)$$

where

$$I_1 = \lambda\sigma_\lambda\sqrt{n} \int_0^\infty e^{-\lambda\sigma_\lambda\sqrt{n}y} \Phi([0, y]) dy. \quad (2.4.24)$$

By Lemma 2.4.2 (i) we get by a straightforward computation that

$$|I_+ - I_1| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}. \quad (2.4.25)$$

By Lemma 2.4.2 (ii), we have

$$\begin{aligned} I_- &\leq C\lambda\sigma_\lambda\sqrt{n} \int_{-\infty}^0 e^{\lambda\sigma_\lambda\sqrt{n}|y|} \left[\left(|y| + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) e^{-\beta_1|y|\sqrt{n}} \right. \\ &\quad \left. + \min \left(e^{-\beta_2|y|\sqrt{n}}, \delta\sqrt{n}|y|^{-1/2}n^{-1/4} \right) \right] dy. \end{aligned}$$

Recall that, by (2.4.4), σ_λ is bounded for λ small enough and, by (2.4.20), we have $\lambda \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Then for $0 < \varepsilon < \min(\beta_1, \beta_2)$, we have $\lambda\sigma_\lambda < \varepsilon$ for all n large enough. Thus, by a straightforward calculation and by choosing $\varepsilon > 0$ small enough, it can be seen that

$$\begin{aligned} I_- &\leq C\lambda\sqrt{n} \int_{-\infty}^0 \left(|y| + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) e^{-(\beta_1-\varepsilon)|y|\sqrt{n}} dy \\ &\quad + C\lambda\sqrt{n} \int_{-\infty}^{-1} e^{-(\beta_2-\varepsilon)|y|\sqrt{n}} dy \\ &\quad + C\lambda\sqrt{n} \int_{-1}^0 \delta\sqrt{n}|y|^{-1/2}n^{-1/4} e^{\varepsilon|y|\sqrt{n}} dy \\ &\leq \frac{C\lambda}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

By (2.4.20), we get, as $n \rightarrow \infty$,

$$I_- = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (2.4.26)$$

From (2.4.25) and (2.4.26) it follows that

$$|I - I_1| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}. \quad (2.4.27)$$

The integral I_1 appears in the proof of the Cramér's large deviation expansion theorem for the i.i.d. case. For convenience, we state here some well known results concerning the asymptotic expansion of the cumulant generating function $\Lambda(\lambda)$ and of the integral I_1 . For details we refer the reader to Appendix 2 or Petrov [46].

Lemma 2.4.3. *Let X be a r.v. such that $\mathbb{E}[e^{\lambda_0|X|}] < \infty$ for some $\lambda_0 > 0$. For $\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)$, let $\Lambda(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{\lambda X}]$, $\mu_\lambda = \Lambda'(\lambda)$ and $\sigma_\lambda = \Lambda''(\lambda)$. Set $\mu = \mathbb{E}X$. Then for $1 \leq x = o(\sqrt{n})$, $\lambda = \lambda(x)$ solution of (2.4.19) and n large enough, we have :*

(i) *the cumulant generating function $\Lambda(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{\lambda X}]$ satisfies the identity*

$$\frac{x^2}{2} + n(\Lambda(\lambda) - \lambda\mu_\lambda) = \frac{x^3}{\sqrt{n}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right), \quad (2.4.28)$$

where $\mathcal{L}(t)$ is the Cramér's series defined by (2.1.15) ;

(ii) *the integral I_1 defined by (2.4.24) satisfies the property that there exist some positive constants $C_1, C_2 > 0$ such that*

$$C_1 \leq \lambda\sigma_\lambda\sqrt{n}I_1 \leq C_2; \quad (2.4.29)$$

moreover, the integral I_1 admits the following asymptotic expansion :

$$I_1 = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) [1 - \Phi(x)] \left(1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right). \quad (2.4.30)$$

Now we can end the proof of Theorem 2.1.3. By (2.4.27), (2.4.29) and (2.4.20), we have

$$I = I_1 (1 + O(\lambda)) = I_1 \left(1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Coming back to (2.4.21) and using (2.4.30), we get

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) = \exp\left(\frac{x^2}{2} + n(\Lambda(\lambda) - \lambda\mu_\lambda)\right) (1 - \Phi(x)) \left(1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Then, by (2.4.28), we obtain the desired Cramér's large deviation expansion

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) = \exp\left(\frac{x^3}{\sqrt{n}} \mathcal{L}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) (1 - \Phi(x)) \left(1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad (2.4.31)$$

which ends the proof of the first assertion of Theorem 2.1.3.

Acknowledgments

The authors would like to thank an anonymous referee for a careful reading of the paper and valuable comments which helped us to improve the assumptions of Theorem 2.1.1. Q. Liu has been partially supported by the National Natural Science Foundation of China (Grants no. 11571052 and no. 11401590).

2.5 Appendix 1 : Bound for the Wasserstein distance using Stein's method

In this section we prove a bound for the Wasserstein's distance between the normalized process $\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ and the normal law using Stein's method, under the assumption $\mathbb{E}|X|^{3+\varepsilon} < \infty$ for some $\varepsilon > 0$. Note that it also leads to an alternative proof of Theorem 2.1.1 under a slightly stronger hypothesis.

2.5.1 Background on Stein's method

Let us recall briefly some facts on the Stein method to be used in the proofs. For more details, the reader can consult the excellent reviews [16, 47] or the more complete book [15]. The main idea is to describe the closeness of the law of a r.v. X to the standard normal law for a large class of distances, using *Stein's operator*

$$\mathcal{A}f(w) = f'(w) - wf(w), \quad (2.5.1)$$

which can be seen as a substitute of the classical Fourier-transform tool. Let \mathcal{H} be an abstract set of measurable functions. For any $h \in \mathcal{H}$, assume that f_h is the unique solution of *Stein's equation* :

$$h(w) - \mathbb{E}h(\mathcal{N}) = f'_h(w) - wf_h(w), \quad (2.5.2)$$

\mathcal{N} is a random variable with standard normal law $\mathcal{N}(0, 1)$. The distance $d(X, \mathcal{N})$ between the law of the random variable X and the normal law $\mathcal{N}(0, 1)$ can be expressed in terms of *Stein's expectation* $\mathbb{E}\mathcal{A}f_h(X)$. Indeed, substituting w by X in (2.5.2), taking expectation and the supremum over $h \in \mathcal{H}$, we obtain

$$d_{\mathcal{H}}(X, \mathcal{N}) := \sup_{h \in \mathcal{H}} |\mathbb{E}h(X) - \mathbb{E}h(\mathcal{N})| = \sup_{h \in \mathcal{H}} \mathbb{E}\mathcal{A}f_h(X). \quad (2.5.3)$$

If $\mathcal{H} = \mathcal{H}_K = \{\mathbf{1}(\cdot \leq x), x \in \mathbb{R}\}$, $d_{\mathcal{H}}$ is the Kolmogorov distance, denoted d_K . Taking $\mathcal{H} = \mathcal{H}_W = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, |h(x) - h(y)| \leq |x - y|\}$, $d_{\mathcal{H}}$ is the well-known Wasserstein metric (denoted d_W) occurring in many contexts.

The key point is that Stein's operator \mathcal{A} characterizes the standard normal law, as shown by the following Lemma.

Lemma 2.5.1 (Characterization of the normal law). *A random variable Z is of normal law $\mathcal{N}(0, 1)$ if and only if $\mathbb{E}\mathcal{A}f(Z) = 0$ for all absolutely continuous function f such that $\mathbb{E}|f'(Z)| < \infty$.*

By Lemma 2.5.1, it is expected that if the distribution of X is close to the normal law $\mathcal{N}(0, 1)$ in the sense of the distance $d_{\mathcal{H}}$, then $\mathbb{E}\mathcal{A}f(X)$ is close to 0 for a large class of functions f including the solutions f_h of Stein's equation (2.5.2). This permits to study the convergence of X to the normal law by using only the structure of X and the qualitative properties of f_h . We will use the following result, where we use the notation $\|\cdot\|$ for the infinity norm.

Lemma 2.5.2. *For each $h \in \mathcal{H}$, Stein's equation (2.5.2) has a unique bounded solution (see [47], Lemma 2.5) given by*

$$f_h(w) = e^{w^2/2} \int_w^\infty e^{-t^2/2} (\mathbb{E}h(\mathcal{N}) - h(t)) dt. \quad (2.5.4)$$

If h is bounded, then $\|f_h\| \leq \sqrt{\pi/2} \|h(\cdot) - \phi(h)\|$ and $\|f'_h\| \leq 2 \|h(\cdot) - \phi(h)\|$.

If h is absolutely continuous, then $\|f_h\| \leq \|h'\|$, $\|f'_h\| \leq \sqrt{\pi/2} \|h'\|$ and $\|f''_h\| \leq 2 \|h'\|$.

Remark 2.5.3. *If particular for $h \in \mathcal{H}_W$, we have $\|h'\| \leq 1$ and then $\|f_h\| \leq 1$, $\|f'_h\| \leq \sqrt{\pi/2}$ and $\|f''_h\| \leq 2$. In the case when $h \in \mathcal{H}_K$, we have $\|f_h\| \leq \sqrt{\pi/2}$ and then $\|f'_h\| \leq \sqrt{2\pi}$.*

The next result gives a bound of order $n^{-1/2}$ of Stein's expectation of a sum of i.i.d. r.v.'s.

Lemma 2.5.4. *Let X_1, \dots, X_n be a sequence of i.i.d. r.v.'s with $\mu = \mathbb{E}X_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1 - \mu]^2 < \infty$ and $\rho = \mathbb{E}|X_1|^3 < \infty$. Define $Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)$. Then we have*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_K} |\mathbb{E}[f'_h(Y_n) - Y_n f_h(Y_n)]| \leq C/\sqrt{n}, \quad (2.5.5)$$

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_W} |\mathbb{E}[f'_h(Y_n) - Y_n f_h(Y_n)]| \leq C/\sqrt{n}, \quad (2.5.6)$$

where C is an absolute constant.

Note that from (2.5.3) and (2.5.5) one gets the classical Berry-Esseen theorem. The proof of Lemma 2.5.4 can be found in [35].

2.5.2 Bound for the Wasserstein distance

In this section we give a bound for the Wasserstein distance obtained by Stein's method. Contrary to the case of the Kolmogorov distance, we do not require assumption **A2**, but we need the following condition slightly stronger than **A1**.

B1. There exists a constant $\varepsilon > 0$ such that

$$\mathbb{E}X^{3+\varepsilon} < \infty. \quad (2.5.7)$$

Theorem 2.5.5. *Under condition **B1**, we have*

$$d_W \left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \mathcal{N} \right) \leq \frac{C}{\sqrt{n}}. \quad (2.5.8)$$

2.5.3 Proof of Theorem 2.5.5

In order to simplify the notational burden, let

$$Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu), \quad V_n = \frac{\log W_n}{\sigma\sqrt{n}} \quad \text{and} \quad \tilde{Y}_n = \frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = Y_n + V_n.$$

By (2.5.3), it is enough to find a suitable bound of Stein's expectation

$$|\mathbb{E}[f'_h(\tilde{Y}_n) - \tilde{Y}_n f_h(\tilde{Y}_n)]|, \quad (2.5.9)$$

where $h \in \mathcal{H}_W$ and f_h is the unique bounded solution of Stein's equation (2.5.2). For simplicity, in the following we write f for f_h . By the triangular inequality, we have

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[f'(\tilde{Y}_n) - \tilde{Y}_n f(\tilde{Y}_n)]| &\leq |\mathbb{E}[f'(\tilde{Y}_n) - Y_n f(Y_n)]| \\ &\quad + |\mathbb{E}[Y_n f(Y_n) - Y_n f(\tilde{Y}_n)]| + |\mathbb{E}[V_n f(\tilde{Y}_n)]|. \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

By **B1** and Lemma 2.2.3, we have $\sup_n \mathbb{E} |\log W_n|^{3/2} < \infty$. Therefore, by the definition of V_n , we have

$$|\mathbb{E}[V_n f(\tilde{Y}_n)]| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{n}} \sup_n \mathbb{E} |\log W_n| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}, \quad (2.5.11)$$

with C and absolute constant. Moreover, using the fact that f is a Lipschitz function with $\|f'\| \leq 1$, together with Hölder's inequality and Lemma 4.4.1, we get

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[Y_n f(Y_n) - Y_n f(\tilde{Y}_n)]| &\leq \mathbb{E}[|Y_n| |f(\tilde{Y}_n) - f(Y_n)|] \\ &\leq \|f'\| \mathbb{E}[|Y_n| |V_n|] \\ &\leq \frac{1}{n} \left[\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \right|^3 \right]^{1/3} \left[\mathbb{E} |\log W_n|^{3/2} \right]^{2/3} \\ &\leq \frac{C}{n} \left(B_3^3 \mathbb{E} |X_1 - \mu|^3 n^{3/2} \right)^{1/3} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Again, by the triangular inequality, we have

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[f'(\tilde{Y}_n) - Y_n f(Y_n)]| &\leq |\mathbb{E}[f'(Y_n + V_n) - f'(Y_n)]| \\ &\quad + |\mathbb{E}[f'(Y_n) - Y_n f(Y_n)]|. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

By Lemma 2.5.2, we have $\|f''\| \leq 2$. Therefore, f' is a Lipschitz function with $\|f''\| \leq 2$, and then we get

$$|\mathbb{E}[f'(Y_n + V_n) - f'(Y_n)]| \leq 2 \mathbb{E}|V_n| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}. \quad (2.5.14)$$

Furthermore, since Y_n is a sum of i.i.d. random variables, by Lemma 2.5.4, it follows that

$$|\mathbb{E}[f'(Y_n) - Y f(Y_n)]| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}. \quad (2.5.15)$$

Thus, coming back to (2.5.10) and using the bounds (2.5.11), (2.5.12), (2.5.13), (2.5.14) and (2.5.15), we get

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_W} |\mathbb{E}[f'_h(\tilde{Y}_n) - \tilde{Y}_n f_h(\tilde{Y}_n)]| \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

which ends the proof of Theorem 2.5.5. \square

Note that for the Kolmogorov distance d_K the bound (2.5.14) does not hold, since in this case, $h(\cdot) = \mathbf{1}(\cdot \leq x)$ is not absolutely continuous, and then f'_h is not bounded by an absolute constant. So we need to use the following sharper bound (see [35], Lemma 1.3) : For any real x, w, s, t and $h(\cdot) = \mathbf{1}(\cdot \leq x)$, we have

$$\begin{aligned} |f'_h(w + s) - f'_h(w + t)| &\leq (|t| + |s|)(|w| + 1) + \mathbf{1}(x - t \leq w \leq x - s)\mathbf{1}(s \leq t) \\ &\quad + \mathbf{1}(x - s \leq w \leq x - t)\mathbf{1}(s > t). \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

Thus for any $h(\cdot) = \mathbf{1}(\cdot \leq x) \in \mathcal{H}_K$, applying (2.5.16) for $w = Y_n, s = V_n$ and $t = 0$, we get

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[f'(Y_n + V_n) - f'(Y_n)]| &\leq \mathbb{E}(|Y_n||V_n|) + \mathbb{E}|V_n| + \mathbb{P}(Y_n + V_n \leq x, Y_n \geq x) \\ &\quad + \mathbb{P}(Y_n + V_n \geq x, Y_n \leq x). \end{aligned}$$

By **B1** and Lemma 2.2.3, as for (2.5.11) and (2.5.12), we have $\mathbb{E}|V_n| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$ and $\mathbb{E}(|Y_n||V_n|) \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$. From these bounds, assumption **A2** and the concentration inequalities of Lemma 2.2.5, we have

$$|\mathbb{E}[f'(Y_n + V_n) - f'(Y_n)]| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}. \quad (2.5.17)$$

Thus, coming back to (2.5.10) and using the bounds (2.5.11), (2.5.12), (2.5.13), (2.5.15) and (2.5.17), we get

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_K} |\mathbb{E}[f'_h(\tilde{Y}_n) - \tilde{Y}_n f_h(\tilde{Y}_n)]| \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

which recovers Theorem 2.1.1 with the assumptions **B1** and **A2** instead of **A1** and **A2**.

2.6 Appendix 2 : Proof of Lemma 2.4.3

In this section we prove Lemma 2.4.3. We first prove Part (i). Let $\mu(\lambda) = \mu_\lambda - \mu$ and $t = \frac{x}{\sqrt{n}}$. By (2.4.1), the equation (2.4.19) becomes

$$\sigma t = \mu(\lambda) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_k}{(k-1)!} \lambda^{k-1}. \quad (2.6.1)$$

The previous power series $\mu(\lambda) = \mu_\lambda - \mu$ satisfies $\mu(0) = 0$ and $\mu'(0) = \sigma^2 > 0$. Thus for $|t|$ small enough, the previous equation has a unique solution $\lambda = \lambda(t)$ which can be expressed as a power series given by

$$\lambda = \frac{t}{\sqrt{\gamma_2}} - \frac{\gamma_3}{2\gamma_2^2} t^2 - \frac{\gamma_4\gamma_2 - 3\gamma_3^2}{6\gamma_2^{7/2}} t^3 + \dots \quad (2.6.2)$$

Substituting (2.6.2) in the right-hand side of $\lambda\mu_\lambda - \Lambda(\lambda) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k!} \gamma_k \lambda^k$, we get

$$\begin{aligned} \lambda\mu_\lambda - \Lambda(\lambda) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k!} \gamma_k \left(\frac{t}{\sqrt{\gamma_2}} - \frac{\gamma_3}{2\gamma_2^2} t^2 - \frac{\gamma_4\gamma_2 - 3\gamma_3^2}{6\gamma_2^{7/2}} t^3 + \dots \right)^k \\ &= \frac{t^2}{2} - \frac{\gamma_3}{6\gamma_2^{3/2}} t^3 - \frac{\gamma_4\gamma_2 - 3\gamma_3^2}{24\gamma_2^3} t^4 + \dots \end{aligned}$$

Using the fact that $t = \frac{\mu(\lambda)}{\sigma}$ we get

$$\begin{aligned} \frac{\mu(\lambda)^2}{2\sigma^2} - \lambda\mu_\lambda + \Lambda(\lambda) &= t^3 \left(\frac{\gamma_3}{6\gamma_2^{3/2}} + \frac{\gamma_4\gamma_2 - 3\gamma_3^2}{24\gamma_2^3} t + \frac{\gamma_5\gamma_2^2 - 10\gamma_4\gamma_3\gamma_2 + 15\gamma_3^3}{120\gamma_2^{9/2}} t^2 + \dots \right) \\ &= t^3 \mathcal{L}(t), \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

where $\mathcal{L}(t)$ is the Cramér's series defined in (2.1.15). This ends the proof of Part (i).

Now we prove Part (ii). Recall that

$$I_1 = \lambda\sigma_\lambda\sqrt{n} \int_0^\infty e^{-\lambda y\sigma_\lambda\sqrt{n}} \Phi([0, y]) dy. \quad (2.6.4)$$

By an integration by parts, we have

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\lambda y\sigma_\lambda\sqrt{n} - \frac{y^2}{2}\right) dy.$$

Substituting $u = \lambda y\sigma_\lambda\sqrt{n}$ in I_1 we find that

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda\sqrt{n}\sigma_\lambda} \int_0^\infty \exp\left(-u - \frac{u^2}{2\lambda^2 n\sigma_\lambda^2}\right) du. \quad (2.6.5)$$

It can be easily seen from (2.6.5) that

$$\lambda\sqrt{n}I_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\lambda} \int_0^{+\infty} \exp(-u) du < +\infty. \quad (2.6.6)$$

By (2.4.4) and (2.6.2), there exists a positive constant $a > 0$ such that for n large enough, we have $\frac{1}{2\lambda^2 n \sigma_\lambda^2} \leq a$. Thus we get

$$\lambda\sqrt{n}I_1 \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\lambda} \int_0^{+\infty} \exp(-u - au^2) du > 0. \quad (2.6.7)$$

By (2.6.6), (2.6.7) and (2.4.4), we conclude that for some constants $C_1, C_2 > 0$ and n large enough,

$$0 < C_1 \leq \lambda\sqrt{n}I_1 \leq C_2. \quad (2.6.8)$$

This is the first conclusion of Part (ii). Now we prove the second conclusion of Part (ii). We shall show that $I_1 = I_2(1 + O(\lambda))$, where

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\sqrt{n}\mu(\lambda)}{\sigma}y - \frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{n\mu^2(\lambda)}{2\sigma^2}\right) \int_{\frac{\sqrt{n}\mu(\lambda)}{\sigma}}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy. \quad (2.6.9)$$

As for I_1 , it can be easily seen that there exist positive constants C_1, C_2 such that

$$C_1 \leq \lambda\sqrt{n}I_2 \leq C_2. \quad (2.6.10)$$

Now we give an estimation of $|I_1 - I_2|$. Denote the Mill's ratio by $M(x) = \frac{1-\Phi(x)}{\Phi'(x)} = e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$. We have the relations

$$\sqrt{2\pi}I_1 = M(\lambda\sqrt{n}\sigma_\lambda), \quad \sqrt{2\pi}I_2 = M\left(\frac{\sqrt{n}\mu(\lambda)}{\sigma}\right). \quad (2.6.11)$$

By (2.6.11) and the mean value theorem, there exists $u \in \left(\lambda\sqrt{n}\sigma_\lambda, \frac{\sqrt{n}\mu(\lambda)}{\sigma}\right)$ such that

$$\sqrt{2\pi}|I_1 - I_2| \leq \left| \lambda\sqrt{n}\sigma_\lambda - \frac{\sqrt{n}\mu(\lambda)}{\sigma} \right| |M'(u)|.$$

Since $|M'(u)| = |uM(u) - 1| < u^{-2} < \frac{1}{(\lambda\sqrt{n}\sigma_\lambda)^2}$, we get from (2.4.4) and (2.6.2) that

$$|I_1 - I_2| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}. \quad (2.6.12)$$

By (2.6.10) and (2.6.12), we have $0 < \frac{|I_1 - I_2|}{I_2} < C\lambda$. Then coming back to I_1 , we get

$$I_1 = I_2 \left(1 + \frac{I_1 - I_2}{I_2}\right) = I_2(1 + O(\lambda)). \quad (2.6.13)$$

Thus, we have

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_2 (1 + O(\lambda)) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{n\mu(\lambda)^2}{2\sigma^2}\right) \int_{\frac{\sqrt{n}\mu(\lambda)}{\sigma}}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt (1 + O(\lambda)) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{n\mu(\lambda)^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\mu(\lambda)}{\sigma}\right)\right] (1 + O(\lambda)). \quad (2.6.14)
 \end{aligned}$$

Using (2.4.19) and (2.1.15), we end the proof of the second conclusion of Part (ii).

Asymptotique de la distribution de Z_n et moment harmonique critique de W

Résumé

Soit (Z_n) un processus de branchement sur-critique en environnement aléatoire ξ . Nous donnons un équivalent de la probabilité $\mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = k)$ lorsque $n \rightarrow \infty$, pour tout $j \geq k$, sous la condition $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. Nous déterminons également la valeur critique du moment harmonique de la variable aléatoire limite $W = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{\mathbb{E}(Z_n | \xi)}$ sous une hypothèse naturelle d'existence de certains moments.

Abstract

Let (Z_n) be a supercritical branching process in an independent and identically distributed random environment ξ . We show the exact decay rate of the probability $\mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = k)$ as $n \rightarrow \infty$, for each $j \geq k$, assuming that $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. We also determine the critical value for the existence of harmonic moments of the random variable $W = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{\mathbb{E}(Z_n | \xi)}$ under a simple moment condition.

This chapter has been submitted to
Annales de l'Institut Henri Poincaré.

Title : Asymptotic of the distribution and harmonic moments for a supercritical branching process in a random environment.

It has been written in collaboration with Ion Grama and Quansheng Liu.

3.1 Introduction

A branching process in a random environment (BPRE) is a natural and important generalisation of the Galton-Watson process, where the reproduction law varies according to a random environment indexed by time. It was introduced for the first time in Smith and Wilkinson [48] to modelize the growth of a population submitted to an environment. For background concepts and basic results concerning a BPRE we refer to Athreya and Karlin [3, 4]. In the critical and subcritical regime the branching process goes out and the research interest is mostly concentrated on the survival probability and conditional limit theorems, see e.g. Afanasyev, Böinghoff, Kersting, Vatutin [1, 2], Vatutin [52], Vatutin and Zheng [53], and the references therein. In the supercritical case, a great deal of current research has been focused on large deviations, see Bansaye and Berestycki [10], Bansaye and Böinghoff [11–13], Böinghoff and Kersting [20], Huang and Liu [36], Nakashima [44]. In the particular case when the offspring distribution is geometric, precise asymptotics can be found in Böinghoff [18], Kozlov [39].

An important closely linked issue is the asymptotic behavior of the distribution of a BPRE (Z_n) , i.e. the limit of $\mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = k)$ as $n \rightarrow \infty$, for fixed $j \geq 1$ when the process starts with $k \geq 1$ initial individuals. For the Galton-Watson process, the asymptotic is well-known and can be found in the book by Athreya [5]. For the need of the lower large deviation principle of a BPRE, Bansaye and Böinghoff have shown in [13] that, for any fixed $j \geq 1$ and $k \geq 1$ it holds $n^{-1} \log \mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = k) \rightarrow -\rho$ as $n \rightarrow \infty$, where $\rho > 0$ is a constant. This result characterizes the exponential decrease of the probability $\mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = k)$ for the general supercritical case, when extinction can occur. However, it stands only on a logarithmic scale, and the constant ρ is not explicit, except when the reproduction law is fractional linear, for which ρ is explicitly computed in [13]. Sharper asymptotic results for the fractional linear case can be found in [18]. In the present paper, we improve the results of [13] and extend those of [18] by giving an equivalent of the probability $\mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = k)$ as $n \rightarrow \infty$, provided that each individual gives birth to at least one child. These results are important to understand the asymptotic law of the process, and are useful to obtain sharper asymptotic large deviation results. We also improve the result of [36] about the critical value for the harmonic moment of the limit variable $W = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{\mathbb{E}(Z_n | \xi)}$.

Let us explain briefly the findings of the paper. Assume that $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. From Theorem 3.2.3 of the paper it follows that when $Z_0 = 1$,

$$\mathbb{P}(Z_n = j) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \gamma^n q_j \quad \text{with} \quad \gamma = \mathbb{P}(Z_1 = 1) > 0, \quad (3.1.1)$$

where $q_j \in (0, +\infty)$ can be computed as the unique solution of some recurrence equations; moreover, the generating function $Q(t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j t^j$ has the radius of convergence equal to 1 and is characterized by the functional equation

$$\gamma Q(t) = \mathbb{E}Q(f_0(t)), \quad t \in [0, 1), \quad (3.1.2)$$

where $f_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\xi_0)t^i$ is the conditional generating function of Z_1 given the environment. These results extend the corresponding results for the Galton-Watson process (see [5]). They also improve and complete the results in [13] and [18] : it was proved in [13] that $\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z_n = j) \rightarrow \log \gamma$, and in [18] that $\mathbb{P}(Z_n = 1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \gamma^n q_1$ in the fractional linear case.

In the proofs of the above results we make use of Theorem 3.2.1 which shows that, with $m_0 = \mathbb{E}_{\xi} Z_1$, we have, for any fixed $a > 0$,

$$\mathbb{E}W^{-a} < \infty \quad \text{if and only if} \quad \mathbb{E}[p_1(\xi_0)m_0^a] < 1, \quad (3.1.3)$$

under a simple moment condition $\mathbb{E}[m_0^p] < \infty$ for some $p > a$, which is much weaker than the boundedness condition used in [36, Theorem 1.4] (see (3.2.10) below).

For the proof of Theorem 3.2.1 our argument consists of two steps. In the first step we prove the existence of the harmonic moment of some order $a > 0$ using the functional relation (3.3.5). The key argument to approach the critical value is in the second step, which is based on the method developed in [42, Lemma 4.1] obtaining the decay rate of the Laplace transform $\phi(t) = \mathbb{E}e^{-tW}$ as $t \rightarrow \infty$, starting from a functional inequation of the form

$$\phi(t) \leq q\mathbb{E}\phi(Yt) + Ct^{-a}, \quad (3.1.4)$$

where Y is a positive random variable. To prove (3.1.4) we use a recursive procedure for branching processes starting with k individuals and choosing k large enough. The intuition behind this consideration is that as the number of starting individuals k becomes larger, the decay rate of $\phi_k(t) = \mathbb{E}[e^{-tW} | Z_0 = k]$ as $t \rightarrow \infty$ is higher which leads to the desired functional inequation.

In the proof of Theorem 3.2.3, the equivalence relation (3.1.1) and the recursive equations for the limit values (q_j) come from simple monotonicity arguments. The difficulty is to characterize the sequence (q_j) by its generating function Q . To this end, we first calculate the radius of convergence of Q by determining the asymptotic behavior of the normalized harmonic moments $\mathbb{E}Z_n^{-r}/\gamma^n$ as $n \rightarrow \infty$ for some $r > 0$ large enough and by using the fact that $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-r} q_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}Z_n^{-r}/\gamma^n$. We then show that the functional equation (3.1.2) has a unique solution subject to an initial condition.

The rest of the paper is organized as follows. The main results, Theorems 3.2.1 and 3.2.3, are presented in Section 3.2. Their proofs are given in Sections 3.3 and 3.4.

3.2 Main results

A BPRE (Z_n) can be described as follows. The random environment is represented by a sequence $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots)$ of independent and identically distributed random

variables (i.i.d. r.v.'s), whose realizations determine the probability generating functions

$$f_n(t) = f(\xi_n, t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\xi_n) t^i, \quad t \in [0, 1], \quad p_i(\xi_n) \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\xi_n) = 1. \quad (3.2.1)$$

The branching process $(Z_n)_{n \geq 0}$ is defined by the relations

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} N_{n,i}, \quad \text{for } n \geq 0, \quad (3.2.2)$$

where $N_{n,i}$ is the number of children of the i -th individual of the generation n . Conditionally on the environment ξ , the r.v.'s $N_{n,i}$ ($i = 1, 2, \dots$) are independent of each other with common probability generating function f_n , and also independent of Z_n .

In the sequel we denote by \mathbb{P}_ξ the *quenched law*, i.e. the conditional probability when the environment ξ is given, and by τ the law of the environment ξ . Then $\mathbb{P}(dx, d\xi) = \mathbb{P}_\xi(dx) \tau(d\xi)$ is the total law of the process, called *annealed law*. The corresponding quenched and annealed expectations are denoted respectively by \mathbb{E}_ξ and \mathbb{E} . We also denote by \mathbb{P}_k and \mathbb{E}_k the corresponding probability and expectation starting with k individuals. For $n \in \mathbb{N}$, the probability generating function of Z_n is

$$G_n(t) = \mathbb{E} t^{Z_n} = \mathbb{E} [f_0 \circ \dots \circ f_{n-1}(t)] = \mathbb{E} [g_n(t)], \quad (3.2.3)$$

where $g_n(t) = f_0 \circ \dots \circ f_{n-1}(t)$ is the conditional probability generating function of Z_n when the environment ξ is given. It follows from (3.2.2) that the probability generating function $G_{k,n}$ of Z_n starting with k individuals is

$$G_{k,n}(t) = \mathbb{E}_k t^{Z_n} = \mathbb{E} [g_n^k(t)]. \quad (3.2.4)$$

We also define, for $n \geq 0$,

$$m_n = m(\xi_n) = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i(\xi_n) \quad \text{and} \quad \Pi_n = \mathbb{E}_\xi Z_n = m_0 \dots m_{n-1},$$

where m_n represents the average number of children of an individual of generation n when the environment ξ is given. Let

$$W_n = \frac{Z_n}{\Pi_n}, \quad n \geq 0, \quad (3.2.5)$$

be the normalized population size. It is well known that under \mathbb{P}_ξ , as well as under \mathbb{P} , the sequence $(W_n)_{n \geq 0}$ is a non-negative martingale with respect to the filtration

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi, N_{j,i}, 0 \leq j \leq n-1, i = 1, 2, \dots),$$

where by convention $\mathcal{F}_0 = \sigma(\xi)$. Then the limit $W = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ exists \mathbb{P} -a.s. and $\mathbb{E}W \leq 1$.

We shall assume that

$$\mu := \mathbb{E} \log m_0 \in (0, \infty),$$

which implies that the BPRE is supercritical and that

$$\gamma := \mathbb{P}(Z_1 = 1) \in [0, 1). \quad (3.2.6)$$

With the extra condition $\mathbb{E} |\log(1 - p_0(\xi_0))| < \infty$ (see [48]), the population size tends to infinity with positive probability. We also assume in the whole paper that each individual gives birth to at least one child, i.e.

$$p_0(\xi_0) = 0 \quad a.s. \quad (3.2.7)$$

Therefore, under the condition

$$\mathbb{E} \frac{Z_1}{m_0} \log^+ Z_1 < \infty, \quad (3.2.8)$$

the martingale (W_n) converges to W in $L^1(\mathbb{P})$ (see e.g. [50]) and

$$\mathbb{P}(W > 0) = \mathbb{P}(Z_n \rightarrow \infty) = 1.$$

Our first result concerns the harmonic moments of the r.v. W .

Theorem 3.2.1. *Assume that there exists a constant $p > 0$ such that $\mathbb{E}[m_0^p] < \infty$. Then for any $a \in (0, p)$,*

$$\mathbb{E}_k W^{-a} < \infty \quad \text{if and only if} \quad \mathbb{E}[p_1^k(\xi_0) m_0^a] < 1.$$

From Theorem 3.2.1 we get the following corollary.

Corollary 3.2.2. *Let $a_k > 0$ be the solution of the equation*

$$\mathbb{E}[p_1^k(\xi_0) m_0^{a_k}] = 1. \quad (3.2.9)$$

Assume that $\mathbb{E} m_0^{a_k} < \infty$. Then,

$$\begin{cases} \mathbb{E}_k W^{-a} < \infty & \text{for } a \in [0, a_k), \\ \mathbb{E}_k W^{-a} = \infty & \text{for } a \in [a_k, \infty). \end{cases}$$

The solution a_k of the equation (3.2.9) is the critical value for the existence of harmonic moments of the r.v. W . Note that, when the process starts with one individual, the critical value a_1 for the harmonic moments of W has been found in Theorem 1.4 of [36] under the more restrictive condition

$$A_1 \leq m_0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{\infty} i^{1+\delta} p_i(\xi_0) \leq A^{1+\delta} \quad a.s., \quad (3.2.10)$$

where $\delta > 0$ and $1 < A_1 < A$ are some constants. Theorem 3.2.1 and Corollary 3.2.2 generalize the result of [36], in the sense that we consider k initial individuals rather than just one and that the boundedness condition (3.2.10) is relaxed to the simple moment condition $\mathbb{E}[m_0^k] < \infty$.

The next result gives an equivalent as $n \rightarrow \infty$ of the probability $\mathbb{P}_k(Z_n = j) = \mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = k)$, with $k \in \mathbb{N}^*$ and $j \geq k$, in the case when $\mathbb{P}(Z_1 = 1) > 0$. The last condition implies that, for $k \geq 1$,

$$\gamma_k = \mathbb{P}_k(Z_1 = k) = \mathbb{E}[p_1^k(\xi_0)] > 0. \quad (3.2.11)$$

Define r_k as the solution of the equation

$$\gamma_k = \mathbb{E}m_0^{-r_k}. \quad (3.2.12)$$

Theorem 3.2.3. *Assume that $\mathbb{P}(Z_1 = 1) > 0$. For any $k \geq 1$ the following assertions hold.*

a) *For any accessible state $j \geq k$ in the sense that $\mathbb{P}_k(Z_l = j) > 0$ for some $l \geq 0$, we have*

$$\mathbb{P}_k(Z_n = j) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \gamma_k^n q_{k,j}, \quad (3.2.13)$$

where $q_{k,k} = 1$ and, for $j > k$, $q_{k,j} \in (0, +\infty)$ is the solution of the recurrence relation

$$\gamma_k q_{k,j} = \sum_{i=k}^j p(i, j) q_{k,i}, \quad (3.2.14)$$

with

$$p(i, j) = \mathbb{P}(Z_1 = j | Z_0 = i)$$

and $q_{k,i} = 0$ for any non-accessible state i (i.e. $\mathbb{P}_k(Z_l = i) = 0$ for all $l \geq 0$).

b) *Assume that there exists $\varepsilon > 0$ such that $\mathbb{E}[m_0^{r_k + \varepsilon}] < \infty$. Then, for any $r > r_k$, we have $\sum_{j=k}^{\infty} j^{-r} q_{k,j} < \infty$. In particular, the radius of convergence of the power series*

$$Q_k(t) = \sum_{j=k}^{+\infty} q_{k,j} t^j \quad (3.2.15)$$

is equal to 1.

c) *For all $t \in [0, 1)$ and $k \geq 1$, we have,*

$$\frac{G_{k,n}(t)}{\gamma_k^n} \uparrow Q_k(t) \text{ as } n \rightarrow \infty, \quad (3.2.16)$$

where $G_{k,n}$ is the probability generating function of Z_n when $Z_0 = k$, defined in (3.2.4).

d) *$Q_k(t)$ is the unique power series which verifies the functional equation*

$$\gamma_k Q_k(t) = \mathbb{E}[Q_k(f_0(t))], \quad t \in [0, 1), \quad (3.2.17)$$

with the condition $Q_k^{(k)}(0) = 1$.

Part a) improves the bound $\mathbb{P}(Z_n \leq j) \leq n^j \gamma^n$ obtained in [10] (Lemma 7) for a BPRE with $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. Furthermore, Theorem 3.2.3 extends the results of [5] for the Galton-Watson process, with some significant differences. Indeed, when the environment is random and non-degenerate, we have, for $k \geq 2$, $G_{k,1}(t) = \mathbb{E}f_0^k(t) \neq G_1^k(t)$ in general, which implies that $Q_k(t) \neq Q^k(t)$, whereas we have the relation $Q_k(t) = Q^k(t)$ for the Galton-Watson process.

Theorem 3.2.3 also improves the results of [13] (Theorem 2.1), where it has been proved that for a general supercritical BPRE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n = j) = -\rho < 0. \quad (3.2.18)$$

Our result is sharper in the case where $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. Moreover, in the case where $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$, it has been stated mistakenly in [13] that $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n = j) = k \log \gamma$, whereas the correct asymptotic is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n = j) = \log \gamma_k.$$

Now we discuss the particular fractional linear case. The reproduction law of a BPRE is said to be fractional linear if

$$p_0(\xi_0) = a_0, \quad p_k(\xi_0) = \frac{(1 - a_0)(1 - b_0)}{b_0} b_0^k, \quad (3.2.19)$$

with generating function f_0 given by

$$f_0(t) = a_0 + \frac{(1 - a_0)(1 - b_0)t}{1 - b_0 t},$$

where $a_0 \in [0, 1)$, $b_0 \in (0, 1)$ are random variables depending on the environment ξ_0 . In this case, the mean of the offspring distribution is given by

$$m_0 = \frac{1 - a_0}{1 - b_0}.$$

The constant ρ in (3.2.18) was computed in [13] : with $X = \log m_0$,

$$\rho = \begin{cases} -\log \mathbb{E}[e^{-X}] & \text{if } \mathbb{E}[Xe^{-X}] \geq 0 \text{ (intermediately and} \\ & \text{strongly supercritical case),} \\ -\log \inf_{\lambda \geq 0} \mathbb{E}[e^{-\lambda X}] & \text{if } \mathbb{E}[Xe^{-X}] < 0 \text{ (weakly supercritical case).} \end{cases}$$

Moreover, precise asymptotic results for the strongly and intermediately supercritical case can be found in [18], where the following assertions are proved :

1. if $\mathbb{E}[Xe^{-X}] > 0$ (strongly supercritical case),

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) \sim \nu \left(\mathbb{E}[e^{-X}] \right)^n ;$$

2. if $\mathbb{E}[Xe^{-X}] = 0$ (intermediately supercritical case),

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) \sim \theta \left(\mathbb{E}[e^{-X}] \right)^n l(n)n^{-(1-s)},$$

with θ, ν, s positive constants and $l(\cdot)$ a slowly varying function. In the particular case where $a_0 = 0$, Theorem 3.2.3 recovers Theorem 2.1.1 of [18] with $p_1(\xi_0) = 1/m_0$, $X = \log m_0 > 0$ and $\mathbb{E}[Xe^{-X}] > 0$. Therefore the process is strongly supercritical and $\mathbb{P}(Z_n = 1) \sim \nu \left(\mathbb{E}[e^{-X}] \right)^n = \gamma^n$. However, since we assume $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$, our result does not highlight the previous two asymptotic regimes stated in the particular case when the distribution is fractional linear. The study of the general case is a challenging problem which still remains open.

3.3 Harmonic moments of W

In this section we prove Theorem 3.2.1. Denote the quenched Laplace transform of W under the environment ξ by

$$\phi_\xi(t) = \mathbb{E}_\xi \left[e^{-tW} \right], \quad (3.3.1)$$

and the annealed Laplace transform of W starting with k individuals by

$$\phi_k(t) = \mathbb{E}_k [\phi_\xi(t)] = \mathbb{E} \left[\phi_\xi^k(t) \right] = \mathbb{E}_k \left[e^{-tW} \right]. \quad (3.3.2)$$

We start with a lemma which gives a lower bound for the harmonic moment of W .

Lemma 3.3.1. *Assume that $\mathbb{E}[m_0^p] < \infty$ for some constant $p > 0$. For any $k \geq 1$, let*

$$\alpha_k = \frac{p}{1 - \log \mathbb{E}m_0^p / \log \gamma_k}, \quad (3.3.3)$$

with the convention that $\alpha_k = p$ if $p_1(\xi_0) = 0$ a.s. (so that $\gamma_k = 0$). Then, for all $a \in (0, \alpha_k)$,

$$\mathbb{E}_k W^{-a} < \infty.$$

Furthermore, if $\mathbb{P}(p_1(\xi_0) = 0) < 1$, we have $\alpha_k < \alpha_{k+1}$; if additionally $\mathbb{P}(p_1(\xi_0) < 1) = 1$, then $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = p$.

Proof. We use the same approach as in [31] where the case $k = 1$ was treated. Since W is a positive random variable, it can be easily seen that, for $\alpha > 0$,

$$\mathbb{E}_k W^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \phi_k(t) t^{\alpha-1} dt, \quad (3.3.4)$$

where $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ is the Gamma function. Moreover, it is well-known that $\phi_\xi(t)$ satisfies the functional relation

$$\phi_\xi(t) = f_0 \left(\phi_{T\xi} \left(\frac{t}{m_0} \right) \right), \quad (3.3.5)$$

where $f_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\xi_0)t^k$ is the generating function of Z_1 under ξ_0 , defined in (3.2.1). Using (3.3.5) and the fact that $\phi_{T\xi}^k\left(\frac{t}{m_0}\right) \leq \phi_{T\xi}^2\left(\frac{t}{m_0}\right)$ for all $k \geq 2$, we obtain

$$\phi_{\xi}(t) \leq p_1(\xi_0)\phi_{T\xi}\left(\frac{t}{m_0}\right) + (1 - p_1(\xi_0))\phi_{T\xi}^2\left(\frac{t}{m_0}\right). \quad (3.3.6)$$

Taking the k -th power in (3.3.6), using the binomial expansion and the fact that $\phi_{T\xi}^{2k-i}\left(\frac{t}{m_0}\right) \leq \phi_{T\xi}^{k+1}\left(\frac{t}{m_0}\right)$ for all $i \in \{0, \dots, k-1\}$, we get

$$\begin{aligned} \phi_{\xi}^k(t) &= p_1^k(\xi_0)\phi_{T\xi}^k\left(\frac{t}{m_0}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i p_1(\xi_0)^i (1 - p_1(\xi_0))^{k-i} \phi_{T\xi}^{2(k-i)+i}\left(\frac{t}{m_0}\right) \\ &\leq p_1^k(\xi_0)\phi_{T\xi}^k\left(\frac{t}{m_0}\right) + (1 - p_1^k(\xi_0))\phi_{T\xi}^{k+1}\left(\frac{t}{m_0}\right) \\ &= \phi_{T\xi}^k\left(\frac{t}{m_0}\right) \left[p_1^k(\xi_0) + (1 - p_1^k(\xi_0))\phi_{T\xi}\left(\frac{t}{m_0}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

By iteration, this leads to

$$\phi_{\xi}^k(t) \leq \phi_{T^n\xi}^k\left(\frac{t}{\Pi_n}\right) \prod_{j=0}^{n-1} \left(p_1^k(\xi_j) + (1 - p_1^k(\xi_j))\phi_{T^n\xi}\left(\frac{t}{\Pi_n}\right) \right). \quad (3.3.8)$$

Taking expectation and using the fact that $\phi_{T^n\xi}(\cdot) \leq 1$, we have

$$\phi_k(t) \leq \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(p_1^k(\xi_j) + (1 - p_1^k(\xi_j))\phi_{T^n\xi}\left(\frac{t}{\Pi_n}\right) \right) \right].$$

Since $\phi_{\xi}(\cdot)$ is non-increasing, using a truncation, we get for all $A > 1$,

$$\phi_k(t) \leq \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(p_1^k(\xi_j) + (1 - p_1^k(\xi_j))\phi_{T^n\xi}\left(\frac{t}{A^n}\right) \right) \right] + \mathbb{P}(\Pi_n \geq A^n).$$

As $T^n\xi$ is independent of $\sigma(\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$, and the r.v.'s $p_1(\xi_i)$ ($i \geq 0$) are i.i.d., we obtain

$$\phi_k(t) \leq \left[\gamma_k + (1 - \gamma_k)\phi\left(\frac{t}{A^n}\right) \right]^n + \mathbb{P}(\Pi_n \geq A^n),$$

where $\gamma_k = \mathbb{E}p_1^k(\xi_0)$ is defined in (3.2.11). By the dominated convergence theorem, we have $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$. Thus, for any $\delta \in (0, 1)$, there exists a constant $K > 0$ such that, for all $t \geq K$, we have $\phi(t) \leq \delta$. Consequently, for all $t \geq KA^n$, we have $\phi\left(\frac{t}{A^n}\right) \leq \delta$ and

$$\phi_k(t) \leq \beta^n + \mathbb{P}(\Pi_n \geq A^n),$$

where

$$\beta = \gamma_k + (1 - \gamma_k)\delta \in (0, 1). \quad (3.3.9)$$

Using Markov's inequality, we have $\mathbb{P}(\Pi_n \geq A^n) \leq (\mathbb{E}m_0^p/A^p)^n$. Setting $A = \left(\frac{\mathbb{E}m_0^p}{\beta}\right)^{1/p} > 1$, we get for any $n \in \mathbb{N}$ and $t \geq KA^n$,

$$\phi_k(t) \leq 2\beta^n. \quad (3.3.10)$$

Now, for any $t \geq K$, define $n_0 = n_0(t) = \left[\frac{\log(t/K)}{\log A}\right] \geq 0$, where $[x]$ stands for the integer part of x , so that

$$\frac{\log(t/K)}{\log A} - 1 \leq n_0 \leq \frac{\log(t/K)}{\log A} \quad \text{and} \quad t \geq KA^{n_0}.$$

Then, for $t \geq K$,

$$\phi_k(t) \leq 2\beta^{n_0} \leq 2\beta^{-1}(t/K)^{\frac{\log \beta}{\log A}} = C_0 t^{-\alpha},$$

with $C_0 = 2\beta^{-1}K^\alpha$ and $\alpha = -\frac{\log \beta}{\log A} > 0$. Thus, we can choose a constant $C > 0$ large enough, such that, for all $t > 0$,

$$\phi_k(t) \leq Ct^{-\alpha}. \quad (3.3.11)$$

Furthermore, by the definition of β , A and α , we have

$$\alpha = \frac{p}{1 - \log \mathbb{E}m_0^p / \log(\gamma_k + (1 - \gamma_k)\delta)},$$

where $\delta \in (0, 1)$ is an arbitrary constant and $\gamma_k = \mathbb{E}p_1^k(\xi_0)$. When $\delta \rightarrow 0$, we have $\alpha \rightarrow \alpha_k$, so that (3.3.11) holds for all $\alpha < \alpha_k$, where α_k is defined in (3.3.3). By (3.3.4) and (3.3.11), we conclude that $\mathbb{E}W^{-\alpha} < \infty$ for any $\alpha < \alpha_k$. Moreover, it is easily seen that if $\mathbb{P}(p_1(\xi_0) = 0) < 1$, then $\alpha_k < \alpha_{k+1}$ since $\gamma_{k+1} < \gamma_k$; if additionally $\mathbb{P}(p_1(\xi_0) < 1) = 1$, then $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0$ so that $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = p$. \square

The following lemma is the key technical tool to study the exact decay rate of the Laplace transform of the limit variable W .

Lemma 3.3.2 ([42], Lemma 4.1). *Let $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ be a bounded function and let Y be a positive random variable such that for some constants $q \in (0, 1)$, $a \in (0, \infty)$, $C > 0$ and $t_0 \geq 0$ and all $t > t_0$,*

$$\phi(t) \leq q\mathbb{E}\phi(Yt) + Ct^{-a}.$$

If $q\mathbb{E}(Y^{-a}) < 1$, then $\phi(t) = O(t^{-a})$ as $t \rightarrow \infty$.

Now we proceed to prove Theorem 3.2.1. We first prove the necessity. Assume that $\mathbb{E}_k W^{-a} < \infty$ for some $a > 0$. We shall show that $\mathbb{E}p_1^k(\xi_0)m_0^a < 1$. Note that the r.v. W admits the well-known decomposition

$$W = \frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^{Z_1} W(i),$$

where the r.v.'s $W(i)$ ($i \geq 1$) are i.i.d. and independent of Z_1 under \mathbb{P}_ξ , and are also independent of Z_1 and ξ_0 under \mathbb{P} . The conditional probability law of $W(i)$ satisfies $\mathbb{P}_\xi(W(i) \in \cdot) = \mathbb{P}_{T\xi}(W \in \cdot)$. Since $\mathbb{P}_k(Z_1 \geq k+1) > 0$, we have

$$\mathbb{E}_k W^{-a} > \mathbb{E}_k m_0^a \left(\sum_{i=1}^{Z_1} W(i) \right)^{-a} \mathbf{1}\{Z_1 = k\} = \mathbb{E} p_1^k(\xi_0) m_0^a \mathbb{E}_k W^{-a}, \quad (3.3.12)$$

which implies that $\mathbb{E} p_1^k(\xi_0) m_0^a < 1$.

We now prove the sufficiency. Assume that $\mathbb{E} m_0^p < \infty$ and $\mathbb{E} p_1^k(\xi_0) m_0^a < 1$ for some $a \in (0, p)$.

We first consider the case where $\mathbb{P}(p_1(\xi_0) < 1) = 1$. We prove that $\mathbb{E}_k W^{-a} < \infty$ by showing that $\phi_k(t) = O(t^{-(a+\varepsilon)})$ as $t \rightarrow \infty$, for some $\varepsilon > 0$. By Lemma 3.3.1, there exists an integer $j \geq k$ large enough and a constant $C > 0$ such that

$$\phi_j(t) \leq C t^{-(a+\varepsilon)}, \quad (3.3.13)$$

with $\varepsilon > 0$ and $a + \varepsilon < p$. By (3.3.7), we have

$$\phi_\xi^{j-1}(t) \leq p_1^{j-1}(\xi_0) \phi_{T\xi}^{j-1} \left(\frac{t}{m_0} \right) + \phi_{T\xi}^j \left(\frac{t}{m_0} \right). \quad (3.3.14)$$

Taking the expectation in (3.3.14), using (3.3.2), (3.3.13) and the independence between ξ_0 and $T\xi$, we obtain

$$\begin{aligned} \phi_{j-1}(t) &\leq \mathbb{E} \left[p_1^{j-1}(\xi_0) \phi_{j-1} \left(\frac{t}{m_0} \right) \right] + C t^{-(a+\varepsilon)} \\ &= \gamma_{j-1} \mathbb{E} [\phi_{j-1}(Yt)] + C t^{-(a+\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

where $\gamma_{j-1} = \mathbb{E} [p_1^{j-1}(\xi_0)] < 1$ and Y is a positive random variable whose distribution is determined by

$$\mathbb{E} [g(Y)] = \frac{1}{\gamma_{j-1}} \mathbb{E} \left[p_1^{j-1}(\xi_0) g \left(\frac{1}{m_0} \right) \right],$$

for all bounded and measurable function g . By hypothesis, $\mathbb{E} p_1^k(\xi_0) m_0^a < 1$. Then, by the dominated convergence theorem, there exists $\varepsilon > 0$ small enough such that $\mathbb{E} p_1^k(\xi_0) m_0^{a+\varepsilon} < 1$, and since $j-1 \geq k$, we have $\mathbb{E} p_1^{j-1}(\xi_0) m_0^{a+\varepsilon} \leq \mathbb{E} p_1^k(\xi_0) m_0^{a+\varepsilon} < 1$. Therefore, $\gamma_{j-1} \mathbb{E} [Y^{-(a+\varepsilon)}] < 1$ and using (3.3.15) and Lemma 3.3.2, we get $\phi_{j-1}(t) = O(t^{-(a+\varepsilon)})$ as $t \rightarrow \infty$. By induction, applying (3.3.14) and (3.3.15) to the functions $\phi_{j-2}, \phi_{j-3}, \dots, \phi_k$ and using the same argument as in the proof for ϕ_{j-1} , we obtain

$$\phi_k(t) = O(t^{-(a+\varepsilon)}) \quad \text{as } t \rightarrow \infty. \quad (3.3.16)$$

Therefore, in the case where $\mathbb{P}(p_1(\xi_0) < 1) = 1$, we have proved that

$$\mathbb{E} p_1^k(\xi_0) m_0^a < 1 \quad \text{implies} \quad \mathbb{E}_k W^{-a} < \infty. \quad (3.3.17)$$

Now consider the general case where $\mathbb{P}(p_1(\xi_0) < 1) < 1$. Denote the distribution of ξ_0 by τ_0 and define a new distribution $\tilde{\tau}_0$ as

$$\tilde{\tau}_0(\cdot) = \tau_0(\cdot | p_1(\xi_0) < 1). \quad (3.3.18)$$

Consider the new branching process whose environment distribution is $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0^{\otimes \mathbb{N}}$ instead of $\tau = \tau_0^{\otimes \mathbb{N}}$. The corresponding probability and expectation are denoted by $\tilde{\mathbb{P}}(dx, d\xi) = \mathbb{P}_\xi(dx)\tilde{\tau}(d\xi)$ and $\tilde{\mathbb{E}}$, respectively. Of course (W_n) is still a martingale under $\tilde{\mathbb{P}}$. Moreover, the condition $\tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{Z_1}{m_0} \log^+ Z_1\right] = \mathbb{E}\left[\frac{Z_1}{m_0} \log^+ Z_1\right] / \mathbb{P}(p_1(\xi_0) < 1) < \infty$ implies that $W_n \rightarrow W$ in $L^1(\tilde{\mathbb{P}})$. Now we show that $\mathbb{E}_k[W^{-a}] \leq \tilde{\mathbb{E}}_k[W^{-a}]$. For $0 \leq i \leq n$, denote

$$A_{i,n} = \left\{ (\xi_0, \dots, \xi_{n-1}) \mid p_1(\xi_{j_1}) = \dots = p_1(\xi_{j_i}) = 1 \text{ for some } 0 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n-1, \right. \\ \left. \text{and } p_1(\xi_h) < 1 \text{ for all } h \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{j_1, \dots, j_i\} \right\}.$$

Conditioning by the events $A_{i,n}$ ($i \in \{0, \dots, n\}$) and using the fact that the r.v.'s ξ_0, \dots, ξ_{n-1} are i.i.d., we obtain, for all $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_k[W_n^{-a}] &= \sum_{i=0}^n \mathbb{E}_k[W_n^{-a} | A_{i,n}] \mathbb{P}(A_{i,n}) \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbb{E}_k[W_n^{-a} | A_{i,n}] C_n^i \eta^i (1-\eta)^{n-i}, \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

with $\eta = \mathbb{P}(p_1(\xi_0) = 1)$. Moreover, using (3.2.2), a straightforward computation leads to the decomposition

$$W_n = \prod_{i=0}^{n-1} \eta_i, \quad \text{with } n \geq 1 \quad \text{and} \quad \eta_i = \frac{1}{Z_i} \sum_{j=1}^{Z_i} \frac{N_{i,j}}{m_i}. \quad (3.3.20)$$

Note that, on the event $\{p_1(\xi_i) = 1\}$ we have $\eta_i = 1$. Therefore, using (3.3.20) and the fact that the r.v.'s ξ_0, \dots, ξ_{n-1} are i.i.d., we get

$$\mathbb{E}_k[W_n^{-a} | A_{i,n}] = \tilde{\mathbb{E}}_k[W_{n-i}^{-a}]. \quad (3.3.21)$$

By the convexity of the function $x \mapsto x^{-a}$, we have $\sup_{n \geq i} \tilde{\mathbb{E}}_k[W_{n-i}^{-a}] \leq \tilde{\mathbb{E}}_k W^{-a}$ (see [36] Lemma 2.1). Thus, by (3.3.19) and (3.3.21), we obtain

$$\mathbb{E}_k[W^{-a}] \leq \tilde{\mathbb{E}}_k[W^{-a}]. \quad (3.3.22)$$

Note that, conditioning by the events $\{p_1(\xi_0) = 1\}$ and $\{p_1(\xi_0) < 1\}$, we have

$$\mathbb{E}p_1^k(\xi_0)m_0^a = (1-\eta)\tilde{\mathbb{E}}p_1^k(\xi_0)m_0^a + \eta,$$

with $\eta = \mathbb{P}(p_1(\xi_0) = 1)$. So the condition $\mathbb{E}p_1^k(\xi_0)m_0^a < 1$ implies that $\tilde{\mathbb{E}}p_1^k(\xi_0)m_0^a < 1$. Then, by (3.3.17) applied under the probability $\tilde{\mathbb{P}}$, and the fact that $\tilde{\mathbb{P}}(p_1(\xi_0) < 1) = 1$, we get $\tilde{\mathbb{E}}_k[W^{-a}] < \infty$. Therefore, by (3.3.22), it follows that

$$\mathbb{E}p_1^k(\xi_0)m_0^a < 1 \quad \text{implies} \quad \mathbb{E}_k W^{-a} < \infty, \quad (3.3.23)$$

which ends the proof of Theorem 3.2.1.

3.4 Asymptotic of the distribution of Z_n

In this section we prove Theorem 3.2.3. We start with the proof of part a). For $k \geq 1$ and $j \geq k$, define

$$a_{k,n}(j) = \frac{\mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = k)}{\gamma_k^n}, \quad (3.4.1)$$

with $\gamma_k = \mathbb{P}_k(Z_1 = k)$. By the Markov property, we have

$$\mathbb{P}_k(Z_{n+1} = j) \geq \mathbb{P}_k(Z_1 = k) \mathbb{P}_k(Z_n = j).$$

Dividing by γ_k^{n+1} leads to

$$a_{k,n+1}(j) \geq a_{k,n}(j). \quad (3.4.2)$$

Therefore, by the monotone ratio theorem, we obtain

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow a_{k,n}(j) = q_{k,j} \in \bar{\mathbb{R}}.$$

We shall prove that $q_{k,j}$ satisfies the properties claimed in the theorem. If j is such that $\mathbb{P}_k(Z_n = j) = 0$ for any $n \geq 0$, then $a_{k,n}(j) = 0$ for any $n \geq 0$, so that $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k,n}(j) = 0 = q_{k,j}$. If there exists $l \geq 0$ such that $\mathbb{P}_k(Z_l = j) > 0$, then $q_{k,j} \geq a_{k,l}(j) = \mathbb{P}_k(Z_l = j) / \gamma_k^l > 0$.

Now we show by induction that for all $j \geq k$, we have

$$H(j) : \sup_{n \in \mathbb{N}} a_{k,n}(j) = a_k(j) < \infty.$$

For $j = k$, we have $a_k(k) = 1$. Assume that $j \geq k + 1$ and that $H(i)$ is true for all $k \leq i \leq j - 1$. By the total probability formula, we obtain

$$\frac{\mathbb{P}_k(Z_{n+1} = j)}{\gamma_k^{n+1}} = \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=k}^j \mathbb{P}_k(Z_{n+1} = j | Z_n = i) \frac{\mathbb{P}_k(Z_n = i)}{\gamma_k^n},$$

which is equivalent to

$$a_{k,n+1}(j) = \frac{1}{\gamma_k} \left[\sum_{i=k}^{j-1} p(i, j) a_{k,n}(i) + \gamma_j a_{k,n}(j) \right] \quad (3.4.3)$$

with $p(i, j) = \mathbb{P}(Z_1 = j | Z_0 = i)$. Using the fact that $a_{k,n}(j) \leq a_{k,n+1}(j)$, we get by induction that

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_{k,n+1}(j) (\gamma_k - \gamma_j) \leq \sum_{i=k}^{j-1} p(i, j) a_k(i) < \infty.$$

Thus $q_{k,j} < \infty$ for all $j \geq k + 1$ and $k \geq 1$. Furthermore, taking the limit as $n \rightarrow \infty$ in (3.4.3), leads to the following recurrent relation for $q_{k,j}$:

$$q_{k,k} = 1, \quad \gamma_k q_{k,j} = \sum_{i=k}^j p(i, j) q_{k,i} \quad (j \geq k + 1).$$

This ends the proof of part a) of Theorem 3.2.3.

Now we prove part b) of Theorem 3.2.3. We give a proof that the radius of convergence of the power series Q_k is equal to 1. The method is new even in the case of the Galton-Watson process. We start with a lemma.

Lemma 3.4.1. *Let $k \geq 1$. Assume that $\mathbb{P}(p_1(\xi_0) < 1) = 1$ and that there exists $\varepsilon > 0$ such that $\mathbb{E}[m_0^{r_k + \varepsilon}] < \infty$, where r_k is the solution of the equation $\gamma_k = \mathbb{E}m_0^{-r_k}$. Then, for any $r > r_k$, we have*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \frac{\mathbb{E}_k Z_n^{-r}}{\gamma_k^n} < \infty. \quad (3.4.4)$$

Proof. By the Markov property,

$$\mathbb{E}_k [Z_{n+1}^{-r}] \geq \mathbb{E}_k [Z_{n+1}^{-r} | Z_1 = k] \mathbb{P}_k(Z_1 = k) = \gamma_k \mathbb{E}_k [Z_n^{-r}],$$

which proves that the sequence $(\mathbb{E}_k [Z_n^{-r}] / \gamma_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ is increasing. We show that it is bounded. For $n \geq 1$ and $m \geq 0$, we have the following well-known branching property for Z_n :

$$Z_{n+m} = \sum_{i=1}^{Z_m} Z_{n,i}^{(m)}, \quad (3.4.5)$$

where, under \mathbb{P}_ξ , the random variables $Z_{n,i}^{(m)}$ ($i \geq 1$) are i.i.d., independent of Z_m , whose conditional probability law satisfies $\mathbb{P}_\xi(Z_{n,i}^{(m)} \in \cdot) = \mathbb{P}_{T^m \xi}(Z_n \in \cdot)$, with T^m the shift operator defined by $T^m(\xi_0, \xi_1, \dots) = (\xi_m, \xi_{m+1}, \dots)$. Intuitively, relation (3.4.5) shows that, conditionally on $Z_m = i$, the annealed law of the process Z_{n+m} is the same as that of a new process Z_n starting with i individuals.

Using (3.4.5) with $m = 1$, the independence between Z_1 and $Z_{n,i}^{(1)}$ ($i \geq 1$) and the fact that $\mathbb{E}_i Z_n^{-r} \leq \mathbb{E}_{k+1} Z_n^{-r}$ for all $i \geq k+1$, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_k [Z_{n+1}^{-r}] &= \mathbb{E}_k [Z_{n+1}^{-r} | Z_1 = k] \mathbb{P}_k(Z_1 = k) \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{h=1}^i Z_{n,h}^{(1)} \right)^{-r} \middle| Z_1 = i \right] \mathbb{P}_k(Z_1 = i) \\ &\leq \gamma_k \mathbb{E}_k [Z_n^{-r}] + \mathbb{E}_{k+1} [Z_n^{-r}]. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

We shall use the following change of measure : for $k \geq 1$ and $r > 0$, let $\mathbb{P}_k^{(r)}$ be a new probability measure determined by

$$\mathbb{E}_k^{(r)} [T] = \frac{\mathbb{E}_k [\Pi_n^{-r} T]}{c_r^n} \quad (3.4.7)$$

for any \mathcal{F}_n -measurable random variable T , where $c_r = \mathbb{E}m_0^{-r}$. By (3.4.7), we obtain

$$\mathbb{E}_{k+1} [Z_n^{-r}] = \mathbb{E}_{k+1}^{(r)} [W_n^{-r}] c_r^n, \quad (3.4.8)$$

with $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_{k+1}^{(r)}[W_n^{-r}] = \mathbb{E}_{k+1}^{(r)}[W^{-r}]$ (see [36], Lemma 2.1). Moreover, we have $\mathbb{E}^{(r)}[p_1^{k+1}(\xi_0)m_0^r] = \gamma_{k+1}/\mathbb{E}m_0^{-r} < 1$ for any $r < r_{k+1}$. So by Theorem 3.2.1 we get $\mathbb{E}_{k+1}^{(r)}[W^{-r}] = C(r) < \infty$ and then $\mathbb{E}_{k+1}[Z_n^{-r}] \leq C(r)c_r^n$ for any $r < r_k + \varepsilon < r_{k+1}$. Coming back to (3.4.6) with $r < r_k + \varepsilon$, we get by induction that

$$\mathbb{E}_k [Z_{n+1}^{-r}] \leq \gamma_k^{n+1} + C \sum_{j=0}^n \gamma_k^{n-j} c_r^j. \quad (3.4.9)$$

Choose $r > r_k$ such that $c_r < \gamma_k$. Then, we have, as $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{\mathbb{E}_k [Z_{n+1}^{-r}]}{\gamma_k^{n+1}} \leq 1 + \frac{C}{\gamma_k} \sum_{j=0}^n \left(\frac{c_r}{\gamma_k}\right)^j \rightarrow 1 + \frac{C}{\gamma_k - c_r}. \quad (3.4.10)$$

Thus the sequence $(\mathbb{E}_k [Z_n^{-r}]/\gamma_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded and (3.4.4) holds for any $r \in (r_k, r_k + \varepsilon)$. Using the fact that $\mathbb{E}_k [Z_{n+1}^{-r'}] \leq \mathbb{E}_k [Z_{n+1}^{-r}]$ for any $r' > r$, the result follows for any $r > r_k$, which ends the proof of the lemma. \square

Remark 3.4.2. *From the results stated above, with some additional analysis one can obtain the equivalent of the harmonic moments $\mathbb{E}Z_n^{-r}$ for any $r > 0$. However, it is delicate to have an expression of the concerned constant in the equivalence. This will be considered in a forthcoming paper.*

Now we show that the radius of convergence R of the power series $Q_k(t) = \sum_{j=k}^{\infty} q_{k,j} t^j$ is equal to 1. Using the fact that $\sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}_k(Z_n = j) = 1$, part a) of Theorem 3.2.3 and the monotone convergence theorem, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \gamma_k^{-n} \sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}_k(Z_n = j) = \sum_{j=k}^{\infty} q_{k,j} = +\infty,$$

which proves that $R \leq 1$. We prove that $R = 1$ by showing that $\sum_{j=k}^{+\infty} j^{-r} q_{k,j} < \infty$ for $r > 0$ large enough. Using part a) of Theorem 3.2.3, the monotone convergence theorem and Lemma 3.4.1, we have, for any $r > r_k$,

$$\sum_{j=k}^{+\infty} j^{-r} q_{k,j} = \sum_{j=k}^{+\infty} j^{-r} \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \frac{\mathbb{P}_k(Z_n = j)}{\gamma_k^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \frac{\mathbb{E}_k Z_n^{-r}}{\gamma_k^n} < \infty, \quad (3.4.11)$$

which proves part b).

Now we prove part c) of Theorem 3.2.3. Using part a), the definition of $G_{k,n}$ and the monotone convergence theorem, we get (3.2.16). To prove the functional relation (3.2.17), recall that $G_{k,1}(t) = \sum_{j=k}^{\infty} p(k, j) t^j = \mathbb{E}f_0^k(t)$. By (3.2.14) and

Fubini's theorem, we get

$$\begin{aligned}
\gamma_k Q_k(t) &= \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} q_{k,i} p(i,j) \mathbb{1}(i \leq j) t^j \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} q_{k,i} \sum_{j=i}^{\infty} p(i,j) t^j \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} q_{k,i} \mathbb{E} [f_0^i(t)] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{i=k}^{\infty} q_{k,i} f_0^i(t) \right] \\
&= \mathbb{E} [Q_k(f_0(t))].
\end{aligned}$$

This proves the functional relation (3.2.17).

We now prove that the previous functional relation characterizes the function Q_k . To this end it suffices to show the unicity of the solution of (3.2.17). Assume that there exists a power series $\hat{Q}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{q}_{k,j} t^j$ on $[0, 1)$ which verifies (3.2.17) with the initial condition $q_{k,k} = \hat{q}_{k,k} = 1$. We first show by induction in n that $\hat{Q}^{(n)}(0) = 0$ for all $n \in \{0, \dots, k-1\}$. Since $f_0(0) = 0$ and $\gamma_k \in (0, 1)$, by (3.2.17), we get $\gamma_k \hat{Q}(0) = \hat{Q}(0)$, which implies that $\hat{Q}^{(0)}(0) = \hat{Q}(0) = 0$. By the induction hypothesis we have that $\hat{Q}^{(j)}(0) = 0$ for all $j \in \{0, \dots, n-1\}$ for some $n < k-1$. We show that $\hat{Q}^{(n)}(0) = 0$. Using Faà di Bruno's formula, we have

$$(\hat{Q} \circ f_0)^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^n \hat{Q}^{(j)}(f_0(t)) B_{n,j}(f_0^{(1)}(t), \dots, f_0^{(n-j+1)}(t)), \quad (3.4.12)$$

where $B_{n,j}$ are the Bell polynomials, defined for any $1 \leq j \leq n$ by

$$\begin{aligned}
&B_{n,j}(x_1, x_2, \dots, x_{n-j+1}) \\
&= \sum \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_{n-j+1}!} \binom{x_1}{1!}^{i_1} \binom{x_2}{2!}^{i_2} \dots \binom{x_{n-j+1}}{(n-j+1)!}^{i_{n-j+1}},
\end{aligned}$$

where the sum is taken over all sequences (i_1, \dots, i_{n-j+1}) of non-negative integers such that $i_1 + \dots + i_{n-j+1} = j$ and $i_1 + 2i_2 + \dots + (n-j+1)i_{n-j+1} = n$. In particular $B_{n,n}(x_1) = x_1^n$. Applying (3.4.12) and using the fact that $f_0(0) = 0$, $B_{n,n}(f_0^{(1)}(0)) = f_0^{(1)}(0)^n$ and $\hat{Q}^{(j)}(0) = 0$ for all $j \in \{0, \dots, n-1\}$, we get

$$(\hat{Q} \circ f)^{(n)}(0) = \hat{Q}^{(n)}(0) (f_0^{(1)}(0))^n. \quad (3.4.13)$$

Then taking the derivative of order n of both sides of (3.2.17) and using (3.4.13), we obtain that $\gamma_k \hat{Q}^{(n)}(0) = \hat{Q}^{(n)}(0) \gamma_n$ for $n < k-1$, which implies that $\hat{Q}^{(n)}(0) = 0$.

Now we show that $\hat{q}_{k,j} = q_{k,j}$ for any $j \geq k+1$. Using Fubini's theorem, the fact that f_0, \dots, f_{n-1} are i.i.d. and iterating (3.2.17), we get

$$\mathbb{E} [Q_k(\bar{g}_n(t))] = \gamma_k^n Q_k(t) \quad \text{and} \quad \mathbb{E} [\hat{Q}_k(\bar{g}_n(t))] = \gamma_k^n \hat{Q}_k(t), \quad (3.4.14)$$

where $\bar{g}_n(t) = f_{n-1} \circ \dots \circ f_0(t)$. By (3.4.14), for all $t \in [0, 1)$ and $n \in \mathbb{N}$, we have

$$\begin{aligned} |Q_k(t) - \hat{Q}_k(t)| &= \gamma_k^{-n} \left| \mathbb{E} \left[Q_k(\bar{g}_n(t)) - \hat{Q}_k(\bar{g}_n(t)) \right] \right| \\ &= \gamma_k^{-n} \left| \sum_{j=k}^{\infty} (q_{k,j} - \hat{q}_{k,j}) \mathbb{E} \left[\bar{g}_n^j(t) \right] \right| \\ &\leq \gamma_k^{-n} \sum_{j=k+1}^{\infty} |q_{k,j} - \hat{q}_{k,j}| G_{j,n}(t), \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

where $G_{j,n}(t)$ is the generating function of Z_n starting with j individuals. To conclude the proof of the unicity it is enough to show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} |q_{k,j} - \hat{q}_{k,j}| \gamma_k^{-n} G_{j,n}(t) = 0. \quad (3.4.16)$$

We prove (3.4.16) using the Lebesgue dominated convergence theorem. Note that, by (3.2.16), for all $n \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_j^{-n} G_{j,n}(t) \leq Q_j(t). \quad (3.4.17)$$

Therefore, using the fact that $\gamma_j < \gamma_k$ for all $j \geq k+1$, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_k^{-n} G_{j,n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} \right)^n \gamma_j^{-n} G_{j,n}(t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} \right)^n Q_j(t) = 0,$$

and $\gamma_k^{-n} G_{j,n}(t) \leq Q_j(t)$. Now we show that $\sum_{j=k+1}^{\infty} |q_{k,j} - \hat{q}_{k,j}| Q_j(t) < \infty$ for all $t \in [0, 1)$. Indeed, by part b) of Theorem 3.2.3, we have $\sum_{j=k}^{\infty} q_{k,j} j^{-r} < \infty$ for any $r > r_k$. In particular for a fixed $r > r_k$, there exists a constant $C > 0$ such that, for all $j \geq 1$, $i \geq j$, it holds $q_{j,i} \leq C i^r$. Therefore,

$$Q_j(t) \leq C \sum_{i=j}^{\infty} i^r t^i \leq C t^j \sum_{i=0}^{\infty} (i+j)^r t^i \leq C \left(2^r t^j \sum_{i=0}^{\infty} i^r t^i + 2^r t^j \sum_{i=0}^{\infty} j^r t^i \right) \leq C_r j^r t^j.$$

Since Q_k and \hat{Q}_k are power series whose radii of convergence are equal to 1, we have, for any $t < 1$,

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} q_{k,j} Q_j(t) \leq C_r \sum_{j=k+1}^{\infty} q_{k,j} j^r t^j < \infty, \quad \text{and} \quad \sum_{j=k+1}^{\infty} \hat{q}_{k,j} Q_j(t) < \infty. \quad (3.4.18)$$

Using the dominated convergence theorem, we see that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_k^{-n} \sum_{j=k+1}^{\infty} |q_{k,j} - \hat{q}_{k,j}| G_{j,n}(t) = 0.$$

Therefore, from (3.4.15) we conclude that $Q_k(t) = \hat{Q}_k(t)$ for all $t \in [0, 1)$. This ends the proof of Theorem 3.2.3.

Chapitre 4

Moments harmoniques de Z_n et grandes déviations

Résumé

Soit (Z_n) un processus de branchement sur-critique en environnement aléatoire ξ indépendant et identiquement distribué. Nous étudions l'asymptotique du moment harmonique $\mathbb{E}[Z_n^{-r} | Z_0 = k]$ d'ordre $r > 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Nous exhibons des transitions de phase relatives à la valeur critique $r_k > 0$ déterminée par l'équation $\mathbb{E}p_1^k = \mathbb{E}m_0^{-r_k}$, où $m_0 = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k$ et $p_k = \mathbb{P}(Z_1 = k | \xi)$, sous la condition $p_0 = 0$. Contrairement au processus de Galton-Watson, la valeur critique r_k est différente de la valeur critique du moment harmonique de la variable $W = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n / \mathbb{E}(Z_n | \xi)$. De plus, celle-ci est reliée aux transitions de phase des déviations inférieures. En application, nous établissons un résultat de grandes déviations inférieures pour le processus Z_n sous des hypothèses plus faibles que dans des travaux ultérieurs. Nous améliorons aussi la vitesse de convergence dans un théorème central limite vérifié par $W - W_n$, et déterminons une équivalence de la probabilité de grandes déviations du ratio $\frac{Z_{n+1}}{Z_n}$.

Mots clés : Processus de branchement, environnement aléatoire, moments harmoniques, grandes déviations, théorème central limite.

Ce chapitre a été soumis à Electronic Journal of Probability. Titre : Harmonic moments and large deviations for branching processes in a random environment.

Il a été écrit en collaboration avec Ion Grama et Quansheng Liu.

Abstract

Let (Z_n) be a supercritical branching process in an independent and identically distributed random environment ξ . We study the asymptotic of the harmonic moments $\mathbb{E}[Z_n^{-r}|Z_0 = k]$ of order $r > 0$ as $n \rightarrow \infty$. We exhibit a phase transition with the critical value $r_k > 0$ determined by the equation $\mathbb{E}p_1^k = \mathbb{E}m_0^{-rk}$, where $m_0 = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k$ with $p_k = \mathbb{P}(Z_1 = k|\xi)$, assuming that $p_0 = 0$. Contrary to the constant environment case (the Galton-Watson case), this critical value is different from that for the existence of the harmonic moments of $W = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n/\mathbb{E}(Z_n|\xi)$. The aforementioned phase transition is linked to that for the rate function of the lower large deviation for Z_n . As an application, we obtain a lower large deviation result for Z_n under weaker conditions than in previous works and give a new expression of the rate function. We also improve an earlier result about the convergence rate in the central limit theorem for $W - W_n$, and find an equivalence for the large deviation probabilities of the ratio Z_{n+1}/Z_n .

Key words : Branching processes, random environment, harmonic moments, large deviations, central limit theorem.

This chapter has been submitted to
Electronic Journal of Probability.

Title : Harmonic moments and large deviations for branching processes in a
random environment.

It has been written in collaboration with Ion Grama and Quansheng Liu.

4.1 Introduction

A branching process in a random environment (BPRE) is a natural and important generalisation of the Galton-Watson process, where the reproduction law varies according to a random environment indexed by time. It was introduced for the first time in Smith and Wilkinson [48] to modelize the growth of a population submitted to an environment. For background concepts and basic results concerning a BPRE we refer to Athreya and Karlin [3, 4]. In the critical and subcritical regime the branching process goes out and the research interest has been mostly concentrated on the survival probability and conditional limit theorems, see e.g. Afanasyev, Böinghoff, Kersting, Vatutin [1, 2], Vatutin [52], Vatutin and Zheng [53], and the references therein. In the supercritical case, a great deal of current research has been focused on large deviations, see e.g. Bansaye and Berestycki [10], Bansaye and Böinghoff [11–13], Böinghoff and Kersting [20], Huang and Liu [36] and Nakashima [44]. In the particular case when the offspring distribution has a fractional linear generating function, precise asymptotics can be found in Böinghoff [18] and Kozlov [39]. An important closely linked issue is the asymptotic behavior of the harmonic moments $\mathbb{E}[Z_n^{-r}|Z_0 = k]$ of the process Z_n starting with $Z_0 = k$ initial individuals. For the Galton-Watson process which corresponds to the constant environment case, the question has been studied exhaustively in Ney and Vidyashankar [45]. For a BPRE, it has only been partially treated in [36, Theorem 1.3].

In the present paper, we give a complete description of the asymptotic behavior of the harmonic moments $\mathbb{E}_k[Z_n^{-r}] = \mathbb{E}[Z_n^{-r}|Z_0 = k]$ of the process Z_n starting with k individuals and assuming that each individual gives birth to at least one offspring (non-extinction case). As a consequence, we improve the lower large deviation result for the process Z_n obtained in [12, Theorem 3.1] by relaxing the hypothesis therein. In the meanwhile we give a new characterization of the rate function in the large deviation result stated in [12]. We also improve the exponential convergence rate in the central limit theorem for $W - W_n$ established in [36]. Furthermore, we investigate the large deviation behavior of the ratio $R_n = \frac{Z_{n+1}}{Z_n}$, i.e. the asymptotic of the large deviation probability $\mathbb{P}(|R_n - m_n| > a)$ for $a > 0$, where m_n is the expected value of the number of children of an individual in generation n given the environment ξ . For the Galton-Watson process, the quantity R_n is the Lotka-Nagaev estimator of the mean $\mathbb{E}Z_1$, whose large deviation probability has been studied in [45].

Let us explain briefly the findings of the paper in the special case when we start with $Z_0 = 1$ individual. Assume that $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ and $\mathbb{P}(Z_1 = 1) > 0$. Define r_1 as the solution of the equation

$$\mathbb{E}m_0^{-r_1} = \gamma, \quad (4.1.1)$$

with

$$\gamma = \mathbb{P}(Z_1 = 1). \quad (4.1.2)$$

From Theorem 4.2.1 we get the following asymptotic behavior of the harmonic moments $\mathbb{E}[Z_n^{-r}]$ for $r > 0$. Assume that $\mathbb{E}m_0^{r_1+\varepsilon} < \infty$ for some $\varepsilon > 0$. Then, we

have

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbb{E}[Z_n^{-r}]}{\gamma^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} C(r) \quad \text{if } r > r_1, \\ \frac{\mathbb{E}[Z_n^{-r}]}{n\gamma^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} C(r) \quad \text{if } r = r_1, \\ \frac{\mathbb{E}[Z_n^{-r}]}{(\mathbb{E}m_0^{-r})^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} C(r) \quad \text{if } r < r_1, \end{array} \right. \quad (4.1.3)$$

where $C(r)$ are positive constants for which we find integral expressions. This shows that there are three phase transitions in the rate of convergence of the harmonic moments for the process Z_n , with the critical value r_1 . It generalizes the result of [45] for the Galton-Watson process. For a BPRE, it completes and improves the result of [36], where the asymptotic equivalent of the quantity $\mathbb{E}[Z_n^{-r}]$ has been established in the particular case where $r < r_1$ and under stronger assumptions.

The proof presented here is new and straightforward compared to that for the Galton-Watson process given in [45]. Indeed, we prove (4.1.3) starting from the branching property

$$Z_{n+m} = \sum_{i=1}^{Z_m} Z_{n,i}^{(m)}, \quad (4.1.4)$$

where conditionally on the environment ξ , for $i \geq 1$, the sequences of random variables $\{Z_{n,i}^{(m)} : n \geq 0\}$ are i.i.d. branching processes with the shifted environment $T^m(\xi_0, \xi_1, \dots) = (\xi_m, \xi_{m+1}, \dots)$, and are also independent of Z_m . This simple idea leads to the following equation which will play a key role in our arguments :

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}^{-r}] = \gamma^{n+1} + \sum_{j=0}^n b_j \gamma^{n-j} c_r^j, \quad (4.1.5)$$

where $c_r = \mathbb{E}m_0^{-r}$ and $(b_j)_{j \geq 0}$ is an increasing and bounded sequence. Such a relation highlights the main role played by the quantities γ and c_r in the asymptotic study of $\mathbb{E}[Z_n^{-r}]$ whose behavior depends on whether $\gamma < c_r$, $\gamma = c_r$ or $\gamma > c_r$. Note that the complete proof of (4.1.3) relies on some recent and important results established in [30] concerning the critical value for the existence of the harmonic moments of the r.v. W and the asymptotic behavior of the distribution $\mathbb{P}(Z_n = j)$ as $n \rightarrow \infty$, with $j \geq 1$. For the Galton-Watson process, our approach based on (4.1.5) is much simpler than that in [45].

Our proof also gives an expression of the limit constants in (4.1.3). For the Galton-Watson process, it recovers the expressions of [45, Theorem 1] in the cases where $\gamma > c_r$ and $\gamma < c_r$. In the critical case where $r = r_1$, the limit constant obtained in this paper is different to that of [45, Theorem 1], which leads to an alternative expression of the constant and the following nice identity involving the

well-known functions G , Q and ϕ : defining

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbb{P}(Z_1 = k), \\ Q(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^{-n} G^{\circ n}(t), \\ \phi(t) &= \mathbb{E}[e^{-tW}], \end{aligned}$$

and denoting $m = \mathbb{E}[Z_1]$, $\gamma = \mathbb{P}(Z_1 = 1)$ and $\bar{G}(t) = G(t) - \gamma t$, we have

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} \bar{G}(\phi(u)) u^{r-1} du = \int_1^m Q(\phi(u)) u^{r-1} du. \quad (4.1.6)$$

For a BPRE, we will show a generalization of (4.1.6) in Proposition 4.2.2.

As a consequence of Theorem 4.2.1 and of a version of the Gärtner-Ellis theorem, we obtain a lower large deviation result for Z_n under conditions weaker than those in [12, Theorem 3.1]. Assume that $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ and $\mathbb{E}m_0^{r_1+\varepsilon} < \infty$ for some $\varepsilon > 0$. Let

$$\Lambda(\lambda) = \log \mathbb{E}e^{\lambda X} \quad (4.1.7)$$

be the log-Laplace transform of $X = \log m_0$ and

$$\Lambda^*(x) = \sup_{\lambda \leq 0} \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\} \quad (4.1.8)$$

be the Fenchel-Legendre transform of $\Lambda(\cdot)$. Then, for any $\theta \in (0, \mathbb{E}[X])$, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z_n \leq e^{\theta n}) = \chi^*(\theta) \in (0, \infty), \quad (4.1.9)$$

where

$$\chi^*(\theta) = \begin{cases} -r_1 \theta - \log \gamma & \text{if } 0 < \theta < \theta_1, \\ \Lambda^*(\theta) & \text{if } \theta_1 \leq \theta < \mathbb{E}[X], \end{cases} \quad (4.1.10)$$

with

$$\theta_1 = \Lambda'(-r_1) \in (0, \mathbb{E}[X]). \quad (4.1.11)$$

Equation (4.1.9) improves the result of [12, Theorem 3.1(ii)] in the case when $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$, since it is assumed in [12] that $\mathbb{E}m_0^t < \infty$ for all $t > 0$, whereas we only require that $\mathbb{E}m_0^{r_1+\varepsilon} < \infty$ for some $\varepsilon > 0$. Moreover, equations (4.1.10) and (4.1.11) also give new and alternative expressions of the rate function and the critical value. In fact, it has been proved in [12] that, in the case when $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ and $Z_0 = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z_n \leq e^{\theta n}) = I(\theta) \in (0, \infty), \quad (4.1.12)$$

with

$$I(\theta) = \begin{cases} \rho \left(1 - \frac{\theta}{\theta_1^*}\right) + \frac{\theta}{\theta_1^*} \Lambda^*(\theta_1^*) & \text{if } 0 < \theta < \theta_1^*, \\ \Lambda^*(\theta) & \text{if } \theta_1^* \leq \theta < \mathbb{E}[X], \end{cases} \quad (4.1.13)$$

where $\rho = -\log \gamma$ and θ_1^* the unique solution on $(0, \mathbb{E}[X])$ of the equation

$$\frac{\rho - \Lambda^*(\theta_1^*)}{\theta_1^*} = \inf_{0 \leq \theta \leq \mathbb{E}[X]} \frac{\rho - \Lambda^*(\theta)}{\theta}. \quad (4.1.14)$$

It follows directly from the relations (4.1.9) to (4.1.14) that $\theta_1 = \theta_1^*$ and $\chi^*(\theta) = I(\theta)$ for all $\theta \in (0, \mathbb{E}[X])$. This fact can also be shown by using simple duality arguments between Λ and Λ^* , as will be seen in the next section.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 4.2 we give the precise statements of the main theorems with applications. Section 4.3 is devoted to the proof of the main results, Theorems 4.2.1 and 4.2.3. The proofs for the applications are deferred to Section 4.4.

Throughout the paper, we denote by C an absolute constant whose value may differ from line to line.

4.2 Main results

A BPRE (Z_n) can be described as follows. The random environment is represented by a sequence $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots)$ of independent and identically distributed random variables (i.i.d. r.v.'s) taking values in an abstract space Ξ , whose realizations determine the probability generating functions

$$f_{\xi_n}(s) = f_n(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\xi_n) s^i, \quad s \in [0, 1], \quad p_i(\xi_n) \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\xi_n) = 1. \quad (4.2.1)$$

The BPRE $(Z_n)_{n \geq 0}$ is defined by the relations

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} N_{n,i}, \quad \text{for } n \geq 0, \quad (4.2.2)$$

where the random variables $N_{n,i}$ ($i = 1, 2, \dots$) represent the number of children of the i -th individual of the generation n . Conditionally on the environment ξ , the r.v.'s $N_{n,i}$ ($n \geq 0, i \geq 1$) are independent of each other, and each $N_{n,i}$ ($i \geq 1$) has common probability generating function f_n .

In the sequel we denote by \mathbb{P}_ξ the *quenched law*, i.e. the conditional probability when the environment ξ is given, and by τ the law of the environment ξ . Then $\mathbb{P}(dx, d\xi) = \mathbb{P}_\xi(dx) \tau(d\xi)$ is the total law of the process, called *annealed law*. The corresponding quenched and annealed expectations are denoted respectively by \mathbb{E}_ξ and \mathbb{E} . We also denote by \mathbb{P}_k and \mathbb{E}_k the corresponding annealed probability and expectation starting with $Z_0 = k$ individuals, with $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}$ and $\mathbb{E}_1 = \mathbb{E}$. From (3.2.2), it follows that the probability generating function of Z_n conditionally on the environment ξ is given by

$$g_n(t) = \mathbb{E}_\xi[t^{Z_n}] = f_0 \circ \dots \circ f_{n-1}(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4.2.3)$$

Since ξ_0, ξ_1, \dots are i.i.d. r.v.'s, we get that the annealed probability generating function $G_{k,n}$ of Z_n starting with $Z_0 = k$ individuals is given by

$$G_{k,n}(t) = \mathbb{E}_k[t^{Z_n}] = \mathbb{E} [g_n^k(t)], \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4.2.4)$$

We also define, for $n \geq 0$,

$$m_n = m(\xi_n) = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i(\xi_n) \quad \text{and} \quad \Pi_n = \mathbb{E}_\xi Z_n = m_0 \dots m_{n-1},$$

where m_n represents the average number of children of an individual of generation n when the environment ξ is given, and $\Pi_0 = 1$ by convention. Let

$$W_n = \frac{Z_n}{\Pi_n}, \quad n \geq 0, \quad (4.2.5)$$

be the normalized population size. It is well known that under the quenched law \mathbb{P}_ξ , as well as under the annealed law \mathbb{P} , the sequence $(W_n)_{n \geq 0}$ is a non-negative martingale with respect to the filtration

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi, N_{k,i}, 0 \leq k \leq n-1, i = 1, 2, \dots),$$

where by convention $\mathcal{F}_0 = \sigma(\xi)$. Then the limit $W = \lim W_n$ exists \mathbb{P} -a.s. and $\mathbb{E}W \leq 1$. We also denote the quenched and annealed Laplace transform of W by

$$\phi_\xi(t) = \mathbb{E}_\xi [e^{-tW}] \quad \text{and} \quad \phi(t) = \mathbb{E} [e^{-tW}], \quad \text{for } t \geq 0, \quad (4.2.6)$$

while starting with $Z_0 = 1$ individual. For $k \geq 1$, while starting with $Z_0 = k$ individuals, we have

$$\phi_k(t) := \mathbb{E}_k [e^{-tW}] = \mathbb{E}[\phi_\xi^k(t)]. \quad (4.2.7)$$

Another important tool in the study of a BPRE is the associated random walk

$$S_n = \log \Pi_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \geq 1,$$

where the r.v.'s $X_i = \log m_{i-1}$ ($i \geq 1$) are i.i.d. depending only on the environment ξ . For the sake of brevity, we set $X = \log m_0$ and

$$\mu = \mathbb{E}X.$$

We shall consider a supercritical BPRE where $\mu \in (0, \infty)$, so that under the extra condition $\mathbb{E}|\log(1 - p_0(\xi_0))| < \infty$ (see [48]), the population size tends to infinity with positive probability. For our propose, in fact we will assume in the whole paper that each individual gives birth to at least one child, i.e.

$$p_0(\xi_0) = 0 \quad \text{a.s.} \quad (4.2.8)$$

Therefore, under the condition

$$\mathbb{E} \frac{Z_1}{m_0} \log^+ Z_1 < \infty, \quad (4.2.9)$$

the martingale (W_n) converges to W in $L^1(\mathbb{P})$ (see e.g. [50]) and

$$\mathbb{P}(W > 0) = \mathbb{P}(Z_n \rightarrow \infty) = 1.$$

Now we can state the main result of the paper about the asymptotic of the harmonic moments $\mathbb{E}_k[Z_n^{-r}]$ of the process (Z_n) for $r > 0$, starting with $Z_0 = k$ for $k \geq 1$. Define

$$\gamma_k = \mathbb{P}_k(Z_1 = k) = \mathbb{E}[p_1^k(\xi_0)] \quad (4.2.10)$$

and

$$\bar{G}_{k,1}(t) = G_{k,1}(t) - \gamma_k t^k = \sum_{j=k+1}^{\infty} t^j \mathbb{P}(Z_1 = j), \quad (4.2.11)$$

where $G_{k,1}$ is the generating function of Z_1 defined in (3.2.4). Let r_k be the solution of the equation

$$\gamma_k = \mathbb{E} \left[m_0^{-r_k} \right], \quad (4.2.12)$$

with the convention that $r_k = +\infty$ if $p_1(\xi_0) = 0$ a.s. For any $r > 0$, set

$$c_r = \mathbb{E} m_0^{-r}. \quad (4.2.13)$$

For any $k \geq 1$ and $r > 0$, let $\mathbb{P}_k^{(r)}$ be the probability measure (depending on r) defined, for any \mathcal{F}_n -measurable r.v. T , by

$$\mathbb{E}_k^{(r)}[T] = \frac{\mathbb{E}_k[\Pi_n^{-r} T]}{c_r^n}. \quad (4.2.14)$$

Set $\mathbb{P}^{(r)} = \mathbb{P}_1^{(r)}$ and $\mathbb{E}^{(r)} = \mathbb{E}_1^{(r)}$. It is easily seen that under $\mathbb{P}^{(r)}$, the process (Z_n) is still a supercritical branching process in a random environment with $\mathbb{P}^{(r)}(Z_1 = 0) = 0$, and (W_n) is still a non-negative martingale which converges a.s. to W . Moreover, by (3.2.8) and the fact that $m_0 \geq 1$, we have

$$\mathbb{E}^{(r)} \left[\frac{Z_1}{m_0} \log Z_1 \right] = \mathbb{E} \left[\frac{Z_1}{m_0^{1+r}} \log Z_1 \right] / \mathbb{E} \left[m_0^{-r} \right] \leq \mathbb{E} \left[\frac{Z_1}{m_0} \log Z_1 \right] / \mathbb{E} \left[m_0^{-r} \right] < \infty,$$

which implies that

$$W_n \rightarrow W \quad \text{in } L^1(\mathbb{P}^{(r)}). \quad (4.2.15)$$

Then we have the following equivalent for the harmonic moments of Z_n . Let

$$A_{k,n}(r) = \begin{cases} \gamma_k^n, & \text{if } r > r_k, \\ n\gamma_k^n, & \text{if } r = r_k, \\ c_r^n, & \text{if } r < r_k. \end{cases} \quad (4.2.16)$$

Theorem 4.2.1. *Let $k \geq 1$ and assume that $\mathbb{E}m_0^{r_k+\varepsilon} < +\infty$ for some $\varepsilon > 0$. Then we have*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_k [Z_n^{-r}]}{A_{k,n}(r)} = C(k, r) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty Q_k(e^{-t})t^{r-1} dt & \text{if } r > r_k, \\ \frac{\gamma_k^{-1}}{\Gamma(r)} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^\infty \bar{G}_{k,1}(\phi_\xi(t))t^{r-1} dt \right] & \text{if } r = r_k, \\ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \phi_k^{(r)}(t)t^{r-1} dt & \text{if } r < r_k, \end{cases} \quad (4.2.17)$$

where $C(k, r) \in (0, \infty)$, $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx$ is the Gamma function, and $\phi_k^{(r)}(t) = \mathbb{E}_k^{(r)}[e^{-tW}]$ is the Laplace transform of W under $\mathbb{P}_k^{(r)}$.

This theorem shows that there is a phase transition in the rate of convergence of the harmonic moments of Z_n with the critical value $r_k > 0$ defined by (4.2.12). This critical value r_k is generally different from the the critical value a_k for the existence of the harmonic moment of W . Indeed, as shown in [30, Theorem 2.1] (see Lemma 3.2.1 below), the critical value a_k is determined by

$$\mathbb{E} \left[p_1^k(\xi_0)m_0^{a_k} \right] = 1, \quad (4.2.18)$$

which is in general different from the critical value r_k for the harmonic moments of Z_n determined by (4.2.12), that it

$$\mathbb{E} \left[p_1^k(\xi_0) \right] = \mathbb{E} \left[m_0^{-r_k} \right]. \quad (4.2.19)$$

This is in contrast with the Galton-Watson process where $r_k = a_k = r_1^k$, with r_1 the solution of the equation $p_1 m_0^{r_1} = 1$ which coincides with both equations (4.2.18) and (4.2.19). Theorem 4.2.1 generalizes the result of [45] for the Galton-Watson process. For a BPRE, it completes and improves Theorem 1.3 of [36], where the formula (4.2.17) was only proved for $k = 1$ and $r < r_1$, and under the following much stronger boundedness condition : there exist some constants $p, c_0, c_1 > 1$ such that

$$c_0 \leq m_0 \leq c_1 \quad \text{and} \quad c_0 \leq m_0(p) \leq c_1 \quad a.s.,$$

where $m_0(p) = \sum_{i=1}^\infty i^p p_i(\xi_0)$. Instead of this boundedness condition, here we only require the moment assumption $\mathbb{E}[m_0^{r_k+\varepsilon}] < \infty$ for some $\varepsilon > 0$.

For the Galton-Watson process with $k = 1$ initial individuals, the expression of the limit constant in the case when $r = r_1$ (up to the constant factor $\Gamma(r)$) becomes

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \bar{G}(\phi(u))u^{r-1} du,$$

whereas it has been proved in [45] that the limit constant is equal to

$$\int_1^m Q(\phi(u))u^{r-1} du.$$

Actually, the above two expressions coincide, as shown by the following result valid for a general BPRE. Let $Q_k(t)$ be defined by

$$Q_k(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{k,n}(t)}{\gamma_k^n} = \sum_{j=k}^{\infty} q_{k,j} t^j, \quad t \in [0, 1), \quad (4.2.20)$$

where $G_{k,n}$ is defined by (3.2.4) and the limit exists according to [30, Theorem 2.3] (see Lemma 4.3.2 below).

Proposition 4.2.2. *For $k \geq 1$ and $r = r_k$, we have*

$$\frac{1}{\gamma_k} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^{\infty} \bar{G}_{k,1}(\phi_{\xi}(u)) u^{r-1} du \right] = \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^{m_0} Q_k(\phi_{\xi}(u)) u^{r-1} du \right]. \quad (4.2.21)$$

As an application of Theorem 4.2.1 we get a large deviation result. Indeed, $\mathbb{E}[Z_n^\lambda] = \mathbb{E}[e^{\lambda \log Z_n}]$ is the Laplace transform of $\log Z_n$. From Theorem 4.2.1 we obtain

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}_k[Z_n^\lambda] = \chi_k(\lambda) = \begin{cases} \log \gamma_k & \text{if } \lambda \leq \lambda_k, \\ \Lambda(\lambda) & \text{if } \lambda \in [\lambda_k, 0]. \end{cases} \quad (4.2.22)$$

Thus using a version of the Gärtner-Ellis theorem adapted to the study of tail probabilities (see [36, Lemma 3.1]), we get the following lower large deviation result for the BPRE (Z_n) . Recall that $\Lambda(\lambda) = \log \mathbb{E} e^{\lambda X}$ is the log-Laplace of $X = \log m_0$, and $\Lambda^*(\cdot)$ is the Fenchel-Legendre transform of $\Lambda(\cdot)$ defined in (4.1.8).

Theorem 4.2.3. *Let $k \geq 1$ and r_k be the solution of the equation (4.2.12). Assume that $\mathbb{E} m_0^{r_k + \varepsilon} < \infty$ for some $\varepsilon > 0$. Then, for any $\theta \in (0, \mathbb{E}[X])$, we have*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n \leq e^{\theta n}) = \chi_k^*(\theta) \in (0, \infty), \quad (4.2.23)$$

where

$$\chi_k^*(\theta) = \sup_{\lambda \leq 0} \{\lambda \theta - \chi_k(\lambda)\} = \begin{cases} -r_k \theta - \log \gamma_k & \text{if } 0 < \theta < \theta_k, \\ \Lambda^*(\theta) & \text{if } \theta_k \leq \theta < \mathbb{E}[X], \end{cases} \quad (4.2.24)$$

with

$$\theta_k = \Lambda'(-r_k). \quad (4.2.25)$$

The value $\chi_k^*(\theta)$ can be interpreted geometrically as the maximum distance between the graphs of the linear function $l_\theta : \lambda \mapsto \theta \lambda$ with slope θ and the function $\chi_k : \lambda \mapsto \chi_k(\lambda)$ defined in (4.2.22). Taking into account the fact that $\chi(\lambda) = \Lambda(\lambda)$ for $\lambda \in [-r_k, 0]$ and $\chi(\lambda) = \log \gamma_k$ for $\lambda \leq -r_k$, we can easily describe the phase transitions of $\chi^*(\theta)$ depending on the value of the slope θ of the function l_θ :

1. in the case when $\theta \in (\theta_k, \mathbb{E}[X])$, the maximum $\sup_{\lambda \leq 0} \{l_\theta(\lambda) - \chi(\lambda)\}$ is attained for $\lambda \in (-r_k, 0)$ such that $\chi'(\lambda_\theta) = \Lambda'(\lambda_\theta) = \theta$, whose value is $\chi^*(\theta) = \Lambda^*(\theta)$ (see Fig. 1) ;

2. the case when $\theta = \theta_k$ is the critical slope for which the equation $\Lambda'(\lambda) = \theta_k$ has a solution given by $\lambda = -r_k$ (see Fig. 2) ;
3. in the case when $\theta \in (0, \theta_k)$, the maximum $\sup_{\lambda \leq 0} \{l_\theta(\lambda) - \Lambda(\lambda)\}$ is attained for $\lambda = -r_k$, and then $\chi^*(\theta) = -r_k\theta - \log \gamma_k$ becomes linear in θ (see Fig. 3).

Fig. 1,2,3 : Geometrical interpretation of $\chi^*(\theta)$

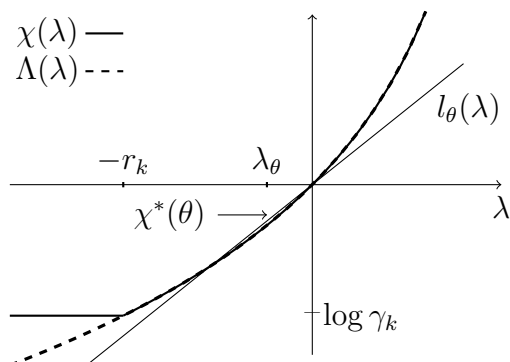


Fig. 1 : $\theta \in (\theta_k, \mathbb{E}[X])$

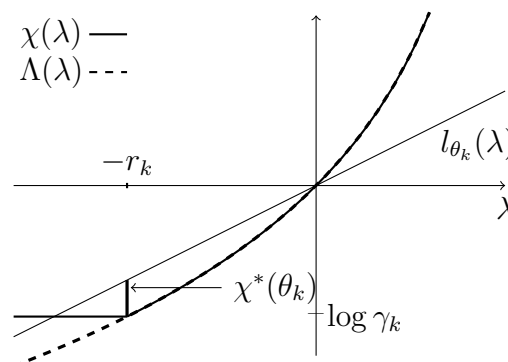


Fig. 2 : $\theta = \theta_k$

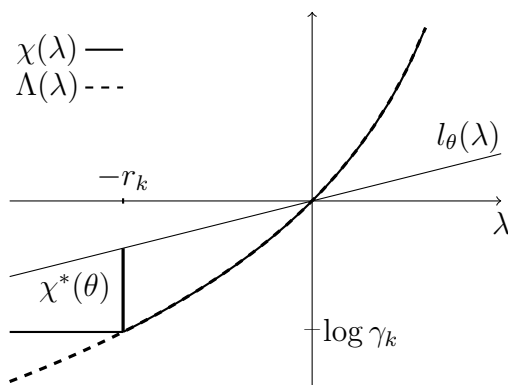


Fig. 3 : $\theta \in (0, \theta_k)$

Remark 4.2.4. *Theorem 4.2.3 corrects and improves the result of [12, Theorem 3.1(ii)]. Moreover it gives new and alternative expressions of the rate function and the critical value. Actually it was proved in [12, Theorem 3.1(ii)] that, assuming $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ and $\mathbb{E}m_0^t < \infty$ for all $t > 0$, we have*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n \leq e^{\theta n}) = I_k(\theta) \in (0, \infty), \quad (4.2.26)$$

where

$$I_k(\theta) = \begin{cases} \rho_k \left(1 - \frac{\theta}{\theta_k^*}\right) + \frac{\theta}{\theta_k^*} \Lambda^*(\theta_k^*) & \text{if } 0 < \theta \leq \theta_k^*, \\ \Lambda^*(\theta) & \text{if } \theta_k^* \leq \theta < \mathbb{E}[X], \end{cases} \quad (4.2.27)$$

with

$$\rho_k = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n = j). \quad (4.2.28)$$

and θ_k^* the unique solution on $(0, \mathbb{E}[X])$ of the equation

$$\frac{\rho_k - \Lambda^*(\theta_k^*)}{\theta_k^*} = \inf_{0 \leq \theta \leq \mathbb{E}[X]} \frac{\rho_k - \Lambda^*(\theta)}{\theta} \quad (4.2.29)$$

It has been stated mistakenly in [13] that $\rho_k = -k \log \gamma$, whereas the correct statement is

$$\rho_k = -\log \gamma_k, \quad (4.2.30)$$

according to [30, Theorem 2.3] (see Lemma 4.3.2 below). With this correction, the two critical values θ_k and θ_k^* and the two rate functions I_k and χ_k^* coincide, that is

$$\theta_k = \theta_k^* \quad \text{and} \quad \chi_k^*(\theta) = I_k(\theta) \quad \text{for all } \theta \in (0, \mathbb{E}[X]). \quad (4.2.31)$$

Indeed, by the definition of θ_k^* , the derivative of the function $\theta \mapsto \frac{\rho_k - \Lambda^*(\theta)}{\theta}$ vanishes for $\theta = \theta_k^*$. Therefore, using the fact that $(\Lambda^*)'(\theta) = \lambda_\theta$ with $\Lambda'(\lambda_\theta) = \theta$, we get, for $\theta = \theta_k^*$,

$$\Lambda^*(\theta) = \lambda_\theta \theta + \rho_k. \quad (4.2.32)$$

Using the identity $\Lambda^*(\theta) = \lambda_\theta \theta - \Lambda(\lambda_\theta)$, we obtain

$$\Lambda(\lambda_\theta) = -\rho_k,$$

which implies that $\lambda_\theta = -r_k$ and then $\theta_k^* = \Lambda'(-r_k) = \theta_k$.

Moreover, coming back to (4.2.32) and using the identities $\Lambda(-r_k) = \log \gamma_k = -\rho_k$ and $\theta_k = \Lambda'(-r_k)$, we get

$$-r_k \theta_k - \Lambda(-r_k) = -r_k \theta_k + \rho_k = \Lambda_k^*(\theta_k).$$

Therefore, for any $\theta \in [0, \theta_k]$,

$$\begin{aligned} -r_k \theta - \log \gamma_k &= -r_k \theta - \Lambda(-r_k) \\ &= \frac{\theta}{\theta_k} (-r_k \theta_k - \Lambda(-r_k)) + \frac{\theta}{\theta_k} \Lambda(-r_k) - \Lambda(-r_k) \\ &= \frac{\theta}{\theta_k} \Lambda_k^*(\theta_k) - \left(1 - \frac{\theta}{\theta_k}\right) \log \gamma_k, \end{aligned}$$

so that $I_k(\theta) = \chi_k^*(\theta)$, which ends the proof of (4.2.31). From (4.2.31) and Theorem 4.2.1, we see that (4.2.26) is valid assuming only $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ and $\mathbb{E}[m_0^{r_k + \varepsilon}] < \infty$ for some $\varepsilon > 0$. Actually when $\mathbb{P}(Z_1 = 0) > 0$, as shown in [12, Theorem 3.1 (i)], (4.2.26) remains valid with $\rho_k = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n = j) = \rho > 0$ independent of k and j .

Similarly, one can apply Theorem 4.2.1 to get the decay rate of the probability $\mathbb{P}(Z_n \leq k_n)$, where k_n is any sub-exponential sequence in the sense that $k_n \rightarrow \infty$ and $k_n/\exp(\theta n) \rightarrow 0$ for every $\theta > 0$, as stated in the following corollary.

Corollary 4.2.5. *Let $k \geq 1$ and assume that $\mathbb{E}m_0^{r_k+\varepsilon} < +\infty$ for some $\varepsilon > 0$. Then, for any sequence $k_n > 0$ such that $k_n \rightarrow \infty$ and $k_n/\exp(\theta n) \rightarrow 0$ for every $\theta > 0$, we have, as $n \rightarrow \infty$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n \leq k_n) = \log \gamma_k. \quad (4.2.33)$$

It was stated mistakenly in [12, Theorem 3.1(ii)] that $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_k(Z_n \leq k_n) = k \log \gamma$. To show (4.2.33), it suffices to note that by Markov's inequality and Theorem 4.2.1, we have, for any $r > r_k$,

$$\gamma_k^n = \mathbb{P}_k(Z_n = k) \leq \mathbb{P}_k(Z_n \leq k_n) \leq \mathbb{E}[Z_n^{-r}] k_n^r \leq \min\{\gamma_k^n k_n^r, \gamma_k^n k_n^{r_k} n\}.$$

The above argument leads to a precise large deviation bound as stated below.

Corollary 4.2.6. *Let $k \geq 1$ and assume that $\mathbb{E}m_0^{r_k+\varepsilon} < +\infty$ for some $\varepsilon > 0$. Then we have*

$$\mathbb{P}_k(Z_n \leq e^{\theta n}) \leq \inf_{r>0} \frac{\mathbb{E}_k[Z_n^{-r}]}{e^{\theta r n}} = \begin{cases} e^{-n(-\theta r_k - \Lambda(-r_k))} & \text{if } 0 < \theta \leq \theta_k, \\ n e^{-n(-\theta_k r_k - \Lambda(-r_k))} & \text{if } \theta = \theta_k, \\ e^{-n\Lambda^*(\theta)} & \text{if } \theta_k \leq \theta < \mathbb{E}[X]. \end{cases} \quad (4.2.34)$$

The question of the exact decay rate of $\mathbb{P}(Z_n \leq e^{\theta n})$ will be treated in a forthcoming paper.

As an example, let us consider the case where the reproduction law has a fractional linear generating function, that is when

$$p_0(\xi_0) = a_0 \quad \text{and} \quad p_k(\xi_0) = \frac{(1-a_0)(1-b_0)}{b_0} b_0^k \quad \text{for all } k \geq 1, \quad (4.2.35)$$

for which the generating function is

$$f_0(t) = a_0 + \frac{(1-a_0)(1-b_0)t}{1-b_0t},$$

where $a_0 \in [0, 1)$ and $b_0 \in (0, 1)$ are random variables depending on the environment ξ_0 . This case has been examined by several authors (see e.g. [39, 44]). In the case where $a_0 = 0$ (non-extinction), the BPRE is said to be geometric; in this case $X = \log m_0 = -\log(1-b_0)$, $\log \gamma_k = \log \mathbb{E}[e^{-kX}] = \Lambda(-k)$ and $r_k = k$. Therefore, we obtain the following explicit version of Theorem 4.2.1 :

Corollary 4.2.7. *Let Z_n be a geometric BPRE. For $k \geq 1$, assume that there exists $\varepsilon > 0$ such that $\mathbb{E}[e^{(k+\varepsilon)X}] < \infty$. Then (4.2.23) holds with*

$$\chi_k^*(\theta) = \begin{cases} -k\theta - \log \mathbb{E}[e^{-kX}] & \text{if } 0 < \theta \leq \theta_k, \\ \Lambda^*(\theta) & \text{if } \theta_k \leq \theta < \mathbb{E}[X], \end{cases} \quad (4.2.36)$$

where

$$\theta_k = \mathbb{E}[Xe^{-kX}]/\mathbb{E}[e^{-kX}]. \quad (4.2.37)$$

Corollary 4.2.7 recovers and completes the large deviation result in [12, Corollary 3.3] for a fractional linear BPRE with $a_0 > 0$, where (4.1.12) was obtained with

$$I(\theta) = \begin{cases} -\theta - \log \mathbb{E}[e^{-X}] & \text{if } 0 < \theta \leq \theta^*, \\ \Lambda^*(\theta) & \text{if } \theta^* \leq \theta < \mathbb{E}[X], \end{cases} \quad (4.2.38)$$

and

$$\theta^* = \mathbb{E}[Xe^{-X}]/\mathbb{E}[e^{-X}]. \quad (4.2.39)$$

In fact the result in [12, Corollary 3.3] was stated without the hypothesis $a_0 > 0$, but when $a_0 = 0$, this result is valid only for $k = 1$, as shown by Corollary 4.2.7 (for $k \geq 2$, the factor k is missing in [12, Corollary 3.3]).

As another consequence of Theorem 4.2.1, we improve an earlier result about the rate of convergence in the central limit theorem for $W - W_n$. Let

$$\delta_\infty^2(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Pi_n} \left(\frac{m_n(2)}{m_n^2} - 1 \right)$$

be the variance of W under \mathbb{P}_ξ (see e.g. [34]).

Theorem 4.2.8. *Assume $\text{essinf} \frac{m_0(2)}{m_0^2} > 1$ and $\mathbb{E}Z_1^{2+\varepsilon} < \infty$ for some $\varepsilon \in (0, 1]$. Then there exists a constant $C > 0$ such that, for all $k \geq 1$,*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}_k \left(\frac{\Pi_n(W - W_n)}{\sqrt{Z_n} \delta_\infty(T^n \xi)} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq CA_{k,n}(\varepsilon/2), \quad (4.2.40)$$

where $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ is the standard normal distribution function.

Theorem 4.2.8 improves the exponential rate of convergence in [36, Theorem 1.7]. In our approach the assumption $\text{essinf} \frac{m_0(2)}{m_0^2} > 1$ is required to ensure that the quenched variance $\delta_\infty(\xi)$ of the variable W is a.s. separated from 0. This hypothesis does not seem natural and should be relaxed. One should be able to find a suitable hypothesis to ensure the existence of harmonic moments for the random variable $\delta_\infty(\xi)$, which would be enough for our objective.

As another consequence of Theorem 4.2.1, we give some large deviation results on the ratio

$$R_n = \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \quad (4.2.41)$$

toward the conditional mean $m_n = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k(\xi_n)$. Let

$$M_{n,j} = j^{-1} \sum_{i=1}^j N_{n,i} \quad (4.2.42)$$

be the empirical mean of m_n of size j under the environment ξ , where the r.v.'s $N_{n,i}$ ($i = 1, \dots, j$) are i.i.d. with generating function f_n .

Theorem 4.2.9. *Let $k \geq 1$. If, for some set $D \subset \mathbb{R}$, there exist some constants $C_1 > 0$ and $r > 0$ such that, for all $j \geq 1$,*

$$\mathbb{P}(M_{0,j} - m_0 \in D) \leq \frac{C_1}{j^r}, \quad (4.2.43)$$

then there exists a constant $B_1 \in (0, \infty)$ such that for all $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}_k(R_n - m_n \in D) \leq B_1 A_{k,n}(r), \quad (4.2.44)$$

where $A_{k,n}(r)$ is defined in (4.2.16). Similarly, if there exist some constants $C_2 > 0$ and $r > 0$ such that, for all $j \geq 1$,

$$\mathbb{P}(M_{0,j} - m_0 \in D) \geq \frac{C_2}{j^r}, \quad (4.2.45)$$

then there exists a constant $B_2 \in (0, \infty)$ such that for all $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}_k(R_n - m_n \in D) \geq B_2 A_{k,n}(r). \quad (4.2.46)$$

This result shows that there exist some phase transitions in the rate of convergence depending on whether the value of r is less than, equal or greater than the constant γ_k . The next result gives a bound of the large deviation probability of $R_n - m_n$ under a simple moment condition on Z_1 .

Theorem 4.2.10. *Let $k \geq 1$. Assume that there exists $p > 1$ such that $\mathbb{E}|Z_1 - m_0|^p < \infty$. Then, there exists a positive constant C_p such that, for any $a > 0$,*

$$\mathbb{P}_k(|R_n - m_n| > a) \leq \begin{cases} C_p a^{-p} A_{k,n}(p-1) & \text{if } p \in (1, 2], \\ C_p a^{-p} A_{k,n}(p/2) & \text{if } p \in (2, \infty). \end{cases} \quad (4.2.47)$$

4.3 Proof of main theorems

In this section we will prove the main results of this paper, Theorems 4.2.1 and 4.2.3, and the associated result, Proposition 4.2.2. In Section 4.3.1 we present some auxiliary results concerning the critical value for the existence of the harmonic moments of the r.v. W and the asymptotic behavior of the asymptotic distribution $\mathbb{P}_k(Z_n = j)$ as $n \rightarrow \infty$, with $j \geq k \geq 1$. In Sections 4.3.2 and 4.3.3 we prove respectively Theorems 4.2.1 and 4.2.3. The proof of Proposition 4.2.2 is given in Section 4.3.4 for a Galton-Watson process and in Section 4.3.5 for a general BPPE.

4.3.1 Auxiliary results

We recall some results to be used in the proofs. The first one concerns the critical value for the existence of harmonic moments of the r.v. W .

Lemma 4.3.1 ([30], Theorem 2.1). *Assume that there exists a constant $p > 0$ such that $\mathbb{E}[m_0^p] < \infty$. Then for any $a \in (0, p)$,*

$$\mathbb{E}_k W^{-a} < \infty \quad \text{if and only if} \quad \mathbb{E}[p_1^k(\xi_0)m_0^a] < 1.$$

The second result is about the asymptotic equivalent of the probability $\mathbb{P}_k(Z_n = j)$ as $n \rightarrow \infty$, for any $j \geq k \geq 1$.

Lemma 4.3.2 ([30], Theorem 2.3). *Assume that $\mathbb{P}(Z_1 = 1) > 0$. For any $k \geq 1$ the following assertions hold.*

a) *For any accessible state $j \geq k$ in the sense that $\mathbb{P}_k(Z_l = j) > 0$ for some $l \geq 0$, we have*

$$\mathbb{P}_k(Z_n = j) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \gamma_k^n q_{k,j}, \quad (4.3.1)$$

where $q_{k,k} = 1$ and, for $j > k$, $q_{k,j} \in (0, +\infty)$ is the solution of the recurrence relation

$$\gamma_k q_{k,j} = \sum_{i=k}^j p(i, j) q_{k,i}, \quad (4.3.2)$$

with $q_{k,i} = 0$ for any non-accessible state i (i.e. $\mathbb{P}_k(Z_l = i) = 0$ for all $l \geq 0$).

b) *Assume that there exists $\varepsilon > 0$ such that $\mathbb{E}[m_0^{r_k + \varepsilon}] < \infty$. Then, for any $r > r_k$, we have*

$$\sum_{j=k}^{\infty} j^{-r} q_{k,j} < \infty. \quad (4.3.3)$$

In particular, the radius of convergence of the power series

$$Q_k(t) = \sum_{j=k}^{+\infty} q_{k,j} t^j \quad (4.3.4)$$

is equal to 1.

c) *For all $t \in [0, 1)$ and $k \geq 1$, we have,*

$$\frac{G_{k,n}(t)}{\gamma_k^n} \uparrow Q_k(t) \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (4.3.5)$$

where $G_{k,n}$ is the probability generating function of Z_n when $Z_0 = k$, defined in (3.2.4).

d) $Q_k(t)$ is the unique power series which verifies the functional equation

$$\gamma_k Q_k(t) = \mathbb{E}[Q_k(f_0(t))], \quad t \in [0, 1), \quad (4.3.6)$$

with the condition $Q_k^{(k)}(0) = 1$.

4.3.2 Proof of Theorem 4.2.1

In this section we give a proof of the convergence of the normalized harmonic moments $\mathbb{E}_k[Z_n^{-r}]/A_{k,n}(r)$ as $n \rightarrow \infty$, where $A_{k,n}(r)$ is defined in (4.2.16).

a) We first consider the case when $r < r_k$ (which corresponds to the case $\gamma_k < c_r$). By the change of measure (4.2.14), we obtain

$$\mathbb{E}_k [Z_n^{-r}] = \mathbb{E}_k^{(r)} [W_n^{-r}] c_r^n, \tag{4.3.7}$$

with $c_r = \mathbb{E}m_0^{-r}$. From (4.2.15) and [36, Lemma 2.1], it follows that the sequence $(\mathbb{E}_k^{(r)} [W_n^{-r}])$ is increasing and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_k^{(r)} [W_n^{-r}] = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_k^{(r)} [W_n^{-r}] = \mathbb{E}_k^{(r)} [W^{-r}]. \tag{4.3.8}$$

Moreover, for any $r < r_k$, we have $\gamma_k < c_r$, which implies that $\mathbb{E}^{(r)} [p_1^k(\xi_0)m_0^r] = \gamma_k/\mathbb{E}m_0^{-r} < 1$. So, by Lemma 4.3.1, we get, for any $r < r_k$,

$$\mathbb{E}_k^{(r)} [W^{-r}] < \infty. \tag{4.3.9}$$

Therefore, coming back to (4.3.7) and using (4.3.8) and (4.3.9), we obtain

$$\mathbb{E}_k [Z_n^{-r}] c_r^{-n} \uparrow_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_k^{(r)} [W^{-r}] \in (0, \infty). \tag{4.3.10}$$

To give an integral expression of the limit constant $C(k, r)$, we shall use the following expression for the inverse of a positive random variable X^r : for any $r > 0$, we have

$$\frac{1}{X^r} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} e^{-uX} u^{r-1} du. \tag{4.3.11}$$

Then, from (4.3.10), (4.3.11) and Fubini's theorem, we get

$$\mathbb{E}_k [Z_n^{-r}] c_r^{-n} \uparrow_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \phi_k^{(r)}(u) u^{r-1} du, \tag{4.3.12}$$

which proves (4.2.17) for $r < r_k$.

b) Next we consider the case when $r > r_k$ (which corresponds to the case $\gamma_k > c_r$). Using parts a) and b) of Lemma 4.3.2 and the monotone convergence theorem, it follows that

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \frac{\mathbb{E}_k [Z_n^{-r}]}{\gamma_k^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \sum_{j=k+1}^\infty k^{-r} \frac{\mathbb{P}(Z_n = k)}{\gamma_k^n} \\ &= \sum_{j=k+1}^\infty k^{-r} q_{k,j} < \infty. \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Moreover, using (4.3.11) together with Fubini's theorem and the change of variable $ju = t$, we obtain

$$\frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^1 Q_k(e^{-u}) u^{r-1} du = \sum_{j=k}^\infty q_{k,j} j^{-r} \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty e^{-t} t^{r-1} dt = \sum_{j=k}^\infty q_{k,j} j^{-r}.$$

Therefore, coming back to (4.3.13), we get

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \frac{\mathbb{E}_k[Z_n^{-r}]}{\gamma_k^n} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^1 Q_k(e^{-u}) u^{r-1} du, \quad (4.3.14)$$

which proves (4.2.17) for $r > r_k$.

c) Now we consider the case when $r = r_k$ (which corresponds to $r = \gamma_k$). For $n \geq 1$ and $m \geq 0$, we have the following well-known branching property for Z_n :

$$Z_{n+m} = \sum_{i=1}^{Z_m} Z_{n,i}^{(m)}, \quad (4.3.15)$$

where the r.v.'s $Z_{n,i}^{(m)}$ ($i \geq 1$) are independent of Z_m under \mathbb{P}_ξ and \mathbb{P} . Moreover, under \mathbb{P}_ξ , for each $n \geq 0$, the r.v.'s $Z_{n,i}^{(m)}$ ($i \geq 1$) are i.i.d. with the same conditional probability law $\mathbb{P}_\xi(Z_{n,i}^{(m)} \in \cdot) = \mathbb{P}_{T^m \xi}(Z_n \in \cdot)$, where T^m is the shift operator defined by $T^m(\xi_0, \xi_1, \dots) = (\xi_m, \xi_{m+1}, \dots)$. Intuitively, relation (4.3.15) shows that, conditionally on $Z_m = i$, the annealed law of the process Z_{n+m} is the same as that of a new process Z_n starting with i individuals. Using (4.3.15) with $m = 1$, we obtain

$$\mathbb{E}_k[Z_{n+1}^{-r}] = \mathbb{E}_k[Z_n^{-r}] \mathbb{P}_k(Z_1 = k) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{E}_i[Z_n^{-r}] \mathbb{P}_k(Z_1 = i). \quad (4.3.16)$$

From (4.3.7), we have $\mathbb{E}_i[Z_n^{-r}] = \mathbb{E}_i^{(r)}[W_n^{-r}] c_r^n$. Substituting this into (4.3.16) and setting

$$b_n = \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{E}_i^{(r)}[W_n^{-r}] \mathbb{P}_k(Z_1 = i),$$

we get

$$\mathbb{E}_k[Z_{n+1}^{-r}] = \mathbb{E}_k[Z_n^{-r}] \gamma_k + b_n c_r^n, \quad (4.3.17)$$

with $\gamma_k = \mathbb{P}_k(Z_1 = k)$. Iterating (4.3.17) leads to

$$\mathbb{E}_k[Z_{n+1}^{-r}] = \gamma_k^{n+1} k^{-r} + \sum_{j=0}^n \gamma_k^{n-j} b_j c_r^j. \quad (4.3.18)$$

Using the fact that $r = r_k$ (which corresponds to $\gamma_k = c_r$) and dividing (4.3.18) by $\gamma_k^{n+1} n$, we get

$$\frac{\mathbb{E}_k[Z_{n+1}^{-r}]}{n \gamma_k^{n+1}} = \frac{k^{-r}}{n} + \frac{\gamma_k^{-1}}{n} \sum_{j=0}^n b_j. \quad (4.3.19)$$

To prove the convergence in (4.3.19) we need to show that $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n < \infty$. By (4.3.8) and the monotone convergence theorem, we have

$$b := \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow b_n = \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{E}_i^{(r)}[W^{-r}] \mathbb{P}_k(Z_1 = i). \quad (4.3.20)$$

Now we show that $b < \infty$. Using (4.3.15) for $m = 0$ and $Z_0 = i$, with $i > k$, and the fact that $Z_{n,j} > 0$ for all $1 \leq j \leq i$, we obtain

$$\mathbb{E}_i[Z_n^{-r}] = \mathbb{E}[(Z_{n,1} + \dots + Z_{n,i})^{-r}] \leq \mathbb{E}[(Z_{n,1} + \dots + Z_{n,k})^{-r}] = \mathbb{E}_k[Z_n^{-r}]. \quad (4.3.21)$$

By (4.3.21) and the change of measure (4.3.7), we get, for any $i \geq k + 1$,

$$\mathbb{E}_i^{(r)}[W_n^{-r}] \leq \mathbb{E}_{k+1}^{(r)}[W_n^{-r}].$$

Then, as in (4.3.8), letting $n \rightarrow \infty$ leads to

$$\mathbb{E}_i^{(r)}[W^{-r}] \leq \mathbb{E}_{k+1}^{(r)}[W^{-r}]. \quad (4.3.22)$$

Now we shall prove that

$$\mathbb{E}_{k+1}^{(r)}[W^{-r}] < \infty. \quad (4.3.23)$$

For this it is enough to verify the condition of Lemma 4.3.1 under the measure $\mathbb{E}_k^{(r)}$ defined by (4.2.14) : indeed, for $r = r_k$ we have $\gamma_k = c_r$, which implies that

$$\mathbb{E}^{(r)}[p_1^{k+1}(\xi_0)m_0^r] = \frac{\gamma_{k+1}}{\mathbb{E}m_0^{-r}} = \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} < 1.$$

This proves (4.3.23). Using (4.3.22) and (4.3.23), we obtain

$$b = \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{E}_i^{(r)}[W^{-r}] \mathbb{P}_k(Z_1 = i) \leq \mathbb{E}_{k+1}^{(r)}[W^{-r}] \sum_{j=k+1}^{\infty} \mathbb{P}_k(Z_1 = j) < \infty.$$

Therefore, coming back to (4.3.19), using (4.3.20) and Cesaro's lemma, we get

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_k[Z_{n+1}^{-r}]}{n\gamma_k^{n+1}} = \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{E}_i^{(r)}[W^{-r}] \mathbb{P}_k(Z_1 = i) < \infty, \quad (4.3.24)$$

which proves (4.2.17) for $r = r_k$, with

$$C(k, r) = \frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{E}_i^{(r)}[W^{-r}] \mathbb{P}_k(Z_1 = i).$$

We now show an integral expression of the constant $C(k, r)$. Recall that W admits the following decomposition

$$W = \sum_{j=1}^{Z_0} W(j), \quad (4.3.25)$$

where the r.v.'s $W(j)$ ($j = 1, 2, \dots$) are independent of Z_0 and m_0 under \mathbb{P}_ξ and \mathbb{P} . Moreover, conditionally on the environment ξ , the r.v.'s $W(j)$ ($j = 1, 2, \dots$) are i.i.d. with common law $\mathbb{P}_\xi(W(j) \in \cdot) = \mathbb{P}_\xi(W \in \cdot)$. With these considerations, it can be easily seen that

$$\phi_i^{(r)}(t) = \mathbb{E}_i^{(r)}[\phi_\xi(u)] = \mathbb{E}^{(r)}[\phi_\xi(u)^i]. \quad (4.3.26)$$

Therefore, using (4.3.11) with $r = r_k$, together with (4.3.26) and Fubini's theorem, we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma_k} \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{E}_i^{(r)}[W^{-r}] \mathbb{P}_k(Z_1 = i) &= \frac{1}{\gamma_k \Gamma(r)} \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{E}_i^{(r)} \int_0^{\infty} e^{-uW} u^{r-1} du \mathbb{P}_k(Z_1 = i) \\
&= \frac{1}{\gamma_k \Gamma(r)} \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{E}^{(r)} \int_0^{\infty} \phi_{\xi}^i(u) u^{r-1} du \mathbb{P}_k(Z_1 = i) \\
&= \frac{1}{\gamma_k \Gamma(r)} \mathbb{E}^{(r)} \int_0^{\infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} \phi_{\xi}^i(u) \mathbb{P}_k(Z_1 = i) u^{r-1} du \\
&= \frac{1}{\gamma_k \Gamma(r)} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^{\infty} \bar{G}_{k,1}(\phi_{\xi}(u)) u^{r-1} du \right], \quad (4.3.27)
\end{aligned}$$

where $\bar{G}_{k,1}(u) = G_{k,1}(u) - \gamma_k u^k = \sum_{j=k+1}^{\infty} u^j \mathbb{P}(Z_1 = j)$. Therefore, using (4.3.24) and (4.3.27), we get

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_k [Z_{n+1}^{-r}]}{n \gamma_k^{n+1}} = \frac{1}{\gamma_k \Gamma(r)} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^{\infty} \bar{G}_{k,1}(\phi_{\xi}(u)) u^{r-1} du \right],$$

which ends the proof of Theorem 4.2.1.

4.3.3 Proof of Theorem 4.2.3

In this section we prove Theorem 4.2.3. For convenience, let $\lambda_k = -r_k$. From Theorem 4.2.1, for any $k \geq 1$, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}_k [Z_n^{\lambda}] = \chi_k(\lambda) = \begin{cases} \log \gamma_k & \text{if } \lambda \leq \lambda_k, \\ \Lambda(\lambda) & \text{if } \lambda \in [\lambda_k, 0]. \end{cases} \quad (4.3.28)$$

Thus using a version of the Gärtner-Ellis theorem adapted to the study of tail probabilities (see [36, Lemma 3.1]) and the fact that $\chi_k(\lambda) = \log \gamma_k$ for all $\lambda \leq \lambda_k$, we obtain, for all $\theta \in (0, \mathbb{E}[X])$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \mathbb{P}_k(Z_n \leq e^{\theta n}) = \chi^*(\theta), \quad (4.3.29)$$

with

$$\chi_k^*(\theta) = \sup_{\lambda \leq 0} \{\lambda \theta - \chi_k(\lambda)\} = \max \left\{ \lambda_k \theta - \Lambda(\lambda_k), \sup_{\lambda_k \leq \lambda \leq 0} \{\lambda \theta - \Lambda(\lambda)\} \right\}. \quad (4.3.30)$$

It is well-known (see e.g. [24, Lemma 2.2.5]) that the function

$$\Lambda^*(\theta) = \sup_{\lambda \leq 0} \{\lambda \theta - \Lambda(\lambda)\} = \{\lambda_{\theta} \theta - \Lambda(\lambda_{\theta})\}, \quad \text{with } \Lambda'(\lambda_{\theta}) = \theta,$$

is non-increasing for $\theta \in (0, \mathbb{E}[X])$. Therefore, letting

$$\theta_k = \Lambda'(\lambda_k), \quad (4.3.31)$$

it follows that :

1. for any $\theta \in (0, \theta_k]$,

$$\lambda_k \theta - \Lambda(\lambda_k) \geq \lambda_k \theta_k - \Lambda(\lambda_k) = \Lambda^*(\theta_k) = \sup_{\lambda_k \leq \lambda \leq 0} \{\lambda \theta - \Lambda(\lambda)\};$$

2. for any $\theta \in [\theta_k, \mu)$,

$$\Lambda^*(\theta) = \sup_{\lambda_k \leq \lambda \leq 0} \{\lambda \theta - \Lambda(\lambda)\} \geq \Lambda^*(\theta_k) = \lambda_k \theta_k - \Lambda(\lambda_k) \geq \lambda_k \theta - \Lambda(\lambda_k).$$

With these considerations, we get from (4.3.30) that

$$\chi_k^*(\theta) = \begin{cases} \lambda_k \theta - \Lambda(\lambda_k) & \text{if } \theta \in (0, \theta_k], \\ \Lambda^*(\theta) & \text{if } \theta \in [\theta_k, \mathbb{E}[X]], \end{cases} \quad (4.3.32)$$

which ends the proof of Theorem 4.2.3.

4.3.4 Proof of Proposition 4.2.2 for the Galton-Watson case

In this section we assume that (Z_n) is a Galton-Watson process and prove (4.1.6), which is a particular but simpler case of Proposition 4.2.2.

Proof. First note that for the Galton-Watson case, we have

$$\gamma m^{r_1} = 1. \quad (4.3.33)$$

For convenience, we shall write $r = r_1$. Using the additive property of integration and the change of variable $u = tm^k$ for $k \geq 0$, together with Fubini's theorem and the fact that $\gamma m^r = 1$, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \int_1^\infty \bar{G}(\phi(u)) u^{r-1} du &= \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^\infty \int_{m^k}^{m^{k+1}} \bar{G}(\phi(u)) u^{r-1} du \\ &= \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^\infty \int_1^m \bar{G}(\phi(tm^k)) (m^r)^k t^{r-1} dt \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_1^m \sum_{k=0}^\infty \gamma^{-k} \bar{G}(\phi(tm^k)) t^{r-1} dt. \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

Since $\bar{G}(t) = G(t) - \gamma t$ and $G(\phi(t)) = \phi(tm)$, we obtain, for any $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \gamma^{-k} \bar{G}(\phi(tm^k)) &= \gamma^{-k} G(\phi(tm^k)) - \gamma^{-k} \gamma \phi(tm^k) \\ &= \gamma^{-k} G^{\circ k+1}(\phi(t)) - \gamma^{k-1} G^{\circ k}(\phi(t)). \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

By (4.3.35), using a telescoping argument and the fact that $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma^{-k} G^{\circ k}(t) = Q(t)$, we get

$$\sum_{k=0}^\infty \gamma^{-k} \bar{G}(\phi(tm^k)) = \gamma Q(\phi(t)) - \gamma \phi(t). \quad (4.3.36)$$

Therefore, coming back to (4.3.34) and using (4.3.36), we have

$$\frac{1}{\gamma} \int_1^\infty \bar{G}(\phi(u))u^{r-1}du = \int_1^m Q(\phi(u))u^{r-1}du - \int_1^m \phi(u)u^{r-1}du. \quad (4.3.37)$$

Moreover, using the change of variable $u = t/m$ and the relations $G(\phi(t/m)) = \phi(t)$ and $\gamma m^r = 1$, we get

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^1 G(\phi(u))u^{r-1}du = \frac{m^{-r}}{\gamma} \int_0^m \phi(t)t^{r-1}dt = \int_0^m \phi(t)t^{r-1}dt.$$

Therefore, since $\bar{G}(u) = G(u) - \gamma u$, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \bar{G}(\phi(u))u^{r-1}du &= \frac{1}{\gamma} \int_0^1 G(\phi(u))u^{r-1}du - \int_0^1 \phi(u)u^{r-1}du \\ &= \int_0^m \phi(u)u^{r-1}du - \int_0^1 \phi(u)u^{r-1}du \\ &= \int_1^m \phi(u)u^{r-1}du. \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

Finally, using (4.3.37), (4.3.38) and the additive property of integration, we obtain

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \bar{G}(\phi(u))u^{r-1}du = \int_1^m Q(\phi(u))u^{r-1}du, \quad (4.3.39)$$

which ends the proof of (4.1.6). \square

4.3.5 Proof of Proposition 4.2.2

Let $k \geq 1$. For convenience, let $r = r_k$. Using the additive property of integration, the change of variable $u = t\Pi_j^k$ for $j \geq 0$ and Fubini's theorem, we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^\infty \bar{G}_{k,1}(\phi_\xi(u))u^{r-1}du \right] &= \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{E}^{(r)} \left[\sum_{j=0}^\infty \int_{\Pi_j}^{\Pi_{j+1}} \bar{G}_{k,1}(\phi_\xi(u))u^{r-1}du \right] \\ &= \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{E}^{(r)} \left[\sum_{j=0}^\infty \int_1^{m_j} \bar{G}_{k,1}(\phi_\xi(t\Pi_j))\Pi_j^r t^{r-1}dt \right] \\ &= \frac{1}{\gamma_k} \sum_{j=0}^\infty \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^{m_j} \bar{G}_{k,1}(\phi_\xi(t\Pi_j))\Pi_j^r t^{r-1}dt \right]. \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

Recall that $\phi_\xi(t\Pi_j) = g_j(\phi_{T^j\xi}(t))$, where $g_j(t) = f_0 \circ \dots \circ f_{j-1}(t)$ is a random function depending on the environment ξ_0, \dots, ξ_{j-1} and $T^j\xi = (\xi_j, \xi_{j+1}, \dots)$. Then, using the change of measure (4.2.14), the independence of the environment sequence (ξ_i) and Fubini's theorem, we see that

$$\mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^{m_j} \bar{G}_{k,1}(\phi_\xi(t\Pi_j))\Pi_j^r t^{r-1}dt \right] = \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^{m_j} c_r^{-j} \mathbb{E}_{T^j\xi} \left[\bar{G}_{k,1}(g_j(\phi_{T^j\xi}(t))) \right] t^{r-1}dt \right]. \quad (4.3.41)$$

Using the fact that $\bar{G}_{k,1}(t) = G_{k,1}(t) - \gamma_k t^k$ and the relations $\mathbb{E}[G_{k,n}(g_j(t))] = G_{k,n+j}(t)$ and $\mathbb{E}[g_j^k(t)] = G_{k,j}(t)$, we get

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^{m_j} c_r^{-j} \mathbb{E}_{T^j \xi} \left[\bar{G}_{k,1}(g_j(\phi_{T^j \xi}(t))) \right] t^{r-1} dt \right] \\ &= \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^{m_j} c_r^{-j} \left[G_{k,j+1}(\phi_{T^j \xi}(t)) - G_{k,j}(\phi_{T^j \xi}(t)) \right] t^{r-1} dt \right]. \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

Moreover, since the environment sequence (ξ_0, ξ_1, \dots) is i.i.d., we obtain, for any $j \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^{m_j} c_r^{-j} \left[G_{k,j+1}(\phi_{T^j \xi}(t)) - G_{k,j}(\phi_{T^j \xi}(t)) \right] t^{r-1} dt \right] \\ &= \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^{m_0} c_r^{-j} \left[G_{k,j+1}(\phi_\xi(t)) - G_{k,j}(\phi_\xi(t)) \right] t^{r-1} dt \right]. \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

Therefore, coming back to (4.3.40) and using the fact that $c_r = \gamma_k$ (for $r = r_k$) together with Fubini's theorem, we obtain

$$\frac{1}{\gamma_k} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^\infty \bar{G}_{k,1}(\phi_\xi(u)) u^{r-1} du \right] = \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^{m_0} \sum_{j=0}^\infty \frac{G_{k,j+1}(\phi_\xi(t))}{\gamma_k^{j+1}} - \frac{G_{k,j}(\phi_\xi(t))}{\gamma_k^j} t^{r-1} dt \right]. \quad (4.3.44)$$

Using a telescoping argument and the assertion that $\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_k^j G_{k,j}(t) = Q_k(t)$ for all $t \in [0, 1)$, we get

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^\infty \left[\frac{G_{k,j+1}(\phi_\xi(t))}{\gamma_k^{j+1}} - \frac{G_{k,j}(\phi_\xi(t))}{\gamma_k^j} \right] &= Q_k(\phi_\xi(t)) - G_{k,0}(\phi_\xi(t)) \\ &= Q_k(\phi_\xi(t)) - \phi_\xi^k(t). \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

Therefore, by (4.3.44) and (4.3.45), we have

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^\infty \bar{G}_{k,1}(\phi_\xi(u)) u^{r-1} du \right] \\ &= \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^{m_0} Q_k(\phi_\xi(t)) t^{r-1} dt \right] - \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^{m_0} \phi_\xi^k(t) t^{r-1} dt \right]. \end{aligned} \quad (4.3.46)$$

Moreover, using the identity $\phi_\xi(u) = f_0(\phi_{T\xi}(t/m_0))$, the change of variable $t = u/m_0$, the independence between ξ_0 and $T\xi$, the relation $\gamma_k = c_r$ and Fubini's theorem, we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^{m_0} \phi_\xi^k(t) t^{r-1} dt \right] &= \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^1 f_0^k(\phi_{T\xi}(u)) m_0^r u^{r-1} du \right] \\ &= \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^1 \mathbb{E}_{T\xi}^{(r)} \left[f_0^k(\phi_{T\xi}(u)) m_0^r \right] u^{r-1} du \right] \\ &= \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^1 c_r^{-1} G_{k,1}(\phi_{T\xi}(u)) u^{r-1} du \right] \\ &= \gamma_k^{-1} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^1 G_{k,1}(\phi_\xi(u)) u^{r-1} du \right]. \end{aligned} \quad (4.3.47)$$

Therefore, from the identity $\bar{G}_{k,1}(t) = G_{k,1}(t) - \gamma_k t^k$ and (4.3.47), it follows that

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^1 \bar{G}_{k,1}(\phi_\xi(u)) u^{r-1} du \right] &= \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^1 G_{k,1}(\phi_\xi(t)) t^{r-1} dt \right] - \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^1 \phi_\xi^k(t) t^{r-1} dt \right] \\ &= \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^{m_0} \phi_\xi^k(t) t^{r-1} dt \right] - \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^1 \phi_\xi^k(t) t^{r-1} dt \right] \\ &= \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^{m_0} \phi_\xi^k(t) t^{r-1} dt \right]. \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

Finally, using (4.3.46) and (4.3.48), we obtain

$$\frac{1}{\gamma_k} \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_0^\infty \bar{G}_{k,1}(\phi_\xi(u)) u^{r-1} du \right] = \mathbb{E}^{(r)} \left[\int_1^{m_0} Q_k(\phi_\xi(u)) u^{r-1} du \right], \quad (4.3.49)$$

which ends the proof of Proposition 4.2.2.

4.4 Applications

In this section we present the proofs of Theorems 4.2.8, 4.2.9 and 4.2.10 as applications of Theorem 4.2.1. In Section 4.4.1 we give the rate of convergence in the central limit theorem for $W - W_n$ where we prove Theorem 4.2.8. In Section 4.4.2 we deal with the large deviation results for the ratio $R_n = Z_{n+1}/Z_n$, where we prove Theorems 4.2.9 and 4.2.10.

4.4.1 Central Limit Theorem for $W - W_n$

In this section we prove Theorem 4.2.8.

Proof of Theorem 4.2.8. It is well known that W admits the following decomposition :

$$\Pi_n(W - W_n) = \sum_{i=1}^{Z_n} (W(i) - 1),$$

where under \mathbb{P}_ξ , the random variables $W(i)$ ($i \geq 1$) are independent of each other and independent of Z_n , with common distribution $\mathbb{P}_\xi(W(i) \in \cdot) = \mathbb{P}_{T^n \xi}(W \in \cdot)$. Let

$$\delta_\infty^2(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Pi_n} \left(\frac{m_n(2)}{m_n^2} - 1 \right).$$

The r.v. $\delta_\infty^2(\xi)$ is the variance of W under \mathbb{P}_ξ (see e.g. [34]). Notice that if $c_0 := \text{essinf} \frac{m_0(2)}{m_0^2} > 1$, then $\delta_\infty^2(\xi) \geq c_0 - 1 > 0$. Therefore, condition $\mathbb{E} Z_1^{2+\varepsilon} < \infty$ implies that, for all $k \geq 1$, it holds $\mathbb{E}_k \left| \frac{W-1}{\delta_\infty} \right|^{2+\varepsilon} \leq \frac{C}{c_0-1} \mathbb{E}_k |W-1|^{2+\varepsilon} < \infty$ (see [33]). By the Berry-Esseen theorem, we have for all $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \mathbb{P}_\xi \left(\frac{\Pi_n(W - W_n)}{\sqrt{Z_n} \delta_\infty(T^n \xi)} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq C \mathbb{E}_{T^n \xi} \left| \frac{W-1}{\delta_\infty} \right|^{2+\varepsilon} \mathbb{E}_\xi \left[Z_n^{-\varepsilon/2} \right].$$

Taking expectation with $Z_0 = k$ and using Theorem 4.2.1, we get

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{P}_k \left(\frac{\Pi_n(W - W_n)}{\sqrt{Z_n} \delta_\infty(T^n \xi)} \leq x \right) - \Phi(x) \right| &\leq C \mathbb{E}_k \left| \frac{W - 1}{\delta_\infty} \right|^{2+\varepsilon} \mathbb{E}_k [Z_n^{-\varepsilon/2}] \\ &\leq CA_{k,n}(-\varepsilon/2). \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

□

4.4.2 Large deviation rate for R_n

This section is devoted to the proof of Theorems 4.2.9 and 4.2.10. Recall that $M_{n,j}$ is defined by (4.2.42), where $N_{n,i}$ are i.i.d. with generating function f_n , given the environment ξ (see Section 4.2).

Proof of Theorem 4.2.9. Since for all $n \in \mathbb{N}$, $M_{n,j} - m_n$ has the same law as $M_{0,j} - m_0$, and is independent of Z_n , we obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k(R_n - m_n \in D) &= \sum_{j \geq k} \mathbb{P}(M_{n,j} - m_n \in D) \mathbb{P}_k(Z_n = j) \\ &\leq \sum_{j \geq k} \frac{C_1}{j^r} \mathbb{P}_k(Z_n = j) \\ &= C_1 \mathbb{E}_k [Z_n^{-r}]. \end{aligned}$$

The result (4.2.44) follows from Theorem 4.2.1, and (4.2.46) follows similarly. □

Proof of Theorem 4.2.10. We start with a lemma which is a direct consequence of the Marcinkiewicz-Zygmund inequality (see [22, p. 356]).

Lemma 4.4.1 ([43], Lemma 1.4). *Let $(X_i)_{i \geq 1}$ be a sequence of i.i.d. centered r.v.'s. Then we have for $p \in (1, \infty)$,*

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n X_i \right|^p \leq \begin{cases} (B_p)^p \mathbb{E} (|X_i|^p) n, & \text{if } 1 < p \leq 2, \\ (B_p)^p \mathbb{E} (|X_i|^p) n^{p/2}, & \text{if } p > 2, \end{cases} \quad (4.4.2)$$

where $B_p = 2 \min \{k^{1/2} : k \in \mathbb{N}, k \geq p/2\}$ is a constant depending only on p (so that $B_p = 2$ if $1 < p \leq 2$).

We shall prove Theorem 4.2.10 in the case when $p \in (1, 2]$. Using the fact that $M_{n,j} - m_n$ has the same law as $M_{0,j} - m_0$ and is independent of Z_n , we obtain after conditioning

$$\mathbb{P}_k(|R_n - m_n| > a) = \sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}(|M_{0,j} - m_0| > a) \mathbb{P}_k(Z_n = j). \quad (4.4.3)$$

Using (4.2.42) and the fact that, under \mathbb{P}_ξ , the r.v.'s $N_{0,i} - m_0$ ($i = 1, \dots, j$) are i.i.d. centered and with generating function f_0 , we get from Lemma 4.4.1 that, for $p \in (1, 2]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\xi(|M_{0,j} - m_0| > a) &\leq a^{-p} \mathbb{E}_\xi |M_{0,j} - m_0|^p \\ &\leq \left(\frac{B_p}{a}\right)^p j^{1-p} \mathbb{E}_\xi |Z_1 - m_0|^p. \end{aligned}$$

Taking expectation, we obtain

$$\mathbb{P}(|M_{n,j} - m_n| > a) \leq \left(\frac{B_p}{a}\right)^p j^{1-p} \mathbb{E} |Z_1 - m_0|^p.$$

Therefore, coming back to (4.4.3) and applying Theorem 4.2.1, we get

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k(|R_n - m_n| > a) &\leq \left(\frac{B_p}{a}\right)^p \mathbb{E} |Z_1 - m_0|^p \sum_{j=k}^{\infty} j^{1-p} \mathbb{P}_k(Z_n = j) \\ &= \left(\frac{B_p}{a}\right)^p \mathbb{E} |Z_1 - m_0|^p \mathbb{E}_k [Z_n^{1-p}] \\ &= C_p a^{-p} A_{k,n}(p-1), \end{aligned}$$

with $C_p = B_p \mathbb{E} |Z_1 - m_0|^p$. This ends the proof of Theorem 4.2.10 in the case when $p \in (1, 2]$. The proof in the case $p > 2$ is obtained in the same way. \square

Conclusion et perspectives

Les processus de branchement en environnement aléatoire sont un modèle mathématique encore très étudié aujourd'hui, de part leur complexité et leur richesse mathématique, ainsi que la pertinence de leurs applications, en biologie cellulaire notamment. La présente thèse améliore et unifie partiellement les résultats obtenus dans les travaux antérieurs pour un processus de branchement sur-critique en environnement aléatoire et sous la condition de non-extinction. L'étude des moments harmoniques de W et Z_n ainsi que l'asymptotique de la distribution du processus Z_n nous ont permis d'apporter des résultats plus fins que ceux connus dans la littérature.

Étant donné que les résultats sur les moments harmoniques de W et de Z_n impliquent un résultat de grandes déviations, il serait envisageable de chercher à obtenir des grandes déviations précises, c'est-à-dire sans normalisation logarithmique, dans l'esprit de Bahadur et Rao [6]. Cette piste d'étude est l'objet d'un travail en cours avec mes directeurs de thèse dans le cas des grandes déviations inférieures pour le processus Z_n , mais le cas d'étude des grandes déviations supérieures serait aussi envisageable.

Une autre perspective de recherche serait de généraliser les résultats de la thèse en relaxant l'hypothèse $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. Notamment, la détermination d'un équivalent de la probabilité asymptotique $\mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = k)$ constituerait une avancée considérable. Une première étape plus abordable serait d'essayer de déterminer un équivalent de la probabilité $\mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = k)$ dans le cas linéaire fractionnaire faiblement sur-critique (qui n'a pas été traité dans [18]) afin de mieux comprendre la dynamique, et enfin essayer d'étendre les résultats au cas d'un PBEA sur-critique général. Signalons de plus qu'un analogue de ces résultats existe déjà pour le processus à temps continu (c.f. [17, 38]).

Les résultats de cette thèse pourraient certainement être aussi utilisés pour effectuer des statistiques sur ce type de processus, en vue d'éventuelles applications en biologie. En effet, très peu de travaux ont été réalisés dans ce sens, mis à part des résultats concernant la normalité asymptotique de certains estimateurs de la moyenne ou de la variance (c.f. [25]). Des résultats sur la vitesse de convergence de ces estimateurs sont envisageables, et les résultats de grandes déviations sur le processus Z_n et le ratio Z_{n+1}/Z_n devraient pouvoir être utilisés pour obtenir des résultats de grandes déviations sur ces différents estimateurs.

Conclusions and perspectives

A branching process in a random environment is a mathematical model still studied today, because of their complexity and mathematical richness and relevance of their applications, especially in cell biology. This thesis improves and partially unifies the results obtained in previous work for a supercritical branching process in a random environment under the non-extinction condition. The study of harmonic moments of W and Z_n and the asymptotic distribution of the process Z_n allowed us to obtain results which are more precise than those known in the literature.

Since the results of the harmonic moments of W and Z_n imply large deviations results, it would be possible to seek to obtain more precise large deviations asymptotics, that is without the logarithmic normalization in the spirit of Bahadur and Rao [6]. This study is the subject of ongoing work with my thesis supervisors in the case of lower large deviations for the process Z_n , but the case study of upper large deviations could also be envisaged.

Another research perspective would be to generalize the results of the thesis by relaxing the assumption $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. In particular, the determination of an equivalent of the asymptotic probability $\mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = k)$ would be a major step forward. A first affordable step in this direction would be to try to determine the probability of an equivalent $\mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = k)$ in the case of a weakly supercritical fractional linear BPRE (which was not treated in [18]) to better understand the dynamics, and finally try to extend the results to the case of a general supercritical BPRE. Note further that similar results already exists for continuous time processes (c.f. [17, 38]).

The results of this thesis could certainly also be used to perform statistics on this type of process, eventually for possible applications in biology. Indeed, very little work has been done in this direction, apart from the results concerning the asymptotic normality of some estimators of the mean or the variance (c.f. [25]). Results on the speed of convergence of these estimators are possible, and the results of large deviations for the process Z_n and the ratio Z_{n+1}/Z_n should be used to obtain some large deviation results on these different estimators.

Bibliographie

- [1] V. I. Afanasyev, C. Böinghoff, G. Kersting, and V. A. Vatutin. Limit theorems for weakly subcritical branching processes in random environment. J. Theoret. Probab., 25(3) :703–732, 2012.
- [2] V. I. Afanasyev, C. Böinghoff, G. Kersting, and V. A. Vatutin. Conditional limit theorems for intermediately subcritical branching processes in random environment. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., 50(2) :602–627, 2014.
- [3] K. B. Athreya and S. Karlin. Branching processes with random environments : II : Limit theorems. Ann. Math. Stat., 42(6) :1843–1858, 1971.
- [4] K. B. Athreya and S. Karlin. On branching processes with random environments : I : Extinction probabilities. Ann. Math. Stat., 42(5) :1499–1520, 1971.
- [5] K. B. Athreya and P. E. Ney. Branching processes, volume 28. Springer-Verlag Berlin, 1972.
- [6] R. R. Bahadur and R. R. Rao. On deviations of the sample mean. Ann. Math. Stat., 31(4) :1015–1027, 1960.
- [7] V. Bansaye. Proliferating parasites in dividing cells : Kimmel’s branching model revisited. Ann. Appl. Probab., 18(3) :967–996, 2008.
- [8] V. Bansaye. Cell contamination and branching processes in a random environment with immigration. Adv. in Appl. Probab., 41(4) :1059–1081, 2009.
- [9] V. Bansaye. Surviving particles for subcritical branching processes in random environment. Stoch. Process. Appl., 119(8) :2436–2464, 2009.
- [10] V. Bansaye and J. Berestycki. Large deviations for branching processes in random environment. Markov Process. Related Fields, 15(4) :493–524, 2009.
- [11] V. Bansaye and C. Böinghoff. Upper large deviations for branching processes in random environment with heavy tails. Electron. J. Probab., 16(69) :1900–1933, 2011.
- [12] V. Bansaye and C. Böinghoff. Lower large deviations for supercritical branching processes in random environment. Proc. Steklov Inst. Math., 282(1) :15–34, 2013.

- [13] V. Bansaye and C. Böinghoff. Small positive values for supercritical branching processes in random environment. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., 50(3) :770–805, 2014.
- [14] Vincent Bansaye and Vladimir Vatutin. On the survival of a class of subcritical branching processes in random environment. Bernoulli (à paraître), 23(1), 2017.
- [15] A. D. Barbour and L. H. Y. Chen. An introduction to Stein’s method, volume 4. World Scientific, 2005.
- [16] A. D. Barbour and L. H. Y. Chen. Stein’s (magic) method. arXiv preprint arXiv :1411.1179, 2014.
- [17] C. Boeinghoff and M. Hutzenthaler. Branching diffusions in random environment. arXiv preprint arXiv :1107.2773, 2011.
- [18] C. Böinghoff. Limit theorems for strongly and intermediately supercritical branching processes in random environment with linear fractional offspring distributions. Stoch. Process. Appl., 124(11) :3553–3577, 2014.
- [19] C. Böinghoff, E. Dyakonova, G. Kersting, and V.A. Vatutin. Branching processes in random environment which extinct at a given moment. Markov Process. Related Fields, 2010.
- [20] C. Böinghoff and G. Kersting. Upper large deviations of branching processes in a random environment - offspring distributions with geometrically bounded tails. Stoch. Process. Appl., 120(10) :2064–2077, 2010.
- [21] C. Böinghoff and G. Kersting. Simulations and a conditional limit theorem for intermediately subcritical branching processes in random environment. Proc. Steklov Inst. Math., 282(1) :45–61, 2013.
- [22] Y. S. Chow and H. Teicher. Probability theory : independence, interchangeability, martingales. Springer Science & Business Media, 2012.
- [23] H. Cramér. Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités. Actualités scientifiques et industrielles, 736(5-23) :115, 1938.
- [24] A. Dembo and O. Zeitouni. Large deviations techniques and applications, volume 2. Springer, 1998.
- [25] J.P. Dion and W.W. Esty. Estimation problems in branching processes with random environments. Ann. Statist., pages 680–685, 1979.
- [26] C. Dombry, C. Mazza, and V. Bansaye. Phenotypic diversity and population growth in fluctuating environment : a mbpre approach. arXiv preprint arXiv :0912.1194, 2009.
- [27] K. Fleischmann and V. Wachtel. On the left tail asymptotics for the limit law of supercritical Galton–Watson processes in the Böttcher case. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., 45(1) :201–225, 2009.
- [28] J. Geiger. Elementary new proofs of classical limit theorems for galton-watson processes. J. Appl. Probab., pages 301–309, 1999.

- [29] J. Geiger, G. Kersting, and V. A. Vatutin. Limit theorems for subcritical branching processes in random environment. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., 39(4) :593–620, 2003.
- [30] I. Grama, Q. Liu, and E. Miqueu. Asymptotic of the distribution and harmonic moments for a supercritical branching process in a random environment. arXiv preprint arXiv :1606.04228, 2016.
- [31] I. Grama, Q. Liu, and E. Miqueu. Berry-Esseen’s bound and Cramér’s large deviation expansion for a supercritical branching process in a random environment. Stoch. Process. Appl., 2016.
- [32] I. Grama, Q. Liu, and E. Miqueu. Harmonic moments and large deviations for a supercritical branching process in a random environment. arXiv preprint arXiv :1608.08075, 2016.
- [33] Y. Guivarc’h and Q. Liu. Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire. Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics, 332(4) :339–344, 2001.
- [34] B. Hambly. On the limiting distribution of a supercritical branching process in a random environment. J. Appl. Probab., 29(3) :499–518, 1992.
- [35] S. T. Ho and L. H. Y. Chen. An L_p bound for the remainder in a combinatorial central limit theorem. Ann. Probab., 6(2) :231–249, 1978.
- [36] C. Huang and Q. Liu. Moments, moderate and large deviations for a branching process in a random environment. Stoch. Process. Appl., 122(2) :522–545, 2012.
- [37] C. Huang and Q. Liu. Convergence in L_p and its exponential rate for a branching process in a random environment. Electron. J. Probab., 19(104) :1–22, 2014.
- [38] M. Hutzenthaler. Supercritical branching diffusions in random environment. Electron. Commun. Probab, 16(2), 2011.
- [39] M. V. Kozlov. On large deviations of branching processes in a random environment : geometric distribution of descendants. Discrete Math. Appl., 16(2) :155–174, 2006.
- [40] M. V. Kozlov. On large deviations of strictly subcritical branching processes in a random environment with geometric distribution of progeny. Theory Probab. Appl., 54(3) :424–446, 2010.
- [41] X. Liang and Q. Liu. Weighted moments of the limit of a branching process in a random environment. Proc. Steklov Inst. Math., 282(1) :127–145, 2013.
- [42] Q. Liu. Asymptotic properties of supercritical age-dependent branching processes and homogeneous branching random walks. Stoch. Process. Appl., 82(1) :61–87, 1999.
- [43] Q. Liu. Local dimensions of the branching measure on a Galton–Watson tree. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., 37(2) :195–222, 2001.
- [44] M. Nakashima. Lower deviations of branching processes in random environment with geometrical offspring distributions. Stoch. Process. Appl., 123(9) :3560–3587, 2013.

- [45] P. E. Ney and A. N. Vidyashankar. Harmonic moments and large deviation rates for supercritical branching processes. Ann. Appl. Probab., pages 475–489, 2003.
- [46] V. V. Petrov. Sums of independent random variables. Berlin, 1975.
- [47] N. Ross. Fundamentals of Stein’s method. Probab. Surv., 8 :210–293, 2011.
- [48] W. L. Smith and W. E. Wilkinson. On branching processes in random environments. Ann. Math. Stat., 40(3) :814–827, 1969.
- [49] D. Tanny. Limit theorems for branching processes in a random environment. Ann. Probab., pages 100–116, 1977.
- [50] D. Tanny. A necessary and sufficient condition for a branching process in a random environment to grow like the product of its means. Stoch. Process. Appl., 28(1) :123–139, 1988.
- [51] V. A. Vatutin. Limit theorem for an intermediate subcritical branching process in a random environment. Theory Probab. Appl., 48(3) :481–492, 2004.
- [52] V. A. Vatutin. A refinement of limit theorems for the critical branching processes in random environment. In Workshop on Branching Processes and their Applications. Lect. Notes Stat. Proc., volume 197, pages 3–19. Springer, Berlin, 2010.
- [53] V. A. Vatutin and X. Zheng. Subcritical branching processes in a random environment without the Cramer condition. Stoch. Process. Appl., 122(7) :2594–2609, 2012.
- [54] Vladimir Vatutin and Elena Dyakonova. Path to survival for the critical branching processes in a random environment. arXiv preprint arXiv :1603.03199, 2016.