



HAL
open science

Modélisation du transfert thermique couplé conductif et radiatif au sein de milieux fibreux portés à haute température

Yann Dauvois

► **To cite this version:**

Yann Dauvois. Modélisation du transfert thermique couplé conductif et radiatif au sein de milieux fibreux portés à haute température. Autre. Université Paris Saclay (COMUE), 2016. Français. NNT : 2016SACLC097 . tel-01502882

HAL Id: tel-01502882

<https://theses.hal.science/tel-01502882>

Submitted on 6 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ
PARIS-SACLAY,**
préparée à CentraleSupélec.

ÉCOLE DOCTORALE N°579

Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences.
Spécialité Énergétique.

Présentée par

Yann Dauvois

**Modélisation du transfert thermique couplé conductif
et radiatif au sein de milieux fibreux portés à haute
température**

Thèse soutenue à Châtenay-Malabry, le 14/12/2016.

Composition du jury :

Mme.	BAILLIS Dominique	Professeur, INSA de Lyon, Rapporteur
M.	BEN ABDALLAH Philippe	Directeur de recherche, Institut d'optique - LCF, Rapporteur
M.	DUPOIRIEUX Francis	Adjoint scientifique du DEFA, ONERA, Examineur
M.	ENGUEHARD Franck	Professeur, CentraleSupélec, EM2C, Directeur de thèse
M.	ROCHAIS Denis	Expert sénior, CEA Le Ripault, Co-directeur
M.	TAINÉ Jean	Professeur, CentraleSupélec, EM2C, Co-directeur
M.	VIGNOLES Gérard	Professeur, Université de Bordeaux, LCTS, Président

Remerciements

Ces travaux de thèse ont été effectués au laboratoire d'Energétique Macroscopique et Moléculaire, Combustion (EM2C, CNRS) de l'école CentraleSupélec en collaboration avec le CEA Le Ripault.

Je remercie chaleureusement toutes les personnes qui m'ont aidé pendant l'élaboration de cette thèse et notamment :

Mon directeur de thèse Mr Franck Enguehard, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour son soutien, ses nombreux conseils durant la rédaction de ce manuscrit de thèse et sans oublier sa bonne humeur.

Mon co-directeur Mr Jean Taine, pour sa disponibilité, pour l'aide qu'il m'a apportée dans la rédaction de mes travaux. Sa rigueur, ses très grandes connaissances dans le domaine de la physique m'ont permises de progresser et de répondre à la problématique de cette thèse.

Mon co-directeur de thèse Mr Denis Rochais, pour la confiance qu'il m'a accordée, le suivi et l'accueil au CEA Le Ripault où j'ai pu découvrir les campagnes de mesures expérimentales de caractérisation de matériaux.

Mes remerciements vont également à Mr Gérard Vignoles pour son accueil au Laboratoire des Composites Thermo Structuraux (LCTS) de Pessac et pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance d'avoir accepté de participer au jury de thèse.

Mme Dominique Baillis, Messieurs Philippe Ben Abdallah et Francis Dupoirieux me font l'honneur de participer au jury de soutenance, je les en remercie profondément.

Ce travail n'aurait pas été possible sans le soutien du CEA qui m'a permis de me consacrer sereinement à l'élaboration de ma thèse. Je remercie aussi Mr Sylvain Chupin pour l'aide qu'il m'a apportée dans mes travaux.

Je remercie aussi tous mes collègues du laboratoire, une pensée à Katia et à Marek qui sera à ma place dans peu de temps. Merci tout particulièrement au bureau : Erwan et Mélody pour les discussions enrichissantes. Merci également à Benjamin, Nicolas, Kévin, Cédric, Mathilde, Aude, Claire, Pierre, Florence, Marie, Marien pour la bonne ambiance de travail mais également pour les nombreux bons moments passés ensemble durant ces trois années.

Au terme de ce parcours, je remercie enfin celles et ceux qui me sont chers et que j'ai quelque peu délaissés ces derniers temps. Leur bienveillance et encouragements m'ont accompagné durant cette période. Je citerai mes parents, mes grands-parents, mes soeurs, Martin, Romain, Mika, Julien, Benjamin, Marie, ...

J'adresse enfin mes sincères remerciements à toutes les personnes rencontrées pendant ce travail et que je n'ai pas cités ici.

Abstract

Fibrous media like felts composed of oxides like alumina Al_2O_3 or zirconia ZrO_2 have good thermomechanical properties and are interesting candidates as insulating materials at high temperatures. In these very porous materials, radiation transfer, generally coupled to other heat transfer modes, is often predominant. But the complex morphology, the anisotropy, the boundary effects, the semi-transparency of the fiber phase and the non-Beerian behaviour of these materials make it very difficult to determine their thermal properties with classical methods. This work provides advances on the statistical modeling of coupled conductive and radiative heat transfer in such materials.

A virtual statistically homogeneous fibrous sample has been built by stacking overlapping finite absorbing cylinders within a transparent gaseous volume. These cylinders are dispersed according to prescribed distribution functions defining the cylinder positions and orientations. It is shown that whereas the gas phase exhibits a perfectly Beerian behaviour, it is not at all the case for the fiber phase. As a consequence, this latter phase is characterised by statistical distribution functions associated with each radiative phenomenon (extinction, absorption, scattering). The radiative transfer within the fibrous medium is solved by a model relating a Generalised Radiative Transfer Equation (GRTE) for the fiber phase, in which the classical radiative coefficients are replaced by the associated statistical functions, to a classical Radiative Transfer Equation (RTE) in the gas phase. These two equations are coupled by the radiative exchanges taking place through the interfaces separating the phases.

A stochastic approach for solving the energy equation at the pore scale has also been developed. It is based on the notion of random walk : a huge number of Brownian walkers is generated, each of them carrying a certain quantity of enthalpy. These walkers roam within the fibrous phase and the problem is governed by the boundary conditions. The radiative power field issued from the resolution of the radiative transfer problem increases or decreases the enthalpies of the walkers according to the sign of the local radiative power. This radiative power field depending on the temperature field, the coupled radiative-conductive problem is solved by an iterative method.

We conclude this work with a parametric study of the properties of the coupled radiation-conduction heat transfer through our material under study by varying the porosity, the cylinder orientation dispersion, the fiber absorptivity,

the optical index ratio of the two constituents and their thermal conductivities.

Résumé

Les matériaux fibreux de type feutres composés de fibres d'alumine Al_2O_3 ou de zircone ZrO_2 ont d'excellentes propriétés thermomécaniques et sont de plus en plus envisagés comme isolants thermiques à hautes températures. Dans ces matériaux très poreux, le transfert radiatif, qui est couplé aux autres modes de transfert thermique, peut être prépondérant. Mais la morphologie complexe, l'anisotropie, les effets de bord, la semi-transparence de la phase solide et le comportement non Beerien de ces matériaux rendent très difficiles la détermination de leurs propriétés thermiques par des méthodes classiques. Ce travail de thèse apporte des avancées sur le thème de la modélisation statistique du transfert thermique couplé conduction-rayonnement au sein de tels matériaux. Un milieu fibreux statistiquement homogène a été généré numériquement en empilant des cylindres de longueur finie, absorbants et pouvant s'interpénétrer, dans un volume parallélépipédique de gaz transparent. Ces cylindres sont dispersés suivant des fonctions de distribution définissant leurs positions et leurs orientations. On montre que si le gaz constitue une phase Beerienne, il n'en est pas de même de la phase constituée par les fibres, qui par conséquent est caractérisée par des fonctions de distribution associées à chaque phénomène radiatif (extinction, absorption et diffusion). Le transfert radiatif dans le matériau est ensuite résolu à l'aide d'un modèle couplant une Equation du Transfert Radiatif Généralisée (ETRG) dans la phase non Beerienne, dans laquelle les coefficients radiatifs sont remplacés par ces fonctions statistiques, avec une Equation du Transfert Radiatif (ETR) classique dans la phase Beerienne. Ces équations sont couplées par les échanges radiatifs aux interfaces séparant les deux phases. Une approche stochastique résolvant l'équation de l'énergie à l'échelle des pores a été ensuite développée. Son grand avantage est de ne nécessiter aucun maillage. Elle est basée sur la notion de marche aléatoire : un grand nombre de processus stochastiques de type mouvement Brownien est généré, chacun des "marcheurs" portant une certaine quantité d'enthalpie. Ces porteurs se déplacent dans la phase fibreuse et le problème est régi par les conditions aux limites. Le champ de puissance radiative issu de la résolution du problème radiatif augmente ou diminue les enthalpies des porteurs selon que la puissance radiative locale est positive ou négative. Ce champ de puissance radiative dépendant du champ de température, une résolution itérative gère le problème du couplage. On conclut ce travail par une étude paramétrique des propriétés du transfert

thermique couplé conduction-rayonnement au travers de notre matériau d'étude en faisant varier sa porosité, la dispersion des orientations des cylindres, l'absorptivité des fibres, le rapport des indices optiques des deux constituants et leurs conductivités thermiques.

Table des matières

Abstract	v
Résumé	vii
Nomenclature	xxi
Introduction générale	1
I Etat de l'art	7
1 Modélisation du transfert radiatif	9
Introduction	9
1.1 Caractérisation radiative d'un milieu poreux	10
1.1.1 Généralités	10
1.1.2 Méthodes de détermination des propriétés radiatives	16
1.2 Modélisation du transfert radiatif	21
1.2.1 L'Equation du Transfert Radiatif Généralisée (GRTE)	22
1.2.2 L'Equation du Transfert Radiatif (RTE)	24
1.3 Méthodes de résolution	30
1.3.1 Solutions analytiques	30
1.3.2 Méthodes numériques	32
Conclusion	36
2 Modélisation de la conduction thermique et de son couplage avec le rayonnement	37
Introduction	37
2.1 Détermination de la conductivité phonique effective	38
2.1.1 Expérimentalement	38
2.1.2 A l'aide de formules analytiques	40
2.1.3 Par des méthodes numériques	41
2.2 Détermination de la conductivité thermique totale	42
2.2.1 Par la méthode de prise de moyenne volumique	42

2.2.2	Par des méthodes de différences finies, d'éléments finis ou de volumes finis	43
2.2.3	Par une méthode de Monte Carlo	46
	Conclusion	48
II Génération numérique d'un échantillon de matériau fibreux		51
3	Génération de la géométrie d'étude	53
	Introduction	53
3.1	Technique optimisée de génération d'un empilement de cylindres homogène en porosité	54
3.1.1	Procédure d'empilement des cylindres	54
3.1.2	Voxélisation	57
3.1.3	Hypothèse du milieu statistiquement homogène	58
3.2	Dimension du milieu fibreux	60
	Conclusion	62
III Modélisation statistique du transfert radiatif au sein du milieu fibreux		63
4	Comments over homogenisation scales for interfacial emission and scattering by a divided medium : Beerian and non Beerian behaviours	65
	Résumé	65
	Introduction	66
4.1	Modeling of radiation issued from interfaces (OT and OST cases)	68
4.1.1	Reflection law (non Beerian homogenised phase)	68
4.1.2	Diffuse reflection (non Beerian homogenised phase)	73
4.1.3	Beerian homogenised phase (All types of reflection)	75
4.2	Homogenisation scale and Beerian model scale	76
4.3	Validity and limitations of previous studies	78
	Conclusion	79
5	Statistical radiative modeling of a porous medium with semi transparent and transparent phases : Application to a felt of overlapping fibres	81
	Résumé	81
	Introduction	82
5.1	Radiation models	85
5.1.1	Statistical model of radiative properties	85
5.1.2	Coupled Generalised Radiative Transfer Equations	94
5.1.3	Coupled RTEs	96

5.1.4	Radiative conductivity tensors	99
5.2	Characterisation of a felt of fibres	101
5.2.1	Numerical implementation	102
5.2.2	Results	104
5.3	Application to radiative transfer	108
5.3.1	Transfer model based on GRTEs	108
5.3.2	Transfer model based on Fourier's law	110
5.3.3	Results	111
5.3.4	Influence of key parameters	113
	Conclusion	116
IV Modélisation statistique du transfert thermique couplé conduction-rayonnement au sein du milieu fibreux		117
6	Statistical coupled conductive and radiative modeling in a fibrous medium with semi transparent and transparent phases at high temperature	119
	Résumé	119
	Introduction	120
6.1	Model	122
6.1.1	Assumptions	122
6.1.2	Radiative model	123
6.1.3	Stochastic method for solving the energy equation	124
6.1.4	Coupling conduction and radiation	127
6.2	Validation	129
6.2.1	First 1D case : imposed temperatures at the boundaries	129
6.2.2	Second 1D case : medium composed of two phases	130
6.2.3	Third 1D case : power density	131
6.3	Application to a fibrous medium	132
6.3.1	Numerical generation of a fibrous sample	132
6.3.2	Modeling of conduction alone	133
6.3.3	Modeling of the conduction-radiation coupling	135
	Conclusion	140
Conclusion générale		143
A Propriétés des termes sources de diffusion		147
B Fonctions de distribution des directions diffusées		149
C Résolution du problème du transfert radiatif dans un milieu fibreux composé de deux phases Beeriennes		151
C.1	Caractérisation radiative du milieu fibreux composé de deux phases Beeriennes	151

C.2	Modèle radiatif	154
C.3	Résultats	155
	Références	165

Liste des tableaux

3.1	Ecart relatif de porosité $\frac{\Delta\Pi}{\Pi}$ en fonction du nombre de milieux générés et de leur taille dans les directions x et y	59
6.1	Effective phonic conductivity as a function of the standard deviation σ . $\Pi = 0.75$	135

Liste des figures

1	Image MEB de la morphologie du Zircar HD (matériau commercial) à 70% de porosité. Les fibres sont constituées d'oxyde de zirconium.	3
1.1	Domaine de calcul de la méthode de Monte Carlo appliquée aux milieux non Beeriens.	21
3.1	Génération d'un empilement de cylindres dans l'espace tridimensionnel. A gauche génération d'un cylindre, à droite génération de plusieurs cylindres qui peuvent s'interpénétrer.	54
3.2	Milieu fibreux généré numériquement de porosité 0.75. A gauche le milieu en 3D, à droite le plan de coupe B-B.	55
3.3	Milieu fibreux généré numériquement de porosité 0.75. A gauche le milieu en 3D, à droite un agrandissement sur les cylindres voxélisés.	56
3.4	Fonctions de distribution des angles θ et ϕ caractérisant l'orientation des cylindres du milieu fibreux de porosité 0.75. (- -) Distributions souhaitées. (-) Distributions calculées après avoir généré le milieu.	57
3.5	Principe permettant de rechercher les intersections entre les rayons émis et les cylindres au sein d'un milieu voxélisé.	58
3.6	Représentation de la zone d'émission des rayons et de la zone d'extinction au sein du milieu fibreux.	61
3.7	Fonctions de probabilité cumulée d'extinction au sein des deux phases du milieu de porosité 0.75 suivant plusieurs directions $\mu = \cos\theta$. A gauche dans la phase transparente. A droite dans les fibres semi-transparentes non diffusantes avec $\kappa_\nu d = 0.3$. . .	61

4.1	Extinction cumulative distribution functions associated with semi transparent overlapping cylinders within an opaque phase (OST non Beerian case). In all cases : Upper left : G_{ext} issued from random volume isotropic emission points; Upper right : $G_{ext}^{S(1)}$ associated with the first set of internally scattered rays; Lower left : $G_{ext}^{S(2)}$ associated with the second set of internally scattered rays; Lower right : $G_{ext}^{S(3)}$ associated with the third set of internally scattered rays; $\kappa_\nu d = 0.3$	71
4.2	Averaged phase functions associated with semi transparent overlapping cylinders within an opaque phase (OST non Beerian case); Upper left : $p(\mu, \mu_{sc})$ issued from random volume isotropic emission points; Upper right : $p^{S(1)}(\mu, \mu_{sc})$ associated with the first set of internally scattered rays; Lower left : $p^{S(2)}(\mu, \mu_{sc})$ associated with the second set of internally scattered rays; Lower right : $p^{S(3)}(\mu, \mu_{sc})$ associated with the third set of internally scattered rays; $\kappa_\nu d = 0.3$	73
4.3	Extinction cumulative distribution functions associated with the transparent propagation phase between overlapping opaque cylinders (OT Beerian case); Left : G_{ext} issued from random isotropic volume points, equal to $G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ associated with a diffuse reflection law; Right : $G'_{ext}{}^S(1)$ associated with the first set of scattered rays following a Fresnel's law.	75
4.4	Phase functions associated with a transparent propagation phase between overlapping opaque cylinders (OT Beerian case); Left : $p(\mu, \mu_{sc})$ issued from random volume points; Right : $p'{}^S(1)(\mu, \mu_{sc})$ associated with the first set of scattered rays following a Fresnel's law.	76
5.1	First successive sets of internal and external scattering events.	88
5.2	Left : Generated fibrous medium ($\Pi_b = 0.75$); Right : Cross section BB normal to the z axis.	102
5.3	Example of radiative paths.	103
5.4	Extinction cumulative distribution functions of the transparent phase b for different values of $\mu = \cos \theta$: i) $G_{ext b}$ associated with isotropic volume source points; ii) $G_{ext ab}^{S(2)}$ associated with interfacial scattered rays (path 2 of Fig.5.3).	104
5.5	Extinction cumulative distribution functions of phase a (fibres) for different values of $\mu = \cos \theta$. i) $G_{ext a}$ associated with isotropic volume emission points; ii) $G_{ext aa}^{S(1)}$; iii) $G_{ext aaa}^{S(3)}$; iv) $G_{ext aba}^{S(5)}$ (by using notations of Sec.5.1.1.1 and Fig.5.3.)	105

5.6	Optical thicknesses based on \circ : Generalised extinction coefficients ($B_c d$); Δ : Generalised internal scattering coefficients ($\Sigma_{cc} d$); \diamond : Generalised external scattering coefficients ($\Sigma_{cd} d$) and \square : Absorption coefficients ($\kappa_a d = 0.3$ and $\kappa_b d = 0$); i) For the transparent phase b ($c=b, d=a$); ii) For the absorbing phase a (fibres) ($c=a, d=b$).	106
5.7	Phase functions. i) $p_b(\mu_1, \mu)$, internal scattering within b (Beerian model, random volume source points); ii) $p_{abb}(\mu_1, \mu)$ internal scattering within b following transmission from a (interfacial source points); iii) $p_{aa}(\mu_1, \mu)$ first internal scattering within a; iv) $p_{aaa}(\mu_1, \mu)$ (second internal scattering within a; v) $p_{ba}(\mu_1, \mu)$, external scattering from b to a (Beerian model, random volume source points); vi) $p_{ab}(\mu_1, \mu)$ (first external scattering from a to b).	108
5.8	Dimensionless radiative power field for an imposed linear temperature field in the fibre phase; Two boundary black walls at $T_a(0) = 2000K$ and $T_a(D) = 300K$: i) $\kappa_a d = 0.3$; ii) $\kappa_a d = 10$; iii) $\kappa_a d = 100$; \square : coupled GRTEs model, $-$: Fourier's model associated with coupled RTEs.	112
5.9	i) Temperature field when the fibrous medium is bounded by two black walls; \square : $T(0) = 2500K$, Δ : $T(0) = 2000K$, \circ : $T(0) = 1000K$; In all cases : $T(D) = 300K$.; (- - -) coupled GRTEs model, (\dots) Fourier's model associated with coupled RTEs; ii) Residuals.	113
5.10	i) Temperature field when a fibrous medium is submitted to an imposed flux at $z = 0$ and bounded by a black wall at $z = D$; \square : $\varphi(0) = 50 kWm^{-2}$, Δ : $\varphi(0) = 30 kWm^{-2}$, \circ : $\varphi(0) = 10 kWm^{-2}$; $T(D) = 300K$; (- - -) : coupled GRTEs model, \dots : Fourier's model associated with coupled RTEs; ii) Residuals.	113
5.11	Radiative flux through the fibrous medium : i) vs absorption optical thickness; ii) vs optical index ratio; iii) vs porosity; The medium is bounded by two black walls at $T(0) = 2000K$ and $T(D) = 300K$; Other parameter values are : $\kappa_a d = 0.3, n_a/n_b = 2, \Pi_b = 0.75$	115
6.1	Scheme of the iterative method which solves the coupled conductive-radiative transfer within a fibrous medium.	128
6.2	Left : Temperature field. Right : Heat flux. (-) Analytical solution. (\square) Solution calculated by the random walk technique. . .	130
6.3	Left : Temperature field. Right : Heat flux. (-) Analytical solution. (\square) Solution calculated by the random walk technique. . .	131
6.4	Left : Temperature field. Right : Heat flux. (-) Analytical solution. (\square) Solution calculated by the random walk technique. . .	132

6.5	Left : Generated fibrous sample ($\Pi_b = 0.75$); Right : Cross section BB normal to the z axis.	133
6.6	Left : temperature field ; Right : heat flux. (-) Purely conductive solution. (\square) The random walk solution. (o) Heat flux.	134
6.7	Effective phonic conductivity as a function of the porosity. $\sigma = 5^\circ$. (-) Effective phonic conductivity. (- -) Conductivity issued from the parallel model : $(1 - \Pi) k_a$	135
6.8	Left : radiative power field. Right : temperature field. (-) Pure conductive solution. (-.) Pure radiative solution. (o) Conduction-radiation coupling, 1st method. (\square) Conduction-radiation coupling, 2nd method.	137
6.9	Upper left : flux fields, 1st method. Upper right : flux fields, 2nd method. Lower : difference between the total flux fields calculated by the Newton-Raphson algorithm and the random walk technique. (Δ) Total flux. (\square) Radiative flux. (o) Conductive flux.	138
6.10	Upper left : thermal conductivity vs the porosity. Upper right : thermal conductivity vs the optical index ratio. Lower : thermal conductivity vs the standard deviation of the fibre orientations. (-) Effective phonic conductivity. (o) Total conductivity with $\kappa_a d = 0.3$. (\square) Total conductivity with $\kappa_a d = 10$. (Δ) Total conductivity with $\kappa_a d = 100$	139
C.1	Fonctions de distribution cumulée d'extinction $G_{\nu ext}$ dans les deux phases. (-) $G_{\nu ext}$ exacte (- -) $G_{\nu ext}$ Beerienne. i) dans la phase b . ii) dans la phase a	153
C.2	Critère de validité de la loi de Beer-Lambert calculé dans les deux phases. (-) $\varepsilon_{RDFI}(\mathbf{u})$. (- -) Limite de validité de 4%. i) dans la phase b . ii) dans la phase a	153
C.3	Coefficients radiatifs adimensionnés associés aux deux phases Beeriennes. i) dans la phase b . ii) dans la phase a . \circ : Coefficient d'extinction ; Δ : Coefficient de diffusion interne ; \diamond : Coefficient de diffusion externe ; \square : Coefficient d'absorption.	154
C.4	A gauche, champs de température au sein du milieu fibreux : \square : résultat exact calculé au moyen du modèle couplant une GRTE et une RTE (voir paragraphe 5.1.2) ; \circ : résultat en supposant valide la loi de Beer-Lambert dans les deux phases (modèle décrit au paragraphe C.2) ; \diamond : résultat calculé au moyen du modèle de Fourier radiatif (voir paragraphe 5.3.2). A droite, écart relatif entre le champ de température calculé en supposant la loi de Beer-Lambert valide et le résultat exact.	156

- C.5 En haut à gauche, champs de puissance radiative au sein du milieu fibreux : \square : résultat exact calculé au moyen du modèle couplant une GRTE et une RTE (voir paragraphe 5.1.2); \circ : résultat en supposant valide la loi de Beer-Lambert dans les deux phases (modèle décrit au paragraphe C.2); \diamond : résultat calculé au moyen du modèle de Fourier radiatif (voir paragraphe 5.3.2). En haut à droite, écart relatif entre le champ de puissance radiative calculé en supposant la loi de Beer-Lambert valide et le résultat exact. En bas, agrandissement de la figure précédente aux écarts relatifs compris entre 0 et 1. 157

Nomenclature

Caractères latins :

E	Point d'extinction	\mathbf{u}	Vecteur unitaire de la direction courante
f	Fonction de distribution	V	Volume
G	Fonction de distribution cumulée	B	Coefficient d'extinction généralisé
I	Luminance	p	Fonction de phase
M	Point source volumique	\mathbf{q}	Flux
N	Point source surfacique	k^R	Conductivité radiative
n	Indice optique	k_{eff}	Conductivité phonique effective
\mathbf{n}	Vecteur normal unitaire aux interfaces	k_{tot}	Conductivité totale
P	Probabilité cumulative	d	Diamètre d'un cylindre
\mathbf{r}	Coordonnées du point courant	L	Longueur d'un cylindre
s, s'	Abscisses curvilignes	D	Longueur du milieu
S	Terme source radiatif		
T	Température		

Caractères grecs :

α	Absorptivité	Π	Porosité
β	Coefficient d'extinction	Σ	Aire interfaciale
δ	Symbole de Kronecker	Σ_{cc}	Coefficient de diffusion généralisé
κ	Coefficient d'absorption	or	
ρ''	Réflexivité bidirectionnelle	Σ_{cd}	
τ''	Transmittivité bidirectionnelle	Ω	Angle solide
ν	Fréquence	θ	Angle par rapport à l'axe z
		Φ	Angle azimutal

Indices :

$-a$	Absorption	$-ot$	A la limite du milieu optiquement épais
$-c$	Relatif à une phase	$-sc$	Diffusion
$-d$	Relatif à une autre phase	$-H$	Diffusion multiple
$-e$	Emission		
$-ext$	Extinction		

Exposants :

$-B$	Associé à la phase Beerienne	$-(n)$	$n^{\text{ème}}$ diffusion
$-S$	Associé à un terme surfacique	$-^{\circ}$	A l'équilibre

Abréviations :

OT	Milieu composé d'une phase opaque et d'une phase transparente	STT	Milieu composé d'une phase semi-transparente et d'une phase transparente
OST	Milieu composé d'une phase opaque et d'une phase semi-transparente	RTE	Radiative Transfer Equation
$ST2$	Milieu composé de deux phases semi-transparentes	$GRTE$	Generalised Radiative Transfer Equation

Introduction générale

Les phénomènes physiques intervenant dans les applications technologiques réelles sont nombreux et couplés. Ils peuvent être d'origine mécanique, thermique, chimique, liés au transfert de masse et de quantité de mouvement. Pour concevoir et optimiser leur fonctionnement en condition d'utilisation, une bonne compréhension de ces couplages est nécessaire. Dans des applications énergétiques un système peut être soumis à des températures élevées, c'est pourquoi on utilise des barrières thermiques afin de les protéger et rallonger leur durée de vie. Dans ce cas la modélisation du transfert de chaleur sert à quantifier le flux auquel le système est soumis et ainsi à dimensionner un matériau le plus isolant et le plus léger possible. Les coûts de fabrication seront ainsi réduits. Un autre intérêt de la modélisation est d'éviter une campagne de mesures expérimentales longue et coûteuse sur un jeu de matériaux différents. On peut citer à titre d'exemple le dimensionnement des barrières thermiques dans un réacteur nucléaire, dans les chambres de combustion, pour les tuyères dans l'aéronautique, sur les revêtements de corps de rentrée dans le domaine de l'aérospatial. Mais, on peut aussi trouver ces isolants dans des applications plus courantes où les gradients de température sont plus faibles, comme l'isolation pour l'habitat, l'automobile, les piles à combustible et dans la fabrication de panneaux solaires ou d'échangeurs de chaleur.

Beaucoup de travaux portant sur le problème du transfert thermique couplé ont déjà été réalisés. Néanmoins, les problèmes de couplage restent mal compris et le transfert couplé à haute température a été peu étudié. Dans l'état actuel où l'effort des entreprises est porté sur la réduction des coûts et l'amélioration sans cesse des applications technologiques afin de rester compétitif, le sujet reste attrayant et d'actualité.

Ces barrières thermiques sont la plupart du temps des matériaux poreux constitués d'une ou plusieurs phases solides plongées dans un fluide. La famille de matériaux de type feutre utilisée pour des applications à haute température se compose généralement de fibres faites de céramiques réfractaires, par exemple d'oxyde d'aluminium (alumine) ou d'oxyde de zirconium (zircone). Ces matériaux de porosité élevée (de l'ordre de 70% à 90%) sont de très bons isolants à haute température. Ils présentent une très bonne tenue mécanique et thermique

jusqu'à de hautes températures (environ 2500K) et ils possèdent également une variabilité très faible de leurs propriétés avec la température. C'est dans ce cadre d'étude que s'inscrit cette thèse.

A haute température le transfert radiatif doit être pris en compte et peut même dans certains cas être le mode de transfert prédominant. La zircone présentant une plage de faible absorptivité dans le proche infrarouge, le caractère de semi-transparence des fibres rend le travail original. En effet, la phase fluide étant généralement transparente, la modélisation du transfert radiatif doit rendre compte des effets d'échanges entre phases de natures différentes. S'ajoute à cela la conduction au sein des fibres qui tend à favoriser le transfert et a un impact sur la grandeur couramment appelée conductivité thermique effective du matériau. Une autre difficulté résulte de la morphologie complexe du matériau. Lors de la fabrication d'un matériau fibreux, on enchevêtre les fibres qu'on va venir presser, de sorte qu'elles vont s'orienter d'une manière préférentielle rendant ses propriétés anisotropes (voir figure 1). Cette dernière difficulté rend la résolution extrêmement difficile, en effet aucun mailleur ne peut mailler précisément ce type de morphologie, ce qui impacte fortement la précision des résolutions par éléments ou volumes finis. Les techniques de cubes mobiles consistant à reconstruire l'interface entre deux phases d'un même matériau et les mailleurs créant des mailles cubiques uniformes grises (c'est-à-dire composées d'un milieu homogène caractérisé par des propriétés effectives) sont les seuls outils permettant d'obtenir une représentation 3D de telles morphologies. Mais pour rester fidèle à la géométrie réelle et à la localisation des interfaces, le pas des mailles doit être très petit, rendant la résolution très consommatrice de mémoire et de plus, seule une petite partie du matériau peut être traitée.

Avec l'amélioration des moyens de calcul, les méthodes statistiques et notamment la méthode de Monte Carlo connaissent un regain d'intérêt. Elles présentent l'avantage de ne nécessiter aucun maillage et peuvent être utilisées dans l'étude des problèmes physiques dans les milieux ayant une morphologie complexe. Elles se basent sur un grand nombre de simulations indépendantes du phénomène physique d'intérêt dans le volume de calcul. Dans l'étude du rayonnement thermique, on suit le parcours d'un grand nombre de rayons émis, transportant une certaine quantité d'énergie, jusqu'à leur absorption. Pour cela, on effectue des tirs dans des fonctions statistiques radiatives qui caractérisent chaque phénomène radiatif (émission, extinction, absorption et diffusion). Dans l'étude de la conduction, un grand nombre de processus stochastiques de type mouvement Brownien est généré et chacun porte une certaine quantité d'enthalpie. On suit ensuite le déplacement des particules, transportant une certaine quantité d'énergie, représentant l'agitation thermique. Le problème conductif est régi par les conditions aux limites. Le principal avantage de ces méthodes vient du fait que les simulations sont indépendantes, ainsi les méthodes de Monte Carlo sont facilement parallélisables. L'objectif de cette thèse est la

modélisation statistique du transfert couplé conduction-rayonnement dans les milieux poreux statistiquement homogènes, anisotropes, composés d'une phase semi-transparente non diffusante et d'une phase transparente en tenant compte des effets de bord.

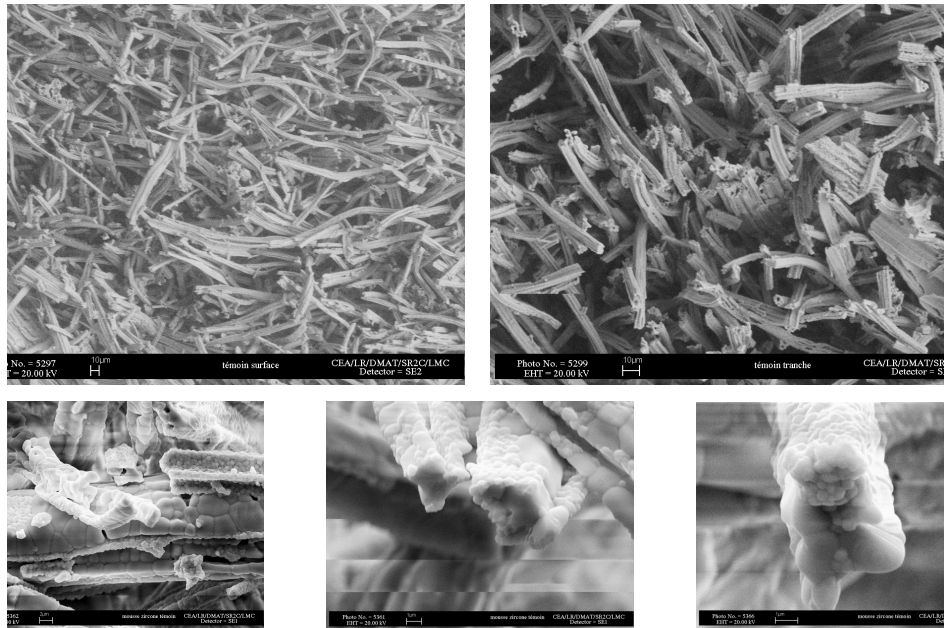


FIGURE 1 – Image MEB de la morphologie du Zircar HD (matériau commercial) à 70% de porosité. Les fibres sont constituées d'oxyde de zirconium.

La première partie portera sur l'étude des techniques existantes de modélisation du rayonnement thermique et de la conduction thermique au sein des matériaux poreux. On définira la notion de milieu Beerien et de milieu non Beerien. En fonction de la nature du milieu différentes méthodes de caractérisation radiative existent :

- Un milieu Beerien est caractérisé par des coefficients radiatifs qui peuvent être déterminés soit par une méthode analytique, soit par identification à l'aide de mesures expérimentales, soit encore par une méthode statistique. La méthode analytique est basée sur la résolution des équations de Maxwell connaissant les propriétés des phases qui constituent le matériau. L'identification paramétrique repose sur la détermination des coefficients radiatifs en minimisant l'écart quadratique entre les transmittances et les réflectances théoriques et expérimentales. La méthode statistique de Monte Carlo est basée sur la simulation de la propagation du rayonnement au sein du milieu d'étude. Les coefficients radiatifs

sont déterminés par le calcul du libre parcours moyen d’extinction et du nombre de rayons diffusés et absorbés par rapport au nombre total de rayons émis.

- Un milieu non Beerien est caractérisé par des fonctions statistiques radiatives qui n’ont pas un comportement exponentiel. L’effet du rayonnement n’est pas le même à l’optiquement mince et à l’optiquement épais, les coefficients radiatifs n’ont pas de sens. Ces fonctions statistiques sont déterminées à l’aide d’une méthode statistique de Monte Carlo. Elle se base sur la simulation du parcours d’un grand nombre de rayons depuis leur émission jusqu’à leur extinction. Le cumul des longueurs d’extinction, d’absorption et de diffusion permet d’obtenir ces fonctions radiatives.

Ensuite, les modèles de résolution du transfert radiatif dans les milieux Beeriens et non Beeriens seront présentés. Le modèle radiatif retenu devra prendre en compte l’anisotropie des propriétés du milieu, le caractère de semi-transparence des phases et les effets de bord. Finalement, les modèles de résolution du couplage avec la conduction seront présentés ainsi que les méthodes pour les résoudre.

La deuxième partie sera consacrée à la génération numérique du matériau fibreux d’étude. On décrira la procédure employée pour générer un empilement de cylindres homogène en porosité et représentatif d’une distribution des orientations des cylindres donnée. Une première étape de caractérisation radiative par une méthode de Monte Carlo permettra de déterminer la taille du Volume Élémentaire Représentatif (VER) : il s’agit de calculer la distance telle que la probabilité d’extinction soit supérieure à 99%. Cette démarche permettra d’obtenir numériquement une morphologie complexe.

La troisième partie traitera de la modélisation statistique du transfert radiatif seul par une méthode de Monte Carlo au sein du milieu poreux d’étude :

- Dans un premier temps, on verra que dans des milieux à géométrie complexe la loi de Beer-Lambert qui permet d’exprimer la transmittivité n’est pas toujours vérifiée. Dans ce cas, le matériau est caractérisé par des fonctions de probabilité cumulée associées à chaque phénomène radiatif en jeu (extinction, absorption et diffusion).

De plus, on montrera que dans un milieu Beerien il n’y a aucune corrélation statistique entre la distribution des directions d’incidence des rayons impactant les interfaces et la distribution des directions de leur émission ou de leur diffusion. Autrement dit, chaque rayon est tiré de manière indépendante sans connaissance de son passé : c’est une absence de mémoire.

Dans un milieu non Beerien, il y a corrélation statistique entre la distribution des directions d'incidence des rayons impactant les interfaces et la distribution des directions de leur émission ou de leur diffusion : c'est un effet mémoire. Chaque diffusion répartit l'énergie différemment et de ce fait les propriétés radiatives changent.

On caractérisera deux milieux composés de deux phases : un milieu fibreux composé de fibres opaques plongées dans une phase transparente et un milieu fibreux composé de fibres semi-transparentes non diffusantes plongées dans une phase opaque. Les outils de caractérisation qui seront présentés peuvent aussi être utilisés dans le cas d'un milieu composé de deux phases semi-transparentes.

- Dans un second temps, on étudiera le transfert radiatif dans un milieu fibreux anisotrope comportant des fibres semi-transparentes non diffusantes plongées dans une phase transparente. On montrera que les fibres sont une phase non Beerienne et la phase transparente une phase Beerienne. Dans ce cas, le matériau est caractérisé par des fonctions statistiques radiatives associées à chaque phénomène radiatif (extinction, absorption et diffusion).

Tout d'abord, les propriétés radiatives et les fonctions de phase associées à la réflexion et à la transmission dans chacune des phases seront présentées dans différentes directions.

On présentera ensuite un modèle radiatif prenant en compte l'anisotropie des propriétés radiatives, la nature éventuellement non Beerienne des phases, ainsi que les effets de bord. Le champ de puissance radiative calculé par ce modèle sera comparé à celui obtenu en faisant l'hypothèse du milieu optiquement épais.

Puis, on présentera des résultats de champ de température : un champ de température quand deux températures sont imposées aux extrémités, et un champ de température quand un flux et une température sont imposés.

Finalement, une étude paramétrique sera réalisée en faisant varier la porosité du matériau, le rapport d'indices optiques, et le coefficient d'absorption des fibres. On conclura sur l'efficacité d'isolation d'un tel matériau en considérant le rayonnement seul.

La quatrième partie traitera de la modélisation du transfert thermique couplé rayonnement-conduction par une méthode statistique de Monte Carlo au sein de milieux fibreux.

Une approche stochastique résolvant l'équation de l'énergie à l'échelle des pores a été développée par Vignoles [Vignoles (2016)], l'intérêt de la méthode est de ne nécessiter aucun maillage. Elle est basée sur la notion de marche aléatoire : un grand nombre de processus stochastiques de type mouvement Brownien

est généré, chaque "marcheur" portant une certaine quantité d'enthalpie. Ces porteurs se déplacent dans le matériau et le problème est régi par les conditions aux limites. La puissance radiative calculée par le modèle radiatif apporte de l'enthalpie au système de la même manière que le ferait un effet Joule, mais cette puissance dépendant de la température, une résolution itérative gère le problème du couplage : un champ de température initial permet d'obtenir un champ de puissance radiative, puis par la technique de marche aléatoire on calcule un nouveau champ de température. On calcule ensuite un second champ de puissance radiative et on continue le processus itératif.

La méthode converge quand le champ de température est stabilisé. Avec cette procédure de modélisation totalement stochastique, nous aurons mis en oeuvre un outil de simulation du transfert thermique couplé conduction-rayonnement au sein de matériaux multiphasiques statistiquement anisotropes, non Beeriens et de morphologie complexe, ne nécessitant aucun maillage, et tenant compte des effets de bord.

Première partie

Etat de l'art

Chapitre 1

Modélisation du transfert radiatif

Introduction

Le transfert radiatif est un mode de transfert de chaleur qui décrit l'interaction entre le rayonnement thermique et la matière. L'étude du rayonnement dans les matériaux est effectuée en faisant l'hypothèse que les autres modes de transfert sont négligeables, hypothèse d'autant plus acceptable que le niveau de température est plus élevé. Les moyens de chauffage de matériaux à de hautes températures sont technologiquement complexes et coûteux, et même dans ces conditions le couplage avec les autres modes de transfert est encore présent et peut avoir des effets non négligeables sur les résultats. Il est donc très difficile expérimentalement d'atteindre ces objectifs. La modélisation du rayonnement seul prévoit un saut de température aux bords du matériau, mais le couplage avec la conduction aura, entre autres, pour effet de "reconnecter" le champ de température au sein du matériau aux températures des parois. Ainsi le gradient de température, essentiel pour prévoir la tenue mécanique du matériau, dépendra fortement des effets conductifs même si ceux-ci sont très faibles devant le rayonnement. Avec ces arguments, on comprend que peu de données relatives à l'étude du rayonnement seul existent. Mais la modélisation des phénomènes radiatifs et leur simulation numérique sont possibles et sont plus faciles à mettre en oeuvre.

Dans un milieu où la loi de Beer-Lambert est vérifiée, c'est-à-dire où l'intensité décroît de façon exponentielle avec l'épaisseur optique, le transfert radiatif est modélisé au moyen de l'équation du transfert radiatif (Radiative Transfer Equation, ou RTE, en anglais) dont les paramètres d'entrée sont les coefficients radiatifs. Ces dix dernières années, des études menées par Taine et al. [[Tancrez and Taine \(2004\)](#), [Chahlaoui et al. \(2012\)](#), [Taine et al. \(2010\)](#), [Zarrouati et al. \(2015\)](#)] ont montré que dans certains milieux hétérogènes (milieux poreux

en particulier) cette loi n'est pas toujours valide, dans ce cas c'est l'équation du transfert radiatif généralisée (Generalised Radiative Transfer Equation, ou GRTE, en anglais) qui doit être utilisée dont les paramètres d'entrée sont des fonctions statistiques radiatives. Tout d'abord, on définira les coefficients radiatifs et les fonctions statistiques radiatives permettant de caractériser un milieu. Puis, on présentera les différentes méthodes afin de les déterminer. Finalement, la RTE et la GRTE seront présentées ainsi que les méthodes permettant de les résoudre.

1.1 Caractérisation radiative d'un milieu poreux

On caractérise un matériau par des propriétés associées aux phénomènes radiatifs régnant en son sein. Ces propriétés radiatives sont les coefficients d'atténuation des lois exponentielles lorsque la loi de Beer-Lambert est valide. Le phénomène d'extinction est caractérisé par le coefficient β_ν , l'absorption par le coefficient κ_ν , la diffusion par le coefficient σ_ν et par la fonction de phase p_ν décrivant la distribution des angles diffusés. Quand la loi de Beer n'est pas valide ces mêmes phénomènes sont caractérisés par des fonctions statistiques radiatives : $G_{\nu ext}$ pour l'extinction, $P_{\nu a}$ pour l'absorption, et $P_{\nu sc}$ pour la diffusion.

1.1.1 Généralités

1.1.1.1 Les fonctions statistiques radiatives

Extinction

Le phénomène d'extinction dans un milieu homogénéisé est caractérisé par une fonction de répartition d'extinction $G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ qui est la probabilité qu'un rayonnement émis en un point $M(s)$ dans la direction \mathbf{u} soit éteint dans l'intervalle $[s, s']$. Elle peut être aussi définie via la notion de transmittivité $\tau_\nu(\mathbf{u}, s' - s)$, par : $1 - \tau_\nu(\mathbf{u}, s' - s)$.

$$G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s) = \frac{1}{V \delta\Omega(\mathbf{u})} \int_0^{s' - s} \int_V \int_{\delta\Omega(\mathbf{u})} \delta \left[v - (s_0(\mathbf{u}', \mathbf{r}) - s(\mathbf{u}', \mathbf{r})) \right] d\Omega(\mathbf{u}') d\mathbf{r} dv \quad (1.1)$$

La fonction $G_{\nu ext}$ est associée aux rayonnements issus de tous les points $M(s(\mathbf{r}))$ du volume V , partant dans toutes les directions \mathbf{u}' de l'angle solide élémentaire $\delta\Omega(\mathbf{u})$ autour de la direction \mathbf{u} , et éteints aux points $E(s_0(\mathbf{r}))$.

Dans le cas d'un milieu composé d'une phase opaque et d'une phase transparente, l'extinction se produit quand le rayon heurte une interface. $G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ ne dépend que de la géométrie du milieu.

Dans le cas où au moins une phase est semi-transparente, l'extinction se produit quand le rayon est absorbé ou diffusé dans le volume d'une de ces phases ou bien quand il heurte une interface. $G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ dépend à la fois de la géométrie du milieu et des coefficients d'absorption κ_{ν} et de diffusion σ_{ν} .

Quand le milieu est Beerien la fonction $G_{\nu ext}$ est égale à :

$$G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s) = 1 - \exp \left[-\beta_{\nu}(\mathbf{u}) (s' - s) \right] \quad (1.2)$$

où $\beta_{\nu}(\mathbf{u})$ est le coefficient d'extinction du milieu.

Absorption

La probabilité cumulée d'absorption $P_{\nu a}(\mathbf{u}, s' - s)$ est la probabilité qu'un rayonnement émis en un point $M(s)$ dans la direction \mathbf{u} soit absorbé dans l'intervalle $[s, s']$.

$$P_{\nu a}(\mathbf{u}, s' - s) = \frac{1}{V \delta\Omega(\mathbf{u})} \int_0^{s' - s} \int_V \int_{\delta\Omega(\mathbf{u})} A_{\nu}(\mathbf{u}', v) \delta \left[v - (s_0(\mathbf{u}', \mathbf{r}) - s(\mathbf{u}', \mathbf{r})) \right] d\Omega(\mathbf{u}') d\mathbf{r} dv \quad (1.3)$$

Dans le cas d'un milieu composé d'une phase opaque et d'une phase transparente, le rayonnement est absorbé à l'interface de la phase opaque. $A_{\nu}(\mathbf{u}', v)$ désigne alors l'absorptivité de l'interface, laquelle peut dépendre de la fréquence du rayonnement.

Dans le cas où au moins une phase est semi-transparente, l'absorption peut aussi être volumique. Alors $A_{\nu}(\mathbf{u}', v)$ est égal à la part d'extinction absorbée d'un rayon ayant parcouru la distance v dans la direction \mathbf{u}' .

Quand le milieu est Beerien la fonction $P_{\nu a}$ est égale à :

$$P_{\nu a}(\mathbf{u}, s' - s) = \frac{\kappa_{\nu}(\mathbf{u})}{\beta_{\nu}(\mathbf{u})} \left(1 - \exp \left[-\beta_{\nu}(\mathbf{u}) (s' - s) \right] \right) \quad (1.4)$$

où $\kappa_{\nu}(\mathbf{u})$ est le coefficient d'absorption du milieu.

Diffusion

La probabilité cumulée de diffusion $P_{\nu sc}(\mathbf{u}, s' - s)$ est la probabilité qu'un rayonnement émis en un point $M(s)$ dans la direction \mathbf{u} soit diffusé dans l'intervalle $[s, s']$.

$$P_{\nu sc}(\mathbf{u}, s' - s) = \frac{1}{V \delta\Omega(\mathbf{u})} \int_0^{s' - s} \int_V \int_{\delta\Omega(\mathbf{u})} R_{\nu}(\mathbf{u}', v) \delta[v - (s_0(\mathbf{u}', \mathbf{r}) - s(\mathbf{u}', \mathbf{r}))] d\Omega(\mathbf{u}') d\mathbf{r} dv \quad (1.5)$$

Dans le cas d'un milieu composé d'une phase opaque et d'une phase transparente, le rayonnement ne peut être diffusé que par réflexion à l'interface. $R_{\nu}(\mathbf{u}', v)$ est alors la réflectivité directionnelle-hémisphérique de l'interface $\rho'_{\nu}(\mathbf{u}', v)$, laquelle peut dépendre de la fréquence du rayonnement.

Dans le cas où au moins une phase est semi-transparente, la diffusion peut être volumique et $R_{\nu}(\mathbf{u}', v)$ est l'albédo de la phase semi-transparente $\omega_{\nu}(\mathbf{u}', v)$. En présence de deux phases semi-transparentes ou bien d'une semi-transparente et d'une autre transparente, la diffusion peut également résulter de la transmission du rayonnement d'une phase à l'autre, $R_{\nu}(\mathbf{u}', v)$ peut aussi être la transmittivité directionnelle-hémisphérique $\tau'_{\nu}(\mathbf{u}', v)$ de l'interface.

Quand le milieu est Beerien la fonction $P_{\nu sc}$ est égale à :

$$P_{\nu sc}(\mathbf{u}, s' - s) = \frac{\sigma_{\nu}(\mathbf{u})}{\beta_{\nu}(\mathbf{u})} \left(1 - \exp \left[-\beta_{\nu}(\mathbf{u}) (s' - s) \right] \right) \quad (1.6)$$

où $\sigma_{\nu}(\mathbf{u})$ est le coefficient de diffusion du milieu.

Relations entre ces fonctions statistiques

Par définition, l'énergie radiative éteinte est la somme de la part absorbée et de la part diffusée. En termes de relations entre les fonctions statistiques, cela se traduit par les égalités suivantes :

- Dans le cas d'une phase opaque et d'une phase transparente, le rayonnement est absorbé ou diffusé par réflexion aux interfaces :

$$G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s) = P_{\nu a}^S(\mathbf{u}, s' - s) + P_{\nu sc}^r(\mathbf{u}, s' - s)$$

où l'exposant S signifie que les phénomènes radiatifs sont surfaciques et l'exposant r désigne la diffusion par réflexion.

□ Dans le cas d'une phase semi-transparente (ST) et d'une phase transparente (T), le rayonnement peut être absorbé ou diffusé dans le volume de la phase semi-transparente et diffusé par réflexion ou transmission aux interfaces :

$$G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s) = P_{\nu sc}^{Sr}(\mathbf{u}, s' - s) + P_{\nu sc}^{St}(\mathbf{u}, s' - s)$$

dans la phase transparente. (1.7)

$$G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s) = P_{\nu a}(\mathbf{u}, s' - s) + P_{\nu sc}(\mathbf{u}, s' - s) + P_{\nu sc}^{Sr}(\mathbf{u}, s' - s) + P_{\nu sc}^{St}(\mathbf{u}, s' - s)$$

dans la phase semi-transparente. (1.8)

L'exposant t désigne la diffusion par transmission.

□ Dans le cas de deux phases semi-transparentes, le rayonnement peut être absorbé ou diffusé dans le volume des deux phases semi-transparentes mais aussi diffusé par réflexion ou transmission aux interfaces :

$$G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s) = P_{\nu a}(\mathbf{u}, s' - s) + P_{\nu sc}(\mathbf{u}, s' - s) + P_{\nu sc}^{Sr}(\mathbf{u}, s' - s) + P_{\nu sc}^{St}(\mathbf{u}, s' - s)$$

dans chacune des deux phases. (1.9)

1.1.1.2 La méthode RDFI

La méthode RDFI (Radiative Distribution Function Identification), développée par Tancrez et al. [Tancrez and Taine (2004)] pour un milieu isotrope puis reprise par Zeghondy et al. [Zeghondy et al. (2006a)] pour un milieu anisotrope, permet de trouver le meilleur jeu de paramètres tel que les fonctions statistiques radiatives $G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s)$, $P_{\nu a}(\mathbf{u}, s' - s)$ et $P_{\nu sc}(\mathbf{u}, s' - s)$ d'un milieu a priori non Beerien approchent une évolution exponentielle. Les paramètres de ces lois sont les coefficients radiatifs $\beta_{\nu}(\mathbf{u})$, $\kappa_{\nu}(\mathbf{u})$ et $\sigma_{\nu}(\mathbf{u})$ du milieu Beerien équivalent.

Le calcul de ces coefficients permet également d'évaluer un critère de validité de la loi de Beer-Lambert. Celui-ci consiste à comparer en termes d'écart quadratique la fonction radiative $G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ avec son équivalent considérant le milieu Beerien : $1 - \exp[-\beta_{\nu}(\mathbf{u})(s' - s)]$. Ainsi, la méthode RDFI donne l'erreur associée à la caractérisation radiative du milieu poreux par les coefficients radiatifs :

$$\varepsilon_{RDFI}(\mathbf{u}) = \sqrt{\frac{\sum_0^{N_s} \left(G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s) - (1 - \exp[-\beta_{\nu}(\mathbf{u})(s' - s)]) \right)^2}{\sum_0^{N_s} G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s)^2}} \quad (1.10)$$

Typiquement, on considère l'approximation Beerienne valide quand $\varepsilon_{RDFI}(\mathbf{u}) < 4 \cdot 10^{-2}$. Si le milieu est composé d'une seule phase, le coefficient d'extinction calculé par la méthode RDFI est le coefficient d'extinction réel. Si le milieu est composé de plusieurs phases, le coefficient identifié est celui de la phase semi-transparente équivalente au milieu homogénéisé. Le problème radiatif est ensuite résolu grâce à la RTE.

1.1.1.3 La fonction de phase

Par définition, la fonction de phase p_ν est la fonction de distribution des directions diffusés lorsque le phénomène de diffusion se produit. Elle caractérise la redistribution directionnelle de l'énergie radiative après chaque diffusion du rayonnement dans le matériau. Elle est déterminante dans le calcul du transfert mais très difficile à exprimer mathématiquement. Elle dépend de la forme géométrique des parois diffusantes, de leur rugosité, du contraste d'indice optique si deux phases sont en présence et donc aussi de la longueur d'onde. Le principe de conservation de l'énergie radiative impose à la fonction de phase une relation de normalisation :

$$\int_{4\pi} \frac{p_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)}{4\pi} d\Omega_1 = 1 \quad (1.11)$$

De plus, la propagation du rayonnement par diffusion doit vérifier le principe de retour inverse de la lumière. Considérons un rayon partant d'un émetteur M suivant la direction \mathbf{u}_1 dans l'angle solide $d\Omega_1$, diffusé suivant la direction \mathbf{u} dans l'angle solide $d\Omega$ et arrivant à un récepteur E . Si on inverse l'émetteur et le récepteur, le rayonnement doit suivre le même trajet mais dans le sens opposé :

$$\sigma_\nu(\mathbf{u}_1) \frac{p_\nu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} d\Omega_1 = \sigma_\nu(-\mathbf{u}) \frac{p_\nu(-\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1)}{4\pi} d\Omega \quad (1.12)$$

En intégrant les deux membres de l'équation (1.12) sur 4π stéradian, on obtient une seconde relation de contrainte. Le calcul est détaillé dans l'annexe A.

$$\int_{4\pi} \sigma_\nu(\mathbf{u}_1) \frac{p_\nu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} d\Omega_1 = \sigma_\nu(\mathbf{u}) \quad (1.13)$$

Pour arriver à ce résultat (1.13), on a besoin de l'égalité $\sigma_\nu(-\mathbf{u}) = \sigma_\nu(\mathbf{u})$,

laquelle est démontrée à l'annexe A. Si le milieu est isotrope, la deuxième relation de contrainte s'écrit comme suit :

$$\int_{4\pi} \frac{p_\nu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} d\Omega_1 = 1 \quad (1.14)$$

Lee [Lee (1989)] a proposé une expression générale de la fonction de phase pour un cylindre infini dont le diamètre est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde. Il a ensuite généralisé cette expression aux milieux fibreux en se basant sur la théorie de la diffusion indépendante, c'est-à-dire qu'il a moyenné l'expression sur toutes les orientations des cylindres composant le milieu en négligeant l'interaction entre eux. Tancrez et Taine [Tancrez and Taine (2004)] puis Zeghondy [Zeghondy et al. (2006a)] proposent une expression de la fonction de phase de réflexion pour des milieux poreux de type OT (comportant une phase opaque et une phase transparente) isotropes et anisotropes quand la taille caractéristique des pores est plus grande que la longueur d'onde (hypothèse de l'optique géométrique) :

$$\frac{p_\nu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} d\Omega_1 = \frac{1/V \int_{V/\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\leq 0} \rho''_\nu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, \mathbf{n}) (-\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{r} d\Omega_1}{\int_{4\pi} 1/V \int_{V/\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\leq 0} \rho''_\nu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, \mathbf{n}) (-\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{r} d\Omega_1} \quad (1.15)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal à l'interface séparant les deux phases au sein du milieu poreux et $\rho''_\nu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, \mathbf{n})$ est la réflectivité bidirectionnelle de l'interface.

Pour des raisons de commodité, une très grande majorité des études utilise la fonction de phase de Henyey-Greenstein, qui dépend uniquement de l'angle de diffusion ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1$) et du paramètre d'asymétrie g . Kamdem et Baillis [Kamdem Tagne and Baillis (2005), Kamdem Tagne and Baillis (2010)] ont proposé une forme généralisée de la fonction de phase de Henyey-Greenstein qui peut être appliquée à un milieu anisotrope. Cette fonction de phase s'écrit comme suit :

$$p_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1) = \frac{1 - g(\mathbf{u})^2}{(1 + g(\mathbf{u})^2 - 2g(\mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1))^{3/2}} \quad (1.16)$$

où le facteur d'asymétrie $g(\mathbf{u})$, défini ci-dessous, est calculé dans chaque direction de l'espace.

$$g(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{4\pi} p_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1) d\Omega_1 \quad (1.17)$$

1.1.2 Méthodes de détermination des propriétés radiatives

1.1.2.1 Expressions analytiques

Il n'est pas toujours facile de connaître la morphologie précise d'un matériau, notamment quand la taille des pores est petite et la précision des techniques de tomographie n'est pas suffisante. Dans ce cas certains auteurs approximent la morphologie par des formes connues : par exemple un empilement de sphères pour certaines mousses, un empilement de cylindres pour un feutre, un assemblage de dodécaèdres réguliers connectés par des bâtonnets pour une mousse de polyuréthane. On peut, à l'aide de la théorie de Mie et de l'hypothèse de la diffusion indépendante, calculer les coefficients radiatifs pour certaines géométries spécifiques [Taine et al. (2014)].

Théorie de Mie

Considérons une onde plane monochromatique polarisée se propageant dans une phase transparente où se trouve une particule absorbante ayant une forme simple (une sphère ou un cylindre infini). La théorie de Mie consiste à déterminer l'interaction entre l'onde et la particule.

Cet éclairage incident $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$ produit dans la phase transparente un champ électromagnétique diffusé $\{\mathbf{E}_{sc}, \mathbf{H}_{sc}\}$ qui se superpose au champ incident, de sorte que le champ total dans la phase transparente $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ a pour expression :

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_{sc} \quad (1.18)$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_{sc} \quad (1.19)$$

L'éclairage incident produit dans la particule un champ électromagnétique interne $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$.

Les champs $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ et $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ sont régis par les équations de Maxwell et par les équations de continuité à l'interface particule-phase transparente :

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (1.20)$$

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (1.21)$$

où \mathbf{n} est la normale de l'interface particule-phase transparente.

Dans ce cas particulier, les équations de Maxwell peuvent être résolues analytiquement : on obtient ainsi les expressions analytiques des champs $\{\mathbf{E}_{sc}, \mathbf{H}_{sc}\}$ et $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$. On peut ensuite calculer les puissances électromagnétiques absorbée P_a (en W) et diffusée P_{sc} (en W) par la particule. Finalement, en introduisant le flux électromagnétique surfacique q_i (en W/m^2) associé à l'onde incidente, on définit des sections efficaces d'interaction de la particule avec le rayonnement

incident. S_a est la section efficace associée à l'absorption et S_{sc} est la section efficace associée à la diffusion. Elles sont exprimées par :

$$S_a = \frac{P_a}{q_i} \quad (1.22)$$

$$S_{sc} = \frac{P_{sc}}{q_i} \quad (1.23)$$

La diffusion indépendante

Pour modéliser les propriétés radiatives d'un milieu composé d'une dispersion de sphères ou de cylindres, on fait souvent l'hypothèse de la diffusion indépendante. Elle consiste à supposer que les éléments interagissant avec le rayonnement sont suffisamment éloignés les uns des autres pour qu'un rayonnement diffusé par un élément n'influe pas le rayonnement diffusé par un autre élément. Autrement dit, le rayonnement interagit avec les éléments de manière indépendante.

Dans ce cas, les propriétés radiatives s'obtiennent par sommation des sections efficaces d'interaction des éléments constituant le milieu. Elles s'obtiennent en intégrant les coefficients calculés précédemment sur toutes les formes. La taille des éléments a peut varier, leur direction d'orientation \mathbf{u} également. Ainsi, connaissant la fonction de distribution de la taille des éléments $f(a)$ et la fonction de distribution de l'angle d'orientation des éléments $g(\mathbf{u})$ du milieu étudié, on détermine les propriétés radiatives par les expressions suivantes :

$$\kappa_\nu = \frac{1}{V} \int_{4\pi} \int_0^\infty S_a(a, \mathbf{u}) f(a) g(\mathbf{u}) da d\Omega \quad (1.24)$$

$$\sigma_\nu = \frac{1}{V} \int_{4\pi} \int_0^\infty S_{sc}(a, \mathbf{u}) f(a) g(\mathbf{u}) da d\Omega \quad (1.25)$$

$$\beta_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu \quad (1.26)$$

Mais cette méthode a des faiblesses : une erreur est faite sur le calcul des coefficients radiatifs du matériau réel en supposant que sa morphologie peut être décomposée en des formes géométriques simples. De plus, pour que cette méthode soit applicable il faut que la distance moyenne entre deux éléments soit grande devant la longueur d'onde, ce qui limite les cas d'étude. Enfin, cette méthode ne permet d'obtenir que des coefficients radiatifs isotropes. On peut conclure que cette méthode ne permet que d'accéder à une approximation des coefficients radiatifs pour des matériaux de morphologie simple.

1.1.2.2 Identification paramétrique

La méthode de caractérisation basée sur la théorie de Mie nécessite la connaissance des propriétés optiques des constituants qui ne sont pas toujours disponibles. Une alternative est d'identifier les coefficients radiatifs d'un milieu homogénéisé supposé Beerien, représentatif du matériau poreux étudié. Le principe de cette méthode se base sur la minimisation de l'écart quadratique entre le calcul théorique de la transmittance et de la réflectance hémisphérique ou bidirectionnelle et des données expérimentales.

La réflectance et la transmittance théoriques sont déterminées par résolution de la RTE de manière déterministe à l'aide de méthodes classiques (typiquement par la méthode des ordonnées discrètes). Les conditions aux limites sont représentatives des conditions expérimentales. Ensuite, le résultat est comparé à des mesures expérimentales de réflectance et de transmittance. Pour cela on définit une fonction de coût J qui représente l'écart quadratique entre les grandeurs théoriques et expérimentales. Finalement, on ajuste les paramètres radiatifs d'entrée du modèle pour minimiser cette fonction de coût à l'aide de techniques inverses [Hendricks and Howell (1994), Matthews et al. (1984), Dubot et al. (2016)].

Cette méthode postule le comportement Beerien du matériau d'étude, c'est-à-dire que l'on recherche les propriétés radiatives isotropes et uniformes qui doivent suivre des évolutions prédéfinies : des lois exponentielles pour les fonctions statistiques, une loi de Henyey-Greenstein ou une loi isotrope pour la fonction de phase. Cette méthode n'est pas adaptée à la caractérisation des milieux anisotropes et non homogènes. Des études portant sur l'influence de la discrétisation de la RTE, notamment sur les intégrales de diffusion à l'aide de la méthode des ordonnées discrètes, montrent que la conservation de l'énergie et du facteur d'asymétrie ne sont pas toujours respectés [Boulet et al. (2007)]. Pour pallier à ce problème, certains auteurs renormalisent la fonction de phase [Boulet et al. (2007), Hunter and Guo (2015)], d'autres y intègrent des facteurs de correction ce qui modifie la forme de celle-ci [Mishchenko et al. (1999)].

De plus, la précision sur ces propriétés dépend des incertitudes expérimentales, des techniques d'identification et du modèle de transfert radiatif choisi. Enfin, plus le nombre de paramètres à estimer est grand plus la convergence de la méthode inverse est difficile à obtenir.

1.1.2.3 Méthodes de Monte Carlo appliquées aux milieux Beeriens

Suite aux récentes améliorations de la précision et de la résolution des techniques de tomographie X et γ , la morphologie des matériaux est beaucoup mieux connue. De plus, avec l'amélioration des performances de calcul, les méthodes de Monte Carlo ont connu un grand regain d'intérêt. Elles reposent sur la simulation des trajets des rayons au sein du milieu en supposant la validité de l'optique géométrique.

L'optique géométrique

L'optique géométrique se base sur deux principes : i) le principe de Fermat : "La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la différence de marche associée au parcours soit minimale" ; ii) le principe de retour inverse des rayons lumineux : le trajet lumineux entre un point d'émission M et un point d'extinction E est le même que celui du point E au point M . L'optique géométrique est valide quand les objets qui interagissent avec les rayons lumineux ont des tailles caractéristiques plus grandes que la longueur d'onde.

A l'aide d'une loi de réflexion aux interfaces (par exemple la loi de Fresnel) on peut facilement suivre des rayons lumineux émis en volume, réfléchis ou transmis à une interface séparant deux phases. C'est la base des méthodes de Monte Carlo d'identification des propriétés radiatives décrites par la suite.

Deux principales techniques de Monte Carlo appliquées aux milieux Beeriens existent.

Celle proposée par Coquard et al. [[Coquard and Baillis \(2004\)](#)] peut être utilisée pour prédire les propriétés radiatives d'un milieu Beerien homogène et isotrope comportant une seule phase de propagation (typiquement pour un matériau composé d'une phase opaque et d'une autre transparente). Elle a été à l'origine développée pour des mousses où les pores étaient assimilés à des sphères réparties aléatoirement dans un volume. Le principe de la méthode consiste à simuler le cheminement d'un grand nombre de rayons issus des interfaces opaques jusqu'à leur absorption dans le milieu ou leur diffusion. Les rayons partent de points tirés aléatoirement au sein de la phase transparente et leur direction de propagation est tirée aléatoirement, ces rayons sont suivis jusqu'à qu'ils sortent d'une sphère de calcul centrée sur les points d'émission. A la limite des grands nombres, la méthode calcule la proportion des rayons transmis T c'est-à-dire ceux n'ayant pas été absorbé ni diffusé, la proportion des rayons diffusés c'est-à-dire ceux ayant subi une ou plusieurs réflexions avec les interfaces opaques, et la distribution des directions réfléchies par les interfaces. Finalement, le coefficient d'extinction est l'opposé du rapport entre le logarithme de la proportion des rayons transmis et le rayon de la sphère de calcul, c'est-à-dire $\beta = -\ln [T]/R_{sphere}$, l'albédo est déterminé en pondérant le coefficient d'extinction par la proportion de rayons diffusés et la fonction de phase est la distribution des directions diffusées. La sphère de calcul est un paramètre essentiel de la méthode et sa taille ne doit pas influencer les résultats. Plus elle est grande, meilleure sera la précision sur les résultats, mais plus le temps de calcul sera long ; si elle est trop petite, il y a un risque qu'elle influence le résultat final. Un compromis doit être fait, et des grandeurs caractéristiques de la taille de cette sphère ont été données pour des mousses à différentes porosités.

La deuxième méthode de Monte Carlo, développée par Rousseau et al. [Rousseau et al. (2007), Rousseau et al. (2007)], est basée sur la simulation directe de la propagation du rayonnement au sein d'un échantillon de verre de silice fondue supposée opaque contenant des bulles d'air transparentes. La méthode se place dans les mêmes conditions que l'expérience permettant de déterminer la réflectance et la transmittance. Le principe consiste à simuler le cheminement d'un grand nombre de rayons lancés depuis la face avant du volume d'étude. En le parcourant les rayons vont subir les phénomènes d'absorption et de réflexion : certains rayons vont être absorbés, d'autres vont revenir sur la face avant et enfin les derniers vont traverser le volume jusqu'à arriver sur la face arrière. La réflectance R_ν est calculée par cumul de l'énergie revenant sur la face avant et la transmittance T_ν par cumul de l'énergie sortant par la face arrière. Finalement, l'émittance E_ν du volume d'étude est déduite par la loi de Kirchhoff : $E_\nu = 1 - R_\nu - T_\nu$.

Les résultats du modèle peuvent être comparés aux données d'émittance obtenues expérimentalement sur le même échantillon. Globalement, il y a un assez bon accord entre les résultats du modèle et les données expérimentales, mais on note des écarts dans des zones précises de longueur d'onde. En effet, dans certaines bandes de longueur d'onde (de 2 à 3.33 μm) la silice n'est plus opaque mais semi-transparente absorbante, un processus de lancer de rayons dans les deux phases doit alors être développé.

1.1.2.4 Méthode de Monte Carlo appliquée aux milieux non Beeriens

Une autre méthode de Monte Carlo, introduite par Tancrez et Taine [Tancrez and Taine (2004)], prédit les propriétés radiatives d'un milieu homogène et isotrope et comportant une phase de propagation (opaque/transparent) pouvant être de nature non Beerienne. Dans ce cas l'extinction, l'absorption et la diffusion sont caractérisées par les fonctions de distribution cumulée $G_{\nu ext}$, $P_{\nu a}$ et $P_{\nu sc}$ introduites dans le paragraphe 1.1.1.1. Comme précédemment un grand nombre de rayons est tiré aléatoirement dans une zone de calcul du milieu réel, simulant l'émission du milieu. En supposant la validité de l'optique géométrique, on suit ensuite leur cheminement jusqu'à l'extinction qui s'avère être l'impact avec les interfaces rencontrées. Les fonctions statistiques sont déterminées en cumulant ces longueurs d'impact, et la fonction de phase est déterminée en comptabilisant les directions de diffusion. La zone de calcul est un parallélépipède qui a exactement le même rôle que la sphère de calcul de Coquard et al. [Coquard and Baillis (2004)] et a donc la même influence sur la précision des résultats et sur le temps de calcul. Ce parallélépipède de calcul est composé d'un cube d'émission de plus petite taille d'où les rayons sont tirés et d'un parallélépipède d'extinction construit tel que $G_{\nu ext} > 99\%$. En d'autres termes, la distance entre l'extrémité du cube d'émission et l'extrémité du parallélépi-

pède d'extinction est la distance sur laquelle les rayons ont une probabilité de 99% d'être éteints (voir figure 1.1). Dans cette méthode, les rayons émis doivent être éteints dans la zone de calcul tandis que dans la méthode de Coquard certains rayons émis peuvent en sortir pour être comptabilisés en tant que rayons diffusés. Globalement, dans ces deux méthodes les zones de calcul sont approximativement de même taille et les temps de calcul sont proches.

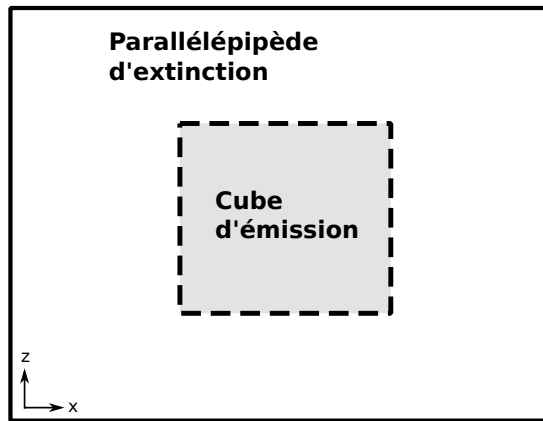


FIGURE 1.1 – *Domaine de calcul de la méthode de Monte Carlo appliquée aux milieux non Beeriens.*

Une étude de Baillis et al. [Cunsolo et al. (2016)] compare les coefficients d'extinction déterminés par la méthode de Coquard et par celle de Taine dans un milieu Beerien homogène et isotrope, typiquement un milieu où des sphères opaques sont distribuées aléatoirement dans un volume donné. Les deux méthodes donnent des résultats très proches.

De récentes améliorations de la méthode de Monte Carlo appliquée aux milieux non Beeriens permettent de traiter les milieux anisotropes optiquement épais [Chahlafi et al. (2012)], statistiquement non homogènes [Zarrouati et al. (2015)] et de prendre en compte les effets de bord [Gomart and Taine (2011)].

L'avantage des méthodes de Monte Carlo est qu'elles se basent sur la morphologie réelle du matériau, la caractérisation radiative est donc très précise. Néanmoins, elles nécessitent des moyens de calcul beaucoup plus importants que la caractérisation par la théorie de Mie et l'identification paramétrique.

1.2 Modélisation du transfert radiatif

Dans la plupart des cas un matériau de morphologie complexe est supposé équivalent à un milieu homogène semi-transparent Beerien dont les propriétés radiatives sont déterminées selon une des méthodes décrites aux paragraphes

1.1.2.1 à 1.1.2.3. Dans ce cas les approches classiques de résolution de la RTE sont utilisées et seront présentées dans les paragraphes qui suivent. Quand le milieu est non Beerien les propriétés radiatives sont caractérisées par les fonctions statistiques radiatives $G_{\nu ext}$, $P_{\nu a}$ et $P_{\nu sc}$ déterminées par la méthode de Monte Carlo décrite dans le paragraphe 1.1.2.4. Ces fonctions sont les paramètres d'entrée de la GRTE (Generalised Radiative Transfer Equation), équation que l'on résout à l'aide d'une méthode de Monte Carlo.

1.2.1 L'Equation du Transfert Radiatif Généralisée (GRTE)

Quand le milieu comporte une phase de propagation non Beerienne on la caractérise par les fonctions de distribution cumulée $G_{\nu ext}$, $P_{\nu a}$, $P_{\nu sc}$ et la fonction de phase p_{ν} . Taine et al. [Taine et al. (2010)] ont introduit l'équation du transfert radiatif généralisée (GRTE) où ces fonctions de distribution sont les paramètres d'entrée du modèle. A l'origine elle a été développée pour résoudre le problème radiatif dans des mousses possédant une phase opaque et une phase transparente [Taine et al. (2010)]. Elle a été par la suite améliorée pour prendre en compte les effets de bords [Gomart and Taine (2011)] et la non-homogénéité du matériau [Zarrouati et al. (2015)].

La GRTE exprime la variation de la luminance au point $M'(s')$ se trouvant dans un petit volume dV de la phase de propagation dans la direction \mathbf{u} . On l'obtient en faisant le bilan d'énergie radiative dans dV . L'émission et le gain par diffusion vont contribuer au renforcement de la luminance tandis que l'absorption et la perte par diffusion vont contribuer à son atténuation. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{dI_{\nu}}{ds'}(\mathbf{u}, s') &= \kappa_{\nu} n_{\nu}^2 I_{\nu}^{\circ}[T(s')] & (1.27) \\
&- \int_{s_w}^{s'} S_{\nu}(\mathbf{u}, s) \frac{dG_{\nu ext}}{ds'}(\mathbf{u}, s' - s) ds \\
&- I_{\nu}^w(\mathbf{u}, s_w) \frac{dG_{\nu ext}}{ds'}(\mathbf{u}, s' - s_w) \\
&+ \int_{4\pi} \int_{s_w}^{s'} S_{\nu}(\mathbf{u}_1, s) \frac{dP_{\nu sc}}{ds'}(\mathbf{u}_1, s' - s) \frac{p_{\nu}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, s' - s)}{4\pi} ds d\Omega_1 \\
&+ \int_{4\pi} I_{\nu}^w(\mathbf{u}_1, s_w) \frac{dP_{\nu sc}}{ds'}(\mathbf{u}_1, s' - s_w) \frac{p_{\nu}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, s' - s_w)}{4\pi} d\Omega_1
\end{aligned}$$

Les cinq termes du second membre expriment les différents mécanismes d'interaction entre le rayonnement et la matière :

- Le premier terme est le terme d'émission. A l'Equilibre Thermodynamique Local (ETL) on démontre que tout point d'un corps de tem-

pérature locale T émet un rayonnement isotrope appelé rayonnement d'équilibre. La luminance caractérisant ce rayonnement ne dépend que de la température et de la fréquence ν et s'exprime par la loi de Planck :

$$I_\nu^\circ(T) = 2 h \nu^3 c_0^{-2} \left[\exp\left(\frac{h \nu}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1} \quad (1.28)$$

où h et k_B sont les constantes de Planck et de Boltzmann et c_0 est la célérité du rayonnement dans le vide.

D'après la seconde loi de Kirchhoff, à l'équilibre thermique, afin de conserver l'énergie radiative, un corps qui absorbe un rayonnement va restituer cette énergie sous forme d'émission dans la même direction et à la même fréquence. Finalement, la puissance émise d'un milieu d'indice n_ν vaut : $\kappa_\nu n_\nu^2 I_\nu^\circ[T(s')] d\Omega d\nu$.

- Le second terme est le terme d'extinction de l'énergie radiative en provenance du milieu. Il exprime l'atténuation par absorption et par diffusion d'un terme source $S_\nu(\mathbf{u}, s)$ émis ou diffusé en chaque point $M(s)$ le long du trajet entre le bord du domaine de calcul s_w et le point courant $M'(s')$ dans la direction \mathbf{u} . Si $G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ est la probabilité qu'un rayon issu du point $M(s)$ soit éteint avant d'avoir parcouru la distance $s' - s$ alors $\frac{dG_{\nu ext}}{ds'}(\mathbf{u}, s' - s)$ est la probabilité qu'un rayon issu du point $M(s)$ soit transmis de s à s' puis éteint dans l'intervalle $[s', s' + ds']$.
- Le troisième terme correspond à l'extinction de l'énergie venant des bords du domaine de calcul. La luminance partant du bord d'abscisse s_w dans la direction \mathbf{u} est notée $I_\nu^w(\mathbf{u}, s_w)$, et sa part éteinte dans l'intervalle $[s', s' + ds']$ est donnée par $\frac{dG_{\nu ext}}{ds'}(\mathbf{u}, s' - s_w)$.
- Le quatrième terme est le terme d'augmentation de la luminance par diffusion. De la même façon que pour l'extinction, la probabilité qu'un rayon émis ou diffusé en un point $M(s)$ dans l'angle solide élémentaire $d\Omega_1$ autour de la direction \mathbf{u}_1 soit transmis entre s et s' puis diffusé dans l'intervalle $[s', s' + ds']$ dans la direction \mathbf{u} est donnée par $\frac{dP_{\nu sc}}{ds'}(\mathbf{u}_1, s' - s) \frac{p_\nu}{4\pi}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, s' - s) d\Omega_1$. Ainsi l'énergie apportée par diffusion dans la direction \mathbf{u} est la somme des termes sources $S_\nu(\mathbf{u}_1, s)$ issus de toutes les directions incidentes \mathbf{u}_1 en tous les points $M(s)$ situés entre le bord du milieu d'abscisse s_w et le point courant d'abscisse s' .
- Le cinquième terme correspond à l'augmentation de la luminance par la diffusion de l'énergie venant des bords du domaine.

L'équation (1.27) est générale pour résoudre le transfert radiatif au sein d'un milieu possédant une seule phase de propagation. Dans le cadre de cette thèse on proposera d'étendre sa formulation au cas de matériaux possédant plusieurs phases de propagation afin d'étendre l'étude pour finalement traiter le problème radiatif au sein d'un matériau comportant une phase semi-transparente et une phase transparente.

De plus, par un bilan de toutes les contributions énergétiques dans une direction donnée, la luminance en un point $M(s)$ dans la direction \mathbf{u} s'écrit :

$$\begin{aligned} I_\nu(\mathbf{u}, s') &= \int_{s_w}^{s'} S_\nu(\mathbf{u}, s) \left(1 - G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s)\right) ds \\ &+ I_\nu^w(\mathbf{u}, s_w) \left(1 - G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s_w)\right) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Cette équation est l'écriture intégrale de la GRTE.

1.2.2 L'Equation du Transfert Radiatif (RTE)

Pour poser l'équation du problème du transfert radiatif dans les matériaux semi-transparents, on fait généralement l'hypothèse que la loi de Beer-Lambert est valide. Elle exprime le fait que l'atténuation de l'intensité lumineuse qui se propage dans un milieu décroît de façon exponentielle, on dira alors que le milieu est Beerien.

Par un bilan d'énergie radiative dans un volume élémentaire donné du milieu on arrive à l'expression bien connue de l'Equation du Transfert Radiatif (RTE). C'est une équation intégro-différentielle qui n'a une solution analytique que dans des cas académiques très simples, comme par exemple celui du milieu homogène non diffusant dont les propriétés radiatives sont isotropes et séparé par deux parois noires à températures imposées. C'est un cas de référence qui sert souvent à tester la validité des codes numériques de rayonnement.

Mais un matériau réel peut être composé de plusieurs phases ayant des caractéristiques et des propriétés différentes. La majorité des études suppose deux phases : une transparente et une opaque, dans ce cas seule la phase transparente transfère le rayonnement et l'étude peut se globaliser en un problème à une phase semi-transparente équivalente. Si de plus on considère le milieu Beerien, le transfert radiatif est caractérisé par un coefficient d'extinction β_ν , un coefficient d'absorption κ_ν , un coefficient de diffusion σ_ν et une fonction de phase p_ν . Les coefficients sont les termes d'atténuation des lois exponentielles exprimant les phénomènes radiatifs associés, et la fonction de phase est la fonction de distribution des directions diffusés. Ces propriétés radiatives sont les paramètres

d'entrée de la RTE qui s'écrit pour un milieu homogène et isotrope :

$$\frac{dI_\nu(\mathbf{u}, s')}{ds'} + \beta_\nu I_\nu(\mathbf{u}, s') = \kappa_\nu n_\nu^2 I_\nu^\circ[T(s')] + \sigma_\nu \int_{4\pi} \frac{p_\nu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} I_\nu(\mathbf{u}_1, s') d\Omega_1 \quad (1.30)$$

Cette RTE est en général complexe à résoudre, et le niveau de complexité croît si on considère un milieu composé d'une phase semi-transparente et d'une phase opaque, ou bien un milieu composé de deux phases semi-transparentes.

1.2.2.1 Milieu optiquement épais

Dans le cas où le milieu est optiquement épais, Taine et al. [Taine et al. (2010)] démontrent que la GRTE dégénère en une classique RTE dont les paramètres d'entrée sont des coefficients radiatifs généralisés a priori anisotropes : coefficients d'extinction $B_\nu(\mathbf{u})$, d'absorption $K_\nu(\mathbf{u})$ et de diffusion $\Sigma_\nu(\mathbf{u})$.

Trois conséquences découlent de l'hypothèse de milieu optiquement épais :

- Définissons δ par l'échelle spatiale sur laquelle le milieu peut être considéré épais et pratiquement isotherme. Par conséquent le terme source et la luminance peuvent être considérés uniformes.
- Les fonctions de distribution cumulée qui caractérisent le milieu ont pratiquement atteint leur valeur asymptotique, c'est-à-dire $G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s) \approx 1$.
- Les bords manifestent des effets radiatifs sur des distances plus petites que δ . L'hypothèse de milieu optiquement épais n'est valable que suffisamment loin des bords.

Ces hypothèses permettent de simplifier la GRTE sous forme intégrale (équation (1.29)).

$$I_\nu(\mathbf{u}) = S_\nu(\mathbf{u}) \int_0^\infty (1 - G_{\nu ext}(\mathbf{u}, v)) dv \quad (1.31)$$

A l'équilibre thermique le terme source s'écrit $S_\nu(\mathbf{u}) = B_\nu(\mathbf{u}) n_\nu^2 I_\nu^\circ(T)$ et la luminance a pour expression $I_\nu(\mathbf{u}) = n_\nu^2 I_\nu^\circ(T)$. On en déduit l'expression du coefficient généralisé d'extinction :

$$B_\nu(\mathbf{u}) = \left[\int_0^\infty (1 - G_{\nu ext}(\mathbf{u}, v)) dv \right]^{-1} \quad (1.32)$$

Les coefficients généralisés d'absorption et de diffusion se calculent en pondérant l'extinction par le taux d'extinction par absorption et par le taux d'extinction par diffusion, appelé albédo $\omega(\mathbf{u}) = P_{\nu sc}(\mathbf{u}, \infty)$.

$$K_{\nu}(\mathbf{u}) = P_{\nu a}(\mathbf{u}, \infty) B_{\nu}(\mathbf{u}) \quad (1.33)$$

$$\Sigma_{\nu}(\mathbf{u}) = P_{\nu sc}(\mathbf{u}, \infty) B_{\nu}(\mathbf{u}) \quad (1.34)$$

Les équations (1.31) à (1.34) permettent de simplifier la GRTE (1.27). On obtient une RTE dont les coefficients radiatifs généralisés sont les paramètres d'entrée. Ces coefficients radiatifs généralisés caractérisent chaque phénomène radiatif (extinction, absorption et diffusion) et sont les propriétés radiatives du milieu optiquement épais. On démontre ainsi qu'un milieu optiquement épais est Beerien. La RTE s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\nu}(\mathbf{u}, s')}{ds'} &= K_{\nu}(\mathbf{u}) n_{\nu}^2 I_{\nu}^{\circ}[T(s')] \\ &- B_{\nu}(\mathbf{u}) I_{\nu}(\mathbf{u}, s') \\ &+ \int_{4\pi} \Sigma_{\nu}(\mathbf{u}_1) \frac{p_{\nu}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} I_{\nu}(\mathbf{u}_1, s') d\Omega_1 \end{aligned} \quad (1.35)$$

1.2.2.2 Milieu Beerien

Un milieu est Beerien quand ses propriétés radiatives sont caractérisées par des coefficients radiatifs scalaires $\beta_{\nu}(\mathbf{u})$, $\kappa_{\nu}(\mathbf{u})$ et $\sigma_{\nu}(\mathbf{u})$. De plus la loi de Beer-Lambert est vérifiée, donc la transmittivité dans une phase homogène entre un point d'émission de rayonnement $M(s)$ et un point d'extinction $E(s')$ dans la direction \mathbf{u} s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau_{\nu}(\mathbf{u}, s' - s) &= 1 - G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s) \\ &= \exp \left[-\beta_{\nu}(\mathbf{u}) (s' - s) \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

Ainsi, lorsque le milieu est Beerien, les courbes $\ln[1 - G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s)]$ tracées en fonction de $s' - s$ sont des droites de pente négative et égales à l'opposé du coefficient d'extinction $\beta_{\nu}(\mathbf{u})$ pour chaque direction \mathbf{u} . C'est une technique classique d'identification du coefficient d'extinction qui a été utilisée par [Tancrez and Taine (2004), Chahlaoui et al. (2012), Taine et al. (2010), Zarrouati et al. (2015)]. Ce coefficient a donc pour expression :

$$\beta_\nu(\mathbf{u}) = -\frac{d\left(\ln[1 - G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s)]\right)}{d(s' - s)} \quad (1.37)$$

$$= \frac{1}{1 - G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s)} \frac{dG_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s)}{d(s' - s)} \quad (1.38)$$

$$= \left(\frac{dG_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s)}{d(s' - s)} \right)_{(s'-s) \rightarrow 0} \quad (1.39)$$

Le coefficient d'absorption κ_ν est une propriété de la matière de la phase d'étude à l'échelle locale, il est isotrope et ne dépend que de la longueur d'onde. Le coefficient de diffusion $\sigma_\nu(\mathbf{u})$ est déduit connaissant l'albédo $\omega_\nu(\mathbf{u})$:

$$\sigma_\nu(\mathbf{u}) = \omega_\nu(\mathbf{u}) \beta_\nu(\mathbf{u}) \quad (1.40)$$

Dans ces conditions, la fonction de répartition et la densité de probabilité d'extinction deviennent :

$$G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s) = 1 - \exp\left[-\beta_\nu(\mathbf{u})(s' - s)\right] \quad (1.41)$$

$$\frac{dG_{\nu ext}}{ds'}(\mathbf{u}, s' - s) = \beta_\nu(\mathbf{u}) \exp\left[-\beta_\nu(\mathbf{u})(s' - s)\right] \quad (1.42)$$

La probabilité cumulée de diffusion et sa dérivée ont pour expressions :

$$\begin{aligned} P_{\nu sc}(\mathbf{u}, s' - s) &= \omega_\nu(\mathbf{u}) G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s) \\ &= \omega_\nu(\mathbf{u}) \left(1 - \exp\left[-\beta_\nu(\mathbf{u})(s' - s)\right]\right) \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\frac{dP_{\nu sc}}{ds'}(\mathbf{u}, s' - s) = \sigma_\nu(\mathbf{u}) \exp\left[-\beta_\nu(\mathbf{u})(s' - s)\right] \quad (1.44)$$

De plus, on démontre que dans le cas où le milieu est Beerien les coefficients radiatifs généralisés sont rigoureusement égaux aux coefficients radiatifs classiques :

$$K_\nu = \kappa_\nu \quad (1.45)$$

$$B_\nu(\mathbf{u}) = \beta_\nu(\mathbf{u}) \quad (1.46)$$

$$\Sigma_\nu(\mathbf{u}) = \sigma_\nu(\mathbf{u}) \quad (1.47)$$

En remplaçant les fonctions statistiques radiatives par leurs expressions Beeriennes dans la GRTE (équation (1.27)) on obtient la RTE pour un milieu homogène et anisotrope :

$$\begin{aligned}
\frac{dI_\nu(\mathbf{u}, s)}{ds} &= \kappa_\nu n_\nu^2 I_\nu^\circ[T(s)] \\
&- \beta_\nu(\mathbf{u}) I_\nu(\mathbf{u}, s) \\
&+ \int_{4\pi} \sigma_\nu(\mathbf{u}_1) \frac{p_\nu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} I_\nu(\mathbf{u}_1, s) d\Omega_1
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Par souci de simplicité on a choisi de négliger les effets de bord, présents dans la GRTE (équation (1.27)), afin d'obtenir la RTE classique qu'on trouve dans la plupart des travaux sur le rayonnement thermique. Si on souhaite prendre en compte ces effets il faut remplacer les fonctions statistiques radiatives G_{ext} et P_{sc} , présentes dans le troisième et le cinquième terme du second membre de la GRTE (équation (1.27)), par leur expression Beerienne. On peut trouver une étude de résolution du problème radiatif au sein d'un milieu homogène, isotrope, absorbant et diffusant, en tenant compte des effets de bords, dans les travaux de Gomart et al. [Gomart and Taine (2011)].

Dans un milieu Beerien l'impact du rayonnement est le même à toute échelle. En effet, à une échelle locale ou à une échelle plus grande les coefficients radiatifs restent identiques et donc les effets dûs au rayonnement sont les mêmes, ce qui n'est absolument pas le cas pour un milieu non Beerien.

1.2.2.3 Loi de Fourier radiative

Sous certaines conditions on peut modéliser le flux surfacique radiatif $q_{\nu i}^R(s)$ par une loi de Fourier :

$$q_{\nu i}^R(s) = -k_{\nu ij}^R(s) \frac{\partial T}{\partial x_j} \tag{1.49}$$

où la notation tensorielle classique est utilisée, et k_{ij}^R désigne chaque terme du tenseur de conductivité.

Gomart et Taine [Gomart and Taine (2011)] ont étudié les conditions de validité ou de non-validité de la loi de Fourier pour des milieux homogènes, isotropes, absorbants et diffusants. Ils calculent l'écart entre la puissance radiative théorique obtenue à l'aide d'une méthode de Monte Carlo et celle obtenue en utilisant un modèle de Fourier et proposent un critère de validité :

- la loi de Fourier radiative n'est valable qu'au coeur du milieu poreux. Une couche limite radiative est introduite : c'est la zone d'interface dans le milieu où le bord a une influence en terme de transfert radiatif. Elle va du bord du milieu jusqu'à une épaisseur δ^R , donnée par :

$$\delta^R = 5 / \kappa_{eff} \tag{1.50}$$

où $\kappa_{eff}(\omega, g)$ est un coefficient d'absorption effectif qui tient compte d'effets de diffusion stimulant l'absorption, ainsi $\kappa_{eff}(\omega, g) > \kappa$. Ce coefficient dépend de l'albédo ω et du facteur d'asymétrie g .

- De plus, le gradient de température ne doit pas être trop élevé. La condition suivante doit être vérifiée :

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dx} < \zeta \kappa_{eff}(\omega, g) \quad (1.51)$$

où ζ est un coefficient lié à l'écart relatif entre les puissances radiatives issues de la loi de Fourier et de la RTE, il est tabulé dans [Gomart and Taine (2011)]. Par exemple, pour $\zeta = 0.033$ l'écart relatif sur les puissances radiatives sera inférieur à 1%.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on définit un nombre de Knudsen radiatif par le rapport de la longueur d'extinction $1/B_\nu(\mathbf{u})$ à la plus petite échelle spatiale du problème δ :

$$Kn(\mathbf{u}) = \frac{1}{B_\nu(\mathbf{u}) \delta} \quad (1.52)$$

Si ce nombre de Knudsen est très petit devant 1, alors une technique de perturbation permet de résoudre l'équation du transfert radiatif à l'image de la méthode du même nom permettant de résoudre l'équation de Boltzmann [Taine et al. (2014)]. La luminance est décomposée en un terme d'ordre 0 et un autre terme d'ordre 1 :

$$I_\nu(\mathbf{u}, s) = I_\nu^{(0)}(\mathbf{u}, s) + I_\nu^{(1)}(\mathbf{u}, s) \quad (1.53)$$

Pour un milieu comportant une phase de propagation d'indice n_ν on démontre que la solution de l'équation à l'ordre 0 en nombre de Knudsen est la solution d'équilibre [Chahlafla (2011)], soit :

$$I_\nu^{(0)}(s) = n_\nu^2 I_\nu^\circ[T(s)] \quad (1.54)$$

Chahlafla et Taine [Chahlafla (2011), Taine et al. (2014)] montrent que la solution de la luminance à l'ordre 1 vérifie l'équation intégral-différentielle suivante :

$$I_\nu^{(1)}(\mathbf{u}, s) = -u_j \frac{n_\nu^2}{B_\nu(\mathbf{u})} \frac{dI_\nu^\circ}{dT}[T(s)] \frac{\partial T}{\partial x_j}(s) + \int_{4\pi} \frac{\Sigma_\nu(\mathbf{u}_1)}{B_\nu(\mathbf{u})} \frac{p_\nu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} I_\nu^{(1)}(\mathbf{u}_1, s) d\Omega_1$$

(1.55)

L'équation intégrô-différentielle (1.55) s'apparente à une équation de Fredholm du second type et a pour solution une série de Neumann :

$$I_\nu^{(1)}(\mathbf{u}, s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m v_k(\mathbf{u}, s) \quad (1.56)$$

où $v_k(\mathbf{u}, s)$ est une suite définie comme suit :

$$\begin{aligned} v_0(\mathbf{u}, s) &= -u_j \frac{n_\nu^2}{B_\nu(\mathbf{u})} \frac{dI_\nu^\circ}{dT}[T(s)] \frac{\partial T}{\partial x_j}(s) \\ v_1(\mathbf{u}, s) &= \int_{4\pi} \frac{\Sigma_\nu(\mathbf{u}_1)}{B_\nu(\mathbf{u})} \frac{p_\nu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} v_0(\mathbf{u}_1, s) d\Omega_1 \\ v_2(\mathbf{u}, s) &= \int_{4\pi} \int_{4\pi} \frac{\Sigma_\nu(\mathbf{u}_1)}{B_\nu(\mathbf{u})} \frac{p_\nu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} \frac{\Sigma_\nu(\mathbf{u}_2)}{B_\nu(\mathbf{u}_1)} \frac{p_\nu(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)}{4\pi} v_0(\mathbf{u}_2, s) d\Omega_2 d\Omega_1 \\ v_m(\mathbf{u}, s) &= \int_{4\pi} \dots \int_{4\pi} \frac{\Sigma_\nu(\mathbf{u}_1)}{B_\nu(\mathbf{u})} \frac{p_\nu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} \dots \frac{\Sigma_\nu(\mathbf{u}_m)}{B_\nu(\mathbf{u}_{m-1})} \frac{p_\nu(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m-1})}{4\pi} v_0(\mathbf{u}_m, s) d\Omega_m \dots d\Omega_1 \end{aligned}$$

Le terme $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ ne dépend pas de la direction et sort des intégrales de diffusion. Pour simplifier les notations, on introduit la composante $w_{jk}(\mathbf{u}, s)$ qui est la contribution du rayonnement dans la direction x_j associée au terme k de la suite $v_k(\mathbf{u}, s)$ et définie par :

$$v_k(\mathbf{u}, s) = w_{jk}(\mathbf{u}, s) \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (1.57)$$

Sachant que le flux monochromatique radiatif a pour expression :

$$q_{\nu i}^R(s) = \int_{4\pi} I_\nu(\mathbf{u}, s) u_i d\Omega = -k_{\nu ij}^R(s) \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (1.58)$$

Par identification, on déduit une expression générale de la conductivité radiative monochromatique :

$$k_{\nu ij}^R(s) = - \int_{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} w_{jk}(\mathbf{u}, s) u_i d\Omega \quad (1.59)$$

1.3 Méthodes de résolution

1.3.1 Solutions analytiques

Dans quelques cas simples, décrits en introduction de cette partie, où une solution analytique existe, l'équation du transfert radiatif est considérablement

simplifiée. Pour un milieu Beerien non diffusant la luminance monochromatique directionnelle en chaque point du milieu s'exprime comme suit :

$$I_\nu(\mathbf{u}, s') = I_\nu(\mathbf{u}, 0) \tau_\nu(\mathbf{u}, s') + \int_0^{s'} n_\nu^2 I_\nu^\circ[T(s')] \frac{\partial \tau_\nu}{\partial s'}(\mathbf{u}, s' - s) ds \quad (1.60)$$

Pour obtenir le flux radiatif monochromatique traversant le milieu, il faut intégrer la luminance monochromatique directionnelle calculée par l'équation (1.60). Le calcul fait apparaître des fonctions intégréo-exponentielles :

$$E_n(x) = \int_0^1 \mu^{n-2} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) d\mu \quad (1.61)$$

qui doivent être évaluées numériquement. Néanmoins quelques approximations peuvent être trouvées dans la littérature pour des valeurs particulières de n et de x .

A titre d'exemple considérons un milieu semi-transparent non diffusant hétérogène et anisotherme, d'indice optique n et de coefficient d'absorption $\kappa_\nu(x)$, séparé par deux plans parallèles distants de L , d'émissivités uniformes et isotropes $\varepsilon_{\nu 1}$ et $\varepsilon_{\nu 2}$, et de température T_1 et T_2 . La symétrie du problème fait que les champs T , P^R et q^R ne dépendent que de l'abscisse x . Le champ de température dans le milieu est noté $T(x)$. La solution analytique du champ de puissance radiative $P^R(x)$ est donnée par [Taine et al. (2014)] et s'écrit :

$$\begin{aligned} P^R(x) &= \int_0^\infty 2\pi \kappa_\nu(x) \left[I_\nu^-(L) E_2[e_\nu(x, L)] + I_\nu^+(0) E_2[e_\nu(0, L)] \right] d\nu \\ &- \int_0^\infty 4\pi \kappa_\nu(x) I_\nu^\circ[T(x)] d\nu \\ &+ \int_0^\infty \int_x^L 2\pi I_\nu^\circ[T(x')] \kappa_\nu(x) \kappa_\nu(x') E_1[e_\nu(x, x')] dx' d\nu \\ &+ \int_0^\infty \int_0^x 2\pi I_\nu^\circ[T(x')] \kappa_\nu(x) \kappa_\nu(x') E_1[e_\nu(x', x)] dx' d\nu \end{aligned} \quad (1.62)$$

avec

$$I_\nu^+(0) = \varepsilon_{\nu 1} n_\nu^2 I_\nu^\circ(T_1) + (1 - \varepsilon_{\nu 1}) I_\nu^-(0) \quad (1.63)$$

$$I_\nu^-(L) = \varepsilon_{\nu 2} n_\nu^2 I_\nu^\circ(T_2) + (1 - \varepsilon_{\nu 2}) I_\nu^+(L) \quad (1.64)$$

$$I_\nu^-(0) = \frac{1}{\pi} \frac{d\varphi_\nu^{R-}}{d\nu}(0) \quad (1.65)$$

$$I_\nu^+(L) = \frac{1}{\pi} \frac{d\varphi_\nu^{R+}}{d\nu}(L) \quad (1.66)$$

$$e_\nu(x', x) = \int_{x'}^x \kappa_\nu(x'') dx'' \quad (1.67)$$

1.3.2 Méthodes numériques

Dans la très grande majorité des cas on ne peut pas calculer une solution analytique de l'ETR (équation (1.30)). Ceci est dû à la grande complexité des mécanismes de transfert au sein des systèmes réels : le problème est généralement 3D, quasiment tous les matériaux non homogènes sont diffusants, certains sont anisotropes et leurs propriétés sont non linéaires. Dans ce cas on utilise des méthodes numériques qui se basent sur la discrétisation des équations différentielles afin d'approcher la solution.

1.3.2.1 Méthode des ordonnées discrètes

Pour calculer le flux radiatif monochromatique, il est nécessaire de connaître la luminance monochromatique dans toutes les directions \mathbf{u} . La méthode des ordonnées discrètes consiste à discrétiser l'espace directionnel en N angles solides autour de directions spécifiques \mathbf{u}_i . La RTE devient alors un système de N équations différentielles couplées à résoudre. Les intégrales directionnelles sont calculées par une quadrature de Gauss :

$$\int_{4\pi} f(\mathbf{u}) d\Omega = \sum_{i=1}^N w_i f(\mathbf{u}_i) \quad (1.68)$$

Si le problème est axisymétrique les N directions de diffusion spécifiques \mathbf{u}_i sont choisies telles que les cosinus des angles θ_i les caractérisant sont les racines des polynômes de Legendre et les poids w_i associés sont donnés par la méthode de Gauss pour $-1 < \cos \theta_i < 1$ ou par celle de Gauss-Lobatto pour $-1 \leq \cos \theta_i \leq 1$. En effet, dans certains cas les effets d'anisotropie de la diffusion sont importants dans la direction du transfert et dans la direction opposée à celui-ci ; dans ce cas, afin de réduire les incertitudes liées à la discrétisation, il est parfois intéressant d'opter pour une quadrature telle que celle de Gauss-Lobatto, intégrant les limites $\cos \theta_i = -1$ et $\cos \theta_i = 1$.

Ensuite, la RTE est discrétisée spatialement. Pour un problème 1D la méthode des différences finies est la plus utilisée pour sa simplicité. Pour un problème 3D ou quand le maillage est non structuré, on utilisera plutôt une méthode de volumes finis qui dans ces cas est très simple à mettre en oeuvre car sa formulation ne repose pas sur la complexité du maillage, elle se base sur la conservation de l'énergie dans chaque volume de contrôle. Finalement, pour un problème axisymétrique autour de l'axe des x , l'équation de transfert pour le volume V de centre $M(x)$ dans la direction \mathbf{u} devient :

$$\begin{aligned}
\mu \int_V \frac{\partial I_\nu(\mathbf{u}, x)}{\partial x} dV &= \kappa_\nu n_\nu^2 I_\nu^\circ[T(x)] V & (1.69) \\
&- \beta_\nu(\mathbf{u}) \int_V I_\nu(\mathbf{u}, x) dV \\
&+ \sum_{i=1}^N w_i \sigma_\nu(\theta_i) \frac{p_\nu(\theta_i, \mathbf{u})}{4\pi} \int_V I_\nu(\theta_i, x) dV
\end{aligned}$$

où μ est le cosinus de l'angle entre l'axe des x et \mathbf{u} , direction de propagation du rayonnement.

L'avantage de cette méthode est qu'elle ne demande que peu de ressources de calcul à la différence de celles basées sur la technique de Monte Carlo, au détriment de la précision du résultat. Boulet et al. [Boulet et al. (2007)] ont montré que la méthode des ordonnées discrètes appliquée aux milieux anisotropes ne respecte pas toujours la conservation de l'énergie. Ils proposent de renormaliser la fonction de phase, mais cette renormalisation change sa forme et la solution du problème de transfert radiatif.

1.3.2.2 Prise de moyenne volumique

La méthode de prise de moyenne volumique est une méthode de référence permettant d'homogénéiser un matériau poreux et de déterminer ses propriétés globales à l'échelle macroscopique. Elle a été développée par Whitaker [Whitaker (1999)] et reprise par Quintard [Quintard and Whitaker (1994a), Quintard and Whitaker (1994b), Quintard and Whitaker (1994c), Quintard and Whitaker (1994d), Quintard (2015)] et permet de résoudre un grand nombre de problèmes conductifs et convectifs au sein de milieux poreux. Néanmoins, ce modèle ne prend pas en compte le transfert radiatif.

Si les températures moyennes des différentes phases sont suffisamment proches, l'hypothèse de l'équilibre thermique local permet de se ramener à une équation de bilan. Sinon les températures et donc les phases doivent être traitées indépendamment, c'est l'hypothèse du non-équilibre local, qui conduit à un modèle à autant d'équations qu'il y a de phases en présence. Enfin, la méthode requiert une décomposition spatiale des champs à l'ordre 1, c'est-à-dire que les inconnues du problème se décomposent en une première partie résultant d'une opération de prise de moyenne volumique et d'une deuxième partie représentant les déviations par rapport aux valeurs moyennes. Ainsi, le champ de température s'exprime par :

$$T = \langle T \rangle + \tilde{T} \quad (1.70)$$

On commence par écrire un bilan d'énergie à l'échelle microscopique connaissant les propriétés thermophysiques des différentes phases du matériau. L'équation

de l'énergie à l'échelle macroscopique est obtenue en moyennant chaque terme du bilan d'énergie local à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif (VER). Mais le problème mathématique résultant restant ouvert, une relation de fermeture est proposée par Whitaker qui consiste à supposer que les déviations sont proportionnels aux grandeurs moyennées. Finalement, l'équation de bilan est simplifiée en utilisant le théorème de prise de moyenne dérivé du théorème de Green-Ostrogradsky qui transforme les intégrales volumiques en intégrales surfaciques :

$$\langle \nabla T \rangle = \nabla \langle T \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{int}} \mathbf{n}_{int} T dA_{int} \quad (1.71)$$

où $\langle \rangle$ est l'opérateur de prise de moyenne volumique, V le VER, A_{int} la surface de l'interface entre les phases présentes au sein du VER et \mathbf{n}_{int} le vecteur normal à l'interface orienté vers l'extérieur de la phase.

Lipinski et al. [Lipinski et al. (2010)] utilisent la même méthodologie que Whitaker pour modéliser le transfert radiatif dans un milieu poreux statistiquement homogène, isotrope, gris, absorbant et diffusant et possédant deux phases semi-transparentes Beeriennes en non-équilibre thermique local. Ils partent de la RTE (équation (1.30)) écrite dans chaque phase et appliquent l'opérateur de prise de moyenne à chaque terme. Ils obtiennent ainsi un modèle à deux phases dans lequel apparaissent des termes de transmission de l'énergie d'une phase à l'autre. Appelons i et j les deux phases en présence. Notons β_i , κ_i , σ_{ii} et σ_{ij} les coefficients radiatifs de la phase i , $\Phi_{ii}(\theta_s)$ la fonction de phase de réflexion interne ne dépendant que de l'angle de diffusion θ_s et Π_i la fraction volumique de la phase i . Lipinski et al. montrent que l'équation de bilan à l'échelle macroscopique dans un petit volume autour d'un point $M(s)$ dans la phase i et dans la direction \mathbf{u} s'écrit :

$$\begin{aligned} \Pi_i \frac{dI_i}{ds}(\mathbf{u}, s) &= -\Pi_i \beta_i I_i(\mathbf{u}, s) + \Pi_i n_i^2 \kappa_i I^\circ[T(s)] \\ &+ \Pi_i \frac{\sigma_{ii}}{4\pi} \int_{4\pi} I_i(\mathbf{u}_s, s) \Phi_{ii}(\theta_s) d\Omega_s \\ &+ \Pi_j \frac{\sigma_{ji}}{4\pi} \int_{4\pi} I_j(\mathbf{u}_s, s) \Phi_{ji}(\theta_s) d\Omega_s \end{aligned} \quad (1.72)$$

où les termes en " $_{ii}$ " désignent l'apport énergétique par réflexion et les termes en " $_{ji}$ " désignent l'apport énergétique par transmission depuis la phase j . De plus, ils retrouvent le modèle théorique proposé par Gusarov [Gusarov (2008), Gusarov (2010)] basé sur la conservation des flux radiatifs dans les milieux Beeriens optiquement épais composés de deux phases semi-transparentes, ce qui confirme la validité de telles approches.

La grande force de la méthode de prise de moyenne volumique est de permettre l'obtention des propriétés physiques globales d'un matériau à l'échelle macroscopique en tenant compte des possibles effets intrinsèques de couplage et de la morphologie du milieu. En revanche, il est nécessaire d'avoir recours à des méthodes numériques de résolution reposant sur un maillage. Discrétiser une géométrie complexe serait trop lourd en terme de mémoire pour les ordinateurs actuels et le temps de calcul serait très long. On ne peut donc pas encore résoudre le problème du transfert radiatif en milieu hétérogène par la technique de prise de moyenne volumique sur des morphologies complexes, mais uniquement sur des géométries très simplifiées.

1.3.2.3 Méthodes de Monte Carlo

Les méthodes de Monte Carlo consistent à décrire les phénomènes physiques par des processus statistiques. Dans le cas du transfert radiatif, chaque phénomène radiatif est caractérisé par des fonctions de distribution permettant la simulation du transport de l'énergie radiative au sein d'un milieu homogénéisé.

Elles sont basées sur la simulation de la propagation d'un grand nombre de paquets de photons au sein du milieu d'étude. On suit le cheminement des rayons émis jusqu'à leur absorption ou jusqu'à ce qu'ils sortent du domaine d'étude. Chaque simulation de l'émission d'un rayon est indépendante.

Dans le cas d'un milieu comportant une phase opaque et une phase transparente, les rayons sont émis depuis les interfaces et les directions sont déterminées par des tirs de nombres aléatoires respectant les fonctions de distribution des directions d'émission. La longueur d'extinction du rayon est déterminée par le tir d'un nombre aléatoire dans la fonction de distribution cumulée d'extinction $G_{\nu ext}$. Ce cas a été traité par Zarrouati et al. [Zarrouati et al. (2015)].

Dans le cas où le milieu comporte au moins une phase semi-transparente les rayons sont émis depuis le volume de cette phase et les directions sont choisies de manière aléatoire. Ce cas a été traité par Gomart et al. [Gomart and Taine (2011)].

Le transport de quantités définies d'énergie permet le calcul des flux radiatifs et puissances radiatives.

La méthode de Monte Carlo présente de nombreux avantages. La méthode converge vers la solution exacte qui sert de référence pour la validation des résultats issus d'autres méthodes de résolution du transfert radiatif. Elle permet également de traiter des problèmes complexes (milieux anisotropes, hétérogènes, ayant une morphologie complexe, prise en compte des effets de bord) sans avoir recours à un maillage. A ce jour, c'est la seule méthode permettant de résoudre la GRTE ([Zarrouati et al. (2015)]). En revanche, il faut générer un grand nombre de nombres aléatoires et pour ce faire on utilise généralement l'algorithme de Mersenne-Twister. La convergence de la méthode est assez lente

(de l'ordre de $1/\sqrt{N}$, où N est le nombre de simulations réalisées) et nécessité de gros moyens de calcul. Mais des techniques d'optimisation basées sur le théorème de réciprocité permettent de diminuer le temps de calcul [Tesse et al. (2004)].

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la démarche à effectuer pour résoudre le problème du transfert radiatif dans un milieu. Tout d'abord, il s'agit de le caractériser : les fonctions statistiques radiatives $G_{\nu ext}$, $P_{\nu a}$ et $P_{\nu sc}$ sont déterminées par une méthode statistique de Monte Carlo. A partir de la fonction de distribution cumulée d'extinction $G_{\nu ext}$, l'équation (1.39) permet de déterminer un coefficient d'extinction, nécessaire pour calculer le critère de validité de la loi de Beer-Lambert. Si ce critère de validité est vérifié, alors le milieu est caractérisé par des coefficients radiatifs, β_{ν} pour l'extinction, κ_{ν} pour l'absorption, σ_{ν} pour la diffusion, et par la fonction de phase p_{ν} ; et le transfert radiatif est modélisé par la RTE. Dans le cas où le critère n'est pas vérifié alors le milieu est caractérisé par les fonctions statistiques radiatives et par la fonction de phase ; et le transfert radiatif est modélisé par la GRTE.

Cette démarche sera appliquée au cas des milieux fibreux. Il s'agira tout d'abord, dans la partie II, de générer numériquement une géométrie d'étude dans laquelle les fibres auront une orientation préférentielle. L'objectif de la partie III est de résoudre le problème du transfert radiatif dans ce milieu statistiquement anisotrope, possédant une phase semi-transparente non diffusante et une phase transparente, et en tenant compte des effets de bord. On montrera que la phase semi-transparente est de nature non Beerienne et que la phase transparente est de nature Beerienne. Le modèle de transfert radiatif dans ce milieu fibreux couplera donc une GRTE avec une RTE.

Chapitre 2

Modélisation de la conduction thermique et de son couplage avec le rayonnement

Introduction

Généralement, le problème de la conduction thermique dans un milieu poreux est résolu à l'aide du modèle de Fourier. Connaissant les conductivités thermiques des différentes phases constituant le matériau, on applique une technique d'homogénéisation afin d'en déduire une conductivité phonique effective du milieu k_{eff} dans chacune de ses directions principales. Finalement, le problème conductif se ramène à un système d'équations classiques, où les conditions aux limites peuvent être des températures imposées aux frontières ou bien un flux imposé sur une frontière et une température imposée sur l'autre.

Le problème fondamental de l'homogénéisation en conduction thermique consiste à déterminer la conductivité phonique effective d'un matériau hétérogène.

Ensuite, pour prendre en compte l'effet du rayonnement thermique, la très grande majorité des auteurs ajoute à l'équation de l'énergie la contribution du rayonnement thermique sous forme de puissance radiative dépendant du champ de température $P^R[T(s)]$.

De plus, quasiment tous font l'hypothèse que le transfert radiatif est régi par une loi de Fourier radiative, c'est-à-dire que $P^R(T) = \nabla \cdot (k^R(T) \nabla T)$, où $k^R(T)$ est la conductivité radiative du milieu.

Finalement, la conductivité totale $k_T(T)$ caractérise le transfert couplé conduction-rayonnement du milieu étudié. C'est la somme d'une part conductive et d'une part radiative, $k_T(T) = k_{eff} + k^R(T)$.

En fait, ce modèle résulte de la somme d'une part conductive issue d'une première homogénéisation du matériau et d'une part radiative issue d'une autre

homogénéisation à une échelle différente. Il ignore tous les effets de couplage à l'échelle locale pouvant avoir une influence à l'échelle macroscopique.

Dans ce chapitre on présentera les différentes méthodes de détermination de la conductivité phonique effective et de la conductivité totale. Dans un premier temps, on détaillera les travaux permettant d'obtenir par voie expérimentale la conductivité phonique effective d'un milieu poreux. Les auteurs en déduisent des formules semi-empiriques utilisées dans la validation d'approches analytiques du problème. Dans un second temps, on présentera les méthodes existantes, intégrant le rayonnement, permettant d'obtenir la conductivité totale. Mais ces méthodes se basant sur un maillage de la morphologie du matériau, seules des géométries simplifiées sont envisageables. Récemment, des approches numériques ne nécessitant aucun maillage ont été développées pour calculer la conductivité totale de matériaux ayant une morphologie complexe. Elles se basent sur le mouvement Brownien de particules fictives portant en elles l'information d'agitation thermique et qui se déplacent au sein de la géométrie réelle. Ces méthodes sont adaptées au problème de modélisation de la conduction au travers de morphologies complexes. De plus, elles semblent compatibles avec la méthode de Monte Carlo utilisée pour résoudre le problème du transfert radiatif. Nous détaillerons son principe et les travaux de couplage avec le rayonnement dont elle a déjà fait l'objet.

2.1 Détermination de la conductivité phonique effective

2.1.1 Expérimentalement

Dans la grande majorité des cas, la conductivité phonique effective est évaluée expérimentalement à faible température afin de minimiser la contribution du rayonnement (entre 300 K et 600 K). Mais ces gammes de température dépendent fortement du matériau choisi, en effet Enguehard [Enguehard (2005)] a montré que dans le cas de superisolants à 300 K le transfert radiatif contribuait de manière non négligeable au transfert de chaleur global. La technique de la plaque chaude gardée est une expérience de référence permettant de mesurer la conductivité effective. Une plaque chaude dissipe de la chaleur à travers l'échantillon d'un matériau dont on souhaite connaître la conductivité, la chaleur s'évacue finalement au niveau d'une plaque froide reliée à un échangeur de chaleur. En plaçant deux thermocouples sur les faces extrêmes de l'échantillon, d'épaisseur e connue, on mesure l'écart de température ΔT entre les deux faces. La chaleur est dissipée par effet Joule grâce à une résistance dont on connaît la valeur de sa conductivité électrique placée dans la plaque chaude ; on connaît ainsi le flux de chaleur Φ dissipé. En régime stationnaire on déduit

la conductivité par la relation :

$$k_{eff} = \Phi \frac{e}{\Delta T S} \quad (2.1)$$

Beaucoup de travaux de mesure de conductivité phonique effective ont été réalisés sur de nombreux matériaux (mousses, feutres, ...) constitués de phases différentes (gaz, eau, métaux, silice, alumine) et dont la morphologie dépend du procédé de fabrication employé. A titre d'exemple, on citera des corrélations issues de diverses expériences, énumérées et comparées par Mantel et al. [Mantle and Chang (1991)], Bauer et al. [Bauer (1993)] et Lee et al. [Lee and Cunnington (1998)]. Ces données expérimentales permettent de tester la validité des modèles analytiques de prévision de la conductivité effective.

Clark [Clark (1948)] mesure la conductivité électrique effective de différentes mousses métalliques de porosité variant de 0.6 à 0.95. En faisant l'hypothèse de l'analogie électrique du transfert conductif, les auteurs concluent que le rapport entre conductivité électrique effective du milieu global et conductivité électrique de la phase conductrice doit être le même que le rapport des conductivités thermiques. Ces données servent de références à la validation des formules analytiques de prévision de la conductivité phonique de mousses proposées par Bauer et al. [Bauer (1993)].

Aivazov et al. [Aivazov and Domashnev (1968)] ont formulé une équation générale pour calculer la conductivité effective de milieux poreux plongés dans le vide, connaissant la conductivité de la phase solide k_s :

$$k_{eff} = k_s \frac{1 - \Pi}{1 + n \Pi} \quad (2.2)$$

où Π est la porosité et n est une grandeur empirique. Pour le matériau d'étude de leur article (le nitrure de titane) ils recommandent $n = 6 \Pi$. Koh et al. [Koh and Fortini (1973)] ont utilisé cette formulation afin d'approcher leurs résultats expérimentaux obtenus sur un feutre de fibres métalliques et recommandent $n = 11 \Pi$.

Semena et al. [Semena and Zaripov (1977)] proposent une équation empirique pour un feutre de fibres métalliques plongé dans le vide et de porosité variant de 0.65 à 1 :

$$k_{eff} = k_s (1 - \Pi)^2 \exp [- (\pi + \log(d/L))] \quad (2.3)$$

où d est le diamètre moyen des fibres et L leur longueur moyenne. D'après la formule, on confirme une évidence : la conductivité augmente quand l'allongement des fibres L/d augmente.

Alexander [Alexander and Muratova (1972)] propose une équation empirique générale pour les milieux poreux, connaissant la conductivité de la matrice k_s et celle des pores k_f (pouvant être remplis d'air ou d'eau) :

$$k_{eff} = k_f (k_s/k_f)^{(1-\Pi)^\alpha} \quad (2.4)$$

où α est une grandeur empirique. Alexander [Alexander and Muratova (1972)] montre que pour un milieu fibreux contenant de l'air ou de l'eau, $\alpha = 0.34$ donne une concordance des résultats acceptable.

Soliman et al. [Soliman et al. (1970)] ont mesuré la conductivité effective de matériaux fibreux à fibres de cuivre et de nickel et proposent la corrélation suivante :

$$k_{eff} = k_s \left[a \left(1 - \frac{k_f}{k_s}\right) (1 - \Pi) + \frac{k_f}{k_s} \left(1 + \frac{\left(1 - \frac{k_f}{k_s}\right) (1 - \Pi)(1 - a)}{1 - \left(1 - \frac{k_f}{k_s}\right) (1 - \Pi)^b}\right) \right] \quad (2.5)$$

où $a = 0.13$ et $b = 0.006$ pour des fibres de cuivre, et $a = 0.046$ et $b = 0.012$ pour des fibres de nickel.

Lee et Cunnington [Lee (1986)] proposent une formule semi-empirique générale pour les milieux fibreux sous vide dépendant de la fraction volumique des fibres $(1 - \Pi)$, de la température du milieu et d'un facteur de forme F_s , empirique, caractérisant la morphologie du matériau, c'est-à-dire l'enchevêtrement des fibres et le contact entre elles :

$$k_{eff}(T) = F_s (1 - \Pi) k_s(T) \quad (2.6)$$

De plus, lorsque la porosité est occupée par un gaz, ils suggèrent d'utiliser un montage en parallèle de résistances thermiques :

$$k_{eff}(T) = \Pi k_f(T) + F_s (1 - \Pi) k_s(T).$$

Ils comparent ensuite ce modèle à des mesures expérimentales sur un matériau de fibres de silice à 95% de porosité, et en prenant $F_s = 0.13$. Ils trouvent un excellent accord entre le modèle et les mesures expérimentales.

2.1.2 A l'aide de formules analytiques

Certains auteurs simplifient la morphologie complexe de leur milieu poreux d'étude en adoptant une représentation simplifiée issue d'une dispersion dans l'espace de formes géométriques connues (sphères, cylindres, tétraèdres, ...).

Bauer [Bauer (1993)] propose une formule analytique de la conductivité phonique effective d'une mousse en la représentant par une dispersion de sphères non conductrices réparties aléatoirement dans l'espace ; puis d'un milieu fibreux

en dispersant des cylindres infinis très conducteurs dans une direction préférentielle particulière. Houston et al. [Houston and Korpela (1982)] puis Banner et al. [Banner et al. (1989)] proposent une expression de la conductivité phonique effective pour un matériau composé de fibres de verre, représenté par une dispersion de cylindres infinis répartis aléatoirement dans l'espace et plongés dans l'air.

2.1.3 Par des méthodes numériques

Dans les années 90, des méthodes numériques permettant d'estimer la diffusion d'espèces dans les milieux poreux ont été développées en régimes de Knudsen, de transition et moléculaire. Tomadakis et al. [Tomadakis and Sotirchos (1993a), Tomadakis and Sotirchos (1993b), Tomadakis and Sotirchos (1992), Tomadakis and Sotirchos (1996)] ont généré numériquement des milieux fibreux en empiquant des cylindres d'orientation aléatoire ou particulière, pouvant s'interpénétrer ou non. En dispersant aléatoirement dans le milieu des marcheurs contenant chacun un paquet de molécules de l'espèce diffusante et en leur appliquant une technique de marche aléatoire suivant le principe du mouvement Brownien, ils calculent la diffusivité d'espèce effective D_{eff} dans chaque direction principale. A l'instant $t = 0$ un marcheur est placé aléatoirement dans le milieu diffusant en générant 3 nombres aléatoires, correspondant aux positions x , y et z . Deux autres nombres aléatoires sont générés afin de lui attribuer une direction de déplacement dans l'espace, caractérisée par un angle polaire θ et un angle azimutal φ . A chaque pas de temps Δt , le marcheur se déplace d'une longueur déterminée en tirant un nombre aléatoire dans une loi exponentielle de paramètre λ , qui est le libre parcours moléculaire de l'espèce dans la phase où elle se trouve. Si le marcheur rencontre une interface il rebondit suivant une loi diffuse d'interface (loi vérifiée expérimentalement). Si le marcheur sort du domaine il est réintroduit par le côté opposé dans la même phase (la géométrie d'étude est supposée se reproduire par périodicité). Après un temps suffisamment long τ , le calcul de la moyenne des carrés des distances de diffusion $\langle \epsilon^2 \rangle$ dans les directions x , y et z permet de déterminer la diffusivité D_{eff} :

$$D_{eff}(x, y \text{ ou } z) = \frac{\langle \epsilon^2 \rangle}{2\tau} \quad (2.7)$$

Ils valident leur méthode de Monte Carlo en montrant une très bonne concordance entre la tortuosité de matériaux fibreux calculée et celle mesurée. Ils montrent de plus que la diffusivité d'espèce dépend fortement de l'orientation des fibres et de la porosité du matériau. Puis Transvalidou et al. [Transvalidou and Sotirchos (1996)] reprennent la méthode, comparent les diffusivités effectives calculées dans divers milieux fibreux avec des résultats expérimentaux et trouvent un excellent accord.

Cette méthodologie a été reprise par Vignoles et al. [Vignoles et al. (2011), Vignoles et al. (2011)] pour modéliser l'infiltration chimique en phase vapeur

servant à façonner des matériaux à matrice céramique pour des applications hautes températures. En plus du phénomène de transport du gaz, une modélisation de la réaction chimique entraînant le dépôt de céramique a été développée. Après chaque déplacement d'un marcheur, représentant un paquet de molécules de l'espèce diffusante un nombre aléatoire est généré et est comparé à la probabilité de survie du marcheur. Cette probabilité de survie P_s suit une loi exponentielle dans laquelle apparaît le taux de réaction chimique Γ_{eff} :

$$P_s = \exp[-\Gamma_{eff} \delta t] \quad (2.8)$$

où δt est le pas de temps de déplacement du marcheur.

Si ce nombre aléatoire est plus grand que P_s les molécules diffusantes sont transformées en dépôt, c'est-à-dire que le marcheur est détruit et que la porosité du matériau est diminuée d'une valeur $\delta\Pi$ liée au nombre de molécules contenues dans le marcheur. Finalement, ils valident leur méthode sur des cas réels d'infiltration de gaz dans des matériaux composites C/C (carbone/carbone) en procédant à des expériences de caractérisation morphologique par tomographie X puis en reconstruisant les interfaces entre phases par un algorithme de cubes mobiles. Ils trouvent un excellent accord entre simulations et données expérimentales et démontrent l'applicabilité de cette méthode de Monte Carlo sur des cas réels 3D de morphologie connue.

Cette technique de Monte Carlo développée pour calculer une diffusivité d'espèce effective est basée sur la résolution de l'équation de diffusion qui est analogue à l'équation de conduction thermique instationnaire. La diffusion des molécules s'apparente donc à la diffusion thermique. A ce jour, peu de travaux existent sur la résolution du problème du transfert thermique par conduction avec ces méthodes. Ils seront présentés dans le paragraphe 2.2.3.

2.2 Détermination de la conductivité thermique totale

2.2.1 Par la méthode de prise de moyenne volumique

Consalvi et al. [Consalvi et al. (2002a)] proposent une méthodologie pour prendre en compte le rayonnement dans un milieu poreux Beerien possédant une phase gazeuse transparente et une phase solide opaque en non-équilibre thermique local. Ils partent de l'équation de l'énergie à l'échelle microscopique, et en utilisant les techniques de prise moyenne volumique introduites par Whitaker, ils arrivent à un modèle macroscopique à deux équations du problème de couplage conduction-rayonnement dans un milieu poreux statistiquement homogène, isotrope, gris, absorbant et diffusant. Ensuite, ils valident leurs résultats avec ceux obtenus par une simulation Monte Carlo directe. Enfin, ils comparent les résultats expérimentaux de transmittance obtenus sur des mousses

aux résultats issus de la résolution de la RTE par une méthode des ordonnées discrètes en représentant le milieu par un empilement de sphères transparentes distribuées aléatoirement. Ils trouvent un bien meilleur accord avec l'expérience qu'avec un modèle basé sur l'hypothèse de la diffusion indépendante.

Leroy et al. [Leroy et al. (2013)] proposent un modèle 1D résolvant le couplage conduction, convection et rayonnement dans un milieu poreux non Beerien statistiquement homogène, isotrope, gris composé d'une phase transparente et d'une phase opaque. Ils testent le modèle radiatif seul sur une dispersion de sphères transparentes pouvant s'interpénétrer, et valident ce modèle en retrouvant des résultats antérieurs de Tancrez [Tancrez and Taine (2004)]; puis ils valident le modèle de couplage conduction-convection appliqué à une plaque percée en retrouvant les résultats de Quintard. Pour prendre en compte le transfert radiatif, ils font l'hypothèse que la puissance radiative se décompose en une part moyennée à l'échelle du VER et une part fluctuante :

$$P^R(x) = \langle P^R(x) \rangle + \widetilde{P}^R(x) \quad (2.9)$$

De plus, ils supposent que la partie fluctuante est proportionnelle à la partie moyennée, c'est-à-dire : $\widetilde{P}^R(x) = a \langle P^R(x) \rangle$. La décomposition de la puissance radiative devient :

$$P^R(x) = (1 + a) \langle P^R(x) \rangle \quad (2.10)$$

Pour fermer le problème, Whitaker propose de postuler une expression linéaire des températures fluctuantes en fonction des températures moyennes et de leurs gradients :

$$\widetilde{T}_1 = \mathbf{b}_{11} \cdot \nabla \langle T_1 \rangle + \mathbf{b}_{12} \cdot \nabla \langle T_2 \rangle + s_1 \left(\langle T_2 \rangle - \langle T_1 \rangle \right) \quad (2.11)$$

les indices 1 et 2 font référence aux deux phases en présence, \mathbf{b}_{11} , \mathbf{b}_{12} et s_1 sont les variables de fermeture associées à la phase 1.

Pour prendre en compte le rayonnement, Leroy suggère d'ajouter à cette relation linéaire une variable de fermeture supplémentaire afin de prendre en compte l'effet du couplage avec le rayonnement à l'échelle de la microstructure :

$$\widetilde{T}_1 = \mathbf{b}_{11} \cdot \nabla \langle T_1 \rangle + \mathbf{b}_{12} \cdot \nabla \langle T_2 \rangle + s_1 \left(\langle T_2 \rangle - \langle T_1 \rangle \right) + r_1 \langle P^R \rangle \quad (2.12)$$

où r_1 est la variable de fermeture supplémentaire liée au rayonnement.

2.2.2 Par des méthodes de différences finies, d'éléments finis ou de volumes finis

Considérons l'équation de l'énergie en régime stationnaire écrite en un point $M(s)$ du milieu :

$$\nabla \cdot (k_{eff} \nabla T) + P^R(s) = 0 \quad (2.13)$$

où $P^R(s)$ est la puissance radiative au point $M(s)$.

L'équation de l'énergie (2.13) est une équation aux dérivés partielles et peut être résolue par des méthodes numériques reposant sur un maillage : les méthodes de différences finies, d'éléments finis et de volumes finis.

Peu d'études considèrent le transfert couplé conduction-rayonnement. Le problème du transfert radiatif dans les milieux semi-transparentes est généralement traité en considérant les autres modes de transfert négligeables. Le problème de la conduction thermique est soit traité seul, soit résolu en intégrant un couplage avec la convection. Pour l'étude du transfert au sein de matériaux portés à haute température, il est nécessaire de prendre en compte la conduction et le rayonnement.

Il s'agit de résoudre l'équation de la chaleur couplée à l'équation du transfert radiatif. Dans le cas de matériaux ayant une morphologie complexe, il n'existe pas de solution analytique à ce problème, c'est pourquoi on trouve beaucoup de travaux se basant sur une approximation des équations aux dérivées partielles reposant sur un maillage. On listera ci-dessous quelques exemples d'études :

André et Degiovanni [André and Degiovanni (1995), André and Degiovanni (1998)] modélisent le problème 1D instationnaire du transfert couplé conduction-rayonnement dans le verre. Ils considèrent le verre comme un milieu homogène isotrope et gris par bandes de longueur d'onde. Pour résoudre le problème, ils ajoutent à l'équation de l'énergie un terme source radiatif calculé en résolvant la RTE grâce à une méthode déterministe. Ils résolvent ensuite l'équation de l'énergie instationnaire par la méthode des différences finies. Ils finissent par comparer les résultats de leurs simulations à des données de diffusivité thermique déterminées par une méthode flash.

Asllanaj et al. [Asllanaj et al. (2004), Asllanaj et al. (2007)] ont résolu le problème 1D stationnaire du transfert thermique couplé conduction-rayonnement au sein de milieux fibreux avec des conditions aux limites de températures ou de flux imposés. Les fibres sont dispersées aléatoirement dans une phase transparente et sont considérées opaques. La RTE est tout d'abord résolue au moyen de la méthode des ordonnées discrètes. Les propriétés radiatives du milieu fibreux sont calculées par la théorie de Mie et en faisant l'hypothèse que la diffusion du rayonnement est indépendante. Finalement, l'équation de la chaleur 1D est résolue par la méthode des éléments finis.

Milandri et al. [Milandri et al. (2001), Milandri et al. (2002)] ont repris les travaux de Asllanaj concernant la résolution du problème radiatif au sein de milieux fibreux : ils utilisent la théorie de Mie et l'hypothèse de la diffusion indépendante pour estimer les propriétés radiatives d'un milieu fibreux où les fibres sont dispersées aléatoirement. Puis, ils résolvent la RTE par la méthode des

ordonnées discrètes. Ils obtiennent ainsi l'expression du flux radiatif $q^R[T(x)]$ qui dépend du champ de température dans le milieu. Ils considèrent ensuite une expression empirique de la conductivité phonique effective d'un milieu fibreux qui dépend de la température et de la porosité, pour exprimer le flux conductif $q^C[T(x)]$. Finalement, l'équation de bilan d'énergie : $q^C[T(x)] + q^R[T(x)] = 0$ est résolue par la méthode des différences finies. Cette résolution du problème de transfert couplé conduction-rayonnement est très intéressante du fait de la simplicité des méthodes de résolution et de la rapidité du calcul.

Coquard et al. [Coquard and Baillis (2006)] proposent une résolution du problème 1D stationnaire du transfert thermique couplé conduction-rayonnement dans des mousses polymères. A l'aide d'un paramètre empirique, ils prennent en compte l'influence de la microstructure de la mousse dans l'expression de la conductivité thermique. Ils supposent ensuite que la conductivité phonique effective de la mousse est la somme des conductivités thermiques des deux constituants pondérées par leurs fractions volumiques (modèle de résistances thermiques en parallèle). Le transfert radiatif est résolu à l'aide de la théorie de Mie et de la méthode des ordonnées discrètes. Finalement, l'équation de la chaleur est résolue par la méthode des volumes finis et le problème du couplage par une méthode itérative.

Coquard et al. [Coquard et al. (2009), Coquard et al. (2010), Coquard et al. (2011)] proposent une autre résolution du problème 1D stationnaire du transfert thermique couplé conduction-rayonnement dans les mousses. Ils estiment les propriétés radiatives de mousses par une méthode d'identification paramétrique à l'aide de mesures expérimentales de réflectance et de transmittance directionnelles. Ensuite, la RTE est résolue à l'aide de la méthode des ordonnées discrètes. La puissance radiative calculée est injectée dans l'équation de la chaleur 3D qui est résolue par une méthode de volumes finis. Le couplage est résolu ici aussi de manière itérative.

Trovalet et al. [Trovalet et al. (2011)] proposent une résolution du problème stationnaire 3D du transfert conduction-rayonnement dans les milieux semi-transparents gris bordés par des parois noires ou opaques à réflexion diffuse. Tout d'abord, ils appliquent un maillage tétraédrique non structuré dont chaque maille est un milieu semi-transparent homogène, isotrope et gris. Dans chaque maille, la RTE est résolue à l'aide d'une méthode aux ordonnées discrètes. Les auteurs intègrent la RTE sur le volume de chaque maille et utilisent une méthode de volumes finis afin d'obtenir la puissance radiative dans chaque maille. Finalement, une méthode des éléments finis appliquée sur le même maillage est utilisée afin de résoudre l'équation de chaleur.

2.2.3 Par une méthode de Monte Carlo

Vignoles [Vignoles (2016), Vignoles and Ortona (2016)] reprend la méthode de Monte Carlo basée sur la marche aléatoire afin d'estimer les conductivités totales dans les directions principales de matériaux composites fibreux C/C portés à haute température possédant deux phases : une phase transparente et des fibres opaques et conductrices. La modélisation de la conduction dans les fibres est basée sur le principe de marche aléatoire présenté précédemment et faisant intervenir le tenseur de diffusivité thermique des fibres. Le rayonnement est linéarisé en supposant les variations de température faibles, dans ces conditions le flux radiatif se propageant dans la phase transparente se simplifie en :

$$q^R(T) = 4\varepsilon\sigma_{sb}T^3T_w \quad (2.14)$$

où ε est l'émissivité des fibres, σ_{sb} la constante de Stefan-Boltzmann et T_w la température des marcheurs à l'interface fibre/phase transparente.

Le couplage des deux modes de transfert se fait à l'interface. La probabilité de réflexion d'un "marcheur radiatif" venant de la phase transparente est égale à la réflectivité directionnelle-hémisphérique des fibres, soit $1 - \varepsilon$. Le tirage d'un nombre aléatoire entre 0 et 1 et sa comparaison à la valeur de la réflectivité directionnelle-hémisphérique décident du devenir du marcheur radiatif : réfléchi ou transmis. Si le marcheur est transmis, il devient un "marcheur conducteur" et est régi par le processus de mouvement Brownien. La probabilité de transmission P_t d'un marcheur conducteur venant des fibres vers la phase transparente se calcule en comparant le flux conducteur q^C au flux maximal d'émission $q_{e\max}^R$. Vignoles montre que cette probabilité a pour expression :

$$P_t = \begin{cases} \frac{4\varepsilon T^3 \langle |\delta x_w| \rangle}{k_s} & \text{si } q^C > q_{e\max}^R; \\ 1 & \text{si } q^C \leq q_{e\max}^R. \end{cases}$$

où k_s est la conductivité thermique des fibres et $\langle |\delta x_w| \rangle$ le libre parcours moyen des marcheurs. La solution en régime stationnaire est atteinte quand la valeur du libre parcours moyen $\langle |\delta x_w| \rangle$ est stabilisée.

Cette technique est très intéressante car elle permet d'obtenir très rapidement la conductivité thermique totale dans les trois directions principales d'un milieu fibreux de microstructure connue.

Une autre méthode de Monte Carlo proposée par Grigoriu [Grigoriu (1997), Grigoriu (2000)], basée elle aussi sur le mouvement Brownien de marcheurs, a été développée pour résoudre l'équation de Laplace, l'équation de Poisson et l'équation de la chaleur. L'auteur part de l'expression du processus statistique

de Itô-Taylor qui modélise le déplacement d'une particule Brownienne dans un milieu hétérogène :

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{X}(t)) dt + \mathbf{c}(\mathbf{X}(t)) d\mathbf{B}(t) \quad (2.15)$$

où $\mathbf{X}(t)$ correspond à la position de la particule à l'instant t , $d\mathbf{X}(t)$ est son déplacement entre t et $(t + dt)$, $\mathbf{a}(\mathbf{X}(t))$ est un vecteur de dérive, $\mathbf{c}(\mathbf{X}(t))$ est une matrice de diffusion qui est diagonale dans la base des vecteurs propres et $\mathbf{B}(t)$ est un vecteur aléatoire de mouvement Brownien.

Considérons l'équation de la chaleur instationnaire sans terme source au sein d'un milieu hétérogène.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\nabla \lambda(s)}{\rho(s) C_p(s)} \cdot \nabla T(s) = \frac{\lambda(s)}{\rho(s) C_p(s)} \Delta T \quad (2.16)$$

En identifiant chaque terme des deux équations précédentes, on déduit que le vecteur de dérive $\mathbf{a}(\mathbf{X}(t))$ est l'image du terme de vitesse $-\frac{\nabla \lambda(s)}{\rho(s) C_p(s)}$ et que la matrice de diffusion $\mathbf{c}(\mathbf{X}(t))$ est l'image du terme de diffusivité $\frac{\lambda(s)}{\rho(s) C_p(s)}$. A chaque pas de temps dt , le déplacement $d\mathbf{X}(t)$ est constitué d'une partie aléatoire $\mathbf{c}(\mathbf{X}(t)) d\mathbf{B}(t)$ qui est caractéristique de la diffusion et d'une partie déterministe $\mathbf{a}(\mathbf{X}(t)) dt$ qui est un terme convectif lié, dans le travail de Grigoriu, à l'hétérogénéité des propriétés thermophysiques.

L'équation différentielle statistique modélise bien le problème du transfert de chaleur dans un milieu hétérogène. Le lien entre déplacements des marcheurs et valeur de la température en un point M et à un instant t donnés sera assuré par les conditions aux limites. Dans le cas d'un milieu homogène ayant une température initiale $T(x, 0)$ et borné par des conditions de températures imposées pour $t > 0$, au sein duquel une puissance $P(x)$ est dissipée, l'auteur montre que la température en un point $M(x)$ du milieu à l'instant t se calcule par l'expression :

$$T(x, t) = E \left[T_b(\mathbf{B}(\tau)) \right] (x, t) - \frac{1}{2} E \left[\int_0^\tau P(\mathbf{B}(s)) ds \right] (x, t) \quad (2.17)$$

Comme le milieu est homogène, le vecteur de dérive $\mathbf{a}(\mathbf{X}(t))$ est nul. Ainsi, le déplacement des particules au sein du milieu est caractérisé par le mouvement Brownien pondéré par la diffusivité thermique $\frac{\lambda}{\rho C_p}$.

Le premier terme $E \left[T_b(\mathbf{B}(\tau)) \right] (x, t)$ est l'espérance mathématique du nombre de particules partant du point $M(x)$ et atteignant un bord du domaine de température T_b après s'être déplacées durant un temps τ tel que $0 < \tau \leq t$. Si $\tau > t$ alors les particules n'atteignent par le bord dans l'intervalle $[0, t]$ et T_b est égale à la température initiale $T(x, 0)$ au point $M(x)$. Ce terme rend compte du phénomène de conduction instationnaire.

Le deuxième terme $\frac{1}{2} E \left[\int_0^\tau P(\mathbf{B}(s)) ds \right] (x, t)$ est l'espérance mathématique de l'énergie accumulée par les particules partant du point $M(x)$ et atteignant un bord du domaine de température T_b après s'être déplacées durant un temps τ tel que $0 < \tau \leq t$. Ce terme rend compte du terme de puissance volumique dans l'équation de la chaleur instationnaire.

Keskin et Grigoriu [[Keskin and Grigoriu \(2010\)](#)] ont appliqué cette méthode pour déterminer le coefficient de diffusion effectif d'un milieu composite hétérogène et ont montré l'applicabilité de la méthode sur des matériaux réels connaissant leur morphologie.

L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de déterminer la température en un point quelconque du milieu sans avoir à résoudre tout le champ de température. Plus généralement, l'avantage de ces deux méthodes de Monte Carlo par rapport à des méthodes classiques d'éléments finis ou de volumes finis est qu'elles ne nécessitent aucun maillage. Le coût en mémoire en est très fortement réduit, la gestion des conditions aux limites est souple, la parallélisation de ces méthodes est naturelle et est très avantageuse en termes de réduction du temps de calcul.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons énuméré les méthodes existantes permettant de déterminer la conductivité phonique effective et la conductivité totale d'un matériau. Beaucoup d'études se basent sur des essais expérimentaux effectués sur différents types de matériaux (mousses, matériaux fibreux, verres, ...) et dont sont issues des lois empiriques exprimant la conductivité phonique effective en fonction de la morphologie du matériau, de la fraction volumique de chaque constituant et de la température du matériau. On peut citer la méthode de la plaque chaude gardée qui est la référence pour mesurer une conductivité effective dans une direction donnée.

Pour coupler le transfert radiatif et le transfert conductif, la majorité des auteurs utilisent des méthodes basées sur le maillage du matériau d'étude. Dans certains cas le maillage est très fin afin de capturer la morphologie complexe du milieu poreux, dans d'autres cas le maillage est plus grossier et chacune des mailles est un milieu homogène gris caractérisé par des propriétés thermophysiques déduites de lois de mélange. Dans le premier cas, les méthodes s'appliquent à des domaines de petite taille et le temps de calcul est long. Dans le deuxième cas, le calcul est plus rapide au détriment de la précision du résultat final. Récemment, de nouvelles méthodes statistiques ne nécessitant aucun maillage ont été développées afin de résoudre les problèmes de transfert thermique au sein de matériaux ayant une morphologie complexe. Elles se basent sur la représentation de l'agitation thermique par le déplacement Brow-

nien de marcheurs dans la géométrie réelle. Chaque marcheur transporte une certaine quantité d'énergie et le problème conductif est régi par les conditions aux limites. Néanmoins, comme ces méthodes sont récentes, nous n'avons pas d'estimation sur le temps de calcul du problème thermique appliqué à un matériau réel.

Pour tous leurs avantages, ces nouvelles méthodes statistiques seront retenues et implémentées dans la partie IV pour la résolution du transfert thermique couplé conduction-rayonnement au sein de notre milieu fibreux d'étude. Le transfert radiatif sera résolu par une méthode statistique de Monte Carlo dans la partie III et renverra une puissance radiative en chaque point du milieu d'étude. Le couplage sera assuré en ajoutant à l'énergie transportée par les marcheurs conductifs l'énergie radiative qu'ils auront rencontrée pendant leur parcours. Nous comparerons les résultats de température et de flux total issus de ce modèle couplé totalement stochastique aux résultats calculés par une méthode classique.

Deuxième partie

Génération numérique d'un
échantillon de matériau fibreux

Chapitre 3

Génération de la géométrie d'étude

Introduction

Cette thèse porte sur l'étude du transfert thermique au sein de matériaux constitués de fibres de céramiques (fibres d'oxyde d'aluminium ou d'oxyde de zirconium) de quelques centaines de micromètres de longueur et de quelques dizaines de micromètres de diamètre. La mesure expérimentale de leur conductivité et de leur diffusivité thermiques se fait sur des échantillons de quelques millimètres d'épaisseur sous air ambiant ou sous vide. Ces matériaux ont une densité et une inertie thermique faible. De ce fait, ils sont particulièrement bien adaptés pour être utilisés comme barrières thermiques à haute température. Ils permettent également, grâce à leur très faible densité, de diminuer considérablement le poids des isolants. Leurs propriétés thermiques dépendent fortement de l'enchevêtrement des fibres et également de la quantité du contact entre les fibres.

Dans le cadre de cette thèse, on se focalisera sur le problème de la modélisation du transfert thermique dans un milieu fibreux généré numériquement plutôt que sur l'étude d'une géométrie particulière réelle. En effet, ceci se traduirait par le développement d'un module supplémentaire permettant de reconstruire numériquement le matériau à partir d'images de tomographie. Ici, le milieu sera fait de fibres représentées par des cylindres fins pouvant s'interpénétrer. Ainsi la géométrie est parfaitement caractérisée analytiquement, et donc l'interface séparant les deux phases du matériau (la phase "dans les cylindres" et la phase "hors des cylindres") est parfaitement connue.

Dans ce chapitre, on s'intéressera à la génération numérique du matériau fibreux d'étude. Dans un premier temps, on présentera la procédure utilisée pour construire un empilement de cylindres ayant une orientation préférentielle. Ensuite, on se posera la question de l'homogénéité statistique du milieu généré ; et pour répondre à cette question, on sera amené à effectuer des calculs de

résolution du transfert thermique dans un grand nombre de milieux générés et à moyenner les résultats. Finalement, on présentera des premiers résultats de caractérisation radiative afin de déterminer une taille suffisante pour l'échantillon.

3.1 Technique optimisée de génération d'un empilement de cylindres homogène en porosité

3.1.1 Procédure d'empilement des cylindres

Notre milieu poreux d'étude est un enchevêtrement de fibres semi-transparentes absorbantes mais non diffusantes composées d'un matériau céramique réfractaire (oxyde d'aluminium ou oxyde de zirconium) et plongées dans un gaz transparent. Le milieu est homogène en porosité mais du fait de son procédé de fabrication, les fibres sont orientées de manière préférentielle dans un plan perpendiculaire à la direction du transfert, que nous appellerons z . Les fibres sont représentées par des cylindres pouvant s'interpénétrer, on appellera d leur diamètre et L leur longueur. Le centre de la base d'un cylindre C est tiré aléatoirement dans la boîte de génération de l'échantillon, le vecteur unitaire de son axe $\mathbf{u}_C(\theta_C, \Phi_C)$ est caractérisé par un tirage aléatoire entre 0° et 360° pour l'angle azimutal Φ_C et par un tirage dans une loi normale de moyenne 90° (correspondant au plan normal à l'axe z) et d'écart type σ pour l'angle polaire θ_C . On étudiera le transfert thermique dans la direction z ; la boîte de génération de l'échantillon est donc choisie telle que ses côtés dans les deux directions x et y normales à la direction z soient très grands (au moins 10 fois plus) que son côté dans la direction z .

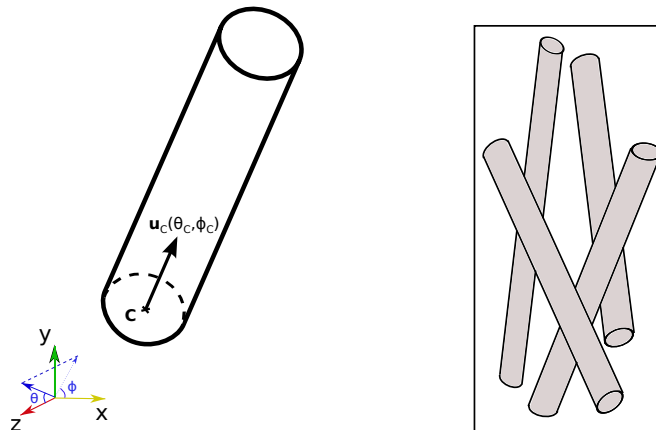


FIGURE 3.1 – Génération d'un empilement de cylindres dans l'espace tridimensionnel. À gauche génération d'un cylindre, à droite génération de plusieurs cylindres qui peuvent s'interpénétrer.

Si on se limite à cette procédure, la répartition des cylindres n'est pas homogène au sein du milieu. En effet, les cylindres présentant la caractéristique d'avoir leur base à l'extérieur de la boîte de génération et une partie à l'intérieur ne sont pas pris en considération. Inversement, les cylindres dont la base se trouve à l'intérieur de la boîte de génération et dont une partie se trouve à l'extérieur sont plus courts que prévu car tronqués. On se retrouve alors avec des cylindres longs au coeur du milieu et des cylindres courts au voisinage des bords, ce qui a un impact direct sur la porosité locale et sur les résultats de la simulation du transfert. Pour pallier ce problème, on impose des conditions de périodicité aux bords de telle sorte que si un cylindre intersecte une paroi du milieu il est coupé et la partie à l'extérieur est réintroduite par le côté opposé. Finalement, on obtient un empilement de cylindres dans une boîte dont la porosité varie en fonction du nombre de cylindres générés. Pour calculer le porosité de l'échantillon et le taux d'interpénétration des cylindres, c'est-à-dire le pourcentage du volume total de la boîte occupé par au moins deux cylindres on utilise une méthode de Monte Carlo : on tire aléatoirement un grand nombre N_t de points dans la boîte de génération et on comptabilise ceux qui appartiennent à la phase des cylindres, notés N_c , et qui appartiennent à au moins deux cylindres, notés N_{2c} ; à la limite des grands nombres la porosité est égale à $\Pi = \frac{1-N_c}{N_t}$ et le taux d'interpénétration est égal à $\frac{N_{2c}}{N_t}$.

A titre d'exemple, on génère un milieu fibreux de taille $D_x = D_y = 200d$ et $D_z = 100d$, dont les cylindres de diamètre d ont une longueur $L = 100d$ et sont orientés de manière préférentielle dans le plan (xy) avec un écart type $\sigma = 5^\circ$. En empilant 36000 cylindres on obtient une porosité de 0.75 et un taux d'interpénétration de 3.12%, Fig.3.2 et Fig.3.3.

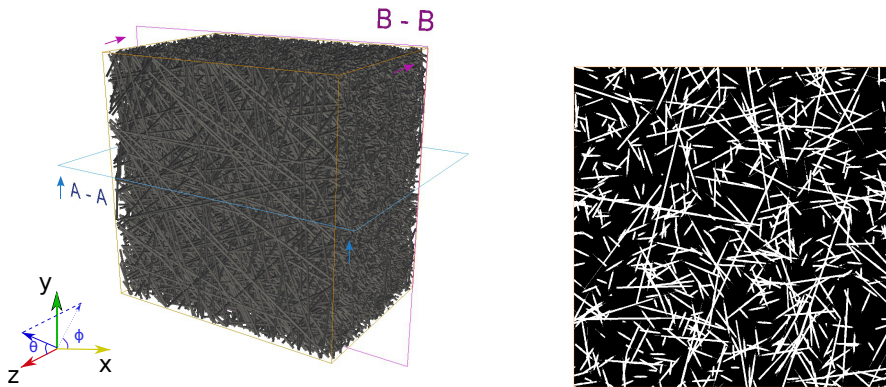


FIGURE 3.2 – Milieu fibreux généré numériquement de porosité 0.75. A gauche le milieu en 3D, à droite le plan de coupe B-B.

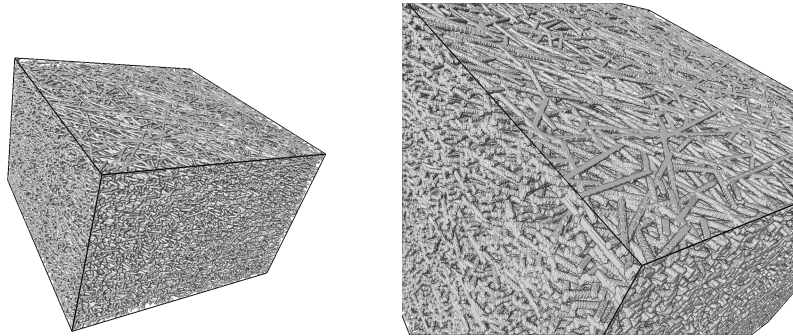


FIGURE 3.3 – *Milieu fibreux généré numériquement de porosité 0.75. A gauche le milieu en 3D, à droite un agrandissement sur les cylindres voxélisés.*

Avec les figures ci-dessus, on comprend la difficulté de résoudre les problèmes physiques de manière déterministe (via des équations aux dérivées partielles). Dans ces géométries complexes il est quasiment impossible d'envisager un maillage sans altérer la morphologie du matériau réel. On peut imaginer un maillage précis de ce type de géométrie mais cela ferait intervenir un très grand nombre de petites mailles. Le coût en mémoire et le temps de calcul seraient importants. Les différents travaux faisant intervenir un maillage de milieux fibreux simplifient considérablement la géométrie du matériau. Le volume du milieu considéré doit être très inférieur à celui présenté sur les figures 3.2 et 3.3, seulement quelques dizaines de cylindres peuvent être traités.

Dans d'autres cas un maillage grossier est construit sans tenir compte de la morphologie et chacune des mailles est considérée comme étant un milieu semi-transparent gris pouvant être anisotrope dont on estime les propriétés thermiques à l'aide de lois de mélange.

Pour s'assurer de la validité de la procédure de génération du milieu fibreux, on trace les fonctions de distribution des angles θ et ϕ caractérisant les orientations des cylindres générés et on les compare aux lois attendues. On reprend l'exemple du matériau fibreux à 0.75 de porosité (Fig.5.2), les résultats sont présentés sur la Fig.3.4. L'écart relatif maximal est de 5% pour la distribution de l'angle θ et de 11% pour la distribution de l'angle ϕ , ce qui valide la démarche. Néanmoins, ces écarts vont augmenter lorsque l'on générera des milieux à plus forte porosité. En effet, le nombre de cylindres va diminuer, et avec lui le nombre de tirages dans les deux lois statistiques.

Ce problème de représentativité du domaine de calcul sera résolu par l'hypothèse de milieu statistiquement homogène développée au paragraphe 3.1.3. Les résultats de transfert obtenus sur une dizaine voire une centaine d'échantillons fibreux de même porosité et de mêmes distributions des angles d'orientation seront moyennés. Cela diminuera fortement la variabilité des résultats de transfert liée à la génération statistique des échantillons, et ce pour n'importe quelle porosité. Cette vérification devra être effectuée pour chaque milieu généré.

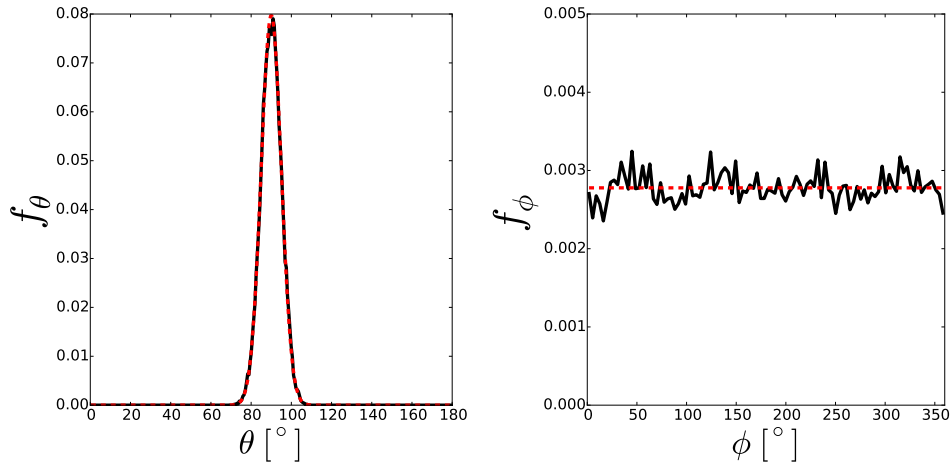


FIGURE 3.4 – Fonctions de distribution des angles θ et ϕ caractérisant l'orientation des cylindres du milieu fibreux de porosité 0.75. (- -) Distributions souhaitées. (-) Distributions calculées après avoir généré le milieu.

3.1.2 Voxélisation

Dans le but de diminuer le temps de calcul, il est intéressant de subdiviser le milieu généré en voxels dans lesquels on va sauvegarder les caractéristiques de chaque cylindre les traversant. Les méthodes de résolution que l'on va aborder dans les parties suivantes sont statistiques et nécessitent une connaissance des interfaces et du volume de chaque phase. Les algorithmes de caractérisation du matériau font appel à ces voxels qui ne chargent en mémoire qu'une petite partie des cylindres du milieu, ce qui va fortement accélérer les calculs.

Prenons l'exemple de rayons lancés depuis le volume du matériau à l'image d'une émission de rayonnement. On lance un rayon depuis un point M situé dans la phase "hors des cylindres" dans une direction \mathbf{u} , l'interface sera localisée par la distance ME où E est le point le plus proche de M de tous les points d'intersection du rayon avec les cylindres. Si maintenant le point M se trouve dans la phase "dans les cylindres" il faut vérifier que le point E n'est pas localisé dans le volume d'un autre cylindre.

La procédure de recherche de l'interface est décrite comme suit :

- 1) On identifie le voxel dans lequel se trouve le point M d'où est issu un rayon.
- 2) On charge en mémoire uniquement les cylindres traversant ce voxel.
- 3) On cherche les intersections E du rayon avec tous les cylindres. Si M est hors des cylindres, alors le point E retenu est tel que ME est la distance d'intersection la plus courte. Si M est dans les cylindres, alors le point E retenu est tel que ME est la distance d'intersection la plus courte et

que E appartient à un seul cylindre.

- 4) Si on ne trouve pas d'intersections du rayon avec les cylindres, alors le rayon intersecte le bord du voxel en un point B . Dans ce cas, on considère le voxel voisin passant par B et on charge en mémoire les cylindres le traversant. Ensuite, on recommence la recherche des intersections en partant cette fois du point B . On continue cette procédure, illustrée à la figure 3.5, jusqu'à trouver le point E .

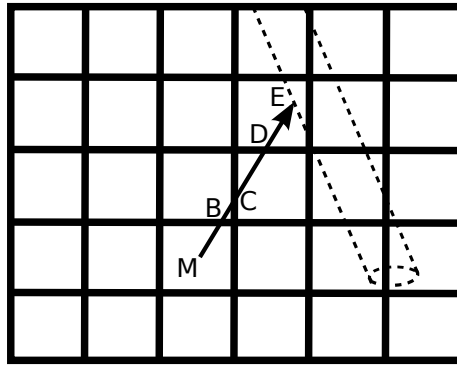


FIGURE 3.5 – Principe permettant de rechercher les intersections entre les rayons émis et les cylindres au sein d'un milieu voxelisé.

3.1.3 Hypothèse du milieu statistiquement homogène

On étudie le transfert thermique au sein d'un milieu fibreux statistiquement homogène en porosité. Pour cela, il faut que la condition : $\frac{\Delta\Pi}{\Pi} \ll 1$ soit vérifiée. Dans les parties suivantes, qui traitent de la modélisation du transfert thermique, le pas de discrétisation est de l'ordre du diamètre des cylindres d . Dans ce cas, la condition $\frac{\Delta\Pi}{\Pi} \ll 1$ doit être vérifiée sur une épaisseur de d . Or, si on ne génère qu'un seul milieu fibreux particulier, on peut s'attendre à ce que le profil de porosité $\Pi(z)$ varie.

Deux techniques permettent d'assurer l'hypothèse du milieu statistiquement homogène :

- La première est de rendre le milieu infini dans les directions x et y . Dans ce cas, toutes les orientations possibles des cylindres sont présentes. Plus généralement, toutes les configurations d'enchevêtrement des cylindres sont représentées et la porosité du milieu sur une épaisseur d suivant la direction z est rigoureusement égale à la porosité globale du matériau. En pratique, on choisit la taille de la boîte de calcul dans les directions x et y égale à au moins 100 fois le diamètre des cylindres. Cette technique est adaptée pour les codes de résolution séquentiels ; mais ici, du fait du grand nombre de cylindres générés dans les directions x et y , cela

impacte le temps de calcul.

- La deuxième technique consiste à conserver une boîte de calcul relativement "petite", de taille du même ordre de grandeur que la taille d'un cylindre (de l'ordre de d). Puis, on génère un grand nombre de domaines de calcul avec les mêmes paramètres d'entrée (porosité, distributions des angles d'orientation, propriétés thermiques des phases en présence). Le résultat de caractérisation et de transfert pour le milieu équivalent statistiquement homogène sera la moyenne des résultats obtenus sur les différents domaines générés. Cette technique est adaptée pour les codes parallélisés où chaque processus traite un domaine particulier. Quand tous les processus sont terminés, on moyenne le tout afin d'obtenir le résultat du milieu équivalent statistiquement homogène. Ainsi, chaque processus caractérise un "petit" milieu de manière indépendante : le calcul est donc rapide.

La modélisation du transfert thermique dans les milieux fibreux statistiquement homogènes traitée dans les parties suivantes repose sur l'hypothèse de l'indépendance statistique des phénomènes (méthode de Monte Carlo, processus Brownien), il est donc intéressant d'utiliser des codes de résolution parallélisés. Ce sera donc la deuxième technique qui sera retenue : on générera un grand nombre de "petits" milieux fibreux.

Le tableau 3.1 montre l'écart relatif de porosité pour le milieu fibreux de la figure 3.2 en fonction de la taille du milieu dans les directions x et y et en fonction du nombre de milieux générés. Tous les milieux considérés ici ont une taille dans la direction z égale à d . On peut dire que le milieu est statistiquement homogène quand $\frac{\Delta\Pi}{\Pi} < 1\%$, le cas $D_x = D_y = 25d$ en générant 10 milieux est un bon compromis. Par la suite, pour caractériser et calculer le transfert sur des matériaux de porosité $\Pi = 0.75$, on travaillera sur des milieux de taille supérieure à $25d$ et les résultats seront moyennés sur au moins 10 milieux.

Nombre de milieux générés \ Taille	d	$10d$	$20d$	$25d$
1	35%	8.69%	7.87%	7.01%
5	12.1%	5.78%	3.07%	2.56%
10	9.8%	3.05%	1.65%	1.05%
100	6.85%	1.89%	0.17%	0.08%

TABLE 3.1 – *Ecart relatif de porosité $\frac{\Delta\Pi}{\Pi}$ en fonction du nombre de milieux générés et de leur taille dans les directions x et y .*

3.2 Dimension du milieu fibreux

A ce stade, il est nécessaire de se définir une taille du milieu à caractériser. Les phases conductrices sont caractérisées par leur conductivité phonique. Pour résoudre le problème de conduction le VER (Volume Élémentaire Représentatif) doit respecter l'hypothèse de milieu statistiquement homogène à l'échelle d'un cylindre, de l'ordre de d , et la représentativité des fonctions de distribution d'orientation des cylindres. Du fait des justifications précédentes, la taille du VER doit être d'au moins $25d$.

Concernant la partie radiative, les phases en présence peuvent être de nature non Beerienne, et c'est l'algorithme de caractérisation radiative développé par Tancrez et Taine et repris par Zeghondi, Chahlaoui et Zarrouati, présenté à la section 1.1.2.4, qui sera utilisé. On rappelle que le principe repose sur la simulation du trajet d'un grand nombre de rayons depuis leur émission dans le volume de chaque phase du milieu jusqu'à leur extinction par absorption ou par diffusion aux interfaces séparant les phases. Le VER (Volume Élémentaire Représentatif) radiatif est ainsi défini par deux zones : un cube d'émission au sein duquel les rayons sont émis, et un parallélépipède d'extinction incluant le cube d'émission et au sein duquel les rayons doivent être éteints (Fig.3.6). Ceci impose deux contraintes sur la dimension du milieu fibreux :

- Le milieu à l'intérieur du cube d'émission doit lui aussi être statistiquement homogène et la distribution d'orientation des cylindres doit être représentative.
- La taille du parallélépipède d'extinction est définie par le critère $G_{\nu ext} > 99\%$ (critère choisi arbitrairement).

En cumulant les longueurs d'extinction, d'absorption et de diffusion on obtient les probabilités cumulées d'extinction $G_{\nu ext}$, d'absorption $P_{\nu a}$ et de diffusion $P_{\nu sc}$. Ces fonctions statistiques radiatives caractérisent tout milieu poreux, qu'il soit Beerien ou non. On approfondira le processus statistique de caractérisation radiative d'un milieu comportant plusieurs phases pouvant être de nature Beerienne ou non dans la partie suivante. Une application à nos milieux fibreux y sera également présentée.

On a vu précédemment que le milieu est homogène à partir d'une taille dans les directions x et y de $25d$, ce sera la taille du cube d'émission. Pour connaître la taille du parallélépipède d'extinction, on calcule les fonctions $G_{\nu ext}$ dans plusieurs directions $\mu = \cos\theta$ dans les deux phases (on rappelle que θ est l'angle entre la direction \mathbf{u} et la direction de transfert z) et on en déduit la distance pour laquelle la probabilité d'extinction dépasse 99%. Les résultats de caractérisation radiative sont présentés sur la Fig.3.7.

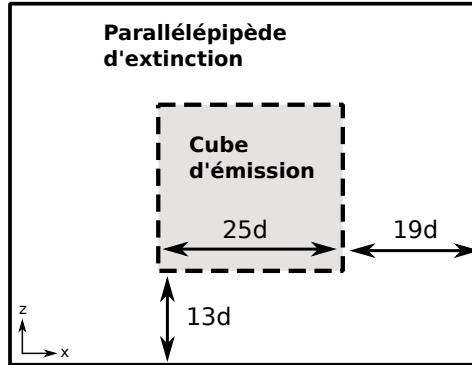


FIGURE 3.6 – Représentation de la zone d'émission des rayons et de la zone d'extinction au sein du milieu fibreux.

L'examen de ces deux graphes montre que la longueur pour laquelle 99% des rayons sont éteints dans la direction z ($\mu = \cos \theta = 1$) est de $13d$, et de $19d$ dans les directions x et y ($\mu = 0$). On en déduit la taille optimale du milieu fibreux de porosité 0.75 pour qu'il soit statistiquement homogène, que l'orientation des cylindres soit représentative et aussi qu'il soit suffisamment opaque au rayonnement : $D_x = D_y = 63d$ et $D_z = 51d$. Toute la démarche de dimensionnement du milieu que nous venons d'exposer doit être reprise si les paramètres morphologiques du matériau poreux changent (porosité, distribution d'orientation des cylindres, coefficient d'absorption).

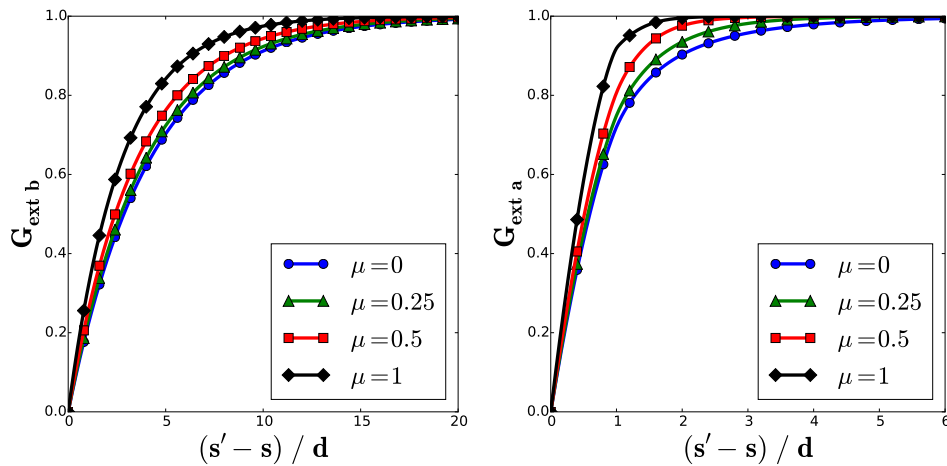


FIGURE 3.7 – Fonctions de probabilité cumulée d'extinction au sein des deux phases du milieu de porosité 0.75 suivant plusieurs directions $\mu = \cos \theta$. A gauche dans la phase transparente. A droite dans les fibres semi-transparentes non diffusantes avec $\kappa_v d = 0.3$.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le principe de génération d'un milieu fibreux statistiquement homogène. Il repose sur l'empilement de cylindres de mêmes tailles orientés suivant une loi de distribution donnée. Du fait du procédé de fabrication des feutres destinés à l'isolation thermique, les cylindres sont orientés de manière préférentielle dans le plan perpendiculaire à la direction du transfert z . Il en résulte que ce milieu est fortement anisotrope.

Pour qu'il soit statistiquement homogène et que l'orientation des cylindres soit représentative de la distribution souhaitée, une limite inférieure de taille du milieu dans les directions x et y a été définie. Les calculs de transfert thermique seront effectués sur plusieurs milieux et les moyennes de ces résultats permettront d'accéder aux propriétés thermiques du milieu fibreux statistiquement homogène.

Enfin, des premiers résultats de caractérisation radiative ont été présentés. L'extinction d'un rayonnement émis dans les deux phases du milieu fibreux suivant plusieurs directions a été caractérisée. Pour cela, on se base sur les travaux de Tancrez, Zeghondi, Chahlaoui et Zarrouati : on simule l'émission d'un grand nombre de rayons dans chacune des phases et on cumule les longueurs d'extinction pour calculer les fonctions de probabilité cumulée d'extinction $G_{\nu ext}$. Ces fonctions caractérisent le phénomène d'extinction dans les deux phases, de l'optiquement mince à l'optiquement épais, et permettent de définir la taille du VER radiatif. Avec les fonctions de probabilité cumulée d'absorption $P_{\nu a}$ et de diffusion $P_{\nu sc}$ et avec la fonction de phase p_{ν} le rayonnement est caractérisé et le problème radiatif peut être résolu. Ces notions seront reprises et développées dans la partie suivante portant sur la caractérisation, la modélisation et la résolution du problème radiatif au sein d'un milieu fibreux comportant une phase semi-transparente non diffusante et une phase transparente.

Troisième partie

Modélisation statistique du
transfert radiatif au sein du
milieu fibreux

Chapitre 4

Comments over homogenisation scales for interfacial emission and scattering by a divided medium : Beerian and non Beerian behaviours

Résumé

Ce chapitre, écrit en anglais, a été publié sous forme d'article scientifique dans le journal : *International Journal of Heat and Mass Transfer* (IJHMT) [Dauvois et al. (2016)].

Les méthodes statistiques de caractérisation radiative des milieux poreux sont généralement basées sur le tir de rayons émis aléatoirement de points appartenant au volume des phases. Or, quand le milieu possède une ou plusieurs phases opaque, l'émission et une partie des diffusions sont surfaciques, et on peut s'attendre à ce que les fonctions de distribution des directions d'émission et de diffusion soient corrélées à la fonction de distribution des normales aux surfaces. Aussi, tirer numériquement des rayons issus de points appartenant au volume est beaucoup plus facile que tirer depuis les surfaces. Dans ce chapitre, on discute de la validité de la méthode statistique basée sur des tirs en volume et de ses limitations pour caractériser des milieux Beeriens et non Beeriens.

Dans des milieux à géométrie complexe, la loi de Beer-Lambert qui permet d'exprimer la transmittivité n'est pas toujours vérifiée. Dans ce cas, le matériau est caractérisé par des fonctions de probabilité cumulée associées aux différents phénomènes en jeu (extinction, absorption et diffusion). On montre que les échantillons fibreux générés numériquement par la méthode du chapitre

3 comportent une phase fibreuse de nature non Beerienne plongée dans une phase transparente de nature Beerienne.

De plus, on montre que dans un milieu Beerien il n'y a aucune corrélation statistique entre la distribution des directions d'incidence des rayons impactant les interfaces et la distribution des directions de leur émission ou de leur diffusion. Autrement dit, chaque rayon peut être tiré de manière indépendante sans connaissance de son passé : c'est une absence de mémoire. La méthode statistique consistant à tirer des rayons issus de points appartenant au volume des phases est la méthode la plus rapide et la plus précise pour caractériser un milieu Beerien. Si on souhaite caractériser un milieu composé d'une phase opaque et d'une phase transparente (ou semi-transparente) Beerienne, on conseille de tirer les rayons aléatoirement depuis le volume de la phase transparente (ou semi-transparente).

Dans un milieu non Beerien, il y a corrélation statistique entre la distribution des directions d'incidence des rayons impactant les interfaces et la distribution des directions de leur émission ou de leur diffusion : c'est un effet mémoire. Chaque diffusion répartit l'énergie différemment et de ce fait les propriétés radiatives changent. Dans ce cas, la méthode statistique de caractérisation radiative consistera à suivre le trajet des rayons depuis leur émission (dans un volume ou depuis une interface) jusqu'à leur absorption (en volume ou à une interface). Si on souhaite caractériser un milieu composé d'une phase opaque et d'une phase transparente (ou semi-transparente) non Beerienne, les rayons doivent être nécessairement tirés depuis les surfaces opaques, et des fonctions de probabilité cumulée associées à chaque diffusion doivent être calculées.

On présente des résultats de caractérisation radiative d'un milieu fibreux composé de fibres opaques plongées dans une phase transparente, puis d'un milieu fibreux composé de fibres semi-transparentes non diffusantes plongées dans une phase opaque. Plus généralement, les outils de caractérisation qui sont présentés peuvent aussi être utilisés dans le cas d'un milieu composé de deux phases semi-transparentes.

Introduction

Statistical techniques of characterisation of the radiative properties of homogenised phases of a porous medium based on extinction cumulative distribution functions $G_{ext\nu}$ and scattering cumulative probabilities $P_{sc\nu}$, have been first developed by Tancrez and Taine [Tancrez and Taine (2004)] and used in many recent works, for media with Opaque and Transparent phases [Tancrez and Taine (2004), Zeghondy et al. (2006a), Petrasch et al. (2007), Bellet et al. (2009), Haussener et al. (2010), Haussener et al. (2010)] (OT case), with Opaque

and Semi Transparent phases [Chahlafla et al. (2012), Haussener et al. (2009)] (OST case), and will be used for media with two Semi Transparent phases or a Semi Transparent phase and a Transparent one [Taine and Enguehard (2015a), Taine and Enguehard (2015b)] (ST2 and STT cases).

A perfectly homogeneous and isotropic medium, an absorbing gas for instance, follows the extinction Beer's law : Exponential extinction, characterised by an extinction coefficient β_ν . A homogenised phase of porous medium can be : i) Strongly non Beerian [Tancrez and Taine (2004), Bellet et al. (2009), Chahlafla et al. (2012), Loretz et al. (2008)]; It is the general case ; ii) Approximately Beerian, as many foams [Zeghondy et al. (2006a)]; iii) Rigorously Beerian, as the space between statistically homogeneous configurations of overlapping or non overlapping spheres [Tancrez and Taine (2004)] or cylinders.

In most of the previous works $G_{ext\nu}$ is determined by a Statistical Monte Carlo method, based on representative shots issued from random points belonging to volume zones, in all directions [Tancrez and Taine (2004)] for statistically isotropic media, or in elementary solid angles [Zeghondy et al. (2006a), Bellet et al. (2009), Chahlafla et al. (2012)] for statistically anisotropic media, in some cases from surface elements of a phase [Zarrouati et al. (2015)], which are not interfaces between phases. But in the OT case, emission and scattering source terms belong to opaque interfaces ; Interfacial source terms also exist in OST case. When is it equivalent to shoot rays from random points within the volume of the real phase or from points of the interfaces ? This question is detailed in Sec.4.1.3. A physical explanation, based on the homogenisation spatial scales, is brought in Sec.4.2.

When a Beerian model is valid, a precise determination of $G_{ext\nu}$ and $P_{sc\nu}$ allows accurate values of the extinction and scattering coefficients β_ν and σ_ν to be obtained [Tancrez and Taine (2004), Zeghondy et al. (2006a), Petrasch et al. (2007)], and consequently values of the absorption coefficient κ_ν . In these conditions, by following the classical approach of radiation transfer, based on Ideal Thermal Equilibrium (ITE) conditions, the emission source term is expressed as $\Pi \kappa_\nu n_\nu^2 I_\nu^o(T)$, where Π and n_ν are the volume fraction and the refractive index of the homogenised phase. When a homogenised phase is strongly non Beerian, extinction by this phase is exhaustively characterised by $G_{ext\nu}$ and the scattering source term from $P_{sc\nu}$ and a general scattering phase function p_ν . A key question then arises : How to model the emission source term due to an opaque interface in the OT and OST cases, when an absorption coefficient has no more physical meaning ? Taine et al. [Taine et al. (2010)] have proposed to use the generalised absorption coefficient at equilibrium K_ν , in principle valid for locally optically thick media, and have introduced it in a Generalised Radiative Transfer Equation (GRTE), also directly based on $G_{ext\nu}$, $P_{sc\nu}$ and p_ν . This approach has been applied by Chahlafla et al. [Chahlafla et al. (2012)], but in the particular conditions in which the GRTE degenerates into a classical Beerian RTE, for locally optically thick media : A radiative conductivity tensor has been introduced for characterising degraded rod bundles of a nuclear core

in the conditions of a severe accident.

Finally, the validity and the limitations of previously cited studies are discussed in Sec.4.3.

4.1 Modeling of radiation issued from interfaces (OT and OST cases)

This Section first deals with the modeling of radiation issued from an interfacial emission or scattering source term in the OT and OST cases, more precisely with the modeling of the associated extinction cumulative distribution function G_{ext}^S , of the scattering or absorption cumulative probability P_{sc}^S or P_a^S and of the scattering phase function p^S [Tancrez and Taine (2004), Zeghondy et al. (2006a), Taine et al. (2010), Zarrouati et al. (2015)]. *The superscript S means, here and in the following, that a considered quantity is issued from an interfacial source term.* The internal scattering, considered here within a homogenised phase, corresponds in the real porous medium to interfacial reflection. For the sake of simplicity, this work is limited to statistically homogeneous but possibly strongly anisotropic porous media. A case of strongly non homogeneous medium has been studied in Ref. [Zarrouati et al. (2015)].

In the general case, the reflection law is in principle characterised by a bidirectional reflectivity, but the study will be limited for the sake of simplicity and realism, to the case of a Fresnel's law. Emission by opaque interfaces is characterised by an emissivity equal to the absorptivity $\alpha_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{n})$, where \mathbf{u} is the emission direction and $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ the normal unit vector at the emission point $M(\mathbf{r})$, oriented towards the (semi) transparent medium.

The radiative statistical functions are *built within the real porous medium*, from data of tomography samples or from its analytically defined geometry. But, they will be *used in the continuous homogenised phase* considered as a semi transparent medium, in which emission and absorption by interfacial elements become emission and absorption by volume elements, reflection by interfacial elements becomes internal scattering by volume elements.

4.1.1 Reflection law (non Beerian homogenised phase)

In OT case, the extinction cumulative distribution function $G'_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ corresponding to *interfacial emission source terms* in the direction \mathbf{u} writes for a general interfacial reflection law

$$G'_{ext}(\mathbf{u}, s' - s) = \frac{1}{\delta\Omega(\mathbf{u})} \int_s^{s'} \int_{\Sigma/V/\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) > 0} \int_{\delta\Omega(\mathbf{u})} f'_e[\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})] \delta[s'' - s_{ext}(\mathbf{r}, \mathbf{u}')] d\Omega(\mathbf{u}') d\mathbf{r} ds'' \quad (4.1)$$

Note that here and in the following the superscript $'$ designates any quantity

associated with interfacial emission. In Equation (4.1), the summations are carried out : i) Over all directions \mathbf{u}' of an elementary solid angle $\delta\Omega(\mathbf{u})$, around the direction \mathbf{u} of the fixed frame ; ii) Over all the source points $M(\mathbf{r})$ of an interfacial surface Σ belonging to a volume V of the porous medium such that : $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) > 0$. The weight of any current point M is proportional to $\alpha_\nu[\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})]$. Consequently, instead to be weighted by $1/\Sigma$, the summation over \mathbf{r} is weighted by the normalised function

$$f'_e[\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})] = \frac{\alpha_\nu[\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})]}{\int_{\Sigma/V/\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) > 0} \alpha_\nu[\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})] d\mathbf{r}} \quad (4.2)$$

iii) Over all the abscissas s'' along an axis of direction \mathbf{u} ; $s_{ext}(\mathbf{r}, \mathbf{u}')$ is the abscissa of the extinction point in the OT case ; δ is the Dirac distribution.

In OST case, Equation (4.1) is also valid but now the extinction point E can also belong to the semi transparent phase. Its abscissa $s_{ext}(\mathbf{r}, \mathbf{u}', \beta_\nu)$ is then a point M belonging to the phase volume (s_{ext} also depends on the extinction coefficient β_ν of this phase) or to an interface.

Moreover, in OST case, an isotropic emission also occurs within the volume of the semi transparent phase. As emission is in this case isotropic, all the volume source points have the same weight. The extinction cumulative distribution function $G_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ associated with *isotropic volume emission* simply writes

$$G_{ext}(\mathbf{u}, s' - s) = \frac{1}{\Pi V} \frac{1}{\delta\Omega(\mathbf{u})} \int_s^{s'} \int_{\Pi V} \int_{\delta\Omega(\mathbf{u})} \delta[s'' - s_{ext}(\mathbf{r}, \mathbf{u}', \beta_\nu)] d\Omega(\mathbf{u}') d\mathbf{r} ds'' \quad (4.3)$$

where the spatial summation is carried out within all the volume ΠV of the semi transparent phase, of volume fraction Π .

But, *both for OT and OST cases*, if the homogenised phase is non Beerian and if a general reflection law or a Fresnel's law is used, the knowledge of the intensity at a point N does not allow the global radiation scattered at this point to be determined [Taine et al. (2010)]. It is due to a memory effect associated with every source term which has partially generated this intensity. More precisely, extinction by scattering of every component of this intensity at the point N has to be correlated with its emission or scattering source term at a point M and with the transmission through the medium from M to N .

On the other hand, a scattering source term is considered as non correlated with the original components extinguished by scattering, which have generated it. This assumption is based on the fact that a scattering source term, at a given point in a given direction \mathbf{u} , jams the extremely different contributions issued from all the rays extinguished in 4π steradians at the same point. Consequently,

every set of consecutive internal scattering events can be independently treated. The first set of scattering events corresponds in the real medium to the first reflection phenomena, the second set to the second reflection phenomena, etc. Strongly different extinction cumulative distribution functions are then associated with the successive interfacial scattering source terms corresponding to these sets of scattering events.

The n^{th} set of interfacial scattering events is characterised at a current interfacial point $M(\mathbf{r})$ of the real medium by $f_{sc}^{S(n)}(\mathbf{u}', \mathbf{r})$, interfacial distribution function of the scattered directions \mathbf{u}' in the fixed frame, which depends, at local scale, on the non correlated cumulated incident contributions, of current directions $\mathbf{u}'^{(n-1)}$, issued from 2π steradians. The determination of this quantity is developed in appendix B. The extinction cumulative distribution function associated with this n^{th} set of interfacial scattering events is similar to Equation (4.1), *i.e.*

$$G_{ext}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s) = \int_s^{s'} \int_{\Sigma^{(n)}/V/\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \geq 0} \int_{\delta\Omega(\mathbf{u})} f_{sc}^{S(n)}(\mathbf{u}', \mathbf{r}) \delta[s'' - s_{ext}(\mathbf{r}, \mathbf{u}', \beta_\nu)] d\Omega(\mathbf{u}') d\mathbf{r} ds'' \quad (4.4)$$

Note that here and in the following the superscript S designates any quantity associated with interfacial scattering. In Equation (4.4), the summations are carried out : i) Over all directions \mathbf{u}' belonging to $\delta\Omega(\mathbf{u})$; ii) Over all the source points $M(\mathbf{r})$ of the interfacial surface $\Sigma^{(n)}$, part of the interfaces belonging to a volume V of the porous medium which is illuminated by at least one of the $(n - 1)^{th}$ sets of scattering events and contributes to scattering in $d\Omega(\mathbf{u}')$. iii) Over all the abscissa s'' along the axis of direction \mathbf{u}' . The abscissa of the extinction point $s_{ext}(\mathbf{r}, \mathbf{u}', \beta_\nu)$ belongs to an opaque interface, or possibly to the phase volume in the OST case.

A first distribution function of the scattered directions $f_e'^{S(1)}(\mathbf{u}', \mathbf{r})$ and the corresponding extinction cumulative distribution function $G_{ext}'^{S(1)}$ are associated with interfacial emission as source term in both OT and OST cases. In OST case, another first distribution function of the scattered directions $f_e^{S(1)}(\mathbf{u}', \mathbf{r})$ and the corresponding extinction cumulative distribution function $G_{ext}^{S(1)}$ are associated with isotropic volume emission as source terms. Then, two distribution functions of the scattered directions $f_{sc}'^{S(2)}(\mathbf{u}', \mathbf{r})$ and $f_{sc}^{S(2)}(\mathbf{u}', \mathbf{r})$ and the corresponding $G_{ext}'^{S(2)}$ and $G_{ext}^{S(2)}$ are associated with the second sets of interfacial scattering events ; etc. In the general case, all the previously cited $f_{sc}'^{S(n)}(\mathbf{u}', \mathbf{r})$ and $f_{sc}^{S(n)}(\mathbf{u}', \mathbf{r})$ and extinction cumulative distribution functions differ. But they are simply determined by a Monte Carlo method, briefly presented in appendix B.

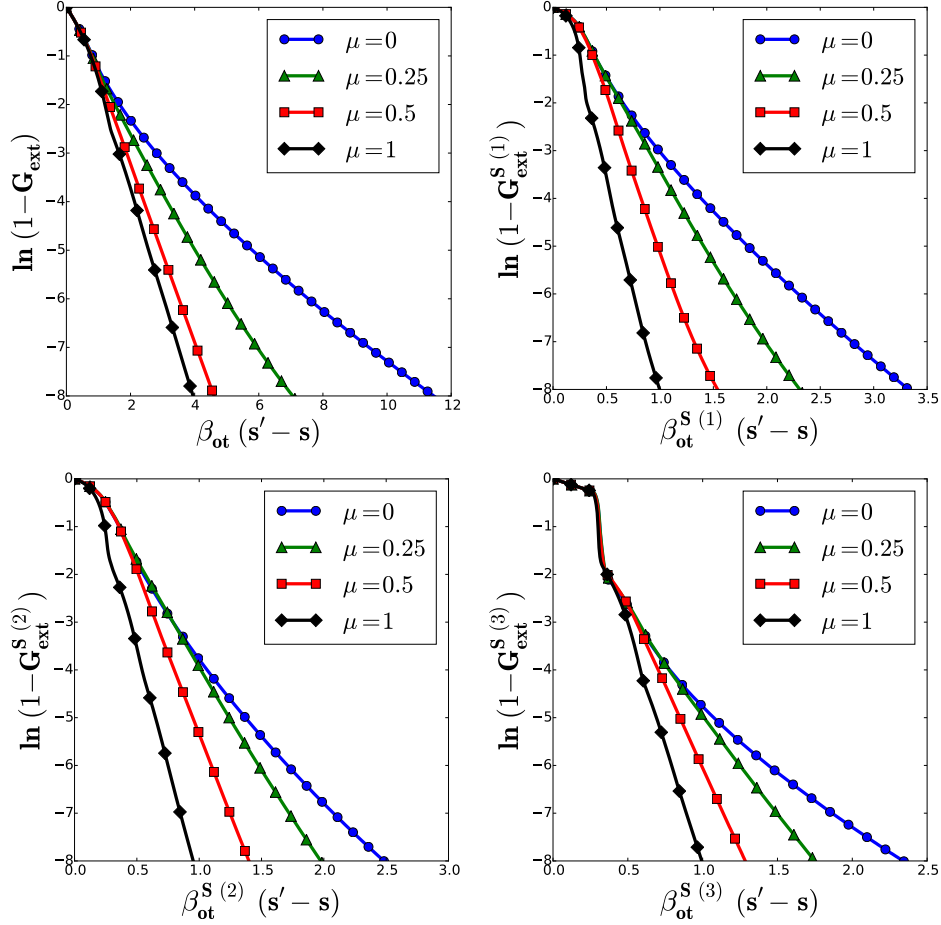


FIGURE 4.1 – Extinction cumulative distribution functions associated with semi transparent overlapping cylinders within an opaque phase (OST non Beerian case). In all cases : Upper left : G_{ext} issued from random volume isotropic emission points ; Upper right : $G_{ext}^{S(1)}$ associated with the first set of internally scattered rays ; Lower left : $G_{ext}^{S(2)}$ associated with the second set of internally scattered rays ; Lower right : $G_{ext}^{S(3)}$ associated with the third set of internally scattered rays ; $\kappa_v d = 0.3$.

Some examples of extinction cumulative distribution functions are shown in Fig.4.1, for a set of overlapping absorbing cylinders of diameter $d = 20\mu m$, length $L = 100D$ and absorption optical thickness $\kappa d = 0.3$, in an opaque medium (OST case). The centers of the cylinders have random locations, the unit vectors of their axes $\mathbf{u}_C(\theta_C, \phi_C)$ are characterised by random values of ϕ_C and a Gaussian distribution of θ_C centered in the plane normal to the z axis, with a standard deviation equal to 5° . The medium is statistically homogeneous, statistically isotropic in any plane perpendicular to the z axis, but strongly anisotropic in other directions.

In the following, all the extinction cumulative distribution functions are plotted

vs $\beta_{ot}(s' - s)$, where β_{ot} is the extinction coefficient at the optically thin limit determined by the derivative of these functions at the origin, *i.e.*

$$\beta_{ot} = \frac{dG_{ext}}{ds'}(\mathbf{u}, s' - s = 0) \quad (4.5)$$

Note that the values of β_{ot} differ for the different extinction cumulative distribution functions.

Consider first $G_{ext}(\mu)$ associated with isotropic volume emission source terms and where μ is the director cosine of the direction \mathbf{u} vs the z axis. $G_{ext}(\mu)$ has been determined from a huge number of shots issued from random volume emission points within the semi transparent propagation phase in an elementary solid angle $\delta\Omega$. The homogenised phase is strongly non Beerian as shown in upper left Fig.4.1 : Indeed, $\ln(1 - G_{ext})$ strongly deviates from a straight line for any μ value.

In a second step, $G_{ext}^{S(1)}(\mu)$ has been determined by using the first set of reflected rays, issued from the initial rays emitted within the semi transparent phase volume. An arbitrary reflection law is defined by the Fresnel's law corresponding to a value $n_o/n_p = 2$ of the ratio of the refractive index of the opaque phase to the one of the propagation phase. As shown in upper right Fig.4.1, $G_{ext}^{S(1)}(\mu)$ strongly differs from $G_{ext}(\mu)$.

In a third step, $G_{ext}^{S(2)}(\mu)$ and $G_{ext}^{S(3)}(\mu)$ have been determined by using the second and third sets of reflected rays, issued from the first and second sets of reflected ones, respectively . As shown in the two lower Figs.4.1, $G_{ext}(\mu)$, $G_{ext}^{S(1)}(\mu)$, $G_{ext}^{S(2)}(\mu)$ and $G_{ext}^{S(3)}(\mu)$ all strongly differ.

The corresponding probabilities of absorption $\mathcal{P}_{\nu a}^{S(n)}(\mathbf{u})$ and scattering $\mathcal{P}_{\nu sc}^{S(n)}(\mathbf{u})$ are determined in parallel with the general phase functions $p_{\nu}^{S(n)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{sc})$. The scattering cumulative probability $P_{\nu sc}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s)$ is then equal to :

$\mathcal{P}_{sc}^{S(n)}(\mathbf{u}) G_{ext}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s)$; and the absorption cumulative probability $P_{\nu a}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s)$ to : $\mathcal{P}_a^{S(n)}(\mathbf{u}) G_{ext}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s)$.

If we account for the system symmetries the phase function depends in principle on μ director cosine of the incidence direction, on μ_{sc} director cosine of the internally scattered one and on the azimuth difference $\phi_{sc} - \phi$. As this last dependence is of weak interest for radiative transfer, the phase functions have been averaged over $\phi_{sc} - \phi$ values. The averaged phase functions associated with incident rays issued from the isotropic volume emission points and from the first, second and third sets of scattered rays also strongly differ, as shown in Fig.4.2.

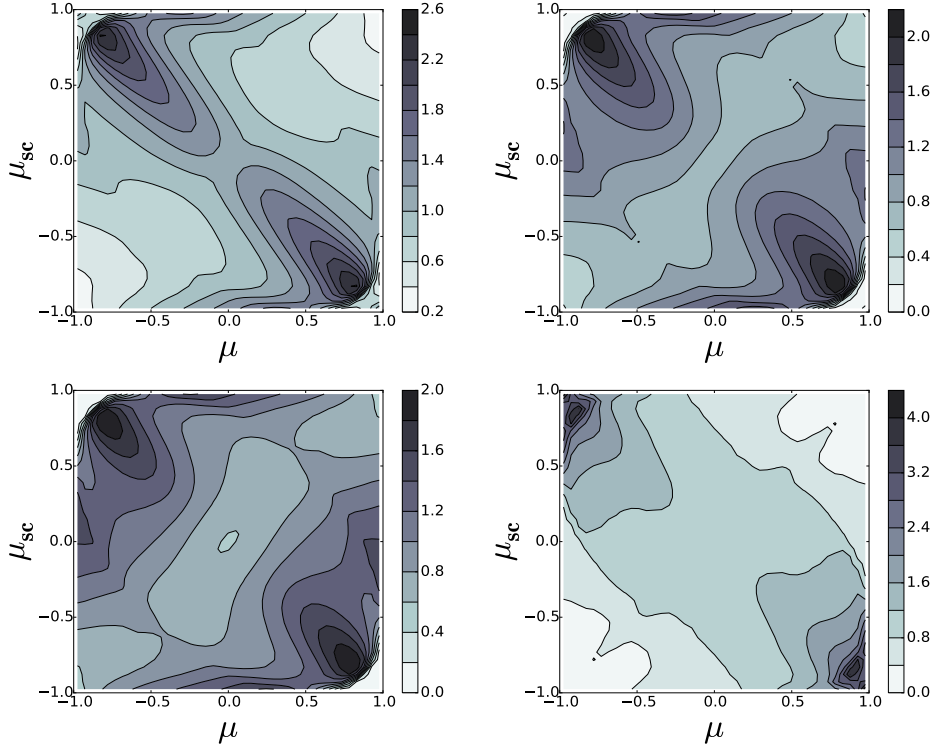


FIGURE 4.2 – Averaged phase functions associated with semi transparent overlapping cylinders within an opaque phase (OST non Beerian case) ; Upper left : $p(\mu, \mu_{sc})$ issued from random volume isotropic emission points ; Upper right : $p^{S(1)}(\mu, \mu_{sc})$ associated with the first set of internally scattered rays ; Lower left : $p^{S(2)}(\mu, \mu_{sc})$ associated with the second set of internally scattered rays ; Lower right : $p^{S(3)}(\mu, \mu_{sc})$ associated with the third set of internally scattered rays ; $\kappa_v d = 0.3$.

4.1.2 Diffuse reflection (non Beerian homogenised phase)

Consider now, in OT case, the popular assumption of a *diffuse reflection law at the interfaces*, for a general non Beerian homogenised phase. In these conditions, the scattered local intensity is isotropic as the emitted local intensity. Moreover, emitted and scattered rays are characterised by the same distribution function f'^S which simply is a scalar. Consequently, the modeling of the extinction cumulative distribution functions is strongly simplified.

The *unique extinction cumulative distribution function* $G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ of the homogenised phase associated with *diffuse interfacial elements* then writes in OT case, for both emission and scattering source terms,

$$G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s) = \frac{1}{\delta\Sigma} \frac{1}{\delta\Omega} \int_s^{s'} \int_{\delta\Omega/\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}<0} \int_{\delta\Sigma/V} \delta[s'' - s_{ext}(\mathbf{r}, \mathbf{u})] \, d\mathbf{r} \, d\Omega(\mathbf{u}) \, ds'' \quad (4.6)$$

where $s' - s$ is in fact the length of the chord between the current inter-

facial source point $M(s)$ and the current interfacial extinction point $E(s')$. $G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ is interpreted as the cumulative distribution function of the chords ME of length $s' - s$; As $G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ is then a purely geometrical quantity, it does not depend on frequency. More commonly, $G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ is also equal to $1 - \tau'{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$, where $\tau'{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ is the transmissivity from s to s' in direction \mathbf{u} .

Similarly, $P'_{\nu sc}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$, or $P'_{\nu a}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$, is the probability that a radiation issued from an interfacial emission or scattering source point $M(s)$ is scattered, or absorbed, by an interface before the distance $s' - s$. For the considered diffuse reflection law characterised by an absorptivity α_ν , $P'_{\nu sc}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ is simply equal to $(1 - \alpha_\nu) G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ and $P'_{\nu a}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ to $\alpha_\nu G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$.

From a mathematical point of view, $1 - G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ characterising a diffuse reflection law, transmissivity from s to s' in the direction \mathbf{u} in the homogenised phase, is proportional to the distribution function $F_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ of the segments ME , now joining a current phase volume point $M(s)$ to the current extinction point $E(s')$ in a given direction \mathbf{u} . $F_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ is in fact the derivative of $G_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$, corresponding to the *extinction cumulative distribution function associated with volume isotropic source points*. As the transmissivity $1 - G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ belongs to the range $[0, 1]$, $G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ is equal to

$$G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s) = 1 - \frac{F_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)}{F_{ext}(\mathbf{u}, 0)}. \quad (4.7)$$

$G'_{ext}{}^S$ associated with a diffuse reflection law is finally linked to G_{ext} by

$$G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s) = 1 - \left(\frac{d}{ds'} G_{ext}(\mathbf{u}, s' - s) / \frac{d}{ds'} G_{ext}(\mathbf{u}, 0) \right). \quad (4.8)$$

Equation (4.8) is valid for any non Beerian homogenised phase in the OT case, when the opaque phase is characterised by a diffuse reflection law.

In a medium with semi transparent and opaque phases (OST case), extinction by the real Beerian semi transparent phase is statistically independent of extinction by the homogenised non Beerian phase associated with interfacial elements. Consequently, the global transmissivity of the medium simply is the product of the transmissivities, *i.e.*

$$G'_{ext\nu}{}^S(\mathbf{u}, s' - s) = 1 - \left(\exp[-\beta_\nu(s' - s)] [1 - G'_{extt}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)] \right), \quad (4.9)$$

where $G'_{extt}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ is the extinction cumulative distribution function of the corresponding porous medium with a transparent phase (OT case).

4.1.3 Beerian homogenised phase (All types of reflection)

Consider first a medium with a transparent and an opaque phase, characterised by a *diffuse reflection law*. It is now assumed that $G_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$, the cumulative extinction distribution function associated with random isotropic source points (for instance emission points) within the transparent phase is Beerian, *i.e.* equal to $1 - \exp[-\beta(\mathbf{u})(s' - s)]$, where $\beta(\mathbf{u})$ is an extinction coefficient, a priori depending on the direction \mathbf{u} . From Equation (4.8), $G'_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ is then also equal to $G_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$. In these conditions, both for a scattering or an emission source term in the direction \mathbf{u} , the interfacial cumulative distribution function associated with a diffuse reflection law then simply writes in the OT case

$$G'_{ext}(\mathbf{u}, s' - s) = G_{ext}(\mathbf{u}, s' - s) = 1 - \exp[-\beta(\mathbf{u})(s' - s)]. \quad (4.10)$$

For a given direction \mathbf{u} , the same distribution function of the lengths characterises both the chords between interfacial points and the segments between volume points and interfacial points. In practice, $G_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ is generally used instead of $G'_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$, as for instance in left Fig.4.3, because its determination is simpler and more accurate.

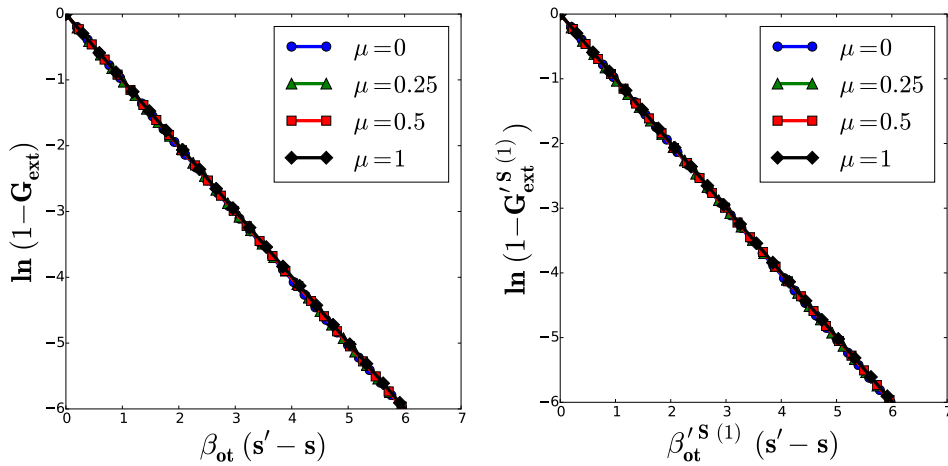


FIGURE 4.3 – Extinction cumulative distribution functions associated with the transparent propagation phase between overlapping opaque cylinders (OT Beerian case); Left : G_{ext} issued from random isotropic volume points, equal to $G'_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ associated with a diffuse reflection law; Right : $G'_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)^{(1)}$ associated with the first set of scattered rays following a Fresnel's law.

The same medium is now assumed characterised by a *Fresnel's reflection law*. The right Figure 4.3 compares, for instance, the extinction cumulative distri-

bution function $G_{ext}'^{S(1)}$ associated with the first set of scattered rays following a Fresnel's law with the previous result $G_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$. Note that the extinction coefficients at the optically thin limit associated with the two extinction distribution functions $\beta_{ot}'^{S(1)}$ and β_{ot} are exactly equal. As the normalised functions $\ln[1 - G_{ext}'^{S(1)}]$ and $\ln[1 - G_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)]$ are identical, the same extinction coefficient $\beta(\mu)$, also equal to $\beta_{ot}'^{S(1)}$ and β_{ot} , exhaustively characterises the two whole extinction cumulative distribution functions, which are Beerian.

This property is general, for a Beerian homogenised phase in the OT case, whatever the reflection law at the interfaces : The extinction cumulative distribution function associated with any set (n) of scattered rays is Beerian and, in practice, determined from random isotropic volume points within the phase. A physical explanation of this property is given in Sec.4.2.

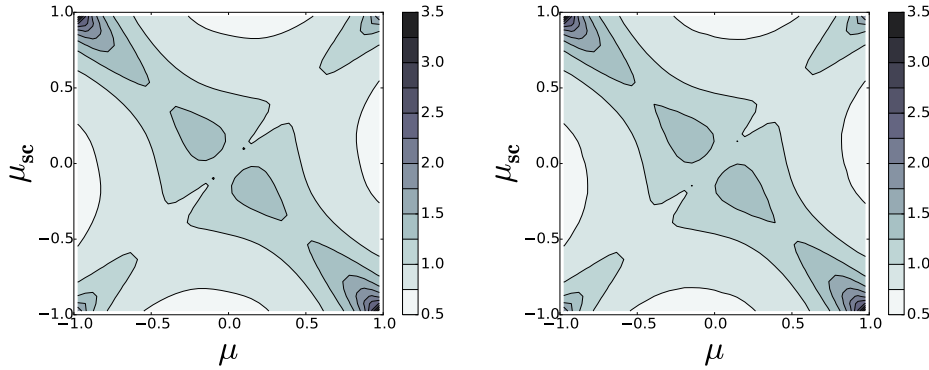


FIGURE 4.4 – *Phase functions associated with a transparent propagation phase between overlapping opaque cylinders (OT Beerian case); Left : $p(\mu, \mu_{sc})$ issued from random volume points; Right : $p'^{S(1)}(\mu, \mu_{sc})$ associated with the first set of scattered rays following a Fresnel's law.*

An important consequence is that, for any Beerian homogenised phase, the phase functions $p_{\nu}'^{S(1)}(\mu, \mu_{sc})$, associated with the previously defined specular interfacial source terms are then identical to $p_{\nu}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$, associated with isotropic volume source terms. This is numerically shown in Fig.4.4. The very small differences between the two phase functions are due to numerical errors.

4.2 Homogenisation scale and Beerian model scale

In the statistical approach, an extinction cumulative distribution function of a non Beerian homogenised phase, which is statistically homogeneous and possibly strongly anisotropic, is determined from volume or interfacial points issued from a shooting zone representative of the medium (see for instance Refs. [Tancrez and Taine (2004), Chahlaoui et al. (2012)]). The phase is in fact statistically homogeneous at a spatial scale a priori larger than the typical size Δ of the

shooting zone. This zone is generally defined by using a possible system periodicity and a perfect specular reflection at its boundaries [Chahlaf et al. (2012)], or by checking the reproducibility with results of other shooting zones [Zeghondy et al. (2006a)], or simply by numerical building [Tancrez and Taine (2004)] in the case of a medium model. An extinction zone, which is generally larger than the shooting zone, has a size D , chosen in such a way that practically all rays are extinguished in any direction within the extinction zone. The material structure is *strongly non homogeneous at a scale a priori smaller than D* , for a given direction \mathbf{u} .

From the study of the previous Section, it appears that for a non Beerian homogenised phase, the extinction cumulative distribution functions $G'_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ associated with emission and interfacial scattering strongly depend on two types of distribution functions : i) On the distribution function of \mathbf{u}, \mathbf{n} , associated with the emission law at the interfaces ; ii) On the distribution function of the scattered directions at these source points, which itself depends on the extinction within a possible semi transparent medium or on previous scattering events. Extinction phenomena within an interval $[s', s' + ds']$ due to emission and scattering source terms within $[s, s + ds]$, are then *strongly correlated with the two previous distribution functions and with the specific scattering and absorption events between s and s'* associated with the strong non homogeneity of the medium at a scale smaller than D . A previously cited consequence of any type of these correlations is that the global intensity at the point s' does not bring a sufficient information for determining the global extinction within $[s', s' + ds']$. This is due to the fact that the transmissivity between s and s' is strongly correlated with extinction within $[s', s' + ds']$ but also with a previous type of distribution function. The successive extinction distribution functions associated with interfacial sources $G'_{ext}{}^{(n)}(\mathbf{u}, s' - s)$ introduced in Sec.4.1.3 account for all these types of correlations.

For a non Beerian homogenised phase, $G_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ is associated with an isotropic volume source term, typically by emission : There is then only one correlation between transmission from the source point s to s' and extinction in the range $[s', s' + ds']$. Similarly, when $G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$, associated with interfacial emission or scattering, also corresponds to a local diffuse reflection law, the same unique previous correlation also occurs. In these particular cases, the extinction cumulative distribution functions $G_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ and $G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ obviously differ but are rigorously linked by Equation (4.8).

If the homogenisation scale of a non Beerian extinction cumulative distribution function is D , larger than Δ , the homogenisation scale of a Beerian medium is arbitrarily small compared to D . Indeed any element $[s'', s'' + ds'']$ of the interval $[s, s']$ has exactly the same statistical universal properties as any other element, $[s, s + ds]$ or $[s' + ds']$ for instance. More precisely the transmissivity from s to s' , $1 - G_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$ is non correlated with the source term in the

range $[s, s + ds]$ and with the extinction term in $[s', s' + ds']$. In these conditions of non correlation in s' , the variation $dI_\nu(\mathbf{u}, s')$ of the intensity $I_\nu(\mathbf{u}, s')$ between s' and $s' + ds'$ is proportional to $I_\nu(\mathbf{u}, s')$, which is typical of an exponential Beerian function, characterised by an extinction coefficient $\beta(\mathbf{u})$.

The remarkable non correlation property between a source term within $[s, s + ds]$ and the transmission between s and s' explains that the transmissivity and consequently $G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ are independent of the distribution function of \mathbf{u}, \mathbf{n} , for an emission source, and of the distribution function of the scattered directions, for a scattering source. $G'_{ext}{}^S(\mathbf{u}, s' - s)$ is then equal to $G_{ext}(\mathbf{u}, s' - s)$.

If the validity conditions of the radiative Fourier's law [Gomart and Taine (2011)] are fulfilled, *i.e.* when the medium is quasi isothermal at the scale of D , a radiative transfer only occurs at a spatial scale larger than D . The discretised elements $[s'', s'' + ds'']$ of the previous analysis have now sizes larger than D and are non correlated. In these conditions, the homogenised phase is Beerian at this large scale and all the previous results are valid.

4.3 Validity and limitations of previous studies

In the works of Tancrez and Taine [Tancrez and Taine (2004)], Bellet et al. [Bellet et al. (2009)], Chalhafi et al. [Chalhafi et al. (2012)], for OT or OST cases, and Zeghondy et al. [Zeghondy et al. (2006a)] for a STT case, statistically homogeneous media have been characterised by extinction cumulative distribution functions G_{ext} and phase functions p issued from random points of the volume of the propagation phase, instead of random interfacial points, in principle required for determining $G'_{ext}{}^S$ and p'^S . On the other hand, remember that the direct determination of G_{ext} is easier and more accurate than the one of $G'_{ext}{}^S$. When G_{ext} and $G'_{ext}{}^S$ are equal, it is then more pertinent to determine G_{ext} . Moreover, emission is based on an absorption coefficient in all these works. In the first paper [Tancrez and Taine (2004)], models of statistically homogeneous and isotropic porous media with an opaque phase and a transparent one have been developed : Sets of Dispersed Overlapping Opaque Spheres within a transparent medium (DOOS) and sets of Dispersed Overlapping Transparent Spheres within an opaque medium. As models for a non Beerian homogenised phase did not exist at that time, the aim was first to check the validity of the Beerian assumption and only in this case to characterise the medium by Beerian effective properties by the RDFI method [Tancrez and Taine (2004), Zeghondy et al. (2006a)] : Extinction, scattering and absorption coefficients. In the case of DOOS, the homogenised phase is rigorously Beerian : Emission is then exactly characterised by an absorption coefficient and it is rigorous to use G_{ext} instead of $G'_{ext}{}^S$ for both a diffuse and a Fresnel's reflection law at local scale, as discussed in Sec.4.1.3. DOTS are approximately Beerian for a porosity of the transparent phase larger than typically 0.6 and the same conclusions

can be drawn, as a good approximation. But, for a porosity smaller than the criterion, the homogenised phase is non Beerian : The cumulative distribution function G_{ext} determined in these conditions is not valid. G'_{ext}, p'^S should then be used in the general case.

Bellet et al. [Bellet et al. (2009)] have assumed that the transparent homogenised phase between regular configurations of opaque diffuse parallel rods is Beerian and determined G_{ext} and p and characterised emission with an absorption coefficient : It is consistent. Nevertheless, Chalhafi et al. [Chalhafi et al. (2012)] have shown by a more precise approach that this phase is strongly non Beerian. As this last model is only applied in the conditions of validity of the radiative Fourier's law [Taine et al. (2010), Gomart and Taine (2011)], the GRTE degenerates into a classical Beerian radiative transfer equation : The use of G_{ext} instead of G'_{ext} and of a generalised absorption coefficient at equilibrium for modeling interfacial emission is then pertinent.

In the case of the work of Zeghondy et al. [Zeghondy et al. (2006a)] applied to a real mullite foam, of STT type, the globally homogenised medium is also Beerian with a excellent approximation : It justifies the use of G_{ext} and p for the characterisation of internal and external scattering.

In conclusion, the models developed in these four previous studies are consistent, even if the approximations in use have not always been justified by their authors.

Zarrouati et al. [Zarrouati et al. (2015)] have for the first time solved the radiative problem in a statistically non homogeneous and anisotropic porous medium, strongly non Beerian of OT type. In this approach, absorption is characterised by impacts over interfacial elements. Consequently it is also the case for modeling emission. A non Beerian homogenised phase of OT type has been characterised in the statistical model of Taine et al. [Taine et al. (2010)] by a Generalised Radiative Transfer Equation (GRTE) expressed in differential formulation. But, for OT and OST cases, emission cannot be characterised by a generalised absorption coefficient in the general case : The GRTE has then to be expressed in the integral formulation. Nevertheless, for STT and ST2 cases, a differential formulation of the GRTEs is valid, as there is no interfacial emission.

Conclusion

When the homogenised propagation phase of a porous medium with real (semi) transparent and opaque phases type is Beerian, quasi Beerian, or non Beerian but verifying the validity conditions of the radiative Fourier's law, the simplest and most accurate approach is based on the use of an extinction cumulative distribution function G_{ext} , scattering and absorption cumulative probabilities P_{sc} and P_a , and a general phase function p_ν associated with volume isotropic source points, as in Refs [Tancrez and Taine (2004), Zeghondy et al. (2006a),

[Bellet et al. \(2009\)](#), [Chahlaoui et al. \(2012\)](#)]. On the contrary, a non Beerian homogenised phase considered in the general case has to be modeled by an extinction cumulative distribution function $G_{ext}^{S(n)}$, scattering and absorption cumulative probabilities $P_{sc}^{S(n)}$ and $P_a^{S(n)}$, and a general phase function $p_\nu^{S(n)}$ associated with successive interfacial scattering, dedicated to a medium with semi transparent and transparent phases. In the case of a diffuse reflection law at local scale $G_{ext}^{S(n)}$ is simply proportional to the derivative of G_{ext} .

Chapitre 5

Statistical radiative modeling of a porous medium with semi-transparent and transparent phases : Application to a felt of overlapping fibres

Résumé

Ce chapitre, écrit en anglais, a été publié sous forme d'article scientifique dans le journal : *International Journal of Heat and Mass Transfer* (IJHMT) [Dauvois et al. (2016)].

On y présente le modèle statistique, développé dans le cadre de cette thèse, de caractérisation radiative d'un milieu poreux anisotrope comportant une phase semi-transparente non diffusante non Beerienne a et une phase transparente Beerienne b . La phase non Beerienne a est caractérisée par des fonctions de probabilité cumulée et des fonctions de phase associées à chaque type de diffusion au sein de la phase : la fonction de distribution cumulée d'extinction $G_{\nu ext a}$, la fonction de probabilité cumulée d'absorption $P_{\nu aa}$, la fonction de probabilité cumulée de diffusion interne (réflexion) $P_{\nu scaa}$ et la fonction de probabilité cumulée de diffusion externe (transmission) $P_{\nu scab}$; et les fonctions de phase de diffusion interne $p_{\nu aa}$ et de diffusion externe $p_{\nu ab}$. Ces fonctions sont associées à l'émission isotrope des rayons dans le volume de la phase semi-transparente, et aux diffusions multiples par réflexion et par transmission aux interfaces a/b . La phase Beerienne b est caractérisée par les coefficients radiatifs scalaires d'extinction $\beta_{\nu b}$, de diffusion interne $\sigma_{\nu bb}$ et de diffusion externe $\sigma_{\nu ba}$, et par les fonctions de phase de diffusion interne $p_{\nu bb}$ et de diffusion externe $p_{\nu ba}$. On rappelle que dans un milieu Beerien, chaque diffusion peut être traitée

de manière indépendante.

Ensuite, on présente le modèle statistique permettant de résoudre le problème du transfert radiatif au sein de ces milieux poreux. Une RTE est couplée à une GRTE par les termes sources associés aux diffusions externes. On montre que le modèle de Fourier radiatif, basé sur la notion de conductivité radiative, n'est pas valide dans le cas où le milieu poreux possède une phase non Beerienne.

Ces modèles sont appliqués à l'échantillon fibreux généré numériquement par la méthode décrite au chapitre 3. Cet échantillon est composé de fibres semi-transparentes non diffusantes plongées dans une phase transparente, et est placé entre deux parois noires à températures imposées. On montre que les fibres sont une phase non Beerienne et que la phase transparente est Beerienne. Le problème du transfert radiatif est résolu au moyen d'une méthode de Monte Carlo, et le champ de puissance radiative calculé est comparé à celui obtenu en faisant l'hypothèse de milieu optiquement épais. Puis on présente des résultats de champs de température : un champ de température quand deux températures sont imposées aux extrémités, et un champ de température quand un flux et une température sont imposés. Finalement, une étude paramétrique de sensibilité du flux radiatif est réalisée en faisant varier la porosité du matériau, le rapport d'indices optiques et le coefficient d'absorption des fibres. On conclut sur l'efficacité d'isolation d'un tel échantillon fibreux en considérant le rayonnement seul.

Introduction

An accurate modeling of radiative transfer is required in applications involving heat transfer in a porous medium at high temperature. The radiative properties of the different phases have to be characterised separately in order to be able to account for coupling with other heat transfer modes, generally conduction in a solid phase and conduction or convection in a fluid phase. As radiative transfer cannot be in practice determined at local scale, effective properties of every phase have to be determined.

The methods of parameter identification with many variants based on experiments or numerical transfer simulation (see a detailed review in Ref. [Baillis and Sacadura (2000)]) are the most popular methods of characterisation of these radiative effective properties. If they are relevant for media characterised by an exponential extinction law (Beerian media), their limitations for non Beerian media have been discussed elsewhere [Taine and Iacona (2012)]. Moreover, these methods do not easily allow every phase to be separately characterised. In the general case, the radiative effective properties of a phase of a porous medium, which is often statistically non homogeneous and anisotropic, are non Beerian. The conditions of validity of the Beer's law for characterising these

radiative effective properties have been discussed in a recent paper [Dauvois et al. (2016)]. The law is, in particular, valid if one of the following conditions is fulfilled :

- i) When the phase is statistically homogeneous at all the spatial scales considered in the application ; It can be non homogeneous at scales such that the medium is optically thin ;
- ii) When the interfaces of the porous medium present some special symmetries : For instance outside of overlapping spheres or cylinders ;
- iii) At spatial scales larger than δ , length such that the medium is optically thick. In this popular case, extinction, scattering and absorption coefficients can be defined and a radiative conductivity tensor can be introduced (radiative Fourier's law).

A radiative model which can be applied to non Beerian media has been initiated by Consalvi et al. [Consalvi et al. (2002b)] and developed by Lipinski et al. [Lipinski et al. (2010)]. This approach is similar to the volume averaging method of Whitaker and Quintard [Quintard and Whitaker (1994a), Quintard and Whitaker (1994b)], for obtaining effective properties of a porous medium in the case of small perturbations of the field within a representative volume element.

The development of X and γ tomography techniques has led in the last decades to an accurate knowledge of the morphology of porous media. On the other hand the morphology of material models, sets of overlapping or non overlapping spheres or cylinders for instance, is exactly known. In these conditions, the increasing power of the statistical Monte Carlo methods has allowed the radiative properties of a non Beerian homogenised phase to be exhaustively characterised by radiative statistical functions instead of extinction, absorption and scattering coefficients, valid for a Beerian medium. The principles of the method have been defined by Tancrez and Taine [Tancrez and Taine (2004)], for models of foams. A non Beerian homogenised phase is characterised by an extinction cumulative distribution function, a scattering (or absorption) cumulative probability and a general scattering phase function a priori depending on both the incidence and scattering directions. In this first work and in following ones, for instance in Refs. [Zeghondy et al. (2006a), Petrasch et al. (2007), Bellet et al. (2009), Haussener et al. (2010), Haussener et al. (2010), Chahlaoui et al. (2012), Haussener et al. (2009)], the Beerian assumption has been validated for statistically isotropic and homogeneous media.

An original transfer model for a non Beerian homogenised phase, directly based on a Generalised Radiative Transfer Equation (GRTE) involving the radiative statistical functions, has then been developed [Taine et al. (2010)] for a medium with an opaque and a transparent phase, both in the general case and when a radiative Fourier's law is valid. The physical bases of the GRTE have been improved in a recent paper [Dauvois et al. (2016)]. This model has been applied, under the Fourier's assumption, to ordered sets of intact or degraded

diffuse opaque parallel cylinders within a transparent or a semi transparent medium [Chahlafi et al. (2012)]. This porous medium, modeling a nuclear core, is strongly anisotropic but homogeneous at large scale. In a recent work [Zarrouati et al. (2015)], the GRTE has been applied to a statistically strongly non homogeneous porous medium : A set of non overlapping diffuse opaque spheres at the vicinity of a wall within a transparent medium.

A key feature of a non Beerian phase is that the knowledge of the incident intensity field at a given point M is not sufficient for allowing extinction by absorption, external scattering or internal scattering at this point M to be determined [Taine et al. (2010), Dauvois et al. (2016)] : The history of all radiations issued from all source points which contribute to the intensity field at M has to be accounted for (memory effect). This phenomenon makes the model much more complex, in particular within a medium with transparent and semi transparent phases characterised by general (non diffuse) interfacial reflection and transmission laws : It is then necessary to account for all the previous paths involving different sets of effective internal and external scattering, associated with interfacial reflection and transmission phenomena [Dauvois et al. (2016)]. On the contrary, under the particular assumption of an interfacial diffuse reflection or transmission law, the knowledge of the local intensity is sufficient for characterising internal or external scattering, as the directional contributions to these phenomena are uniformly jammed [Dauvois et al. (2016)].

Fibrous media like felts are commonly used as insulating materials at high temperatures and can be encountered in applications such as nuclear reactors, combustion chambers, coatings for aeronautics and aerospace, etc. Radiative transfer in fibrous media has often been studied for opaque fibres immersed in a transparent phase. After a global homogenisation, this type of medium has generally been globally represented by a Beerian semi transparent medium. Radiative transfer is then often solved by a finite volume method (FVM) or a discrete ordinates method (DOM) [Tong and Tien (1980), Lee (1986), Boulet et al. (1993), Milandri et al. (2002), Asllanaj et al. (2004)]. Kamdem and Baillis [Kamdem Tagne and Baillis (2005)] have replaced an anisotropic fibrous medium by an equivalent homogeneous isotropic medium and solved the radiation problem by classical techniques.

A common difficulty is the determination of the phase function of an anisotropic fibrous medium. Most studies have used a Henyey-Greenstein phase function, simply depending on the scattering angle and characterised by the asymmetry factor. Kamdem and Baillis [Kamdem Tagne and Baillis (2010)] also have proposed a generalised Henyey-Greenstein phase function for an anisotropic medium by using a directional asymmetry factor. Lee [Lee (1989)] has proposed a general expression of the phase function for an oriented infinite cylinder and generalized the expression for fibrous media, but in this approach the interaction between fibres are neglected. Boulet and al. [Boulet et al. (2007)] have shown that these methods do not satisfy the energy conservation with anisotropy.

pic scattering. They have proposed a renormalisation of the phase function, but this renormalisation modifies its general shape and consequently the solution of the radiative transfer problem. Mishchenko et al. [Mishchenko et al. (1999)] multiply the Gaussian weights of the DOM by correction factors which affect the forward-scattering and ensure energy conservation, but this technique modifies the asymmetry factor for any direction. Hunter et al. [Hunter and Guo (2015)] improve the previous technique by normalizing the backward-scattering term and the forward-scattering term of the phase function separately for specular and diffuse reflection and transmission laws. They conserve both scattered energy and asymmetry factor.

Section 5.1 deals with the radiation model for an assumed non Beerian porous medium with a semi transparent absorbing phase and a transparent one, characterised by general interfacial reflection-transmission laws : This model is for instance required in the case of Fresnel's interfacial laws. The medium is statistically anisotropic, but homogeneous at large scale. It corresponds, for instance, to another common type of felts.

An originality of the work is to apply the statistical approach earlier evoked for exhaustively characterising the extinction cumulative distribution functions and the scattering (or absorption) cumulative probabilities. A particular attention is also brought to the direct ab initio determination of all phase functions associated with all the sets of successive internal and external scattering events previously mentioned. This model is only based on the knowledge of the morphological properties of the medium, the refractive indices of the two phases and the absorption coefficient of the semi transparent phase. In the general case, the radiative transfer is based on two coupled Generalised Radiative Transfer Equations (GRTEs). The validity conditions of radiative Fourier's laws and radiative conductivity tensors, which require strong conditions, are discussed.

The radiative properties of a felt of semi transparent finite overlapping cylindrical fibres within a transparent medium are characterised by the previous method in Sec.5.2. Some applications to radiative transfer are developed in Sec.5.3.

5.1 Radiation models

5.1.1 Statistical model of radiative properties

The study deals with statistically homogeneous but strongly anisotropic media with an absorbing but non scattering phase a of volume fraction Π_a , absorption coefficient $\kappa_{\nu a}$ and refractive index $n_{\nu a}$ and a transparent phase b of volume fraction Π_b and refractive index $n_{\nu b}$. All these thermophysical quantities are assumed uniform. Interfacial reflection and transmission at local scales are characterised by bidirectional reflectivity and transmissivity, given for instance by the Fresnel's laws for optically smooth interfaces.

The considered spatial scales are assumed to be larger than the typical radiation wavelengths : Consequently, diffraction effects are neglected and the radiation propagation is considered along straight lines within a phase.

By generalising the approach of Refs. [Tancrez and Taine (2004), Zeghondy et al. (2006a), Zeghondy et al. (2006b), Lipinski et al. (2010), Haussener et al. (2009), Chahlaoui et al. (2012), Zarrouati et al. (2015), Dauvois et al. (2016)], the radiative properties of a priori non Beerian homogenised phases are accurately characterised by radiative statistical functions, defined along any propagation axis of direction $\mathbf{u}(\theta, \varphi)$ and coordinate s : Extinction cumulative distribution function $G_{ext\nu}$, absorption or scattering cumulative probabilities, $P_{a\nu}$ or $P_{sc\nu}$ respectively, and general phase functions $p_\nu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$ a priori depending on both incidence and scattering unit vectors \mathbf{u}_1 and \mathbf{u} , respectively. Note that reflection within a real phase c (a or b) becomes internal scattering, characterised by $P_{sc\nu cc}$ and $p_{\nu cc}$ in the corresponding homogenised phase, and that transmission from a real phase c to another real phase d becomes external scattering characterised by $P_{sc\nu cd}$ and $p_{\nu cd}$ after homogenisation.

The radiative statistical functions are determined in the real medium by a statistical Monte Carlo method. A huge number of shots from emission and scattering source points is used for modeling extinction by absorption and scattering and modeling scattering source terms. This approach is summarised in Sec.5.1.1.4. The determined statistical functions are then used in the homogenised phases. Any homogenised phase is present at any point of the medium, more precisely it is characterised at this point by a presence probability, which is equal to its volume fraction Π [Taine et al. (2010)]. For instance, emission by the absorbing phase a occurs at any point M and is characterised by $\Pi_a \kappa_{\nu a} n_{\nu a}^2 I_\nu^\circ[T_a(\mathbf{r})]$, where Π_a accounts for the presence probability of a .

In a non Beerian homogenised phase, the radiation intensity can be determined at any point $M(\mathbf{r})$ in a given direction \mathbf{u}_1 , but it does not allow its variation between two close points $M(\mathbf{r})$ and $M'(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$ to be determined [Taine et al. (2010), Dauvois et al. (2016)]. It is a memory effect of the structure of this medium which is non homogeneous at small scale. Radiation transfer is then directly based on the previous radiative statistical functions.

Within the popular assumption diffuse reflection and transmission laws at the interfaces, the only knowledge of the global intensity field at any point M of the homogenised phase is sufficient for determining the scattered intensity field at M , by using the corresponding phase function. This phase function is then simply determined in the real medium by summing all the contributions associated with the local reflection and transmission laws. But, in the present case, difficulties of modeling are due to the non diffuse interfacial reflection and transmission laws. In these conditions, as developed in the following, the phase function cannot be determined as simply as previously. In fact, different phase functions are associated with the successive sets of scattering events, corresponding to reflection and transmission phenomena within the real medium. The knowledge of the spatial distribution function of the incidence directions at any

point of the real medium is then necessary for any set of scattering events. In parallel, the knowledge of the spatial distribution function of scattered directions corresponding to a type of scattering events at any point of the real medium, is also necessary for determining the different extinction cumulative distribution functions and consequently scattering cumulative probabilities also associated with these events as source terms.

The different types of extinction cumulative distribution functions, scattering and absorption cumulative probabilities and finally phase functions are defined and expressed in this Section.

5.1.1.1 Extinction

The extinction cumulative distribution function $G_{ext\nu a}(\mathbf{u}, s' - s)$ associated with *isotropic volume emission by a* is, in the homogenised phase, the probability that a radiation emitted in the direction \mathbf{u} at the point $M(\mathbf{r})$, of abscissa s along the axis of direction \mathbf{u} , is absorbed before a point $M'(\mathbf{r}')$, of abscissa s' , within the phase a or internally or externally scattered at an interface with the transparent phase between s and s' . $G_{ext\nu a}(\mathbf{u}, s' - s)$ is also equal to $1 - \tau_{\nu a}(\mathbf{u}, s' - s)$, where $\tau_{\nu a}$ is the transmissivity from s to s' in the direction \mathbf{u} .

As extinction by absorption within the real Beerian medium a and extinction by interfacial scattering are statistically independent, the transmissivity $\tau_{\nu a}(\mathbf{u}, s' - s)$ is the product of the partial transmissivities associated with these two phenomena and $G_{ext\nu a}(\mathbf{u}, s' - s)$ also writes

$$G_{ext\nu a}(\mathbf{u}, s' - s) = 1 - \exp[-\kappa_{\nu a}(s' - s)][1 - P_{sc a}^t(\mathbf{u}, s' - s)] \quad (5.1)$$

where $P_{sc a}^t$ is the scattering cumulative probability associated with an assumed transparent phase a. As extinction by scattering is independent of the radiation frequency, $P_{sc a}^t$ simply is a geometrical quantity. Note that $P_{sc a}^t$ can also be considered as the extinction cumulative distribution function $G_{ext a}^t$ of the assumed transparent phase a. Finally, $P_{sc a}^t$ is the cumulative distribution function of the lengths $s' - s$ in the direction \mathbf{u} between any volume point $M(s)$ of a and the corresponding interfacial impact point $E(s_0)$ which writes

$$P_{sc a}^t(\mathbf{u}, s' - s) = \frac{1}{\Pi_a V} \frac{1}{\delta\Omega(\mathbf{u})} \int_0^{s' - s} \int_{\Pi_a V} \int_{\delta\Omega(\mathbf{u})} \delta\left(v - [s_0(\mathbf{u}', \mathbf{r}) - s(\mathbf{u}', \mathbf{r})]\right) d\Omega(\mathbf{u}') d\mathbf{r} dv \quad (5.2)$$

where the summations are carried out, *within the assumed real transparent phase a*, over all directions \mathbf{u}' of an elementary solid angle $\delta\Omega(\mathbf{u})$ around the

direction \mathbf{u} , over all points $M(\mathbf{r})$ of the volume $\Pi_a V$ of the phase a and over the distance $v = s'' - s$ between $P(\mathbf{r}'')$, current point of the axis \mathbf{u}' and $M(\mathbf{r})$, the source point over this axis ; $s(\mathbf{u}', \mathbf{r})$, and $s_0(\mathbf{u}', \mathbf{r})$ are the abscissas of the source and extinction points M and E , respectively ; δ is the Dirac distribution.

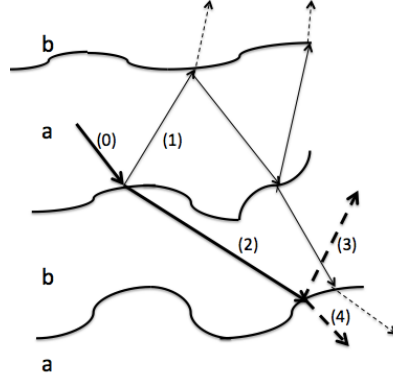


FIGURE 5.1 – First successive sets of internal and external scattering events.

Different extinction cumulative distribution functions of the type $G_{ext\nu}^{S(n)}$ characterising the phases a and b are also associated with the source terms constituted by the successive sets of internal and external scattering events (see Fig.5.1) ; The superscript S means that these quantities are related to interfacial sources. The interfacial source points of the n^{th} set of scattering events belong to the part $\Sigma^{(n)}$ of the interface area Σ which has been illuminated by the rays of the previous $(n - 1)^{th}$ set of scattering events. More precisely, these source points $N(\mathbf{r}_n)$ of the surface $\Sigma^{(n)}$ are characterised in the real medium by the spatial distribution function $f_{\mathbf{u}}^{S(n)}(\mathbf{r}_n)$. A specific extinction cumulative distribution function $G_{ext\nu}^{S(n)}$ is then associated with this n^{th} set of scattering source terms in the direction \mathbf{u} within a homogenised phase.

The distribution function $f_{\mathbf{u}}^{S(n)}(\mathbf{r}_n)$ depends on all the history of the $n - 1$ previous sets of scattering events, *i.e.* on the successive phenomena of internal and external scattering and partial absorption of a radiation initially emitted within the phase a. It is determined with a Monte Carlo statistical approach, the principles of which are defined in Sec.5.1.1.4.

A given spatial distribution function of the scattered direction \mathbf{u} and the corresponding extinction cumulative distribution function are noted $f_{\mathbf{u}acHde}^{S(n)}(\mathbf{r})$ and $G_{ext\nu acHde}^{S(n)}$. The symbolic notation $acHde$ defines the history of this set, which is always issued from isotropic emission within the phase a : i) c designates the propagation medium of the first set of scattering events : a in case of internal scattering within a, b in case of external scattering from a to b ; ii) The condensed symbol H represents successive sets of internal and external scattering events ; iii) d specifies the phase which is source of the considered n^{th} set of scattering events ; iV) e defines the propagation phase of this set. For

instance, $aabbaa$ corresponds to volume emission within a, followed by internal scattering within a, external scattering towards b, internal scattering within b, external scattering towards a, internal scattering within a where the ray is finally extinguished by volume absorption or interfacial scattering.

In these conditions, $G_{ext\nu acHde}^{S(n)}$ is given by an expression similar to Equation (5.1) vs $P_{sc\nu acHde}^{tS(n)}$, total scattering cumulative probability in an assumed transparent phase, which writes

$$P_{sc\nu acHde}^{tS(n)}(\mathbf{u}, s' - s) = \frac{1}{\delta\Omega_e(\mathbf{u})} \int_0^{s'-s} \int_{\Sigma^{(n)}/\delta V/\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_e(\mathbf{r}_n)>0} \int_{\delta\Omega_e(\mathbf{u})} f_{\mathbf{u}'acHde}^{S(n)}(\mathbf{r}_n) \times \delta\left(v - [s_0(\mathbf{u}', \mathbf{r}_n) - s(\mathbf{u}', \mathbf{r}_n)]\right) d\Omega_e(\mathbf{u}') d\mathbf{r}_n dv \quad (5.3)$$

where the summations are carried out : i) Over the directions \mathbf{u}' of an elementary solid angle $\delta\Omega_e(\mathbf{u})$ of the final medium e ; ii) Over all the points $M(\mathbf{r}_n)$ of abscissa $s(\mathbf{u}', \mathbf{r}_n)$ of $\Sigma^{(n)}$ such that $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_e(\mathbf{r}_n) > 0$, where \mathbf{n}_e is the unit vector normal to $\Sigma^{(n)}$ oriented towards the phase e ; iii) Over the distance $v = s' - s$ between the source point $M(s)$ and the current point P of the axis \mathbf{u}' ; $s_0(\mathbf{u}, \mathbf{r}_n)$ is the abscissa of a current extinction point E .

If a homogenised phase is Beerian, the previous model is drastically simplified [Dauvois et al. (2016)]. Indeed, in this case the knowledge of the incidence intensity field at a point allows the scattered intensity field at the same point to be directly determined. Whatever the interfacial reflection and transmission laws, a unique extinction cumulative distribution function $G_{ext\nu c}(\mathbf{u}, s' - s)$ characterises this phase. It is practically determined by equations identical to Equations (5.1) and (5.2), *i.e.* by using isotropic volume source points as shown by Dauvois et al. [Dauvois et al. (2016)].

5.1.1.2 Scattering and absorption

The absorption, internal scattering and external scattering cumulative probabilities $P_{a\nu a}(\mathbf{u}, s' - s)$, $P_{sc\nu aa}(\mathbf{u}, s' - s)$ and $P_{sc\nu ab}(\mathbf{u}, s' - s)$ associated with *isotropic volume emission* by a are respectively, in the homogenised phase, the probabilities that a radiation emitted in the direction \mathbf{u} , at the point $M(s)$ is absorbed within the phase a, internally scattered or externally scattered at an interface with the transparent phase, between s and s' . These quantities are linked by

$$G_{ext\nu a} = P_{a\nu a} + P_{sc\nu aa} + P_{sc\nu ab} \quad (5.4)$$

The previous quantities do not account for scattering or absorption of radiation belonging to the successive sets of scattering events.

The extinction cumulative distribution function $G_{ext\nu acHde}^{S(n)}$ associated with the n^{th} set of successive scattering events in the direction \mathbf{u} within a homogenised phase similarly is the sum of the corresponding internal and external scattering

cumulative probabilities $P_{sc\nu acHdee}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s)$ and $P_{sc\nu acHded}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s)$ and possibly absorption cumulative probabilities $P_{a\nu acHde}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s)$, *i. e.*

$$G_{ext\nu acHda}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s) = P_{sc\nu acHdaa}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s) + P_{sc\nu acHdab}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s) + P_{a\nu acHda}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s) \quad (5.5)$$

$$G_{extacHdb}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s) = P_{scacHdb}^{tS(n)}(\mathbf{u}, s' - s) = P_{sc\nu acHdba}^{tS(n)}(\mathbf{u}, s' - s) + P_{sc\nu acHdbb}^{tS(n)}(\mathbf{u}, s' - s) \quad (5.6)$$

The previous scattering and absorption cumulative probabilities are determined in parallel with $G_{ext\nu acHde}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s)$ in the statistical approach of Sec.5.1.1.4. They represent the probabilities that a radiation issued from the n^{th} scattering source term in the direction \mathbf{u} , at the point $M(s)$ of the homogenised phase e, is internally or externally scattered at an interface with the other phase, or absorbed within the phase a, between s and s' .

5.1.1.3 Phase functions

A specific phase function is associated in this Section with any type of previously defined scattering cumulative probability.

For a Beerian homogenised phase, the knowledge of the intensity at a point M allows the scattered intensity at the same point to be determined from the corresponding phase function. Indeed, such a phase is homogeneous at all the considered spatial scales and the intensity brings a complete information for determining the evolution of the radiation from M to an arbitrary close point M' [Taine et al. (2010), Dauvois et al. (2016)].

The expression of the phase function associated with internal scattering within a Beerian homogenised phase has been given in Ref. [Tancrez and Taine (2004)] for instance. The phase function associated with external scattering from a, assumed Beerian homogenised phase, to b writes

$$p_{\nu ab}^B(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) \frac{d\Omega_b}{4\pi} = \frac{\int_{\Pi_a V / \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_a \leq 0} \tau_{\nu ab}''[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, \mathbf{n}_a(\mathbf{r}, \mathbf{u}_1)] [-\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_a(\mathbf{r}, \mathbf{u}_1)] d\mathbf{r} d\Omega_b}{\int_0^{4\pi} \int_{\Pi_a V / \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_a \leq 0} \tau_{\nu ab}''[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}', \mathbf{n}_a(\mathbf{r}, \mathbf{u}_1)] [-\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_a(\mathbf{r}, \mathbf{u}_1)] d\mathbf{r} d\Omega'_b} \quad (5.7)$$

where $\tau_{\nu ab}''[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, \mathbf{n}_a(\mathbf{r}, \mathbf{u}_1)]$ is the bidirectional transmissivity, \mathbf{u}_1 and \mathbf{u} the incidence and scattering unit vectors and \mathbf{n}_a the local normal unit vector oriented towards a at a current interfacial point of the real medium.

On the contrary, for a non Beerian homogenised phase a with non diffuse interfaces, the knowledge of the intensity at a point is not sufficient for determining

the scattered intensity at this point. The "memory effect" within a non Beerian homogenised phase has to be accounted for : The scattered intensity at a point M depends on the spatial distribution of the initial source points and on possible absorption between the source points and M .

Two phase functions are associated with the extinction by scattering of the rays of the n^{th} set of scattering events and correspond to the scattering cumulative probabilities $P_{sc\nu acHdee}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s)$ and $P_{sc\nu acHded}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s)$ previously defined : They are noted $p_{\nu acHdee}^{S(n)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$ and $p_{\nu acHded}^{S(n)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$. These phase functions not only depend on the reflection-transmission laws at the impact points M_n but also on $f_{i \mathbf{u}_1}^{S(n-1)}(\mathbf{r}_{n-1})$, the spatial distribution function of the initial source points $M_{n-1}(\mathbf{r}_{n-1})$. These points belong to the part $\Sigma^{(n-1)}$ of the interface area within the considered porous medium volume V which is illuminated by the $(n - 2)^{th}$ scattering events and are the origins of the different components of the radiation incident over the surface $\Sigma^{(n)}$ in the direction \mathbf{u}_1 . The function $f_{i \mathbf{u}_1}^{S(n-1)}(\mathbf{r}_{n-1})$ is determined along an optically thick distance $\delta(\mathbf{u}_1)$ along any considered direction \mathbf{u}_1 .

The two first phase functions $p_{\nu aa}^{S(0)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$ and $p_{\nu ab}^{S(0)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$ are associated with $P_{sc\nu aa}(\mathbf{u}_1)$ and $P_{sc\nu ab}(\mathbf{u}_1)$ respectively which correspond to isotropic emission volume source points \mathbf{r}_0 , or the zeroth set of rays, within the non Beerian phase a (see Fig.5.1). The corresponding spatial distribution function of the initial source points associated with the incidence direction \mathbf{u}_1 is noted $f_{i \mathbf{u}_1}^{S(0)}(\mathbf{r}_0)$. Its determination requires a supplementary assumption : The phase a is isothermal along any optically thick distance $\delta(\mathbf{u}_1)$ in any incidence direction \mathbf{u}_1 . Note that this assumption is only required for the determination of the phase function. Emission of radiation can be modeled for a non isothermal phase at any spatial scale. In these conditions, $f_{i \mathbf{u}_1}^{S(0)}(\mathbf{r}_0)$ writes

$$f_{i \mathbf{u}_1}^{S(0)}(\mathbf{r}_0) = \frac{\exp\left(-\kappa_{\nu a}[s_0(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0) - s(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0)]\right)}{\int_{\Pi_a V} \exp\left(-\kappa_{\nu a}[s_0(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0) - s(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0)]\right) d\mathbf{r}_0} \quad (5.8)$$

where $s(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0)$ is the abscissa of the current volume isotropic emission source point over the axis of direction \mathbf{u}_1 and $s_0(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0)$ the abscissa of the corresponding impact point $N(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0)$ through an assumed transparent phase a. The phase functions $p_{\nu aa}^{S(1)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$ and $p_{\nu ab}^{S(2)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$ finally depend both on the bidirectional reflectivity $\rho''_{aa\nu}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, \mathbf{n}_a(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0)]$ and transmissivity $\tau''_{ab\nu}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, \mathbf{n}_a(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0)]$, generally given by the interfacial reflection-transmission laws, and on $f_{i \mathbf{u}_1}^{S(0)}(\mathbf{r}_0)$, *i. e.*

$$p_{\nu aa}^{S(0)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) \frac{d\Omega_a}{4\pi} = \frac{\int_{\Pi_a V / \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_a \leq 0} f_{i \mathbf{u}_1}^{S(0)}(\mathbf{r}_0) \rho''_{aa\nu}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, \mathbf{n}_a(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0)] [-\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_a(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0)] d\mathbf{r}_0 d\Omega_a}{\int_0^{4\pi} \int_{\Pi_a V / \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_a \leq 0} f_{i \mathbf{u}_1}^{S(0)}(\mathbf{r}_0) \rho''_{aa\nu}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}', \mathbf{n}_a(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0)] [-\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_a(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0)] d\mathbf{r}_0 d\Omega'_a} \quad (5.9)$$

where \mathbf{n}_a is the normal unit vector at the current impact point $N(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_0)$ oriented towards the phase a,

$$p_{\nu ab}^{S(0)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) \frac{d\Omega_b}{4\pi} = \frac{\int_{\Pi_a V / \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_a \leq 0} f_{i \mathbf{u}_1}^{S(0)}(\mathbf{r}_0) \tau''_{\nu ab}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, \mathbf{n}_a(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_1)] [-\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_a(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_1)] d\mathbf{r}_0 d\Omega_b}{\int_0^{4\pi} \int_{\Pi_a V / \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_a \leq 0} f_{i \mathbf{u}_1}^{S(0)}(\mathbf{r}_0) \tau''_{\nu ab}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}', \mathbf{n}_a(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_1)] [-\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_a(\mathbf{r}_0, \mathbf{u}_1)] d\mathbf{r}_0 d\Omega'_b} \quad (5.10)$$

The phase function given by Equation (5.11) is expressed in the medium b of refractive index $n_{\nu b}$. According with the notations of Fig.5.1, the phase functions $p_{\nu abb}^{S(2)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$ and $p_{\nu aba}^{S(2)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$, the first ones corresponding to the transparent medium b, are given by equations similar to Equations (5.10)-(5.11), with the value of $\kappa_{\nu b}$ being set to 0 in Equation (5.8).

More generally, the phase functions $p_{\nu acHdee}^{S(n)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$ and $p_{\nu acHded}^{S(n)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$, associated with the n^{th} set of interfacial scattering events, i.e with the scattering cumulative probabilities $P_{sc\nu acHdee}^{S(n)}$ and $P_{sc\nu acHded}^{S(n)}$, depend both on the reflection-transmission laws on $f_{i \mathbf{u}_1 acHde}^{S(n-1)}(\mathbf{r}_{n-1})$, the spatial distribution function of the initial source points associated with the incidence directions \mathbf{u}_1 . They write

$$p_{\nu acHdee}^{S(n)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) \frac{d\Omega_e}{4\pi} = \frac{\int_{\Sigma^{(n-1)} / \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_e \leq 0} f_{i \mathbf{u}_1 acHde}^{S(n-1)}(\mathbf{r}_{n-1}) \rho''_{\nu ee}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, \mathbf{n}_e(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_{n-1})] [-\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_e(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_{n-1})] d\mathbf{r}_{n-1} d\Omega_e}{\int_0^{4\pi} \int_{\Sigma^{(n-1)} / \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_e \leq 0} f_{i \mathbf{u}_1 acHde}^{S(n-1)}(\mathbf{r}_{n-1}) \rho''_{\nu ee}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}', \mathbf{n}_e(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_{n-1})] [-\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_e(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_{n-1})] d\mathbf{r}_{n-1} d\Omega'_e} \quad (5.11)$$

$$p_{\nu acHded}^{S(n)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) \frac{d\Omega_d}{4\pi} = \frac{\int_{\Sigma^{(n-1)} / \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_e \leq 0} f_{i \mathbf{u}_1 acHde}^{S(n-1)}(\mathbf{r}_{n-1}) \tau''_{\nu ed}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}, \mathbf{n}_e(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_{n-1})] [-\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_e(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{u}_1)] d\mathbf{r}_{n-1} d\Omega_d}{\int_0^{4\pi} \int_{\Sigma^{(n-1)} / \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_e \leq 0} f_{i \mathbf{u}_1 acHde}^{S(n-1)}(\mathbf{r}_{n-1}) \tau''_{\nu ed}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}', \mathbf{n}_e(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_{n-1})] [-\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_e(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{u}_1)] d\mathbf{r}_{n-1} d\Omega'_d} \quad (5.12)$$

The principle of determination of $f_{i \mathbf{u}_1 acHde}^{S(n-1)}(\mathbf{r}_{n-1})$, the spatial distribution function of the initial source points associated with the incidence direction \mathbf{u}_1 is exposed in Sec.5.1.1.4.

5.1.1.4 Principles of implementation

The radiative statistical functions of extinction, absorption and scattering and the phase functions are determined by a statistical Monte Carlo method at the limit of large numbers of generated power bundles. This approach is similar to the ones in use in Refs. [Tancrez and Taine (2004), Zeghondy et al. (2006a),

Zeghondy et al. (2006b), Lipinski et al. (2010), Haussener et al. (2009), Chahlafl et al. (2012), Zarrouati et al. (2015)]. The originality of the present work is due to the fact that a homogenised phase is non Beerian and characterised by non diffuse interfaces, more precisely interfaces which obey general interfacial laws for reflection and transmission. As developed in this Section, extinction, scattering and absorption phenomena can then not be studied by using an intensity field, which implicitly globalises successive scattering events. Extinction, scattering and absorption have to be separately studied for every type of source term, associated with initial volume emission and successive interfacial scattering events.

The different phenomena associated with emission source terms are classically modeled as in the previous cited references : As the medium is assumed statistically homogeneous, all the source points are considered as isotropic and equivalent.

The successive sets of scattering events (n) are determined by following emission and scattering of generated power bundles. In these conditions, emission and scattering source terms are correlated to transmission and extinction by absorption or scattering. But it is classically assumed [Taine et al. (2010)] that extinction by scattering is not correlated with the associated scattering source terms : Scattering source terms corresponding to the n^{th} set of scattering events are represented by independently generated bundles, by following the scattering law characterised by a specific phase function, defined in Sec.5.1.1.3.

A huge number of emitted power bundles are first shot in random directions \mathbf{u}_1 from random volume points $M_0(\mathbf{r}_0)$ of a shooting zone of the real absorbing phase a. For the sake of clarity, only the first successive scattering events will be followed for illustrating the method : These chosen events are represented by bold lines in Fig.5.1. The nature of extinction of the emitted power bundles is determined by sampling of random numbers which allow Equation (5.4) to be verified : A part of the emitted power bundles characterised by $P_{a\nu a}^{S(0)}$ is absorbed within the phase, a second part characterised by $P_{sc\nu aa}^{S(0)}$ is internally scattered, the third one characterised by $P_{sc\nu ab}^{S(0)}$ is externally scattered. The part $\Sigma^{*(0)}$ of the interface area which is impacted by the bundles issued in the initial direction \mathbf{u} from the set of points $M_0(\mathbf{r}_0)$ has been determined : The corresponding current points are $M_0^*(\mathbf{r}_0^*)$. The set of points $M_0^*(\mathbf{r}_0^*)$ of $\Sigma^{*(0)}$ are now source points for both internal and external scattering. The associated phase functions $p_{\nu aa}^{S(0)}$ and $p_{\nu ab}^{S(0)}$ are determined from Equations (5.10) and (5.11).

By commodity, $M_0^*(\mathbf{r}_0^*)$ and $\Sigma^{*(0)}$ are now called $M_n(\mathbf{r}_n)$ and $\Sigma^{(n)}$ considered as sources of the n^{th} set of scattering events. In the case of internal scattering, with the notations of Fig.5.1, $M_0^*(\mathbf{r}_0^*)$ and $\Sigma^{*(0)}$ now become $M_1(\mathbf{r}_1)$ and $\Sigma^{(1)}$ and in the case of external scattering, $M_2(\mathbf{r}_2)$ and $\Sigma^{(2)}$. These last source points are characterised by a spatial scattering distribution function $f_{\mathbf{u}ab}^{S(2)}(\mathbf{r}_2)$ in the direction \mathbf{u} , which depends on $W_{\mathbf{u}ab}^{(2)}(\mathbf{r}_2)$, the interfacial density over $\Sigma^{(2)}$ of the

bundles which are externally scattered in an elementary solid angle $d\Omega$ around \mathbf{u} , *i.e.*

$$f_{\mathbf{u}ab}^{S(2)}(\mathbf{r}_2) = \frac{W_{\mathbf{u}ab}^{(2)}(\mathbf{r}_2)}{\int_{\Sigma_{\mathbf{u}}^{(1)}/V/\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_b(\mathbf{r}'_2)\geq 0} W_{\mathbf{u}ab}^{(2)}(\mathbf{r}'_2) d\mathbf{r}'_2}, \quad (5.13)$$

where \mathbf{n}_b is the normal unit vector at a current point $M_2(\mathbf{r}_2)$ of $\Sigma^{(2)}$, oriented towards the phase b.

The extinction cumulative distribution function $G_{ext\nu ab}^{S(2)}$ within the phase b associated with the considered external scattering source term is then determined according to Equation (5.3) by using $f_{\mathbf{u}ab}^{S(2)}(\mathbf{r}_2)$ as weight function and an equation similar to Equation (5.1). By using a new set of random number samplings which allow Equations (5.5) and (5.6) to be verified, the extinction of the externally scattered power bundles is defined as previously : A part of these bundles characterised by $P_{scabb}^{tS(2)}$ is internally scattered within the phase b, the second part characterised by $P_{scaba}^{tS(2)}$ is externally scattered towards the phase a. $\Sigma^{*(2)}$ is the part of the interfaces covered by the corresponding extinction points in an elementary solid angle $d\Omega_{b1}$ around \mathbf{u}_1 : It is characterised by the interfacial density $W_{i\mathbf{u}_1}^{(2)}(\mathbf{r}_2^*)$ which is obtained by the Monte Carlo method. It allows $f_{i\mathbf{u}_1 ab}^{S(2)}(\mathbf{r}_2^*)$, the spatial distribution function over $\Sigma^{*(2)}$ of the impact points associated with the incidence direction \mathbf{u}_1 to be determined by

$$f_{i\mathbf{u}_1 ab}^{S(2)}(\mathbf{r}_2^*) = \frac{W_{i\mathbf{u}_1 ab}^{(2)}(\mathbf{r}_2^*)}{\int_{\Sigma_{\mathbf{u}_1}^{*(2)}/V/\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}_b(\mathbf{r}'_2^*)\leq 0} W_{i\mathbf{u}_1 ab}^{(2)}(\mathbf{r}'_2^*) d\mathbf{r}'_2^*}, \quad (5.14)$$

where \mathbf{n}_b is the normal unit vector at a point $M_2^*(\mathbf{r}_2^*)$ of $\Sigma^{*(2)}$, oriented towards the phase b. $f_{i\mathbf{u}_1 ab}^{S(2)}(\mathbf{r}_2^*)$ allows the phase functions $p_{\nu abb}^{S(2)}$ and $p_{\nu aba}^{S(2)}$ to be determined from Equations (5.11) and (5.12).

The previous procedure is iterated for the successive sets of scattering events. As previously, $M_2^*(\mathbf{r}_2^*)$ and $\Sigma^{*(2)}$ become $M_3(\mathbf{r}_3)$ and $\Sigma^{(3)}$ sources of the internal scattering events of the type abb and $M_4(\mathbf{r}_4)$ and $\Sigma^{(4)}$ sources of the external scattering events of the type aba, etc.

5.1.2 Coupled Generalised Radiative Transfer Equations

Radiative transfer through non Beerian homogenised phases is modeled by coupled integral Generalised Radiative Transfer Equations (GRTEs), which account for the memory effect characterising these media. The only initial source is, in the present case, the volume emission by a. The first scattering source terms are associated with this initial volume emission : $S_{sc\nu aa}^{S(1)}$ corresponds to internal scattering within a and $S_{sc\nu ab}^{S(2)}$ to external scattering from a to b and write

$$\begin{aligned}
 c = a, b \quad S_{sc\nu ac}^{S(i)}(\mathbf{u}, s') &= \\
 i = 1, 2 \quad \int_{4\pi} \int_{s_{1w}}^{s'_1} \frac{dP_{sc\nu ac}^{S(i)}(\mathbf{u}_1, s'_1 - s_1)}{ds'_1} \frac{p_{\nu ac}^{S(i)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} \Pi_a \kappa_{\nu a} n_{\nu a}^2 I_{\nu a}^c [T_a(s_1)] ds_1 d\Omega_{1a}
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

A current scattering source term, associated with a set $acHde$ is expressed from the recurrent equation

$$\begin{aligned}
 S_{sc\nu acHde}^{S(n)}(\mathbf{u}, s') &= \\
 \int_{4\pi} \int_{s_{1w}}^{s'_1} \frac{dP_{sc\nu acHde}^{S(n)}(\mathbf{u}_1, s'_1 - s_1)}{ds'_1} \frac{p_{\nu acHde}^{S(n)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} S_{sc\nu cHd}^{S(n-1)}(\mathbf{u}_1, s_1) ds_1 d\Omega_{1e}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

where $S_{sc\nu acHd}^{S(n-1)}$ is the source term preceding $S_{sc\nu acHde}^{S(n)}$ in the set $acHde$. The Generalised Radiative Transfer Equation (GRTE) of the phase a writes, in integral formulation, by generalising the expression of Ref. [Dauvois et al. (2016)]

$$\begin{aligned}
 I_{\nu a}(\mathbf{u}, s') &= I_{\nu a}(\mathbf{u}, s_w) [1 - G_{ext\nu a}^{S_w}(\mathbf{u}, s' - s_w)] \\
 &+ \int_{s_w}^{s'} \left(\kappa_{\nu a} \Pi_a n_{\nu a}^2 I_{\nu}^{\circ}[T_a(s)] [1 - G_{ext\nu a}(\mathbf{u}, s' - s)] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{acHda} S_{sc\nu acHda}^S(\mathbf{u}, s) [1 - G_{ext\nu acHda}^S(\mathbf{u}, s' - s)] \right) ds
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

where $I_{\nu a}$ is the intensity within the medium a of refractive index $n_{\nu a}$ defined per unit volume of the whole porous medium : $I_{\nu a}$ is then proportional to the volume fraction Π_a and to $n_{\nu a}^2$; $G_{ext\nu a}^{S_w}$, $G_{ext\nu a}$ and $G_{ext\nu acHda}^S$ are the extinction cumulative distribution functions associated with the different types of source terms : Intensity distribution $I_{\nu a}(\mathbf{u}, s_w)$ at the porous medium boundary point of abscissa s_w , volume isotropic emission by a, set of interfacial scattering source terms within or towards a, including $S_{sc\nu aa}^{S(1)}(\mathbf{u}, s)$.

The GRTE of the phase b is similar to Equation (5.17) without emission term

$$\begin{aligned}
 I_{\nu b}(\mathbf{u}, s') &= I_{\nu b}(\mathbf{u}, s_w) [1 - P_{sc\nu b}^{tS_w}(\mathbf{u}, s' - s_w)] \\
 &+ \int_{s_w}^{s'} \left(\sum_{acHdb} S_{sc\nu acHdb}^S(\mathbf{u}, s) [1 - P_{sc\nu acHdb}^{tS}(\mathbf{u}, s' - s)] \right) ds
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

As b is a transparent medium, any extinction cumulative distribution function G_{ext}^S of the previous equation simply is a scattering cumulative probability P_{sc}^{tS} . When b is a *Beerian homogenised phase*, Equation (5.18) simply becomes

$$\begin{aligned}
I_{\nu b}(\mathbf{u}, s') &= I_{\nu b}(\mathbf{u}, s_w) \exp\left(-[\sigma_{\nu ba}(\mathbf{u}) + \sigma_{\nu bb}(\mathbf{u})](s' - s_w)\right) \\
+ \int_{s_w}^{s'} &\left[\int_0^{4\pi} \sigma_{\nu bb}(\mathbf{u}_1) \frac{p_{\nu bb}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} I_{\nu b}(\mathbf{u}_1, s) d\Omega_{b1} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{4\pi} \sigma_{\nu ab}(\mathbf{u}_1) \frac{p_{\nu ab}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} I_{\nu a}(\mathbf{u}_1, s) d\Omega_{a1} \right] \\
\times &\exp\left(-[\sigma_{\nu ba}(\mathbf{u}) + \sigma_{\nu bb}(\mathbf{u})](s' - s)\right) ds \tag{5.19}
\end{aligned}$$

where $\sigma_{\nu cd}(\mathbf{u})$ and $p_{\nu cd}(\mathbf{u})$ are the scattering coefficient and phase function associated with global scattering from the phase c (a or b) to the phase d (a or b). Indeed, for this Beerian homogenised phase the contributions of all the successive scattering events have merged in the local intensities $I_{\nu a}$ and $I_{\nu b}$. Note also that in Equation (5.19), the emission source term is implicitly accounted for in the expression of $I_{\nu a}$.

5.1.3 Coupled RTEs

When a homogenised phase is non Beerian, it is only characterised in the general case by a Generalised Radiative Transfer Equation. A classical Radiative Transfer Equation (RTE) nevertheless has a physical meaning when the validity conditions of a radiative Fourier's law are fulfilled [Taine et al. (2010), Chahlaoui et al. (2012)].

Introducing the smallest distance δ along which the medium is optically thick, two sufficient validity conditions have been defined in Ref. [Gomart and Taine (2011)] for a unique propagation phase : i) The Fourier's model is only valid in zones at a distance larger than δ from the boundaries of the whole porous medium ; ii) The temperature T must be practically uniform over δ . An accurate quantitative criterion has been given in the previous reference

$$\left| \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right| < \eta \kappa^{eff}(\omega, g), \tag{5.20}$$

where κ^{eff} is an effective absorption coefficient accounting for multiple scattering events (ω and g are the albedo and the anisotropy factor, respectively) and η a coefficient depending on g and ω . As κ^{eff} is proportional to the absorption coefficient of the phase, the condition is not fulfilled for a transparent phase. In the present case of a medium with transparent and semi transparent phases, a model based on two coupled RTEs will be developed and its validity discussed by comparison with the results of the two coupled reference GRTEs. In these conditions, the homogenised phases become Beerian, as physically discussed in Ref. [Dauvois et al. (2016)]. The temperature is only defined for the absorbing phase, from the radiation point of view.

- The previous assumptions are assumed valid for the two phases. Consequently :
- Radiation transfer is locally ruled by the intensities $I_{\nu a}$ and $I_{\nu b}$. The modeling is then simplified as the intensities gather all the types of incident scattered radiations at a given point and in a given direction ;
 - A summation over δ of the radiative statistical functions is considered as a summation over an infinite distance.
 - All the emission and scattering source terms are assumed uniform along the distance δ within a or b respectively.
 - The intensities $I_{\nu a}(\mathbf{u})$ and $I_{\nu b}(\mathbf{u})$ within a and b also are uniform along the distance δ and linked to the global source terms $S_{\nu a}^B(\mathbf{u})$ and $S_{\nu b}^B(\mathbf{u})$ given by

$$\begin{aligned} S_{\nu a}^B(\mathbf{u}) &= \Pi_a \kappa_{\nu a} n_{\nu a}^2 I_{\nu}^{\circ}(T_a) + S_{sc\nu aa}^B(\mathbf{u}) + S_{sc\nu ba}^B(\mathbf{u}); \\ S_{\nu b}^B(\mathbf{u}) &= S_{sc\nu ab}^B(\mathbf{u}) + S_{sc\nu bb}^B(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (5.21)$$

The source terms involved in the previous equations gather all the contributions of the successive scattering events of given types.

Under these assumptions, the RTEs for the phases a and b can be expressed vs the intensities $I_{\nu a}$ and $I_{\nu b}$. As the homogenised phases are assumed Beerian, there is no difference between the statistical quantities associated with the volume sources and all the interfacial sources of the same types [Dauvois et al. (2016)]. As discussed in this last reference, the best accuracy is obtained by determining $G_{ext\nu c}$ associated with isotropic volume source points. Far from the boundaries of the porous medium, Equations (5.17),(5.18) are in these conditions replaced by simple RTEs, *i.e.*

$$\begin{aligned} c = a, b \quad I_{\nu c}(\mathbf{u}) &= S_{\nu c}^B(\mathbf{u}) \int_{s-\delta}^s [1 - G_{ext\nu c}(\mathbf{u}, v)] dv \\ &= S_{\nu c}^B(\mathbf{u}) \int_0^{\infty} [1 - G_{ext\nu c}(\mathbf{u}, v)] dv = S_{\nu c}^B(\mathbf{u}) / B_{\nu c}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (5.22)$$

where $B_{\nu a}(\mathbf{u})$ and $B_{\nu b}(\mathbf{u})$ are generalised extinction coefficients at equilibrium defined by

$$B_{\nu a}(\mathbf{u}) = \left(\int_0^{\infty} [1 - G_{ext\nu a}(\mathbf{u}, v)] dv \right)^{-1}, \quad B_{\nu b}(\mathbf{u}) = \left(\int_0^{\infty} [1 - P_{sc\nu b}(\mathbf{u}, v)] \right)^{-1} \quad (5.23)$$

The variations of the *intensities and source terms are now accounted for at a scale s' larger than δ* : The source terms do not any more compensate the extinction terms $- B_{\nu c}(\mathbf{u}, s') I_{\nu c}(\mathbf{u})$.

Under the assumptions of this Section, the internal and external scattering

source terms $S_{sc\nu aa}(\mathbf{u}, s')$, $S_{sc\nu ab}(\mathbf{u}, s')$, $S_{sc\nu ba}(\mathbf{u}, s')$ and $S_{sc\nu bb}(\mathbf{u}, s')$ are given, for $c=a,b$ and $d=a,b$, by

$$S_{sc\nu cd}(\mathbf{u}, s') = \int_0^{4\pi} \int_{-\infty}^{s'_1} B_{\nu c}(\mathbf{u}_1) I_{\nu c}(\mathbf{u}_1, s_1) \frac{dP_{sc\nu cd}(\mathbf{u}_1, s'_1 - s_1)}{ds'} \frac{p_{\nu cd}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} ds_1 d\Omega_{1c} \quad (5.24)$$

in which the phase functions $p_{\nu cd}$ are independent of the incidence direction distribution [Dauvois et al. (2016)]. Note that, in Equation (5.24), s' and s'_1 respectively are the abscissas of the same point M' in the direction \mathbf{u} and in the current direction \mathbf{u}_1 . Equation (5.24) then becomes

$$S_{sc\nu cd}(\mathbf{u}, s') = \int_0^{4\pi} \Sigma_{\nu cd}(\mathbf{u}_1) I_{\nu c}(\mathbf{u}_1, s'_1) \frac{p_{\nu cd}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} d\Omega_{1c} \quad (5.25)$$

where $\Sigma_{\nu cd}(\mathbf{u}_1)$, equal to $P_{sc\nu cd}(\mathbf{u}_1, \infty) B_{\nu c}(\mathbf{u}_1)$, is the Beerian scattering coefficient associated with scattering from c towards d .

The spatial and directional variations of the intensities at these large scales are then ruled by the RTEs of phases a and b , which write

$$\frac{dI_{\nu a}}{ds'}(\mathbf{u}, s') + B_{\nu a}(\mathbf{u}) I_{\nu a}(\mathbf{u}, s') = \Pi_a \kappa_{\nu a} n_{\nu a}^2 I_{\nu a}^{\circ}[T_a(s')] + S_{sc\nu aa}(\mathbf{u}, s') + S_{sc\nu ba}(\mathbf{u}, s') \quad (5.26)$$

$$\frac{dI_{\nu b}}{ds'}(\mathbf{u}, s') + B_{\nu b}(\mathbf{u}) I_{\nu b}(\mathbf{u}, s') = S_{sc\nu ab}(\mathbf{u}, s') + S_{sc\nu bb}(\mathbf{u}, s') \quad (5.27)$$

Due to the equilibrium properties of the medium, it is shown in Appendix A (Equations (A.9) and (A.11)) that

$$\Sigma_{\nu dc}(-\mathbf{u}) = \Sigma_{\nu dc}(\mathbf{u}) \quad (5.28)$$

and that Equation (5.25), the result of which is expressed in medium d , simply becomes (see Equations (A.6), (A.10))

$$S_{sc\nu cd}(\mathbf{u}, s') = \left(\frac{n_{\nu d}^2 \Pi_d}{n_{\nu c}^2 \Pi_c} \right) \Sigma_{\nu dc}(\mathbf{u}) \int_0^{4\pi} I_{\nu c}(\mathbf{u}_1, s'_1) \frac{p_{\nu dc}(-\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1)}{4\pi} d\Omega_{1c}(-\mathbf{u}_1) \quad (5.29)$$

Another consequence is that, in ITE conditions, the radiative power globally scattered from a toward b in direction \mathbf{u} is equal to the one scattered from b toward a in direction $-\mathbf{u}$, *i.e.*

$$S_{sc\nu cd}^\circ(\mathbf{u}, s') = S_{sc\nu dc}^\circ(-\mathbf{u}, s') \quad (5.30)$$

which simply leads to

$$n_{\nu a}^2 \Pi_a \Sigma_{\nu a}(\mathbf{u}) = n_{\nu b}^2 \Pi_b \Sigma_{\nu b}(-\mathbf{u}) \quad (5.31)$$

The previous equality is valid for external scattering and internal scattering (case c=d). Finally, the two coupled RTE's related to a and b also write

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\nu a}}{ds'}(\mathbf{u}, s') + B_{\nu a}(\mathbf{u}) I_{\nu a}(\mathbf{u}, s') &= \kappa_{\nu a} \Pi_a n_{\nu a}^2 I_\nu^\circ[T_a(s')] \\ &+ \Sigma_{\nu aa}(\mathbf{u}) \int_0^{4\pi} I_{\nu a}(\mathbf{u}_1, s'_1) \frac{p_{\nu aa}(-\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1)}{4\pi} d\Omega_{1a}(-\mathbf{u}_1) \\ &+ \left(\frac{n_{\nu a}^2 \Pi_a}{n_{\nu b}^2 \Pi_b} \right) \Sigma_{\nu ab}(\mathbf{u}) \int_0^{4\pi} I_{\nu b}(\mathbf{u}_1, s'_1) \frac{p_{\nu ab}(-\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1)}{4\pi} d\Omega_{1b}(-\mathbf{u}_1) \\ \frac{dI_{\nu b}}{ds'}(\mathbf{u}, s') + B_{\nu b}(\mathbf{u}) I_{\nu b}(\mathbf{u}, s') &= \Sigma_{\nu bb}(\mathbf{u}) \int_0^{4\pi} I_{\nu b}(\mathbf{u}_1, s'_1) \frac{p_{\nu bb}(-\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1)}{4\pi} d\Omega_{1b}(-\mathbf{u}_1) \\ &+ \left(\frac{n_{\nu b}^2 \Pi_b}{n_{\nu a}^2 \Pi_a} \right) \Sigma_{\nu ba}(\mathbf{u}) \int_0^{4\pi} I_{\nu a}(\mathbf{u}_1, s'_1) \frac{p_{\nu ba}(-\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1)}{4\pi} d\Omega_{1a}(-\mathbf{u}_1) \end{aligned} \quad (5.33)$$

In ITE conditions, these equations simply degenerate, by using the normalisation equation of the phase functions, into

$$B_{\nu a}(\mathbf{u}) = \kappa_{\nu a} + \Sigma_{\nu aa}(\mathbf{u}) + \Sigma_{\nu ab}(\mathbf{u}); \quad B_{\nu b}(\mathbf{u}) = \Sigma_{\nu ba}(\mathbf{u}) + \Sigma_{\nu bb}(\mathbf{u}) \quad (5.34)$$

equations which express the energy conservation between extinction and source terms.

5.1.4 Radiative conductivity tensors

The aim of this study is to determine P_a^R , the radiative power in the absorbing phase a per unit volume of the whole porous medium. Note that P_b^R , the corresponding quantity in phase b, is zero as this phase is transparent. By using the previous coupled GRTEs or coupled RTEs, P_a^R and P_b^R are directly obtained

from the knowledge of the intensity fields $I_{\nu a}$ and $I_{\nu b}$ within the two phases. But, in the present Section, the Fourier's model, when it is valid, is limited to the knowledge of the radiative fluxes within the phases a and b, more precisely to the knowledge of the conductivity tensors of a and b.

In terms of fluxes, the radiative balance of a volume element of a phase c, which leads to the determination of P_c^R , not only involves the fluxes through boundaries belonging to the considered phase, characterised by the Fourier's laws, but also the exchanged fluxes between the phase c and the other phase, through other boundaries. These exchanged fluxes are not zero as the intensities of the two phases in vacuum differ.

This study can only be achieved for a defined system with defined boundary conditions. It will be done in Section 5.3.2 for a felt of fibres. The present Section is limited to the determination of the radiative fluxes following a Fourier's law within the phases a and b.

The two coupled RTEs are solved by a perturbation technique which generalises the method in use in Ref. [Chahlafi et al. (2012)], in which more details are given. The perturbation parameters are $\zeta_a = 1/[B_{\nu a}(\mathbf{u})\delta]$ and $\zeta_b = 1/[B_{\nu b}(\mathbf{u})\delta]$, where δ is the smallest spatial scale for which the two homogenised phases are optically thick. Non dimensional Equations (5.26) and (5.27) then write, by using $s'^+ = s'/\delta$

$$\zeta_a \frac{dI_{\nu a}}{ds'^+}(\mathbf{u}, s'^+) + I_{\nu a}(\mathbf{u}, s'^+) = \frac{\kappa_{\nu a}}{B_{\nu a}(\mathbf{u})} \Pi_a n_{\nu a}^2 I_{\nu}^{\circ}[T_a(s'^+)] + \frac{[S_{sc\nu aa}(\mathbf{u}, s'^+) + S_{sc\nu ba}(\mathbf{u}, s'^+)]}{B_{\nu a}(\mathbf{u})} \quad (5.35)$$

$$\zeta_b \frac{dI_{\nu b}}{ds'^+}(\mathbf{u}, s'^+) + I_{\nu b}(\mathbf{u}, s'^+) = \frac{[S_{sc\nu ab}(\mathbf{u}, s'^+) + S_{sc\nu bb}(\mathbf{u}, s'^+)]}{B_{\nu b}(\mathbf{u})} \quad (5.36)$$

The intensities $I_{\nu a}$ and $I_{\nu b}$ write, in the perturbation method,

$$c = a, b \quad I_{\nu c} = I_{\nu c}^{(0)} + I_{\nu c}^{(1)} \quad (5.37)$$

where $I_{\nu c}^{(0)}$ and $I_{\nu c}^{(1)}$ are the solutions at the perturbation orders 0 and 1 : $I_{\nu c}^{(0)}$ is the intensity in conditions of Local Thermal Equilibrium of radiation, $I_{\nu c}^{(1)}$ its perturbation due to the transport terms of Equations (5.35) and (5.36) (see for instance Refs. [Chahlafi et al. (2012), Taine et al. (2014)]).

In this particular case of a medium with a transparent phase and a semi transparent one, $I_{\nu c}^{(0)}$ is equal to the equilibrium intensity $\Pi_c n_{\nu c}^2 I_{\nu}^{\circ}[T_a(s')]$, which, due to its isotropy, does not contribute to the radiative flux through the phase c. In these conditions, the flux through a phase c (a or b) writes

$$c = a, b \quad \mathbf{q}_c^R(s') = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_{\nu c}^{(1)}(\mathbf{u}, s') \mathbf{u}(\theta, \phi) d\theta d\phi d\nu. \quad (5.38)$$

As shown in Ref. [Chahlaoui et al. (2012)], the emission term in Equation (5.35) is of order 0. The transport terms involving temperature gradients in Equations (5.35) and (5.36) are proportional to the perturbation parameters. In the determination of the solutions of order 1 of the coupled RTEs, $dI_{\nu a}/ds'$ and $dI_{\nu b}/ds'$ are taken at order 0; On the contrary, the extinction scattering source terms are taken at order 1. $I_{\nu a}^{(1)}$ and $I_{\nu b}^{(1)}$ are then iteratively obtained by solving the coupled integral equations

$$c = a, b \quad I_{\nu c}^{(1) n+1} = \mathcal{L}_c(I_{\nu a}^{(1) n}, I_{\nu b}^{(1) n}), \quad (5.39)$$

where n is the iteration step and the quantities $\mathcal{L}_c(X, Y)$ are functionals defined, for $c = a, b$, by

$$\mathcal{L}_c(X, Y) = -\frac{1}{B_{\nu c}(\mathbf{u})} \left(n_{\nu c}^2 \frac{\partial I_{\nu}^{\circ}(T_a)}{\partial T_a} u_i \frac{\partial T_a}{\partial x'_i} + S_{sc\nu ca}(X, Y) + S_{sc\nu cb}(X, Y) \right). \quad (5.40)$$

In Equation (5.40), the derivation vs s' has been replaced in cartesian tensorial notations by the operator $u_i \partial/\partial x'_i$. It appears that, after convergence, $I_{\nu a}^{(1)}$ and $I_{\nu b}^{(1)}$ and consequently from Equation (5.38) the fluxes within a and b are proportional to $-u_i \partial T_a/\partial x'_i$, *i.e.* are given by radiative Fourier's laws

$$c = a, b \quad \mathbf{q}_{ci}^R = -k_{cij}^R \frac{\partial T_a}{\partial x'_j}, \quad (5.41)$$

valid if the precise conditions of Gomart and Taine [Gomart and Taine (2011)] discussed in Sec.5.1.3 are fulfilled.

5.2 Characterisation of a felt of fibres

The material of interest is a felt of absorbing but non scattering fibres made of a refractory ceramic material such as alumina or zirconia. For this study, the calculations are performed over a representative computer-generated virtual fibre felt arrangement. More precisely, the phase a is made of overlapping fibres, cylinders of diameter d and length L , equal to $100d$, and the transparent phase b of refractive index n_b occupies the void space. The centers of the cylinders have random locations, the unit vectors of their axes $\mathbf{u}_C(\theta_C, \phi_C)$ are characterised by random values of ϕ_C and a Gaussian distribution of θ_C centered in the plane normal to the z axis (see Fig.5.2). Total specular reflection conditions are imposed at boundaries parallel to the z axis (see Fig.5.2) : The medium is then infinite along the x and y axes.

The fibres of refractive index n_a and of absorption coefficient κ_a have smooth surfaces and are assumed gray. Due to the large value of their refractive index, the fibres are characterised by strongly anisotropic reflection and transmission

laws and an important total reflection phenomenon occurs within these fibres. The simple model of diffuse interfacial laws cannot be applied in these conditions. The fibre bidirectional reflectivity and transmissivity are in the following defined by the Fresnel's laws for unpolarised radiation, only depending on n_a and n_b as χ_a the imaginary part of the complex optical index of the fibers is assumed small compared to n_a and n_b . A typical value of $\kappa_a d$ for the considered fibres is 0.3, which typically corresponds to $d = 20\mu\text{m}$.

The real interfacial radiative properties depend on the fibre rugosity compared to the range of radiation wavelength : In many cases they present a diffuse part and a specular one. For the sake of simplicity, the Fresnel's reflection and transmission laws corresponding to smooth interfaces have been considered in Sec. 3.

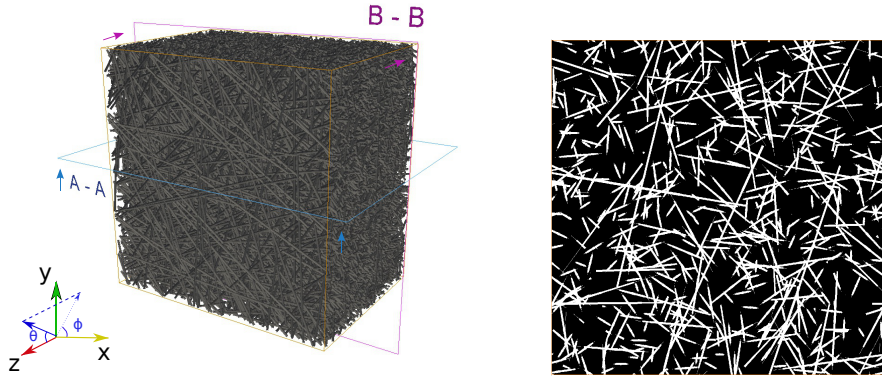


FIGURE 5.2 – Left : Generated fibrous medium ($\Pi_b = 0.75$); Right : Cross section BB normal to the z axis.

5.2.1 Numerical implementation

The radiative statistical functions defined in Sec.5.1.1, *i.e.* $G_{ext a}(\mathbf{u}, s' - s)$, $P_{scaa}(\mathbf{u}, s' - s)$, $P_{scab}(\mathbf{u}, s' - s)$, $p_{aa}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$, $p_{ab}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$, and $G_{ext c}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s)$, $P_{sccd}^{S(n)}(\mathbf{u}, s' - s)$ and $p_{cd}^{S(n)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$, are directly determined by a Monte Carlo method from morphology data and the Fresnel's laws. A huge number of power bundles, which represent the emission within the volume of the cylindrical fibres, are shot and followed up to their absorption within a fibre (phase a), after possible multiple internal or external scattering events. Both absorption and scattering events are stochastically modeled. The calculations are carried out in the following manner :

i) Many numerical fibrous media have been generated. For any generated medium, a shooting zone representative of this medium, which is statistically homogeneous at large scale but strongly anisotropic at any scale, has been defined. A huge number of rays have then been shot from random volume points of the phase of such a zone. In the case presented in Fig.5.2, 40 numerical media have been generated, and 10^{10} rays have been shot from any associated shooting

zone, cube of edge equal to $30d$.

ii) For any medium a calculation zone (extinction zone), including the shooting one, is chosen such that at its boundaries all G_{ext} functions are larger than 0.99. The calculation zone associated with the case of Fig.5.2 is a parallelepiped of length $\mathcal{L} = 100d$ along z and of squared cross section of edge $\mathcal{D} = 100d$ along x and y .

A shot t is characterised by an emission point M_t , of coordinates defined from three random numbers within a randomly chosen cylinder of the shooting zone. The ray direction $\mathbf{u}(\theta, \phi)$ is defined by two other random numbers associated with $\mu = \cos\theta$ and ϕ . More precisely, the directional space is divided in 41 equal intervals along μ varying in $[-1, 1]$ and 101 intervals along ϕ varying in $[0, 2\pi]$. Due to the symmetry of the medium, all the results only depend on μ . They are averaged over ϕ , which accelerates the convergence : Indeed, radiative transfer only occurs along z . Moreover, due to the medium planar symmetry, the results will be presented in the variation range $[0, 1]$ of μ for the extinction cumulative distribution functions and scattering cumulative probabilities and of μ_1 and μ for the phase functions, as detailed in Sec.5.2.2.

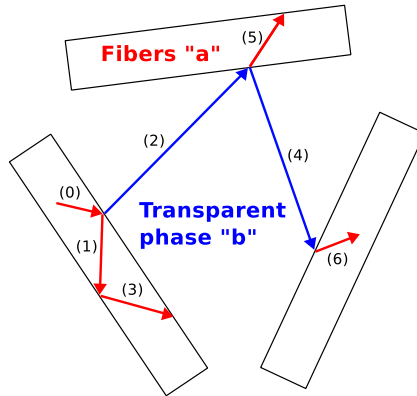


FIGURE 5.3 – Example of radiative paths.

As detailed in Sec.5.1.1.4, $G_{ext a}(\mathbf{u})$, $P_{sc aa}(\mathbf{u})$, $P_{sc ab}(\mathbf{u})$, $p_{aa}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$ and $p_{ab}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$ are first determined by following the set, called 0, of all rays emitted by fibres a in the direction \mathbf{u} (see Fig.5.3). The calculation associated with a given ray is stopped in case of absorption. In case of external scattering (path 2 of Fig.5.3) $P_{sc ab}(\mathbf{u})$ and $p_{ab}^S(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$ are incremented and calculations are now carried out in order to increment $G_{ext ab}^{S(2)}$ and possibly $P_{sc aba}^{S(2)}$ and $p_{sc aba}^S$, or $P_{sc abb}^{S(2)}$ and $p_{sc abb}^S$, etc.

The relative standard deviations on the quantities associated with initial emission by the phase a, *i.e.* $G_{ext a}(\mathbf{u})$, $P_{aa}(\mathbf{u})$, $P_{sc a}(\mathbf{u})$, $P_{sc aa}^S(\mathbf{u})$, $P_{sc ab}^S(\mathbf{u})$, $p_{aa}^S(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$, $p_{ab}^S(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})$ are lower than 1%. They have been obtained from 10^9 realisations of extinction. The maximum standard deviation of the study obtained for 10^{10} rea-

lisations is about 8% : It corresponds to functions associated with rays issued from the third interfacial scattering, the most rare phenomena, *i.e.* $G_{ext\,aba}^{S(3)}$, $P_{a\,aba}^{S(3)}$, $P_{sc\,aba}^{S(3)}$.

5.2.2 Results

In order to remain consistent with the properties of common high temperature insulation felts, the fibres a of diameter d are considered as weakly absorbing and characterised by an absorption optical thickness $\kappa_a d = 0.3$ and a ratio of refractive indices $n_a/n_b = 2$. In these conditions fibres trap the radiation.

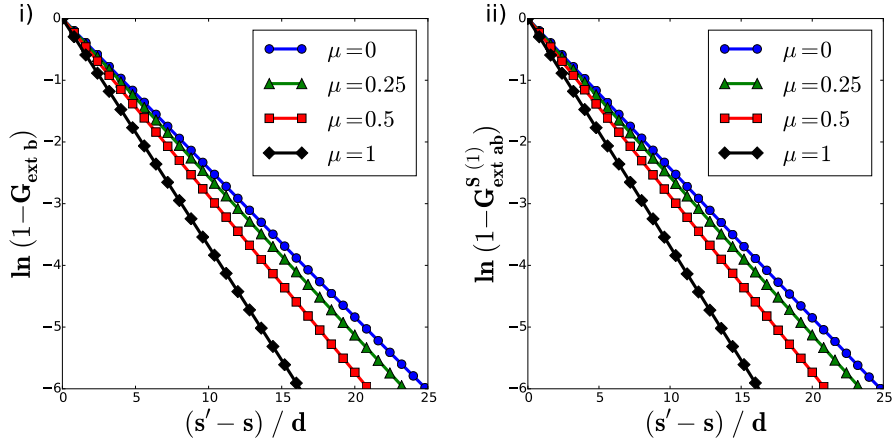


FIGURE 5.4 – Extinction cumulative distribution functions of the transparent phase b for different values of $\mu = \cos \theta$: *i*) $G_{ext\,b}$ associated with isotropic volume source points ; *ii*) $G_{ext\,ab}^{S(2)}$ associated with interfacial scattered rays (path 2 of Fig.5.3).

$G_{ext\,ab}^{S(2)}$, the first extinction cumulative distribution function associated with the transparent phase b and corresponding to the path 2 of Fig.5.3, is compared in Fig.5.4 with $G_{ext\,b}$ associated with isotropic volume shots within b . As both results rigorously follow an exponential law for any direction, the homogenised phase b is Beerian. These results are similar to those pointed out in Ref. [Dauvois et al. (2016)] in the case of a medium with opaque and transparent phases : For a Beerian homogenised phase, extinction cumulative distribution functions issued from isotropic volume source points or from interfacial points are identical. In practice it is easier and more accurate to shoot rays from random isotropic volume source points. Consequently $G_{ext\,b}(\mathbf{u}, s' - s)$ is used in the following. Extinction by b is then simply characterised by an extinction coefficient $\beta(\mathbf{u})$, obtained for instance at the optically thin limit : $\beta(\mathbf{u}) = \frac{dG_{ext\,b}}{d(s' - s)}(\mathbf{u}, s' - s = 0)$. As expected the extinction lengths within the homogenised phase b are maximum in the preferential plane of orientation of the cylinders ($\mu = 0$), and minimum in the directions $\mu = -1$ and $\mu = 1$ normal to this plane (see Fig.5.2).

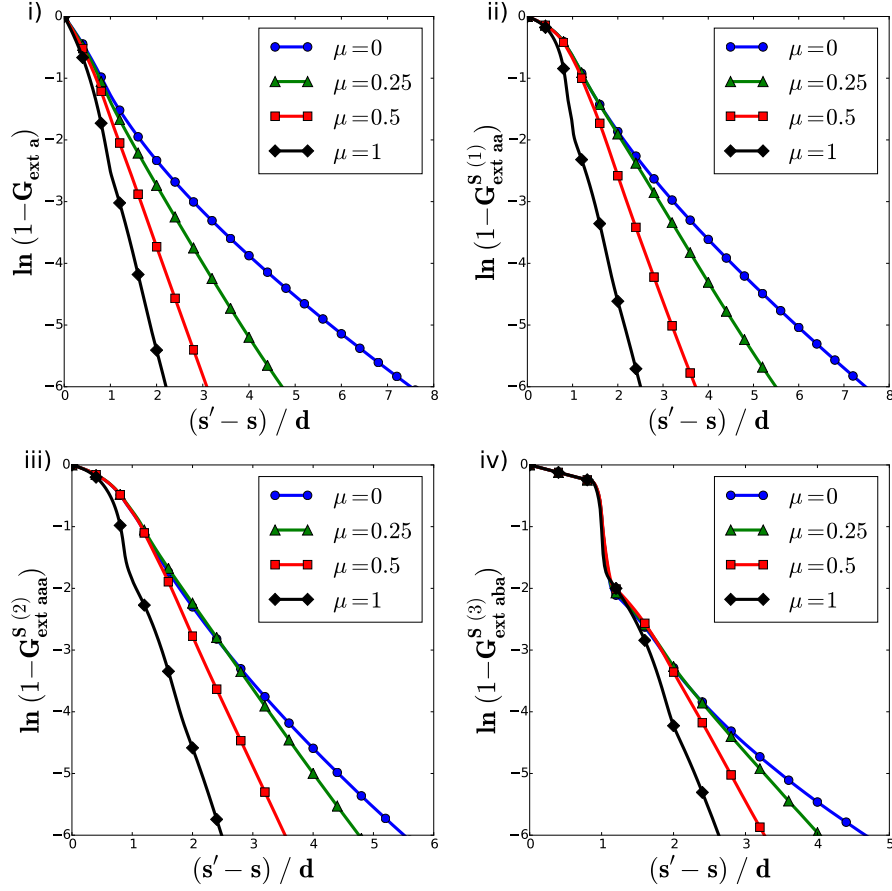


FIGURE 5.5 – Extinction cumulative distribution functions of phase a (fibres) for different values of $\mu = \cos \theta$. i) $G_{ext a}$ associated with isotropic volume emission points; ii) $G_{ext aa}^{S(1)}$; iii) $G_{ext aaa}^{S(3)}$; iv) $G_{ext aba}^{S(5)}$ (by using notations of Sec.5.1.1.1 and Fig.5.3.)

As shown in Fig.5.5, the extinction cumulative distribution functions associated with isotropic volume emission within the fibres a and with successive interfacial scattering source terms within a strongly differ and strongly differ from an exponential behaviour : The homogenised phase a is, in general, strongly non Beerian and extinction and scattering coefficients have no more physical meaning. Consequently, the complete original model introduced in Secs.5.1.1 and 5.1.2 has to be used.

From a practical point of view, almost all the emitted power bundles are absorbed after a few scattering events. The extinction cumulative distribution function associated with the Beerian homogenised phase b is accurately determined. For the non Beerian homogenised phase a, $G_{ext a}$, $G_{ext aa}^{S(1)}$, $G_{ext aaa}^{S(3)}$, $G_{ext aba}^{S(5)}$ and $G_{ext abba}^{S(6)}$ are also accurately determined. As only a few bundles are involved, the following extinction cumulative distribution functions, defined in Sec.5.1.1.1, $G_{ext acHaa}$ and $G_{ext acHab}$ are taken equal to $G_{ext aaa}^{S(3)}$ and $G_{ext abba}^{S(6)}$,

respectively.

In the core of the medium, generalised extinction and scattering coefficients at equilibrium are defined for the absorbing phase a and the transparent phase b by Equations (5.23) and the following development. The transverse optical thicknesses of a fiber associated with these quantities and with the absorption coefficient of the phase a are compared in Fig.5.6.

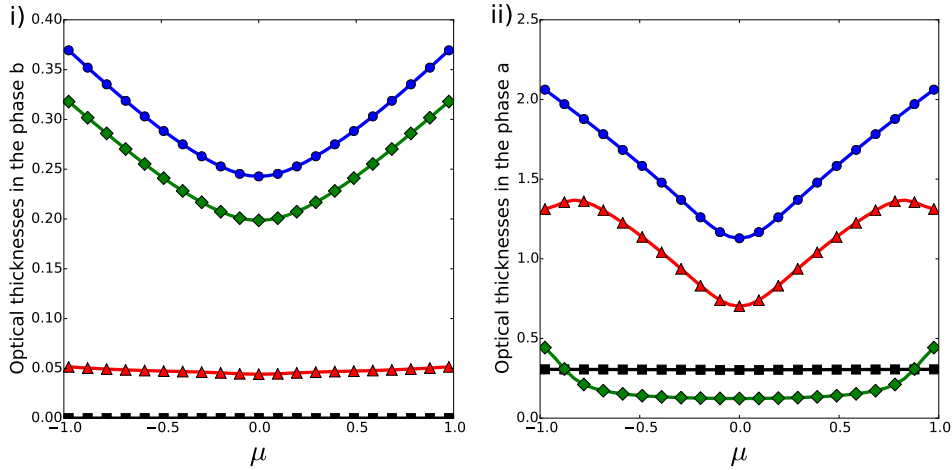


FIGURE 5.6 – Optical thicknesses based on \circ : Generalised extinction coefficients ($B_c d$); Δ : Generalised internal scattering coefficients ($\Sigma_{cc} d$); \diamond : Generalised external scattering coefficients ($\Sigma_{cd} d$) and \square : Absorption coefficients ($\kappa_a d = 0.3$ and $\kappa_b d = 0$);
 i) For the transparent phase b ($c=b, d=a$); ii) For the absorbing phase a (fibres) ($c=a, d=b$).

Extinction in the transparent phase b is mainly due to external scattering, but in the absorbing phase a to internal scattering, due to the large ratio of the refractive indices ($n_a/n_b = 2$). Internal scattering in phase b is practically independent of μ , as the cylinders practically are orthogonal to the z axis : The local normal unit vector distribution is then practically independent of μ . In phase a (fibres), as $n_a/n_b = 2$, the total reflection phenomenon (for $\mu < 0.86$) explains the change in slope of the generalised internal scattering coefficient and the weak value of the generalised external scattering coefficient for $|\mu| < 0.86$, as shown in Fig.5.6.b

For $\mu = -1$ and $\mu = 1$ the rays are mainly normal to the cylinders, the transmissivity is maximal and decreases with the angle. When the critical angle is reached ($\mu_{crit} = \cos[\arcsin(1/2)] \approx 0.86$) the rays are mainly reflected and internal scattering is the predominant mode of extinction. Absorption in the fibre volume is Beerian and isotropic, *i.e.* independent of μ (Fig.5.6.b). Finally, a large part of radiation propagating in the transparent phase b is transmitted towards the phase a (fibres) and then trapped by multiple reflections until absorption occurs. The fibres behave as waveguides.

The phase functions a priori depend on the incidence direction $\mathbf{u}_1(\mu_1, \phi_1)$ and the scattering one $\mathbf{u}(\mu, \phi)$. Due to the statistical axisymmetry of the generated medium, they are independent of ϕ_1 and depend on μ_1 , μ and $\phi - \phi_1$. But as the thermal boundary conditions applied to the medium are also assumed axisymmetric, radiative transfer only occurs along z and the practical phase functions defined in the following only depend on μ_1 and μ . Different phase functions are plotted in Fig.5.7.

For the Beerian transparent homogenised phase b, all phase functions associated with internal scattering within b (upper left and right Figs.5.7) are identical, whatever the type of source points (of volume or interfacial), as previously seen for a porous medium with a transparent and an opaque phase [Dauvois et al. (2016)]. It is also the case for all phase functions associated with external scattering from b to a (lower left Fig.5.7). On the contrary, for the non Beerian homogenised phase a (fibres), the phase functions associated with internal and external scattering issued from different types of source points clearly differ : An example of internal scattering cases is shown in middle Figs.5.7.

As the medium statistically presents both a revolution symmetry axis z and a plane of symmetry perpendicular to the z axis, it also presents a central symmetry. For the directions parallel to the z axis ($\mu = -1$ and $\mu = 1$) the probability of internal scattering within the transparent phase b is maximum in the specular directions, as shown in the upper left Fig.5.7. It is not the case for the probability of internal scattering within the fibre phase a (see lower Figs.5.7) : This fact is due to the total reflection phenomenon, which occurs for $\mu_{crit} = 0.86$: Internal scattering is the only extinction phenomenon beyond μ_{crit} .

The phase function associated with internal scattering within the transparent phase b presents, in addition to the central symmetry, two other symmetries associated with diagonal lines in upper Figs.5.7, which correspond to the transformations : $(\mu_1, \mu) \rightarrow (\mu, \mu_1)$ and $(\mu_1, \mu) \rightarrow (-\mu, -\mu_1)$. Indeed, the generalised internal scattering coefficient of b is practically independent of μ_1 , as shown in left Fig.5.6, as for a statistically isotropic medium : Consequently the reciprocity theorem (Equation (A.2)) leads to the equality between $p_{bb}(\mu_1, \mu)$ and $p_{bb}(-\mu, -\mu_1)$. On the other hand, as the generalised internal scattering coefficient of a is strongly anisotropic, as shown in right Fig.5.6, the previous symmetries do not appear in the phase function p_{aa} .

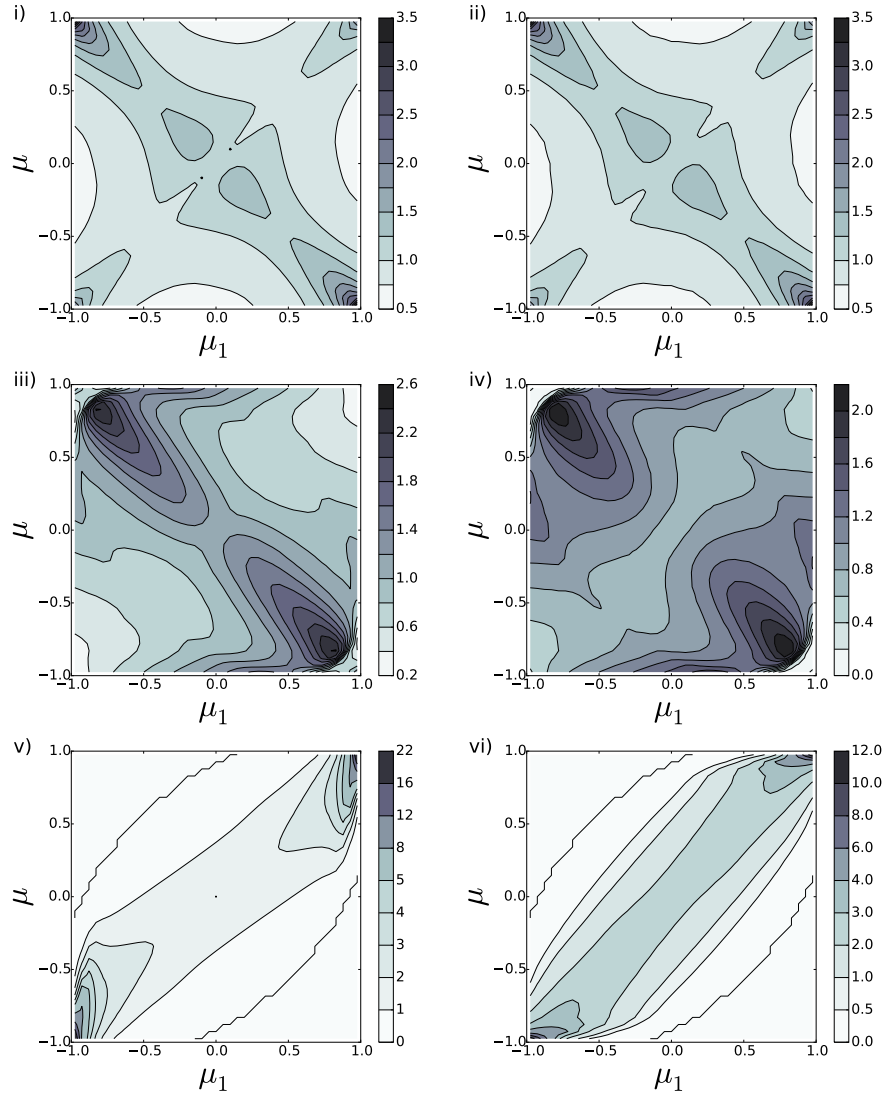


FIGURE 5.7 – Phase functions. *i) $p_b(\mu_1, \mu)$, internal scattering within b (Beerian model, random volume source points); ii) $p_{abb}(\mu_1, \mu)$ internal scattering within b following transmission from a (interfacial source points); iii) $p_{aaa}(\mu_1, \mu)$ first internal scattering within a ; iv) $p_{aaa}(\mu_1, \mu)$ (second internal scattering within a ; v) $p_{ba}(\mu_1, \mu)$, external scattering from b to a (Beerian model, random volume source points); vi) $p_{ab}(\mu_1, \mu)$ (first external scattering from a to b).*

5.3 Application to radiative transfer

5.3.1 Transfer model based on GRTEs

The homogenised phase a of volume fraction Π_a and refractive index n_a is the only emitting and absorbing phase of the medium. It is characterised by

an absorption coefficient κ_a , assumed independent of radiation frequency. As multiple scattering events within a and b occur, many paths possibly couple emission by a in the direction $\mathbf{u}(\mu, \phi)$ from a volume element dV_i of the porous medium around the point $M_i(\mathbf{r}_i)$, to absorption by a within a volume element dV_j around the point $M_j(\mathbf{r}_j)$. Consequently, the global radiative power $\mathcal{P}_{a\ i\ j}^{ea}$ emitted by a in a direction $\mathbf{u}(\mu, \phi)$ from dV_i and absorbed by a within dV_j cannot easily be given by an explicit expression. It will be statistically calculated. The homogenised phase a is discretised in isothermal volume elements V_i of which the temperature is T_i . $\mathcal{P}_{a\ i}^e$, the global power emitted by V_i , is equal to $4\Pi_a V_i \kappa_a n_a^2 \sigma T_i^4$. The fraction of this power emitted by dV_i in the elementary solid angle $d\Omega_a(\mathbf{u})$ writes [Tesse et al. (2004), Taine et al. (2014)]

$$\frac{d\mathcal{P}_{a\ i}^e}{\mathcal{P}_{a\ i}^e} = \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{V_i}\right) \left(\frac{d\mu}{2}\right) \left(\frac{d\phi}{2\pi}\right) = f_r(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i f_\mu(\mu) d\mu f_\phi(\phi) d\phi, \quad (5.42)$$

where $f_r(\mathbf{r}_i)$, $f_\mu(\mu)$ and $f_\phi(\phi)$ are the distribution functions characterising the emission law. The boundaries of the whole porous medium are discretised in isothermal surface elements S_j of which the temperature is T_j . $\mathcal{P}_{c\ j}^e$, the global power emitted by S_j , assumed to be a black body, within the phase c (c=a, b) is equal to $S_j n_c^2 \sigma T_j^4$. The fraction of this power emitted by dS_j in the elementary solid angle $d\Omega_c(\mathbf{u})$ writes [Tesse et al. (2004), Taine et al. (2014)]

$$\frac{d\mathcal{P}_{c\ j}^e}{\mathcal{P}_{c\ j}^e} = \left(\frac{d\mathbf{r}_j}{S_j}\right) (2\mu d\mu) \left(\frac{d\phi}{2\pi}\right) = f_r^S(\mathbf{r}_j) d\mathbf{r}_j f_\mu^S(\mu) d\mu f_\phi^S(\phi) d\phi, \quad (5.43)$$

where $f_r^S(\mathbf{r}_j)$, $f_\mu^S(\mu)$ and $f_\phi^S(\phi)$ are the distribution functions characterising the surface emission law. Emission is then classically modeled by a huge number of shots of bundles t of equal power which, at the statistical limit of large numbers, follow the previous emission statistical laws. Every shot is characterised by discrete values of the quantities ruling emission $(\mathbf{r}_{it}, \mu_t, \phi_t)$ obtained from samplings of corresponding random numbers. The complete path associated with a shot t is defined by successive scattering events within the phases a and b up to absorption within a volume V_j of the phase a or a boundary surface of all the power of the bundle. For a given shot, these events are defined by following the classical forward Monte Carlo method, in which successive extinction distances are also obtained from samplings of random numbers r in the range $[0, 1]$, which are values of the associated extinction cumulative distribution functions : An extinction length is then given by : $l_{ext} = G_{ext}^{-1}(r)$. Note that, as the medium is statistically homogeneous, the cumulative distribution function of rays issued from boundaries is identical tho this one associated with isotropic volume emission.

Emission is then classically modeled by a huge number of shots of bundles t of equal power which, at the statistical limit of large numbers, follow the previous emission statistical laws. Every shot is characterised by discrete values of the quantities ruling emission $(\mathbf{r}_{it}, \mu_t, \phi_t)$ obtained from samplings of corresponding random numbers. The complete path associated with a shot t is defined by successive scattering events within the phases a and b up to absorption within a volume V_j of the phase a of all the power of the bundle. For a given shot, these events are defined by following the classical forward Monte Carlo method, in which successive extinction distances are also obtained from samplings of random numbers r in the range $[0, 1]$, which are values of the associated extinction cumulative distribution functions : An extinction length is then given by : $l_{ext} = G_{ext}^{-1}(r)$.

For every extinction event, the type of extinction is determined, from Equations (5.5) or (5.6), by the sampling of another random number. In the case of internal or external scattering within a or b the calculation is iterated. It is interrupted when extinction is due to absorption : The bundle power is then attributed to the volume cell of the extinction point. In these conditions, the global power emitted by a from V_i and absorbed by a within V_j writes

$$\mathcal{P}_{a\ ij}^{ea} = \mathcal{P}_{a\ i}^e \frac{N_{ij}^a}{N_i}, \quad (5.44)$$

where N_i is the total number of bundles of same power shot from V_i and N_{ij}^a the number of these bundles finally absorbed by V_j .

The reciprocity theorem allows the global radiative power $\mathcal{P}_{a\ ji}^{ea}$ emitted by a within dV_j and absorbed by a within dV_i to be expressed as

$$\mathcal{P}_{a\ ji}^{ea} = \mathcal{P}_{a\ ij}^{ea} \frac{I^\circ(T_{a\ j})}{I^\circ(T_{a\ i})}, \quad (5.45)$$

and the thermal power limited to radiative transfer within the absorbing phase a per unit volume of the whole porous medium then writes at the point M_i

$$P_{a\ i}^R = \frac{1}{V_i} \sum_j \mathcal{P}_{a\ ij}^{ea} \left(\frac{I^\circ(T_{a\ j})}{I^\circ(T_{a\ i})} - 1 \right). \quad (5.46)$$

5.3.2 Transfer model based on Fourier's law

The thermal problem defined in the introduction of Sec.5.2 is one dimensional along z . The thermal power limited to radiative transfer within the absorbing phase a per unit volume of the whole porous medium is simply obtained from the thermal balance of the whole porous medium belonging to the slice between z and $z+dz$. The only fluxes involved in this balance are the radiative conduction

fluxes through the phases a and b, at the boundaries z and $z+dz$. An elementary calculation leads to

$$P_z^{FR} = P_{az}^{FR} = \frac{\partial}{\partial z}(k_a^R \frac{\partial T_a}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_b^R \frac{\partial T_a}{\partial z}), \quad (5.47)$$

where k_a^R and k_b^R are the conductivities of the medium along z , introduced in Sec.5.1.4, which depend on the temperature $T_a(z)$. As only the phase a emits and absorbs radiation, this power per unit volume only occurs within the phase a. Finally, in this global approach, it has not been necessary to express the power exchanged between the two phases, as discussed in the introduction of Sec.5.1.4.

5.3.3 Results

The fibre felt is infinite in the x and y directions : Perfect specular reflection laws are applied at the corresponding boundaries $x = 0$, $y = 0$, $x = 100d$ and $y = 100d$. The thickness D of the fibre felt also is $100d$ in the z direction, divided in 400 cells of equal sizes. It is bounded by two walls at which temperature or flux is imposed.

For an *imposed linear temperature field* within all the homogenised phase a, the radiative power field within a per unit volume of the whole porous medium P_a^R given by the coupled GRTEs model (Eq.5.47) for different transverse optical thicknesses of fibres ($\kappa_a d = 0.3, 10$ and 100) is plotted in Fig.5.8. It is also compared in the same cases with the radiative power field given by the Fourier's model. In the core of the medium, the results associated with the Fourier's law agree with the GRTE's ones only in the case of very high values of $\kappa_a d$ (lower Fig.5.8), i.e when a is an opaque medium. According to the Gomart's criterion (Equation (5.20)), the Fourier's model is not valid when a is semi transparent. When a becomes opaque, this medium can be represented by an effective medium occupying the volume of the phase b, which becomes semi transparent, as commonly done (see Ref. [Taine et al. (2010)] for instance) and the Fourier's law can be applied. Moreover, as expected the Fourier's law is never valid near the walls, even for high values of $\kappa_a d$, in particular near the hot wall.

In the case of *temperatures imposed at the two boundaries* $z = 0$ and $z = D$ of the porous medium ($T_a(0) = T_0$ and $T_a(D) = T_1$), the temperature field within the phase a is iteratively determined in radiative steady state conditions, *i.e.* by solving $P_{ai}^R = 0$ for the N_c cells $i = 1, \dots, N_c$ with these boundary conditions. The results are shown for the realistic case $\kappa_a d = 0.3$ in Fig.5.9, where the temperature field issued from the coupled GRTEs is compared with the one issued from the Fourier's model associated with an opaque phase a. Contrary to the previous case, very important errors occur with the Fourier's model near the cold wall, where the logarithmic derivative of the temperature is the most important, which is consistent with the Gomart's criterion of validity of the

Fourier's law given by Equation (5.20). On the other hand, the temperature jump at the boundaries, well predicted by the GRTE's model, is typical of a purely radiative problem (in void for instance). The conductive Fourier's model imposes a non physical continuity of the temperature field in particular at the cold wall.

The Fourier's law overestimates the temperature gradient in the medium. In these conditions, the critical mechanical strength of such a material is underestimated. An accurate computation of the radiative transfer by the coupled GRTE's permits to improve the design.

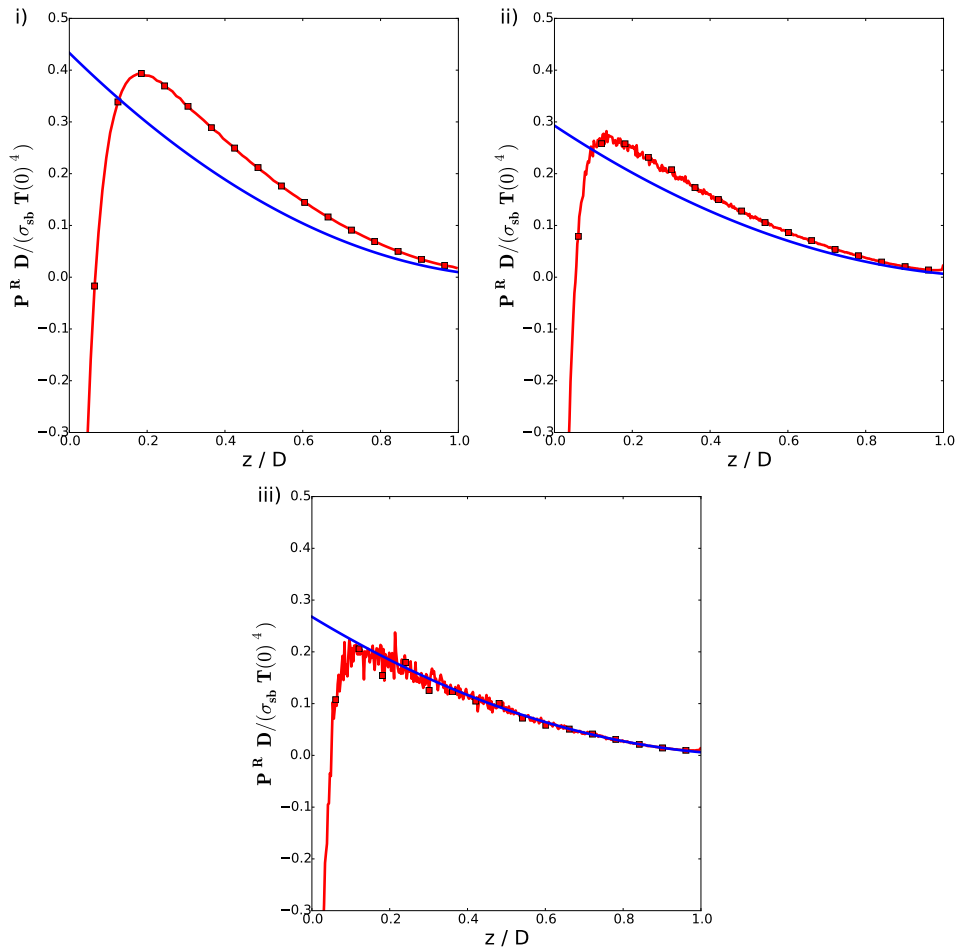


FIGURE 5.8 – Dimensionless radiative power field for an imposed linear temperature field in the fibre phase; Two boundary black walls at $T_a(0) = 2000K$ and $T_a(D) = 300K$: i) $\kappa_a d = 0.3$; ii) $\kappa_a d = 10$; iii) $\kappa_a d = 100$; \square : coupled GRTEs model, – : Fourier's model associated with coupled RTEs.

In the case of an imposed wall flux at $z = 0$ and an imposed wall temperature at $z = D$ (Fig.5.10), the maximum discrepancies between Fourier's and GRTEs

results also are located near the cold wall due the same reason as previously. Moreover, the global absolute discrepancy is more important, around $100K$ in the core of the medium. The Fourier's model overestimates the temperature values and consequently underestimates the critical mechanical strength of the material.

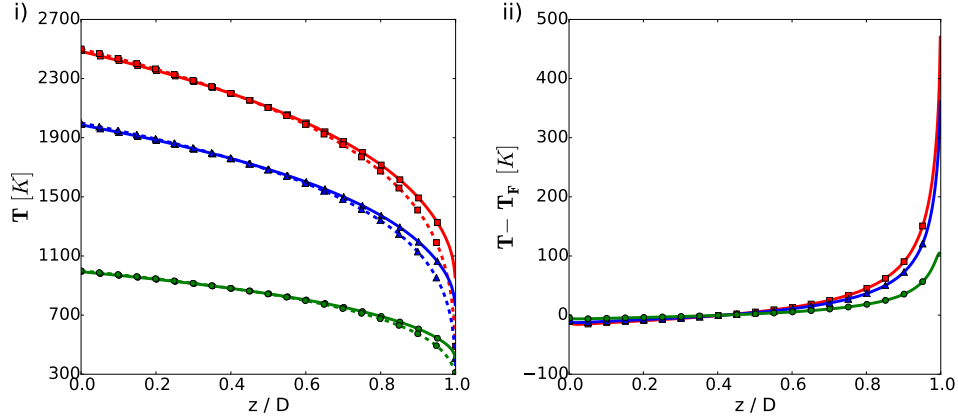


FIGURE 5.9 – i) Temperature field when the fibrous medium is bounded by two black walls; \square : $T(0) = 2500K$, \triangle : $T(0) = 2000K$, \circ : $T(0) = 1000K$; In all cases : $T(D) = 300K$.; (- - -) coupled GRTEs model, (\cdots) Fourier's model associated with coupled RTEs; ii) Residuals.

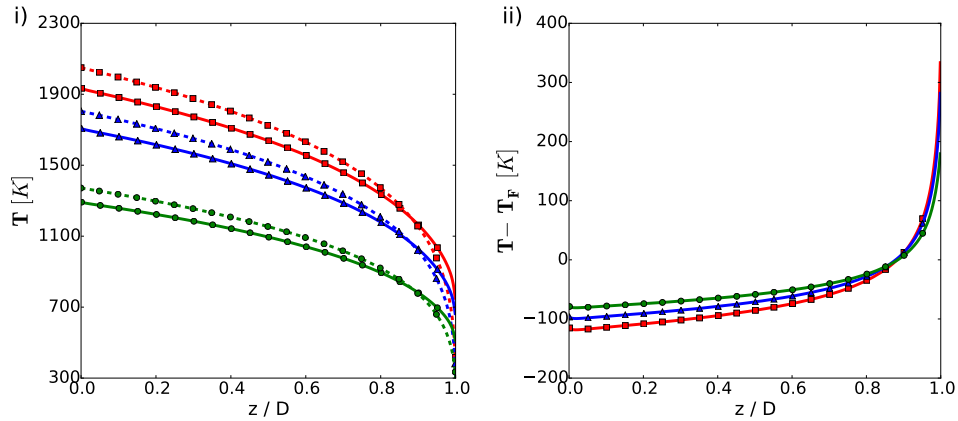


FIGURE 5.10 – i) Temperature field when a fibrous medium is submitted to an imposed flux at $z = 0$ and bounded by a black wall at $z = D$; \square : $\varphi(0) = 50 kWm^{-2}$, \triangle : $\varphi(0) = 30 kWm^{-2}$, \circ : $\varphi(0) = 10 kWm^{-2}$; $T(D) = 300K$; (- - -) : coupled GRTEs model, \cdots : Fourier's model associated with coupled RTEs; ii) Residuals.

5.3.4 Influence of key parameters

The insulation efficiency of the felt of fibres can be optimised vs three key parameters : The transverse optical thickness of a fibre $\kappa_a d$, the ratio of the

refractive indices n_a/n_b and the fibre volume fraction Π_a . The two first parameters are input parameters of the model for a given material morphology, and the last one is varied by generating more or less cylinders in the same volume. The test case corresponds to a felt limited by two parallel black walls of imposed temperatures. Note that $\kappa_a d$ and n_a/n_b are independent parameters only when the imaginary part χ_a of the complex optical index of a, which rules absorption by a, is small compared to n_a and n_b . For common alumina and zirconia, characterised by $n_a/n_b \simeq 2$, the reference value $\kappa_a d = 0.3$ corresponds to fibres of diameter close to $20\mu\text{m}$. But the value of κ_a strongly depends of the impurity amount within the matter. High values of $\kappa_a d$, for instance $\kappa_a d = 100$, can not be obtained for fibres of sub- mm diameter.

The aim of this Section is to minimise the flux through the system, calculated from the coupled GRTEs. The results, plotted in Fig.5.11, are limited to a pure radiative transfer, *i.e.* when conduction transfer in the two phases can be neglected.

As seen in upper left Fig.5.11, the radiative flux is a decreasing function of $\kappa_a d$, which could be expected, and the radiative flux is divided by a factor approximately 2 when $\kappa_a d$ varies from 0.1 to 100.

A strong flux appears in Fig.5.11 ii) for the particular case $n_a = n_b$ because the interfaces then do not exist for the radiation field : Only absorption in fibres plays a role in radiative transfer. When $n_a < n_b$ (fibres embedded in a particular transparent resin) total reflection occurs in the phase b : The rays are trapped in this phase and the flux vanishes. The same comment can be made when $n_a > n_b$: The rays are then trapped in the phase a and this trapping effect increases with the refractive index ratio.

It is easily conceived that the radiative flux exhibits a local maximum for $n_a/n_b = 1$. Moreover, starting from a value of n_a/n_b sufficiently greater than 1 and letting this quantity grow up to infinity, the interfacial Fresnel's reflectivity tends to the value of 1, and this facilitates the radiative transfer as compared to a situation where at an interface the incident radiation is split into a reflected part and a transmitted part. On the basis of these arguments, a local minimum of the radiative flux vs the ratio n_a/n_b is expected at a value of n_a/n_b greater than 1. The upper right Fig.5.11 shows that this minimum occurs when the ratio n_a/n_b is in the range [2 , 4]. Alumina and zirconia present this last property when b is the vacuum or a gas.

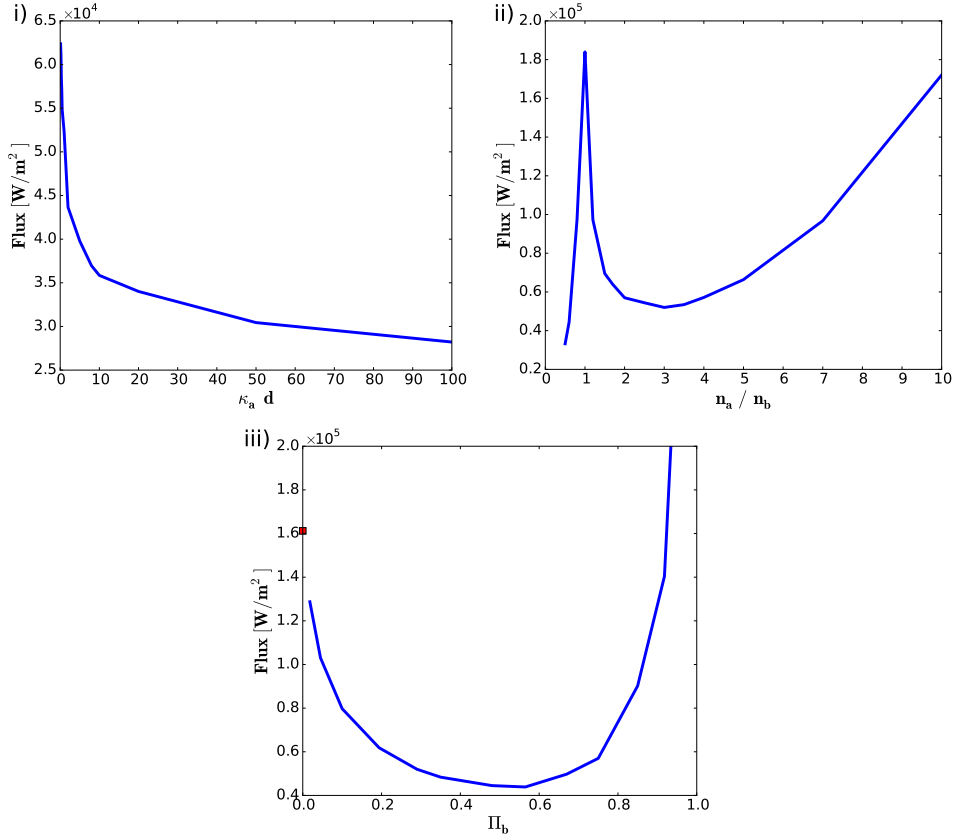


FIGURE 5.11 – Radiative flux through the fibrous medium : i) vs absorption optical thickness ; ii) vs optical index ratio ; iii) vs porosity ; The medium is bounded by two black walls at $T(0) = 2000K$ and $T(D) = 300K$; Other parameter values are : $\kappa_a d = 0.3$, $n_a/n_b = 2$, $\Pi_b = 0.75$.

In the lower Fig.5.11 (radiative flux vs the porosity Π_b), the two extreme values of this curve are easily analysed. When $\Pi_b = 1$, there are no more fibres in the material, and as the phase b is assumed transparent, the radiative flux tends to infinity. When $\Pi_b = 0$, the material is homogeneous, absorbing (of absorption coefficient κ_a) and non scattering, and within the frame of the radiative conductivity model, the flux writes $4n_a^2 \sigma_{sb} [T^4(0) - T^4(L)] / (3\kappa_a D)$ with σ_{sb} the Stefan-Boltzmann constant, which leads to a quite high value. Between the extreme values associated with $\Pi_b = 0$ and $\Pi_b = 1$, the radiative flux profile shown in lower Fig.5.11 exhibits a minimum value, which may be interpreted as follows : Quite logically, the more fibres are present within the material, the more absorption is brought to it, and consequently the lower the radiative flux. But it is also conceived that the more fibres are present within the material, the more rare the scattering events at the fibre boundaries, and consequently the higher the radiative flux. The superposition of these two antagonist effects leads to a minimum value of the flux for a value of the porosity Π_b in the range

[0.4, 0.6].

Such a study has to be generalised by accounting for conduction within the two phases.

Conclusion

An original statistical model of characterisation of the radiative properties of the a priori non Beerian homogenised phases of a strongly anisotropic porous medium, with a semi transparent phase and a transparent one (STT), has first been developed. The general case of reflection and transmission laws at interfacial scale has been treated. This model is based on all the extinction cumulative distribution functions and scattering (or absorption) cumulative probabilities associated with the successive sets of internal and external scattering events, by generalising the approach of Ref. [Dauvois et al. (2016)]. Moreover, all the associated general phase functions, depending on both the incidence and scattering directions, have been for the first time ab initio determined for a STT medium.

An original statistical model of radiative transfer based on coupled Generalised Radiative Transfer Equations (GRTEs) associated with the two homogenised phases has also been developed. The coupling terms are due to the external scattering terms, associated with transmission at interfacial scale. It has been shown that a radiative Fourier's model, based on radiative conductivity tensors, is not valid for the STT case, if the particular case for which the semi transparent phase becomes opaque and the trivial case of a quasi isothermal medium are excepted.

The two models have been applied to a fibrous medium (fibre felt) for thermal insulation at high temperature : A set of overlapping finite absorbing cylinders within a transparent matrix. It has been shown that the fibrous phase is strongly non Beerian, and that the transparent one is Beerian, due to particular symmetries associated with cylinders.

Finally a parametric study of the insulation properties of the medium has been carried out by only accounting for radiation transfer for optimisation of the design. Such a study has to be generalised by accounting for conduction within the two phases.

Quatrième partie

Modélisation statistique du transfert thermique couplé conduction-rayonnement au sein du milieu fibreux

Chapitre 6

Statistical coupled conductive and radiative modeling in a fibrous medium with semi transparent and transparent phases at high temperature

Résumé

Ce chapitre, écrit en anglais, est une ébauche d'article scientifique.

On y présente le modèle statistique, développé dans le cadre de cette thèse, du transfert thermique couplé rayonnement-conduction au sein de milieux poreux. Récemment, une approche stochastique résolvant l'équation de l'énergie intégrant le couplage radiatif à l'échelle des pores a été développée par Vignoles [Vignoles (2016)]. L'intérêt de cette méthode est de ne nécessiter aucun maillage. Elle est basée sur la notion de marche aléatoire : un grand nombre de processus stochastiques de type mouvement Brownien est généré, chaque "marcheur" portant une certaine quantité d'enthalpie. Ces porteurs se déplacent dans le matériau et le problème est régi par les conditions aux limites. Le champ de puissance radiative calculé par le modèle GRTE-RTE apporte de l'enthalpie au système de la même manière que le ferait un effet Joule, mais cette puissance dépendant du champ de température, une résolution itérative gère le problème du couplage : un champ de température initial permet d'obtenir un champ de puissance radiative, puis par la technique de marche aléatoire on calcule un nouveau champ de température. On calcule ensuite un second champ de puissance radiative et on continue le processus itératif. La méthode converge lorsque le champ de température ne varie plus. Avec cette procédure de modélisation totalement stochastique, nous aurons mis en oeuvre un outil de simulation du

transfert thermique couplé conduction-rayonnement au sein de matériaux multiphasiques statistiquement anisotropes, non Beeriens et de morphologie complexe, ne nécessitant aucun maillage, et tenant compte des effets de bord.

Ce modèle est appliqué à l'échantillon fibreux généré numériquement par la méthode décrite au chapitre 3. Cet échantillon est composé de fibres conductrices plongées dans le vide, et il est placé entre deux parois noires à températures imposées. Les marcheurs vont donc se déplacer dans les fibres et vont se réfléchir aux interfaces fibres/vide. Dans un premier temps, on étudie le problème de conduction pure afin de déterminer la conductivité phonique effective d'un tel milieu. Ensuite, on intègre la contribution du rayonnement, ce qui permet d'évaluer la conductivité totale. On montre qu'il n'y a aucun effet de couplage conduction-rayonnement à l'échelle des fibres ; dans ce cas une méthode itérative classique couplant la conduction et le rayonnement à l'échelle du milieu est suffisante. On conclut sur l'efficacité d'isolation d'un tel matériau fibreux en fonction de sa porosité, du coefficient d'absorption des fibres, du rapport des indices optiques des deux phases et de la dispersion des orientations des fibres.

Introduction

Felts composed of fibres of zirconia or alumina are refractory ceramic porous materials which are commonly used as insulating materials at high temperatures in applications such as nuclear reactors, solar power plants, combustion chambers, coatings for aeronautics and aerospace, etc. Their thermal properties at high temperatures are a key parameter for their design. Heat transfer within these materials is the sum of contributions from conduction and radiation. A lot of studies on radiation modeling have already been performed : The Discrete Ordinate Method (DOM) and the Monte Carlo method (MC) are the most classical methods used to determine the radiative power dissipated within complex material geometries [Boulet et al. (1993), Boulet et al. (2007), Tesse et al. (2004), Gomart and Taine (2011), Zarrouati et al. (2015)]. Here, the material of the fibres (alumina or zirconia) has a semi-transparent (absorbing and non-scattering) behavior in the near-infrared wavelength range. This difficulty was not tackled in the preceding works. Conduction is usually accounted for via a Fourier's law : conductive transfer is characterized by a effective phonic conductivity issued from experimental data or from empirical formula. Finally, the coupling of these two contributions is solved by an iterative method at the macroscopic scale. In this paper we propose a completely statistical model that solves the coupled heat transfer problem at the scale of the pores in a statistically homogeneous fibrous medium composed of two phases : the fibres are assumed to be a gray phase with uniform thermal conductivity k_a , absorption coefficient κ_a , density ρ_a and specific heat Cp_a , and these fibres are immersed in a transparent gas (void or air with a very good approximation). The porosity of

such materials being generally high (70% to 90%), radiation may be the predominant heat transfer mode and consequently needs to be accurately determined.

Many porous media have complex morphologies, are anisotropic, present boundary effects, and may have non-Beerian phase(s), which makes it very difficult to determine their radiative properties with classical methods. A radiative characterization of these media by a statistical Monte Carlo method had been developed. It is based on the description of the radiative phenomena (extinction, absorption and scattering) with cumulative distribution functions. This technique has been introduced by Trancrez and Taine [Trancrez and Taine (2004)] for foams, and it allows to characterize Beerian and also non-Beerian phases. Furthermore, the development of X and γ tomography techniques provides an accurate knowledge of the morphology of porous media and improves the accuracy of statistical methods of characterization. In the case of a non-Beerian behavior, the classical scalar radiative coefficients do not exist anymore, and the radiative transfer must be described by the Generalized Radiative Transfer Equation (GRTE) in which the usual radiative coefficients are replaced by these statistical functions. To solve this equation, a second Monte Carlo method is used where the paths of a huge number of rays from their emission to their absorption are followed, taking into account all possible scattering phenomena (reflection and transmission). Zarrouati et al. [Zarrouati et al. (2015)] characterized a non-homogeneous packed bed of spherical opaque particles. In this work, it was demonstrated that the propagation phase (the void spaces between the spheres) is non-Beerian, and the radiative transfer was solved by the resolution of the GRTE. Dauvois et al. [Dauvois et al. (2016)] calculated the radiative power field within a statistically homogeneous anisotropic two-phase fibrous medium in which absorbing fibres are immersed in a transparent phase. The fibre phase radiative properties were shown to be strongly anisotropic, and the boundary effects were taken into account in the radiative power field calculation. But conduction being ignored in this work, well-known temperature jumps appeared at the boundaries of the calculation domain which is not realistic. Indeed, radiation is strongly coupled to conduction which ensures the temperature continuity at the boundaries. In order to determine the actual thermal response of the fibrous medium, both contributions of conduction and radiation must be taken into account in a coupled thermal model.

Generally this problem is solved by a finite difference/element/volume method [Asllanaj et al. (2004), Asllanaj et al. (2007), Milandri et al. (2001), Milandri et al. (2002), Coquard and Baillis (2006), Coquard et al. (2009), Coquard et al. (2010), Coquard et al. (2011), Trovalet et al. (2011)]. It is based on the discretization of the whole porous medium, and the energy conservation is solved in each mesh. But the morphology of our media of interest is so complex that it is extremely difficult to mesh the volumes of the phases. Moreover, the computational cost in terms of memory and calculation time would be prohibitive.

On the other hand, Grigoriu [Grigoriu (1997), Grigoriu (2000)] and Vignoles et al. [Vignoles et al. (2011), Vignoles et al. (2011)] have developed their statistical resolution of the conduction problem. It is based on the notion of random walk : a huge number of Brownian walkers is generated, each of them carrying a certain quantity of enthalpy. These walkers roam within the real conductive phases of the medium and the problem is governed by the boundary conditions. For the Grigoriu's method, the contribution of radiation can be taken into account by adding to the enthalpy carried by the walkers the radiative energy all along the path. For the Vignoles's method, the contribution of radiation can be taken into account by changing a "conductive Brownian walker" by a "radiative walker" characterized by the optical thickness of the medium. These statistical approaches do not require any meshing of the calculation domain and algorithms based on these methods can easily be parallelized, which makes these techniques particularly interesting here.

In Section 6.1, we will present an original completely statistical method to treat the coupling of conduction and radiation in complex geometries. The radiation problem is solved by the GRTE, which takes into account the anisotropy, the boundary effects and the semi-transparency of the medium. This method returns the radiative power field dissipated within the fibres. Then, a random walk technique has been developed to solve the conductive problem : the approach retained here is based on the motion of Brownian particles within the fibres. By solving the energy equation at local scale and by integrating the concentration of walkers, one can deduce the thermal property of the medium. The conduction modeling method will be validated in Section 6.2 by comparing its results to analytical formula in simple configurations and to results obtained by finite element method calculations. In Section 6.3 we will apply the procedure to determine the thermal properties of a fibrous medium. The temperature field and the total heat flux will be compared to those issued from a procedure where the coupling is treated at the macroscopic scale.

6.1 Model

6.1.1 Assumptions

Let us consider a statistically homogeneous and anisotropic fibrous medium where the fibres are modeled as overlapping finite cylinders of diameter d and length L preferentially oriented in a plane normal to the z axis (the transfer direction). The centers of the cylinders have random locations and the unit vectors of their axes $\mathbf{u}_C(\theta_C, \phi_C)$ are characterized by a uniform distribution for ϕ_C over $[0^\circ ; 360^\circ]$ and a Gaussian distribution for θ_C centered at 90° .

The fibres are made of a semi-transparent (absorbing) ceramic material such as alumina or zirconia, of refractive index n_a and absorption coefficient κ_a , and

they are immersed in a transparent gas of refractive index n_b . Their surfaces are assumed gray and optically smooth, so that the bidirectional reflectivity and transmissivity are given by the Fresnel's laws depending only on n_a and n_b . Furthermore, due to the constitutions of both phases, $n_a > n_b$, consequently the total reflection phenomenon may occur within the fibres and the rays may be trapped within them.

The pores characteristic size is assumed to be substantially larger than the relevant radiation wavelengths at high temperature (for $T \sim 1500 K$, $1 \mu m \leq \lambda \leq 10 \mu m$), consequently diffraction effects may be neglected and radiation propagation is considered along straight lines within a phase.

Finally, the thermal problem which will be treated is statistically one-dimensional : the boundary conditions imposed to the calculation domain are such that the heat transfer is essentially along the z axis.

6.1.2 Radiative model

The radiative volume power field $P_i^R (W.m^{-3})$, where the subscript i refers to the position along the z axis, is calculated by a Monte Carlo procedure [Dauvois et al. (2016)]. A large number of radiative power bundles characterizing emission of rays in a volume V_i of the semi-transparent fibres are shot. After consecutive scattering events by reflection and transmission, absorption eventually occurs in a volume V_j of the fibres, and the exchanged power matrix $\mathcal{P}_{ij}^{ea} (W)$ is computed. The radiative volume power of the volume V_i of the medium is then deduced by :

$$P_i^R = \frac{1}{V_i} \sum_j \mathcal{P}_{ij}^{ea} \left[\frac{T_j^4}{T_i^4} - 1 \right] \quad (6.1)$$

where T_i and T_j denote the temperatures at locations i and j . It is interesting to consider the dimensionless formulations Π_{ij}^{ea} of the exchanged powers :

$$\Pi_{ij}^{ea} = \frac{\mathcal{P}_{ij}^{ea}}{S_i \sigma T_i^4} \quad (6.2)$$

where the notation S_i refers to the surface of the volume V_i . As demonstrated in [Tesse et al. (2004), Zarrouati et al. (2015)], the dimensionless exchanged powers Π_{ij}^{ea} are independent of the temperatures, so the radiative problem in the medium involving the GRTE is solved numerically and the Π_{ij}^{ea} are evaluated only one time. Then, for a given temperature field T_i , the radiative volume powers

P_i^R are calculated very simply and very rapidly by the following expression :

$$P_i^R = \frac{S_i}{V_i} \sum_j \Pi_{ij}^{ea} \sigma (T_j^4 - T_i^4) \quad (6.3)$$

In the case of semi-transparent fibres immersed in a transparent phase, the fibres are the only phase that emits and absorbs radiation, and the radiative volume powers calculated by Equation (6.1) are associated with the fibre phase.

6.1.3 Stochastic method for solving the energy equation

In this study, we concentrate on the steady state thermal behavior of the material. The energy balance at a point $M(z_i)$ within the fibres then writes :

$$k_a \Delta T(z_i) + P(z_i) = 0 \quad (6.4)$$

where $P(z_i)$ is the heat volume power field within the fibre phase at the considered point $M(z_i)$. For a study of thermal conduction alone, this field is zero ; for coupling of conduction with radiation, the field $P(z_i)$ is equal to the radiative volume power field P_i^R expressed at Equation (6.3).

6.1.3.1 Random walk technique

At this point, let us consider the stochastic Itô-Taylor scheme which simulates the convection and diffusion phenomena via particle motions :

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{b}[\mathbf{X}(t)] dt + \mathbf{c}[\mathbf{X}(t)] d\mathbf{B}(t) \quad (6.5)$$

In this expression, $\mathbf{X}(t)$ is the position of the particle at time t , $d\mathbf{X}(t)$ is the displacement vector of this particle between t and $(t + dt)$, $\mathbf{b}[\mathbf{X}(t)]$ is a convection velocity vector which can account for a macroscopic movement of the material or a thermal conductivity gradient if the material is non-homogeneous, $\mathbf{c}[\mathbf{X}(t)]$ is a diffusion characteristic length matrix the terms of which c_{ij} have for expressions $\sqrt{2a_{ij}} dt$ where the a_{ij} are the components of the diffusivity tensor, and $\mathbf{B}(t)$ is a Brownian motion vector the terms of which follow independent Gaussian distributions of zero mean and unit variance.

In the case where the material is motionless, homogeneous and isotropic, the convection term disappears and the diffusion characteristic length matrix re-

duces to the scalar $\sqrt{2a dt}$ where a is the diffusivity of the material. Finally the Itô-Taylor statistical process writes :

$$d\mathbf{X}(t) = \sqrt{2a dt} d\mathbf{B}(t) \quad (6.6)$$

The term $\sqrt{2a dt}$ is the mean free path of the particle motion and the direction of its movement is given by the vector $d\mathbf{B}(t)$ shot in the normal Gaussian law and associated with the Brownian motion.

In terms of heat transfer, let us consider a number of walkers which carry a certain amount of enthalpy δh_w and which follow the Brownian motion law described above. If a represents the thermal diffusivity of the medium, the procedure describes the unsteady thermal conduction phenomenon (*i.e.* thermal diffusion) and solves the unsteady partial derivative equation :

$$k_a \Delta T(z_i) = \rho_a C p_a \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6.7)$$

The local temperature associated with a volume ΔV around the point $M(z_i)$ at time t is determined by the expression :

$$T(z_i, t) = T_{ref} + \frac{\sum_{w \in \Delta V} \delta h_w}{\rho_a C p_a \Delta V} \quad (6.8)$$

where T_{ref} is a reference temperature, in general issued from the boundary conditions and which defines the number of walkers to be considered.

The heat flux through a surface element dS located at the point $M(z_i)$ and of normal unit vector \mathbf{n} during the time dt writes :

$$q(z_i, t) = \frac{\sum_{z_i \in d\mathbf{X}(t)} d\mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{n} \delta h_w}{\|d\mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{n}\| dt dS} \quad (6.9)$$

where the term $z_i \in d\mathbf{X}(t)$ denotes the sum of the walkers which cross the surface element dS at the point $M(z_i)$ between t and $(t + dt)$, the normal unit vector \mathbf{n} is oriented along the z axis.

In order to reach the steady state temperature field, it is necessary to wait for a global stabilization of the particle volume density field which does not depend on time any more : If t is sufficiently large, the particles move between t and

$(t+dt)$ but the number of particles within a volume element ΔV around a point $M(z_i)$ does not vary. After a generally large number of Brownian movement processes applied to the walker population, the method eventually converges to the steady state solution which verifies Equation (6.7) where the second member is set to zero.

6.1.3.2 Applying thermostat and adiabaticity conditions at boundaries

Very often, in conduction homogenization simulations, temperature and adiabaticity conditions are imposed at the boundaries of the calculation domain. So it is important to be able to impose these conditions in terms of Brownian motion walkers.

Thermostat condition

Let us consider a reservoir connected to a boundary of the domain. This reservoir will behave as a thermostat, *i.e.* a domain of fixed temperature, if it is not affected by the Brownian motion of the walkers within the domain and if it respects the following two conditions :

- ❑ Walkers are homogeneously distributed within the reservoir with a concentration independent of time and related to the temperature imposed at this thermostat.
- ❑ At all the boundaries of the reservoir, the walkers are specularly reflected (condition of periodicity).

If, between t and $(t + dt)$, a walker of the reservoir hits the boundary with the calculation domain, it is specularly reflected and a random number r_1 between 0 and 1 is compared to the effusivity ratio $e_a/(e_a + e_r)$ where e_a and e_r denote the thermal effusivities of the medium and of the reservoir respectively. If $r_1 < e_a/(e_a + e_r)$ a new walker with the same enthalpy δh_w is created and transmitted into the medium. Similarly, if, between t and $(t + dt)$, a walker of the medium hits the boundary with the reservoir, a random number r_2 between 0 and 1 is compared to the effusivity ratio $e_r/(e_a + e_r)$. If $r_2 < e_r/(e_a + e_r)$ the walker is transmitted into the reservoir, otherwise it is specularly reflected. At time $t + dt$ all the walkers issued from the medium and transmitted into the reservoir are deleted in order to respect the first thermostat validity condition evoked above.

Adiabaticity condition

An interface separating two phases is adiabatic when there is no heat exchange :

$$\nabla T \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.10)$$

where \mathbf{n} is the unit normal vector of the interface.

Let us consider a medium composed of a conductive phase and a non-conductive phase where there is no heat exchange through the interface. The walkers moving within the conductive phase which hit the adiabatic interface are specularly reflected.

6.1.3.3 Advantages of the method

The Brownian motion method for the resolution of conduction heat transfer presents several points of interest in our case :

- ❑ It solves the unsteady energy equation without any need of meshing the medium, which makes it very interesting in complex geometries. The only information needed is the locations of the interfaces. In academic cases where the material morphologies are defined mathematically this is very simple. For real media described by tomographies, a specific algorithm that rebuilds the interfaces between phases, like the marching cube algorithm, is necessary.
- ❑ A second advantage is that the treatment of the boundary conditions is very flexible. As no volume discretization is needed, even if the boundary limits of the medium have complex geometries, imposing a temperature or a flux condition on these geometries does not require techniques like an adaptive meshing.
- ❑ A third interest is that very little memory is needed. Contrary to the finite difference/element/volume methods which solve the problem by the resolution of a huge linear system whose size depends on the finesse of the spatial discretization, the Brownian motion method only saves the positions of all walkers within the medium. Parallelization techniques can very easily be implemented and accelerate the convergence.

6.1.4 Coupling conduction and radiation

The non linear radiative volume power field issued from the resolution of the radiative problem within the fibrous medium is integrated as a heat source in the heat conduction equation. $P_i^R(z_i)$ denoting the radiative volume power at

position $M(z_i)$ and time t , the enthalpy of the volume ΔV around M between t and $(t+dt)$ is incremented by the quantity $P_i^R(x_i) \Delta V dt$, and this enthalpy increment is distributed equally between the walkers present within ΔV at time t .

Our fibrous medium of interest is composed of semi-transparent fibres immersed in a transparent phase. Consequently, only the fibres radiate, so that the radiative power field has to be associated with the fibre phase. If Π is the porosity, $(1 - \Pi)$ is the fibre volume fraction, and the enthalpy provided by radiation becomes $(1 - \Pi) P_i^R(x_i) \Delta V dt$.

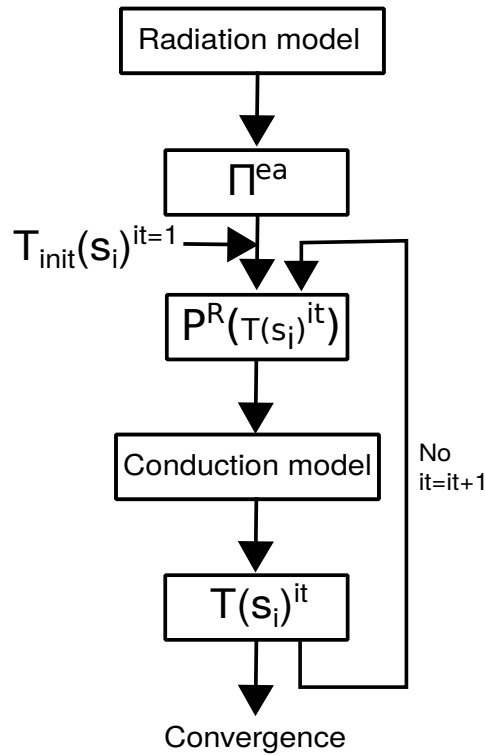


FIGURE 6.1 – *Scheme of the iterative method which solves the coupled conductive-radiative transfer within a fibrous medium.*

Furthermore, the radiative volume power field depends on the temperature field. Consequently the problem is non linear and an iterative method must be used (Fig.6.1) :

- 1) An initial temperature is fixed within the medium. It can be the solution of the purely conductive or radiative problem or an average of the two.
- 2) The radiative volume powers P_i^R are deduced from Equation (6.3) (re-

mind that the quantities Π_{ij}^{ea} appearing in this equation are calculated once and for all via the GRTE resolution, before the treatment of conduction).

- 3) The conduction problem is solved using the random walk technique, and a new temperature field within the fibrous medium is obtained.
- 4) The above described procedure is iterated until the relative discrepancy between the new heat flux field and the preceding one is inferior to a given threshold (typically 5%).

6.2 Validation

The resolution method has been tested on an academic geometry : a cube of size L with imposed temperatures $T(z = 0) = 0^\circ C$ and $T(z = L) = 100^\circ C$ on two opposite faces, the four remaining faces being adiabatic. Three different 1D problems have been examined : i) cube composed of an unique material ; ii) cube composed of two materials ; iii) cube composed of an unique material in which a power density is dissipated.

The three 1D cases have analytical solutions and these will be compared to the solutions calculated by the random walk procedure.

In order to accelerate the convergence, the walkers are spread within the medium at $t = 0$ in accordance with the expected temperature solution : the concentration of walkers in each small volume of the medium surrounding a point $M(z)$ is set proportional to the expected temperature at that point $M(z)$. Furthermore, the same calculation is performed 40 times over 40 processors, and the convergence of the method is tested after averaging the temperature and flux fields over all processors.

6.2.1 First 1D case : imposed temperatures at the boundaries

For a cube of size L , composed of a material of thermal conductivity k , with imposed temperatures $T(z = 0) = T_1$ and $T(z = L) = T_2$ on two opposite faces, the four remaining faces being adiabatic, the temperature field is simply equal to :

$$T(z) = T_1 + (T_2 - T_1) (z/L) \quad (6.11)$$

and the flux is expressed by

$$q = (T_1 - T_2) k / L \quad (6.12)$$

600 walkers are distributed linearly along z . The random walk procedure is solved on 40 processors and converges after 13 minutes. In this example, the

values $k = 1 \text{ W/m/K}$, $L = 1 \text{ m}$, $T_1 = 0^\circ \text{C}$ and $T_2 = 100^\circ \text{C}$ were retained ; the expected flux is equal to -100 W/m^2 ; the results are presented in Fig.6.2.

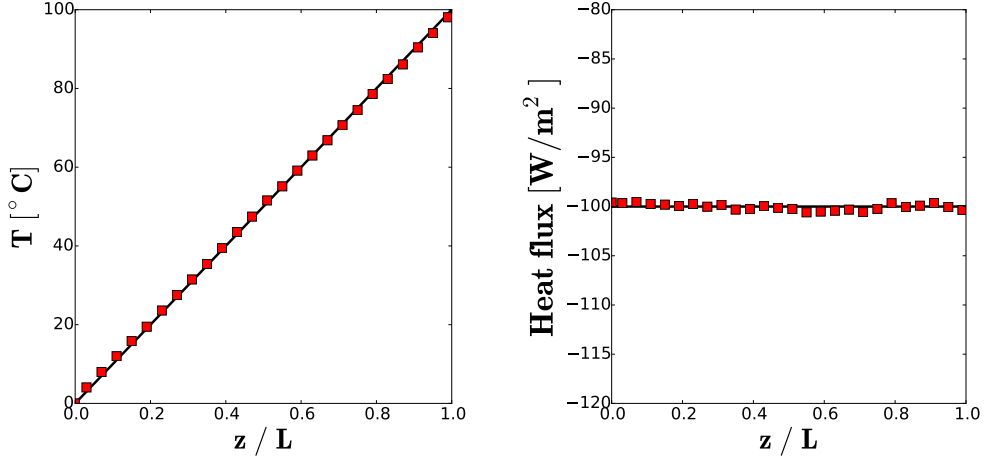


FIGURE 6.2 – Left : Temperature field. Right : Heat flux. (-) Analytical solution. (\square) Solution calculated by the random walk technique.

6.2.2 Second 1D case : medium composed of two phases

For a cube of size L composed of two materials with thermal conductivities k_1 for $z/L < 1/2$ and k_2 for $z/L > 1/2$, with imposed temperatures T_1 and T_2 on the two opposite faces $z = 0$ and $z = L$, the flux is expressed as :

$$q = \frac{2 k_1 k_2}{k_1 + k_2} \frac{T_1 - T_2}{L} \quad (6.13)$$

and the temperature field is linear in each phase and continuous at the interface at $z/L = 1/2$:

$$\begin{cases} T(z) = T_1 - \frac{q}{k_1} z & \text{for } z/L \leq 1/2 \\ T(z) = T_2 - \frac{q}{k_2} (z - L) & \text{for } z/L \geq 1/2 \end{cases} \quad (6.14)$$

We have applied the same number and repartition of the walkers to the 40 processors. With the values $k_1 = 0.2 \text{ W/m/K}$, $k_2 = 1 \text{ W/m/K}$, $L = 1 \text{ m}$, $T_1 = 0^\circ \text{C}$ and $T_2 = 100^\circ \text{C}$, the expected flux is equal to -33.3 W/m^2 ; the results are presented in Fig.6.3.

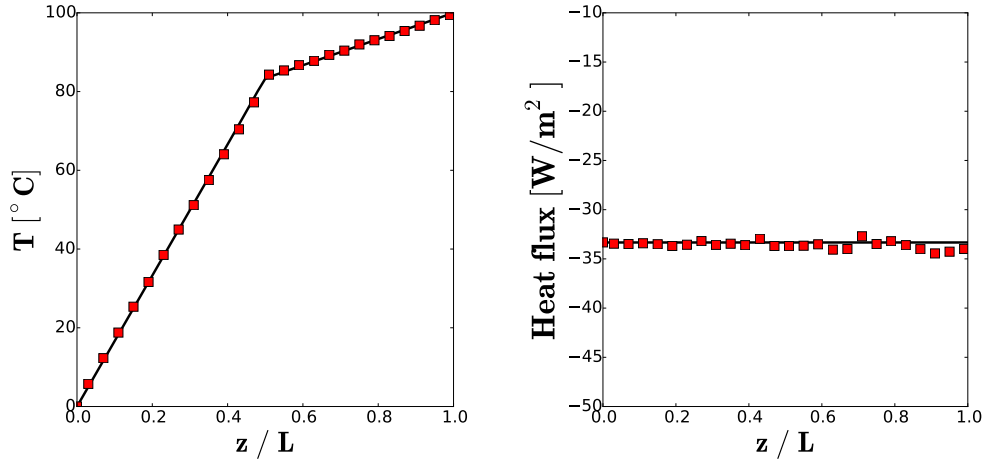


FIGURE 6.3 – Left : Temperature field. Right : Heat flux. (-) Analytical solution. (\square) Solution calculated by the random walk technique.

6.2.3 Third 1D case : power density

For a cube of size L , composed of an unique material of thermal conductivity k , with imposed temperatures T_1 and T_2 on the two opposite faces $z = 0$ and $z = L$, and within which a power density $P(z)$ is dissipated, the analytical expression of the temperature field $T(z)$ is obtained by integration of the energy equation :

$$T(z) = - \int_0^{z/L} \int_0^v \frac{P(u)}{k} du dv + \left[T_1 + \left(\int_0^{z/L} \int_0^v \frac{P(u)}{k} du dv \right)_{z/L=0} \right] (1 - z/L) + \left[T_2 + \left(\int_0^{z/L} \int_0^v \frac{P(u)}{k} du dv \right)_{z/L=1} \right] (z/L) \quad (6.15)$$

the expression of the flux is then determined via the Fourier's law :

$$\varphi(z) = -k \frac{dT}{dz}(z) \quad (6.16)$$

As a test of our random walk numerical procedure, we retained the following input data : $k = 1 \text{ W/m/K}$, $L = 1 \text{ m}$, $P(z) = -8000 (z/L)^2 + 8000 (z/L) + 1000$ (in W/m^3), $T_1 = 0^\circ \text{C}$ and $T_2 = 100^\circ \text{C}$. With these data, the expression of the temperature field becomes :

$$T(z) = (z/L) \left[\frac{2000}{3} \left((z/L)^3 - 1 \right) - \frac{4000}{3} \left((z/L)^2 - 1 \right) + 500 \left((z/L) - 1 \right) + 100 \right] \quad (6.17)$$

The results are presented in Fig.6.4.

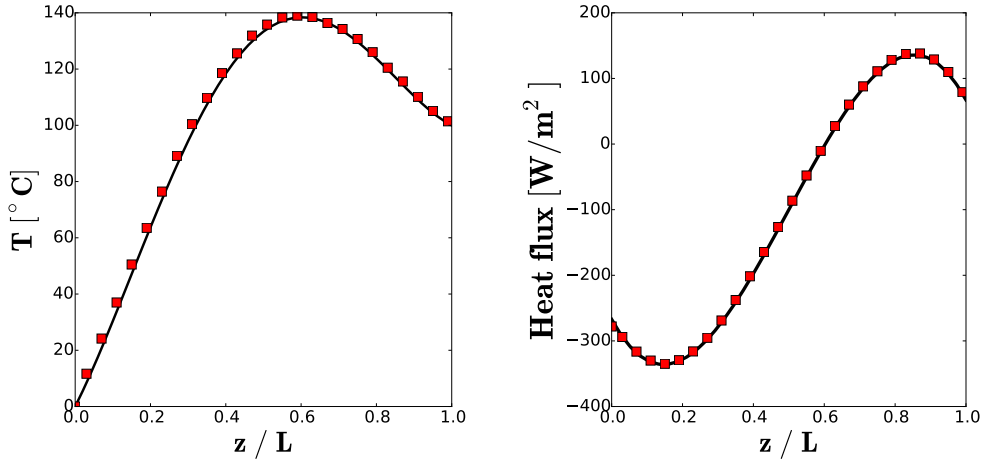


FIGURE 6.4 – Left : Temperature field. Right : Heat flux. (-) Analytical solution. (\square) Solution calculated by the random walk technique.

6.3 Application to a fibrous medium

6.3.1 Numerical generation of a fibrous sample

Our material of interest is a felt of absorbing and non scattering fibres made of a refractory ceramic material such as alumina or zirconia. For this study, the calculations are performed over a representative computer-generated virtual fibre felt arrangement. The fibres, of refractive index n_a , are modeled as cylinders which can overlap of diameter d and length L . They are immersed in a transparent gas or vacuum of refractive index n_b . The centers of the cylinders have random locations, and the unit vectors of their axes $\mathbf{u}_C(\theta_C, \phi_C)$ are characterized by an uniform distribution for ϕ_C over $[0^\circ ; 360^\circ]$ and a Gaussian distribution for θ_C centered at 90° and of standard deviation σ . Total specular reflection conditions are imposed at the boundaries parallel with the z axis (see Fig.6.5) : The medium is then infinite in the x and y directions.

The fibres of absorption coefficient κ_a are assumed gray and optically smooth : their bidirectional reflectivity and transmissivity can then be deduced from the Fresnel's laws for unpolarized radiation, and they depend only on the ratio n_a/n_b (the imaginary part χ_a of the complex optical index of the fibres is assumed small compared to n_a and n_b). 36000 cylinders have been generated to obtain a $(100d)$ thick fibrous sample with a porosity of 0.75 (Fig.6.5).

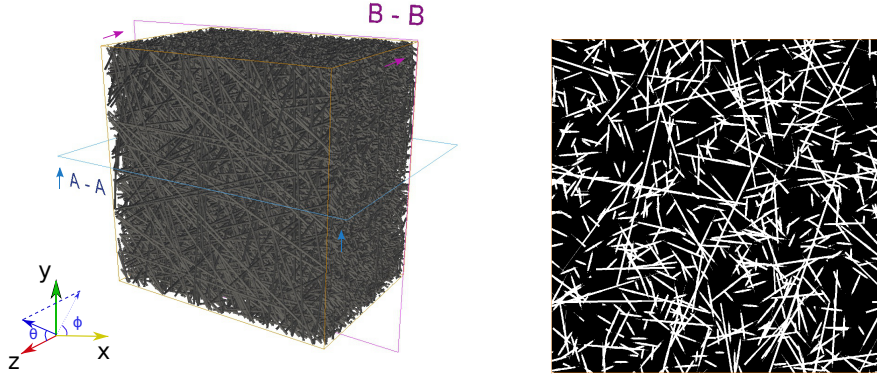


FIGURE 6.5 – Left : Generated fibrous sample ($\Pi_b = 0.75$) ; Right : Cross section BB normal to the z axis.

6.3.2 Modeling of conduction alone

The heat which circulates within the medium by conduction alone is characterized by the material effective phonic conductivity k_{eff} . This quantity should not depend on the boundary conditions and the size of the medium. Let us assume that the fibres are made of zirconia (of thermal conductivity $k_a = 2 \text{ W/m/K}$) and that the fibres are immersed in vacuum, $n_b = 1$. D denoting the sample thickness in the z direction, two temperatures are imposed at the $z = 0$ and $z = D$ faces of the sample, the four other faces being assumed adiabatic. In order to minimize the computation time, a Representative Elementary Volume (REV) of the medium is introduced and defined. This REV must be statistically homogeneous, and in order to ensure this condition a lot of virtual samples are generated verifying $\frac{\Delta\Pi}{\Pi} \ll 1$. Here, with a porosity Π of 0.75 (Fig.6.5), this condition is verified when $D_x > 25d$, $D_y > 25d$ and $D_z > d$, by generating 10 fibrous samples (see chapter 3).

The conduction problem described above is statistically 1D. At $t = 0$ the walkers are deposited within the fibres with a concentration profile following the expected linear evolution of the temperature field. At each time step dt , each Brownian walker is displaced of the quantity $\sqrt{2ad}d\mathbf{B}(t)$ (see Sec.6.1.3.1). When a walker hits a fibre/vacuum interface it is reflected because no conduction occurs in vacuum. The steady state is reached when the global surface heat flux $q^C(z)$ crossing the sample in the z direction is independent of z . The effective phonic conductivity is then deduced from the Fourier's law :

$$k_{eff} = -q^C \frac{D}{\Delta T} \quad (6.18)$$

where ΔT denotes the difference between the temperatures imposed at the two faces of the sample.

The random walk calculation is performed over 100 fibrous materials of porosities ranging from 0.02 (500000 cylinders) to 0.95 (6000 cylinders), these 100 materials being characterized by the same standard deviation σ (5°) of the Gaussian distribution followed by the angle θ_C (see Sec.6.3.1). 1000 walkers are launched within the fibres. 156 processors are used during 1h30 for these calculations. The resulting temperature field in the case $\Pi = 0.75$ is compared to the expected linear profile in Fig.6.6. The relative dispersion on the heat flux is defined by :

$$\delta q^C = \frac{\max(|q^C(z) - \langle q^C \rangle|)}{\langle q^C \rangle} \quad (6.19)$$

In the case $\Pi = 0.75$, $\delta q^C = 7.5\%$.

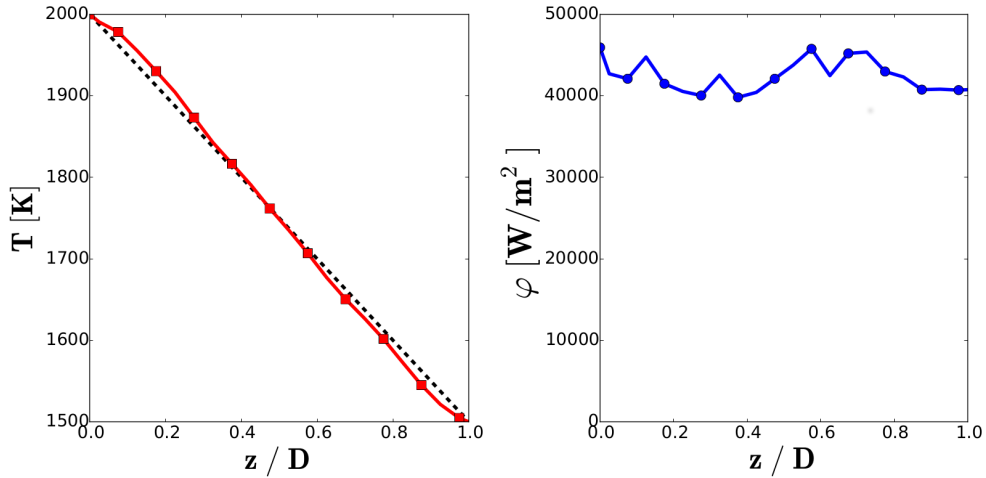


FIGURE 6.6 – Left : temperature field ; Right : heat flux. (-) Purely conductive solution. (\square) The random walk solution. (o) Heat flux.

The evolution of the effective phonic conductivity as a function of the porosity is shown in Fig.6.7. This evolution follows an exponential law, and as expected the effective phonic conductivity values are lower than the ones issued from the parallel model : $(1 - \Pi) k_a$. The evolution of the effective phonic conductivity as a function of the standard deviation σ of the angles θ_C of the fibres for $\Pi = 0.75$ is reported in Table 6.1.

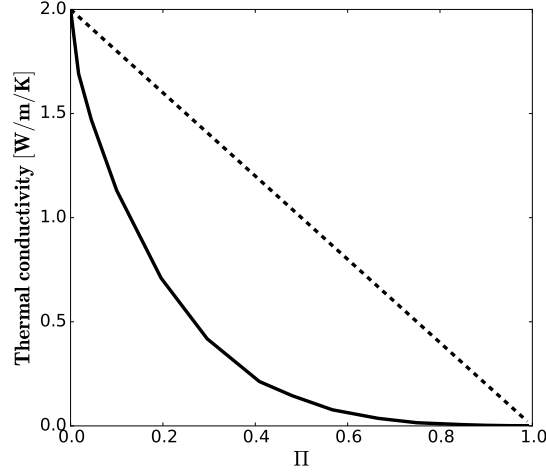


FIGURE 6.7 – Effective phonic conductivity as a function of the porosity. $\sigma = 5^\circ$. (-) Effective phonic conductivity. (- -) Conductivity issued from the parallel model : $(1 - \Pi) k_a$.

σ [$^\circ$]	k_{eff} [W/m/K]
0	1.14×10^{-2}
2.5	1.29×10^{-2}
5	1.67×10^{-2}
7.5	2.28×10^{-2}
10	2.99×10^{-2}
12.5	3.60×10^{-2}
15	4.55×10^{-2}
17.5	5.51×10^{-2}
20	5.97×10^{-2}
22.5	7.48×10^{-2}
30	1.02×10^{-1}
random	2.10×10^{-1}

TABLE 6.1 – Effective phonic conductivity as a function of the standard deviation σ . $\Pi = 0.75$.

6.3.3 Modeling of the conduction-radiation coupling

To account for this coupling, radiation is considered as bringing a volume power field $P^R(z)$ in the energy equation, this field being deduced from the GRTE resolution (see Sec.6.1.2). At the difference of conduction, radiation does not a priori follow a radiative Fourier's law and depends on the thickness of the medium and the levels of the temperatures imposed at the boundaries. Consider a fibrous sample of thickness $D = 2\text{ mm}$, porosity $\Pi = 0.75$ made of zirconia

fibres with diameter $d = 20 \mu m$ and length $L = 200 \mu m$. Two black walls at $2000 K$ and $1500 K$ are placed at $z = 0$ and $z = D$, the four other faces of the calculation domain being adiabatic. At the high temperature levels considered here, a strong influence of radiation is expected.

Two methods of coupling will be compared :

i) The conduction and radiation problems are solved separately in two homogenized media and the coupling is accounted for at the macroscopic scale by an iterative method. The advantages of this approach are that the formulation of the problem is very simple and the resolution is very fast. Its major weakness is that it does not take into account the coupling at the local scale and consequently some effects can be omitted.

Knowing the effective phonic conductivity k_{eff} of the material, the conductive flux is correctly modeled by the Fourier's law : $q^C(z) = -k_{eff} \frac{dT}{dz}(z)$. The radiative flux can be calculated by integrating the power density function $P^R(z)$ given by the GRTE resolution : $q^R(z) = \int_0^z P^R(v) dv + q^R(z = 0)$. Finally, the energy equation becomes $q^C(z) + q^R(z) = C$, with C a constant (independent of z). The temperature field $T(z)$ is the implicit unknown of this latter equation, and an iterative method allows its determination. In this study, the Newton-Raphson algorithm is used.

ii) Radiation is regarded as a volume heat source term which increases or decreases the enthalpy carried by the walkers (see Sec.6.1.4). With this approach, the resolution is local and the homogenization at the global scale is performed only one time. The method is more accurate but the convergence is much longer.

The energy dissipated due to radiation in the volume ΔV surrounding a point $M(z)$ of the medium is : $E^R(z) = (1 - \Pi) P^R(z) dt \Delta V$. If N_w is the number of walkers at time t in the volume ΔV , the enthalpy of each of these walkers is incremented of $E^R(z)/N_w$. The enthalpy of the walker, which was δh_w at time t , becomes $\delta h_w + E^R(z)/N_w$ at time $(t + dt)$. It is worth noticing that $E^R(z)$ can be positive or negative and that consequently some parts of the medium may be cooled by radiation. Similarly to the preceding approach, the method converges when $q^C(z) + q^R(z) = C$, with C a constant (independent of z).

The results of the first and second approaches are presented in Fig.6.8 and Fig.6.9. The Newton-Raphson algorithm solves the coupled problem within 2 minutes with a relative dispersion on the global flux of $1.53 \times 10^{-4}\%$. The random walk procedure provides the solution after 6 hours of calculation over 156 processors with a flux relative dispersion of 1.27%.

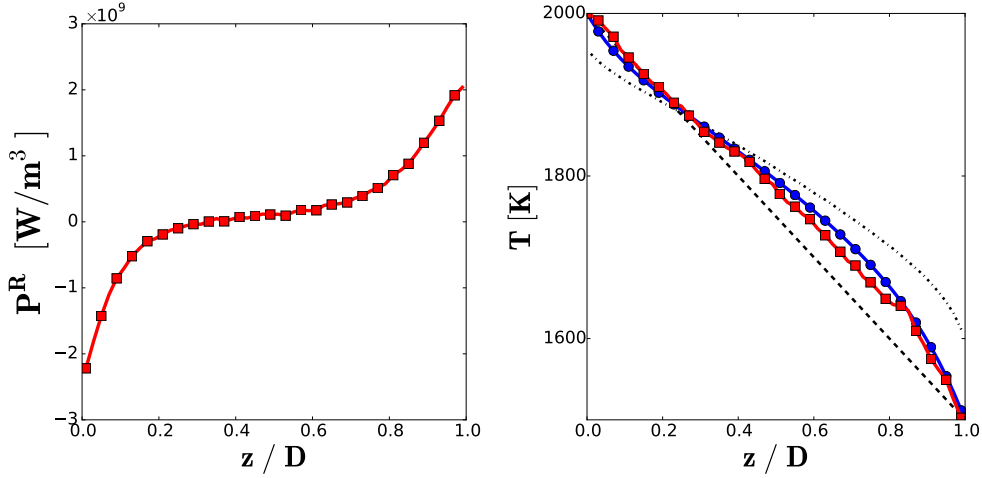


FIGURE 6.8 – Left : radiative power field. Right : temperature field. (–) Pure conductive solution. (–) Pure radiative solution. (o) Conduction-radiation coupling, 1st method. (□) Conduction-radiation coupling, 2nd method.

Although based on different principles, the two methods yield very similar global flux and temperature fields. Moreover, the ratios between conduction and radiation are also quasi identical. We believe that this quite good agreement between the two methods validates our approaches and results. However, we do not note any particular local scale effects of the conduction-radiation coupling. In terms of simplicity and convergence speed, the method coupling conduction and radiation at the macroscopic scale is the most efficient.

The radiative power has the highest values at the boundaries : for $z < 0.2 D$ this power is negative and the temperature is below the temperature of the purely conductive problem, so the medium is cooled by radiation. For $z > 0.8 D$ the power has high positive values and the medium is strongly heated by radiation. By definition, the radiative power is the difference between the absorbed power and the emitted power : $P_i^R(z) = P_i^a(z) - P_i^e(z)$. For $z < 0.2 D$, the temperature of the medium is high and the emitted power is large. The major contribution to the absorbed power comes from the black wall at $z = 0$ but this contribution is small compared to the emission of the semi-transparent medium due to the fact that the fibres are weakly absorbing. The radiative power is then negative, which means that at locations $z < 0.2 D$ radiation extracts heat. An analogous reasoning leads to the conclusion that at locations $z > 0.8 D$ radiation deposits heat. Finally, one notices on the graphs of Fig 6.9 that radiation is predominant in the examined configuration : it is around 80% of the total heat flux at the boundaries and around 90% in the core.

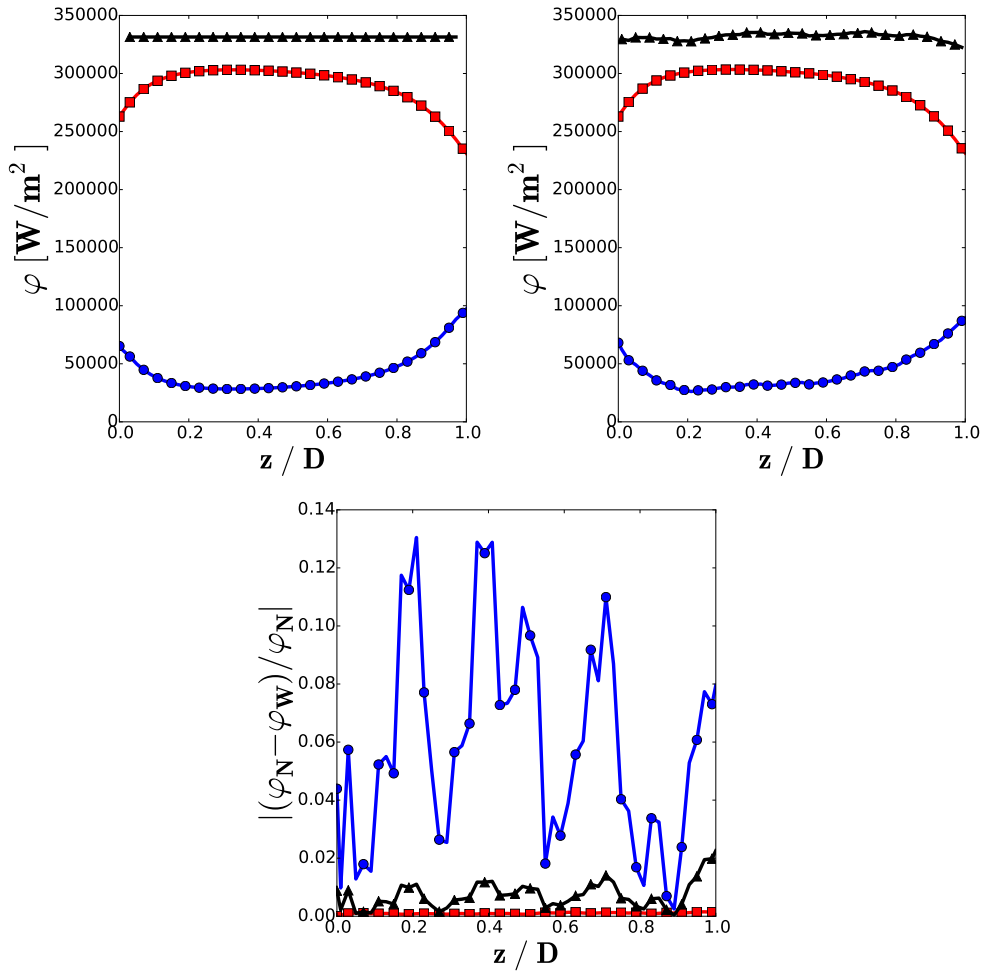


FIGURE 6.9 – Upper left : flux fields, 1st method. Upper right : flux fields, 2nd method. Lower : difference between the total flux fields calculated by the Newton-Raphson algorithm and the random walk technique. (Δ) Total flux. (\square) Radiative flux. (\circ) Conductive flux.

The total heat flux crossing the fibrous medium given by the method involving the effective phonic conductivity allows to calculate the total conductivity k_{tot} which accounts for the contributions of the two heat transfer modes (conduction and radiation). This total conductivity may not be regarded as an intrinsic thermal property of the material because its value is very dependent on the temperature values imposed at the boundaries of the sample. Nevertheless, it is interesting at this point to vary the parameters of generation of the fibrous medium and to examine the impacts of these parameters on the insulation efficiency of the material. We study the influences of 4 parameters : the porosity of the medium Π , the absorption coefficient of the fibres κ_a , the optical index ratio n_a/n_b and the standard deviation of the angles θ_C of the fibres σ . The

results are presented in Fig.6.10.

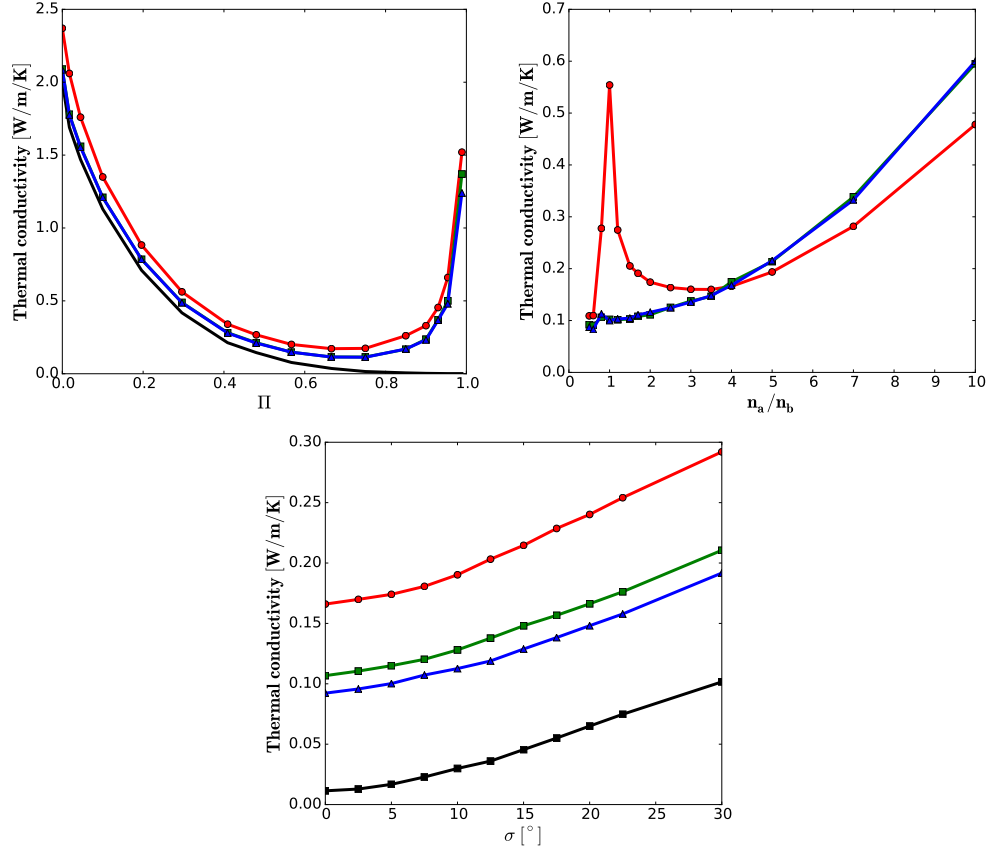


FIGURE 6.10 – Upper left : thermal conductivity vs the porosity. Upper right : thermal conductivity vs the optical index ratio. Lower : thermal conductivity vs the standard deviation of the fibre orientations. (-) Effective phonic conductivity. (o) Total conductivity with $\kappa_a d = 0.3$. (\square) Total conductivity with $\kappa_a d = 10$. (\triangle) Total conductivity with $\kappa_a d = 100$.

It is seen in Fig.6.10 that under the conditions examined here, the fibrous medium provides the best insulation for a porosity in the range [0.6-0.8]. Conduction has the highest contribution for $\Pi = 0$, *i.e.* when the medium is homogeneous zirconia, and it is zero when the medium is composed of vacuum ($\Pi = 1$). Conversely, the contribution of radiation is infinite for $\Pi = 1$ and is still strong when the porosity is close to 0. Furthermore, as the ratio n_a/n_b is greater than 1, the total reflection phenomenon occurs within the fibres so that the fibres trap the radiation. Consequently, the scattering phenomenon by reflection within the fibres increases the absorption probability within the volume of the fibres. Adding fibres (*i.e.* decreasing Π) brings additional absorption and thus decreases the contribution of radiation whereas it increases the contribution of conduction. But above a certain value of the porosity the internal scattering

events within the fibres become very rare, which contributes to a high radiative transfer. Finally, a minimum of the total conductivity is found for a value of the porosity in the range [0.6-0.8].

The optical index ratio has a strong influence on the total thermal conductivity. In the particular case $n_a = n_b$, there are no more fibre/gas interfaces from the point of view of radiation : rays are transmitted from a phase to another without any deviation and reflection. When the fibre absorption coefficient is small, the rays are allowed to travel over long distances within the fibres, and scattering is the dominant radiative phenomenon. If $n_a > n_b$, the rays are trapped within the fibres which increases absorption. At a certain value of n_a/n_b (3 for $\kappa_a d = 0.3$), the fibre reflectivity has high values and consequently few rays are transmitted from the gas to the fibres, which tends to increase the radiative transfer. When the fibre reflectivity is equal to 1 (i.e. when the ratio n_a/n_b tends to infinity), the rays propagate in the transparent phase and the radiative flux becomes infinite. When the absorption coefficient takes high values ($\kappa_a d = 10$ and $\kappa_a d = 100$), the fibres are almost opaque and the waveguide effect disappears. Overall the range [2-3] for the value of n_a/n_b is a good choice for thermal insulation applications.

As expected, the effective and total conductivities increase when the standard deviation of the fibre orientations σ increases. The best insulation is obtained when all fibres are normal to the direction of the transfer ($\sigma = 0^\circ$). It is interesting to notice that the case of randomly oriented fibres gives the highest conductivity $k_{eff} = 2.10 \times 10^{-1}$ and $k_{tot} = 4.45 \times 10^{-1}$ for $\kappa_a d = 0.3$.

Conclusion

An original model based on the Brownian motion that allows to simulate thermal conduction in a complex geometry without any meshing has been described. It gives an accurate value of the effective phonic conductivity of a numerical anisotropic fibrous medium composed of conductive fibres immersed in vacuum.

We have extended the field of application of the method by taking into account the radiative transfer effects. The coupled conduction-radiation problem has been solved over a fibrous medium the fibres of which are semi-transparent (purely absorbing), and the radiative boundary effects have been accurately taken into account. Via the radiative distribution function formalism, we have shown that whereas the gas surrounding the fibres has a Beerian behavior, the phase constituted by the fibres is non Beerian. The radiative power field issued from the resolution of the model which couples a GRTE with a RTE (see chapter 5) has been injected in the Brownian motion calculation as algebraic enthalpy increments provided to the walkers. When the thermal steady state is

reached, it is possible to determine the temperature field within the medium, the radiative and conductive flux fields as well as the total heat flux (which is constant), and finally global thermal properties of the material. We have shown that in the case examined there are no particular coupling effects at the local scale and that a method that couples the contributions of radiation and conduction at the macroscopic scale is sufficient. The procedure for solving the coupled conductive-radiative heat transfer problem is summarized : 1) The non linear radiative power density, which strongly depends on the temperature, is calculated by a statistical radiative model which couples a GRTE and a RTE. 2) The accurate effective phonic conductivity is calculated by a random walk technique based on the Brownian motion. 3) The coupled conduction-radiation problem is solved by a classic iterative method and the total conductivity of the fibrous sample is determined.

Finally, a parametric study of the insulation properties of a fibrous medium at high temperature has been carried out. The porosity, the optical index ratio, the degree of spatial arrangement of the fibres and their thermal conductivity are key parameters that strongly affect the thermal transport properties of the fibrous medium. Criteria for efficient thermal insulation in terms of values for these parameters have been proposed, and zirconia, having an optical index of 2 and a thermal conductivity of $2 W/m/K$, appears to be a good candidate as the constituent of a felt for high performance thermal insulation at high temperature.

Conclusion générale

Les matériaux constitués de fibres de céramiques réfractaires (zircone ou alumine) ont d'excellentes propriétés thermomécaniques et sont envisagés pour être utilisés comme barrières thermiques à hautes températures. Pour concevoir ces matériaux poreux, il est nécessaire de quantifier chaque mode de transfert thermique. Mais la morphologie complexe, l'anisotropie, les effets de bord, la semi-transparence des fibres et le comportement non Beerien de ces matériaux rendent très difficile la détermination de leurs propriétés radiatives par des méthodes classiques.

Nous avons mis en évidence que dans un milieu Beerien l'émission et toutes les diffusions du rayonnement peuvent être traitées de manière indépendante. La distribution des angles d'incidence des rayons impactant une interface n'influe pas sur la distribution des angles diffusés. Le milieu est caractérisé par des lois exponentielles associées à chaque phénomène radiatif (extinction, absorption et diffusion). Dans un milieu non Beerien, la distribution des angles d'incidence des rayons impactant une interface influe sur la distribution des angles diffusés. Le milieu est caractérisé par des fonctions de probabilité cumulée associées à chaque phénomène radiatif.

Dans cette thèse, nous avons démontré que dans le cas du milieu fibreux que nous avons généré numériquement, la phase des fibres a est de nature non Beerienne et la phase transparente b de nature Beerienne. La phase des fibres non Beerienne est donc caractérisée par des fonctions de distribution cumulée et des fonctions de phase associées à chaque type diffusion :

□ par les fonctions de distribution cumulée d'extinction $G_{\nu ext a}$, d'absorption $P_{\nu aa}$, de diffusion interne (réflexion) $P_{\nu sc aa}$ et de diffusion externe (transmission) $P_{\nu sc ab}$, et par les fonctions de phase de réflexion $p_{\nu aa}$ et de transmission $p_{\nu ab}$ associées à une émission de rayonnement.

□ par les fonctions de distribution cumulée d'extinction $G_{\nu ext a}^{S(1)}$, d'absorption $P_{\nu aa}^{S(1)}$, de diffusion interne $P_{\nu sc aa}^{S(1)}$ et de diffusion externe $P_{\nu sc ab}^{S(1)}$, et par les fonctions de phase de réflexion $p_{\nu aa}^{S(1)}$ et de transmission $p_{\nu ab}^{S(1)}$ associées à la première diffusion du rayonnement.

- par les fonctions de distribution cumulée d'extinction $G_{\nu ext a}^{S(2)}$, d'absorption $P_{\nu aa}^{S(2)}$, de diffusion interne $P_{\nu sc aa}^{S(2)}$ et de diffusion externe $P_{\nu sc ab}^{S(2)}$, et par les fonctions de phase de réflexion $p_{\nu aa}^{S(2)}$ et de transmission $p_{\nu ab}^{S(2)}$ associées à la seconde diffusion du rayonnement.
- etc, ...

La phase transparente Beerienne est caractérisée par les coefficients radiatifs d'extinction $\beta_{\nu b}$, de diffusion interne $\sigma_{\nu bb}$ et de diffusion externe $\sigma_{\nu ba}$, et par les fonctions de phase de réflexion $p_{\nu bb}$ et de transmission $p_{\nu ba}$. Ces propriétés radiatives ont été déterminées par une méthode de Monte Carlo consistant à tirer des rayons dans chaque phase du milieu fibreux et à les suivre jusqu'à leur absorption. Les fonctions de distribution sont calculées en cumulant les longueurs d'extinction, d'absorption et de diffusion, et les fonctions de phase en cumulant les directions diffusées.

Ensuite, nous avons élaboré un modèle radiatif couplant une Equation du Transfert Radiatif Généralisée (GRTE) dans la phase non Beerienne, dans laquelle les coefficients radiatifs sont remplacés par les fonctions statistiques radiatives, avec une Equation du Transfert Radiatif (RTE) classique dans la phase Beerienne. Le problème radiatif a été résolu à l'aide d'une méthode de Monte Carlo consistant à tirer des rayons dans un milieu homogénéisé caractérisé par les fonctions statistiques radiatives et par les fonctions de phase. Cette méthode consiste à suivre un grand nombre de rayons, transportant une certaine quantité d'énergie, émis depuis la phase des fibres, diffusés plusieurs fois dans les fibres et dans la phase transparente, jusqu'à leur absorption dans les fibres. Cette modélisation du transport d'énergie radiative permet de calculer le champ de puissance volumique radiative dans la phase fibreuse et le flux radiatif traversant le milieu. Le champ de température issu de ce modèle en situation d'équilibre radiatif a été comparé avec le champ de température calculé par un modèle de Fourier radiatif classique, il a été montré que le modèle de Fourier radiatif surestime le gradient de température au sein du milieu et l'erreur sur le calcul de la température atteint $100 K$ proche des extrémités. Une première étude portant sur l'efficacité d'isolation en considérant le rayonnement seul a été ensuite menée. Elle a montré qu'un matériau fibreux est plus isolant quand les fibres sont opaques, quand la porosité du matériau est comprise dans l'intervalle $[0.4 ; 0.6]$ et lorsque le rapport d'indice optique entre la phase des fibres et la phase transparente est compris dans l'intervalle $[2 ; 4]$.

Finalement, une modélisation statistique du problème conductif représentant l'agitation thermique dans les fibres a été développée. Elle se base sur le mouvement Brownien d'un grand nombre de marcheurs dans les fibres, ces marcheurs transportant une certaine quantité d'enthalpie. Lors de leur déplacement, ces marcheurs sont chauffés ou refroidis par le dépôt (algébrique) d'énergie radia-

tive. Le problème est régi par les conditions aux limites qui sont des températures imposées aux extrémités du milieu. Comme le champ de puissance radiative dépend du champ de température, un processus itératif permet de résoudre le problème du transfert thermique couplé. Ce modèle couple la conduction et le rayonnement à l'échelle des fibres et donne des résultats équivalents à ceux issus d'un modèle classique couplant ces deux modes de transfert à l'échelle globale. Dans ce travail, le modèle statistique a permis de déterminer précisément la conductivité phonique effective du milieu fibreux ayant une morphologie complexe, et un modèle itératif classique a permis de déterminer la conductivité totale. Une seconde étude portant sur l'efficacité d'isolation du milieu fibreux prenant en compte les effets conductifs et radiatifs a été réalisée. Elle a montré qu'un milieu fibreux isole plus efficacement quand les fibres sont opaques et sont orientées perpendiculairement à la direction du transfert, quand sa porosité est comprise dans l'intervalle $[0.6 ; 0.8]$ et quand le rapport d'indice optique entre la phase des fibres et la phase transparente est compris dans l'intervalle $[2 ; 3]$.

La modélisation du transfert thermique couplé conduction-rayonnement développée dans ce travail peut être appliquée aux milieux poreux vérifiant les conditions suivantes :

- La taille des pores et la diamètre des fibres doivent être grands devant la longueur d'onde, c'est-à-dire que les conditions de validité de l'optique géométrique doivent être vérifiées.
- Les propriétés thermophysiques des phases doivent être connues à une échelle de longueur plus petite que la résolution de la morphologie du matériau.
- Les lois de réflexion et de transmission aux interfaces sont supposées spéculaires et données par les lois de Fresnel, ce qui sous-entend que les interfaces sont de qualité optique.

Dans cette étude, quelques approximations contestables ont été faites. Le libre parcours moyen des marcheurs conductifs a été supposé être le même dans toutes les directions alors qu'il est probable que la conductivité thermique des fibres est plus grande dans la direction axiale que dans la direction radiale. De plus, dans nos calculs les marcheurs pouvaient se déplacer de fibres en fibres sans résistance, on faisait donc l'hypothèse que la phase des fibres est continue. On peut imaginer la modélisation d'une résistance thermique de contact entre deux fibres représentant leur écrasement. Mais des études expérimentales précises de ces deux points sont nécessaires pour estimer leurs impacts sur le transfert thermique.

Ensuite, il reste à améliorer ces modèles pour pouvoir résoudre les problèmes instationnaires et prendre en compte les effets liés aux hétérogénéités qu'on peut trouver au sein des matériaux réels. Dès lors que l'on place le matériau

fibreux dans un gaz, des effets convectifs vont jouer un rôle dans le transfert thermique et devront être pris en compte dans l'avenir.

Les perspectives de ce travail sont d'intégrer ces méthodes dans un logiciel de simulation des propriétés thermiques de matériaux fibreux connaissant leur morphologie réelle et les propriétés thermophysiques de leurs constituants. Ces méthodes sont parallélisées et nécessitent de gros moyens de calcul. Néanmoins, ces simulations sont utiles pour dimensionner des barrières thermiques utilisées dans des applications énergétiques à haute température. Cette thèse a permis de développer les bases théoriques pour la modélisation du transfert couplé conduction-rayonnement dans les matériaux poreux comportant deux phases pouvant être de nature non Beerienne, semi-transparentes et anisotropes, et en tenant compte des effets de bord.

Annexe A

Propriétés des termes sources de diffusion

Considérons la diffusion externe, par transmission, d'un rayonnement d'une phase c vers une phase d . Le cas de la diffusion interne (réflexion) est déduit en posant $c = d$. La diffusion externe depuis une phase Beerienne c d'indice optique $n_{\nu c}$ vers une autre phase Beerienne d d'indice optique $n_{\nu d}$ est caractérisée par le coefficient de diffusion $\sigma_{\nu cd}(\mathbf{u})$ et par la fonction de phase $p_{\nu cd}$. Le terme source de diffusion par unité de volume dans un angle solide élémentaire $d\Omega_d(\mathbf{u})$, exprimé dans la phase d , s'écrit :

$$S_{s\nu cd}(\mathbf{u}) d\Omega_d(\mathbf{u}) = d\Omega_d(\mathbf{u}) \int_{4\pi} \sigma_{\nu cd}(\mathbf{u}_1) \frac{p_{\nu cd}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} I_{\nu c}(\mathbf{u}_1) d\Omega_{1c}(\mathbf{u}_1) \quad (\text{A.1})$$

La fonction de phase $p_{\nu cd}$ associe une luminance diffusée, exprimée dans la phase d , à un flux incident élémentaire caractérisé par la luminance $I_{\nu c}$ exprimée dans la phase c .

Dans les conditions de l'équilibre thermique idéal, le théorème de réciprocité stipule que la puissance radiative diffusée d'une direction \mathbf{u}_1 dans la phase c vers une direction \mathbf{u} dans la phase d est égale à la puissance radiative diffusée de la direction $-\mathbf{u}$ de d vers la direction $-\mathbf{u}_1$ de c , *i.e.*

$$\begin{aligned} & \sigma_{\nu cd}(\mathbf{u}_1) \Pi_c n_{\nu c}^2 I_{\nu}^{\circ}(T) d\Omega_{1c}(\mathbf{u}_1) \frac{p_{\nu cd}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi} d\Omega_d(\mathbf{u}) \\ = & \sigma_{\nu dc}(-\mathbf{u}) \Pi_d n_{\nu d}^2 I_{\nu}^{\circ}(T) d\Omega_d(-\mathbf{u}) \frac{p_{\nu dc}(-\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1)}{4\pi} d\Omega_{1c}(-\mathbf{u}_1) \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Par ailleurs, dans ces conditions le théorème de Clausius s'écrit :

$$n_{\nu c}^2 d\Omega_{1c}(\mathbf{u}_1) = n_{\nu d}^2 d\Omega_d(\mathbf{u}) = d\Omega \quad (\text{A.3})$$

où $d\Omega$, $d\Omega_{1c}(\mathbf{u}_1)$ et $d\Omega_d(\mathbf{u})$ sont les angles solides élémentaires dans le vide,

dans la phase c et dans la phase d respectivement. De plus,

$$d\Omega_{1c}(\mathbf{u}) = d\Omega_{1c}(-\mathbf{u}), \quad d\Omega_d(\mathbf{u}) = d\Omega_d(-\mathbf{u}), \quad d\Omega(\mathbf{u}) = d\Omega(-\mathbf{u}) \quad (\text{A.4})$$

Dans ces conditions l'équation (A.2) devient :

$$\sigma_{\nu cd}(\mathbf{u}_1) \Pi_c \frac{p_{\nu cd}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u})}{4\pi n_{\nu d}^2} = \sigma_{\nu dc}(-\mathbf{u}) \Pi_d \frac{p_{\nu dc}(-\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1)}{4\pi n_{\nu c}^2} \quad (\text{A.5})$$

En utilisant l'équation (A.5), l'équation (A.1) devient :

$$S_{sc\nu cd}(\mathbf{u}) = \left(\frac{n_{\nu d}^2 \Pi_d}{n_{\nu c}^2 \Pi_c} \right) \sigma_{\nu dc}(-\mathbf{u}) \int_{4\pi} \frac{p_{\nu dc}(-\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1)}{4\pi} I_{\nu c}(\mathbf{u}_1) d\Omega_{1c}(-\mathbf{u}_1) \quad (\text{A.6})$$

Par définition, la fonction de phase $p_{\nu dc}$ est normalisée par la relation :

$$\int_{4\pi} \frac{p_{\nu dc}(-\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1)}{4\pi} d\Omega_{1c}(-\mathbf{u}_1) = 1 \quad (\text{A.7})$$

Dans les conditions de l'équilibre thermique idéal, $I_{\nu c}(\mathbf{u}_1) = \Pi_c n_{\nu c}^2 I_{\nu}^{\circ}(T)$, et donc le terme source de diffusion global $S_{sc\nu cd}^{\circ}$ associé à la diffusion externe de l'énergie radiative de la phase c vers la phase d dans la direction \mathbf{u} est égal à

$$S_{sc\nu cd}^{\circ}(\mathbf{u}) = \sigma_{\nu dc}(-\mathbf{u}) \Pi_d n_{\nu d}^2 I_{\nu}^{\circ}(T) \quad (\text{A.8})$$

En se basant sur le *principe du bilan détaillé*, ce terme source est égal, dans les conditions de l'équilibre thermique idéal, au terme source d'extinction par diffusion de l'énergie radiative diffusée de la phase d vers la phase c dans la direction \mathbf{u} , *i.e.* $\sigma_{\nu dc}(\mathbf{u}) \Pi_d n_{\nu d}^2 I_{\nu}^{\circ}(T)$, ce qui donne la relation :

$$\sigma_{\nu dc}(-\mathbf{u}) = \sigma_{\nu dc}(\mathbf{u}) \quad (\text{A.9})$$

Dans le cas de la diffusion interne (réflexion), le théorème de réciprocité, dans les conditions de l'équilibre thermique idéal, donne la relation :

$$S_{sc\nu cc}(\mathbf{u}) = \sigma_{\nu cc}(-\mathbf{u}) \int_{4\pi} \frac{p_{\nu cc}(-\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1)}{4\pi} I_{\nu c}(\mathbf{u}_1) d\Omega_{1c}(-\mathbf{u}_1) \quad (\text{A.10})$$

et la relation :

$$\sigma_{\nu cc}(-\mathbf{u}) = \sigma_{\nu cc}(\mathbf{u}) \quad (\text{A.11})$$

Ces relations sont générales pour tout type de milieu poreux comportant plusieurs phases.

Annexe B

Fonctions de distribution des directions diffusées

Les phénomènes de diffusion multiple sont facilement simulés au sein du milieu réel à l'aide de la technique de Monte Carlo. Cette approche est basée sur le traitement corrélé de l'émission, de la diffusion par réflexion aux interfaces, de la diffusion par transmission aux interfaces et de l'extinction par absorption, et sur le traitement non corrélé de l'extinction par diffusion en volume.

Par souci de simplicité, considérons le cas de l'émission de rayonnement par une surface opaque au sein d'une phase transparente (cas OT). Un grand nombre de rayons sont émis depuis des points $M(\mathbf{r})$ appartenant aux surfaces opaques dans des directions aléatoires \mathbf{u} , caractérisés par des poids $w = \alpha_\nu[\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r})]$ associés à l'émissivité des interfaces. Une partie de ces rayons (ceux qui ne sont pas absorbés) sont réfléchis aux interfaces. Tous les points d'impact $M_1(\mathbf{r}_1)$ sont des points sources de diffusion associés au premier phénomène de diffusion (première réflexion). Le poids $w_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{u})$ associé à l'émission des rayons depuis le point M_0 dans la direction \mathbf{u} et diffusés au point M_1 est le produit du poids associé à l'émission et du poids associé à la réflexion, *i.e.*

$$w_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{u}) = \alpha_\nu[\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r})] \left(1 - \alpha_\nu[-\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r}_1)] \right) \quad (\text{B.1})$$

où \mathbf{r} est le point source d'émission.

Le poids de la diffusion du rayonnement depuis le point M_1 dans la direction \mathbf{u}_1 s'exprime alors par :

$$W_{\mathbf{u}_1}^{(1)}(\mathbf{r}_1) = \frac{\int_{\Sigma/V/\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r})>0} \int_{4\pi} w_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{u}) \delta(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}^*) d\Omega_1(\mathbf{u}) d\mathbf{r}}{\int_{\Sigma/V/\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r})>0} \int_{4\pi} w_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{u}) d\Omega_1(\mathbf{u}) d\mathbf{r}} \quad (\text{B.2})$$

où \mathbf{u}^* est la direction conjuguée de \mathbf{u} déduite en considérant les lois de Fresnel

(réflexion spéculaire). La fonction de distribution des directions diffusées aux interfaces \mathbf{u}_1 s'exprime dans le repère fixe du milieu par :

$$f_{sc}^{S(1)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}_1) = \frac{W_{\mathbf{u}_1}^{(1)}(\mathbf{r}_1)}{\int_{\Sigma^{(1)}/V/\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}'_1) \geq 0} W_{\mathbf{u}_1}^{(1)}(\mathbf{r}'_1) d\mathbf{r}'_1}. \quad (\text{B.3})$$

De manière similaire, le poids $w_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{u}_1)$ associé à la première diffusion des rayons au point M_1 dans la direction \mathbf{u}_1 et diffusés une seconde fois au point M_2 est le produit de $W_{\mathbf{u}_1}^{(1)}(\mathbf{r}_1)$ et du poids associé à la seconde réflexion, *i.e.*

$$w_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{u}_1) = W_{\mathbf{u}_1}^{(1)}(\mathbf{r}_1) \left(1 - \alpha_\nu[\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_2)] \right), \quad (\text{B.4})$$

Des équations semblables aux équations (B.2) et (B.3) sont ensuite écrites pour exprimer le poids associé à la seconde diffusion $W_{\mathbf{u}_2}^{(2)}(\mathbf{r}_2)$ et la fonction de distribution des directions diffusées associée à la seconde diffusion $f_{sc}^{S(2)}(\mathbf{u}_2, \mathbf{r}_2)$. Cette fonction de distribution permet de calculer $G_{ext}^{S(2)}(\mathbf{u}_2, s' - s)$. Cette procédure est itérée pour obtenir toutes les fonctions statistiques radiatives d'extinction $G_{ext}^{S(n)}(\mathbf{u}_n, s' - s)$. Dans tous les cas, les calculs Monte Carlo sont stoppés quand la puissance radiative émise est absorbée.

Annexe C

Résolution du problème du transfert radiatif dans un milieu fibreux composé de deux phases Beeriennes

Dans cette annexe on va résoudre le problème du transfert radiatif dans un milieu fibreux en supposant les deux phases Beeriennes. Le milieu fibreux d'étude est celui présenté à la partie II. Ce milieu, de porosité 0.75, a été généré numériquement en empilant des cylindres orientés de façon préférentielle dans le plan perpendiculaire à la direction du transfert z , l'écart-type associé à leur dispersion est de 5%. La phase des fibres a est semi-transparente non diffusante caractérisée par l'épaisseur optique $\kappa_{\nu a} d = 0.3$ et par l'indice optique $n_{\nu a} = 2$. Ces fibres sont plongées dans une phase transparente b caractérisée par l'indice optique $n_{\nu b} = 1$.

C.1 Caractérisation radiative du milieu fibreux composé de deux phases Beeriennes

Dans un milieu Beerien, les fonctions statistiques radiatives associées aux différentes diffusions sont égales à des lois exponentielles caractérisées par des coefficients radiatifs. Dans la phase a les fonctions statistiques radiatives s'écrivent :

$$\begin{aligned} G_{\nu ext a}(\mathbf{u}, s' - s) &= G_{\nu ext a}^{S(1)}(\mathbf{u}, s' - s) = G_{\nu ext a}^{S(2)}(\mathbf{u}, s' - s) = \dots \\ &= 1 - \exp \left[-\beta_{\nu a}(\mathbf{u})(s' - s) \right] \end{aligned} \quad (C.1)$$

$$\begin{aligned} P_{\nu aa}(\mathbf{u}, s' - s) &= P_{\nu aa}^{S(1)}(\mathbf{u}, s' - s) = P_{\nu aa}^{S(2)}(\mathbf{u}, s' - s) = \dots \\ &= \frac{\kappa_{\nu}(\mathbf{u})}{\beta_{\nu a}(\mathbf{u})} \left(1 - \exp \left[-\beta_{\nu a}(\mathbf{u})(s' - s) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} P_{\nu scaa}(\mathbf{u}, s' - s) &= P_{\nu scaa}^{S(1)}(\mathbf{u}, s' - s) = P_{\nu scaa}^{S(2)}(\mathbf{u}, s' - s) = \dots \\ &= \frac{\sigma_{\nu aa}(\mathbf{u})}{\beta_{\nu a}(\mathbf{u})} \left(1 - \exp \left[-\beta_{\nu a}(\mathbf{u})(s' - s) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} P_{\nu scab}(\mathbf{u}, s' - s) &= P_{\nu scab}^{S(1)}(\mathbf{u}, s' - s) = P_{\nu scab}^{S(2)}(\mathbf{u}, s' - s) = \dots \\ &= \frac{\sigma_{\nu ab}(\mathbf{u})}{\beta_{\nu a}(\mathbf{u})} \left(1 - \exp \left[-\beta_{\nu a}(\mathbf{u})(s' - s) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$p_{\nu scaa}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) = p_{\nu scaa}^{S(1)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) = p_{\nu scaa}^{S(2)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) = \dots \quad (\text{C.5})$$

$$p_{\nu scab}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) = p_{\nu scab}^{S(1)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) = p_{\nu scab}^{S(2)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) = \dots \quad (\text{C.6})$$

Ces fonctions sont calculées par la méthode de Monte Carlo appliquée aux milieux non Beeriens décrite dans le paragraphe 1.1.2.4. Le coefficient d'extinction $\beta_{\nu a}(\mathbf{u})$ est ensuite déterminé par la méthode RDFI décrite dans le paragraphe 1.1.1.2 ; puis le coefficient d'absorption et les coefficients de diffusion sont déduits en pondérant $\beta_{\nu a}(\mathbf{u})$ par les taux d'absorption et de diffusion :

$$\kappa_{\nu a}(\mathbf{u}) = \beta_{\nu a}(\mathbf{u}) P_{\nu aa}(\mathbf{u}, \infty) \quad (\text{C.7})$$

$$\sigma_{\nu aa}(\mathbf{u}) = \beta_{\nu a}(\mathbf{u}) P_{\nu scaa}(\mathbf{u}, \infty) \quad (\text{C.8})$$

$$\sigma_{\nu ab}(\mathbf{u}) = \beta_{\nu a}(\mathbf{u}) P_{\nu scab}(\mathbf{u}, \infty) \quad (\text{C.9})$$

La phase transparente b est Beerienne, elle est donc caractérisée par les coefficients radiatifs $\beta_{\nu b}(\mathbf{u})$, $\sigma_{\nu bb}(\mathbf{u})$ et $\sigma_{\nu ba}(\mathbf{u})$ calculés au chapitre 5.

La figure C.1 compare les fonctions statistiques radiatives déterminées par la méthode de Monte Carlo à leurs approximations quand on suppose les deux phases Beeriennes. On trace également, sur la figure C.2, l'évolution du critère de validité de la loi de Beer-Lambert dans les deux phases en fonction de la direction de propagation, ce critère de validité ayant pour expression :

$$\varepsilon_{RDFI}(\mathbf{u}) = \sqrt{\frac{\sum_0^{N_s} \left(G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s) - (1 - \exp[-\beta_{\nu}(\mathbf{u})(s' - s)]) \right)^2}{\sum_0^{N_s} G_{\nu ext}(\mathbf{u}, s' - s)^2}} \quad (\text{C.10})$$

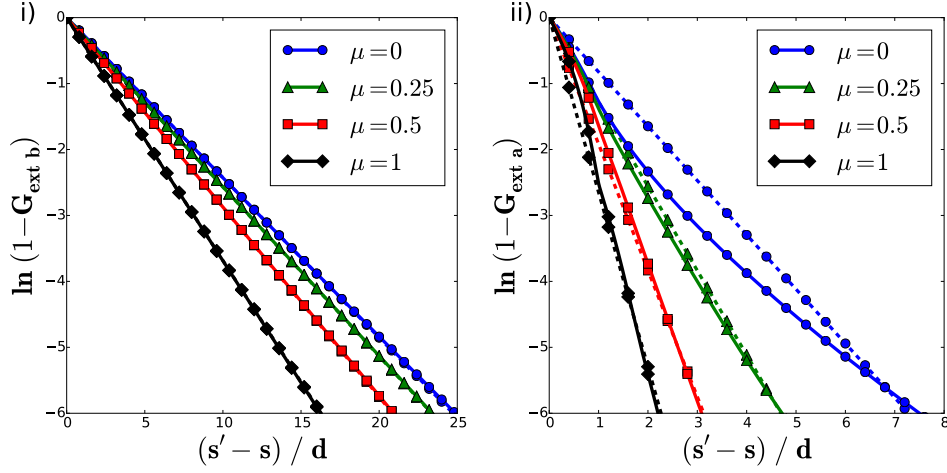


FIGURE C.1 – Fonctions de distribution cumulée d’extinction $G_{\nu ext}$ dans les deux phases. (–) $G_{\nu ext}$ exacte (– –) $G_{\nu ext}$ Beerienne. i) dans la phase b. ii) dans la phase a.

La loi de Beer-Lambert est jugée valide quand $\varepsilon_{RDFI}(\mathbf{u}) < 4 \cdot 10^{-2}$ [Tancrez and Taine (2004)]. On confirme que la phase b est rigoureusement Beerienne car $\varepsilon_{RDFI b}(\mathbf{u})$ est partout inférieur à 2%. Dans la phase a, quand $-0.5 < \mu < 0.5$, $\varepsilon_{RDFI a}(\mathbf{u})$ atteint 40%, ce qui rend caduque l’hypothèse Beerienne.

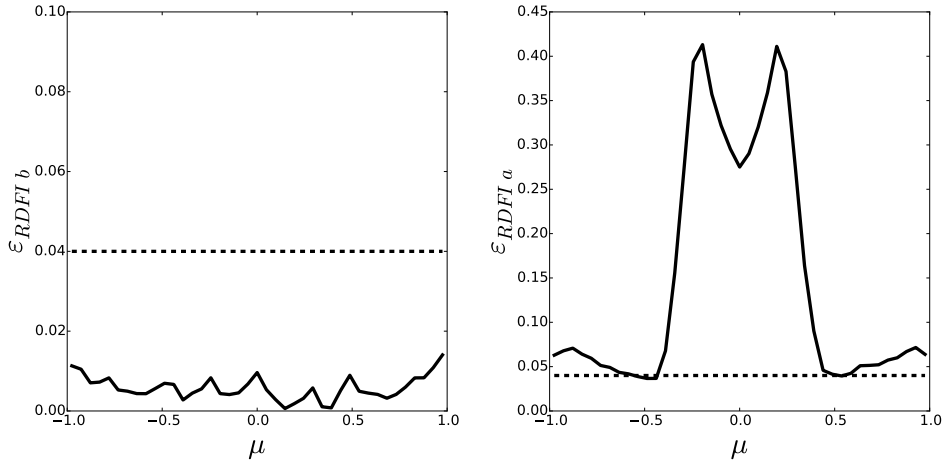


FIGURE C.2 – Critère de validité de la loi de Beer-Lambert calculé dans les deux phases. (–) $\varepsilon_{RDFI}(\mathbf{u})$. (– –) Limite de validité de 4%. i) dans la phase b. ii) dans la phase a.

Cependant, dans la suite nous allons considérer la phase des fibres a Beerienne afin de quantifier l’impact de cette approximation sur les champs de température et de puissance radiative. Les coefficients radiatifs associés aux deux phases Beeriennes sont présentés sur la figure C.3.

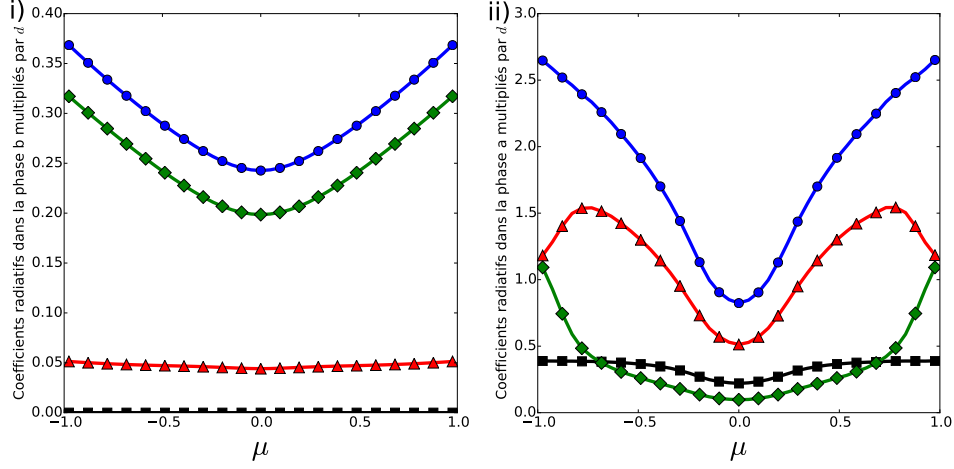


FIGURE C.3 – Coefficients radiatifs adimensionnés associés aux deux phases Beerriennes. i) dans la phase b. ii) dans la phase a. \circ : Coefficient d’extinction; \triangle : Coefficient de diffusion interne; \diamond : Coefficient de diffusion externe; \square : Coefficient d’absorption.

C.2 Modèle radiatif

Au coeur du milieu nous sommes dans des conditions identiques à celles du modèle du milieu fibreux optiquement épais développé dans le paragraphe 5.1.3. Dans ce cas le problème radiatif est modélisé par deux RTE couplées :

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\nu a}}{ds'}(\mathbf{u}, s') + \beta_{\nu a}(\mathbf{u}) I_{\nu a}(\mathbf{u}, s') &= \kappa_{\nu a}(\mathbf{u}) \Pi_a n_{\nu a}^2 I_{\nu}^{\circ}[T_a(s')] \\ &+ \sigma_{\nu aa}(\mathbf{u}) \int_0^{4\pi} I_{\nu a}(\mathbf{u}_1, s'_1) \frac{p_{\nu aa}(-\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1)}{4\pi} d\Omega_{1a}(-\mathbf{u}_1) \\ &+ \left(\frac{n_{\nu a}^2 \Pi_a}{n_{\nu b}^2 \Pi_b} \right) \sigma_{\nu ab}(\mathbf{u}) \int_0^{4\pi} I_{\nu b}(\mathbf{u}_1, s'_1) \frac{p_{\nu ab}(-\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1)}{4\pi} d\Omega_{1b}(-\mathbf{u}_1) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\nu b}}{ds'}(\mathbf{u}, s') + \beta_{\nu b}(\mathbf{u}) I_{\nu b}(\mathbf{u}, s') &= \sigma_{\nu bb}(\mathbf{u}) \int_0^{4\pi} I_{\nu b}(\mathbf{u}_1, s'_1) \frac{p_{\nu bb}(-\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1)}{4\pi} d\Omega_{1b}(-\mathbf{u}_1) \\ &+ \left(\frac{n_{\nu b}^2 \Pi_b}{n_{\nu a}^2 \Pi_a} \right) \sigma_{\nu ba}(\mathbf{u}) \int_0^{4\pi} I_{\nu a}(\mathbf{u}_1, s'_1) \frac{p_{\nu ba}(-\mathbf{u}, -\mathbf{u}_1)}{4\pi} d\Omega_{1a}(-\mathbf{u}_1) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Proche des extrémités du milieu les effets de bord pris en compte dans la GRTE, équation (1.27), se simplifient quand les phases sont Beerriennes (voir les équations (1.42) et (1.44)). Les termes correspondant à l’atténuation par extinction et au gain par diffusion dans chaque phase doivent être ajoutés au modèle ci-dessus.

Ces termes s'écrivent :

$$\begin{aligned} & \square -\beta_{\nu c}(\mathbf{u}) I_{\nu}^w(\mathbf{u}, s_w) \exp \left[-\beta_{\nu c}(\mathbf{u}) (s' - s_w) \right] \\ & \square +\sigma_{\nu cc}(\mathbf{u}) \int_{4\pi} I_{\nu}^w(\mathbf{u}_1, s_w) \exp \left[-\beta_{\nu c}(\mathbf{u}_1) (s' - s_w) \right] \frac{p_{\nu cc}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)}{4\pi} d\Omega_1 \\ & \square +\left(\frac{n_{\nu c}^2 \Pi_c}{n_{\nu d}^2 \Pi_d} \right) \sigma_{\nu cd}(\mathbf{u}) \int_{4\pi} I_{\nu}^w(\mathbf{u}_1, s_w) \exp \left[-\beta_{\nu d}(\mathbf{u}_1) (s' - s_w) \right] \frac{p_{\nu cd}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)}{4\pi} d\Omega_1 \end{aligned}$$

où c et d peuvent être les phases a et b ou b et a .

Ce problème couplé est résolu à l'aide de la méthode de Monte Carlo présentée dans le paragraphe 5.3.1. Elle est basée sur la simulation de la propagation d'un grand nombre de paquets de photons transportant la même quantité d'énergie radiative au sein du milieu homogénéisé caractérisé par les fonctions statistiques radiatives des deux phases définies dans le paragraphe C.1. On suit le cheminement des rayons depuis leur émission, leurs diffusions multiples dans chacune des deux phases, jusqu'à leur absorption.

C.3 Résultats

Le milieu fibreux de longueur $D = 100d$ dans la direction du transfert z est placé entre deux murs à $z = 0$ et $z = D$. Il est divisé en N_c cellules suivant z où la première cellule à $z = 0$ et la dernière cellule à $z = D$ correspondent aux murs. Si on considère deux températures imposées aux extrémités $T(0) = 2000 K$ et $T(D) = 300 K$ et la condition du régime stationnaire radiatif, c'est-à-dire $P^R(i) = 0$ pour $i = 2, \dots, (N_c - 1)$, on peut calculer le champ de température s'instaurant dans le milieu ; les résultats sont présentés sur la figure C.4. Si on considère un champ de température linéaire imposé dans le milieu où $T(0) = 2000 K$ et $T(D) = 300 K$, on peut calculer le champ de puissance volumique radiative au sein du milieu fibreux ; les résultats sont présentés sur la figure C.5.

L'écart relatif entre le champ de température calculé en supposant la loi de Beer-Lambert valide et le résultat exact est faible puisqu'il est partout inférieur à 5%. Pour cette configuration de milieu fibreux, on commet certes une erreur en supposant que la phase des fibres est Beerienne ; toutefois, le champ de température calculé sur la base de cette hypothèse est très acceptable.

Sur la figure C.5, on voit que l'écart relatif entre le champ de puissance radiative calculé en supposant la loi de Beer-Lambert valide et le résultat exact atteint 1500% au voisinage du bord chaud, $T(0) = 2000 K$. Dans cette zone, la puissance radiative prend de très grandes valeurs (négatives), et le choix du modèle a un impact très fort sur les résultats. Au coeur du milieu, l'écart re-

latif est de l'ordre de 30%. Pour coupler le rayonnement avec d'autres modes de transfert thermique, on a besoin de déterminer le champ de puissance radiative ; pour cette configuration de milieu fibreux, il s'avère qu'un modèle précis de rayonnement doit être utilisé.

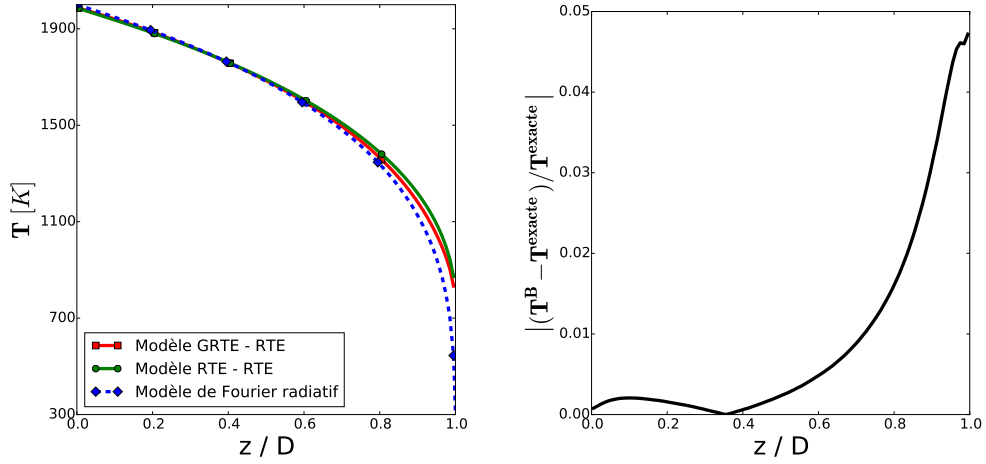


FIGURE C.4 – A gauche, champs de température au sein du milieu fibreux : \square : résultat exact calculé au moyen du modèle couplant une GRTE et une RTE (voir paragraphe 5.1.2) ; \circ : résultat en supposant valide la loi de Beer-Lambert dans les deux phases (modèle décrit au paragraphe C.2) ; \diamond : résultat calculé au moyen du modèle de Fourier radiatif (voir paragraphe 5.3.2). A droite, écart relatif entre le champ de température calculé en supposant la loi de Beer-Lambert valide et le résultat exact.

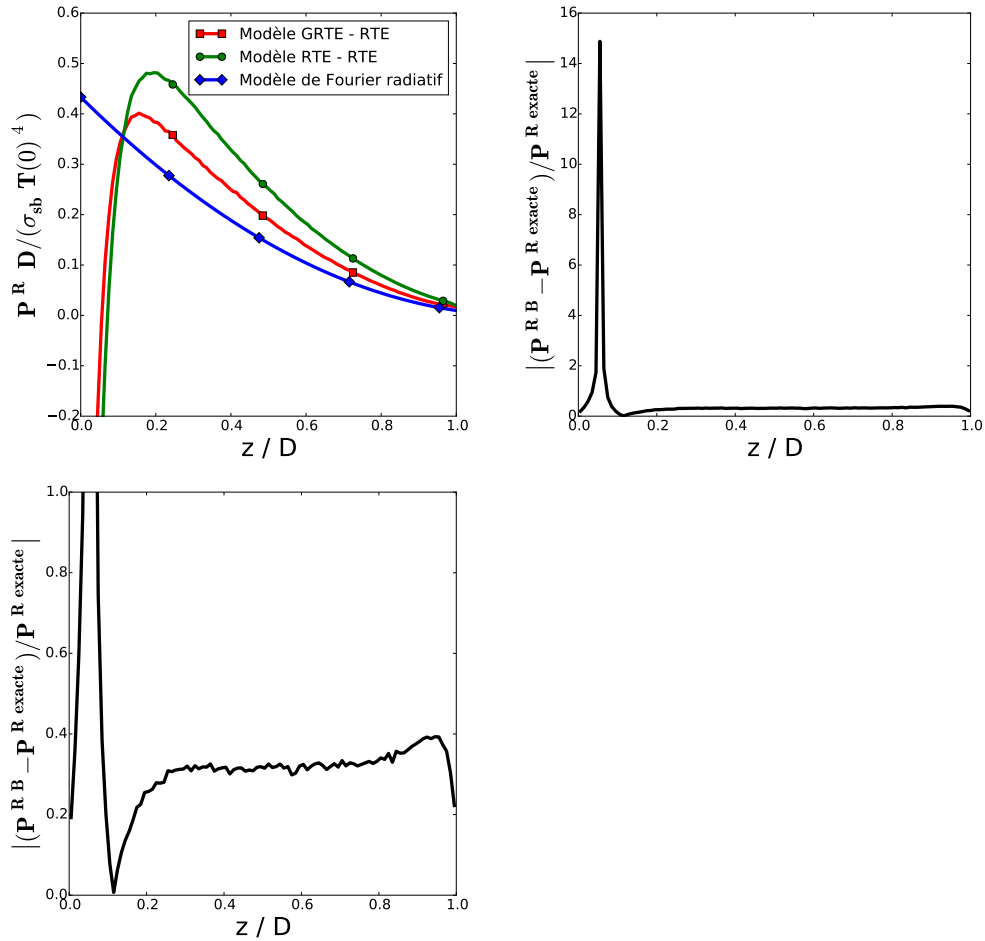


FIGURE C.5 – En haut à gauche, champs de puissance radiative au sein du milieu fibreux : \square : résultat exact calculé au moyen du modèle couplant une GRTE et une RTE (voir paragraphe 5.1.2) ; \circ : résultat en supposant valide la loi de Beer-Lambert dans les deux phases (modèle décrit au paragraphe C.2) ; \diamond : résultat calculé au moyen du modèle de Fourier radiatif (voir paragraphe 5.3.2). En haut à droite, écart relatif entre le champ de puissance radiative calculé en supposant la loi de Beer-Lambert valide et le résultat exact. En bas, agrandissement de la figure précédente aux écarts relatifs compris entre 0 et 1.

Références

- Aivazov, M. and I. Domashnev (1968). Influence of porosity on the conductivity of hot-pressed titanium specimens. *Soviet Powder Metallurgy and Metal Ceramics* 67(7), 708–710. (p. 39)
- Alexander, E. and B. Muratova (1972). *Structure-property relationships in heat pipe wicking materials*. Ph. D. thesis, North Carolina State Univ. (p. 40)
- André, S. and A. Degiovanni (1995). A theoretical study of the transient coupled conduction and radiation heat transfer in glass : phonic diffusivity measurements by the flash technique. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 38(18), 3401–3412. (p. 44)
- André, S. and A. Degiovanni (1998). A new way of solving transient radiative-conductive heat transfer problems. *ASME Journal of Heat Transfer* 120(4), 943–955. (p. 44)
- Asllanaj, F., X. Brige, and G. Jeandel (2007). Transient combined radiation and conduction in a one-dimensional non-gray participating medium with anisotropic optical properties subjected to radiative flux at the boundaries. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 107, 17–29. (p. 44, 121)
- Asllanaj, F., G. Jeandel, J. Roche, and D. Lacroix (2004). Transient combined radiation and conduction heat transfer in fibrous media with temperature and flux boundary conditions. *International Journal of Thermal Sciences* 43, 939–950. (p. 44, 84, 121)
- Baillis, D. and J. F. Sacadura (2000). Thermal radiation properties of dispersed media : theoretical prediction and experimental characterization. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 67(5), 327–363. (p. 82)
- Banner, D., S. Klarsfeld, and C. Langlais (1989). Temperature dependence of the optical characteristic of semitransparent porous media. *High Temperature - High Pressure* 21, 347–354. (p. 41)
- Bauer, T. (1993). A general analytical approach toward the thermal conductivity of porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 36, 4181–4191. (p. 39, 40)
- Bellet, F., E. Chalopin, F. Fichot, E. Iacona, and J. Taine (2009). RDFI

- determination of anisotropic and scattering dependent radiative conductivity tensors in porous media : Application to rod bundles. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52, 1544–1551. (p. 66, 67, 78, 79, 80, 83)
- Boulet, P., A. Collin, and J. Consalvi (2007). On the finite volume method and the discrete ordinates method regarding radiative heat transfer in acute forward anisotropic scattering media. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer* 104, 460–473. (p. 18, 33, 84, 120)
- Boulet, P., G. Jeandel, and G. Morlot (1993). Model of radiative transfer in fibrous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 38(18), 4287–4297. (p. 84, 120)
- Chahlaoui, M. (2011). *Modélisation du rayonnement thermique dans un coeur de réacteur nucléaire dégradé en présence de vapeur et de gouttes d'eau*. Ph. D. thesis. (p. 29)
- Chahlaoui, M., F. Bellet, F. Fichot, and J. Taine (2012). Radiative transfer within non Beerian porous media with semitransparent and opaque phases in non equilibrium : Application to reflooding of a nuclear reactor. *Int. J. Heat Mass Transfer* 55(13-14), 3666–3676. (p. 9, 21, 26, 67, 76, 77, 78, 79, 80, 83, 84, 86, 93, 96, 100, 101)
- Clark, N. (1948). The electrical conductivity of foam. *Trans. Faraday Soc.* 44, 13–15. (p. 39)
- Consalvi, J., B. Porterie, and J. Loraud (2002a). A formal averaging procedure for radiation heat transfer in particulate media. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45, 2755–2768. (p. 42)
- Consalvi, J., B. Porterie, and J. Loraud (2002b). A formal averaging procedure for radiation heat transfer in particulate media. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45, 2755–2768. (p. 83)
- Coquard, R. and D. Baillis (2004). Radiative characteristics of opaque spherical particle beds : A new method of prediction. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 18(2), 178–186. (p. 19, 20)
- Coquard, R. and D. Baillis (2006). Modeling of heat transfer in low-density eps foams. *ASME Journal of Heat Transfer* 128, 538–549. (p. 45, 121)
- Coquard, R., J. Randrianalisoa, S. Lallich, and D. Baillis (2011). Extension to the flash method to semitransparent polymer foams. *ASME Journal of Heat Transfer* 133. (p. 45, 121)
- Coquard, R., D. Rochais, and D. Baillis (2009). Experimental investigations of the coupled conductive and radiative heat transfer in metallic/ceramic foams. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52, 4907–4918. (p. 45, 121)
- Coquard, R., D. Rochais, and D. Baillis (2010). Conductive and radiative heat transfer in ceramic and metallic foams at fire temperatures : Contribution to the special issue "materials in fire". *Fire technology* 52. (p. 45, 121)

- Cunsolo, S., R. Coquard, D. Baillis, and N. Bianco (2016). Radiative properties modeling of open cell solid foam : Review and new analytical law. *International Journal of Thermal Sciences* 104, 122–134. (p. 21)
- Dauvois, Y., D. Rochais, F. Enguehard, and J. Taine (2016). Statistical radiative modeling of a porous medium with semi transparent and transparent phases : Application to a felt of overlapping fibres. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. (p. 81)
- Dauvois, Y., M. Zarrouati, F. Enguehard, J. Taine, and D. Rochais (2016). Comments over homogenisation scales for interfacial emission and scattering by a divided medium : Beerian and non beerian behaviours. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 103, 468–477. (p. 65, 83, 84, 86, 89, 90, 95, 96, 97, 98, 104, 107, 116, 121, 123)
- Dubot, F., Y. Favennec, B. Rousseau, and D. Rousse (2016). Determination of space-dependent radiative properties in diffuse optical tomography using a wavelet multi-scale method. *Journal of Physics : Conference Series* 676, 012004. (p. 18)
- Enguehard, F. (2005). Multi-scale modeling of radiation heat transfer through nanoporous superinsulating materials. *Proceedings of 17th Eur. Conf. thermophysical properties* (110). (p. 38)
- Gomart, H. and J. Taine (2011). Validity criterion of the radiative Fourier law for an absorbing and scattering medium. *Physical Review E* 83(2), 1–8. (p. 21, 22, 28, 29, 35, 78, 79, 96, 101, 120)
- Grigoriu, M. (1997). Local solutions of laplace, heat, and other equations by itô processes. *Journal of Engineering Mechanics* 123(8), 823–829. (p. 46, 122)
- Grigoriu, M. (2000). A monte carlo solution of heat conduction and poisson equations. *Journal of Heat Transfer* 122, 40–45. (p. 46, 122)
- Gusarov, A. (2008). Homogenization of radiation transfer in two-phase media with irregular phase boundaries. *Physical Review B* 77, 1–14. (p. 34)
- Gusarov, A. (2010). Model of radiative heat transfer in heterogeneous multiphase media. *Physical Review B* 81, 1–9. (p. 34)
- Haussener, S., P. Coray, W. Lipinski, P. Wyss, and A. Steinfeld (2010). Tomography-based heat and mass transfer characterization of reticulate porous ceramics for high-temperature processing. *J. of Heat Transfer* 132(023305), 1–9. (p. 66, 83)
- Haussener, S., W. Lipinski, J. Petrasch, P. Wyss, and A. Steinfeld (2009). Tomographic Characterization of a Semitransparent-Particle Packed Bed and Determination of its Thermal Radiative Properties. *J. Heat Transfer* 131(072701), 1–7. (p. 67, 83, 86, 93)
- Haussener, S., W. Lipinski, P. Wyss, and A. Steinfeld (2010). Tomography-based analysis of radiative transfer in reacting packed beds undergoing a solid-gas thermochemical transformation. *J. of Heat Transfer* 132(061201), 1–7. (p. 66, 83)

- Hendricks, T. and J. Howell (1994). Inverse radiative analysis to determine spectral radiative properties using the discrete ordinates method. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 2, 75–80. (p. 18)
- Houston, R. and S. Korpela (1982). Heat transfer through fiberglass insulation. *Proc 7th International Heat Transfer Conference 2*, 499–504. (p. 41)
- Hunter, B. and Z. Guo (2015). Applicability of phase-function normalization techniques for radiation transfer computation. *Numerical Heat Transfer* 67(Part B), 1–24. (p. 18, 85)
- Kamdem Tagne, H. and D. Baillis (2005). Radiative heat transfer using isotropic scaling approximation : Application to fibrous medium. *Journal of Heat Transfer* 127, 1115–1123. (p. 15, 84)
- Kamdem Tagne, H. and D. Baillis (2010). Reduced models for radiative heat transfer analysis through anisotropic fibrous medium. *Journal of Heat Transfer* 132, 1–8. (p. 15, 84)
- Keskin, R. and M. Grigoriu (2010). A probability-based method for calculating effective diffusion coefficients of composite media. *Probabilistic Engineering Mechanics* 25, 249–254. (p. 48)
- Koh, J. and A. Fortini (1973). Prediction of thermal conductivity and electrical resistivity of porous metallic materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 6, 2013–2021. (p. 39)
- Lee, S. (1986). Radiative transfer through a fibrous medium : Allowance for fiber orientation. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 36(3), 253–263. (p. 40, 84)
- Lee, S. (1989). Scattering phase function for fibrous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 33(10), 2183–2190. (p. 15, 84)
- Lee, S. and G. Cunningham (1998). Heat transfer in fibrous insulations : comparison of theory and experiment. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 12(3), 297–303. (p. 39)
- Leroy, V., B. Goyeau, and J. Taine (2013). Coupled Upscaling Approaches For Conduction, Convection, and Radiation in Porous Media : Theoretical Developments. *Transport in Porous Media* 98, 323–347. (p. 43)
- Lipinski, W., J. Petrasch, and S. Haussener (2010). Application of the spatial averaging theorem to radiative heat transfer in two-phase media. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 11, 253–258. (p. 34, 83, 86, 93)
- Loretz, M., E. Maire, and D. Baillis (2008). Analytical modelling of the radiative properties of metallic foams : contribution of x-ray tomography. *Advanced Engineering Materials* 10, 352–360. (p. 67)
- Mantle, W. and W. Chang (1991). Effective thermal conductivity of sintered metal fibers. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 5, 545–549. (p. 39)
- Matthews, L., R. Viskanta, and F. Incropera (1984). Development of inverse methods for determining thermophysical and radiative properties

- of high-temperature fibrous materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 27(4), 487–495. (p. 18)
- Milandri, A., F. Asllanaj, and G. Jeandel (2001, Novembre). Determination of radiative properties of fibrous media by an inverse method — comparison with the Mie theory. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 74, 637–653. (p. 44, 121)
- Milandri, A., F. Asllanaj, G. Jeandel, and J. Roche (2002). Heat transfer by radiation and conduction in fibrous media without axial symmetry. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 74, 585–603. (p. 44, 84, 121)
- Mishchenko, M., J. Dlugach, E. Yanovitskij, and N. Zakharova (1999). Bidirectional reflectance of flat, optically thick particulate layers : an efficient radiative transfer solution and applications to snow and soil surfaces. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer* 63, 409–432. (p. 18, 85)
- Petrasch, J., P. Wyss, and A. Steinfeld (2007). Tomography-based Monte Carlo determination of radiative properties of reticulated porous ceramics. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 105, 180–197. (p. 66, 67, 83)
- Quintard, M. (2015). Introduction to heat and mass transport in porous media. In *Porous media interaction with high temperature and high speed flows*, STO-AVT-261. VKI. (p. 33)
- Quintard, M. and S. Whitaker (1994a). Transport in ordered and disordered porous media I : The cellular average and the use of weighting functions. *Transport in Ordered and Disordered Porous Media I : The Cellular Average and the Use of Weighting Functions* 14, 179–206. (p. 33, 83)
- Quintard, M. and S. Whitaker (1994b). Transport in ordered and disordered porous media II : Generalized volume averaging. *Transport in Porous Media*. (p. 33, 83)
- Quintard, M. and S. Whitaker (1994c). Transport in ordered and disordered porous media III : Closure and comparison between theory and experiment. *Transport in Porous Media* 15, 31–49. (p. 33)
- Quintard, M. and S. Whitaker (1994d). Transport in ordered and disordered porous media IV : Computer generated porous media for three-dimensional systems. *Transport in Porous Media* 15, 51–70. (p. 33)
- Rousseau, B., A. Canizares, D. Meneses, G. Matzen, P. Echegut, M. Michiel, and J. Thovert (2007). Direct simulation of the high temperature optical behaviour of a porous medium based on a ct image. *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects* 300(1-2), 162–168. (p. 20)
- Rousseau, B., M. Michiel, A. Canizares, D. Meneses, P. Echegut, and J. Thovert (2007). Temperature effect (300-1500k) on the infrared photon transport inside an x-ray micromographic reconstructed porous silica glass.

- Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 104(2), 257–265. (p. 20)
- Semena, M. and V. Zaripov (1977). Influence of the diameter and length on material heat transfer of metal-fibre wicks of heat pipes. *Teploenergetika* 24(4), 82–84. (p. 39)
- Soliman, M., D. Graumann, and P. Berenson (1970). Effective thermal conductivity of dry and liquid-saturated sintered fiber metal wicks. *American Society of Mechanical Engineers* (70). (p. 40)
- Taine, J., F. Bellet, V. Leroy, and E. Iacona (2010). Generalized radiative transfer equation for porous medium upscaling : Application to the radiative Fourier law. *Int. J. Heat Mass Transfer* 53(19-20), 4071–4081. (p. 9, 22, 25, 26, 67, 68, 69, 79, 83, 84, 86, 90, 93, 96, 111)
- Taine, J. and F. Enguehard (2015a, September). Characterization of the radiative properties of homogeneous, anisotropic and non homogeneous porous media. In *Porous media interaction with high temperature and high speed flows*, STO-AVT-261. VKI. (p. 67)
- Taine, J. and F. Enguehard (2015b). Radiative transfer within porous media and couplings. In *Porous media interaction with high temperature and high speed flows*, STO-AVT-261. VKI. (p. 67)
- Taine, J., F. Enguehard, and E. Iacona (2014). *Transferts Thermiques* (5th ed.). Paris : Dunod. (p. 16, 29, 31, 100, 109)
- Taine, J. and E. Iacona (2012). Upscaling statistical methodology for radiative transfer in porous media : New trends. *Journal of Heat Transfer* 134. (p. 82)
- Tancrez, M. and J. Taine (2004). Direct identification of absorption and scattering coefficients and phase function of a porous medium by a Monte Carlo technique. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47, 373–383. (p. 9, 13, 15, 20, 26, 43, 66, 67, 68, 76, 77, 78, 80, 83, 86, 90, 93, 121, 153)
- Tesse, L., F. Dupoirieux, and J. Taine (2004). Monte carlo modeling of radiative transfer in a turbulent sooty flame. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47, 555–572. (p. 36, 109, 120, 123)
- Tomadakis, M. and S. Sotirchos (1992). Effets of fiber orientation and overlapping on knudsen, transition, and ordinary diffusion in fibrous substrates. *Materials Research Society Symposium Proceedings* 250, 221–226. (p. 41)
- Tomadakis, M. and S. Sotirchos (1993a). Effective diffusivities and conductivities of random dispersions of nonoverlapping and partially overlapping unidirectional fibers. *Journal of Chemistry Physics* 99(12), 9820–9827. (p. 41)
- Tomadakis, M. and S. Sotirchos (1993b). Ordinary and transition regime diffusion in random fiber structures. *AIChE Journal* 39(3), 397–412. (p. 41)

- Tomadakis, M. and S. Sotirchos (1996). Transport through random arrays of conductive cylinders dispersed in a conductive matrix. *Journal of Chemistry Physics* 104(17), 6893–6900. (p. 41)
- Tong, T. and C. Tien (1980). Analytical models for thermal radiation in fibrous insulations. *Journal of Building Physics* 4, 27–44. (p. 84)
- Transvalidou, F. and S. Sotirchos (1996). Effective diffusion coefficients in square arrays of filament bundles. *AIChE Journal* 42(9), 2426–2438. (p. 41)
- Trovalet, L., G. Jeandel, P. Coelho, and F. Asllanaj (2011). Modified finite-volume method based on a cell vertex scheme for the solution of radiative transfer problems in complex 3d geometries. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 112(17), 2661–2675. (p. 45, 121)
- Vignoles, G. (2016). A hybrid random walk method for the simulation of coupled conduction and linearized radiation transfer at local scale in porous media with opaque solid phases. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 93, 707–719. (p. 5, 46, 119)
- Vignoles, G. and A. Ortona (2016). Numerical study of effective heat conductivities of foams by coupled conduction and radiation. *International Journal of Thermal Sciences* 109, 270–278. (p. 46)
- Vignoles, G., W. Ros, C. Mulat, O. Coindreau, and C. Germain (2011). Pearson random walk algorithms for fiber-scale modeling of chemical vapor infiltration. *Computational Materials Science* 50, 1157–1168. (p. 41, 122)
- Vignoles, G., W. Ros, I. Szelengowicz, and C. Germain (2011). A brownian motion algorithm for tow scale modeling of chemical vapor infiltration. *Computational Materials Science* 50, 1871–1878. (p. 41, 122)
- Whitaker, S. (1999). *The method of volume averaging*. Davis, California : Kluwer Academics Publishers. (p. 33)
- Zarrouati, M., F. Enguehard, and J. Taine (2015). Radiative transfer within strongly non homogeneous porous media : Application to a slab of packed particles. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 91, 936–947. (p. 9, 21, 22, 26, 35, 67, 68, 79, 84, 86, 93, 120, 121, 123)
- Zeghondy, B., E. Iacona, and J. Taine (2006a). Determination of the anisotropic radiative properties of a porous material by radiative distribution function identification (RDFI). *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49, 2810–2819. (p. 13, 15, 66, 67, 68, 77, 78, 79, 80, 83, 86, 93)
- Zeghondy, B., E. Iacona, and J. Taine (2006b). Experimental validation of RDFI method predictions of statistically anisotropic porous medium radiative properties. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49, 3701–3707. (p. 86, 93)

Titre : Modélisation du transfert thermique couplé conductif et radiatif au sein de milieux fibreux portés à haute température.

Mots-clés : rayonnement, couplage conduction-rayonnement, milieux fibreux, milieu anisotrope et multiphasique, phases semi-transparentes, modélisation statistique, méthode de Monte Carlo, marche aléatoire, homog nisation.

Résumé : Dans ce travail, les propriétés thermiques effectives du milieu fibreux sont déterminées en tenant compte du couplage conduction et rayonnement. Un échantillon numérique fibreux statistiquement homogène composé de deux phases a été généré en empilant des cylindres fins absorbant dans le vide. Ces cylindres sont dispersés selon des fonctions de distribution de la position de leur centre et de leur orientation. L'interpénétration des cylindres est permis. L'extinction, l'absorption et la diffusion sont caractérisées par des fonctions statistiques radiatives qui permettent de savoir si le milieu est Beerien (ou non). Elles sont déterminées précisément à l'aide d'une méthode de Monte Carlo. On montre que la phase gazeuse a un comportement Beerien et que le phase fibreuse a un comportement fortement non Beerien. Le

champ de puissance radiative déposée dans le milieu fibreux est calculé en résolvant un modèle qui couple une équation du Transfert Radiatif Généralisée (ETRG) et une équation du Transfert radiatif Classique (ETR). Le modèle de conduction thermique est basé sur une méthode de marche aléatoire ne nécessitant aucun maillage. La simulation du mouvement Brownien de marcheurs dans les fibres permet de résoudre l'équation de l'énergie. L'idée de la méthode est de caractériser la température d'un volume élémentaire par une densité de marcheurs, qui peuvent parcourir le milieu. Le problème est gouverné par les conditions aux limites; Une concentration constante de marcheurs (ou un flux constant) est associée à une température imposée (ou un flux).

Title : Modeling of the coupled radiative and conductive heat transfer within fibrous media at high temperature.

Keywords : radiation, coupling radiation-conduction, fibrous media, anisotropic and multiphase medium, semi-transparent phases, statistical modeling, Monte Carlo method, random walk, homogenisation.

Abstract : In the present work, the effective heat transfer properties of fibrous medium are determined by taking into account a coupling of heat conduction and radiation. A virtual, statistically homogeneous, two-phase fibrous sample has been built by stacking finite absorbing cylinders in vacuum. These cylinders are dispersed according to prescribed distribution functions defining the cylinder positions and orientations. Cylinder overlappings are allowed. Extinction, absorption and scattering are characterised by radiative statistical functions which allow the Beerian behaviour of a medium to be assessed (or not). They are accurately determined with a Monte Carlo method. Whereas the gaseous phase exhibits a Beerian behaviour, the fibre phase is strongly

non Beerian. The radiative power field deposited within the fibrous material is calculated by resolving a model which couples a Generalized Radiative Transfer Equation (GRTE) and a classic Radiative Transfer Equation (RTE). The model of conduction transfer is based on a random walk method without meshing. The simulation of Brownian motion of walkers in fibres allows the energy equation to be solved. The idea of the method is to characterize the temperature in an elementary volume by the density of walkers, which roam the medium. The problem is governed by boundary conditions; A constant concentration of walkers (or a constant flux) is associated with a fixed temperature (or flux).