



**HAL**  
open science

# Modélisation de la rotation de la terre et analyse conjointe des données du mouvement du pôle et de gravimétrie

Yann Ziegler

► **To cite this version:**

Yann Ziegler. Modélisation de la rotation de la terre et analyse conjointe des données du mouvement du pôle et de gravimétrie. Géophysique [physics.geo-ph]. Université de Strasbourg, 2016. Français. NNT : 2016STRAH006 . tel-01503377

**HAL Id: tel-01503377**

**<https://theses.hal.science/tel-01503377>**

Submitted on 7 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE STRASBOURG



**ÉCOLE DOCTORALE 413 STUE**  
SCIENCES DE LA TERRE, DE L'UNIVERS  
ET DE L'ENVIRONNEMENT

Institut de Physique du Globe de Strasbourg

**T H È S E**

présentée par

**Yann ZIEGLER**

soutenue publiquement le **21 juin 2016**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université de Strasbourg**

Discipline : SCIENCES DE LA TERRE / Spécialité : GÉOPHYSIQUE

# **Modélisation de la rotation de la Terre et analyse conjointe des données du mouvement du pôle et de gravimétrie**

*Thèse dirigée par :*

M. HINDERER Jacques

- Directeur de recherche, CNRS/Université de Strasbourg

M. ROGISTER Yves

- Maître de conférence, Université de Strasbourg

*Rapporteurs :*

M. BIZOUARD Christian

- Astronome adjoint, Observatoire de Paris

Mme GREFF-LEFFTZ Marianne

- Professeur, Institut de Physique du Globe de Paris

*Examineurs :*

M. CROSSLEY David

- Professor, Saint Louis University, Missouri

Mme DEHANT Véronique

- Professeur, Observatoire Royal de Belgique

Ἐν οἶδα ὅτι οὐδὲν οἶδα  
*Je sais une seule chose, que je ne sais rien.*

Socrate

---

## Résumé

L'objectif principal de ce travail est d'améliorer notre compréhension de la rhéologie terrestre et du mouvement de Chandler qui en dépend. Nous analysons d'abord les séries temporelles de variations de gravité enregistrées par des gravimètres supraconducteurs durant plus d'une décennie. En utilisant également des données du mouvement du pôle, nous calculons, pour chaque station, le facteur gravimétrique complexe exprimé par une amplitude  $\delta$  et une phase  $\kappa$  dont nous discutons le sens physique. Nous déterminons également les incertitudes sur nos résultats en mettant à profit la longueur des séries temporelles. La variabilité importante des résultats obtenus d'une station à l'autre indique que des perturbations gravimétriques locales et autres artefacts instrumentaux (hydrologie, composante dynamique de la marée polaire ou sauts dans les données) demeurent, malgré les corrections appliquées. Nous combinons donc après pondération les séries gravimétriques suivant une méthode de sommation, afin d'améliorer le rapport signal sur bruit, et nous donnons une estimation globale du facteur gravimétrique. La méthode de sommation permet de diminuer les incertitudes sur les résultats et d'aboutir à des valeurs plus vraisemblables, bien que trop faible pour l'amplitude ( $\delta = 1.118 \pm 0.016$  et  $\kappa = -0.45 \pm 0.66$  deg).

Dans un second temps, nous déterminons analytiquement les solutions du problème des petites déformations d'une Terre anélastique en rotation afin de mieux comprendre l'influence de l'anélasticité sur le mouvement de Chandler. En généralisant des travaux antérieurs, nous montrons qu'il est justifié d'utiliser le même formalisme et les mêmes approximations pour un modèle élastique ou anélastique, moyennant l'application du Principe de correspondance. Nous donnons alors les formules analytiques pour le déphasage entre différentes fonctions propres du mouvement de Chandler, résultats qui peuvent être mis en perspective avec la phase du facteur gravimétrique. Nous rappelons également la méthode de résolution analytique et numérique des équations du mouvement pour une Terre anélastique ellipsoïdale en rotation et soumise à de petites déformations.

Au moyen d'un code de résolution numérique, nous calculons alors la période et le facteur de qualité de Chandler pour un modèle de Terre homogène et différentes rhéologies. En particulier, les modèles du Solide Linéaire Standard et de Burgers induisent une augmentation de la période très faible relativement au cas élastique (quelques minutes) mais une atténuation non négligeable ( $Q \approx 200$ )

pour des valeurs couramment utilisées des rigidités et viscosités. Pour aller plus loin, nous étudions l'influence de ces paramètres rhéologiques sur la période et le facteur de qualité de Chandler pour le modèle de Burgers. Il apparaît que les viscosités  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , des composantes de Maxwell et de Kelvin respectivement, qui constituent le modèle de Burgers, ont une influence quasiment négligeable sur la période lorsqu'elles sont de l'ordre de grandeur des valeurs généralement admises ( $\eta_1 \sim 10^{21}$  Pa s et  $\eta_2 \sim 10^{-1}\eta_1$ ). Il en est de même pour la rigidité  $\mu_2$  de la composante de Kelvin, dont l'influence n'est visible que lorsque  $\eta_2$  devient inférieure à  $5 \times 10^{18}$  Pa s. *A contrario*, le facteur de qualité dépend plus fortement de  $\eta_2$  et l'influence de  $\eta_1$  est aussi non négligeable dès que  $\eta_1$  est inférieure à  $10^{21}$  Pa s. Nous avons également calculé le facteur gravimétrique, dont l'amplitude est proche de 1.072 pour le modèle étudié. Les valeurs de phase obtenues ne dépassent pas quelques centièmes de degré, ce qui demeure bien en-deçà des incertitudes associées à notre analyse des données gravimétriques.

Enfin, nous nous intéressons à la question du forçage du modèle de Terre anélastique par une surcharge. Nous étudions l'influence de la fréquence de forçage sur la réponse du modèle en calculant, en domaine de Laplace, le rapport de la variation de gravité sur le déplacement radial ( $\Delta g/\Delta u$ ). En domaine temporel, l'existence d'une valeur élastique (à court terme) et d'une limite visqueuse (à long terme) pour les nombres de Love est connue. Nous obtenons un résultat similaire en domaine fréquentiel, avec une amplitude de  $\Delta g/\Delta u$  qui tend vers deux valeurs distinctes à basses et hautes fréquences respectivement, la limite basse fréquence étant la plus petite en valeur absolue. La phase indique que le déphasage entre la variation de gravité et le déplacement atteint des valeurs maximales au(x) temps de relaxation caractéristique(s) pour le degré harmonique considéré, et s'annule vers les hautes et basses fréquences, ce qui montre que les effets anélastiques sont moins visibles sur le déphasage en régime purement visqueux qu'en régime viscoélastique.

**Mots clés :** *mouvement de Chandler, mouvement du pôle, gravimétrie, gravimètres supraconducteurs, facteur gravimétrique, rhéologie, anélasticité, viscosité du manteau, facteur de qualité*

---

---

# Earth rotation modeling and joint analysis of polar motion and gravimetric data

## Abstract

The main goal of this work is to improve our understanding of the Earth's rheology and of the Chandler wobble which depends on it. First, we analyze time series of gravity variations recorded by superconducting gravimeters during more than a decade. Using polar motion data too, we compute, for each station, the complex gravimetric factor characterized by an amplitude  $\delta$  and a phase  $\kappa$  whose physical meaning is discussed. We also determine the uncertainties on our results making profit of the length of the time series. The large variability of the obtained results, from one station to the other, suggests that local gravity perturbations and other instrumental artifacts (hydrology, dynamic component of the pole tide or offsets in the data) remain, in spite of the applied corrections. We thus combine weighted gravity series using a stacking method to improve the signal-to-noise ratio, and we give a global estimate of the gravimetric factor. The stacking method decreases the uncertainties on the results and provides values which are more likely, although too small for the amplitude ( $\delta = 1.118 \pm 0.016$  and  $\kappa = -0.45 \pm 0.66$  deg).

Then, we analytically determine the solutions of the small deformations of an anelastic rotating Earth model to better understand the influence of anelasticity on the Chandler wobble. By a generalization of previous works, we show that it is justified to use the same formalism and the same approximations for elastic and anelastic models, by means of the Correspondence principle. We give analytical formulas for the phase delay between different eigenfunctions involved in the Chandler wobble, which can be related to the phase of the gravimetric factor. We also recall the analytical and numerical methods of resolution of the equations of movement for an ellipsoidal rotating anelastic Earth which undergoes small deformations.

Using a numerical program we have developed, we compute the Chandler wobble period and quality factor for a homogeneous Earth model and different rheologies. The Standard Linear Solid and Burgers models, especially, induce a very weak increase of the period compared to the elastic case (a few minutes) but a non-negligible attenuation ( $Q \approx 200$ ) for commonly used values of rigidities and viscosities. Furthermore, we study the influence of these rheological


parameters on the Chandlerian period and quality factor for a Burgers model. The viscosities,  $\eta_1$  and  $\eta_2$ , of the Maxwell and Kelvin component, respectively, which make up the Burgers model, have an almost negligible influence on the period when they are of the order of magnitude of values found in the literature ( $\eta_1 \sim 10^{21}$  Pa.s and  $\eta_2 \sim 10^{-1}\eta_1$ ). The same conclusion holds for the rigidity  $\mu_2$  of the Kelvin component, whose influence is only significant when  $\eta_2$  becomes smaller than  $5 \times 10^{18}$  Pa.s. The quality factor depends more strongly on  $\eta_2$  than the period does and the influence of  $\eta_1$  is non-negligible too, for values of  $\eta_1$  smaller than  $10^{21}$  Pa.s. We have also computed the gravimetric factor, whose amplitude is close to 1.072 for our simple model. The phase values do not exceed a few hundredths of a degree, which is far below the uncertainties associated to our gravimetric data analysis.

Finally, we focus on the loading problem of an anelastic Earth model. We study the influence of the forcing frequency on the model response by computing, in the Laplace domain, the ratio between gravity variation and radial displacement ( $\Delta g/\Delta u$ ). In the time domain, the existence of an elastic (short term) value and of a viscous (long term) limit for the Love numbers is known. We obtain a similar result in the frequency domain, with the amplitude of  $\Delta g/\Delta u$  which tends toward two distinct values at low and high frequencies respectively, the low frequency limit being the smallest in absolute value. The phase reveals that the phase delay between the gravity variation and the displacement reaches its maximal values at the characteristic relaxation time(s) for the considered harmonic degree, and cancels toward both high and low frequencies, which suggests that anelastic effects are less noticeable on the phase delay in the purely viscous regime than in the viscoelastic regime.

**Keywords :** *Chandler wobble, polar motion, gravimetry, superconducting gravimeters, gravimetric factor, rheology, anelasticity, mantle viscosity, quality factor*

---

## Remerciements

E moment est venu de m'atteler à la rédaction de cette page et ce n'est pas sans un réel plaisir que j'écris ces lignes. La satisfaction d'arriver au terme de trois années et demie de travail y est sans doute pour beaucoup mais celle-ci n'aurait pu être complète sans le concours des multiples personnes que j'ai côtoyées durant ma thèse. Je tiens donc sincèrement à leur exprimer mes remerciements.

Je commencerai toutefois par adresser mes remerciements à Marianne Greff, Christian Bizouard, Véronique Dehant et David Crossley qui ont accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je vous en remercie chaleureusement et vous souhaite bonne lecture.

Je continuerai bien sûr en remerciant Jacques Hinderer et Yves Rogister qui ont codirigé mon travail. Yves tout d'abord, qui fut parmi les premiers à m'avoir donné goût à la géophysique – y compris sous sa forme la plus « calculoïde » – au travers de ces enseignements, mais aussi des stages que j'ai faits avec lui et qui me menèrent pas à pas à cette thèse. Jacques également, qui m'a accordé sa confiance et m'a notamment fait découvrir les subtilités de la gravimétrie. Je me souviendrai bien sûr des longues et profondes réflexions de nature (géo)physiques que nous avons eues tous les trois, mais je retiendrai aussi nos discussions sur des sujets plus divers et plus légers, qui m'ont fait d'autant plus apprécier le temps passé avec eux. Ces expériences ayant été extrêmement enrichissantes, je tiens aussi à les remercier pour m'avoir offert la possibilité de passer un mois à l'*Institute of Earth Sciences* de l'Academia Sinica à Taïwan, et m'avoir permis de présenter mes travaux aux assemblées générales de l'AGU et de l'UGGI. En peu de mots, la disponibilité et la bienveillance de Jacques et Yves à mon égard sont probablement pour beaucoup dans la facilité – relative, bien sûr – avec laquelle j'ai fait cette thèse. Merci à vous.

Parmi les autres personnes côtoyées durant ces années à l'EOST, je tiens à remercier Séverine Rosat qui m'a beaucoup appris et s'est toujours montrée très disponible, et ce, bien avant que je ne commence ma thèse, ainsi que Jean-Paul Boy, en particulier pour quelques bons moments partagés à Strasbourg et à Prague. Je remercie également Hilaire Legros dont j'ai pu très tôt apprécier la bonne humeur, entre autres qualités. Je remercie encore Magali Pierrat, qui m'a plusieurs fois rendu service à la bibliothèque, et dont je retiendrai particulièrement la gentillesse et l'efficacité. Suite à mon séjour à Taïwan, je remercie Frédéric Deschamps ainsi que Benjamin Fong Chao pour m'avoir accueilli à l'IES. Je remercie aussi celles et ceux à qui j'ai eu l'occasion de présenter une partie de mon travail et qui m'ont apporté leurs encouragements après y avoir montré un réel intérêt. Je pense à Hartmut Wziontek et à d'autres, mais surtout à David Crossley, qui m'a en plus fait le plaisir d'accepter de faire partie de mon jury.

Je garde pour un autre jour mes innombrables remerciements à tous mes



collègues, amis, (post)doctorants, et autres personnes que je n'ai que trop brièvement rencontrées durant ma thèse mais qui ont participé à rendre ces années positivement inoubliables. Je n'ajouterai que quelques mots pour remercier dès à présent ma sœur et mes parents, qui ont toujours été à mes côtés et me soutiennent depuis tant d'années déjà.

Yann, le 23 mai 2016

# Liste des figures

1.1	Séquence de trois rotations suivant les angles d'Euler $\phi$ , $\theta$ et $\psi$ . Le système $(Oxyz)$ est en rotation relativement au système $(O\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ fixe. Le vecteur $\vec{e}_n$ indique la ligne des nœuds. . . . .	10
2.1	Les trois principaux systèmes de référence. À gauche, les systèmes de référence célestes, non rotatifs, sont orientés de façons identiques : conventionnellement, l'axe $x$ pointe dans une direction (vers le point vernal) définie à partir du quasar 3C 273, et l'axe $z$ pointe à proximité de Polaris, l'Étoile polaire, à l'époque J2000. En revanche, les origines de ces systèmes diffèrent : le barycentre du système solaire pour l'ICRS et le géocentre pour le GCRS. À droite, l'ITRS est en co-rotation diurne avec la Terre et a pour origine son centre de masse (voir Petit et Luzum (2010) pour sa description détaillée). . . . .	25
2.2	De façon analogue à la Fig. 1.1, séquence de rotation permettant de passer du repère céleste, l'ICRS, au repère terrestre, l'ITRS : précession d'angle $\phi$ , nutation d'angle $\theta$ et rotation propre d'angle $\psi$ . . . . .	28
2.3	Relation entre le GCRS et l'ITRS <i>via</i> quatre des cinq paramètres de rotation de la Terre (la variation de la longueur du jour n'est pas représentée) et la partie modélisée de la précession-nutation ( $X_{\text{mod}}$ et $Y_{\text{mod}}$ ). La rotation terrestre instantanée est donnée par le vecteur $\vec{\omega}$ , qui indique donc ici le pôle de rotation instantané. La rotation terrestre est toutefois comptée, en pratique, autour du CIP, qui constitue une moyenne journalière du pôle de rotation instantané. Notez que le schéma n'est pas à l'échelle. . . . .	31
2.4	Modèles rhéologiques analogiques élémentaires et leur équation constitutive, (a) le ressort et (b) le piston visqueux. . . . .	41
5.1	Le réseau de gravimètres supraconducteurs de l'IGETS. Les ronds jaunes représentent les stations actuellement en fonctionnement, les triangles rouges sont les anciennes stations aujourd'hui arrêtées (ou pour lesquelles il n'y a pas d'information). La Fig. 5.2 détaille les stations européennes. . . . .	68
5.2	La partie européenne du réseau de gravimètres supraconducteurs de l'IGETS (voir aussi la Fig. 5.1). . . . .	69
5.3	(a) résidus gravimétriques synthétiques avec des offsets indiqués par les traits verticaux, (b) résidus corrigés des offsets et signal filtré en rouge, (c) signal filtré et modèle (somme de sinusoides) ajusté en traits pointillés. . . . .	85

5.4	Résidus gravimétriques (en bleu) pour les 5 stations utilisées dans la méthode de stacking et signaux filtrés (en rouge) par un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure à 90 jours. On notera que le filtrage induit une perte d'un an au début et à la fin des séries temporelles (la longueur du filtre est de deux ans). . . . .	85
5.5	Résultat de l'analyse des séries temporelles des 5 stations de la Fig. 5.4 après stacking et filtrage. La perturbation gravimétrique théorique, pour une Terre rigide ( $\Delta g_{rig}$ ) et la perturbation observée ( $\Delta g_{obs}$ ) sont représentées en traits pleins bleus. Le modèle ajusté (somme de sinusoides) est représenté en pointillés rouges. . . . .	86
8.1	Modèles rhéologiques constitués à partir des composants analogiques élémentaires de type ressort hookéen et piston visqueux (voir Fig. 2.4). Modèles de (a) Maxwell, (b) Kelvin-Voigt, (c) SLS et (d) Burgers. . . . .	130
8.2	Période de Chandler (en bleu) et facteur de qualité (en rouge) en fonction de $\eta_1$ pour $\mu_1 = \mu_2$ . . . . .	135
8.3	Période de Chandler (en bleu) et facteur de qualité (en rouge) en fonction de $\eta_2$ pour $\mu_1 = \mu_2$ . . . . .	137
8.4	Période de Chandler (en bleu) et facteur de qualité (en rouge) en fonction de $\eta_2$ pour $\mu_2 = \mu_1/3$ (trait plein). Les courbes de la Fig. 8.3 (pour $\mu_2 = \mu_1$ ) sont également reproduites en pointillés à titre de comparaison. . . . .	138
9.1	Amplitude et phase des nombres de Love $h'_2$ (trait plein) et $k'_2$ pour la rhéologie de Maxwell, en fonction de la fréquence de forçage. Les valeurs des paramètres rhéologiques sont ceux du Tab. 8.2. . . . .	152
9.2	Amplitude et phase des nombres de Love $h'_2$ (trait plein) et $k'_2$ pour la rhéologie de Burgers, en fonction de la fréquence de forçage. Les valeurs des paramètres rhéologiques sont ceux du Tab. 8.2. . . . .	153
9.3	Amplitude (en trait plein bleu, en $\mu\text{Gal mm}^{-1}$ ) et phase (en pointillés rouges, en degrés) de $\Delta g/\Delta u$ pour le degré $\ell = 2$ et la rhéologie de Maxwell, en fonction de la fréquence de forçage. Les valeurs des paramètres rhéologiques sont ceux du Tab. 8.2. . . . .	154
9.4	Amplitude (en trait plein bleu, en $\mu\text{Gal mm}^{-1}$ ) et phase (en pointillés rouges, en degrés) de $\Delta g/\Delta u$ pour le degré $\ell = 2$ et la rhéologie de Burgers, en fonction de la fréquence de forçage. . . . .	154

# Liste des tableaux

3.1	Exemples de sources pouvant typiquement causer une variation <i>spatiale</i> de la gravité de l'ordre de une à quelques centaines de fois au maximum (pour les anomalies) l'ordre de grandeur indiqué en première colonne. . . . .	48
3.2	Similaire à la Table 3.1 mais pour des sources variables localement au cours du temps. . . . .	52
6.1	Termes du développement des Éq. (6.14a) et (6.14b) classés suivant leur origine physique. Les termes liés au mouvement du pôle regroupent différentes variables mais le facteur dominant est bien le mouvement du pôle $\theta$ . La notation a été simplifiée pour l'analyse des ordres de grandeur. . . . .	94
7.1	Notations utilisées dans les formalismes eulérien et lagrangien (pos. = position). La vitesse et l'accélération eulérienne sont obtenues par changement de variables dans les fonctions lagrangiennes correspondantes; elles sont des inconnues fondamentales qui dépendent de la loi du mouvement. . . . .	105
7.2	Conditions de continuité à deux types d'interface (perturb. eulér. : perturbation eulérienne, perturb. lagrang. : perturbation lagrangienne). Pour une fonction $f(r, t)$ , la notation $[f]_{\pm}^{\pm}$ à une interface $r = r_i$ désigne la différence $f(r_i^+, t) - f(r_i^-, t)$ , où $r_i^{\pm} = \lim_{dr \rightarrow 0} r_i \pm dr$ . $\vec{n}^0$ est la normale à la surface, dirigée vers les $r$ croissants. On confond ici la surface initiale et la surface déformée, toutes deux étant toujours très proches dans le cas de petites déformations. . . . .	113
8.1	Équations pour $\mu^0(s)$ des différents modèles rhéologiques dans le domaine de Laplace (les notations des différents auteurs ont été uniformisées). Une erreur typographique (barre de fraction manquante) dans l'équation de Yuen et Peltier (1982) pour SLS a été corrigée ici. Les temps de relaxation sont $\tau_{\sigma} = \eta_1/\mu_1$ et $\tau_{\varepsilon} = \eta_2/\mu_2$ . Dans le modèle à $Q$ constant, $\delta\mu = \mu_1 - \mu_2$ . Pour la rhéologie purement élastique, que je n'ai pas reproduite dans le tableau, l'équation est bien sûr simplement $\mu(s) = \mu_1$ . . . . .	131

- 8.2 Valeurs des paramètres apparaissant dans le tableau 8.1. L'indication « var. » (variable) signifie que l'influence de ce paramètre a été étudiée en le faisant varier sur un intervalle de valeurs prédéfinies (voir 8.3). La valeur indiquée ici est celle utilisée quand le paramètre est maintenu constant. Le choix de  $\eta_2$  est un compromis entre des valeurs publiées très variables, allant de  $\eta_1/10^5$  (Scheidegger 1957 ; Yuen et Peltier 1982) à  $\eta_1/10$  (Lefftz et al. 1994), les études récentes privilégiant le choix  $\eta_2 \sim 10^{-1}\eta_1$ . Le premier paramètre de Lamé est calculé au moyen de l'Éq. (8.14). 132
- 8.3 Période de Chandler, sa variation relativement au modèle élastique, facteur de qualité de Chandler et temps caractéristique pour un modèle compressible. La dernière colonne indique le facteur de qualité intrinsèque du matériau (pour le module de cisaillement) à la fréquence de Chandler trouvée pour la rhéologie correspondante. Les paramètres rhéologiques sont donnés dans le Tab. 8.2 . . . . . 133
- 8.4 Facteurs gravimétriques pour le mouvement de Chandler. Amplitude  $\delta$ , phase  $\kappa$  en degré et en minutes/secondes et phase de la composante déformation uniquement, telle que définie à l'Éq. (4.11). Voir l'Éq. (8.31) pour le calcul de  $\kappa$  en temps. . . . . 142

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
État de l'art . . . . .	1
Plan du travail . . . . .	3
<b>I Physique de la rotation de la Terre et gravimétrie</b>	<b>7</b>
<b>1 Cadre général</b>	<b>9</b>
1.1 Rotation de la Terre . . . . .	9
1.1.1 Angles d'Euler . . . . .	9
1.1.2 Dynamique du solide en rotation . . . . .	12
1.1.3 Référentiels et rotation . . . . .	13
1.2 Point de vue astronomique . . . . .	14
1.2.1 Rotation journalière des planètes . . . . .	14
1.2.2 Précession et nutation . . . . .	16
1.3 Point de vue géophysique . . . . .	17
1.3.1 Mouvement du pôle . . . . .	17
1.3.2 Le mouvement de Chandler . . . . .	19
1.3.3 Longueur du jour . . . . .	20
1.3.4 Noyau liquide et graine . . . . .	21
<b>2 Physique de la rotation de la Terre et rhéologie</b>	<b>23</b>
2.1 Référentiels spatio-temporels . . . . .	23
2.1.1 Systèmes de référence . . . . .	24
2.1.2 Le temps . . . . .	26
2.2 Formalisme de la rotation de la Terre . . . . .	27
2.2.1 Changement de repère . . . . .	28
2.2.2 Paramètres de rotation de la Terre . . . . .	29
2.2.3 Équation cinématique . . . . .	31
2.3 Approche dynamique et corps déformable . . . . .	33

2.3.1	Équations d'Euler-Liouville . . . . .	33
2.3.2	Terre déformable et nombres de Love . . . . .	36
2.3.3	Dissipation et atténuation . . . . .	38
2.4	Rhéologie . . . . .	39
2.4.1	Bref historique . . . . .	39
2.4.2	Classes rhéologiques et anélasticité . . . . .	40
2.4.3	Principe de correspondance . . . . .	42
2.4.4	Atténuation, facteur de qualité intrinsèque, déphasage . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Gravimétrie</b> . . . . .	<b>45</b>
3.1	La gravimétrie . . . . .	45
3.1.1	Gravité et pesanteur . . . . .	45
3.1.2	Variations spatiales du champ de pesanteur et anomalies gravimétriques . . . . .	47
3.1.3	Gravimétrie absolue et relative, gravimètre à supraconductivité . . . . .	49
3.2	Variations temporelles du champ de pesanteur . . . . .	50
3.2.1	Les marées . . . . .	50
3.2.2	Effets d'origine atmosphérique et océanique . . . . .	50
3.2.3	Pseudo-force centrifuge . . . . .	51
<b>II</b>	<b>Analyse conjointe des données du mouvement du pôle et de gravimétrie</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>4</b>	<b>Fondements théoriques</b> . . . . .	<b>55</b>
4.1	Intérêt d'une analyse conjointe . . . . .	55
4.1.1	Objectifs . . . . .	55
4.1.2	Principes de la méthode . . . . .	56
4.2	Le facteur gravimétrique . . . . .	57
4.2.1	Définition . . . . .	57
4.2.2	<i>Pseudo</i> -nombres de Love et fonctions propres . . . . .	59
4.3	Anélasticité et phases . . . . .	59
4.3.1	Phase du facteur gravimétrique . . . . .	59
4.3.2	Phase des fonctions propres . . . . .	60
4.3.3	Lien fonctions propres – facteur gravimétrique . . . . .	61
4.3.4	Valeurs d'amplitude et de phase du facteur gravimétrique . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Détermination du facteur gravimétrique</b> . . . . .	<b>65</b>
5.1	Présentation détaillée des données . . . . .	65
5.1.1	Le réseau de gravimètres GGP/IGETS . . . . .	65
5.1.2	Données auxiliaires . . . . .	68
5.2	Détermination des effets gravimétriques de la marée polaire . . . . .	71
5.2.1	Complément à l'article . . . . .	84

<b>III</b>	<b>Approche analytique des équations du mouvement</b>	<b>87</b>
<b>6</b>	<b>Travaux de Hough et prolongements</b>	<b>89</b>
6.1	Étude de Hough . . . . .	89
6.1.1	Rotation d'une Terre sphéroïdale . . . . .	89
6.1.2	Méthode dans le cas élastique . . . . .	90
6.2	Adaptation au cas anélastique . . . . .	92
6.2.1	Conséquence d'une rhéologie anélastique . . . . .	92
6.2.2	Développement du système différentiel à variables complexes . . . . .	93
6.3	Résolution . . . . .	96
6.3.1	Solutions complexes . . . . .	96
6.3.2	Déphasages analytiques . . . . .	97
6.3.3	Conclusion . . . . .	99
<b>7</b>	<b>Résolution analytique</b>	<b>101</b>
7.1	Équations des petites déformations . . . . .	101
7.2	Formalisme . . . . .	103
7.2.1	Mécanique des milieux continus . . . . .	103
7.2.2	Système de référence et coordonnées . . . . .	106
7.2.3	Équations fondamentales et conditions aux limites . . . . .	108
7.3	Méthode de résolution . . . . .	114
7.3.1	Principe de résolution . . . . .	114
7.3.2	Harmoniques sphériques généralisées . . . . .	114
7.3.3	Projection sur la base canonique et combinaison . . . . .	117
7.4	Résolution et solutions analytiques . . . . .	118
7.4.1	Chaîne de couplage et fonctions propres . . . . .	118
7.4.2	Méthode de résolution analytique . . . . .	120
<b>IV</b>	<b>Modélisation numérique d'une Terre anélastique</b>	<b>123</b>
<b>8</b>	<b>Anélasticité et mouvement de Chandler</b>	<b>125</b>
8.1	Méthode de résolution numérique . . . . .	125
8.1.1	Détermination des fréquences et fonctions propres . . . . .	125
8.1.2	Implémentation du code de résolution . . . . .	127
8.2	Modèles rhéologiques . . . . .	128
8.2.1	Équations d'état . . . . .	128
8.2.2	Discussion des modèles rhéologiques . . . . .	130
8.3	Résultats . . . . .	132
8.3.1	Période propre et facteur de qualité . . . . .	132
8.3.2	Influence des rigidités et des viscosités sur la période et le facteur de qualité de Chandler . . . . .	134
8.3.3	Forme du déplacement toroidal de degré 1 . . . . .	137



---

8.3.4	Nombres de Love complexes pour le mouvement de Chandler . . . . .	139
8.3.5	Amplitude et phase du facteur gravimétrique . . . . .	141
<b>9</b>	<b>Influence de la fréquence sur la réponse de la Terre à un forçage</b>	<b>145</b>
9.1	Dépendance temporelle de la rhéologie terrestre et forçage . . . . .	145
9.1.1	Échelles de temps et rhéologie . . . . .	145
9.1.2	Le rebond post-glaciaire, variation d'altitude et de gravité	146
9.1.3	Rapport de la variation de gravité sur la variation d'altitude	147
9.2	Formalisme et adaptation du code de résolution . . . . .	149
9.2.1	Expression mathématique de la surcharge . . . . .	149
9.2.2	Nombres de Love . . . . .	150
9.2.3	Conditions aux limites . . . . .	150
9.3	Rapport entre la variation de gravité et le déplacement vertical . .	151
	<b>Conclusion générale</b>	<b>155</b>
	<b>Annexe</b>	<b>157</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>165</b>
	<b>Acronymes</b>	<b>177</b>

# Introduction

*Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir.*

---

Henri Poincaré, *La Science et l'hypothèse*

## État de l'art

À l'intersection entre la géophysique et l'astronomie, l'étude de la rotation de la Terre couvre un vaste domaine de recherche et revêt de nombreux aspects. Les travaux sur ce sujet, à l'instar de celui-ci, ont notamment vocation à améliorer notre compréhension des processus affectant la rotation de la Terre et des planètes en général. Ces travaux contribuent en outre à apporter des informations complémentaires, si ce n'est inédites, sur certains paramètres géophysiques inconnus ou mal contraints. En effet, la rotation terrestre est affectée par la dynamique et les interactions de toutes les enveloppes terrestres. Son observation et son étude théorique peuvent donc apporter un éclairage précieux à nombre de phénomènes géophysiques. Dans cette optique, l'objet de cette thèse est principalement d'étudier les mouvements de l'axe de rotation de la Terre relativement à celle-ci, ce que l'on dénomme « le mouvement du pôle », en lien avec la rhéologie du manteau terrestre et son anélasticité en particulier.

Le mouvement de Chandler est un mode de rotation propre de la Terre, du manteau plus précisément, d'une période proche de 432 jours (Vicente et Wilson 1997 ; Nastula et Gross 2015). Observé pour la première fois à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, nombre de ses caractéristiques ont été étudiées depuis. Ce mode propre est essentiellement excité par les océans et l'atmosphère (Wahr 1982 ; Wahr 1983 ; Brzeziński et Nastula 2002 ; Gross 2000 ; Aoyama et al. 2003) et, peut-être, par les tremblements de terre (Smylie et al. 2015). L'amplitude du mouvement chandlérien est de l'ordre de quelques mètres à la surface de la Terre mais cette amplitude varie au cours du temps, sous l'action de l'atmosphère et des océans (Bizouard et al. 2011). De même, plusieurs auteurs ont suggéré l'existence de sauts de phase dans le mouvement de Chandler (Dickman 1981 ; Malkin et Miller 2010 ; Miller et Malkin 2011), à moins qu'il ne s'agisse que de l'annulation temporaire puis de la reprise de l'oscillation (Chao et Chung 2012). Une propriété importante du mouvement de Chandler est son atténuation au cours du temps, quantifiée au moyen du facteur de qualité  $Q$ . La Terre n'étant ni homogène, ni parfaitement élastique, différents phénomènes dissipatifs atténuent l'amplitude de l'oscillation. On citera notamment l'interaction entre les couches fluides et les couches solides et, surtout, pour ce qui nous intéresse ici, l'anélasticité mantellique. Comme le souligne Gross (2007),

la connaissance de la période et du facteur de qualité du mouvement de Chandler peut améliorer notre connaissance de la structure interne de la Terre, et de son l'anélasticité en particulier. Plusieurs méthodes ont été utilisées pour estimer la période et  $Q$ , une majorité d'entre eux s'appuyant sur le calcul préalable de fonctions d'excitation et du moment cinétique atmosphérique (Furuya et Chao 1996 ; Kuehne et al. 1996 ; Dickman et Nam 1998 ; Nastula et Gross 2015).

Une approche alternative à la détermination de la période et du facteur de qualité chandlériens pour étudier l'anélasticité aux échelles de temps du mouvement de Chandler est apparue à la fin du  $xx^e$  siècle, avec l'enregistrement de séries gravimétriques suffisamment longues pour tenter d'observer le phénomène. Ces études ont consisté en l'estimation du facteur gravimétrique complexe, qui quantifie la réponse gravimétrique de la Terre anélastique sous l'effet d'une perturbation de son champ de pesanteur. Une des premières études qui semble avoir donné des résultats partiellement concluants, grâce à l'utilisation d'une série temporelle de mesure de gravité suffisamment longue, est celle de Loyer et al. (1999). La phase qu'ils ont déterminée est cependant notablement trop importante pour correspondre à une réalité géophysique. À la suite de ces travaux, plusieurs auteurs ont à leur tour déterminé l'amplitude et la phase du facteur gravimétrique, soit localement, à différentes stations gravimétriques (Hu et al. 2007 ; Chen et al. 2009), soit par des estimations locales et globales, en combinant différentes séries gravimétriques (Xu et al. 2004 ; Ducarme et al. 2006). Leurs résultats présentent une variabilité importante, qui se manifeste d'autant plus lorsqu'on tient compte de la faiblesse des effets anélastiques que l'on cherche à mettre en évidence. Lorsque la phase est estimée, elle varie de plusieurs degrés, voire dizaines de degrés, d'une station à l'autre, et d'une étude à l'autre. La disparité des résultats obtenus constitue de ce fait une motivation importante pour poursuivre ces études, avec des séries gravimétriques toujours plus longues, et exploiter ou développer d'autres techniques d'analyse.

Les études citées précédemment et portant sur l'anélasticité à la période de Chandler s'inscrivent dans le cadre plus large de l'étude de l'anélasticité du manteau terrestre. On sait depuis longtemps que la réponse de la Terre n'est pas la même selon l'échelle de temps considérée (Scheidegger (1957) soulignait déjà l'importance de cette question en géophysique) mais la détermination de sa rhéologie et des paramètres qui la caractérise demeure une question très débattue, y compris sous ses aspects les plus fondamentaux (Ricard et al. 2014 ; Morozov 2015). En lien avec l'anélasticité, de très nombreux travaux ont été faits portant sur différentes bandes de fréquences, selon la nature des phénomènes étudiés. Les études sur les modes sismiques, les marées ou les nutations sont innombrables et, après avoir établi l'existence de phénomènes anélastiques à courtes et longues périodes, de nombreux auteurs se sont attachés à les caractériser (Yuen et Peltier 1982 ; Wahr et Bergen 1986 ; Zhu et al. 1996 ; Benjamin et al. 2006 ; Ray et Egbert 2012). Toutefois et comme je l'évoquais, la rhéologie terrestre reste relativement mal connue en dépit de cette abondance de travaux.

Parallèlement et de façon complémentaire aux études sur l'anélasticité mentionnées dans le paragraphe précédent, un grand intérêt a été porté à l'étude

du rebond post-glaciaire. Ce phénomène, en effet, est l'un des rares permettant d'estimer la viscosité mantellique, paramètre essentiel de la rhéologie terrestre. Les travaux à ce sujet sont encore une fois très nombreux (Wu et Peltier 1982 ; Mitrovica et al. 2001 ; Steffen et Wu 2011 ; Spada et al. 2011), également sur des aspects purement rhéologiques (Peltier 1974 ; Boschi et al. 1999 ; Spada et Boschi 2006 ; Spada 2013). La gravimétrie a aussi contribué à ce domaine. Les mesures de la variation de gravité rapportée au déplacement vertical, tous deux induits par l'ajustement glacio-isostatique ont permis de distinguer expérimentalement le rebond élastique instantané dû à la fonte actuelle des glaciers du rebond visqueux pluriséculaire de la lithosphère (Purcell et al. 2011 ; Mémin et al. 2011). Bien que les études du rebond post-glaciaire soient focalisées sur des échelles de temps fort différentes de celle du mouvement de Chandler, tous les travaux évoqués contribuent au même effort de recherche en partageant l'objectif commun de mieux comprendre la rhéologie de notre planète et, par extension, sa dynamique.

## Plan du travail

Dans la première partie, je rappelle les fondements théoriques sur lesquels reposent les développements des parties suivantes. Le Chap. 1 rappelle ainsi l'essentiel des outils théoriques nécessaires à l'étude des corps en rotation, puis donne une première description qualitative des phénomènes affectant la rotation de la Terre ou des planètes en général, aussi bien d'un point de vue astronomique que géophysique. Le Chap. 2 définit d'une façon plus détaillée les principaux systèmes de référence et échelles de temps, ainsi que les paramètres de rotation de la Terre notamment. Ces notions sont indispensables à une bonne compréhension du mouvement du pôle et permettent une mise en équation de la rotation de la Terre. Dans cette optique, les équations d'Euler-Liouville sont également rappelées. Le Chap. 2 traite de la rhéologie, avec une attention particulière portée à l'anélasticité *via* l'introduction, notamment, du principe de correspondance qui permet formellement de remplacer les paramètres anélastiques en domaine réel par des paramètres élastiques complexes en domaine de Laplace. Le Chap. 3, qui conclut la partie I, est dédié à la gravimétrie. Il est l'occasion de rappeler les grands principes théoriques et instrumentaux de cette discipline, en allant de la définition du champ de gravité jusqu'à l'explication de l'origine des variations temporelles de pesanteur, qui nous intéresseront tout particulièrement par la suite.

La deuxième partie consiste en la détermination du facteur gravimétrique complexe  $\tilde{\delta}$ , qui permet de quantifier la réponse de la Terre à une perturbation en terme de variation du champ de pesanteur. Pour un modèle de Terre élastique, ce facteur présente une amplitude  $\delta$  proche de 1.16 et une phase  $\kappa$  nulle ; tout écart à ces valeurs trahit la présence de processus dissipatifs après prise en compte de la charge océanique produite par la marée polaire (*pole tide*) qui existe quelle que soit la rhéologie de la Terre. Je rappelle la définition du fac-

teur gravimétrique au Chap. 4 et son interprétation géophysique est discutée plus en détail, notamment pour sa phase  $\kappa$ , en lien avec les fonctions propres du mouvement de Chandler. Le facteur gravimétrique est déterminé par l'analyse conjointe des données du mouvement du pôle et des variations de gravité. Ces deux composantes sont liées l'une à l'autre car tout mouvement du pôle induit (1) une variation du potentiel de pesanteur et (2) une déformation terrestre, lesquelles sont mesurables par la gravimétrie.

Une analyse individuelle a d'abord été faite sur les données d'une dizaine de stations, chacune couvrant plus d'une décennie d'enregistrement. De longues séries temporelles sont nécessaires afin de séparer au mieux le mouvement de Chandler de l'oscillation annuelle, mouvement forcé difficile à séparer du précédent (6.4 années de données sont requises *en théorie* pour séparer ces deux composantes). Après l'analyse locale, par station, une analyse globale a également été faite. Elle s'appuie sur une méthode de sommation ou *stacking* (Cummins et al. 1991) permettant de combiner les séries temporelles de différentes stations gravimétriques afin d'améliorer le rapport signal sur bruit. Concernant l'estimation des incertitudes sur nos résultats, il est apparu que l'analyse de différents intervalles d'une même série temporelle menait à différentes valeurs du facteur gravimétrique, sensiblement au-delà des barres d'erreur estimées formellement. Pour cette raison, l'approche retenue pour estimer les incertitudes a consisté à analyser la convergence de l'amplitude et de la phase du facteur gravimétrique pour des séries temporelles de longueurs croissantes. C'est ainsi la variance des résultats obtenus successivement qui a donné l'estimation de l'incertitude. En complément de cette démarche, des tests synthétiques ont aussi été faits afin, notamment, de mieux comprendre l'influence des différentes sources d'erreur et l'efficacité des corrections visant à les éliminer. Ce travail d'estimation du facteur gravimétrique et la discussion sur les différentes sources d'incertitudes a fait l'objet d'une publication dans *Geophysical Journal International* intégrée au Chap. 5.

La troisième partie s'intéresse au mouvement du pôle sur un plan plus théorique. Le Chap. 6 présente les travaux de Hough (1896) qui a effectué analytiquement la résolution des équations décrivant les petites déformations d'un modèle de Terre ellipsoïdale homogène élastique en rotation. Ces travaux sont ensuite étendus à un modèle de Terre anélastique, tout en justifiant rigoureusement la validité de cette généralisation. Les expressions analytiques obtenues ont permis de calculer les déphasages entre fonctions propres du mouvement de Chandler, ce qui peut être mis en perspective avec les discussions précédentes sur la phase du facteur gravimétrique et l'anélasticité. Le Chap. 7 porte sur la détermination analytique des fonctions et fréquences propres pour le mouvement de Chandler à partir du système différentiel régissant les petites déformations d'un modèle de Terre ellipsoïdale homogène anélastique en rotation et des conditions aux limites appropriées. Ce travail s'appuie largement sur celui de Smith (1974).

Suite à ces études analytiques, il est possible de résoudre numériquement les équations du mouvement. La quatrième et dernière partie décrit ainsi une

---

méthode de résolution numérique permettant de calculer les fréquences et fonctions propres d'un modèle planétaire en rotation, ellipsoïdal homogène et anélastique, comme précédemment. D'abord testé pour un modèle élastique, l'adaptation du code de résolution au cas anélastique a notamment consisté à doubler l'ordre du système différentiel pour inclure les parties imaginaires des équations et à chercher les fréquences propres dans le plan complexe. Les résultats obtenus pour le mouvement de Chandler sont largement discutés pour quelques modèles rhéologiques (élastique, Maxwell, Kelvin-Voigt, SLS, Burgers et  $Q$  constant). L'influence des différents paramètres rhéologiques (rigidités, viscosités, compressibilité) sur la période et le facteur de qualité de Chandler est étudiée. La phase et l'amplitude du facteur gravimétrique sont également calculées numériquement, de même que, plus généralement, les déphasages entre fonctions propres, à comparer aux résultats analytiques du Chap. 6. Cette partie du travail s'inscrit totalement dans la tentative d'exploiter les informations apportées par l'étude du mouvement du pôle pour mieux comprendre le manteau terrestre à des fréquences où son comportement est mal connu.

Le programme de résolution numérique permet aussi le calcul des nombres de Love, c'est-à-dire de la réponse du modèle à différents types de forçage, ce qui ouvre la porte à d'autres études numériques sur l'anélasticité. Ceci est l'objet du Chap. 9. En particulier, une question théorique fondamentale, pas directement liée au mouvement de Chandler mais essentielle dans la compréhension de l'anélasticité du manteau terrestre, est celle de la variation du rapport de la perturbation de gravité sur le déplacement radial ( $\Delta g/\Delta u$ ) dans le cas d'une surcharge. Il est établi que ce rapport voit sa valeur varier d'un régime élastique vers un régime viscoélastique au cours du temps après disparition de la surcharge (Spada et Boschi 2006 ; Mémin et al. 2011) mais le présent travail a pour objet d'étudier la dépendance en domaine fréquentiel de ce rapport. En domaine de Laplace,  $\Delta g/\Delta u$  a en effet une valeur complexe dont l'amplitude et la phase nous renseignent sur l'importance des processus viscoélastiques mis en jeu lors d'un forçage à une fréquence donnée. Les résultats obtenus, ainsi qu'une partie de ceux du Chap. 8 font l'objet d'un article soumis aux *IAG Series* et en cours de révision, intégré en annexe.

Comme l'indiquent les paragraphes précédents, ce travail combine, d'un point de vue méthodologique, l'analyse de données à des développements théoriques, éclairés par une résolution numérique et une étude analytique.



## **Première partie**

# **Physique de la rotation de la Terre et gravimétrie**





# CHAPITRE 1

## Cadre général

---

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Rotation de la Terre</b>	<b>9</b>
1.1.1	Angles d'Euler	9
1.1.2	Dynamique du solide en rotation	12
1.1.3	Référentiels et rotation	13
<b>1.2</b>	<b>Point de vue astronomique</b>	<b>14</b>
1.2.1	Rotation journalière des planètes	14
1.2.2	Précession et nutation	16
<b>1.3</b>	<b>Point de vue géophysique</b>	<b>17</b>
1.3.1	Mouvement du pôle	17
1.3.2	Le mouvement de Chandler	19
1.3.3	Longueur du jour	20
1.3.4	Noyau liquide et graine	21

---

*“Vega was the Pole Star about twelve thousand years ago, and it will be again about fourteen thousand years from now. [...] The Earth is like a spinning top. Its axis is slowly precessing in a circle.”* She demonstrated, using her pencil as the Earth’s axis. *“It’s called the precession of the equinoxes.”*

---

Carl Sagan, *Contact*

## 1.1 Rotation de la Terre

### 1.1.1 Angles d'Euler

En mécanique classique et dans notre espace tri-dimensionnel, la description complète du mouvement d’un solide repose sur six paramètres : trois coordonnées spatiales qui donnent la position d’un point de référence du solide, généralement le centre de masse, et trois angles exprimant l’orientation du solide dans l’espace. Ces trois angles sont appelés *angles d’Euler*, d’après le nom du fameux mathématicien suisse éponyme qui les a introduits. L’évolution des coordonnées spatiales au cours du temps définit les mouvements de translation opérés par le solide, tandis que les angles d’Euler décrivent ses mouvements de rotation.

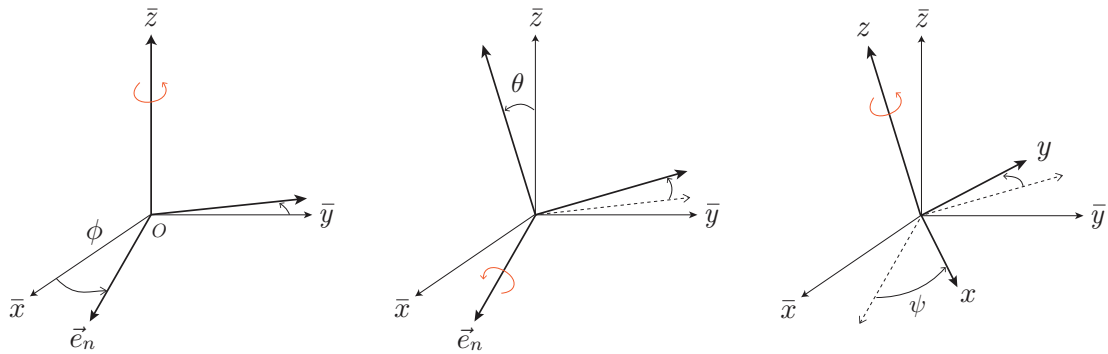


FIGURE 1.1 – Séquence de trois rotations suivant les angles d’Euler  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ . Le système  $(Oxyz)$  est en rotation relativement au système  $(O\bar{x}\bar{y}\bar{z})$  fixe. Le vecteur  $\vec{e}_n$  indique la ligne des nœuds.

Je rappelle ici la définition théorique de ces trois angles, leur application dans l’étude de la rotation de la Terre sera discutée à la Section 2.2.

Selon l’usage que l’on en fait, les angles d’Euler peuvent être définis de différentes manières. J’adopte ici l’approche la plus courante en physique qui consiste à les considérer comme les trois angles quantifiant les trois rotations successives nécessaires pour passer d’un système de référence à un autre dans le cas le plus général. Dans cette conception, le système de référence en rotation est alors attaché au solide étudié et les rotations se font autour des axes du système initial fixe (rotations extrinsèques) ou du système de référence du solide (rotations intrinsèques)<sup>1</sup>. Dans ce qui suit, le système de référence fixe est noté  $(O\bar{x}\bar{y}\bar{z})$  et le système en rotation  $(Oxyz)$ . Par ailleurs, les rotations se font toujours dans le sens direct. Suivant une convention largement répandue, la première rotation est d’angle  $\phi$  autour de l’axe  $(O\bar{z})$ , elle est nommée *précession*. Après cette première rotation, l’axe des  $x$  définit la *ligne des nœuds* dirigée par  $\vec{e}_n$ . La seconde rotation est d’angle  $\theta$  autour de la ligne des nœuds, la *nutation*. La troisième rotation, d’angle  $\psi$  autour de  $(Oz)$  est la *rotation propre*. Cette séquence de rotation est illustrée par la Fig. 1.1.

Ces angles permettent de totalement définir l’orientation statique d’un corps dans l’espace mais nous nous intéressons le plus souvent à des aspects cinématiques, c’est-à-dire au mouvement. L’évolution de cette orientation au cours du temps est ainsi caractérisée par les dérivées des angles d’Euler, prises comme trois fonctions du temps :

$$\dot{\phi}(t) = \frac{d\phi}{dt}, \quad \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{et} \quad \dot{\psi}(t) = \frac{d\psi}{dt}. \quad (1.1)$$

À partir de ces trois dérivées temporelles, on peut définir le vecteur *vitesse de rotation*

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{e}_{\bar{z}} + \dot{\theta}\vec{e}_n + \dot{\psi}\vec{e}_z \quad (1.2)$$

1. D’autres choix de systèmes de références existent bien sûr, nous y reviendrons au 2.1.1.

avec  $\vec{e}_{\bar{z}}$  et  $\vec{e}_z$  les vecteurs unitaires suivant  $(O\bar{z})$  et  $(Oz)$  respectivement. Le vecteur  $\vec{\omega}$  peut également s'écrire sous la forme

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_{\vec{\omega}}, \quad (1.3)$$

où  $\omega$  est la vitesse de rotation instantanée de  $(Oxyz)$  par rapport à  $(O\bar{x}\bar{y}\bar{z})$  et  $\vec{e}_{\vec{\omega}}$  est le vecteur unitaire donnant la direction de l'axe de rotation (pour une rotation dans le sens direct), instantanée également.

Une autre façon d'écrire la relation (1.2) consiste à formuler explicitement les coordonnées du vecteur  $\vec{\omega}$  dans  $(O\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ , soit  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , en fonction des dérivées des angles d'Euler. On peut ainsi écrire les *relations cinématiques d'Euler* (Landau et Lifshitz 1976, p. 111) :

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Dans un cas plus général, de telles relations s'expriment à l'aide de matrices de rotations. Avec  $R_i(\alpha)$  la matrice de rotation d'angle  $\alpha$  autour du  $i$ -ème axe du repère<sup>2</sup>, une séquence de  $n$  rotations indicées par  $k$  est donnée par

$$\mathbf{A} = R_{i_1}(\alpha_1) R_{i_2}(\alpha_2) \dots R_{i_k}(\alpha_k) \dots R_{i_n}(\alpha_n). \quad (1.5)$$

La matrice  $\mathbf{A}$ , appliquée à un vecteur position quelconque du repère initial, donne les composantes de ce vecteur dans le nouveau repère. En particulier, les colonnes de  $\mathbf{A}$  sont donc les vecteurs de la base du repère obtenu après rotation, relativement au repère initial. En introduisant le *tenseur vitesse angulaire*

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

on démontre facilement<sup>3</sup> que les Éq. (1.4) peuvent être généralisées sous la forme

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}. \quad (1.7)$$

Concernant l'étude de la rotation des planètes en particulier, la variation de chacun des trois angles d'Euler au cours du temps correspond à des mouvements de rotation de différentes natures que nous précisons aux Sections 1.2 et 1.3. Nous utiliserons l'Éq. (1.7) dans la Section 2.2.3 pour établir le lien entre les paramètres de changement de repère et les composantes du vecteur de rotation.

2. Le  $i$ -ème axe est pris dans le repère résultant de toutes les rotations précédentes, non dans le repère initial fixe.

3. La dérivée du vecteur position  $\vec{r}$  dans un système dont la rotation est donnée par  $\vec{\omega}$  est  $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \mathbf{W}\vec{r}$ , par définition de  $\mathbf{W}$ . Sachant que  $\mathbf{A}$  est composée des vecteurs de la base, on a donc de même  $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{W}\mathbf{A}$ , ce qui permet d'aboutir à l'Éq. (1.7).

### 1.1.2 Dynamique du solide en rotation

Nous avons défini, à la Section 1.1.1, un système de référence fixe,  $(O\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ , un système de référence en rotation,  $(Oxyz)$ , et le vecteur de rotation instantanée (Éq. (1.3)) donnant la rotation du second système relativement au premier. En attachant le système  $(Oxyz)$  à un solide, on peut utiliser le même formalisme que précédemment pour étudier la rotation des corps. Dans ce cas, le vecteur  $\vec{\omega}$  est aussi le vecteur de rotation instantané du corps. Je ne rappellerai dans cette section que les concepts essentiels à l'étude de la rotation libre, c'est-à-dire la rotation d'un corps soumis à aucun couple de forces extérieures.

La géométrie ainsi que la distribution des masses au sein d'un solide en rotation sont caractérisées par le tenseur d'inertie  $\mathbf{I}$  dont les composantes  $I_{jk}$  sont données en coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$  par :

$$I_{jk} = \int_V (r^2 \delta_{jk} - x_j x_k) \rho(\vec{r}) dV, \quad (1.8)$$

où l'intégration est faite sur tout le volume  $V$  du corps de densité  $\rho$  au point  $\vec{r}$ , et  $\delta_{jk}$  est le symbole de Kronecker. Ce tenseur est une caractéristique propre à chaque corps mais son expression sous forme matricielle dépend du système de référence et de l'orientation du corps dans le système, contrairement à la masse inertielle scalaire qui joue un rôle similaire dans les équations décrivant les mouvements de translation.

Le vecteur moment cinétique  $\vec{H}$ , est défini par

$$\vec{H} = \int_V [\vec{r} \wedge \vec{v}(\vec{r})] \rho(\vec{r}) dV. \quad (1.9)$$

avec  $\vec{v}(\vec{r})$  la vitesse de la particule de densité  $\rho$  en  $\vec{r}$ . Pour un solide indéformable, la vitesse est uniquement due à la rotation :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (1.10)$$

et on montre alors que

$$\vec{H} = \mathbf{I}\vec{\omega}, \quad (1.11)$$

cette définition étant l'analogue de celle de la quantité de mouvement pour les translations. Si le corps est déformable, une partie de son moment cinétique est dû aux circulations internes des masses à la vitesse  $\vec{v}_r$  et le terme additionnel, le moment cinétique *relatif*, est

$$\vec{h} = \int_V [\vec{r} \wedge \vec{v}_r] \rho(\vec{r}) dV. \quad (1.12)$$

Pour des vitesses de déformation très faibles devant la vitesse de rotation et *a fortiori* si la somme des vitesses telle qu'exprimée par l'intégrale (1.12) tend à s'annuler sur l'ensemble du volume, le moment cinétique relatif peut être négligé et le moment cinétique total se réduit alors à l'Éq. (1.11).

Dans un référentiel inertiel, c'est-à-dire en mouvement rectiligne uniforme ou fixe par rapport au système de Copernic, et sans rotation, la conservation du moment cinétique impose que  $\vec{H}$  soit constant en l'absence de forces extérieures :

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{0}. \quad (1.13)$$

Le tenseur d'inertie (1.8) étant symétrique, il existe toujours un repère orthonormé dans lequel on peut l'exprimer sous forme d'une matrice diagonale. Les trois axes de ce repère sont donnés par les vecteurs propres de la matrice ; ils définissent les axes principaux d'inertie du corps. Les valeurs propres correspondantes définissent quant à elles les moments principaux d'inertie. L'introduction des axes principaux d'inertie permet de définir un système de référence attaché au solide et dans lequel seuls les  $I_{jk}$  pour  $j = k$  sont non nuls à un instant initial (si le corps est déformable, il se peut que les  $I_{jk}$  pour  $j \neq k$  soient non nuls par la suite). Les trois moments principaux d'inertie sont alors définis par les constantes

$$A = I_{11}, \quad B = I_{22} \quad \text{et} \quad C = I_{33}, \quad (1.14)$$

avec  $C \geq B \geq A$ . Dans ce système de référence, comme dans tout référentiel en rotation à la vitesse de rotation instantanée  $\vec{\omega}$ , la conservation du moment cinétique prend alors la forme

$$\frac{d\vec{H}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{H} = \vec{0}. \quad (1.15)$$

Si un couple de forces  $\vec{\Gamma}$  s'exerce sur le corps en rotation, l'Éq. (1.15) s'écrit

$$\frac{d\vec{H}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{H} = \vec{\Gamma}. \quad (1.16)$$

### 1.1.3 Référentiels et rotation

Une présentation plus rigoureuse et complète des systèmes de référence sera faite au 2.1.1. Les lignes suivantes ont uniquement vocation à clarifier la distinction entre deux points de vue complémentaires.

Pour étudier la rotation d'une planète quelconque en orbite autour d'une étoile, plaçons-nous d'abord dans un référentiel sans rotation. Nous y définissons un système  $(O\bar{x}\bar{y}\bar{z})$  dont l'origine est le centre des masses de la planète et comportant un axe  $(O\bar{z})$  perpendiculaire au plan de l'orbite. De même, nous définissons  $(Oxyz)$  qui tourne avec la planète et dont l'axe  $(Oz)$  se confond avec l'axe de rotation. Définis ainsi, ces deux systèmes sont ceux décrits à la Section 1.1.1, dans le cas d'une planète en rotation. Les angles d'Euler  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  décrivent donc l'orientation de la planète dans l'espace, du point de vue d'un observateur attaché à  $(O\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ . L'angle  $\psi$  varie continuellement puisqu'il correspond à la rotation propre de la planète ; sa dérivée, ou taux de variation,  $\dot{\psi}$  décrit le phénomène familier de rotation tel qu'on l'entend généralement. Les angles  $\phi$

et  $\theta$  donnent quant à eux la direction de l'axe de rotation. Ils sont constants en l'absence de forces perturbatrices mais peuvent varier au cours du temps sous l'action de couple de forces exercées par d'autres corps, étoile(s) ou planète(s) notamment. En adoptant ce point de vue astronomique, nous discuterons brièvement de la rotation propre au 1.2.1, puis de la précession et de la nutation au 1.2.2.

Alternativement à l'approche précédente, le système de référence  $(O\bar{x}\bar{y}\bar{z})$  dit « fixe » peut être attaché à la planète, avec  $(O\bar{z})$  dirigé par exemple suivant l'axe de figure, qui est l'axe principal de plus grande inertie. Le système en rotation  $(Oxyz)$  est alors orienté par rapport à la planète, avec  $(Oz)$  suivant son axe de rotation moyen sur un jour (cette notion sera précisée au 2.1.1). Ce choix permet d'étudier non pas les mouvements de rotation de la planète dans l'espace mais ceux touchant son axe de rotation relativement à elle-même. Ces mouvements de l'axe de rotation sont alors décrits par les deux angles d'Euler  $\theta$  et  $\psi$  et se traduisent, pour un observateur sur la planète, dans  $(O\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ , par un mouvement des pôles de rotation<sup>4</sup> à la surface. Ce point de vue géophysique est bien sûr celui qui nous intéressera dans ce travail ; nous le préciserons dès la Section 1.3.

Les deux paragraphes précédents ne doivent pas donner l'impression qu'un mouvement de rotation n'est chaque fois observable que dans un seul système de référence. En particulier, les variations de la vitesse de rotation  $\omega$  sont les mêmes dans tous ces systèmes puisque la norme d'un vecteur est invariante par rotation. Ce qui importe est de savoir d'où les observations des phénomènes sont faites – en l'occurrence, toujours depuis la Terre dans notre cas, à quoi ces phénomènes sont dus, et de quel point de vue leur interprétation est la plus naturelle. Nous reviendrons plus formellement sur les notions exposées dans cette section au 2.2.3.

## 1.2 Point de vue astronomique

### 1.2.1 Rotation journalière des planètes

La rotation diurne de la Terre sur elle-même est le seul mouvement de rotation dont nous pouvons faire quotidiennement l'expérience, sans même avoir besoin du moindre d'instrument d'observation. Elle se traduit par l'entraînement apparent heure après heure, d'est en ouest dans le ciel, du Soleil, de la Lune, des planètes et des étoiles ou autres astres lointains. Bien entendu, cette affirmation présuppose que l'observateur ait connaissance *a priori* de la rotation terrestre, sans quoi son interprétation pourrait rejoindre celle de nos ancêtres qui imaginaient une sphère céleste tournant autour de la Terre immobile. Néanmoins, la connaissance de quelques lois physiques et une observation plus attentive permet tout de même d'observer directement la rotation terrestre, au travers notamment de la circulation atmosphérique à grande échelle ou plus expéri-

4. les deux points donnés par l'intersection de l'axe de rotation avec la surface

mentalement à l'aide d'un pendule de Foucault.

S'agissant de la rotation de la Terre ou plus généralement des planètes, la question la plus élémentaire que l'on puisse se poser est probablement : pourquoi une planète tourne-t-elle ? Si on admet que la rotation actuelle des planètes est liée aux processus mis en jeu lorsqu'elles se sont formées, la question précédente revient à se demander pourquoi les planètes étaient en rotation lors de leur formation. Au premier abord, la réponse à cette question semble aisée puisque les scénarios de formation planétaire impliquent l'accrétion de planétésimaux, eux-mêmes formés de corps plus petits, tous en orbite plus ou moins régulière autour d'une jeune étoile. Statistiquement, l'assemblage de ces corps de masses, vitesses et origines différentes ne peut que résulter en un corps plus massif dont le moment cinétique est non nul. Ajoutons à cela que les impacts ultérieurs, en partie aléatoires, sont autant de contributions supplémentaires à la rotation des planètes. Cependant, cette explication ne peut être totalement satisfaisante. En effet, il est notoire que la grande majorité des planètes du Système solaire présentent un sens de rotation identique, dit direct (rotation d'est en ouest, on rencontre aussi l'anglicisme *prograde*), qui est à la fois celui de leur révolution autour du Soleil et de la rotation de ce dernier sur lui-même. Seules Vénus et Uranus font exception à cette règle, avec leur rotation de sens opposé (*rétrograde*), mais elles aussi pourraient avoir initialement été en rotation directe. En ce qui concerne Vénus, son sens de rotation pourrait être dû à un double impact (Alemi et Stevenson 2006). Pour Uranus, l'hypothèse d'un impact ayant basculé la planète est également privilégiée<sup>5</sup> depuis les travaux de Safronov (1966), hypothèse complétée par des travaux récents visant à expliquer l'orbite des satellites uraniens (Morbidelli et al. 2012). Les modèles de formation du Système solaire, dont le célèbre « modèle de Nice » (Tsiganis et al. 2005 ; Gomes et al. 2005), donnent une explication simple au sens de *révolution* commun à toutes les planètes : le nuage de gaz qui s'est effondré sur lui-même au début de la formation de notre système planétaire présentait une rotation initiale qui a été conservée par les particules en accrétion. En revanche, l'explication du sens de *rotation* des planètes nécessite une analyse plus spécifique de la trajectoire des particules aux alentours des embryons planétaires. Le lecteur intéressé par ce sujet trouvera plus de détails dans Giuli (1968b) et Giuli (1968a) ou Harris (1977) pour une approche plus analytique. Plus récemment, Lissauer et Kary (1991) ont présenté un traitement plus complet en rappelant que « l'origine de la rotation planétaire est une des questions les plus fondamentales de la cosmogonie [qui] s'est également avérée être l'une des plus difficiles »<sup>6</sup>.

---

5. Un scénario alternatif s'appuyant sur la présence d'un satellite très massif a aussi été proposé (Boué et Laskar 2010).

6. "The origin of planetary rotation is one of the most fundamental questions of cosmogony [which] has also proven to be one of the most difficult to answer."



### 1.2.2 Précession et nutation

Deux autres mouvements de rotation peuvent affecter les planètes. En complément de la rotation propre discutée ci-dessus, la précession et la nutation définissent la *direction* de l'axe de rotation. En revanche, contrairement à la rotation propre, les angles de précession et de nutation ne peuvent varier au cours du temps que pour des corps non sphériques soumis à des moments de forces extérieures. Dans le cas de la Terre, sur laquelle nous nous concentrerons exclusivement désormais, c'est essentiellement l'action conjuguée de la Lune et du Soleil sur le bourrelet équatorial qui induit une variation des angle d'Euler  $\phi$  et  $\theta$ . Cet effet n'existerait pas non plus si le plan équatorial était confondu avec le plan dans lequel se trouve les corps perturbateurs (plan de l'écliptique) mais la Terre a une inclinaison non nulle par rapport à la perpendiculaire à l'écliptique, actuellement proche de  $23^{\circ}26'14''$ .

La précession des équinoxes est le phénomène de rotation correspondant à une variation progressive de l'angle  $\phi$  et qui se traduit, pour un observateur terrien, par un mouvement circulaire du pôle de rotation céleste, point d'intersection de l'axe de rotation avec la sphère céleste centrée sur la Terre. Actuellement, côté Nord, le pôle de rotation est proche de l'étoile Alpha Ursae Minoris, nommée pour cette raison Étoile polaire. Il s'en éloignera progressivement avant d'y revenir dans un mouvement circulaire après 25 800 ans environ, à la vitesse actuelle  $\dot{\phi}$  proche de 50 arcsec/an. Cette période de précession dépend de l'attraction des corps massifs alentours ainsi que de l'inclinaison de la Terre, de sa vitesse de rotation et de son aplatissement dynamique<sup>7</sup>  $H$ , fonction des moments d'inertie principaux donnés à l'Éq. (1.14) :

$$H = \frac{C - A}{C}. \quad (1.17)$$

Le nom du grec Hipparque est historiquement associé à la découverte de la précession des équinoxes au deuxième siècle avant notre ère. Certains auteurs ont suggéré que des observations de ce mouvement avaient été faites antérieurement par d'autres civilisations (les babyloniens ou les mayas sont souvent cités), mais, à ce jour, ces théories n'ont pas convaincu (Neugebauer 1950 ; Milbrath 2007). En outre, l'observation du phénomène n'implique pas sa compréhension. Quoiqu'il en soit, la précession est connue de longue date et la détermination exacte du contexte de sa découverte revient aux historiens et archéoastronomes.

À la précession des équinoxes, se superpose un autre mouvement de moindre amplitude : la nutation. Tout comme la précession, la nutation est essentiellement due à l'action conjuguée de la Lune et du Soleil sur la Terre aplatie en rotation. Sous le terme de « nutation », on distingue en fait deux types de mouvements. Les oscillations parallèles à l'écliptique sont les nutations en longitude, conventionnellement notées  $\Delta\psi$  ; celles dans une direction perpendiculaire sont les nutations en obliquité, notées  $\Delta\varepsilon$ . La composante dominante est liée à la

7. aussi appelé judicieusement *constante de précession*

précession des nœuds de l'orbite lunaire (régression vers l'ouest du nœud ascendant) suivant une période draconitique<sup>8</sup> de 18.6 ans. Son amplitude atteint 9.2 et 17.2 secondes d'arc en obliquité et longitude respectivement (Dehant 1990), soit moins d'un centième du diamètre apparent de la pleine Lune. Les autres contributions (annuelles, bi-annuelles, bi-mensuelles, etc.) sont au moins un ordre de grandeur plus faibles. Au total,  $\Delta\psi$  et  $\Delta\varepsilon$  n'excèdent donc pas  $\pm 19$  et  $\pm 10$  arcsecondes respectivement (Dehant et Mathews 2007).

La précession-nutation est donc un phénomène d'origine astronomique qui se traduit par un changement d'orientation de la Terre dans l'espace. Pour cette raison, on le nomme également *mouvement céleste du pôle*. Cependant, comme indiqué à la fin de la section 1.1.3, la nutation se manifeste aussi dans le repère terrestre. Vue depuis la Terre, son amplitude est trois ordres de grandeur plus petits que les oscillations de la planète dans l'espace : autour de 20 mas (milliarcsecondes), soit moins d'un mètre de déplacement du pôle instantané de rotation en surface. On notera que les amplitudes données ici dépendent d'un grand nombre de paramètres géophysiques, comme illustré par les travaux de Mathews et al. (2002). Ceci explique notamment l'intérêt de l'étude des nutations en géophysique.

## 1.3 Point de vue géophysique

### 1.3.1 Mouvement du pôle

Par définition, le *mouvement du pôle*<sup>9</sup> désigne les déplacements à la surface de la Terre du pôle de rotation, à l'exclusion de ses mouvements dans la bande de fréquence rétrograde diurne (entre  $-1.5$  et  $-0.5$  cycle par jour sidéral). Cette dernière exigence est liée au fait qu'un mouvement rétrograde diurne dans le référentiel terrestre se traduit par un mouvement lent, à longue période, dans un référentiel céleste. Dans ce cas, on préfère alors parler de nutation *stricto sensu* (voir la section précédente). De façon équivalente, le mouvement du pôle correspond donc au déplacement de l'axe de rotation à des périodes inférieures à 2 jours (entre  $-0.5$  et  $0.5$  cycle par jour) dans le référentiel céleste.

Le mouvement du pôle peut être séparé en une composante séculaire aperiodique et un ensemble de composantes périodiques. La dérive séculaire du pôle induit un déplacement progressif de celui-ci au cours des siècles et résulte vraisemblablement de l'ajustement glacio-isostatique dans les régions autrefois couvertes par les glaces, au Pléistocène supérieur (Mitrovica et al. 2001). Après la dernière glaciation, la fonte des glaciers scandinaves et nord-américains essentiellement a induit un rebond visco-élastique de la lithosphère qui se manifeste par la remontée de matériaux denses jadis enfouis en profondeur par le poids de

---

8. Ce terme fait référence au lien symbolique qui existait jadis entre les nœuds orbitaux lunaires et le dragon. Le mois lunaire draconitique, séparant deux passages successifs de la Lune au même nœud, a la même étymologie.

9. *polar motion* en anglais

la glace. C'est cette déformation associée à une redistribution de masses qui peut entraîner une dérive du pôle. Sa vitesse est de l'ordre de 3 mas/an (Gross 2007, p. 273) au cours du xx<sup>e</sup> siècle et son mouvement le rapproche du Groenland.

Les composantes périodiques sont de deux natures : forcées ou libres. Cette distinction part du principe qu'on distingue les enveloppes internes de la Terre (parties solides et noyau liquide) de ses enveloppes externes, fluides. Les premières constituent le système terrestre étudié proprement dit, les secondes sont généralement considérées comme des sources de forçage externes. Concernant les mouvements libres du pôle, le seul représentant connu n'affectant que le manteau terrestre est le mouvement de Chandler, au cœur de ce travail, que je discuterai donc à part, au 1.3.2. Les autres mouvements libres existants sont liés aux autres couches terrestres et discutés au 1.3.4. Les mouvements forcés le sont essentiellement par les couches fluides à la surface de la Terre, à savoir l'hydrosphère – les océans en majeure partie – et l'atmosphère, ces couches étant elles-mêmes animées de divers mouvements, saisonniers notamment. Ces mouvements sont eux mêmes largement dus au rayonnement solaire et à l'attraction de la Lune et du Soleil : le forçage par les couches externes a donc lui-même une origine astronomique.

Le terme dominant dans le mouvement du pôle est annuel avec une amplitude de l'ordre de 100 mas<sup>10</sup>. À celui-ci s'ajoute une série d'autres composantes de moindre amplitude, parmi lesquelles les composantes diurnes et semi-diurnes (marées océaniques), à 10 et 20 jours (mode atmosphérique et son interaction avec l'océan), 13.6 jours (marée Mf), et jusqu'à des périodes pluriannuelles (Fernández et al. 2007 ; Bizouard et Seoane 2010). Au cours des dernières décennies, une des activités de recherche importante liée à ces oscillations forcées est le calcul des *fonctions d'excitation* qui correspondent au terme de forçage dans les équations décrivant le mouvement du pôle. Ces travaux ont connu des raffinements successifs, au fur et à mesure que la contribution de nouveaux processus géophysiques étaient ajoutée dans l'estimation des fonctions d'excitation (voir Gross (2007) pour de nombreuses références à ce sujet).

Une dernière oscillation périodique que je n'ai pas encore discutée est l'oscillation de Markowitz, d'après le nom de son découvreur (Markowitz 1960). Quoique initialement débattue, son existence semble avoir été confirmée dès le début des années 1980 (Wilson et Vicente 1980 ; Dickman 1981), avec une période proche de 30 ans et une amplitude de quelques dizaines de milliarcsecondes. Bien que plusieurs auteurs aient tenté d'expliquer le phénomène (voir Poma (2000) pour une revue de quelques suggestions), aucune explication définitive n'a été donnée à ce jour. De façon plus générale, il n'est pas exclu que d'autres oscillations à encore plus longues périodes existent dans le mouvement du pôle (Vondrák 1999 ; Miller et Malkin 2011) mais pour les observer, nous sommes toujours limités par la longueur et la qualité des séries temporelles<sup>11</sup>.

10. 1 arcseconde équivaut à un déplacement du pôle de 31 mètres, soit 3 cm/mas

11. Bien que les plus longues séries couvrent près de 170 ans (!), les mesures les plus précises datent au plus d'il y a une cinquantaine d'années.

### 1.3.2 Le mouvement de Chandler

Ainsi que je l'indiquais précédemment, parmi les mouvements libres du pôle, le seul lié au manteau, et le premier qui fut observé, est le *mouvement de Chandler*, mode propre de rotation de la Terre. Par souci de brièveté, j'utiliserai parfois l'acronyme CW, d'après l'anglais *Chandler Wobble*. Ce mouvement fut nommé d'après l'astronome américain Seth Carlo Chandler, Jr. qui l'observa pour la première fois (Chandler 1891) et le décrivit comme « une révolution du pôle terrestre à une période de 427 jours, d'ouest en est, avec un rayon de trente pieds [9 mètres], mesuré à la surface de la Terre<sup>12</sup> ». Cette description est remarquablement proche des estimations actuelles, sachant qu'on sait aujourd'hui que (1) l'amplitude du mouvement de Chandler varie au cours du temps (Bizouard et al. 2011) et que (2) il semble se caractériser par plusieurs pics en domaine spectral (Guo et al. 2005 ; Pan 2012), ce qui exclurait dans ce cas la possibilité d'une détermination unique et arbitrairement précise de sa période. La valeur couramment admise est toutefois de 432 jours (Vicente et Wilson 1997 ; Gross 2007).

Le mouvement de Chandler est la traduction terrestre d'un mouvement libre existant pour tout corps en rotation dont la distribution des masses ne suit pas une symétrie parfaitement sphérique, comme nous le verrons à la Section 2.3. Cette oscillation théorique, nommée *mouvement eulérien*<sup>13</sup>, aurait une période de 304 jours pour une Terre rigide, bien inférieure à la période de Chandler. La différence s'explique par la complexité de la Terre réelle qui est déformable, anélastique même, dotée d'un noyau fluide et d'une graine solide, ainsi que d'océans et d'une atmosphère qui interagissent avec la partie solide. Tous ces éléments induisent une fréquence propre différente de la fréquence eulérienne et sont également à l'origine d'une atténuation progressive de l'oscillation. Le mouvement chandlérien peut donc être perçu en première approximation comme la réponse d'un oscillateur harmonique amorti (la Terre réelle en rotation), continuellement soumis à une excitation d'origine externe. En l'absence de dissipation, l'impulsion initiale et un certain nombre de paramètres géophysiques devraient totalement définir les caractéristiques de ce mode propre de rotation mais la réalité est beaucoup plus complexe.

L'anélasticité du manteau terrestre ou les processus dissipatifs aux diverses interfaces entre les enveloppes terrestres induisant une atténuation progressive du mouvement de Chandler, celui-ci doit donc être régulièrement entretenu. Bien que ces hypothèses soient toujours débattues, il est probable que son excitation provienne essentiellement des océans et de l'atmosphère (Wahr 1982 ; Wahr 1983 ; Brzeziński et Nastula 2002 ; Gross 2000 ; Aoyama et al. 2003) ainsi que, peut-être, des tremblements de terre (Smylie et al. 2015). Récemment, Zotov et Bizouard (2012) ont suggéré une modulation de l'excitation de Chandler

12. "a revolution of the earth's pole in a period of 427 days, from west to east, with a radius of thirty feet, measured at the earth's surface."

13. On parle généralement de *nutation eulérienne* mais ce terme ne respecte pas la distinction donnée au 1.3.1 entre *nutations* forcées et mouvement du pôle.

par la marée lunaire à 18.6 ans, l'énergie étant essentiellement transférée *via* les océans. Outre les modulations d'amplitude déjà citées plus haut, les oscillations chandleriennes présentent aussi des sauts de phase (Dickman 1981 ; Malkin et Miller 2010 ; Miller et Malkin 2011), dont l'origine pourrait être les jerks géomagnétiques (Bellanger et al. 2001 ; Gibert et al. 1998 ; Gibert et Le Mouél 2008), s'ils ne sont pas simplement des artefacts liés à l'annulation temporaire puis la reprise de l'oscillation (Chao et Chung 2012).

### 1.3.3 Longueur du jour

Je parlerai peu des variations de la longueur du jour dans ce travail mais, par souci d'exhaustivité et de par l'importance des études qui lui sont consacrées, en voici tout de même quelques mots. De nombreux détails et références sont donnés par Gross (2007), pp. 258–271.

Au premier ordre, la rotation de la Terre semble d'une grande régularité. Notre planète effectue ainsi une rotation complète sur elle-même en près de 86 164.1 secondes, soit 23 heures 56 minutes et 4.1 secondes environ. Cette période, le *jour sidéral*, est directement déduite de la vitesse nominale moyenne de rotation terrestre  $\Omega_0 = 7.292\,115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$  (Petit et Luzum 2010). À l'usage, on se réfère plutôt au *jour solaire* moyen, d'une période nominale de 86 400 secondes, pour exprimer les variations de la vitesse de rotation terrestre. Cette période varie suffisamment peu au cours des ans, des siècles, et même des millénaires pour ne pas donner lieu à des manifestations spectaculaires à l'échelle d'une vie humaine. Cependant, à l'instar du mouvement du pôle, la vitesse de rotation de la Terre présente des variations séculaires et périodiques mesurables. On désigne par l'acronyme anglais LOD (*Length of the day*) la longueur du jour et par  $\Delta\text{LOD}$  sa variation. De façon générale,  $\Delta\text{LOD}$  ne dépasse pas plus ou moins quelques millisecondes sur une durée de plusieurs décennies.

Gross (2007) donne les composantes principales des variations du LOD. La plus notable à longue période est une variation linéaire de l'ordre de +1.8 ms par siècle dont l'origine est notamment la dissipation par friction associée aux marées, ainsi que le rebond post-glaciaire (voir 9.1.2) dont l'effet est opposé à celui des marées. De nombreux autres processus géophysiques impactent également à long terme la vitesse de rotation, parmi lesquels les mouvements des matériaux mantelliques ou les tremblements de terre majeurs. À ce ralentissement séculaire de la rotation s'ajoutent des variations décennales, de plusieurs millisecondes d'amplitude, causées essentiellement par les couplages entre le noyau et le manteau (voir aussi 1.3.4). La circulation atmosphérique est la cause de variations inter-annuelles (quelques millisecondes d'amplitude également) et d'oscillations saisonnières plus régulières induisant un  $\Delta\text{LOD}$  de l'ordre de la demi-milliseconde. L'atmosphère ne peut toutefois pas être à l'origine des variations décennales car son effet sur le LOD serait trop faible. On peut s'en convaincre en constatant que même si la super-rotation<sup>14</sup> de l'atmosphère stoppait totalement,

14. L'atmosphère terrestre présente une rotation plus rapide que la Terre solide en raison du

l'effet sur le LOD demeurerait insuffisante pour expliquer ces variations (Gross 2007). Outre le ralentissement séculaire, les marées luni-solaires induisent aussi des variations périodiques de la longueur du jour, inférieures à la milliseconde. Enfin, de multiples autres phénomènes géophysiques, à diverses fréquences, entraînent des variations de plus faibles amplitudes.

### 1.3.4 Noyau liquide et graine

Pour clore cette section, il reste à aborder l'importante question de l'influence du noyau liquide et de la graine solide sur la rotation terrestre. Jusqu'à présent, j'ai implicitement considéré comme un corps unique l'ensemble des enveloppes terrestres. En réalité, il convient de distinguer les mouvements de rotation affectant le manteau (et la croûte, qui lui est solidaire<sup>15</sup>) de ceux propres au noyau ou à la graine. De façon plus exacte, on doit donc comprendre la Terre comme un système de trois enveloppes (l'hydrosphère et l'atmosphère, enveloppes externes, sont considérées à part, comme des sources d'excitation extérieures) dont les rotations sont certes en partie couplées mais tout de même distinctes. Bien que le noyau fluide y soit inclus, l'ensemble de ces trois couches est couramment désigné sous l'appellation « Terre solide », par opposition aux enveloppes externes.

#### Noyau liquide

Seule enveloppe interne liquide, le noyau occupe un peu moins de 1/6 du volume terrestre, soit 5 fois moins que le volume mantellique mais sa densité deux à trois fois plus élevée que celle du manteau lui confère 1/3 de la masse totale. Son impact sur la rotation du manteau dépend de nombreux paramètres, dont la forme générale de l'interface noyau-manteau (la CMB, pour *Core-Mantle Boundary*), sa topographie, les couplages visqueux ou électromagnétique entre les deux enveloppes, ainsi que de la fréquence. À longue période, incluant la période de Chandler, les oscillations du pôle de rotation du noyau sont conditionnées par la forme ellipsoïdale de la CMB (Smith 1977). Dans ce cas, l'influence du noyau se manifeste donc essentiellement par une modification des moments d'inertie relativement à une Terre homogène, les moments d'inertie principaux du manteau étant diminués d'un facteur 8/9. L'inclusion du noyau fluide induit ainsi une diminution de l'ordre de 1/9 (50 jours) de la période de Chandler par rapport à un modèle de Terre élastique homogène (Smith et Dahlen 1981).

Bien que je ne m'intéresserai pas à cette question dans ce travail, la présence du noyau et l'ellipticité de la CMB induisent l'existence d'un nouveau mode de rotation. Dans un référentiel terrestre, ce mouvement rétrograde quasi-journalier (période légèrement inférieure à un jour) est connu sous le sigle

---

gradient de température entre les pôles et l'équateur (Volland 1995).

15. On ne discutera pas ici des mouvements tectoniques qui intéressent d'autres échelles de temps.

NDFW, pour *Nearly Diurnal Free Wobble* ; son pendant dans un référentiel céleste est la (R)FCN, pour *(Retrograde) Free Core Nutation*, à une période de 430 jours<sup>16</sup> et atteignant une amplitude de l'ordre de  $200 \mu\text{as}$  (Mathews et al. 2002 ; Lambert et Dehant 2007 ; Rosat et Lambert 2009 ; Chao et Hsieh 2015). Ce mode de rotation du noyau revêt une importance toute particulière dans l'étude des mouvements de nutation forcés en raison des résonances qu'il provoque aux fréquences voisines de la sienne (Dehant et Mathews 2007).

## Graine

La graine occupe moins de 1 % du volume de la Terre pour 1/60 de sa masse mais son impact n'est toutefois pas négligeable. Sa présence fait apparaître deux modes de rotation supplémentaires. La PFCN, pour *Prograde Free Core Nutation*, ou FICN, pour *Free Inner Core Nutation*, correspond à une oscillation de période assez mal contrainte sur le plan théorique et n'a pas encore été formellement observée, bien que son amplitude attendue, de l'ordre de quelques dizaines de microarcsecondes, soit au niveau de précision des observations actuelles (voir Lambert et al. (2012) pour une des dernières tentatives de détection). Selon les modèles utilisés, sa période pourrait aller de plusieurs centaines à plus de mille jours.

Le second mode de la graine est l'analogue du mouvement de Chandler, l'ICW, pour *Inner Core Wobble*. Sa période est estimée à 2400 jours (Mathews et al. 2002) et lui non plus n'a pas encore été clairement observé. Ses effets gravimétriques sont bien inférieurs aux niveaux actuels de bruit dans les données et son amplitude dans le mouvement du pôle ne dépasserait pas quelques milliarcsecondes (Guo 2005).

---

16. Des travaux récents ont suggéré une possible variation (de l'ordre du jour) pour la période de la FCN mais d'autres études seront nécessaires pour confirmer ce fait et en expliquer l'origine (Cui et al. 2014).

# Physique de la rotation de la Terre et rhéologie

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Référentiels spatio-temporels</b>	<b>23</b>
2.1.1	Systèmes de référence	24
2.1.2	Le temps	26
<b>2.2</b>	<b>Formalisme de la rotation de la Terre</b>	<b>27</b>
2.2.1	Changement de repère	28
2.2.2	Paramètres de rotation de la Terre	29
2.2.3	Équation cinématique	31
<b>2.3</b>	<b>Approche dynamique et corps déformable</b>	<b>33</b>
2.3.1	Équations d'Euler-Liouville	33
2.3.2	Terre déformable et nombres de Love	36
2.3.3	Dissipation et atténuation	38
<b>2.4</b>	<b>Rhéologie</b>	<b>39</b>
2.4.1	Bref historique	39
2.4.2	Classes rhéologiques et anélasticité	40
2.4.3	Principe de correspondance	42
2.4.4	Atténuation, facteur de qualité intrinsèque, déphasage	43

---

*Pour m'alléger l'esprit, je fis le tour du piquet, un tour du monde en deux secondes, comme il y a quatre ans au pôle Nord.*

Jean-Louis Étienne, *Persévérer*

## 2.1 Référentiels spatio-temporels

Les concepts abordés dans les sections 2.1.1 et 2.1.2 sont indispensables à une bonne compréhension des questions liées à la rotation de la Terre. Néanmoins, ils ne sont ici que brièvement introduits et le lecteur désireux d'en apprendre davantage pourra consulter avec profit Kaplan (2005) ou le premier chapitre de Bizouard (2014).



### 2.1.1 Systèmes de référence

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes tantôt placés dans un référentiel céleste, tantôt dans un référentiel terrestre. La définition des systèmes de référence utilisés en géophysique devient nécessaire dès qu'on s'intéresse aux mouvements qui animent la Terre. On désigne sous le terme de « système de référence » la définition théorique d'un cadre de référence, et sous le terme de « repère » une de ses réalisations pratiques ou, en l'absence de précision, sa réalisation conventionnelle internationale. Dans ce qui suit, je n'utiliserai que les appellations officielles en anglais pour les différents systèmes et repères, suivant un usage largement répandu. Sur les systèmes de référence, on pourra se reporter plus spécifiquement à IERS (2016b) et Astronomical Applications Department of the U.S. Naval Observatory (2013), en plus des sources données ci-dessus.

Un système de référence est toujours donné par une origine et deux directions orthogonales dans l'espace, définissant deux axes<sup>1</sup>. Si la direction des axes est définie à l'aide de points de référence suffisamment lointains pour apparaître fixes sur la voûte céleste, le système de référence est alors qualifié de *céleste*. Ces objets lointains<sup>2</sup> servant à définir les systèmes de référence célestes sont des radio-sources extragalactiques.

L'*International Celestial Reference System* (ICRS), adopté en 1997 par l'Union Astronomique Internationale (UAI) lors de sa 23<sup>e</sup> Assemblée générale est le système de référence céleste standard actuel. Il est en usage depuis le 1<sup>er</sup> janvier 1998 et a succédé au FK5. Son origine est au barycentre du Système solaire, conformément à la Relativité générale. Son pôle (axe  $z$ ) est défini par des modèles conventionnels de précession-nutation de l'UAI et se situe approximativement dans la direction de l'étoile polaire à notre époque. L'*origine des ascensions droites*, autrement dit l'axe  $x$ , a été défini en fixant l'ascension droite d'un objet céleste de référence à une date donnée<sup>3</sup>; ce second axe est dans la direction du point vernal, qui est la position du Soleil vu depuis la Terre à l'équinoxe de printemps. En 2000 et 2006, l'UAI a également défini le *Barycentric Celestial Reference System* (BCRS) qui se confond avec l'ICRS en terme d'orientation et d'origine mais définit en outre une métrique relativiste pour le système de coordonnées. À ce titre, et en anticipant quelque peu sur la section suivante, on lui associe une échelle de temps propre, le *Temps coordonné barycentrique* (TCB).

Dérivés du BCRS, le *Geocentric Celestial Reference System* est attaché au géocentre plutôt qu'au barycentre du Système solaire; son échelle de temps est le *Temps coordonné géocentrique* (TCG). Il est destiné à l'étude des objets proches de la Terre, tels les satellites artificiels, et on y référence certaines mesures géo-

1. Le troisième axe est orthogonal aux deux premiers et son orientation est choisie telle que les trois axes forment un système orienté dans le sens direct.

2. Bien entendu, il n'existe pas d'objets parfaitement fixes sur la voûte céleste, mais leur mouvement apparent négligeable autorise à les considérer comme immobiles.

3. Une galaxie de Seyfert de type 1 (galaxie active), 3C 273, à l'époque J2000.0 (voir les explications données au 2.1.2).

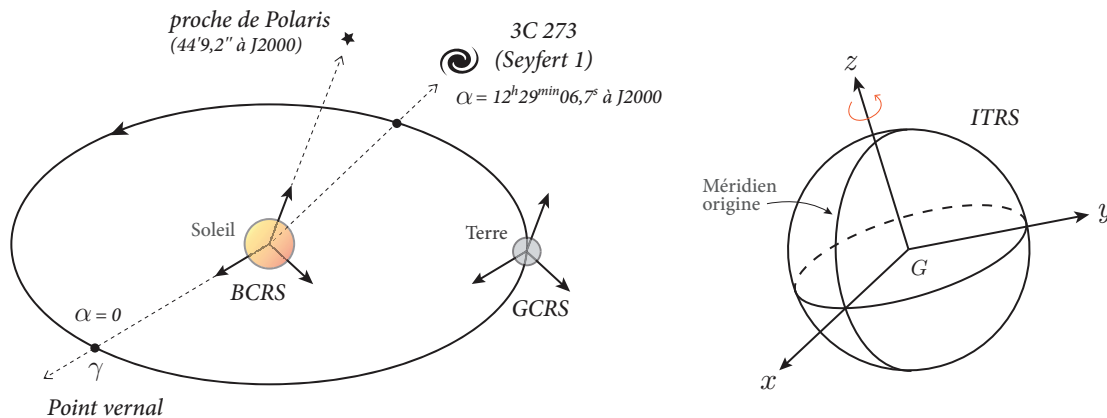


FIGURE 2.1 – Les trois principaux systèmes de référence. À gauche, les systèmes de référence célestes, non rotatifs, sont orientés de façons identiques : conventionnellement, l’axe  $x$  pointe dans une direction (vers le point vernal) définie à partir du quasar 3C 273, et l’axe  $z$  pointe à proximité de Polaris, l’Étoile polaire, à l’époque J2000. En revanche, les origines de ces systèmes diffèrent : le barycentre du système solaire pour l’ICRS et le géocentre pour le GCRS. À droite, l’ITRS est en co-rotation diurne avec la Terre et a pour origine son centre de masse (voir Petit et Luzum (2010) pour sa description détaillée).

désiques. Les mouvements de l’axe de rotation de la Terre dans l’espace tels que décrits au 1.2 peuvent également être donnés dans ce système. À l’inverse, le BCRS est plus approprié pour les éphémérides du Système solaire et le positionnement des objets plus lointains. Dans toute la suite de ce travail, le système de référence céleste auquel on se référera sera l’ICRS ou le BCRS. De même, le terme « repère céleste » désignera l’*International Celestial Reference Frame* (ICRF), la réalisation pratique de l’ICRS, l’ICRF2, adopté en 2009.

Tous ces systèmes de référence ont en commun une orientation conventionnelle et théoriquement invariable ; ils ne suivent donc pas la rotation terrestre au cours du temps. Un système de référence en co-rotation diurne avec la Terre définit un autre type de système de référence : les systèmes de référence *terrestres*. Parmi eux, le standard actuel est l’*International Terrestrial Reference System* (ITRS), défini lors de la  $xx^e$  Assemblée Générale de l’Union géodésique et géophysique internationale (UGGI) en 1991 et décrit en détails par Petit et Luzum (2010). Sa réalisation, l’ITRF, est obtenue en déterminant la position et la vitesse d’un ensemble de stations à la surface de la Terre au moyen de diverses techniques (VLBI, GNSS, SLR, LLR et DORIS)<sup>4</sup>. La dernière version est l’ITRF2014, calculé par l’Institut Géographique National (IGN).

L’étude de la rotation de la Terre au moyen d’observations astronomiques effectuées depuis sa surface requiert une méthode pour passer d’un système de référence céleste à terrestre, et inversement. En particulier, les mouvements

4. Voir la page des acronymes (p. 178).

du pôle présentés au 1.3 sont donnés dans l'ITRS, bien qu'ils soient mesurés par des techniques d'observation astronomiques. Nous verrons au 2.2.2 la procédure pour passer de l'ICRS à l'ITRS mais avant cela, ajoutons quelques mots sur les échelles de temps, indissociables des systèmes de référence.

### 2.1.2 Le temps

La donnée d'une origine et d'un système d'axes permet de décrire la position et l'orientation dans l'espace de tout objet physique. Pour décrire en outre son *évolution*, c'est-à-dire ajouter une dimension temporelle, il est nécessaire de définir également une *échelle de temps*. On sait d'ailleurs depuis les travaux d'Albert Einstein et l'avènement de la Relativité générale que l'espace et le temps sont indissociables, et qu'il convient donc d'intégrer la dimension temporelle dans la définition de tout système de référence, comme nous l'avons vu avec les couples BCRS/TCB et GCRS/TCG. Sans aller jusqu'à aborder ces considérations relativistes, voyons quelles sont les échelles de temps utilisées aujourd'hui en astronomie et dans l'étude de la rotation de la Terre plus particulièrement.

Une échelle de temps se caractérise par une unité de temps et un temps initial définissant l'origine de l'échelle. L'unité de temps est définie en relation avec un phénomène physique périodique clairement identifié, à l'instar de la seconde<sup>5</sup> du Système International (SI), ou du jour (sidéral ou solaire), donné par la rotation terrestre. La seconde SI est à la base d'un ensemble d'échelles de temps diverses, parmi lesquelles le TCB et le TCG mais aussi le *Temps atomique international* (TAI) dont la seconde est mesurée à la surface du géoïde<sup>6</sup> en rotation. Le *Temps terrestre* (TT) s'écoule en pratique au même rythme que le TAI avec un décalage de 32.184 s ( $TT = TAI + 32.184\text{ s}$ ) qui ne vise qu'à préserver la continuité du TT avec d'anciennes échelles de temps désormais obsolètes<sup>7</sup>. Le TT se déduit du TCG par l'application d'un facteur de conversion fixé traduisant l'écoulement plus lent du temps à la surface terrestre qu'au géocentre. Le TAI étant déterminé expérimentalement à partir d'un ensemble d'horloges atomiques, on peut le concevoir comme une réalisation pratique du TT. L'*Époque standard*, ou Origine des temps, notée J2000.0, est exprimée en TT ; elle est utilisée comme référence en astrométrie<sup>8</sup>. Parmi les échelles de temps basées sur la rotation terrestre, on citera essentiellement le *Temps universel* (TU) et sa version UT1 (*Universal Time 1*), avec laquelle on le confond et qui corrige les effets du mouvement du pôle. L'UAI a redéfini UT1 en 2000 pour en faire explicitement une fonction linéaire de l'*Angle de rotation de la Terre* sur lequel nous reviendrons

5. La seconde SI fut définie en 1967 lors de la 13<sup>e</sup> Conférence générale des poids et mesures par 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 (BIPM 2006). La Relativité générale implique que la seconde SI n'a pas la même durée en fonction du lieu de mesure et de l'observateur.

6. surface équipotentielle coïncidant, loin des continents, avec le niveau moyen des océans

7. tels le *Temps des éphémérides* (TE) ou le *Temps terrestre dynamique* (TTD)

8. J2000.0 est très exactement le 1<sup>er</sup> janvier 2000 à 12h00 TT.

au 2.2.1. Le TU – en particulier sa version UT1 – est déterminé par l’observation VLBI d’objets lointains et n’est donc pas à strictement parler un temps solaire. Il assure cependant la continuité du *Greenwich Mean Time* (GMT) *stricto sensu*, temps basé sur le jour solaire moyen<sup>9</sup> et standard civil international jusqu’en 1971. Une caractéristique fondamentale des échelles de temps basées sur la rotation terrestre est la variabilité de leur unité de mesure. En effet, même dans le cas idéal où on corrigerait l’effet de tous les phénomènes périodiques affectant la rotation de la Terre, il reste toujours un ralentissement séculaire de la rotation, dû à l’interaction entre la Terre et la Lune *via* les marées.

Toutes les échelles fondées sur la seconde SI (TAI, TT, TCG, ...) ont l’avantage d’être dotées d’une unité de temps précise et invariable. En revanche, elles ne sont pas synchronisées à long terme sur le phénomène familier de la rotation terrestre et le mouvement diurne du Soleil dans le ciel. Inversement, les échelles qui s’appuient sur la rotation terrestre sont adaptées à un usage quotidien mais nécessitent des mesures astronomiques permanentes pour être utilisées dans un cadre scientifique exigeant un haut niveau de précision. Ces dernières sont d’ailleurs entachées d’une erreur de quelques millisecondes. En complément de ces deux grandes classes d’échelles de temps, il existe ainsi une échelle hybride, le *Temps universel coordonné*, ou UTC<sup>10</sup>, qui combine l’unité fondamentale qu’est la seconde SI (celle du TAI, sur le géoïde) avec la rotation terrestre (celle de UT1) sur laquelle on le réajuste régulièrement. En pratique, on veille à limiter l’écart entre UT1 et UTC à moins de 0.9 s en insérant une *seconde intercalaire* (*leap second*) dans UTC lorsque cela est nécessaire, quoique cette solution soit aujourd’hui soumise à débat. Initialement, en 1958, UT1 et TAI coïncidaient. Lorsque UTC fut introduit quatorze ans plus tard, UT1 et TAI avaient déjà divergé d’une dizaine de secondes. L’écart initial entre UTC et TAI fut donc fixé à 10 secondes pour respecter la contrainte  $|\text{UT1} - \text{UTC}| \leq 0.9 \text{ s}$  et 26 secondes intercalaires ont ensuite été ajoutées jusqu’à ce jour, de sorte que, début 2016, on a  $\text{TAI} - \text{UTC} = 36 \text{ s}$ . La dernière seconde intercalaire fut ajoutée le 30 juin 2015, qui de fait a duré 86 401 secondes. L’UTC est aujourd’hui *de facto* le standard international du temps civil. Il est notamment diffusé par des stations radio dans le monde entier pour synchroniser les horloges de tout appareil doté d’un récepteur adéquat.

## 2.2 Formalisme de la rotation de la Terre

Revenons maintenant à la rotation de la Terre proprement dite. Le passage de l’ICRS à l’ITRS est typiquement une application des angles d’Euler introduits au 1.1.1. Cette transformation du référentiel céleste au référentiel terrestre n’est rien d’autre que la formalisation des concepts de rotation propre et de précession-nutation exposés au 1.2. Le mouvement du pôle, défini au 1.3,

9. Jour solaire *moyen* et *apparent* différent essentiellement en raison de l’excentricité et de l’obliquité de l’orbite terrestre. Leur différence est donnée par l’*Équation du temps*.

10. sigle franco-anglais

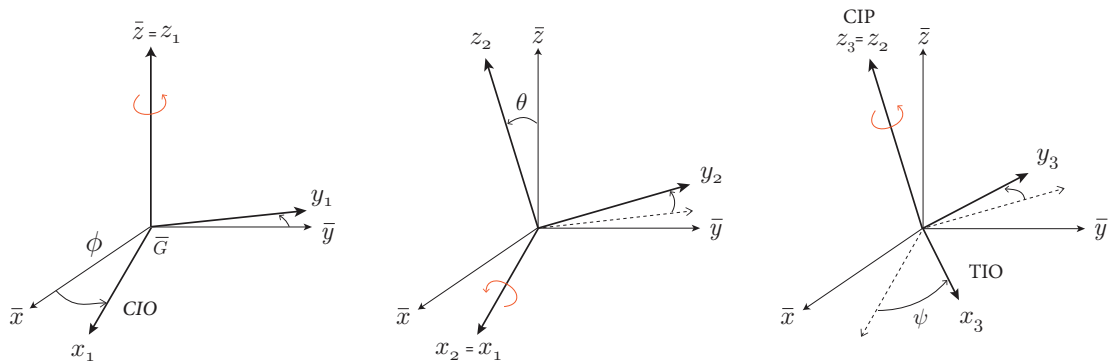


FIGURE 2.2 – De façon analogue à la Fig. 1.1, séquence de rotation permettant de passer du repère céleste, l'ICRS, au repère terrestre, l'ITRS : précession d'angle  $\phi$ , nutation d'angle  $\theta$  et rotation propre d'angle  $\psi$ .

est quant à lui directement décrit dans le repère terrestre. L'ITRS, qui donne notamment les pôles géographiques Nord et Sud, a son axe  $z$  très proche de l'axe de figure, ce dernier étant lui-même différent mais proche de l'axe de rotation.

### 2.2.1 Changement de repère

Pour atteindre une grande précision et avoir une bonne dynamique spatiale et temporelle dans la description de l'orientation du repère terrestre et, en conséquence, dans celle de la position du pôle de rotation instantané, il est ainsi pratique de distinguer les variations connues modélisables des perturbations observées. Les premières sont les composantes principales de la précession, des nutations et de la rotation diurne. Les secondes sont quant à elles regroupées dans cinq paramètres que l'on nomme *paramètres de rotation de la Terre* (PRT). Étant donné que les trois rotations permettant de passer de l'ICRS à l'ITRS ont déjà été décrites qualitativement au 1.2, le but de ce paragraphe est d'en préciser la séquence d'utilisation et d'introduire quelques nouveaux concepts utiles. On notera  $x_i$ ,  $y_i$  et  $z_i$  les axes du  $i$ -ème repère, obtenus après la  $i$ -ème rotation. La Fig. 2.2 illustre la séquence de rotations suivie pour passer du repère céleste au repère terrestre.

La première rotation, la précession d'angle  $\phi$  autour de l'axe  $z$  de l'ICRS et la deuxième rotation, la nutation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $x_1$ , sont composées d'une partie modélisée à longue période ainsi que d'une partie non modélisée incluse dans les PRT et qui est le plus souvent inférieure à la milliarcesseconde. Après la première rotation, l'axe  $x_1$  pointe dans une direction qui définit la CIO (*Celestial Intermediate Origin*), non tournante dans le repère céleste (Capitaine et al. 1986). Après la deuxième rotation, le repère intermédiaire obtenu est appelé *Repère équatorial vrai*. Son axe  $z_2$  pointe dans la direction du CIP (*Celestial Intermediate Pole*), nommé ainsi en raison de sa position intermédiaire entre le pôle céleste de l'ICRS et le pôle Nord géographique. Le CIP est distinct mais toujours très proche de l'axe de rotation terrestre instantané donné par  $\vec{\omega}$  : ils

sont au plus à 20 mas (moins d'un mètre) l'un de l'autre. En comparaison, tous deux peuvent s'éloigner dix fois plus loin de l'axe de figure. La rotation propre, d'angle  $\psi$  autour de l'axe  $z_2 = z_3$ , complète la séquence de rotations menant de l'ICRS à l'ITRS. Cette troisième et dernière rotation transforme l'axe  $x_2$  en  $x_3$  (l'axe  $x$  de l'ITRS) qui pointe vers la TIO (*Terrestrial Intermediate Origin*), non tournante dans le repère terrestre. L'angle de rotation propre étant dominé par la rotation diurne, il augmente d'environ 15 mas/ms ( $360^\circ/24\text{ h}$ ). À l'instar de la précession-nutation, on le scinde donc en une partie prévisible et modélisée et une perturbation intégrée elle-aussi aux PRT. En pratique, la rotation propre est comptée autour du CIP (dans le plan équatorial vrai) puisque son écart avec l'axe de rotation réel est extrêmement faible. Suivant le formalisme précédent, l'angle de rotation propre est donc celui qui sépare la CIO de la TIO et il s'agit en fait de l'*Angle de rotation de la Terre* déjà cité au 2.1.2 dans la définition de UT1.

### 2.2.2 Paramètres de rotation de la Terre

Les paramètres de rotation de la Terre (PRT) sont fournis par l'*International Earth Rotation and Reference Systems Service* (IERS), établi en 1987 par l'UAI et l'UGGI. Outre la publication de données d'observation sur l'orientation et la rotation de la Terre, ainsi que sur l'ICRS/F, l'ITRS/F et les fluides géophysiques, l'IERS est également en charge des Conventions décrivant les modèles et autres standards liés à toutes ces questions (IERS 2016a). Concernant certains PRT, on peut lire indifféremment qu'il s'agit de *coordonnées* ou d'*angles*. Ce n'est pas nécessairement source de confusion si l'on considère que donner deux angles pour positionner un point quelconque depuis le pôle est équivalent, pour des valeurs petites<sup>11</sup>, à donner les coordonnées du même point projeté sur le plan équatorial. Malgré tout, il demeure évidemment nécessaire d'interpréter correctement ces paramètres, surtout lorsqu'on sait que les notations utilisées ( $x$  et  $y$ ) font de cette ambiguïté entre coordonnées et angles une potentielle source d'erreurs. Par exemple, il semblerait logique qu'un angle noté  $x$  fasse référence à une rotation autour de l'axe ( $Ox$ ), c'est-à-dire à la position d'un point le long de l'axe ( $Oy$ ). À l'inverse, si  $x$  désigne une coordonnée suivant l'axe ( $Ox$ ), son équivalent en terme d'angle serait celui d'une rotation directe autour de l'axe ( $Oy$ ) pour atteindre le point en  $x$ . Pire encore avec la notation  $y$  où la rotation serait *indirecte* en plus d'être autour de ( $Ox$ ). Il est donc bien entendu que, dans ce qui suit, les paramètres dont le nom contient des  $x$  ou  $y$ , minuscules ou majuscules, sont bien des *coordonnées* et doivent être compris comme telles. À l'exception de la perturbation de la rotation propre, tous les paramètres de rotation évoqués dans la suite de cette section sont reportés sur la Fig. 2.3.

Les deux premiers paramètres de rotation sont  $dX$  et  $dY$ , les écarts au CIP non modélisés donnés dans l'ICRS (le GCRS plus rigoureusement). En d'autres termes, ils sont la correction à ajouter au modèle de précession-nutation conven-

11. Si un angle  $\alpha$  est petit,  $\tan \alpha \approx \alpha$ .

tionnel pour atteindre le CIP. Comme indiqué plus haut, leur amplitude est inférieure à 1 mas, soit quelques centimètres en surface. Si on note  $X$  et  $Y$  les coordonnées du CIP dans le repère céleste et  $X_{\text{mod}}$  et  $Y_{\text{mod}}$  la partie modélisée de chacune de ces coordonnées respectivement, on a

$$X = X_{\text{mod}} + dX \quad \text{et} \quad Y = Y_{\text{mod}} + dY. \quad (2.1)$$

La perturbation de la rotation propre est le troisième PRT et correspond à une variation de la longueur du jour. Logiquement, il se traduit donc par un écart en temps entre UT1 et un temps de référence basé sur la seconde, UTC en l'occurrence. Cette perturbation est ainsi, dans l'ITRS,  $UT1 - UTC$ . Concernant les variations de ce paramètre, la correction de UTC par les secondes intercalaires implique que la différence  $UT1 - UTC$  demeure toujours inférieure à 0.9 s et qu'elle n'est pas lisse mais continue par morceaux (sauts d'amplitude -1 s aux dates d'introduction des secondes intercalaires).

Les quatrième et cinquième paramètres sont  $x$  et  $y$ , les coordonnées terrestres du CIP, c'est-à-dire les écarts de l'axe  $z$  de l'ITRF à l'axe  $z$  du repère équatorial vrai. Les deux premiers paramètres,  $dX$  et  $dY$ , ont permis d'orienter le repère céleste dans la direction du CIP mais il restait une dernière correction pour pointer vers le pôle géographique terrestre : c'est le rôle de  $x$  et  $y$ . En accord avec une ancienne convention, la position du CIP suivant l'axe  $y$  est comptée positivement vers  $90^\circ$  Ouest (Brzeziński et Capitaine 1993), ses coordonnées dans ce système d'axe particulier étant notées  $(x_P, y_P)$  suivant un usage très largement répandu. Comme l'orientation directe classique du repère terrestre implique un axe  $y$  orienté vers  $90^\circ$  Est, il apparaît une différence de signe entre  $y$  et  $y_P$  et on a donc  $x = x_P$  mais  $y = -y_P$ . De façon équivalente, on peut voir  $x_P$  et  $y_P$  comme les cosinus directeurs de l'axe du CIP dans le plan équatorial. Il convient de faire attention à ce point dans l'utilisation des données de mouvement du pôle. Ces paramètres contiennent les signaux basses fréquences – périodes supérieures à deux jours – d'origine géophysique (voir le 1.3). Pour rappel, leur amplitude est inférieure à 1 arcsec, ce qui correspond à un mouvement du pôle d'une trentaine de mètres en surface. Les fichiers diffusés par l'IERS donnent  $x_P$  et  $y_P$ , non pas  $x$  et  $y$  comme la notation dans ces fichiers pourrait le suggérer<sup>12</sup>.

Dans ce travail, nous nous intéressons uniquement au mouvement du pôle en lien avec des phénomènes d'origine géophysique. De ce fait, seuls les deux derniers paramètres seront utilisés par la suite car les deux premiers résultent surtout de l'action luni-solaire et le troisième, la variation de l'angle de rotation, ne caractérise pas le mouvement du pôle.

12. Pour lever tout doute en cas de confusion entre  $y$  et  $y_P$ , on peut se rappeler que le pôle dérive vers l'Ouest. La seconde coordonnée du mouvement du pôle de l'IERS a bien une composante linéaire positive ( $y_P$  positif vers l'Ouest).

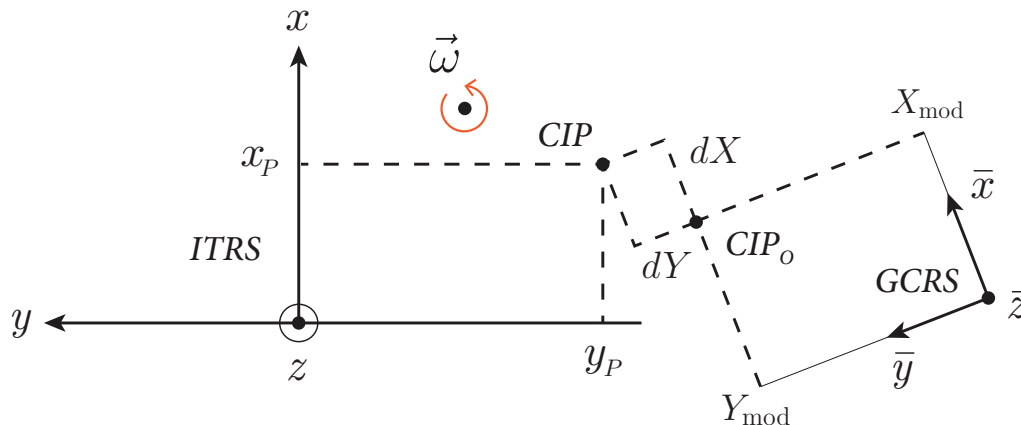


FIGURE 2.3 – Relation entre le GCRS et l’ITRS *via* quatre des cinq paramètres de rotation de la Terre (la variation de la longueur du jour n’est pas représentée) et la partie modélisée de la précession-nutation ( $X_{\text{mod}}$  et  $Y_{\text{mod}}$ ). La rotation terrestre instantanée est donnée par le vecteur  $\vec{\omega}$ , qui indique donc ici le pôle de rotation instantané. La rotation terrestre est toutefois comptée, en pratique, autour du CIP, qui constitue une moyenne journalière du pôle de rotation instantané. Notez que le schéma n’est pas à l’échelle.

### 2.2.3 Équation cinématique

Au Chapitre 1, nous avons vu qu’il était possible d’adopter deux points de vue complémentaires sur la rotation de la Terre, soit en observant les mouvements de l’axe de rotation terrestre dans l’espace (précession-nutation discutées au 1.2), soit en observant les mouvements de l’axe relativement à la surface terrestre (mouvement du pôle discuté au 1.3). Cette distinction est apparue à nouveau dans les sections précédentes au travers de la séparation entre, d’une part, les mouvements du CIP (donnés par des modèles ainsi que  $dX$  et  $dY$ ) et, d’autre part, les mouvements du pôle (donnés par  $x_P$  et  $y_P$ ). Toutefois, on ne peut établir une limite aussi nette entre l’un et l’autre de ces mouvements en se contentant de choisir un référentiel d’observation. Ainsi, nous avons vu au 1.3.1 que tout mouvement de l’axe de rotation dans le repère terrestre dans la bande de fréquence rétrograde diurne était rejeté *par définition* du mouvement du pôle *stricto sensu* pour être inclus dans les nutations où il se traduit par une oscillation de période supérieure à deux jours. Cette convention révèle un fait essentiel que nous n’avons fait qu’effleurer jusqu’ici : pour tout mouvement du pôle, il existe une nutation correspondante et inversement. Autrement dit, mouvement du pôle et nutation ne sont pas indépendants et leurs expressions respectives dépendent autant du système de référence dans lequel on les exprime que des limites de leur gamme de fréquences attitrée.

Pour s’en convaincre, on peut calculer dans le repère terrestre le mouvement du pôle induit par une nutation dans le repère céleste. On trouve notamment un tel développement chez Dehant et Mathews (2007). Le premier point impor-



tant est l'aspect purement cinématique des relations existant entre nutation et mouvement du pôle ; elles sont en effet indépendantes de tout modèle de Terre particulier. Pour cette raison, on les qualifie de *relations cinématiques*, lesquelles sont données par Dehant et Mathews (2007), Sec. 3.10.7. On veillera cependant à faire la distinction entre, d'un côté, les relations cinématiques liant nutation et mouvement du pôle et, de l'autre, les relations liant la nutation d'un axe à un autre (axe de figure et axe de rotation par exemple) et qui dépendent du modèle de Terre<sup>13</sup>. Le second point important est le rapport d'amplitude entre les deux types de mouvement, la nutation étant d'autant plus grande que la fréquence est basse. Ceci explique notamment la place prépondérante de la nutation à 18.6 ans.

Avant d'aborder la mécanique de la rotation de la Terre proprement dite, il reste encore à établir la relation entre les paramètres de rotation de la Terre et le vecteur de rotation instantané  $\vec{\omega}$  qui intervient dans les lois physiques. Ce vecteur  $\vec{\omega}$  exprime la rotation du système de référence terrestre relativement au système de référence céleste *intermédiaire* du CIP (le repère équatorial vrai). On confondra pour le moment, mais on distinguera par la suite, ce système de référence utilisant le CIP de celui s'appuyant sur un « CIP modélisé », noté ici CIP<sub>0</sub>, pour lequel on n'aurait utilisé que la partie modélisée de la précession-nutation. Dans tous les cas, partir du système céleste intermédiaire permet de considérer qu'en première approximation la rotation terrestre a lieu autour de l'axe  $z$  du repère céleste. L'axe de rotation instantané étant par ailleurs proche de l'axe  $z$  du repère terrestre, on exprime habituellement les composantes de  $\vec{\omega}$  à l'aide de trois nombres adimensionnés  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  tels que

$$\vec{\omega} = \Omega_0(m_1, m_2, 1 + m_3), \quad (2.2)$$

avec  $\Omega_0$  la vitesse de rotation terrestre de référence qui correspond à une période de rotation d'environ 86 164.10 secondes SI (voir 1.3.3). Lorsqu'on s'intéresse au mouvement du pôle plutôt qu'aux variations de la vitesse de rotation, l'Éq. (2.2) permet d'exprimer la position de l'axe de rotation instantané au moyen d'un unique nombre complexe

$$m = m_1 + im_2. \quad (2.3)$$

De façon similaire, on introduit le nombre complexe  $p$  donnant la position du CIP dans le repère terrestre :

$$p = x_P - iy_P. \quad (2.4)$$

L'axe de rotation instantané et le CIP étant toujours très proches, il est entendu que la norme de  $m$  est du même ordre de grandeur que celle de  $p$ . Pour établir la relation entre ces deux nombres, revenons à l'écriture matricielle de l'Éq. (1.5). Pour le moment, supposons que CIP et CIP<sub>0</sub> sont confondus. Seules

13. Ces relations font intervenir des termes dits d'*Oppolzer* qui sont également rappelés par Dehant et Mathews (2007) pour une Terre rigide.

deux rotations sont nécessaires pour atteindre le pôle géographique :  $R_2(-x_P)$  et  $R_1(-y_P)$ . Il suffit d'ajouter la rotation d'angle  $\psi$  autour de l'axe  $z$  pour passer du CIO au TIO (voir 2.2.1) et atteindre le repère terrestre. On a donc

$$A = R_2(-x_P)R_1(-y_P)R_3(\psi). \quad (2.5)$$

Le calcul de  $\dot{A}A^{-1}$ , en application de l'Éq. (1.7), est fait par Brzeziński et Capitaine (1993). Après élimination des termes du second ordre (de l'ordre de  $10^{-12}$  ou moins), on obtient la relation cherchée :

$$m = p - i \frac{\dot{p}}{\Omega_0}. \quad (2.6)$$

Le résultat précédent part de l'hypothèse que  $\text{CIP} = \text{CIP}_0$ , mais le CIP présente en réalité des oscillations à longue période non modélisées dans le repère céleste :  $dX$  et  $dY$ . Pour tenir compte de cet effet supplémentaire, on peut chercher les perturbations de  $x_P$  et  $y_P$ ,  $\Delta x_P$  et  $\Delta y_P$  respectivement, permettant de compenser l'écart entre CIP et  $\text{CIP}_0$ , en vertu du fait que la distinction entre nutation et mouvement du pôle n'est qu'une question de convention. Ce développement est également donné par Brzeziński et Capitaine (1993) (seconde méthode, dans leur section 3) et aboutit à

$$\Delta p = -P e^{-i\psi}, \quad (2.7)$$

avec  $\Delta p = \Delta x_P - i\Delta y_P$ . Le signe devant  $P$  indique une « nutation » vue depuis le repère terrestre. Conformément aux explications précédentes, il y a bien égalité en amplitude entre  $P$  et  $\Delta p$ , c'est-à-dire un mouvement du CIP identique au changement de repère près. En introduisant ce résultat (2.7) dans (2.6), on aboutit ainsi à l'expression finale :

$$m = p - i \frac{\dot{p}}{\Omega_0} + i \frac{\dot{P}}{\Omega_0}. \quad (2.8)$$

## 2.3 Approche dynamique et corps déformable

Les sections précédentes ont essentiellement servi à définir les concepts et grandeurs physiques nécessaires à l'étude de la rotation de la Terre.

### 2.3.1 Équations d'Euler-Liouville

La Section 1.1.2 a permis de rappeler quelques éléments de la physique des corps en rotation. Nous allons maintenant développer l'Éq. (1.16) pour une planète ellipsoïdale en rotation soumise à de petites déformations. Pour rappel, la conservation du moment cinétique s'écrit

$$\frac{d\vec{H}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{H} = \vec{\Gamma} \quad (2.9)$$

dans un repère ayant une vitesse instantanée de rotation absolue  $\vec{\omega}$ . Par commodité, on peut choisir pour ce repère, soit l'ITRF pour profiter de tout le formalisme sur la rotation de la Terre introduit précédemment, soit le repère donné par les vecteurs propres du tenseur d'inertie terrestre afin de ne travailler qu'avec des petites perturbations des moments et produits d'inertie. Une meilleure option combinant les bénéfices de ces deux approches consiste à travailler dans le repère déduit de l'ITRF par une rotation autour de l'axe géographique amenant l'axe  $x$  à proximité de l'axe d'inertie du moment d'inertie  $A$ . Selon les besoins et à une rotation constante près, ce nouveau repère peut être assimilé aussi bien à l'ITRF qu'au repère dans lequel le tenseur d'inertie est presque diagonal. J'utiliserai simplement le terme « repère terrestre » dans la suite pour désigner ce repère particulier. Notons toutefois que ces considérations théoriques sont d'une portée limitée dans ce travail. D'une part parce que nous introduirons bientôt l'hypothèse que les moments d'inertie par rapport aux axes équatoriaux sont égaux et, d'autre part, parce que le travail de modélisation expliqué dans la Partie IV autorise un choix arbitraire de référentiel. L'analyse de données présentée dans la Partie II sera quant à elle menée dans l'ITRF exclusivement, indépendamment des équations de cette section.

Dans le repère choisi, le tenseur d'inertie  $I$  peut être écrit comme une matrice diagonale de coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  à laquelle s'ajoutent de petites perturbations données par les coefficients  $c_{ij}$ , soit :

$$\begin{pmatrix} A + c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & B + c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & C + c_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

En pratique, les  $c_{ij}$  sont trois ordres de grandeurs plus petits que les moments d'inertie principaux (Bizouard 2014, p. 75). Le moment cinétique est calculé en introduisant l'Éq. (2.10) dans l'Éq. (1.11) et en ajoutant le moment cinétique relatif  $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$  :

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \begin{pmatrix} A + c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & B + c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & C + c_{33} \end{pmatrix} \cdot \Omega_0 \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1 + m_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \\ &= \Omega_0 \begin{pmatrix} Am_1 + c_{11}m_1 + c_{12}m_2 + c_{13} + c_{13}m_3 \\ c_{21}m_1 + Bm_2 + c_{22}m_2 + c_{23} + c_{23}m_3 \\ c_{31}m_1 + c_{32}m_2 + C(1 + m_3) + c_{33} + c_{33}m_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Les quantités  $m_i$  et  $c_{ij}$  étant petites, on peut linéariser l'Éq. (2.11) en négligeant les termes comportant un produit de ces quantités. On obtient alors :

$$\vec{H} \approx \Omega_0 \begin{pmatrix} Am_1 + c_{13} \\ Bm_2 + c_{23} \\ C(1 + m_3) + c_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

dont la dérivée est

$$\frac{d\vec{H}}{dt} \approx \Omega_0 \begin{pmatrix} A\dot{m}_1 + \dot{c}_{13} \\ B\dot{m}_2 + \dot{c}_{23} \\ C\dot{m}_3 + \dot{c}_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Le second terme linéarisé de l'Éq. (2.9) est de même calculé au moyen de l'expression de  $\vec{H}$  donnée par l'Éq. (2.12) et en négligeant en outre les termes où apparaissent un produit de  $h_i$  et  $m_j$  :

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \vec{H} &\approx \Omega_0 \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1 + m_3 \end{pmatrix} \wedge \left[ \Omega_0 \begin{pmatrix} Am_1 + c_{13} \\ Bm_2 + c_{23} \\ C(1 + m_3) + c_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right] \\ &\approx \Omega_0^2 \begin{pmatrix} (C - B)m_2 - c_{23} \\ (A - C)m_1 + c_{13} \\ 0 \end{pmatrix} + \Omega_0 \begin{pmatrix} -h_2 \\ h_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dans les Éq. (2.12) et (2.14), le terme dominant est bien sûr  $\Omega_0 C$  qui provient de la rotation diurne autour d'un axe proche de l'axe d'inertie  $C$ . S'agissant des perturbations de la rotation, tous les termes conservés ont des ordres de grandeur comparables, tandis que les termes négligés sont au moins cinq ordres de grandeur plus petits (Bizouard 2014, p. 77).

En introduisant les Éq. (2.12) et (2.14) dans la loi de conservation du moment cinétique (2.9), on obtient le système d'équations linéarisées

$$\begin{cases} \Omega_0^2(C - B)m_2 - \Omega_0 A\dot{m}_1 + \Omega_0(c_{13} + \Omega_0 c_{23}) - \Omega_0 h_2 + \dot{h}_1 = \Gamma_1 \\ \Omega_0^2(A - C)m_1 + \Omega_0 B\dot{m}_2 + \Omega_0(c_{23} + \Omega_0 c_{13}) + \Omega_0 h_1 + \dot{h}_2 = \Gamma_2 \\ \Omega_0(C\dot{m}_3 + \dot{c}_{33}) + \dot{h}_3 = \Gamma_3 \end{cases} \quad (2.15)$$

Dans la suite de ce travail, nous ferons l'hypothèse d'une Terre biaxiale, c'est-à-dire que nous supposons<sup>14</sup>  $A = B$ . Ce choix s'appuie sur le fait que l'écart relatif entre  $A$  et  $B$  n'est que de l'ordre de  $10^{-5}$  alors que leur écart avec le moment d'inertie  $C$  est de l'ordre de l'aplatissement terrestre, soit  $1/300$ . L'erreur liée à cette approximation doit bien sûr rester petite devant l'effet des phénomènes que l'on cherche à étudier.

Lorsqu'on s'intéresse aux variations suivant les deux premiers axes du repère, il est commode d'introduire les notations complexes  $c = c_{13} + ic_{23}$ ,  $h = h_1 + ih_2$  et  $\Gamma = \Gamma_1 + i\Gamma_2$  ainsi que nous l'avons fait pour  $m$  dans l'Éq. (2.3). Cela permet de réécrire le système (2.15) sous la forme des *équations d'Euler-Liouville* linéarisées pour une Terre biaxiale :

$$\begin{cases} i\Omega_0^2(A - C)m + \Omega_0 A\dot{m} + \Omega_0(i\Omega_0 c + \dot{c}) + i\Omega_0 h + \dot{h} = \Gamma \\ \Omega_0 C\dot{m}_3 + \Omega_0 \dot{c}_{33} + \dot{h}_3 = \Gamma_3 \end{cases} \quad (2.16)$$

14. En pratique, on remplace les deux premiers moments d'inertie par  $(A + B)/2$ .

Il apparaît que le terme  $\dot{m}_3$  donnant les variations de vitesse de rotation est découplé des mouvements de l'axe de rotation  $m$  et  $\dot{m}$ . On peut donc traiter ce problème à part et ignorer la seconde équation dans l'étude du mouvement du pôle en particulier.

En l'absence de couple de force extérieur,  $\Gamma = 0$  et en introduisant la fréquence angulaire propre

$$\sigma_e = \frac{C - A}{A} \Omega_0, \quad (2.17)$$

on peut réécrire la première équation d'Euler-Liouville

$$i \frac{\dot{m}}{\sigma_e} + m = \frac{1}{(C - A)} \left( c + \frac{h}{\Omega_0} \right) - \frac{i}{(C - A) \Omega_0} \left( \dot{c} + \frac{\dot{h}}{\Omega_0} \right). \quad (2.18)$$

L'Éq. (2.18) est une équation différentielle ordinaire linéaire complexe d'ordre 1. Dans le cas d'une Terre rigide, le membre de droite s'annule. L'équation

$$\dot{m} - i \sigma_e m = 0 \quad (2.19)$$

admet alors comme solution

$$m(t) = m_0 e^{i \sigma_e t}. \quad (2.20)$$

L'Éq. (2.20) décrit une rotation dans le sens direct<sup>15</sup> qui est un mouvement circulaire d'amplitude  $\|m_0\|$  et de position initiale  $m_0$ . L'axe de rotation tourne autour de l'axe géographique à la fréquence angulaire  $\sigma_e$ , c'est-à-dire en 304 jours environ. Cette fréquence est appelée *fréquence d'Euler*, tout comme l'équation (2.19) du même nom. Nous l'avons déjà rencontrée au 1.3.2.

Il est bon de noter que les développements de cette section n'imposent pas que la Terre soit homogène. L'Éq. (2.18) est en effet valable pour n'importe quelle enveloppe terrestre pourvu que la symétrie  $A = B$  soit respectée. En remplaçant  $A$  et  $C$  par les moments d'inertie du manteau, du noyau ou de la graine respectivement, on peut de même résoudre le problème de la rotation pour ces couches. On veillera néanmoins à prendre en compte les éventuels couplage aux interfaces (surface terrestre, CMB, ICB) afin de respecter la physique terrestre.

### 2.3.2 Terre déformable et nombres de Love

La résolution analytique de l'Éq. (2.18) dans le cas plus général d'une Terre déformable nécessite de connaître les expressions de  $c$  et  $h$  dans le membre de droite, ainsi que l'ont souligné Smith et Dahlen (1981)<sup>16</sup>. Dans l'hypothèse où, encore une fois, les déformations sont petites, on peut supposer qu'il existe une

15. L'angle de phase  $\sigma_e t$  croît avec  $t$  dans le sens trigonométrique.

16. "The ease with which we reached [eq. (2.18)] suggests that the real effort must lie in computing  $h$  and  $c$ , and that is so."

relation linéaire entre  $c$  et  $m$  d'une part, et  $h$  et  $m$  d'autre part. Mathématiquement, cela revient à déterminer deux tenseurs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  tels que

$$c_{i3} = D_{ij}m_j \quad \text{et} \quad h_i = \sigma_e E_{ij}m_j. \quad (2.21)$$

L'expression exacte de ces deux tenseurs dépend totalement du modèle de Terre considéré, on se référera à Smith et Dahlen (1981) pour davantage de discussion à ce sujet. Le choix du système de référence est également un élément important. En effet, on peut choisir un repère dans lequel les  $h_i$  s'annulent pour le manteau ; les coefficients de  $\mathbf{E}$  traduisent alors majoritairement les effets du noyau et la circulation atmosphérique<sup>17</sup>. Un tel repère est dit de *Tisserand*. En pratique, pour une Terre axisymétrique, tous les repères cités précédemment respectent en bonne approximation la condition de Tisserand. Finalement et en éliminant dans un premier temps les termes  $h$  et  $\dot{h}$ , les seuls coefficients qui nous intéressent dans l'étude du mouvement de Chandler sont

$$D_{11} = D_{22} = \frac{k_2 a^5 \Omega_0^2}{3G}, \quad (2.22)$$

c'est-à-dire que

$$c = \frac{k_2 a^5 \Omega_0^2}{3G} m \quad (2.23)$$

avec  $a$  le rayon terrestre moyen,  $G$  la constante de gravitation universelle et  $k_2$  le nombre de Love de degré 2. Ce dernier paramètre est une grandeur caractéristique pour la Terre. Il exprime de façon synthétique la réponse mécanique d'une planète soumise à une perturbation extérieure, connue à la surface. Plus précisément, le nombre de Love  $k_\ell$  est la constante de proportionnalité entre le coefficient de degré  $\ell$  du potentiel perturbateur développé en harmoniques sphériques  $\phi_\ell^{\text{ext}}$ , et le coefficient  $\Delta V_\ell$  donnant la perturbation du potentiel de gravitation propre de la Terre :

$$\Delta V_\ell = k_\ell \phi_\ell^{\text{ext}}. \quad (2.24)$$

Cette relation est tout à fait générale et valable également si  $k_\ell$  est complexe et fonction de la fréquence, auquel cas le nombre de Love peut être conçu comme une fonction de transfert entre  $\phi_\ell^{\text{ext}}$  et  $\Delta V_\ell$ . Dans le cas du mouvement chandlérien en particulier, la perturbation  $\phi_\ell^{\text{ext}}$  est due au mouvement de l'axe de rotation relativement au manteau, oscillation qui perturbe le potentiel de pesanteur et déforme la Terre.

J'ai précisé plus haut que l'expression de  $c$  dépendait du modèle de Terre considéré. Nous avons vu également au 1.3.2 que la fréquence de Chandler observée différait notablement de la fréquence eulérienne donnée à l'Éq.(2.17). On pourrait croire qu'avec un modèle de Terre déformable on devrait trouver une période de Chandler plus proche de la valeur observée mais ce serait une conclusion trop hâtive. Le calcul de la fréquence de Chandler  $\sigma_{CW}$ , en utilisant

17. Les mouvements tectoniques sont, pour leur part, négligeables dans bien des cas.

l'Éq. (2.23) dans l'Éq. (2.18) et toujours en omettant le moment cinétique relatif, donne

$$\sigma_{CW} = \frac{C - A - k_2 a^5 \Omega_0^2 / (3G)}{A + k_2 a^5 \Omega_0^2 / (3G)} \Omega_0, \quad (2.25)$$

qui est proche de 447 jours et n'excède donc que d'une quinzaine de jours la période observée. Or, en réalité, les termes négligés induisent une variation de l'ordre du mois sur la période calculée. Par chance – malencontreusement plutôt, leurs effets se compensent ; leur importance n'en est donc que plus difficile à percevoir. De nombreux développements ont été faits au cours du xx<sup>e</sup> siècle pour s'approcher au plus près d'une expression analytique de la fréquence de Chandler pour un modèle de Terre réaliste. Pour tenir compte de la présence du noyau ainsi que des effets atmosphériques et océaniques, de nombreux auteurs ont progressivement affiné l'expression des coefficients  $D_{ij}$  et  $E_{ij}$ , comme le résumant très bien Smith et Dahlen (1981).

### 2.3.3 Dissipation et atténuation

Les coefficients (2.22) et la fréquence (2.25), tout comme leurs expressions plus complètes trouvées dans la littérature, sont également influencés par un autre aspect de la physique terrestre : la rhéologie mantellique. Par l'intermédiaire du nombre de Love  $k_2$ , la fréquence de Chandler dépend en effet directement de la façon dont le manteau se déforme, c'est-à-dire de son comportement rhéologique. Nous aborderons cette question au 2.4. De nombreux autres phénomènes physiques modifient la fréquence de Chandler et, en particulier, sa partie imaginaire. Nous avons déjà évoqué l'effet du noyau au 1.3.4 et on peut ajouter la dissipation par friction au fond des océans ou sous l'action des vents à la surface. Quelle qu'en soit la cause, la fréquence  $\sigma_{CW}$  peut donc prendre des valeurs complexes dont la partie imaginaire traduit une atténuation de l'oscillation chandlerienne. En effet, avec  $\tilde{\sigma}_{CW} = \sigma_{CW}^R + i\sigma_{CW}^I$ , la solution (2.20) devient

$$\begin{aligned} m(t) &= m_0 e^{i\tilde{\sigma}_{CW}t} \\ &= m_0 e^{-\alpha_{CW}t} e^{i\sigma_{CW}^R t} \end{aligned} \quad (2.26)$$

où  $\sigma_{CW}^I$  a été remplacé par l'atténuation  $\alpha_{CW}$  dans le facteur  $e^{-\alpha_{CW}t}$ . De façon générale, on notera que  $\sigma_{CW}^R \neq \sigma_{CW}$ ,  $\sigma_{CW}$  étant la valeur de la fréquence de Chandler dans le cas élastique. Plutôt que de recourir au paramètre  $\alpha_{CW}$ , l'atténuation est communément exprimée à l'aide du *facteur de qualité* adimensionné

$$Q_{CW} = \frac{\sigma_{CW}^R}{2\sigma_{CW}^I}. \quad (2.27)$$

Très utilisé en sismologie et dans l'étude des modes propres notamment, ce facteur permet de quantifier de façon standard l'atténuation associée à un phénomène physique pseudo-périodique. Si l'atténuation est faible, on peut faire

l'approximation  $\sigma_{CW}^R \approx \sigma_{CW}$  et, dans ce cas, l'Éq. (2.27) permet d'écrire la fréquence chandlérienne complexe en fonction du facteur de qualité sous la forme

$$\tilde{\sigma}_{CW} = \sigma_{CW} \left( 1 + i \frac{1}{2Q_{CW}} \right). \quad (2.28)$$

La dissipation d'énergie exprimée par le facteur de qualité étant due, entre autre, à l'anélasticité du manteau, l'Éq. (2.28) jette un pont entre le mouvement de Chandler et la rhéologie du manteau terrestre.

## 2.4 Rhéologie

### 2.4.1 Bref historique

La *rhéologie*<sup>18</sup>, étymologiquement « l'étude des écoulements », est la branche de la physique qui traite des déformations et écoulements des matériaux. Elle est une discipline extrêmement vaste, aussi bien fondamentale qu'appliquée, parce qu'elle porte sur un très large spectre de phénomènes, s'intéressant à des échelles spatiales et temporelles parfois elles-mêmes très étendues. Ainsi, au vu de la diversité des matériaux étudiés dans le cadre de la rhéologie, ces origines remontent à une époque incertaine. En un sens, l'étude des solides rigides remonte aux Grecs, durant l'Antiquité, et relève déjà de la rhéologie. Je ne remonterai tout de même pas jusqu'à cette époque lointaine mais il me semble intéressant de rappeler succinctement quelques dates, époques et personnages clés de la discipline. Ces informations proviennent essentiellement d'une brève introduction sur les origines de la rhéologie écrite par Doraiswamy (2002).

Si l'on se limite à l'étude des matériaux idéaux non rigides, les premières avancées furent notamment le fait de Boyle et Hooke au XVII<sup>e</sup> siècle pour les solides élastiques, de Pascal, Bernoulli et Euler entre le XVII<sup>e</sup> et le XVIII<sup>e</sup> siècle pour les fluides non visqueux et de Navier, Stokes et d'autres au début du XIX<sup>e</sup> siècle. L'étude de la viscoélasticité date quant à elle du XIX<sup>e</sup> siècle et est associée aux noms de Weber (dans l'étude de fils de soie pour instruments de mesure en électromagnétisme), Kohlrausch, Wiechert, Maxwell, Boltzmann, Poynting et Thomson. Au début du XX<sup>e</sup> siècle, la discipline encore anonyme a poursuivi son développement, avec l'étude de la viscoélasticité non linéaire (Poynting, Zaremba, Jaumann, Hencky), des suspensions (Einstein, Jeffrey), des polymères, etc., jusqu'au 29 avril 1929, date à laquelle le terme de « rhéologie » a été proposé par Eugene Cook Bingham et Markus Reiner<sup>19</sup> pour décrire « l'étude de l'écoulement et de la déformation de toutes les formes de matières ».

Depuis, la rhéologie s'est considérablement développée, profitant notamment des progrès de la physique et de la chimie en général, mais aussi des

18. du grec ῥέω « je coule » et λόγος « parole, discours, raison »

19. Reiner est notamment connu pour le *nombre de Deborah* – nommé en référence à un verset de la Bible – qui est une mesure de la fluidité des matériaux relativement à l'échelle de temps d'observation.



avancées dans le domaine de la simulation numérique. En particulier, l'établissement des équations constitutives (plus largement discutées dans les sections suivantes et au 8.2.1) date du milieu du  $xx^e$  siècle. Les contributeurs de la rhéologie contemporaine sont bien trop nombreux pour en citer ne serait-ce qu'une partie représentative, aussi finirai-je cette courte introduction historique en citant un des tous premiers « rhéologues », Héraclite (500 av. JC), philosophe grec né à Éphèse en Asie mineure, qui exprima le fait que le monde naturel est constitué d'évènements dans un flux continu en déclarant : « Τα Πάντα ῥεῖ »<sup>20</sup>. Cette célèbre formule est désormais la devise de la rhéologie, d'après une suggestion de M. Reiner.

### 2.4.2 Classes rhéologiques et anélasticité

On s'intéressera ici aux déformations des matériaux vus comme des milieux continus (*continuum*) et sans préoccupation des processus atomiques sous-jacents, suivant l'approche phénoménologique de la rhéologie. Notons cependant que l'approche « microphysique », qui s'intéresse aux propriétés à l'échelle atomique et à leur incidence macroscopique, fait également l'objet de travaux en géophysique et géochimie.

Les deux grandeurs physiques fondamentales en mécanique des milieux continus sont le tenseur des contraintes  $\sigma$  et le tenseur des déformations  $\varepsilon$ . Le premier décrit les forces qui s'exercent sur des surfaces théoriques à l'intérieur d'un matériau (pression ou tension, en pascal), le second décrit les déformations du continuum, en unité de longueur (quantité de compression/étirement) par unité de longueur (de matériau déformé). Ces deux fonctions du temps sont reliées par une relation constitutive du type

$$R(\sigma, \varepsilon, \dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}, \dots, \text{coefficients du matériau, paramètres extérieurs}) = 0, \quad (2.29)$$

qui définit une *classe rhéologique*.

L'élasticité, pour laquelle contrainte et déformation sont proportionnelles, et la viscosité, pour laquelle la contrainte est proportionnelle à la dérivée temporelle de la déformation, sont deux exemples d'une telle classe. Plus généralement, différentes classes rhéologiques correspondent donc à différentes réponses en déformations suivant les contraintes appliquées ou *vice versa*, différentes contraintes pour des déformations données. Réciproquement, la réponse d'un matériau à l'application d'une contrainte ou d'une déformation permet donc de déterminer la classe rhéologique à laquelle il appartient. Je ne discuterai pas des nuances pouvant exister entre les notions de viscoélasticité, d'anélasticité ou d'inélasticité et je qualifierai simplement du terme générique d'*anélastique* tout matériau doté d'un comportement à la fois élastique et visqueux.

20. « Tout s'écoule »

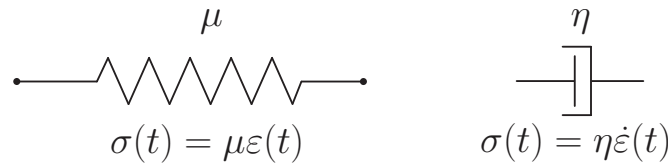


FIGURE 2.4 – Modèles rhéologiques analogiques élémentaires et leur équation constitutive, (a) le ressort et (b) le piston visqueux.

La rhéologie *linéaire* caractérise les matériaux pour lesquelles il existe une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme

$$a_0\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} + \dots = b_0\varepsilon + b_1\dot{\varepsilon} + b_2\ddot{\varepsilon} + \dots \quad (2.30)$$

Les classes rhéologiques linéaires peuvent être modélisées à l'aide des composants idéaux que sont le ressort et l'amortisseur ou piston visqueux (voir Fig. 2.4). Ces analogues seront utilisés au 8.2.1 pour illustrer les différentes équations constitutives que nous utiliserons. Pour les modèles les plus simples, les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  de l'Éq. (2.30) sont des scalaires. Cependant la formulation la plus générale requiert l'introduction de tenseurs. La contrainte s'exprime ainsi d'une façon suffisamment générale pour ce qui nous intéresse :

$$\sigma(t) = C_0\varepsilon(t) + C_1\dot{\varepsilon}(t), \quad (2.31)$$

où  $C_0$  et  $C_1$  sont des tenseurs d'ordre 4 et on a explicitement fait apparaître la dépendance temporelle pour la contrainte et la déformation. À titre d'illustration, à une dimension, l'Éq. (2.31) devient scalaire et on a

$$\sigma(t) = \mu\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t), \quad (2.32)$$

où  $\mu$  est le module de rigidité<sup>21</sup>, ou de cisaillement, (en  $\text{N m}^{-2} = \text{Pa}$ ) et  $\eta$  la viscosité (en  $\text{Pa s}$ ).

En se limitant un instant à l'élasticité linéaire, la formulation la plus générale de la relation contrainte-déformation s'exprime au moyen d'un unique tenseur  $C$  tel que

$$\sigma = C\varepsilon. \quad (2.33)$$

Par symétrie et suivant des considérations énergétiques, ce tenseur de  $3^4 = 81$  composantes ne comportent en fait, au maximum, « que » 21 coefficients indépendants. Plus simplement encore, dans un milieu isotrope, le tenseur  $C$  ne comporte que deux paramètres indépendants : les *coefficients de Lamé*. Ceux-ci ont été introduits au XIX<sup>e</sup> siècle par Gabriel Lamé, mathématicien français, dans le cadre de la théorie mathématique de l'élasticité. Le premier paramètre,  $\lambda$ , est lié aux déformations en contraction-dilatation mais n'a pas d'interprétation physique en lui-même. Le second paramètre, le module de cisaillement,  $\mu$  (ou

21. On parle de modules *élastiques* pour les paramètres de Lamé mais en termes physiques, lorsque  $\mu$  augmente, la *rigidité* augmente.

module de Coulomb, aussi noté  $G$ ), spécifie quant à lui la réponse d'un matériau en cisaillement. L'utilisation de seulement deux paramètres pour la rhéologie élastique isotrope provient de la distinction apparaissant à plusieurs dimensions entre les effets volumiques et de cisaillement, contrairement aux modèles unidimensionnels. Ainsi, dans le cas élastique, la relation constitutive est la bien connue loi de Hooke<sup>22</sup> (*ut tensio, sic vis* ; telle extension, telle force) généralisée à un milieu isotrope

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.34)$$

où  $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_k \varepsilon_{kk}$  est la trace de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\mathbf{I}$ , le tenseur identité.

### 2.4.3 Principe de correspondance

L'Éq. (2.34) en domaine temporel est uniquement valable pour décrire un matériau purement élastique. Dès lors qu'on s'intéresse aux rhéologies non élastiques, les équations dans un milieu tridimensionnel se complexifient rapidement. Pour éviter ces difficultés, il est courant d'appliquer une transformation à l'équation constitutive élastique pour travailler en domaine de Laplace, avec des fréquences complexes  $p$ . Sachant que  $\boldsymbol{\varepsilon}(0) = \mathbf{0}$ , l'Éq. (2.31) devient

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(p) &= \mathbf{C}_0 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(p) + \mathbf{C}_1 p \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(p) \\ &= \tilde{\mathbf{C}}(p) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(p) \end{aligned} \quad (2.35)$$

où  $\tilde{\mathbf{C}}(p) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 p$  et  $\tilde{f}(p)$  dénote la transformée de Laplace de  $f$ , soit

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (2.36)$$

En admettant la généralisation que suggère l'Éq. (2.35), il apparaît que la loi rhéologique de tout matériau peut se mettre sous la forme

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(p) = \tilde{\mathbf{C}}(p) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(p). \quad (2.37)$$

De façon remarquable, l'Éq. (2.37) a exactement la même forme que l'Éq. (2.33) alors qu'elle ne se limite plus à l'élasticité. C'est cette équivalence entre comportements non élastiques en domaine temporel et élasticité de module complexe  $\tilde{\mathbf{C}}$  en domaine de Laplace qui est nommée *Principe de correspondance* (Lee 1955). Une démonstration plus complète de ce principe figure notamment dans Dahlen et Tromp (1998) mais les quelques équations précédentes permettent tout du moins d'en saisir l'origine et la nature.

22. Comparé à Léonard de Vinci par l'historien des sciences A. Chapman pour ses talents d'expérimentateur, Robert Hooke mena des travaux et des réflexions parfois remarquablement en avance sur son époque dans un nombre impressionnant de domaines allant de la physique à l'architecture, en passant par la météorologie, la paléontologie, la géologie, l'horlogerie, l'architecture, etc. Il est aussi connu pour ses différends avec Isaac Newton, son contemporain...

L'application du Principe de correspondance à un milieu homogène isotrope, parallèlement à la connaissance de la loi de Hooke (2.34), permet de donner l'expression générale de la loi rhéologique pour un matériau anélastique :

$$\tilde{\sigma}(p) = \tilde{\lambda}(p) \operatorname{tr}[\tilde{\varepsilon}(p)]\mathbf{I} + 2\tilde{\mu}(p)\tilde{\varepsilon}(p). \quad (2.38)$$

La classe rhéologique du matériau est alors entièrement donnée par les deux fonctions  $\tilde{\lambda}(p)$  et  $\tilde{\mu}(p)$ .

#### 2.4.4 Atténuation, facteur de qualité intrinsèque, déphasage

Une composante importante de la rhéologie des matériaux est la dissipation de l'énergie au cours des cycles de déformations successifs dans un matériau anélastique. Cette dissipation se traduit par une production de chaleur et un phénomène d'atténuation qu'il faut quantifier. Pour ce faire, il est courant de définir trois grandeurs : le *coefficient d'absorption*  $\alpha$  (en  $\text{m}^{-1}$ ), le *facteur de qualité*  $Q$  (sans dimension) et le *déphasage*  $\varphi$  (en rad). Lorsqu'on considère la dissipation par friction dans un solide durant la propagation d'une onde, le premier paramètre dépend du second comme (Karato 2008, p. 41–42)

$$2\alpha = \frac{\sigma}{Qv} = \frac{k}{Q} \quad (2.39)$$

avec  $\sigma$  la pulsation de l'onde qui se propage,  $v$  sa vitesse et  $k = \sigma/v$  le nombre d'onde. Le coefficient d'absorption correspond mathématiquement au facteur intervenant dans l'exponentielle décroissante qui décrit la diminution de l'amplitude  $A$  de l'onde avec la distance parcourue  $x$ , soit

$$A(x) \propto \exp(-\alpha x). \quad (2.40)$$

Dans le cadre de la rhéologie, il est plus courant d'utiliser le facteur de qualité  $Q$ , la relation (2.39) permettant d'estimer  $\alpha$  si nécessaire. La définition physique de  $Q^{-1}$  est la fraction d'énergie perdue par cycle de déformation pour une oscillation harmonique, que divise  $2\pi$ . En d'autres termes, si  $\langle E \rangle$  est l'énergie élastique « stockée » sur un cycle d'oscillation et que  $\Delta E$  est l'énergie dissipée par cycle, on a, par définition (Bland 1960)

$$Q^{-1} \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta E}{\langle E \rangle} \quad (2.41)$$

Sous certaines hypothèses, on peut démontrer qu'il existe une relation fort simple entre  $Q$  et les parties réelles et imaginaires des coefficients de Lamé en domaine de Laplace. Cette relation dépend en toute rigueur de la fréquence complexe  $p$  mais on peut montrer (Dahlen et Tromp 1998, p. 216) que les modes propres terrestres, auxquels on s'intéressera, sont sensibles à l'anélasticité à la

fréquence *réelle*  $\text{Re } p = \sigma$  lorsque la dissipation est faible. De ce fait, la relation évoquée n'est fonction que de  $\sigma$ . Pour  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\lambda}$  respectivement, on a

$$Q_{\mu}^{-1}(\sigma) = \frac{\text{Im } \tilde{\mu}(\sigma)}{\text{Re } \tilde{\mu}(\sigma)} \quad \text{et} \quad Q_{\lambda}^{-1}(\sigma) = \frac{\text{Im } \tilde{\lambda}(\sigma)}{\text{Re } \tilde{\lambda}(\sigma)}. \quad (2.42)$$

Ces rapports donnent l'inverse du facteur de qualité *intrinsèque* du matériau ; il ne sont pas de même nature que le  $Q_{CW}$  de l'Éq. (2.27) qui caractérise la décroissance de l'oscillation d'un mode propre (celui de Chandler en l'occurrence).

Pour finir, notons qu'on peut aussi exprimer le facteur de qualité au moyen de la phase  $\varphi(\sigma)$  de  $\tilde{\mu}$  ou  $\tilde{\lambda}$ . D'après l'Éq. (2.42), il est trivial de montrer que

$$Q_{\mu}^{-1}(\sigma) = \tan \varphi_{\mu}(\sigma) \quad \text{et} \quad Q_{\lambda}^{-1}(\sigma) = \tan \varphi_{\lambda}(\sigma). \quad (2.43)$$

# CHAPITRE 3

## Gravimétrie

---

### Sommaire

---

<b>3.1 La gravimétrie</b> . . . . .	<b>45</b>
3.1.1 Gravité et pesanteur . . . . .	45
3.1.2 Variations spatiales du champ de pesanteur et anomalies gravimétriques . . . . .	47
3.1.3 Gravimétrie absolue et relative, gravimètre à supraconductivité . . . . .	49
<b>3.2 Variations temporelles du champ de pesanteur</b> . . . . .	<b>50</b>
3.2.1 Les marées . . . . .	50
3.2.2 Effets d'origine atmosphérique et océanique . . . . .	50
3.2.3 Pseudo-force centrifuge . . . . .	51

---

*Tout contribue donc à nous montrer que les variétés de la pesanteur actuelle que nous indiquent les diverses longueurs du pendule, sont compliquées. Elles viennent d'un côté de la force centrifuge qui est différente, & outre cela de la différence qu'il y a dans la gravité primitive ou originaire qui est inégale dans les divers climats.*

---

Pierre Bouguer, *La figure de la Terre, déterminée par les observations de Messieurs Bouguer & de la Condamine [...]*

## 3.1 La gravimétrie

### 3.1.1 Gravité et pesanteur

Depuis les travaux d'Isaac Newton au XVII<sup>e</sup> siècle, on sait que tout corps massif exerce une force attractive sur tout autre corps doté d'une masse non nulle. Plus précisément, la *loi de l'attraction universelle* publiée en 1687 dans *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* peut être formulée en langage moderne : « Toute masse ponctuelle attire toute autre masse ponctuelle par l'action d'une force dirigée suivant la ligne joignant ces deux masses. Cette force est proportionnelle au produit des deux masses et inversement proportionnelle au carré de la distance entre elles ». En termes mathématiques et en unités SI :

$$\vec{F}_{1/2} = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \vec{e}, \quad (3.1)$$

avec  $m_1$  et  $m_2$  les masses du premier et second corps respectivement,  $d$  la distance les séparant,  $G = 6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  (J.Mohr et al. 2015) la constante de la gravitation universelle, et  $\vec{e}$  le vecteur unitaire pointant du second vers le premier corps. Quoique cette loi ne soit d'aucune aide pour expliquer l'origine du phénomène d'attraction – Newton le reconnaissait lui-même<sup>1</sup> – elle n'en est pas moins utile pour calculer les mouvements des corps massifs. Associée aux fameuses trois lois de Newton, elle constitue de fait un des fondements de la mécanique classique<sup>2</sup>.

Le formalisme physique moderne fait abondamment appel à la notion de *champ* et la loi de la gravitation n'échappe pas à cette règle. Dans un cadre géophysique, on considère ainsi que la Terre est à l'origine d'un champ gravitationnel obéissant à la loi de Newton. Ce champ n'est rien d'autre que la force d'attraction newtonienne de l'Éq. (3.1), exercée par la Terre de masse  $m_1 = M_\oplus$  sur une masse unitaire  $m_2 = 1 \text{ kg}$  en tout point de l'espace. Pour une Terre sphérique, l'accélération gravitationnelle à l'extérieur des masses est

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM_\oplus}{r^2} \vec{e}_r, \quad (3.2)$$

avec  $\vec{e}_r$  le vecteur unitaire radial (normal à la surface, dirigé vers l'extérieur). À proximité de la surface ( $r \gtrsim a$ ) et avec  $M_\oplus \approx 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ , l'intensité du champ, la *gravité*, est proche de  $g_0 = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ . Cette valeur est une moyenne standard pour la gravité terrestre.

L'Éq. (3.2) n'est qu'approximative s'agissant de la Terre réelle ; elle suffit tout au plus à décrire la gravité de notre planète à très grande échelle, celle du système solaire par exemple. En effet, à la distance orbitale des satellites artificiels, l'aplatissement terrestre devient déjà non négligeable et doit être pris en compte dans le calcul des trajectoires. De même, lorsqu'on se situe à la surface de la Terre, l'aplatissement diminue la distance au géocentre aux latitudes extrêmes (rayon polaire  $b$  d'environ 6357 km), ce qui a pour effet d'augmenter la gravité locale au pôle. L'effet est inverse proche de l'équateur (rayon équatorial  $a$  d'environ 6378 km).

L'aplatissement est le fruit de la rotation terrestre. Il est la réponse à l'action de pseudo-forces indissociables des référentiels en rotation. Or, ces pseudo-forces s'exercent aussi sur tous les corps qui accompagnent la Terre dans sa rotation, notamment les instruments de mesure situés à sa surface. Pour un observateur immobile dans le repère terrestre, la seule force additionnelle ressentie est la (pseudo-)force centrifuge. De façon similaire à  $\vec{g}$  dans l'Éq. (3.2), on peut normaliser cette force par la masse du corps sur lequel elle s'exerce et obtenir

1. "Gravity must be caused by an agent acting constantly according to certain laws, but whether this agent be material or immaterial is a question I have left to the consideration of my readers." (I. Newton, dans une lettre au mathématicien R. Bentley datée du 25 février 1692/3)

2. En outre, bien que surpassée par la Relativité générale, elle peut toujours être déduite de cette dernière en prenant ce que l'on nomme la *limite newtonienne*. La théorie d'Einstein donne d'ailleurs une interprétation physique au phénomène d'attraction, en faisant de la gravitation une force liée à la géométrie de l'espace-temps.

un champ dont la dimension est celle d'une accélération. Ce champ dépend de la latitude  $\vartheta$  et sa composante radiale est proche de

$$f_r = \Omega_0^2 a \cos^2 \vartheta \quad (3.3)$$

si l'on fait l'approximation que la Terre est sphérique. À l'équateur, l'accélération induite par la rotation est ainsi de  $+0.034 \text{ m s}^{-2}$ , le signe plus indiquant une action opposée à celle de la gravité. En ajoutant cette composante  $f_r$  à la variation de gravité due à l'effet géométrique de l'aplatissement, on constate que les effets combinés de la rotation induisent au total une variation atteignant 0.5 % de  $g_0$ , entre l'équateur et les pôles. Cela nous amène à définir la notion de *pesanteur*, cette nouvelle dénomination intégrant l'effet de la force centrifuge dans le calcul de l'attraction effective.

La pesanteur *normale* est donnée conventionnellement en fonction de la latitude géodésique par (Li et Gotze 2001)

$$g_n = g_e \left[ \frac{1 + k \cos^2 \vartheta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \vartheta}} \right] \quad (3.4)$$

avec  $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$  le carré de l'excentricité ( $a$  et  $b$  étant respectivement le rayon équatorial et polaire de la Terre),  $k = (bg_p - ag_e)/(ag_e)$  et  $g_p \approx 9.83 \text{ m s}^{-2}$  et  $g_e \approx 9.78 \text{ m s}^{-2}$  sont la pesanteur aux pôles et à l'équateur respectivement. L'Éq. (3.4) correspond au champ de pesanteur produit à la surface d'un ellipsoïde de même masse et volume que la Terre et en rotation à la même vitesse. Cette formule est celle du *World Geodetic System 84* (WGS 84), système de référence mondial<sup>3</sup> comprenant un système de coordonnées et définissant un ellipsoïde de référence et un géoïde (voir au 2.1.2).

### 3.1.2 Variations spatiales du champ de pesanteur et anomalies gravimétriques

Par rapport à une hypothétique Terre sphérique dont la gravité serait constante sur la surface, la rotation explique la plus grande part des variations observées dans la valeur de la pesanteur pour la Terre réelle. Cependant, le champ de gravité présente lui-aussi des variations spatiales indépendamment de la rotation. Celles-ci sont au plus un ordre de grandeur inférieur aux effets de la rotation. De ce fait, on utilise couramment une unité spécifique pour les quantifier : le Gal et ses sous-multiples, où  $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm s}^{-2}$  (le Gal est donc l'unité d'accélération dans le système d'unité CGS). Ainsi, la différence  $g_p - g_e$  vaut 5.19 Gal. De façon pratique, on remarquera aussi que 1 Gal est presque équivalent à 0.1 % de  $g_0$ . Le nom de l'unité Gal provient du savant Galilée (Galileo Galilei), connu notamment pour son étude de la chute des corps au

3. Le système de coordonnées du WGS 84 est étroitement lié à l'ITRF. Le géoïde est donné par un développement en harmoniques sphériques jusqu'au degré 180. D'autres modèles existent comme l'*Earth Gravitational Model 2008*, complet jusqu'au degré 2159.



TABLEAU 3.1 – Exemples de sources pouvant typiquement causer une variation spatiale de la gravité de l'ordre de une à quelques centaines de fois au maximum (pour les anomalies) l'ordre de grandeur indiqué en première colonne.

Gal	$\text{m s}^{-2}$	$g_0$	Sources possibles
<i>Champ de référence</i>			
981 Gal	9.81	1	Terre sphérique
5.19 Gal	0.0519	0.5 %	Rotation diurne
Gal	$10^{-2}$	0.1 %	–
<i>Anomalies</i>			
mGal	$10^{-5}$	$10^{-6}$	Structures profondes, géologie régionale
$\mu\text{Gal}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$	Géologie locale, cavités, sources anthropiques
nGal	$10^{-11}$	$10^{-12}$	Anomalie de masse de 1 kg à un mètre de distance

XVII<sup>e</sup> siècle. La Table 3.1 indique la correspondance entre les unités habituellement utilisées en gravimétrie. Je ne traiterai que succinctement de ces variations gravimétriques spatiales car elles ne nous occuperont pas dans ce travail. Leur étude intéresse néanmoins une large communauté scientifique et constitue une part importante de la gravimétrie.

Partant d'un modèle de référence pour le champ de gravité, tout écart à la valeur théorique trahit l'existence d'une anomalie que l'on peut alors chercher à expliquer. On veillera à ne pas faire la confusion entre les points de vue géodésique et géophysique : la géodésie s'intéresse à la détermination du géoïde, tandis que la géophysique s'attache à comprendre l'intérieur de la Terre à partir des variations de gravité (Li et Gotze 2001). Concernant le géoïde, sa détermination par satellite révèle des variations spatiales de plusieurs centaines de microgals relativement à la gravité normale donnée par l'Éq. (3.4). Ces variations ont lieu à grande échelle, de la centaine aux milliers de kilomètres. Leur cause la plus importante est la variation de densité des matériaux dans la lithosphère. Elles sont dues au phénomène de compensation isostatique, qui dote les chaînes de montagnes d'une racine crustale moins dense que le manteau environnant, aux remontées de matériaux chauds à l'axe des dorsales ou des points chauds, ou encore à l'épaississement de croûte très vieille dans les cratons. Ces variations à grandes longueurs d'onde spatiales se traduisent par des ondulations des surfaces équipotentielles. Dans le cas particulier du géoïde, les *ondulations du géoïde*  $N$  sont ses écarts à l'ellipsoïde de référence.

Des mesures du champ de gravité à proximité de la surface terrestre (après soustraction du champ théorique (3.4)), mettent en évidence des anomalies beaucoup plus locales. Pour clarifier les choses, je ne parle ici que d'anomalies dites *de Bouguer*, c'est-à-dire des anomalies déjà corrigées des effets du relief au sens large – altitude de mesure<sup>4</sup> et effets des masses du relief – qui n'apportent que des informations d'ordre topographique. À petite échelle, c'est toute la complexité géologique régionale qui induit des anomalies gravimétri-

4. correction *d'air libre*, fonction de la hauteur ellipsoïdale  $h$

ques allant de quelques unités à plusieurs centaines de milligals. L'étude de ces anomalies apporte une contribution d'origine géophysique qui peut avantageusement compléter une analyse géologique. Les anomalies dont les amplitudes ne dépassent pas le milligal sont également étudiées, souvent dans un cadre plutôt géotechnique au vu de l'extension spatiale nettement plus limitée des sources.

### 3.1.3 Gravimétrie absolue et relative, gravimètre à supraconductivité

La mesure du champ de pesanteur s'effectue au moyen de *gravimètres*. Leur principe de fonctionnement dépend du type de mesure. On distingue les mesures *absolues*, donnant la valeur totale de l'intensité de la pesanteur, des mesures *relatives* qui ne donnent accès qu'aux variations du champ. Parmi les gravimètres absolus actuellement utilisés, les gravimètres *balistiques* mesurent les chutes libres successives d'objets, tandis que les gravimètres *atomiques* reposent sur des techniques d'interférométrie atomique. Les gravimètres absolus sont notamment utiles pour établir un suivi temporel discontinu du champ en répétant des mesures en un même lieu année après année. Un tel suivi ne serait pas possible sans gravimètres absolus car la valeur de référence serait perdue entre deux campagnes successives. Inversement, lorsqu'il est possible d'installer durablement un instrument à une station, un gravimètre relatif est parfaitement adapté à condition de l'étalonner correctement initialement à l'aide d'un gravimètre absolu (Hinderer et al. 1991) et d'en assurer le contrôle de temps à autre (Calvo et al. 2014). Cela nécessite toutefois de pouvoir corriger les problèmes instrumentaux occasionnels et imprévisibles, en l'absence d'une référence absolue permanente. Ce travail est généralement fait *a posteriori* en appliquant des traitements adaptés sur les données enregistrées (Chap. 5).

Une autre situation très courante où la gravimétrie ne nécessite que des mesures relatives est la cartographie gravimétrique. Dans ce cas, on peut encore choisir de rattacher les points de mesure à une station de référence où la valeur du champ est connue mais ce rattachement n'est pas toujours nécessaire. Si la dimension temporelle n'est pas le but de l'étude, les variations spatiales peuvent alors être uniquement mesurées à l'aide d'un gravimètre relatif. De fait, les appareils les plus facilement transportables et rapides à mettre en station sont des instruments relatifs, ce qui explique leur usage préférentiel sur le terrain.

Dans ce travail, le choix du type de mesures et d'instruments a essentiellement été conditionné par deux critères : (1) la nécessité d'avoir une bonne continuité dans les enregistrements, sur une longue période de temps et ce, (2) à un maximum de stations différentes afin de pouvoir combiner les différentes séries temporelles. En outre, il est évident que la sensibilité instrumentale doit être suffisamment bonne et l'erreur suffisamment faible pour que le signal recherché – l'effet gravimétrique du mouvement du pôle – ne soit pas perdu dans le bruit. L'ensemble d'instruments répondant à ces critères est le réseau de gravimètres supraconducteurs du *Global Geodynamics Project* (GGP), désormais inté-

gré à l'*International Geodynamics and Earth Tides Service* (IGETS) depuis la XXVI<sup>e</sup> Assemblée Générale de l'UGGI en 2015. Je reviendrai davantage sur le réseau GGP et le fonctionnement des gravimètres supraconducteurs au 5.1.1.

Ces gravimètres sont utilisés dans un grand nombre d'applications allant de l'étude des modes propres, des marées, des nutations libres du noyau et de la graine, jusqu'à l'hydrologie ou la volcanologie. Crossley et al. (1999) proposent une liste plus complète encore des disciplines pouvant tirer profit des gravimètres supraconducteurs. À cela s'ajoute bien sûr l'étude de la rotation de la Terre.

## 3.2 Variations temporelles du champ de pesanteur

### 3.2.1 Les marées

Outre des variations spatiales essentiellement d'origine géologique, le champ de gravité subit également des perturbations temporelles de natures très diverses. Les marées, causées presque exclusivement par l'attraction de la Lune et du Soleil, sont sans équivoque la première source de variation du champ. Elles se manifestent directement en déformant la Terre solide (déplacement vertical de quelques dizaines de centimètres et variation de pesanteur de quelques centaines de microgals) mais aussi indirectement, *via* les marées océaniques qui déforment la croûte terrestre par effet de surcharge (Farrell 1973). Contrairement aux marées de la Terre solide, l'amplitude maximale de cette seconde composante dépend fortement de la position, notamment de la distance du lieu d'observation à la côte<sup>5</sup>.

En plus de celles provoquées par l'action des corps massifs du système solaire, il existe une autre marée : la marée dite *polaire*, due au mouvement du pôle précisément (Munk et MacDonald 1975). Sa composante solide est justement celle qui nous intéressera dans ce travail ; sa composante océanique peut-être calculée dans l'approximation d'une réponse statique de l'océan (Desai 2002). Cependant, certaines mers peu profondes telles la mer du Nord ou la Méditerranée, sont connues pour abriter des marées océaniques polaires dynamiques, ce qui rend nettement plus délicat la détermination de leur effet gravimétrique et de leur interaction avec le mouvement du pôle (Wunsch 1974 ; Dickman 1979 ; Dickman 1988 ; Xie et Dickman 1995).

### 3.2.2 Effets d'origine atmosphérique et océanique

Mis à part les processus tectoniques allant de la bande de fréquences sismiques aux déformations séculaires lentes dont je discuterai au 9.1.2, la seconde source significative des variations temporelles du champ de pesanteur est liée

---

5. Pour les stations suffisamment proches de l'océan, les marées océaniques ont même un effet d'attraction newtonienne direct non négligeable à cause des masses d'eau mises en jeu.

aux mouvements des masses d'air et d'eau dans l'atmosphère et l'hydrosphère (Boy et al. 1998 ; Crossley et al. 2004 ; Neumeyer et al. 2006). La contribution océanique ne se compose pas uniquement des marées. La circulation océanique générale, les courants, les tempêtes majeures, modifient aussi le champ de gravité, bien que l'amplitude des variations ne dépasse pas le microgal à une station comme celle de Strasbourg située à 450 km de la mer ouverte la plus proche, la mer du Nord. Le bruit océanique est une autre cause de perturbation de la gravité, en raison des vagues qui interagissent avec le plateau continental et les côtes essentiellement. Au sens usuel, la contribution atmosphérique désigne les variations barométriques (variations de pression) tandis que la contribution hydrologique regroupe les processus de précipitations, ruissellement, infiltration, etc.<sup>6</sup>. Dans tous les cas, il existe, comme pour les marées océaniques, un effet direct d'attraction newtonienne, dû aux masses d'eau ou d'air, qui se combine avec l'effet indirect des surcharges appliquées à la surface terrestre. Pour tous ces phénomènes, on observe simultanément une composante locale et non locale, la composante locale dominant généralement.

La conversion entre une variation de pression ou une hauteur d'eau et une variation gravimétrique se fait au moyen d'un *facteur d'admittance*. Ce facteur dépend de l'étendue géographique des sources considérées<sup>7</sup> ainsi que de l'environnement de la station de mesure pour l'hydrologie (topographie, nature du sol, etc.). À titre d'exemple, un instrument enterré peut voir son facteur d'admittance hydrologique local changer de signe si l'eau reste stockée au-dessus de lui plutôt qu'en dessous lors des précipitations. De façon encore plus rigoureuse, le facteur d'admittance dépend aussi de la fréquence, ce qui en fait une *fonction de transfert* entre hydrologie ou barométrie et gravimétrie, plutôt qu'un simple facteur scalaire. Toutefois, je ne me préoccuperais pas de cela dans ce travail étant donné que d'autres éléments plus importants doivent être d'abord considérés.

### 3.2.3 Pseudo-force centrifuge

Dans la Section 3.1, nous avons discuté de l'importance de la force centrifuge fictive existant dans le référentiel terrestre en raison de la rotation. Au 3.2.1, nous avons également vu que les variations du potentiel gravitationnel, quelle qu'en soit l'origine, induisaient une déformation de la Terre. Enfin, j'ai rapidement évoqué l'existence de la marée polaire qui est justement la manifestation de ces deux éléments. Cela nous mène au cœur du sujet qui nous occupera dans la majeure partie de ce travail, à savoir la déformation de la Terre solide sous l'action du mouvement du pôle. En effet, lorsque l'axe de rotation se déplace

---

6. L'hydrologie étant liée aux précipitations, cette contribution est aussi d'origine atmosphérique, en un sens, mais on préfère distinguer ces deux composantes. De même, les effets des masses d'eau océanique sont traités différemment de ceux de l'eau intracontinentale apportée par les précipitations.

7. À cause de la courbure de la Terre, une hausse de pression à grande distance induit aussi un accroissement des masses *sous* le gravimètre, par exemple.

TABLEAU 3.2 – Similaire à la Table 3.1 mais pour des sources variables localement au cours du temps.

Galileo	m/s <sup>2</sup>	$g_0$	Sources possibles
100 $\mu$ Gal	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-7</sup>	Marées solides
10 $\mu$ Gal	10 <sup>-7</sup>	10 <sup>-8</sup>	Pression locale
$\mu$ Gal	10 <sup>-8</sup>	10 <sup>-9</sup>	Mouvement du pôle, barométrie, hydrologie
100 nGal	10 <sup>-9</sup>	10 <sup>-10</sup>	Surcharge océanique
nGal	10 <sup>-11</sup>	10 <sup>-12</sup>	FCN > FICN

relativement à l'axe de figure (ou géographique), le potentiel centrifuge varie en chaque point de la Terre qui se déforme en réponse à cette perturbation.

La dépendance spatiale de la variation du champ induite par le mouvement du pôle suit une harmonique sphérique de degré 2 et ordre 1. Qualitativement, cela est dû au fait que, lorsque l'axe de rotation bascule dans une direction quelconque, tous les points situés en avant de l'axe dans le demi-hémisphère supérieur se rapprochent de lui et voient donc la force centrifuge diminuer. Inversement, dans l'hémisphère inférieur, les points s'éloignent et la force centrifuge augmente. De l'autre côté de la Terre, l'effet est opposé, ce qui explique finalement le motif de degré 2 et ordre 1 montré au 5.2 (Fig. (3) de l'article). La perturbation du champ à la surface d'une Terre sphérique rigide est donnée par Wahr (1985) :

$$\Delta g_{\text{rig}} = \Omega_0^2 a [\sin 2\theta (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda) - 2m_3 \sin^2 \theta], \quad (3.5)$$

avec  $\theta$  et  $\lambda$  la latitude et la longitude du lieu de mesure respectivement. La comparaison de la valeur théorique donnée par l'Éq. (3.5) avec la perturbation effectivement mesurée en  $(\theta, \lambda)$  permet de mettre en évidence et potentiellement d'étudier tous les phénomènes et processus physiques qui font de la Terre une planète bien plus complexe qu'un simple corps rigide immuable. Nous verrons tout cela plus en détail au Chapitre 5.

## **Deuxième partie**

# **Analyse conjointe des données du mouvement du pôle et de gravimétrie**



# Fondements théoriques

---

## Sommaire

---

<b>4.1 Intérêt d'une analyse conjointe</b> . . . . .	<b>55</b>
4.1.1 Objectifs . . . . .	55
4.1.2 Principes de la méthode . . . . .	56
<b>4.2 Le facteur gravimétrique</b> . . . . .	<b>57</b>
4.2.1 Définition . . . . .	57
4.2.2 <i>Pseudo</i> -nombres de Love et fonctions propres . . . . .	59
<b>4.3 Anélasticité et phases</b> . . . . .	<b>59</b>
4.3.1 Phase du facteur gravimétrique . . . . .	59
4.3.2 Phase des fonctions propres . . . . .	60
4.3.3 Lien fonctions propres – facteur gravimétrique . . . . .	61
4.3.4 Valeurs d'amplitude et de phase du facteur gravimétrique . . . . .	62

---

*All these equations are like miracles. You take two numbers and when you add them, they magically become one **new** number! No one can say how it happens. You either believe it or you don't.*

---

Calvin (*Calvin and Hobbes*, Bill Waterson)

## 4.1 Intérêt d'une analyse conjointe

### 4.1.1 Objectifs

La grande diversité des phénomènes géophysiques, de la propagation des ondes sismiques au rebond post-glaciaire en passant par les marées ou le mouvement du pôle, pousse à s'interroger sur l'importance du temps caractéristique (ou de son inverse en domaine fréquentiel) dans l'étude des processus géodynamiques. La question fondamentale est de savoir comment la Terre se déforme à différentes échelles de temps. Elle nécessite notamment d'identifier les paramètres géophysiques qui sont eux-mêmes dépendants de la fréquence. On peut également se demander quelles sont les lois capables de décrire la dynamique terrestre, et si celles-ci sont valables à toutes les échelles de temps. Toutes ces



questions ont été le sujet de nombreuses études durant les dernières décennies<sup>1</sup> et de nombreux progrès ont été faits dans ce domaine. Bien évidemment, une des notions fondamentales sous-jacentes à tous ces travaux est la rhéologie, déjà discutée au 2.4 et sur laquelle nous reviendrons au 9.1.

À des échelles de temps intermédiaires, de quelques jours à quelques décennies, un nombre limité de processus déforment le manteau terrestre et les sources d'information sur la rhéologie à ces périodes sont restreintes. Essentiellement, on y trouve les marées de la Terre solide et le mouvement du pôle. Parmi ces phénomènes, le seul mode propre est le mouvement de Chandler dont le principal intérêt est que sa fréquence et son temps caractéristique d'amortissement ne dépendent que de la structure interne de la Terre. Notre objectif est donc d'exploiter les observations de ce mode propre pour apporter davantage de contraintes sur la rhéologie du manteau à la période chandlérienne.

### 4.1.2 Principes de la méthode

Suivant une méthode habituelle, l'étude du mouvement de Chandler, en lien avec l'anélasticité, repose sur la comparaison entre ses effets théoriques prédits et ceux effectivement observés. Logiquement, cette approche nécessite deux sources de données *indépendantes*, l'une alimentant un modèle théorique, l'autre les observations. Dans ce travail, les observations sont les variations gravimétriques enregistrées par des gravimètres supraconducteurs (voir le 3.1.3) et le modèle de référence utilisé comme point de comparaison est directement calculé à partir des séries temporelles des coordonnées du pôle<sup>2</sup>.

Une conversion est nécessaire pour transformer le mouvement du pôle en une perturbation de la pesanteur qui soit comparable aux mesures gravimétriques. Au choix, on peut déterminer la perturbation théorique pour une Terre rigide, ce qui revient à ne calculer que les variations de la pseudo-force centrifuge, ou on peut inclure l'effet de la déformation induite en utilisant un modèle de Terre élastique comme référence. Si la seconde option semble plus naturelle au vu de nos connaissances, la première permet en revanche de rendre trivial le calcul de la variation théorique du champ. En outre, se limiter à une Terre rigide dans les calculs n'empêche nullement de comparer *a posteriori* les résultats à ceux obtenus dans d'autres études, pour d'autres modèles de Terre. De fait, c'est cette démarche qui est habituellement retenue dans la littérature et je la suivrai également. Notons toutefois que cette logique de comparaison implique que les résultats soient exprimés en fonction d'un ou plusieurs paramètre(s) standard(s) couramment utilisé(s) dans la littérature. J'y reviendrai dès la section suivante avec l'introduction du facteur gravimétrique.

Après avoir quantifié la différence entre théorie et observation, il reste à l'interpréter correctement. Un des facteurs les plus importants pour la qualité

1. Citer l'une ou l'autre référence supposée représentative de toutes les études liées à la rhéologie terrestre revêtirait un caractère très arbitraire tant les sujets de recherche sont nombreux. Dans un cadre plus spécifique, quelques références seront données au 9.1.1.

2. à partir de  $m$  plus exactement (voir 2.2.3)

d'une interprétation est bien sûr la qualité des résultats sur lesquels elle repose. J'entends par là la *précision* des résultats (absence de biais systématique) mais surtout l'estimation fiable des *incertitudes*. Ceci semble être évident mais, en pratique, il est parfois très délicat de déterminer les incertitudes avec un bon degré de confiance au terme d'une suite complexe de traitements. De multiples méthodes plus ou moins génériques existent cependant pour estimer au mieux les incertitudes<sup>3</sup>, parfois au prix de temps de calcul sensiblement plus longs. Je discuterai plus longuement au Chap. 5, dans l'article du 5.2, des solutions retenues pour ce travail.

## 4.2 Le facteur gravimétrique

### 4.2.1 Définition

La différence entre les variations théoriques du champ de pesanteur pour une Terre rigide et celles réellement observées sont exprimées à l'aide d'un coefficient sans dimension dépendant de la fréquence : le *facteur gravimétrique*. Celui-ci est donné en fonction de variations gravimétriques théoriques et observées par Defraigne et al. (1994), à partir des développements théoriques faits par Dehant et Ducarme (1987). Sans nous préoccuper pour le moment de la distinction entre Terre sphérique et Terre ellipsoïdale, le facteur gravimétrique est défini comme le rapport de la variation de pesanteur observée  $\Delta g_{\text{obs}}$  sur  $\Delta g_{\text{rig}}$ , la composante normale (suivant la verticale du lieu) du gradient du potentiel perturbateur. Ce gradient est aussi la variation de pesanteur équivalente pour une Terre rigide, ou encore, lorsqu'on s'intéresse à l'effet gravimétrique du mouvement du pôle, le gradient de la variation du potentiel centrifuge. Le facteur gravimétrique est donc

$$\tilde{\delta}(\omega) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\Delta g_{\text{obs}}(\omega)}{\Delta g_{\text{rig}}(\omega)}, \quad (4.1)$$

avec  $\omega$  la pulsation et le tilde de  $\tilde{\delta}$  permet de distinguer le facteur gravimétrique complexe de son amplitude  $\delta$  (voir Éq. (4.3) et (4.5)). Cette égalité en domaine fréquentiel est implicitement valable pour un degré et ordre harmoniques donnés, pour les coefficients du développement des variations gravimétriques en harmoniques sphériques.

Introduisons à présent les nombres de Love<sup>4</sup>  $k_\ell$  et  $h_\ell$  qui quantifient la réponse de la Terre à un potentiel perturbateur extérieur, respectivement pour la variation du géopotential et pour le déplacement radial, au degré harmonique  $\ell$ . Le facteur gravimétrique peut également être formulé au moyen de

3. Propagation analytique des incertitudes, inversion bayésienne, estimation par méthode de Monte Carlo, méthode de *bootstrap*, etc.

4. nommés d'après Augustus Edward Hough Love, mathématicien anglais également connu pour les ondes de surface qui portent son nom et, plus généralement, pour sa contribution à la théorie mathématique de l'élasticité.

ces deux nombres de Love, dans l'approximation d'une Terre sphérique, sous la forme (Agnew 2007)

$$\delta_\ell = 1 + \frac{2}{\ell}h_\ell - \frac{\ell + 1}{\ell}k_\ell. \quad (4.2)$$

On trouvera dans les travaux de Dehant et Ducarme (1987) une expression du facteur gravimétrique pour une Terre ellipsoïdale. Celui-ci dépend alors de la latitude, mais les termes additionnels sont inférieurs aux incertitudes que nous pouvons espérer atteindre pour le moment dans les études gravimétriques du mouvement du pôle (variations inférieures à 0.03 % à longue période) et nous ne les incluons pas dans les calculs ultérieurs. Dans tous les cas, l'Éq. (4.1) demeure la même et seules les définitions de  $\Delta g_{\text{obs}}$  et  $\Delta g_{\text{rig}}$  changent pour tenir compte de l'aplatissement terrestre. Pour aller un peu plus loin dans cette discussion, notons que Dehant, Defraigne et Wahr (1999) distinguent en fait deux définitions du facteur gravimétrique pour une Terre ellipsoïdale, l'une d'après l'*International Center for Earth Tides* (ICET), l'autre d'après Wahr (1981). Cette distinction n'a concrètement d'intérêt que si l'on est déjà capable de mesurer la variation en latitude du facteur gravimétrique. La différence entre les deux approches est par conséquent trop faible pour nous importer ici.

Dans le cas d'une Terre anélastique, les nombres de Love deviennent complexes et dépendants de la fréquence (je les noterai  $\tilde{h}_2(\omega)$  et  $\tilde{k}_2(\omega)$ ) ; il en va donc de même pour le facteur gravimétrique en vertu de l'Éq. (4.2). Le mouvement du pôle engendrant toujours une perturbation de degré  $\ell = 2$ , nous noterons simplement par la suite  $\tilde{\delta}(\omega)$  ou même  $\tilde{\delta}$  le facteur gravimétrique complexe de degré 2,

$$\tilde{\delta}(\omega) = 1 + \tilde{h}_2(\omega) - \frac{3}{2}\tilde{k}_2(\omega). \quad (4.3)$$

Ce facteur a une amplitude  $\delta$  ainsi qu'une phase  $\kappa$ . Toutes deux peuvent être déduites de mesures en utilisant la définition donnée par l'Éq. (4.1) et en introduisant l'amplitude  $A_{\text{obs|rig}}$  et la phase  $\varphi_{\text{obs|rig}}$  de la variation gravimétrique observée et théorique respectivement, soit

$$\Delta \tilde{g}_{\text{obs}} = A_{\text{obs}} e^{i\varphi_{\text{obs}}} \quad \text{et} \quad \Delta \tilde{g}_{\text{rig}} = A_{\text{rig}} e^{i\varphi_{\text{rig}}}. \quad (4.4)$$

On obtient ainsi, pour l'amplitude et la phase du facteur gravimétrique,

$$\delta(\omega) = \frac{A_{\text{obs}}(\omega)}{A_{\text{rig}}(\omega)} \quad (4.5)$$

et

$$\kappa(\omega) = \varphi_{\text{obs}}(\omega) - \varphi_{\text{rig}}(\omega) \quad (4.6)$$

respectivement. Les amplitudes et les phases apparaissant dans les Éq. (4.5) et (4.6) sont celles d'oscillations sinusoïdales de pulsation  $\omega$  composant les signaux gravimétriques théoriques ou observés. J'ai explicitement noté ici leur dépendance fréquentielle mais j'omettrai cette indication dans la suite pour ne pas surcharger la notation. La relation entre le facteur gravimétrique et les séries temporelles en domaines temporel et fréquentiel est discuté plus en détail au 5.2.

### 4.2.2 Pseudo-nombres de Love et fonctions propres

L'expression (4.2) du facteur gravimétrique présente une subtilité lorsqu'on l'applique à l'étude d'un mode propre, en particulier au mouvement de Chandler. En effet, dans ce cas, le potentiel perturbateur n'est pas réellement dû à une source extérieure à la Terre, comme le veut la définition des nombres de Love, mais bien au mouvement de son propre axe de rotation. Pour être rigoureux, je qualifierai donc les nombres de Love de l'Éq. (4.2), de *pseudo-nombres de Love*. Ceux-ci sont très similaires aux nombres de Love habituels dans leur formulation mathématique mais ils ont conceptuellement une définition différente.

Si l'on considère le degré  $\ell = 2$ , le pseudo-nombre de Love  $k_2$  est précisément donné par le rapport de la variation du potentiel de gravité (géopotential) sur le potentiel perturbateur dû au mouvement du pôle. Lorsque nous nous y intéresserons, la variation du géopotential inclura notamment les effets anélastiques. En revanche, la variation de gravité exclut bien sûr l'effet direct de la perturbation centrifuge due au mouvement du pôle lui-même. Sans cela, cet effet serait compté deux fois, comme une cause *et* comme une conséquence du mouvement du pôle. Le pseudo-nombre de Love  $h_2$  est, quant à lui, le rapport du déplacement radial (à un facteur  $g_0$  près) sur le potentiel perturbateur.

Les fonctions apparaissant dans la définition des pseudo-nombres de Love (déplacement, variation du géopotential, etc.) sont les *fonctions propres* du mouvement de Chandler. De même que la fréquence chandlérienne est une fréquence propre du système Terre qui apparaît lors de la résolution des équations d'Euler-Liouville (voir 2.3.1 et 2.3.2), les fonctions propres correspondantes sont les solutions, calculées à cette même fréquence, pour le déplacement, la variation de gravité, etc., associées au mouvement chandlérien. Pour un système oscillant, un ensemble de fonctions propres, calculées à une fréquence propre donnée, caractérisent entièrement un *mode propre*, c'est-à-dire une des formes suivant lesquelles le système peut librement osciller après avoir été excité. Cette définition n'est cependant valide que sous certaines conditions (absence d'effet non linéaires notamment), des couplages pouvant exister entre les modes. Je reviendrai sur la question du couplage entre fonctions propres au chap. 6.

## 4.3 Anélasticité et phases

### 4.3.1 Phase du facteur gravimétrique

La phase du facteur gravimétrique étant définie comme le déphasage entre le champ perturbateur lié au mouvement du pôle et la réponse en gravimétrie, celle-ci est clairement nulle dans le cas élastique. En revanche, qu'en est-il dans un cas anélastique? Avant toute chose, notons que, en réalité, le signal gravimétrique a une double origine et donc deux composantes dont l'une est toujours en phase et l'autre potentiellement déphasée dans le cas anélastique uniquement. La première est l'effet direct du mouvement du pôle sur le champ

de pesanteur : à l'instant exact où l'axe de rotation est déplacé, la pesanteur varie en tout point de la Terre. La seconde composante est liée à la déformation, c'est-à-dire aux déplacements induits par une force centrifuge variable, déplacements qui peuvent en outre s'accompagner d'une redistribution non instantanée des masses en rhéologie viscoélastique. C'est bien cette dernière composante uniquement qui peut être déphasée.

Dans tout ce qui précède, on a explicitement considéré que le mouvement du pôle était la *cause* tandis que la déformation était la *conséquence*. Cette relation de causalité a permis de se faire une idée assez intuitive de la notion de déphasage. Pourtant, le mouvement de Chandler est un mode propre et, mathématiquement, mouvement du pôle et déformation sont tous deux décrits par des fonctions propres sans hiérarchie apparente. Avec quelques autres fonctions propres, celles-ci constituent un ensemble de fonctions qui définissent *conjointement* le mouvement chandlérien. Cette vision « modes propres » apparaît ainsi en contradiction avec la formulation en terme de perturbation extérieure due au mouvement du pôle qui induirait *par la suite* une déformation. Comment concilier la notion de causalité avec celle de mode propre qui ne nécessite théoriquement pas de perturbation extérieure pour exister<sup>5</sup> ? Pour résoudre ce paradoxe apparent, il suffit simplement d'écrire explicitement la forme des fonctions propres que l'on cherche à déterminer pour caractériser le mode propre de Chandler, comme nous allons le voir maintenant.

### 4.3.2 Phase des fonctions propres

La résolution du problème des petites déformations pour un corps à symétrie quasi-sphérique sera discutée au Chap. 7. Pour le moment, il suffit de savoir que cette résolution, faite en domaine de Laplace et en application du Principe de correspondance (voir 2.4.3), amène à des solutions de la forme

$$F(r, t) = F_0(r) e^{i\omega_0 t}. \quad (4.7)$$

Ici,  $F(r, t)$  peut être le déplacement, la variation de la gravité, la variation de la pression, etc.,  $F_0(r) = F_0^R(r) + iF_0^I(r)$  est la fonction propre complexe correspondante et  $\omega_0 = \omega_0^R + i\omega_0^I$  la pulsation propre (de Chandler par exemple). Ceci permet de déduire l'atténuation  $\alpha = \omega_0^I$  ou le facteur de qualité  $Q_0 = \omega_0^R / (2\omega_0^I)$  conformément aux définitions des Éq. (2.26) et (2.27) respectivement. Si on écrit la fonction propre sous la forme

$$F_0(r) = \|F_0(r)\| e^{i\varphi_0(r)} \quad (4.8)$$

avec  $\|F_0(r)\|$  sa norme et  $\varphi_0(r)$  sa phase, alors on peut réécrire la fonction  $F(r, t)$  de l'Éq. (4.7)

$$\begin{aligned} F(r, t) &= \|F_0(r)\| e^{i\varphi_0(r)} e^{i\omega_0 t} \\ &= \|F_0(r)\| e^{i[\varphi_0(r) + \omega_0^R t]} e^{-\omega_0^I t} \\ &= \|F_0(r)\| e^{i[\omega_0^R t + \varphi_0(r)]} e^{-\alpha t}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

5. exceptée une impulsion initiale qui ne nous intéresse pas dans cette discussion

Dans la dernière égalité, on a mis en évidence l'atténuation au cours du temps (exponentielle décroissante) et, il apparaît surtout un terme oscillant à la fréquence propre  $\omega_0^R$  – comme dans le cas élastique – avec cette fois une phase non nulle. Celle-ci n'est rien d'autre que la phase  $\varphi_0(r)$  de la fonction propre  $F_0(r)$ .

Les quelques développements précédents montrent ainsi dans un cas tout à fait général qu'il peut bien y avoir un déphasage *dans le cadre d'un mode propre* entre mouvement du pôle et déformation ou variation gravimétrique résultante, étant donné que rien n'impose que toutes les fonctions propres aient la même phase complexe  $\varphi_0(r)$ , même si cela pourrait survenir occasionnellement de façon fortuite. En notant,  $\varphi_g(a)$  et  $\varphi_m(a)$ , sur la surface  $r = a$ , les phases respectives des deux fonctions propres  $f_g(r)$ , la perturbation gravimétrique due à la déformation, et  $\tilde{f}_m(r)$ , le mouvement du pôle<sup>6</sup> la seule question qui subsiste désormais est de savoir quelle est la relation entre, d'un côté, la différence de phase

$$\Delta\varphi = \varphi_g(a) - \varphi_m(a) \quad (4.10)$$

et, de l'autre, la phase du facteur gravimétrique donnée à l'Éq. (4.6).

### 4.3.3 Lien fonctions propres – facteur gravimétrique

Nous savons à présent que les différentes fonctions caractérisant un mode propre peuvent être déphasées. Nous savons aussi qu'en appliquant le Principe de correspondance, les nombres de Love et donc le facteur gravimétrique (Éq.(4.3)) sont complexes, c'est-à-dire présentent une phase non nulle également. Pour établir le lien entre les phases de toutes ces grandeurs physiques, il faut repartir de la définition des pseudo-nombres de Love (voir 4.2.2) qui composent le facteur gravimétrique, en généralisant ces définitions aux pseudo-nombres de Love complexe  $\tilde{k}_2$  et  $\tilde{h}_2$ .

Si on utilise la notation complexe de l'Éq. (4.8), il devient évident que la phase de  $\tilde{k}_2$  est égale à la différence de phase entre les deux fonctions propres  $\tilde{f}_g(r)$  et  $\tilde{f}_m(r)$ . De même, pour  $\tilde{h}_2$  dont la phase est la différence de phase entre le déplacement radial et  $f_m(r)$  également. Le point important est que les phases de  $\tilde{k}_2$  et  $\tilde{h}_2$  sont égales si le déplacement radial et la perturbation gravimétrique sont elles-mêmes en phase. C'est bien le cas puisque la composante anélastique de la perturbation gravimétrique est essentiellement causée par le déplacement radial des masses dans la Terre. Dans le plan complexe, on voit que la somme  $-3\tilde{k}_2/2 + \tilde{h}_2$  apparaissant dans l'expression du facteur gravimétrique a donc elle aussi une phase égale à celle de  $\tilde{k}_2$  et  $\tilde{h}_2$ . Le premier terme de l'Éq. (4.3), l'unité, a quant à lui une phase nulle mais il n'exprime pas une *perturbation* et, à ce titre, ne doit pas être inclus dans le calcul de la phase telle que définie dans ce paragraphe à partir des fonctions propres et des nombres de Love.

Pour synthétiser les résultats du raisonnement mené jusqu'ici, la phase  $\Delta\varphi$  de l'Éq. (4.10) n'est pas égale à la phase  $\kappa$  du facteur gravimétrique définie à

6. déplacement toroïdal de degré 1 et ordre -1, de phase identique à celle de la perturbation gravimétrique dans le cas rigide théorique

l'Éq. (4.6) mais à la phase  $\zeta$  de la composante *non rigide* de  $\delta$  :

$$\zeta = \text{Arg} \left[ -\frac{3}{2} \tilde{k}_2 + \tilde{h}_2 \right], \quad (4.11)$$

avec  $\text{Arg}[z]$  l'argument (la phase) du nombre complexe  $z$ . En valeur absolue,  $|\zeta|$  est toujours supérieure ou égale à  $|\kappa|$  et ces deux phases ne sont pas indépendantes. Sachant que leurs valeurs sont toujours très petites, on peut déterminer la relation entre celles-ci comme suit. Soit  $\delta_R = \text{Re } \tilde{\delta}$  et  $\delta_I = \text{Im } \tilde{\delta}$ . On a  $\kappa = \arctan \delta_I / \delta_R$  et  $\zeta = \arctan \delta_I / (\delta_R - 1)$ . Sachant que  $\arctan \xi \sim \xi$  pour  $\xi \ll 1$  et que, en outre  $\delta_R \approx \delta$ , on peut facilement en déduire une estimation de  $\zeta - \kappa$ , soit

$$\zeta - \kappa \sim \frac{\kappa}{\delta - 1} \quad (4.12)$$

ou, de façon équivalente,

$$\frac{\zeta}{\kappa} \sim \frac{\delta}{\delta - 1}. \quad (4.13)$$

Pour répondre à la question initiale du lien entre les différentes phases, on a donc  $\Delta\varphi = \zeta$  mais  $\Delta\varphi \neq \kappa$ . Si on veut estimer  $\Delta\varphi$  en fonction de  $\kappa$ , on peut utiliser l'Éq. (4.13) pour aboutir à  $\Delta\varphi \sim \kappa\delta/(\delta - 1)$ . Selon les besoins, on peut bien sûr adopter l'une ou l'autre expression pour le déphasage mais il convient de préciser le choix fait. Cette distinction prendra toute son importance au Chap. 8.

#### 4.3.4 Valeurs d'amplitude et de phase du facteur gravimétrique

Comme je l'avais signalé au 4.1.2, le choix d'une Terre rigide comme référence, plutôt qu'un modèle élastique, entraîne que l'amplitude du facteur gravimétrique est sensiblement différente de 1. Des valeurs de référence ont été calculées par différents auteurs pour différents modèles de Terre. On utilise notamment les deux modèles dits *DDW* de Dehant, Defraigne et Wahr (1999), fondés sur une Terre de type PREM<sup>7</sup>. Le premier est en équilibre hydrostatique et le manteau ainsi que la graine sont élastiques. Le second intègre un manteau anélastique soumis à des mouvements de convection et doté de frontières déformables.

Dehant, Defraigne et Wahr (1999) donnent dans le Tableau 9 l'amplitude du facteur gravimétrique pour ces deux modèles, pour quelques ondes de marées. En interpolant leurs calculs à la période de Chandler, on arrive à une estimation proche de 1.16 pour la composante de  $\delta$  indépendante de la latitude. De façon générale, l'ajout de l'anélasticité tend à augmenter la valeur du modèle élastique d'au plus 0.1 %. En ce qui concerne la phase, la valeur élastique reste bien évidemment nulle puisque la réponse en déformation est instantanée. Dans le

7. *Preliminary Reference Earth Model* (Dziewonski et Anderson 1981)

cas anélastique en revanche, une estimation de  $\kappa$  est donnée dans Dehant et Zschau (1989) pour la bande de périodes semi-diurnes à mensuelles avec une valeur entre  $-0.005^\circ$  et  $-0.01^\circ$  (selon la prise en compte de l'ellipticité ou non et la méthode de calcul utilisée).

En lien avec la section 4.3.3 précédente, on remarquera que, dans le cas élastique uniquement, on a  $\kappa = \zeta = 0$ . Si on tient compte de l'anélasticité,  $\delta$  reste proche de 1.16 mais  $\kappa$  devient non nulle, l'Éq. (4.13) permet alors d'estimer que  $\zeta$  (ou  $\Delta\varphi$ ) est de l'ordre de  $7\kappa$ .





# Détermination du facteur gravimétrique

---

## Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Présentation détaillée des données</b>	<b>65</b>
5.1.1	Le réseau de gravimètres GGP/IGETS	65
5.1.2	Données auxiliaires	68
<b>5.2</b>	<b>Détermination des effets gravimétriques de la marée polaire</b>	<b>71</b>
5.2.1	Complément à l'article	84

---

*Les nombres montent tout d'abord, puis s'obscurcissent et deviennent irréguliers avant de s'incurver et de serpenter vers le bas.*

---

Daniel Tammet, *Je suis né un jour bleu*

## 5.1 Présentation détaillée des données

### 5.1.1 Le réseau de gravimètres GGP/IGETS

**Historique, organisation.** Le réseau GGP de gravimètres supraconducteurs, brièvement introduit au 3.1.3, s'inscrit dans un projet plus vaste, le *Global Geodynamics Project* proprement dit, qui s'est déroulé en plusieurs phases depuis le 1<sup>er</sup> juillet 1997. Jusqu'à récemment, il était supervisé par l'*International Association of Geodesy* (IAG) sous forme de Projet Inter-commission, rattaché à la Commission 3 (*Earth Rotation and Geodynamics*) et à la Commission 2 (*The Gravity Field*). Comme je l'ai déjà indiqué, ces activités et données sont désormais intégrées à un nouveau service de l'IAG, l'*International Geodynamics and Earth Tides Service* (IGETS).

Ainsi que l'indique le site internet du projet<sup>1</sup>, le but du GGP/IGETS est notamment d'enregistrer le champ de gravité terrestre avec une grande précision en de nombreuses stations à travers le monde, en utilisant des gravimètres supraconducteurs. Chaque site est visité régulièrement avec un gravimètre absolu pour déterminer les variations séculaires et vérifier l'étalonnage. D'autre part, le

---

1. <http://www.eas.slu.edu/GGP/ggphome.html>, consulté le 4 mars 2016.

GGP a aussi vocation à maintenir des standards pour le déploiement de gravimètres GWR<sup>2</sup> : sites, instrument, acquisition et traitement des données, etc. Les différentes stations sont maintenues par des groupes indépendants de scientifiques au niveau national. Pour certains sites, les données sont temporairement en accès limité jusqu'à un ou deux ans après leur acquisition, tandis que d'autres sites diffusent les données librement dès leur transmission. Celles-ci sont disponibles via l'ISDC (*Information System and Data Center*) du GFZ (GeoForschungsZentrum) de Potsdam.

**Les gravimètres relatifs supraconducteurs.** Le principe de fonctionnement des gravimètres supraconducteurs est discuté dans Hinderer et al. (2007). Comme leur nom l'indique, le fonctionnement de ces gravimètres repose sur la supraconductivité. Une sphère diamagnétique y est refroidie par de l'hélium liquide et maintenue en lévitation grâce à un champ magnétique généré par un courant. Les variations de ce courant nécessaires pour maintenir immobile la sphère diamagnétique sont proportionnelles aux variations d'intensité du champ gravitationnel ambiant qui peuvent ainsi en être déduites. En pratique, la précision (répétabilité) de mesure de ces instruments atteint le nanogal avec une incertitude de l'ordre d'une centaine de nanogals (Crossley et al. 1999), incertitude notamment liée au facteur d'étalonnage convertissant la valeur du courant injecté vers la valeur d'accélération correspondante.

Plusieurs points sont essentiels dans ce dispositif. D'abord, l'utilisation d'un champ magnétique dans la mesure implique que l'appareil soit totalement isolé par un blindage du champ magnétique terrestre ambiant pour ne pas en subir les variations. Ensuite, il est primordial de contrôler la température du dispositif, le phénomène de supraconductivité étant étroitement lié à celle-ci. Les gravimètres supraconducteurs doivent donc être totalement isolés, ce qui les rend quasiment insensibles aux variations environnementales de température, pression (par effet direct sur les composants de l'instrument) et humidité. Enfin, l'alignement de l'instrument avec la verticale, c'est-à-dire suivant le vecteur  $\vec{g}$  du champ de pesanteur local, est effectuée de façon automatique avec une précision recherchée inférieure à  $1 \mu\text{rad}$ , pour avoir accès en théorie à des mesures de variations de gravité inférieures à 1 nGal.

**Données GGP : gravimétrie et pression** Les séries gravimétriques brutes initiales sont en volts et échantillonnées toutes les secondes. Elles contiennent des signaux géophysiques mais également un certain nombre d'artefacts instrumentaux à corriger. Des pré-traitements effectués par l'ICET, ou les opérateurs des stations eux-mêmes selon les cas, permettent notamment de s'affranchir des signaux téléseismiques, dus aux tremblements de terre majeurs, et de corriger les *spikes*<sup>3</sup>. Suite à ces corrections, il reste toutefois des sauts et des interruptions

2. gravimètres de l'entreprise californienne *GWR Instruments*

3. pics brusque et bref dans les séries

dans les séries. Après décimation et multiplication par le facteur de conversion approprié, l'ICET fournit ainsi des séries intermédiaires échantillonnées à la minute. Le second sous-échantillonnage aboutit quant à lui aux séries gravimétriques horaires en  $\text{nm s}^{-2}$  (dixièmes de  $\mu\text{Gal}$ ), utilisées dans ce travail. J'ai déjà discuté au 3.2.2 de l'impact des variations barométriques sur la gravité. Pour corriger au mieux ces effets, les données gravimétriques du GGP sont accompagnées des valeurs de pression atmosphériques (en hPa) mesurées sur le même site. Si l'on pouvait corriger tous les artéfacts instrumentaux, les séries résultantes ne contiendraient plus que des signaux d'origine astro-géophysique. En pratique, il reste au moins la dérive instrumentale, dont la correction est reportée à l'étape d'analyse du signal proprement dite, et quelques sauts.

D'une station à une autre, la longueur des séries temporelles est évidemment très variable, certaines stations n'étant en activité que depuis quelques années, tandis que d'autres le sont depuis des décennies. Cela a une incidence importante lorsqu'on cherche à combiner d'une façon ou d'une autre les séries temporelles de plusieurs stations. En effet, combiner des séries enregistrées à différents instants n'a de sens que si les caractéristiques du signal que l'on cherche à déterminer n'ont pas variées au cours du temps. Dans le cas du mouvement de Chandler notamment, cette condition n'est probablement pas vérifiée en raison des possibles sauts de phases et parce que nous n'en savons pas suffisamment sur les mécanismes d'excitation qui varient eux-mêmes au cours du temps (voir le 1.3.2).

**Couverture géographique.** Il y a actuellement (mai 2016) 27 stations IGETS actuellement en opération. Parmi celles-ci, on en trouve

- 3 en Amérique du Nord
- 1 en Amérique du Sud
- 14 en Europe (dont 1 au Svalbard)
- 2 en Afrique
- 5 en Asie (Chine, Taïwan et Inde)
- 1 en Australie
- 1 en Antarctique

À cette liste s'ajoutent 11 stations désormais arrêtées (4 en Europe et 2 en Asie).

La couverture géographique est relativement hétérogène. Au-delà des contraintes liées à la répartition océans-continentes sur Terre, il faut noter que 4 stations seulement sont actuellement situées dans l'hémisphère sud et que 13 stations sur 23 dans l'hémisphère nord sont en Europe continentale, la majorité d'entre elles étant de plus concentrée dans une région de quelques centaines de kilomètres de côtés au nord des Alpes. De telles disparités géographiques ne sont pas sans conséquence sur les études s'intéressant aux variations spatiales du champ de pesanteur ou, comme exposé au 5.2, lors de la combinaison des signaux de différentes stations pour améliorer le rapport signal sur bruit<sup>4</sup>. En ce

---

4. À ce sujet, notons que la proximité d'une station à la côte peut avoir un impact considérable sur son niveau de bruit (Ny-Ålesund au Svalbard par exemple).



FIGURE 5.1 – Le réseau de gravimètres supraconducteurs de l'IGETS. Les ronds jaunes représentent les stations actuellement en fonctionnement, les triangles rouges sont les anciennes stations aujourd'hui arrêtées (ou pour lesquelles il n'y a pas d'information). La Fig. 5.2 détaille les stations européennes.

qui concerne la position individuelle des stations, leur latitude est déterminante dans l'étude d'un phénomène tel que le mouvement du pôle, dont l'effet est nul aux pôles et à l'équateur. Pour étudier le mouvement de Chandler, les stations les plus sensibles sont ainsi celles situées aux latitudes médianes dans les deux hémisphères, ce qui est fort heureusement le cas pour les nombreuses stations européennes.

### 5.1.2 Données auxiliaires

**Marées de la Terre solide.** Les marées de la Terre solide sont à l'origine des variations temporelles de plus grande amplitude dans les séries gravimétriques (voir au 3.2.1). Toutefois, les composantes de marée principales sont à courtes périodes (diurnes et semi-diurnes) et ne sont donc pas dans la bande de fréquences du mouvement du pôle. En outre, mêmes les marées plus longues périodes ne nécessitent pas, en théorie, d'être retirées, puisque aucune d'entre elles ne survient à la fréquence de Chandler<sup>5</sup>. En pratique, je soustrais tout de même les marées de la Terre solide aux données gravimétriques, ne serait-ce que pour détecter et corriger plus facilement les sauts dans les séries temporelles ou étudier l'influence des autres corrections (voir paragraphes suivants), moins précises par nature. Les paramètres de marées sont déterminés pour chaque

5. De fait, des traitements comparatifs avec ou sans correction des marées n'ont pas montré de différences notables dans les résultats.

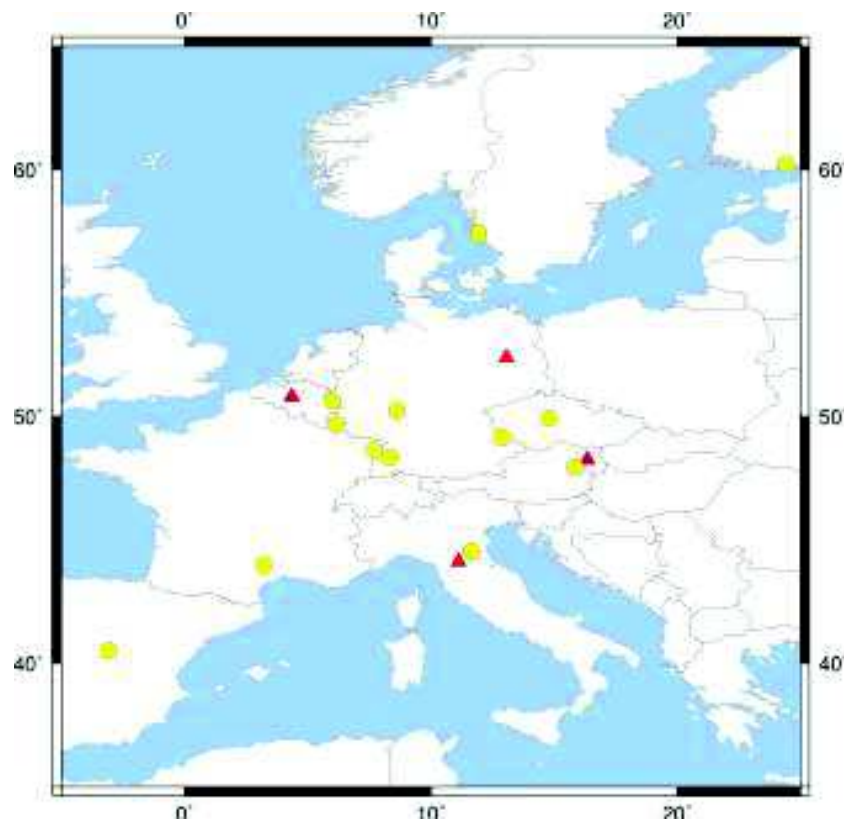


FIGURE 5.2 – La partie européenne du réseau de gravimètres supraconducteurs de l'IGETS (voir aussi la Fig. 5.1).

station à l'aide de la suite de programmes ETERNA (Wenzel 1997), les séries temporelles de marées synthétiques étant ensuite générées à l'aide du logiciel TSoft (Van Camp et Vauterin 2005). Ce dernier a également servi à assembler les séries temporelles pour chacune des stations et à repérer manuellement certains sauts.

**Données de surcharges hydrologiques et barométriques.** Les séries temporelles corrigeant les surcharges d'origine hydrologique et barométrique proviennent du *Loading Service*<sup>6</sup> (Boy et al. 2002 ; Boy et Hinderer 2006 ; Boy et Lyard 2008), sauf pour la barométrie locale, distribuée dans les données GGP (voir le 5.1.1 et ci-dessous). Les modèles utilisés pour le calcul de la charge sont ceux de l'*European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* (ECMWF). Plus précisément, il s'agit des données ERA-Interim (ECMWF *reanalysis*), produites par une réanalyse régulière d'observations antérieures. Les surcharges atmosphériques sont calculées suivant l'hypothèse d'une réponse océanique de type baromètre inversé<sup>7</sup> ou, sur les périodes de temps durant lesquelles les données sont disponibles, à l'aide du modèle MOG2D (Modèle aux ondes de gravité 2D)

6. Les informations de cette section sont tirées de <http://loading.u-strasbg.fr/GGP>

7. Une pression appliquée à la surface des océans induit une baisse du niveau marin.

qui intègre une réponse dynamique des océans. Les séries utilisées ici sont des séries échantillonnées à 3 ou 6 heures.

J'ai déjà indiqué au 3.2.2 que les variations barométriques et hydrologiques apportaient une contribution locale et non locale. La contribution locale a été calculée par approximation de Bouguer simple pour l'hydrologie et par intégration autour du gravimètre, dans un volume conique au-dessus de la surface, de hauteur 60 km et de rayon  $0.10^\circ$  ou  $0.25^\circ$ , pour la pression. Les facteurs de conversion locaux (impédance) indépendants de la fréquence sont :

- $-3.0668 \text{ nm s}^{-2} \text{ hPa}^{-1}$  pour la pression dans un rayon de  $0.25^\circ$ ,
- $\pm 4.2677 \text{ nm s}^{-2} \text{ cm}^{-1}$  pour l'hydrologie, la valeur exacte dépendant de la position de la station relativement au sol.

Les variations locales de pression étant fournies par le réseau GGP pour chaque station, j'utilise les données GGP pour calculer l'effet local de la pression, plutôt que les séries du *Loading Service*. La correction barométrique appliquée dans ce travail est donc la pression locale multipliée par le facteur  $-3.0668 \text{ nm s}^{-2} \text{ hPa}^{-1}$ , plus la contribution non locale. Le principe pourrait être le même pour l'hydrologie mais les données hydrologiques n'étant pas systématiquement disponibles au sein du réseau GGP, j'ai choisi d'utiliser les séries du *Loading Service* aussi bien pour la contribution locale que non locale.

**Données de surcharge océanique.** Comme indiqué au 3.2, la surcharge océanique présente de multiples composantes. La surcharge hors marée – due aux tempêtes, courants, à la circulation à grande échelle, etc. – est elle-aussi modélisée par le *Loading Service* (Boy et al. 2009), grâce aux produits du Consortium ECCO (*Estimating the Circulation and Climate of the Ocean*), version 1 (résolution spatiale de 1 degré et résolution temporelle de 12 heures). Cette surcharge déduite des données ECCO est exclusivement utilisée lorsque les séries MOG2D ne sont pas disponibles, sans quoi il y aurait redondance entre ces modèles, tous deux étant forcés par les vents. La surcharge due aux marées océaniques peut être calculée à partir d'un des nombreux modèles de marées océaniques<sup>8</sup> globaux ou locaux et à l'aide de différentes suites de programmes telles GOTIC2 (*Global Oceanic Tidal Correction*) de Matsumoto et al. (2001) ou SPOTL (*Some Programs for Ocean-Tide Loading*) d'Agnew (2012). Toutefois, l'amplitude de la surcharge océanique due aux marées luni-solaires décroît très rapidement en s'éloignant des côtes et, contrairement à la marée polaire, elle n'existe pas à la fréquence chandlérienne qui nous intéresse. Sa correction n'est donc pas essentielle dans cette étude. *A contrario*, la surcharge due à la marée océanique polaire, quoique de faible amplitude, doit être correctement corrigée car les fréquences auxquelles elle apparaît sont celles du mouvement du pôle. Elle est également distribuée par le *Loading Service* et calculée à partir des données IERS du mouvement du pôle.

8. NOA99b, FES04, TPX07.2 ou EOT11A, pour n'en citer que quelques uns (voir Agnew (2012) pour une liste plus complète et davantage de détails).

## 5.2 Détermination des effets gravimétriques de la marée polaire

L'article intégré dans cette section présente l'étude conjointe des données de gravimétrie du réseau GGP et de celles du mouvement du pôle, distribuées par l'IERS. Il explique l'ensemble des traitements appliqués, notamment les corrections de sauts dans les données, ainsi que les corrections gravimétriques discutées précédemment, au 5.1.2. Son but est d'estimer localement puis globalement le facteur gravimétrique introduit au 4.2. L'analyse globale a pour spécificité de s'appuyer sur une méthode de sommation (*stacking*) (Cummins et al. 1991) qui combine les séries gravimétriques pondérées en fonction de la position des stations (le mouvement du pôle ayant un effet gravimétrique suivant un motif spatial de degré 2 et ordre 1, voir au 3.2.3) et selon la qualité des séries temporelles individuelles. L'estimation des incertitudes sur les résultats, de même que les sources d'erreur font aussi l'objet d'une discussion dans cet article.





# Estimation of the gravimetric pole tide by stacking long time-series of GGP superconducting gravimeters

Yann Ziegler, Jacques Hinderer, Yves Rogister and Séverine Rosat

*IPGS/EOST, Université de Strasbourg/CNRS 5 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex, France. E-mail: [yann.ziegler@unistra.fr](mailto:yann.ziegler@unistra.fr)*

Accepted 2016 January 6. Received 2016 January 5; in original form 2015 July 15

## SUMMARY

We compute the gravimetric factor at the Chandler wobble (CW) frequency using time-series from superconducting gravimeters (SG) longer than a decade. We first individually process the polar motion and data at each individual gravity station to estimate the gravimetric factor amplitude and phase, then we make a global analysis by applying a stacking method to different subsets of up to seven SG stations. The stacking is an efficient way of getting rid of local effects and improving the signal-to-noise ratio of the combined data sets. Using the stacking method, we find a gravimetric factor amplitude and phase of  $1.118 \pm 0.016$  and  $-0.45 \pm 0.66$  deg, respectively, which is smaller in amplitude than expected. The sources of error are then carefully considered. For both local and global analyses, the uncertainties on our results are reliably constrained by computing the standard deviation of the estimates of the gravimetric factor amplitude and phase for increasing length of the time-series. Constraints on the CW anelastic dissipation can be set since any departure of the gravimetric factor from its elastic value may provide some insights into the dissipative processes that occur at the CW period. In particular, assuming given rheological models for the Earth's mantle enables us to make the link between the gravimetric factor phase and the CW quality factor.

**Key words:** Time variable gravity; Earth rotation variations; Elasticity and anelasticity.

## 1 INTRODUCTION

The movement of the Earth rotation axis is made of various components. The Chandler wobble (CW) is a rotational eigenmode with a period around 435 sidereal days, whereas all the other components are motions forced by external sources with periods ranging from a few hours to several years and more. Contrary to the frequencies of the forced polar motions, which are mainly related to astronomical parameters, such as the positions and masses of the Sun and the Moon, the CW eigenfrequency only depends on Earth parameters. Another obvious distinction between the CW and the forced motions comes from the excitation sources. Although still debated, the CW excitation is thought to originate mainly from the oceans and atmosphere (e.g. Wahr 1982, 1983; Gross 2000; Brzeziński & Nastula 2002; Aoyama *et al.* 2003) and, maybe, earthquakes (Smylie *et al.* 2015). Geomagnetic jerks have also been proposed to explain phase jumps (Bellanger *et al.* 2001; Gibert & Le Mouél 2008).

Another important feature of the polar motion is its attenuation with time due to dissipative processes. Dissipation occurs in different ways: anelastic deformation in the mantle, viscomagnetic coupling at the core–mantle boundary, friction at the bottom of the oceans, etc. The quality factor  $Q$  is a parameter that quantifies the dissipation. If dissipation occurring in the mantle is the main source of attenuation,  $Q$  may be related to the rheological parameters of

the mantle. Its determination at the CW frequency can then provide additional constraints and new insight on the Earth rheology.

Besides, the movement of the Earth rotation axis induces a perturbation of the surface gravity field through (1) the variation of the centrifugal pseudo-force and (2) surface deformation and mass redistribution. These changes have been successfully observed thanks to superconducting gravimeter (SG) measurements. Because calibration changes in SGs are negligible and because their drift rates are quite small (Hinderer *et al.* 2007), it has been shown that SGs are well suited for studies of long-term polar motion (Loyer *et al.* 1999; Xu *et al.* 2004; Ducarme *et al.* 2006; Hu *et al.* 2007; Chen *et al.* 2009). Over the last 15 yr, departures from purely elastic response to polar motion have been sought in gravimetric signals. Essentially, within the given uncertainty range, all of the results obtained so far failed in revealing any anelastic effects, although the possibility of their existence has not been excluded.

In this study, we similarly address this question of anelasticity by investigating an alternative method that makes profit of the geographic coverage of the SG records. As shown in Section 3, the main difficulties in SG time-series processing are due to local gravimetric perturbations, in a large sense that encompasses both instrumental artefacts and local geophysical effects, the key point being that the needed corrections are both thorny to handle and site-specific. We endeavour to circumvent this complexity by stacking the gravity

time-series, as explained in Section 4, to decrease the relative impact of local effects unrelated to the polar motion. Doing so, we aim at increasing both the accuracy and the precision needed to study anelasticity at the CW period.

Importantly, this analysis relies on time-series longer than a decade, as is the common time span used in the stacking. This long duration of the recordings is one pillar of this kind of work knowing that the Chandler movement and the annual signal are only theoretically separable in the Fourier domain for time-series longer than 6.5 yr approximately, when the frequency resolution (equal to  $1/T$  where  $T$  is the length of the time-series) is, at least, equal to the separation in frequency between the Chandlerian and annual peaks. Thus, only the longest gravity records will let us distinguish the two components and provide reliable results.

## 2 OBSERVATION OF GRAVITY VARIATIONS

The ground measurement of the time variations of the gravity provides a multicomponent signal from which we want to extract the effect of periodic polar motion. We write the total measured gravity variation  $\Delta g$ , either in the time domain or in the frequency domain, as the sum of the polar motion perturbation  $\Delta g_m$ , a geophysical signal  $\Delta g_{\text{geo}}$ , a term of instrumental origin  $\Delta g_{\text{SG}}$  and random noise  $n$ :

$$\Delta g = \Delta g_m + \Delta g_{\text{geo}} + \Delta g_{\text{SG}} + n. \quad (1)$$

$\Delta g_{\text{geo}}$  contains the gravity variations due to the solid Earth tides and to the atmospheric, hydrological and oceanic perturbations.  $\Delta g_{\text{SG}}$  combines the drift, occasional instrumental defects and secular or periodic artefacts.

The correction for or removal of  $\Delta g_{\text{geo}}$ ,  $\Delta g_{\text{SG}}$  and  $n$  will be considered in Section 3.2. It is impossible, by definition, to remove random noise from a signal but we can decrease its relative amplitude by combining different time-series, as explained in Section 4.

Once we will be able to determine  $\Delta g_m$  from the observations, say  $\Delta g_m^{\text{obs}}$ , we will compare it to the theoretical gravimetric perturbation  $\Delta g_m^{\text{rig}}$  of a rigid Earth model undergoing the same polar motion (Wahr 1985):

$$\Delta g_m^{\text{rig}} = \Omega_0^2 r [\sin 2\theta (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda) - 2m_3 \sin^2 \theta], \quad (2)$$

where  $r$ ,  $\lambda$  and  $\theta$  are the spherical coordinates of the station,  $\Omega_0$  is the unperturbed angular velocity of the system of reference attached to the Earth and  $m_1$ ,  $m_2$  and  $m_3$  are the usual parameters defining the perturbation of the instantaneous rotation vector of the Earth  $\boldsymbol{\omega} = \Omega_0(m_1, m_2, 1 + m_3)$ . It is often convenient to write the polar motion in complex notation:

$$\tilde{m} = m_1 + im_2, \quad (3)$$

where  $i^2 = -1$ .

Any departure of the observed gravity perturbation from the theoretical value given by eq. (2) may be interpreted as a manifestation of the Earth deformation. In the frequency domain, the ratio of the two perturbations is the gravimetric factor  $\tilde{\delta}$ :

$$\tilde{\delta}(\omega) = \frac{\Delta \tilde{g}_m^{\text{obs}}(\omega)}{\Delta \tilde{g}_m^{\text{rig}}(\omega)}, \quad (4)$$

where  $\omega$  is the angular frequency. If we write  $\tilde{\delta}$ ,  $\Delta \tilde{g}_m^{\text{obs}}$  and  $\Delta \tilde{g}_m^{\text{rig}}$  as

$$\tilde{\delta} = \delta e^{i\kappa} \quad (5)$$

$$\Delta \tilde{g}_m^{\text{obs}} = A_{\text{obs}} e^{i\varphi_{\text{obs}}} \quad (6)$$

$$\Delta \tilde{g}_m^{\text{rig}} = A_{\text{rig}} e^{i\varphi_{\text{rig}}}, \quad (7)$$

we have

$$\delta = \frac{A_{\text{obs}}}{A_{\text{rig}}} \quad (8)$$

and

$$\kappa = \varphi_{\text{obs}} - \varphi_{\text{rig}}. \quad (9)$$

If the deformation was purely elastic,  $\kappa$  would be zero for any Earth model. Whether the deformation is elastic or not,  $\delta$  depends on the Earth model. For instance, for the elastic spherical PREM model (Dziewonski & Anderson 1981),  $\delta = 1.16$  if  $\omega$  is small and significantly different from any eigenfrequency of the model. Anelasticity would make  $\kappa$  different from zero and modify  $\delta$ . If the polar motion is not corrected for the influence of the oceanic pole tide, its value should increase up to 1.185 in Western Europe (Boy *et al.* 2000) and induce a phase of a few tenths of a degree (Chen *et al.* 2008). In several studies devoted to the estimate of the gravimetric amplitude and phase either at individual stations or in a global analysis (Loyer *et al.* 1999; Xu *et al.* 2004; Ducarme *et al.* 2006; Chen *et al.* 2009), departures from the elastic values have been attributed among other things to either measurements artefacts or geophysical phenomena that were not properly corrected for (e.g. hydrology or oceanic pole tide).

It is reasonable to assume that the gravimetric factor is constant over the duration of the records because it depends on geophysical parameters that vary on geological timescales. However, both the amplitude and phase of  $\tilde{m}$  at the Chandler frequency, that is the CW, vary with time (Chao & Chung 2012). For instance, several phase jumps have been observed during the last century (Gibert *et al.* 1998; Malkin & Miller 2010). The changes in the amplitude are due to attenuation and irregular excitation. Even so, these variations impact both the theoretical and observed gravimetric perturbations in the same way and should not cause any change in the gravimetric factor.

Moving to the time domain, the signal can be modeled by a sum of  $n$  sine functions with constant amplitudes  $A_j$ , phases  $\varphi_j$  and real frequencies  $f_j$ , that is,

$$\Delta g_m(t) = \sum_{j=1}^n A_j \sin(2\pi f_j t + \varphi_j). \quad (10)$$

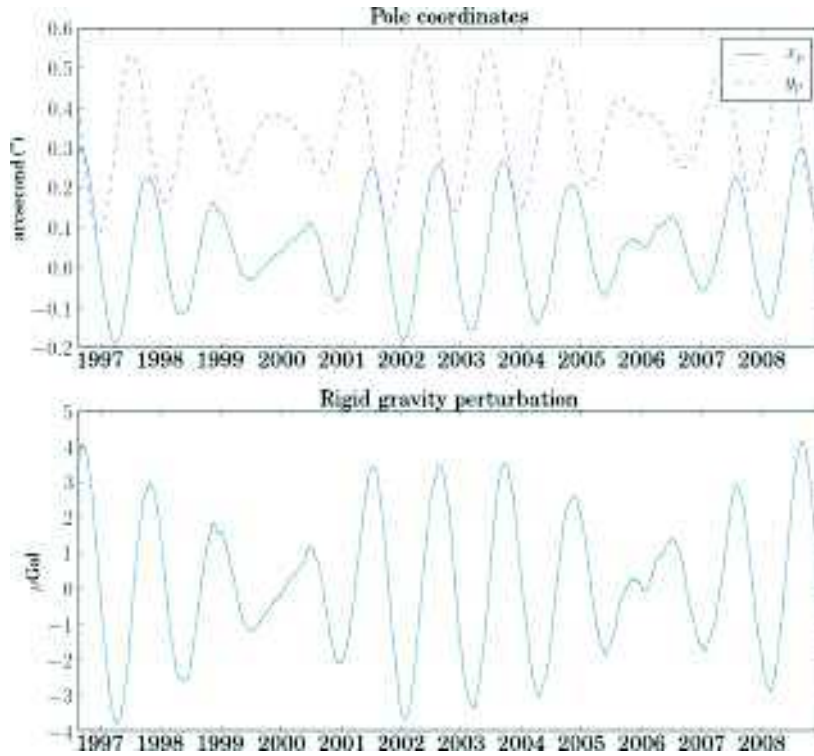
We can then compute the gravimetric factor amplitude and phase for a given frequency  $f_j$  using formulae equivalent to the ones in the frequency domain:

$$\delta(f_j) = \frac{A_j^{\text{obs}}}{A_j^{\text{rig}}} \quad (11)$$

and

$$\kappa(f_j) = \varphi_j^{\text{obs}} - \varphi_j^{\text{rig}}. \quad (12)$$

For harmonic motions, it is obvious that the two definitions (8) and (11) are identical, whereas for excited, damped, anharmonic or any slightly more complex motion, the equation in time domain gives a practical way of calculating the gravimetric factor that may differ from the first one. Albeit  $A_j$  and  $\varphi_j$  are considered constants to be determined, one knows that they vary with time. The observed Chandler period is unknown too, because it may be distinct from the



**Figure 1.** Pole coordinates (top) and corresponding gravity perturbation of a rigid Earth model given by eq. (2) (bottom) at Strasbourg J9 gravimetric station.

eigenperiod defined by the Earth's geophysical properties (Bizouard *et al.* 2011). Then, the period should just be one of the parameters that have to be adjusted. Furthermore, doing so, we will fit a hypothetical linear variation of the phase with time, since, for a given wave, it is equivalent to setting a constant phase with a modified frequency as shown in the following equality:

$$\sin[2\pi f_j t + (\varphi_j^1 t + \varphi_j^0)] = \sin[(2\pi f_j + \varphi_j^1)t + \varphi_j^0]. \quad (13)$$

It is more complicated to take the amplitude variation into account, even in the case of a simple linear one, for numerical reasons: it is both very slow and unstable to fit sinusoids and cosinusoids with varying amplitude. That is why we will assume that all the waves have constant amplitudes. Based on the obtained misfits, this assumption will be shown *a posteriori* to be reasonable. In addition, as previously noted, even if the amplitudes vary in the two time-series, they must have identical variations which should not impact the gravimetric factor estimation.

### 3 POLAR MOTION AND GRAVITY DATA

#### 3.1 IERS data

The Earth rotation data are provided by the International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS) as a set of six parameters with their uncertainties: the five standard Earth orientation parameters (EOPs), namely the celestial pole offsets  $dX$  and  $dY$ , the perturbation of the rotation  $UT1 - UTC$  and the pole coordinates  $x_p$  and  $y_p$ , plus the length of day variation  $\Delta LOD$ . Details about their physical meaning and their measurement can be found in McCarthy & Petit (2003) and Bizouard (2014). In this work, we use the EOP 08 C04 time-series, started in 1962 and given at a daily frequency.

To compute the gravimetric perturbation for a rigid Earth as given by eq. (2), we need to express the three parameters ( $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ )

as a function of the EOPs. Actually,  $m_3$  is related to the variation of the angular velocity of the rotation of the Earth and its coupling with  $m_1$  or  $m_2$  compared to the coupling between  $m_1$  and  $m_2$  makes it negligible in the study of polar motion, as  $m_3$  is two orders of magnitude smaller as indicated by Loyer *et al.* (1999).

The relation between  $\tilde{m}$  as defined in eq. (3) and the EOPs was first established by Brzeziński & Capitaine (1993):

$$\tilde{m} = p - i \frac{\dot{p}}{\Omega_0} + i \frac{\dot{P}}{\Omega_0} e^{i\Omega_0 t} \quad (14)$$

using the complex number  $p = x_p - iy_p$  where  $x_p$  and  $-y_p$  are the coordinates of the celestial intermediate pole (CIP) as seen from the International Terrestrial Reference Frame and  $P = dX \sin \epsilon_0 + idY$  is the pole offset in obliquity and longitude as seen from the International Celestial Reference Frame, with  $\epsilon_0$  the mean obliquity of reference. The CIP is always less than a few centimetres apart from the instantaneous pole of rotation we are interested in.

Eq. (14) fills the gap between a purely geometrical description of polar motion and dynamic theories of Earth rotation that rely on the instantaneous rotation vector. For high-frequency motions, it is necessary to use this rigorous relation as pointed out by Loyer *et al.* (1999), but for low-frequency phenomena such as the CW or annual oscillation, the error in the computation of  $\Delta g_m^{\text{rig}}$  is below 0.5 per cent, that is, below the accuracy we can reasonably achieve. This assertion has been verified by comparison of our results with or without using eq. (14), the difference on  $\Delta g_m^{\text{rig}}$  being below  $0.01 \mu\text{Gal}$  at mid-latitude. Thus, we simply use the relation

$$\tilde{m} = p. \quad (15)$$

Fig. 1 shows the pole coordinates ( $x_p$ ,  $y_p$ ) between 1996 August and the end of 2009. Also shown is the corresponding gravity perturbation of a rigid Earth model given by eq. (2) at the Strasbourg J9 station. A polar motion of a few hundred milliarcseconds causes a radial gravity variation of at most a few microGals at mid-latitudes.

The 6.5 yr beating between the annual component and the CW is clearly visible.

### 3.2 GGP data

The gravimetric data used in this work come from the Global Geodynamics Project (GGP; Crossley *et al.* 1999), now disrupted to be integrated in the newly created International Geodynamics and Earth Tides Service. Established in 1997, the GGP network was made of about 35 gravimetric stations that have provided decades of gravity recordings. Because of the closeness of the CW and annual signals in the frequency domain, only the uninterrupted time-series longer than the beating period of the two oscillations are useful for this study.

The hourly data are prepared by the International Centre for Earth Tides (ICET) and provided by the Information Systems and Data Center of the Geo Forschungs Zentrum. The local barometric changes at each station are also included to allow for local atmospheric pressure correction. All of the gravimetric data sets contain gaps and offsets that must be carefully managed because of their strong impact on low-frequency components of the entire signal. Superimposed on these artefacts and gravity variations, a linear drift of a few microGals per year is visible on recent time-series, whereas an exponential drift impacts the oldest and longest recordings. The removal of these drifts is included in the data processing described in the next subsections.

#### 3.2.1 Correction for tides, atmospheric pressure and surface loadings

The first correction applied to the gravimetric data is the removal of the tidal signal, which has an amplitude up to several hundreds of microGals. However, the estimation of the gravimetric factor is barely modified whether the solid tides are removed or not. Indeed, the largest tidal components are high-frequency waves that will be filtered out and the low-frequency waves (semi-annual, annual, etc.) will be included in the fitting by means of eq. (10).

Second, we correct the gravity data for the local pressure effects by converting the pressure variations into gravimetric variations using an admittance factor of  $-3 \text{ nm s}^{-2} \text{ hPa}^{-1}$ .

Third, we use the loading data provided by the GGP Loading Service to correct for various loading effects. The Loading Service corrections encompass non-local barometric effects (Boy *et al.* 2002), local and non-local hydrological loading (Boy & Hinderer 2006) and oceanic loading (Boy *et al.* 2009).

Fourth, we correct the gravity data for the oceanic pole tide, this time-series having been added in the Loading Service products meanwhile (2015 February). The effect of the ocean tide loading caused by polar motion is computed on the assumption that the ocean response is static, which is consistent with altimetric observations (Desai 2002). However, it has been shown that the pole tide is dynamic and significantly larger in shallow seas such as the North and Baltic Seas (Miller & Wunsch 1973; Dickman 1979, 1988). Several stations used in this study are located in Europe and are probably affected by the dynamic oceanic pole tide, leading to an underestimation of the pole tide correction. Even so, the computation of the dynamic loading due to the pole tide at each GGP station is far beyond the scope of this study. Rough estimates of this effect by an artificial multiplication of the pole tide by factors between 2 and 10 confirmed that the increase of the correction by a given factor may significantly decrease the value of the estimated

gravimetric factor but no precise computation can be made without further modeling.

Fig. 2 illustrates the gravimetric corrections that we apply to the GGP data.

#### 3.2.2 Offsets removal

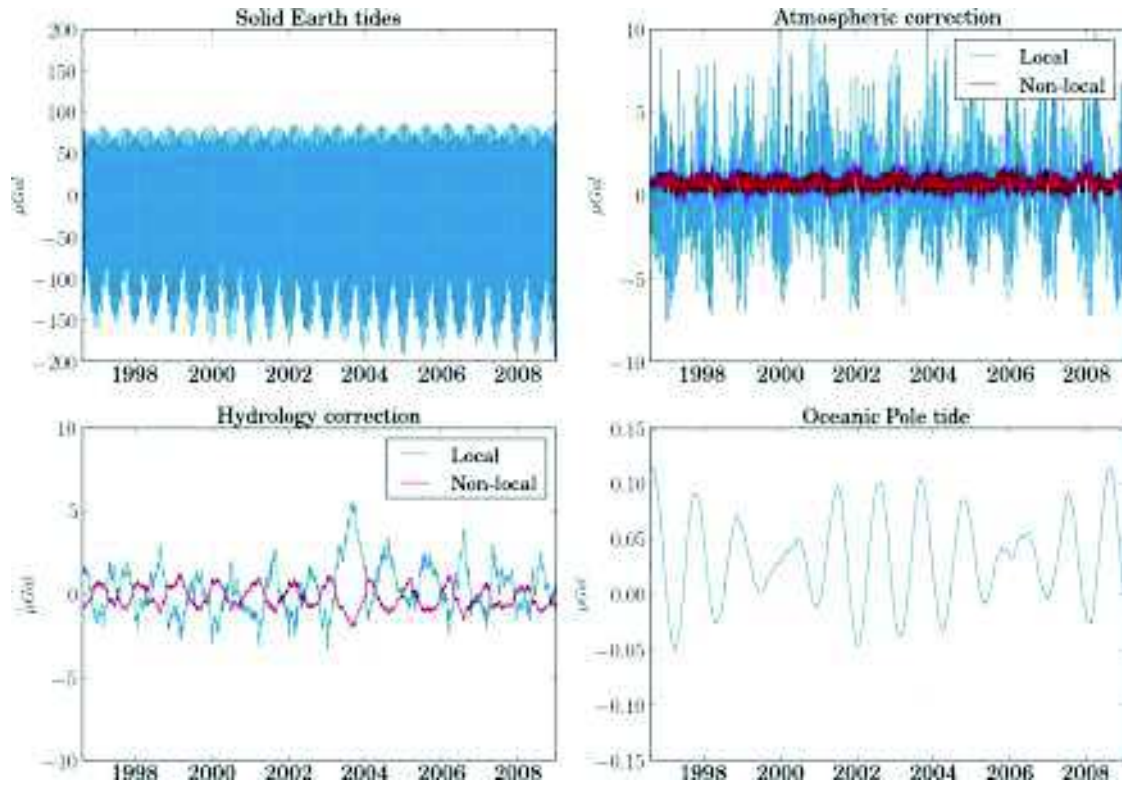
The next step in the data processing is the proper correction of the offsets. Their influence on the study of the long-period phenomena has been pointed out, for example, by Xu *et al.* (2004). The strategy we have adopted in this work is to minimize iteratively the misfit between a model of the main polar motion components and the gravity residues. In the following order, we

(i) list the offsets: they are supposed to occur when (1) at least one data point is missing or (2) there is no real interruption but an obvious offset is apparent,  
 (ii) make a first rough offset correction using the median value of a few points on each side of the offset or gap; depending on the stations, between 8 and 30 points (i.e. hours) are used,  
 (iii) loop until a chosen criterion is met (stabilization of the rms or maximum number of iterations is reached, either having been used here) using the following steps:

- (a) Fit of sinusoids with the following periods to the signal (see Section 3.2.4): 1 yr, half a year and the estimated CW period, plus a linear trend.
  - (b) Use of Latin Hypercube Sampling (LHS) method from McKay *et al.* (1979) to randomly sample new sets of offsets corrections (the times are fixed and we only look for offsets amplitudes).
  - (c) Application of these offsets corrections and computation of the corresponding rms (misfit to the model), to both the data and the theoretical perturbation deduced from polar motion data.
  - (d) Addition of the two rms for each tested set and search for the best combined rms to find the best offset correction for this iteration.
  - (e) Addition of the best correction to the total offset correction only if the new best combined rms is smaller than the previous one.
  - (f) Exit of this loop if the chosen criterion is met or return to (a).
- (iv) application of the best offset correction to the residues.

The fitting procedure being detailed in Section 3.2.4, for now we just fit a few sinusoids of intermediate frequencies only to avoid an overfitting of the data at long period: 1, 0.5 yr and the CW period estimated from the polar motion data. Indeed, if there are many offsets in the time-series and we try to fit a long-period wave, the different segments could be artificially shifted to match this low-frequency oscillation of potentially high amplitude. The tides at 1305 and 205 d were initially fitted too, following Loyer *et al.*'s (1999) procedure, but considering their extremely small amplitudes which did not affect the results, they are not considered anymore.

The LHS method (McKay *et al.* 1979) used to determine the successive offsets corrections consists in a random sampling in the space of parameters, following a given random distribution. In other words, several complete sets of offset are randomly generated at each iteration and only the best one—the definition of this ‘best’ is given in the next paragraph—is finally applied. Here we use either a uniform or a Gaussian distribution for the sampling, depending on the confidence we have in the first rough correction from the median computation around offsets. For offsets associated with gaps of a



**Figure 2.** Gravimetric corrections applied to the raw gravity time-series at the Strasbourg station. The local atmospheric correction is computed from the local pressure time-series at each station with an admittance factor of  $-3.0668 \text{ nm s}^{-2} \text{ hPa}^{-1}$ . The atmospheric effects along with the local and non-local hydrological corrections and oceanic loading are computed from the European Centre for Medium Range Weather Forecasts (ECMWF) reanalysis (ERA interim) surface pressure fields, assuming for the atmospheric loading computation a barotropic ocean model forced by air pressure and winds (MOG2D) when provided at the time of gravity records, or an inverted barometer ocean response otherwise.

few weeks or more, it is more efficient to consider that all offset values are equiprobable within a specific range. Although alternative algorithms exist, the LHS method is a good option as it is simple to implement and a fast way of trying a lot of possible corrections without any prior assumptions.

To determine the best offset correction to be applied, we add the rms from both the data and theoretical gravity perturbation. The use of a combined rms is an efficient way of avoiding overfitting of anomalous signals in the gravity data or introducing artificial non-reasonable offsets. However, the observed and theoretical signals have different amplitudes. Thus, they cannot be directly compared to the same model. Doing so, we would introduce a systematic bias in the difference between the theoretical gravity time-series and the model, which is only fitted on the gravity data. To avoid this problem without making any assumption on the amplitudes difference, we simply normalize both signals by their maximum amplitude. Then, we can compute consistent misfits between the fitted model on the one hand and observed or theoretical gravity perturbation on the other hand.

### 3.2.3 Filtering and decimation

After the offset correction, we linearly interpolate the data to fill the gaps smaller than one month and we do not include in the study the stations providing data with larger gaps.

To avoid to estimate many high-frequency waves, to eliminate short-period artefacts and to decrease the number of data points, we filter the signal using a low-pass finite impulse response (FIR) filter with no phase shift and decimate it to one day. The absence

of phase shifting is essential to preserve the phase of the signal we are interested in. With this filter, the same number of data points both at the beginning and end of the signal are lost. A happy consequence of this loss is the systematic elimination of possible quick drift at the beginning of some time-series. An ideal filtering would eliminate any signal above the CW frequency but because most of the gravimetric time-series do not exceed two decades, it is impracticable. An empirical estimation indicates that a filter length of roughly 30 yr—inducing a loss of 15 yr both at the beginning and end of the signal—is necessary to fully eliminate the annual signal without affecting the CW. Synthetic tests have shown that even with an attenuation as weak as  $-20 \text{ dB}$  at the annual period and no significant impact at the CW period, a 10-yr long filter is required with a rectangular tapering window. Therefore, we have chosen to follow the filtering procedure used by Loyer *et al.* (1999), with a cut-off frequency at 90 d. The length of our filter is 2 yr, which means that 1 yr of signal is lost at the beginning and end.

### 3.2.4 Fitting

The last step of the data processing is the estimation of the sinusoids that compose the residual and theoretical signals. Their amplitudes and phases will be used to compute the gravimetric factor given by eq. (11). To do so, we fit a sine and a cosine of different amplitudes for each frequency, from which we deduce the corresponding amplitude and phase of the equivalent shifted sinusoidal wave as expressed in eq. (10). The periods of the forced oscillations are 18.6, 9.3, 1 and 0.5 yr. We also include in this set the observed CW period. Apart from the annual, semi-annual and Chandlerian

period, the others correspond to the waves with largest amplitudes at long period as indicated in Loyer *et al.* (1999). As a linear time variation of the phase of the signal appears as a time variation of the Chandler frequency, we first estimate the apparent CW frequency by means of the rotation data of the IERS and use this value in the fitting procedure for the residual time-series.

Because mantle anelasticity can only produce a negative phase lag, as reminded by Ducarme *et al.* (2006), a constraint on the fitting must be added to force a negative phase for the gravimetric factor when needed. This constraint is similar to the positivity constraint of the quality factor introduced by Florsch & Hinderer (2000) in the case of the Free Core Nutation, which is another free rotational mode of the Earth. For some of the stations, the fitting actually yields a positive phase, which does not respect the causality principle and has no physical meaning. In those cases, we have first estimated the phase of the Chandlerian oscillation from the polar motion data, then use it as an upper limit for the phase of the Chandlerian signal in gravity residuals, in order to keep  $\kappa$  as given by eq. (9) negative.

Another component to fit is the instrumental drift. Although the time-series of the old SG (Metsahovi (ME) station) had an exponential drift, recent SG recordings (all of the other series used in this study) have a linear drift, except for a transient initial drift eliminated by the FIR low-pass filter.

For the fitting, we used the routines included in the `lmfit` Python package (Newville *et al.* 2014) with the least-squares method. They provide uncertainties estimates for each parameter we use with other methods described in Section 3.2.5 to estimate the reliability of our results.

### 3.2.5 Convergence and uncertainties estimate

To estimate the uncertainties associated to our results, we apply the fitting method to time-series whose length is progressively increased until they contain the whole data sets and we plot the amplitude and phase of the gravimetric factor as a function of the time span of the data. They should theoretically converge toward constant values for time-series that are longer than the beating period of 6.5 yr, although most of them do not completely as discussed in Section 6. This method is qualitatively used by Loyer *et al.* (1999). We use the variance of the amplitude and phase values after the 6.5 yr limit to estimate the uncertainties of the gravimetric factor. We denote the standard deviation obtained from the convergence by  $\sigma^{\text{CV}}$ , as opposed to the uncertainty  $\sigma^{\text{fit}}$  obtained from the fitting, which is the formal least-squares error.

For the stations where the phase had to be constrained to be negative, the formal error is frequently equal to the phase itself, which means that the fitting could not provide the best solution without exceeding the imposed limit. In other words, the best estimate for the gravimetric factor phase could be zero for these stations, considering the physical constraint. In Tables 2 and 3, the affected stations are indicated with a formal error between parentheses.

When we consider the variability in the results reported in Section 5, using the convergence of the computed values obviously seems to yield a better quantification of the uncertainty than the usual misfit. Indeed, this method takes advantage of the intrinsic variability (whatever its origin) of gravity records with time to put less tight but more realistic constraints on the gravimetric factor estimated from GGP data. Of course, this comment only holds when the phase is negative without the need for any constraint.

## 4 STACKING

In the previous section, we have presented a step-by-step processing to remove the  $\Delta g_{\text{geo}}$  (gravimetric corrections) and  $\Delta g_{\text{SG}}$  (drift and offsets) terms from eq. (1) for any individual GGP time-series in order to extract the polar motion effect. None of these steps have decreased the noise.

A standard approach to increase the signal-to-noise ratio in gravimetric data was first used by Cummins *et al.* (1991) in their search for oscillatory gravity signals associated with core undertones. The method consists in stacking the data from different stations, assigning them a weight in accordance to the spatial pattern of the sought gravimetric signal. The perturbation of the vertical component of the gravity field associated to the CW is a degree 2, order  $-1$  spherical harmonic, as depicted in Fig. 3.

To adapt the stacking method to polar motion study, we select the GGP stations with time-series longer than 10 yr to ensure a sufficient separation between the CW and annual signals. Moreover, to apply optimal offsets correction, we reject stations or time-series with long interruptions. Last, we need stations with simultaneous records in order to stack them. We therefore exclude time-series which stopped before 2008 (see Table 1). Among the nearly 35 stations of the GGP network, only nine are first retained. They are listed in Table 1 with the start and end dates of the recordings. The new ST time-series actually covers the whole time period between 1997 and today but instrumental problems on the tilts limited the data usability for this study till 2009.

After having processed the data as described in Sections 3.2.1–3.2.3, the time-series  $\Delta g_j(t)$  at station  $j$  is the sum of a signal  $s_j(t)$  and some uncorrelated noise  $n$ :

$$y_j(t) = s_j(t) + n(t). \quad (16)$$

The stacking formula is:

$$\begin{aligned} S_\ell^m(t) &= \frac{\sum_j \bar{Y}_\ell^m(\theta_j, \phi_j) y_j(t)}{\sum_j |Y_\ell^m(\theta_j, \phi_j)|^2} \\ &= \frac{\sum_j \bar{Y}_\ell^m(\theta_j, \phi_j) s_j(t) + \sum_j \bar{Y}_\ell^m(\theta_j, \phi_j) n_j(t)}{\sum_j |Y_\ell^m(\theta_j, \phi_j)|^2} \end{aligned} \quad (17)$$

where  $Y_\ell^m(\theta_j, \phi_j)$  is the spherical harmonics of degree  $\ell = 2$  and order  $m = -1$  computed at station  $j$  of coordinates  $(\theta_j, \phi_j)$ .

In addition to this spatial weighting and to take into account the variability in the quality of the stations, we similarly weighted the individual time-series  $y_j(t)$  using the standard deviation on the convergence of  $\delta$ , namely the  $\sigma_\delta^{\text{CV}}$  appearing in Table 3 for each station. The weights  $w_j$  (last column of Table 1) are defined in such a way that they sum up to 1

$$w_j = \left( \sigma_j \sum_k \frac{1}{\sigma_k} \right)^{-1}, \quad (18)$$

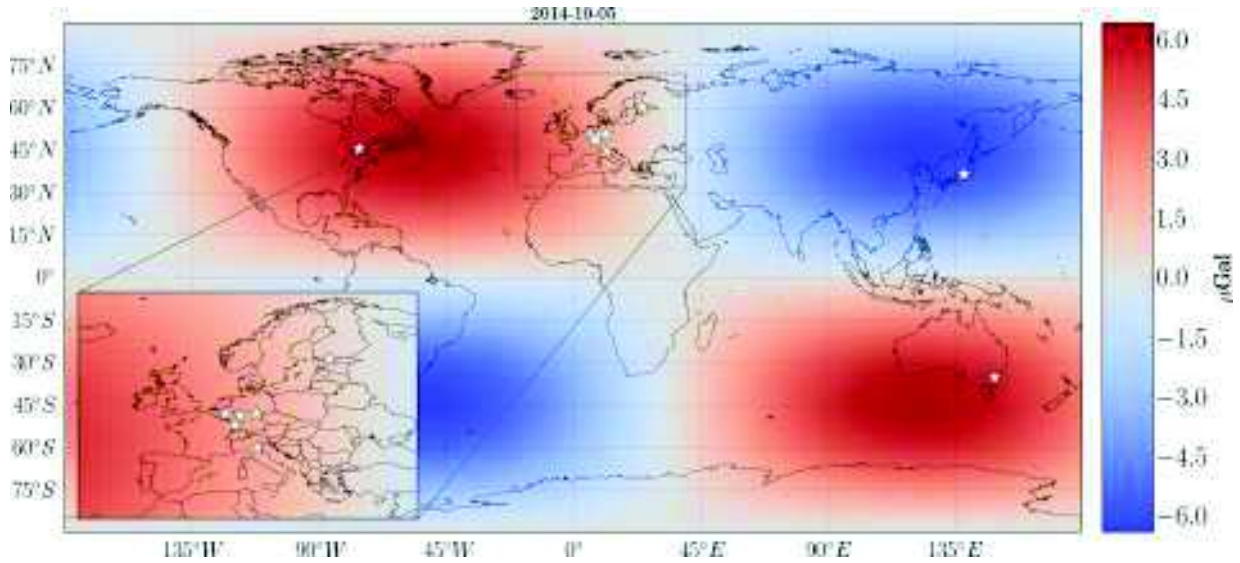
where  $\sigma_\delta^{\text{CV}}$  at station  $j$  is simply written  $\sigma_j$  for the sake of clarity.

Then, we may define  $y_j^\sigma(t)$  as the time-series weighted by the individual uncertainties:

$$y_j^\sigma(t) = w_j y_j(t) \quad (19)$$

and use it instead of  $y_j(t)$  in eq. (17).

Xu *et al.* (2004) made a global estimation of the gravimetric factor with a different subset of five stations but they did not spatially weight the time-series. Their weighting was only based on the standard deviation of the adjusted amplitudes and phases in the time domain. In addition, they could only work on a common time span



**Figure 3.** Polar motion induced elastic gravity perturbation at randomly chosen date. The stations used in this paper are symbolized by white stars. At this date, the pole position was  $x_p = 0.182947$  arcsec and  $y_p = 0.283920$  arcsec. In this picture, the degree 2, order  $-1$  spherical harmonic pattern used to weight the time-series in the stacking clearly appears.

**Table 1.** First selection of GGP stations exhibiting the longest duration available. Columns Long. and Lat. are the stations coordinates in decimal degrees in longitude and latitude, respectively. The last column provides the weights as defined in eq. (18). CA and ST are limited to the new SG time-series (series from older instruments are available but they do not add any value in the stacking because they are noisier). For the ST station, we have used a time-series already processed for previous studies, hence the absence of gaps and offsets.

Location (name)	Long.	Lat.	Start	End	Duration (yr)	Offsets	Weights
Bad Homburg (BH)	8.6113	50.2285	2001.1	2012.3	11.2	16	0.114
Cantley (CA)	284.1927	45.5850	1997.5	2012.0	14.5	9	0.019
Canberra (CB)	149.0077	-35.321	1997.0	2012.0	14.9	39	0.340
Matsuhira (MA)	138.2032	36.5439	1997.3	2008.5	11.2	66	0.118
Membach (MB)	6.0066	50.6093	1995.5	2012.0	16.4	27	0.045
Medicina (MC)	11.645	44.5219	1998.0	2012.0	14.1	8	0.118
Metsahovi (ME)	24.3958	60.2172	1994.6	2012.5	18.0	71	0.070
Moxa (MO)	11.6156	50.6447	2000.0	2012.0	12.0	26	0.106
Strasbourg (ST)	7.6850	48.6217	1997.1	2009.0	12.4	-	0.070

of nearly six years for the selected stations. Using a different approach, Ducarme *et al.* (2006) provided another global estimation of the gravimetric factor using a larger subset of nine stations but their goal was not to directly address the question of the signal-to-noise ratio or to get rid of local effects. The combination of multiple stations was rather used to increase the length of the data set they inverted, with redundancies in time. Here, we have chosen to first exploit the spatial and temporal dependency between the data by weighting and stacking them to decrease the influence of spatially incoherent signals and noise before estimating the global parameters. Last but not least and as already noted, another important feature of this study is the long duration of the time-series used in the stacking, the time-series sharing a common time span longer than a decade.

## 5 RESULTS

The main aim of this study being to estimate a global gravimetric factor from multiple stations, we only focus on the stations listed in Table 1. The results are summarized in Table 2. The values of the uncertainties  $\sigma_{\delta}^{\text{fit}}$  and  $\sigma_{\kappa}^{\text{fit}}$  are deduced from the misfit between the

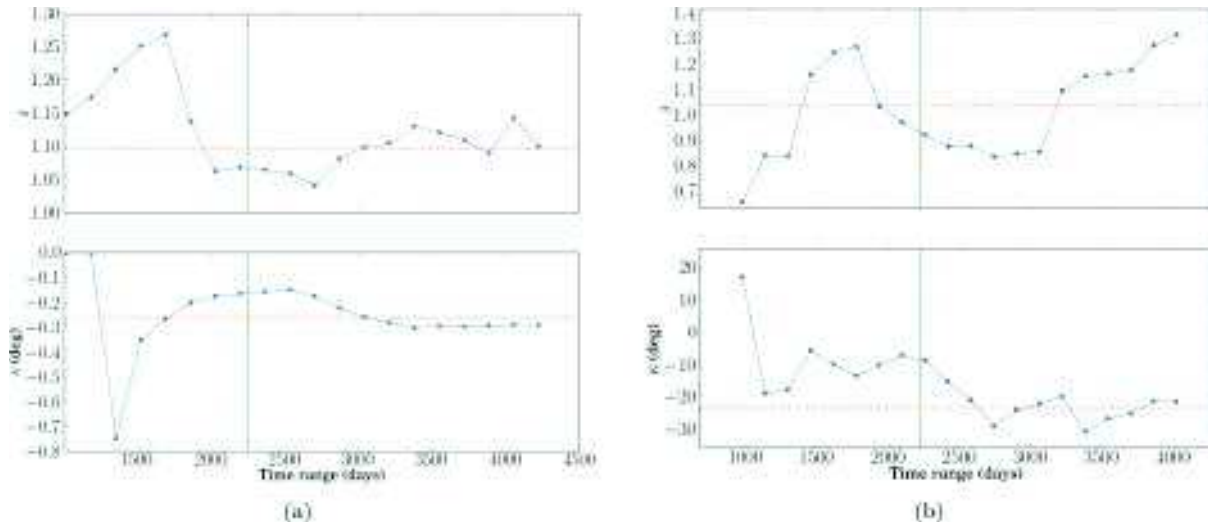
fitted model and the residual filtered gravity, whereas the values of  $\sigma_{\delta}^{\text{CV}}$  and  $\sigma_{\kappa}^{\text{CV}}$  are estimated from the convergence of the parameters values for increasing length of the time-series: it is the standard deviation of the estimated values for the period ranging from the 6.5 yr threshold until the end of the time-series. An easy way to estimate the quality of the convergence is thus to compare the two kinds of uncertainties in Table 2 for the amplitude  $\delta$  and phase  $\kappa$ . As an example, Fig. 4 illustrates the convergence obtained for one of the best (MC) and for one of the worst (CA) stations in terms of the stability of the results. It is noteworthy that an increase of the time-series length is in any case associated with variations of the gravimetric factor amplitude and phase and we will discuss this point further in Section 6.

Because the quality of the hydrology correction is one of the most difficult to assess, it is only applied when the obtained amplitude is closer to the expected elastic values. It is notable that both the amplitude and phase are impacted by the hydrology correction when applied.

Moving to our multistation analysis, the results for the stacking method are given in Table 3 for two different subsets of, respectively, five and seven SG stations. The selection of the stations in these

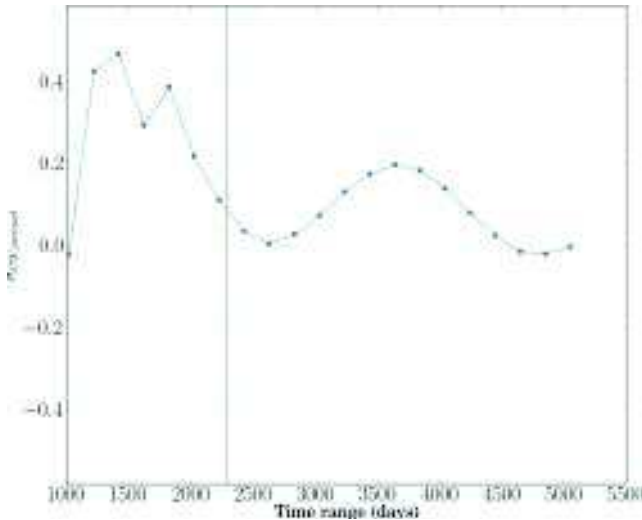
**Table 2.** Gravimetric factors amplitude and phase for the selected stations. The asterisk indicates that the hydrology correction has been applied.

Location (name)	$\delta$	$\sigma_{\delta}^{\text{fit}}$	$\sigma_{\delta}^{\text{CV}}$	$\kappa$ (deg)	$\sigma_{\kappa}^{\text{fit}}$	$\sigma_{\kappa}^{\text{CV}}$
Bad Homburg (BH)*	1.165	0.020	0.026	−0.39	(0.39)	0.03
Cantley (CA)*	1.315	0.030	0.177	−21.70	1.09	4.25
Canberra (CB)	1.066	0.013	0.010	−4.83	0.55	1.12
Matsuhira (MA)	1.042	0.020	0.028	−0.20	(0.20)	0.02
Membach (MB)	1.145	0.022	0.075	−0.66	0.92	1.87
Medicina (MC)	1.103	0.011	0.034	−0.29	(0.29)	0.05
Metsahovi (ME)	0.948	0.021	0.049	−0.26	(0.26)	7.00
Moxa (MO)	0.967	0.016	0.020	−0.38	(0.38)	2.78
Strasbourg (ST)*	1.225	0.017	0.049	−2.32	0.66	2.31

**Figure 4.** Convergence of the gravimetric factor amplitude and phase for increasing length of the time-series. Part (a) is for Medicina station (MC) and part (b) is for Cantley (CA). The vertical line indicates the 6.5 yr limit theoretically needed to separate the annual and Chandlerian oscillations; the horizontal red dashed line is the mean of the values after the 6.5 yr limit has been exceeded.**Table 3.** Gravimetric factors amplitude and phase for the stacking and multistation analysis. Seven stations: BH, CA, CB, MB, MC, ME and MO; five stations: BH, CB, MB, MC and MO. Ducarme *et al.* (2006) estimated a global amplitude with phases either set to the individual values or to zero for all of the stations. Their estimated phase is  $-1$  d, which converts to  $-0.83$  deg for a Chandler period of 435 d.

Analysis	$\delta$	$\sigma_{\delta}^{\text{fit}}$	$\sigma_{\delta}^{\text{CV}}$	$\kappa$ (deg)	$\sigma_{\kappa}^{\text{fit}}$	$\sigma_{\kappa}^{\text{CV}}$
<b>This study</b>						
Spatial and uncertainty weighting						
Stack 7 stations	1.092	$\pm 0.010$	$\pm 0.017$	−0.32	( $\pm 0.32$ )	$\pm 0.01$
Stack 5 stations	1.118	$\pm 0.009$	$\pm 0.016$	−0.45	$\pm 0.30$	$\pm 0.66$
Spatial weighting only						
Stack 7 stations	1.090	$\pm 0.004$	$\pm 0.019$	−0.36	( $\pm 0.36$ )	$\pm 0.01$
Stack 5 stations	1.090	$\pm 0.010$	$\pm 0.023$	−0.34	( $\pm 0.34$ )	$\pm 0.03$
Mean—see eqs (20) and (21)						
Mean 7 stations	1.079	$\pm 0.006$	$\pm 0.008$	−1.04	$\pm 0.15$	$\pm 0.026$
Mean 5 stations	1.081	$\pm 0.007$	$\pm 0.009$	−0.85	$\pm 0.18$	$\pm 0.026$
<b>Xu <i>et al.</i> (2004)</b>						
STD weighted	1.1613	$\pm 0.0275$	—	−1.30	$\pm 1.33$	—
<b>Ducarme <i>et al.</i> (2006)</b>						
Ocean pole tide not corrected						
Mean	1.1788	$\pm 0.0040$	—	−0.83	—	—
Global (local phase)	1.1816	$\pm 0.0047$	—	local	—	—
Global (zero phase)	1.1797	$\pm 0.0047$	—	0	—	—
Ocean pole tide corrected						
Mean	1.1605	$\pm 0.0040$	—	−0.83	—	—
Global (local phase)	1.1612	$\pm 0.0047$	—	local	—	—
Global (zero phase)	1.1593	$\pm 0.0047$	—	0	—	—





**Figure 5.** Correlation between the annual and CW sinusoidal fitted amplitudes for increasing length of the time-series at station MB. The vertical line indicates the 6.5 yr limit. We can clearly see the pseudo-oscillation in the correlation.

subsets is discussed in Section 6. The weighted mean  $E$  is given by:

$$E = \sum_j w_j y_j \quad (20)$$

where the weights  $w_j$  are given by eq. (18) in which  $\sigma$  is either  $\sigma^{\text{fit}}$  or  $\sigma^{\text{CV}}$  for the amplitude or phase. The error  $e$  associated with the mean is

$$e = \left( \sum_j \frac{1}{\sigma_j^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

For increasing time spans, we have plotted the variations of the correlation between the fitted parameters for the annual and Chandlerian oscillations (Fig. 5). As expected, this correlation quickly decreases toward zero for time-series longer than the minimum duration needed to theoretically separate the annual signal from the CW. Even so, this decrease is not monotonic and exhibits oscillations of pseudo-half-period roughly similar to the 6.5 yr beating. This value is certainly related to the frequency difference between the two main signals contained in the data but its emergence in this case has yet to be explained. Similar fittings on synthetic signals exhibit this behaviour too, which would therefore be caused by a numerical artefact.

The main results for the individual stations and the stacking are summarized in Fig. 6.

## 6 DISCUSSION

If we first focus on the individual estimates of the gravimetric factor, the most obvious observation is that none of the amplitude or phase is easier to constrain and in particular some stations have outliers, for the amplitude, phase or both. As aforementioned, one of the source of errors lies in the offsets, especially when they are associated with other instrumental defects that prevent a simple realignment of the data points on either side of the offsets. Synthetic tests have shown that although the phase is actually sensitive to the offset correction and any long-period phenomenon that affect the trend of the signal, the amplitude is equally impacted by offsets too. As an

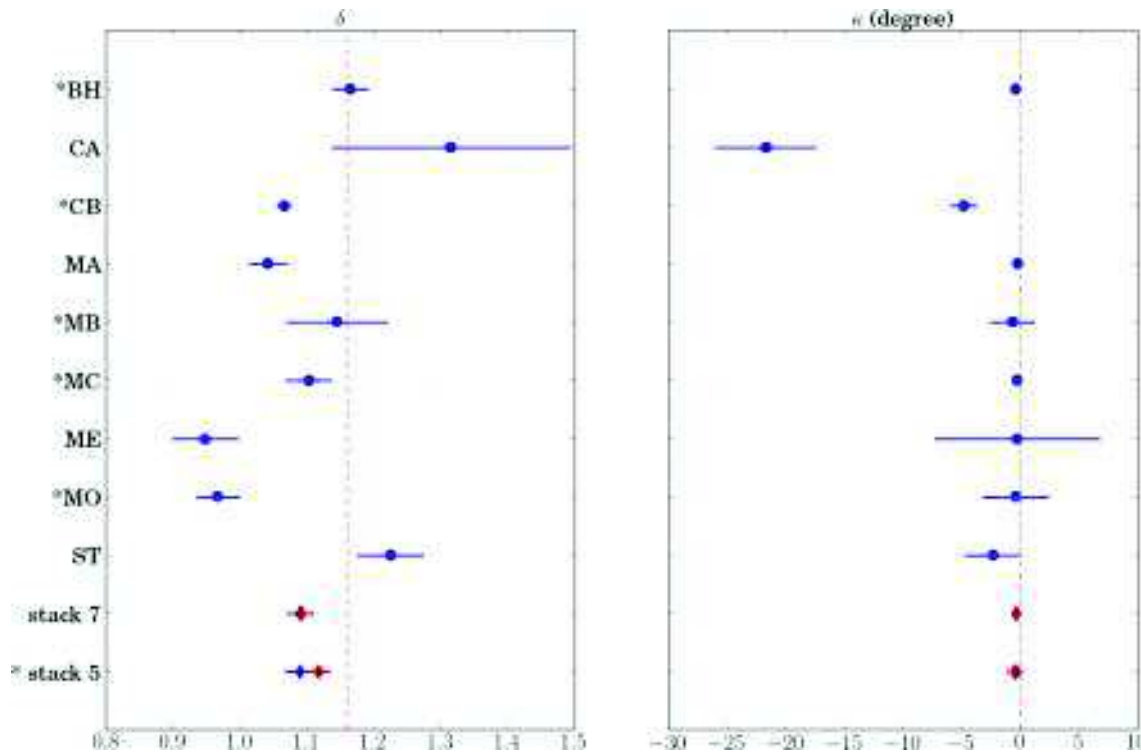
example, when the phase variation due to synthetic offsets reaches a few tenths of a degree, the amplitude undergoes variations of a few per cent.

Considering the obvious outliers, the explanations are essentially assumptions because of the diversity of possible sources of errors. For ME, the abnormally small amplitude may be due to the large number of offsets we had to correct taking into account an exponential drift, along with the position of the station at relatively high latitude where the polar motion effect is less important. The proximity of the ocean is another hint considering the additional noise. This last suggestion could be an explanation for the abnormally high amplitude at Cantley (CA) station which is close to the sea too. For Moxa (MO), the hydrology is probably one of the main explanation for the small amplitude. This hypothesis is suggested by the opposite way the amplitude and phase vary when we change the admittance factor used to compute the local hydrological effect at this station. Indeed, depending on the correction, an increase (improvement in this case) in the amplitude is accompanied by an increase of the phase which was already too large when we did not constrain it to be negative. Of course, if the Chandlerian and annual signals could be completely decorrelated—which is not the case here—the influence of hydrology would not be so strong because the hydrological effects are quite small at the Chandler frequency.

Amongst the gravimetric corrections we made on the time-series, the local hydrological correction has a particularly strong impact on the estimation of both the gravimetric factor amplitude and phase and on the convergence of their values in our tests. This is a serious issue because this correction is hard to improve without appropriate local hydrological studies and modeling. Actually, a lot of parameters and phenomena have an influence on the effect of hydrology on gravity measurements, the position of the station relative to the ground, the distribution of underground water masses both in the vadose and saturated zones being only some of them. For only some of the stations, the convergence is improved when the local hydrological correction is not applied (MC, for instance) but more importantly, both the amplitude and phase of the gravimetric factor are not clearly improved, if not worsened when hydrology is taken into account. A systematic determination of the local hydrological admittances at each GGP station would be the first step in an attempt to better consider hydrology in the gravimetric correction.

Another parameter which influences the gravimetric factor phase is of course the Chandler frequency. Everything else being equal, an artificial decrease of the Chandler period induces an increase of the gravimetric factor amplitude, which could be qualitatively interpreted as a tendency for the fitting to maintain the overall energetic content of the CW signal. Anyway, contrary to the offsets correction or local hydrology, the influence of a Chandler frequency variation is quite predictable, at least at the first order and reasonably small compared to other sources of error. The observed variations in polar motion data are indeed smaller than the spectral resolution we have in gravimetry.

Focusing on the stacking now, it is important to be aware that combining different stations does not necessarily improve the overall analysis quality. Using only a station with very good corrections clearly provides better results than stacking poorly corrected gravity time-series. Out of the nine stations we had initially selected, we did not retain MA and ST because of their usable time-series ending too early. Thus, we only kept the seven stations BH, CA, CB, MB, MC, ME and MO. Out of those these stations, we then only kept BH, CB, MB MC and MO for their reasonably small phase values and good convergence (small  $\sigma_\kappa^{\text{CV}}$ ).



**Figure 6.** Gravimetric factor amplitude and phase for the individual stations and the stacking with five time-series. The stations name preceded by an asterisk are included in the five stations stacking. The vertical red dashed lines are the elastic values, namely  $\delta = 1.16$  and  $\kappa = 0$  (see Section 6). The error bars are the uncertainties from the convergence. The red diamonds for the stackings are the results with weights depending on the quality of each data set.

After the stacking of the five best stations we have in the set, albeit the estimated amplitude is not completely satisfying, its uncertainty is smaller than for all of the individual estimates with a better convergence, that is, less sensitivity to the time-series length. The phase is even better recovered with quite a low uncertainty, considering the phase disparity in the individual estimates. Amongst the local effects we had to correct, the stacking could be especially efficient as for local hydrology. An interesting observation is the improvement of the gravimetric factor estimate when we select the five best stations amongst the initial set. It tends to show that we can take profit of the number of GGP stations to only extract a smaller subset of valuable data depending on the processes we are interested in.

We have already underlined that for none of the station the convergence of both the amplitude and phase values is totally achieved, even with the longest time-series. Of course we expected some variations after the theoretical 6.5 yr limit but the observed variations are quite significant for most of the stations compared to the sought accuracy. As far as we know, none of the results provided in the literature for the gravimetric factor, but Loyer *et al.* (1999), explicitly consider the influence of the time span of the gravimetric time-series. All of the previous works implicitly assumed that the longest the time-series, the better the estimate. Alternatively and as mentioned in Section 3.2.5, we consider longer time-series as a better way of estimating the uncertainties on the gravimetric factor since one of the biggest source of variations both in the amplitude and phase lies in the selection of the time span, revealing the need for even better corrections.

As already stated, the main application of the CW gravimetric factor estimation is to put some constraints on mantle anelasticity, especially through the computation of the expected gravimetric factor phase for classical rheologies of the mantle. Although the actual

computation of this phase for realistic Earth's models is beyond the scope of this work, we briefly discuss the method.

First, the complex gravimetric factor as a function of frequency  $\omega$  is given by:

$$\tilde{\delta}(\omega) = 1 - \frac{3}{2}\tilde{k}_2(\omega) + \tilde{h}_2(\omega) \quad (22)$$

with  $\tilde{k}_2(\omega)$  and  $\tilde{h}_2(\omega)$  being the complex Love numbers. The frequency dependency of  $\tilde{k}_2$  and  $\tilde{h}_2$  arises from the mantle anelasticity, characterized by the viscosity. Then, because the Love numbers are viscosity-dependent, eq. (22) provides a link between the viscosity and the gravimetric factor phase. To link these parameters to the quality factor  $Q$ , we may defined the parameter  $\varepsilon$  as:

$$\tilde{k}_2 = k_2(1 + i\varepsilon) \quad (23)$$

and use the following relation (Bizouard 2014):

$$\varepsilon = \frac{1 - k_s/k_2}{2Q} \quad (24)$$

where  $k_s$  is the secular Love number for the chosen Earth's model.

Using eqs (22) and (24), it is then possible to plot the phase  $\kappa$  as a function of viscosity (because the Love numbers are functions of the viscosity) and estimate the corresponding quality factor  $Q$ . Whatever parameter is considered to be known among the phase, viscosity and quality factor, we can determine the two others for a given rheological model. Alternatively, if we know both the phase and viscosity or phase and quality factor, we can investigate the ability of different rheological models to explain the observations. In concrete terms, using the phases estimates from Table 1, we may put some constraints on the rheological behaviour of the mantle, as Benjamin *et al.* (2006) did for different geodetic observations, including the CW.

Regarding the amplitude of the gravimetric factor, Dickman (2005) suggested the need to use rotationally consistent Love numbers, which are about 10 per cent larger than the accepted values when the lack of core–mantle coupling is taken into account in the elastic deformation. It would imply an increase of 1–2 per cent of the elastic gravimetric factor amplitude, which is related to the Love numbers through eq. (22). The new elastic value would be closer to 1.18 and the interpretation of our results and those from previous works should be adapted accordingly.

Using the stacking method, we have obtained smaller uncertainties than previous global estimates (Xu *et al.* 2004) of the amplitude and phase of the gravimetric pole tide. However, these uncertainties are still too large to bring some constraints on the mantle rheological behaviour as just explained. So we may conclude that the influence of anelastic effects at the Chandler frequency is still too small to be proven from such gravity time-series analysis. None of the departures of the gravimetric factor amplitude and phase from the theoretical elastic values can be considered relevant, taking into account reasonable uncertainties on our results. On the contrary, this work neither excludes the existence of anelasticity even if its impact is beyond our detection yet.

## 7 CONCLUSIONS

Our estimates of the gravimetric factor at the Chandler frequency using both local and global analyses have shown the actual interest of the stacking method. In particular, local hydrological perturbations that may be so harmful in local studies seem to be significantly reduced when weighting and combining the time-series from several stations. Another essential component of this work lies in the length of the data sets we have used: more than a decade of simultaneous gravimetric recordings were included in the stacking, far more than the theoretical 6.5 yr limit needed to separate the annual and Chandlerian peaks. We have taken advantage of these long time-series to better estimate the uncertainties which are higher but more reasonable than the usual formal estimates from the misfit between gravity residuals and the fitted model.

The gravimetric factor amplitudes and phases we have obtained, either for individual stations or after the stacking, differ notably from previous estimates. These differences mainly come from four specific factors whose influence seems to be underestimated in previous works. The first one is the presence of offsets and gaps which are difficult to correct without introducing a bias in the study. Their effect cannot be easily determined considering the way they may compensate or cumulate. Synthetic tests have shown that the offsets can impact both the amplitude and phase, the latter being more sensitive to them. The second factor is the lack of proper correction for local hydrology and dynamic pole tide, both processes being quite difficult to model at a good level of accuracy. Once again, they strongly affect both the amplitude and phase. Local hydrology might be better modeled in the future at each GGP station but for the moment, it is not well enough known to be routinely and reliably used without taking the risk of introducing an additional bias. The third factor is related to the duration of the time-series which was only considered by Loyer *et al.* (1999) before this work. Indeed, the biggest variations still come from the choice of the data subsets or from their duration as shown by the convergence tests. This comment clearly proves the need to use very long, uninterrupted time-series to infer the reliability of any method or processing in the estimation of the gravimetric factor. The last factor is the geographic distribution of the stations, in relation with the stacking

method. Most of the long time-series being currently recorded in Europe, the advantages of the stacking are partly canceled by this highly heterogeneous distribution. However, by ensuring continuous recordings and adding new stations in the GGP network, this specific problem could be patiently solved.

As for the link between anelastic dissipation and the gravimetric factor phase, we have shown that our estimates do not exclude anelastic effect at the CW period although further refinements are needed to definitely answer this question.

## ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to express our thanks to GGP managers for sending their data, to ICET for preparing them, to S. Dickman for his fruitful review and to an anonymous reviewer. We gratefully acknowledge financial support from the CNRS-INSU Programme National de Planétologie and from IPGS.

## REFERENCES

- Aoyama, Y., Naito, I., Iwabuchi, T. & Yamazaki, N., 2003. Atmospheric quasi-14 month fluctuation and excitation of the Chandler wobble, *Earth Planets Space*, **55**, 25–28.
- Bellanger, E., Le Mouél, J.-L., Manda, M. & Labrosse, S., 2001. Chandler wobble and geomagnetic jerks, *Phys. Earth planet. Inter.*, **124**, 95–103.
- Benjamin, D., Wahr, J.M., Ray, R.D., Egbert, G.D. & Desai, S.D., 2006. Constraints on mantle anelasticity from geodetic observations, and implications for the J 2 anomaly, *Geophys. J. Int.*, **165**(1), 3–16.
- Bizouard, C., 2014. Le mouvement du pôle de l'heure au siècle, *Habilitation thesis*, Presses Académiques Francophones, 284 pp.
- Bizouard, C., Remus, F., Lambert, S.B., Seoane, L. & Gambis, D., 2011. The Earth's variable Chandler wobble, *Astron. Astrophys.*, **526**, A106, doi:10.1051/0004-6361/201015894.
- Boy, J.-P., Gégout, P. & Hinderer, J., 2002. Reduction of surface gravity data from global atmospheric pressure loading, *Geophys. J. Int.*, **149**, 534–545.
- Boy, J.-P. & Hinderer, J., 2006. Study of the seasonal gravity signal in superconducting gravimeter data, *J. Geodyn.*, **41**(1–3), 227–233.
- Boy, J.-P., Hinderer, J., Amalvict, M. & Calais, É., 2000. On the use of long records of superconducting and absolute gravity observations with special application to the Strasbourg station, France, *Cah. Cent. Eur. Géod. Séismol.*, **17**, 67–83.
- Boy, J.-P., Longuevergne, L., Boudin, F., Jacob, T., Lyard, F., Llubes, M., Florsch, N. & Esnault, M.-F., 2009. Modelling atmospheric and induced non-tidal oceanic loading contributions to surface gravity and tilt measurements, *J. Geodyn.*, **48**, 182–188.
- Brzeziński, A. & Capitaine, N., 1993. The use of the precise observations of the celestial ephemeris pole in the analysis of geophysical excitation of Earth rotation, *J. geophys. Res.*, **98**(B4), 6667–6675.
- Brzeziński, A. & Nastula, J., 2002. Oceanic excitation of the Chandler Wobble, *Adv. Space Res.*, **30**(2), 195–200.
- Chao, B.F. & Chung, W.-Y., 2012. Amplitude and phase variations of Earth's Chandler wobble under continual excitation, *J. Geodyn.*, **62**, 35–39.
- Chen, X., Ducarme, B., Sun, H. & Xu, J., 2008. Loading effect of a self-consistent equilibrium ocean pole tide on the gravimetric parameters of the gravity pole tides at superconducting gravimeter stations, *J. Geodyn.*, **45**(4–5), 201–207.
- Chen, X., Kroner, C., Sun, H., Abe, M., Zhou, J., Yan, H. & Wziontek, H., 2009. Determination of gravimetric parameters of the gravity pole tide using observations recorded with superconducting gravimeters, *J. Geodyn.*, **48**(3–5), 348–353.
- Crossley, D. *et al.*, 1999. Network of superconducting gravimeters benefits a number of disciplines, *EOS, Trans. Am. geophys. Un.*, **80**(11), 121–132.
- Cummins, P., Wahr, J.M., Agnew, D.C. & Tamura, Y., 1991. Constraining core undertones using stacked IDA gravity records, *Geophys. J. Int.*, **106**(1), 189–198.

- Desai, S.D., 2002. Observing the pole tide with satellite altimetry, *J. geophys. Res.*, **107**(April), 1–13.
- Dickman, S.R., 1979. Consequences of an enhanced pole tide, *J. geophys. Res.*, **84**(B10), 5447–5456.
- Dickman, S.R., 1988. The self-consistent dynamic pole tide in non-global oceans, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **94**(3), 519–543.
- Dickman, S.R., 2005. Rotationally consistent Love numbers, *Geophys. J. Int.*, **161**(1), 31–40.
- Ducarme, B., Venedikov, A.P., Arnos, J., Chen, X.D., Sun, H. & Vieira, R., 2006. Global analysis of the GGP superconducting gravimeters network for the estimation of the pole tide gravimetric amplitude factor, *J. Geodyn.*, **41**(1–3), 334–344.
- Dziewonski, A.M. & Anderson, D.L., 1981. Preliminary reference Earth model, *Phys. Earth planet. Inter.*, **25**, 297–356.
- Florsch, N. & Hinderer, J., 2000. Bayesian estimation of the free core nutation parameters from the analysis of precise tidal gravity data, *Phys. Earth planet. Inter.*, **117**, 21–35.
- Gibert, D., Holschneider, M. & Le Mouél, J.-L., 1998. Wavelet analysis of the Chandler wobble, *J. geophys. Res.*, **103**, 27 069–27 089.
- Gibert, D. & Le Mouél, J.-L., 2008. Inversion of polar motion data: Chandler wobble, phase jumps, and geomagnetic jerks, *J. geophys. Res.*, **113**, 1–8.
- Gross, R.S., 2000. The excitation of the Chandler wobble, *Geophys. Res. Lett.*, **27**(15), 2329–2332.
- Hinderer, J., Crossley, D. & Warburton, R.J., 2007. Gravimetric methods – superconducting gravity meters, in *Treatise on Geophysics*, Vol. 3, pp. 66–115, Elsevier B.V.
- Hu, X.G., Liu, L.T., Ducarme, B., Xu, H.J. & Sun, H., 2007. Estimation of the pole tide gravimetric factor at the chandler period through wavelet filtering, *Geophys. J. Int.*, **169**(3), 821–829.
- Loyer, S., Hinderer, J. & Boy, J.-P., 1999. Determination of the gravimetric factor at the Chandler period from Earth orientation data and superconducting gravimetry observations, *Geophys. J. Int.*, **136**(1), 1–7.
- Malkin, Z. & Miller, N., 2010. Chandler wobble: two more large phase jumps revealed, *Earth Planets Space*, **62**(12), 943–947.
- McKay, M.D., Beckman, R.J. & Conover, W.J., 1979. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code, *Technometrics*, **21**(2), 239–245.
- McCarthy, D.D. & Petit, G., 2003. IERS Conventions (2003). (IERS Technical Note; 32) Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie. 127 pp.
- Miller, S.P. & Wunsch, C., 1973. The pole tide, *Nature*, **246**(01), 98–102.
- Newville, M., Stensitzki, T., Allen, D.B. & Ingargiola, A., 2014. LMFIT: non-linear least-square minimization and curve-fitting for python, doi:10.5281/zenodo.11813.
- Smylie, D.E., Henderson, G.A. & Zuberi, M., 2015. Modern observations of the effect of earthquakes on the Chandler wobble, *J. Geodyn.*, **83**, 85–91.
- Wahr, J.M., 1982. The effects of the atmosphere and oceans on the Earth's wobble—I. Theory, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **70**, 349–372.
- Wahr, J.M., 1983. The effect of the atmosphere and oceans on the Earth's wobble and on the seasonal variations in the length of day—II. Results, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **74**, 451–487.
- Wahr, J.M., 1985. Deformation induced by polar motion, *J. geophys. Res.*, **90**(B11), 9363–9368.
- Xu, J.Q., Sun, H. & Yang, X.F., 2004. A study of gravity variations caused by polar motion using superconducting gravimeter data from the GGP network, *J. Geod.*, **78**, 201–209.

## SUPPORTING INFORMATION

Additional Supporting Information may be found in the online version of this paper:

(<http://gji.oxfordjournals.org/lookup/suppl/doi:10.1093/gji/ggw007/-/DC1>).

Please note: Oxford University Press is not responsible for the content or functionality of any supporting materials supplied by the authors. Any queries (other than missing material) should be directed to the corresponding author for the paper.

### 5.2.1 Complément à l'article

Pour compléter l'article précédent, voici quelques figures illustrant la correction des sauts dans les données gravimétriques ainsi que l'analyse des données dans le cas du stacking.

La Fig. 5.3 est le résultat d'un test synthétique. Une série temporelle gravimétrique composée d'une oscillation annuelle et d'une oscillation à la période de Chandler a été créée de telle sorte que la phase  $\kappa$  du facteur gravimétrique soit nulle et que l'amplitude  $\delta$  de celui-ci soit exactement 1.16. Pour ce faire, la perturbation gravimétrique théorique a été calculée (à Strasbourg pour cet exemple) à partir des données du mouvement du pôle et un modèle a été ajusté aux données. L'amplitude et la phase de la sinusoïde modélisant l'oscillation chandlérienne ont ensuite été utilisées pour créer la série gravimétrique synthétique mentionnée précédemment. À cette série ont été ajoutés aléatoirement une dizaine de sauts suivis d'interruptions de durées variables (quelques heures à un mois). L'amplitude des sauts suit une distribution normale de variance  $1 \mu\text{Gal}$ . En appliquant ensuite le même traitement et la même analyse que ceux décrits dans l'article reproduit ci-dessus à cette série synthétique, on aboutit à une amplitude et une phase pour le facteur gravimétrique de  $1.160 \pm 0.006$  et  $-0.85 \pm 0.24$  degré respectivement. Ces résultats sont très satisfaisants pour l'amplitude, moins pour la phase qui devrait être nulle. D'autres tests synthétiques ayant donné des résultats similaires, il apparaît que les sauts peuvent avoir un impact non négligeable sur les estimations du facteur gravimétrique, même s'ils sont en grande partie corrigés avant l'analyse. Cela est d'autant plus vrai pour la phase dont la valeur absolue pourrait ne pas dépasser celles des incertitudes.

Les Fig. 5.4 et 5.5 illustrent la méthode de stacking avec les 5 meilleures stations (BH, CB, MB, MC et MO, voir la Table 3 de l'article GJI). Pour rappel, on trouve dans ce cas  $\delta = 1.118 \pm 0.016$  et  $\kappa = -0.45 \pm 0.66$  degré. Les signaux non filtrés de la Fig. 5.4, les résidus gravimétriques, sont obtenus après que toutes les corrections énoncées au 5.1.2, ainsi que la corrections des sauts, ont été faites. La composante linéaire (dérive) a également été retirée sur ces figures.

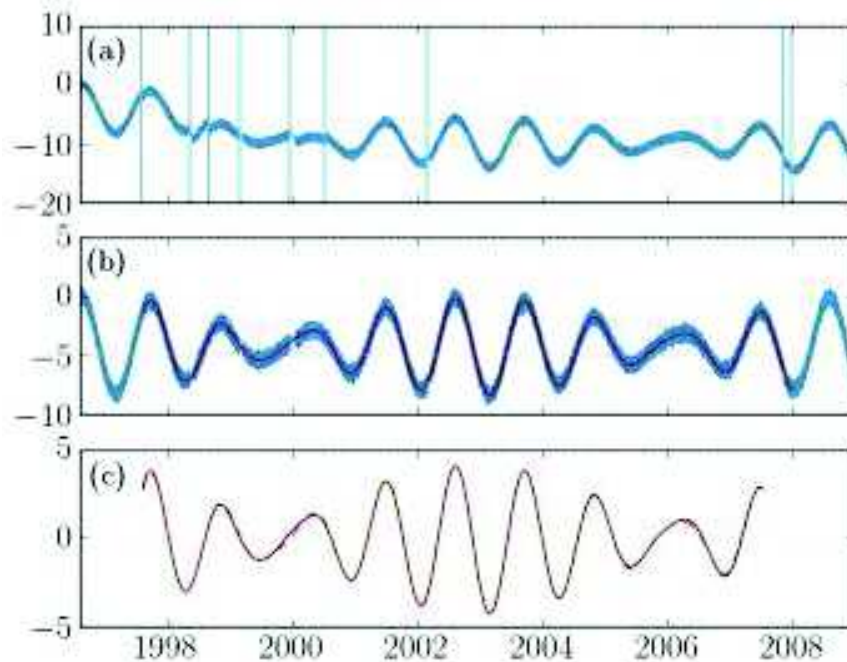


FIGURE 5.3 – (a) résidus gravimétriques synthétiques avec des offsets indiqués par les traits verticaux, (b) résidus corrigés des offsets et signal filtré en rouge, (c) signal filtré et modèle (somme de sinusôides) ajusté en traits pointillés.

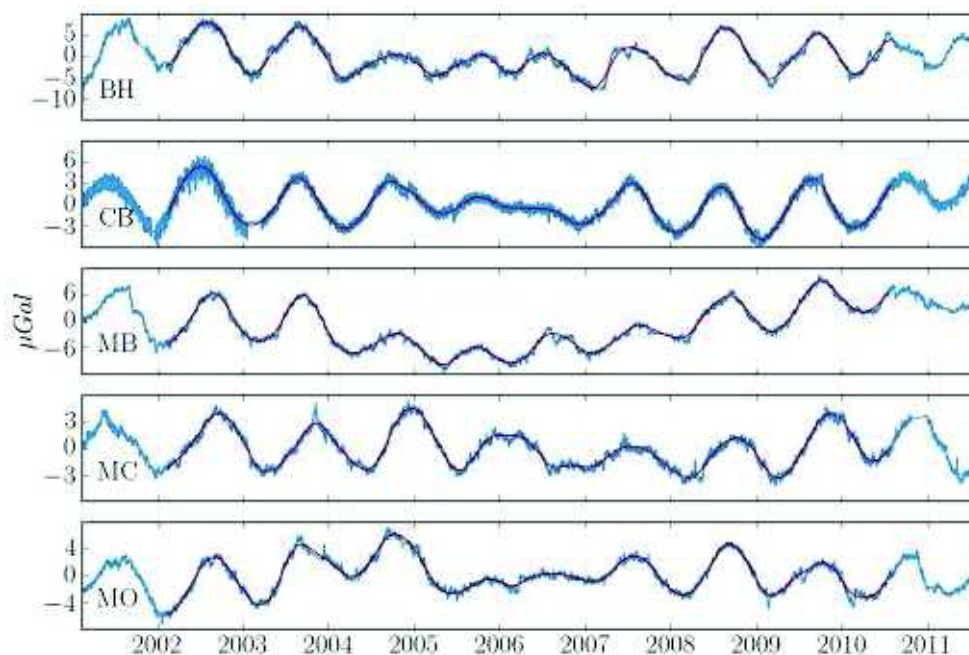


FIGURE 5.4 – Résidus gravimétriques (en bleu) pour les 5 stations utilisées dans la méthode de stacking et signaux filtrés (en rouge) par un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure à 90 jours. On notera que le filtrage induit une perte d'un an au début et à la fin des séries temporelles (la longueur du filtre est de deux ans).

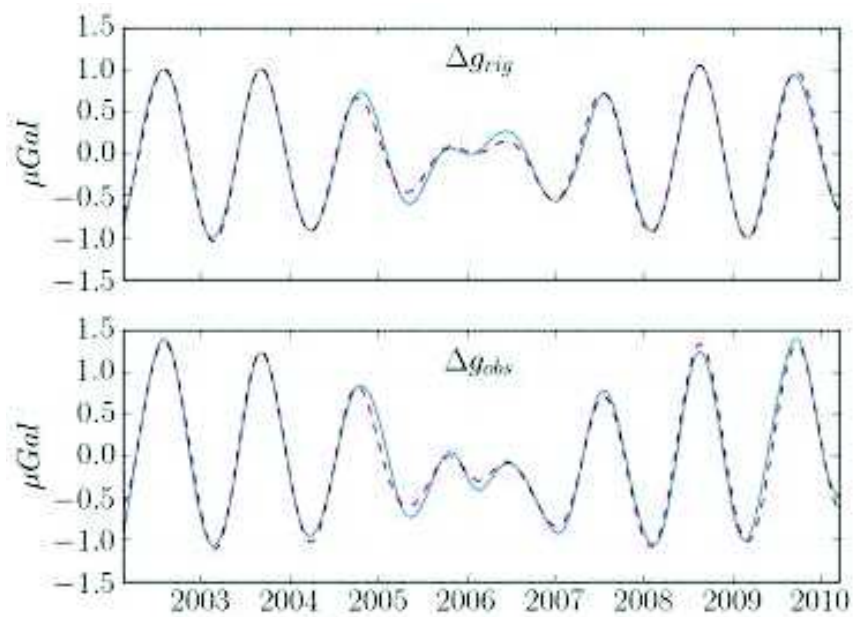


FIGURE 5.5 – Résultat de l'analyse des séries temporelles des 5 stations de la Fig. 5.4 après stacking et filtrage. La perturbation gravimétrique théorique, pour une Terre rigide ( $\Delta g_{rig}$ ) et la perturbation observée ( $\Delta g_{obs}$ ) sont représentées en traits pleins bleus. Le modèle ajusté (somme de sinusoides) est représenté en pointillés rouges.

## **Troisième partie**

# **Approche analytique des équations du mouvement**





# Travaux de Hough et prolongements

## Sommaire

<b>6.1 Étude de Hough</b>	<b>89</b>
6.1.1 Rotation d'une Terre sphéroïdale	89
6.1.2 Méthode dans le cas élastique	90
<b>6.2 Adaptation au cas anélastique</b>	<b>92</b>
6.2.1 Conséquence d'une rhéologie anélastique	92
6.2.2 Développement du système différentiel à variables complexes	93
<b>6.3 Résolution</b>	<b>96</b>
6.3.1 Solutions complexes	96
6.3.2 Déphasages analytiques	97
6.3.3 Conclusion	99

*J'apprends vite, je m'immerge, j'assimile, comme un enfant qui s'imprégnerait d'une langue étrangère. J'apprends sans prétention, humblement, des notions de base que les physiciens connaissent depuis un demi-siècle.*

Cédric Villani, *Théorème vivant*

## 6.1 Étude de Hough

### 6.1.1 Rotation d'une Terre sphéroïdale

Durant les dernières années du XIX<sup>e</sup> siècle, l'astronome britannique Sidney Samuel Hough est l'auteur de plusieurs articles théoriques sur les oscillations, la rotation et les marées de modèles de Terre sphéroïdaux<sup>1</sup>. Ses travaux succèdent à ceux des célèbres William Thomson (Lord Kelvin) et Henri Poincaré, d'A. E. H. Love, du physicien et mathématicien Robert Simpson Woodward, du

1. Ses articles ultérieurs portent davantage sur des considérations astronomiques, essentiellement en astronomie observationnelle.

polymathe<sup>2</sup> Simon Newcomb et bien sûr de S. C. Chandler. Dans un de ses articles paru il y a tout juste 120 ans (Hough 1896), S. S. Hough s'intéresse à la rotation d'une Terre élastique homogène incompressible sphéroïdale et développe analytiquement les équations du mouvement pour aboutir à une expression liant déformations et mouvement du pôle, ainsi qu'à une expression analytique de la fréquence de Chandler.

Un des résultats essentiels de son travail est la démonstration de l'équivalence entre déformations résultant d'un forçage par le mouvement du pôle et déformations intrinsèques, dues au mode propre chandlerien, *dans le cas élastique*.

### 6.1.2 Méthode dans le cas élastique

Pour mener son étude, Hough se place dans un système de référence dont l'axe  $z$  est confondu avec l'axe de rotation. Il introduit les variables eulériennes du mouvement  $x, y, z$ , et lagrangiennes  $x_0, y_0, z_0$ , reliées par les déplacements  $u, v, w$  définis comme  $x = x_0 + u$ , etc. (voir 7.2.1). Sa méthode de résolution est ensuite la suivante :

1. application de la loi de Newton dans un milieu continu en rotation, à la vitesse de rotation absolue  $\omega$ ,
2. passage en variables eulériennes exclusivement, les termes petits étant négligés,
3. définition d'une loi rhéologique élastique isotrope pour un milieu solide incompressible (loi de Hooke),
4. introduction d'un potentiel  $V$ , du potentiel de rotation et de la pression hydrostatique  $p$  dans dont dérivent les forces de volume,
5. regroupement des termes du potentiel  $V$ , du potentiel de rotation et de la pression hydrostatique  $p$  dans la fonction

$$\psi = V + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) - p/\rho_0, \quad (6.1)$$

avec  $\rho_0$  la densité,

6. annulation de la divergence du déplacement en raison de l'incompressibilité du milieu,
7. passage en domaine de Laplace pour des oscillations harmoniques de fréquence  $\sigma$  (notée  $\lambda$  dans l'article original).

---

2. Largement autodidacte, S. Newcomb mena en particulier des travaux en astronomie, en mathématique – pour l'anecdote, il est le réel découvreur du phénomène connu sous le nom de « loi de Benford » – et en économie. Il fut aussi l'auteur de manuels de cours célèbres, d'ouvrages de vulgarisation et d'un roman de science-fiction. Parmi ses nombreux centres d'intérêt, il pratiqua même l'alpinisme ! L'astronome W. W. Campbell vantera ainsi « son intérêt universel » (Campbell 1916).

À ce stade, Hough obtient le système d'équations

$$\begin{cases} (v_s^2 \nabla^2 + \sigma^2)u + 2i\sigma\omega v &= -\partial\psi/\partial x, \\ (v_s^2 \nabla^2 + \sigma^2)v - 2i\sigma\omega u &= -\partial\psi/\partial y, \\ (v_s^2 \nabla^2 + \sigma^2)w &= -\partial\psi/\partial z, \end{cases} \quad (6.2)$$

avec  $v_s$  la vitesse des ondes S et  $\omega$  la vitesse de rotation<sup>3</sup>. Il faut joindre aux Éq. (6.2) la condition de nullité de la divergence

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (6.3)$$

avec  $\vec{u} = (u, v, w)$  et une équation pour  $\psi$

$$\left[ \nabla^2 (v_s^2 \nabla^2 + \sigma^2)^2 - 4\omega^2 \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi = 0. \quad (6.4)$$

L'étape suivante, que je ne détaillerai pas ici, est l'écriture des conditions aux limites sous forme de conditions analytiques sur la surface moyenne (surface obtenue en moyennant les déformations de la surface réelle). Elles stipulent que les composantes de la traction doivent s'annuler à la surface. Couplées avec les Éq. (6.2) et (6.4), ces conditions permettent de résoudre totalement le problème. Toutefois, celui-ci n'est pas résoluble analytiquement en l'état et nécessite une reformulation préalable. La méthode consiste à introduire  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  comme limites rigides de  $u$ ,  $v$  et  $w$  respectivement. Cela permet d'isoler les déplacements rigides (translations et rotations) des déformations proprement dites. Sachant que l'on s'intéresse au mode propre de rotation en particulier, les termes liés aux forces extérieures s'annulent et les déplacements rigides sont simplement

$$u_0 = z\theta_2, v_0 = -z\theta_1 \text{ et } w_0 = -x\theta_2 + y\theta_1 \quad (6.5)$$

avec les  $\theta_i$  désignant les angles de rotation autour du  $i$ -ème axe. Le point clef du raisonnement réside alors dans l'hypothèse que le corps est d'abord déplacé par une petite rotation globale avant d'être soumis à une déformation élastique en réponse à cette rotation. Cette succession conceptuelle entre perturbation de la rotation et déformation élastique est l'hypothèse sous-jacente à toutes les études qui ont suivi celle de Hough. C'est aussi précisément le sujet de la discussion du 4.3.1, sous des termes légèrement différents. Ainsi, on peut décomposer les déplacements en composantes rigides et élastiques

$$u = u_0 + u_1, v = v_0 + v_1 \text{ et } w = w_0 + w_1, \quad (6.6)$$

les termes indicés par 0 étant ceux de l'Éq. (6.5), ceux indicés par 1 désignant les composantes élastiques. On peut ainsi réécrire le système (6.2)

$$\begin{cases} (v_s^2 \nabla^2 + \sigma^2)u_1 + 2i\sigma\omega v_1 &= -\partial\psi/\partial x - \sigma^2 z\theta_2 + 2i\sigma\omega z\theta_1, \\ (v_s^2 \nabla^2 + \sigma^2)v_1 - 2i\sigma\omega u_1 &= -\partial\psi/\partial y + \sigma^2 z\theta_1 + 2i\sigma\omega z\theta_2, \\ (v_s^2 \nabla^2 + \sigma^2)w_1 &= -\partial\psi/\partial z - \sigma^2(x\theta_2 - y\theta_1). \end{cases} \quad (6.7)$$

3. Hough ne s'intéressant pas aux variations de la vitesse instantanée de rotation (vitesse que j'ai déjà notée  $\omega$  dans les parties précédentes), il n'y a pas de confusion possible avec la vitesse moyenne  $\Omega_0$  et on peut utiliser l'une ou l'autre notation indifféremment.

Par ailleurs, l'Éq. (6.3) est aussi valable pour  $\vec{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$ .

Hough se place ensuite dans le cas d'une Terre ellipsoïdale, de petit aplatissement

$$\varepsilon = \frac{15\omega^2}{16\pi G\rho_0} \quad (6.8)$$

et élimine tous les termes de l'ordre de  $\varepsilon^2$  ou de  $(\sigma/\omega)^2$ . Cela lui permet de suffisamment simplifier l'expression du système (6.7) pour le résoudre analytiquement. Il obtient l'expression en coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  des coefficients de la matrice  $\mathbf{A}$  telle que

$$u_1 = A_{1j}\theta_j, \quad v_1 = A_{2j}\theta_j \quad \text{et} \quad w_1 = A_{3j}\theta_j, \quad (6.9)$$

où la somme est implicitement faite sur  $j$ , suivant la convention de sommation d'Einstein. L'Éq. (6.9) lie ainsi la déformation de la Terre élastique à une combinaison linéaire des composantes du mouvements du pôle. On pourra facilement retrouver par identification les coefficients de  $\mathbf{A}$  à partir de l'Éq. (28) de Hough (1896) mais ce n'est pas le but de cette discussion. En effet, pour généraliser les résultats de Hough, nous allons maintenant repartir du système (6.7) et l'adapter à un modèle de Terre anélastique.

## 6.2 Adaptation au cas anélastique

### 6.2.1 Conséquence d'une rhéologie anélastique

En application du Principe de correspondance (voir 2.4.3), la première étape pour transformer le système d'équations établi pour une rhéologie élastique en un système pour une rhéologie anélastique, est l'introduction des variables complexes. Les composantes non rigides du déplacement deviennent  $\tilde{u}_1, \tilde{v}_1$  et  $\tilde{w}_1$ , fonctions à valeur dans  $\mathbb{C}$ . De même, les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont remplacés par  $\tilde{\theta}_1$  et  $\tilde{\theta}_2$  et la fonction  $\psi$  devient  $\tilde{\psi}$ . On remplace de façon similaire la fréquence angulaire réelle  $\sigma$  par  $\tilde{\sigma}$  mais il s'avèrera parfois pratique d'aller plus loin en posant

$$s = i\tilde{\sigma}. \quad (6.10)$$

On conservera la notation  $v_s$  pour la vitesse des ondes S, à savoir

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}} \quad (6.11)$$

et on introduit la rigidité complexe  $\tilde{\mu}(\tilde{\sigma})$  (voir 2.4.3). Pour simplifier l'analyse, on s'intéressera par la suite à un modèle ayant une loi rhéologique de la forme

$$\tilde{\mu}(\tilde{\sigma}) = \mu_0 [1 + f(\tilde{\sigma})], \quad (6.12)$$

où la fonction adimensionnée complexe  $f(\tilde{\sigma})$  dépend directement du modèle rhéologique choisi. Si on se restreint aux cas où  $|f(\tilde{\sigma})| \ll 1$ , c'est-à-dire si l'anélasticité est faible, la forme de l'Éq. (6.12) équivaut à identifier, au premier

ordre, la partie réelle de  $\tilde{\mu}$  à  $\mu_0$  et à supposer que la partie imaginaire de  $\tilde{\mu}$  est petite devant la partie réelle.

Suivant la définition (2.42) du facteur de qualité  $Q_\mu$ , l'Éq. (6.12) peut également être écrite

$$\tilde{\mu}(s) = \mu_0 [1 + iQ_\mu^{-1}(\sigma)]. \quad (6.13)$$

Ainsi,  $\tilde{\mu}$  ne dépend plus que de  $\mu_0$  et du facteur de qualité dont on pourra estimer la valeur. L'Éq. (6.13) n'est pas spécifique à une rhéologie particulière et s'applique à la plupart des modèles représentatifs de la rhéologie terrestre. Cette égalité est vraie au premier ordre en  $Q_\mu^{-1}$  de façon très générale, il suffit pour cela que  $Q_\mu^{-1} \ll 1$ .

### 6.2.2 Développement du système différentiel à variables complexes

Le système d'équations (6.7) s'écrit en rhéologie anélastique

$$(v_s^2 [1 + iQ_\mu^{-1}] \nabla^2 - s^2) \tilde{u}_1 + 2s\omega \tilde{v}_1 = -\partial \tilde{\psi} / \partial x + s^2 z \tilde{\theta}_2 + 2s\omega z \tilde{\theta}_1, \quad (6.14a)$$

$$(v_s^2 [1 + iQ_\mu^{-1}] \nabla^2 - s^2) \tilde{v}_1 - 2s\omega \tilde{u}_1 = -\partial \tilde{\psi} / \partial y - s^2 z \tilde{\theta}_1 + 2s\omega z \tilde{\theta}_2, \quad (6.14b)$$

$$(v_s^2 [1 + iQ_\mu^{-1}] \nabla^2 - s^2) \tilde{w}_1 = -\partial \tilde{\psi} / \partial z + s^2 (x \tilde{\theta}_2 - y \tilde{\theta}_1), \quad (6.14c)$$

où on a remplacé le facteur  $\tilde{\mu}(s)/\rho_0$  par  $v_s^2 [1 + iQ_\mu^{-1}(\sigma)]$  suivant la définition du paramètre rhéologique complexe  $\tilde{\mu}(s)$  donnée à l'Éq. (6.13).

Il n'est pas évident *a priori* que les termes négligeables dans ce système soient les mêmes que ceux négligés par Hough dans le cas élastique. En effet, pour chacune des variables complexes nouvellement introduites, la partie imaginaire est potentiellement du même ordre de grandeur que certains des termes auparavant négligés dans le cas élastique (la force de Coriolis par exemple). Pour déterminer les termes négligeables dans le cas anélastique, on écrira toute variable complexe  $q$  sous la forme algébrique  $q = q_R + iq_I$  faisant explicitement apparaître la partie réelle  $q_R$  et la partie imaginaire  $q_I$ . Les variables portant déjà un indice seront écrites avec les lettres  $R$  ou  $I$  en exposant. La fréquence  $\tilde{\sigma}$  est également scindée en une partie réelle et une partie imaginaire en mettant à profit les notations du 2.4.4 :

$$\tilde{\sigma} = \sigma_a + i\alpha \quad (6.15)$$

avec  $\sigma_a$  la fréquence d'oscillation anélastique et,  $\alpha$  l'atténuation. L'anélasticité modifiant peu la partie réelle de la fréquence, on confondra  $\sigma_a$  et  $\sigma$  dans l'analyse des ordres de grandeur qui suit. Désormais, l'Éq (6.14a) s'écrit

$$\begin{aligned} & v_s^2 (1 + iQ_\mu^{-1}) \nabla^2 (u_1^R + iu_1^I) - (i\sigma - \alpha)^2 (u_1^R + iu_1^I) + 2(i\sigma - \alpha) (v_1^R + iv_1^I) \omega \\ & = -\partial(\psi_R + i\psi_I) / \partial x + (i\sigma - \alpha)^2 (\theta_2^R + i\theta_2^I) z + 2(i\sigma - \alpha) (\theta_1^R + i\theta_1^I) \omega z \end{aligned} \quad (6.16)$$

et on peut réécrire de même les Éq. (6.14b) et (6.14c). Pour simplifier davantage la notation, on désignera indifféremment  $u_1$  et  $v_1$  par  $v$  (upsilon) dans l'analyse

TABLEAU 6.1 – Termes du développement des Éq. (6.14a) et (6.14b) classés suivant leur origine physique. Les termes liés au mouvement du pôle regroupent différentes variables mais le facteur dominant est bien le mouvement du pôle  $\theta$ . La notation a été simplifiée pour l'analyse des ordres de grandeur.

	Partie réelle	Partie imaginaire
Rhéologie $\mu$	$v_s^2 \nabla^2 v_R, v_s^2 Q_\mu^{-1} \nabla^2 v_I$	$v_s^2 \nabla^2 v_I, v_s^2 Q_\mu^{-1} \nabla^2 v_R$
Oscillation pure $\sigma$	$\sigma^2 v_R, \omega \sigma v_I$	$\sigma^2 v_I, \omega \sigma v_R$
Atténuation $\alpha$	$\alpha^2 v_R, \sigma \alpha v_I, \omega \alpha v_R$	$\alpha^2 v_I, \sigma \alpha v_R, \omega \alpha v_I$
Mouv. du pôle $\theta$	$\sigma^2 \theta_{Rz}, \sigma \alpha \theta_{Iz}, \alpha^2 \theta_{Rz},$ $\omega \sigma \theta_{Iz}, \omega \alpha \theta_{Rz}$	$\sigma^2 \theta_{Iz}, \sigma \alpha \theta_{Rz}, \alpha^2 \theta_{Iz},$ $\omega \sigma \theta_{Rz}, \omega \alpha \theta_{Iz}$

des ordres de grandeur qui suit. De façon similaire,  $\theta$  pourra désigner aussi bien  $\theta_1$  que  $\theta_2$ . Ces notations se justifient par le fait que  $u_1$  et  $v_1$  d'une part,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  d'autre part, sont du même ordre de grandeur. Hough a déjà discuté de l'ordre de grandeur de  $\psi_R$  et je conserverai également  $\psi_I$  sans émettre d'hypothèse sur sa valeur.

La Table 6.1 répertorient les termes apparaissant dans le développement complet des deux premières équations du système (6.14), l'Éq. (6.14c) étant découplée des deux autres. Tous ces termes font apparaître un facteur en  $v_R, v_I, \theta_{Rz}$  ou  $\theta_{Iz}$  qui a la dimension d'un déplacement. On prend comme déplacement de référence le déplacement rigide  $\theta_{Rz}$  et, pour la partie réelle, on sait que  $v_R$  est de l'ordre de  $\varepsilon \theta_{Rz}$  (Hough 1896), avec  $\varepsilon$  donnée par l'Éq. (6.8). Pour la partie imaginaire, on suppose un rapport d'amplitude similaire, avec  $v_I \sim \varepsilon \theta_{Iz}$ . Mis à part les termes en laplacien, tous les facteurs apparaissant devant les déplacements ont la dimension d'une fréquence au carré. L'estimation de leur ordre de grandeur sera donc le produit de  $\omega^2$  et d'un multiple de l'ellipticité. On a, par exemple,  $\sigma \omega \sim \omega^2 \varepsilon$ .

Le facteur de qualité  $Q_\mu$  est estimé pour le manteau à quelques centaines (Dziewonski et Anderson 1981). Étant donné que, par hasard,  $\varepsilon \sim 10^{-3}$ , on pourra considérer pour simplifier que  $Q_\mu^{-1} \sim \varepsilon$ . Pour les termes dépendant de l'atténuation  $\alpha$ , on utilisera avantageusement les résultats d'estimations du facteur de qualité  $Q_{CW}$  de Chandler, noté simplement  $Q$  par la suite, puisque  $Q^{-1} = 2\alpha/\sigma$ . On veillera à ne pas confondre  $Q$ , le facteur d'un mode propre, avec  $Q_\mu$  qui est le facteur de qualité intrinsèque du matériau mantellique (voir au 2.4.4). D'après Nastula et Gross (2015)<sup>4</sup>,  $Q$  est estimé à au moins plusieurs dizaines jusqu'à quelques centaines. Or, le modèle de Terre homogène que nous

4. En fait, la variabilité des estimations du facteur de qualité dans la littérature ne permet pas de connaître de façon certaine le rapport  $\alpha/\sigma$  mais cela ne sera pas un problème dans le cas qui nous intéresse.

utilisons ici n'a assurément d'autre source d'atténuation que l'anélasticité ; les estimations pour la Terre réelle seraient donc des bornes inférieures sur  $Q$  si on considère que la différence de volume du manteau entre Terre réelle et Terre homogène joue peu. De ce fait, il est possible que  $\alpha \ll \sigma$ . Quoiqu'il en soit, ces incertitudes sur  $Q$  ne posent aucun problème, dans la mesure où les termes en  $\alpha$  sont toujours inférieurs à ceux en  $\sigma$ , lesquels étaient de toute façon négligeables pour la plupart. Par extension, ces remarques pour  $\alpha$  permettent également d'estimer les termes en  $v_I$  et  $\theta_I$  si l'on considère que  $\alpha/\sigma \sim v_I/v_R \sim \theta_I/\theta_R$ .

En appliquant le résultat de toutes ces estimations aux Éq. (6.14a) et (6.14b), ainsi qu'à l'Éq. (6.14c) pour laquelle le raisonnement est identique, le système (6.14) se simplifie en

$$v_s^2 (\nabla^2 u_1^R + iQ_\mu^{-1} \nabla^2 u_1^R + i \nabla^2 u_1^I + Q_\mu^{-1} \nabla^2 u_1^I) = -\partial \tilde{\psi} / \partial x + 2i\omega\sigma\theta_1^R z, \quad (6.17a)$$

$$v_s^2 (\nabla^2 v_1^R + iQ_\mu^{-1} \nabla^2 v_1^R + i \nabla^2 v_1^I + Q_\mu^{-1} \nabla^2 v_1^I) = -\partial \tilde{\psi} / \partial y + 2i\omega\sigma\theta_2^R z, \quad (6.17b)$$

$$v_s^2 (\nabla^2 w_1^R + iQ_\mu^{-1} \nabla^2 w_1^R + i \nabla^2 w_1^I + Q_\mu^{-1} \nabla^2 w_1^I) = -\partial \tilde{\psi} / \partial z, \quad (6.17c)$$

où on a éliminé tous les termes en  $\omega^2 \varepsilon^2$  ou inférieurs. Hough avait éliminé les termes inférieurs à  $\omega^2 \varepsilon$  mais l'introduction de l'anélasticité a fait apparaître des termes potentiellement de l'ordre de  $\varepsilon$  plus petits. Avec une borne supérieure en  $\omega^2 \varepsilon^2$ , on s'assure de n'éliminer aucun terme du même ordre de grandeur que ceux nouvellement introduits, tant que leur petitesse n'a pas été précisément redémontrée.

Dans les membres de gauche du système (6.17), la partie imaginaire est composée de deux termes en laplaciens,  $Q_\mu^{-1} \nabla^2 v^R$  et  $\nabla^2 v^I$ , tous deux de l'ordre de  $Q_\mu^{-1}$  (similaire à  $\varepsilon$ ) plus petits que le terme du cas élastique ; aucun ne domine donc l'autre. Pour la partie réelle, le terme supplémentaire  $Q_\mu^{-1} \nabla^2 v^I$  est apparu mais il est en  $\varepsilon^2$  par rapport au terme dominant ; on le conserve toutefois pour faciliter la résolution du système par analogie avec le cas élastique. Dans le membre de droite des Éq. (6.17a) et (6.17b), on a conservé pour le moment  $2i\omega\sigma\theta_1^R z$  et  $2i\omega\sigma\theta_2^R z$  qui sont en  $\omega^2 \varepsilon$ . Ces termes sont liés à la force de Coriolis et sont les seuls dont l'importance pourrait être significative parmi les petits termes répertoriés plus haut. Cependant, il faudrait pour cela que  $Q_\mu^{-1}$ ,  $u_1^I$ ,  $v_1^I$  et  $w_1^I$  soient sensiblement plus petits, c'est-à-dire que la dissipation anélastique soit nettement plus grande dans la Terre. On a en effet, dans les membres de gauche, des facteurs en  $v_s^2 Q_\mu^{-1} \varepsilon$  (le  $\varepsilon$  provenant du fait que  $u_1^I \sim \varepsilon \theta_2 z$ , etc.), à comparer à  $\omega^2 \varepsilon$ . Avec typiquement, pour la Terre,  $v_s^2 \sim 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ ,  $Q_\mu^{-1} \sim 10^{-3}$  et  $\omega^2 \sim 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ , on voit clairement qu'il faudrait fortement s'éloigner de ce qu'on connaît de la rhéologie terrestre pour que la force de Coriolis ait une influence visible. Ainsi, en groupant à nouveau les termes sous leur forme complexe, la généralisation des travaux de Hough prend finalement la forme

$$\tilde{\mu}(s) / \rho_0 \nabla^2 \tilde{u}_1 = -\partial \tilde{\psi} / \partial x, \quad (6.18a)$$

$$\tilde{\mu}(s) / \rho_0 \nabla^2 \tilde{v}_1 = -\partial \tilde{\psi} / \partial y, \quad (6.18b)$$

$$\tilde{\mu}(s) / \rho_0 \nabla^2 \tilde{w}_1 = -\partial \tilde{\psi} / \partial z, \quad (6.18c)$$



avec la nullité de la divergence

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (6.19)$$

où  $\vec{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{w}_1)$ .

De façon remarquable, le système. (6.18) a exactement la même forme que celui du cas élastique (Éq. (6.7)) mais avec toutes les variables complexes et  $\tilde{\mu}$  qui dépend en outre de la fréquence  $s$ . De manière analogue, on vérifie facilement que les équations des conditions aux limites sont également similaires au cas élastique et telles qu'elles sont données par le système (20) de Hough (1896). En effet, Hough souligne que *tous* les termes apparaissant dans ces équations sont en  $\omega^2$ ; il n'y a donc pas à les comparer à nouveau dans le cas anélastique.

## 6.3 Résolution

### 6.3.1 Solutions complexes

Le système d'équations auquel on aboutit en adaptant la méthodologie de Hough (1896) à une Terre de rhéologie anélastique étant totalement semblable au cas élastique, il en est de même pour sa résolution. On détermine d'abord grâce aux Éq. (6.18) et (6.19) que la fonction  $\tilde{\psi}$  est harmonique puis on en déduit des solutions particulières pour  $\tilde{u}_1$ ,  $\tilde{v}_1$  et  $\tilde{w}_1$ . Afin de satisfaire la nullité de la divergence (6.19), ces solutions doivent être modifiées et on aboutit à la solution générale

$$\tilde{\psi} = A\tilde{S}_2, \quad (6.20)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= -\frac{1}{10} \frac{A}{\tilde{n}} r^2 \frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial x} + B \frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial x} - \frac{2}{105} \frac{A}{\tilde{n}} r^7 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tilde{S}_2}{r^5} \right), \\ \tilde{v}_1 &= -\frac{1}{10} \frac{A}{\tilde{n}} r^2 \frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial y} + B \frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial y} - \frac{2}{105} \frac{A}{\tilde{n}} r^7 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tilde{S}_2}{r^5} \right), \\ \tilde{w}_1 &= -\frac{1}{10} \frac{A}{\tilde{n}} r^2 \frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial z} + B \frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial z} - \frac{2}{105} \frac{A}{\tilde{n}} r^7 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\tilde{S}_2}{r^5} \right), \end{aligned} \quad (6.21)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes complexes,  $\tilde{n}(s) = \tilde{\mu}(s)/\rho_0$ ,  $\tilde{S}_2 = \omega^2(\tilde{\theta}_2 xz - \tilde{\theta}_1 yz)$  et  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Les facteurs 1/10 et 2/105 proviennent des conditions sur la divergence évoquées plus haut. L'utilisation des conditions aux limites permet de déterminer les constantes  $A$  et  $B$  :

$$A = 21 \left( 19 + \frac{8}{3} \frac{\pi G \rho_0 a^2}{\tilde{n}} \right)^{-1} \quad (6.22)$$

et

$$B = \frac{4a^2}{\tilde{n}} \left( 19 + \frac{8}{3} \frac{\pi G \rho_0 a^2}{\tilde{n}} \right)^{-1}. \quad (6.23)$$

Hough simplifie les expressions (6.22) et (6.23) en introduisant l'aplatissement  $\varepsilon'$  d'une sphère sous l'effet de la force centrifuge en ne tenant compte que des forces dues à l'élasticité. Dans le cas complexe, on pose par analogie

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{5\omega^2 a^2}{38\tilde{n}}. \quad (6.24)$$

En définissant les composantes rigides du déplacement  $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{w}_0)$  par analogie avec la définition (6.5)

$$\tilde{u}_0 = z\tilde{\theta}_2, \tilde{v}_0 = -z\tilde{\theta}_1 \text{ et } \tilde{w}_0 = -x\tilde{\theta}_2 + y\tilde{\theta}_1 \quad (6.25)$$

et en utilisant les Éq. (6.22), (6.23) et (6.24) dans le système (6.21), le déplacement complexe total  $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$  à la surface ( $r = a$ ) s'écrit finalement

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{u}_0 \left( 1 + \frac{3}{5} \frac{\tilde{\varepsilon}}{1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon}} \right) + \frac{4}{5} \frac{\tilde{\varepsilon}}{1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon}} \frac{x\tilde{S}_2}{\omega^2 a^2}, \\ \tilde{v} &= \tilde{v}_0 \left( 1 + \frac{3}{5} \frac{\tilde{\varepsilon}}{1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon}} \right) + \frac{4}{5} \frac{\tilde{\varepsilon}}{1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon}} \frac{y\tilde{S}_2}{\omega^2 a^2}, \\ \tilde{w} &= \tilde{w}_0 \left( 1 + \frac{3}{5} \frac{\tilde{\varepsilon}}{1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon}} \right) + \frac{4}{5} \frac{\tilde{\varepsilon}}{1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon}} \frac{z\tilde{S}_2}{\omega^2 a^2}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Pour la suite et afin d'alléger l'écriture, on pose

$$\xi = \frac{\tilde{\varepsilon}}{1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon}}. \quad (6.27)$$

$\tilde{\varepsilon}$  étant une fonction de la fréquence complexe  $s$ , il en est de même pour  $\xi$ . On notera, en se référant à l'Éq. (31) de Hough (1896) et en utilisant l'expression de  $\xi$  donnée à l'Éq. (6.27), que la fréquence de Chandler complexe est

$$\tilde{\sigma}_{CW} = \frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}} \xi. \quad (6.28)$$

### 6.3.2 Déphasages analytiques

En lien avec la discussion du 4.3.1 sur la phase du facteur gravimétrique, nous allons à présent déterminer le déphasage entre le déplacement donné par le système (6.26) et le potentiel  $\tilde{\psi}$  de l'Éq. (6.20). Pour simplifier les calculs, on se place en  $P$  de coordonnées  $(x, y, z) = (a/\sqrt{2}, 0, a/\sqrt{2})$ , c'est-à-dire à 45° de latitude Nord sur le méridien origine. Cela ne constitue en rien une restriction puisque la phase entre les différentes fonctions propres ne dépend pas de la position à la surface. Au point  $P$ , le système (6.26) devient

$$\begin{aligned} \tilde{u}_P &= \frac{a}{\sqrt{2}} \tilde{\theta}_2 (1 + \xi), \\ \tilde{v}_P &= -\frac{a}{\sqrt{2}} \tilde{\theta}_1 \left( 1 + \frac{3}{5} \xi \right), \\ \tilde{w}_P &= -\frac{a}{\sqrt{2}} \tilde{\theta}_2 (1 - \xi). \end{aligned} \quad (6.29)$$

et

$$\tilde{\psi}_P = \frac{21}{5} \tilde{n} \xi \tilde{\theta}_2. \quad (6.30)$$

À la position choisie, le déplacement radial est uniquement donné par les composantes  $\tilde{u}_P$  et  $\tilde{w}_P$  qui ne dépendent que de  $\tilde{\theta}_2$ , tout comme  $\tilde{\psi}$ . Le déplacement radial est

$$\begin{aligned} U_r(P) &= \tilde{u}_P \cos \frac{\pi}{4} + \tilde{w}_P \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\tilde{u}_P + \tilde{w}_P) \\ &= a \tilde{\theta}_2 \xi. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Calculons les différences de phase entre le mouvement du pôle (donné ici par  $\tilde{\theta}_1$  et  $\tilde{\theta}_2$ ), la perturbation du potentiel – dont dérive la variation du champ de pesanteur – et le déplacement radial. En toute rigueur, la perturbation du potentiel est une grandeur, notée  $v'$  par Hough, qui se distingue de  $\psi$ . Toutefois, ces deux fonctions sont égales en surface où la pression et les termes non périodiques s'annulent (Hough 1896). En particulier,  $v'$  et  $\psi$  sont égales au point  $P$ , et j'utiliserai donc simplement l'expression de  $\tilde{\psi}_P$  donnée par l'Éq (6.30) pour la perturbation du potentiel en  $P$ . La différence de phase  $\Delta\varphi_1$  entre  $\tilde{\psi}$  et  $U_r$  est la phase du rapport entre ces deux grandeurs, soit

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1 &= \text{Arg} \frac{\tilde{\psi}_P}{U_r(P)} \\ &= \text{Arg} \frac{21\tilde{n}}{5a} \\ &= \text{Arg} \tilde{\mu}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

La différence de phase entre la variation de potentiel et le déplacement radial est donc la phase de  $\tilde{\mu}$ , autrement dit, d'après l'Éq. (2.43) et pour  $Q_\mu^{-1} \ll 1$ ,

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1 &= \arctan Q_\mu^{-1} \\ &\approx Q_\mu^{-1}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

La différence de phase entre le déplacement radial et le mouvement du pôle est ici simplement donnée par

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_2 &= \text{Arg} \frac{U_r(P)}{\tilde{\theta}_2} \\ &= \text{Arg} \xi \end{aligned} \quad (6.34)$$

et la différence de phase entre la variation de potentiel et le mouvement du pôle est

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_3 &= \text{Arg} \frac{\tilde{\psi}_P}{\tilde{\theta}_2} \\ &= \text{Arg} (\tilde{\mu} \xi) \\ &= \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2. \end{aligned} \quad (6.35)$$

On peut également calculer explicitement  $\Delta\varphi_2$  en fonction de  $\mu_0$  et  $Q_\mu$ , en remplaçant  $\varepsilon$  et  $\tilde{\varepsilon}$  par leurs définitions respectives (6.8) et (6.24) dans l'Éq. (6.34). Au premier ordre en  $Q_\mu^{-1}$ , on a

$$\Delta\varphi_2 = -Q_\mu^{-1} \left( 1 + \frac{8\pi G \rho_0^2 a^2}{57\mu_0} \right)^{-1}. \quad (6.36)$$

Pour un modèle de Terre homogène, le nombre de Love  $k_2$  élastique de degré 2 est

$$k_2 = \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{57\mu_0}{8\pi G \rho_0^2 a^2} \right)^{-1}. \quad (6.37)$$

L'Éq. (6.36) peut donc aussi être écrite

$$\Delta\varphi_2 = -Q_\mu^{-1} \left( 1 - \frac{2}{3}k_2 \right). \quad (6.38)$$

En prenant la valeur couramment utilisée  $\mu_0 = 1.4 \times 10^{11}$  Pa, on calcule  $k_2 = 0.31$  et on estime que  $\Delta\varphi_2 \approx -0.8Q_\mu^{-1}$ , donc que  $\Delta\varphi_2 \approx -0.8\Delta\varphi_1$  et que  $\Delta\varphi_3 \approx -0.2\Delta\varphi_1$ . En d'autres termes, le déphasage entre la variation de potentiel et le mouvement du pôle est le plus important et vaut  $Q_\mu^{-1}$ . Le déphasage entre le déplacement radial et le mouvement du pôle est 20% plus petit; celui entre la variation de potentiel et le mouvement du pôle est seulement de l'ordre de  $Q_\mu^{-1}/5$ .

### 6.3.3 Conclusion

Cette généralisation des calculs de Hough (1896) permet de clarifier les conséquences du passage d'un modèle de Terre élastique en rotation à un modèle anélastique en rotation. Tout d'abord, pour en revenir au choix de ne pas immédiatement négliger les termes en  $\omega^2\varepsilon$  dans les Éq. (6.14), il est apparu que cette précaution n'était pas nécessaire et que les mêmes termes pouvaient être négligés dans le cas anélastique et le cas élastique. De fait, même en ajoutant les petits termes dus à l'anélasticité, le rôle de la force de Coriolis demeure négligeable. Néanmoins, il n'est pas évident *a priori* que l'on puisse toujours négliger les mêmes termes lorsqu'on quitte le domaine élastique. Les mêmes termes que dans le cas élastique pouvaient être négligés ici, uniquement parce que les termes dominants étaient dès le début *très* supérieurs aux autres, non pas parce que les modifications dues à l'anélasticité étaient elles-mêmes grandes. Quoiqu'il en soit, en détaillant les développements de la Section 6.2.2 pour aboutir au système (6.18), il est désormais établi que le système anélastique se déduit directement du système élastique par l'introduction de variables complexes. Hough (1896) avait fait l'hypothèse que la déformation due au mouvement du pôle pouvait être traitée comme une réponse de la Terre à une perturbation extérieure (voir 6.1.2). La généralisation de ses travaux à un modèle de Terre

anélastique semble donc indiquer la validité de cette démarche dans le cas anélastique également.

En lien avec la discussion de la Section 4.2 autour du facteur gravimétrique, de sa phase, et de celle des fonctions propres intervenant dans la description du mouvement de Chandler, les résultats de la Section 6.3.2 donnent une solution purement analytique pour un modèle de Terre ellipsoïdal en rotation, incompressible et homogène. De façon intéressante, ces résultats sont le fruit d'une méthodologie sensiblement différente des approches dont il sera question dès le prochain chapitre. On retiendra que le seul paramètre anélastique dont dépendent les déphasages (6.33), (6.35) et (6.36) est le facteur de qualité intrinsèque du modèle,  $Q_\mu^{-1}$ .

# Résolution analytique

## Sommaire

<b>7.1 Équations des petites déformations</b> . . . . .	<b>101</b>
<b>7.2 Formalisme</b> . . . . .	<b>103</b>
7.2.1 Mécanique des milieux continus . . . . .	103
7.2.2 Système de référence et coordonnées . . . . .	106
7.2.3 Équations fondamentales et conditions aux limites . . . . .	108
<b>7.3 Méthode de résolution</b> . . . . .	<b>114</b>
7.3.1 Principe de résolution . . . . .	114
7.3.2 Harmoniques sphériques généralisées . . . . .	114
7.3.3 Projection sur la base canonique et combinaison . . . . .	117
<b>7.4 Résolution et solutions analytiques</b> . . . . .	<b>118</b>
7.4.1 Chaîne de couplage et fonctions propres . . . . .	118
7.4.2 Méthode de résolution analytique . . . . .	120

*[If the Earth were in perfect hydrostatic equilibrium,] the solid surface would be a level surface, the oceans would cover it, and we should have no interest in the matter.*

Harold Jeffreys, *The Earth*

## 7.1 Équations des petites déformations

Dans un formalisme parfois différent de celui discuté au chapitre précédent, de nombreux auteurs se sont intéressés à l'étude analytique ou numérique de la déformation d'une Terre sphérique ou ellipsoïdale. Je me concentrerai sur une approche purement analytique dans ce chapitre, la modélisation numérique étant discutée dans la Partie IV suivante.

Selon les processus et la complexité du modèle de Terre étudiés, différentes méthodes ont été et sont encore employées pour mettre en équations le comportement physique d'une Terre déformable. Mis à part des calculs directs tels que celui de Hough (1896) exposé au Chap. 6, la démarche adoptée consiste généralement à écrire l'ensemble des équations fondamentales pour une géométrie sphérique ou quasi-sphérique, des équations d'état (ou constitutives) décrivant

le comportement des matériaux en jeu et un certain nombre de conditions aux limites spécifiques au modèle choisi (voir le 7.2.3).

La solution analytique du problème des petites déformations d'une Terre sphérique non rotative, élastique, isotrope (SNREI) homogène a été établie pour la première fois dès 1899 par le mathématicien anglais Thomas John l'Anson Bromwich (Bromwich 1899), contemporain de Hough. Cette solution fait intervenir les fonctions de Bessel sphériques et peut être réutilisée dans un modèle en couches, moyennant l'ajout de conditions aux limites appropriées pour les différentes interfaces. Ces solutions permettent ensuite de calculer les fréquences et fonctions propres des modes propres du modèle de Terre considéré. L'application du Principe de correspondance permet également de traiter de modèles anélastiques, toujours en exploitant les solutions de Bromwich. Les premières études de l'influence de l'ellipticité et de la rotation sur les modes propres est tout aussi ancienne. Dans la suite des travaux du fameux polymathe français Henri Poincaré (Poincaré 1885), Bryan (1889) s'intéressa aux « ondes libres » sur un ellipsoïde de Maclaurin<sup>1</sup> fluide. On retrouve d'ailleurs un formalisme similaire au sien dans Hough (1896). Love (1889) s'intéressa aussi à la question, en lien avec la « genèse de la Lune » et la façon dont celle-ci s'est séparée de la Terre. Love s'appuie également sur les travaux de Poincaré, mais aussi sur ceux du fameux mathématicien allemand Bernhard Riemann (qui a de même donné son nom à un ellipsoïde), de l'anglais George Howard Darwin<sup>2</sup> ou encore du français Alfred Barnard Basset et du britannique Alfred George Greenhill.

L'abondance au XIX<sup>e</sup> siècle de ces travaux théoriques sur la dynamique des ellipsoïdes en rotation, menés par d'éminents scientifiques, n'est pas restée sans suite au XX<sup>e</sup> siècle. Au contraire, l'exploration de ce champ d'étude s'est poursuivie et élargie, avec des avancées importantes. Point intéressant qui renforce le constat amené par le paragraphe précédent, des théoriciens de diverses disciplines se sont penchés sur ces questions, au-delà du cadre de ce que l'on nomme aujourd'hui la géophysique. Cet intérêt commun montre, s'il en était besoin, l'étendue de ce sujet. On citera par exemple les travaux du mathématicien français Élie Cartan qui a, entre autres, prolongé ceux de Poincaré sur la stabilité des ellipsoïdes (Cartan 1924) ou ceux de l'astrophysicien belge Paul Ledoux qui s'est concentré sur des questions de dynamiques stellaires (Ledoux 1951).

À une époque plus récente et pour en revenir à la géophysique proprement dite, davantage d'études ont été consacrées à la caractérisation des petites oscillations de modèles de Terre en rotation dotés d'un noyau fluide et d'une graine. Il est vrai que le développement des ordinateurs dans la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle a permis d'exploiter plus facilement les solutions analytiques pour effectivement calculer les déformations et modes propres de rotation de modèles de complexité croissante. Cependant, la détermination rigoureuse des solutions générales pour de tels modèles nécessite toujours des calculs laborieux. Plu-

---

1. Ellipsoïde à symétrie de révolution, d'après le nom du mathématicien écossais Colin Maclaurin, célèbre notamment pour ses séries et ses travaux sur la forme de la Terre en rotation.

2. fils du célèbre Charles Darwin

sieurs solutions ont été établies puis raffinées jusqu'à aujourd'hui. On citera à titre d'exemple les travaux de Jeffreys et Vicente (1957) qui ont utilisé les méthodes de la mécanique lagrangienne pour calculer les nutations et les nombres de Love de marées ou Smith (1974) qui a mené une étude analytique des modes propres d'une Terre élastique en rotation. Parmi les études les plus récentes je citerai bien sûr celles de Rogister et Rochester (2004), Rochester et al. (2014) et Crossley et Rochester (2014).

Les travaux cités dans les paragraphes précédents ont permis de donner un aperçu historique et de préciser dans quel cadre s'inscrit le présent travail mais il ne s'agit en aucun cas d'une liste exhaustive.

## 7.2 Formalisme

### 7.2.1 Mécanique des milieux continus

Avant de s'intéresser aux déformations d'un milieu continu tel que la Terre, il convient de définir certains concepts. De nombreux auteurs ont présenté différentes utilisations de la mécanique des milieux continus (Ranalli 1987 ; Dahlen et Tromp 1998 ; Cornet 2008 ; Surana 2014) et je ne détaillerai donc ici que les éléments nécessaires à la compréhension des développements qui suivent. Tout d'abord, le terme de *particule* fera référence à un élément de volume infinitésimal, assez gros pour être doté de propriétés physiques telle la densité ou la température, mais suffisamment petit pour être assimilable à un point mathématique doté d'une position et d'une vitesse unique. On pourrait longuement discuter de la signification physique d'une telle définition, surtout pour un milieu aussi complexe que des roches mantelliques cristallines, mais ce n'est pas l'objet de ce travail. J'admets donc ici l'existence de telles particules et j'utiliserai cette notion conformément au formalisme de la mécanique des milieux continus.

Une particule  $P$  peut être alternativement désignée par sa position  $\vec{r}$  à un instant initial  $t = t_0$  ou par sa position au cours du temps  $\vec{x}(\vec{r}, t)$ . La première formulation, en fonction de  $\vec{r}$ , est dite *lagrangienne*, la seconde, en  $\vec{x}(\vec{r}, t)$ , est dite *eulérienne*. Selon l'objet et le processus physique étudiés, l'une ou l'autre de ces formulations est parfois préférée. À première vue, la conception lagrangienne du mouvement semble plus intuitive pour décrire un milieu faiblement déformé, celle-ci ayant en plus comme avantage que le domaine de variation de  $\vec{r}$  est connu – il s'agit du volume initial occupé par le milieu continu – alors que celui de  $\vec{x}$  dépend de la déformation déjà subie par le milieu au temps  $t$  considéré. Pour autant, la représentation eulérienne n'est pas une simple alternative mathématique. En mécanique des fluides ou, de façon générale, quand les déformations sont potentiellement importantes, il semble ainsi plus naturel d'adopter l'approche eulérienne en se plaçant en un point  $\vec{x}$  donné pour observer les particules passant à ce point. De même, les relations entre champ de potentiels et champ de forces sont intrinsèquement eulériennes. En effet, si un



champ eulérien est simplement le gradient eulérien d'un potentiel eulérien, ce n'est pas le cas en formalisme lagrangien.

Il est d'usage courant de distinguer les fonctions utilisées dans le cadre lagrangien de celles utilisées dans le cadre eulérien en notant les premières en minuscules et les secondes en majuscules (voir la Table 7.1). En particulier, le déplacement de la particule  $\vec{r}$  est noté  $\vec{s}(\vec{r}, t)$  de sorte que

$$\vec{x}(\vec{r}, t) = \vec{r} + \vec{s}(\vec{r}, t) \quad (7.1)$$

tandis que le déplacement subi par une particule *quelconque* observée au point  $\vec{x}$  à l'instant  $t$  est  $S(\vec{x}, t)$ . Cette règle des majuscules/minuscules a quelques exceptions : on retiendra évidemment l'utilisation de  $\vec{r}$  et  $\vec{x}$  pour la position, mais aussi de  $\rho$  et  $\varrho$  pour la densité en représentation lagrangienne et eulérienne respectivement (les autres exceptions seront signalées au besoin). Pour les opérateurs différentiels, la distinction entre ces deux représentations est indiquée avec le symbole  $\vec{r}$  ou  $\vec{x}$  en indice, de façon explicite.

Un type de problème souvent rencontré en mécanique des milieux continus est celui des petites déformations. Dans ce cas, on peut ne conserver que les déplacements et déformations de premier ordre dans les équations du mouvement et il existe des relations simples entre les fonctions en représentations lagrangiennes et eulériennes. Notamment, des déplacements petits permettent de considérer que le déplacement à l'instant  $t$  en  $\vec{x}$  d'une particule est le même que celui observé au même instant à la position initiale de ladite particule, autrement dit  $\vec{S}(\vec{x}, t) \approx \vec{S}(\vec{x}(\vec{r}, t_0), t)$ . De cette approximation, il découle directement que, pour des petites déformations,  $\vec{S}(\vec{x}, t) \approx \vec{s}(\vec{r}, t)$ . Les petites perturbations lagrangiennes des fonctions sont notées  $\delta$  tandis que les petites perturbations eulériennes sont notées  $\Delta$ . Entre autres égalités utiles, on montre, au premier ordre, que la perturbation lagrangienne  $\delta f$  d'une fonction  $f(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t_0) + \delta f(\vec{r}, t)$  est

$$\delta f(\vec{r}, t) = \Delta f(\vec{r}, t) + \vec{s}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f(\vec{r}, t_0). \quad (7.2)$$

On peut décrire la déformation des milieux continus du point de vue lagrangien ou eulérien. Dans les deux cas, on définit pour ce faire différents tenseurs. Le tenseur *gradient de la déformation* est défini par  $f_{ij} = \partial x_i / \partial r_j$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{f}^T = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \vec{x}(\vec{r}, t) = \mathbf{I} + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \vec{s}(\vec{r}, t). \quad (7.3)$$

Le déterminant de  $\mathbf{f}$  est le jacobien  $J$  du changement de variables de  $\vec{r}$  à  $\vec{x}$  et donne le ratio de volume infinitésimal entre l'état initial et l'état au temps  $t$ , autrement dit  $J = dV(t)/dV(t_0) = \det \mathbf{f}$ . Pour des déplacements petits, l'inverse de  $\mathbf{f}$  est donné par  $(\mathbf{f}^{-1})_{ij} = \delta_{ij} - \partial s_i / \partial r_j$ .

Le *tenseur de déformation*  $\mathbf{e}$  en représentation lagrangienne donne un moyen de déterminer la variation (du carré) de la norme du vecteur  $\vec{dr}$  au cours du mouvement *via* l'égalité

$$dx^2 - dr^2 = 2\vec{dr} \cdot \mathbf{e} \cdot \vec{dr}, \quad (7.4)$$

DESCRIPTION...	eulérienne	lagrangienne
Position	$\vec{x}$ , pos. instantanée de $P$	$\vec{r}$ , pos. initiale de $P$
Déplacement	$\vec{S}(\vec{x}, t)$	$\vec{s}(\vec{r}, t)$
Fonction	$F = F(\vec{x}, t)$	$f = f(\vec{r}, t)$
Fonction perturbée	$F(\vec{x}, t_0) + \Delta F(\vec{x}, t)$	$f(\vec{r}, t_0) + \delta f(\vec{r}, t)$
DÉRIVÉES TEMPORELLES	$\partial/\partial t = \partial/\partial t _{\vec{x}}$	$d/dt = \partial/\partial t _{\vec{r}}$
Vitesse	$\vec{V}(\vec{x}, t)$	$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dt}$
Accélération	$\vec{A}(\vec{x}, t)$	$\vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$
PERTURBATIONS	$\Delta$	$\delta$
eulériennes	$\Delta F(\vec{x}, t)$	$\Delta f(\vec{r}, t)$
lagrangiennes	$\delta F(\vec{x}, t)$	$\delta f(\vec{r}, t)$
POTENTIEL ET CHAMP	$\Phi(\vec{x}, t)$	$\phi(\vec{r}, t)$
Nabla	$\vec{\nabla}_{\vec{x}}$	$\vec{\nabla}_{\vec{r}}$ ou $\vec{\nabla}$
Champ (gradient)	$-\vec{\nabla}_{\vec{x}}\Phi(\vec{x}, t)$	$-\vec{\nabla}_{\vec{x}}\vec{r}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}\phi(\vec{r}, t)$
Variations	$-\vec{\nabla}_{\vec{x}}\Delta\Phi(\vec{x}, t)$	$-\vec{\nabla}_{\vec{r}}\delta\phi(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}_{\vec{r}}\vec{s}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}\phi(\vec{r}, t_0)$

TABLEAU 7.1 – Notations utilisées dans les formalismes eulérien et lagrangien (pos. = position). La vitesse et l'accélération eulérienne sont obtenues par changement de variables dans les fonctions lagrangiennes correspondantes ; elles sont des inconnues fondamentales qui dépendent de la loi du mouvement.

qui implique

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} &= \frac{1}{2} (\mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} - \mathbf{I}) \\
&= \frac{1}{2} \left[ \vec{\nabla}_{\vec{r}}\vec{s} + (\vec{\nabla}_{\vec{r}}\vec{s})^T + \vec{\nabla}_{\vec{r}}\vec{s} \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{r}}\vec{s})^T \right] \\
&\approx \frac{1}{2} \left[ \vec{\nabla}_{\vec{r}}\vec{s} + (\vec{\nabla}_{\vec{r}}\vec{s})^T \right]
\end{aligned} \tag{7.5}$$

pour les petites déformations.

Le tenseur des contraintes (de Cauchy), en représentation eulérienne, est le tenseur<sup>3</sup>  $\mathbf{T}$  tel que la force  $d\vec{F}(\vec{x}, t)$  exercée par les particules sur d'autres particules au travers de la surface  $dA(t)$  de normale  $\vec{n}(t)$  soit donnée par

$$d\vec{F}(\vec{x}, t) = \vec{n}(t) \cdot \mathbf{T}dA^t. \tag{7.6}$$

En représentation lagrangienne et conformément aux notations précédentes, le

3. J'ai remplacé ici la notation  $\sigma$  du 2.4.2 par  $\mathbf{T}$  pour simplifier le parallèle avec la représentation eulérienne  $\mathbf{t}$ .

tenseur des contraintes est  $\mathbf{t}(\vec{r}, t) = \mathbf{T}[(\vec{x}(\vec{r}, t), t)]$ . Dans cette représentation, pour une force  $\vec{d}\vec{f}(\vec{r}, t)$ , on doit se référer à la configuration initiale du corps, de surface initiale  $dA(t_0)$  avec la normale  $\vec{n}(t_0)$  et on définit le *premier tenseur de Piola-Kichhoff*  $\boldsymbol{\tau}(\vec{r}, t)$  tel que  $\vec{d}\vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{n}(t_0) \cdot \boldsymbol{\tau}dA(t_0)$ , par analogie avec l'Éq. (7.6). Ainsi, on peut établir une relation entre les trois tenseurs  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{e}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  sous la forme de l'égalité

$$\boldsymbol{\tau} = J\mathbf{f}^{-1} \cdot \mathbf{t}. \quad (7.7)$$

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons notamment aux variations du tenseur des contraintes en représentation lagrangienne, soit  $\delta\mathbf{t}$ .

Les tenseurs définis ci-dessus permettent de décrire les déformations spatiales du milieu. La dimension temporelle apparaît au travers des dérivées dites *matérielle* et *temporelle*. Ces deux notions essentielles découlent directement de la distinction entre l'approche eulérienne et l'approche lagrangienne. La *dérivée matérielle* est

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\vec{r}}. \quad (7.8)$$

Elle est calculée en suivant la particule  $\vec{r}$ . En particulier,  $\vec{v}(\vec{r}, t) = d\vec{x}/dt$  est la vitesse de la particule  $\vec{r}$ . Notez que, en vertu de l'Éq. (7.1), on a aussi  $\vec{v}(\vec{r}, t) = d\vec{s}/dt$ . La *dérivée temporelle (usuelle)* est quant à elle

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\vec{x}}. \quad (7.9)$$

Elle est calculée à une position  $\vec{x}$  donnée. En particulier,  $\vec{V}(\vec{x}_1, t) = (\partial\vec{x}/\partial t)_{\vec{x}_1}$  est la vitesse des particules passant en  $\vec{x}_1$  (l'indice 1 est nécessaire pour faire la différence entre la variable  $\vec{x}$  qui est dérivée et la position  $\vec{x}_1$  à laquelle la dérivée est évaluée). De façon similaire,  $\partial\rho/\partial t$  est la variation de densité à un point donné.

La Table 7.1 résume l'ensemble des notations introduites dans les paragraphes précédents.

## 7.2.2 Système de référence et coordonnées

Le système de référence dans lequel on se place est un système de Tisserand, déjà rencontré au 2.3. Précisément, ce système d'axes vérifie les trois propriétés suivantes :

- son origine  $O$  est au centre des masses de la Terre,
- il tourne autour de son axe ( $Oz$ ) à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}_0 = \Omega_0\vec{e}_z$ , relativement à un système de référence absolu,
- l'axe ( $Oz$ ) est fixe dans un système de référence absolu et tel que, (a) les vitesses de déformations ajoutées à la rotation globale pour expliquer le mouvement des particules induisent un moment cinétique total nul<sup>4</sup> ou,

4. Voir aussi la condition dite NNR pour *no-net-rotation* (Altamimi 2003 ; Kreemer et al. 2006).

de façon équivalente, (b) les déformations sont minimisées au sens des moindres carrés.

L'ITRF, défini au 2.1.1 comme le repère réalisant l'ITRS, est, par construction, le repère terrestre le plus proche d'un système d'axes de Tisserand. En pratique, il est difficile de vérifier certaines conditions, notamment la troisième qui nécessiterait de parfaitement connaître le champ de vitesse en surface mais aussi à l'intérieur de la Terre. Cependant, pour ce qui nous intéresse ici, la réalisation d'un système de Tisserand nous intéresse moins que sa définition.

L'aplatissement de la Terre et les déformations auxquelles elle est soumise étant de faible amplitude, les coordonnées les plus naturelles pour l'étudier sont les coordonnées sphériques  $(q, \theta, \varphi)$  – distance radiale, colatitude, longitude. Le choix de  $q$  pour la première coordonnée permet de conserver  $r$  pour désigner la distance à l'origine de la particule  $\vec{r}$  en représentation lagrangienne. La variable  $q$  revêt donc un aspect purement géométrique (les surfaces  $q = \text{cste}$  sont des sphères) tandis que  $r$  a une signification physique et correspond à la coordonnée matérielle. Pour une Terre stratifiée en rotation, les particules de même densité sont initialement sur des ellipsoïdes de révolution, également équipotentielles, qui sont solutions de la théorie du mathématicien français Alexis Claude Clairaut sur les figures d'équilibre hydrostatique (Clairaut 1743).

Nous avons déjà utilisé un des produits de la théorie de Clairaut au 6.1.2, sous la forme de l'Éq. (6.8) pour l'aplatissement d'une Terre homogène en rotation. De façon plus générale, avec  $\varepsilon(q)$  l'aplatissement, l'équation des ellipsoïdes d'équidensité en fonction de  $q$  et  $\theta$ , au premier ordre en  $\varepsilon(q)$ , est (Dahlen 1968)

$$\begin{aligned} r(q, \theta) &= q \left[ 1 - \frac{2}{3}\varepsilon(q)P_2(\cos \theta) \right] \\ &= q + h_2(q)P_2(\cos \theta), \end{aligned} \quad (7.10)$$

où  $P_2(\cos \theta)$  est le polynôme de Legendre de degré 2 évalué en  $\cos \theta$ , soit  $P_2(\cos \theta) = (3 \cos^2 \theta - 1)/2$  et on a défini

$$h_2(q) = -\frac{2}{3}\varepsilon(q)q. \quad (7.11)$$

On peut vérifier dans l'Éq. (7.10) que les particules près des pôles terrestres sont plus proches du centre de la Terre (si  $\theta = 0$ ,  $r < q$ ) alors que celles à l'équateur sont plus éloignées que pour une Terre sphérique (si  $\theta = \pi/2$ ,  $r > q$ ). Ceci est bien conforme avec la conception d'une Terre aplatie au pôle est enflée à l'équateur. L'équation différentielle de Clairaut est

$$\frac{d^2\varepsilon}{dq^2} + \frac{6\rho_0}{q\bar{\rho}_0} \frac{d\varepsilon}{dq} - \frac{6}{q^2} \left( 1 - \frac{\rho_0}{\bar{\rho}_0} \right) \varepsilon = 0, \quad (7.12)$$

où  $\bar{\rho}_0$  est la densité moyenne des matériaux inclus dans la sphère de rayon  $q$ . En ajoutant à l'Éq. (7.12) des conditions sur l'aplatissement à l'origine ( $\varepsilon(0)$  est fini) et en surface, on peut déterminer  $\varepsilon(q)$ .

Par la suite, les fonctions dépendant de  $q$  seront notées avec des indices, par exemple  $\rho_0(q, \theta, \varphi)$  pour la densité à la distance  $q$  de l'origine, tandis que les fonctions de  $r$  seront notées avec des exposants, par exemple  $\rho^0(\vec{r})$ , la densité de la particule  $\vec{r}$ . N'importe quelle fonction connue en  $q$  (telles que le profil de densité ou les paramètres de Lamé des modèles de Terre sphériques) peut être développée en une série de Taylor, au premier ordre ou plus, au point  $(r, \theta, \phi)$  au voisinage de  $(q, \theta, \phi)$ . Pour ce faire, il suffit d'inverser l'Éq. (7.10), ce qui donne

$$q(r, \theta) = r \left[ 1 + \frac{2}{3} \varepsilon(r) P_2(\cos \theta) \right], \quad (7.13)$$

et on peut alors calculer que la densité  $\rho^0(r)$  est, au premier ordre,

$$\begin{aligned} \rho^0(r, \theta) &= \rho_0(q) + \frac{2}{3} \varepsilon(q) q P_2(\cos \theta) \left. \frac{d\rho_0}{dq} \right|_q \\ &\approx \rho_0(r) + \frac{2}{3} \varepsilon(r) r P_2(\cos \theta) \left. \frac{d\rho_0}{dr} \right|_r \\ &= \rho_0(r) + \rho_2(r) P_2(\cos \theta) \end{aligned} \quad (7.14)$$

en posant

$$\rho_2(r) = \frac{2}{3} \varepsilon(r) \left. \frac{d\rho_0}{dr} \right|_r, \quad (7.15)$$

qui est le coefficient de degré 2 du développement de la densité sur une surface ellipsoïdale. Les fonctions portant les indices dans les Éq. (7.14) et (7.15) sont toujours des fonctions de  $q$  contrairement à ce que semble indiquer la variable  $r$ . Il faut bien comprendre que cette notation indique seulement que les fonctions de  $q$  sont évaluées en  $q = r$ . L'intérêt d'une telle écriture est qu'elle permettra par la suite de ne plus utiliser que la variable  $r$ .

### 7.2.3 Équations fondamentales et conditions aux limites

Les *équations fondamentales* sont le point de départ de l'essentiel des études (géo)physiques théoriques. L'ensemble d'équations retenu est propre à chaque problème et dépend des phénomènes physiques auxquels on s'intéresse. Par exemple, dans ce qui suit, je ne me préoccuperai pas des considérations thermodynamiques ; l'équation de conservation de l'énergie ne sera donc pas utilisée puisqu'elle est découplée des autres. En termes épistémologiques, les équations fondamentales sont l'aboutissement et la synthèse des travaux scientifiques théoriques et expérimentaux qui ont été menés au cours des siècles. Elles sont généralement établies et vérifiées empiriquement, en dépit du fait qu'elles constituent les fondements de la physique dite « théorique ». Mathématiquement, elles posent des contraintes sur les variations spatio-temporelles de différentes grandeurs qui décrivent le comportement du système étudié (déplacement, densité, contraintes, température, etc.) et décrivent leur interdépendance.

On distingue les équations de *conservation* des équations d'*état* ou *constitutives*. Les premières indiquent sous quelles conditions une grandeur physique particulière est conservée tout au long de l'évolution du système, ou, de façon plus générale, comment cette grandeur varie. Au nombre de quatre dans l'étude de la déformation de la Terre, ce sont : la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement, la conservation du moment cinétique et l'équation de Poisson pour le potentiel de gravité. Les secondes décrivent quant à elles la nature du système, sa constitution et la façon dont il répond lorsqu'il est sollicité. Dans le contexte de ce travail, la seule équation constitutive est donnée par une loi rhéologique, telle que définie au 2.4. Dans le système de référence de Tisserand, les équations fondamentales linéarisées sont explicitement formulées dans les paragraphes suivants, avec la définition des grandeurs physiques qu'elles font intervenir. L'opérateur nabla lagrangien sera simplement noté  $\vec{\nabla}$  quand aucune ambiguïté ne sera possible (pour rappel, on pourra se référer à la Table 7.1 pour les autres notations). Pour ne pas alourdir la notation, les équations fondamentales sont écrites avec la densité, les paramètres élastiques et le potentiel de gravité non perturbé exprimés en fonction de  $q$ , comme l'indiquent les indices 0 en exposant, mais tous peuvent être développés au premier ordre (ou plus) en l'aplatissement, suivant la même démarche que pour la densité à l'Éq (7.14).

### Équations de conservation

**Conservation de la masse.** Aussi appelée *équation de continuité*, elle s'exprime en coordonnées eulériennes

$$\frac{\partial \Delta \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot (\varrho^0 \vec{V}) = 0, \quad (7.16)$$

où  $\Delta \varrho$  est la perturbation eulérienne locale de densité et  $\varrho_0$  la densité eulérienne. Grâce au changement de variable de l'Éq. (7.1) et en négligeant les produits de termes petits, on obtient l'équation de continuité linéarisée en représentation lagrangienne

$$\frac{d\Delta \rho}{dt} + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot (\rho^0 \vec{v}) = 0. \quad (7.17)$$

où  $\rho^0$  est donnée par l'Éq. (7.14). Physiquement, ces équations signifient qu'il n'y a ni création, ni perte de matière (de masse). Intégrée sur un volume quelconque, elles expriment le fait que la masse ajoutée dans le volume ou ôtée de celui-ci (terme  $d\Delta \rho/dt$ ) est compensée à tout instant par l'opposé du flux de masse ayant traversé la surface frontière englobant le volume (terme  $\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot (\rho^0 \vec{v})$ ). L'Éq. (7.17) peut être également écrite

$$\Delta \rho = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot (\rho^0 \vec{s}). \quad (7.18)$$

**Conservation de la quantité de mouvement** En coordonnées lagrangiennes, elle prend la forme

$$\begin{aligned} \rho^0 \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = & \vec{\nabla} \cdot \delta \mathbf{t} - \rho^0 \vec{\nabla} \phi_1 - \rho^0 \vec{\nabla} \phi_M + \rho^0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{s}) \vec{\nabla} \tilde{\phi}^0 \\ & - \rho^0 \vec{\nabla} (\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\phi}^0) - 2\rho^0 \vec{\omega}_0 \wedge \frac{d\vec{s}}{dt} + \vec{f}^{ext} \end{aligned} \quad (7.19)$$

où  $\vec{\omega}_0$  est le vecteur rotation de la Terre, soit  $\vec{\omega}_0 = \Omega_0 \vec{e}_z$ , et les potentiels sont définis comme tels :

- $\phi^0$  est le potentiel de gravité non perturbé (attraction newtonienne),
- $\phi_1 = \Delta \phi$  est la variation eulérienne du potentiel newtonien lagrangien (le potentiel de gravité total est donc  $\phi = \phi^0 + \phi_1$ ),
- $\phi_c^0 = -\frac{1}{2} |\vec{\omega}_0 \wedge \vec{r}|^2$  est le potentiel dû à la rotation de la Terre, l'indice  $c$  faisant référence à la pseudo-force *centrifuge*,
- $\tilde{\phi}^0 = \phi^0 + \phi_c^0$  est le potentiel total non perturbé, autrement dit le potentiel de pesanteur de l'état initial,
- $\phi_M$  est le potentiel de marée, induit par les corps extérieurs.

On ajoute à cette liste  $\vec{f}^{ext}$ , la somme des forces extérieures appliquées à la Terre, autres que les forces de marées (sachant qu'il n'y a généralement pas d'autres forces extérieures que les forces de marées). Au premier ordre en l'aplatissement, on a

$$\tilde{\phi}^0(r, \theta) = \tilde{\phi}_0(r) + \tilde{\phi}_2(r) P_2(\cos \theta) \quad (7.20)$$

où

$$\tilde{\phi}_2(r) = \frac{2}{3} \varepsilon(r) r \left. \frac{d\tilde{\phi}_0}{dr} \right|_r. \quad (7.21)$$

Le terme  $\vec{\nabla} \cdot \delta \mathbf{t}$  donne les forces de contact résultant de la variation lagrangienne du tenseur des contraintes. La conservation de la quantité de mouvement telle que donnée par l'Éq. (7.19) n'est rien d'autre que la seconde loi de Newton généralisée à un corps déformable auto-gravitant en rotation.

**Conservation du moment cinétique** Similaire à la conservation de la quantité de mouvement mais pour des corps en rotation, l'équation de conservation du moment cinétique ne se déduit pourtant pas de l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour un milieu continu. En l'absence de couples de contraintes et de couples de volume, elle se traduit par la symétrie du tenseur des contraintes :

$$t_{ij} = t_{ji}. \quad (7.22)$$

**Équation de Poisson** Nommée d'après le physicien et mathématicien français Siméon Denis Poisson, l'équation de Poisson du potentiel de gravité est l'expression sous forme différentielle de la loi de la gravitation universelle de Newton pour le potentiel gravitationnel  $\phi$  créé par le corps considéré. En représentation eulérienne, elle s'écrit

$$\nabla_x^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (7.23)$$

Sous sa forme lagrangienne linéarisée pour des petites perturbation du potentiel, elle devient

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi_1 &= 4\pi G\Delta\rho \\ &= -4\pi G\vec{\nabla} \cdot (\rho^0\vec{s})\end{aligned}\quad (7.24)$$

où la seconde égalité se déduit de l'Éq. (7.18).

### Équation constitutive

Grâce au Principe de correspondance présenté au 2.4.3 et déjà utilisé au 6.2, on peut traiter le problème de la déformation de la Terre pour une rhéologie linéaire quelconque, anélastique notamment, sans recourir à un formalisme plus complexe que celui de l'élasticité linéaire. Nous utilisons donc la loi de Hooke isotrope comme équation constitutive, donnée à l'Éq. (2.38) en représentation eulérienne. Dans la Terre, l'état d'équilibre initial n'est pas dénué de contraintes en raison de la pression hydrostatique (ou lithostatique). On peut donc écrire le tenseur des contraintes  $\mathbf{t}$  comme la somme d'une composante initiale  $\mathbf{t}(\vec{r}, t_0)$  due à  $p^0$ , la pression hydrostatique initiale, et d'une composante perturbée  $\delta\mathbf{t}(\vec{r}, t)$ , due à la déformation ultérieure. En coordonnées lagrangienne, ces contraintes initiales et la loi de Hooke (2.34) deviennent alors,

$$\mathbf{t}(t_0) = -p^0\mathbf{I} \quad (7.25)$$

et

$$\delta\mathbf{t} = \lambda^0(\vec{\nabla} \cdot \vec{s})\mathbf{I} + 2\mu^0\mathbf{e}, \quad (7.26)$$

où  $\lambda^0$  et  $\mu^0$  sont les paramètres de Lamé en coordonnées lagrangiennes cette fois, bien que leur notation ne diffère pas de la notation eulérienne. Aucune confusion n'est toutefois possible puisque nous n'utiliserons plus les paramètres de Lamé eulériens par la suite. De façon similaire à la densité, on a

$$\lambda^0(r, \theta) = \lambda_0(r) + \lambda_2(r)P_2(\cos\theta) \quad (7.27)$$

$$\mu^0(r, \theta) = \mu_0(r) + \mu_2(r)P_2(\cos\theta) \quad (7.28)$$

avec

$$\lambda_2(r) = \frac{2}{3}\varepsilon(r)r \left. \frac{d\lambda_0}{dr} \right|_r \quad (7.29)$$

$$\mu_2(r) = \frac{2}{3}\varepsilon(r)r \left. \frac{d\mu_0}{dr} \right|_r. \quad (7.30)$$

### Conditions aux limites et conditions de continuité

Les équations fondamentales précédentes sont des équations aux dérivées partielles. Elles ne peuvent être totalement résolues sans l'ajout de contraintes sur leurs solutions. Hormis les petites déformations, nous n'avons pas encore



émis d'hypothèses fortement contraignantes sur le corps étudié. L'ellipticité et la petitesse de l'aplatissement, notamment, n'interviendront qu'ultérieurement, dans le développement des paramètres portant un 0 en exposant (développement similaire à l'Éq. (7.14)). Les équations écrites jusqu'ici sont donc valables pour une classe importante de corps en rotation.

La restriction du problème des petites déformations au cas particulier d'une Terre sphéroïdale faiblement aplatie et dotée d'une ou plusieurs interfaces (une surface libre au minimum, dans le cas d'une Terre homogène) se fait en ajoutant des contraintes *a priori* à la formulation générale précédente. Ces contraintes peuvent porter sur l'expression des paramètres géophysiques intervenant dans les équations fondamentales (par exemple, l'ellipticité faible implique l'égalité (7.14) pour la densité) mais elles peuvent aussi porter sur la forme générale des solutions ou sur leur comportement à des positions particulières. Je reporte pour le moment l'examen de la forme des solutions à la section suivante (7.3.2) car celui-ci nécessite l'introduction d'outils mathématiques spécifiques. En revanche, concernant les contraintes sur le comportement des solutions, il s'agit de conditions standard que les solutions doivent remplir à l'origine, à la surface et au travers des interfaces, ou discontinuités, dans la Terre. Ces *conditions de continuités* (ou *conditions aux limites*, aux bornes du domaine de définition de  $\vec{r}$ ) permettent de déterminer entièrement les solutions du système différentiel des équations fondamentales et de connaître, notamment, l'expression des constantes d'intégration en fonction de paramètres géophysiques connus.

Bien que l'interprétation des conditions de continuité en mécanique des milieux continus soient le plus souvent très intuitive et, de ce fait, facilement traduisibles en termes physiques courants, leur détermination nécessitent parfois un traitement complexe associé à des calculs non triviaux (Chambat et al. 2014). Pour le problème qui nous intéresse ici, je me contenterai d'en donner les expressions, en m'appuyant toujours sur les travaux de Rogister (2000). La Table 7.2 présente l'ensemble des conditions de continuité pour des interfaces soudées ou glissantes.

Le *Domaine Sphérique Équivalent* est « la sphère dont le volume est égal à celui de l'ellipsoïde de référence et dans laquelle la distribution de la matière, hormis au voisinage des interfaces, est la même que dans cet ellipsoïde ». Défini par Smith (1974), ce domaine permet de réécrire les équations de continuité de la Table 7.2 sur des surfaces sphériques, ce qui est plus naturel dans le système de coordonnées sphériques des équations fondamentales. Au premier ordre en  $h_2$ , défini à l'Éq. (7.11), la normale unitaire  $\vec{n}^0$  à une surface de discontinuité ellipsoïdale est

$$\vec{n}^0 = \vec{e}_{\vec{r}} \left( 1 + \frac{\partial h_2 P_2}{\partial r} \Big|_{r=q} \right) - \vec{\nabla}_{\vec{r}} (h_2 P_2) \Big|_{r=q} \quad (7.31)$$

où on a omis de noter les dépendances en  $r$  et  $\theta$ . En outre, on montre (Rogister 2000) que si une fonction  $f$  quelconque est continue au travers d'une surface ellipsoïdale, alors  $f + h_2 P_2 \partial f / \partial r$  est continue au travers de la surface sphérique

Interface...	soudée	glissante
vitesse	$[\vec{v}]_{\pm}^{\pm} = 0$	$[\vec{n}^0 \cdot \vec{v}]_{\pm}^{\pm} = 0$
déplacement	$[\vec{s}]_{\pm}^{\pm} = 0$	$[\vec{n}^0 \cdot \vec{s}]_{\pm}^{\pm} = 0$
contrainte totale		$[\vec{n} \cdot \mathbf{t}]_{\pm}^{\pm} = 0$
perturb. eulér. de la contrainte		$[\vec{n}^0 \cdot \delta \mathbf{t}]_{\pm}^{\pm} = 0$
perturb. eulér. du potentiel newtonien lagrang.		$[\phi_1]_{\pm}^{\pm} = 0$
perturb. eulér. de la gravité		$[\vec{n}^0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 + 4\pi G \rho^0 \vec{s} \cdot \vec{n}^0]_{\pm}^{\pm} = 0$

TABLEAU 7.2 – Conditions de continuité à deux types d'interface (perturb. eulér. : perturbation eulérienne, perturb. lagrang. : perturbation lagrangienne). Pour une fonction  $f(r, t)$ , la notation  $[f]_{\pm}^{\pm}$  à une interface  $r = r_i$  désigne la différence  $f(r_i^+, t) - f(r_i^-, t)$ , où  $r_i^{\pm} = \lim_{dr \rightarrow 0} r_i \pm dr$ .  $\vec{n}^0$  est la normale à la surface, dirigée vers les  $r$  croissants. On confond ici la surface initiale et la surface déformée, toutes deux étant toujours très proches dans le cas de petites déformations.

équivalente de rayon  $q$ . En appliquant ce résultat aux équations de continuités de la Table 7.2, et en remplaçant dans celles-ci la normale  $\vec{n}^0$  par son expression (7.31), on aboutit aux conditions de continuité en Domaine Sphérique Équivalent pour tout type d'interface (glissante ou soudée) :

$$\left[ \vec{s} \cdot \vec{e}_r + \frac{\partial}{\partial r} (h_2 P_2 \vec{s} \cdot \vec{e}_r) - \vec{s} \cdot \vec{\nabla}_r (h_2 P_2) \right]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad (7.32)$$

$$\left[ \vec{e}_r \cdot \delta \mathbf{t} + h_2 P_2 \vec{e}_r \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{t}}{\partial r} + \left( \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} (h_2 P_2) - \vec{\nabla}_r (h_2 P_2) \right) \cdot \delta \mathbf{t} \right]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad (7.33)$$

$$\left[ \phi_1 + h_2 P_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad (7.34)$$

$$\left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + 4\pi G (\rho_0 + \rho_2 P_2) \vec{s} \cdot \vec{e}_r + \frac{\partial}{\partial r} \left( h_2 P_2 \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + 4\pi G \rho_0 \vec{s} \cdot \vec{e}_r \right\} \right) - \vec{\nabla} (h_2 P_2) \cdot \left( \vec{\nabla} \phi_1 + 4\pi G \rho_0 \vec{s} \right) \right]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad (7.35)$$

Aux interfaces soudées, on ajoute à ces quatre équations la condition

$$\left[ \vec{s} + h_2 P_2 \frac{\partial \vec{s}}{\partial r} \right]_{\pm}^{\pm} = 0. \quad (7.36)$$

## 7.3 Méthode de résolution

### 7.3.1 Principe de résolution

Les équations fondamentales données au 7.2.3 et les équations de continuité (7.32) à (7.36) formalisent complètement le problème des petites déformations d'une Terre ellipsoïdale en rotation. La résolution de ces équations permet de déterminer des solutions qui ne sont exprimées qu'en fonction de constantes fondamentales de la physique et de paramètres géophysiques connus.

À ce stade, toutes les équations sont écrites en fonction de la variable temporelle  $t$  et des coordonnées sphériques réunies dans la variable matérielle  $\vec{r}$ . On s'affranchit facilement de la première en passant du domaine temporel au domaine fréquentiel grâce à la transformée de Fourier (fréquence réelle, dans le cas élastique) ou de Laplace (fréquence complexe, dans le cas anélastique) pour n'étudier que des mouvements oscillatoires harmoniques<sup>5</sup>. Je n'introduirai pas de nouvelles notations pour toutes les fonctions ou paramètres qui deviennent complexes dans les équations fondamentales et de continuité, après passage en domaine de Laplace. La fréquence complexe sera notée  $\tilde{\sigma}$ , comme au Chap. 6, mais les fonctions de  $\tilde{\sigma}$  seront toujours notées sans tilde, en l'absence de toute ambiguïté.

On cherche ensuite à séparer les variables spatiales pour transformer le système d'équations aux dérivées partielles initial en un système d'équations différentielles ordinaires. Dans le cas sphérique, la démarche habituelle consiste à appliquer le théorème de représentation de Helmholtz qui donne une décomposition unique de tout vecteur sous la forme de trois scalaires. Ceux-ci sont ensuite à leur tour décomposés sur la sphère dans la base fonctionnelle des harmoniques sphériques et on résout alors les équations fondamentales pour un degré harmonique  $\ell$  donné<sup>6</sup>, en fonction de la variable  $r$  uniquement. Cette méthode peut-être généralisée aux tenseurs d'ordre 2 (Backus 1967) mais, comme l'indique Rogister (2000), les calculs sont laborieux lorsqu'on la généralise à un modèle de Terre en rotation. Pour une Terre elliptique en rotation, on préfère donc utiliser une méthode alternative consistant non pas à généraliser la décomposition de Helmholtz mais à généraliser la base fonctionnelle sur laquelle on projette alors directement les grandeurs vectorielles et tensorielles. Cette base généralisée est précisément la base des *Harmoniques Sphériques Généralisées* dont je vais maintenant rappeler la définition.

### 7.3.2 Harmoniques sphériques généralisées

La base canonique sur laquelle s'appuie les harmoniques sphériques généralisée est définie à partir des vecteurs unitaires de la base canonique des coor-

5. ou pseudo-harmoniques dans le cas d'oscillations atténuées

6. En raison de la symétrie, l'ordre  $m$  n'intervient pas pour une Terre sphérique.

données sphériques  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\varphi$  par

$$\begin{cases} \vec{e}_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_\theta - i\vec{e}_\varphi) \\ \vec{e}_0 &= \vec{e}_r \\ \vec{e}_+ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_\theta + i\vec{e}_\varphi) \end{cases} \quad (7.37)$$

Son usage est largement répandu dans certaines branches de la physique, notamment dans le cadre de la théorie quantique du moment cinétique. Varshavovich et al. (1988) la dénomme même « base sphérique », réservant le terme de « base polaire » à la base du système de coordonnées sphériques usuel. La base (7.37) sera utilisée pour exprimer les composantes des vecteurs et tenseurs mais la position sera toujours donnée en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ . Un vecteur  $\vec{u}$  a ses composantes contravariantes notées  $u_-$ ,  $u_0$  et  $u_+$  dans la base canonique, c'est-à-dire que

$$\vec{u} = u^- \vec{e}_- + u^0 \vec{e}_0 + u^+ \vec{e}_+, \quad (7.38)$$

et, par extension, on écrit chacune des composantes d'un tenseur d'ordre  $n$  au moyen de  $n$  exposants pris parmi  $-$ ,  $0$  ou  $+$ . Dans ce qui suit, le symbole  $\alpha$  en exposant est un élément de  $\{-1, 0, +1\}$ . Par exemple,  $u^\alpha$  désigne indifféremment une des trois composantes du vecteur  $\vec{u}$  définie à l'Éq. (7.38). À partir de la définition (7.37), on calcule aisément les composantes contravariantes  $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$  (égales aux composantes covariantes  $g^{ij}$ ) du tenseur métrique. On vérifie ainsi que

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.39)$$

Ce tenseur permet notamment de calculer l'expression général du produit scalaire, du produit vectoriel et des opérateurs différentiels.

Les composantes des vecteurs et tenseurs dans la base canonique peuvent être à leur tour respectivement décomposées sous la forme

$$u^\alpha(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} v_{\ell m}^\alpha(r) \mathcal{D}_{\ell m}^\alpha(\theta, \varphi) \quad (7.40)$$

et

$$t^{\alpha_1 \dots \alpha_n}(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} v_{\ell m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}(r) \mathcal{D}_{\ell m}^N(\theta, \varphi), \quad (7.41)$$

de sorte que les variables spatiales soient séparées en des fonctions de  $r$  (à déterminer) et des fonctions  $\mathcal{D}_{\ell m}^N$  des variables  $(\theta, \varphi)$ , les harmoniques sphériques généralisées (HSG). Par rapport aux harmoniques sphériques  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  plus répandues, les HSG font intervenir un paramètre  $N$  supplémentaire, dont la valeur

est donnée par la somme des indices  $\alpha_i$  de la composante que l'on décompose sur la base fonctionnelle. Ainsi, dans l'Éq. (7.40),  $N$  est simplement donné par  $\alpha$  tandis que dans l'Éq. (7.41),  $N = \sum_i \alpha_i$ . Les HSG sont définies à partir des fonctions de Legendre généralisés, elles-mêmes définies comme une généralisation des fonctions de Legendre habituelles<sup>7</sup>. Toutes ces définitions font intervenir des facteurs de normalisation qu'il faut veiller à bien identifier car ils varient selon les auteurs. Ici, je suivrai la normalisation de Rogister (2000), qui suit elle-même celle de Smith (1974). La fonction de Legendre  $P_{\ell m}$  est définie, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[-1, 1]$ , par

$$P_{\ell m}(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \sqrt{(1-x^2)^m} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2 + 1)^\ell, \quad (7.42)$$

où  $\ell$  est le degré, entier positif ou nul, et  $m$ , l'ordre, entier également, et tel que  $-\ell \leq m \leq \ell$ . La fonction de Legendre généralisée  $P_{\ell m}^N$  est

$$P_{\ell m}^N(x) = \frac{(-1)^{\ell-N}}{2^\ell (\ell-N)!} \sqrt{\frac{(\ell-N)! (\ell-m)!}{(\ell+N)! (\ell-m)!}} \sqrt{\frac{1}{(1-x)^{m-N} (1+x)^{m+N}}} \quad (7.43)$$

$$\times \frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}} [(1-x)^{\ell-N} (1+x)^{\ell-N}] \quad (7.44)$$

duquel on déduit les harmoniques sphériques généralisées

$$\mathcal{D}_{\ell m}^N(\theta, \varphi) = (-1)^{m+N} P_{\ell m}^N(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (7.45)$$

Les harmoniques sphériques standard se déduisent des HSG en posant  $N = 0$ .

Les harmoniques sphériques constituent une base fonctionnelle sur la sphère et ont notamment pour propriété d'être orthogonales. Elles peuvent aussi être définies comme des cas particuliers des fonctions propres de trois opérateurs, eux-mêmes déduits de l'opérateur de moment cinétique total d'un corps rigide symétrique en rotation (Varshalovich et al. 1988, chap. 4). Dans le langage de la physique quantique qui y recourt abondamment, les HSG sont similaires aux « harmoniques sphériques pondérées par le spin » (Dray 1985), elles-mêmes similaires aux coefficients de la matrice D de Wigner qui est une représentation du groupe de rotation  $SO(3)$  (rotations dans l'espace tri-dimensionnel) et du groupe de Lie  $SU(2)$ . Tout ceci fut largement formalisé et discuté par le physicien austro-hongrois et américain Eugène Paul Wigner (Wigner 1959). Pour en revenir à un domaine plus familier, une des premières utilisations des HSG dans l'étude de l'excitation d'un modèle de Terre sphérique est l'œuvre de Phinney et Burridge (1973), dont les travaux s'inscrivent à la suite de développements théoriques menés en géophysique dans la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle.

7. Les fonctions de Legendre sont aussi connues sous le nom de fonctions de Legendre associées, la première appellation étant parfois réservée aux  $P_{\ell m}$  de paramètres complexes, définis au moyen de la fonction gamma et de la fonction hypergéométrique. Par ailleurs, les polynômes de Legendre sont des cas particuliers des polynômes de Jacobi utilisés dans Varshalovich et al. (1988).

Une autre propriété intéressante des HSG est que leur produit peut s'exprimer comme une combinaison linéaire d'autres HSG. On a ainsi l'égalité

$$\mathcal{D}_{\ell_1 m_1}^{N_1} \mathcal{D}_{\ell_2 m_2}^{N_2} = \sum_{\ell=|\ell_2-\ell_1|}^{|\ell_2+\ell_1|} \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell_2 \\ N & N_1 & N_2 \\ m & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \mathcal{D}_{\ell m}^N \quad (7.46)$$

où  $N = N_1 + N_2$  et  $m = m_1 + m_2$ . Les coefficients ressemblant à une matrice  $3 \times 3$  qui apparaissent dans cette combinaison sont nommés *J-squares* par Smith (1974). Ils sont déduits du produit de deux symboles 3-j de Wigner (aussi appelés 3-jm), eux-mêmes en relation avec les coefficients de Clebsch-Gordan qui servent à exprimer des couplages de moment cinétique en mécanique quantique. Ces coefficients et les symboles qui en découlent possèdent bon nombre de propriétés de symétrie qui facilitent leur manipulation (Abramowitz et Stegun (1964), sec. 27.9; Varshalovich et al. (1988), chap. 8) Explicitement, on a (Smith 1974)

$$\begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell_2 \\ N & N_1 & N_2 \\ m & m_1 & m_2 \end{pmatrix} = (-1)^{m+N} (2\ell + 1) \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell_2 \\ -N & N_1 & N_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ell & \ell_1 & \ell_2 \\ -m & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \quad (7.47)$$

où les deux symboles de dimensions  $2 \times 3$  sont des symboles 3-j de Wigner. En pratique, leur valeur peut être obtenue à l'aide d'outils de calcul formels<sup>8</sup> et je ne réécrirai donc pas ici leur expression, simple mais particulièrement longue (Varshalovich et al. 1988, p. 242).

Les dernières formules nécessaires à la réécriture des équations fondamentales et des conditions aux limites du 7.2 dans la base canonique et avec le formalisme des HSG sont celles des opérateurs de dérivation. Grâce aux multiples propriétés des harmoniques sphériques, on montre que les composantes du développement en HSG de la différentiation d'une fonction (scalaire, vectorielle ou tensorielle) ont une expression relativement simple en fonction des composantes de même degré et ordre du développement de la fonction elle-même. Ces résultats ont d'abord été établis par Burridge (1969), les expressions utiles dans le cas qui nous intéressent sont résumées dans Rogister (2000).

### 7.3.3 Projection sur la base canonique et combinaison

L'ultime étape aboutissant à un système d'équations différentielles ordinaires en  $r$  est la recombinaison adéquate des projections faites précédemment sur la base canonique. À partir du déplacement

$$\vec{s} = s^- \vec{e}_- + s^0 \vec{e}_0 + s^+ \vec{e}_+, \quad (7.48)$$

8. On peut citer, parmi d'autres, SYMPY (<http://www.sympy.org>), aussi inclus dans SAGE (<http://www.sagemath.org>), ou MATHEMATICA et son pendant en ligne WOLFRAMALPHA (<http://www.wolframalpha.com>).

dont les composantes ont pour coefficients respectifs  $s_{\ell m}^-$ ,  $s_{\ell m}^0$  et  $s_{\ell m}^+$  sur la base des HSG, on construit les trois scalaires

$$\begin{aligned} U_{\ell m} &= s_{\ell m}^0 \\ V_{\ell m} &= s_{\ell m}^+ + s_{\ell m}^- \\ W_{\ell m} &= s_{\ell m}^+ - s_{\ell m}^- \end{aligned} \quad (7.49)$$

qui sont l'analogie des trois scalaires de la décomposition de Helmholtz développés sur une base d'harmoniques sphériques standard.  $U_{\ell m}$  et  $V_{\ell m}$  définissent ainsi la composante *sphéroïdale* (pour le degré  $\ell$  et l'ordre  $m$ ) du champ vectoriel du déplacement

$$\vec{\sigma}_{\ell m} = U_{\ell m} \mathcal{D}_{\ell m}^0 \vec{e}_0 + \frac{1}{2} V_{\ell m} (\mathcal{D}_{\ell m}^1 \vec{e}_+ + \mathcal{D}_{\ell m}^{-1} \vec{e}_-), \quad (7.50)$$

tandis que  $W_{\ell m}$  en définit la partie *toroïdale*

$$\vec{\tau}_{\ell m} = \frac{1}{2} W_{\ell m} (\mathcal{D}_{\ell m}^1 \vec{e}_+ - \mathcal{D}_{\ell m}^{-1} \vec{e}_-). \quad (7.51)$$

Les variables fréquentielle et de position n'ont pas été écrites pour alléger la notation mais il est entendu que  $\vec{\sigma}_{\ell m}$  et  $\vec{\tau}_{\ell m}$  sont des fonctions de la position  $\vec{r}$  et de la fréquence complexe  $\tilde{\sigma}$  du domaine de Laplace, telle que définie à l'Éq. (6.10).

D'une façon tout à fait similaire à l'Éq. (7.49), on définit

$$\begin{aligned} P_{\ell m} &= \delta t_{\ell m}^{00} \\ Q_{\ell m} &= \delta t_{\ell m}^{0+} + \delta t_{\ell m}^{0-} \\ R_{\ell m} &= \delta t_{\ell m}^{0+} - \delta t_{\ell m}^{0-} \end{aligned} \quad (7.52)$$

à partir des coefficients  $\delta t_{\ell m}^{\alpha\beta}$  de la perturbation du tenseur des contraintes.

Les deux dernières inconnues sont le coefficient de degré  $\ell$  et ordre  $m$ ,  $\phi_{1\ell m}$ , de la variation eulérienne du potentiel newtonien lagrangien apparaissant dans l'Éq. (7.19), et le coefficient de la variation de gravité  $g_{1\ell m}$  défini par

$$g_{1\ell m} = \frac{d}{dr} \phi_{1\ell m} + 4\pi G \rho^0 U_{\ell m}. \quad (7.53)$$

L'intérêt de cette définition est essentiellement la simplification de la condition de continuité (7.35).

## 7.4 Résolution et solutions analytiques

### 7.4.1 Chaîne de couplage et fonctions propres

Les équations différentielles qui composent le système linéaire des équations fondamentales ont désormais pour inconnues les coefficients définis par

les Éq. (7.49), (7.52), (7.53) et  $\phi_{1\ell m}$ . Leur formulation explicite étant notablement longue, je ne discuterai ici que de quelques éléments intéressants à leur sujet et on se référera directement aux équations (4.140) à (4.164) et (4.167) à (4.173) de Rogister (2000) pour leur expression complète dans le cas solide et fluide respectivement (l'équation (4.148) devant être remplacée par l'Éq. (6) de Rogister (2003)). De même les équations (4.174) à (4.197) de Rogister (2000) définissent complètement les conditions de continuité. On veillera toutefois à remplacer la fréquence réelle par la fréquence complexe  $\tilde{\sigma}$  et on gardera à l'esprit que toutes les fonctions de  $\vec{r}$  et  $\tilde{\sigma}$  apparaissant dans les équations sont elles aussi complexes.

Une première observation à propos du système obtenu à partir des équations fondamentales est que les coefficients des différents ordres  $m$  ne sont pas couplés puisque l'ordre est le même dans toutes les équations. En revanche, si les composantes sphéroïdales et toroïdales de même degré ne sont pas couplées non plus, un déplacement sphéroïdal de degré  $\ell$  est couplé avec les déplacements toroïdaux de degrés  $\ell \pm (2k + 1)$  et avec les déplacements sphéroïdaux de degrés  $\ell \pm 2(k + 1)$ , où  $k \in \mathbb{N}$ . Sachant que  $\ell \geq |m|$  pour un ordre  $m$  donné, le déplacement total s'écrit

$$\vec{s}_m = \vec{\tau}_{|m| m} + \vec{\sigma}_{|m|+1 m} + \vec{\tau}_{|m|+2 m} + \vec{\sigma}_{|m|+3 m} + \dots \quad (7.54)$$

ou

$$\vec{s}_m = \vec{\sigma}_{|m| m} + \vec{\tau}_{|m|+1 m} + \vec{\sigma}_{|m|+2 m} + \vec{\tau}_{|m|+3 m} + \dots \quad (7.55)$$

La chaîne de couplage précédente étant infinie, le système à résoudre pour caractériser totalement le déplacement est lui aussi d'ordre infini. En pratique, on tronque cette chaîne de couplage à un nombre fini de termes et on montre – ou on suppose – que les termes suivants sont négligeables. Le couplage traduit par l'Éq. (7.54) ne fait intervenir que les déplacements. Cependant, le couplage intervient aussi sur les contraintes avec les termes  $R_{\ell \pm (2k+1); m}$  qui sont couplés aux termes  $P_{\ell \pm 2(k+1); m}$  et  $Q_{\ell \pm 2(k+1); m}$ .

Dans ce travail, je me concentrerai sur un milieu solide et je me limiterai aux deux premiers termes de la chaîne de couplage. Dans ce cas, on peut introduire le vecteur

$$\mathcal{Y} = [U_{\ell m}, P_{\ell m}, \phi_{1\ell m}, g_{1\ell m}, V_{\ell m}, W_{\ell-1 m}, Q_{\ell m}, R_{\ell-1 m}]^T \quad (7.56)$$

qui permet d'écrire simplement le système d'équation sous la forme

$$\frac{d}{dr} \mathcal{Y} = \mathbf{A} \mathcal{Y} \quad (7.57)$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice  $8 \times 8$  dont les coefficients dépendent de la fréquence complexe  $\tilde{\sigma}$ , de la position radiale  $r$ , du degré  $\ell$  et de l'ordre  $m$ , de la densité  $\rho_0$  et de sa dérivée radiale (ou de  $\rho_2$ ), des paramètres de Lamé  $\lambda_0$  et  $\mu_0$ , et de leur dérivée radiale (ou  $\lambda_2$  et  $\mu_2$ ), et de la vitesse de rotation du système de référence,  $\Omega_0$ .



### 7.4.2 Méthode de résolution analytique

En utilisant un formalisme différent de celui exposé dans ce chapitre, Rochester et al. (2014) ont établi un système d'équations différentielles ordinaires couplées pour un modèle de Terre doté d'un manteau et d'une graine élastiques et d'un noyau externe fluide. Leur formalisme utilise les coordonnées de Clairaut, les harmoniques sphériques ordinaires, des opérateurs linéaires en lieu et place des produits de symboles  $3j$  de Wigner (7.47), et un ensemble de fonctions décrivant le déplacement, les contraintes et la variation du potentiel de pesanteur, toutes continues au travers des interfaces de discontinuité. Pour un modèle de Terre homogène solide en rotation, Rochester et al. (2014) ont, par ailleurs, déterminé les solutions analytiques du mode diurne (*tilt-over mode*, ou TOM, en anglais), qui est une rotation rigide du modèle autour d'un axe dans le plan équatorial. Ils ont également recalculé la période du TOM et de Chandler pour un modèle incompressible, cette dernière période étant alors bien identique à celle trouvée par Hough (1896).

De même que dans l'étude de Rochester et al. (2014), le système (7.57) peut être résolu analytiquement pour des modèles de Terre simples. En utilisant également un modèle homogène incompressible et en se concentrant sur le TOM et le mouvement de Chandler (degré  $\ell = 2$ , ordre  $m = \pm 1$ ), on peut exprimer l'essentiel des équations du système différentiel en fonction du déplacement toroïdal  $W_{1;\pm 1}$ , noté simplement  $W$  par la suite. L'intérêt de cette approche est que, dans une certaine mesure, on peut deviner *a priori* la forme de  $W$  en fonction de  $r$ . En effet, le mouvement de Chandler est avant tout une rotation rigide qui induit un déplacement toroïdal linéaire en  $r$ ; *a fortiori*, le TOM est un déplacement totalement rigide. On sait donc que  $W$  est de la forme  $W(r) = Ar + \dots$ . En excluant les solutions qui divergent à l'origine, on suppose que les termes supplémentaires peuvent prendre la forme  $A_p r^p$ , où  $p$  est un entier positif et  $A_p$  une constante. Pour le moment, on admettra que le terme dominant suivant dans l'expression du déplacement toroïdal est  $Br^3$  ( $B$  constante), de sorte qu'on cherche finalement pour  $W$  des solutions de la forme

$$W(r) = Ar + Br^3. \quad (7.58)$$

On peut également déterminer l'équation vérifiée par la dérivée de la pression  $P_{2;\pm 1}$ . L'intégration de cette équation introduit une nouvelle constante, notée  $C$ . Enfin, la composante radiale de l'équation de Laplace à laquelle est soumise le potentiel  $\phi_1$ ,

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{6\phi}{r^2} = 0, \quad (7.59)$$

a pour solution  $\phi_1(r) = Dr^2$ , où  $D$  est une constante supplémentaire.

En remplaçant  $W$  par la solution (7.58) dans toutes les équations du système différentiel, on peut déterminer la solution  $\mathcal{Y}(r)$  du système (7.57) en fonction de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Cette solution peut alors elle-même être introduite dans les équations de continuités, pour exprimer également ces dernières en

fonction des mêmes constantes. En identifiant les coefficients apparaissant devant les quatre constantes dans les quatre équations de continuité, on peut former une matrice  $\mathbf{M}(\tilde{\sigma})$ , dépendante de la fréquence complexe  $\tilde{\sigma}$ , de dimensions  $4 \times 4$  et telle que

$$\mathbf{M}\vec{\Gamma} = 0, \quad (7.60)$$

où  $\vec{\Gamma} = (A, B, C, D)^T$ . Il reste alors à chercher les fréquences pour lesquelles le déterminant de  $\mathbf{M}(\tilde{\sigma})$  s'annule pour trouver les fréquences propres du modèle de Terre considéré, celle de Chandler notamment.



## **Quatrième partie**

# **Modélisation numérique d'une Terre anélastique**



# Anélasticité et mouvement de Chandler

---

## Sommaire

<b>8.1</b>	<b>Méthode de résolution numérique . . . . .</b>	<b>125</b>
8.1.1	Détermination des fréquences et fonctions propres . . . . .	125
8.1.2	Implémentation du code de résolution . . . . .	127
<b>8.2</b>	<b>Modèles rhéologiques . . . . .</b>	<b>128</b>
8.2.1	Équations d'état . . . . .	128
8.2.2	Discussion des modèles rhéologiques . . . . .	130
<b>8.3</b>	<b>Résultats . . . . .</b>	<b>132</b>
8.3.1	Période propre et facteur de qualité . . . . .	132
8.3.2	Influence des rigidités et des viscosités sur la période et le facteur de qualité de Chandler . . . . .	134
8.3.3	Forme du déplacement toroïdal de degré 1 . . . . .	137
8.3.4	Nombres de Love complexes pour le mouvement de Chandler	139
8.3.5	Amplitude et phase du facteur gravimétrique . . . . .	141

---

*Quanquam nobis in intima naturae mysteria penetrare, indeque veras causas Phaenomenorum agnoscere neutiquam est concessum : tamen evenire potest, ut hypothesis quaedam ficta pluribus phaenomenis explicandis aequae satisfaciat, ac si vera causa nobis esset perspecta, [...].<sup>a</sup>*

---

Leonhard Euler, *Conjectura circa naturam aeris*

## 8.1 Méthode de résolution numérique

### 8.1.1 Détermination des fréquences et fonctions propres

Suivant la théorie des systèmes d'équations différentielles ordinaires, la solution générale du système (7.57) est une combinaison linéaire de 8 solutions

---

a. Bien qu'il ne nous soit nullement accordé de pénétrer dans l'intimité des mystères de la nature et, de là, connaître les causes véritables des Phénomènes, il peut arriver cependant qu'une certaine hypothèse fictive satisfasse à l'explication de multiples phénomènes, autant que si la vraie cause nous était connue [...]. Leonhard Euler, *Conjecture sur la nature de l'air*.

linéairement indépendantes. La moitié d'entre elles divergent à l'origine et n'ont donc pas de sens physique. Pour une Terre solide homogène, la solution générale a ainsi la forme

$$\mathcal{Y} = \sum_{i=1}^4 \gamma_i \mathcal{Y}_i, \quad (8.1)$$

où  $\mathcal{Y}_i$  sont des solutions particulières de l'Éq. (7.57). Les quatre constantes  $\gamma_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) sont déterminés en appliquant les quatre conditions de continuité (7.32) à (7.35), réécrites bien sûr suivant les développements du 7.3.

Pour écrire explicitement les équations permettant de déterminer les constantes d'intégration  $\gamma_i$ , il est pratique d'introduire des matrices de  $\mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{C})$  (matrices de dimensions  $p \times q$  dont les coefficients sont dans  $\mathbb{C}$ ). On définit d'abord la matrice  $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{4 \times 8}(\mathbb{C})$  exprimant les quatre conditions de continuité faisant intervenir une combinaison linéaire des huit fonctions de  $r$  et telle que

$$\mathbf{C}\mathcal{Y}(r = a) = 0, \quad (8.2)$$

si on écrit ces conditions en surface, en  $r = a$ . On définit également la matrice  $\mathbf{Y} \in \mathcal{M}_{8 \times 4}(\mathbb{C})$  construite en assemblant en colonnes les quatre solutions particulières :

$$\mathbf{Y} = [\mathcal{Y}_1 \ \mathcal{Y}_2 \ \mathcal{Y}_3 \ \mathcal{Y}_4] \quad (8.3)$$

et le vecteur colonne  $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_4)^T$  composé des constantes d'intégration, suivant une formulation totalement analogue à celle du vecteur  $\vec{\Gamma}$  au 7.4.2. L'Éq. (8.1) peut ainsi s'écrire

$$\mathcal{Y} = \mathbf{Y}\vec{\gamma}. \quad (8.4)$$

En introduisant l'Éq. (8.4) dans l'Éq. (8.2) on a

$$\mathbf{C}\mathcal{Y}(a) = \mathbf{C}\mathbf{Y}(a)\vec{\gamma} \quad (8.5)$$

$$= \mathbf{M}\vec{\gamma} \quad (8.6)$$

$$= 0 \quad (8.7)$$

où on a posé

$$\mathbf{M} = \mathbf{C}\mathbf{Y}(a). \quad (8.8)$$

$\mathbf{M}$  est une matrice carrée ( $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{C})$ ) dont les coefficients dépendent de la fréquence complexe  $\tilde{\sigma}$ . Soit  $d(\tilde{\sigma}) = \det \mathbf{M}$ , le déterminant de  $\mathbf{M}$ . On trouve les valeurs propres du système linéaire

$$\mathbf{M}\vec{\gamma} = 0 \quad (8.9)$$

en cherchant les zéros dans le plan complexe de  $d(\tilde{\sigma})$ . L'Éq. (8.9) est bien sûr identique à l'Éq. (7.60) établie dans le cadre d'une résolution purement analytique mais les solutions particulières utilisées dans chacune d'entre elles sont potentiellement fort différentes. Dans l'étude d'une Terre homogène en rotation soumise à aucune force extérieure, la valeur propre  $\tilde{\sigma}_0$  recherchée est, pour

le degré  $\ell = 2$  et l'ordre  $m = -1$ , la pulsation du mouvement de Chandler. La partie réelle de  $\tilde{\sigma}_0$  permet de calculer la période propre et sa partie imaginaire donne l'atténuation. Dans la bande des fréquences sismiques, pour d'autres degrés et d'autres ordres, les fréquences propres trouvées correspondent aux modes propres d'oscillation du modèle considéré. Ce n'est pas notre objet mais la méthode exposée jusqu'ici s'applique bien sûr aussi aux modes sismiques.

La condition pour que l'Éq. (8.9) ait au moins une solution est que le déterminant de  $M$  soit nul. On remplace alors une des conditions de continuité par une condition de notre choix (valeur du déplacement radial ou toroïdal en surface par exemple) pour lever l'indétermination. En procédant de la sorte, il est possible de déterminer  $\vec{\gamma}$  et donc d'en déduire la solution générale  $\mathcal{Y}$  du système (7.57). Dans ce cas, les 8 composantes de  $\mathcal{Y}$  sont les fonctions propres du mouvement chandlérien. La sixième composante en particulier,  $W_{1,-1}$ , est le déplacement toroïdal de degré 1 et ordre  $-1$ , qui est l'expression du mouvement du pôle dans le formalisme du Chap. 7. En effet, la composante linéaire en  $r$  de  $W_{11}$  – dont on montrera qu'elle domine – exprime un basculement rigide de la Terre autour d'un axe équatorial, ce qui équivaut à un mouvement du pôle vu dans le système d'axe de Tisserand défini au 7.2.2.

### 8.1.2 Implémentation du code de résolution

L'implémentation des équations données au Chap. 7 est quelque peu laborieuse mais ne pose pas de problème particulier. L'essentiel du travail réside dans la résolution numérique du système et la recherche des fréquences et fonctions propres.

Pour déterminer les quatre solutions  $\mathcal{Y}_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ), une méthode simple consiste à donner des valeurs initiales aux solutions près du centre de la Terre (en  $r = r_0$ ) puis à les intégrer jusqu'à la surface suivant un schéma d'intégration numérique adapté. En théorie, le choix des valeurs initiales doit respecter des contraintes physiques (voir la discussion de Rogister (2000) à ce sujet). Cependant, en pratique, on peut choisir assez librement les quatre vecteurs  $\mathcal{Y}_i^0 = \mathcal{Y}_i(r_0)$  initiaux, pourvu qu'ils soient linéairement indépendants. Les solutions ne sont alors pas toujours régulières proche du centre mais elles convergent rapidement vers une solution stable quand  $r$  augmente. Après avoir testé différentes valeurs initiales et après n'avoir constaté aucune influence notable de celles-ci sur la valeur de la fréquence propre et des fonctions propres en surface, j'ai retenu les vecteurs

$$\mathcal{Y}_1^0 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \quad (8.10)$$

$$\mathcal{Y}_2^0 = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)^T \quad (8.11)$$

$$\mathcal{Y}_3^0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \quad (8.12)$$

$$\mathcal{Y}_4^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)^T \quad (8.13)$$

pour démarrer l'intégration. De même, le choix de  $r_0$  a peu d'importance lorsqu'on s'intéresse surtout à la valeur des fonctions propres en surface, pourvu



que  $r_0 \ll a$  (en pratique,  $r_0$  vaut au plus quelques dizaines de kilomètres).

Dans le cas élastique, l'intégration en elle-même peut être faite au moyen de n'importe quel algorithme d'intégration adapté aux équations différentielles ordinaires. J'ai opté pour un algorithme de type Runge-Kutta explicite<sup>1</sup> à pas fixe. Dans la continuité des observations précédentes, le choix du pas d'intégration  $dr$  n'a aucune influence visible sur les solutions calculées, tant que  $dr \ll a$  bien sûr. En pratique, un pas de quelques dizaines de kilomètres donne les mêmes résultats qu'un pas de un kilomètre pour un temps d'intégration bien inférieur. Le passage à un système d'équations complexes peut se faire suivant deux stratégies. La première consiste à doubler l'ordre du système en séparant parties réelles et parties imaginaires dans les solutions, la seconde consiste à résoudre directement le système complexe à l'aide d'un algorithme approprié. Les deux approches s'étant montrées efficaces, j'ai retenu la seconde pour sa simplicité, dans la mesure où il existait déjà une adaptation de l'algorithme de Runge-Kutta aux nombres complexes<sup>2</sup>.

La résolution du système à une fréquence  $\tilde{\sigma}$  donnée permet de connaître, en surface, la matrice  $\mathbf{Y}$  définie à l'Éq. (8.3). Celle-ci peut alors être introduite dans la définition (8.8) pour calculer  $\mathbf{M}(\tilde{\sigma})$ , de déterminant  $d(\tilde{\sigma})$ . On a vu au 8.1.1) que les zéros de  $d(\tilde{\sigma})$  donnaient les fréquences propres du modèle. Si ceux-ci peuvent être facilement déterminés pour un modèle élastique dont les fréquences propres sont réelles (dichotomie, méthode de Newton, etc.), la méthode de résolution de l'équation  $d(\tilde{\sigma}) = 0$  dans le cas complexe nécessite un algorithme approprié. La méthode de Müller (Müller 1956) est un tel algorithme. Également utilisable pour trouver des racines réelles, cette méthode est une généralisation de la méthode de la sécante dans le sens où elle consiste à construire une parabole à partir de trois points du graphe de la fonction dont on cherche des zéros. Ainsi, le problème revient à déterminer itérativement les zéros de paraboles successives qui approximent la fonction de départ à proximité décroissante d'une de ses racines. Cet algorithme itératif nécessite la donnée de trois points à sa première itération. En pratique, il suffit par exemple de choisir trois points formant un triangle équilatéral dans le plan complexe, autour de la solution estimée *a priori*. Lorsqu'on cherche à déterminer la fréquence propre de Chandler, on peut simplement prendre, comme solution *a priori*, la fréquence eulérienne donnée par l'Éq. (2.17).

## 8.2 Modèles rhéologiques

### 8.2.1 Équations d'état

Les expressions de  $\mu^0(s = i\tilde{\sigma})$  utilisées dans la modélisation sont données dans le tableau 8.1. La substitution de  $\mu^0(s)$ , dans l'équation constitutive (7.26),

1. Cet algorithme est implémenté sous le nom `dopri5` dans la bibliothèque SciPy (<https://www.scipy.org/>). L'algorithme est de Hairer et al. (1993).

2. également disponible au sein du module `integrate` de la bibliothèque SciPy

par une de ses expressions pour une rhéologie donnée, permet d'établir l'équation constitutive du modèle de Terre en fonction de paramètres d'élasticité et de viscosité tels qu'introduits au 2.4.2 et illustrés par la Fig. 2.4. Pour exprimer l'équation constitutive uniquement en fonction de ces paramètres viscoélastiques, il faut aussi connaître l'expression du premier paramètre de Lamé en domaine de Laplace. On utilise pour cela la relation entre  $\mu^0(s)$  et  $\lambda^0(s)$  donnée par Yuen et Peltier (1982), soit

$$\lambda^0(s) = K - \frac{2}{3}\mu^0(s), \quad (8.14)$$

où  $K$  est le *module d'élasticité isostatique*. Dans ce qui suit et à la différence des notations du Chap. 7,  $\lambda_0$  et  $\mu_0$  désigneront les valeurs élastiques des paramètres de Lamé. Par ailleurs, les notations  $\lambda$  et  $\mu$  feront référence à ces mêmes paramètres mais de façon plus générale, sans préciser le milieu étudié. Contrairement à  $\lambda$ ,  $K$  a un sens physique : il lie contraintes et déformations pour un matériau isotrope soumis à une pression isostatique. Avec les notations de la Section 2.4, il est le rapport entre le tiers de la contrainte isostatique  $\text{tr } \sigma$  et la déformation isostatique  $\text{tr } \varepsilon$  (Dahlen et Tromp 1998), autrement dit

$$\frac{1}{3}\sigma_{jj} = K\varepsilon_{jj}, \quad (8.15)$$

où on a utilisé la convention de sommation d'Einstein. Typiquement,  $K$  varie dans le manteau terrestre entre  $3 \times 10^{11}$  Pa et  $6 \times 10^{11}$  Pa (Dziewonski et Anderson 1981). Si on calcule  $K$  d'après les valeurs élastiques courantes (Yuen et Peltier 1982),  $\mu_0 = 1.4 \times 10^{11}$  Pa et  $\lambda_0 = 3.5 \times 10^{11}$  Pa, on trouve  $K = 4.4 \times 10^{11}$  Pa. Morozov (2015) discute des contraintes sur les valeurs de  $\lambda$  et  $K$  pour différents types de matériau, dans le cadre d'une étude sur la dissipation. On retiendra que, dans presque tous les matériaux naturels,  $\lambda > 0$ , donc  $K > 2\mu/3$ . De façon stricte, les lois de la physique imposent les contraintes plus générales  $\lambda \geq -2\mu/3$  et  $K > 0$ . Les matériaux pour lesquels  $\lambda$  est négatif sont dits « auxétiques ». De façon équivalente, ces matériaux ont un coefficient de Poisson<sup>3</sup> négatif également.

La Fig. 8.1 illustre les quatre premiers modèles rhéologiques du tableau 8.1 à l'aide des composants analogiques élémentaires de la rhéologie linéaire que sont le ressort élastique et le piston visqueux. Pour le modèle à  $Q$  constant, les temps  $T_2$  et  $T_1$  sont les périodes correspondant aux fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$  entre lesquelles le facteur de qualité varie peu et  $Q_m$  est la valeur maximale de  $Q$ . En fait,  $Q$  varie très légèrement dans l'intervalle  $[\omega_1, \omega_2]$ , tout en restant très proche de  $Q_m$ , tant que l'écart entre la fréquence considérée et  $\omega_1$  ou  $\omega_2$  est petit devant  $|\omega_2 - \omega_1|$ , la taille de l'intervalle. L'inverse du facteur de qualité tend à s'annuler pour  $\omega \ll \omega_1$  ou  $\omega \gg \omega_2$ .

Les valeurs numériques utilisées pour les différents paramètres des modèles rhéologiques du tableau 8.1 sont données dans le tableau 8.2, à l'exception de

3. Le coefficient de Poisson est le rapport de la contraction transversale sur l'allongement axial d'un matériau sous l'effet d'une contrainte axiale extensive.

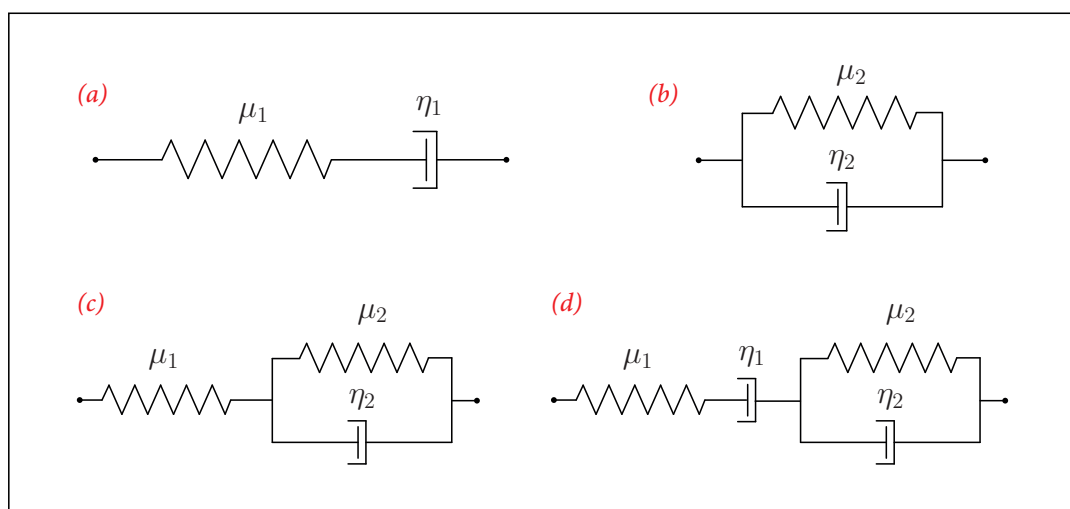


FIGURE 8.1 – Modèles rhéologiques constitués à partir des composants analogiques élémentaires de type ressort hookéen et piston visqueux (voir Fig. 2.4). Modèles de (a) Maxwell, (b) Kelvin-Voigt, (c) SLS et (d) Burgers.

$\delta\mu$  qui sera nul dans la plupart des modèles (on suppose  $\mu_2 = \mu_1$ ) mais peut être déduit de  $Q_m$  pour la seconde formulation du modèle à  $Q$  constant, grâce à la relation (Dahlen et Tromp 1998)

$$\frac{\delta\mu}{\mu_1} = \frac{2}{\pi Q_m} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right). \quad (8.16)$$

## 8.2.2 Discussion des modèles rhéologiques

Parmi les modèles rhéologiques du tableau 8.1, certains sont choisis préférentiellement à certaines échelles de temps et selon la nature des phénomènes géophysiques modélisés. En raison de la singularité de sa réponse élastique (Dahlen et Tromp 1998), due au piston visqueux en parallèle du ressort (Fig. 8.1 (b)), le modèle de Kelvin-Voigt est peu utilisé en géophysique. Le modèle de Maxwell, en revanche, est extrêmement répandu, notamment dans l'étude du rebond post-glaciaire (Wu et Peltier 1982 ; Spada et al. 1992 ; Mitrovica et al. 2001 ; Mémin et al. 2011). Cette utilisation privilégiée du modèle de Maxwell s'explique notamment par sa réponse élastique à courte période et son comportement visqueux à longue période qui permettent de modéliser divers processus, de la propagation des ondes sismiques au rebond post-glaciaire, tout en conservant un modèle rhéologique relativement simple.

Il faut noter que le modèle élastique est obtenu à partir du modèle de Maxwell lorsque la viscosité devient *infinie*. On peut déduire ceci de l'expression de  $\mu(s)$  pour la rhéologie maxwellienne ou, plus immédiatement, de la Fig. 8.1 (a), grâce à laquelle on constate que le modèle élastique (ressort seul) est obtenu en imposant une viscosité infinie à la composante visqueuse (piston) montée en

TABLEAU 8.1 – Équations pour  $\mu^0(s)$  des différents modèles rhéologiques dans le domaine de Laplace (les notations des différents auteurs ont été uniformisées). Une erreur typographique (barre de fraction manquante) dans l'équation de Yuen et Peltier (1982) pour SLS a été corrigée ici. Les temps de relaxation sont  $\tau_\sigma = \eta_1/\mu_1$  et  $\tau_\varepsilon = \eta_2/\mu_2$ . Dans le modèle à  $Q$  constant,  $\delta\mu = \mu_1 - \mu_2$ . Pour la rhéologie purement élastique, que je n'ai pas reproduite dans le tableau, l'équation est bien sûr simplement  $\mu(s) = \mu_1$ .

Modèle rhéologique	Expression de $\mu^0(s = i\tilde{\sigma})$
Maxwell (Dahlen et Tromp 1998, p. 201)	$\mu_1 s \tau_\sigma (1 + s \tau_\sigma)^{-1}$
Kelvin-Voigt (Dahlen et Tromp 1998, p. 201)	$\mu_2 (1 + s \tau_\varepsilon)$
SLS (Yuen et Peltier 1982)	$\frac{\mu_1 (s + \mu_2 / \eta_2)}{s + (\mu_1 + \mu_2) / \eta_2}$
Burgers (Peltier et al. 1981)	$\frac{\mu_1 s (s + \mu_2 / \eta_2)}{s^2 + \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{\eta_2} + \frac{\mu_1}{\eta_1} \right) s + \frac{\mu_1 \mu_2}{\eta_1 \eta_2}}$
Burgers, $Q_m$ explicite (Yuen et Peltier 1982)	$\frac{\mu_1 s}{s + \mu_1 / \eta_1} \left[ 1 + \frac{2}{\pi Q_m} \ln \left( \frac{s + 1/T_2}{s + 1/T_1} \right) \right]$
$Q$ constant, $Q_m$ explicite (Yuen et Peltier 1982)	$\mu_1 \left[ 1 + \frac{2}{\pi Q_m} \ln \left( \frac{s + 1/T_2}{s + 1/T_1} \right) \right]$
$Q$ constant (Dahlen et Tromp 1998, p. 212)	$\mu_2 + \frac{\delta\mu}{\ln(T_2/T_1)} \ln \left( \frac{s T_2 + 1}{s T_1 + 1} \right)$

série. Cela signifie que, pour le modèle de Maxwell, la dissipation décroît indéfiniment lorsque la viscosité augmente. On peut calculer le facteur de qualité du modèle de Maxwell d'après l'Éq. (2.42) pour  $Q_\mu^{-1}$ , soit

$$Q_\mu^{-1}(\sigma) = \frac{\text{Im } \mu(\sigma)}{\text{Re } \mu(\sigma)} = \frac{1}{\tau_\sigma \sigma}, \quad (8.17)$$

et on en déduit que  $Q_\mu = \sigma \eta_1 / \mu_1$ . Autrement dit,  $Q_\mu$  est proportionnel à la partie réelle de la fréquence et à la viscosité. Au delà du cadre de ce travail, il existe de nombreux problèmes en physique, faisant intervenir la viscosité d'un matériau ou d'un fluide, pour lesquels on ne peut pas se réduire au cas élastique en prenant la limite  $\eta \rightarrow 0$  (Appel (2008) donne un tel exemple pour un fluide visqueux).

TABLEAU 8.2 – Valeurs des paramètres apparaissant dans le tableau 8.1. L'indication « var. » (variable) signifie que l'influence de ce paramètre a été étudiée en le faisant varier sur un intervalle de valeurs prédéfinies (voir 8.3). La valeur indiquée ici est celle utilisée quand le paramètre est maintenu constant. Le choix de  $\eta_2$  est un compromis entre des valeurs publiées très variables, allant de  $\eta_1/10^5$  (Scheidegger 1957 ; Yuen et Peltier 1982) à  $\eta_1/10$  (Lefftz et al. 1994), les études récentes privilégiant le choix  $\eta_2 \sim 10^{-1}\eta_1$ . Le premier paramètre de Lamé est calculé au moyen de l'Éq. (8.14).

Paramètres	Valeurs	Références
$\mu_1 = \mu_2$	$1.4 \times 10^{11}$ Pa	Yuen et Peltier (1982)
$\eta_1$	$10^{21}$ Pa s (var.)	Yuen et Peltier (1982)
$\eta_2$	$5 \times 10^{19}$ Pa s (var.)	$\eta_1/20$
$T_1, T_2$	$10^{-2}$ s, $10^4$ s	Minster (1978)
$Q_m$	250	Minster (1978)

Les modèles SLS et de Burgers, ainsi que le modèle à  $Q$  constant, sont anélastiques au sens strict : ils présentent une réponse instantanée non nulle à l'instant de la mise sous contrainte, à  $t = 0$ , et une réponse finie à l'équilibre, quand  $t \rightarrow \infty$ . Ces critères ne sont pas remplis par les modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt, qualifiés de viscoélastiques par Dahlen et Tromp (1998). C'est pour cette raison que le Solide Linéaire *Standard* est nommé ainsi : il est le modèle réellement anélastique le plus simple. Le modèle de Burgers présente une difficulté particulière, non pas dans sa formulation théorique, mais dans le choix des valeurs des deux viscosités  $\eta_1$  et, surtout,  $\eta_2$  pour modéliser le manteau terrestre. Peltier et al. (1981) discutent en particulier du rapport  $\eta_2/\eta_1$ , en soulignant qu'« un modèle de Burgers pour lequel  $\eta_2 \ll \eta_1$  sera capable d'être ajusté simultanément aux données d'oscillations libres et de rebond post-glaciaire ». Scheidegger (1957) estime à  $3 \times 10^{16}$  Pa s la valeur de  $\eta_2$ . De façon intéressante, son estimation est justement fondée sur une analyse de l'atténuation de l'oscillation chandlérienne sous l'hypothèse que cette atténuation est due à l'anélasticité du manteau (et que la rigidité  $\mu_2$  est égale à  $\mu_1$ ). Nous nous intéresserons donc à l'influence de chacune des deux viscosités en fixant l'une et en résolvant le problème des petites déformations pour différentes valeurs de l'autre, puis inversement.

## 8.3 Résultats

### 8.3.1 Période propre et facteur de qualité

Le tableau 8.3 donne les périodes propres

$$T_{CW} = 2\pi / \text{Re } \tilde{\sigma}_{CW} \quad (8.18)$$

et le facteur de qualité  $Q_{CW}$  (Éq. (2.27)) d'un modèle de Terre homogène compressible en rotation, pour les différents modèles rhéologiques du 8.2.1 et les valeurs du tableau 8.2. J'ai également indiqué le temps de décroissance du mode,

$$\tau_{CW} = \frac{2\pi}{\text{Im } \tilde{\sigma}_{CW}}, \quad (8.19)$$

exprimé en unités de temps dans le tableau 8.3. On peut déterminer  $\tau_{CW}$  en nombre de cycles d'oscillation en utilisant simplement l'égalité  $\tau_{CW}$  [cycles] =  $2Q_{CW}$ ).

À titre indicatif, la valeur de la période eulérienne (déduite de l'Éq. (2.17)), pour un modèle rigide ayant même aplatissement que le modèle utilisé, est  $T_{rig} = 231.18$  jours. La période de Chandler dans le cas purement élastique est par ailleurs  $T_{el} = 291.86$  jours. Elle est de 291.42 jours quand le modèle est incompressible ( $\lambda_0$  fixé à  $10^{20}$  Pa), soit une diminution de la période de 11 heures quand on prend un modèle incompressible. L'écart relatif entre  $T_{CW}$  (rhéologie anélastique) et  $T_{el}$  est  $\Delta T/T_{el} = (T_{CW} - T_{el})/T_{el}$ . Cet écart, également indiqué dans le tableau 8.3, est exclusivement dû à l'anélasticité.

La modélisation numérique permet aussi de calculer la période du mode diurne (degré  $\ell = 2$  et ordre  $m = +1$ ) : celle-ci est toujours de 86 164.33 s, quel que soit le modèle rhéologique considéré, soit exactement la même valeur que celle de Rogister (2000) pour un modèle élastique. Ce résultat n'est en rien étonnant puisque le mode diurne est une rotation rigide du modèle, dans laquelle la déformation, élastique ou anélastique, n'intervient pas. La constance de la période du TOM pour les différents modèles rhéologiques n'apporte donc pas d'information utile d'un point de vue géophysique mais constitue du moins un élément de validation du code de résolution numérique.

TABLEAU 8.3 – Période de Chandler, sa variation relativement au modèle élastique, facteur de qualité de Chandler et temps caractéristique pour un modèle compressible. La dernière colonne indique le facteur de qualité intrinsèque du matériau (pour le module de cisaillement) à la fréquence de Chandler trouvée pour la rhéologie correspondante. Les paramètres rhéologiques sont donnés dans le Tab. 8.2

Modèle	$T_{CW}$ [jours]	$\Delta T/T_{el}$ [%]	$Q_{CW}$	$\tau_{CW}$ [années]	$Q_{\mu}$
Élastique	291.861	0.0	$\infty$	$\infty$	$\infty$
Maxwell	291.861	0.0000	4300	700	1800
Kelvin-Voigt	231.340	-20.73	3700	4700	> 1
SLS	291.867	+0.0026	210	340	90
Burgers	291.867	+0.0026	190	360	90
$Q$ constant	294.064	+0.7549	360 000	> 0.5 Ma	150 000

Venons-en à présent aux résultats pour le mouvement de Chandler (tableau 8.3). J'ai déjà signalé, à la Section 8.2.2, que le modèle de Kelvin-Voigt

n'était pas adapté pour représenter la rhéologie terrestre en raison de la singularité de sa réponse élastique initiale. De tous les modèles rhéologiques présentés, c'est ainsi le seul qui induit une diminution, qui plus est importante, de la période de Chandler, relativement à un modèle élastique. Les autres modèles induisent tous une augmentation d'importance limitée (au plus quelques heures) de la période chandlérienne, sa variation étant même négligeable pour le modèle de Maxwell. L'approximation  $\text{Re} \tilde{\sigma}_{CW} \approx \sigma_{CW}$  est largement justifiée et la période reste *a fortiori* du même ordre de grandeur que pour le modèle élastique, validant l'hypothèse  $\text{Re} \tilde{\sigma}_{CW} \sim \sigma_{CW}$  faite au 6.2.2. D'autre part, le facteur de qualité est toujours élevé, validant également l'hypothèse  $Q_{CW}^{-1} \ll 1$ . Pour le modèle à  $Q$  constant en particulier, le facteur de qualité est très important car la période de Chandler ne se situe pas dans l'intervalle  $10^{-2} \text{ s} - 10^4 \text{ s}$ , hors duquel la dissipation est extrêmement faible. On pourrait mathématiquement définir un modèle à  $Q$  constant incluant l'oscillation chandlérienne dans sa gamme de périodes  $[T_1, T_2]$ , ce qui diminuerait la valeur de  $Q_{CW}$  (qui pourrait elle-même être ajustée), mais cela nécessiterait d'être justifié *a priori* d'un point de vue géophysique. En ajustant les paramètres du modèle à  $Q$  constant pour le mouvement de Chandler et des ondes de marées plus hautes fréquences, Dickman et Nam (1998) ont montré qu'il serait possible d'utiliser un tel modèle rhéologique à la fréquence de Chandler. Toutefois, leurs paramètres sont choisis de façon *ad hoc* pour la bande de fréquence et les phénomènes considérés et non pas donnés *a priori*.

Pour en venir à présent aux modèles SLS et de Burgers, ceux-ci ont la propriété particulière d'induire une très faible augmentation de la période chandlérienne tout en ayant un facteur de qualité sensiblement plus faible que celui des autres modèles étudiés, c'est-à-dire une atténuation plus importante. En bref, ces modèles présentent les effets anélastiques les plus marqués sur le mouvement de Chandler. Il serait toutefois anticipé de conclure que la fréquence chandlérienne ne s'écarte jamais de la valeur élastique ou que la dissipation est toujours très importante uniquement d'après les valeurs du Tab. 8.3, étant données les incertitudes sur la valeur de  $\eta_2$  introduite dans le modèle. Si on remplace la valeur du tableau 8.2 par  $\eta_2 = 10^{16} \text{ Pa s}$  comme le suggérait Scheidegger (1957), la période de Chandler s'écarte fortement de la valeur élastique, avec  $T_{CW} = 352$  jours, avec toujours un facteur de qualité de l'ordre de 200, pour les deux modèles. En diminuant la viscosité  $\eta_2$ , ces rhéologies permettent donc une dissipation comparable avec un impact très marqué sur la période d'oscillation. L'influence des viscosités est davantage discutée à la section suivante, ainsi que celle des rigidités.

### 8.3.2 Influence des rigidités et des viscosités sur la période et le facteur de qualité de Chandler

Les résultats donnés dans le Tab. 8.3 ont permis de discuter l'influence des modèles rhéologiques sur la période et le facteur de qualité de Chandler. Cepen-

dant, les valeurs des paramètres rhéologiques choisies pour calculer ces résultats sont relativement mal connues et il est donc utile d'étudier plus précisément l'influence de chacun de ces paramètres. Pour ce faire, je me limiterai au modèle de Burgers qui est le modèle anélastique le plus général (le modèle SLS en particulier peut en être déduit quand  $\eta_1 \rightarrow \infty$ ). L'influence des viscosités  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont illustrées par les Fig. 8.2 et 8.3 respectivement. Ces figures donnent la période et le facteur de qualité de Chandler pour un modèle de Burgers en fonction de  $\eta_1$  (respectivement  $\eta_2$ ) en maintenant les autres paramètres rhéologiques constants, suivant les valeurs du Tab. 8.2. Pour étudier l'influence de la seconde rigidité  $\mu_2$ , le choix a été fait de calculer à nouveau la période et le facteur de qualité de Chandler en fonction de  $\eta_2$  mais en imposant cette fois une valeur différente pour  $\mu_2$ . Les résultats obtenus sont illustrés par la Fig. 8.4 et doivent être comparés à la Fig. 8.3 pour laquelle on avait  $\mu_2 = \mu_1$ . Dans toutes les figures qui suivent, comme dans le Tab. 8.3, le facteur de qualité traduit bien sûr uniquement les effets anélastiques. Pour la Terre, le facteur de qualité estimé dans la littérature à partir de différentes observations est un facteur de qualité que l'on peut qualifier d'*effectif*, car il inclut l'atténuation provenant de tous les phénomènes affectant le mouvement chandlérien, dont – mais pas exclusivement – l'anélasticité. Cela implique que les facteurs de qualités calculés ici doivent nécessairement être supérieurs au facteur de qualité effectif de Chandler dont on trouvera de multiples estimations sur la Fig. 1 de l'article en Annexe.

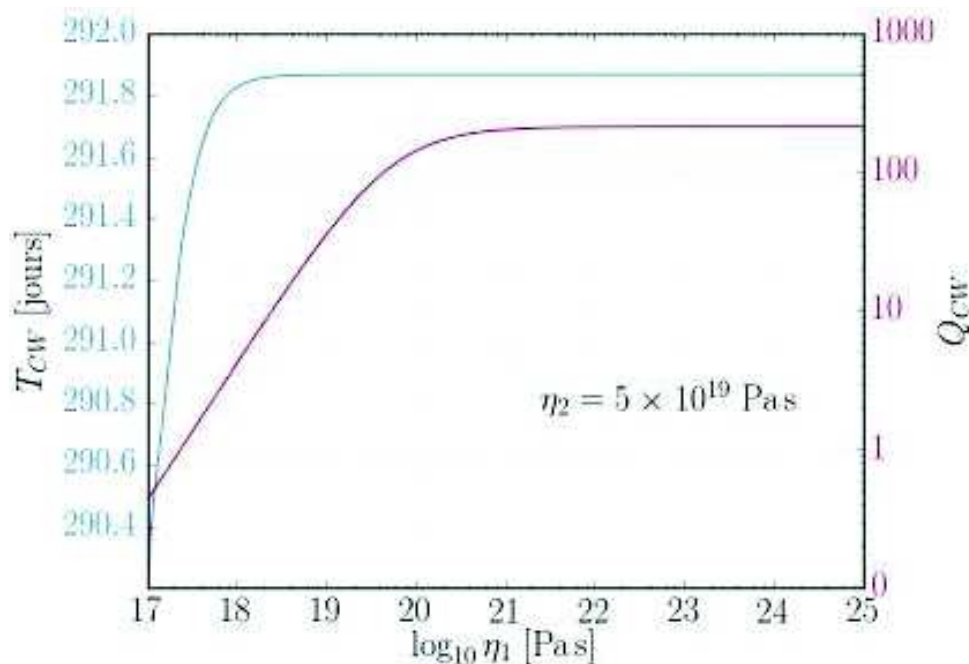


FIGURE 8.2 – Période de Chandler (en bleu) et facteur de qualité (en rouge) en fonction de  $\eta_1$  pour  $\mu_1 = \mu_2$ .

La viscosité  $\eta_1$  a une influence très limitée sur la période de Chandler autour de sa valeur couramment utilisée de  $10^{21}$  Pa s et il en est de même pour des



viscosités plus élevées. À l'inverse, en-dessous de  $10^{19}$  Pa s, une diminution de  $\eta_1$  induit une diminution faible mais non négligeable de la période de Chandler. À partir de  $10^{18}$  Pa s et en-deçà, l'influence de la viscosité devient importante, avec une diminution de  $T_{CW}$  de plus d'un jour entre  $\eta_1 = 10^{18}$  Pa s et  $\eta_1 = 10^{17}$  Pa s. Toutefois, étant donné que ces valeurs sont considérées comme bien trop faibles pour le manteau terrestre, on peut considérer que la viscosité  $\eta_1$  n'a pas d'influence significative sur la période de Chandler. Ce constat ne s'applique pas, en revanche, au facteur de qualité représenté à la Fig. 8.2. S'il tend lui-aussi vers une valeur constante (de l'ordre de 200) pour les viscosités élevées, il diminue sensiblement dès que  $\eta_1$  devient inférieure à  $5 \times 10^{20}$  Pa s environ. Ensuite, pour des viscosités inférieures  $10^{19}$  Pa s, le logarithme du facteur de qualité devient proportionnel au logarithme de la viscosité.

Il est à noter que le facteur de qualité de Chandler atteint des valeurs vraisemblablement trop faibles pour des valeurs de viscosités elles-mêmes trop faibles pour le manteau terrestre, comme indiqué précédemment. La Fig. 8.2 pourrait donc être compatible avec ce que l'on sait des paramètres rhéologiques du manteau terrestre. En particulier, si on prend la valeur minimale déterminée par Nastula et Gross (2015) pour le facteur de qualité de Chandler, soit 56, la Fig. 8.2 indique que la viscosité  $\eta_1$  doit être supérieure à  $2 \times 10^{19}$  Pa s pour que le facteur de qualité dû à l'anélasticité seulement demeure supérieur au facteur de qualité total observé. En revanche, la borne supérieure donnée par Nastula et Gross (2015) pour le facteur de qualité observé, soit 255, est incompatible avec la valeur limite atteinte ici (environ 200). Appliquée à un modèle de Terre plus réaliste, la présente étude permettrait ainsi de réduire le domaine des valeurs possibles pour le facteur de qualité de Chandler observé.

Intéressons-nous à présent à l'influence de la viscosité  $\eta_2$ , fort différente de celle de  $\eta_1$ . Au-delà de  $10^{19}$  Pa s (un dixième de  $\eta_1$ ), la période de Chandler tend vers une valeur constante (donnée Tab. 8.3). En revanche, la diminution de  $\eta_2$  en-deçà de  $10^{19}$  Pa s induit d'abord une augmentation de plusieurs jours de  $T_{CW}$  puis, lorsque  $\eta_2$  devient inférieure à  $10^{17}$  Pa s, la période de Chandler devient à nouveau constante, autour de 352 jours. En particulier, cette valeur est celle qu'on obtient en prenant  $\eta_2 = 10^{16}$  Pa s (voir 8.3.1). L'existence de ces deux valeurs limites permet en théorie d'exclure toute une gamme de viscosités pour  $\eta_2$  du manteau, si on connaît *a priori* la valeur approximative de la période de Chandler (qui doit être proche de la valeur élastique dans le cas où l'anélasticité est faible). Concernant le facteur de qualité, on notera tout d'abord la présence d'un minimum  $Q_{CW} \approx 5$  atteint pour  $\eta_2 \approx 7 \times 10^{17}$  Pa s. De part et d'autre de cette valeur, le facteur de qualité croît lorsque la viscosité diminue ou augmente. Le logarithme du facteur de qualité est cette fois proportionnel au logarithme de la viscosité pour un intervalle de valeurs qui inclut les estimations actuelles de  $\eta_2$  pour le manteau terrestre. La sensibilité du facteur de  $Q_{CW}$  à  $\eta_2$  est donc probablement importante pour la Terre si le modèle de Burgers est une représentation correcte de la rhéologie mantellique. On notera que Yuen et Peltier (1982) ont obtenu des résultats tout à fait similaires dans leur étude des modes normaux sismiques pour ce qui est de l'influence de  $\eta_2$  (voir leur fig. 4). Pour les

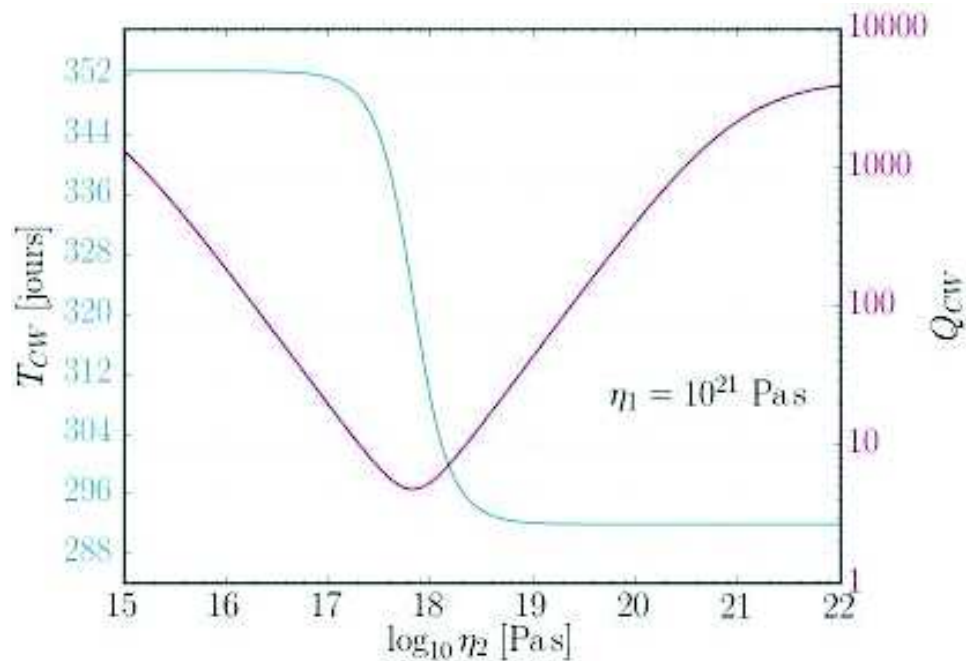


FIGURE 8.3 – Période de Chandler (en bleu) et facteur de qualité (en rouge) en fonction de  $\eta_2$  pour  $\mu_1 = \mu_2$ .

valeurs les plus élevées de  $\eta_2$  utilisées ici, on observe une modification dans la réponse du modèle, avec le facteur de qualité qui semble tendre vers une valeur constante. Cependant, on se situe là dans un domaine où  $\eta_2$  est supérieure à  $\eta_1$ , et je n'ai pas connaissance d'études géophysiques en faveur de cette hypothèse.

Au 8.3.1, nous avons supposé  $\mu_1 = \mu_2$ , suivant Yuen et Peltier (1982). Cependant, plusieurs études plus récentes ont suggéré que  $\mu_2$  était inférieure à  $\mu_1$ , de l'ordre d'un facteur 3 à 10 (Sabadini 1985; Lefftz et al. 1994; Trubienko et al. 2013). Pour les valeurs élevées de  $\eta_2$ , une modification de  $\mu_2$  a peu d'effet. On voit ainsi que la période et le facteur de qualité sont identiques indépendamment du rapport  $\mu_2/\mu_1$  pour les grandes valeurs de viscosités. Il faut que  $\eta_2$  diminue à des valeurs plus faibles que celles communément admises ( $\eta_2 < 3 \times 10^{18}$  Pa.s) pour que la diminution de  $\mu_2$  ait un impact visible. Dans ce domaine de viscosité, une diminution de  $\mu_2$  induit une augmentation très importante de la période de Chandler (+35% relativement au cas  $\mu_2 = \mu_1$ ), ainsi qu'une augmentation du facteur de qualité (d'un facteur 5 ici). En conclusion, l'influence de  $\mu_2$  est importante pour des valeurs anormalement basses de  $\eta_2$  mais demeure faible, voir négligeable, pour des valeurs de  $\eta_2$  plus couramment utilisées.

### 8.3.3 Forme du déplacement toroïdal de degré 1

Après avoir déterminé la fréquence de Chandler complexe, on peut ensuite calculer les fonctions propres suivant la méthode exposée dans le dernier paragraphe du 8.1.1. En particulier, le déplacement toroïdal  $W_{1,-1}$  pour le mouve-

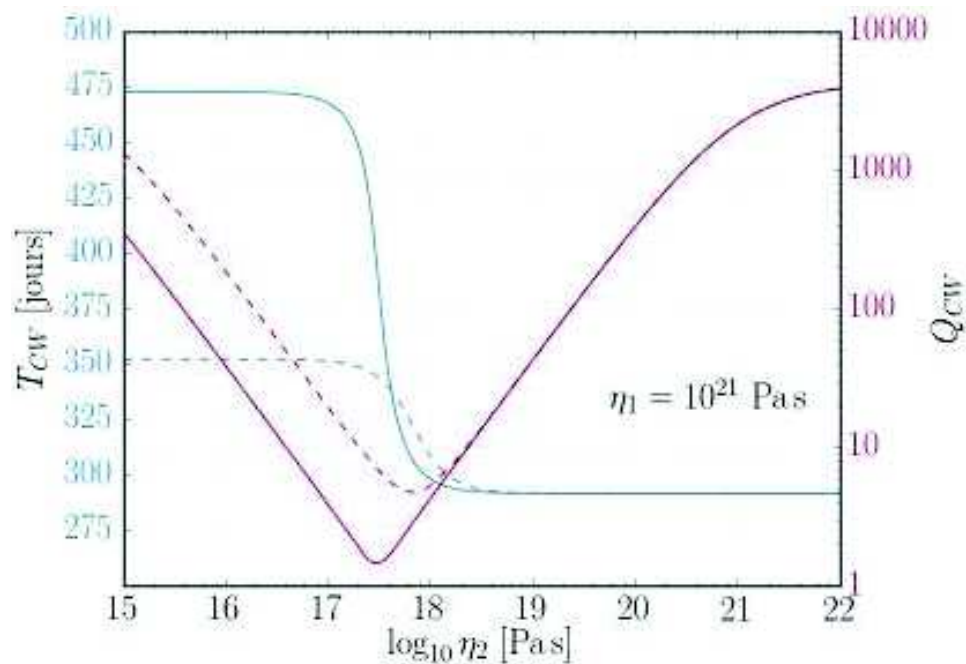


FIGURE 8.4 – Période de Chandler (en bleu) et facteur de qualité (en rouge) en fonction de  $\eta_2$  pour  $\mu_2 = \mu_1/3$  (trait plein). Les courbes de la Fig. 8.3 (pour  $\mu_2 = \mu_1$ ) sont également reproduites en pointillés à titre de comparaison.

ment de Chandler permet de s'assurer que le mode trouvé est bien l'oscillation chandlérienne pour laquelle  $W_{1,-1}(r)$  doit être essentiellement linéaire en  $r$ , plus une petite composante liée à la déformation. Pour isoler cette seconde composante, on peut simplement faire une régression linéaire sur  $W_{1,-1}$  ; la composante résiduelle est alors due à la déformation. De façon plus quantitative, on peut aussi ajuster à  $W_{1,-1}$  un polynôme de degré donné pour séparer directement les différentes composantes.

Sur l'ensemble des modèles rhéologiques utilisés, l'écart entre la composante linéaire et la composante en  $r^3$  de la partie réelle de  $W_{1,-1}$  est au moins de 5 à 6 ordres de grandeur. Les autres composantes, en  $r^2$ ,  $r^4$ ,  $r^5$ , etc., sont généralement encore un ordre de grandeur plus petite. Ceci tend à valider l'hypothèse faite au 7.4.2 pour résoudre analytiquement le problème des petites déformations. On notera cependant que les composantes supplémentaires ne sont parfois inférieures à celle en  $r^3$  que d'un facteur inférieur à 10. Par exemple, moins d'un ordre de grandeur (un facteur 6) sépare les composantes en  $r^4$  et en  $r^3$  pour le modèle SLS, lorsqu'on ajuste à  $W_{1,-1}$  un polynôme de degré 5. Les petites composantes additionnelles semblent, en outre, être d'ordres de grandeur comparables entre elles. Cette dernière observation doit toutefois être nuancée par le fait que l'ajustement de polynômes de degrés trop élevés donne des résultats peu fiables, en raison d'un sur-ajustement à une fonction  $W_{1,-1}$  ne contenant pas réellement de composantes de degrés élevés.

Pour la partie imaginaire de  $W_{1,-1}$ , la composante linéaire domine de façon

encore plus large les autres composantes, d'un facteur 6 à 7 au minimum. Cependant, contrairement à la partie réelle, il est beaucoup plus difficile d'identifier le terme non linéaire dominant. À titre d'exemple, l'ajustement d'un polynôme de degré 4 sur la partie imaginaire du déplacement toroïdal, avec un modèle de Burgers, indique une amplitude comparable pour les composantes en  $r^2$ ,  $r^3$  et  $r^4$ . On avait supposé, à la Section 7.4.2, qu'on pouvait écrire  $W_{1;-1}(r) = Ar + Br^3$ , avec  $A$  et  $B$  des constantes complexes. Le constat précédent sur les ordres de grandeur implique qu'on fait des erreurs potentiellement équivalentes sur la partie imaginaire de  $W_{1;-1}$  en négligeant le terme en  $r^2$  ou en imposant que  $B$  soit réelle.

### 8.3.4 Nombres de Love complexes pour le mouvement de Chandler

Le mode propre de rotation de Chandler apparaît naturellement comme une solution du problème des petites déformations. Cependant, pour faire le lien avec le facteur gravimétrique, largement discuté dans la seconde Partie (chap. 4 et 5), on peut adopter l'approche utilisée pour les équations d'Euler-Liouville (voir 2.3.1) en considérant la composante toroïdale de degré 1 et ordre  $-1$  de l'oscillation chandlérienne comme une source de perturbation qui induit le déplacement sphéroïdal de degré 2 et ordre  $-1$ . Du point de vue de la chaîne de couplage (7.54) pour le déplacement total (avec  $m = -1$ ), ceci revient à considérer que le premier terme toroïdal dans la chaîne est à l'origine du terme suivant, sphéroïdal. Cette formulation permet d'introduire la notion de « potentiel perturbateur » qui intervient dans la définition des nombres de Love. Pour rappel, la généralisation des travaux de Hough (1896) a montré que cette approche devait être aussi bien valable pour une Terre élastique que pour une Terre anélastique (voir 6.3.3).

Commençons par calculer la perturbation du potentiel de rotation  $\phi_{CW}$  dû au mouvement de Chandler. On peut décrire le mouvement du pôle à l'aide d'un vecteur  $\vec{\beta}$ , dans le plan équatorial du système de référence. Le mouvement du pôle (représentée par la composante linéaire en  $r$  de  $W_{1;-1}$ ) équivaut ainsi à un basculement de l'ellipsoïde autour de  $\vec{\beta}$ , d'un angle  $\beta = |\vec{\beta}|$  donnant l'amplitude de l'oscillation. Le déplacement induit par ce basculement rigide est donné par  $\vec{s} = \vec{\beta} \wedge \vec{r}$  et Rogister et Valette (2009), Éq. (18), donnent également l'expression du déplacement en fonction de  $W_{1;-1}$ . Par identification, on détermine que

$$\vec{\beta} = \frac{iW_{1;-1}}{2\sqrt{2}r}(\vec{e}_x - i\vec{e}_y), \quad (8.20)$$

où  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  sont des vecteurs unitaires dans le plan équatorial. L'angle de nutation  $\beta$  vaut donc  $W_{1;-1}/(2\sqrt{2}r)$ . De façon similaire aux développements du 2.2.3, on peut directement relié, au premier ordre en  $\sigma_{CW}/\Omega_0$ , les coordonnées de  $\vec{\beta}$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , à  $m_1$  et  $m_2$ , les coefficients de la perturbation de la rotation dans le formalisme d'Euler-Liouville. Soit  $\vec{m} = m_1\vec{e}_x + m_2\vec{e}_y$ . Puisque, au premier ordre,  $m$

est égale à  $p$  (voir Éq. (2.8)), le vecteur  $\vec{m}$  donne la position du pôle. Le vecteur  $\vec{\beta}$  étant dans le plan  $(xOy)$ , on a donc

$$\vec{\beta} = \vec{e}_z \wedge \vec{m}, \quad (8.21)$$

dont on déduit,

$$m_1 = -\beta_2 = -\frac{W_{1;-1}}{2\sqrt{2}r} \quad (8.22)$$

et

$$m_2 = \beta_1 = i\frac{W_{1;-1}}{2\sqrt{2}r}. \quad (8.23)$$

L'Éq. (3.5) donne la perturbation de pesanteur due au mouvement du pôle en fonction de  $m_1$  et  $m_2$ . De même, la perturbation du potentiel de rotation a la forme

$$\phi_m = -\frac{\Omega_0^2 r^2}{2} \sin 2\theta (m_1 \cos \phi + m_2 \sin \phi). \quad (8.24)$$

Par substitution des Éq. (8.22) et (8.23) dans (8.24), on trouve

$$\phi_m = \Omega_0^2 r^2 \frac{W_{1;-1}}{2\sqrt{2}r} \cos \theta \sin \theta (\cos \phi - i \sin \phi). \quad (8.25)$$

L'harmonique sphérique généralisée de degré 2 et ordre  $-1$  étant donnée par

$$\mathcal{D}_{2;-1}^0(\theta, \varphi) = -\frac{\sqrt{6}}{2} \cos \theta \sin \theta e^{-i\varphi}, \quad (8.26)$$

on aboutit finalement à l'expression du coefficient de degré 2 et ordre  $-1$  du potentiel perturbateur en fonction du déplacement toroïdal, soit

$$\phi_{CW} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \Omega_0^2 r W_{1;-1}. \quad (8.27)$$

Connaissant le potentiel  $\phi_{CW}$ , on peut désormais calculer les *pseudo*-nombres de Love, introduits au 4.2.2, puis en déduire le facteur gravimétrique, donné par l'Éq. (4.3). Le calcul de  $h_2$  ne pose pas de difficulté particulière. On a simplement

$$h_2 = g_0 \frac{U_{2;-1}}{\phi_{CW}}, \quad (8.28)$$

où  $U_{2;-1}$  est la composante de degré 2 et ordre  $-1$  du déplacement radial et  $g_0$  la pesanteur normale, en surface. Pour calculer  $k_2$ , on doit d'abord isoler la variation du géopotential due à la déformation uniquement. Tel que nous avons posé et résolu le problème des petites déformations, le système de référence tourne toujours à la vitesse  $\Omega_0$ , indépendamment du mouvement du pôle exprimé par la composante linéaire en  $r$  de  $W_{1;-1}$ . Par conséquent, le potentiel centrifuge lagrangien  $\phi_c^0$  n'a pas de variation eulérienne. En revanche, le potentiel newtonien lagrangien  $\phi$  subit bien une variation eulérienne  $\Delta\phi = \phi_1$  non nulle,

induite par (1) une rotation rigide de l'ellipsoïde autour d'un axe équatorial, rotation traduite par la composante linéaire de  $W_{1,-1}$  et qui fait varier au sens eulérien le champ de gravité et (2) une variation supplémentaire de la gravité due à la déformation du modèle lui-même. Seule cette seconde variation nous intéresse puisqu'on ne doit pas considérer le basculement de l'ellipsoïde dans la réponse du modèle, si on choisit une définition du pseudo-nombre de Love  $k_2$  en concordance avec celles des nombres de Love ordinaires. Si on note  $\phi_\beta$  la variation eulérienne du potentiel newtonien due au basculement de l'ellipsoïde, on a donc

$$k_2 = \frac{\phi_{12;-1} - \phi_\beta}{\phi_{CW}}. \quad (8.29)$$

Rogister (2000), Éq. (5.63), donne l'expression de  $\phi_\beta$ , déterminée dans le cadre de son étude du TOM, qui est justement un basculement rigide de l'ellipsoïde :

$$\phi_\beta = \frac{3}{4\sqrt{3}} \Omega_0^2 r W_{1,-1}. \quad (8.30)$$

### 8.3.5 Amplitude et phase du facteur gravimétrique

Les Éq. (8.28) et (8.29) permettent de calculer le facteur gravimétrique pour les différents modèles rhéologiques du tableau 8.1. Les résultats sont présentés dans le tableau 8.4. À titre de comparaison, le facteur gravimétrique calculé à partir des nombres de Love élastiques pour ce modèle de Terre est  $\delta = 1.072$ , sa phase étant bien sûr nulle.

La phase  $\kappa$  du facteur gravimétrique donne le déphasage entre la déformation observée et la déformation théorique (pour un modèle rigide). Ce déphasage est un angle (en radian) qui peut être converti en temps au moyen de la relation

$$\kappa [\text{s}] = \frac{\kappa [\text{rad}]}{2\pi} \times T_{CW} [\text{s}], \quad (8.31)$$

où  $T_{CW}$  est la période d'un modèle de Terre dont la relation tension-déformation est un modèle rhéologique. Physiquement,  $\kappa$  peut alors s'interpréter comme l'intervalle de temps qui sépare la variation de pesanteur par effet centrifuge direct et déformation élastique, toutes deux instantanées, de la variation de gravité due à l'anélasticité (effet gravimétrique de la redistribution des masses) qui présente un retard. Cette phase est donc toujours négative.

L'Éq. (4.13) permettait d'estimer *a priori* que, pour  $\delta \approx 1.072$ ,  $\zeta \approx 15\kappa$ . Les valeurs des phases du tableau 8.4 vérifient bien cette relation approximative, sauf, bien évidemment, pour le modèle de Kelvin-Voigt dont l'amplitude du facteur de qualité est très différente. Ce modèle présente en effet un  $\delta$  très proche de l'unité, ce qui indique une réponse de faible amplitude (proche d'une Terre rigide) à la période de Chandler. En revanche, le déphasage  $\kappa$  du modèle de Kelvin-Voigt est tout de même significatif. Le modèle de Maxwell présente une réponse très proche du modèle élastique à tous égards. Le très faible déphasage indique que la réponse de ce modèle à la fréquence de Chandler est largement

TABLEAU 8.4 – Facteurs gravimétriques pour le mouvement de Chandler. Amplitude  $\delta$ , phase  $\kappa$  en degré et en minutes/secondes et phase de la composante déformation uniquement, telle que définie à l'Éq. (4.11). Voir l'Éq. (8.31) pour le calcul de  $\kappa$  en temps.

Modèle	$\delta$	$-\kappa$ [deg]	$-\kappa$ [temps]	$-\zeta$ [deg]
Élastique	1.07160	0.0	0min00s	0.0
Maxwell	1.07160	0.001397	1min38s	0.020911
Kelvin-Voigt	1.00094	0.015210	14min04s	15.831
SLS	1.07160	0.027940	32min37s	0.41814
Burgers	1.07160	0.029337	34min15s	0.43905
$Q$ constant	1.07328	$1.6545 \times 10^{-5}$	0min01s	$2.4232 \times 10^{-4}$

dominée par la composante élastique. Cela est conforme avec le fait que le temps caractéristique de Maxwell soit proche de deux siècles pour les valeurs d'élasticité et de viscosité utilisées ici, alors que la période chandlérienne est de l'ordre de l'année. Comme on pouvait s'y attendre au vu des résultats du Tab. 8.3, le modèle à  $Q$  constant présente des valeurs de phase extrêmement faibles mais il est le seul à avoir un  $\delta$  visiblement supérieur à la valeur élastique. À l'inverse du modèle de Maxwell, l'amplitude du facteur gravimétrique varie de façon non négligeable pour le modèle à  $Q$  constant sans que, quasiment, aucun déphasage n'apparaisse.

Concernant les modèles SLS et de Burgers, les résultats sont à nouveau très similaires entre ces deux rhéologies. L'amplitude du facteur gravimétrique est assimilable à la valeur élastique (écart inférieur à un pour mille) mais les phases sont bien plus importantes que pour le modèle de Maxwell. Les effets anélastiques du mouvement de Chandler sur la gravité mesurée sont ainsi retardés de plus d'une demi-heure par rapport aux effets instantanés. Les résultats du Chap. 5 ont montré qu'il était impossible pour le moment d'atteindre un niveau d'incertitude suffisamment bas pour discuter de déphasages aussi faibles que ceux du Tab. 8.4 entre les séries gravimétriques observées et celles déduites du mouvement du pôle mais les valeurs données ici montrent que l'effet pourrait être tout de même mesurable.

Pour clore cette discussion sur les phases, revenons un instant sur les différences de phases calculées au Chap. 6 après la généralisation des travaux de Hough (1896). On peut désormais comparer les valeurs numériques et analytiques des trois phases données par les équations (6.33), (6.35) et (6.36) en identifiant les phases du mouvement du pôle, de la perturbation du potentiel et du déplacement radial, citées au 6.3.1, à celles, en surface, du déplacement toroïdal  $W_{1,-1}$ , de la perturbation eulérienne du potentiel  $\phi_1$  et du déplacement radial  $U_{2,-1}$  respectivement, et en prenant une Terre incompressible (on impose numériquement  $\lambda_0 = 10^{20}$  Pa). Les valeurs des déphasages ne sont évidemment pas les mêmes d'un modèle rhéologique à l'autre mais les résultats suivants sont

valables pour tous les modèles. Tout d'abord, le déphasage entre déplacement radial et mouvement du pôle a exactement la même valeur, qu'il soit calculé analytiquement ou numériquement (déphasage de l'ordre d'un demi-degré pour le modèle de Burgers). Les déphasages entre la perturbation du potentiel et le déplacement radial ou le mouvement du pôle présentent aussi des valeurs très proches après détermination numérique et analytique mais l'écart est cette fois non négligeable, bien qu'il n'atteigne pas 0.1%. La raison de cet écart est à chercher dans la détermination de la valeur de  $\phi_1$  puisque l'écart devient négligeable quand le déphasage est calculé entre les deux autres fonctions propres. Cependant, il est très probable que cette légère différence ne révèle rien d'autre que les approximations faites dans le développement au premier ordre de toutes les équations, voire même la limite de précision de l'intégration numérique du système différentiel. Il est important de garder à l'esprit que les déphasages sont des grandeurs très petites qui sont finalement remarquablement bien estimées au vu de tous les termes petits négligés dans les équations initiales. En conclusion, on peut considérer que ces résultats analytiques et numériques sur les phases entre fonctions propres sont en très bon accord. Étant donné qu'ils ont été obtenus de façon totalement indépendantes par deux méthodes différentes, leur validité s'en trouve mutuellement confortée.





# Influence de la fréquence sur la réponse de la Terre à un forçage

---

## Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Dépendance temporelle de la rhéologie terrestre et forçage . .</b>	<b>145</b>
9.1.1	Échelles de temps et rhéologie . . . . .	145
9.1.2	Le rebond post-glaciaire, variation d'altitude et de gravité .	146
9.1.3	Rapport de la variation de gravité sur la variation d'altitude	147
<b>9.2</b>	<b>Formalisme et adaptation du code de résolution . . . . .</b>	<b>149</b>
9.2.1	Expression mathématique de la surcharge . . . . .	149
9.2.2	Nombres de Love . . . . .	150
9.2.3	Conditions aux limites . . . . .	150
<b>9.3</b>	<b>Rapport entre la variation de gravité et le déplacement vertical</b>	<b>151</b>

---

*Gondwana s'était trouvée placée par le nouvel équilibre de la Terre autour du nouveau pôle Sud. Le gel avait saisi et immobilisé les eaux du raz de marée qui balayait le continent. Et, sur ce glacis, les années, les siècles, les millénaires avaient accumulé de fantastiques épaisseurs de neige transformée à son tour en glace par son propre poids.*

---

René Barjavel, *La Nuit des temps*

## 9.1 Dépendance temporelle de la rhéologie terrestre et forçage

### 9.1.1 Échelles de temps et rhéologie

J'ai déjà évoqué au 4.1.1 l'importance des échelles de temps que l'on considère lorsqu'on s'intéresse à la rhéologie terrestre. Selon les processus étudiés, le comportement du manteau varie de presque purement élastique à visco-élastique. Pour les temps caractéristiques les plus grands, les déformations deviennent même plastiques ou visqueuses, telles la déformation des roches ou la convection mantellique, à l'échelle des temps géologiques. Plusieurs ouvrages

traitent de la viscosité du manteau, notamment ceux de Cathles (1975), Rannalli (1987) ou Karato (2008). Dans la perspective des discussions du Chap. 8 sur les différents modèles rhéologiques, et après avoir discuté de l'influence des paramètres élastiques et des viscosités dans ces modèles, on peut à présent s'intéresser à l'influence de la fréquence sur la réponse de la Terre.

Les modes propres sismiques ou de rotation, dont le mouvement de Chandler, couvrent une partie restreinte du spectre des fréquences caractéristiques de l'ensemble des phénomènes géophysiques. Afin de déterminer la réponse des modèles de Terre du Chap. 8 pour différentes rhéologies sur une large gamme continue de fréquences, il faut imposer une déformation à une fréquence donnée, c'est-à-dire un forçage. On peut ensuite calculer la réponse du modèle, exprimée par les nombres de Love, et tracer son évolution avec la fréquence. On s'attend à ce que les nombres de Love aient une valeur proche de leur valeur élastique à haute fréquence et tendent vers une valeur viscoélastique différente aux plus basses fréquences. Il en est de même pour toutes les grandeurs calculées en fonction des nombres de Love, tel le facteur gravimétrique.

Sur un modèle homogène, le forçage peut être dû à une pression exercée en surface, à un potentiel perturbateur, ou au deux simultanément. La variation de pression seule peut avoir une origine atmosphérique (ou océanique) si on néglige l'attraction directe des masses d'air. Les perturbations par un potentiel extérieur sont notamment causées par les autres corps du système solaire. Les marées luni-solaires, dont les périodes sont très diverses, sont l'exemple même de ce type de forçage. Les forçages combinant l'application d'une pression en surface et un potentiel extérieur sont des *surcharges*, dont l'archétype est la surcharge glaciaire. D'autres types de surcharges existent cependant, tels les surcharges hydrologiques ou océaniques. Les surcharges sont généralement étudiées en lien avec la déglaciation et le rebond post-glaciaire (voir 9.1.2) mais, à travers elles, il est possible de s'intéresser à des problèmes géodynamiques variés, incluant la rotation des planètes (Legros et Lefftz 1993). À titre d'exemple, Lefftz et al. (1994) se sont intéressés au lien existant entre la déglaciation pléistocène et les couplages entre noyau et manteau à la CMB qui contraignent la rotation du noyau.

### 9.1.2 Le rebond post-glaciaire, variation d'altitude et de gravité

Le retrait des glaciers dans les régions polaires après la dernière période de glaciation a considérablement diminué la surcharge exercée sur la lithosphère par la glace en surface. Depuis la fonte des glaciers il y a quelque 10 000 ans (fin de la glaciation de Würm), le bouclier scandinave, la Sibérie, ainsi qu'une partie du continent nord-américain sont soumis à un lent mouvement vertical en réponse à la disparition de ces masses. Ce mouvement, le rebond post-glaciaire (PGR, *postglacial rebound*), ou ajustement glacio-isostatique (GIA, *glacial isostatic adjustment*), est probablement la manifestation géophysique la plus évi-

dente du comportement visqueux à long terme des matériaux mantelliques. L'observation de ses effets sur le champ de gravité constituent d'ailleurs une des « preuves » géophysiques de la viscosité du manteau.

Les effets gravimétriques et géodésiques des surcharges par les calottes polaires et les glaciers ont été, et sont encore, abondamment étudiés, aussi bien par des mesures sur le terrain qu'au travers de modélisations numériques et d'études plus théoriques (Wu et Peltier 1982 ; Mitrovica et al. 2001 ; Steffen et Wu 2011 ; Mémin et al. 2011 ; Spada et al. 2011). Une des questions prépondérantes dans ces travaux concerne bien sûr la rhéologie (Peltier 1974 ; Boschi et al. 1999 ; Spada et Boschi 2006 ; Spada 2008), notamment le choix des modèles et des paramètres de viscosité ou temps de relaxation du manteau. Le modèle rhéologique privilégié dans ce domaine, comme je l'ai déjà déjà indiqué au 8.2.2, est le modèle de Maxwell mais des généralisations de celui-ci, incluant le modèle de Burgers, ont aussi été étudiées (Spada 2013). Les effets viscoélastiques du GIA peuvent être mis en évidence grâce à des mesures gravimétriques associées à des relevés GPS ou d'autres mesures de nivellement. La gravimétrie est sensible à la fois au déplacement radial et à la redistribution des masses, tandis que le nivellement ne donne que le déplacement de la surface. En combinant ces mesures indépendantes, on peut ainsi quantifier les effets élastiques et visqueux en jeu dans la déformation actuelle des régions autrefois couvertes par les glaciers. Les travaux de Purcell et al. (2011) et Mémin et al. (2011) sont des exemples récents de telles études sur les variations de pesanteur inhérentes au GIA.

Il faut noter qu'une grande part des travaux théoriques sur le GIA se concentrent généralement sur la déformation qui suit la déglaciation, par des analyses en domaine temporel, même si les développements sont d'abord faits en domaine de Laplace, en application du Principe de correspondance. De façon alternative, nous aborderons ce problème en restant en domaine fréquentiel exclusivement. Cela nous permettra d'appliquer un forçage périodique au modèle et d'en calculer la réponse sur une large gamme de fréquences.

### 9.1.3 Rapport de la variation de gravité sur la variation d'altitude

Les perturbations gravimétriques associées à une surcharge sont de différentes origines (Linage et al. 2007). On distingue tout d'abord l'effet d'attraction newtonienne directe sur un observateur de la masse à l'origine de la surcharge, de ses effets sur la Terre qui induisent une déformation de celle-ci. L'attraction directe varie selon la géométrie de la surcharge mais aussi suivant la position du point d'observation relativement à la surcharge. Son effet est donc important pour les observations – puisqu'il est inclus dans les mesures faites sur le terrain – mais n'intervient que sous la forme d'un forçage extérieur dans la détermination de la réponse de la Terre à une surcharge. En outre, l'attraction disparaît lorsque la surcharge disparaît, au début du rebond. Pour simplifier la discussion qui suit, nous considérerons donc pour le moment les effets du rebond

post-glaciaire exclusivement et on se placera au lieu d'amplitude maximale du rebond (les phénomènes pouvant être quelque peu différents sur les bords de l'ancienne région glaciaire).

Le GIA se manifestant avant tout par une remontée de la surface libérée de la pression des glaces, il est courant de comparer les variations gravimétriques  $\Delta g$  qu'il induit à l'amplitude du déplacement vertical,  $\Delta u$ . Le rapport  $\Delta g/\Delta u$  dépend du temps ou de la fréquence, selon le domaine choisi, et sa valeur renseigne sur la nature des processus rhéologiques affectant la lithosphère. La variation d'altitude est à l'origine de la perturbation de gravité la plus importante. Cette dernière est simplement liée à l'éloignement progressif du point d'observation par rapport au centre des masses de la Terre. Constante au cours du temps, cette composante du rapport de la variation de gravité sur le déplacement est plus géométrique que dynamique et ne dépend pas de la rhéologie. Son amplitude est  $\Delta g/\Delta u = -2g_0/a = -0.3086 \mu\text{Gal mm}^{-1}$ , valeur bien connue sous le nom de *gradient à l'air libre* (voir 3.1.2). Le deuxième processus affectant la gravité est le rebond élastique des masses sous-jacentes qui compensent partiellement l'effet précédent en remontant. La variation résultante, le gradient de gravité après correction de Bouguer simple, dépend faiblement du degré harmonique pour les premiers degrés (entre  $-0.23 \mu\text{Gal mm}^{-1}$  et  $-0.29 \mu\text{Gal mm}^{-1}$  pour  $\ell$  compris entre 2 et 5), puis tend vers la valeur constante de  $-0.20 \mu\text{Gal mm}^{-1}$ , pour les degrés élevés et un modèle de Terre dont la couche externe est incompressible (Linage et al. 2007). En moyennant sur les degrés harmoniques de 2 à 50, Linage et al. (2007) estiment la valeur globale  $\Delta g/\Delta u = -0.26 \mu\text{Gal mm}^{-1}$ . Notons toutefois que leur résultat inclut l'attraction newtonienne directe de la charge. La composante due à la déformation élastique uniquement est plus faible en valeur absolue, surtout pour les petits degrés auxquels l'attraction directe est non négligeable.

La valeur de  $\Delta g/\Delta u$  varie de façon significative lorsqu'on inclut les effets viscoélastiques. Wahr et al. (1995) ont constaté que, pour une variété de modèles (différentes géométries et histoires des glaciers et différents profils de viscosité dans le manteau), la composante visqueuse de la variation de gravité étaient proportionnelle au déplacement, la constante de proportionnalité étant estimée à  $6.5 \text{ mm } \mu\text{Gal}^{-1}$ , soit  $0.15 \mu\text{Gal mm}^{-1}$  (la moitié de l'opposé du gradient à l'air libre). En outre, ce rapport est relativement indépendant du degré harmonique (dépendance en  $(\ell + 1)/(\ell + 1/2)$ ). Cependant, cette valeur, ne pourra pas être directement comparée à nos résultats car elle s'appuie sur des modèles de Terre (de type PREM) fort différents d'un modèle homogène. L'Éq. (9) de Wahr et al. (1995) permet d'estimer que, pour un modèle homogène, la composante visqueuse de  $\Delta g/\Delta u$  est

$$\frac{\Delta g_\eta}{\Delta u_\eta} = \frac{2g_0}{a} \frac{3(\ell + 1/2)}{4(\ell + 1)}. \quad (9.1)$$

En régime visqueux, le rapport total (air libre et composante visqueuse) est donc

$$\begin{aligned}\frac{\Delta g}{\Delta u} &= -\frac{2g_0}{a} + \frac{2g_0}{a} \frac{3(\ell + 1/2)}{4(\ell + 1)} \\ &= -\frac{2g_0}{a} \frac{\ell + 5/2}{4(\ell + 1)},\end{aligned}\quad (9.2)$$

qui tend vers 1/4 du gradient à l'air libre pour  $\ell \rightarrow \infty$ .

## 9.2 Formalisme et adaptation du code de résolution

### 9.2.1 Expression mathématique de la surcharge

Le problème du forçage étant étudié pour mettre en évidence l'influence de la fréquence sur la réponse du modèle de Terre, nous ne nous préoccupons plus de l'ellipticité ou de la rotation terrestre dans ce qui suit. Toute surcharge de densité surfacique  $\varsigma$  peut alors être décomposée sur la base des harmoniques sphériques ordinaires. Si on se limite à une surcharge à symétrie de révolution exercée sur un pôle, autrement dit une calotte polaire, l'écriture de  $\varsigma$  ne dépend plus de l'ordre  $m$  :

$$\varsigma = \sum_{\ell=0}^{\infty} \varsigma_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), \quad (9.3)$$

où  $\varsigma_{\ell}$  est le coefficient harmonique de degré  $\ell$  et  $P_{\ell}$  est le polynôme de Legendre que l'on peut déduire de l'Éq. (7.42), pour  $m = 0$ . On peut montrer (Farrell 1972) que l'expression de  $\varsigma_{\ell}$  pour une calotte sphérique d'ouverture  $\alpha$  est

$$\varsigma_{\ell} = \begin{cases} \frac{\rho_c h}{2} (1 - \cos \alpha) & \text{si } \ell = 1, \\ \frac{\rho_c h}{2} [P_{\ell-1}(\cos \theta) - P_{\ell+1}(\cos \theta)] & \text{si } \ell > 1. \end{cases} \quad (9.4)$$

Comme indiqué au 9.1.1, une surcharge induit deux forçages distincts à la surface de la Terre. Le premier est dû au potentiel gravitationnel  $\phi^{\text{ext}}$  créé par la masse de la charge elle-même, qui vaut

$$\phi^{\text{ext}} = - \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{3g_0}{2\ell + 1} \left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} \frac{\varsigma_{\ell}}{\rho_0} P_{\ell}(\cos \theta). \quad (9.5)$$

Le second est la pression

$$p = \varsigma g_0. \quad (9.6)$$

Les Éq. (9.5) et (9.6) permettent de calculer les coefficients harmoniques de degré  $\ell$ , en surface, du potentiel  $\phi^{\text{ext}}$  et de la pression  $p$ , soit

$$\phi_{\ell}^{\text{ext}}(a) = \frac{3g_0}{2\ell + 1} \frac{\varsigma_{\ell}}{\rho_0} \quad (9.7)$$

et

$$p_{\ell} = \varsigma_{\ell} g_0. \quad (9.8)$$

### 9.2.2 Nombres de Love

Lors de notre étude du mouvement de Chandler, nous avons utilisé des pseudo-nombres de Love pour calculer le facteur gravimétrique. Désormais, nous utiliserons les nombres de Love usuels puisque le forçage est réellement extérieur au modèle. Plus précisément, les nombres de Love de charge  $h'_\ell$  et  $k'_\ell$  sont définis par

$$U_\ell = h'_\ell \frac{3s_\ell}{(2\ell + 1)\rho_0} \quad (9.9)$$

et

$$\phi_{1\ell} = (1 + k'_\ell) \frac{3g_0 s_\ell}{(2\ell + 1)\rho_0}. \quad (9.10)$$

On peut également définir le nombre de Shida  $l'_\ell$  (souvent dénommé nombre de Love également) tel que

$$V_\ell = l'_\ell \frac{3s_\ell}{(2\ell + 1)\rho_0}. \quad (9.11)$$

Le rapport de la variation de gravité sur le déplacement défini au 9.1.3 peut être exprimé au moyen des nombres de Love (9.9) et (9.10). La composante liée à l'attraction newtonienne directe non locale, à l'intérieur de la Terre et proche de la surface, est (Linage et al. 2007)

$$\frac{\Delta g_N}{\Delta u} = \frac{g_0}{a} \frac{1}{2h'_\ell}, \quad (9.12)$$

la composante liée à l'accroissement d'altitude (air libre) est

$$\frac{\Delta g_A}{\Delta u} = -\frac{2g_0}{a} \quad (9.13)$$

et la composante liée à la déformation (élastique ou viscoélastique) est

$$\frac{\Delta g_E}{\Delta u} = \frac{g_0}{a} \frac{(\ell + 1)k'_\ell}{h'_\ell}. \quad (9.14)$$

La somme de ces trois termes donne la variation de gravité totale sur le déplacement radial, à l'extérieur des sources, pour le degré  $\ell$ ,

$$\frac{\Delta g}{\Delta u} = -\frac{2g_0}{a} \left( 1 - \frac{1}{4h'_\ell} - \frac{(\ell + 1)k'_\ell}{2h'_\ell} \right). \quad (9.15)$$

### 9.2.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites utilisées dans l'étude du mouvement de Chandler étaient valables pour un mouvement libre. Dans le cas d'un forçage de type surcharge, le potentiel à la surface devient

$$\phi_1(a) = \frac{2\ell + 1}{a} \phi_\ell^{\text{ext}}(a), \quad (9.16)$$

et la pression devient

$$P_\ell(a) = \frac{2\ell + 1}{3} p_\ell. \quad (9.17)$$

La méthode de résolution demeure ensuite la même que celle exposée au 8.1.1, en omettant évidemment l'étape de recherche des fréquences propres puisque la fréquence de forçage est imposée.

### 9.3 Rapport entre la variation de gravité et le déplacement vertical

Les résultats qui suivent sont partiellement inclus dans un article en cours de révision, soumis aux *IAG Series* suite à l'Assemblée générale 2015 de l'UGGI (voir Annexe). Cet article reprend également une partie des résultats présentés au Chap. 8.

Je présenterai ici les résultats du forçage par une surcharge d'un modèle de Terre non rotatif à rhéologie de Maxwell (Fig. 9.3) et à rhéologie de Burgers (Fig. 9.4), en domaine fréquentiel. Le rapport de la variation de gravité sur le déplacement radial étant complexe, on le représente par son amplitude et sa phase. En s'intéressant aux nombres de Love d'un modèle homogène incompressible, Legros et al. (2006) ont montré que le calcul d'un déphasage (donné par la phase de  $k'_\ell$ ) différerait du calcul de l'énergie dissipée. On peut donc interpréter la partie imaginaire ou la phase des nombres de Love (ou de  $\Delta g/\Delta u$ ) comme une manifestation de l'anélasticité mais cette phase ne donnera pas directement la dissipation d'énergie.

Les Fig. 9.1 et 9.2 illustrent les nombres de Love complexes calculés en fonction de la fréquence de forçage pour un modèle de Terre à rhéologie de Maxwell et de Burgers respectivement. Ces nombres permettent de déterminer  $\Delta g/\Delta u$  d'après l'Éq. (9.15) et nous nous intéresserons à ce rapport plutôt qu'aux nombres de Love eux-mêmes. Pour cette raison, je ne discuterai pas spécifiquement les Fig. 9.1 et 9.2. Cependant, les commentaires qui suivent s'appliquent en partie aux nombres de Love eux-mêmes, puisque les variations de  $\Delta g/\Delta u$  avec la fréquence sont conditionnées par ceux-ci.

Pour le modèle de Maxwell comme pour le modèle de Burgers, l'amplitude de  $\Delta g/\Delta u$  tend vers deux valeurs distinctes à courtes et longues périodes respectivement. La limite à courte période est la plus grande en valeur absolue ; elle est proche de  $-0.26 \mu\text{Gal mm}^{-1}$ . La limite visqueuse, à longue période est de l'ordre de  $-0.08 \mu\text{Gal mm}^{-1}$ . Ces valeurs extrêmes sont identiques pour les deux modèles car la composante de Kelvin-Voigt ajoutée au modèle de Maxwell pour obtenir le modèle de Burgers n'intervient ni à très courte période ou le régime élastique domine, ni à très longue période, où la composante visqueuse de Maxwell domine. Aux périodes intermédiaires, la distinction entre les deux modèles apparaît, notamment dans la phase de  $\Delta g/\Delta u$  qui donne le déphasage entre la variation de gravité et le déplacement. Celui-ci s'annule vers les



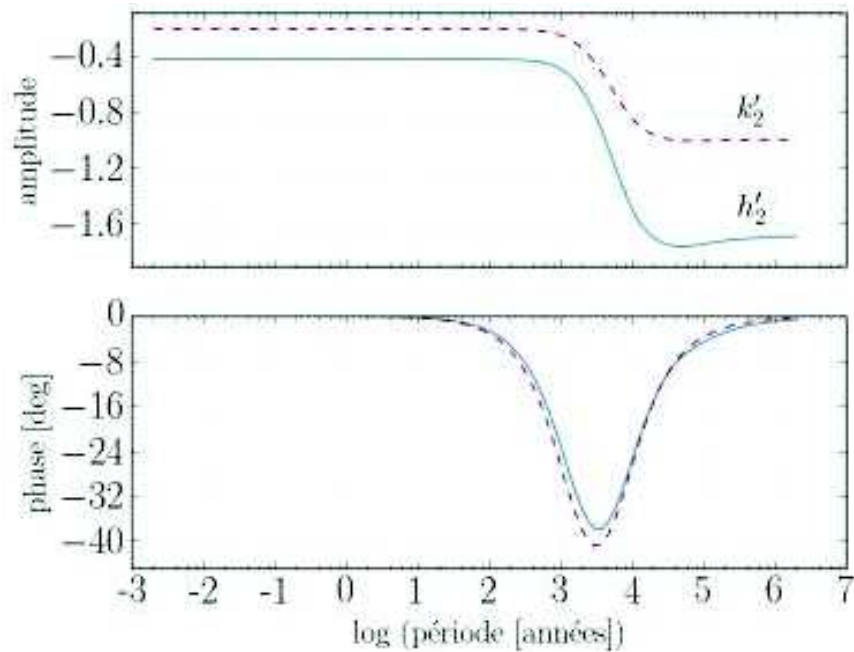


FIGURE 9.1 – Amplitude et phase des nombres de Love  $h'_2$  (trait plein) et  $k'_2$  pour la rhéologie de Maxwell, en fonction de la fréquence de forçage. Les valeurs des paramètres rhéologiques sont ceux du Tab. 8.2.

fréquences extrêmes, mais atteint plusieurs dizaines de degrés aux temps de relaxation caractéristiques des modèles considérés. Cela montre que les effets anélastiques sont moins visibles sur le déphasage en régime purement visqueux qu'en régime viscoélastique. On notera que la phase change de signe en régime visqueux, avant de tendre vers zéro, comme en régime purement élastique. Ce phénomène n'apparaît que pour un modèle compressible.

Legros et al. (2006) soulignent que le temps de relaxation  $\tau_\ell$  pour le degré  $\ell$  est différent du temps de relaxation  $\tau$  du modèle de Maxwell. On a ici  $\tau = 226$  ans (voir Tab. 8.1) mais le maximum pour la phase représentée Fig. 9.3 est atteint à une période de forçage  $\tau_2 \approx 2900$  ans (pour un modèle incompressible,  $\tau_2$  est diminué d'environ 10%). Ce temps caractéristique est aussi celui auquel a lieu le passage du régime élastique au régime visqueux pour l'amplitude. Pour le modèle de Burgers (Fig. 9.4), la phase atteint également un maximum local à une période similaire au  $\tau_2$  du modèle de Maxwell mais on observe, en outre, un second maximum local de moindre amplitude à plus courte période (proche de 50 ans), lié à l'élément de Kelvin-Voigt.

Les résultats sont donnés ici pour le degré  $\ell = 2$  mais la discussion précédente s'applique en grande partie quand  $\ell > 2$ , notamment en ce qui concerne l'existence de valeurs limites aux fréquences de forçage extrêmes (bien que ces valeurs soient différentes pour des degrés différents) et les variations de la phase aux fréquences intermédiaires. Les variations des paramètres rhéologiques, ont pour effet principal de modifier les temps caractéristiques, tout en faisant va-

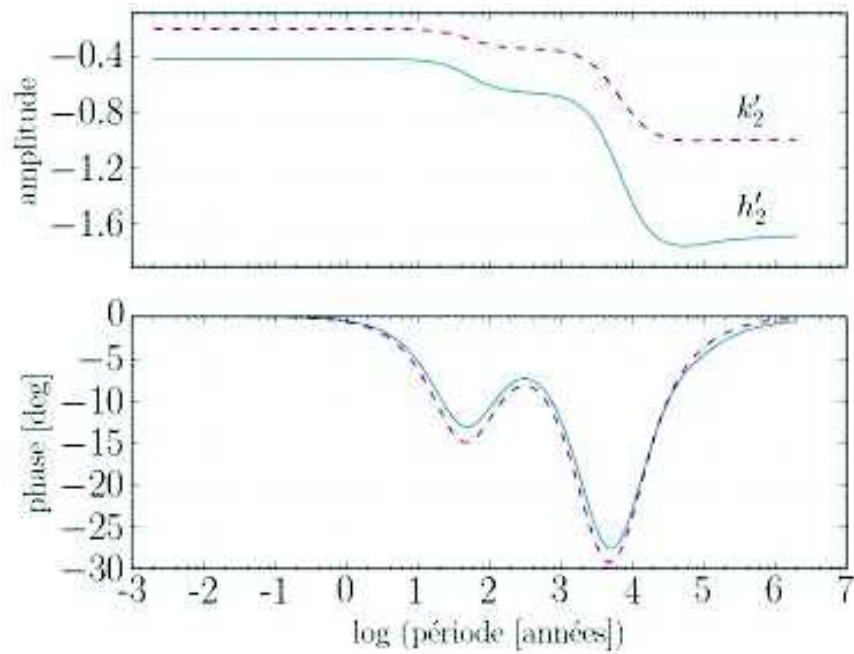


FIGURE 9.2 – Amplitude et phase des nombres de Love  $h'_2$  (trait plein) et  $k'_2$  pour la rhéologie de Burgers, en fonction de la fréquence de forçage. Les valeurs des paramètres rhéologiques sont ceux du Tab. 8.2.

rier la largeur du domaine viscoélastique (défini ici comme le domaine entre le régime purement élastique et le régime visqueux). Pour le modèle de Maxwell, une multiplication de  $\eta_1$  par un facteur supérieur (resp. inférieur) à l'unité induit un décalage vers les longues (resp. courtes) périodes du domaine viscoélastique, tout en élargissant (resp. diminuant) la bande de fréquence du même facteur. Un comportement similaire peut être observé en faisant varier  $\eta_2$  pour le modèle de Burgers.

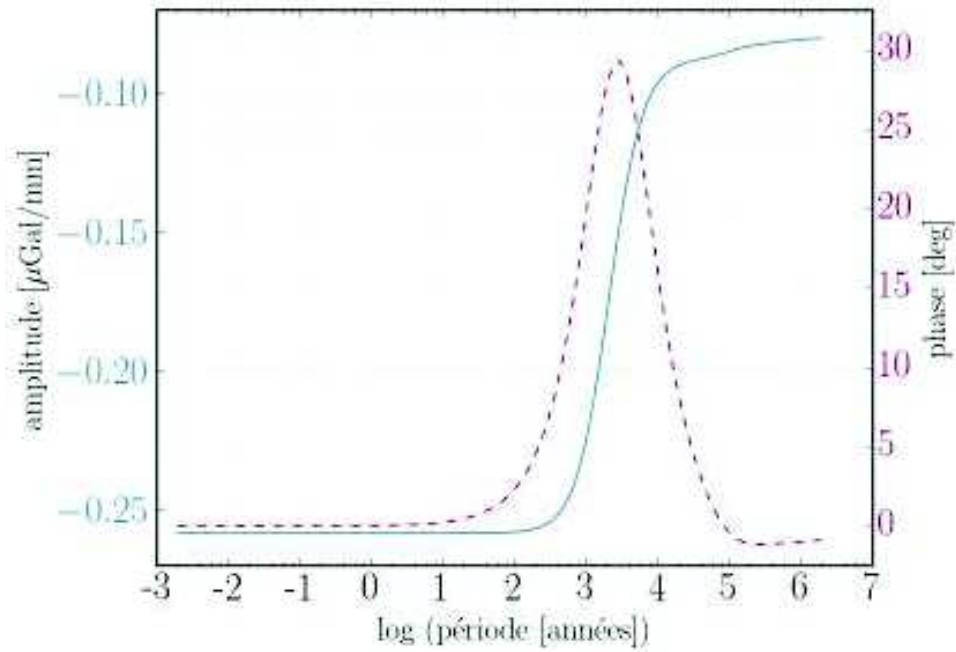


FIGURE 9.3 – Amplitude (en trait plein bleu, en  $\mu\text{Gal mm}^{-1}$ ) et phase (en pointillés rouges, en degrés) de  $\Delta g/\Delta u$  pour le degré  $\ell = 2$  et la rhéologie de Maxwell, en fonction de la fréquence de forçage. Les valeurs des paramètres rhéologiques sont ceux du Tab. 8.2.

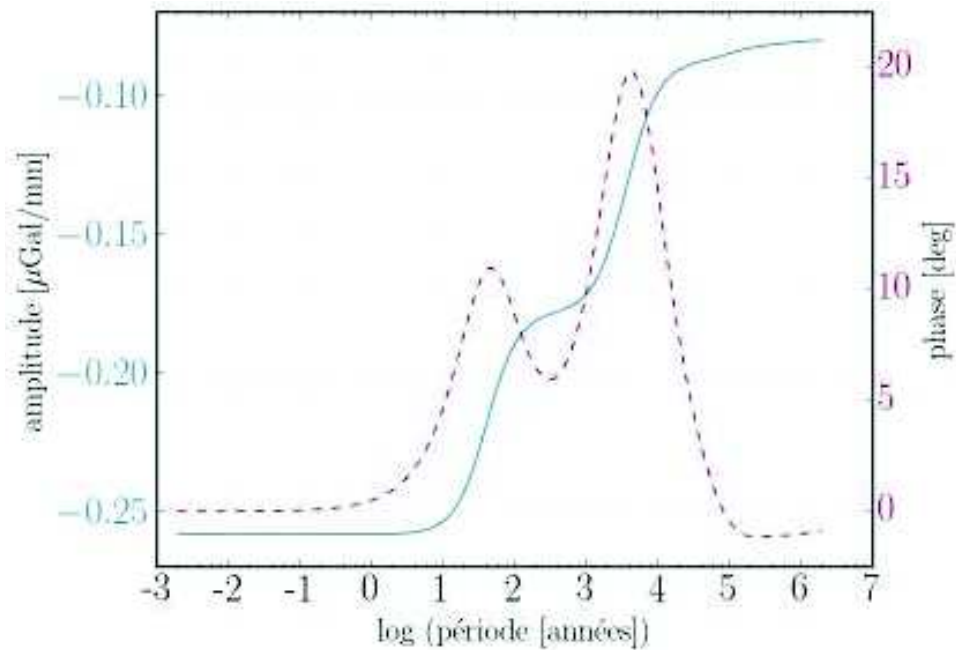


FIGURE 9.4 – Amplitude (en trait plein bleu, en  $\mu\text{Gal mm}^{-1}$ ) et phase (en pointillés rouges, en degrés) de  $\Delta g/\Delta u$  pour le degré  $\ell = 2$  et la rhéologie de Burgers, en fonction de la fréquence de forçage.

# Conclusion générale

*Faire un bout de chemin n'est pas la même chose que de se tromper de chemin.*

---

Proverbe chinois

En guise de conclusion, reprenons quelques uns des résultats essentiels établis dans les trois parties précédentes. Ce sera également l'occasion d'en faire la synthèse en insistant sur leurs aspects complémentaires.

Dans la Partie II, nous nous sommes concentrés sur le facteur gravimétrique pour le mouvement de Chandler. Le Chap. 4 fut l'occasion de discuter sa définition et son interprétation physique, en mettant l'accent sur l'origine et la signification de sa phase qui, à ma connaissance, est habituellement peu discutée dans la littérature. Le calcul du facteur gravimétrique au Chap. 5 constitue une part de travail importante de ce travail. La méthode de *stacking*, qui combine, après pondération, les séries gravimétriques de différentes stations, s'est révélée efficace pour diminuer l'influence des perturbations gravimétriques locales lors de la détermination du facteur gravimétrique. Nous avons vu également qu'il était possible de mettre à profit la durée des longues séries gravimétriques pour mieux estimer les incertitudes sur les valeurs d'amplitude et de phases estimées. Les écarts entre nos résultats et les études antérieures tendent toutefois à montrer que des progrès doivent encore être fait dans l'analyse des données. Nous avons notamment cité la difficulté d'une correction des sauts dans les séries temporels sans introduire de biais, le problème de la correction hydrologique locale et de la marée polaire dynamique ou encore, la question de la variabilité temporelle des signaux eux-mêmes qui n'est que partiellement considérée dans la détermination du facteur gravimétrique. À ce sujet, il serait intéressant à l'avenir de considérer d'autres techniques d'analyse, par exemple des méthodes d'inversion bayésiennes, afin d'améliorer encore davantage l'estimation des incertitudes et de mieux connaître l'influence des différentes corrections appliquées aux mesures.

Suite aux travaux précédents largement orientés vers le traitement de données, la Partie III a permis de s'intéresser au lien entre l'oscillation chandlerienne et l'anélasticité du manteau terrestre dans un cadre plus théorique. En revenant à un modèle planétaire des plus simples, la généralisation des travaux de Hough (1896) au Chap. 6 a montré que l'adaptation du problème des petites déformations d'une Terre en rotation du cas élastique au cas anélastique ne nécessitait pas de modifier la forme des équations, hormis le passage en domaine de Laplace et l'introduction de variables complexes, conformément au Principe de correspondance. Cette affirmation est valable à la condition que la dissipation soit faible. Dans le cas contraire, qui demeure improbable pour la Terre, certains termes négligés dans le cas élastiques pourraient cesser d'être négligeables

dans le cas anélastique. Notons cependant que le domaine de validité du Principe de correspondance lui-même a été questionné par certains auteurs et que les questions théoriques liées à l'anélasticité ne sont certainement pas toutes résolues (Ricard et al. 2014 ; Morozov 2015).

La Partie IV regroupe les résultats de la modélisation numérique d'une Terre homogène à partir des équations établies dans la partie précédente. Nous avons traité, au Chap. 8, de l'influence de l'anélasticité sur le mouvement de Chandler, au travers de différents modèles rhéologiques. Les calculs de la période et du facteur de qualité de Chandler, ainsi que de l'amplitude et de la phase du facteur gravimétrique, ont été l'occasion de mettre en évidence les différences existant entre modèles rhéologiques à la fréquence chandlérienne. En se concentrant sur le modèle de Burgers paramétré par deux rigidités et deux viscosités, nous avons pu montrer l'influence de chacun de ces paramètres rhéologiques et mis nos résultats en perspective avec les estimations actuelles. Pour les valeurs généralement retenues pour les viscosités  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , le modèle de Burgers permet notamment une variation importante du facteur de qualité du mode chandlérien sans induire une variation forte de la période. Dans le modèle de Burgers, la seconde rigidité  $\mu_2$  semble quant à elle à avoir une influence limitée sur les caractéristiques du mouvement de Chandler, tant que  $\eta_2$  n'est pas plus de deux ordres de grandeur inférieur à  $\eta_1$ . En lien avec les développements du Chap. 6 et pour en revenir aussi à la phase du facteur gravimétrique, le calcul des déphasages entre différentes fonctions propres a montré que l'influence de l'anélasticité sur les phases était probablement trop faible pour être clairement observée par une analyse de données gravimétriques et de données du mouvement du pôle telle que celle menée au Chap. 5. Les valeurs des phases ne sont en effet que de l'ordre de quelques dixièmes de degré.

En complément des travaux sur le mouvement de Chandler, le Chap. 9 a permis de mettre à profit le code de modélisation exploité au Chap. 8 et d'étudier l'influence de la fréquence sur la réponse d'un modèle planétaire homogène anélastique. Nous nous sommes concentrés sur le calcul des nombres de Love de charge et de  $\Delta g/\Delta u$ , le rapport entre la variation de gravité et le déplacement radial sous l'effet d'un forçage par une surcharge. Outre l'existence, déjà connue, de valeurs limites élastique et visqueuse pour ce rapport en fonction de la fréquence de forçage, nous avons montré que le déphasage entre la variation gravimétrique et le déplacement était maximal au(x) temps de relaxation caractéristique(s) pour le degré harmonique considéré et tendait à s'annuler aux très hautes et très basses fréquences, en régime élastique et visqueux respectivement.

# Annexe

# Chandler wobble and frequency dependency of the ratio between gravity variation and vertical displacement for a simple Earth model with Maxwell or Burgers rheologies

Yann Ziegler · Yves Rogister · Jacques Hinderer · Séverine Rosat

Received: date / Accepted: date

**Abstract** To study the Earth global deformation at periods ranging from a few hours to a few thousand years, we consider a homogeneous compressible Earth model with either a Maxwell or a Burgers rheology. First, we compute, for the harmonic degree  $\ell = 2$ , the ratio between the gravity variation and the vertical surface displacement due to surface loading as a function of the forcing period. In the elastic domain, up to the relaxation time of the rheological model, which is 226 years, the ratio is almost constant and equal to  $-0.26 \mu\text{Gal}/\text{mm}$ . In the viscoelastic domain, above 10000 years, the ratio tends to  $-0.08 \mu\text{Gal}/\text{mm}$ . In between, the transition is smooth. Second, we compute the period  $T_{\text{CW}}$  and quality factor  $Q_{\text{anel}}$  of the Chandler wobble as a function of the rheological parameters of a Burgers model. The influence of both the steady-state and transient viscosities on  $T_{\text{CW}}$  and  $Q_{\text{anel}}$  is significant only for viscosity values smaller than what can usually be found in the literature for the mantle viscosities.

## 1 Introduction

From the propagation of seismic waves to large-scale convection, through Glacial Isostatic Adjustment (GIA), the geophysical processes occurring in the Earth's mantle are extremely diverse. Their modelling relies on linear constitutive equations between stress and strain that describe the rheological behaviour of the Earth's

materials. To explain the observations of mantle deformation over a broad range of timescales, different constitutive equations must be assumed at different timescales. In the seismic band, between one second and one hour, the mantle exhibits an elastic behaviour with a slight anelastic dissipation. At timescales of several thousands of years, it viscoelastically deforms, while it convects as a viscous fluid over millions of years. The stress-strain relation that makes a model agree with the observations is generally not unique. In that case, the simplest constitutive equation is used. In the gap between the seismic band and the GIA timescale, specific deformations and observational data are sparse. Post-seismic deformation, periodic solid Earth tides, polar motions driven by seasonal motions in the ocean and atmosphere and the Chandler wobble (CW) belong to this small set of deformations. Therefore, the rheology of the mantle is not clearly understood and the rheological parameters are not well known in that window of timescales. Although the Burgers model can describe at once elastic deformations, transient deformations and viscous flows, its use to account for the mantle rheology is subject to many questions [23].

The Earth response to the melting of glaciers contains both an instantaneous elastic rebound and a long-term viscoelastic rebound. So, the present-day ice melting (PDIM) is accompanied by an elastic response and the Pleistocene deglaciation has been followed by an isostatic adjustment that involves the rise of deep mantle materials. It is common to separate these two components at a fixed location subject to both phenomena by estimating the ratio  $\Delta g/\Delta u$  between the gravity variation  $\Delta g$  and the vertical displacement  $\Delta u$  [14, 16, 15]. Its value ranges from  $-0.26 \mu\text{Gal}/\text{mm}$  [14] for the elastic deformation, and, including the direct Newtonian attraction of the load, to  $-0.15 \mu\text{Gal}/\text{mm}$  for the

---

Y. Ziegler · J. Hinderer · S. Rosat  
IPGS/EOST, Université de Strasbourg/CNRS  
5 rue René Descartes, 67084 STRASBOURG Cedex, France.  
E-mail: yann.ziegler@unistra.fr

Y. Rogister  
EOST, Université de Strasbourg

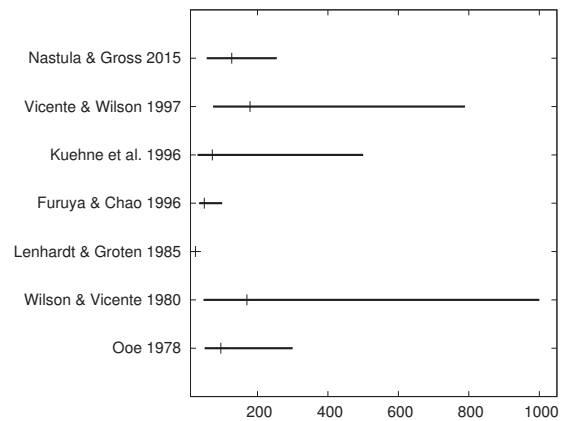
viscoelastic deformation [34]. In between, it is poorly known.

A clue on the rheological properties of the mantle at the yearly timescale can be searched for in the attenuation of the CW, which is a rotational eigenmode with a period approximately 435 days [1, 17, 31]. Except if the CW interacts with the spectrum of the liquid outer core, in which case it would be accompanied by oscillations in the core, its eigendisplacement is largely dominant in the mantle [27]. The CW attenuation is quantified by the quality factor  $Q_{\text{CW}}$  whose observational estimates are shown in Fig. 1. Because the contribution from various possible physical mechanisms to the excitation of the free CW is not exactly known, although pressure variations at the bottom of the oceans might be dominant [5], the determination of  $Q_{\text{CW}}$  is a complicated task that results in wide ranges of values. The length of the analyzed polar motion time series is also critical in evaluating the period and quality factor of the CW [6]. Although the quality factor encompasses various dissipative processes, its accurate estimate would help in better understanding mantle dissipation. There is, however, no accurate model of mantle anelasticity at the CW frequency [6].

In this paper, we consider a homogeneous rotating Earth model with either a Maxwell or a Burgers rheology. We study the influence of the rheology on  $\Delta g/\Delta u$  at different timescales and on the CW. The paper is organized as follows. In Section 2, we describe the modelling of the dynamics of the Earth model, which is based on the local equations of conservation of linear momentum. We introduce the rheological models and the correspondence principle, which allows for the definition of complex rheological parameters. In Section 3, we introduce the load Love numbers and compute  $\Delta g/\Delta u$  as a function of the period of the surface loading that deforms a model with either a Maxwell or a Burgers rheology. Section 4 is devoted to the computation of the period and quality factor of the CW of a model with a Burgers rheology. We conclude in Section 5.

## 2 Modelling of Earth dynamics and rheological models

We use the linear momentum approach developed by [30] and improved by [29], [25], [26] and [8] to model the dynamics of a rotating, elliptical, self-gravitating Earth model. In this approach, the displacement field of a rotational mode is described by a series of spheroidal displacements  $\sigma$  and toroidal displacements  $\tau$  accord-



**Fig. 1** Observational estimates of the CW quality factor  $Q_{\text{CW}}$  with their uncertainties.

ing to the following rule:

$$\mathbf{s} = \sum_{\ell=1,3,5,\dots}^{\infty} (\boldsymbol{\tau}_{\ell}^m + \boldsymbol{\sigma}_{\ell+1}^m) \quad (1)$$

where  $\ell$  is the harmonic degree and  $m = \pm 1$ , the harmonic order. For the Chandler wobble,  $m = -1$ .

To solve numerically the equations of motion, the series (1) must be truncated after a finite number of terms. For the homogeneous solid Earth models we will consider in the next two sections, we may safely assume that a two-term truncature is accurate enough ([7]). This leaves us with a set of ordinary differential equations of the eighth order over radius. Longer coupling chains are however required to describe the rotational modes of Earth models that include a liquid outer core and a solid inner core [27, 2, 24]. Rotation and ellipticity are necessary for the CW to exist, but they will be consistently neglected for the loading computation in Section 3.

Linear viscoelasticity or anelasticity can be included in the strain-stress relationship by invoking the correspondence principle [10], which states that in the Laplace domain the linear viscoelastic and anelastic constitutive equations take the same form as an isotropic linearly elastic constitutive equation, the Lamé elastic parameters being simply replaced by complex parameters whose imaginary parts contain the anelastic or viscous parameters.

If we denote by  $T_{ij}$  a Cartesian component ( $i$  and  $j = 1, 2$  or  $3$ ) of the stress tensor,  $e_{ij}$  a Cartesian component of the strain tensor,  $\delta_{ij}$  the Kronecker symbol,  $\lambda_0$  and  $\mu_0$  the first and second Lamé parameters, respectively, and  $\eta_0$  the viscosity, the Maxwell constitutive



stress-strain relation writes [22]

$$\frac{d}{dt}T_{ij} + \frac{\mu_0}{\eta_0} \left( T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 T_{kk} \right) = 2\mu_0 \frac{d}{dt}e_{ij} + \lambda_0 \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dt}e_{kk} \quad (2)$$

The Maxwell model can be thought of as a spring in series with a dashpot. The Laplace transform of Eq. (2) is

$$T'_{ij} = \lambda_M \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 e'_{kk} + 2\mu_M e'_{ij} \quad (3)$$

where the prime denotes the Laplace transform,  $s = i\omega$  is the Laplace variable,  $\omega$  is the complex frequency,

$$\lambda_M(s) = \frac{s\lambda_0 + \frac{\mu_0}{\eta_0}(\lambda_0 + 2\mu_0/3)}{s + \frac{\mu_0}{\eta_0}} \quad (4)$$

$$\mu_M(s) = \mu_0 s \tau_M (1 + s\tau_M)^{-1} \quad (5)$$

and

$$\tau_M = \frac{\eta_0}{\mu_0}. \quad (6)$$

Eq. (3) looks like an isotropic linearly elastic constitutive relation. This is the correspondence principle.

The Burgers constitutive stress-strain relation is [22]

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2}T_{ij} + \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{\eta_2} + \frac{\mu_1}{\eta_1} \right) \left( \frac{d}{dt}T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dt}T_{kk} \right) \\ & + \frac{\mu_1 \mu_2}{\eta_1 \eta_2} \left( T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 T_{kk} \right) \\ & = 2\mu_1 \frac{d^2}{dt^2}e_{ij} + \lambda_1 \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{d^2}{dt^2}e_{kk} \\ & + \frac{2\mu_1 \mu_2}{\eta_2} \left( \frac{d}{dt}e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dt}e_{kk} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

The spring-and-dashpot analogy for the Burgers model is a spring and a dashpot in parallel, both in series with a Maxwell element. The spring and the dashpot in parallel made up a Kelvin element. Eq. (7) therefore involves two viscosities  $\eta_1$  and  $\eta_2$  and two rigidities  $\mu_1$  and  $\mu_2$ . Subscript 1 (respectively 2) refers to the rigidity and viscosity of the Maxwell (resp. Kelvin) element. As mentioned in Section 1, the Burgers model can describe at once elastic deformations, transient deformations and viscous flows. The Maxwell model, however, can only describe elastic deformations and viscous flows. The Laplace transform of Eq. (7) provides an equation of the same form as Eq. (3) where  $\lambda_M$  and

$\mu_M$  have to be replaced, respectively, by  $\lambda_B$  and  $\mu_B$  defined by

$$\lambda_B(s) = \lambda_1 + \frac{2}{3} [\mu_1 - \mu_B(s)], \quad (8)$$

where

$$\mu_B(s) = \mu_1 s (s + \mu_2/\eta_2) \left[ s^2 + \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{\eta_2} + \frac{\mu_1}{\eta_1} \right) s + \frac{\mu_1 \mu_2}{\eta_1 \eta_2} \right]^{-1}. \quad (9)$$

The numerical values for the elastic and viscous parameters of a homogeneous model of density  $\rho_0 = 5515 \text{ kg/m}^3$  are given in Table 1 for both the Maxwell and Burgers rheologies.

**Table 1** Rheological parameters of a homogeneous Earth model. The parameters  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  and  $\mu_2$  are mean values of the first and second Lamé parameters of the PREM model [3]. The value for viscosity  $\eta_1$  has been adopted by [22], [34] or [18]. In the rheology column, B and M stand for Burgers and Maxwell, respectively.

Rheology	Parameter	Value
B and M	$\lambda_0$	$3.5 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
B and M	$\mu_0$ (M) or $\mu_1$ (B)	$1.4 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
B	$\mu_2$	$1.4 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
B and M	$\eta_0$ (M) or $\eta_1$ (B)	$10^{21} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
B	$\eta_2$	$5 \cdot 10^{19} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

### 3 $\Delta g/\Delta u$ due to surface loading

In this section, we consider the Maxwell and Burgers rheologies and numerically compute the load Love numbers and  $\Delta g/\Delta u$  for forcing periods ranging from 0.1 yr up to 10 Myr. At periods longer than a few hours, no resonance is to be expected with the seismic spectrum of the model. We neglect the rotation and elliptical shape of the Earth, which have a small influence, of order 1/300, on the deformation. Therefore, the toroidal and spheroidal displacements decouple and the equations of motion do not explicitly depend on  $m$ . The loading potential, however, possibly depends on  $m$ . The frequency of the forced motion being known, we only have to compute the displacement scalars and the Eulerian variation  $\phi_{1\ell}$  of the gravity potential. We denote the loading potential of harmonic degree  $\ell$  by

$$\chi_\ell = \frac{3g_0}{2\ell + 1} \frac{\Sigma_\ell}{\rho_0} \quad (10)$$

where  $\rho_0$  and  $g_0$  are the density and the gravity, respectively, at the Earth surface and  $\Sigma_\ell$  is the degree- $\ell$  component of the surface mass density of the loading.

The load Love numbers  $h'_\ell$  and  $k'_\ell$  and the load Shida number  $l'_\ell$  are then given by [17]

$$h'_\ell = g_0 \frac{U_\ell}{\chi_\ell}, k'_\ell = \frac{\phi_{1\ell}}{\chi_\ell} - 1 \text{ and } l'_\ell = g_0 \frac{V_\ell}{\chi_\ell} \quad (11)$$

where  $U_\ell$  and  $V_\ell$  are the degree- $\ell$  components of the spheroidal displacement scalars,  $U_\ell$  being the radial displacement.

Outside the load, the ratio between the gravity variation measured by a gravimeter moving with the ground and the vertical displacement of the ground is [14]

$$\frac{\Delta g}{\Delta u} = -\frac{2g_0}{a} \left( 1 - \frac{1}{4h'_\ell} - \frac{\ell + 1}{2} \frac{k'_\ell}{h'_\ell} \right), \quad (12)$$

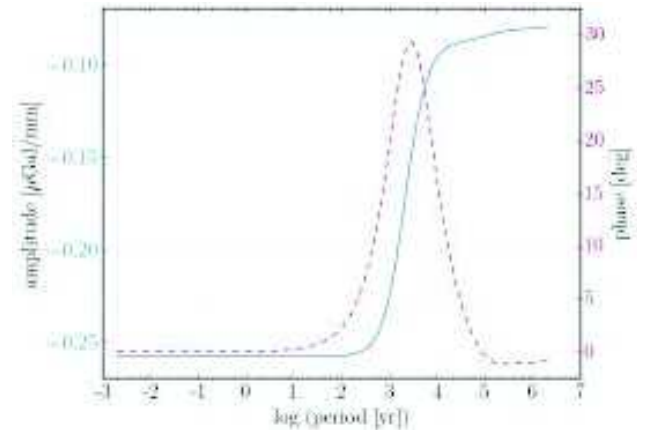
where  $a$  is the Earth radius. The ratio given by Eq. (12) obviously depends on  $\ell$ . Above or below the load, the ratio  $\Delta g/\Delta u$  is slightly different from Eq. (12) [14]. To avoid the unnecessary complication of having to consider two different ratios at a single location, we will only consider locations outside the load.

To compute the Love numbers, we solve the system of ordinary differential equations over radius obtained by separating the equations of motion, which are partial differential equations, in polar spherical coordinates using spherical harmonics. We can either run solvers that handle complex numbers or double the order, equal to 6, of the system of the real elastic ordinary differential equations. We have opted for the second alternative.

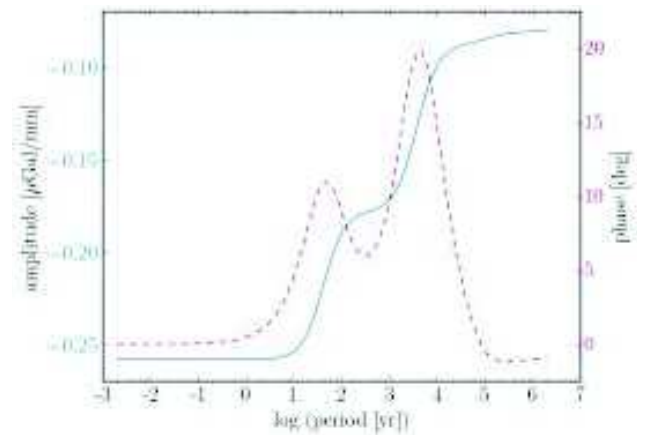
The amplitude and phase of  $\Delta g/\Delta u$  are plotted for  $\ell = 2$  in Fig. 2.

For a given harmonic degree, the relaxation time differs from the Maxwell time [12], the latter being given by Eq. (6) and close to 200 years for the rheological parameters given in Table 1. The change from the elastic to the viscous regime occurs at the forcing period of 3 000 years, which is the value at which the phase reaches its maximum. For shorter periods, the deformation is elastic and the amplitude of  $\Delta g/\Delta u$  is equal to  $-0.26 \mu\text{Gal}/\text{mm}$ . It increases to  $-0.08 \mu\text{Gal}/\text{mm}$  in the viscous regime, at longer periods. The phase characterizes the phase delay between the gravity perturbation and the radial displacement. Fig. 2 shows that it tends to zero at both high and low periods, which means that anelastic influence on the phase delay is more significant in the vicinity of the viscoelastic domain, between the elastic and viscous regimes.

Similar trends at the lowest and largest periods are observed for the Burgers rheology (Fig. 3) with the exception of an additional smaller relaxation time at intermediate periods, due to the Kelvin element. Another difference is the absolute maximum value of the phase which is smaller, close to 20 degrees, whereas the elastic and viscous limits remain the same.



**Fig. 2**  $\Delta g/\Delta u$  amplitude (blue line) and phase (red dashed line) for harmonic degree  $\ell = 2$  as a function of the forcing period for the Maxwell rheology.

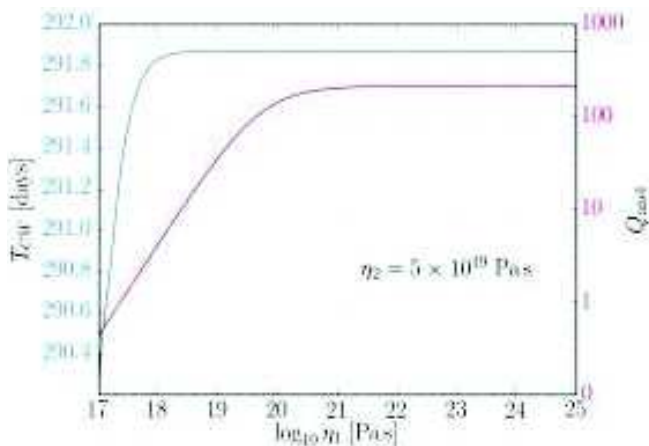


**Fig. 3** Same as Fig. 2 for the Burgers rheology.

We therefore obtain a continuous transition between the short-term elastic regime and the long-term fluid regime. As expected, the rheological models and their parameters, in particular the viscosity of the mantle, are decisive in the timescales at which this change occurs but, for a given harmonic degree, do not affect the size of the viscoelastic domain. For  $\ell = 2$ , whatever the viscosity, the width of the viscoelastic domain always covers two or three orders of magnitude – roughly between 100 and 10 000 years for the Maxwell rheology and between 10 and 10 000 years for the Burgers rheology.

#### 4 Chandler wobble attenuation

In this section, we compute the complex eigenfrequency  $\omega_{\text{CW}}$  of the CW of a homogeneous model with the Burgers rheology. The quality factor  $Q_{\text{anel}}$  of the mode is



**Fig. 4** Period  $T_{CW}$  (blue) and quality factor  $Q_{anel}$  (red) as a function of steady-state viscosity  $\eta_1$  for  $\mu_1 = \mu_2$ .

directly related to the imaginary part of  $\omega_{CW}$  by

$$\omega_{CW} = (\omega_0 + \delta\omega) \left( 1 + i \frac{1}{2Q_{anel}} \right), \quad (13)$$

where  $\omega_0$  is the CW frequency of the elastic homogeneous model which has the same density and elastic parameters as our homogeneous dissipative model, and  $\delta\omega$  is the variation due to the mantle anelasticity. For the Earth, mantle anelasticity is only one dissipation mechanism among others. But for our simple model, it is the only dissipation mechanism. So we denote the quality factor due to mantle anelasticity by  $Q_{anel}$  to distinguish it from the total quality factor  $Q_{CW}$ . After the CW has been excited and in the absence of any subsequent excitation, its amplitude  $A(t)$  exponentially decays with an attenuation rate  $\alpha$  given by

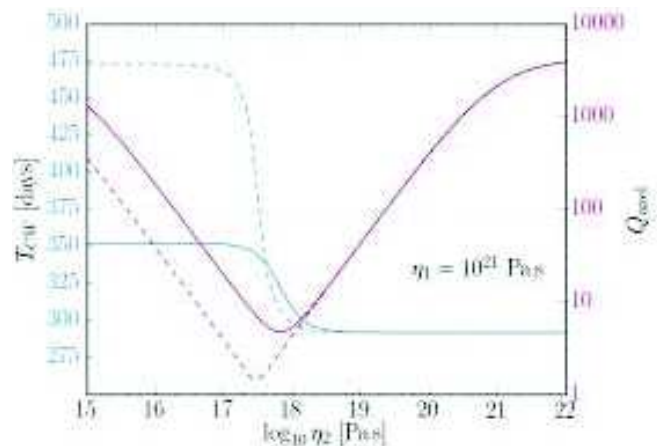
$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_{anel}} \quad (14)$$

such that

$$A(t) = A_0 e^{-\alpha t}. \quad (15)$$

We only consider the Burgers rheology because the Maxwell rheology is most probably not suited to represent the rheological behaviour of the Earth at the yearly timescale.

In Figs 4 and 5, we plot  $T_{CW} = 2\pi/(\omega_0 + \delta\omega)$  and  $Q_{anel}$  as a function of the steady-state and transient viscosities  $\eta_1$  and  $\eta_2$ , respectively. First, we allow  $\eta_1$  to vary between  $10^{17}$  and  $10^{25}$  Pa·s while  $\eta_2$  is kept fixed and equal to  $5 \cdot 10^{19}$  Pa·s. Next, we allow  $\eta_2$  to vary between  $10^{15}$  and  $10^{22}$  Pa·s while  $\eta_1$  is kept fixed and equal to  $10^{21}$  Pa·s.  $\lambda_0$  is given in Table 1 and we first assume that  $\mu_1$  and  $\mu_2$  are equal and take the value of Table 1. The CW period  $2\pi/\omega_0$  of the corresponding



**Fig. 5** Period  $T_{CW}$  (blue) and quality factor  $Q_{anel}$  (red) as a function of transient viscosity  $\eta_2$  for  $\mu_1 = \mu_2$  (solid lines) and  $\mu_1 = 3\mu_2$  (dashed lines).

elastic model is 291.9 days, which is the elastic limit reached by  $T_{CW}$  when the viscosities become large.

$\eta_1$  has only a small influence on  $T_{CW}$  when it is smaller than  $5 \cdot 10^{18}$  Pa·s, which is unlikely if the mantle rheology has to be modeled by a Burgers' law. On the contrary, the influence of  $\eta_1$  on  $Q_{anel}$  is significant, in particular when  $\eta_1$  is smaller than  $5 \cdot 10^{20}$  Pa·s. Above this value,  $Q_{anel}$  is almost constant and equal to 200, which corresponds to a relaxation time of 320 years. For the lower  $Q_{CW}$  value of 56 provided by [19],  $\eta_1$  should be greater than  $2 \cdot 10^{19}$  Pa·s, which is consistent with viscosity estimates from GIA studies [21]. The upper  $Q_{CW}$  value of 255 obtained by [19] is, however, never reached by our modeled  $Q_{anel}$  for a fixed  $\eta_2 = 5 \cdot 10^{19}$  Pa·s.

$\eta_2$  has a much stronger influence than  $\eta_1$  has on both  $T_{CW}$  and  $Q_{anel}$ .  $T_{CW}$ , which is almost constant and equal to 352 days when  $\eta_2$  is smaller than  $10^{17}$  Pa·s, decreases to 291.9 days for  $\eta_2$  larger than  $5 \cdot 10^{18}$  Pa·s. The shape of the plot of  $Q_{anel}$  as a function of  $\eta_2$  is reminiscent of Fig. 4 of [36], who computed the quality factors for seismic normal modes of a homogeneous Earth model whose rheology was that of a standard linear solid.  $Q_{anel}$  reaches a minimum value of 5 when  $\eta_2 = 7 \cdot 10^{17}$  Pa·s. That minimum would of course not be plausible for a realistic Earth model.

Let us now consider that  $\mu_1 \neq \mu_2$ . According to [28], [32], or [11],  $\mu_2$  might be 3 to 10 times smaller than  $\mu_1$ . We take  $\mu_1 = 3\mu_2$  and recompute  $T_{CW}$  and  $Q_{anel}$  as a function of  $\eta_1$  or  $\eta_2$  (Fig. 5). Their pattern look the same as when  $\mu_1 = \mu_2$  but, for  $\eta_2$  smaller than  $3 \cdot 10^{18}$  Pa·s,  $T_{CW}$  and  $Q_{anel}$  are, respectively, larger and smaller than in the case  $\mu_1 = \mu_2$ .  $\eta_2$  being smaller than  $3 \cdot 10^{18}$  Pa·s in the mantle is, however, not likely.

Of course, for a conclusive result be obtained about the mantle viscosity, a more realistic Earth model should be taken into account.

## 5 Conclusion

The rheological behaviour of the Earth is known to be almost elastic, with small energy dissipation, in the seismic frequency band and viscoelastic at the GIA timescale. Our intent has been to explore the sensitivity of Earth's global deformation to the rheological properties of the mantle at intermediate timescales. For homogeneous compressible Earth models, we have investigated, on the one hand, the dependence of the Chandler wobble period and quality factor on the elastic and viscous parameters of a Burgers rheological model and, on the other hand, the ratio between the gravity variation and the vertical surface displacement as a function of the timescale of a surface loading for the Maxwell and Burgers rheologies.

With regard to  $\Delta g/\Delta u$ , we showed that its amplitude tends toward two distinct values at low and high forcing periods, the long-period viscous limit being smaller in absolute value than the short-period elastic limit. For the Maxwell rheology, the phase reaches a maximum of  $30^\circ$  for the  $\ell = 2$  relaxation time, which is also the transition time for the amplitude, and is close to zero otherwise. For the Burgers rheology, the phase shows an absolute maximum of  $20^\circ$  for the  $\ell = 2$  relaxation time and a smaller relative maximum at the relaxation time of the Kelvin element.

The viscosities have an almost negligible influence on the CW period when they are of the same order of magnitude as the values found in the literature for the mantle viscosities. The same conclusion holds for the rigidity  $\mu_2$ , whose influence is only significant when  $\eta_2$  is smaller than  $3 \cdot 10^{18}$  Pa·s, which is much smaller than estimates of the viscosities of the mantle modelled as a Burgers body. The quality factor depends more strongly on  $\eta_2$  than the period does and the influence of  $\eta_1$  is non-negligible only for values of  $\eta_1$  smaller than  $10^{21}$  Pa·s.

Considering a realistic stratified Earth model is the obvious next step that should be done.

## References

- Chandler, S.C.: On the variation of latitude. *Astron. J.* **249**, 65–70 (1891)
- Crossley, D.J., Rochester, M.G.: A new description of Earth's wobble modes using Clairaut coordinates 2: results and inferences on the core mode spectrum. *Geophys. J. Int.* **198**(3), 1890–1905 (2014)
- Dziewonski, A.M., Anderson, D.L.: Preliminary reference Earth model. *Phys. Earth Planet. Inter.* **25**, 297–356 (1981)
- Furuya, M., Chao, B.F.: Estimation of period and Q of the Chandler wobble. *Geophys. J. Int.* **127**, 693–702 (1996)
- Gross, R.S.: The excitation of the Chandler wobble. *Geophys. Res. Lett.* **27**, 2329–2332 (2000)
- Gross, R.S.: Earth Rotation Variations – Long Period. In: T. Herring and G. Schubert (ed.) *Treatise on Geophysics*, vol. 3, pp. 239–294. Elsevier B.V. (2007)
- Hough, S.S.: The rotation of an elastic spheroid. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **189b**, 319–344 (1896)
- Huang, C.L., Liao, X.H.: Comment on Representation of the elastic-gravitational excitation of a spherical Earth model by generalized spherical harmonics by Phinney & Burridge. *Geophys. J. Int.* **155**(2), 669–678 (2003)
- Kuehne, J., Wilson, C.R., Johnson, S.: Estimates of the Chandler wobble frequency and Q. *J. Geophys. Res.* **101**(B6), 13,573–13,579 (1996)
- Lee, E.H.: Stress analysis in viscoelastic materials. *Quart. Appl. Math.* **3**(13), 183–190 (1955)
- Lefftz, M., Sabadini, R., Legros, H.: Mantle rheology, viscomagnetic coupling at the core-mantle boundary and differential rotation of the core induced by Pleistocene deglaciation. *Geophys. J. Int.* **117**, 1–18 (1994)
- Legros, H., Greff, M., Tokieda, T.: Physics Inside the Earth: Deformation and Rotation. In: Springer (ed.) *Dynamic of Extended Celestial Bodies and Rings* (2006)
- Lenhardt, H., Groten, E.: Chandler wobble parameters from BIH and ILS data. *Manuscr. Geod.* **10**(4), 296–305 (1985)
- de Linage, C., Hinderer, J., Rogister, Y.: A search for the ratio between gravity variation and vertical displacement due to a surface load. *Geophys. J. Int.* **171**, 986–994 (2007)
- Mémin, A., Rogister, Y., Hinderer, J.: Separation of the geodetic consequences of past and present ice-melting: Influence of topography with application to Svalbard (Norway). *Pure and applied Geophysics* **169**, 8, 1357–1372 (2012)
- Mémin, A., Rogister, Y., Hinderer, J., Omang, O.C., Luck, B.: Secular gravity variation at Svalbard (Norway) from ground observations and GRACE satellite data. *Geophys. J. Int.* **184**, 1119–1130 (2011)
- Munk, W.H., MacDonald, G.J.F.: *The rotation of the Earth: A geophysical discussion*. Cambridge: Cambridge University Press (1960)
- Nakada, M., Karato, S.i.: Low viscosity of the bottom of the Earth's mantle inferred from the analysis of Chandler wobble and tidal deformation. *Phys. Earth Planet. Inter.* **192–193**, 68–80 (2012)
- Nastula, J., Gross, R.: Chandler wobble parameters from SLR and GRACE. *J. Geophys. Res.: Solid Earth* **120**(6), 4474–4483 (2015)
- Ooe, M.: An optimal complex AR.MA model of the Chandler wobble. *Geophys. J. R. astr. Soc.* **53**, 445–451 (1978)
- Paulson A. Zhong S., W.J.: Limitations on the inversion for mantle viscosity from postglacial rebound. *Geophys. J. Int.* **168**, 1195–1209 (2007)
- Peltier, W., Wu, P., Yuen, A.: The viscosities of the Earth's mantle. In: *Anelasticity in the Earth*, pp. 59–77 (1981)
- Ranalli, G.: *Rheology of the Earth*, 2 edn. London : Chapman and Hall. (1995)

24. Rochester, M.G., Crossley, D.J., Zhang, Y.L.: A new description of Earth's wobble modes using Clairaut coordinates: 1. Theory. *Geophys. J. Int.* **198**(3), 1848–1877 (2014)
25. Rogister, Y.: On the diurnal and nearly diurnal free modes of the Earth. *Geophys. J. Int.* **144**(2), 459–470 (2001)
26. Rogister, Y.: Splitting of seismic-free oscillations and of the Slichter triplet using the normal mode theory of a rotating, ellipsoidal earth. *Phys. Earth Planet. Inter.* **140**(1-3), 169–182 (2003)
27. Rogister, Y., Valette, B.: Influence of liquid core dynamics on rotational modes. *Geophys. J. Int.* **176**(2), 368–388 (2009)
28. Sabadini, R.: The effects of transient rheology on the interpretation of lower mantle viscosity. *Geophys. Res. Lett.* **12**(6), 362–364 (1985)
29. Schastok, J.: A new nutation series for a more realistic model earth. *Geophys. J. Int.* **130**(1), 137–150 (1997)
30. Smith, M.L.: The scalar equations of infinitesimal elastic-gravitational motion for a rotating, slightly elliptical Earth. *Geophys. J. Int.* **37**(3), 491–526 (1974)
31. Smith, M.L., Dahlen, F.A.: The period and Q of the Chandler wobble. *Geophys. J. R. astr. Soc.* **64**, 223–281 (1981)
32. Trubienko, O., Fleitout, L., Garaud, J.D., Vigny, C.: Interpretation of interseismic deformations and the seismic cycle associated with large subduction earthquakes. *Tectonophysics* **589**, 126–141 (2013)
33. Vicente, R.O., Wilson, C.R.: On the variability of the Chandler frequency. *J. Geophys. Res.* **102**(B9), 20,439 (1997)
34. Wahr, J.M., DaZhong, H., Trupin, A.: Predictions of vertical uplift caused by changing polar ice volumes on a viscoelastic earth. *Geophys. Res. Lett.* **22**, 977–980 (1995)
35. Wilson, C.R., Vicente, R.O.: An analysis of the homogeneous ILS polar motion series. *Geophys. J. R. astr. Soc.* **62**, 605–616 (1980)
36. Yuen, D.A., Peltier, W.: Normal modes of the viscoelastic earth. *Geophys. J. R. astr. Soc.* **69**, 495–526 (1982)

# Bibliographie

- Abramowitz, Milton et Stegun, Irene Ann (1964). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Sous la dir. d'Abramowitz, Milton et Stegun, Irene A. 10<sup>e</sup> éd. United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, p. 1046. ISBN : 0-486-61272-4 (cf. p. 117).
- Agnew, Duncan Carr (2007). “3.06 Earth Tides”. In : *Treatise on Geophysics*. Sous la dir. d'Elsevier Science, p. 163–195 (cf. p. 58).
- (2012). *SPOTL : Some Programs for Ocean-Tide Loading*. Rapp. tech. UC San Diego : Scripps Institution of Oceanography, p. 45 (cf. p. 70).
- Alemi, Alex et Stevenson, D. (2006). “Why Venus has No Moon”. In : *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #38*, p. 491 (cf. p. 15).
- Altamimi, Zuheir (2003). “The impact of a No-Net-Rotation Condition on ITRF2000”. In : *Geophys. Res. Lett.* 30.2, p. 1064. DOI : 10.1029/2002GL016279 (cf. p. 106).
- Aoyama, Yuichi, Naito, Isao, Iwabuchi, Tetsuya et Yamazaki, Nobuo (2003). “Atmospheric quasi-14 month fluctuation and excitation of the Chandler wobble”. In : *Earth Planets Space* 55, p. 25–28 (cf. p. 1, 19).
- Appel, Walter (2008). *Mathématiques pour la physique et les physiciens !* 4e édition. H&K. ISBN : 2351410394 (cf. p. 131).
- Astronomical Applications Department of the U.S. Naval Observatory (2013). *International Celestial Reference System (ICRS)*. URL : [http://aa.usno.navy.mil/faq/docs/ICRS%7B%5C\\_%7Ddoc.php](http://aa.usno.navy.mil/faq/docs/ICRS%7B%5C_%7Ddoc.php) (visité le 22/01/2016) (cf. p. 24).
- Backus, George E. (1967). “Converting Vector and Tensor Equations to Scalar Equations in Spherical Coordinates”. In : *Geophys. J. Int.* 13.1-3, p. 71–101. DOI : 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02147.x (cf. p. 114).
- Bellanger, E., Le Mouél, Jean-Louis, Mandea, M. et Labrosse, S. (2001). “Chandler wobble and geomagnetic jerks”. In : *Phys. Earth Planet. In.* 124, p. 95–103. DOI : 10.1016/S0031-9201(01)00188-1 (cf. p. 20).
- Benjamin, David, Wahr, John M., Ray, Richard D., Egbert, Gary D. et Desai, Shailen D. (2006). “Constraints on mantle anelasticity from geodetic observations, and implications for the J2 anomaly”. In : *Geophys. J. Int.* 165.1, p. 3–16. DOI : 10.1111/j.1365-246X.2006.02915.x (cf. p. 2).
- BIPM (2006). *Le Système International d'unités*. Sous la dir. de BIPM. 8e édition, p. 186. ISBN : 92-822-2213-6 (cf. p. 26).
- Bizouard, Christian (2014). *Le mouvement du pôle de l'heure au siècle*. Presses Académiques Francophones, p. 284. ISBN : 978-3-8416-2792-6 (cf. p. 23, 34, 35).
- Bizouard, Christian, Remus, F., Lambert, Sébastien B., Seoane, L. et Gambis, D. (2011). “The Earth's variable Chandler wobble”. In : *Astron. Astrophys.* 526, A106. DOI : 10.1051/0004-6361/201015894 (cf. p. 1, 19).

- Bizouard, Christian et Seoane, L. (2010). "Atmospheric and oceanic forcing of the rapid polar motion". In : *J. Geodesy* 84, p. 19–30 (cf. p. 18).
- Bland, D. R. (1960). *The Theory of Linear Viscoelasticity*. Pergamon Press, Oxford (cf. p. 43).
- Boschi, Lapo, Tromp, Jeroen et O'Connell, Rrichard J. (1999). "On Maxwell singularities in postglacial rebound". In : *Geophys. J. Int.* 136, p. 492–498 (cf. p. 3, 147).
- Boué, Gwenaél et Laskar, Jacques (2010). "A Collisionless Scenario for Uranus Tilting". In : *The Astrophysical Journal* 712.1, p. L44–L47. DOI : 10.1088/2041-8205/712/1/L44 (cf. p. 15).
- Boy, Jean-Paul, Gégout, P. et Hinderer, Jacques (2002). "Reduction of surface gravity data from global atmospheric pressure loading". In : *Geophys. J. Int.* 149, p. 534–545 (cf. p. 69).
- Boy, Jean-Paul et Hinderer, Jacques (2006). "Study of the seasonal gravity signal in superconducting gravimeter data". In : *J. Geodyn.* 41.1-3, p. 227–233. DOI : 10.1016/j.jog.2005.08.035 (cf. p. 69).
- Boy, Jean-Paul, Hinderer, Jacques et Gégout, Pascal (1998). "Global atmospheric loading and gravity". In : *Phys. Earth Planet. In.* 109.3-4, p. 161–177. DOI : 10.1016/S0031-9201(98)00122-8 (cf. p. 51).
- Boy, Jean-Paul, Longuevergne, Laurent, Boudin, F., Jacob, Thomas, Lyard, F., Llubes, M., Florsch, Nicolas et Esnault, M.-F. (2009). "Modelling atmospheric and induced non-tidal oceanic loading contributions to surface gravity and tilt measurements". In : *J. Geodyn.* 48, p. 182–188 (cf. p. 70).
- Boy, Jean-Paul et Lyard, F. (2008). "High-frequency non-tidal ocean loading effects on surface gravity measurements". In : *Geophys. J. Int.* 175, p. 35–45 (cf. p. 69).
- Bromwich, Thomas John l'Anson (1899). "On the Influence of Gravity on Elastic Waves, and, in particular on the Vibrations of an Elastic Globe". In : *P. Lond. Math. Soc.* s1-30.1, p. 98–120. DOI : 10.1112/plms/s1-30.1.98 (cf. p. 102).
- Bryan, G. H. (1889). "The Waves on a Rotating Liquid Spheroid of Finite Ellipticity". In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 180, p. 187–219 (cf. p. 102).
- Brzeziński, Aleksander et Capitaine, Nicole (1993). "The Use of the Precise Observations of the Celestial Ephemeris Pole in the Analysis of Geophysical Excitation of Earth Rotation". In : *J. Geophys. R.* 98.B4, p. 6667–6675 (cf. p. 30, 33).
- Brzeziński, Aleksander et Nastula, Jolanta (2002). "Oceanic excitation of the Chandler Wobble". In : *Adv. Space Res.* 30.2, p. 195–200 (cf. p. 1, 19).
- Burridge, Robert (1969). "Spherically symmetric differential equations, the rotation group, and tensor spherical functions". In : *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 65.01, p. 157–175. DOI : 10.1017/S0305004100044170 (cf. p. 117).
- Calvo, Marta, Hinderer, Jacques, Rosat, Severine, Legros, Hilaire, Boy, Jean Paul, Ducarme, Bernard et Zürn, Walter (2014). "Time stability of spring and su-

- perconducting gravimeters through the analysis of very long gravity records”. In : *J. Geodyn.* 80, p. 20–33. DOI : 10.1016/j.jog.2014.04.009 (cf. p. 49).
- Campbell, William Wallace (1916). *Biographical Memoir Simon Newcomb* (cf. p. 90).
- Capitaine, Nicole, Guinot, B. et Souchay, J. (1986). “A non-rotating origin on the instantaneous equator : Definition, properties and use”. In : *Celestial mechanics* 39.3, p. 283–307 (cf. p. 28).
- Cartan, Élie (1924). “Sur la stabilité ordinaire des ellipsoïdes de Jacobi”. In : *Proceedings of the International Mathematical Congress held in Toronto, August 11-16*. Sous la dir. de Fields, J. C. T. 2. Toronto : The University of Toronto press, p. 9–18 (cf. p. 102).
- Cathles, Lawrence M. (1975). *The Viscosity of the Earth’s Mantle*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (cf. p. 146).
- Chambat, Frédéric, Benzoni-Gavage, Sylvie et Ricard, Yanick (2014). “Jump conditions and dynamic surface tension at permeable interfaces such as the inner core boundary”. In : *Comptes Rendus - Geoscience* 346.5-6, p. 110–118. DOI : 10.1016/j.crte.2014.04.006 (cf. p. 112).
- Chandler, S. C. (1891). “On the variation of latitude, II”. In : *The Astronomical Journal* 11, p. 65. DOI : 10.1086/101607 (cf. p. 19).
- Chao, Benjamin Fong et Chung, Wei-Yung (2012). “Amplitude and phase variations of Earth’s Chandler wobble under continual excitation”. In : *J. Geodyn.* 62, p. 35–39. DOI : 10.1016/j.jog.2011.11.009 (cf. p. 1, 20).
- Chao, Benjamin Fong et Hsieh, Y. (2015). “The Earth’s free core nutation : Formulation of dynamics and estimation of eigenperiod from the very-long-baseline interferometry data”. In : *Earth Planet. Sc. Lett.* 432, p. 483–492. DOI : 10.1016/j.epsl.2015.10.010 (cf. p. 22).
- Chen, Xiaodong, Kroner, Corinna, Sun, Heping, Abe, Maiko, Zhou, Jiangcun, Yan, Haoming et Wziontek, Hartmut (2009). “Determination of gravimetric parameters of the gravity pole tide using observations recorded with superconducting gravimeters”. In : *J. Geodyn.* 48.3-5, p. 348–353. DOI : 10.1016/j.jog.2009.09.020 (cf. p. 2).
- Clairaut, A. C. (1743). *Theorie de la figure de la terre, tiree des principes de l’hydrostatique*. chez David fils, libraire, rue Saint-Jacques, a la Plume d’or (cf. p. 107).
- Cornet, François Henry (2008). *Elements of Crustal Geomechanics*. Cambridge University Press (cf. p. 103).
- Crossley, David J., Hinderer, Jacques et Boy, Jean-Paul (2004). “Regional gravity variations in Europe from superconducting gravimeters”. In : *J. Geodyn.* 38.3-5, p. 325–342. DOI : 10.1016/j.jog.2004.07.014 (cf. p. 51).
- Crossley, David J., Hinderer, Jacques, Casula, G., Francis, O., Hsu, H.-T., Imanishi, Y., Jentzsch, G., Kääriäinen, J., Merriam, J. B., Meurers, B., Neumeyer, J., Richter, B., Shibuya, K., Sato, K. et Dam, T. van (1999). “Network of Superconducting Gravimeters Benefits a Number of Disciplines”. In : *EOS* 80.11, p. 121–132 (cf. p. 50, 66).



- Crossley, David J. et Rochester, Michael G. (2014). "A new description of Earth's wobble modes using Clairaut coordinates 2 : results and inferences on the core mode spectrum". In : *Geophys. J. Int.* 198.3, p. 1890–1905. DOI : 10.1093/gji/ggu232 (cf. p. 103).
- Cui, Xiaoming, Sun, Heping, Rosat, Séverine, Xu, Jianqiao, Zhou, Jiangcun et Ducarme, Bernard (2014). "Investigation of the time variability of diurnal tides and resonant FCN period". In : *J. Geodyn.* 79, p. 30–38. DOI : 10.1016/j.jog.2014.05.003 (cf. p. 22).
- Cummins, P., Wahr, John M., Agnew, Duncan Carr et Tamura, Y. (1991). "Constraining core undertones using stacked IDA gravity records". eng. In : *Geophys. J. Int.* 106.1, p. 189–198 (cf. p. 4, 71).
- Dahlen, F. A. (1968). "The Normal Modes of a Rotating, Elliptical Earth". In : *Geophys. J. Int.* 16.4, p. 329–367. DOI : 10.1111/j.1365-246X.1968.tb00229.x (cf. p. 107).
- Dahlen, F. A. et Tromp, Jeroen (1998). *Theoretical Global Seismology*. Sous la dir. de Princeton University Press. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, p. 1025 (cf. p. 42, 43, 103, 129–132).
- Defraigne, P., Dehant, Véronique et Hinderer, Jacques (1994). "Stacking gravity tide measurements and nutation observations in order to determine the complex eigenfrequency of the nearly diurnal free wobble". In : 99, p. 9203–9213 (cf. p. 57).
- Dehant, Véronique (1990). "On the nutations of a more realistic earth model". In : *Geophys. J. Int.* 100, p. 477–483 (cf. p. 17).
- Dehant, Véronique, Defraigne, P. et Wahr, John M. (1999). "Tides for a convective Earth". In : *J. Geophys. R.* 104, p. 1035–1058. DOI : 10.1029/1998JB900051 (cf. p. 58, 62, 177).
- Dehant, Véronique et Ducarme, Bernard (1987). "Comparison between the theoretical and observed tidal gravimetric factors". In : *Physics of The Earth and Planetary Interiors* 49, p. 192–212 (cf. p. 57, 58).
- Dehant, Véronique et Mathews, P. M. (2007). "3.10 Earth Rotation Variations". In : *Treatise on Geophysics*. Elsevier B.V., p. 295–349 (cf. p. 17, 22, 31, 32).
- Dehant, Véronique et Zschau, J. (1989). "The effect of mantle inelasticity on tidal gravity : a comparison between the spherical and the elliptical Earth model". In : *Geophysical Journal* 97, p. 549–555 (cf. p. 63).
- Desai, Shailen D. (2002). "Observing the pole tide with satellite altimetry". In : *J. Geophys. R.* 107.April, p. 1–13. DOI : 10.1029/2001JC001224 (cf. p. 50).
- Dickman, S. R. (1979). "Consequences of an Enhanced Pole Tide". In : *J. Geophys. R.* 84.B10, p. 5447–5456 (cf. p. 50).
- (1981). "Investigation of controversial polar motion features using homogeneous international latitude service data". In : *J. Geophys. R.* 86.B6, p. 4904–4912 (cf. p. 1, 18, 20).
- (1988). "The self-consistent dynamic pole tide in non-global oceans". In : *Geophys. J. R. astr. Soc.* 94.3, p. 519–543. DOI : 10.1111/j.1365-246X.1985.tb01356.x (cf. p. 50).

- Dickman, S. R. et Nam, Young S. (1998). "Constraints on Q at long periods from Earth's rotation". In : *Geophys. Res. Lett.* 25, p. 211. DOI : 10.1029/97GL03559 (cf. p. 2, 134).
- Doraiswamy, Deepak (2002). *The Origins of Rheology : A Short Historical Excursion*. Rapp. tech. 1, p. 9 (cf. p. 39).
- Dray, Tevian (1985). "The relationship between monopole harmonics and spin-weighted spherical harmonics". In : *Journal of Mathematical Physics* 26.5, p. 1030. DOI : 10.1063/1.526533 (cf. p. 116).
- Ducarme, Bernard, Venedikov, A. P., Arnos, J., Chen, X. D., Sun, HePing et Vieira, R. (2006). "Global analysis of the GGP superconducting gravimeters network for the estimation of the pole tide gravimetric amplitude factor". In : *J. Geodyn.* 41.1-3, p. 334–344. DOI : 10.1016/j.jog.2005.08.007 (cf. p. 2).
- Dziewonski, Adam M. et Anderson, Don L. (1981). "Preliminary reference Earth model". In : *Phys. Earth Planet. Inter.* 25, p. 297–356 (cf. p. 62, 94, 129).
- Farrell, W. E. (1972). "Deformation of the Earth by surface loads". In : *Rev. Geophys.* 10.3, p. 761–797. DOI : 10.1029/RG010i003p00761 (cf. p. 149).
- (1973). "Earth tides, ocean tides and tidal loading". In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 274.1239, p. 253–259 (cf. p. 50).
- Fernández, Laura I., Schuh, H., Schmidt, M. et Seitz, F. (2007). "Effects of inter-annual water storage variations on polar motion". In : *Geophys. J. Int.* 169.1, p. 12–18. DOI : 10.1111/j.1365-246X.2006.03304.x (cf. p. 18).
- Furuya, M. et Chao, Benjamin Fong (1996). "Estimation of period and Q of the Chandler wobble". In : *Geophys. J. Int.* 127, p. 693–702 (cf. p. 2).
- Gibert, Dominique, Holschneider, Matthias et Le Mouél, Jean-Louis (1998). "Wavelet analysis of the Chandler wobble". In : *J. Geophys. R.* 103, p. 27069–27089 (cf. p. 20).
- Gibert, Dominique et Le Mouél, Jean-Louis (2008). "Inversion of polar motion data : Chandler wobble, phase jumps, and geomagnetic jerks". In : *J. Geophys. R. : Solid Earth* 113, p. 1–8. DOI : 10.1029/2008JB005700 (cf. p. 20).
- Giuli, R.T. (1968a). "Gravitational Accretion of Small Masses Attracted from Large Distances as a Mechanism for Planetary Rotation". In : *Icarus* 9.1-3, p. 186–190. DOI : 10.1016/0019-1035(68)90012-2 (cf. p. 15).
- (1968b). "On the rotation of the Earth produced by gravitational accretion of particles". In : *Icarus* 8, p. 301–323. DOI : 10.1016/0019-1035(68)90082-1 (cf. p. 15).
- Gomes, R, Levison, H F, Tsiganis, K et Morbidelli, A (2005). "Origin of the cataclysmic Late Heavy Bombardment period of the terrestrial planets." In : *Nature* 435.7041, p. 466–9. DOI : 10.1038/nature03676 (cf. p. 15).
- Gross, Richard S. (2000). "The excitation of the Chandler wobble". In : *Geophys. Res. Lett.* 27.15, p. 2329–2332 (cf. p. 1, 19).
- (2007). "3.09 Earth Rotation Variations – Long Period". In : *Treatise on Geophysics*. Elsevier B.V., p. 239–294 (cf. p. 1, 18–21).

- Guo, Jun-Yi (2005). “A spectral search for the inner core wobble in Earth’s polar motion”. In : *J. Geophys. R.* 110.B10, B10402. DOI : 10.1029/2004JB003377 (cf. p. 22).
- Guo, Jun-Yi, Greiner-Mai, H., Ballani, L., Jochmann, H. et Shum, C. K. (2005). “On the double-peak spectrum of the Chandler wobble”. In : *J. Geodesy* 78.11-12, p. 654–659. DOI : 10.1007/s00190-004-0431-0 (cf. p. 19).
- Hairer, E., Norsett, S. P. et Wanner, G. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations in Nonstiff Problems*. 2nd. Springer-Verlag (cf. p. 128).
- Harris, A. W. (1977). “An analytical theory of planetary rotation rates”. In : *Icarus* 31, p. 168–174. DOI : 10.1016/0019-1035(77)90079-3 (cf. p. 15).
- Hinderer, Jacques, Crossley, David J. et Warburton, R. J. (2007). “Gravimetric Methods – Superconducting Gravity Meters”. In : *Treatise on Geophysics*. T. 3. Elsevier B.V., p. 66–115 (cf. p. 66).
- Hinderer, Jacques, Florsch, Nicolas, Mäkinen, J., Legros, Hilaire et Faller, J. E. (1991). “On the calibration of a superconducting gravimeter using absolute gravity measurements”. In : *Geophys. J. Int.* 106, p. 491–497 (cf. p. 49).
- Hough, S. S. (1896). “The Rotation of an Elastic Spheroid”. In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 187.January, p. 319–344. DOI : 10.1098/rsta.1896.0008 (cf. p. 4, 90, 92, 94, 96–99, 101, 102, 120, 139, 142, 155).
- Hu, X. G., Liu, L. T., Ducarme, Bernard, Xu, H. J. et Sun, HePing (2007). “Estimation of the pole tide gravimetric factor at the chandler period through wavelet filtering”. In : *Geophys. J. Int.* 169.3, p. 821–829. DOI : 10.1111/j.1365-246X.2007.03330.x (cf. p. 2).
- IERS (2016a). *IEST Data/Products/Tools*. URL : <http://www.iers.org/IERS/EN/DataProducts/data.html> (visité le 28/01/2016) (cf. p. 29).
- (2016b). *The International Celestial Reference System (ICRS)*. URL : <http://www.iers.org/IERS/EN/Science/ICRS/ICRS.html> (visité le 22/01/2016) (cf. p. 24).
- Jeffreys, Harold et Vicente, Raimundo O. (1957). “The Theory of Nutation and the Variation of Latitude”. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 117.2, p. 142–161 (cf. p. 103).
- J.Mohr, Peter, Newell, David B. et Taylor, Barry N. (2015). “CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants : 2014”. In : *arXiv :physics.atom-ph*, p. 1–11. arXiv : arXiv:1203.5425v1 (cf. p. 46).
- Kaplan, George H. (2005). “The IAU Resolutions on Astronomical Reference Systems, Time Scales, and Earth Rotation Models”. In : *U.S. Naval Observatory Circular* 179, p. 118. arXiv : 0602086v1 [arXiv:astro-ph] (cf. p. 23).
- Karato, Shun-Ichiro (2008). *Deformation of Earth Materials : An Introduction to the Rheology of Solid Earth*. Cambridge University Press (cf. p. 43, 146).
- Kreemer, Corné, Lavallée, David A., Blewitt, Geoffrey et Holt, William E. (2006). “On the stability of a geodetic no-net-rotation frame and its implication for the International Terrestrial Reference Frame”. In : *Geophys. Res. Lett.* 33.17, p. 1–5. DOI : 10.1029/2006GL027058 (cf. p. 106).

- Kuehne, John, Wilson, Clark R. et Johnson, Stuart (1996). "Estimates of the Chandler wobble frequency and Q". In : *J. Geophys. R.* 101.B6, p. 13, 573–13, 579 (cf. p. 2).
- Lambert, Sébastien B. et Dehant, Véronique (2007). "The Earth's core parameters as seen by the VLBI". In : *Astronomy and Astrophysics* 469.2, p. 777–781. DOI : 10.1051/0004-6361:20077392 (cf. p. 22).
- Lambert, Sébastien B., Rosat, Séverine, Cui, Xiaoming, Rogister, Yves et Bizouard, Christian (2012). "A Search for the Free Inner Core Nutation in VLBI Data". In : *IVS 2012 General Meeting Proceedings*, p. 370–374 (cf. p. 22).
- Landau, Lev et Lifshitz, Evgeny (1976). *Course of Theoretical Physics - Mechanics*. Third Edit. Butterworth-Heinemann, p. 180. ISBN : 978-0-7506-2896-9 (cf. p. 11).
- Ledoux, P. (1951). "The Nonradial Oscillations of Gaseous Stars and the Problem of Beta Canis Majoris." In : *The Astrophysical Journal* 114, p. 373. DOI : 10.1086/145477 (cf. p. 102).
- Lee, E. H. (1955). "Stress analysis in viscoelastic materials". In : *Quart. Appl. Math.* 3.13, p. 183–190 (cf. p. 42).
- Lefftz, Marianne, Sabadini, Roberto et Legros, Hilaire (1994). "Mantle rheology, viscomagnetic coupling at the core-mantle boundary and differential rotation of the core induced by Pleistocene deglaciation". In : *Geophys. J. Int.* 117, p. 1–18 (cf. p. 132, 137, 146).
- Legros, Hilaire, Greff, Marianne et Tokieda, Tadashi (2006). "Physics Inside the Earth : Deformation and Rotation". In : *Dynamic of Extended Celestial Bodies and Rings*. Sous la dir. de Springer (cf. p. 151, 152).
- Legros, Hilaire et Lefftz, Marianne (1993). "On the fluid and viscoelastic deformations of the planets". In : *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 57, p. 247–278 (cf. p. 146).
- Li, Xiong et Gotze, Hans-Jurgen (2001). "Ellipsoid, geoid, gravity, geodesy, and geophysics". In : *Geophysics* 66.6, p. 1660–1668 (cf. p. 47, 48).
- Linage, Caroline de, Hinderer, Jacques et Rogister, Yves (2007). "A search for the ratio between gravity variation and vertical displacement due to a surface load". In : *Geophys. J. Int.* 171.3, p. 986–994. DOI : 10.1111/j.1365-246X.2007.03613.x. arXiv : j.1365-246X.2007.03613.x [10.1111] (cf. p. 147, 148, 150).
- Lissauer, Jack J. et Kary, David M. (1991). "The Origin of the Systematic Component of Planetary Rotation". In : *Icarus* 94, p. 126–159 (cf. p. 15).
- Love, A. E. H. (1889). "XXVIII. On the oscillations of a rotating liquid spheroid and the genesis of the moon". In : *Philosophical Magazine Series 5* 27.166, p. 254–264. DOI : 10.1080/14786448908628345 (cf. p. 102).
- Loyer, Sylvain, Hinderer, Jacques et Boy, Jean-Paul (1999). "Determination of the gravimetric factor at the Chandler period from Earth orientation data and superconducting gravimetry observations". In : *Geophys. J. Int.* 136.1, p. 1–7. DOI : 10.1046/j.1365-246X.1999.00646.x (cf. p. 2).

- Malkin, Zinovy et Miller, Natalia (2010). “Chandler wobble : two more large phase jumps revealed”. In : *Earth Planets Space* 62.12, p. 943–947. DOI : 10.5047/eps.2010.11.002. arXiv : arXiv:0908.3732v1 (cf. p. 1, 20).
- Markowitz, W. (1960). “Latitude and Longitude, and the Secular Motion of the Pole”. In : *Methods and Techniques in Geophysics, Volume 1*. Sous la dir. de Runcorn, S. K., p. 325 (cf. p. 18).
- Mathews, P. M., Herring, Thomas A. et Buffett, Bruce A. (2002). “Modeling of nutation and precession : New nutation series for nonrigid Earth and insights into the Earth’s interior”. In : *J. Geophys. R.* 107.B4, p. 1–26. DOI : 10.1029/2001JB000390 (cf. p. 17, 22).
- Matsumoto, Koji, Sato, Tadahiro, Takanezawa, Takashi et Ooe, Masatsugu (2001). “GOTIC2 : A Program for Computation of Oceanic Tidal Loading Effect”. In : *Journal of the Geodetic Society of Japan* 47.1, p. 243–248. DOI : 10.11366/sokuchi1954.47.243 (cf. p. 70).
- Mémin, Anthony, Rogister, Yves, Hinderer, Jacques, Omang, O. C. et Luck, Bernard (2011). “Secular gravity variation at Svalbard (Norway) from ground observations and GRACE satellite data”. In : *Geophys. J. Int.* 184.3, p. 1119–1130. DOI : 10.1111/j.1365-246X.2010.04922.x (cf. p. 3, 5, 130, 147).
- Milbrath, Susan (2007). “Just How Precise is Maya Astronomy?” In : *Institute of Maya Studies Newsletter* 36.12 (cf. p. 16).
- Miller, Natalia et Malkin, Zinovy (2011). “Analysis of Polar Motion Variations from 170-year Observation Series”. In : *JENAM 2011, European Week of Astronomy and Space Science* (cf. p. 1, 18, 20).
- Minster, J. B. (1978). “Transient and impulse responses of a one-dimensional linearly attenuating medium — II. A parametric study”. In : *Geophys. J. R. astr. Soc.* 52, p. 503–524 (cf. p. 132).
- Mitrovica, Jerry X., Milne, Glenn A. et Davis, James L. (2001). “Glacial isostatic adjustment on a rotating earth”. In : *Geophys. J. Int.* 147, p. 562–578. DOI : 10.1046/j.1365-246x.2001.01550.x (cf. p. 3, 17, 130, 147).
- Morbidelli, A., Tsiganis, K., Batygin, K., Crida, A. et Gomes, R. (2012). “Explaining why the uranian satellites have equatorial prograde orbits despite the large planetary obliquity”. In : *Icarus* 219.2, p. 737–740. DOI : 10.1016/j.icarus.2012.03.025. arXiv : 1208.4685 (cf. p. 15).
- Morozov, Igor B. (2015). “On the relation between bulk and shear seismic dissipation”. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 105.6, p. 3180–3188. DOI : 10.1785/0120150093 (cf. p. 2, 129, 156).
- Müller, David E. (1956). “A Method for Solving Algebraic Equations Using an Automatic Computer”. In : *Mathematical Tables and Other Aids to Computation* 10.56, p. 208–215 (cf. p. 128).
- Munk, Walter H. et MacDonald, Gordon J. F. (1975). *The Rotation of the Earth : A Geophysical Discussion*. 2<sup>e</sup> éd. Cambridge University Press, p. 323. ISBN : 0521207789 (cf. p. 50).
- Nastula, Jolanta et Gross, Richard S. (2015). “Chandler wobble parameters from SLR and GRACE”. In : *J. Geophys. R. : Solid Earth* 120.6, p. 4474–4483. DOI : 10.1002/2014JB011825 (cf. p. 1, 2, 94, 136).

- Neugebauer, O. (1950). "The Alleged Babylonian Discovery of the Precession of the Equinoxes". In : *Journal of the American Oriental Society* 70.1, p. 1–8 (cf. p. 16).
- Neumeyer, J., Barthelmes, F., Dierks, O., Flechtner, F., Harnisch, M., Harnisch, G., Hinderer, Jacques, Imanishi, Y., Kroner, Corinna, Meurers, Bruno, Petrovic, S., Reigber, Ch, Schmidt, R., Schwintzer, P., Sun, He Ping et Virtanen, Heikki (2006). "Combination of temporal gravity variations resulting from superconducting gravimeter (SG) recordings, GRACE satellite observations and global hydrology models". In : *J. Geodesy* 79.10-11, p. 573–585. DOI : 10.1007/s00190-005-0014-8 (cf. p. 51).
- Pan, Cheh (2012). "Linearization of the Liouville Equation, Multiple Splits of the Chandler Frequency, Markowitz Wobbles, and Error Analysis". In : *Int. J. Geosci.* 3, p. 930–951. DOI : [ijg.2012.325095](https://doi.org/10.1007/s12312-012-0195-5) (cf. p. 19).
- Peltier, W. R. (1974). "The impulse response of a Maxwell Earth". In : *Rev. Geophys.* 12.4, p. 649. DOI : [10.1029/RG012i004p00649](https://doi.org/10.1029/RG012i004p00649) (cf. p. 3, 147).
- Peltier, W. R., Wu, Patrick et Yuen, David A. (1981). "The viscosities of the Earth's mantle". In : *Anelasticity in the Earth*, p. 59–77 (cf. p. 131, 132).
- Petit, Gérard et Luzum, Brian (2010). *IERS Conventions (2010)*. Rapp. tech., p. 179 (cf. p. 20, 25).
- Phinney, Robert A. et Burridge, Robert (1973). "Representation of the Elastic - Gravitational Excitation of a Spherical Earth Model by Generalized Spherical Harmonics". In : *Geophys. J. R. astr. Soc.* 34.4, p. 451–487. DOI : [10.1111/j.1365-246X.1973.tb02407.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1973.tb02407.x) (cf. p. 116).
- Poincaré, Henri (1885). "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation". In : *Acta Mathematica* 7.1, p. 259–380. DOI : [10.1007/BF02402204](https://doi.org/10.1007/BF02402204) (cf. p. 102).
- Poma, A. (2000). "The Markowitz Wobble". In : *ASP Conference Series*. Sous la dir. de Dick, S., McCarthy, Dennis D. et Luzum, B. T. 208, p. 81–87 (cf. p. 18).
- Purcell, A., Dehecq, A., Tregoning, P., Potter, E.-K., S.C, McClusky et Lambeck, Kurt (2011). "Relationship between glacial isostatic adjustment and gravity perturbations observed by GRACE". In : *Geophys. Res. Lett.* 38 (cf. p. 3, 147).
- Ranalli, Giorgio (1987). *Rheology of the Earth : Deformation and flow processes in geophysics and geodynamics*. Allen et Unwin, Boston (cf. p. 103, 146).
- Ray, Richard D. et Egbert, Gary D. (2012). "Fortnightly Earth rotation, ocean tides and mantle anelasticity". In : *Geophys. J. Int.* 189.1, p. 400–413. DOI : [10.1111/j.1365-246X.2012.05351.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2012.05351.x) (cf. p. 2).
- Ricard, Yanick, Durand, S., Montagner, J.-P. et Chambat, Frédéric (2014). "Is there seismic attenuation in the mantle?" In : *Earth Planet. Sc. Lett.* 388, p. 257–264. DOI : [10.1016/j.epsl.2013.12.008](https://doi.org/10.1016/j.epsl.2013.12.008) (cf. p. 2, 156).
- Rochester, Michael G., Crossley, David J. et Zhang, Y. L. (2014). "A new description of Earth's wobble modes using Clairaut coordinates : 1. Theory". In : *Geophys. J. Int.* 198.3, p. 1848–1877. DOI : [10.1093/gji/ggu226](https://doi.org/10.1093/gji/ggu226) (cf. p. 103, 120).

- Rogister, Yves (2000). “Etude théorique des déformations globales de la Terre”. Thèse de doct. Université de Liège, p. 240 (cf. p. 112, 114, 116, 117, 119, 127, 133, 141).
- (2003). “Splitting of seismic-free oscillations and of the Slichter triplet using the normal mode theory of a rotating, ellipsoidal earth”. In : *Phys. Earth Planet. In.* 140.1-3, p. 169–182. DOI : 10.1016/j.pepi.2003.08.002 (cf. p. 119).
- Rogister, Yves et Rochester, Michael G. (2004). “Normal-mode theory of a rotating earth model using a Lagrangian perturbation of a spherical model of reference”. In : *Geophys. J. Int.* 159.3, p. 874–908. DOI : 10.1111/j.1365-246X.2004.02447.x (cf. p. 103).
- Rogister, Yves et Valette, Bernard (2009). “Influence of liquid core dynamics on rotational modes”. In : *Geophys. J. Int.* 176.2, p. 368–388. DOI : 10.1111/j.1365-246X.2008.03996.x (cf. p. 139).
- Rosat, Séverine et Lambert, Sébastien B. (2009). “Free core nutation resonance parameters from VLBI and superconducting gravimeter data”. In : *Astronomy and Astrophysics* 291, p. 287–291. DOI : 10.1051/0004-6361/200811489 (cf. p. 22).
- Sabadini, Roberto (1985). “The effects of transient rheology on the interpretation of lower mantle viscosity”. In : *Geophys. Res. Lett.* 12.6, p. 362–364 (cf. p. 137).
- Safronov, V. S. (1966). “Sizes of the largest bodies falling onto the planets during their formation”. In : *Soviet Astronomy AJ* 9, p. 987–991 (cf. p. 15).
- Scheidegger, A. E. (1957). “Rheology of the earth : the basic problem of geodynamics”. In : *Canadian Journal of Physics* 35.4, p. 383–397. DOI : 10.1139/p57-044 (cf. p. 2, 132, 134).
- Smith, Martin L. (1974). “The Scalar Equations of Infinitesimal Elastic-Gravitational Motion for a Rotating, Slightly Elliptical Earth”. In : *Geophys. J. Int.* 37.3, p. 491–526. DOI : 10.1111/j.1365-246X.1974.tb04099.x (cf. p. 4, 103, 112, 116, 117).
- (1977). “Wobble and nutation of the Earth”. In : *Geophys. J. Int.* 50, p. 103–140. DOI : 10.1111/j.1365-246X.1977.tb01326.x (cf. p. 21).
- Smith, Martin L. et Dahlen, F. A. (1981). “The period and Q of the Chandler wobble”. In : *Geophys. J. R. astr. Soc.* 64, p. 223–281 (cf. p. 21, 36–38).
- Smylie, D. E., Henderson, Gary A. et Zuberi, Midhat (2015). “Modern observations of the effect of earthquakes on the Chandler wobble”. In : *J. Geodyn.* 83, p. 85–91. DOI : 10.1016/j.jog.2014.09.012 (cf. p. 1, 19).
- Spada, Giorgio (2008). “ALMA, a Fortran program for computing the viscoelastic Love numbers of a spherically symmetric planet”. In : *Computers & Geosciences* 34, p. 667–687 (cf. p. 147).
- (2013). “Love numbers of a generalized Maxwell sphere”. In : *Studia Geophysica et Geodaetica* 57.1, p. 1–16. DOI : 10.1007/s11200-011-0480-9. arXiv : 0911.0834 (cf. p. 3, 147).
- Spada, Giorgio, Barletta, V. R., Klemann, V., Riva, R. E. M., Martinec, Z., Gasperini, P., Lund, B., Wolf, D., Vermeersen, L. L. A. et King, M. A. (2011). “A

- benchmark study for glacial isostatic adjustment codes”. In : *Geophys. J. Int.* 185.1, p. 106–132. DOI : 10.1111/j.1365-246X.2011.04952.x (cf. p. 3, 147).
- Spada, Giorgio et Boschi, Lapo (2006). “Using the Post–Widder formula to compute the Earth’s viscoelastic Love numbers”. In : *Geophys. J. Int.* 166, p. 309–321. DOI : 10.1111/j.1365-246X.2006.02995.x (cf. p. 3, 5, 147).
- Spada, Giorgio, Sabadini, Roberto, Yuen, David A. et Ricard, Y. (1992). “Effects on post-glacial rebound from the hard rheology in the transition zone”. In : *Geophys. J. Int.* 109.3, p. 683–700 (cf. p. 130).
- Steffen, Holger et Wu, Patrick (2011). “Glacial isostatic adjustment in Fennoscandia—A review of data and modeling”. English. In : *J. Geodyn.* 52.3-4, p. 169–204. DOI : 10.1016/j.jog.2011.03.002 (cf. p. 3, 147).
- Surana, K S (2014). *Advanced Mechanics of Continua*. Applied and computational mechanics series. CRC Press. ISBN : 9781498708111 (cf. p. 103).
- Trubienko, Olga, Fleitout, Luce, Garaud, Jean Didier et Vigny, Christophe (2013). “Interpretation of interseismic deformations and the seismic cycle associated with large subduction earthquakes”. In : *Tectonophysics* 589, p. 126–141. DOI : 10.1016/j.tecto.2012.12.027 (cf. p. 137).
- Tsiganis, K, Gomes, R, Morbidelli, A et Levison, H F (2005). “Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System.” In : *Nature* 435.7041, p. 459–61. DOI : 10.1038/nature03539 (cf. p. 15).
- Van Camp, Michel et Vauterin, Paul (2005). “Tsoft : Graphical and interactive software for the analysis of time series and Earth tides”. In : *Computers and Geosciences* 31.5, p. 631–640. DOI : 10.1016/j.cageo.2004.11.015 (cf. p. 69).
- Varshalovich, D. A., Moskalev, A. N. et Khersonskii, V. K. (1988). *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific, p. 514 (cf. p. 115–117).
- Vicente, Raimundo O. et Wilson, Clark R. (1997). “On the variability of the Chandler frequency”. In : *J. Geophys. R.* 102.B9, p. 20439. DOI : 10.1029/97JB01275 (cf. p. 1, 19).
- Volland, Hans (1995). “Atmosphere and Earth’s Rotation”. In : *Surveys in Geophysics* 17, p. 101–144 (cf. p. 21).
- Vondrák, J (1999). “Secular and long-periodic polar motion as derived from combination of astrometric and space geodetic observations.” In : *Journées 1998 - Systèmes de Référence Spatio-Temporels : Conceptual, Conventional and Practical Studies Related to Earth Rotation*. Sous la dir. de Capitaine, N, p. 195–201 (cf. p. 18).
- Wahr, John M. (1981). “Body tides on an elliptical, rotating, elastic and oceanless earth”. In : *Geophys. J. R. astr. Soc.* 64, p. 677–703 (cf. p. 58).
- (1982). “The effects of the atmosphere and oceans on the Earth’s wobble - I. Theory”. In : *Geophys. J. R. astr. Soc.* 70, p. 349–372 (cf. p. 1, 19).
- (1983). “The effect of the atmosphere and oceans on the Earth’s wobble and on the seasonal variations in the length of day - II. Results”. In : *Geophys. J. R. astr. Soc.* 74, p. 451–487 (cf. p. 1, 19).



- Wahr, John M. (1985). "Deformation induced by polar motion". In : *J. Geophys. R.* 90.B11, p. 9363–9368. DOI : 10.1029/JB090iB11p09363 (cf. p. 52).
- Wahr, John M. et Bergen, Zachary (1986). "The effect of mantle anelasticity on nutations, earth tides, and tidal variations in rotation rate". In : *Geophys. J. R. astr. Soc.* 87, p. 633–668 (cf. p. 2).
- Wahr, John M., DaZhong, Han et Trupin, Andrew (1995). "Predictions of vertical uplift caused by changing polar ice volumes on a viscoelastic earth". In : *Geophys. Res. Lett.* 22.8, p. 977–980. DOI : 10.1029/94GL02840 (cf. p. 148).
- Wenzel, Hans-Georg (1997). *Earth Tide Data Processing Package ETERNA 3.30*. URL : <http://www.eas.slu.edu/GGP/ETERNA34/MANUAL/ETERNA33.HTM> (visité le 11/05/2016) (cf. p. 69).
- Wigner, Eugène (1959). *Group Theory And its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. Sous la dir. d'Academic Press, p. 386. ISBN : 9780323152785 (cf. p. 116).
- Wilson, Clark R. et Vicente, Raimundo O. (1980). "An analysis of the homogeneous ILS polar motion series". In : *Geophys. J. R. astr. Soc.* 62, p. 605–616 (cf. p. 18).
- Wu, Patrick et Peltier, W. R. (1982). "Viscous gravitational relaxation". In : *Geophys. J. R. astr. Soc.* 70.2, p. 435–485. DOI : 10.1111/j.1365-246X.1982.tb04976.x (cf. p. 3, 130, 147).
- Wunsch, Carl (1974). "Dynamics of the Pole Tide and the Damping of the Chandler Wobble". In : *Geophys. J. R. astr. Soc.* 39.3, p. 539–550. DOI : 10.1111/j.1365-246X.1974.tb05471.x (cf. p. 50).
- Xie, Lilin et Dickman, S. R. (1995). "North Sea pole tide dynamics". In : *Geophys. J. Int.* 121, p. 117–135 (cf. p. 50).
- Xu, J. Q., Sun, HePing et Yang, X. F. (2004). "A study of gravity variations caused by polar motion using superconducting gravimeter data from the GGP network". In : *J. Geodesy* 78, p. 201–209. DOI : 10.1007/s00190-004-0386-1 (cf. p. 2).
- Yuen, David A. et Peltier, W. R. (1982). "Normal modes of the viscoelastic earth". In : *Geophys. J. R. astr. Soc.* 69, p. 495–526 (cf. p. 2, 129, 131, 132, 136, 137).
- Zhu, Yaozhong, Shum, C. K., Cheng, M. K., Tapley, B. D. et Chao, Benjamin Fong (1996). "Long-period variations in gravity field caused by mantle anelasticity". In : *J. Geophys. R.* 101, p. 11243–11248 (cf. p. 2).
- Zotov, L. et Bizouard, Christian (2012). "On modulations of the Chandler wobble excitation". In : *J. Geodyn.* 62, p. 30–34. DOI : 10.1016/j.jog.2012.03.010 (cf. p. 19).

# Acronymes

- BCRS** Barycentric Celestial Reference System. 24–26
- CGS** Système d’unités basé sur le centimètre, le gramme et la seconde. 47
- CIO** Celestial Intermediate Origin. 28, 29, 32
- CIP** Celestial Intermediate Pole. 28–33
- CMB** Core-mantle boundary. 21, 36
- CW** Chandler Wobble. 19
- DDW** modèle de Terre de Dehant, Defraigne et Wahr (1999). 62
- DORIS** Doppler Orbitography by Radiopositioning Integrated on Satellite. 25
- ECCO** Estimating the Circulation and Climate of the Ocean. 70
- ECMWF** European Centre for Medium-Range Weather Forecasts. 69
- ERA** ECMWF REanalysis. 69
- FCN** Free Core Nutation. 22, 52
- FICN** Free Inner-Core Nutation. 22, 52
- GCRS** Geocentric Celestial Reference System. 25, 26, 29, 31
- GFZ** GeoForschungsZentrum. 66
- GGP** Global Geodynamics Network. 49, 50, 65–67, 69–71
- GIA** Glacial Isostatic Adjustment. 146–148
- GMT** Greenwich Mean Time. 27
- GNSS** Global Navigation Satellite System. 25
- GOTIC** Global Oceanic Tidal Correction. 70
- GPS** Global Positioning System. 147
- GWR** Goodkind, Warburton et Reineman (fondateurs de GWR Instruments). 66
- HSG** Harmonique sphérique généralisée. 115–118
- IAG** International Association of Geodesy. 65
- ICB** Inner-core boundary. 36
- ICET** International Center for Earth Tides. 58, 66, 67
- ICRF** International Celestial Reference Frame. 25
- ICRS** International Celestial Reference System. 24–29
- ICW** Inner-core wobble. 22
- IERS** International Earth Rotation and Reference Systems Service. 29, 30, 70, 71
- IGETS** International Geodynamics and Earth Tides Service. 50, 65, 67–69

- IGN** Institut Géographique National. 25
- ISDC** Information System and Data Center (GFZ). 66
- ITRF** International Terrestrial Reference Frame. 25, 30, 33, 34, 47, 107
- ITRS** International Terrestrial Reference System. 25–31, 107
- LLR** Lunar Laser Ranging. 25
- LOD** Length of day. 20
- MOG2D** Modèle aux ondes de gravité 2D. 69, 70
- NDFW** Nearly Diurnal Free Wobble. 22
- NNR** no-net-rotation. 106
- PFCN** Prograde Free Core Nutation. 22
- PGR** Post-glacial rebound. 146
- PREM** Preliminary Reference Earth Model. 62, 148
- PRT** Paramètres de Rotation de la Terre. 28–30
- SLR** Satellite Laser Ranging. 25
- SLS** Solide linéaire standard. 130–135, 138, 142
- SNREI** Spherical Non-Rotating Elastic Isotropic (Earth's model). 102
- SPOTL** Some Programs for Ocean-Tide Loading. 70
- TAI** Temps atomique international. 26, 27
- TCB** Temps coordonné barycentrique. 24, 26
- TCG** Temps coordonné géocentrique. 24, 26, 27
- TE** Temps des éphémérides. 26
- TIO** Terrestrial Intermediate Origin. 29, 32
- TOM** Tilt-over mode. 120, 133, 141
- TT** Temps terrestre. 26, 27
- TTD** Temps terrestre dynamique. 26
- TU** Temps universel. 26, 27
- UAI** Union Astronomique Internationale. 24, 26, 29
- UGGI** Union géodésique et géophysique internationale. 25, 29, 50
- UT1** Temps universel corrigé. 26, 27, 29, 30
- UTC** Temps universel coordonné. 27, 30
- VLBI** Very Long Baseline Interferometry. 25, 27
- WGS** World Geodetic System. 47

*Sur ce vaste univers un grand voile est jeté ;  
Mais, dans les profondeurs de cette obscurité,  
Si la raison nous luit, qu'avons-nous à nous plaindre ?  
Nous n'avons qu'un flambeau, gardons-nous de l'éteindre.*

*Voltaire, Poème sur la loi naturelle*







Yann ZIEGLER



## Modélisation de la rotation de la Terre et analyse conjointe des données du mouvement du pôle et de gravimétrie

### Résumé

L'objectif principal de ce travail est d'améliorer notre compréhension de la rhéologie terrestre et du mouvement de Chandler qui en dépend. Nous calculons le facteur gravimétrique complexe à la période de Chandler par une analyse conjointe de séries temporelles gravimétriques et du mouvement du pôle. Nous montrons l'importance et les limites des corrections gravimétriques dans les analyses locales et l'intérêt d'une combinaison des données de différentes stations. Suivant une approche plus théorique, nous menons une étude analytique puis numérique afin de déterminer les solutions du problème des petites déformations d'une Terre homogène anélastique en rotation. L'influence de l'anélasticité sur la période et le facteur de qualité de Chandler est étudiée, et nous montrons que ce dernier est plus sensible que la période aux paramètres rhéologiques, notamment à la viscosité de Kelvin. Enfin, nous étudions, en domaine de Laplace, l'influence de la fréquence de forçage par une surcharge.

Mots-clefs : *mouvement de Chandler, mouvement du pôle, gravimétrie, gravimètres supraconducteurs, facteur gravimétrique, rhéologie, anélasticité, viscosité du manteau, facteur de qualité*

### Abstract

The main goal of this work is to improve our understanding of the Earth's rheology and of the Chandler wobble which depends on it. We compute the complex gravimetric factor at the Chandler frequency by a joint analysis of gravimetric and polar motion time series. We show the importance and the limits of gravimetric corrections for local analyses and the effectiveness of the combination of data from different stations. Using a more theoretical approach, we carry out an analytical and numerical study to determine the solutions of the small deformations of an anelastic homogeneous rotating Earth model. The influence of anelasticity on the Chandler wobble period and quality factor is studied and we show that the latter is more sensitive than the period to the rheological parameters, especially to the Kelvin's viscosity. Finally, we study in Laplace domain the influence of the forcing frequency for the loading problem.

Keywords : *Chandler wobble, polar motion, gravimetry, superconducting gravimeters, gravimetric factor, rheology, anelasticity, mantle viscosity, quality factor*