



**HAL**  
open science

# Identifiabilité des signaux parcimonieux structurés et solutions algorithmiques associées : application à la reconstruction tomographique à faible nombre de vues

Marc Nicodeme

## ► To cite this version:

Marc Nicodeme. Identifiabilité des signaux parcimonieux structurés et solutions algorithmiques associées : application à la reconstruction tomographique à faible nombre de vues. Autre. Université de Bordeaux, 2016. Français. NNT : 2016BORD0096 . tel-01502940

**HAL Id: tel-01502940**

**<https://theses.hal.science/tel-01502940>**

Submitted on 6 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE  
POUR OBTENIR LE GRADE DE  
**DOCTEUR DE**  
**L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**  
ÉCOLE DOCTORALE DE SCIENCES PHYSIQUES ET  
DE L'INGÉNIEUR  
SPÉCIALITÉ : SIGNAL ET IMAGE  
par **Nicodème Marc**

---

**Identifiabilité des signaux parcimonieux structurés  
et solutions algorithmiques associées - Application  
à la reconstruction tomographique à faible nombre  
de vues**

---

**Date de soutenance :** 23 Novembre 2016

**Devant la commission d'examen composée de :**

Michel BERTHIER, Professeur, MIA, Université de La Rochelle .....	Président du jury
Jalal FADILI, Professeur, GREYC, ENSICAEN .....	Rapporteur
Charles SOUSSEN, Maître de conférences, CRAN, Université de Lorraine	Rapporteur
Yannick BERTHOUMIEU, Professeur, IMS, Université de Bordeaux ....	Directeur
Charles DOSSAL, Maître de conférences, IMB, Université de Bordeaux ..	Directeur
Flavius TURCU, Chargé de recherche, IMS, Université de Bordeaux .....	Directeur



*À mon père.*

## Remerciements

Je tiens à remercier les membres de mon jury, Michel Berthier, Jalal Fadili et Charles Soussen qui m'ont fait l'honneur d'examiner cette thèse. Merci à mes rapporteurs qui ce sont intéressés à ma thèse. Je remercie bien entendu mes directeurs, Yannick Berthoumieu, Charles Dossal et Yannick Berthoumieu pour leur présence et leur accompagnement. Merci à Charles Dossal de m'avoir proposé cette thèse et d'avoir été présent tout le long. Merci à Yannick Berthoumieu d'avoir toujours été là et Merci à Flavius Turcu de son encadrement. Je remercie également les services administratifs des deux laboratoires qui ont facilité le bon déroulement de cette thèse. Je tiens à remercier Jalal Fadili de m'avoir accueilli à Caen.

J'ai pu évoluer dans un excellent cadre de travail grâce aux équipes d'image de l'IMB et l'IMS. Je remercie les membres des équipes pour les échanges aussi bien professionnels qu'extra-professionnels. Merci plus particulièrement aux doctorants de l'IMB, Bruno, Samuel, Allan, Zoé, Fabien, Marie, J-B, Pierre, Louis, Thomas, Alice, Elza, Vasilei et j'en oublie... pour l'ambiance, les soirées, les sorties,... Spéciale dédicace au bureau 259 et feu 155. Merci à mes co-bureaux Camille et Romain d'avoir rendu cette thèse encore plus agréable et surtout de m'avoir supporté. Je sais que cela n'a pas toujours été facile.

Je tiens particulièrement à remercier ma mère, ma famille et surtout ma compagne Camille qui m'a soutenue dans les bons moments et les moins bons. Tu es exceptionnelle. Merci d'illuminer ma vie. Et Merci à mon adorable fils d'avoir facilité la rédaction de ce manuscrit.

## Résumé

Cette thèse étudie différents problèmes de minimisations avec des fonctions de régularisation qui promeuvent la parcimonie. Plus précisément, on souhaite reconstruire un signal, que l'on suppose parcimonieuse et qui a subi une transformation par un opérateur linéaire, à l'aide de problèmes de minimisation. Dans ce manuscrit, on s'intéressera plus particulièrement à la minimisation  $\ell^1$  synthèse, analyse et bloc qui sont très utilisées pour reconstruction un signal que l'on sait parcimonieuse. Ces minimisations produisent en pratique des résultats convaincants qui n'ont été compris théoriquement que récemment. Les différents travaux sur le sujet mettent en évidence le rôle d'un vecteur particulier appelé *certificat dual*. L'existence d'un certificat dual permet à la fois d'assurer la reconstruction exacte d'un signal dans le cas où il n'y a pas de perturbation et d'estimer l'erreur de la reconstruction en présence de perturbation. Dans nos travaux, nous allons introduire l'existence d'un *certificat dual optimal* pour la minimisation  $\ell^1$  synthèse qui minimisent l'erreur de reconstruction. Ces résultats ayant une forte interprétation géométrique, nous avons développé un critère d'identifiabilité, c'est à dire que ce critère assure que l'image recherchée est l'unique solution du problème de minimisation. Ce critère permet d'étendre nos travaux à la minimisation  $\ell^1$  analyse,  $\ell^1$  bloc et à d'autres cas.

## Mots-clefs

Traitement d'images, parcimonie, minimisation  $\ell^1$  synthèse, minimisation  $\ell^1$  analyse, minimisation  $\ell^1$  bloc, polytopes, jauges, certificat dual



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Inversion parcimonieuse . . . . .	2
1.1.1	Minimisation $\ell^1$ synthèse . . . . .	3
1.1.2	Minimisation $\ell^1$ analyse et bloc . . . . .	6
1.2	Robustesse . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>13</b>
2.1	Éléments de géométrie des convexes . . . . .	15
2.2	Tomodensitométrie . . . . .	21
2.2.1	Principe physique et Modélisation . . . . .	22
2.2.2	Tomographie à faible nombres de vues . . . . .	23
2.2.3	Algorithmes d'inversion . . . . .	23
<b>I</b>	<b>Identifiabilité</b>	<b>29</b>
<b>3</b>	<b>Modèle géométrique</b>	<b>31</b>
3.1	État de l'art . . . . .	33
3.2	Identifiabilité . . . . .	34
3.2.1	Bases indexées et supports associés . . . . .	38
3.3	Discussion avec l'état de l'art . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Cas particuliers et algorithmes associés</b>	<b>45</b>
4.1	Régularisation parcimonieuse de type synthèse . . . . .	46
4.1.1	Condition Source . . . . .	46
4.1.2	Interprétation géométrique . . . . .	48
4.1.3	Certificats duaux . . . . .	51
4.2	Régularisations avec des jauges de polytopes et régularisations à l'analyse . . . . .	53
4.2.1	Régularisations avec des jauges de polytopes . . . . .	53



TABLE DES MATIÈRES

4.2.2	Cas particulier : Minimisations $\ell^1$ analyse . . . . .	58
4.3	Régularisation parcimonieuse de type bloc . . . . .	63
<b>II</b>	<b>Robustesse au bruit</b>	<b>71</b>
<b>5</b>	<b>Robustesse dans la régularisation synthèse <math>\ell^1</math></b>	<b>73</b>
5.1	Divergence de Bregman . . . . .	74
5.2	Constante de stabilité optimale et certificat dual optimal . . . . .	75
5.3	Construction du certificat optimal . . . . .	76
5.3.1	Construction géométrique . . . . .	76
5.3.2	Construction gloutonne . . . . .	79
5.4	Résultats numériques . . . . .	83
5.5	Annexes . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Robustesse dans les régularisations avec des jauges de polytopes</b>	<b>97</b>
6.1	Robustesse pour les jauges de polytopes . . . . .	98
6.2	Cas de la minimisation $\ell^1$ analyse . . . . .	100
6.3	Comparaison avec l'état de l'art . . . . .	101
6.4	Annexes . . . . .	101
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>103</b>
	<b>Index</b>	<b>107</b>
	<b>Glossaire</b>	<b>107</b>
	<b>Liste des abréviations, des sigles et des symboles</b>	<b>107</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>116</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>118</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>119</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Dans cette thèse, nous allons étudier sous quelles conditions un signal qui a subi une transformation et possiblement une perturbation peut être reconstruit par une certaine classe de problèmes d'optimisation. On va considérer un signal ou une image  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Ce signal va subir une transformation que l'on va modéliser par un opérateur linéaire  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Cette modélisation est celle communément choisie en dimension finie pour les applications en traitement du signal et de l'image. On s'intéressera plus particulièrement à l'application des ces problèmes à la tomographie. Cette dernière sera présentée en détail dans le chapitre 2. Après cette transformation linéaire, le signal est transformé en ce que l'on appelle les données observées  $y \in \mathbb{R}^m$ .

Le problème direct est ainsi défini et donne

$$y = \mathbf{A}x^0, \quad (1.1)$$

avec  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  la matrice de projection et  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  l'image que l'on souhaite reconstruire. Ces données peuvent aussi être corrompues ou perturbées et on modélisera ces perturbations par un bruit additif, soit un vecteur bruit  $b \in \mathbb{R}^m$ .

$$y = \mathbf{A}x^0 + b. \quad (1.2)$$

Le problème inverse qui est de reconstruire  $x^0$  à partir des données  $y$  avec une régularisation  $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  s'exprime de différentes manières. Dans le cas non bruité,  $b = 0$ , on résout généralement le problème suivant

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} R(x) \text{ tel que } \mathbf{A}x = y. \quad (1.3)$$

Une fonction de régularisation influence l'ensemble des solutions du problème. Selon la régularisation choisie, un certain type de solution sera privilégié aux dépens des autres. Par conséquent, il est essentiel d'avoir des informations a priori sur l'objet que l'on cherche à reconstruire, sa structure et/ou ces propriétés physiques,

et la fonction de régularisation  $R$  doit être choisie en fonction de ces connaissances. Dans cette thèse, on va s'intéresser aux signaux parcimonieux et on étudiera les problèmes d'optimisation utilisant des fonctions de régularisations promouvant cette parcimonie. On parlera d'inversion parcimonieuse.

## 1.1 Inversion parcimonieuse

Dans beaucoup de domaines comme l'imagerie médicale ou l'analyse des matériaux, la structure des objets étudiés présente, lors d'une coupe transverse, des zones relativement homogènes bien délimitées. De telles coupes vont produire des images dont le gradient sera parcimonieux, c'est à dire que l'image à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  du gradient aura peu de coefficients non nuls. L'imagerie d'un pipeline pétrolier (figure 1.1) par tomodynamométrie va produire une image avec un fond relativement constant et quelques impuretés. Une telle image peut être considérée parcimonieuse avec le fond (noir) qui correspond aux composantes nulles de l'image et le reste (les impuretés) qui sont les composantes non nulles. Par conséquent, il est naturel de choisir des fonctions de régularisation qui vont promouvoir la parcimonie que ce soit la parcimonie du signal ou celle de ses coefficients dans une famille bien choisie.

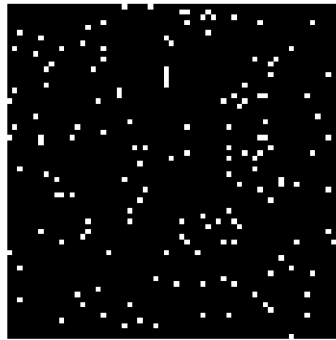


FIGURE 1.1 – Exemple d'une image simulée d'un pipeline

Le caractère parcimonieux d'un vecteur est naturellement promu par la pseudo norme  $\ell^0$

$$\|x\|_0 = \#\{i | x_i \neq 0\} \text{ avec } x \in \mathbb{R}^n \quad (1.4)$$

où  $\#$  est le cardinal d'un ensemble. Elle compte le nombre de composantes non nulles de  $x$ . Pour retrouver un vecteur  $x^0$  que l'on sait parcimonieux, c'est à dire que  $\|x^0\|_0$  est faible, on va résoudre le problème (1.3) avec la régularisation  $R(x) = \|x\|_0$ . Dans ce cas, on parle de minimisation synthèse. En revanche si on sait qu'il est parcimonieux dans une autre représentation c'est à dire que  $\|\mathbf{D}^*x\|_0$  est faible, on utilise la régularisation  $R(x) = \|\mathbf{D}^*x\|_0$  où  $\mathbf{D} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un opérateur linéaire

bien choisi qui via son adjoint envoie  $x^0$  dans un espace où il a une représentation parcimonieuse. On appelle  $\mathbf{D}^*$  l'opérateur d'analyse et par conséquent on parle de minimisation analyse pour le problème (1.3) avec  $R(x) = \|\mathbf{D}^*x\|_0$ . Dans une représentation par blocs, par exemple  $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^p \mathcal{B}_i$  avec  $\mathcal{B}_i \subset \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$  pour tout  $i \neq j$ , le signal  $x^0$  peut être parcimonieux par blocs c'est à dire que les éléments non nuls de  $x^0$  apparaissent dans les sous espaces  $\mathcal{B}_i$ . À la différence de la minimisation synthèse, on ne compte plus les éléments non nuls du signal mais les blocs non nuls. Dans ce cadre, on parle de minimisation par bloc avec la fonction de régularisation  $\|x\|_{0,2} = \#\{i | x_{\mathcal{B}_i} \neq 0\}$  avec  $x \in \mathbb{R}^n$

La résolution de (1.3) soulève plusieurs questions, de stabilité et d'unicité :

- Le problème a-t-il une solution? La solution obtenue est-elle unique? Sous quelles conditions?
- Si on a une solution, peut-on vérifier qu'elle est l'unique solution du problème?

Quand  $x^0$  est l'unique solution de (1.3), on dira qu'il est *identifiable*. Avant de répondre à ces questions, il est important de savoir si on peut résoudre en un coût polynomial (1.3) avec la régularisation  $\ell^0$ . Il a été montré que ce problème est en fait NP-difficile [Nat95].

Pour contourner cette difficulté, des algorithmes gloutons ont été développés tels que le *matching pursuit* (MP) [MZ93], *l'orthogonal matching pursuit* (OMP) [PRK93] et leurs variantes [DT96, Tem00, GV06, SIBD11]. Sous certaines conditions, ces algorithmes peuvent trouver la solution la plus parcimonieuse [Tro04, SGIH13]. De plus, ces algorithmes ont l'avantage d'être rapides mais les garanties de convergence sont limitées. Les conditions qui garantissent que la solution trouvée soit celle qui soit la plus parcimonieuse ne s'appliquent que pour de faibles parcimonies.

Contrairement à un problème convexe où un minimum local est le minimum global du problème, le problème (1.3) avec la pseudo norme  $\ell^0$  n'est pas convexe. Pour pallier cela, il a été proposé de convexifier le problème, c'est à dire de minorer le problème par un problème convexe. Cette convexification a amené à considérer la norme  $\ell^1$  :  $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ . Dans la suite, on s'intéressera à cette minimisation  $\ell^1$  synthèse et aussi aux fonctions convexes de régularisation  $\|\mathbf{D}^*x\|_1$  et  $R(x) = \sum_{i=0}^p \|x_{\mathcal{B}_i}\|_2$  pour la minimisation  $\ell^1$  analyse et la minimisation  $\ell^1$  bloc. Ces problèmes convexes sont ceux que l'on va étudier tout au long de ce manuscrit.

### 1.1.1 Minimisation $\ell^1$ synthèse

En remplaçant  $R$  par la norme  $\ell^1$  dans (1.3), on obtient le problème de minimisation  $\ell^1$  synthèse qui est le suivant

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_1 \text{ s.c. } \mathbf{A}x = y. \quad (1.5)$$

Ce problème peut être reformulé comme un problème de programmation linéaire et on peut ainsi utiliser les algorithmes à disposition pour le résoudre uniquement.

Pour la résolution de ce problème, de nombreux algorithmes ont vu le jour : *Interior-points Methods*[DST<sup>+</sup>07, CR05], *Gradient Projection*[NW<sup>+</sup>07], *Homotopy*[OPT00, MCW05], *Iterative Shrinkage-Thresholding* et *Proximal Gradient* [DDDM04, CW05, BT09, BBC11], *CoSaMP*[NT09], etc...

Suite à la relaxation convexe, il est naturel de se demander sous quelle(s) condition(s) une solution  $x$  est commune à (1.5) et à (1.3) avec  $R(\cdot) = \|\cdot\|_0$ . On n'étudiera pas cette question dans ce manuscrit. Dans le cas d'un problème non bruité, on essaiera de déterminer sous quelle(s) condition(s) un signal  $x^0$  est une solution du problème et sous quelle(s) conditions il est l'unique solution de (1.5). Dans ce dernier cas, on dira qu'il est identifiable via ce problème.

Au fil des années, un nombre conséquent de travaux ont été menés pour tenter de répondre à cette problématique dans le cas de la minimisation  $\ell^1$  synthèse. La littérature sur le sujet étant exhaustive, seuls les principaux résultats seront présentés ainsi que leur possible application dans le cas d'un opérateur de projection tomographique de type transformée de Radon discrète. Les différentes conditions d'identifiabilité peuvent être regroupées dans deux grandes catégories : Les conditions uniformes et non uniformes.

### Conditions uniformes

Une majorité des travaux traitant de cette problématique s'est concentrée la recherche de propriétés d'uniformité sur  $\mathbf{A}$  qui assurent l'identifiabilité de tous les signaux qui ont une parcimonie inférieure à une borne définie.

Une première approche liée à la recherche de conditions sur le problème avec la pseudo norme  $\ell^0$  a été de considérer le *spark* [DE03] d'une matrice. Le *spark* d'une matrice  $\mathbf{A}$  est le plus petit nombre de colonnes de  $\mathbf{A}$  qui sont linéairement dépendantes :  $\text{spark}(\mathbf{A}) = \min \|z\|_0$  pour  $z \in \text{Ker } \mathbf{A}$ . Le *spark* [DE03] nous donne un critère simple d'unicité de la solution du problème.

L'inconvénient principal du *spark* d'une matrice est que son calcul est aussi difficile que de résoudre (1.3) avec  $\ell^0$ .

Une autre approche a été d'étudier l'identifiabilité au travers de la *cohérence mutuelle* [MZ93, DH01, DE03]. La *cohérence mutuelle*  $\mu$  d'une matrice  $\mathbf{A}$  est la valeur absolue du produit scalaire normalisé entre les différentes colonnes de  $\mathbf{A}$  la plus élevée

$$\mu(\mathbf{A}) = \max_{\substack{A \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \frac{|\langle a_i, a_j \rangle|}{\|a_i\| \|a_j\|}, \quad (1.6)$$

où  $a_i$  est la  $i$ -ème colonne de  $\mathbf{A}$ . La *cohérence mutuelle* est une manière de caractériser la dépendance entre les colonnes de la matrice. Plus facile à calculer que le *spark*, elle donne aussi une borne inférieure à ce dernier.

**Lemme 1.1.1** ([DE03]). *Pour toute matrice  $\mathbf{A}$ ,*

$$\text{spark}(\mathbf{A}) \geq 1 + \frac{1}{\mu(\mathbf{A})}. \quad (1.7)$$

## Chapitre 1. Introduction

Cela permet l'unicité de toute solution  $x^*$  vérifiant  $\|x^*\|_0 < \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\mu(\mathbf{A})})$  [DE03, EB02, GN03, Fuc04]. Elle n'est vérifiée que pour des signaux de faible parcimonie dans le cas de matrices déterministes.

Dans le cadre de l'échantillonnage compressé, une nouvelle approche a été élaborée. Elle s'appuie sur la *propriété d'isométrie restreinte* (RIP pour restricted isometry property) [CT05, Can08]. On définit la constante d'isométrie  $\delta_s$  comme la plus petite valeur telle que

$$(1 - \delta_s)\|x\|^2 \leq \|\mathbf{A}x\|^2 \leq (1 + \delta_s)\|x\|^2 \quad (1.8)$$

est vérifiée pour tous vecteurs  $s$ -parcimonieux  $x$  c'est à dire les vecteurs  $x$  tels que  $\|x\|_0 = s$ . Elle permet d'évaluer à quel point la matrice  $\mathbf{A}$  se comporte comme une isométrie pour les signaux parcimonieux. De cette constante découle un théorème d'identification qui assure une reconstruction exacte du signal  $x^0$  si le signal est  $s$ -parcimonieux et  $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$ . Une des principales difficultés du *RIP* est le calcul des constantes d'isométrie. De plus, elle ne donne des résultats intéressants que pour des matrices aléatoires.

En général, les conditions uniformes sont restrictives. Pour une meilleure compréhension du problème, il est nécessaire de l'étudier plus localement.

### Conditions non-uniformes

Les conditions uniformes offrent des bornes souvent pessimistes. Elles s'appliquent sur des signaux dont la parcimonie est basse et, par conséquent, n'expliquent pas pourquoi la minimisation  $\ell^1$  synthèse permet reconstruire un signal donné. Pour pouvoir couvrir un spectre plus large de signaux, des signaux déterministes et ayant des parcimonies plus élevées, il est nécessaire d'étudier localement le problème. Au lieu de ne regarder que les propriétés de la matrice  $\mathbf{A}$ , on va s'intéresser plus aux propriétés du signal  $x^0$  relativement à  $\mathbf{A}$ . Les travaux de ce manuscrit s'inscrivent dans cette catégorie.

Un des premiers critères à avoir été développé est basé sur l'*Exact Recovery Coefficient* (ERC) [Tro06]. A partir d'un ensemble d'indices  $I$ , on définit l'ERC comme

$$ERC(I) = \max_{j \notin I} \|(\mathbf{A}_I^* \mathbf{A}_I)^{-1} \mathbf{A}_I^* a_j\|_1 \quad (1.9)$$

sous réserve d'inversibilité de  $\mathbf{A}_I^* \mathbf{A}_I$ . Pour un signal  $x^0$  dont le support est  $\text{supp}(x^0) = I$ , l'ensemble d'indices des composantes non nulles de  $x^0$ , l'ERC permet d'obtenir des conditions d'identifiabilité de  $x^0$  qui dépendent de la structure de son support.

**Théorème 1.1.2** ([Tro06]). *Soit un vecteur  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\text{supp}(x^0) = I$ . Si  $ERC(I) < 1$ , alors  $x^0$  est l'unique solution de (1.5)*

De plus, comme le RIP, l'ERC permet d'obtenir des résultats de robustesse au bruit quand  $ERC(I) < 1$ . Cette condition a l'avantage d'assurer à la fois l'identifiabilité d'un signal et la stabilité du problème en cas de perturbations. Une version

affaiblie le *Weak Exact Recovery Coefficient* (WERC) [Dos05, DM05] obtient des résultats a peu près similaires.

Fuchs [Fuc04] a développé un nouveau critère issu des conditions d'optimalité de (1.5). Pour un vecteur  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $I = \text{supp}(x^0)$ , on l'appellera

$$F(x^0) = \max_{j \notin I} |\langle a_j, \mathbf{A}_I^{+*} \text{sign}(x^0) \rangle| \quad (1.10)$$

où  $\mathbf{A}_I$  est la matrice composée uniquement des colonnes  $\mathbf{A}$  indicées par  $I$ . A partir de  $F$ , il est possible de déduire un critère d'identifiabilité.

**Théorème 1.1.3** ([Fuc04]). *Soit un vecteur  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Si  $F(x^0) < 1$ , alors  $ERC(I) < 1$ .*

On peut constater que  $ERC(I) = \max_{\text{supp}(x)=I} F(x)$ .

A partir des conditions d'optimalité de (1.5), il est possible d'extraire des critères liés à certains vecteurs particuliers appelés *certificats duaux* qui donnent des conditions nécessaires et suffisantes de l'identifiabilité d'un vecteur. Plus précisément, ces vecteurs doivent vérifier la condition source.

**Définition 1.1.4.** *Un certificat dual pour un  $x \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur  $\eta \in \mathbb{R}^m$  tel qu'il vérifie la condition source soit*

$$\mathbf{A}^* \eta \in \partial \|x\|_1.$$

Renforcée par une hypothèse d'injectivité restreinte sur  $\mathbf{A}$  et une condition source non dégénérée, on en déduit une condition d'unicité d'une solution. Derrière la condition de Fuchs  $F$  et l'ERC se cachent des certificats duaux. On développera ce cas plus précisément dans le chapitre 4.1.

Donoho [Don05] a mis en évidence une équivalence entre le problème (1.5) et la géométrie des polytopes. Il en a déduit des conditions d'identifiabilité topologique dans le cas d'une matrice  $\mathbf{A}$  aléatoire. Malheureusement dans le cas de notre matrice de projection, on ne peut utiliser ce résultat. En revanche, le lien avec la géométrie des polytopes va être au cœur de nos résultats.

Certains signaux peut avoir une structure particulière ou être parcimonieux dans un autre espace (ou une autre représentation). Pour ces signaux, d'autres régularisations sont plus adaptées.

## 1.1.2 Minimisation $\ell^1$ analyse et bloc

Contrairement à la minimisation synthèse, la minimisation analyse intègre un opérateur dans la norme que l'on appelle opérateur d'analyse. Cette opérateur d'analyse envoie le signal dans un espace d'analyse où sa parcimonie est évaluée. Cela revient à traiter du problème (1.3) avec  $\|\mathbf{D}^* \cdot\|_1$  et  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times d}$  soit en reprenant le cadre d'étude précédent :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{D}^* x\|_1 \text{ s.c. } \mathbf{A}x = y. \quad (1.11)$$

## Chapitre 1. Introduction

On remarque que le problème d'analyse est plus général que le problème de synthèse. En effet, en prenant l'identité comme opérateur d'analyse, on retrouve le problème de synthèse. Ce problème couvre un cadre large de problèmes comme la célèbre variation totale introduite dans [ROF92]. Dans ce cas, l'opérateur d'analyse est l'opérateur de différences finies. D'autres opérateurs d'analyse ont été étudiés comme la transformée en ondelettes invariantes par translation [SWB<sup>+</sup>04], l'union de bases ou encore le *Fused Lasso* [TSR<sup>+</sup>05]. On peut trouver un point de comparaison avec la synthèse pour des opérateurs redondants dans [SF09].

Pour certains signaux dont ceux présentant une certaine structure, la minimisation  $\ell^1$ -bloc ou la norme  $\ell^1 - \ell^2$  est souvent utilisée pour exploiter au maximum cette structure. L'espace du signal  $\mathbb{R}^n$  est partitionné en bloc, soit une décomposition orthogonale de  $\mathbb{R}^n$  en somme directe de sous-espaces mutuellement orthogonaux que l'on appelle *blocs* :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^p \mathcal{B}_i. \quad (1.12)$$

La norme  $\ell^1 - \ell^2$  de  $x$  est

$$\|x\|_{1,2} = \sum_{i=1}^p \|x_{\mathcal{B}_i}\|_2, \quad (1.13)$$

où  $x_{\mathcal{B}_i}$  est le projeté de  $x$  sur  $\mathcal{B}_i$ . Dans les problèmes blocs, on étudie la parcimonie des blocs, c'est à dire les quelques blocs non-nuls et on essaie de retrouver la structure du signal. La littérature sur le sujet est vaste [Bac08, CH08, LZ09, RF08, WH10, YL06].

La plupart des travaux sur la minimisation  $\ell^1$  synthèse ont été étendus aux problèmes utilisant ces deux fonctions de régularisation. Par exemple, la *cohérence mutuelle* avec la *bloc cohérence* [EKB10] et les conditions RIP avec le *Bloc RIP* [EM09] et *D-RIP* [CENR11, NW13]. Inspirée par les résultats sur la minimisation synthèse, la majorité de ces travaux de généralisation se sont basés sur les conditions non uniformes et plus précisément sur la condition source.

Dans la minimisation bloc, le support du signal sont les indices de blocs non nuls. Dans le contexte de la minimisation  $\ell^1$  analyse, on ne s'intéresse plus au support mais à son complément : le co-support. On dérive de la condition source un critère d'identifiabilité lié au co-support. Comme, la parcimonie est évaluée dans l'espace d'analyse, on définit le **D**-support

**Définition 1.1.5.** *Le **D**-support d'un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'ensemble  $I$  tel que*

$$I = \text{supp}(\mathbf{D}^*x) \subset \{1, \dots, d\} \quad (1.14)$$

*et son co-support est  $J = I^c$*

On définit ainsi le co-espace  $\text{Ker } \mathbf{D}_J^*$  qui est introduit et étudié dans [NDEG13]. Ces derniers fournissent une condition d'identifiabilité dans le cas analyse. Vaiter et al [VPDF13] étendent les résultats de Fuchs [Fuc04] au cas analyse et assurent la



reconstruction du support et du signe d'une solution à l'aide d'un critère d'irreprésentabilité généralisé de Fuchs.

La plupart des travaux assurent l'unicité d'une solution à l'aide d'une condition source c'est à dire que pour un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe un certificat dual  $\eta \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$\eta \in \text{Im}(\mathbf{A}^*) \cap \partial R(x)$$

Dans ces différents travaux, les auteurs proposent des conditions d'identifiabilité basée sur la condition source non dégénérée pour des classes de fonctions de régularisations plus générales qui incluent les problème synthèse, analyse et bloc. Candès et al [CR13] énonce une condition d'identifiabilité basé sur la condition source pour des fonctions de régularisations qui sont des normes décomposables ( $\ell^1$  synthèse et bloc). Vaiter et al [VGFP15] étendent ces travaux pour une classe plus large de régularisateurs, les fonctions convexes partiellement lisse par rapport à une variété linéaire, incluant les trois régularisations (synthèse, analyse et bloc). Ils en déduisent une condition source non dégénérée soit pour un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe un certificat dual  $\eta \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$\mathbf{A}^*\eta \in \text{ri}(\partial R(x)),$$

où  $\text{ri}(C)$  est l'intérieur relatif à l'enveloppe affine de l'ensemble  $C$ . De là, ils généralisent le critère d'irreprésentabilité de Fuchs et qui dans le cas de la minimisation  $\ell^1$  analyse est équivalent à celui de [VPDF13]. Ce critère garantit l'unicité d'une solution et la robustesse à petit bruit.

Dans le même esprit que Donoho [Don05] et Chandrasekaran et al [CRPW12], on s'est intéressé à la représentation géométrique du problème pour les minimisation  $\ell^1$  synthèse, analyse et bloc. Ces trois régularisations s'expriment comme des jauges d'ensembles convexes. Pour cela, on considère des fonctions de régularisation qui sont des jauges définissant une norme. Cette classe de fonctions incluent les normes  $\|\cdot\|_1$  (synthèse) et  $\|\cdot\|_{1,2}$  (bloc). Pour la pseudo norme  $\|\mathbf{D}\cdot\|_1$ , elle n'est une norme que pour un opérateur d'analyse  $\mathbf{D}$  surjectif. Il a d'abord fallu reformuler la condition nécessaire et suffisante de minimalité en fonction de la géométrie du problème. Il en a découlé une condition nécessaire et suffisante d'unicité. Ces résultats sont présentés plus en détail dans le chapitre 3. Dans le chapitre 4, on applique ces résultats au cas synthèse, bloc et aux jauges d'un polytope et on propose des algorithmes pour calculer ces conditions d'identifiabilité. On étudie les jauges de polytopes pour les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\mathbf{D}\cdot\|_1$  pour un opérateur  $\mathbf{D}$  surjectif dont les boules unités sont des polytopes.

Ces différentes fonctions de régularisations permettent de reconstruire un signal sans la présence de bruit mais qu'en est-il en présence de perturbations ?

## 1.2 Robustesse

L'identifiabilité d'un signal dans le cadre précédent est évalué en l'absence de perturbations. Dans la réalité, il arrive souvent que le signal subisse des perturbations soit par des éléments extérieurs ou du fait de la faible qualité du capteur par exemple. Dans le cas de la tomodensitométrie, plusieurs causes peuvent apparaître : la modélisation du faisceau de rayons X qui ne prend pas en compte l'épaisseur du faisceau, la diffraction du faisceau ou la qualité des capteurs. Toutes ces perturbations vont venir brouter les mesures. Ces perturbations peuvent se modéliser de différentes façons.

Dans la majorité des cas, on considère un bruit additif c'est à dire que pour des données  $\mathbf{A}x^0$ , les données bruitées sont  $y = \mathbf{A}x^0 + b$  où  $b \in \mathbb{R}^m$  représente le bruit. On considère ainsi le problème direct (1.2). Pour des problèmes de stabilité, on ne résout plus le problème (1.3) mais plutôt le problème d'approximation suivant

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} R(x) \text{ s.c. } \|\mathbf{A}x - y\| \leq \delta. \quad (1.15)$$

Dans ce cas, on ne recherche plus à reconstruire exactement le signal d'origine  $x^0$  mais une approximation de ce dernier  $x^\delta$ . Une nouvelle problématique se pose : évaluer à quel point  $x^\delta$  est proche de  $x^0$ . Pour cela, on va estimer l'erreur de reconstruction entre le signal d'origine et l'approximation au sens de la norme  $\ell^2$  :

$$\|x^\delta - x^0\| = O(\|b\|). \quad (1.16)$$

Le O-terme masque une constante qui dépend en général du signal d'origine  $x^0$  et de  $\mathbf{A}$  et le paramètre  $\delta$  est choisi en fonction du niveau de bruit.

On va chercher des conditions suffisantes sous lesquelles les solutions du problème (1.15) permettent d'atteindre ce type de borne sur l'erreur de reconstruction. Comme on le verra, ces conditions suffisantes sont aussi des conditions suffisantes d'identifiabilité dans le cas non bruité.

Dans le cas de la minimisation synthèse, différents critères permettent de déduire une erreur de reconstruction. Il est à noter que les conditions uniformes, quand elles sont vérifiées, permettent d'établir des bornes de stabilité des solutions de (1.15). Par exemple, sous la condition RIP, Candès et al [CRT06] déduisent une borne de cette erreur. Les bornes de robustesse sont majorées par des coefficients faibles mais elles ne sont malheureusement valables que pour de petits degrés de parcimonie dans le cas d'opérateurs déterministes.

Il existe aussi des bornes de robustesse au bruit dans le cas de conditions non uniformes comme Tropp [Tro06] qui en déduit une quand l'ERC est vérifiée. Les résultats plus récents sont donnés sous condition source non dégénérée et avec hypothèse d'injectivité sur une restriction de l'opérateur  $\mathbf{A}$  (hypothèse de restrictivité injective) [GSH11, Gra11, VGFP15, VPDF13]. Ces résultats sont dépendants du

certificat dual trouvé. Ces résultats s'appliquent directement au cas de la minimisation  $\ell^1$  ou à des minimisations avec des classes plus générales de fonctions de régularisations qui incluent la minimisation  $\ell^1$  synthèse. Grasmair [Gra11], pour des fonctions de régularisations convexes, borne l'erreur de reconstruction.

La plupart des résultats sur la minimisation  $\ell^1$  synthèse ont été étendus au cas analyse et au cas bloc comme le RIP avec le D-RIP [CENR11] qui fournit une borne de l'erreur de reconstruction. De même que dans le cas synthèse, les résultats obtenus ne s'appliquent que sur une faible proportion de signaux.

Comme dans le cas synthèse, l'immense majorité des résultats les plus récents sur l'estimation de l'erreur de reconstruction sont déduits de la condition source non dégénérée et de l'hypothèse de restrictivité injective [Gra11, VPDF13, VGFP15, Vai14, Hal13]. Les majorations de l'erreur sont des extensions de celles obtenues dans le cas de la minimisation synthèse avec une norme d'opérateur sur la matrice d'analyse en plus et de même dépendent des certificats duaux.

En effet, les bornes de robustesse dans le cas bruité estimées sous une condition source non dégénérée dépendent de  $\mathbf{A}$ , du "support" (différent selon les régularisations) et des certificat duaux :  $\|x^* - x^0\| \leq C(\mathbf{A}, I, \eta)\|b\|$  où  $x^*$  est la solution de (1.15) pour  $\delta = \|b\|$  et  $b \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur bruit non nul. Dans ce manuscrit, on recherche le certificat dual qui minimise cette constante. On l'appellera le *certificat dual optimal*. Dans le chapitre 5, on prouve qu'il existe un certificat dual optimal qui minimise cette estimation et qui vérifie la condition source non dégénérée pour une norme  $\ell^1$  (synthèse). Pour cela, on démontre que la minimisation de la constante  $C(\mathbf{A}, I, \eta)$  est équivalent à maximiser la distance entre un certain point et un ensemble convexe. On propose des algorithmes pour construire ce certificat dual optimal que l'on applique au cas de la tomodensitométrie. Dans le chapitre 6, on étend ces résultats au cas des jauges de polytopes en explicitant de nouveau cette distance qui est calculable avec le même algorithme que dans le cas synthèse.

Le manuscrit est organisé autour de deux parties qui sont l'identifiabilité et la robustesse. Un chapitre 2 rappelle les notions mathématiques sur les polytopes et l'analyse convexe utiles à la compréhension des différents résultats ainsi qu'un rappel sur la tomodensitométrie.

La première partie de ce manuscrit regroupe deux chapitres. Dans le premier, chapitre 3, on présente une interprétation géométrique du problème et une condition nécessaire et suffisante d'identifiabilité pour une classes de fonctions de régularisation qui sont les jauges d'un convexe telles que ces jauges définissent une norme. Dans le second, chapitre 4, on explicite et propose des algorithmes pour vérifier les conditions d'identifiabilité à ces différents cas.

Dans la deuxième partie qui regroupe deux chapitres, on va étudier la robustesse au bruit de ses minimisations. Dans un premier chapitre, chapitre 5, on prouve l'existence du *certificat dual optimal* et on explicite deux algorithmes pour le calculer.

## Chapitre 1. Introduction

Dans le deuxième, chapitre 6, on explicite des bornes de robustesse pour des jauges de polytopes.



# Chapitre 2

## Préliminaires

### Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Éléments de géométrie des convexes</b>	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>Tomodensitométrie</b>	<b>21</b>
2.2.1	Principe physique et Modélisation	22
2.2.2	Tomographie à faible nombres de vues	23
2.2.3	Algorithmes d'inversion	23

Dans ce chapitre nous allons rappeler les différents résultats sur les polytopes et d'analyse convexe dont nous aurons besoin pour la suite. À la fin, on rappellera en détail ce qu'est la tomodensitométrie et pourquoi les méthodes variationnelles peuvent être utiles. On commencera par rappeler quelques notations utiles.

Dans toute la suite, l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  représentera l'espace du signal et  $\mathbb{R}^m$  l'espace des observations ou des données.  $(e_i)_{i=1,\dots,n}$  représente la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et pour un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ , sa  $i$ -ème composante est noté  $x_i$  et  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ .  $\mathbb{R}^n$  est un espace euclidien doté du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  associé à la norme  $\ell^2$  sur  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\forall x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n, \langle x^1, x^2 \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^1 x_i^2.$$

On note la norme  $\ell^p$  pour  $p$  entier et  $p \geq 1$  tel que pour  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_i|^p}$$

L'ensemble  $\text{supp}(x) = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid x_i \neq 0\}$  est le support de  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\text{sign}(x) = [\text{sign}(x_i)]_{i=1,\dots,n}$  avec  $\text{sign}(x_i) = 0$  pour  $x_i = 0$  est le vecteur signe de  $x$ . Pour un sous-ensemble  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , on note  $\#(I)$  le cardinal de  $I$  et on écrit  $x_I$  la restriction de  $x$  à ses composantes indexées par  $I$ .

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  représente la matrice de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^m$ , et  $a_i = \mathbf{A}e_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) les colonnes de  $\mathbf{A}$ . De plus, pour un sous ensemble  $I \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathbf{A}_I$  est la sous

matrice de  $\mathbf{A}$  dont les colonnes sont  $(a_i)_{i \in I}$ . On note  $\mathbf{A}^*$  l'adjoint de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^+$  la pseudoinverse de Moore-Penrose de  $\mathbf{A}$ . Si  $\mathbf{A}$  est injective, alors  $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^*$ . En particulier, si  $x$  est un vecteur, alors

$$x^+ = x^* / \|x\|_2^2$$

La norme d'opérateur ou norme matricielle subordonnée  $p, q$  de la matrice  $\mathbf{A}$  est

$$\|\mathbf{A}\|_{p,q} = \max_{x \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}x\|_q}{\|x\|_p} \text{ et } \|\mathbf{A}\|_{p,p} = \|\mathbf{A}\|_p.$$

On note que  $\|\mathbf{A}\|_{1,2} = \max_i \|a_i\|_2$  et si  $\mathbf{A}$  est injective,  $\|\mathbf{A}^+\|_2 = \sqrt{\|(\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1}\|_2} = \rho((\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1})^{1/2}$  où  $\rho(\mathbf{A})$  est le rayon spectral de  $\mathbf{A}$ .

Pour un sous-espace  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ , on note  $\pi_K$  la projection orthogonale sur  $K$  et  $\mathbf{A}_K = \mathbf{A} \pi_K$ .

$\text{Ker } \mathbf{A}$  est le noyau de l'opérateur  $\mathbf{A}$  soit

$$\text{Ker } \mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}x = 0\}.$$

Soit  $C$  un sous-ensemble convexe de  $\mathbb{R}^n$ , on note  $\iota_C$  la fonction indicatrice,

$$\iota_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note respectivement  $\text{Lin}(C)$ ,  $\text{Aff}(C)$  et  $\text{Conv}(C)$ , l'enveloppe linéaire, l'enveloppe affine et l'enveloppe convexe de  $C$ .

On note  $\text{int}(C)$  l'intérieur de  $C$  et  $\text{ri}(C)$  son intérieur relatif.  $\text{ri}(C)$  est l'intérieur de  $C$  pour la topologie relative à son enveloppe affine.

Soit  $C \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble convexe.  $\partial C = C \setminus \text{int}(C)$  est le bord de  $C$ .

Soit une fonction  $f$  de  $E$  vers  $F$ , son domaine est l'ensemble  $\text{dom } f = \{x \in E \text{ tel qu'il existe } y \in F \text{ et } y = f(x)\}$ . Pour les fonctions non différentiables, il est utile de considérer leur sous différentielle en un point.

**Définition 2.0.1** (Sous différentielle). *La sous différentielle  $\partial f(x)$  d'une fonction convexe  $f$  au point  $x \in \text{dom } f$  est l'ensemble convexe*

$$\partial f(x) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid f(x') \geq f(x) + \langle u, x' - x \rangle, x' \in \text{dom } f\}.$$

**Définition 2.0.2** (Divergence de Bregman). *Soit  $u \in \partial f(x')$ , la divergence de Bregman associée à la fonction convexe  $f$  au point  $x' \in \text{dom } f$  est*

$$D_f^u(x, x') = f(x) - f(x') - \langle u, x - x' \rangle.$$

La divergence de Bregman est utilisée dans l'élaboration de bornes de robustesse au bruit.

## Chapitre 2. Préliminaires

Soit  $C$  un ensemble convexe de  $\mathbb{R}^n$ , on appelle  $\gamma_C$  la jauge de  $C$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^n$  par  $\gamma_C(x) = \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha C\}$  et  $\gamma_C(x) = +\infty$  si le minimum n'est pas atteint.

On notera  $\mathcal{H}_\eta$  le sous-espace dans  $\mathbb{R}^n$  de direction normale  $\eta$

$$\mathcal{H}_\eta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \eta, x \rangle = 0\} = \eta^\perp, \quad (2.1)$$

et  $H_\eta$  l'hyperplan affine de  $\mathbb{R}^n$

$$H_\eta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \eta, x \rangle = 1\}. \quad (2.2)$$

Pour un  $\eta$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on a le lien suivant

$$H_\eta = \eta^{+,*} + \mathcal{H}_\eta. \quad (2.3)$$

On note  $\mathcal{D}$  la distance euclidienne entre deux sous espaces de  $E$  et  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\mathcal{D}(E, F) = \inf_{\mathbf{e} \in E, \mathbf{f} \in F} \|\mathbf{e} - \mathbf{f}\|_2, \quad (E, F \subset \mathbb{R}^n).$$

Si  $H$  est un sous-espace affine, on note  $\text{Dir}(H)$  sa direction et

$$\text{Dir}(H) = H - \mathbf{h}$$

pour un  $\mathbf{h}$  dans  $H$ .

## 2.1 Éléments de géométrie des convexes

Dans cette section, on rappelle des résultats qui nous seront utiles dans la suite ([HUL13, Chap III], [Roc15, 17-19], [Zie95]).

**Définition 2.1.1** (Ensemble absorbant). *Tout partie  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  est dite absorbante si pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que*

$$|\lambda| \leq \alpha \Rightarrow \lambda v \in U.$$

Dans la suite, on ne va considérer que des ensembles absorbants, plus précisément des ensembles qui contiennent 0 dans leur intérieur. De plus, on considérera ces ensembles fermés et bornés.

**Proposition 2.1.2.** *Soit  $C$  un ensemble convexe fermé et borné de  $\mathbb{R}^n$  qui contient l'origine dans son intérieur, alors la jauge  $\gamma_C$  n'a que des valeurs finies et ne s'annule qu'à l'origine.*

**Proposition 2.1.3.** *Soit  $C$  un ensemble convexe contenant l'origine et soit  $\gamma_C$  la jauge de  $C$ , alors*

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \gamma_C(x) \leq 1\}.$$



**Faces et points extrémaux**

**Définition 2.1.4.** Soit  $C$  un ensemble non vide convexe et fermé de  $\mathbb{R}^n$ . Un sous-ensemble  $F \subset C$  est appelé une face de  $C$  si tout segment  $s$  de  $C$ , qui a un point de  $F$  dans son intérieur relatif (l'intérieur relatif de  $s$ ), est entièrement dans  $F$ .

Autrement dit,  $F \subset C$  est une face si pour tout  $x_1, x_2 \in C$  et tout  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  tels que  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$  est dans  $F$  alors  $x_1$  et  $x_2$  appartiennent à  $F$ .

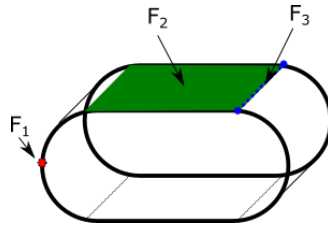


FIGURE 2.1 – Exemples de faces

Une conséquence directe de cette définition est la propriété suivante :

**Proposition 2.1.5.** Soit  $C$  un ensemble non vide convexe et fermé de  $\mathbb{R}^n$  et  $F$  une face de  $C$ . Alors

$$F = \text{Aff}(F) \cap C.$$

On remarque que toute face  $F$  de  $C$  est la trace sur  $C$  d'un sous ensemble affine de  $\mathbb{R}^n$  tangent. La dimension de  $\text{Aff}(F)$  est la dimension de  $F$ . On note  $\mathcal{F}(C)$  l'ensemble des faces de  $C$ . Les faces de  $C$  de dimension 0 sont les points extrémaux de  $C$ . Un point de  $C$  est extrémal si et seulement si il ne peut être exprimé comme une combinaison convexe stricte de deux points de  $C$ . On note  $\text{Ext}(C)$  l'ensemble des points extrémaux de  $C$ .

**Proposition 2.1.6.** Si  $C$  est un compact non vide de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\text{Ext}(C) \neq \emptyset$ .

**Théorème 2.1.7** (Caratheodory). Soit  $S$  une collection de points de  $\mathbb{R}^n$ , tout point  $x$  de  $\text{Conv}(S)$  peut s'écrire comme une combinaison convexe de  $n + 1$  points de  $S$ .

**Théorème 2.1.8.** Soit  $C$  un compact convexe non vide de  $\mathbb{R}^n$ ,  $C$  est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux :  $C = \text{Conv}(\text{Ext}(C))$ .

Le théorème de Minkowski-Weyl précise l'écriture d'un point d'un ensemble convexe fermé par ses points extrémaux.

**Théorème 2.1.9** (Minkowski-Weyl). Soit  $C$  un ensemble convexe fermé, alors tout point de  $C$  peut s'écrire comme une combinaison convexe des points extrémaux de  $C$ .

**Proposition 2.1.10.** Soit  $F$  une face de  $C$  un ensemble non vide convexe et fermé de  $\mathbb{R}^n$ , tout point extrémal de  $F$  est un point extrémal de  $C$ .

## Chapitre 2. Préliminaires

La proposition suivante montre que pour un point  $A$  de l'intérieur relatif d'une enveloppe convexe de points  $(B_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$  et un point  $B_j$  de cette enveloppe, il existe au moins une combinaison convexe incluant strictement  $B_j$  qui permet d'écrire  $A$ .

**Proposition 2.1.11.** *Soit  $F = \text{Conv}\{f_1, \dots, f_k\}$ ,  $(f_i)_{i \in \{1, \dots, k\}} \in \mathbb{R}^n$  et  $x \in F$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- Quel que soit  $j \in \{1, \dots, k\}$ , il existe  $I \subset \{1, \dots, k\}$ ,  $j \in I$  alors  $\exists (\alpha_i)_{i \in I}$ ,  $\alpha_j \neq 0$ ,  $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$ ,  $\alpha_i \geq 0$  tels que  $x = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i$ .*
- $x \in \text{ri}(\text{Conv}\{f_1, \dots, f_k\})$ .*

**Définition 2.1.12.** *Soit  $x$  un point de l'ensemble convexe fermé  $C$ . On note  $F_C(x)$  la face minimale de  $C$  qui contient  $x$  :*

$$F_C(x) := \bigcap_{F \in \mathcal{F}(C), x \in F} F = \underset{\substack{F \in \mathcal{F}(C) \\ x \in F}}{\text{argmin}} \dim(F).$$

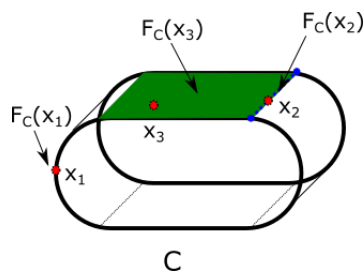


FIGURE 2.2 – Exemples de faces minimales.

Il sera utile dans la suite de considérer une description alternative de la face minimale.

**Proposition 2.1.13.** *Soit  $C$  un ensemble non vide convexe fermé de  $\mathbb{R}^n$  et  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors*

$$F_C(x) = \{u \in C : \exists v \in C, x \in ]u, v[ \}$$

*Démonstration.* On pose  $F$  l'ensemble de droite. D'après la définition d'une face minimale,  $F$  est contenue dans toute face de  $C$  qui contient  $x$ . Il reste juste à prouver que  $F$  est une face de  $C$ .

Soit  $f$  dans  $F$  tel que  $f = \lambda u + (1 - \lambda)v$  pour  $u, v$  dans  $C$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ . On va montrer que  $u$  et  $v$  sont dans  $F$ . Puisque  $f$  est dans  $F$ , il existe  $f' \in C$  et  $\mu \in ]0, 1[$  tels que  $x = \mu f + (1 - \mu)f'$ . Alors

$$x = \lambda\mu u + (1 - \lambda\mu)h$$

avec

$$h = \frac{\mu - \lambda\mu}{1 - \lambda\mu} v + \frac{1 - \mu}{1 - \lambda\mu} f' \in C,$$

ce qui implique que  $u$  est dans  $F$  et  $v$  aussi. On en conclut que  $F$  est une face.  $\square$

Autrement dit, la face minimale de  $x$  est la face qui contient  $x$  et tous les segments fermés qui le contiennent dans leur intérieur relatif.

Une conséquence immédiate de cette caractérisation est que la face minimale d'un  $x$  dans  $C$  est la seule face de  $C$  qui contient  $x$  dans son intérieur relatif.

**Corollaire 2.1.14.** *Soit  $x$  dans  $C$  et  $F \neq \{x\}$  une face de  $C$  qui contient  $x$ . Alors  $x$  est dans l'intérieur relatif de  $F$  si et seulement si  $F = F_C(x)$ .*

**Corollaire 2.1.15.** *Soit  $x$  dans  $C$  et  $u$  un vecteur de  $\text{Aff}(F_C(x))$ . Alors il y a un  $\alpha > 1$  tel que  $\alpha x + (1 - \alpha)u$  est dans  $F_C(x)$ .*

**Proposition 2.1.16.** *Soit  $C$  un ensemble convexe compact non vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{A}$  un opérateur linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ .*

a) Alors

$$\text{Ext}(\mathbf{A}C) \subseteq \mathbf{A}\text{Ext}(C). \tag{2.4}$$

b) Si  $\mathbf{A}|_{\text{vect}(C)}$  est injectif, alors  $\text{Ext}(\mathbf{A}C) = \mathbf{A}\text{Ext}(C)$ .

### Faces exposées

On va décrire une classe particulière des faces d'un ensemble convexe. Ces faces peuvent se définir à l'aide d'hyperplans supports.

**Définition 2.1.17** (hyperplan support et séparateur). *Soit  $C$  un ensemble non vide convexe fermé et  $x$  un point du bord de  $C$ , on dit que  $H_\eta$  est un hyperplan support de  $C$  en  $x$  si  $\langle \eta, x \rangle = 1$  et  $\langle \eta, x' \rangle \leq 1$  pour tout  $x' \in C$ .*

*On dit que c'est un hyperplan séparateur si  $\langle \eta, x \rangle = 1$  et  $\langle \eta, x' \rangle < 1$  pour tout  $x' \in \text{int } C$ .*

**Définition 2.1.18.** *Un sous ensemble non vide  $F$  de  $C$  est une face exposée de  $C$  s'il existe un hyperplan support  $H_\eta$  de  $C$  tel que*

$$F = H_\eta \cap C.$$

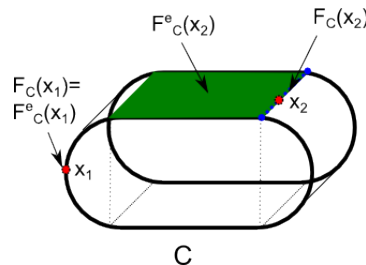


FIGURE 2.3 – Exemples de faces minimales et de faces minimales exposées.  $x^2$  n'a qu'une face exposée.

## Chapitre 2. Préliminaires

Dans le cas où, on a

$$\begin{aligned} \langle \eta, x \rangle &= 1 & (x \in F) \\ \langle \eta, x \rangle &< 1 & (x \in C \setminus F) \end{aligned}$$

$H_\eta$  est un hyperplan séparateur pour la face exposée  $F$ .

Une face exposée est une face. En revanche, l'inverse n'est pas toujours (voir l'exemple de la figure 2.1). Il y a des cas particuliers où les deux notions coïncident comme les polytopes dont toutes les faces sont exposées.

$F$  est une face exposée si  $\text{Aff}(F)$  peut être étendu à un hyperplan avec les mêmes propriétés. Cela arrive quand  $\text{Aff}(F)$  est lui-même un hyperplan. On dira que  $F$  est une hyper-face de  $C$ .

On note  $\mathcal{F}^e(C)$  l'ensemble des faces exposées de  $C$ . On définit pour un point  $x$  frontière de  $C$  la face minimal exposée qui contient  $x$  :

$$F_C^e(x) := \bigcap_{F \in \mathcal{F}^e(C), x \in F} F.$$

**Remarque 2.1.19.** *Pour tout point  $x$  sur la frontière de  $C$ , on a*

$$F_C(x) \subset F_C^e(x).$$

*Plus précisément, la face minimale d'un point contenant  $x$  est une face de la face minimale exposée contenant  $x$ . Par conséquent, dès que l'on a  $F_C(x) \neq F_C^e(x)$ , le point  $x$  est dans l'intérieur relatif de  $F_C(x)$  et sur la frontière de  $F_C^e(x)$ .*

### Ensembles polaires

**Définition 2.1.20** (Ensemble polaire). *Soit  $C$  un ensemble convexe non vide, l'ensemble polaire de  $C$ , noté  $C^\circ$ , est*

$$C^\circ = \{\eta \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in C, \langle \eta, x \rangle \leq 1\}.$$

**Définition 2.1.21** (face polaire). *Soit  $C$  un ensemble convexe contenant l'origine et  $C^\circ$  son polaire, on définit la face exposée polaire  $F_{C^\circ}$  au point  $x$  comme*

$$F_{C^\circ}(x) = \{\eta \in \mathbb{R}^n \mid \eta \in C^\circ \text{ et } \langle \eta, x \rangle = \gamma_C(x)\}.$$

La proposition suivante fait le lien entre la face du polaire d'un ensemble et la sous différentielle de sa jauge associée.

**Proposition 2.1.22** (sous différentielle d'une jauge). *Soit  $C$  un ensemble convexe contenant l'origine, alors*

$$\partial\gamma_C(x) = F_{C^\circ}(x).$$

## Polytopes

Cette section présente un ensemble particulier de convexes : les polytopes. Ils ont la particularité de n'avoir que des faces exposées. Le lecteur pourra trouver des informations complémentaires dans [Zie95].

### Définitions

**Définition 2.1.23** (Polyèdres). *Un polyèdre est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. Un polyèdre  $P$  est un sous espace de  $\mathbb{R}^n$  défini par des hyperplans :*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}x \leq b\}$$

avec  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ . Un polytope est un polyèdre borné.

Il existe plusieurs définitions d'un polytope. Il y a deux représentations communément utilisées. La H-représentation qui définit un polytope comme un polyèdre convexe borné.

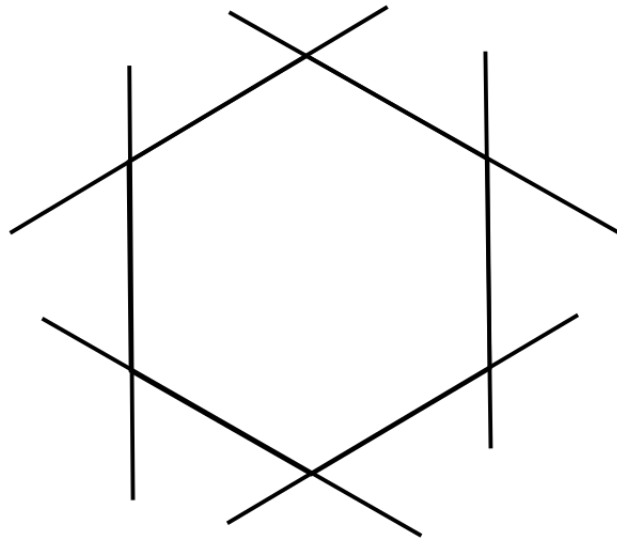


FIGURE 2.4 – H-représentation

Cette représentation permet de manipuler les polytopes à l'aide d'hyperplans supports.

Avec la V-représentation, un polytope est vu comme l'enveloppe convexe d'un ensemble de points.

**Définition 2.1.24** (V-représentation). *Un polytope est l'enveloppe convexe d'un ensemble de points. Un polytope  $P$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $P = \text{Conv}(V_1, \dots, V_N)$  pour  $V_1, \dots, V_N \in \mathbb{R}^n$ .*

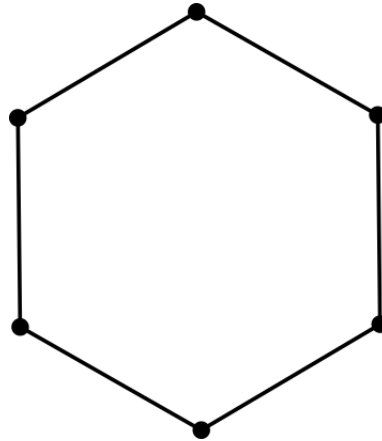


FIGURE 2.5 – V-représentation

Dans tous le reste du document, nous utiliserons cette dernière définition de polytope. De plus, il sera majoritairement question de polytopes contenant l'origine et centro-symétriques.

**Définition 2.1.25.** *Un polytope symétrique par rapport à l'origine est dit centro-symétrique.*

Les deux représentations sont équivalentes. Cela se voit aisément d'un point de vue géométrique mais ce n'est pas trivial.

**Théorème 2.1.26** (théorème 1.1 [Zie95]). *Un sous-ensemble  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  est une enveloppe convexe finie de points (V-représentation) si et seulement s'il existe une intersection finie de sous demi-espaces (H-représentation) le contenant.*

## 2.2 Tomodensitométrie

La tomodensitométrie ou la tomographie à rayons X est une technique d'imagerie non-invasive. Elle permet d'obtenir des informations de l'intérieur d'un objet à partir de mesure effectuées à l'extérieur de cet objet. Elle est aussi connue sous le nom de *CT-Scan* (Computerized-Tomography Scanner). Nous rappelons les principes physiques et mathématiques qui permettent sa mise en œuvre [Rad05, PGM96, Dub98, Dea07, Her09].

### 2.2.1 Principe physique et Modélisation

Dans la pratique, l'objet d'étude est soumis à un balayage d'un faisceau de rayons X. Ce faisceau monochromatique de rayons X subit une transformation énergétique en traversant l'objet.

Les rayons X sont un rayonnement électromagnétique caractérisé par une haute fréquence  $\mu$  et une faible longueur d'onde  $\lambda$ . Comme tout rayonnement électromagnétique, les rayons X sont constitués de photons qui transportent une énergie  $E = h\mu$  où  $h$  est la constante de Planck. Une partie plus ou moins importante de ces photons va être absorbée par les matériaux ou tissus constituant l'objet et va donc entraîner une variation d'énergie. Cette dernière est appelée phénomène d'atténuation.

La longueur d'onde des rayons X étant petite, le rayonnement est ionisé. Il se diffuse donc très peu. Par conséquent, la propagation des rayons X est presque entièrement linéaire.

Plus précisément, le coefficient d'atténuation  $f$  dans un volume élémentaire  $dv$  est défini par la loi d'atténuation

$$\frac{dI}{dv} = -fI, \quad (2.5)$$

où  $I$  est l'intensité du faisceau à l'entrée du volume. Cette loi est communément utilisée pour modéliser les pertes dues à l'absorption et à la diffusion du rayonnement.

En intégrant cette équation sur une droite  $D$  qui représente le trajet linéaire des rayons X et en supposant que l'atténuation est nulle à l'extérieur de l'objet, on obtient l'intensité du faisceau  $I$

$$I = I_0 \exp\left(-\int_D f(x, y) dv\right), \quad (2.6)$$

où  $f(x, y)$  est le coefficient d'atténuation au point de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  dans le cas 2D et  $I_0$  l'intensité initiale à l'entrée de l'objet. L'objectif est de déterminer la valeur de  $f$ .

On génère un faisceau de rayons X à l'aide d'un émetteur et on mesure l'atténuation du faisceau en sortie de l'objet à l'aide du récepteur. Pendant la traversée, le faisceau va traverser différents matériaux ou tissus dans l'objet d'étude et subir ainsi différentes atténuations qui vont se cumuler jusqu'à la sortie de l'objet. On obtient ainsi dans le récepteur une valeur de l'atténuation totale

$$\log\left(\frac{I_0}{I_{\text{fin}}}\right) = \int_D f(x, y) dv. \quad (2.7)$$

L'émetteur fournit une mesure de type projection. Si on prend  $u$  comme le vecteur unité orthogonale à la droite  $D$  tel qu'il forme avec la direction  $v$  de  $D$  une base orientée positivement et  $\theta$  l'angle entre l'axe des abscisses et  $u$ , alors la fonction  $R_f(\theta, u)$  donne la projection  $f$  au point  $(\theta, u)$  :

$$R_f(\theta, u) = \int_{\mathbb{R}} f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) dv. \quad (2.8)$$

Cet opérateur  $R_f$  est la *transformée de Radon* en deux dimensions de la fonction  $f$ .

Pour prendre une série de mesures, on fixe un angle  $\theta$  puis on se déplace sur la droite de direction  $u$ . En tournant autour de l'objet, on acquiert ainsi un ensemble de mesures. On peut les représenter dans un plan d'axes  $(u, \theta)$  que l'on nomme *sinogramme*. On formule ainsi le problème direct.

Différentes machines ont été construites suivant ce modèle d'acquisition. Les premières machines faisaient tourner le dispositif d'acquisition (émetteur-récepteur) autour de l'objet et à chaque angle, ce dispositif était déplacé horizontalement (parallel beam) et effectuait les mesures. Les machines ont évolué en ne déplaçant plus horizontalement le dispositif d'acquisition. Pour cela, elle n'effectue plus de mesures avec des faisceaux parallèles mais plutôt des faisceaux en éventail (fan-beam).

### 2.2.2 Tomographie à faible nombres de vues

La tomodensitométrie est classée dans les méthodes non-invasives mais elle n'est pas non plus sans risque. Le rayonnement X est radioactif ce qui a conduit les hôpitaux à limiter le nombre de scans par an pour un patient afin de lui laisser suffisamment de temps pour absorber la radioactivité et réduire le risque de cancers. Pour réduire la dose de radioactivité, deux approches sont appliquées. La première consiste à réduire l'intensité du faisceau de rayons X ce qui réduit le ratio signal sur bruit. La deuxième solution est de réduire le nombre de mesures ou plus précisément le nombre d'angles. C'est ce dernier cas qui nous intéresse. Réduire le nombre de mesures permet de réduire le temps d'acquisition.

Dans un cadre médical ou non, la réduction du temps d'acquisition permet de faciliter l'imagerie d'objet en mouvement ou l'imagerie tridimensionnelle. Ce faible nombre de prises de mesures a un impact non négligeable sur les méthodes de reconstruction comme on va le voir par la suite. Le choix de la méthode de reconstruction devient critique. Elle doit pouvoir reconstruire l'image  $f(x, y)$  le plus fidèlement possible avec des données incomplètes.

### 2.2.3 Algorithmes d'inversion

Après l'acquisition des différentes mesures représentées par la transformée de Radon de  $f$ , il est nécessaire de reconstruire  $f$  à partir de  $R_f$ . On nomme ce problème *reconstruction tomographique*. On va tout d'abord se placer dans le cas continu sur  $\mathbb{R}^2$  où il existe une inversion analytique directe.

**Théorème 2.2.1** (Théorème centrale de Fourier). *Soit une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et sa transformée de Radon  $R_f$  dans le repère polaire  $(\theta, u)$ . Pour un  $\theta$  fixé, on a*

$$\mathcal{F}_1[R_f(\theta, u)] = \mathcal{F}_2[f(u \cos \theta, u \sin \theta)], \quad (2.9)$$

où  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont respectivement les transformées de Fourier monodimensionnelle sur  $u$  à  $\theta$  fixé et bidimensionnelle.



Ce théorème stipule qu'une projection d'angle  $\theta$  fournit une ligne dans le plan de Fourier de  $f$ . En balayant l'axe défini par  $u$ , la projection d'angle  $\theta$  correspond à une droite d'angle  $\theta$  dans le plan de Fourier de  $f$ .

En remarquant que  $R_f(\theta, u) = R_f(\theta + \pi, -u)$ , l'ensemble de mesures pour  $\theta = [0, \pi[$  et  $u \in \mathbb{R}$  couvre la totalité du plan de Fourier de  $f$  en coordonnées polaires. En faisant une transformée de Fourier inverse, on reconstruit  $f$ . On a ainsi l'inversion directe de la transformée de Radon.

Une autre façon d'inverser la transformée de Radon est d'utiliser la rétroprojection (ou l'épandage). L'opérateur de rétroprojection  $B$  est la rétroprojection de toutes les projections :

$$B(R_f)(x, y) = \int_0^\pi h_\theta(x, y) d\theta \quad (2.10)$$

$$= \int_0^\pi R_f(\theta, x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \quad (2.11)$$

où  $h_\theta(x, y)$  est la rétroprojection en  $(x, y)$  d'une projection. Cette rétroprojection simple ne reconstruit pas l'image d'origine  $f$  mais une image avec des artefacts. On peut montrer qu'elle fournit une image convoluée. Plus précisément,  $B(R_f)$  peut être formulé comme une convolution avec  $h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$  (Transformée de Riesz-Hilbert) :

$$B(R_f)(x, y) = (f * h)(x, y). \quad (2.12)$$

De plus, l'opérateur de rétroprojection est l'adjoint de la transformée de Radon.

On peut directement utiliser ce résultat pour reconstruire  $f$  par déconvolution mais il est possible d'appliquer directement un filtre pour réduire les artefacts. On parle alors de rétroprojection filtrée. La rétroprojection filtrée nous donne un résultat direct et facile à mettre en œuvre pour reconstruire  $f$ .

$$f(x, y) = B(R_f * k)(x, y) \quad (2.13)$$

où  $k$  est un noyau de convolution appliqué aux projections. En faisant une transformation de Fourier puis son inverse, cette formulation nous donne une reconstruction de  $f$ .

Le problème des méthodes décrites précédemment est qu'elles sont seulement applicables dans le domaine continu. En pratique, les mesures sont faites avec un nombre fini d'angles et de récepteurs. La fonction  $f$  sera reconstruite sur une grille discrète dont les limites sont définies par le nombre d'angles et le nombre de récepteurs. L'ensemble des mesures devient  $\{R_f(\theta_i, u_j)\}$  avec  $0 \leq i \leq n$  et  $0 \leq j \leq m$ .

Il existe différentes approches qui vont amener à des méthodes de résolution différentes. Une première approche est de redéfinir de manière discrète les différents opérateurs ainsi que les techniques de résolution du domaine continu. Ce sont les méthodes dites analytiques. Une deuxième approche est de discrétiser l'équation de projection et d'obtenir un système d'équations à résoudre. Ce sont les méthodes dites

algébriques. Une autre approche est d'utiliser des méthodes variationnelles telle que la régularisation pour exploiter des informations a priori.

### Méthodes analytiques

Les méthodes analytiques d'inversion de la transformée de Radon reposent sur la discrétisation des méthodes appliquées dans le domaine continu. Sans rentrer dans les détails liés à la discrétisation en elle-même, on peut reformuler l'opérateur de rétroprojection

$$B(R_f)(x_m, y_n) = \frac{\pi}{M} \sum_{i=0}^{N-1} R_f(\theta_i, x_m \cos \theta_i + y_n \sin \theta_i) \quad (2.14)$$

et le théorème de coupe-projection

$$\mathcal{F}_{\mathcal{D}_1}[R_f(\theta_i, u_j)] = \mathcal{F}_{\mathcal{D}_2}[f(u_j \cos \theta_i, u_j \sin \theta_i)] \quad (2.15)$$

où  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}_1}$  et  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}_2}$  sont respectivement les transformées de Fourier discrètes monodimensionnelle et bidimensionnelle.

On va s'intéresser directement à la rétroprojection filtrée discrète qui est la méthode la plus utilisée. Les autres méthodes analytiques sont très difficiles à mettre en œuvre. L'inversion directe nécessite d'inverser la transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée en coordonnées polaires. Il est possible de ré-échantillonner le plan de Fourier en coordonnées cartésiennes ce qui n'est pas simple. De plus, il faut un nombre très important de projections. L'inversion via la rétroprojection discrète nécessite un traitement via une déconvolution discrète en deux dimensions qui demande beaucoup de temps de calcul.

La rétroprojection filtrée discrète nécessite le choix d'un filtre  $h$  tel que sa transformée de Fourier  $\hat{h}$  soit de la forme  $\hat{h}(w) = |w| \cdot \hat{h}_{\text{passe\_bas}}$  où  $\hat{h}_{\text{passe\_bas}}$  est un filtre passe bas à choisir. On filtre chaque projection d'angle  $\theta_i$

$$\tilde{R}_f(\theta_i, \cdot) = \mathcal{F}_{\mathcal{D}_1}^{-1}[\hat{h} \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{D}_1}[R_f(\theta_i, \cdot)]] \quad (2.16)$$

En sommant toutes ces contributions, on obtient l'approximation

$$f(x_m, y_n) = \frac{\pi}{M} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{R}_f(\theta_i, x_m \cos \theta_i + y_n \sin \theta_i). \quad (2.17)$$

Cette méthode présente de nombreux atouts qui font son succès. Elle demande peu de mémoire et est très rapide grâce à l'efficacité des algorithmes rapides de transformée et d'inversion de Fourier discrète. Par contre, elle présente aussi des inconvénients : elle nécessite beaucoup de mesures et est très peu flexible.

### Méthodes algébriques

Dans les méthodes algébriques, la fonction  $f$  est représentée comme une combinaison linéaire dans une base spécifique qui peut être celle des fonctions caractéristiques des pixels ou encore de fonctions polynomiales. On va reformuler le problème direct sous une forme matricielle

$$\mathbf{A}f = b \quad (2.18)$$

où  $\mathbf{A}$  est l'opérateur de projection et  $b$  le sinogramme obtenu. Une des difficultés est de discrétiser cet opérateur. Pour chaque rayon, il faut savoir quels sont les pixels qu'il traverse.

Il existe différents algorithmes algébriques pour résoudre le système d'équations linéaires ainsi obtenu. Les ART [GBH70] (Algebraic Reconstruction Techniques) qui vont utiliser la méthode de Kaczmarz et ses variantes. Elles vont séquentiellement s'approcher de la solution en utilisant une ligne de  $\mathbf{A}$  à chaque itération. Les SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Techniques) qui couvrent différents algorithmes : Landweber [Lan51], Cimmino [Cim38], CAV [CGG01], DROP, SART [AK84],... Elles utilisent à chaque itération toutes les lignes de  $\mathbf{A}$ . Et les méthodes de sous-espaces de Krylov tels que CGLS [Bjö96, p.289], LSQR [PS82], GMRES [SS86].

### Méthodes variationnelles

On part de la même formulation du problème direct  $\mathbf{A}x^0 = y$  où  $x^0$  est l'image que l'on souhaite reconstruire et  $y$  les données que l'on a. Les méthodes variationnelles permettent de résoudre la formulation algébrique et la formulation analytique. Elles sont très utilisées dans la résolution de problème inverse. Pour les appliquer, il est important que le problème soit bien posé.

**Définition 2.2.2.** *Un problème bien posé, au sens de Hadamard, doit avoir les propriétés suivantes :*

- *il existe au moins une solution,*
- *la solution est unique,*
- *la solution dépend continûment des données dans le cadre d'une topologie raisonnable.*

Ces conditions sont difficilement remplies en tomographie avec l'opérateur de projection de la transformée de Radon, surtout les deux dernières. En effet, comme on l'a vu avec la discrétisation, le nombre fini de mesures implique des données possiblement incomplètes. De plus, la modélisation choisie ne prend pas en compte le phénomène de diffusion, même s'il est atténué avec les rayons X, ce qui produit en plus de la sensibilité des récepteurs des données forcément bruitées. Cela influence bien entendu la stabilité du problème c'est à dire qu'un petit écart sur les données ne doit pas engendrer une forte différence entre les solutions. Selon les propriétés de l'opérateur  $\mathbf{A}$ , plusieurs cas se posent.

## Chapitre 2. Préliminaires

Le cas le plus simple, l'opérateur  $\mathbf{A}$  est inversible alors la solution est immédiate  $x^0 = \mathbf{A}^{-1}y$ . Si  $\mathbf{A}$  n'est pas inversible, on va chercher à minimiser une fonctionnelle qui représente un critère d'écart entre  $\mathbf{A}x$  et  $y$ . En générale, on choisit la norme  $\ell^2$  ce qui nous donne le problème des moindres carrées

$$\min_x \|\mathbf{A}x - y\|_2^2. \quad (2.19)$$

Ce problème est équivalent à  $\mathbf{A}^*\mathbf{A}x = \mathbf{A}^*y$  où  $\mathbf{A}^*$  est l'adjoint de  $\mathbf{A}$ . Les SIRT et les méthodes de sous-espaces de Krylov cherchent une solution de ce problème avec des approches différentes.

Si l'opérateur  $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$  est inversible, alors la solution du problème des moindres carrées est  $x^0 = \mathbf{A}^+\mathbf{A}y$  où  $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*$  est la pseudo-inverse de Moore-Penrose ou l'inverse généralisée. Dans le cas contraire, il y a une infinité de solutions. Ce dernier cas est celui de notre opérateur de projection. De plus, les données pouvant être bruitées, l'inverse (si  $\mathbf{A}$  est mal conditionné) et la pseudo-inverse peut être très instable. Elle va amplifier les composantes hautes fréquences du bruit et entraîner de forts écarts entre deux solutions c'est à dire que la minimisation va produire deux solutions très différentes.

Pour résoudre ce problème d'instabilité, il va être essentiel de régulariser le problème. Pour cela, la méthode classique est d'introduire une contrainte supplémentaire sur les solutions. Par exemple, chercher la solution de norme  $\ell^2$  minimale, celle qui est la plus parcimonieuse c'est à dire qui a le moins de composantes non-nulles ou encore qui a la variation totale la plus basse. Bien entendu, il est primordial d'avoir des connaissances a priori sur l'objet que l'on cherche à reconstruire pour appliquer la régularisation la plus adéquate.



Première partie

Identifiabilité



# Chapitre 3

## Modèle géométrique

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>État de l'art</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>3.2</b>	<b>Identifiabilité</b> . . . . .	<b>34</b>
3.2.1	Bases indexées et supports associés . . . . .	38
<b>3.3</b>	<b>Discussion avec l'état de l'art</b> . . . . .	<b>41</b>

---

Dans ce chapitre, nous allons nous inspirer des travaux de Donoho [Don05] où il établit un parallèle entre la minimisation  $\ell^1$  synthèse et la géométrie des polytopes. Similairement, on va mettre en évidence l'équivalence entre le problème de minimisation (1.3) et la géométrie des ensembles compacts pour une classe plus large de fonctions de régularisation. On va considérer, comme fonctions de régularisation, des jauges d'ensembles convexes compacts. Les trois fonctions de régularisation,  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\mathbf{D}^*\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_{1,2}$ , qui nous intéressent peuvent être reformulées sous la forme d'une jauge d'un convexe à déterminer. Il sera ensuite déduit une condition nécessaire et suffisante d'identifiabilité pour cette régularisation. En prenant avantage de la compacité, nous allons utiliser la notion de *face minimale* d'un vecteur. Elle sera au cœur de tous nos résultats.

Notre objectif dans ce chapitre est de montrer que l'identifiabilité peut être géométriquement caractérisée en termes de faces. Dans un premier temps, une condition nécessaire et suffisante de minimalité est exprimée en terme de faces et ensuite on en déduit une condition nécessaire et suffisante d'unicité exprimée en terme de faces. Comme on peut définir une face de ses points extrémaux, on en déduit une condition équivalente basée sur les points extrémaux des faces. Cette dernière condition permet de développer des algorithmes pour calculer les points extrémaux des faces quand on connaît au préalable les points extrémaux de l'ensemble convexe de la jauge. Ces algorithmes sont détaillés dans le chapitre suivant pour les trois jauges qui nous intéressent.



Dans toute la suite, le problème initial (3.2),

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} R(x) \text{ tel que } \mathbf{A}x = y, \quad (3.1)$$

va être reformulé pour la jauge  $R(x) = \gamma_C(x) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha C\}$  pour  $x \in \mathbb{R}^n$  où  $C$  est un ensemble convexe et compact de  $\mathbb{R}^n$  dont l'origine est un point intérieur. Soit  $x^0$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{A}$  un opérateur linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  et  $y^0 = \mathbf{A}x^0$ , on a

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \gamma_C(x) \text{ s.c. } \mathbf{A}x = y^0. \quad (3.2)$$

On remarque que comme  $C$  est borné,  $\gamma_C(x) \neq 0$  pour tout  $x \neq 0$  et comme  $C$  est fermé, l'infimum peut être remplacé par un minimum.

Par conséquent, tout vecteur non nul  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  peut être normalisé en un vecteur

$$\tilde{x} = \frac{x}{\gamma_C(x)} \quad (x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0)$$

avec  $\gamma_C(\tilde{x}) = 1$  et il est sur le bord de  $C$ . On peut noter que

$$\gamma_C(x) = \frac{\|x\|}{\|\tilde{x}\|} \quad (x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0).$$

La jauge  $\gamma_C$  est une fonction positivement homogène et dans le cas particulier où  $C$  est centro-symétrique, elle est symétrique. Par conséquent, la jauge est une semi-norme pour laquelle  $C$  est une boule unité.

**Définition 3.0.1.** *Un vecteur  $x^0$  dans  $\mathbb{R}^n$  est dit identifiable par rapport à  $\mathbf{A}$  et  $\gamma_C$  si  $x^0$  est l'unique solution du problème de minimisation (3.2).*

On note  $Q$  et on suppose  $\mathbf{A}$  est surjectif

$$Q = \mathbf{A}C$$

l'image du convexe  $C$  par l'opérateur  $\mathbf{A}$  qui est un convexe fermé dans  $\mathbb{R}^m$  qui contient aussi l'origine dans son intérieur. Ainsi  $\mathbf{A}$  induit la jauge  $\gamma_Q$  dans  $\mathbb{R}^m$  d'où le lemme suivant :

**Lemme 3.0.2.** *Soit  $C$  un ensemble convexe compact de  $\mathbb{R}^n$  contenant l'origine dans son intérieur,  $\mathbf{A}$  un opérateur linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  et  $Q = \mathbf{A}C$ .*

*Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a*

$$\gamma_Q(\mathbf{A}x) \leq \gamma_C(x).$$

*Démonstration.* Par définition,  $x \in \gamma_C(x)C$  et donc  $\mathbf{A}x \in \gamma_C(x)\mathbf{A}C$ .

On en déduit que  $\gamma_Q(\mathbf{A}x) = \inf\{\lambda > 0 : \mathbf{A}x \in \lambda Q\} \leq \gamma_C(x)$ .

□

De plus, comme  $\mathbf{A}$  est surjectif donc ouvert, il envoie un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  dans un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ . Il envoie l'intérieur de  $C$  dans l'intérieur de  $Q$ . Par conséquent les points de la frontière de  $Q$  sont nécessairement contenus dans l'image par  $\mathbf{A}$  des points frontières de  $C$  :

$$\partial Q \subset \mathbf{A}(\partial C).$$

Pour tout vecteur non nul  $y$  de  $\mathbb{R}^m$ , on note  $\tilde{y}$  le vecteur normalisé par rapport à  $\gamma_Q$  :

$$\tilde{y} = \frac{y}{\gamma_Q(y)} \quad (y \in \mathbb{R}^m, y \notin \ker \mathbf{A}).$$

### 3.1 État de l'art

On sait qu'un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  est un minimum de (3.2) si et seulement si 0 appartient à la sous différentielle de la fonctionnelle  $L(x) = R(x) + \iota_{\mathbf{A}x=y}$ . Une condition équivalente, très utilisée dans la littérature, reformule l'appartenance du vecteur nulle à la sous différentielle de la fonctionnelle  $L$  en l'existence d'un vecteur appartenant à la sous différentielle de  $R$ . Cette condition est appelé condition source.

#### Condition source

Une façon communément utilisée de caractériser les minimiseurs de (3.2) est la condition source. La condition source qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un signal soit une solution de (1.3). La condition source est étroitement liée au problème dual de (3.2) et par conséquent aux multiplicateurs de Lagrange. On va dans un premier temps calculer le problème dual et en utilisant la dualité forte établir un lien entre les solutions du problème primal et celles du problème dual. Le calcul est standard [BV04].

Le problème (3.2) n'ayant que des contraintes d'égalité, par simple calcul, sa fonction duale de Lagrange est

$$g(\eta) = \langle \eta, y \rangle - R^*(\mathbf{A}^*\eta),$$

où  $R^*$  est la conjuguée de Legendre-Fenchel de  $R = \gamma_C$ . On obtient ainsi le problème dual suivant

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}^m} g(\eta) = \sup_{\eta \in \mathbb{R}^m} \langle \eta, y \rangle - R^*(\mathbf{A}^*\eta). \quad (3.3)$$

On sait que  $R = \gamma_C$  est une jauge et sa conjuguée est donnée par

$$R^*(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma_{C^\circ}(u) \leq 1 \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in C^\circ \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} = \iota_{C^\circ}(u).$$

On peut ainsi reformuler la fonction duale

$$g(\eta) = \begin{cases} \langle \eta, y \rangle & \text{si } \mathbf{A}^*\eta \in C^\circ \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On applique le corollaire 3.3.11 de [BL10].  $R$  est convexe et  $R$  est de rang plein d'où  $\mathbf{A} \text{dom } R \cap \{y\} \neq \emptyset$  qui équivaut à  $\text{Im } \mathbf{A} \cap \{y\} \neq \emptyset$ . Le maximum du problème dual est atteint et le saut de dualité est nul, on a donc une dualité forte. Par conséquent,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} R(x) + \iota_{\mathbf{A}x=y} = \max_{\substack{\eta \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{A}^* \eta \in C^\circ}} \langle \eta, y \rangle$$

Soit une solution  $x^0$  du problème primal, alors on a

$$\langle \eta, y \rangle = \langle \eta, \mathbf{A}x^0 \rangle = \langle \mathbf{A}^* \eta, x^0 \rangle \text{ et } \mathbf{A}x^0 = y.$$

Par conséquent, le maximum du problème dual est atteint pour l'ensemble

$$\{\eta \in \mathbb{R}^m, \mathbf{A}^* \eta \in \partial R(x^0) = F^\circ(x^0)\}.$$

Ce résultat est formulé par la proposition suivante

**Proposition 3.1.1.** *Soit  $x^0 \in P$  vérifiant  $\mathbf{A}x^0 = y$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- a)  $x^0$  est un minimiseur de (3.2).
- b) Il existe un vecteur  $\eta \in \mathbb{R}^m$  tel que  $\mathbf{A}^* \eta \in \partial R(x^0)$ .

Dans la littérature, ce vecteur  $\eta$  est aussi appelé *certificat dual* et on parle de *condition source* pour l'affirmation b). Bien entendu, cette proposition est valable pour une classe plus large de fonction de régularisation [BO04, CR13, VGFP15]. Elle est très utilisée dans la minimisation  $\ell^1$  [GSH11] qu'on verra dans le chapitre suivant. Son existence permet d'avoir une caractérisation des solutions de (3.2).

### Condition source non dégénérée

Pour assurer l'unicité d'une solution, plusieurs travaux, par exemple [CR13, VGFP15, Gra11], s'appuient sur l'existence d'un *certificat dual non dégénéré* : pour un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ , un certificat dual non dégénéré est un vecteur  $\eta \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$\mathbf{A}^* \eta \in \text{ri}(\partial R(x)).$$

L'existence de ce vecteur est la condition source non dégénérée.

## 3.2 Identifiabilité

Dans cette section, on va montrer que l'identifiabilité dépend essentiellement de comment l'opérateur  $\mathbf{A}$  lie les faces minimales dans  $C$  et  $Q$ . On caractérise d'abord les solutions de (3.2) en fonction de leur face minimale. La proposition suivante exprime cette condition nécessaire et suffisante de minimalité d'un vecteur.

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $x^0 \neq 0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $y^0 = \mathbf{A}x^0$ . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- a) *Le vecteur  $x^0$  est solution de (3.2) ;*
- b)  *$\gamma_C(x^0) = \gamma_Q(y^0)$  ;*
- c)  *$\mathbf{A}F_C(\tilde{x}^0) \subseteq F_Q(\tilde{y}^0)$ , où  $\mathbf{A}^{-1}$  est l'image réciproque d'un ensemble.*

*Démonstration.* Puisque le problème (3.2) est positivement homogène, on peut supposer par commodité que  $\gamma_C(x^0) = 1$  c'est à dire que  $x^0 = \tilde{x}^0$ .

On suppose que l'affirmation a) est vérifiée et on va montrer b). Puisque  $x^0$  est une solution de (3.2), pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\mathbf{A}x = y^0, \gamma_C(x) \geq 1$ . Soit  $x^1$  dans  $C$  tel que  $\mathbf{A}x^1 = y^0$ , alors  $\mathbf{A}(\gamma_Q(y^0)x^1) = y^0$  et donc, comme  $\mathbf{A}x^1 = y^0, \gamma_C(\gamma_Q(y^0)x^1) \geq 1$ . Mais d'un autre côté,  $\gamma_C(\gamma_Q(y^0)x^1) = \gamma_C(x^1)\gamma_Q(y^0) \leq 1$ , donc  $\gamma_C(x^1) = \gamma_Q(y^0) = 1$ . L'affirmation b) est vérifiée. Inversement, on suppose que  $\gamma_Q(y^0) = 1$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\mathbf{A}x = y^0, \gamma_C(x) \geq 1$  d'après le lemme 3.0.2. Mais  $\gamma_C(x^0) = 1$  donc  $x^0$  est une solution de (3.2) ce qui prouve a).

On va maintenant montrer que les affirmations b) et c) sont équivalentes. On suppose que b) est vérifiée ce qui implique  $y^0$  est sur le bord de  $Q$ . Soit  $f$  un vecteur de la face minimale  $F_C(x^0)$ . D'après la proposition 2.1.13, il existe  $f'$  sur  $C$  et dans  $F_C(x^0)$  tel que  $x^0$  peut s'écrire comme une combinaison convexe stricte

$$x^0 = \alpha f + (1 - \alpha)f'$$

pour un  $\alpha \in ]0, 1[$ . Alors  $y^0 = \mathbf{A}x^0$  peut s'écrire comme une combinaison convexe stricte de points dans  $Q$

$$y^0 = \alpha \mathbf{A}f + (1 - \alpha)\mathbf{A}f',$$

ce qui implique que  $\mathbf{A}f$  et  $\mathbf{A}f'$  sont dans la face minimale  $F_Q(y^0)$  par la proposition 2.1.13. L'affirmation c) est donc vérifiée.

Inversement, on suppose que c) est vérifiée. Alors  $y^0 = \mathbf{A}x^0$  appartient à la face minimale de  $y^0$  qui est sur la frontière de  $Q$ . Par conséquent  $\gamma_Q(y^0) = 1$  et l'affirmation b) est vérifiée ce qui complète la preuve.  $\square$

On va énoncer notre théorème principal. Ce théorème montre que sous une contrainte d'injectivité de  $\mathbf{A}$  restreinte à l'espace engendré par la face minimale de  $x^0$ , l'unicité de  $x^0$  dépend d'une bijection entre la face minimale de  $x^0$  sur  $C$  et son image dans  $Q$ .

**Théorème 3.2.2.** *Soit  $x^0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $y^0 = \mathbf{A}x^0$ . Le vecteur  $x^0$  est l'unique solution de (3.2) si et seulement si les conditions suivantes sont simultanément vérifiées :*

- C1) *La restriction de l'opérateur  $\mathbf{A}$  sur  $\text{Vect}(F_C(\tilde{x}^0))$  est injective ;*
- C2)  *$\mathbf{A}^{-1}(F_Q(\tilde{y}^0)) \cap C \subseteq F_C(\tilde{x}^0)$ .*

*Démonstration.* Une fois de plus, on suppose que  $\gamma_C(x^0) = 1$  par commodité et donc  $x^0$  est sur le bord de  $C$ .

On suppose que  $x^0$  est identifiable et on montre que C1) et C2) sont vérifiées. Pour cela une petite préparation est nécessaire :

On note  $F = F_C(x^0)$  et  $V = \text{Vect}(F_C(x^0))$ . Puisque  $\text{Aff}(F)$  est de co-dimension 1 dans  $V$ ,  $F$  est une hyper-face de  $C \cap V$  dans  $V$  et elle est exposée dans  $V$ . Par conséquent, il existe un vecteur non nul  $\eta$  dans  $V$  tel que

$$\langle \eta, x \rangle = 1 \quad (x \in F) \quad (3.4)$$

$$\langle \eta, x \rangle < 1 \quad (x \in (C \cap V) \setminus F). \quad (3.5)$$

D'un autre côté, puisque  $F$  est la face minimale de  $x^0$ , il s'ensuit du corollaire 2.1.14 que  $x^0$  est dans l'intérieur relatif de  $F$ . Par conséquent, il y a un scalaire  $r > 0$  tel que

$$D := B(x^0, r) \cap F = B(x^0, r) \cap \text{Aff}(F) \subseteq F,$$

où  $B(x^0, r)$  est la boule fermée (euclidienne) unité de rayon  $r$  centrée en  $x^0$ . On remarque que  $D$  est en fait la boule centrée en  $x^0$  et de rayon  $r$  dans  $\text{Aff}(F)$ .

Soit  $K$  un cône fermé dans  $V$  défini par

$$K := \{\lambda x \mid x \in D, \lambda \geq 0\}. \quad (3.6)$$

Évidemment,  $x^0$  est un point intérieur de  $K$  et donc il existe un scalaire  $r' > 0$  tel que

$$B(x^0, r') \cap V \subset K. \quad (3.7)$$

On observe maintenant que (3.4) implique que

$$K \cap C = \{x \in K \mid \langle \eta, x \rangle \leq 1\} \quad (3.8)$$

Il s'en suit alors de (3.7) et (3.8) que

$$\{x \in B(x^0, r') \cap V \mid \langle \eta, x \rangle \leq 1\} \subset C. \quad (3.9)$$

On peut noter que le terme de gauche est une demi-sphère.

Avec cette construction, on prend  $k \in \ker A \cap V$  et on suppose par l'absurde que  $k \neq 0$ . On prend alors  $k' = \frac{r'}{\|k\|} k$ . On a alors  $x^0 + k'$  et  $x^0 - k'$  qui sont dans  $B(x^0, r') \cap V$ . De plus, il existe  $\sigma \in \{-1, 1\}$  tel que  $\langle \sigma k', \eta \rangle \leq 0$ , alors

$$\langle x^0 + \sigma k', \eta \rangle = 1 + \langle \sigma k', \eta \rangle \leq 1. \quad (3.10)$$

Par conséquent,  $x^1 := x^0 + \sigma k'$  appartient à la demi-sphère dans (3.8) et donc il appartient aussi à  $C$ . Ainsi,  $\gamma_C(x^1) \leq 1 = \gamma_C(x^0)$ . En additionnant tout cela,  $\mathbf{A}x^1 = \mathbf{A}x^0$  (parce que  $k'$  est dans  $\ker A$ ) et  $\gamma_C(x^1) \leq \gamma_C(x^0)$ . Mais cela veut dire que  $x^0$  n'est pas l'unique minimiseur de (3.2). Par conséquent,  $k = 0$  et donc  $\mathbf{A}$  est injective sur  $V$  ce qui prouve C1).

On va maintenant montrer que la condition C2) est vérifiée. De la proposition 3.2.1 b),  $y^0 = \tilde{y}^0$ .

### Chapitre 3. Modèle géométrique

Soit  $y$  un vecteur de la face minimale  $F_Q(y^0)$  et soit  $x$  dans  $C$  tel que  $\mathbf{A}x = y$ . On va montrer que  $x$  appartient à  $F_C(x^0)$ .

Par le corollaire 2.1.14,  $y^0$  est dans l'intérieur relatif de  $F_Q(y^0)$ . Cela implique que, corollaire 2.1.15, que pour tout  $u$  dans  $\text{Aff}(F_Q(y^0))$ , il existe  $\alpha > 1$  tel que  $\alpha y^0 + (1 - \alpha)u$  est dans  $F_Q(y^0)$ . En appliquant cela pour  $u = y$ , il existe alors  $\alpha > 1$  tel que  $y' := (1 - \alpha)y + \alpha y^0$  soit dans  $F_Q(y^0)$ . On obtient

$$y^0 = \frac{\alpha - 1}{\alpha}y + \frac{1}{\alpha}y'. \quad (3.11)$$

On prend alors un  $x'$  dans  $C$  tel que  $\mathbf{A}x' = y'$  et on met

$$x^1 := \frac{\alpha - 1}{\alpha}x + \frac{1}{\alpha}x'. \quad (3.12)$$

Alors  $\mathbf{A}x^1 = y^0$  et, comme  $x^1$  est dans  $C$ , on a aussi  $\gamma_C(x^1) \leq 1 = \gamma_C(x^0)$ . Puisque  $x^0$  est identifiable alors nécessairement  $x^0 = x^1$  et

$$x^0 := \frac{\alpha - 1}{\alpha}x + \frac{1}{\alpha}x'. \quad (3.13)$$

Mais comme  $x^0$ , un point de  $F_C(x^0)$ , est écrit comme une combinaison convexe stricte de points,  $x$  et  $x'$  de  $C$ , alors  $x$  et  $x'$  appartiennent à  $F_C(x^0)$ , ce qui prouve c).

On va maintenant montrer la réciproque c'est à dire que  $x^0$  est identifiable quand C1) et C2) sont vérifiées.

On montre d'abord que, sous ces conditions,  $x^0$  est une solution de (3.2). D'après la proposition 3.2.1, il suffit de montrer que  $\gamma_Q(y^0) = 1$ . On a  $y^0 = \gamma_Q(y^0)\tilde{y}^0$ . Soit  $x'$  dans  $C$  avec  $\mathbf{A}x' = \tilde{y}^0$ . D'après C2),  $x'$  est dans  $F = F_C(x^0)$  alors  $\gamma_Q(y^0)x'$  est dans  $V = \text{Vect}(F_C(x^0))$  comme  $x^0$ . Puisque  $\mathbf{A}x^0 = \mathbf{A}\gamma_Q(y^0)x' = y^0$  et puisque  $\mathbf{A}$  est injective sur  $V$  d'après C1), on en déduit que  $x^0 = \gamma_Q(y^0)x'$ . Cela veut dire que  $x'$  et  $\gamma_Q(y^0)x'$  sont tous les deux dans  $F$ . Soit un  $\eta$  dans  $V$  satisfaisant (3.4), alors

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x', \eta \rangle - \langle \gamma_Q(y^0)x', \eta \rangle \\ &= (1 - \gamma_Q(y^0))\langle x', \eta \rangle \\ &= 1 - \gamma_Q(y^0), \end{aligned}$$

par conséquent  $\gamma_Q(y^0) = 1$ .

Il reste à montrer que  $x^0$  est l'unique solution de (3.2). Pour cela, on pose  $x^1$  une solution quelconque de (3.2). Puisque  $\mathbf{A}x^1 = y^0$  et  $y^0$  est dans  $F_Q(y^0)$ , on déduit de C2) que  $x^1$  est dans  $F_C(x^0)$  qui est contenu dans  $V$ . D'après C1),  $\mathbf{A}$  est injective sur  $V$  et  $\mathbf{A}x^0 = y^0$ , alors nécessairement  $x^1 = x^0$ . Et donc  $x^0$  est l'unique solution ce qui complète la preuve.  $\square$

On remarque la condition C2) implique que  $F_Q(y^0) \subseteq \mathbf{A}F_C(x^0)$  ce qui qui l'inverse de la condition c) de la proposition 3.2.1. C'est une condition de non dégénérescence. Les deux conditions C1) et C2) ensemble assurent que les seuls points de

$C$  qui sont envoyés dans la face minimale de  $\mathbf{A}\tilde{x}^0$  dans  $Q$  sont les points de la face minimale de  $x^0$  dans  $C$  et cela bijectivement. Sauf cas particulier, on ne peut pas remplacer les faces minimales par des faces minimales exposées comme le montre l'exemple suivant.

### Exemple

Pour un ensemble  $C$  dans  $\mathbb{R}^3$  donné par

$$C := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x^3| \leq 1, x_1^2 + x_2^2 \leq \left(1 + \sqrt{1 - x_3^2}\right)^2\},$$

et l'opérateur  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par

$$\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3) := (x_2, x_3) \quad (x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3).$$

L'image de  $C$  par  $\mathbf{A}$  est le convexe

$$Q = \mathbf{A}C = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : |y_2| \leq 1, |y_1| \leq 1 + \sqrt{1 - y_2^2}\}.$$

Soit  $x^0 := (0, -1, 1)$  et  $y^0 = \mathbf{A}x^0 = (-1, 1)$ . Alors  $F_C(x^0) = \{x^0\}$ ,  $F_Q(y^0) = \{y^0\}$  et  $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{(t, 0, 0), t \in \mathbb{R}\}$ . Par conséquent, C1) et C2) sont vérifiées et  $x^0$  est identifiable.

Pourtant, on a

$$\begin{aligned} F_C^e(x^0) &= \{(x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, \\ F_Q^e(y^0) &= \{(y_1, 1) \in \mathbb{R}^2 : |y_1| \leq 1\}. \end{aligned}$$

On obtient bien

$$\mathbf{A}^{-1}(F_Q^e(y^0)) \cap C = F_C^e(x^0), \quad (3.14)$$

ainsi la condition C2) est vérifiée pour les faces exposées. Par contre,  $\text{Vect}(F_C^e(x^0)) = \mathbb{R}^3$  la restriction de  $\mathbf{A}$  à cette espace n'est pas injective. Et donc la condition C1) n'est pas vérifiée pour les faces exposées comme le montre la figure 3.1.

### 3.2.1 Bases indexées et supports associés

Il n'est pas évident de travailler numériquement sur les faces. Pour pallier à ce problème, on va reformuler le théorème 3.2.2 avec les points extrémaux des faces minimales. On va d'abord introduire la notion de base indexée qui permet de généraliser le support d'un vecteur.

**Définition 3.2.3.** *Soit  $C$  un ensemble convexe compact de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle une base indexée pour  $C$  l'application  $b : \Omega \rightarrow C$*

$$w \in \Omega \mapsto b(w) := b_w \in C, \quad (3.15)$$

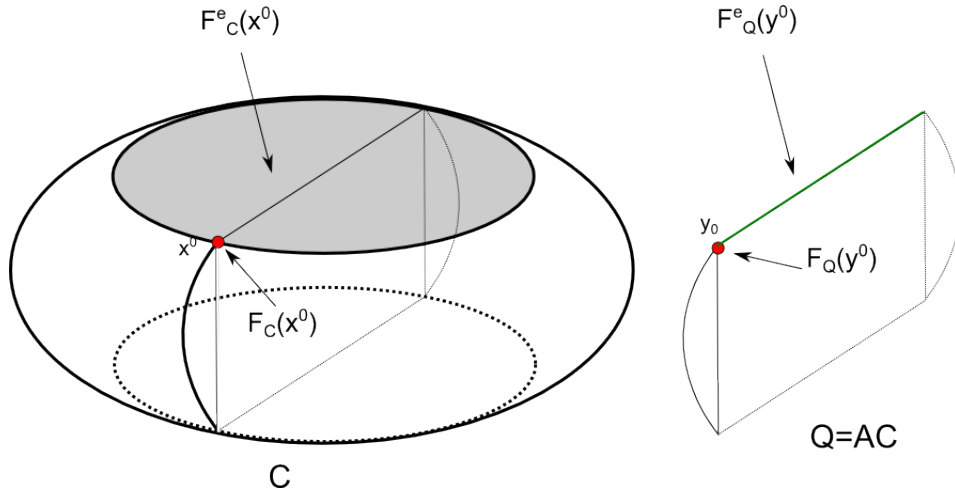


FIGURE 3.1 – un exemple de signal identifiable pour  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

définie sur un ensemble  $\Omega$  appelé ensemble d'indices avec la propriété que l'image de  $b$  couvre tous les points extrémaux de  $C$  :

$$\text{Ext}(C) \subseteq b(\Omega). \quad (3.16)$$

On dira qu'une base indexée est minimale s'il y a égalité pour la dernière équation de la définition. Un exemple trivial d'une base indexée pour  $C$  (qui est minimale) peut être obtenu en prenant  $\Omega = \text{Ext}(C)$  et  $b$  l'identité sur  $\Omega$ .

Si  $b$  est une base indexée de  $C$  alors, par le théorème de Krein-Milman, tout vecteur de  $C$  peut s'écrire comme une combinaison convexe des  $b_w$  ce qui justifie l'appellation "base".

**Définition 3.2.4.** Soit  $C$  un ensemble convexe compact de  $\mathbb{R}^n$  contenant l'origine dans son intérieur et  $b : \Omega \rightarrow C$  une base indexée pour  $C$ . On appelle le support associé à la base indexée  $b$  l'application  $\Sigma_b : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$  :

$$\Sigma_b(x) := \{w \in \Omega : b_w \in F_C(\tilde{x})\}, \quad (3.17)$$

c'est à dire les indices des éléments de la base qui sont dans la face minimale de  $C$  au vecteur normalisé  $\tilde{x}$ .

On remarque que  $\Sigma_b(x)$  est toujours non-vidé puisqu'il contient au moins les points extrémaux de la face minimale de  $F_C(\tilde{x})$ . L'appellation "support" est justifiée par la proposition suivante qui combine le corollaire 2.1.14 et le théorème de Krein-Milman.

**Proposition 3.2.5.** Soit  $b$  une base indexée pour  $C$  et  $x$  un vecteur sur le bord de  $C$ .



a) Si  $x$  peut être écrit comme une combinaison convexe

$$x = \sum_{w \in I} \alpha_w b_w \quad (3.18)$$

pour un ensemble fini  $I \subset \Omega$  et  $(\alpha_w)_{w \in I} \geq 0$  avec  $\sum_{w \in I} \alpha_w = 1$ , alors

$$\alpha_w = 0 \quad (w \in I \setminus \Sigma_b(x)). \quad (3.19)$$

b) Pour tout  $w_0$  dans  $\Sigma_b(x)$ ,  $x$  peut être écrit comme une combinaison convexe (3.18), dans laquelle  $b_{w_0}$  intervient avec un coefficient non nul.

*Démonstration.* a) On suppose que  $x$  appartient à  $\partial C$  et qu'il existe un ensemble d'indices  $I \subset \Omega$  et un ensemble de scalaires  $(\alpha_w)_{w \in I}$  tel que  $(\alpha_w)_{w \in I} \geq 0$  avec  $\sum_{w \in I} \alpha_w = 1$  et  $x = \sum_{w \in I} \alpha_w b_w$ .

$x \in F_C(x)$  donc  $\sum_{w \in I} \alpha_w b_w \in F_C(x)$ . On pose  $I' \subset I$  tel que pour  $w \in I'$ ,  $\alpha_w \neq 0$ . On a donc  $\sum_{w \in I'} \alpha_w b_w \in F_C(x)$  et  $(b_w)_{w \in I'} \in F_C(x)$  et par conséquent,  $(b_w)_{w \in I'} \in \Sigma_b(x)$  et  $I' = \Sigma_b(x)$ .

b) Ce résultat est une conséquence directe de la proposition 2.1.11.  $\square$

On déduit de la proposition 2.1.16 leurs équivalents induits par  $\mathbf{A}$  sur  $Q$ . Si  $b : \Omega \rightarrow C$  est une base indexée pour  $C$ , alors  $\mathbf{A} \circ b = \mathbf{A}b : \Omega \rightarrow Q$  est une base indexée pour  $Q$ . On appelle aussi son support associé  $\Sigma_{\mathbf{A}b} : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$  le support induit par  $\mathbf{A}$  sur  $Q$ .

On peut maintenant énoncer le théorème 3.2.2 en termes de supports.

**Théorème 3.2.6.** *Soit  $C$  un ensemble convexe compact de  $\mathbb{R}^n$  qui contient l'origine dans son intérieur et  $b : \Omega \rightarrow C$  une base indexée de  $C$ . Soit  $\mathbf{A}$  un opérateur linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ ,  $x^0 \neq 0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $y^0 = \mathbf{A}x^0$ .*

*Alors  $x^0$  est identifiable pour (3.2) si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- S1) *La restriction de  $\mathbf{A}$  sur  $\text{Vect}\{b_w | w \in \Sigma_b(x^0)\}$  est injective ;*
- S2)  $\Sigma_{\mathbf{A}b}(y^0) = \Sigma_b(x^0)$ .

*Démonstration.* La condition C) de la proposition 3.2.1 condition C2) du théorème 3.2.2 implique que  $\mathbf{A}F_C(\tilde{x}^0) = F_Q(\tilde{y}^0)$ . En appliquant le b) de la proposition 2.1.16,  $\mathbf{A}\text{Ext}(F_C(\tilde{x}^0)) = \text{Ext}(\mathbf{A}F_C(\tilde{x}^0)) = \text{Ext}(F_Q(\tilde{y}^0))$  et le théorème de Krein-Milman, la preuve est directe.  $\square$

Le théorème 3.2.2 peut être difficile à appliquer d'un point de vue numérique surtout quand l'ensemble  $C$  n'a pas que des faces exposées. Le théorème 3.2.6 essaie de palier à ce problème en regardant les faces au travers de leurs points extrémaux.

### 3.3 Discussion avec l'état de l'art

La proposition 3.1.1 est équivalente à la proposition 3.2.1. Le certificat dual  $\eta$  définit un hyperplan support sur  $Q$  qui contient la face minimale  $F_Q(\tilde{y}^0)$  et  $\mathbf{A}^*\eta$  un hyperplan support sur  $C$  qui contient la face minimale  $F_C(\tilde{x}^0)$ .

Comme on l'a vu dans l'exemple, la condition source non dégénérée ne permet que de définir des faces exposées et n'est donc pas suffisante pour assurer l'unicité dans tous les cas. Dans l'exemple, le certificat dual non dégénéré va définir une face minimale exposée plus grande que la face minimale et la restriction  $\mathbf{A}$  à l'espace engendré par cette face exposée n'est pas inversible. Par contre dans certains cas particuliers, par exemple quand l'ensemble  $C$  est un polytope qu'on suppose symétrique, tous ses faces sont exposées. Soit  $H_\eta$  un hyperplan séparateur pour la face minimale  $F_Q(\tilde{y}^0)$  c'est à dire que  $\eta$  satisfait (3.4). Alors la condition C2) du théorème 3.2.2 peut être réécrite avec des certificats duaux où  $\eta$  un certificat dual. On retrouve ainsi la condition source non dégénérée. Un tel certificat dual  $\eta$  est appelé certificat dual non dégénéré et il définit un hyperplan  $H_\eta$  tel que décrit dans la condition C2) du corollaire 4.2.1.

Le cas particulier des jauges polyédrales est traité plus en détail dans [VPF13] dont les jauge de polytopes sont un sous-ensemble. Ces auteurs utilisent la régularisation  $R_H$

$$R_H(x) = \max_{1 \leq i \leq N_H} \langle x, h_i \rangle$$

où  $H = (h_i)_{1 \leq i \leq N_H} \in \mathbb{R}^{n \times N_H}$ . Si on considère  $P_H = \{x \in \mathbb{R}^n | R_H(x) \leq 1\}$  qui est un polytope contenant l'origine alors  $R_H$  est une jauge. En fonction du choix de  $H$ ,  $R_H$  peut être une régularisation  $\ell^1$  synthèse, une régularisation  $\ell^1$  analyse ou une régularisation  $\ell^\infty$ . Contrairement à nous qui utilisons la V-représentation des polytopes, Vaïter et al utilisent la H-représentation des polytopes ce qui produit des résultats similaires mais exprimés différemment pour l'identifiabilité. Ils expriment leur résultat d'identifiabilité en fonction des hyperplans supports des faces de la boule unité polyédrale et nous exprimons notre résultat en fonction des faces minimales, de leurs hyperplans séparateurs ou de leurs points extrémaux.

Que ce soit la H-représentation ou la V-représentation, chacun a ses avantages et inconvénients. Par exemple, la boule unité de la norme  $\ell^\infty$  dans  $\mathbb{R}^n$  est l'hypercube qui est un polytope. Dans la H-représentation en reprenant les notations pour  $R_H$ ,  $H = [Id, -Id]$  où  $Id$  est la matrice identité dans  $\mathbb{R}^n$ . Dans la V-représentation, les points extrémaux sont toutes les façons d'énumérer le signe d'un vecteur de dimension  $n$  c'est à dire  $\{-1, 1\}^n$ . Avec la H-représentation,  $H$  contient  $2 \times n$  colonnes et avec la V-représentation, on a  $2^n$  points extrémaux ! Dans le cas de la boule unité de la norme  $\ell^1$ , on n'est dans le cas opposé : avec  $H$  qui contient  $2^n$  colonnes et  $2 \times n$  points extrémaux.

Certains travaux se sont attelés à résoudre certaines classes de régularisations polyédrales soit numériquement [PT12] soit en proposant un algorithme multi-échelle

de type homotopie [MB13]. Dans le cadre de l'échantillonnage compressé et pour des normes polyédrales spécifiques, les auteurs de [DT10] étudient les conditions de d'unicité d'une solution à l'aide d'un comptage des faces. Bach [Bac10] étudie la robustesse d'une classe de normes polyédrales à l'aide de fonction sous-modulaires mais définit un support différent du nôtre.

D'autres travaux de Vaiter et al [VGFP15] et [Vai14] utilisent la notion de fonctions partiellement lisses [Lew02] qui incluent les jauges et généralisent les résultats de [CR13]. Ils développent deux conditions nécessaires et suffisantes d'unicité. A partir de la « décomposabilité » de la sous-différentielle de la fonction de régularisation, ils déduisent une condition suffisante d'unicité d'une solution. Cette condition est basée sur l'existence d'un certificat dual fort non dégénéré c'est à dire que son image par l'adjoint de  $\mathbf{A}$  appartient à l'intérieur relatif de la sous différentielle de la fonction de régularisation. Plus précisément, il existe  $\eta \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$\mathbf{A}^* \eta \in ri(\partial \mathbb{R}(x^0)). \quad (3.20)$$

On constate que cette condition est en fait équivalente à l'existence d'un hyperplan séparateur entre la face de  $\mathbf{A}C$  définie par cet hyperplan et le reste de  $\mathbf{A}C$ . Similairement, la face minimale assure aussi l'existence d'un hyperplan séparateur et les deux conditions sont équivalentes. En posant  $\mathcal{T} = \mathcal{S}^\perp$  et

$$\mathcal{S} = \text{span}(\partial \gamma_C(x^0) - e_x) \text{ et } e_x = \underset{e \in \text{Aff}(\partial \gamma_C(x^0))}{\text{argmin}} \|e\|,$$

$\mathcal{T}$  définit le modèle de sous-espace de [VGFP15]. Si on prend  $x^0$  tel que  $\gamma_C(x^0) = 1$ , on sait que  $\mathbf{A}^* \eta \in \partial \gamma_C(x^0)$  donne  $\langle \mathbf{A}^* \eta, x \rangle \leq 1$  pour  $x \in C$  et  $\langle \mathbf{A}^* \eta, x \rangle = 1$  pour  $x \in \mathcal{T} \cap C$ . La condition (3.20) implique, d'après le lemme 5.3 de [Vai14], que pour tout  $u \notin \mathcal{T}$ , il existe  $\eta' \in \partial \gamma_C(x^0)$  tel que

$$\langle u, \eta' - \eta \rangle > 0.$$

Par un rapide calcul,  $\langle \mathbf{A}^* \eta, x \rangle < 1$  pour  $x \in \mathcal{S} \cap C$ . Dans le cas de polytopes  $C = P$ , on en déduit que les hyperplans  $H_{\mathbf{A}^* \eta}$  et  $H_\eta$  qui définissent respectivement des faces de  $P$  et  $\mathbf{A}P$  contenant respectivement  $x^0$  et  $\mathbf{A}x^0$  sont des hyperplans séparateurs. Soit  $b$  une base indexée pour  $P$  et  $\Sigma_b$  son support associé de  $x^0$ , les points extrémaux  $b(i) = b_i$  pour  $i \in \Sigma_b(x^0)$  appartiennent à la face minimale de  $F_P(\tilde{x}^0)$  de  $x^0$  sur  $P$  et ils appartiennent aussi à  $H_{\mathbf{A}^* \eta}$ . Par conséquent,  $F_P(\tilde{x}^0)$  est inclus dans  $H_{\mathbf{A}^* \eta}$  et similairement,  $F_{\mathbf{A}P}(\mathbf{A}\tilde{x}^0)$  est inclus dans  $H_\eta$ .  $H_{\mathbf{A}^* \eta}$  et  $H_\eta$  étant séparateurs, on déduit le b) du théorème 3.2.2.

Ce résultat basé sur la condition source non dégénérée ne permet pas d'assurer l'unicité de tous les vecteurs identifiables. Comme, on l'a vu le certificat dual est lié à hyperplan qui définit une face or seules les faces exposées peuvent être définies par des hyperplans. Dans le cas où la face minimale de  $x^0$  n'est pas une face exposée, on ne pourra pas satisfaire la condition source non dégénérée.

Vaiter [Vai14] définissent d'autres conditions nécessaires d'identifiabilité. Il montre que pour une fonction de régularisation  $J$  convexe et continue sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $x^0$  est identifiable si la restriction de  $\mathbf{A}$  sur le cône tangent  $T_{\text{slév}_{x^0}J}(x^0)$  à l'ensemble des sous-niveaux de  $J$  en  $x^0$  est injective. À partir de ce résultat, ils généralisent la *Null Space Property* [DH01] pour des fonctions de régularisation convexes, propres, bornées et à valeurs finies pour  $\mathbb{R}^n$ . On note l'ensemble de ces fonctions  $\Gamma_c^+(\mathbb{R}^n)$ . Le théorème sur la condition source non dégénérée découle directement du théorème précédent.

On peut schématiser les liens entre les normes qui nous intéressent, nos jauges et  $\Gamma_c^+(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $\Gamma_C$  l'ensemble des jauges telles que  $C$  est un ensemble convexe borné, fermé de  $\mathbb{R}^n$  et contenant l'origine dans son intérieur et pour un opérateur d'analyse  $D$  surjectif, on

$$\{\|\cdot\|_1, \|D^*\cdot\|_1, \|\cdot\|_{1,2}\} \subset \Gamma_C \subset \Gamma_c^+(\mathbb{R}^n). \quad (3.21)$$

Soit  $\Gamma_P$  l'ensemble des jauges telles que  $P$  est un polytope et  $\Gamma_{P_H}$  l'ensemble des jauges telles que  $P_H$  est un polyèdre, on a

$$\{\|\cdot\|_1, \|D^*\cdot\|_1\} \subset \Gamma_P \subset \Gamma_{P_H} \subset \Gamma_c^+(\mathbb{R}^n). \quad (3.22)$$

De plus, pour un opérateur d'analyse arbitraire,  $\|D^*\cdot\|_1 \subset \Gamma_{P_H} \subset \Gamma_c^+(\mathbb{R}^n)$ .

Dans ce manuscrit, on s'intéresse en priorité à des régularisations qui promeuvent la parcimonie les minimisations  $\ell^1$  synthèse et analyse et la minimisation par block qui seront explicitées dans le chapitre suivant. Comme dit précédemment, ces résultats ne couvrent pas le problème analyse pour un opérateur d'analyse quelconque contrairement à [VPF13] mais seulement pour un opérateur d'analyse surjectif. Le cas d'une régularisation analyse arbitraire sera ramené au cas d'un opérateur d'analyse surjectif. Au delà de la parcimonie, nos résultats s'appliquent directement à d'autres normes telles que la norme  $\ell^\infty$  dont la boule unité est l'hypercube.

Nos résultats sont certes moins généraux que ceux de [VPF13, VGFP15] mais ils assurent une condition nécessaire et suffisante pour les normes qui nous intéressent.

Globalement, toute condition d'unicité d'une solution basée sur la condition source, il existe  $\eta \in \mathbb{R}^m$  tel que  $\mathbf{A}^*\eta \in \partial R(x^0)$ , ou sa version non dégénérée,  $\mathbf{A}^*\eta \in \text{ri}(\partial R(x^0))$ , est équivalente à notre condition d'identifiabilité. Par exemple, Grasmair [Gra11] applique la condition source pour des fonctions de régularisation positivement homogènes qui couvrent notre cas. Nos travaux apportent une compréhension géométrique. De plus, la géométrie du problème permet de minimiser les bornes de robustesse au bruit à l'aide d'un certificat dual optimal qui prend tout son sens dans la géométrie du problème comme on le verra dans la partie sur la robustesse au bruit.



# Chapitre 4

## Cas particuliers et algorithmes associés

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Régularisation parcimonieuse de type synthèse . . . . .</b>	<b>46</b>
4.1.1	Condition Source . . . . .	46
4.1.2	Interprétation géométrique . . . . .	48
4.1.3	Certificats duaux . . . . .	51
<b>4.2</b>	<b>Régularisations avec des jauges de polytopes et régularisations à l'analyse . . . . .</b>	<b>53</b>
4.2.1	Régularisations avec des jauges de polytopes . . . . .	53
4.2.2	Cas particulier : Minimisations $\ell^1$ analyse . . . . .	58
<b>4.3</b>	<b>Régularisation parcimonieuse de type bloc . . . . .</b>	<b>63</b>

---

Dans ce chapitre, nous allons expliciter l'application de nos résultats principaux aux cas particuliers qui nous intéressent : la norme  $\ell^1$  synthèse, la semi-norme  $\ell^1$  analyse et la norme  $\ell^{1,2}$ . On explicite pour chacune de ces normes l'ensemble convexe  $C$  de la jauge correspondante à cette norme c'est à dire  $\gamma_C(\cdot) = \|\cdot\|_1$  pour le cas synthèse. Dans un premier temps, la norme  $\ell^1$  synthèse est étudiée. Les résultats sont connus de la littérature et ils permettent d'illustrer la géométrie du problème dans un cas "simple". Ensuite, il est présenté le cas où  $C$  est un polytope ce qui est le cas pour la norme  $\ell^1$  synthèse et le cas  $\ell^1$  analyse quand elle est une norme. On propose un algorithme pour vérifier les conditions d'identifiabilité quand on connaît l'ensemble des points extrémaux du polytope. On montre dans cette section que le cas analyse peut toujours se ramener à une régularisation plus simple où l'opérateur d'analyse est surjectif. Enfin, on présente le cas de la minimisation bloc et un algorithme pour vérifier l'identifiabilité via les faces minimales.

## 4.1 Régularisation parcimonieuse de type synthèse

Dans ce chapitre, nous allons considérer le cas particulier de la régularisation synthèse  $R(\cdot) = \|\cdot\|_1$ . On a vu en introduction que la minimisation  $\ell^1$  synthèse a été profondément étudiée depuis son introduction dans la communauté du traitement et signal par Donoho et al [DJ94, CDS98]. Au fil des années, plusieurs conditions sont apparues pour assurer l'unicité d'une solution ainsi que l'équivalence avec la pseudo norme  $\ell^0$ . La plupart de ces conditions ne sont que suffisantes or notre objectif est de caractériser au mieux la minimisation  $\ell^1$  synthèse. On cherchera donc à avoir une condition nécessaire et suffisante d'identifiabilité. Dans la suite du chapitre, on ne traitera pas l'équivalence  $\ell^0 - \ell^1$  et on se concentrera exclusivement sur la minimisation  $\ell^1$  synthèse.

Au vu de leur performance limitée, les critères dit « uniformes » comme le spark, la cohérence mutuelle ou encore le RIP ainsi que leurs variantes ne seront bien entendu pas couverts. De même, on ne s'intéressera qu'aux critères dit « non uniformes » nécessaires et suffisants ou ceux qui offrent des performances décentes. Tous les critères qui assurent des performances correctes sont basées implicitement ou indirectement sur la condition source. On présentera ces différents critères et on les mettra en lien avec nos travaux. Ils seront finalement évalués numériquement.

Pour évaluer ces performances, on va utiliser un outil visuel communément utilisé : la transition de phase. La transition de phase trace le ratio des vecteurs identifiables en fonction du degré de parcimonie des vecteurs c'est à dire le nombre de composantes non nulles du vecteur. Pour un opérateur donné, cela permet d'estimer une limite du degré de parcimonie qu'une solution doit avoir pour espérer être reconstruite par la minimisation  $\ell^1$  synthèse. En comparant ces résultats aux transitions de phase des critères c'est à dire le ratio de vecteurs pour lesquels le critère est vérifié en fonction du degré de parcimonie, on a un aperçu des performances du critère.

Comme dans le chapitre précédent, nous souhaitons retrouver le vecteur  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  qui a subi une transformation modélisée par l'opérateur linéaire  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  à partir de  $y = \mathbf{A}x^0$  en résolvant le problème suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_1 \text{ s.c. } \mathbf{A}x = y. \quad (4.1)$$

### 4.1.1 Condition Source

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, la condition source est une condition nécessaire et suffisante de minimalité. Dans le cas de minimisation  $\ell^1$ , elle devient

**Proposition 4.1.1** (Condition Source [GSH11]).  *$x^*$  est un minimiseur de (1.5) si et seulement s'il existe un vecteur  $\eta \in \mathbb{R}^m$  tel que*

$$\mathbf{A}^*\eta \in \partial\|x^*\|_1$$

où un tel  $\eta$  est un certificat dual pour  $x^*$ . Un avantage de la norme  $\ell^1$  est la décomposabilité de sa sous-différentielle. Grâce à cela, on peut détailler un peu plus cette condition source dans ce cas particulier. Pour un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  dont le support est  $I$ , on sait que la sous différentielle de la norme  $\ell^1$  est

$$\partial\|x\|_1 = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u_I = \text{sign}(x_I) \text{ et } \|u_J\|_\infty \leq 1\} \quad (4.2)$$

où  $J = I^c$  est le complémentaire de  $I$ . À partir de cette sous-différentielle, on peut expliciter un certificat dual pour le problème de minimisation synthèse.

**Lemme 4.1.2** (Certificat dual [GSH11]). *un vecteur  $\eta \in \mathbb{R}^m$  est un certificat dual d'une solution  $x \in \mathbb{R}^n$  de (1.5) et de support  $I$  si et seulement si*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_I^* \eta &= \text{sign}(x_I) \\ \|\mathbf{A}_J^* \eta\|_\infty &\leq 1 \end{aligned}$$

Différent travaux [Fuc04] ont développé à partir ce corollaire une condition source renforcée en transformant l'inégalité de la deuxième équation par une inégalité stricte et en rajoutant une contrainte d'injectivité sur la restriction de la matrice  $\mathbf{A}$  au support  $I$ . Plus précisément,

**Définition 4.1.3** (Condition source non-dégénérée ou renforcée). *Soit  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  de support  $I$ ,  $x^0$  vérifie la condition source non dégénérée s'il existe  $\eta \in \mathbb{R}^m$  tel que*

$$\langle \eta, a_i \rangle = \text{sign}(x_i^0) \text{ si } i \in I; \quad (4.3)$$

$$|\langle \eta, a_j \rangle| < 1 \text{ si } j \notin I; \quad (4.4)$$

$\mathbf{A}_I$  est injective .

Un vecteur qui vérifie la condition source non dégénérée est nécessairement l'unique minimiseur de (1.5). Ce résultat est un résultat clé de l'état de l'art.

**Théorème 4.1.4** ([Plu07, Gra11]). *Soit  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{A}$  un opérateur linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ ,  $I = \text{supp}(x^0)$  et  $y = \mathbf{A}x$ .*

*Si  $x^0$  est l'unique solution de (1.5) si et seulement s'il vérifie la condition source non dégénérée 4.1.3.*

L'unicité d'une solution se résume finalement à la recherche d'un certificat dual qui vérifie la condition source non dégénérée. Un certificat dual qui vérifie les deux premières conditions de la condition 4.1.3 est appelé *certificat dual fort* ou *non dégénéré*. Les travaux de Vaïter et al [VGFP15] généralisent ces résultats pour une classe plus grande de régularisateurs et s'appuient sur la décomposabilité de la sous différentielle [CR13]. Les deux premières conditions de la condition source non dégénérée veulent tout simplement dire que l'image d'un certificat dual fort de  $x^0$  par l'adjoint de  $\mathbf{A}$  appartient à l'intérieur relatif de la sous différentielle de la norme  $\ell^1$  au point  $x^0$ . Soit pour un certificat dual fort de  $x^0$ ,  $\mathbf{A}^* \eta \in \text{ri}(\partial\|x^0\|_1)$ .



### 4.1.2 Interprétation géométrique

Le chapitre précédent montre le lien très étroit entre l'existence d'un certificat dual fort et les faces minimales. Dans cette section, on va s'atteler à expliciter la correspondance entre la condition source et la géométrie du problème. Cette équivalence a déjà été démontrée par Donoho [Don05]. Il montre que (1.5) est égal à

$$\min \{ \lambda > 0 \mid \frac{1}{\lambda} y \in \mathbf{A}B_1 \}. \quad (4.5)$$

où  $B_1$  est la boule unité de la norme  $\ell^1$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

$$B_1 = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 \leq 1 \}. \quad (4.6)$$

Donoho démontre qu'un signal est une solution au problème (1.5) si et seulement si la face du polytope  $\mathbf{A}B_1$  définie par le support de cette solution est sur la frontière de ce polytope. On parle de condition topologique. Plus, le polytope  $\mathbf{A}B_1$  est l'enveloppe convexe des  $\{\pm a_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$  et la face  $F_{x^0}$  de  $\mathbf{A}B_1$  est définie par le support  $I$  de  $x^0$  est l'enveloppe convexe de  $\{\text{sign}(x_i)a_i, i \in I\}$ . Pour que  $x^0$  soit une solution de (1.5), il faut que  $F_{x^0}$  soit sur la frontière de  $\mathbf{A}B_1$ . Le théorème de Hahn-Banach appliqué à une telle face et l'intérieur de  $\mathbf{A}B_1$  assure qu'il existe au moins un hyperplan support de  $\mathbf{A}B_1$  contenant  $F_{x^0}$ . Soit il existe  $\eta \in \mathbb{R}^n$  tel que  $F_{x^0} = H_\eta \cap \partial\mathbf{A}B_1$  où  $H_\eta$  est l'hyperplan défini par  $\eta$ . On déduit de tout cela, le système suivant

$$\begin{aligned} \langle \eta, a_i \rangle &= \text{sign}(x_i^0) & i \in I \\ |\langle \eta, a_j \rangle| &\leq 1 & j \notin I. \end{aligned}$$

On retrouve la condition source pour  $x^0$ . La condition source est équivalente à l'existence d'un hyperplan support au point  $x^0$  et cet hyperplan définit une face de  $\mathbf{A}B_1$  contenant  $\mathbf{A}x^0$ . Par conséquent, les deux premières conditions de la condition source renforcée sont équivalentes à l'existence d'un hyperplan séparateur au point  $x^0$ . Cette conclusion est à rapprocher des résultats du chapitre 3.

#### Support signé

Pour appliquer les résultats du chapitre 3, on a un premier temps besoin d'appliquer le support généralisé à ce problème. On sait que la norme  $\ell^1$  est équivalente à la jauge de sa boule unité soit

$$\|x\|_1 = \delta_0 = \inf \{ \delta > 0 \mid x \in \delta B_1 \}. \quad (4.7)$$

De plus la boule unité  $B_1$  s'écrit comme  $B_1 = \text{Conv}\{\pm e_i \mid i \in \{1 \dots n\}\}$  où  $(e_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$  sont les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Les points  $(\pm e_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$  sont les points extrémaux de  $B_1$ . Pour toute norme, leur boule unité est fermée et bornée, on peut donc remplacer l'infimum par un minimum pour  $x$  différent de 0.

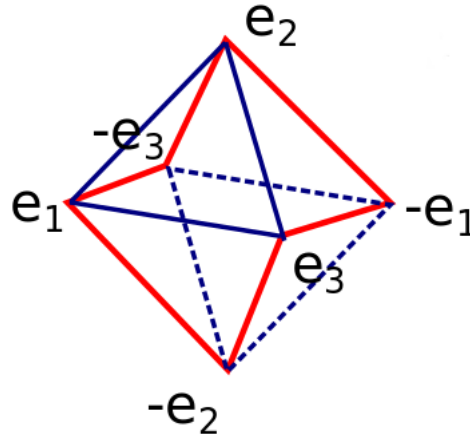


FIGURE 4.1 – La boule unité  $\ell^1$  dans  $R^3$ .

Dans ce cas précis, le support généralisé défini dans le chapitre 3 coïncide avec le support classique. Les faces de dimension strictement positive de la boule unité de la norme  $\ell^1$  sont des simplexes, il n'y a donc qu'une unique façon d'écrire un vecteur qui est dans leur intérieur relatif.

Pour un vecteur non nul quelconque  $x \in \mathbb{R}^n$ , on sait que  $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$  où  $x_i$  est la  $i$ -ième composante de  $x$  et  $I$  son support. De plus, comme vu dans le chapitre 3 et en utilisant (4.7),  $\frac{x}{\|x\|_1}$  est contenu dans l'intérieur relatif de sa face minimale  $F_{B_1}(\tilde{x})$ . Les faces de la boule unité  $B_1$  étant des simplexes, on peut donc écrire  $x$  comme une unique combinaison convexe stricte de points extrémaux de  $F_{B_1}(\tilde{x})$ .

$$x = \|x\|_1 \sum_{k \in I} \alpha_k \sigma_k e_k, \quad \sum_{k \in I} \alpha_k = 1, \quad \forall k \in I, 0 < \alpha_k \leq 1, \quad (\sigma_k)_{k \in I} \in \{\pm 1\} \quad (4.8)$$

Les vecteurs  $(\sigma_k e_k)_{k \in I}$  sont les point extrémaux de  $F_{B_1}(\tilde{x})$ .

On peut introduire la notion de support signé  $I_{B_1}(x)$  avec le couple

$$I_{B_1}(x) = (I(x), \sigma(x)) \quad (4.9)$$

où  $I(x) = I$  est le support conventionnel de  $x$  et  $\sigma(x) \in \mathbb{R}^{|I|}$  est un vecteur signe tel que pour  $k \in I$ , sa  $k$ -ième composante est  $\text{sign}(x_k)$  de (4.8).

On a  $\mathbf{A}B_1 = \text{Conv}\{\pm a_i, i \in \{1 \dots n\}\}$  et les vecteurs  $(\pm a_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$  sont les points extrémaux de  $\mathbf{A}B_1$ . On pose  $\lambda_0$  comme le minimum du problème (1.5). On note  $F_{\mathbf{A}B_1}(\tilde{y})$  la face minimale de  $\frac{y}{\lambda_0}$ . Similairement à  $x$ , on peut définir le support signé de  $y$   $I_{\mathbf{A}B_1}(y) = (I(y), \sigma(y))$  tel que pour tout  $j \in I(y)$ ,  $\sigma(y)_j a_j \in F_{\mathbf{A}B_1}(\tilde{y})$  qui sont les points extrémaux de  $F_{\mathbf{A}B_1}(\tilde{y})$ .

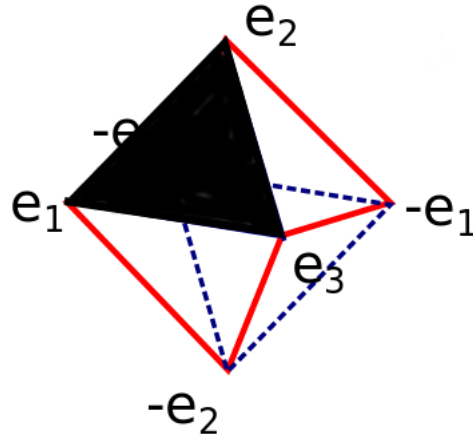


FIGURE 4.2 – la face minimale de la boule unité  $\ell^1$  de  $x = (1, 1, 1)$ .

$$y = \lambda_0 \sum_{j \in I(y)} \beta_j \sigma(y)_j a_j, \quad \sum_{j \in I(y)} \beta_j = 1, \quad (j \in I(y), 0 < \beta_j \leq 1), \quad ((\sigma_j)_{j \in I(y)} \in \{\pm 1\}) \quad (4.10)$$

Sachant que  $y = \mathbf{A}x_0$ , on remarque que  $I \subset I(y)$  et  $\sigma(x) = \sigma(y)_I$ .

En remarquant que le support signé n'est rien d'autre que le support associé défini dans la section précédente, on peut directement appliquer le théorème 3.2.2 et 3.2.6 avec  $C = B_1$  qui donne le théorème suivant pour le cas  $\ell^1$  synthèse :

**Théorème 4.1.5.** *Soit  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  et  $y = \mathbf{A}x^0$ , alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- a)  $x^0$  est identifiable.
- b) 1)  $\mathbf{A}_{\text{Vect}(F_{B_1}(\tilde{x}^0))}$  est injective.  
2)  $(\mathbf{A})^{-1} F_{\mathbf{A}B_1}(\tilde{y}) = F_{B_1}(\tilde{x}^0)$
- c) 1)  $\mathbf{A}_I$  est injective.  
2)  $I_{\mathbf{A}B_1}(y) = I_{B_1}(x^0)$ .

Le c) de ce théorème illustre bien l'équivalence avec la condition source renforcée. En effet, la face minimale  $F_{\mathbf{A}B_1}(\tilde{y})$  implique l'existence d'un hyperplan séparateur pour cette face, soit l'existence d'un vecteur  $\eta \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$\begin{aligned} \langle \eta, u \rangle &= 1 & u \in F_{\mathbf{A}B_1}(\tilde{y}) \\ \langle \eta, v \rangle &< 1 & v \notin F_{\mathbf{A}B_1}(\tilde{y}) \end{aligned}$$

or  $F_{\mathbf{A}B_1}(y) = \text{Conv}\{\sigma(y)_i a_i | i \in I(y)\}$ , donc cela est équivalent à

$$\begin{aligned} \langle \eta, a_i \rangle &= \sigma(y)_i & i \in I(y) \\ |\langle \eta, a_j \rangle| &< 1 & j \notin I(y). \end{aligned}$$

De plus  $(\mathbf{A})^{-1}F_{\mathbf{A}B_1}(\tilde{y}) = F_{B_1}(\tilde{x}^0)$  est équivalent à  $I_{\mathbf{A}B_1}(y) = I_{B_1}(x^0)$  ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \langle \eta, a_i \rangle &= \sigma(y)_i & i \in I(x^0) \\ |\langle \eta, a_j \rangle| &< 1 & j \notin I(x^0). \end{aligned}$$

On retrouve les mêmes résultats que l'état de l'art. Pour la minimisation  $\ell^1$  synthèse, sous hypothèse d'injectivité de la restriction de  $\mathbf{A}$  au support, on peut au choix chercher un certificat dual non dégénéré ou vérifier l'égalité des faces minimales ou des supports d'un signal et de son image par  $\mathbf{A}$ .

### 4.1.3 Certificats duaux

Il y a diverses stratégies pour construire un certificat dual dans la littérature. En principe, la stratégie commune est de construire un pré-certificat, c'est à dire un vecteur qui vérifie (4.3), avec différentes contraintes et a posteriori de vérifier s'il est bien un certificat dual non dégénéré, c'est à dire qu'il vérifie (4.4).

Un des tous premiers pré-certificats à avoir été mis en avant à été le pré-certificat de Fuchs [Fuc04]. En exploitant les conditions d'optimalité de la forme lagrangienne de la minimisation  $\ell^1$  synthèse pour généraliser un résultat sur la cohérence mutuelle, Fuchs a introduit la condition d'irreprésentabilité qui stipule que le pré-certificat de Fuchs est un certificat dual non dégénéré. Le pré-certificat de Fuchs est

**Définition 4.1.6** (pré-certificat de Fuchs). *Soit  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  et son support  $I$  et on suppose que  $\mathbf{A}_I$  soit injectif.*

$$\eta_F = d(x^0) = \mathbf{A}_I^{+*} \text{sign}(x_I^0) \quad (4.11)$$

Dossal [Dos07] a montré lien entre ce pré-certificat et la condition topologique de Donoho. De plus, la condition  $ERC(I) < 1$  de Tropp [Tro06] implique que le pré-certificat de Fuchs est un certificat dual non dégénéré. Duval et al [DP15] montre que quand  $\eta_F$  est un certificat dual non dégénéré, il est celui de norme minimale. Quand le pré-certificat de Fuchs définit un certificat dual non dégénéré, il est celui de norme minimale.

Duval et al [DP15] introduisent différents certificats duaux dans un cadre continu dont le certificat dual de norme minimale qui va nous intéresser dans le cas discret qui est celui de Fuchs et généralisé par Vaiter et al [VGFP15].

**Définition 4.1.7** (certificat de norme minimale). *Soit  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ .*

$$\eta_{min} = \underset{\mathbf{A}^* \eta \in \partial \|x^0\|_1}{\text{argmin}} \|\eta\|_2. \quad (4.12)$$

Le fait qu'il est difficile d'évaluer ce certificat, nous amène à calculer un pré-certificat, plus commode à calculer.

$$\eta_{NM} = \underset{\mathbf{A}_I^* \eta = \text{sign}(x_I^0)}{\operatorname{argmin}} \|\eta\|_2 \quad (4.13)$$

où  $I$  est le support de  $x^0$ .

Un autre pré-certificat très intéressant est celui qui conditionne le critère d'identifiabilité de Vaïter et al [VPDF13]. Il a été développé dans le cadre de la minimisation  $\ell^1$  analyse or comme on l'a vu en introduction, la minimisation  $\ell^1$  synthèse en est un cas particulier. Ils proposent de générer un pré-certificat en minimisant la deuxième condition du théorème 4.1.3, c'est à dire les corrélations avec les colonnes de la matrice qui ne sont pas indexées par le support du signal. Plus précisément,

**Définition 4.1.8 (IC).** Soit  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  et son support  $I$ .

$$\eta_{IC} \in \underset{\mathbf{A}_I^* \eta = \text{sign}(x_I^0)}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{A}_{I^c}^* \eta\|_\infty \quad (4.14)$$

Comme on le verra dans la partie discutant de la robustesse au bruit de la minimisation  $\ell^1$ , les certificats duaux jouent un rôle prépondérant dans la borne de robustesse. Notre objectif a donc été de construire un certificat dual qui assure à la fois l'identifiabilité et à la fois minimise la borne de robustesse au bruit du théorème 5.1.3. On a appelé ce certificat dual, le certificat dual optimal.

**Définition 4.1.9 (pré-certificat optimal).** Soit  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  et  $I$  son support

$$\eta_{opt} = \underset{\mathbf{A}_I^* \eta = \text{sign}(x_I^0)}{\operatorname{argmin}} \frac{\|\eta\|_2}{1 - \|\mathbf{A}_{I^c}^* \eta\|_\infty} \quad (4.15)$$

Du fait de son fort lien avec la robustesse au bruit, le certificat dual optimal sera étudié en détail dans le chapitre 5. On montre que  $\frac{\|\eta\|_2}{1 - \|\mathbf{A}_{I^c}^* \eta\|_\infty}$  est une distance entre deux ensembles convexes dont le calcul revient à calculer la distance d'un point à un convexe. Ici, on ne s'intéressera qu'à l'identifiabilité c'est à dire qu'on a bien un certificat non dégénéré.

Pour tester l'identifiabilité d'un signal avec la minimisation  $\ell^1$  synthèse, plusieurs critères basés, directement ou indirectement, sur la source condition s'offrent à nous. Les différences viennent principalement du type de certificat dual que l'on va rechercher.

## 4.2 Régularisations avec des jauges de polytopes et régularisations à l'analyse

Dans cette section, on reprend les notions précédentes avec un vecteur d'origine  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  qui a subi une transformation par l'opérateur linéaire  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et à partir des données  $y = \mathbf{A}x^0$ , on cherche des conditions d'identifiabilité de  $x^0$  en résolvant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \gamma_C(x) \text{ s.c. } \mathbf{A}x = y. \quad (4.16)$$

On considère dans cette section les cas où  $C$  est un polytope. À la fin, on présente le cas de la minimisation analyse qui est un cas particulier de régularisations de polytopes quand l'opérateur d'analyse est surjectif.

### 4.2.1 Régularisations avec des jauges de polytopes

Dans le cas où l'ensemble  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  est un polytope  $P$ , son image par  $\mathbf{A}$ ,  $Q = \mathbf{A}C$ , est aussi un polytope. Les polytopes ont la particularité d'avoir toutes leurs faces qui sont exposées. Les faces du polytope se définissent avec des hyperplans (H-représentation) : pour une face  $F$  de  $\mathcal{F}(C)$ , il existe un hyperplan support  $H_\eta$  tel que

$$F = H_\eta \cap C. \quad (4.17)$$

Cela équivaut à

$$\begin{aligned} \langle x, \eta \rangle &= 1 & (x \in F) \\ \langle x, \eta \rangle &\leq 1 & (x \in C \setminus F). \end{aligned}$$

Pour tout point  $x \in \mathbb{R}^n$ , sa face minimale  $F_C(\tilde{x})$  sur  $C$  est égale à sa face minimale  $F_C^e(\tilde{x})$ . De plus, il existe un hyperplan séparateur  $H_\eta$  tel que

$$\langle x, \eta \rangle = 1 \quad (x \in F_C(\tilde{x})) \quad (4.18)$$

$$\langle x, \eta \rangle < 1 \quad (x \in C \setminus F_C(\tilde{x})). \quad (4.19)$$

La proposition 3.2.1 c) équivaut à trouver, pour qu'un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  soit solution, un hyperplan support  $H_\eta$  de  $Q = \mathbf{A}C$  pour la face minimale  $F_Q(\mathbf{A}\tilde{x})$  tel que  $H_{\mathbf{A}^*\eta}$  soit un hyperplan support de  $C$  pour la face minimale  $F_C(\tilde{x})$ . Combiné à C2) du théorème, on en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 4.2.1.** *Soit  $x^0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $y^0 = \mathbf{A}x^0$ . Le vecteur  $x^0$  est l'unique solution de  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \gamma_C(x)$  s.c.  $\mathbf{A}x = y$  si et seulement si les conditions suivantes sont simultanément vérifiées :*

C1) *La restriction de l'opérateur  $\mathbf{A}$  sur  $\text{Vect}(F_C(x^0))$  est injective ;*

C2) *Il existe un hyperplan séparateur  $H_\eta$  de  $Q$  pour la face minimale  $F_Q(\tilde{y}^0)$  tel que  $H_{\mathbf{A}^*\eta}$  soit un hyperplan séparateur de  $C$  pour la face minimale  $F_C(\tilde{x}^0)$ .*

Si on pose  $\text{Ext}(C) = \{p_i | i \in \Omega = \{1, \dots, n_p\}\}$  et on considère la base indexée  $b : \Omega \leftarrow \text{Ext}(C)$  :

$$b(i) = p_i, \tag{4.20}$$

on peut directement appliquer le théorème 3.2.6. On a ainsi trois conditions nécessaires et suffisantes d'identifiabilité. De plus, Les deux représentations des polytopes, H-représentation et V-représentation, peuvent être utilisés.

On pose  $Q = \mathbf{A}C$  l'image de  $C$  par  $\mathbf{A}$ .

### Support généralisé

On va illustrer ce résultat avec un polytope centro-symétrique et définir un support signé.

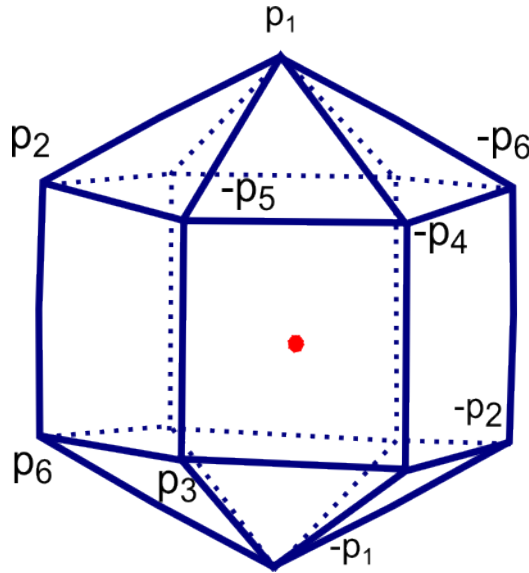


FIGURE 4.3 – un exemple d'un polytope centro-symétrique dans  $\mathbb{R}^3$

On définit  $\text{Ext}(C) = \{\pm p_i | i \in \{1, \dots, p\}\}$  les points extrémaux de  $C$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On définit  $F_C(\tilde{x}^0)$  la face minimale de  $C$  qui contient  $\frac{x^0}{\gamma_C(x^0)}$ .

Soit  $\Omega := \{-1, 1\} \times \{1, \dots, p\}$ , on considère la base indexée  $b : \Omega \leftarrow \text{Ext}(C)$  :

$$b(\sigma, i) := \sigma p_i \quad ((\sigma, i) \in \Omega). \tag{4.21}$$

Son support associé  $\Sigma_b$  est appelé *support généralisé*. De même,  $\mathbf{A}b$  est une base indexée pour  $\mathbf{A}Q$  dans  $\mathbb{R}^m$  avec comme support associé  $\Sigma_{\mathbf{A}b}$ .

La figure 4.4 montre des exemples de face minimales pour la boule unité de la figure 4.3 dont une qui n'est pas un simplexe.

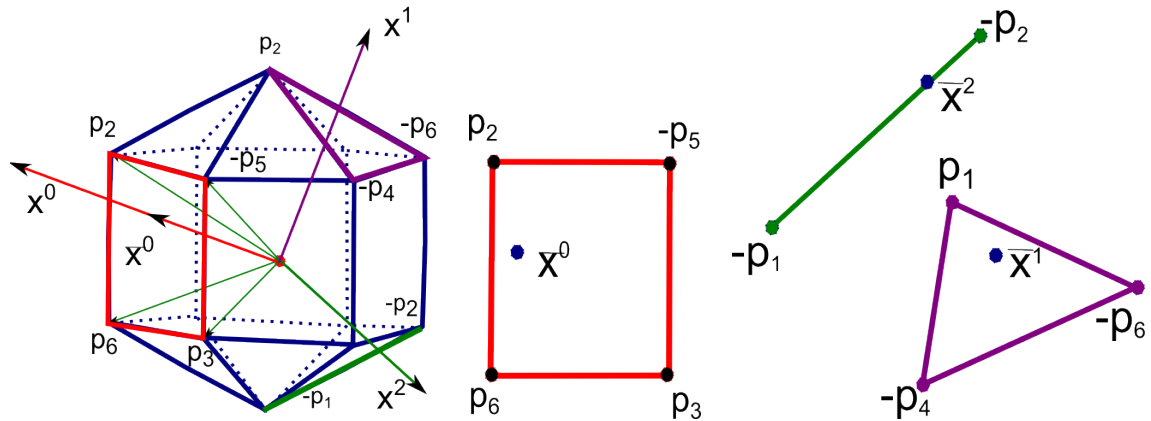


FIGURE 4.4 – un exemple de faces minimales de  $x^0$

### Identifiabilité

En considérant les supports associés  $\Sigma_{Ab}$  et  $\Sigma_b$ , la condition S2) du théorème 3.2.6 devient

$$\Sigma_{Ab}(y^0) = \Sigma_b(x^0). \quad (4.22)$$

Toutes les faces étant exposées, il peut bien évidemment s'écrire avec des certificats duaux.

La figure 4.5 montre un exemple de signal identifiable dans  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^7$  comme espace de mesure.

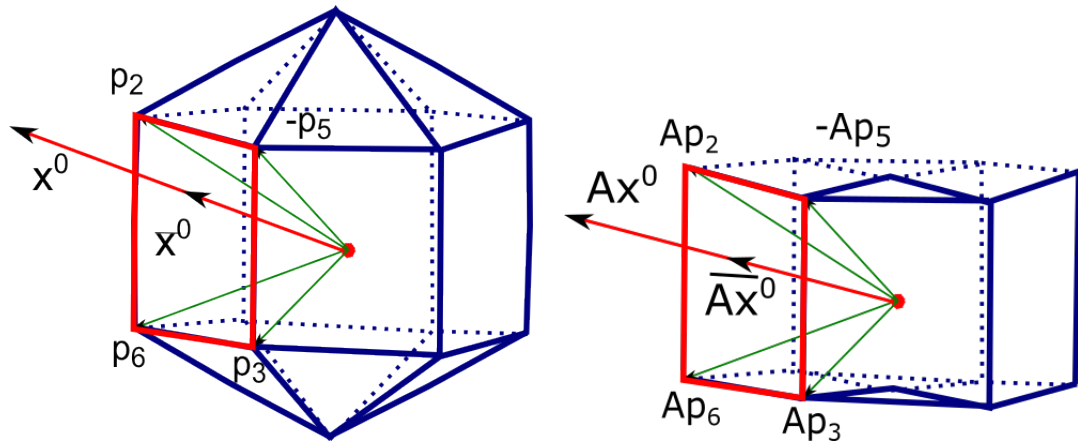


FIGURE 4.5 – un exemple de signal identifiable pour  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

### Calcul du support généralisé pour un polytope

On va décrire ici un algorithme de calcul du support signé. Un polytope  $P$  centro-symétrique peut être vu comme l'image d'une boule  $\ell^1$  d'un espace  $\mathbb{R}^p$  par



un opérateur linéaire  $\mathbf{D} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Soit  $\text{Ext}(B_1^p) = \{\pm e_i, i \in \{1, \dots, p\}\}$  avec  $(e_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  et  $B_1^p$  la boule unité  $\ell^1$  de  $\mathbb{R}^p$  et  $\Omega := \{-1, 1\} \times \{1, \dots, p\}$ , on considère la base indexée  $b : \Omega \rightarrow \text{Ext}(B_1^p)$  :

$$b(\sigma, i) := \sigma e_i \quad ((\sigma, i) \in \Omega). \quad (4.23)$$

$\mathbf{D}b$  est une base indexée pour  $\mathbf{D}B_1^p$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec comme support associé  $\Sigma_{\mathbf{D}b}$ .

Le calcul du support généralisé d'un vecteur peut être fait en itérant une projection dans une enveloppe convexe. La proposition suivante détaille comment et pourquoi cette algorithmes fonctionne qui essentiellement suit la caractérisation du support généralisé par (4.18) et (4.19) :

**Proposition 4.2.2.** *On suppose  $\mathbf{D}$  est un opérateur d'analyse surjectif de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $x^0 \neq 0$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma_{\mathbf{D}b}(x^0)$  son support généralisé et  $\mathcal{M}(x^0)$  est l'enveloppe affine de  $\{\mathbf{D}e_i : i \in \Sigma_{\mathbf{D}b}(x^0)\}$ .*

a) *On suppose qu'un vecteur  $h_0 \in \mathbb{R}^d$  peut s'écrire comme une combinaison convexe stricte*

$$h_0 = \sum_{i \in I} \alpha_i \sigma_i e_i \quad \left( \sum_{i \in I} \alpha_i = 1, 1 \geq \alpha_i > 0, i \in I, \sigma_i \in \{-1, 1\} \right). \quad (4.24)$$

avec  $\sigma = (\sigma_i)_{i \in I}$  et que  $\mathbf{D}h_0$  appartient à  $\mathcal{M}(x^0)$ . Alors  $(\sigma, I)$  est un sous-ensemble de  $\Sigma_{\mathbf{D}b}(x^0)$ .

b) *Toute solution  $h_0 \in \mathbb{R}^d$  du problème  $\ell^1$  synthèse*

$$\min_{h \in \mathbb{R}^d} \|h\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{D}h = x^0. \quad (4.25)$$

vérifie les hypothèses de a). En particulier, son support est un sous-ensemble de  $\Sigma_{\mathbf{D}b}(x^0)$ .

c) *On suppose que  $I$  est un sous-ensemble de  $\Sigma_{\mathbf{D}b}(x^0)$  et  $P$  est l'enveloppe convexe de  $\{\pm \mathbf{D}e_j : j \in \{1, \dots, p\} \setminus I\}$ . Alors*

$$\text{dist}(\mathcal{M}(x^0), P) > 0 \quad (4.26)$$

si et seulement si  $I = \Sigma_{\mathbf{D}b}(x^0)$ .

Avec cette proposition, on peut expliciter notre algorithme de calcul du support signé généralisé :

---

**Algorithm 1** Calcul du  $\mathbf{D}$ -support

---

- 1: Calcul d'une solution arbitraire  $h_0$  de (4.25)  
 $h_0 = \sum_{i \in I_0} \alpha_i e_i \quad (\sum_{i \in I} \alpha_i = 1, 1 \geq \alpha_i > 0, i \in I_0)$ ;
  - 2: Initialisation :  
 $I := I_0$ ;  
 $\sigma(i) := \text{sign}(\alpha_i) \quad (i \in I)$ ;  
 $q := \mathbf{D}_I^+ \sigma$  et  $q^+ := q^* / \|q\|_2^2$ ;
  - 3: **repeat**
  - 4:   Calcul de la matrice de projection  $\Pi := \mathbf{I}_{\mathbf{R}^n} - \mathbf{D}_I \mathbf{D}_I^+$ ;
  - 5:   Soit  $\tilde{d}_j := \Pi d_j \quad (j \in \{1, \dots, q\} \setminus I)$ ;
  - 6:   Calcul de  $w$  le projeté de  $q^+$  sur l'enveloppe convexe  $\tilde{P}$  de  $\{\pm \tilde{d}_j : j \in \{1, \dots, q\} \setminus I\}$ , avec  
 $w = \sum_{j \in J} \beta_j \tilde{d}_j \quad (\sum_{i \in I} \beta_i = 1, 1 \geq \beta_i > 0, j \in J)$
  - 7:   **if**  $q^+ = w$  **then**
  - 8:     On met à jour :  
 $I := I \cup J$ ;  
 $\sigma(j) := \text{sign}(\beta_j) \quad (j \in J)$ ;
  - 9:   **end if**
  - 10: **until**  $q^+ \neq w$ ;
  - 11:  $\Sigma_{\mathbf{D}b}(x^0) := (\sigma, I)$ .
- 

L'étape de pré-initialisation (problème (4.25)) peut être faite avec tout algorithme résolvant la minimisation  $\ell^1$  synthèse, tel que les algorithmes de programmation linéaire. Le fait que nous commençons par une solution  $h_0$  assure, par la proposition 4.2.2 b), que l'ensemble d'indices de départ  $I_0$  est bien un sous-ensemble de  $\Sigma_{\mathbf{D}b}(x^0)$ .

Ensuite, il a été montré que le vecteur  $q^+$  dans l'algorithme appartient à  $\mathcal{M}(x^0)$  et que sa projection  $w$  sur le convexe  $\tilde{P}$  (étape 6 de l'algorithme) vérifie

$$\text{dist}(\mathcal{M}(x^0), P) = \|q^+ - w\|_2. \quad (4.27)$$

Par conséquent, il y a deux possibilités dans la boucle de l'algorithme :

1) Soit  $q^+ = w$ , ce qui veut dire que  $w$  appartient à  $\mathcal{M}(x^0)$ . Mais alors, son support  $J$  est aussi inclus dans  $\Sigma_{\mathbf{D}b}(x^0)(x^0)$ , par la proposition 4.2.2 a) appliquée au vecteur  $h = \sum_{j \in J} \beta_j e_j$ . Dans ce cas, le support  $I$  est agrandi en ajoutant  $J$  et le vecteur signe  $\sigma$  correspondant et on recommence la boucle ;

b) Soit  $q^+ \neq w$ , mais cela veut dire que la distance (4.27) est strictement positive, ce qui implique, par la proposition 4.2.2 c), que  $I$  couvre la totalité du support généralisé  $\Sigma_{\mathbf{D}b}(x^0)$ . Dans ce cas, l'algorithme s'arrête.

Dans notre implémentation, on reprend l'algorithme GJK [GJK88].

On remarque que cet algorithme, implicitement, calcule aussi la face minimale de  $x^0$  dans le polytope  $\mathbf{D}B_1^p$ . Tout autre algorithme pour calculer les faces minimales

de polytopes peut bien entendu être aussi utilisé dans ce cas. Il est probable qu'il en existe déjà mais nous n'avons pas trouvé de référence dans la littérature.

### 4.2.2 Cas particulier : Minimisations $\ell^1$ analyse

Les normes  $\ell^1$  synthèse et analyse si l'opérateur d'analyse  $\mathbf{D}$  est surjectif peuvent être exprimées comme des jauges d'ensemble convexes qui sont des polytopes. Dans le cas de la minimisation synthèse, comme vu dans la section précédente, le polytope n'est autre que la boule unité  $\ell^1$  de  $\mathbb{R}^n$  et le support généralisé est le support classique. Dans le cas de la minimisation analyse, le polytope est moins évident.

On considère le problème suivant : un vecteur  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  qui subit une transformation linéaire  $y^0 = \mathbf{A}x^0$  avec  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  et problème de minimisation suivant

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{D}^*x\|_1 \text{ s.c. } \mathbf{A}x = y, \quad (4.28)$$

pour un opérateur d'analyse  $\mathbf{D}^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Plus précisément, on souhaite déterminer l'ensemble  $C$  tel que  $\gamma_C(\cdot) = \|\mathbf{D}^*\cdot\|_1$ .

On sait que (lemme 2.1.3) pour un ensemble convexe fermé  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  et sa jauge  $\gamma_C$  associée,  $C$  peut être défini en fonction de sa jauge :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \gamma_C(x) \leq 1\}. \quad (4.29)$$

On désire  $C$  tel que  $\|\mathbf{D}^*x\|_1 = \gamma_C(x)$  alors

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{D}^*x\|_1 \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{D}^*x \in B_1\}, \end{aligned}$$

où  $B_1$  est la boule unité de la norme  $\ell^1$  dans  $\mathbb{R}^d$ . On remarque que cet ensemble est évidemment non vide.

Pour  $x \in \mathbb{R}^n = \text{Im } \mathbf{D} \oplus \text{Ker } \mathbf{D}^*$ , il existe  $x_{\text{Im } \mathbf{D}} \in \text{Im } \mathbf{D}$  et  $x_{\text{Ker } \mathbf{D}^*} \in \text{Ker } \mathbf{D}^*$  tels que  $x = x_{\text{Im } \mathbf{D}} + x_{\text{Ker } \mathbf{D}^*}$ . Pour un élément  $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{D}^*x \in B_1\}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^*x \in B_1 &\Leftrightarrow \mathbf{D}^*(x_{\text{Im } \mathbf{D}} + x_{\text{Ker } \mathbf{D}^*}) \in B_1 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{D}^*x_{\text{Im } \mathbf{D}} \in B_1 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{D}^*x_{\text{Im } \mathbf{D}} = \alpha \in B_1 \text{ et } \alpha \in \text{Im } \mathbf{D}^* \\ &\Leftrightarrow \mathbf{D}^*x_{\text{Im } \mathbf{D}} \in B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*. \end{aligned}$$

Or  $\mathbf{D}^*x_{\text{Im } \mathbf{D}} = \mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*x_{\text{Im } \mathbf{D}}$ , on a donc  $\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*x_{\text{Im } \mathbf{D}} = \alpha$  et  $x_{\text{Im } \mathbf{D}} = (\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+\alpha$  avec  $\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^* : \text{Im } \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$  qui est injectif. On en déduit que  $x_{\text{Im } \mathbf{D}} \in (\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+(B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*)$  avec  $(\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+ : \text{Im } \mathbf{D}^* \rightarrow \text{Im } \mathbf{D}$  et

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{D}^*x \in B_1\} = (\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+(B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*) \oplus \text{Ker } \mathbf{D}^*. \quad (4.30)$$

## Chapitre 4. Cas particuliers et algorithmes associés

On remarque que cet ensemble  $C$  est fermé et absorbant. De plus, dans le cas d'un opérateur d'analyse arbitraire, on constate que  $C$  n'est pas borné et est donc un polyèdre mais pas un polytope qui, lui, est un polyèdre convexe borné.

Par conséquent, pour appliquer nos résultats il faut différencier où  $\mathbf{D}$  est surjectif et le cas général. On montrera aussi que le cas général peut se ramener à un cas surjectif à l'aide d'une projection.

Dans le cas où l'opérateur d'analyse  $\mathbf{D}$  est surjectif, cela implique directement que la régularisation  $R(\cdot) = \|\mathbf{D}^* \cdot\|_1$  est une norme et on se retrouve dans le contexte de notre théorème principal.  $\text{Im } \mathbf{D} = \mathbb{R}^n$  et  $\text{Ker } \mathbf{D}^* = \{0\}$ , donc  $(\mathbf{D}^*_{|\text{Im } \mathbf{D}})^+ = (\mathbf{D}^*)^+$  et

$$C = (\mathbf{D}^*)^+(B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*) = \{x \in \mathbb{R}^n | R(x) \leq 1\}. \quad (4.31)$$

$\gamma_C$  définit une norme dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $C$  qui est un polytope et on peut donc directement appliquer nos résultats d'identifiabilité. Tout cela à condition de pouvoir calculer les points extrémaux de ce polytope qui est l'image d'une section d'une boule unité  $\ell^1$  par un opérateur linéaire. Le calcul de ses points extrémaux est très difficile et coûteux en temps de calcul.

### Cas général

On ne fait maintenant aucune hypothèse sur l'opérateur d'analyse  $\mathbf{D}$ . Nous allons montrer qu'à l'aide d'une projection le problème peut se ramener au cas où  $\mathbf{D}$  est surjectif.

On suppose que l'opérateur  $\mathbf{D}$  est quelconque.  $\mathbf{D}^*$  peut donc posséder un noyau  $\text{Ker } \mathbf{D}^* \neq \{0\}$ . On pose  $R(x) = \|\mathbf{D}^* x\|_1$ . Soit

$$R(x^0) = R(x^0 + d) \quad (x^0 \in \mathbb{R}^n, d \in \text{Ker } \mathbf{D}^*), \quad (4.32)$$

On peut montrer que  $x^0 + d$  est aussi un vecteur identifiable.

**Lemme 4.2.3.** *Soit  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  et  $d \in \text{Ker } \mathbf{D}^*$*

*Si  $x^0$  est l'unique solution de (4.28) avec  $y = \mathbf{A}x^0$  alors  $x^0 + d$  est aussi l'unique solution de (4.28) avec  $y = \mathbf{A}(x^0 + d)$ .*

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\mathbf{A}x = \mathbf{A}(x^0 + d)$ .

$$\forall d \in \text{Ker } \mathbf{D}^*, \mathbf{A}(x - d) = \mathbf{A}x^0 \text{ et } R(x) = R(x - d) > R(x^0) = R(x^0 + d). \quad \square$$

On a donc une régularisation  $R$  qui est une semi norme et sa boule unité est un ensemble cylindrique non borné.

$$C = (\mathbf{D}^*_{|\text{Im } \mathbf{D}})^+(B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*) \oplus \text{Ker } \mathbf{D}^*. \quad (4.33)$$

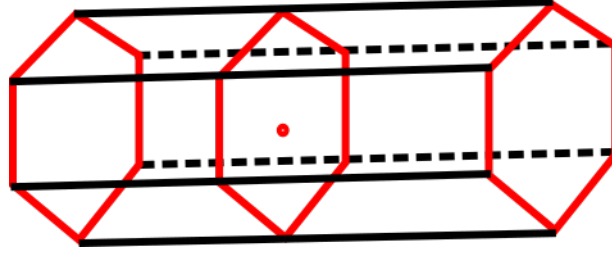


FIGURE 4.6 – un exemple de boule unité avec une base polyédrique

### Condition préliminaire

L'opérateur  $\mathbf{D}^*$  possédant un noyau non trivial, il est essentiel de poser une condition préliminaire entre  $\mathbf{D}^*$  et  $\mathbf{A}$ .

**Définition 4.2.4** (Condition minimale d'identifiabilité). Soit  $\mathbf{D} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\text{Ker } \mathbf{D}^* \cap \text{Ker } \mathbf{A} = \{0\} \quad (4.34)$$

Si cette condition n'est pas vérifiée alors aucun vecteur ne peut être identifiable.

En effet, supposons qu'il existe un vecteur  $u \neq 0$  dans  $\text{Ker } \mathbf{D}^* \cap \text{Ker } \mathbf{A}$  alors on a  $\mathbf{A}x^0 = \mathbf{A}(x^0 + u)$  et  $R(x^0) = R(x^0 + u)$  pour tout  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Ainsi pour un tel couple  $(\mathbf{A}, \mathbf{D})$  d'opérateurs, on ne peut trouver une unique solution au problème (4.28).

Pour toute la suite on va considérer que la condition minimale (4.34) est vérifiée.

### Projection

Nous allons construire un espace contenant le noyau de  $\mathbf{A}$  dans lequel nous allons projeter tout le problème. Cet espace permettra de réduire le problème au cas d'un opérateur surjectif.

Nous allons noter  $\mathfrak{D}$  l'image de  $\mathbf{D}$  dans  $\mathbb{R}^n$

$$\mathfrak{D} := \text{Im } (\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+ = \text{Im } \mathbf{D} = (\text{Ker } \mathbf{D}^*)^\perp. \quad (4.35)$$

Comme vu en début de section, pour  $x \in \mathfrak{D}$  et  $d \in \text{ker } \mathbf{D}^*$ ,  $R(x) = R(x + d)$  et par conséquent en posant  $\pi_{\mathfrak{D}}$  la projection orthogonale sur  $\mathfrak{D}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a  $R(x) = R(\pi_{\mathfrak{D}}(x))$ . Plus précisément,

$$\begin{aligned} R(x) &= R(\pi_{\mathfrak{D}}(x)) \\ &= \min\{\alpha > 0 \mid \pi_{\mathfrak{D}}x \in \alpha C\} \\ &= \min\{\alpha > 0 \mid \pi_{\mathfrak{D}}x \in \alpha (\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+(B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*)\} \end{aligned}$$

On pose  $\mathcal{L}$  un supplémentaire de  $\text{Ker } \mathbf{D}^* + \text{Ker } \mathbf{A}$  dans  $\mathbb{R}^n$  et

$$\mathcal{K} := \mathcal{L} + \text{Ker } \mathbf{A}. \quad (4.36)$$

On a donc  $\mathbb{R}^n = \mathcal{K} + \text{Ker } \mathbf{D}^*$  qui est somme directe. Le supplémentaire  $\mathcal{L}$  étant choisi arbitrairement, il n'est pas nécessairement orthogonale. On remarque avec la figure 4.7 que l'intérêt de ce supplémentaire est de construire un ensemble  $\mathcal{K}$  tel qu'il contienne  $\text{Ker } \mathbf{A}$ . Dans certain cas particulier où, le noyau de  $\mathbf{A}$  est inclus dans l'image de  $\text{Im } \mathbf{D}$ ,  $\mathcal{K}$  est confondu avec  $\text{Im } \mathbf{D}$ .

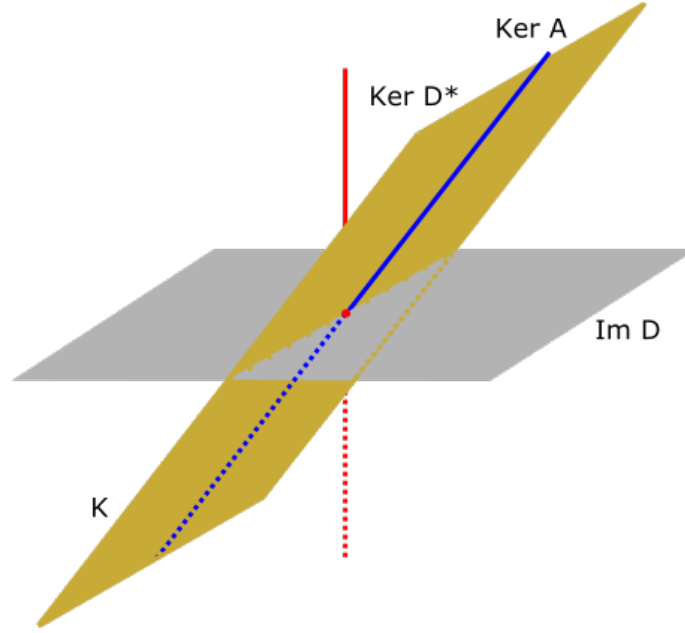


FIGURE 4.7 – Une illustration de  $\mathcal{K}$

Maintenant que la décomposition est faite, on peut construire la projection qui va nous permettre de réduire notre problème. Cette projection est la projection oblique sur  $\mathcal{K}$  parallèle à (de noyau)  $\text{Ker } \mathbf{D}^*$  que l'on note  $\Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } \mathbf{D}^*}$ . Plus précisément, on a

$$\mathbf{D}' : \text{Im } \mathbf{D}^* \rightarrow \mathcal{K}, \quad \mathbf{D}' = \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } \mathbf{D}^*} (\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{A}' : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A}_{\mathcal{K}}. \quad (4.38)$$

On observe que le  $\mathbf{D}'$  ci-dessus est surjectif par construction. Nous allons doter  $\mathcal{K}$  de sa jauge de  $C' = \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } \mathbf{D}^*} (\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+ (B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*)$  que l'on note  $R_{\mathcal{K}}$  :

$$R_{\mathcal{K}}(x) = \min\{\lambda > 0 : \lambda C' \ni x\} \quad (x \in \mathcal{K}); \quad (4.39)$$

De plus, on peut voir que

$$R_{\mathcal{K}}(\Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } \mathbf{D}^*} x) = R(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \quad (4.40)$$

Cela veut dire que  $R_{\mathcal{K}}$  est la trace de  $R$  sur  $\mathcal{K}$ . Ce résultat est résumé dans le lemme suivant qui montre que le sous-espace  $\mathcal{K}$  est isomorphe à  $\mathcal{D}$ .

**Lemme 4.2.5.** a) La restriction de  $\Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*}$  sur  $\mathfrak{D} : \mathfrak{D} \rightarrow \mathcal{K}$  est bijective.

b) Soit  $x \in \mathfrak{D}$  et  $\tilde{x} = \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} x$ , alors  $R_{\mathcal{K}}(\tilde{x}) = R(x)$ .

c) Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\tilde{x} = \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} x$ , alors  $R_{\mathcal{K}}(\tilde{x}) = R(x)$ .

*Démonstration.* a) Soit  $x \in \mathfrak{D}$  tel que  $\Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} x = 0$  alors  $x \in \text{Ker } \mathbf{D}^*$  et  $x = 0$ .

$\dim \mathcal{K} = \dim \mathcal{L} + \dim \text{Ker } \mathbf{A} = n - (\dim \text{Ker } \mathbf{D}^* - \dim \mathbf{A}) + \dim \mathbf{A} = \dim \mathfrak{D}$ .

La restriction de  $\Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*}$  sur  $\mathfrak{D}$  est de même dimension que son image et son noyau se réduit à l'élément nul par conséquent elle est bijective.

b) En utilisant a),

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{K}}(\tilde{x}) &= \inf \{ \lambda > 0, \tilde{x} \in \lambda \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} (\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+ (B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*) \} \\ &= \inf \{ \lambda > 0, (\Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*})^{-1} \tilde{x} \in \lambda (\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+ (B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*) \} \\ &= \inf \{ \lambda > 0, x \in \lambda (\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+ (B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*) \} \\ &= R(x) \end{aligned}$$

c)  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $x_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$  et  $x_{\text{Ker } \mathbf{D}^*} \in \text{Ker } \mathbf{D}^*$  tels que  $x = x_{\mathcal{K}} + x_{\text{Ker } \mathbf{D}^*}$ .

De même, il existe  $x_{\mathfrak{D}} \in \mathfrak{D}$  et  $x_{\text{Ker } \mathbf{D}^*}^1 \in \text{Ker } \mathbf{D}^*$  tels que  $x = x_{\mathfrak{D}} + x_{\text{Ker } \mathbf{D}^*}^1$ .

On a donc  $\Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*}(x) = x_{\mathcal{K}} = \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} x_{\mathfrak{D}}$ . Ainsi en posant  $\tilde{x} = x_{\mathcal{K}}$ , on obtient

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{K}}(\tilde{x}) &= \inf \{ \lambda > 0, \tilde{x} \in \lambda \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} (\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+ (B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*) \} \\ &= \inf \{ \lambda > 0, \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*}(x_{\mathfrak{D}}) \in \lambda \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} (\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+ (B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*) \} \\ &= \inf \{ \lambda > 0, x_{\mathfrak{D}} \in \lambda (\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+ (B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*) \} \\ &= R(x) \end{aligned}$$

□

## Identifiabilité

La projection oblique  $\Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*}$  sur  $\mathcal{K}$  projette tout le problème initial et permet d'obtenir le problème réduit avec la matrice de projection  $\mathbf{A}'$  et l'opérateur  $\mathbf{D}'$ . Il est possible de montrer que ces deux problèmes sont équivalents c'est à dire que qu'une solution au problème (4.28) implique que sa projection par  $\Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*}$  est solution du problème réduit avec  $\mathbf{A}'$  et  $\mathbf{D}'$  et vice versa. On en déduit le théorème suivant sous condition minimale d'identifiabilité (4.34) :

**Théorème 4.2.6.** Soit  $x^0 \neq 0$  in  $\mathbb{R}^n$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

a)  $x^0$  est l'unique minimiseur du problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} R(x) \text{ s.t. } \mathbf{A}x = \mathbf{A}x^0; \quad (4.41)$$

b)  $\Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} x^0$  est l'unique minimiseur du problème

$$\min_{x \in \mathcal{K}} R_{\mathcal{K}}(x) \text{ s.t. } \mathbf{A}'x = \mathbf{A}'\Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} x^0. \quad (4.42)$$

*Démonstration.* On montre que a) implique b)

On suppose qu'il existe  $\tilde{x} \in \mathcal{K}$  tel que  $\mathbf{A}\tilde{x} = \mathbf{A}x^0$  et  $R_{\mathcal{K}}(\tilde{x}) \leq R_{\mathcal{K}}(x^0)$  avec  $\tilde{x}^0 = \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} x^0$ .

En utilisant le lemme 4.2.5 (c),  $R_{\mathcal{K}}(\tilde{x}^0) = R(x^0)$  et  $R_{\mathcal{K}}(\tilde{x}) = R(\tilde{x})$ .

Il existe  $x_{\mathcal{L}}^0 \in \mathcal{L}$ ,  $x_{\text{Ker } \mathbf{A}}^0 \in \text{Ker } \mathbf{A}$  et  $x_{\text{Ker } \mathbf{D}^*}^0 \in \text{Ker } \mathbf{D}^*$  par définition de  $\mathcal{L}$  et de la condition (4.34).

On note  $x^1 = \tilde{x} + x_{\text{Ker } \mathbf{D}^*}^0$ . Donc  $R(x^1) \leq R(x^0)$  et  $\mathbf{A}x^1 = \mathbf{A}\tilde{x} + \mathbf{A}x_{\text{Ker } \mathbf{D}^*}^0 = \mathbf{A}\tilde{x}^0 + \mathbf{A}x_{\text{Ker } \mathbf{D}^*}^0 = \mathbf{A}(\tilde{x}^0 + x_{\text{Ker } \mathbf{D}^*}^0) = \mathbf{A}x^0$ . Par conséquent,  $x^1$  est un minimiseur du problème de a) ce qui est contradictoire.

On montre que b) implique a) On suppose qu'il existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\mathbf{A}x = \mathbf{A}x^0$  et  $R(x) \leq R(x^0)$ .

Il existe  $x_{\mathcal{L}}^0 \in \mathcal{L}$ ,  $x_{\text{Ker } \mathbf{A}}^0 \in \text{Ker } \mathbf{A}$  et  $x_{\text{Ker } \mathbf{D}^*}^0 \in \text{Ker } \mathbf{D}^*$  par définition de  $\mathcal{L}$  et de la condition (4.34).

On note  $x^0 = \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} x^0$  et  $\tilde{x} = \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} x$  alors  $\mathbf{A}(x - x_{\text{Ker } \mathbf{D}^*}^0) = \mathbf{A}\tilde{x}^0 \Rightarrow \mathbf{A}'\tilde{x}^0 = \mathbf{A}'x$ .

En utilisant le lemme 4.2.5, on obtient  $R(x) = R_{\mathcal{K}}(\tilde{x}) \leq R(x^0) = R_{\mathcal{K}}(x^0)$ . Ce qui conclut la preuve.  $\square$

On peut dire de façon simple, que l'identifiabilité est  $\Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*}$ -invariante ce qui réduit le problème au cas surjectif avec l'opérateur  $\mathbf{D}'$ .

**Remarque 4.2.7.** *Pour l'identifiabilité, le choix du supplémentaire  $\mathcal{L}$  est libre. Il existe donc toute une famille de projection oblique qui peuvent réduire le problème.*

### 4.3 Régularisation parcimonieuse de type bloc

On considère dans cette section une décomposition orthogonale de  $\mathbb{R}^n$  en somme directe de sous-espaces mutuellement orthogonaux que l'on appelle *blocs* :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^p \mathcal{B}_i. \quad (4.43)$$

On note  $\Pi_{\mathcal{B}_i}$  le projecteur orthogonal de  $\mathbb{R}^n$  dans le bloc  $\mathcal{B}_i$  et  $G_i$  et  $S_i$  la boule unité euclidienne et respectivement la sphère unité dans  $\mathcal{B}_i$

$$\begin{aligned} G_i &:= \{x \in \mathcal{B}_i \mid \|x\|_2 \leq 1\} \\ S_i &:= \{x \in \mathcal{B}_i \mid \|x\|_2 = 1\}. \end{aligned}$$

L'ensemble convexe  $C$  que nous allons considérer dans cette section sera l'enveloppe convexe de l'union des boules unités  $G_i$  :

$$C := \text{Conv}(\cup_{i=1}^p G_i) = \text{Conv}(\cup_{i=1}^p S_i). \quad (4.44)$$

Sa jauge associée est la norme  $\ell^{1,2}$

$$\gamma_C(x) = \sum_{i=1}^p \|\Pi_{\mathcal{B}_i} x\|_2 \quad (x \in \mathbb{R}^n). \quad (4.45)$$



On va expliciter les résultats du chapitre précédent à ce cas particulier. On remarque que les points extrémaux de la boule unité  $C$  sont les points des sphères unités  $S_i$  :

$$\text{Ext}(C) = \cup_{i=1}^p S_i. \quad (4.46)$$

Pour  $x \neq 0$ , on note

$$I(x) := \{i \in \{1, \dots, n\} | \Pi_{\mathcal{B}_i} x \neq 0\}, \quad (4.47)$$

que l'on appellera le support bloc de  $x$ . Alors la face minimale de  $x$  dans  $C$  est

$$F_C(x) = \text{Conv}\left\{\frac{\Pi_{\mathcal{B}_i} x}{\|\Pi_{\mathcal{B}_i} x\|_2} \mid i \in I(x)\right\}. \quad (4.48)$$

On remarque que chaque vecteur  $\Pi_{\mathcal{B}_i} x / \|\Pi_{\mathcal{B}_i} x\|_2$  est sur la sphère unité  $S_i$ . On peut aussi montrer sans difficulté que toutes les faces de  $C$  sont des faces exposées. Plus précisément, si  $\xi := \Pi_{\mathcal{B}_i} x / \|\Pi_{\mathcal{B}_i} x\|_2$ , alors  $H_\xi$  est un hyperplan séparateur pour  $F_C(x)$ .

Cela n'est plus nécessairement vrai pour l'image de  $C$  par une application linéaire. On considère  $Q = \mathbf{A}C$ . Alors  $Q$  peut être vu comme l'enveloppe convexe

$$Q = \text{Conv}(\cup_{i=1}^p Q_i) \quad Q_i := \mathbf{A}G_i \quad (i = 1, \dots, p) \quad (4.49)$$

On remarque que chaque  $Q_i$  est l'image d'une boule euclidienne par un opérateur linéaire qui est une ellipsoïde, possiblement dégénérée, dans  $\mathbb{R}^m$ .

On présente un exemple où les faces de  $C$  sont exposées mais  $Q$  a des faces non exposées. **Exemple :**

On décompose  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$  et soit  $C$  la boule unité correspondante

$$C := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \leq 1\},$$

et soit  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donné par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Alors  $G$  est l'ensemble de la figure précédente obtenue comme l'enveloppe convexe de deux ellipsoïdes  $Q_1$  et  $Q_2$ . Si  $y$  est un point de  $Q$  où une des tangentes communes des deux ellipsoïdes rencontrent  $Q_1$ , alors  $y$  est un point extrémal de  $Q$  mais il n'est pas exposé et sa face minimale exposée est l'ensemble du segment tangent entre  $Q_1$  et  $Q_2$ .

Cette exemple montre les limites de l'utilisation des certificats duaux pour l'identifiabilité qui ne marchent que pour des faces exposées.

On va présenter dans la suite un algorithme qui permet de vérifier les conditions S1) et S2) du théorème 3.2.6. Cet algorithme est basé sur des projections dans un ensemble convexe et ne requiert pas que les faces soient exposées. Avant cela, on va présenter deux résultats préliminaires.

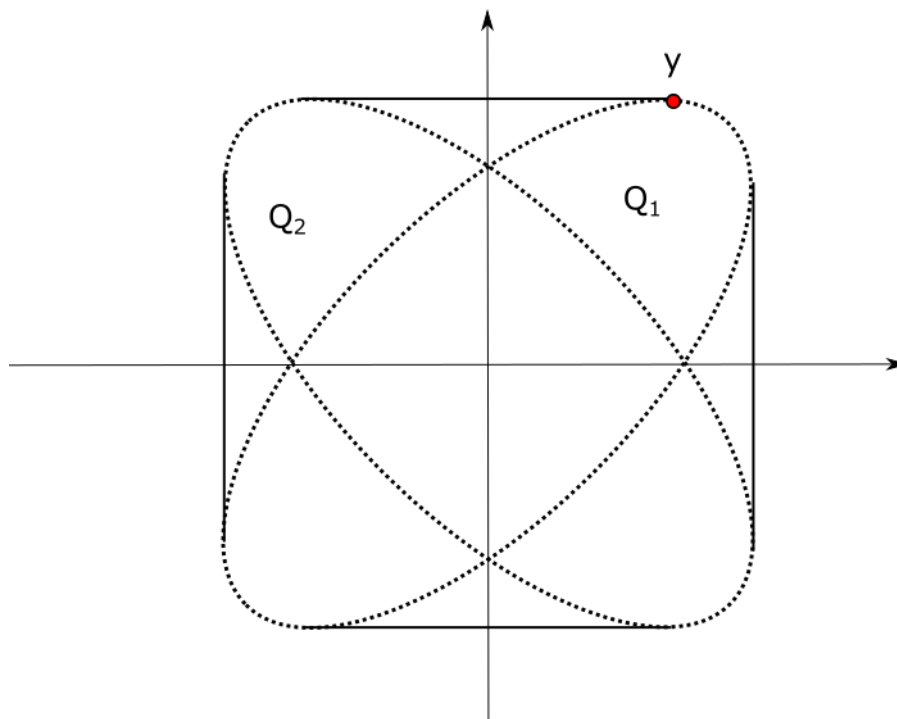


FIGURE 4.8 – Image linéaire d'une boule unité bloc avec des faces non-exposées

On note  $\mathcal{V}_i$  les images par  $\mathbf{A}$  des blocs  $\mathcal{B}_i$  dans  $\mathbb{R}^m$  :

$$\mathcal{V}_i := \mathbf{A}\mathcal{B}_i \quad (1 \leq i \leq p), \quad (4.50)$$

et  $\Pi_{\mathcal{V}_i}$  les projecteurs orthogonaux de  $\mathbb{R}^m$  dans chaque  $\mathcal{V}_i$ .

Pour tout ensemble d'indices  $I \subseteq \{1, \dots, p\}$ , on note

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_I &:= \bigoplus_{i \in I} \mathcal{B}_i \\ G_I(x) &:= \text{Conv}(\cup_{i \in I} G_i) = C \cap \mathcal{B}_I, \end{aligned}$$

dans  $\mathbb{R}^m$  et respectivement leur image par  $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_I &:= \mathbf{A}\mathcal{B}_I \\ Q_I(x) &:= \mathbf{A}G_I = \text{Conv}(\cup_{i \in I} Q_i) = \mathbf{A}C \cap \mathcal{V}_I, \end{aligned}$$

On va maintenant étudier plus précisément la forme des faces de  $Q$ . Les points extrémaux de  $Q$  sont parmi ceux de  $\mathbf{A}\mathcal{S}_i$  qui sont les points frontières des ellipsoïdes  $P_i$ . Par conséquent les faces de  $P$  sont nécessairement des enveloppes convexes de ces points. Bien évidemment, une fermeture convexe de ces points n'est pas nécessairement une face. Une raison simple est qu'une telle enveloppe convexe peut "passer" par l'intérieur de  $Q$ . Pour éviter cela, il est nécessaire qu'une telle enveloppe convexe soit tangente à chaque ellipsoïde  $Q_i$  qu'elle touche. Ce phénomène est résumé dans la proposition suivante :

**Proposition 4.3.1** (Condition de compatibilité d'une face). *Soit  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  et soit  $s_i$  dans  $S_i$  pour tout  $i \in I$ . On suppose que  $F = \text{Conv}(\cup_{i \in I} \mathbf{A}s_i)$  soit une face de  $Q$ . On note*

$$d = d((s_i)_{i \in I}) := \mathbf{A}^{+,*} \left( \sum_{i \in I} s_i \right). \quad (4.51)$$

Alors :

a) Chaque projection  $\Pi_{\mathcal{V}_i} d$  est un multiple de la normale extérieure à chaque ellipsoïde  $Q_i$  au point  $\mathbf{A}s_i$ .

b)  $F$  est une face exposée de  $Q_i = \mathbf{A}G_I$

*Démonstration.* On peut vérifier que  $d$  est normal à  $F$ , donc à  $\text{Aff}(F)$ . Par conséquent,  $\Pi_{\mathcal{V}_i} d$  est orthogonal à  $\text{Aff}(F) \cap Q_i$  pour chaque  $i$ . Mais ce dernier sous espace affine doit être tangent à  $Q_i$  au point  $\mathbf{A}s_i$  parce que  $F$  est une face et de plus  $\Pi_{\mathcal{V}_i} d$  est un multiple de la normale extérieure à  $Q_i$  au point  $\mathbf{A}s_i$ . Puisque  $Q_i$  contient l'origine, ce multiple doit être positif. Ce qui prouve a).

Pour b), on observe que  $H := H_d \cap \mathcal{V}_I$  peut être tangent à chaque  $Q_i$  seulement au point  $\mathbf{A}s_i$  puisque les  $Q_i$  sont des ellipsoïdes et elles n'ont pas d'autres faces que leurs points extrémaux. Cela implique que  $H$  est un hyperplan support pour  $F$  dans  $\mathcal{V}_I$  et de plus  $F$  est exposée dans  $\mathbf{A}G_I$ .  $\square$

Cette dernière proposition va fournir une condition de sortie à notre algorithme. L'itération principale de notre algorithme est basé sur la proposition suivante qui donne un critère calculable pour différencier une face exposée d'une face non exposée. La quantité qui fait la différence est la distance entre un certain point et un certain convexe.

**Proposition 4.3.2.** *Soit  $F = \text{Conv}(\cup_{i \in I} \mathbf{A}s_i)$  telle que  $F$  une face de  $Q$ . Soit  $d$  défini comme dans la proposition 4.3.1 et  $d^+ := d^* / \|d\|_2^2$ , soit  $K := \mathbb{R}^m \ominus \mathcal{H}_d$  l'orthogonal de  $\mathcal{H}_d$  dans  $\mathbb{R}^m$  et  $\Pi_K$  le projecteur orthogonal dans  $K$ . On note*

$$M := \Pi_K(Q_J) \text{ avec } J := \{1, \dots, p\} \setminus I. \quad (4.52)$$

Alors

a)  $\Pi_K(H_d \cap \mathcal{V}_I) = \{d^+\}$  ;

b) si  $\text{dist}(d^+, M) > 0$ , alors  $F$  est une face exposée de  $Q$ . Plus précisément, si

$$q_0 := \text{argmin}\{\|d^+ - q\| \mid q \in M\} \quad (4.53)$$

et

$$\eta := \frac{1}{\|d^+\|_2^2 - \langle d^+, q_0 \rangle} (d^+ - q_0), \quad (4.54)$$

alors  $H_\eta$  est un hyperplan support pour  $F$ .

c) Si, au contraire,  $\text{dist}(d^+, M) = 0$ , alors  $d^+$  est nécessairement un point frontière de  $M$ .

## Chapitre 4. Cas particuliers et algorithmes associés

Dans ce cas, en posant  $H$  un hyperplan support dans  $K$  pour la face minimale exposée  $F_M^e(d^+)$  de  $d^+$  dans  $M$ ,  $H + \mathcal{H}_d$  est un hyperplan support pour la face minimale exposée  $F^e$  de  $Q$  contenant  $F$  :

$$F^e = (H + \mathcal{H}_d) \cap Q. \quad (4.55)$$

où  $\mathcal{H}_d = \{y \in \mathbb{R}^m, \langle y, d \rangle = 0\}$ .  $F$  n'est pas une face exposée de  $Q$ .

*Démonstration.* L'affirmation a) est triviale puisque  $d^+$  est dans  $K$  et dans  $H_d$  et  $\text{Ker } \Pi_K = \mathcal{H}_d$ .

Pour la preuve de b), voir le lemme 5.3.2 et le théorème 5.3.3.

Pour prouver c), on suppose que  $d^+$  doit être un point de l'intérieur relatif de  $M$ . alors  $d^+ + \alpha d^+$  appartient à  $Q$  pour un certain  $\alpha > 0$ . Soit  $f$  un point de l'intérieur relatif de  $F$ . On considère la ligne

$$\mathcal{L} := \{\lambda(1 + \alpha)d^+ + (1 - \lambda)x \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

et on observe qu'elle n'est pas contenue dans  $H_d$ . Par conséquent, chaque ligne  $\Pi_{\mathcal{B}_i} \mathcal{L}$  qui passe par  $\mathbf{A}s_i$ , doit être sécante à l'ellipsoïde  $Q_i$  pour  $i \in I$ . Cela implique que  $\mathcal{L}$  coupe l'intérieur de  $G_I$  au point que l'on nomme  $g$ . Par la proposition 4.3.1,  $H_d \cap \mathcal{B}_{\mathcal{I}}$  est hyperplan support pour  $F$ , donc  $\langle d, g \rangle < 1$ . Mais d'un autre côté,  $x$  sur  $F$  est une combinaison convexe stricte de  $g$  et  $(1 + \alpha)d^+$ , donc les deux sont dans  $F$  et de plus  $\langle d, g \rangle = 1$  ce qui contredit l'argument précédent. Par conséquent  $d^+$  est sur le bord de  $Q$ . Le reste est direct.  $\square$

On peut maintenant présenter l'algorithme d'identifiabilité pour la régularisation bloc qui vérifie les conditions S1) et S2) du théorème 3.2.6.

On fixe  $x^0$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on pose  $I_0 := I(x^0)$  et  $y = \mathbf{A}x^0$ . Pour tout  $i$  dans  $I_0$ , on note  $s_i^0 := \Pi_{\mathcal{B}_i} x^0 / \|\Pi_{\mathcal{B}_i} x^0\|_2$ . Alors on a

$$\Sigma_b(x^0) = \{s_i^0 \mid i \in I_0\}. \quad (4.56)$$

Vérifier la condition S1) est trivial, il suffit de voir si  $\mathbf{A}$  restreint à  $\text{Vect}(\{s_i^0 \mid i \in I_0\})$  est de rang plein. La difficulté principale est de vérifier S2) c'est à dire  $\Sigma_{\mathbf{A}b}(y^0) = \Sigma_b(x^0)$ .

---

**Algorithm 2** Algorithme d'identifiabilité pour la régularisation bloc

---

```

1: Étape d'initialisation
2:  $I = I_0, J = \{1, \dots, p\} \setminus I$  et  $\Sigma = \Sigma_b(x^0)$ .
3: Boucle
4: while  $I \neq \{1, \dots, p\}$  do
5:   if on ne vérifie pas la condition de compatibilité a) de la proposition 4.3.1
     then
6:      $x^0$  n'est pas identifiable et on sort de l'algorithme.
7:   else
8:     on calcule la projection de  $d^+$  sur  $M$  comme une combinaison convexe de
       points frontières des ellipsoïdes projetées  $\Pi_K \mathbf{A}Q_j$  ( $j \in J$ ) :
           
$$q_0 = \sum_{j \in J'} \alpha_j \Pi_K \mathbf{A}s_j = \operatorname{argmin}\{\|d^+ - q\| \mid q \in M\} \quad (J' \subset J). \quad (4.57)$$

9:     if il y a plus d'un des vecteurs  $\Pi_K \mathbf{A}s_j$  du même bloc  $j$  then
10:        $x^0$  n'est pas identifiable, on sort de l'algorithme.
11:     else
12:       if  $\operatorname{dist}(d^+, q^0) > 0$  then
13:         on sort de la boucle, on passe à l'étape finale.
14:       else
15:         on met à jour  $I = I \cup J', J = J \setminus I$  et  $\Sigma = \Sigma \cup \{s_j \mid j \in J'\}$ .
16:       end if
17:     end if
18:   end if
19: end while
20: Étape finale
21: On calcule la distance entre le sous espace affine  $\operatorname{Aff}(\{\mathbf{A}s_i^0 \mid i \in I_0\})$  et le polytope
      $\operatorname{Conv}(\{\mathbf{A}s_i \mid i \in I \setminus I_0\})$ .
22: if la distance est positive then
23:    $x^0$  est identifiable.
24: end if

```

---

On va expliquer plus en détail le fonctionnement de cet algorithme.

La condition S2) du théorème 3.2.2 peut être reformulée comme suit : l'ensemble

$$F_0 := \operatorname{Conv}\{\mathbf{A}s_i \mid i \in I_0\} = \mathbf{A}F_C(x^0), \quad (4.58)$$

qui doit être sur le bord de  $Q$  et, de plus, tout point envoyé par  $\mathbf{A}$  dans  $F_0$  doit originellement venir d'un des blocs de  $I_0$  et pas d'ailleurs. Plus d'un point du même bloc peuvent être envoyés.

L'idée de l'algorithme est la suivante : on suppose jusqu'à ce qu'il soit prouvé le contraire, que  $F_0$  est sur le bord de  $Q$  (et qu'il est contenu dans la face minimale

## Chapitre 4. Cas particuliers et algorithmes associés

de  $y^0$ , proposition 3.2.1) et, avec cette assertion, on détecte les points hors des blocs de  $I_0$  peuvent être envoyés dans la face minimale exposée de  $y^0$ . Cette collection grandissante de  $\Sigma$  et, par la proposition 4.3.2, son enveloppe convexe

$$F := \text{Conv}\{\mathbf{A}s_i | i \in I\} \quad (4.59)$$

reste un sous ensemble de la face minimale exposée de  $y^0$  et assurent que l'affirmation initiale comme quoi  $F_0$  est sur le bord reste vrai.

Si la condition de compatibilité des faces échoue à n'importe quelle étape, cela veut dire que l'hypothèse de départ est fautive et  $F_0$  intersecte l'intérieur de  $Q$  et donc  $x^0$  n'est pas identifiable. Au contraire, si elle est vraie, cela veut dire que  $F$  est une face de  $Q_I$  et elle a une chance d'être une face de  $Q$  si rien ne le contredit dans la suite.

Le test de distance dans la boucle nous dit que si la distance est positive, il n'y a plus de points à vérifier dans les blocs extérieurs de  $I$  qui puissent arriver dans la face minimale exposée de  $y^0$ . Dans ce cas  $F$  est précisément la face minimale exposée de  $y^0$  et on peut aller à l'étape finale.

Autrement, par la proposition 4.3.2, on a trouvé quelques points  $s_j$  qui sont amenés par  $\mathbf{A}$  dans la face minimale exposée de  $y^0$ . On les rajoute à la collection et on recommence. On fait cela jusqu'à ce que tous les blocs soient inspectés.

Finalement quand l'algorithme atteint l'étape finale, on est certain que l'hypothèse de départ était vraie, que  $F_0$  est bien sur le bord de  $Q$  et qu'elle fait partie de la face minimale exposée de  $y^0$ . On est sûr qu'aucun autre points exceptés ceux trouvés ne peuvent arrivés dans la face minimale exposée de  $y^0$ . Puisqu'il ne peut y avoir qu'un seul par bloc avec cette propriété et que tous les blocs ont été testés, il reste à vérifier qu'aucuns des points trouvés dans la face minimale exposée de  $y^0$  ne soient dans la face minimal de  $y^0$ . C'est exactement ce que fait l'étape finale.

## Chapitre 4. Cas particuliers et algorithmes associés

Deuxième partie  
Robustesse au bruit





# Chapitre 5

## Robustesse dans la régularisation synthèse $\ell^1$

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Divergence de Bregman . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>5.2</b>	<b>Constante de stabilité optimale et certificat dual optimal</b>	<b>75</b>
<b>5.3</b>	<b>Construction du certificat optimal . . . . .</b>	<b>76</b>
5.3.1	Construction géométrique . . . . .	76
5.3.2	Construction gloutonne . . . . .	79
<b>5.4</b>	<b>Résultats numériques . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>5.5</b>	<b>Annexes . . . . .</b>	<b>89</b>

---

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au problème de robustesse au bruit. Contrairement à l'identifiabilité où on a une contrainte d'égalité, des données contaminées par des perturbations ne permettent d'avoir une reconstruction stable du signal d'origine en résolvant le problème (1.5). Pour cela, les contraintes égalitaires sont remplacées par des contraintes quadratiques et donne le problème suivant

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_1 \text{ s.c. } \|\mathbf{A}x - y\|_2 \leq \delta \tag{5.1}$$

où  $y$  représente les données  $y = \mathbf{A}x^0 + w$  perturbées par un bruit additif  $w$  et où  $x^0$  est signal d'origine que l'on souhaite reconstruire. Il ne sera fait aucune hypothèse sur le bruit hormis qu'il est borné c'est à dire  $\|w\|_2 \leq \epsilon$ . On notera  $x^\delta$  la solution de ce problème résolu avec le paramètre  $\delta$ .

Le problème de robustesse au bruit va consister à estimer l'erreur de reconstruction entre l'approximation  $x^\delta$  et le signal d'origine  $x^0$ . Burger et al [BO04] ont ouvert la voie en proposant une borne supérieur de la divergence de Bregman entre  $x^\delta$  et  $x^0$  avec l'aide de certificats duaux. Les travaux de Vaïter et al [VGFP15, Vai14] sont les plus généraux à cet égard. En effet, les certificats duaux vont aussi jouer un rôle important dans la robustesse au bruit. Grasmair et al [GSH11] vont estimer l'erreur

de reconstruction quadratique  $\|x^\delta - x^0\|_2$  via cette divergence de Bregman dans le cas de la minimisation  $\ell^1$  synthèse et fournir une constante de Lipschitz de l'erreur quadratique de reconstruction. Cette borne ne dépendra plus que de la matrice  $\mathbf{A}$ , du support, du signe et d'un certificat dual. On présentera ces résultats qui seront notre base.

Notre objectif a été de minimiser cette borne. Pour cela, on s'est astreint à construire un certificat dual qui la minimise et qu'on a nommé certificat dual optimal. Un fait intéressant est que ce problème de minimisation a une interprétation géométrique simple. Ce problème est équivalent à maximiser la distance entre un sous-espace précis et un polytope. Cela a permis de trouver une solution à ce problème à l'aide d'une simple projection comme nous le verrons dans la suite. Dans toute la suite, on notera  $I$  le support de  $x^0$  et  $J$  son complémentaire.

## 5.1 Divergence de Bregman

La divergence de Bregman associée à une fonction convexe  $R$  est un outil classique d'analyse convexe dont on rappelle la définition.

**Définition 5.1.1** (Divergence de Bregman). *Soit  $s \in \partial R(x^0)$ , la divergence de Bregman associée à la fonction convexe  $R$  est*

$$D_R^s(x, x^0) = R(x) - R(x^0) - \langle s, x - x^0 \rangle. \quad (5.2)$$

Burger et al [BO04] ont explicité une borne supérieure de cette distance dans notre cas.

**Lemme 5.1.2.** *Soit  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  une solution de (1.5) et  $\eta \in \mathbb{R}^m$  tel que  $\mathbf{A}^*\eta \in \partial R(x^0)$ . Pour toute solution  $x^\epsilon$  de (5.1) avec  $\delta = \epsilon$  alors*

$$D_R^s(x^\epsilon, x^0) \leq 2\epsilon\|\eta\|_2. \quad (5.3)$$

Grasmair et al [GSH11] ont développé une constante de stabilité pour  $\|x^\epsilon - x^0\|_2$  dans le cas  $\ell^1$  synthèse à l'aide du théorème précédent. Ce résultat a été affiné par Dossal et al [DT13] pour le certificat dual de Fuchs mais il est valable pour tout certificat dual. Pour un signal qui vérifie la condition source renforcée, c'est à dire qui est identifiable pour le problème (1.5), on obtient donc le résultat suivant.

**Théorème 5.1.3** ([DT13]). *Pour tout minimiseur  $x^\epsilon$  de (5.1) avec  $\delta = \epsilon$  et tout certificat dual  $\eta$  satisfaisant la condition source non dégénérée (4.3)-(4.4), on a*

$$\|x^\epsilon - x^0\|_2 \leq C(\eta)\epsilon \quad (5.4)$$

avec

$$C(\eta) = 2(\|\mathbf{A}_I^+\|_2 + (\|\mathbf{A}_I^+\|_2\|\mathbf{A}_J\|_{1,2} + 1)Q(\eta)) \quad (5.5)$$

$$Q(\eta) = \frac{\|\eta\|_2}{1 - \|\mathbf{A}_J^* \eta\|_\infty} \quad (5.6)$$

avec  $J = I^c$ .

On observe deux parties dans cette borne. Une première partie qui va être « fixe » et dépendant principalement de la restriction de la matrice  $\mathbf{A}$  au support de  $x^0$  et une deuxième partie variable qui dépend essentiellement des certificats duaux non dégénérés. C'est cette dernière partie qui va nous intéresser car elle va nous permettre de minimiser cette borne.

## 5.2 Constante de stabilité optimale et certificat dual optimal

On va donc chercher à minimiser la constante  $C(\eta)$  qu'on appellera : constante de stabilité optimale. Il apparaît clairement que la constante de stabilité optimale est obtenue pour un quotient  $Q(\eta)$  minimal. Le problème se résume à résoudre

$$\min Q(\eta) : \quad \mathbf{A}_J^* \eta = \text{sign}(x_I^0), \quad \|\mathbf{A}_J^* \eta\|_\infty < 1 \quad (5.7)$$

pour tout l'ensemble des vecteurs  $\eta$  qui sont des certificats duaux non dégénérés pour  $x^0$ . On va maintenant montrer que cette minimisation est équivalente à la maximisation d'une certaine distance.

On a vu dans le chapitre 4.1 que les certificats duaux non dégénérés de  $x^0$  définissent des hyperplans séparateurs dont l'intersection avec le polytope  $Q = \mathbf{A}B_1$  explicitent la face minimale  $F_{B_1}(\tilde{x}^0)$  de  $x^0$  avec  $\tilde{x}^0 = x^0 / \|x^0\|_1$ . Pour tout certificat dual non dégénéré  $\eta$ , l'hyperplan  $H_\eta$  est un hyperplan séparateur entre la face minimale et le reste du polytope  $Q$  comme l'illustre la figure 5.1. On note  $Q_J$  le polytope réduit :

$$Q_J = \text{Conv}(\{\pm \mathbf{a}_j : j \in J\}), \quad (J = I^c).$$

De plus, comme  $H_\eta$  est un hyperplan affine, il contient aussi l'enveloppe affine de  $F_{B_1}(\tilde{x}^0)$ , notée

$$\mathcal{L}(x_0) := \text{Aff}(\{(\sigma_0)_i \mathbf{a}_i : i \in I\}). \quad (5.8)$$

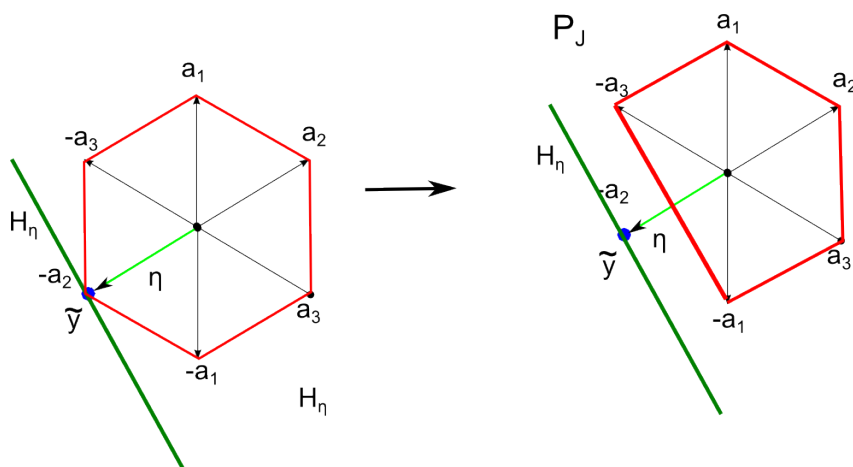
La distance entre  $\mathcal{L}(x^0)$  et  $Q_J$  est en fait l'inverse de  $Q(\eta)$  que l'on notera  $\mathcal{D}(H_\eta, Q_J)$ . Ce résultat est prouvé par la proposition suivante

**Proposition 5.2.1.** *a) on suppose que le vecteur  $\eta$  dans  $\mathbb{R}^m$  et  $\eta \neq 0$  satisfait*

$$\|\mathbf{A}_J^* \eta\|_\infty \leq 1. \quad (5.9)$$

alors

$$\frac{1 - \|\mathbf{A}_J^* \eta\|_\infty}{\|\eta\|_2} = \mathcal{D}(H_\eta, Q_J). \quad (5.10)$$


 FIGURE 5.1 – Séparation entre  $H_\eta$  et le polytope réduit  $Q_J$  dans  $\mathbb{R}^2$ 

b) Le problème d'optimisation (5.7) est équivalent au problème d'optimisation

$$\max_{H_\eta \supset \mathcal{L}(x^0)} \mathcal{D}(H_\eta, Q_J). \quad (5.11)$$

La preuve est donnée en annexe. On peut noter que, dans (5.10)  $\eta$  n'a pas besoin d'être nécessairement un certificat dual mais il doit juste satisfaire l'inégalité (4.4) non strictement. De plus, dans (5.11), la construction de certificats duaux à l'aide de pré-certificats ne requiert que la satisfaction de (4.3). La question qui suit est comment résout-on ce problème.

## 5.3 Construction du certificat optimal

### 5.3.1 Construction géométrique

La dernière proposition de la proposition de 5.2.1 signifie que résoudre (5.7) revient à trouver l'hyperplan affine le plus éloigné de  $Q_J$  et qui contient le sous-espace affine  $\mathcal{L}(x^0)$ . La prochaine étape va être de transformer le problème (5.11) dans un problème équivalent avec de plus simples contraintes. Dans ce problème équivalent, les hyperplans n'ont plus à juste contenir un sous-espace affine fixé mais juste un point fixé à la place. Ceci peut être obtenu en projetant tout le problème dans l'orthogonal de la direction de  $\mathcal{L}(x^0)$ .

Plus précisément, on considère  $L = \text{Dir}(\mathcal{L}(x^0))$ , soit  $K$  l'orthogonal de  $L$  et on note  $\Pi_K$  le projecteur orthogonal de  $K$ . Explicitement,

$$\Pi_K = \mathbf{I}_{\mathbb{R}^m} - \bar{\mathbf{A}}_I \bar{\mathbf{A}}_I^+, \quad (5.12)$$

où  $\bar{\mathbf{A}}_I$  est la matrice dont les colonnes sont

$$((\sigma_0)_i \mathbf{a}_i - (\sigma_0)_{i_0} \mathbf{a}_{i_0})_{i \in I \setminus \{i_0\}}$$

pour un certain  $i_0$  dans  $I$ .

On note

$$\bar{\mathbf{a}}_j = \Pi_K \mathbf{a}_j \quad (j \in J)$$

et

$$\bar{Q}_J := \Pi_K Q_J = \text{Conv}\{\pm \bar{\mathbf{a}}_j : j \in J\}.$$

la projection sur  $K$  du polytope réduit  $Q_J$  qui est lui-même un polytope dans  $K$ .

Ce résultat montre que, pour résoudre (5.11), on peut remplacer dans (5.11) le polytope réduit  $Q_J$  par son projeté  $\bar{Q}_J$  et tout le sous-espace affine  $\mathcal{L}(x^0)$  par un seul vecteur. Il suffit ensuite de résoudre le problème dans  $K$  :

- Proposition 5.3.1.** a) tout certificat dual  $\eta \in K$  pour  $x^0$  ;  
 b)  $\Pi_K$  envoie le sous espace affine  $\mathcal{L}(x^0)$  dans le singleton  $d(x^0)^+$

$$\Pi_K \mathcal{L}(x^0) = \{d(x^0)^+\}$$

où  $d(x^0)$  est le pré-certificat de Fuchs (4.11).

c) Le problème d'optimisation (5.11) est équivalent au problème

$$\max_{\bar{H}_\eta \ni d(x^0)^+} \mathcal{D}(\bar{Q}_J, \bar{H}_\eta)$$

avec  $\bar{H}_\eta = \Pi_K H_\eta = K \cap H_\eta$  pour tout certificat dual  $\eta$  pour  $x^0$ .

La figure 5.2 montre un exemple de cette projection pour l'exemple de la figure 5.1.

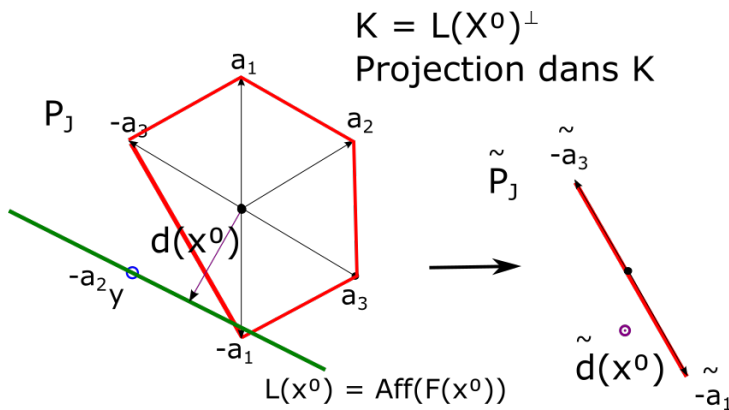


FIGURE 5.2 – Un exemple de projection dans  $K$

On a montré que le problème initial peut être réduit à un problème où il faut trouver un hyperplan affine qui contient un point fixé et aussi loin que possible d'un ensemble convexe fermé donné. Ce problème général a une unique solution, soit l'unique hyperplan qui contient le point fixé et est orthogonal à une droite qui passe par le point fixé et son projeté sur l'ensemble convexe donné. Tout cela est condensé dans le lemme suivant.

**Lemme 5.3.2.** Soit  $C$  un ensemble convexe fermé dans  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbf{d}$  un vecteur dans  $\mathbb{R}^p$  hors de  $C$ . Soit  $\mathbf{w}_0$  la projection de  $\mathbf{d}$  la convexe  $C$ , c'est à dire

$$\mathbf{w}_0 = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u} \in C} \|\mathbf{u} - \mathbf{d}\|_2$$

et soit  $H_0$  un hyperplan affine qui contient  $\mathbf{d}$  et sa direction normal  $\mathbf{w}_0 - \mathbf{d}$ , c'est à dire

$$H_0 = \mathbf{d} + H_{\mathbf{w}_0 - \mathbf{d}}.$$

alors

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{d}, \mathbf{w}_0 - \mathbf{d} \rangle \geq \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{d}\|_2^2, \quad (\mathbf{u} \in C) \quad (5.13)$$

$$\mathcal{D}(C, H_0) = \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{d}\|_2 = \mathcal{D}(C, \mathbf{d}) \quad (5.14)$$

et de plus, pour tout hyperplan affine  $H \neq H_0$  qui contient  $\mathbf{d}$ ,

$$\mathcal{D}(C, H) < \mathcal{D}(C, H_0). \quad (5.15)$$

Maintenant qu'on a réuni tout ces résultats, on peut énoncer notre résultat principal :

**Théorème 5.3.3.** Soit  $x^0$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\mathbf{A}_{\operatorname{supp}(x^0)}$  est injective. Soit  $\mathbf{w}_0$  une projection convexe de  $d(x^0)^+$  sur le projeté du polytope réduit  $\bar{Q}_J$ ,

$$\mathbf{w}_0 = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u} \in \bar{Q}_J} \|\mathbf{u} - d(x^0)^+\|_2.$$

Alors :

a) Le vecteur  $x^0$  est identifiable si et seulement si  $\|\mathbf{w}_0 - d(x^0)^+\|_2 > 0$ .

b) Si cette condition est vérifiée, la constante de Lipschitz optimale  $C(\eta)$  du Théorème 5.1.3 est atteinte pour l'unique certificat dual fort

$$\eta_0 = \frac{1}{\|d(x^0)^+\|_2^2 - \langle d(x^0)^+, \mathbf{w}_0 \rangle} (d(x^0)^+ - \mathbf{w}_0). \quad (5.16)$$

De plus, la valeur minimale de (5.7) pour  $\eta_0$  est

$$\min_{\eta} Q(\eta) = Q(\eta_0) = \frac{1}{\|d(x^0)^+ - \mathbf{w}_0\|_2} = \frac{1}{\mathcal{D}(\mathcal{L}(x^0), Q_J)}. \quad (5.17)$$

Dans le même contexte que les figures 5.1 et 5.2, la figure 5.3 illustre ce résultat.

A partir de ce théorème, on en déduit l'algorithme de résolution du problème (5.7) suivant :

---

**Algorithm 3** Algorithme projectif pour le pré-certificat optimal

---

- 1: Initialise  $d(x^0) = \mathbf{A}_I^{+*} \operatorname{sign}(x_I^0)$  et  $d(x^0)^+ = d(x^0) / \|d(x^0)\|_2^2$ ;
  - 2: Calcul de la matrice de projection de  $\Pi_K$  dans  $K$  selon (5.12) ;
  - 3: Initialise  $\bar{\mathbf{a}}_j = \Pi_K \mathbf{a}_j$ ,  $j \in J$  ;
  - 4: Calcule de la projection  $w_0$  de  $d(x^0)^+$  dans la fermeture convexe de  $\pm \bar{\mathbf{a}}_j$ ,  $j \in J$
  - 5: Calcule de  $Q_{opt} = \|d(x^0)^+ - w_0\|_2^{-1}$  et certificat dual associé selon (5.16).
-

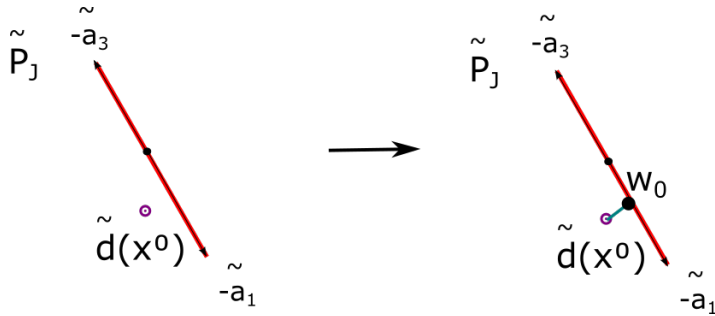


FIGURE 5.3 – Exemple de projection de  $d(x^0)^+$  dans le polytope réduit  $\bar{Q}_J$

On va détailler notre implémentation de l’algorithme projection pour le pré-certificat optimal que l’on rappelle ci dessus.

La partie la plus importante et la plus coûteuse en temps de calcul est l’étape 4 de la projection du point  $d(x^0)^+$  sur la le convexe fermé  $\pm\bar{a}_j$ ,  $j \in J$ . Le calcul de cette projection peut être fait avec n’importe quel algorithme dédié.

Dans notre implémentation, nous avons choisi une version  $m$ -dimension de l’algorithme Gilbert-Johnson-Keerthi (GJK) [GJK88]. Dans cette algorithme, chaque itération comprend deux étapes. Une étape qui calcule un hyperplan support et une seconde étape qui contient une projection sur un simplexe. La première étape est ici très rapide puisqu’elle est basée uniquement sur le calcul des produits scalaires.

Il existe de nombreux algorithmes de projection sur le simplexe standard  $\Delta^n$ .

$$\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 \leq x_i \leq 1, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$$

Malheureusement, l’algorithme GJK construit un simplexe régulier, c’est à dire, une enveloppe convexe de points qui sont affinement indépendants. Soit  $(x^i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbb{R}^n$  tel que les  $(x^i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  sont affinement indépendants, on veut projeter dans

$$\text{Conv}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x^i \mid t \in \Delta^n \right\}$$

Golubitsky et al [GMW12] propose une approche récursive qui ne nécessite pas de trouver une isométrie avec le simplexe standard pour calculer la projection. Cet algorithme bien que relativement rapide dans nos tests peut devenir coûteux en plus grande dimension.

### 5.3.2 Construction gloutonne

Parce que l’algorithme de projection 3 peut être très couteux en temps de calcul comme beaucoup d’algorithmes géométriques, on a développé un algorithme glouton



qui tente de résoudre approximativement le problème (5.7). Cet algorithme ne calcule que des produits scalaires et par conséquent est très rapide. Il est à noter qu'il ne produit pas forcément la résultat optimal.

On a constaté empiriquement que  $Q(\eta)$  en fonction de  $\|\mathbf{A}_J^* \eta\|_\infty$  semblait convexe. D'où l'idée de grossièrement sélectionner une séquence de candidats  $\eta$  qui augmentent le dénominateur de (5.6) jusqu'à ce qu'un certificat dual est trouvé. Cela est fait en faisant décroître le produit scalaire entre les colonnes de  $\mathbf{A}$  indexées par le cosupport  $J$  du signal et le vecteur candidat  $\eta$  à chaque étape.

Plus précisément, comme pour le critère  $IC$  de [VPDF13], nous voulons construire un candidat  $\eta$  optimal tout en minimisant  $\|\mathbf{A}_J^* \eta\|_\infty$ .

L'algorithme est initialisé avec le candidat générique  $d(x_0) = \eta_F$  (définition 4.1.6) qui est le pré-certificat de Fuchs.

---

**Algorithm 4** Algorithme glouton pour le pré-certificat optimal

---

```

1: Étape 0
2: Calcul de  $\eta = \mathbf{A}_I^{+*} \text{sign}(x^0_I)$ 
3:  $\text{sign}_k \leftarrow$  vecteur nul de la taille de  $x^0_I$ 
4:  $I_k\_bad \leftarrow$  vecteur non vide.
5:  $Q_{old} \leftarrow$  valeur MAX.
6: Étape k
7: while  $I_k\_bad$  est vide do
8:   while  $\mathbf{A}_{I_k}$  est injectif and  $t_k > 0$  and  $Q_{old} > Q$  do
9:      $j_k \leftarrow \max_{j_k \notin I_k} |\langle a_{j_k}, \eta \rangle|$ 
10:     $\text{sign}_k \leftarrow \text{sign}_k \cup \{\text{sign}(\langle a_{j_k}, \eta \rangle)\}$ 
11:     $I_k \leftarrow I_k \cup j_k$ 
12:    Calcul du compromis  $t_k$ 
13:    if  $t_k = 0$  then
14:      return  $\eta$ 
15:    end if
16:     $\eta \leftarrow \eta - t_k \mathbf{A}_{I_k}^{+*} \text{sign}_k$ 
17:     $Q_{old} \leftarrow Q$ 
18:     $Q \leftarrow \frac{\|\eta\|_2}{1 - \|\mathbf{A}_{I_k}^* \eta\|_\infty}$ 
19:  end while
20:   $I_k\_bad \leftarrow$  éléments de  $I_k$  tels que  $(\mathbf{A}_{I_k}^* \mathbf{A}_{I_k})^{-1} \text{sign}_k \neq \text{sign}_k$ 
21:  Élimination des éléments de  $I_k(I_k\_bad)$ 
22:  Élimination des éléments de  $\text{sign}_k(I_k\_bad)$ 
23: end while
    
```

---

L'idée principale est de sélectionner une séquence de candidats  $\eta$  qui augmentent le dénominateur de (5.6) jusqu'à ce qu'un certificat dual est trouvé. Cela est fait en faisant décroître le produit scalaire entre les colonnes de  $\mathbf{A}$  indexées par le cosupport  $J$  du signal et le vecteur candidat  $\eta$  à chaque étape.

Plus précisément, comme pour le critère  $IC$  de [VPDF13], nous voulons construire un candidat  $\eta$  avec une  $\|\mathbf{A}_j^* \eta\|_\infty$  minimale.

A chaque étape  $k$ ,  $\|\mathbf{A}_j^* \eta\|_\infty$  est réduit en ajoutant une composante  $a_{j_k}$  au vecteur  $\eta_{k+1} = \eta_k - t_k \mathbf{A}_{I_k}^{+*} \text{sign}_k$  tel que  $I_k = I_{k-1} \cup \{j_k\}$  et  $\mathbf{A}_{I_k}$  est injective. Le vecteur  $\text{sign}_k$  contient le signe approprié pour effectivement réduire les produits scalaires avec les colonnes sélectionnées. Le maximum des corrélations entre ces colonnes sélectionnées et le vecteur candidat est réduit proportionnellement à  $t_k$  et, de plus,

$$|\langle a_s, \eta_k \rangle| = \|\mathbf{A}_j^* \eta_k\|_\infty \quad (s \in S) \quad (5.18)$$

où  $S$  est l'ensemble des indices des colonnes sélectionnées.

La figure 5.4 illustre le fonctionnement de l'algorithme glouton. À partir d'une étape initiale, l'algorithme sélectionne et ajoute la colonne  $a_1$  avec le signe  $-1$ . Le facteur  $t_k$ , qui limite les déplacements de l'hyperplan, est calculé tel que la diminution de  $\|\mathbf{A}_j^* \eta_k\|_\infty$  soit maximale.

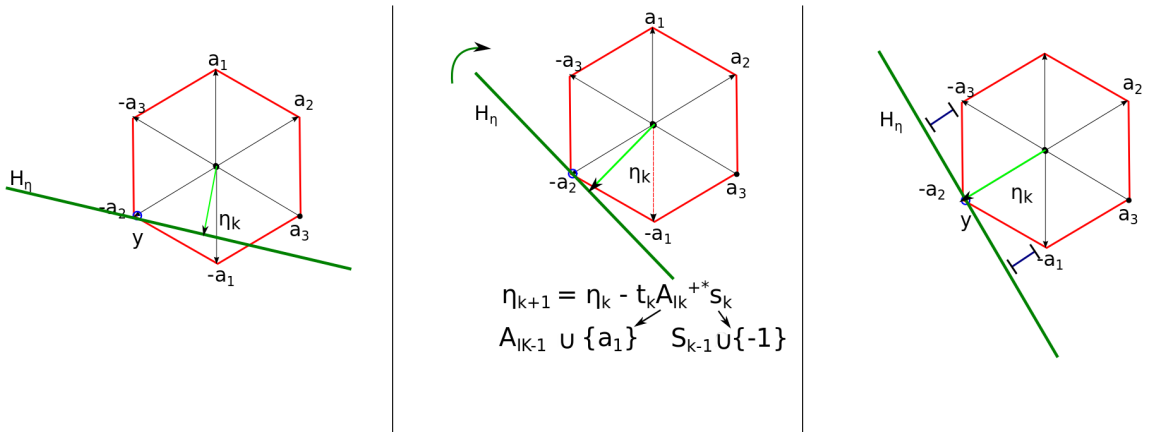


FIGURE 5.4 – Un exemple simple du fonctionnement de l'algorithme glouton.

### Calcul de $t_k$

Le calcul du nouveau vecteur  $\eta_{k+1} = \eta_k - t_k \mathbf{A}_{I_k}^{+*} \text{sign}_k$  nécessite le calcul du coefficient  $t_k$ . Lors du calcul du nouveau  $\eta$ , le produit scalaire d'une partie de colonnes de  $\mathbf{A}$  indicées sur le cosupport avec  $\eta$  vont diminuer et pour les autres, ce produit scalaire va augmenter. Le coefficient doit être choisi de telle sorte que l'on puisse réduire au maximum le produit scalaire le plus élevé sans que les autres produits scalaires qui augmentent ne l'excèdent.

Pour cela, il suffit d'observer des droites définies par

$$\begin{aligned} \langle a_1, \eta_{k+1} \rangle &= \langle a_1, \eta_k \rangle - t_k \langle a_1, \mathbf{A}_{I_k}^{+*} \text{sign}_k \rangle \\ \langle a_2, \eta_{k+1} \rangle &= \langle a_2, \eta_k \rangle - t_k \langle a_2, \mathbf{A}_{I_k}^{+*} \text{sign}_k \rangle \\ &\dots \\ \langle a_n, \eta_{k+1} \rangle &= \langle a_n, \eta_k \rangle - t_k \langle a_n, \mathbf{A}_{I_k}^{+*} \text{sign}_k \rangle \end{aligned}$$

Ces droites représentent les valeurs des produits scalaires en fonction de  $t_k$ . Certains vont augmenter et d'autres diminuer. L'intersection d'une de ces droites avec le produit scalaire que le souhaite diminuer, soit  $j_k$ , donne la valeur de  $t_k$  que l'on ne doit pas excéder pour cette droite. Pour avoir le meilleur compromis, il faudra prendre de toutes les intersections celle dont la valeur de  $t_k$  est la plus basse et positive. Cela donne l'algorithme suivant :

---

**Algorithm 5** Calcul du compromis  $t_k$

---

- 1: En entrée  $\eta$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $I_k$ ,  $j_k$ .
  - 2: **if**  $\langle a_{j_k}, \eta \rangle > 0$  **then**
  - 3:    $(t_k)_+ \leftarrow \left\{ \frac{\langle a_i, \eta \rangle - \langle a_{j_k}, \eta \rangle}{(\mathbf{A}^* \mathbf{A}_{I_k}^{+*} \text{sign}_k)_i - (\mathbf{A}^* \mathbf{A}_{I_k}^{+*} \text{sign}_k)_{j_k}} \text{ pour } i \notin I_k \text{ tel que } \langle a_i, \eta \rangle \geq 0 \right\}$
  - 4:    $(t_k)_- \leftarrow \left\{ \frac{\langle a_i, \eta \rangle + \langle a_{j_k}, \eta \rangle}{(\mathbf{A}^* \mathbf{A}_{I_k}^{+*} \text{sign}_k)_i + (\mathbf{A}^* \mathbf{A}_{I_k}^{+*} \text{sign}_k)_{j_k}} \text{ pour } i \notin I_k \text{ tel que } \langle a_i, \eta \rangle < 0 \right\}$
  - 5:    $t_k \leftarrow \min (t_k)_+ \cup (t_k)_-$  tel que  $0 < t_k < 1$
  - 6: **else**
  - 7:    $(t_k)_- \leftarrow \left\{ \frac{\langle a_i, \eta \rangle - \langle a_{j_k}, \eta \rangle}{(\mathbf{A}^* \mathbf{A}_{I_k}^{+*} \text{sign}_k)_i - (\mathbf{A}^* \mathbf{A}_{I_k}^{+*} \text{sign}_k)_{j_k}} \text{ pour } i \notin I_k \text{ tel que } \langle a_i, \eta \rangle \leq 0 \right\}$
  - 8:    $(t_k)_+ \leftarrow \left\{ \frac{\langle a_i, \eta \rangle + \langle a_{j_k}, \eta \rangle}{(\mathbf{A}^* \mathbf{A}_{I_k}^{+*} \text{sign}_k)_i + (\mathbf{A}^* \mathbf{A}_{I_k}^{+*} \text{sign}_k)_{j_k}} \text{ pour } i \notin I_k \text{ tel que } \langle a_i, \eta \rangle > 0 \right\}$
  - 9:    $t_k \leftarrow \min (t_k)_+ \cup (t_k)_-$  tel que  $0 < t_k < 1$
  - 10: **end if**
- 

### Étape d'élimination

Quand le vecteur  $\eta$  est modifié, ces produits scalaires avec  $\mathbf{A}_j^*$  le sont aussi et le signe de  $(\mathbf{A}_{I_k}^* \mathbf{A}_{I_k})^{-1} \text{sign}_k$  peut être différent de celui de  $\text{sign}_k$ . L'ensemble  $S$  peut être divisé en deux sous ensembles :  $S_+$  l'ensemble des colonnes sélectionnées telles que  $\text{sign}((\mathbf{A}_{I_k}^* \mathbf{A}_{I_k})^{-1} \text{sign}_k)_+ = (\text{sign}_k)_+$  et  $S_-$  quand  $\text{sign}((\mathbf{A}_{I_k}^* \mathbf{A}_{I_k})^{-1} \text{sign}_k)_- = -(\text{sign}_k)_-$ . Calculer  $\eta_{k+1} = \eta_k - t_k \mathbf{A}_{I_k}^{+*} \text{sign}_k$  entrainera la diminution de  $|\langle a_{s_+}, \eta_k \rangle|$  et l'augmentation de  $|\langle a_{s_-}, \eta_k \rangle|$ . Le facteur de descente  $t_k$  est calculé pour avoir le meilleur compromis entre les produits scalaires qui diminuent et ceux qui augmentent c'est à dire  $\min |\langle a_{s_+}, \eta_k \rangle| = \max |\langle a_{s_-}, \eta_k \rangle|$ .

En effet, si le signe des produits scalaires des colonnes déjà sélectionnées est inversé, la descente sera plus couteuse et le facteur  $t_k$  sera plus petit. Cette stabilité

peut être un indicateur des colonnes qui ne sont plus nécessaires c'est à dire qu'elles ne jouent plus leur rôle.

On rajoute, finalement une étape optionnelle d'élimination qui est utilisée pour nettoyer les colonnes superflues à la fin.

## 5.4 Résultats numériques

Cette section présente une comparaison des résultats entre les deux algorithmes. Le temps calcul et surtout la borne Lipschitz obtenue vont être confrontés. Pour être plus précis, on a testé deux algorithmes gloutons, avec ou sans la dernière étape d'élimination. On a vu que dans le chapitre 4.1 que deux algorithmes étaient testés. On a constaté que l'algorithme sans l'étape d'élimination se stoppait plus tôt et avait donc de moins bons résultats. Par conséquent dans la suite, on ne comparera que l'algorithme complet avec son étape d'élimination.

Le certificat dual optimal assure à la fois l'identifiabilité de  $x^0$  et minimise la majoration de l'erreur de reconstruction. Ces deux conditions vont être évaluées on va tester les pré-certificats de la minimisation  $\ell^1$  présentés dans le chapitre 4 pour différentes matrices, gaussienne et de type-tomographique et visualiser les résultats à l'aide de transition de phase. La matrice de type tomographique utilisée simule une matrice de projections pour des projections parallèles. Des tests ont été réalisés pour des projections en éventail et les résultats sont similaires.

On a créé un ensemble d'images parcimonieuses  $x^0$  de taille  $64 \times 64$ . Pour simuler une tomodensitométrie à faibles nombres de vues, on a limité le nombre d'angles à 10 répartis uniformément. On observe peu de différences entre des angles choisis aléatoirement et des angles répartis uniformément. Ce nombre assez faible nous donne une matrice de projections  $\mathbf{A}$  sous déterminée :  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{930 \times 4096}$ . Pour calculer nos transitions de phase, on a découpé notre ensemble d'images parcimonieuses en fonction de la parcimonie. Pour chaque degré de parcimonie, on construit aléatoirement un ensemble d'images de support où les composantes non nulles sont égales à 1, et un ensemble d'images de support où les composantes non nulles sont soit égales à 1 soit -1. La Figure 5.5 montre quelques exemples.

La minimisation (1.5) et le pré-certificat de IC peuvent se reformuler comme des problèmes de programmation linéaire. Ils ont été calculés soit avec la toolbox d'optimisation de Matlab, soit la toolbox OPTI ou soit Mosek. Pour le pré-certificat optimal, on a développé deux approches, une géométrique qui retourne la solution exacte et une approche gloutonne qui l'approxime.

La transition de phase de la minimisation (1.5) a d'abord été calculée. On visualise ainsi à partir de quel degré de parcimonie, il n'est plus possible de reconstruire le signal  $x^0$  via la minimisation  $\ell^1$  synthèse. On construit ensuite les transitions de phases des différents pré-certificats pour voir jusqu'à quel degré de parcimonie ils sont des certificats duaux non dégénérés.

Les figures 5.6 et 5.7 représentent respectivement les transitions de phases pour

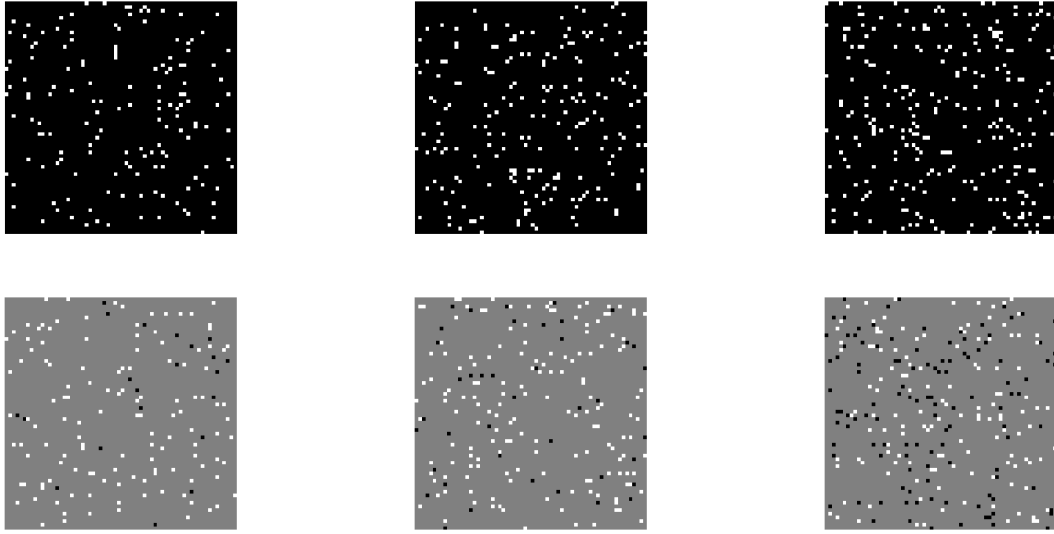


FIGURE 5.5 – Exemples de  $x^0 \in \mathbb{R}^{64 \times 64}$  avec un degré de parcimonie de 150, 200 et 250

une matrice gaussienne et une matrice de projections. Les transitions pour les pré-certificats de IC et optimal ne sont pas présentés parce que les transitions de phase se superposent à celle de la minimisation  $\ell^1$ . Autrement dit, pour tous les signaux  $x^0$  qui sont identifiables, ils sont des certificats duaux non dégénérés.

Les transitions de phases  $\eta_{g1}$  et  $\eta_{g2}$  représentent deux algorithmes gloutons pour trouver le pré-certificat optimal. On voit très bien qu'il y en a un qui est en deçà dans le cas de tomographie. Il n'arrive pas à produire un certificat dual pour tous les vecteurs identifiables.  $d$  représentent le certificat de Fuchs, très utilisé dans la littérature. On se rend compte qu'en pratique, il ne produit un certificat dual non dégénéré que pour de petites parcimonie. Plus précisément, la condition d'irreprésentabilité n'est finalement vérifiée que pour peu de signaux identifiables mais elle assure la robustesse à petits bruits.

Contrairement au certificat de Fuchs, les autres certificats montrent bien le caractère nécessaire et suffisant de la condition source renforcée dans l'unicité d'une solution. Le certificat de IC est le certificat dont la norme infini des corrélations avec les colonnes de  $\mathbf{A}$  qui ne sont pas dans le support est minimale. Évidemment pour une solution identifiable, il y en a toujours au moins un qui sera trouvé. Il est en de même pour le certificat de norme minimale et le certificat optimal. Pour ces certificats, la seule difficulté est de développer un algorithme efficace pour les construire.

On a repris le même contexte d'expérimentation que le chapitre 4.1 avec les

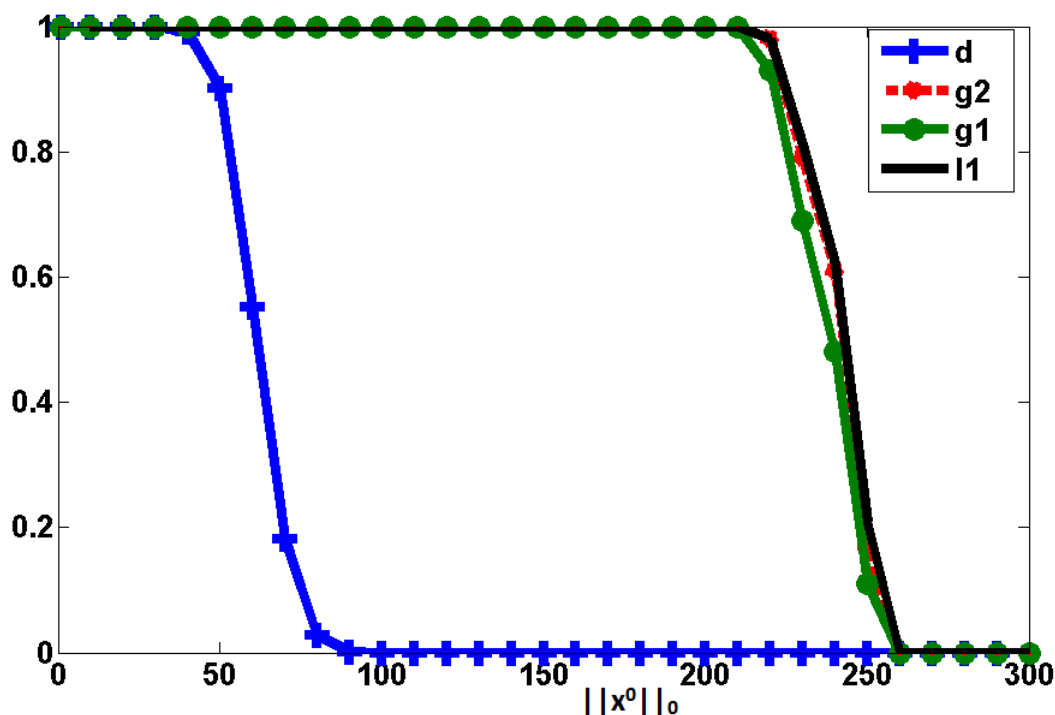


FIGURE 5.6 – Ratio de vecteurs reconstruits par la minimisation  $\ell^1$  en fonction de  $\|x^0\|_0$  dans un cas gaussien. Le ratio des pré-certificats  $d$ ,  $\eta_{g1}$  et  $\eta_{g2}$  qui sont des certificats duaux non dégénérés en fonction de  $\|x^0\|_0$

mêmes ensembles d'images et opérateurs. Les résultats sont condensés dans les tableaux 5.1 et 5.2 qui présentent le  $Q$  optimal (respectivement (5.17) et (5.6)) obtenu pour différents degrés de parcimonie avec une matrice gaussienne et les tableaux 5.3 et 5.4 pour une matrice de projection. Pour chaque degré de parcimonie, les algorithmes ont été testés pour une centaine de signaux identifiables.

parcimonie	80		100		120	
	Q	temps (s)	Q	temps (s)	Q	temps (s)
moyenne	22.10	11.24	28.98	13.56	38.32	17.33
médiane	22.16	11.20	28.85	13.42	38.23	17.31
min	18.81	9.93	24.49	11.93	31.18	14.84
max	25.11	12.82	32.99	17.15	44.95	19.33

TABLE 5.1 – Résultats pour  $Q$  obtenu par l'algorithme de projection pour une matrice gaussienne. Temps en secondes

En comparaison avec une minimisation  $\ell^1$  résolue en programmation linéaire par

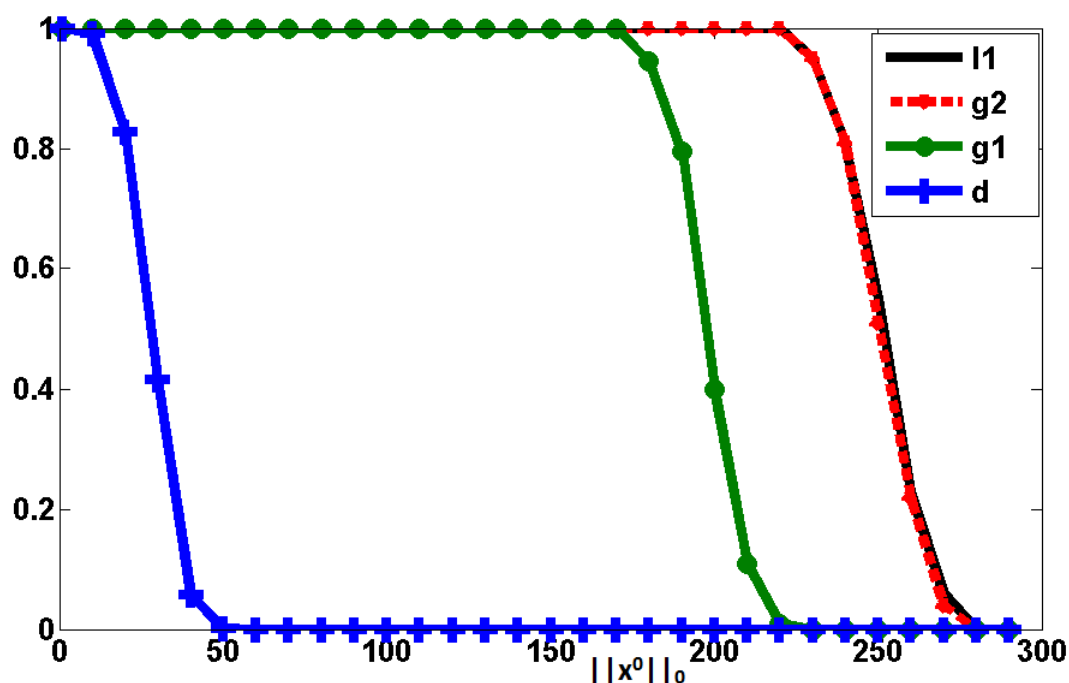


FIGURE 5.7 – Ratio de vecteurs reconstruits par la minimisation  $\ell^1$  en fonction de  $\|x^0\|_0$  dans le cas tomographique. Le ratio des pré-certificats  $d$ ,  $\eta_{g1}$  et  $\eta_{g2}$  qui sont des certificats duaux non dégénérés en fonction de  $\|x^0\|_0$ .

parcimonie	80		100		120	
	Q	temps (s)	Q	temps (s)	Q	temps (s)
moyenne	22.12	7.21	29.02	8.00	38.44	8.67
médiane	22.18	6.78	28.90	7.77	38.33	8.62
min	18.82	5.97	24.54	6.80	31.24	7.51
max	25.12	12.14	33.06	12.56	45.04	9.76

TABLE 5.2 – Résultats pour  $Q$  obtenu par l'algorithme glouton pour une matrice gaussienne. Temps en secondes

Mosek ou OPTI, l'algorithme de projection est trois à cinq fois plus rapide que la programmation linéaire sous Mosek et l'algorithme glouton divise par deux ce temps de calcul. L'algorithme de projection trouve la borne Lipschitz optimale ce qui permet de comparer avec l'approximation de l'algorithme glouton. Cette comparaison montre que cette approximation construit un certificat dual non dégénéré presque optimal.

Ce résultat de l'algorithme glouton est une agréable surprise qu'il faut toutefois pondérer. L'algorithme glouton a une étape d'inversion de matrice et quand le degré

parcimonie	80		100		150	
	Q	temps (s)	Q	temps (s)	Q	temps (s)
moyenne	11.23	11.97	15.29	11.38	37.44	15.13
médiane	11.18	11.87	15.27	11.33	36.71	15.01
min	9.34	9.99	12.45	10.47	26.53	13.15
max	13.42	16.40	19.35	12.85	56.54	17.37

 TABLE 5.3 – Résultats pour  $Q$  obtenu par l’algorithme de projection pour une matrice de projection. Temps en secondes

parcimonie	80		100		150	
	Q	temps (s)	Q	temps (s)	Q	temps (s)
moyenne	11.32	4.57	15.58	5.50	22.32	6.39
médiane	11.29	4.58	15.47	5.44	21.63	6.37
min	9.40	3.86	12.57	4.89	16.56	5.52
max	13.60	6.55	19.78	6.21	31.38	7.45

 TABLE 5.4 – Résultats pour  $Q$  obtenu par l’algorithme glouton pour une matrice de projection. Temps en secondes

de parcimonie se rapproche de la transition de phase (voir chapitre 4.1), il y a plus d’itérations à de plus grande parcimonie. Par conséquent, il arrive que le temps de calcul explose.

### Erreur théorique contre erreur réelle

On a souhaité comparer les bornes théoriques obtenus avec la réalité. Ces majorations couvrent tous les cas de bruits additifs dont le pire cas c’est à dire le bruit qui va entraîner l’erreur de reconstruction la plus élevée. Pour évaluer ce pire cas, on a développé un algorithme qui construit un bruit qui maximise l’erreur de reconstruction. Pour un  $\epsilon$  fixé, cet algorithme construit un vecteur bruit  $b \in \mathbb{R}^m$  tel que  $\|b\|_2 \leq \epsilon$  et  $\|x^\epsilon - x^0\|_2$  soit maximale.

On sait que le problème contraint (5.1) partage le même ensemble de solution que le problème lagrangien [GHS11] pour . À partir de cela, on a essayé de développer une approche basée sur la formulation locale explicite de la solution du problème lagrangien  $x^\lambda$ . Localement, on sait [Fuc04] que la solution  $x^\lambda$ , avec  $J_\lambda = \text{supp}(x^\lambda)$  pour un  $\lambda = c\delta$  avec  $c > 0$  et  $\mathbf{A}_{J_\lambda}$  injectif, est

$$x_{J_\lambda}^\lambda = x_{J_\lambda}^0 + \mathbf{A}_{J_\lambda}^{+*} b - \lambda (\mathbf{A}_{J_\lambda}^* \mathbf{A}_{J_\lambda}^*)^{-1} \text{sign}(x_{J_\lambda}^\lambda) \quad (5.19)$$

La solution  $x^\lambda$  est construite itérativement et son support aussi. De plus, son support suit un chemin polygonal. On note  $J_\lambda$  le dernier support c’est à dire le support le support du vecteur construit à la dernière étape avant de construire  $x^\lambda$ . On peut espérer maximiser  $\|x_{J_\lambda}^\lambda - x_{J_\lambda}^0\|_2$  en construisant un vecteur bruit  $b$  basé sur ce dernier support  $J_\lambda$  avec une matrice  $(\mathbf{A}_{J_\lambda}^* \mathbf{A}_{J_\lambda}^*)^{-1}$  qui est mal-conditionnée. A cette étape,



il existe encore de petites composantes du vecteur qui n'ont pas été éliminées. Cela peut marcher pour des bruits de faible norme  $\ell^2$ . En effet, un bruit élevé impacterait le signe. Par conséquent, en suivant cette idée, on propose l'algorithme suivant 6 :

---

**Algorithm 6** construction du *pire* bruit

---

- 1: Trouver le dernier support  $J_\lambda$  tel que  $(\mathbf{A}_{J_\lambda}^* \mathbf{A}_{J_\lambda})^{-1}$  soit mal-conditionné
  - 2:  $(U, S, V) \leftarrow SVD((\mathbf{A}_{J_\lambda}^* \mathbf{A}_{J_\lambda})^{-1})$  où  $SVD$  est la décomposition en valeur singulière.
  - 3:  $b \leftarrow V(1)$  où  $V(1)$  est le vecteur avec la valeur singulière la plus forte.
  - 4: normalise  $b$ .
- 

Cet algorithme a été comparé à un millier de bruits gaussiens sur une centaine de vecteurs. Il a toujours produit le vecteur de bruit engendrant l'erreur de reconstruction  $\|x^\delta - x^0\|_2$  la plus élevée.

Pour une matrice de projection, le tableau 5.5 présente les meilleurs résultats obtenus dans le même cadre d'expérimentation que précédemment pour un petit bruit soit  $\epsilon$  petit et une dizaine de degrés de parcimonie (95 à 105). Ces résultats sont présentés sous la forme de ratios entre la majoration théorique de l'erreur de reconstruction de (5.5) et [GSH11] et l'erreur réelle obtenue en résolvant le problème 5.1. Les ratios ont été calculés pour des bruits gaussiens et le *pire* bruit. Pour les bruits gaussiens, une centaine de bruits ont été générés et on a pris en compte la moyenne des erreurs de reconstruction et l'erreur maximale pour calculer les ratios.

$\ x_{J_\lambda}^\lambda - x_{J_\lambda}^0\ _2$	Moyenne	Max	<i>pire</i>
$TB_1/\ x_{J_\lambda}^\lambda - x_{J_\lambda}^0\ _2$ de (5.5)	133.9	24.8	24.02
$TB_2/\ x_{J_\lambda}^\lambda - x_{J_\lambda}^0\ _2$ de [GSH11]	728.7	134.9	130.7

TABLE 5.5 – Ratio entre les résultats théoriques et l'erreur  $\ell^2$  réelle.  $TB$  est la borne théorique, Moyenne est le ratio avec la moyenne des erreurs  $\ell^2$  obtenues avec des bruits gaussiens, de même pour Max et *pire* est le ratio avec l'erreur  $\ell^2$  obtenue avec le *pire* bruit.

On constate que même le meilleur ratio reste très élevé et donc que les bornes théoriques restent très éloignées de la réalité malgré la réduction importante entre (5.5) et [GSH11]. Dans le cas de la tomographie, on peut expliquer cela même dans le cas continu. Si l'opérateur de Radon est  $R$ ,  $R^*R$  peut être vu comme un opérateur de déconvolution. Duval et al [DP15] montre dans le contexte de la déconvolution de trains de Dirac qu'il peut y avoir de petits mouvements des pics de Dirac c'est à dire que la reconstruction peut légèrement déplacer les pics. Ces mouvements n'impactent pas la reconstruction mais entraînent une augmentation de l'erreur  $\ell^2$  de reconstruction. De plus, en se ramenant au domaine discret, on augmente cette erreur en prenant une grille de discrétisation plus fine. Même pour de petits bruits

où on peut en général espérer une meilleure approximation, l'estimation théorique reste éloignée de la réalité.

Une autre raison au caractère pessimiste de la borne théorique est qu'elle est valable pour la solution du problème d'optimisation mais aussi pour tout vecteur admissible. Elle n'estime pas la distance entre  $x^0$  et une solution du problème mais la distance entre  $x^0$  et la plus éloignée des solutions. Par conséquent, s'il y a un vecteur admissible est éloigné de  $x^0$  au sens de la norme  $\ell^2$ , la borne sera très pessimiste.

Malgré cet écart significatif entre la théorie et la réalité, on constate quand même une forte corrélation entre la majoration théorique et l'erreur réelle comme le montre la figure 5.8. Chaque point de la figure correspond à la borne théorique de l'erreur de reconstruction d'un signal en fonction de la moyenne des erreurs réelles obtenues pour un millier de bruits gaussiens. Pour une centaine de signaux de même degré de parcimonie (100), on a calculé ces erreurs de reconstruction pour trois  $\epsilon$  différents (0,001, 0,01 et 0,1) d'où les trois groupements de la figure.

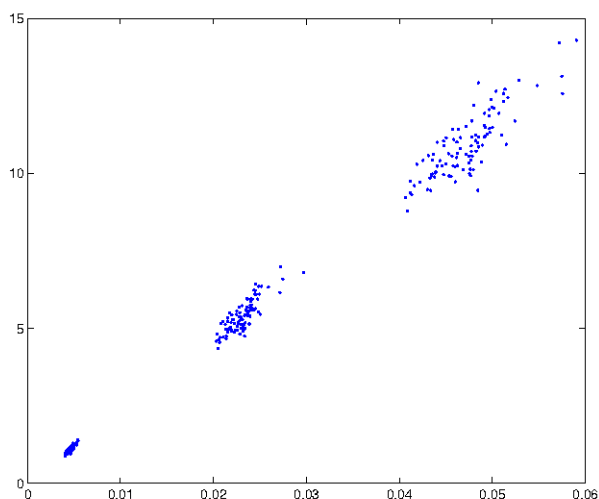


FIGURE 5.8 – la majoration théorique en fonction de la moyenne des erreurs réelles obtenues pour un millier de bruits gaussiens.

Cette figure 5.8 met bien en évidence un coefficient de proportionnalité entre les erreurs.

## 5.5 Annexes

### A1. Lemmes préparatoires

Nous aurons besoin des lemmes suivants pour nos preuves.

**Lemme 5.5.1.** Soit  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$  une collection finie de vecteurs dans  $\mathbb{R}^p$  et  $C = \text{Conv}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N\}$ . On suppose que  $H$  est un hyperplan affine qui n'intersecte pas l'intérieur de  $C$ . Alors

$$\mathcal{D}(C, H) = \min_{1 \leq i \leq N} \mathcal{D}(\mathbf{u}_i, H)$$

*Démonstration.* A une translation près, on peut supposer que  $H$  contient l'origine, soit  $H = \mathcal{H}_\eta$  pour un certain  $\eta \in \mathbb{R}^p$ . Puisque  $H$  n'intersecte pas l'intérieur de  $C$ , on peut aussi supposer que  $\langle \eta, \mathbf{u} \rangle \geq 0$  pour tout  $\mathbf{u}$  dans  $C$ .

Évidemment  $\mathcal{D}(C, H) \leq \min_{1 \leq i \leq N} \mathcal{D}(\mathbf{u}_i, H)$ , nous avons donc seulement à prouver le contraire. On fixe  $\mathbf{u}$  dans  $C$  et on l'écrit comme une combinaison convexe stricte

$$\mathbf{u} = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{u}_i, \quad \sum_{i \in I} \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i \leq 1 \quad (i \in I)$$

pour une certaine famille  $\{\mathbf{u}_i : i \in I\}$ . Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{u}, H) &= \frac{\langle \eta, \mathbf{u} \rangle}{\|\eta\|_2} = \sum_{i \in I} \alpha_i \frac{\langle \eta, \mathbf{u}_i \rangle}{\|\eta\|_2} = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathcal{D}(\mathbf{u}_i, H) \geq \\ &\geq \min_{i \in I} \mathcal{D}(\mathbf{u}_i, H) \sum_{i \in I} \alpha_i \geq \min_{1 \leq i \leq N} \mathcal{D}(\mathbf{u}_i, H), \end{aligned}$$

de plus

$$\mathcal{D}(C, H) = \inf_{\mathbf{u} \in C} \mathcal{D}(\mathbf{u}, H) \geq \min_{1 \leq i \leq N} \mathcal{D}(\mathbf{u}_i, H),$$

ce qui prouve le lemme.  $\square$

**Lemme 5.5.2.** Soit  $\mathcal{L}$  un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^m$  and  $L = \text{Dir}(\mathcal{L})$ . On note  $K$  le sous-espace orthogonal de  $L$  dans  $\mathbb{R}^m$  et on note  $\Pi_K$  le projecteur orthogonal dans  $K$ . Alors :

a)  $\Pi_K$  envoie  $\mathcal{L}$  dans le singleton  $\{\mathbf{d}\} = \mathcal{L} \cap K$ .

b) Si  $H$  est un hyperplan affine quelconque dans  $\mathbb{R}^m$  contenant  $\mathcal{L}$ , alors  $\Pi_K H$  est un hyperplan affine dans  $K$  qui contient  $\mathbf{d}$  et a la même direction normale que  $H$ . De plus, l'application

$$H \mapsto \Pi_K H \quad (H \supset \mathcal{L}) \tag{5.20}$$

est un bijection entre les hyperplans dans  $\mathbb{R}^m$  contenant  $\mathcal{L}$  et les hyperplans dans  $K$  contenant  $\mathbf{d}$ .

c) Si  $C$  est un sous-ensemble non vide dans  $\mathbb{R}^m$  alors

$$\mathcal{D}(C, \mathcal{L}) = \mathcal{D}(\Pi_K C, \mathbf{d}). \tag{5.21}$$

De plus, si  $H$  un hyperplan contenant  $\mathcal{L}$ , alors

$$\mathcal{D}(C, H) = \mathcal{D}(\Pi_K C, H) = \mathcal{D}(\Pi_K C, \Pi_K H). \tag{5.22}$$

*Démonstration.* Puisque  $K$  et  $L$  se croisent uniquement à l'origine et  $\mathcal{L}$  est une translation de  $L$ , il s'en suit que  $K$  et  $\mathcal{L}$  s'intersectent à un unique point, soit  $\mathbf{d}$ . Alors, comme  $L = \text{Ker } \Pi_K$ ,  $\Pi_K(\mathcal{L}) = \Pi_K(\mathbf{d} + L) = \{\mathbf{d}\}$ , ce qui prouve a).

Pour b), soit  $H$  un hyperplan contenant  $\mathcal{L}$ , on pose  $\mathcal{H} = \text{Dir}(H)$  et soit  $\eta$  un vecteur normal de  $H$ . Alors on a la décomposition orthogonale

$$\mathbb{R}^m = \text{Vect}(\eta) \oplus \mathcal{H} = \text{Vect}(\eta) \oplus L \oplus (\mathcal{H} \cap K), \quad (5.23)$$

d'où

$$K = \text{Vect}(\eta) \oplus (\mathcal{H} \cap K) \quad (5.24)$$

Il s'en suit de (5.23) que  $\Pi_K \mathcal{H} = \mathcal{H} \cap K$ , par conséquent

$$\Pi_K H = \Pi_K(\mathbf{d} + \mathcal{H}) = \mathbf{d} + \mathcal{H} \cap K = H \cap K,$$

alors  $\Pi_K H$  est un sous-espace affine dans  $K$  contenu dans  $\mathbf{d}$ . De plus, (5.24) montre que  $\Pi_K \mathcal{H}$  est de dimension 1 dans  $K$  et est orthogonal à  $\eta$ , d'où  $\Pi_K H$  est un hyperplan avec la même direction normale  $\eta$  que  $H$ . Pour finir la preuve de b), il suffit d'observer que l'application

$$\bar{H} \mapsto \bar{H} + L$$

définie pour tout hyperplan  $\bar{H}$  dans  $K$  qui contient  $\mathbf{d}$  est l'inverse de l'application (5.20).

Pour prouver c) on peut supposer que, à une translation près avec  $-\mathbf{d}$ , que  $\mathbf{d} = 0$ , d'où  $\mathcal{L} = L$  et  $\mathcal{H} = H$ . Pour prouver (5.21), on fixe  $\mathbf{u}$  dans  $C$  et on le décompose orthogonalement comme

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_L \oplus \Pi_K \mathbf{u}, \quad (\mathbf{u}_L \in L)$$

Alors

$$\mathcal{D}(\mathbf{u}, L) = \|\Pi_K \mathbf{u}\|_2 = \mathcal{D}(\Pi_K \mathbf{u}, 0),$$

et par conséquent

$$\mathcal{D}(C, L) = \inf_{\mathbf{u} \in C} \mathcal{D}(\mathbf{u}, L) = \inf_{\mathbf{u} \in C} \mathcal{D}(\Pi_K \mathbf{u}, 0) = \mathcal{D}(\Pi_K C, 0)$$

Finalement, pour prouver (5.22), on décompose orthogonalement  $\mathbf{u}$  en fonction de (5.23) :

$$\mathbf{u} = \lambda \eta \oplus \mathbf{u}_L \oplus \mathbf{u}_{H \cap K},$$

qui donne

$$\Pi_K \mathbf{u} = \lambda \eta \oplus \mathbf{u}_{H \cap K}.$$

mais alors

$$\langle \eta, \mathbf{u} \rangle = \langle \eta, \Pi_K \mathbf{u} \rangle = \lambda \|\eta\|_2^2$$

et comme  $H$  et  $\Pi_K \mathcal{H}$  ont le même vecteur normal  $\eta$ , il s'en suit que

$$\mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathcal{H}) = \frac{|\langle \eta, \mathbf{u} \rangle|}{\|\eta\|_2} = \frac{|\langle \eta, \Pi_K \mathbf{u} \rangle|}{\|\eta\|_2} = \mathcal{D}(\Pi_K \mathbf{u}, \Pi_K \mathcal{H}),$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(C, \mathcal{H}) &= \inf_{\mathbf{u} \in C} \mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathcal{H}) = \inf_{\mathbf{u} \in C} \mathcal{D}(\Pi_K \mathbf{u}, \Pi_K \mathcal{H}) \\ &= \mathcal{D}(\Pi_K C, \Pi_K \mathcal{H}) \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. □

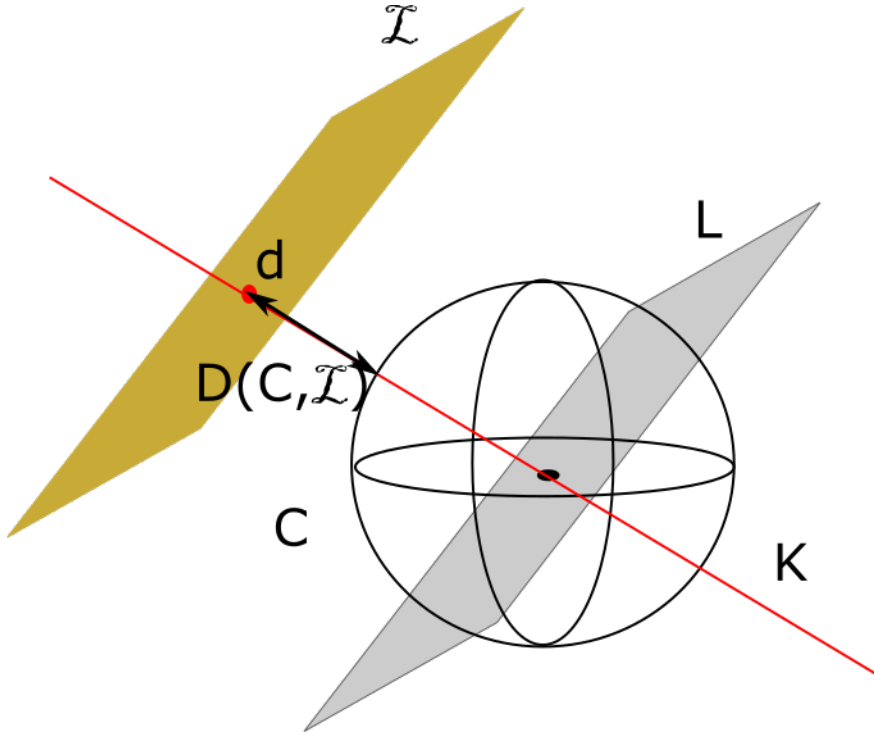


FIGURE 5.9 – Illustration de lemme 5.5.2 avec un exemple simple dans  $\mathbb{R}^3$

La figure 5.9 illustre ce lemme.

**A2. Preuve Proposition 5.2.1 :**

Pour prouver a), rappelons d'abord deux formules générales qui donnent la distance d'un vecteur arbitraire  $\mathbf{u}$  dans  $\mathbb{R}^m$  à un sous-espace  $\mathcal{H}_\eta$  et la distance de ce vecteur à un sous-espace affine  $H_\eta$  (voir (2.1) et (2.2) pour leur définition). A savoir

$$\mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathcal{H}_\eta) = \frac{|\langle \mathbf{u}, \eta \rangle|}{\|\eta\|_2} \quad (\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m). \quad (5.25)$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{u}, H_\eta) = \frac{|1 - \langle \mathbf{u}, \eta \rangle|}{\|\eta\|_2} \quad (\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m). \quad (5.26)$$

La première égalité (5.25) vient directement du fait que  $\mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathcal{H}_\eta)$  est simplement la norme de la projection de  $\mathbf{u}$  dans  $\mathcal{H}_\eta$ , qui est le vecteur  $\langle \mathbf{u}, \eta \rangle \eta^+$ .

Pour (5.26), on note que, puisque  $H_\eta = \eta^+ + \mathcal{H}_\eta$ , on a

$$\mathcal{D}(\mathbf{u}, H_\eta) = \mathcal{D}(\mathbf{u} - \eta^+, \mathcal{H}_\eta).$$

Alors (5.25) appliqué pour  $\mathbf{u} - \eta^+$  à la place de  $\mathbf{u}$  nous donne

$$\mathcal{D}(\mathbf{u} - \eta^+, \mathcal{H}_\eta) = \frac{|\langle \mathbf{u} - \eta^+, \eta \rangle|}{\|\eta\|_2} = \frac{|1 - \langle \mathbf{u}, \eta \rangle|}{\|\eta\|_2}$$

ce qui prouve (5.26).

On fixe maintenant  $j$  dans  $J$  et on observe que

$$\begin{aligned} 1 - |\langle \mathbf{a}_j, \eta \rangle| &= 1 - \max\{\langle \mathbf{a}_j, \eta \rangle, \langle -\mathbf{a}_j, \eta \rangle\} \\ &= \min\{1 - \langle \mathbf{a}_j, \eta \rangle, 1 - \langle -\mathbf{a}_j, \eta \rangle\} \\ &= \min\{|1 - \langle \mathbf{a}_j, \eta \rangle|, |1 - \langle -\mathbf{a}_j, \eta \rangle|\}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

La dernière égalité ci-dessus est vraie parce que (5.9) implique  $|\langle \mathbf{a}_j, \eta \rangle| \leq 1$ , ce qui veut dire que ni  $1 - \langle \mathbf{a}_j, \eta \rangle$  ni  $1 - \langle -\mathbf{a}_j, \eta \rangle$  ne sont négatifs. Il s'en suit de (5.27) et (5.26) que

$$\frac{1 - |\langle \mathbf{a}_j, \eta \rangle|}{\|\eta\|_2} = \min\{\mathcal{D}(\mathbf{a}_j, H_\eta), \mathcal{D}(-\mathbf{a}_j, H_\eta)\}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{1 - \|\mathbf{A}_J^* \eta\|_\infty}{\|\eta\|_2} &= \min_{j \in J} \frac{1 - |\langle \mathbf{a}_j, \eta \rangle|}{\|\eta\|_2} \\ &= \min_{j \in J} \min\{\mathcal{D}(\pm \mathbf{a}_j, H_\eta)\} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Il s'en suit aussi de (5.9) que  $H_\eta$  n'intersecte pas l'intérieur du polytope réduit  $Q_J = \text{Conv}(\{\pm \mathbf{a}_j : j \in J\})$ . Si cela se produit, alors il y aurait  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  dans  $Q_J$  tel que  $\langle \eta, \mathbf{u}_1 \rangle < 1$  et  $\langle \eta, \mathbf{u}_2 \rangle > 1$ , alors que (5.9) garantit que  $\langle \mathbf{u}, \eta \rangle \leq 1$  est vrai pour tout  $\mathbf{u}$  dans  $Q_J$ .

Pour finir la preuve de a), on observe que (5.28) implique la conclusion (5.10) à travers un argument général décrit dans le lemme 5.5.1.

On prouve maintenant b). Il s'en suit directement de a) que le problème (5.7) est équivalent au problème

$$\begin{aligned} \max \mathcal{D}(H_\eta, Q_J) : \quad & (\mathbf{A}^* \eta)_I = \text{sign}(x_I^0), \\ & \|(\mathbf{A}^* \eta)_J\|_\infty < 1 \end{aligned} \quad (5.29)$$

On observe que la première contrainte ci-dessus veut précisément dire que  $\mathcal{L}(x^0) \subset H$ . On suppose qu'un certain vecteur  $\eta$  satisfait la première contrainte mais pas

la seconde, c'est à dire  $\|(\mathbf{A}^*\eta)_J\|_\infty \geq 1$ . Ce qui veut dire que  $\langle \eta, \sigma a_{J'} \rangle \geq 1$  pour un  $J'$  dans  $J$  et un signe  $\sigma \in \{\pm 1\}$ . Mais alors le vecteur  $\frac{1}{\langle \eta, \sigma a_{J'} \rangle} \sigma a_{J'}$  appartient simultanément à  $H_\eta$  et  $Q_J$ , d'où  $\mathcal{D}(H_\eta, Q_J) = 0$ . Par conséquent un tel vecteur  $\eta$  ne peut être une solution de (5.29) pour un vecteur identifiable  $x^0$ . En tant que tel, on peut formellement ignorer la deuxième contrainte dans (5.29), et cela complète la preuve.

**A3. Preuve de la Proposition 5.3.1 :**

Pour prouver a), on fixe  $i_0$  dans  $I$  et on suppose que  $\eta$  est un pré-certificat pour  $x^0$ , c'est à dire que (4.3) est vrai. Par conséquent, pour tout  $i \in I$ , on a

$$\langle \eta, (\sigma_0)_i \mathbf{a}_i - (\sigma_0)_{i_0} \mathbf{a}_{i_0} \rangle = (\sigma_0)_i^2 - (\sigma_0)_{i_0}^2 = 0,$$

ce qui implique que  $\eta$  est orthogonal à  $L$  et de plus appartient à  $K$ .

Pour b), comme  $d(x^0)$  est un pré-certificat, il s'en suit de a) qu'il appartient à  $K$ , par conséquent  $d(x^0)^+$  aussi. D'autre part,  $d(x^0)^+$  est dans  $\mathcal{L}(x^0)$  (voir (2.3)), par conséquent tout vecteur  $u$  dans  $\mathcal{L}(x^0)$  peut s'écrire comme  $u = u' + d(x^0)^+$  pour un  $u'$  dans  $L = \text{Dir}(\mathcal{L}(x^0)) = \text{Ker}\Pi_K$ . Mais alors

$$\Pi_K u = \Pi_K d(x^0)^+ = d(x^0)^+$$

ce qui prouve b).

Finalement, c) est une conséquence directe d'un argument plus général contenu dans le lemme 5.5.2.

**A4. Preuve du lemme 5.3.2**

On peut supposer que, à une translation près, que  $\mathbf{d} = 0$ . Ce qui veut dire qu'en particulier que  $\mathbf{w}_0$  est le vecteur de norme minimale dans  $C$ , et que  $H_0 = \mathcal{H}_{\mathbf{w}_0}$ . Avec cette hypothèse, on prouve d'abord (5.13), qui devient

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_0 \rangle \geq \|\mathbf{w}_0\|_2^2 \quad (\mathbf{u} \in C). \quad (5.30)$$

En supposant le contraire, on peut trouver un  $\mathbf{u}$  dans  $C$  tel que  $\langle \mathbf{w}_0 - \mathbf{u}, \mathbf{w}_0 \rangle > 0$ . On définit alors, pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\mathbf{u}_\lambda = (1 - \lambda)\mathbf{w}_0 + \lambda\mathbf{u}, \quad f(\lambda) = \|\mathbf{u}_\lambda\|_2^2 - \|\mathbf{w}_0\|_2^2$$

Par extension  $f(\lambda)$  donne

$$f(\lambda) = \lambda(\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_0\|_2^2 \lambda - 2\langle \mathbf{w}_0 - \mathbf{u}, \mathbf{w}_0 \rangle),$$

alors  $f(\lambda)$  est négative pour  $\lambda \in \left(0, \frac{2\langle \mathbf{w}_0 - \mathbf{u}, \mathbf{w}_0 \rangle}{\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_0\|_2^2}\right)$ . On fixe alors  $\lambda_0 = \min\left\{1, \frac{\langle \mathbf{w}_0 - \mathbf{u}, \mathbf{w}_0 \rangle}{\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_0\|_2^2}\right\}$ . Alors, comme  $\lambda_0 \in (0, 1]$ , le vecteur  $\mathbf{u}_{\lambda_0}$  est une combinaison convexe de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}_0$ , d'où il est dans  $C$ . Mais d'un autre côté,  $f(\lambda_0) < 0$  équivaut à  $\|\mathbf{u}_{\lambda_0}\|_2 < \|\mathbf{w}_0\|_2$ , qui contredit le fait que  $\mathbf{w}_0$  est un élément de norme minimale dans  $C$ . Ce qui prouve (5.30).

Maintenant il s'en suit de (5.30) que, pour tout  $\mathbf{u}$  dans  $C$ ,

$$\mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathcal{H}_{\mathbf{w}_0}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}_0 \rangle}{\|\mathbf{w}_0\|_2} \geq \|\mathbf{w}_0\|_2$$

De plus

$$\mathcal{D}(C, \mathcal{H}_{\mathbf{w}_0}) = \inf_{\mathbf{u} \in C} \mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathcal{H}_{\mathbf{w}_0}) \geq \|\mathbf{w}_0\|_2$$

Mais, d'un autre coté,

$$\mathcal{D}(C, \mathcal{H}_{\mathbf{w}_0}) \leq \mathcal{D}(\mathbf{w}_0, 0) = \|\mathbf{w}_0\|_2$$

ce qui prouve (5.14).

Pour prouver (5.15), soit  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\eta$  un hyperplan quelconque différent de  $\mathcal{H}_{\mathbf{w}_0}$ . Ce qui veut dire que  $\eta$  et  $\mathbf{w}_0$  ne sont pas colinéaires, ce qui implique l'inégalité stricte de Cauchy-Schwartz

$$|\langle \eta, \mathbf{w}_0 \rangle| < \|\eta\|_2 \|\mathbf{w}_0\|_2.$$

Mais alors

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(C, \mathcal{H}_\eta) &\leq \mathcal{D}(\mathbf{w}_0, \mathcal{H}_\eta) = \frac{|\langle \eta, \mathbf{w}_0 \rangle|}{\|\eta\|_2} = \|\mathbf{w}_0\|_2 \frac{|\langle \eta, \mathbf{w}_0 \rangle|}{\|\eta\|_2 \|\mathbf{w}_0\|_2} \\ &< \|\mathbf{w}_0\|_2 = \mathcal{D}(C, \mathcal{H}_{\mathbf{w}_0}) \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration.

#### A4. Preuve du Théorème principal 5.3.3 :

On suppose que  $x^0$  est identifiable. Alors, par le Théorème 4.7 dans [GSH11], il existe  $\eta$  dans  $\mathbb{R}^m$  satisfaisant la condition source renforcée (4.3) et (4.4). Si alors  $H_\eta$  contient  $\mathcal{L}(x^0)$  et, par la Proposition 5.2.1,  $\mathcal{D}(Q_J, H_\eta) > 0$ . Alors, d'un côté,  $d(x^0)^+$  appartient à  $H_\eta$ , et, d'un autre côté, (5.22) du lemme 5.5.2 implique que  $\mathcal{D}(\bar{Q}_J, H_\eta) > 0$ , d'où  $H_\eta$  n'intersecte pas  $\bar{Q}_J$ . Mais alors, en particulier,  $d(x^0)^+$  est à l'extérieur de  $\bar{Q}_J$ , de plus  $\|\mathbf{w}_0 - d(x^0)^+\|_2 > 0$ .

Inversement, on suppose que  $\|\mathbf{w}_0 - d(x^0)^+\|_2 > 0$ . Montrons d'abord que le dénominateur dans (5.16) ne peut être nul. Si c'était le cas, cela voudrait dire que

$$\langle d(x^0)^+, \mathbf{w}_0 \rangle = \|d(x^0)^+\|_2^2 > 0 \tag{5.31}$$

et aussi que  $\langle \mathbf{w}_0 - d(x^0)^+, d(x^0)^+ \rangle = 0$ , ce qui implique

$$\|\mathbf{w}_0\|_2^2 = \|d(x^0)^+\|_2^2 + \|\mathbf{w}_0 - d(x^0)^+\|_2^2 > \|d(x^0)^+\|_2^2. \tag{5.32}$$

Soit alors  $\mathbf{u}$  une projection de  $d(x^0)^+$  sur  $\text{Vect}(\mathbf{w}_0)$ , c'est à dire

$$\mathbf{u} = \frac{\langle d(x^0)^+, \mathbf{w}_0 \rangle}{\|\mathbf{w}_0\|_2^2} \mathbf{w}_0.$$



Il s'en suit de (5.31) et (5.32) que

$$\frac{\langle d(x^0)^+, \mathbf{w}_0 \rangle}{\|\mathbf{w}_0\|_2^2} = \frac{\|d(x^0)^+\|_2^2}{\|\mathbf{w}_0\|_2^2} < 1,$$

par conséquent  $\mathbf{u}$  appartient à  $\bar{Q}_J$ , comme c'est une combinaison convexe stricte

$$\mathbf{u} = \left(1 - \frac{\langle d(x^0)^+, \mathbf{w}_0 \rangle}{\|\mathbf{w}_0\|_2^2}\right) \cdot 0 + \frac{\langle d(x^0)^+, \mathbf{w}_0 \rangle}{\|\mathbf{w}_0\|_2^2} \mathbf{w}_0.$$

d'un autre côté, par définition de  $\mathbf{u}$ ,  $d(x^0)^+ - \mathbf{u}$  est orthogonal à  $\mathbf{w}_0$ , de plus, aussi à  $\mathbf{w}_0 - \mathbf{u}$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} \|d(x^0)^+ - \mathbf{w}_0\|_2^2 &= \|d(x^0)^+ - \mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_0\|_2^2 = \\ &= \|d(x^0)^+ - \mathbf{u}\|_2^2 + \left(1 - \frac{\langle d(x^0)^+, \mathbf{w}_0 \rangle}{\|\mathbf{w}_0\|_2^2}\right) \|d(x^0)^+\|_2^2 \\ &> \|d(x^0)^+ - \mathbf{u}\|_2^2, \end{aligned}$$

ce contredit le fait que  $\mathbf{w}_0$  est la projection de  $d(x^0)^+$  sur le convexe  $\bar{Q}_J$ .

Cela montre que le dénominateur dans (5.16) ne peut disparaître, alors on peut considérer  $\eta_0$  comme dans (5.16). Il est alors direct de (5.16) que  $H_{\eta_0}$  contient  $d(x^0)^+$  et a une direction normale  $d(x^0)^+ - \mathbf{w}_0$ .

Par conséquent, nous sommes précisément dans les conditions du Lemme 5.3.2 appliqué au sous-espace  $K$ , avec  $\mathbf{d} := d(x^0)^+$ ,  $C = \bar{Q}_J$ ,  $\mathbf{w}_0 := \mathbf{w}_0$  et  $H_0 := H_{\eta_0} \cap K$ . Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \max_{\bar{H}_\eta \ni d(x^0)^+} \mathcal{D}(\bar{Q}_J, \bar{H}_\eta) &= \mathcal{D}(\bar{Q}_J, H_{\eta_0} \cap K) = \\ &= \mathcal{D}(\bar{Q}_J, d(x^0)^+) = \|d(x^0)^+ - \mathbf{w}_0\|_2, \end{aligned}$$

la solution  $\eta_0$  est unique. Maintenant, on applique le Lemme 5.5.2 et on en conclut que

$$\begin{aligned} \max_{H_\eta \ni \mathcal{L}(x^0)} \mathcal{D}(Q_J, H_\eta) &= \mathcal{D}(Q_J, H_{\eta_0}) = \\ &= \mathcal{D}(Q_J, \mathcal{L}(x^0)) = \|d(x^0)^+ - \mathbf{w}_0\|_2, \end{aligned}$$

est de nouveau l'unique solution  $\eta_0$ . Finalement, on applique la Proposition 5.2.1 et on obtient (5.17). En particulier, il s'en suit que  $\eta_0$  satisfait la condition source renforcée, de plus  $x^0$  est identifiable avec  $\mathbf{A}_{\text{supp}(x^0)}$  et la preuve est finie.

# Chapitre 6

## Robustesse dans les régularisations avec des jauges de polytopes

### Sommaire

---

6.1	Robustesse pour les jauges de polytopes . . . . .	98
6.2	Cas de la minimisation $\ell^1$ analyse . . . . .	100
6.3	Comparaison avec l'état de l'art . . . . .	101
6.4	Annexes . . . . .	101

---

Comme pour le cas du problème synthèse, en présence de données bruitées, le problème de minimisation d'une jauge d'un polytope avec une contrainte égalité devient instable. Par conséquent, on va rechercher une approximation du signal d'origine via un problème de minimisation avec une contrainte quadratique.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \gamma_C(x) \text{ s.c. } \|\mathbf{A}x - y\| \leq \delta, \tag{6.1}$$

pour  $C$  un polytope quelconque de  $\mathbb{R}^n$  qui contient l'origine dans son intérieur. Ce cadre généralise le cas du chapitre précédent où le polytope est le cross-polytope unité (la boule unité  $\ell^1$ ).

L'objectif est d'estimer pour  $x^0$  identifiable l'erreur quadratique entre  $x^0$  et une solution de (1.15). Dans le cas de l'identifiabilité, on ne construisait pas de certificats duaux. En revanche, dans le cas de la robustesse au bruit, ils jouent un rôle important comme on a pu le voir dans le cas synthèse. Plus particulièrement, le certificat dual optimal, celui qui minimise l'estimation du bruit, sera mis en avant.

Ce contexte inclue le cas d'une minimisation analyse comme on le précisera dans la suite.

## 6.1 Robustesse pour les jauges de polytopes

Dans cette section, on étend les résultats du chapitre précédent et on obtient une borne de robustesse similaire qui dépend d'un certificat dual  $\eta$ , du "support" de  $x^0$ , de  $\mathbf{A}$  et en plus des points extrémaux de  $C$ . De plus, la minimisation de cette borne est identique au chapitre précédent.

Nous allons supposer que  $x^0$  est identifiable. Par commodité, on suppose que  $x^0$  est le bord de  $C$ ,  $\gamma_C(x^0) = 1$ . D'après le chapitre sur l'identifiabilité, cela implique qu'il existe un vecteur  $\eta \in \mathbb{R}^m$  tel que  $H_\eta$  est un hyperplan séparateur pour la face minimale  $F_Q(\mathbf{A}x^0)$  du polytope  $Q = \mathbf{A}C$  qui contient  $\mathbf{A}x^0$ . Le théorème 3.2.2 garantit que  $H_{\mathbf{A}^*\eta}$  est un hyperplan séparateur pour la face minimale  $F_C(x^0)$  de  $x^0$ .

Maintenant qu'on a mis en évidence l'existence d'hyperplan séparateur, on peut appliquer la technique de la distance de Bregman utilisée dans le cas synthèse et l'adapter aux polytopes. On rappelle le support généralisé. On définit  $\text{Ext}(C) = \{p_i | i \in \{1, \dots, p\}\}$  les points extrémaux de  $C$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On définit  $F_C(\tilde{x}^0)$  la face minimale de  $C$  qui contient  $\frac{x^0}{\gamma_C(x^0)}$ .

Soit  $\Omega := \{1, \dots, p\}$ , on considère la base indexée  $b : \Omega \rightarrow \text{Ext}(C)$  :

$$b(i) := p_i \quad (i \in \Omega). \quad (6.2)$$

Son support associé  $\Sigma_b(x) := \{w \in \Omega : b_w \in F_C(\tilde{x})\}$  est appelé *support généralisé* avec  $\tilde{x} = x/\gamma_C(x)$ . De même,  $\mathbf{A}b$  est une base indexée pour  $\mathbf{A}Q$  dans  $\mathbb{R}^m$  avec comme support associé  $\Sigma_{\mathbf{A}b}$ . On obtient la proposition suivante :

**Proposition 6.1.1.** *On suppose que  $x^0$  est identifiable. On pose*

$$W(x^0) := \text{Vect}\{p_j : j \in \{1, \dots, p\} \setminus \Sigma_b(x^0)\} \quad \text{et} \quad V(x^0) := \text{Vect}\{p_i : i \in \Sigma_b(x^0)\} \quad (6.3)$$

et soit  $w \in \mathbb{R}^m$  avec  $\|w\|_2 \leq \epsilon$  et  $y = \mathbf{A}x^0 + w$ . Alors pour toute solution  $x^\epsilon$  de (1.15) avec  $\delta = \epsilon$  et  $\eta$  un dual certificat non dégénéré, on a

$$\|x^\epsilon - x^0\|_2 \leq K(\eta)\epsilon \quad (6.4)$$

avec

$$K(\eta) = MT(\eta), \quad (6.5)$$

$$M = 2[\|\mathbf{A}_{V(x^0)}^+\|_2 + (\|\mathbf{A}_{V(x^0)}^+\|_2 \|\mathbf{A}_{W(x^0)}\|_{1,2} + 1) \max_{i \in \{1, \dots, p\}} \|p_i\|_2] \quad (6.6)$$

$$T(\eta) = \frac{\|\eta\|_2}{\min_{i \in \{1, \dots, p\} \setminus \Sigma_b(x^0)} (1 - \langle \eta, \mathbf{A}p_i \rangle)} \quad (6.7)$$

La dernière proposition associe une borne Lipschitz de robustesse au bruit pour chaque (vecteur dual d'un) hyperplan séparateur pour la face minimale  $F(\mathbf{A}x^0)$ . Puisque de tels hyperplans ne sont pas uniques comme dans le synthèse, il y en a en général une infinité, la question est de savoir laquelle de ces constantes est la

meilleure. Nous avons montré précédemment dans le cas synthèse que la quantité  $T(\eta)$  avait une interprétation géométrique.

Plus précisément, considérons l'enveloppe convexe

$$Q_r(x^0) := \text{Conv}\{\mathbf{A}p_j : j \in \{1, \dots, p\} \setminus \Sigma_b(x^0)\}, \quad (6.8)$$

qui est en fait un "sous"-polytope de  $Q = \mathbf{A}C$ , obtenu en éliminant les faces déterminées pas le support de  $x^0$ , incluant  $F_Q(\mathbf{A}x^0)$ . La quantité  $T(\eta)$  est alors l'inverse de la distance euclidienne entre l'hyperplan affine  $\mathcal{H}_\eta$  et le polytope "réduit"  $Q_r(x^0)$

$$T(\eta) = \frac{1}{\text{dist}(\mathcal{H}(\eta), Q_r(x^0))} \quad (6.9)$$

De plus, on a montré dans le cas synthèse que si  $\mathcal{L}(x^0)$  est l'enveloppe affine de  $F(\mathbf{A}x^0)$  où

$$\mathcal{L}(x^0) := \text{Aff}(\{\mathbf{A}p_i : i \in \Sigma_b(x^0)\}), \quad (6.10)$$

alors

$$\min_{\eta} T(\eta) = \frac{1}{\text{dist}(\mathcal{L}(x^0), Q_r(x^0))} \quad (6.11)$$

où le minimum au dessus est pris sur tous les vecteur  $\eta$  tels  $\mathcal{H}_\eta$  est un hyperplan séparateur de la face minimale  $F_Q(\mathbf{A}x^0)$ . Cette interprétation géométrique nous permet d'obtenir la meilleure constante  $T(\eta)$  possible. Comme dans le cas synthèse, cette constante optimale est obtenue pour un certificat dual particulier  $\eta_0$  qui peut être construit via une projection adaptée.

L'ensemble de ces arguments nous amène à notre théorème principal de robustesse au bruit dans le cas de la jauge d'un polytope qui contient l'origine comme point intérieur.

**Théorème 6.1.2.** *Sous les hypothèses de la Proposition 6.1.1, on a :*

$$\|x^\delta - x^0\|_2 \leq K\delta, \quad (6.12)$$

avec

$$K = \frac{2[\|\mathbf{A}_{V(x^0)}^+\|_2 + \max_{i \in \{1, \dots, p\}} \|p_i\|_2 (\|\mathbf{A}_{V(x^0)}^+\|_2 \|\mathbf{A}_{W(x^0)}\|_{1,2} + 1)]}{\text{dist}(\mathcal{L}(x^0), Q_r(x^0))}. \quad (6.13)$$

On peut observer l'influence du polytope  $C$  sur la constante  $K$  (6.13) en comparaison au cas synthèse où  $\max_{i \in \{1, \dots, p\}} \|p_i\|_2 = 1$ . Hormis le facteur  $\max_{i \in \{1, \dots, p\}} \|p_i\|_2$ , il intervient implicitement dans les sous-espaces  $V(x^0)$  et  $W(x^0)$  dans (6.13). Ces deux sous-espaces sont construits au travers du support signé de  $x^0$ . Ce dernier coïncide avec le support classique quand  $C$  est la boule unité  $\ell^1$ . De plus, dans ce cas, on retrouve la même constante que dans le cas synthèse.

De la même façon que dans le cas synthèse, la minimisation de cette borne revient à maximiser la distance entre  $\mathcal{L}(x^0)$  et  $Q_r(x^0)$ . On peut directement appliquer les résultats du cas synthèse et obtenir ainsi le certificat dual optimal.

## 6.2 Cas de la minimisation $\ell^1$ analyse

On a vu précédemment, section 4.2.2 du chapitre 4 que la semi-norme  $\|D^*\cdot\|_1$ ,  $D : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ , est égale à la jauge du polyèdre  $(\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+(B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*) \oplus \text{Ker } \mathbf{D}^*$  où  $B_1$  est la boule unité de la norme  $\ell^1$  de  $\mathbb{R}^d$ . Ce polyèdre est un cylindre de section  $(\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+(B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*)$ . Cette section est un polytope. Par conséquent, ce polyèdre devient un polytope quand l'opérateur d'analyse  $\mathbf{D}$  est surjectif ce qui amène à considérer les cas où  $\mathbf{D}$  est surjectif ou non.

Dans le cas surjectif, les résultats s'appliquent directement pour le polytope  $(\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+(B_1 \cap \text{Im } \mathbf{D}^*)$ . On a vu que, pour l'identifiabilité dans le cas général, le problème peut être simplifié avec le choix du supplémentaire  $\mathcal{L}$ . Pour l'identifiabilité, aucune hypothèse n'est faite sur  $\mathcal{L}$ . Pour la robustesse au bruit, il est essentiel de choisir un supplémentaire particulier. On va le choisir comme suit : On note  $\mathcal{V} = \mathbf{A} \text{Ker } \mathbf{D}^*$ , on pose  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m \ominus \mathcal{V}$  l'orthogonal de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbb{R}^m$  et on considère le projecteur orthogonal  $\Pi_{\mathcal{U}}$  sur  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}^m$ . Soit  $\mathcal{K} := \mathbf{A}^{-1}(\mathcal{U}) = \{x \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A}x \in \mathcal{U}\}$ , qui contient le noyau de  $\mathbf{A}$ , et finalement on définit  $\mathcal{L} := \mathcal{K} \ominus \text{ker } \mathbf{A}$ . Le choix particulier de  $\mathcal{L}$  produit la relation suivante :

$$\mathbf{A} \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} = \Pi_{\mathcal{U}} \mathbf{A} \quad (6.14)$$

qui signifie que  $\mathbf{A}$  transforme l'opérateur oblique  $\Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*}$  en projecteur orthogonal  $\Pi_{\mathcal{U}}$ . Ce dernier envoie les boules euclidiennes dans  $\mathbb{R}^m$  en boules euclidiennes dans  $\mathcal{U}$ . En particulier, toute inégalité du type  $\|\mathbf{A}x^1 - \mathbf{A}x^2\|_2 \leq \delta$  automatiquement implique  $\|\mathbf{A} \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} x^1 - \mathbf{A} \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} x^2\|_2 \leq \delta$  et c'est le principal argument utilisé pour notre principal résultat sur la robustesse. On pose  $\mathbf{D}' : \text{Im } \mathbf{D}^* \rightarrow \mathcal{K}$ ,  $\mathbf{D}' = \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} (\mathbf{D}_{|\text{Im } \mathbf{D}}^*)^+$  et  $\mathbf{A}' : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_{\mathcal{K}}$ .

**Théorème 6.2.1.** *Soit  $\mathbf{D}$  un opérateur d'analyse arbitraire satisfaisant la condition minimale d'identifiabilité  $\text{ker } \mathbf{D}^* \cap \text{ker } \mathbf{A} = \{0\}$ . Soit  $x^0$  un vecteur identifiable et soit  $\delta > 0$ .*

a)  $x^\delta$  est un minimiseur du problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} R(x) \text{ s.t. } \|\mathbf{A}x - \mathbf{A}x^0\| \leq \delta \quad (6.15)$$

si et seulement si  $\Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} x^\delta$  est un minimiseur du problème

$$\min_{x \in \mathcal{K}} R_{\mathcal{K}}(x) \text{ s.t. } \|\mathbf{A}'x - \mathbf{A}' \Pi_{\mathcal{K}}^{\text{Ker } D^*} x^0\| \leq \delta \quad (6.16)$$

b) Tout minimiseur  $x^\delta$  de (6.15) satisfait

$$\|x^\delta - x^0\|_2 \leq (K_{(\mathbf{A}', \mathbf{D}')} + \|\mathbf{A}_{\text{Ker } \mathbf{D}^*}^+\|_2) \delta \quad (6.17)$$

où  $K_{(\mathbf{A}', \mathbf{D}')}$  est la constante (6.13) du théorème 6.1.2 pour la paire d'opérateurs  $(\mathbf{A}', \mathbf{D}')$ , et  $\mathbf{A}_{\text{Ker } \mathbf{D}^*}^+$  est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de la restriction de  $\mathbf{A}$  à  $\text{Ker } \mathbf{D}^*$ .

Dans (6.17), comparé à (6.13), le terme additionnel dans la constante vient de la décomposition de  $x^\delta$  sur  $\mathbb{R}^n = \text{Ker } \mathbf{D}^* + \mathcal{K}$ . Tel quel, ce n'est qu'un terme additif. Son influence est annulé si  $\text{Ker } \mathbf{A}$  et  $\text{Ker } \mathbf{D}^*$  sont orthogonaux, et tends vers l'infini quand l'angle entre ces sous-espaces tends vers zéro et évidemment à la limite la condition minimale d'identifiabilité n'est plus vérifiée.

Dans le cas général, on remarque la minimisation de cette borne revient à minimisation  $K_{(\mathbf{A}', \mathbf{D}')}$  c'est à dire à trouver le certificat dual du problème analyse surjectif avec  $\mathbf{D}'$ .

### 6.3 Comparaison avec l'état de l'art

Les travaux de Burger et al [BO04] sur une estimation de la divergence de Bregman sont un point de départ à nos travaux et ceux de bien d'autres basés sur la condition source. Sous différentes conditions suffisantes supplémentaires pour renforcer la condition source, plusieurs estimations de la robustesse au bruit ont été développées principalement pour la forme lagrangienne,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \lambda R(x) + \frac{1}{2} \|\mathbf{A}x - y\|_2^2. \quad (6.18)$$

Sous une condition source renforcée, Grasmair [Gra11] assure que pour un bruit  $b$  tel que  $\|b\| = \epsilon$ , la solution  $x^*$  de (6.18) vérifie  $\|\mathbf{D}^*(x^\epsilon - x^0)\|_2 \leq C\epsilon$ . Vaiter et al [VPDF13, VPF13, Vai14] assure sous pour un petit bruit et un certain  $\lambda$  que si la condition d'irreprésentabilité,  $IC(x) < 1$ , est vérifiée, il est possible de retrouver le support et le signe du signal d'origine et pour un bruit quelconque  $\|x^* - x^0\|_2 = O(\|b\|_2)$ . Les auteurs de [VGFP15] construisent une borne similaire à la nôtre à une constante près.

Pour la borne de robustesse au bruit, il est tout à fait possible de l'estimer dans le cas surjectif avec d'autres travaux comme [Hal13]. Il est à noter que nos travaux sur la robustesse se focalisent sur la minimisation de cette borne. En effet, la majorité de ces travaux, les nôtres compris, sont dérivés de [BO04] et la divergence de Bregman ce qui mène à des bornes similaires du point de vue des certificats duaux. Ainsi, le certificat dual optimal qui minimise notre estimation minimise aussi certaines bornes de la littérature [Hal13].

### 6.4 Annexes

On aura besoin pour prouver la proposition 6.1.1

**Lemme 6.4.1.** *Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\|x\|_2 \leq \gamma(x)_C \max_{i \in \{1, \dots, k\}} \|p_i\|_2 \quad (6.19)$$

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $C$  est fermé alors  $u(x) = \frac{x}{\gamma(x)_C} \in C$ .

De plus, on a  $\|x\|_2 = \gamma(x)_C \|u(x)\|_2$ . Comme  $C = \text{Conv}\{p_i | i \in \{1, \dots, k\}\}$ , on a donc  $\|u(x)\|_2 \leq \max_{i \in \{1, \dots, k\}} \|p_i\|_2$

Et finalement  $\|x\|_2 \leq \gamma(x)_C \max_{i \in \{1, \dots, k\}} \|p_i\|_2$  □

**Proposition 6.4.2.** Soit  $x, x^0 \in \mathbb{R}^n$  et  $\Sigma_b(x) \cap \Sigma_b(x^0) \neq \emptyset$ ,  $s \in \partial R(x^0)$

$$D^s(x, x^0) \geq R(x) \min_{i \in \Sigma_b(x)} (1 - \langle s, p_i \rangle). \quad (6.20)$$

*Démonstration.* On a  $x = R(x) \sum_{i \in \Sigma_b(x)} \beta_i p_i$  avec  $0 < \beta_i \leq 1$  et  $\sum_{i \in \Sigma_b(x)} \beta_i = 1$

$D_s(x, x^0) = R(x) - \langle s, x \rangle$  par 1-homogénéité de la jauge et  $\partial(R(x^0))$  une face exposée de  $C^\circ$

$$\begin{aligned} &= R(x) (1 - \langle s, \sum_{i \in \Sigma_b(x)} \beta_i p_i \rangle) \\ &= R(x) \left( \sum_{i \in \Sigma_b(x)} \beta_i - \sum_{i \in \Sigma_b(x)} \beta_i \langle s, p_i \rangle \right) \\ &= R(x) \sum_{i \in \Sigma_b(x)} \beta_i (1 - \langle s, p_i \rangle) \\ &\geq R(x) \min_{i \in \Sigma_b(x)} (1 - \langle s, p_i \rangle). \end{aligned}$$

Le terme  $(1 - \langle s, p_i \rangle)$  est toujours positif par polarité c'est à dire  $s \in C^\circ$ . □

*Proposition 6.1.1.*

$$\begin{aligned} \|x^\epsilon - x^0\|_2 &= \|x_{V(x^0)}^\epsilon - x^0 + x_{W(x^0)}^\epsilon\|_2 \\ &= \|x_{I(x^0)}^\epsilon - x^0\| + \|x_{W(x^0)}^\epsilon\|_2 \\ &= \|\mathbf{A}_{V(x^0)}^+ \mathbf{A}_{V(x^0)} (x_{V(x^0)}^\epsilon - x^0)\|_2 + \|x_{W(x^0)}^\epsilon\|_2 \\ &\leq \|\mathbf{A}_{V(x^0)}^+\|_2 \|\mathbf{A}_{V(x^0)} (x_{V(x^0)}^\epsilon - x^0)\|_2 + \|x_{W(x^0)}^\epsilon\|_2 \\ &\leq \|\mathbf{A}_{V(x^0)}^+\|_2 (2\epsilon + \|\mathbf{A}_{W(x^0)} x_{W(x^0)}^\epsilon\|_2) + \|x_{W(x^0)}^\epsilon\|_2 \\ &\leq 2\epsilon \|\mathbf{A}_{V(x^0)}^+\|_2 + (\|\mathbf{A}_{V(x^0)}^+\|_2 \|\mathbf{A}_{W(x^0)}\|_2 + 1) \|x_{W(x^0)}^\epsilon\|_2 \end{aligned}$$

On sait que

$$\|x_{W(x^0)}^\epsilon\|_2 \leq R(x_{W(x^0)}^\epsilon) \max_{i \in \{1, \dots, p\}} \|p_i\|_2 \text{ voir lemma 6.4.1} \quad (6.21)$$

$$D_{A^* \eta}(x_{W(x^0)}^\epsilon, x^0) \geq R(x_{W(x^0)}^\epsilon) \min_{i \in \{1, \dots, p\} \setminus \Sigma_b(x^0)} (1 - \langle \mathbf{A}^* \eta, p_i \rangle) \quad (6.22)$$

et

$$D_{A^* \eta}(x_{W(x^0)}^\epsilon, x^0) \leq 2\|\eta\|_2 \epsilon \text{ [BO04]} \quad (6.23)$$

Et en combinant avec la dernière équation, on obtient la borne. □

## Conclusion

Cette thèse s'est consacrée à l'étude des critères d'identifiabilité des problèmes de minimisation parcimonieux et de leur application à la tomodensitométrie à faible nombre de vues. Elle a étudié la reconstruction d'une image acquise par tomodensitométrie avec des méthodes variationnelles utilisant une régularisation parcimonieuse. Dans le contexte d'un faible nombre de vues, les méthodes de reconstruction *commerciales* montrent leurs limites tandis que les expérimentations d'une régularisation parcimonieuse offrent des résultats convaincants. L'objectif était d'étudier ces méthodes et de comprendre pourquoi et sous quelles conditions elles fonctionnent.

L'étude de l'état de l'art a mis en relief de récents résultats qui garantissent le succès de la minimisation  $\ell^1$  synthèse et majorent l'erreur de reconstruction en présence de bruit. Ces résultats dépendent de l'existence de vecteurs particuliers : *les certificats duaux*. Quelques travaux s'attellent à la création de pré-certificats dont on vérifie a posteriori qu'ils sont des certificats duaux. En plus d'intervenir dans les critères d'identifiabilité, ils ont aussi un rôle prépondérant dans l'estimation de la robustesse au bruit. Notre objectif a été de rapprocher ces résultats théoriques à des cas pratiques. On a prouvé en exploitant la géométrie du problème qu'il existe un certificat dual optimal, c'est à dire qui minimise la majoration de l'erreur de reconstruction et qui assure l'identifiabilité d'une solution. On a de plus développé deux algorithmes : un premier qui, dans le cas où la solution est identifiable, construit ce certificat dual optimal et un deuxième plus rapide qui construit un certificat dual *presque* optimal.

On a constaté que le certificat dual optimal avait une interprétation géométrique et les fonctions de régularisations  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\mathbf{D}^*\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_{1,2}$  peuvent représenter géométrique à l'aide des jauges de leur boule unité. Dans le but d'étendre les résultats du cas  $\ell^1$  synthèse aux fonctions de régularisation  $\ell^1$  analyse et bloc, on s'est intéressé à la géométrie du problème de minimisation de jauges d'ensembles convexes définissant une semi-norme : jauges d'un ensemble convexe fermé, borné, non vide



et contenant l'origine dans son intérieur. Cette classe de fonctions n'inclue que la norme  $\ell^1$  analyse pour un opérateur d'analyse  $\mathbf{D}$  surjectif.

Soit  $C$  un tel ensemble dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\gamma_C(x) = \inf\{\lambda \leq 0, x \in \lambda C\}$  sa jauge. Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , on pose  $\tilde{x} = x/\gamma_C(x) \in C$ .

En s'appuyant sur le concept de face minimale, on démontre un des résultats principaux de ce manuscrit qui définit un critère nécessaire et suffisant d'identifiabilité pour le problème  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \gamma_C(x)$  tel que  $\mathbf{A}x = y$ . Le théorème 3.2.2 stipule qu'un signal  $x^0$  est identifiable si et seulement si l'image de réciproque de la face minimale  $F_Q(\tilde{y}^0)$  dans  $Q = \mathbf{A}C$  est égale la face minimale  $F_C(\tilde{x}^0)$  dans  $C$  et la restriction matrice de la matrice  $\mathbf{A}$  sur l'espace engendré par la face minimale de  $x^0$  est injective.

On définit la notion de support généralisé qui repose sur les points extrémaux de  $C$ . On en déduit un corollaire du théorème ci dessus qui exprime la condition C2) en fonction des points extrémaux des faces minimales. On propose des algorithmes pour vérifier cette condition pour le cas où  $C$  est un polytope ( $\|\cdot\|_1$  et  $\|\mathbf{D}^*\cdot\|_1$  pour  $\mathbf{D}$  surjectif) et pour le cas bloc ( $\|\cdot\|_{1,2}$ ). De plus, on montre que le cas d'une fonction de régularisation analyse  $\|\mathbf{D}^*\cdot\|_1$  avec un opérateur d'analyse quelconque est équivalent à un cas où l'opérateur d'analyse  $\mathbf{D}$  est surjectif. On peut se ramener à ce dernier cas à l'aide d'un projection. Ces algorithmes, en particulier dans le cas de jauges de polytopes, requiert une connaissance explicite des points extrémaux. Ce dernier point pose problème dans le cas analyse où le calcul des points extrémaux du polytope n'est pas trivial.

Dans le cas de la robustesse au bruit, On introduit la notion de certificat dual optimal qui assure l'identifiabilité d'un signal dans le cas non bruité et minimise une borne de robustesse de l'état de l'art [GSH11] dans le cas bruité. On propose deux algorithmes pour calculer ce certificat dual optimal.

On a généralisé cette borne de robustesse au bruit dans le cas où l'ensemble  $C$  est un polytope.

Cette borne de robustesse présente l'avantage de mettre en avant la distance à maximiser comme dans le cas de la minimisation  $\ell^1$  synthèse. On peut, par conséquent, appliquer les mêmes algorithmes.

### **Perspectives :**

Ces résultats couvrent, dans l'état, une classe restreinte de fonctions de régularisations. Il serait intéressant d'étendre ces travaux aux jauges d'ensembles convexes fermés et non vide. Dans ce cas, on couvrirait les semi-normes analyses comme la  $\ell^1$  analyse pour un opérateur quelconque.

Dans le cas de la robustesse, on propose une borne de robustesse et des algorithmes pour calculer le certificat dual optimal pour un minimisation de jauges de polytope. Ce contexte ne prend pas en compte la minimisation bloc. Il pourrait être intéressant d'étudier la borne de robustesse pour une classe plus large de fonctions de régularisations et d'observer l'interprétation géométrique de sa minimisation. Pour

## Chapitre 7. Conclusion

ces fonctions, cette borne de robustesse a-t-elle une représentation géométrique qui permet de développer des algorithmes rapides pour la minimiser.

Un des objectifs de cette thèse était d'évaluer l'application de ses travaux au cas de la tomographie à faible nombre de vues. Nos résultats et algorithmes permettent pour un nombre de vues fixé d'évaluer rapidement et empiriquement le degré de parcimonie maximale pour une reconstruction exacte et d'estimer l'erreur maximale dans le cadre d'une reconstruction approchée. Il serait intéressant d'étudier le nombre de vues nécessaire pour reconstruire une image. Divers travaux récents [MV02] ont commencé à aborder cette problématique.



$\mathbb{R}^n$  est l'espace euclidien de dimension  $n$ .  
 $(e_i)_{i=1,\dots,n}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$   
 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  un opérateur linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$   
 $a_i = \mathbf{A}e_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) les colonnes de  $\mathbf{A}$ .  
 $\text{supp}(x) = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid x_i \neq 0\}$ , le support de  $x = [x_1, \dots, x_n]$  dans  $\mathbb{R}^n$   
 $\text{sign}(x) = [\text{sign}(x_i)]_{i=1,\dots,n}$  le vecteur signe avec  $\text{sign}(x_i) = 0$  pour  $x_i = 0$ .  
 $\#(I)$  le cardinal de  $I$   
 $\mathbf{A}^*$  l'adjoint de  $\mathbf{A}$   
 $\mathbf{A}^+$  le pseudoinverse de Moore-Penrose de  $\mathbf{A}$   
 $\|\mathbf{A}\|_{p,q}$  La norme matricielle  $p, q$  de  $\mathbf{A}$   
 $\text{Aff}(C)$  l'enveloppe affine de  $C$   
 $\text{Conv}(C)$  l'enveloppe convexe de  $C$   
 $\text{Lin}(C)$  l'enveloppe linéaire de  $C$   
 $\text{Vect}(C)$  l'espace engendré par  $C$   
 $\text{int}(C)$  l'intérieur de  $C$   
 $\text{ri}(C)$  est l'intérieur relatif de  $C$   
 $\iota_C$  la fonction indicatrice  
 $\text{dom } f$  le domaine de la fonction  $f$   
 $\partial f$  la sous différentielle de la fonction  $f$   
 $D_f^u$  la divergence de Bregman de  $f$   
 $\gamma_C$  la jauge de  $C$   
 $\mathcal{H}_\eta$  l'hyperplan de normal  $\eta$   
 $H_\eta$  l'hyperplan défini par  $\eta$   
 $D(F, G)$  la distance euclidienne entre  $F$  et  $G$   
 $\mathcal{F}(C)$  l'ensemble des faces de  $C$   
 $\mathcal{F}^e(C)$  l'ensemble des faces exposées de  $C$   
 $F_C$  la face minimale de minimale  
 $F_C^e$  la face minimale exposée  
 $\text{Ext}(C)$  l'ensemble des points extrémaux de  $C$   
 $C^\circ$  le polaire de  $C$   
 $\partial P$  le bord de l'ensemble  $P$



# Bibliographie

- [AK84] Anders H Andersen and Avinash C Kak. Simultaneous algebraic reconstruction technique (sart) : a superior implementation of the art algorithm. *Ultrasonic imaging*, 6(1) :81–94, 1984. (Cité en page 26.)
- [Bac08] Francis R Bach. Consistency of the group lasso and multiple kernel learning. *Journal of Machine Learning Research*, 9(Jun) :1179–1225, 2008. (Cité en page 7.)
- [Bac10] Francis R Bach. Structured sparsity-inducing norms through submodular functions. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 118–126, 2010. (Cité en page 42.)
- [BBC11] Stephen Becker, Jérôme Bobin, and Emmanuel J Candès. NESTA : a fast and accurate first-order method for sparse recovery. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 4(1) :1–39, 2011. (Cité en page 4.)
- [Bj 96] Ake Bj rck. *Numerical methods for least squares problems*. Siam, 1996. (Cité en page 26.)
- [BL10] Jonathan M Borwein and Adrian S Lewis. *Convex analysis and nonlinear optimization : theory and examples*. Springer Science & Business Media, 2010. (Cité en page 34.)
- [BO04] Martin Burger and Stanley Osher. Convergence rates of convex variational regularization. *Inverse problems*, 20(5) :1411, 2004. (Cité en pages 34, 73, 74, 101 et 102.)
- [BT09] Amir Beck and Marc Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM journal on imaging sciences*, 2(1) :183–202, 2009. (Cité en page 4.)
- [BV04] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004. (Cité en page 33.)
- [Can08] Emmanuel J. Candès. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes Rendus Mathematique*, 346(9–10) :589 – 592, 2008. (Cité en page 5.)

- [CDS98] Scott Shaobing Chen, David L. Donoho, and Michael A. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM J. Sci. Comput.*, 20(1) :33–61, December 1998. (Cité en page 46.)
- [CENR11] Emmanuel J Candes, Yonina C Eldar, Deanna Needell, and Paige Randall. Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 31(1) :59–73, 2011. (Cité en pages 7 et 10.)
- [CGG01] Yair Censor, Dan Gordon, and Rachel Gordon. Component averaging : An efficient iterative parallel algorithm for large and sparse unstructured problems. *Parallel computing*, 27(6) :777–808, 2001. (Cité en page 26.)
- [CH08] Ch Chesneau and Mohamed Hebiri. Some theoretical results on the grouped variables lasso. *Mathematical Methods of Statistics*, 17(4) :317–326, 2008. (Cité en page 7.)
- [Cim38] Gianfranco Cimmino. *Calcolo approssimato per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari*. Istituto per le applicazioni del calcolo, 1938. (Cité en page 26.)
- [CR05] Emmanuel Candes and Justin Romberg. l1-magic : Recovery of sparse signals via convex programming. *URL : www.acm.caltech.edu/l1magic/downloads/l1magic.pdf*, 4 :14, 2005. (Cité en page 4.)
- [CR13] Emmanuel Candès and Benjamin Recht. Simple bounds for recovering low-complexity models. *Mathematical Programming*, 141(1-2) :577–589, 2013. (Cité en pages 8, 34, 42 et 47.)
- [CRPW12] Venkat Chandrasekaran, Benjamin Recht, Pablo A Parrilo, and Alan S Willsky. The convex geometry of linear inverse problems. *Foundations of Computational mathematics*, 12(6) :805–849, 2012. (Cité en page 8.)
- [CRT06] Emmanuel J. Candes, Justin K. Romberg, and Terence Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 59(8) :1207–1223, 2006. (Cité en page 9.)
- [CT05] E. J. Candes and T. Tao. Decoding by linear programming. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 51(12) :4203–4215, December 2005. (Cité en page 5.)
- [CW05] Patrick L Combettes and Valérie R Wajs. Signal recovery by proximal forward-backward splitting. *Multiscale Modeling & Simulation*, 4(4) :1168–1200, 2005. (Cité en page 4.)
- [DDDM04] Ingrid Daubechies, Michel Defrise, and Christine De Mol. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Communications on pure and applied mathematics*, 57(11) :1413–1457, 2004. (Cité en page 4.)
- [DE03] David L Donoho and Michael Elad. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via l1 minimization. *Proceedings*

- of the *National Academy of Sciences*, 100(5) :2197–2202, 2003. (Cité en pages 4 et 5.)
- [Dea07] Stanley Roderick Deans. *The Radon transform and some of its applications*. Courier Corporation, 2007. (Cité en page 21.)
- [DH01] D. L. Donoho and X. Huo. Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 47(7) :2845–2862, September 2001. (Cité en pages 4 et 43.)
- [DJ94] David L Donoho and Jain M Johnstone. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81(3) :425–455, 1994. (Cité en page 46.)
- [DM05] Charles Dossal and Stéphane Mallat. Sparse spike deconvolution with minimum scale. In *Signal Processing with Adaptive Sparse Structured Representations (SPARS workshop)*, pages 1–4, 2005. (Cité en page 6.)
- [Don05] David L. Donoho. Neighborly polytopes and sparse solutions of under-determined linear equations. Technical report, 2005. (Cité en pages 6, 8, 31 et 48.)
- [Dos05] Charles Dossal. *Estimation de fonctions géométriques et déconvolution*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2005. (Cité en page 6.)
- [Dos07] Charles Dossal. A necessary and sufficient condition for exact sparse recovery by l1 minimization. *Comptes Rendus Mathématique*, 350(1) :117–120, 2007. (Cité en page 51.)
- [DP15] Vincent Duval and Gabriel Peyré. Exact support recovery for sparse spikes deconvolution. *Foundations of Computational Mathematics*, 15(5) :1315–1355, 2015. (Cité en pages 51 et 88.)
- [DST<sup>+</sup>07] David Donoho, Victoria Stodden, Yaakov Tsaig, et al. Sparselab. *Sparse-Lab : Seeking Sparse Solutions to Linear Systems of Equations, Sparse-Lab toolbox shared online, <http://sparselab.stanford.edu/>, 24th August*, 2007. (Cité en page 4.)
- [DT96] Ronald A DeVore and Vladimir N Temlyakov. Some remarks on greedy algorithms. *Advances in computational Mathematics*, 5(1) :173–187, 1996. (Cité en page 3.)
- [DT10] David L Donoho and Jared Tanner. Counting the faces of randomly-projected hypercubes and orthants, with applications. *Discrete & computational geometry*, 43(3) :522–541, 2010. (Cité en page 42.)
- [DT13] Charles Dossal and Remi Tesson. Consistency of l1 recovery from noisy deterministic measurements. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2013. (Cité en page 74.)
- [Dub98] F Dubois. Reconstruction des images tomographiques par rétroprojection filtrée. *Revue de l'ACOMEN*, 4(2) :92–99, 1998. (Cité en page 21.)



- [EB02] M. Elad and A. M. Bruckstein. A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 48(9) :2558–2567, September 2002. (Cité en page 5.)
- [EKB10] Yonina C Eldar, Patrick Kuppinger, and Helmut Bolcskei. Block-sparse signals : Uncertainty relations and efficient recovery. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 58(6) :3042–3054, 2010. (Cité en page 7.)
- [EM09] Y.C. Eldar and M. Mishali. Robust recovery of signals from a structured union of subspaces. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 55(11) :5302–5316, nov. 2009. (Cité en page 7.)
- [Fuc04] J. J. Fuchs. On sparse representations in arbitrary redundant bases. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 50(6) :1341–1344, June 2004. (Cité en pages 5, 6, 7, 47, 51 et 87.)
- [GBH70] Richard Gordon, Robert Bender, and Gabor T Herman. Algebraic reconstruction techniques (art) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. *Journal of theoretical Biology*, 29(3) :471–481, 1970. (Cité en page 26.)
- [GHS11] Markus Grasmair, Markus Haltmeier, and Otmar Scherzer. The residual method for regularizing ill-posed problems. *Applied mathematics and computation*, 218(6) :2693–2710, 2011. (Cité en page 87.)
- [GJK88] Elmer G Gilbert, Daniel W Johnson, and S Sathiya Keerthi. A fast procedure for computing the distance between complex objects in three-dimensional space. *Robotics and Automation, IEEE Journal of*, 4(2) :193–203, 1988. (Cité en pages 57 et 79.)
- [GMW12] Oleg Golubitsky, Vadim Mazalov, and Stephen M Watt. An algorithm to compute the distance from a point to a simplex. *ACM Commun. Comput. Algebra*, 46 :57–57, 2012. (Cité en page 79.)
- [GN03] R. Gribonval and M. Nielsen. Sparse representations in unions of bases. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 49(12) :3320–3325, December 2003. (Cité en page 5.)
- [Gra11] Markus Grasmair. Linear convergence rates for tikhonov regularization with positively homogeneous functionals. *Inverse Problems*, 27(7) :075014, 2011. (Cité en pages 9, 10, 34, 43, 47 et 101.)
- [GSH11] Markus Grasmair, Otmar Scherzer, and Markus Haltmeier. Necessary and sufficient conditions for linear convergence of l1-regularization. *Commun. Pure and Appl. Math.*, 64(2) :161–182, 2011. (Cité en pages 9, 34, 46, 47, 73, 74, 88, 95 et 104.)
- [GV06] Rémi Gribonval and Pierre Vandergheynst. On the exponential convergence of matching pursuits in quasi-incoherent dictionaries. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 52(1) :255–261, 2006. (Cité en page 3.)

- [Hal13] Markus Haltmeier. Stable signal reconstruction via-minimization in redundant, non-tight frames. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 61(2) :420–426, 2013. (Cité en pages 10 et 101.)
- [Her09] Gabor T Herman. *Fundamentals of computerized tomography : image reconstruction from projections*. Springer, 2009. (Cité en page 21.)
- [HUL13] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemaréchal. *Convex analysis and minimization algorithms I : fundamentals*, volume 305. Springer science & business media, 2013. (Cité en page 15.)
- [Lan51] Louis Landweber. An iteration formula for fredholm integral equations of the first kind. *American journal of mathematics*, 73(3) :615–624, 1951. (Cité en page 26.)
- [Lew02] Adrian S Lewis. Active sets, nonsmoothness, and sensitivity. *SIAM Journal on Optimization*, 13(3) :702–725, 2002. (Cité en page 42.)
- [LZ09] Han Liu and Jian Zhang. Estimation consistency of the group lasso and its applications. In *AISTATS*, pages 376–383, 2009. (Cité en page 7.)
- [MB13] Michael Moeller and Martin Burger. Multiscale methods for polyhedral regularizations. *SIAM Journal on Optimization*, 23(3) :1424–1456, 2013. (Cité en page 42.)
- [MCW05] Dmitry M Malioutov, Müjdat Cetin, and Alan S Willsky. Homotopy continuation for sparse signal representation. In *Proceedings.(ICASSP'05). IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2005.*, volume 5, pages v–733. IEEE, 2005. (Cité en page 4.)
- [MV02] Irena Maravić and Martin Vetterli. A sampling theorem for the radon transform of finite complexity objects. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), 2002 IEEE International Conference on*, volume 2, pages II–1197. IEEE, 2002. (Cité en page 105.)
- [MZ93] Stéphane G Mallat and Zhifeng Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 41(12) :3397–3415, 1993. (Cité en pages 3 et 4.)
- [Nat95] Balas Kausik Natarajan. Sparse approximate solutions to linear systems. *SIAM journal on computing*, 24(2) :227–234, 1995. (Cité en page 3.)
- [NDEG13] Sangnam Nam, Mike E Davies, Michael Elad, and Rémi Gribonval. The cosparsity analysis model and algorithms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 34(1) :30–56, 2013. (Cité en page 7.)
- [NT09] Deanna Needell and Joel A Tropp. Cosamp : Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 26(3) :301–321, 2009. (Cité en page 4.)

- [NW<sup>+</sup>07] Robert D Nowak, Stephen J Wright, et al. Gradient projection for sparse reconstruction : Application to compressed sensing and other inverse problems. *IEEE Journal of selected topics in signal processing*, 1(4) :586–597, 2007. (Cité en page 4.)
- [NW13] Deanna Needell and Rachel Ward. Stable image reconstruction using total variation minimization. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 6(2) :1035–1058, 2013. (Cité en page 7.)
- [OPT00] Michael R Osborne, Brett Presnell, and Berwin A Turlach. A new approach to variable selection in least squares problems. *IMA journal of numerical analysis*, 20(3) :389–403, 2000. (Cité en page 4.)
- [PGM96] F Peyrin, L Garnero, and I Magnin. Introduction à l’imagerie tomographique 2d et 3d reposant sur la propagation en ligne droite. cas de la tomographie par rayon x, par émission et par ultrasons. *Traitement du signal*, 13(4) :381–413, 1996. (Cité en page 21.)
- [Plu07] Mark D Plumbley. On polar polytopes and the recovery of sparse representations. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 53(9) :3188–3195, 2007. (Cité en page 47.)
- [PRK93] Yagyensh Chandra Pati, Ramin Rezaiifar, and PS Krishnaprasad. Orthogonal matching pursuit : Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. In *Signals, Systems and Computers, 1993. 1993 Conference Record of The Twenty-Seventh Asilomar Conference on*, pages 40–44. IEEE, 1993. (Cité en page 3.)
- [PS82] Christopher C Paige and Michael A Saunders. Lsqr : An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *ACM transactions on mathematical software*, 8(1) :43–71, 1982. (Cité en page 26.)
- [PT12] Sebastian Petry and Gerhard Tutz. Shrinkage and variable selection by polytopes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 142(1) :48–64, 2012. (Cité en page 41.)
- [Rad05] Johann Radon. 1.1 über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten. *Classic papers in modern diagnostic radiology*, 5, 2005. (Cité en page 21.)
- [RF08] Volker Roth and Bernd Fischer. The group-lasso for generalized linear models : uniqueness of solutions and efficient algorithms. In *Proceedings of the 25th international conference on Machine learning*, pages 848–855. ACM, 2008. (Cité en page 7.)
- [Roc15] Ralph Tyrell Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton university press, 2015. (Cité en page 15.)
- [ROF92] Leonid I Rudin, Stanley Osher, and Emad Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 60(1) :259–268, 1992. (Cité en page 7.)

- [SF09] Ivan W Selesnick and Mario AT Figueiredo. Signal restoration with overcomplete wavelet transforms : comparison of analysis and synthesis priors. In *SPIE Optical Engineering+ Applications*, pages 74460D–74460D. International Society for Optics and Photonics, 2009. (Cité en page 7.)
- [SGIH13] Charles Soussen, Rémi Gribonval, Jérôme Idier, and Cédric Herzet. Joint k-step analysis of orthogonal matching pursuit and orthogonal least squares. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 59(5) :3158–3174, 2013. (Cité en page 3.)
- [SIBD11] Charles Soussen, Jérôme Idier, David Brie, and Junbo Duan. From bernoulli–gaussian deconvolution to sparse signal restoration. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 59(10) :4572–4584, 2011. (Cité en page 3.)
- [SS86] Youcef Saad and Martin H Schultz. Gmres : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on scientific and statistical computing*, 7(3) :856–869, 1986. (Cité en page 26.)
- [SWB<sup>+</sup>04] Gabriele Steidl, Joachim Weickert, Thomas Brox, Pavel Mrázek, and Martin Welk. On the equivalence of soft wavelet shrinkage, total variation diffusion, total variation regularization, and sides. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(2) :686–713, 2004. (Cité en page 7.)
- [Tem00] Vladimir N Temlyakov. Weak greedy algorithms. *Advances in Computational Mathematics*, 12(2-3) :213–227, 2000. (Cité en page 3.)
- [Tro04] Joel A Tropp. Greed is good : Algorithmic results for sparse approximation. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 50(10) :2231–2242, 2004. (Cité en page 3.)
- [Tro06] J. A. Tropp. Just relax : convex programming methods for identifying sparse signals in noise. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 52(3) :1030–1051, March 2006. (Cité en pages 5, 9 et 51.)
- [TSR<sup>+</sup>05] Robert Tibshirani, Michael Saunders, Saharon Rosset, Ji Zhu, and Keith Knight. Sparsity and smoothness via the fused lasso. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, 67(1) :91–108, 2005. (Cité en page 7.)
- [Vai14] Samuel Vaiter Vaiter. *Low Complexity Regularization of Inverse Problems*. Theses, Université Paris Dauphine - Paris IX, July 2014. (Cité en pages 10, 42, 43, 73 et 101.)
- [VGFP15] Samuel Vaiter, Mohammad Golbabaei, Jalal Fadili, and Gabriel Peyré. Model selection with low complexity priors. *Information and Inference*, page iav005, 2015. (Cité en pages 8, 9, 10, 34, 42, 43, 47, 51, 73 et 101.)

- [VPDF13] Samuel Vaiter, Gabriel Peyré, Charles Dossal, and Jalal Fadili. Robust sparse analysis regularization. *IEEE Transactions on information theory*, 59(4) :2001–2016, 2013. (Cité en pages 7, 8, 9, 10, 52, 80, 81 et 101.)
- [VPF13] Samuel Vaiter, Gabriel Peyré, and Jalal Fadili. Robust polyhedral regularization. *arXiv preprint arXiv :1304.6033*, 2013. (Cité en pages 41, 43 et 101.)
- [WH10] Fengrong Wei and Jian Huang. Consistent group selection in high-dimensional linear regression. *Bernoulli : official journal of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability*, 16(4) :1369, 2010. (Cité en page 7.)
- [YL06] Ming Yuan and Yi Lin. Model selection and estimation in regression with grouped variables. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, 68(1) :49–67, 2006. (Cité en page 7.)
- [Zie95] Günter M Ziegler. *Lectures on polytopes*, volume 152. Springer Science & Business Media, 1995. (Cité en pages 15, 20 et 21.)

# Table des figures

1.1	Exemple d'une image simulée d'un pipeline . . . . .	2
2.1	Exemples de faces . . . . .	16
2.2	Exemples de faces minimales. . . . .	17
2.3	Exemples de faces minimales et de faces minimales exposées. $x^2$ n'a qu'une face exposée. . . . .	18
2.4	H-représentation . . . . .	20
2.5	V-représentation . . . . .	21
3.1	un exemple de signal identifiable pour $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . . . . .	39
4.1	La boule unité $\ell^1$ dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	49
4.2	la face minimale de la boule unité $\ell^1$ de $x = (1, 1, 1)$ . . . . .	50
4.3	un exemple d'un polytope centro-symétrique dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	54
4.4	un exemple de faces minimales de $x^0$ . . . . .	55
4.5	un exemple de signal identifiable pour $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . . . . .	55
4.6	un exemple de boule unité avec une base polyédrique . . . . .	60
4.7	Une illustration de $\mathcal{K}$ . . . . .	61
4.8	Image linéaire d'une boule unité bloc avec des faces non-exposées . . . . .	65
5.1	Séparation entre $H_\eta$ et le polytope réduit $Q_J$ dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	76
5.2	Un exemple de projection dans $K$ . . . . .	77
5.3	Exemple de projection de $d(x^0)^+$ dans le polytope réduit $\bar{Q}_J$ . . . . .	79
5.4	Un exemple simple du fonctionnement de l'algorithme glouton. . . . .	81
5.5	Exemples de $x^0 \in \mathbb{R}^{64 \times 64}$ avec un degré de parcimonie de 150, 200 et 250 . . . . .	84
5.6	Ratio de vecteurs reconstruits par la minimisation $\ell^1$ en fonction de $\ x^0\ _0$ dans un cas gaussien. Le ratio des pré-certificats $d$ , $\eta_{g1}$ et $\eta_{g2}$ qui sont des certificats duaux non dégénérés en fonction de $\ x^0\ _0$ . . . . .	85

5.7	Ratio de vecteurs reconstruits par la minimisation $\ell^1$ en fonction de $\ x^0\ _0$ dans le cas tomographique. Le ratio des pré-certificats $d$ , $\eta_{g1}$ et $\eta_{g2}$ qui sont des certificats duaux non dégénérés en fonction de $\ x^0\ _0$ .	86
5.8	la majoration théorique en fonction de la moyenne des erreurs réelles obtenues pour un millier de bruits gaussiens. . . . .	89
5.9	Illustration de lemme 5.5.2 avec un exemple simple dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	92

## Liste des tableaux

5.1	Résultats pour $Q$ obtenu par l'algorithme de projection pour une matrice gaussienne. Temps en secondes . . . . .	85
5.2	Résultats pour $Q$ obtenu par l'algorithme glouton pour une matrice gaussienne. Temps en secondes . . . . .	86
5.3	Résultats pour $Q$ obtenu par l'algorithme de projection pour une matrice de projection. Temps en secondes . . . . .	87
5.4	Résultats pour $Q$ obtenu par l'algorithme glouton pour une matrice de projection. Temps en secondes . . . . .	87
5.5	Ratio entre les résultats théoriques et l'erreur $\ell^2$ réelle. $TB$ est la borne théorique, Moyenne est le ratio avec la moyenne des erreurs $\ell^2$ obtenues avec des bruits gaussiens, de même pour Max et <i>pire</i> est le ratio avec l'erreur $\ell^2$ obtenue avec le <i>pire</i> bruit. . . . .	88



**Résumé :** Cette thèse étudie différents problèmes de minimisations avec des fonctions de régularisations qui promeuvent la parcimonie. Plus précisément, on souhaite reconstruire une image, que l'on suppose parcimonieuse et qui a subi une transformation par un opérateur linéaire, à l'aide de problèmes de minimisation. Dans ce manuscrit, on s'intéressera plus particulièrement à la minimisation  $\ell^1$  synthèse, analyse et bloc qui sont très utilisées pour reconstruction une image que l'on sait parcimonieuse. Ces minimisations produisent en pratique des résultats convaincants qui n'ont été compris théoriquement que récemment. Les différents travaux sur le sujet mettent en évidence le rôle d'un vecteur particulier appelé *certificat dual*. L'existence d'un certificat dual permet à la fois d'assurer la reconstruction exacte d'une image dans le cas où il n'y a pas de perturbations et d'estimer l'erreur de la reconstruction en présence de perturbations. Dans nos travaux, nous allons introduire l'existence d'un *certificat dual optimal* pour la minimisation  $\ell^1$  synthèse qui minimisent l'erreur de reconstruction. Ces résultats ayant une forte interprétation géométrique, nous avons développé un critère d'identifiabilité, c'est à dire que ce critère assure que l'image recherchée est l'unique solution du problème de minimisation. Ce critère permet d'étendre nos travaux à la minimisation  $\ell^1$  analyse,  $\ell^1$  bloc et à d'autres cas.

**Mots-clefs :** Traitement d'images, parcimonie, minimisation  $\ell^1$  synthèse, minimisation  $\ell^1$  analyse, minimisation  $\ell^1$  bloc, polytopes, jauges, certificat dual

---

### **Identifiability of s-sparse structured signals and associated algorithms - Application at limited view angle tomography**

**Abstract:** This thesis studies different minimization problems with sparse based regularization. More precisely, we want to reconstruct a sparse image, which undergone a linear transformation, with minimization problems. In this manuscript, we will be focused on  $\ell^1$  synthesis, analysis and block minimizations which are widely used in sparse approximations. These problems offer competitive results which are theoretical understood only recently. Different studies on the subject emphasized the contribution of a particular vector called *dual certificate*. The existence of this dual certificate allows simultaneously to guarantee the exact recovery of an image in noiseless case and to estimate the noise robustness in noisy case. In this work, we introduce the existence of an *optimal dual certificate* for the  $\ell^1$  synthesis minimization which minimizes the reconstruction error. As those results have a strong geometrical interpretation, we develop an identifiability criterion which ensures the uniqueness of a solution. This criterion generalizes the work on  $\ell^1$  synthesis minimization to the analysis case, block case and others.

**Keywords:** Image processing, sparsity,  $\ell^1$  synthesis minimization,  $\ell^1$  analysis minimization, block sparse minimization, polytopes, gauges, dual certificate

---