



# Simulation à l'échelle microscopique et analyse macroscopique de l'imprégnation d'un matériau composite par un fluide chargé en particules

Kévin Dugois

## ► To cite this version:

Kévin Dugois. Simulation à l'échelle microscopique et analyse macroscopique de l'imprégnation d'un matériau composite par un fluide chargé en particules. Mécanique [physics]. Université de Bordeaux, 2017. Français. NNT : 2017BORD0011 . tel-01505473v1

**HAL Id: tel-01505473**

**<https://theses.hal.science/tel-01505473v1>**

Submitted on 11 Apr 2017 (v1), last revised 13 Apr 2017 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE  
POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR DE  
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR  
SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

par Kevin DUGOIS

**Simulation à l'échelle microscopique et analyse macroscopique  
de l'imprégnation d'un matériau composite par un fluide  
chargé en particules**

Sous la direction de : Stéphane VINCENT  
(co-directeur : Didier LASSEUX)

Soutenue le 13 Février 2017

Membre du Jury :

|     |                     |                                                  |              |
|-----|---------------------|--------------------------------------------------|--------------|
| M.  | Olivier SIMONIN     | Professeur, INP Toulouse                         | Président    |
| Mme | Anne TANIÈRE        | Professeur, Université de Lorraine               | Rapporteur   |
| M.  | Christophe BINETRUY | Professeur, École Centrale Nantes                | Rapporteur   |
| M.  | Stéphane VINCENT    | Professeur, Université Paris-Est Marne-La-Vallée | Directeur    |
| M.  | Didier LASSEUX      | Chargé de Recherche, CNRS                        | Co-directeur |
| M.  | Eric ARQUIS         | Professeur, Bordeaux INP                         | Encadrant    |
| M.  | Cédric DESCAMPS     | Ingénieur, SAFRAN Ceramics                       | Invité       |





# **Simulation à l'échelle microscopique et analyse macroscopique de l'imprégnation d'un matériau composite par un fluide chargé en particules**

## **Résumé :**

Dans le but d'améliorer le comportement thermo-mécanique des aubes de turbine présentes dans les moteurs d'avion développés par SAFRAN, il est nécessaire de mettre au point un nouveau matériau composite. Le procédé de fabrication de ce matériau est complexe et requiert une densification par voie liquide divisée en deux étapes. Cette thèse s'intéresse à la modélisation numérique de la première étape appelée Slurry Cast/APS. Celle-ci consiste en l'injection et le confinement, dans la préforme fibreuse, de particules préalablement mises en suspension. Pour cela, nous avons développé à l'échelle des fibres, un modèle qui utilise les équations de Navier-Stokes incompressibles et monophasiques, l'équation de Phillips [Phillips et al., 1992] et une loi rhéologique [Krieger, 1972]. Après validation des résultats numériques par comparaison avec des résultats expérimentaux [Hampton et al., 1997] et théoriques [Belfort et al., 1994], le modèle est utilisé pour simuler l'écoulement autour de géométries de tissage proches du matériau étudié.

## **Mots-clés :**

Écoulement chargé ; Milieu poreux ; Matériau composite ; Rhéologie non-newtonienne ; Simulation numérique ; Méthode aux volumes finis ; Maillage cartésien.

---

## **Microscopic simulation and macroscopic analysis of impregnation process of composite material by a concentrated suspension**

## **Abstract :**

In order to improve thermo-mechanical behavior of turbine blades in SAFRAN engines plane, a new composite material is necessary. The manufacturing process to obtain this composite is intricate and requires a two steps fluid densification process. This thesis focuses on numerical simulation of the first one called Slurry Cast/APS. In this step, suspended particles are introduced and captured in the reinforcement. For that purpose, we carry out a model at fiber scale, using Navier-Stokes equations in incompressible and monophasic formulation, Phillips equations [Phillips et al., 1992] and a rheological law [Krieger, 1972]. After validation step consisting in a comparison of computational results with experiments [Hampton et al., 1997] and theoretical law [Belfort et al., 1994], this model has been used to simulate flow around geometries similar to those encountered in our composite material.

## **Keywords :**

Suspension flow ; Porous media ; Composite material ; Non-Newtonian rheology ; Numerical simulation ; Finite volume method ; Cartesian meshing.

---

## **Unité de recherche**

[ Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux (I2M) - UMR 5295,  
Département TREFLE - 16 avenue Pey-Berland, 33607 PESSAC Cedex ]



# Table des matières

|                                                                |           |
|----------------------------------------------------------------|-----------|
| Nomenclature                                                   | vii       |
| Table des figures                                              | xi        |
| Liste des tableaux                                             | xvii      |
| Introduction générale                                          | 1         |
| <b>1 Contexte scientifique et problématique</b>                | <b>5</b>  |
| 1.1 Matériaux composites . . . . .                             | 5         |
| 1.1.1 Composite à matrice céramique (CMC) . . . . .            | 5         |
| 1.1.2 Les étapes de fabrication d'un CMC . . . . .             | 8         |
| 1.1.3 Densification par voie gazeuse . . . . .                 | 9         |
| 1.1.4 Densification par voie liquide . . . . .                 | 9         |
| 1.1.5 Densification par réaction chimique . . . . .            | 10        |
| 1.2 Suspension particulaire . . . . .                          | 11        |
| 1.2.1 Présentation générale des suspensions . . . . .          | 11        |
| 1.2.2 Les différents types de particules . . . . .             | 12        |
| 1.2.3 Rhéologie des fluides complexes . . . . .                | 14        |
| 1.2.4 Les différentes échelles de modélisation . . . . .       | 17        |
| 1.2.5 Stratégie de modélisation des particules . . . . .       | 18        |
| 1.3 Milieu poreux . . . . .                                    | 21        |
| 1.3.1 Présentation générale . . . . .                          | 21        |
| 1.3.2 Écoulement en milieu poreux . . . . .                    | 22        |
| 1.3.3 Caractérisation d'un milieu poreux . . . . .             | 24        |
| 1.3.4 Modèle de perméabilité . . . . .                         | 25        |
| 1.4 Problématique industrielle de ces travaux . . . . .        | 27        |
| 1.4.1 Élaboration complète de la pièce CMC concernée . . . . . | 27        |
| 1.4.2 Procédé Slurry Cast/APS . . . . .                        | 28        |
| 1.4.3 Suspensions utilisées dans le procédé APS . . . . .      | 29        |
| 1.4.4 Problématique du procédé APS . . . . .                   | 31        |
| 1.4.5 Objectifs de la thèse . . . . .                          | 31        |
| 1.5 Conclusions . . . . .                                      | 32        |
| <b>2 Modèle et méthodes numériques</b>                         | <b>35</b> |
| 2.1 Équations du modèle . . . . .                              | 36        |
| 2.1.1 Approche globale Navier-Stokes/Brinkman . . . . .        | 36        |
| 2.1.2 Équation de Phillips . . . . .                           | 41        |

|          |                                                                                           |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.1.3    | Lois rhéologiques . . . . .                                                               | 44         |
| 2.1.4    | Prise en compte du filtre à particules en sortie . . . . .                                | 47         |
| 2.1.5    | Modèle d'équations final . . . . .                                                        | 49         |
| 2.2      | Adimensionnement du système d'équation . . . . .                                          | 50         |
| 2.2.1    | Adimensionnement des équations de Navier-Stokes et de Brinkman . . . . .                  | 50         |
| 2.2.2    | Adimensionnement de l'équation de Phillips . . . . .                                      | 52         |
| 2.2.3    | Gamme de valeurs des paramètres de similitude . . . . .                                   | 52         |
| 2.2.4    | Conclusions partielles . . . . .                                                          | 54         |
| 2.3      | Résolution numérique des équations . . . . .                                              | 54         |
| 2.3.1    | Définition générale des méthodes numériques . . . . .                                     | 54         |
| 2.3.2    | Discretisation numérique . . . . .                                                        | 55         |
| 2.3.3    | Exemple de schémas aux volumes finis . . . . .                                            | 61         |
| 2.3.4    | Résolution des équations de Navier-Stokes . . . . .                                       | 65         |
| 2.3.5    | Couplage vitesse/pression - résolution de l'incompressibilité . . . . .                   | 67         |
| 2.3.6    | Prise en compte des obstacles poreux et des conditions aux limites . . . . .              | 69         |
| 2.3.7    | Résolution de l'équation de Phillips . . . . .                                            | 71         |
| 2.3.8    | Méthodes de résolution . . . . .                                                          | 71         |
| 2.4      | Conclusions . . . . .                                                                     | 72         |
| <b>3</b> | <b>Validation du modèle</b>                                                               | <b>75</b>  |
| 3.1      | Validation de la ségrégation particulaire . . . . .                                       | 75         |
| 3.1.1    | Migration particulaire dans une conduite cylindrique . . . . .                            | 76         |
| 3.1.2    | Mise en place de la simulation . . . . .                                                  | 79         |
| 3.1.3    | Choix de la vitesse d'entrée . . . . .                                                    | 81         |
| 3.1.4    | Choix de l'angle de référence . . . . .                                                   | 82         |
| 3.1.5    | Résultats numériques de la migration particulaire dans une conduite cylindrique . . . . . | 83         |
| 3.2      | Validation de l'écoulement en milieu poreux . . . . .                                     | 88         |
| 3.2.1    | Écoulement d'un fluide non chargé dans un milieu poreux . . . . .                         | 89         |
| 3.2.2    | Prise en compte du gâteau particulaire comme un milieu poreux . . . . .                   | 92         |
| 3.3      | Validation de la compaction particulaire . . . . .                                        | 94         |
| 3.3.1    | Problématique de microfiltration . . . . .                                                | 94         |
| 3.3.2    | Loi d'évolution du gâteau particulaire . . . . .                                          | 95         |
| 3.3.3    | Mise en place de la simulation . . . . .                                                  | 97         |
| 3.3.4    | Résultats des simulations . . . . .                                                       | 98         |
| 3.4      | Conclusions . . . . .                                                                     | 103        |
| <b>4</b> | <b>Simulations numériques du procédé APS</b>                                              | <b>105</b> |
| 4.1      | Étude paramétrique 2D . . . . .                                                           | 106        |
| 4.1.1    | Objectifs de l'étude . . . . .                                                            | 106        |
| 4.1.2    | Méthodologie de l'étude . . . . .                                                         | 107        |
| 4.1.3    | Mise en place de la simulation . . . . .                                                  | 110        |
| 4.1.4    | Résultats des simulations . . . . .                                                       | 112        |
| 4.1.5    | Conclusions de l'étude paramétrique 2D . . . . .                                          | 119        |
| 4.2      | Étude 2D du procédé APS . . . . .                                                         | 120        |
| 4.2.1    | Objectifs de l'étude . . . . .                                                            | 120        |
| 4.2.2    | Mise en place de la simulation . . . . .                                                  | 121        |
| 4.2.3    | Formation des macroporosités . . . . .                                                    | 123        |

|                                                      |                                                        |            |
|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|------------|
| 4.2.4                                                | Influence du décalage sur les macroporosités . . . . . | 126        |
| 4.2.5                                                | Étude de convergence en maillage . . . . .             | 127        |
| 4.2.6                                                | Conclusions de l'étude 2D du procédé APS . . . . .     | 132        |
| 4.3                                                  | Étude 3D du procédé APS . . . . .                      | 132        |
| 4.3.1                                                | Objectifs de l'étude . . . . .                         | 132        |
| 4.3.2                                                | Armature fibreuse étudiée . . . . .                    | 133        |
| 4.3.3                                                | Mise en place de la simulation . . . . .               | 135        |
| 4.3.4                                                | Résultats des simulations . . . . .                    | 137        |
| <b>Conclusions générales et perspectives</b>         |                                                        | <b>147</b> |
| <b>A Étude des variations du nombre de Reynolds</b>  |                                                        | <b>151</b> |
| <b>B Méthode des caractéristiques</b>                |                                                        | <b>155</b> |
| <b>C Démonstration des lois de Belfort</b>           |                                                        | <b>157</b> |
| C.1                                                  | Filtration à gradient de pression imposé . . . . .     | 158        |
| C.2                                                  | Filtration à débit imposé . . . . .                    | 160        |
| <b>D Adimensionnement des lois de Belfort</b>        |                                                        | <b>161</b> |
| D.1                                                  | Variables sans dimension . . . . .                     | 161        |
| D.2                                                  | Filtration à gradient de pression imposé . . . . .     | 162        |
| D.3                                                  | Filtration à débit imposé . . . . .                    | 162        |
| <b>E Calcul de la hauteur du front de compaction</b> |                                                        | <b>163</b> |
| <b>Bibliographie</b>                                 |                                                        | <b>165</b> |



# Nomenclature

## Lettres latines

|              |                                                                                                 |                   |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| $g$          | Accélération de la pesanteur                                                                    | $\text{m.s}^{-1}$ |
| $q$          | Vecteur vitesse de darcy                                                                        | $\text{m.s}^{-1}$ |
| $u$          | Vecteur vitesse interstitielle                                                                  | $\text{m.s}^{-1}$ |
| $\mathbf{X}$ | Vecteur position                                                                                | $\text{m.s}^{-1}$ |
| $p$          | Pression                                                                                        | Pa                |
| $a$          | Rayon moyen des particules                                                                      | m                 |
| $C$          | Conductivité hydraulique d'un milieu poreux                                                     | $\text{m.s}^{-1}$ |
| $d$          | Diamètre moyen des particules                                                                   | m                 |
| $D_c$        | Constante expérimentale du flux $N_c$                                                           | <i>adim</i>       |
| $D_H$        | Diamètre hydraulique                                                                            | m                 |
| $D_\mu$      | Constante expérimentale du flux $N_\mu$                                                         | <i>adim</i>       |
| $F$          | Facteur de forme des modèles de particules                                                      | <i>adim</i>       |
| $K$          | Perméabilité d'un milieu poreux                                                                 | $\text{m}^2$      |
| $k$          | Coefficient de Mooney                                                                           | <i>adim</i>       |
| $k_0$        | Facteur de forme du modèle de Kozeny-Carman                                                     | <i>adim</i>       |
| $K_c$        | Perméabilité du gâteau particulaire (Kozeny-Carman)                                             | $\text{m}^2$      |
| $K_m$        | Perméabilité de la membrane                                                                     | $\text{m}^2$      |
| $K_p$        | Perméabilité de la préforme tissée                                                              | $\text{m}^2$      |
| $L_c$        | Longueur de référence servant à l'adimensionnement des équations                                | m                 |
| $N_b$        | Flux de charges causé par la diffusion Brownienne (Phillips)                                    | $\text{m.s}^{-1}$ |
| $N_c$        | Flux de charges causé par les variations de fréquence de collisions entre particules (Phillips) | $\text{m.s}^{-1}$ |
| $N_x$        | Nombre de mailles dans la direction $\mathbf{x}$                                                | <i>adim</i>       |
| $N_y$        | Nombre de mailles dans la direction $\mathbf{y}$                                                | <i>adim</i>       |
| $N_z$        | Nombre de mailles dans la direction $\mathbf{z}$                                                | <i>adim</i>       |
| $N_\mu$      | Flux de charge causé par la variation spatiale de viscosité (Phillips)                          | $\text{m.s}^{-1}$ |
| $R$          | Rayon de la conduite dans les travaux de [Hampton et al., 1997]                                 | m                 |
| $R_c$        | Résistance par unité de surface du gâteau particulaire                                          | $\text{m}^{-2}$   |
| $R_m$        | Résistance de la membrane                                                                       | $\text{m}^{-1}$   |
| $T$          | Tortuosité d'un milieu poreux                                                                   | <i>adim</i>       |
| $t$          | Temps                                                                                           | s                 |
| $U_c$        | Vitesse de référence servant à l'adimensionnement des équations                                 | $\text{m.s}^{-1}$ |
| $x$          | Première composante cartésienne                                                                 | m                 |



|     |                                        |   |
|-----|----------------------------------------|---|
| $y$ | Deuxième composante cartésienne .....  | m |
| $z$ | Troisième composante cartésienne ..... | m |

**Lettres grecques**

|                |                                                                                    |                                 |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| $\delta_c$     | Épaisseur du gâteau particulaire .....                                             | m                               |
| $\delta_m$     | Épaisseur de la membrane .....                                                     | m                               |
| $\eta$         | Coefficient d'Einstein .....                                                       | <i>adim</i>                     |
| $\Gamma$       | Interface entre le gâteau particulaire et le fluide chargé en particules ....      | <i>adim</i>                     |
| $\mu$          | Viscosité dynamique .....                                                          | Pa.s                            |
| $\mu_0$        | Viscosité dynamique de l'espèce saturante .....                                    | Pa.s                            |
| $\nu$          | Viscosité cinématique .....                                                        | m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> |
| $\Omega$       | Domaine d'étude .....                                                              | <i>adim</i>                     |
| $\Omega_d$     | Domaine d'étude de l'écoulement en milieu poreux .....                             | <i>adim</i>                     |
| $\Omega_f$     | Domaine d'étude de l'écoulement fluide .....                                       | <i>adim</i>                     |
| $\phi$         | Fraction volumique .....                                                           | <i>adim</i>                     |
| $\phi_c$       | Fraction volumique de charge caractéristique du gâteau particulaire ....           | <i>adim</i>                     |
| $\phi_m$       | Compacité maximale d'un agencement de particules sphériques de même diamètre ..... | <i>adim</i>                     |
| $\rho$         | Masse volumique .....                                                              | kg.m <sup>-3</sup>              |
| $\dot{\gamma}$ | Taux de cisaillement de l'écoulement .....                                         | s <sup>-1</sup>                 |
| $\tau$         | Contrainte de cisaillement .....                                                   | Pa                              |
| $\tau_0$       | Contrainte seuil de cisaillement des fluides viscoplastiques .....                 | Pa                              |
| $\tilde{\mu}$  | Viscosité dynamique effective du modèle de Brinkman .....                          | Pa.s                            |

**Opérateurs mathématiques**

|                 |                   |
|-----------------|-------------------|
| $\nabla \cdot$  | Divergence        |
| $\nabla \times$ | Rotationnel       |
| $\nabla$        | Gradient          |
| $\partial$      | Dérivée partielle |

**Indices et exposants**

|          |                                                                                                             |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $*$      | Relatif à une variable adimensionnée                                                                        |
| $0$      | Exposant caractérisant le comportement newtonien des fluides rhéofluidifiants à faible taux de cisaillement |
| $1/2$    | Indice de la contrainte de cisaillement spécifique au modèle d'Ellis                                        |
| $\infty$ | Exposant caractérisant le comportement newtonien des fluides rhéofluidifiants à fort taux de cisaillement   |
| $c$      | Relatif au gâteau particulaire                                                                              |
| $f$      | Relatif au fluide                                                                                           |
| $i$      | Indice de coordonnée de discrétisation selon $\mathbf{x}$                                                   |
| $j$      | Indice de coordonnée de discrétisation selon $\mathbf{y}$                                                   |
| $m$      | Relatif à la membrane                                                                                       |
| $n$      | Exposant de discrétisation du temps                                                                         |
| $NS$     | Indice de la vitesse résolue par les équations de Navier-Stokes                                             |
| $s$      | Relatif à l'espèce solide                                                                                   |
| $T$      | Transposée                                                                                                  |

*TR* Indice de la vitesse résolue par l'équation de transport

**Acronymes**

|     |                                    |
|-----|------------------------------------|
| APS | Aspiration de Poudre Submicronique |
| CAO | Conception Assistée par Ordinateur |
| CFL | Courant-Friedrichs-Lewy            |
| CMC | Composite à Matrice Céramique      |
| CVD | Chemical Vapor Deposition          |
| CVI | Chemical Vapor Infiltration        |
| DNS | Direct Numerical Simulation        |
| EDP | Équation aux Dérivées Partielles   |
| IRM | Imagerie par Résonance Magnétique  |
| LPI | Liquid Polymer Infiltration        |
| LRI | Liquid Resin Infusion              |
| MI  | Melt Infiltration                  |
| PIP | Polymer Infiltration and Pyrolysis |
| RMI | Reactive Melt Infiltration         |
| RMN | Résonance Magnétique Nucléaire     |
| RTM | Resin Transfer Moulding            |
| VER | Volume Élémentaire Représentatif   |

**Paramètres de similitude**

|                 |                           |
|-----------------|---------------------------|
| Da              | Nombre de Darcy           |
| Pe <sub>m</sub> | Nombre de Peclet massique |
| Re              | Nombre de Reynolds        |



# Table des figures

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                    |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1    | <i>Vue simplifiée du moteur LEAP développé par SAFRAN (a) et d'une forme générale d'aube de turbine (b). L'aube n'est pas représentative de celles utilisées dans les moteurs LEAP.</i>                                                                            | 2  |
| 1.1  | <i>Schéma de la coupe d'un fil formé de fibres élémentaires (gauche) et vue macroscopique d'un fil (droite).</i>                                                                                                                                                   | 6  |
| 1.2  | <i>Exemple de différents renforts fibreux rencontrés dans les CMC. En 2D (a) et 3D (b). [Gries et al., 2008].</i>                                                                                                                                                  | 6  |
| 1.3  | <i>Tresseuses industrielles d'armature de CMC. [Gries et al., 2008].</i>                                                                                                                                                                                           | 8  |
| 1.4  | <i>Dénomination des suspensions en fonction de la taille des particules.</i>                                                                                                                                                                                       | 12 |
| 1.5  | <i>Particules de carbure de silicium sous MEB (gauche). Agrégat de nanotube de carbone en suspension (droite).</i>                                                                                                                                                 | 12 |
| 1.6  | <i>Représentations simplifiées des particules en suspension. Modèle sphérique (a). Modèle aplati (b). Modèle allongé ou cylindrique (c).</i>                                                                                                                       | 13 |
| 1.7  | <i>Cisaillement simple. Écoulement d'un fluide newtonien entre une plaque immobile (bas) et une plaque mobile (haut) à vitesse <math>U</math> séparées d'une distance <math>d</math>. <math>\dot{\gamma} = U/d</math>. [Tanner, 1985].</i>                         | 14 |
| 1.8  | <i>Évolution de la contrainte de cisaillement <math>\tau</math> en fonction de la vitesse de cisaillement <math>\dot{\gamma}</math> pour des fluides pseudoplastique, newtonien et dilatatant.</i>                                                                 | 15 |
| 1.9  | <i>Évolution de la viscosité <math>\mu_a</math> en fonction de la vitesse de cisaillement <math>\dot{\gamma}</math> dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant. Mise en évidence du comportement newtonien à faible et fort taux de cisaillement. [Tanner, 1985].</i> | 15 |
| 1.10 | <i>Ensemble des échelles présentes dans la problématique d'imprégnation d'un CMC par une suspension particulaire.</i>                                                                                                                                              | 18 |
| 1.11 | <i>Simulation directe de la répartition particulaire d'un lit fluidisé (haut). Simulation à l'échelle macroscopique du phénomène, utilisation d'une fraction volumique (bas). [Randrianarivelo et al., 2006].</i>                                                  | 19 |
| 1.12 | <i>Modification de l'orientation d'une particule aplatie (<math>F &gt; 1</math>) dans un écoulement à cisaillement simple.</i>                                                                                                                                     | 19 |
| 1.13 | <i>Visualisation de deux milieux poreux : naturel, corail (gauche) et industriel, CAO d'une armature fibreuse de CMC (droite).</i>                                                                                                                                 | 21 |
| 1.14 | <i>Exemple de reconstruction de milieux poreux par tomographie. Visualisation de l'espace poral permettant la détermination des caractéristiques du milieu poreux.</i>                                                                                             | 25 |
| 1.15 | <i>Présentation des différentes étapes de fabrication du CMC étudié dans ces travaux. Décomposition de l'étape finale de densification.</i>                                                                                                                        | 27 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.16 | <i>Schématisation du procédé Slurry Cast APS permettant l'introduction de particules dans l'armature fibreuse à l'aide d'une suspension. Cas d'une infiltration à pression imposée.</i>                                                                                                                                                                                                                                                                         | 28 |
| 1.17 | <i>Compaction maximale de particules sphériques monomodale (gauche) et multimodale (droite).</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 30 |
| 1.18 | <i>Imagerie au MEB d'une coupe du matériau CMC après le procédé Slurry Cast et séchage. Observation de la création des macropores et fractures de retrait.</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 31 |
| 2.1  | <i>Formation du gâteau particulaire lors de l'écoulement 1D, à gradient de pression imposé, d'un fluide chargé en particules. Impact du filtre à particules sur le gâteau particulaire.</i>                                                                                                                                                                                                                                                                     | 37 |
| 2.2  | <i>Représentation schématique des deux zones d'écoulement fluide pouvant être rencontrées dans le procédé Slurry Cast/APS. (<math>\Omega_f</math>) domaine d'écoulement libre de la suspension chargée. (<math>\Omega_d</math>) domaine d'écoulement en milieu poreux. (<math>\Gamma</math>) interface de séparation des deux domaines.</i>                                                                                                                     | 38 |
| 2.3  | <i>Collision entre deux particules sphériques dans un écoulement à cisaillement constant sans variation spatiale de viscosité. Le temps <math>t_i</math> correspond au temps avant collision et <math>t_f</math> après collision.</i>                                                                                                                                                                                                                           | 42 |
| 2.4  | <i>Collision entre deux particules sphériques dans un écoulement à cisaillement constant avec variation spatiale de viscosité. Le temps <math>t_i</math> correspond au temps avant collision et <math>t_f</math> après collision.</i>                                                                                                                                                                                                                           | 42 |
| 2.5  | <i>Évolution de la viscosité dynamique de la suspension en fonction de la fraction volumique de poudre</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 46 |
| 2.6  | <i>Discrétisation de l'espace en un nombre fini de points et visualisation du volume de contrôle élémentaire <math>C_{i,j}</math> dans une approche 2D de la méthode des volumes finis.</i>                                                                                                                                                                                                                                                                     | 57 |
| 2.7  | <i>Maillage cartésien 2D avec pas d'espace constant dans chaque direction. Représentation des points de la grille vitesse et de la grille pression <b>(a)</b>. Définition des volumes de contrôle pour chaque type de point <b>(b)</b>.</i>                                                                                                                                                                                                                     | 60 |
| 3.1  | <i>Montage expérimental utilisé. Boucle complète : réservoir, pompe, conduite cylindrique et dispositif RNM (gauche). Aimant Supraconducteur du système RNM (droite). [Hampton et al., 1997]</i>                                                                                                                                                                                                                                                                | 76 |
| 3.2  | <i>Profils radiaux expérimentaux de fraction <math>\phi^s</math> (gauche) et vitesses adimensionnées (droite) en régime établi (○). Comparaison avec les résultats obtenus avec le modèle de Phillips originel (- -) dans la configuration <math>a/R = 0,0256</math>, pour des suspensions initialement homogènes à (a)(b) <math>\phi_0^s = 0,20</math>, (c)(d) <math>\phi_0^s = 0,30</math> et (e)(f) <math>\phi_0^s = 0,45</math>. [Hampton et al., 1997]</i> | 78 |
| 3.3  | <i>Domaine de simulation représentatif du montage expérimental des travaux de Hampton. La boîte noire représente le domaine d'étude numérique. En bleu, la zone imperméable et pénalisée (extérieur de la conduite). En rouge, la partie fluide (intérieur de la conduite).</i>                                                                                                                                                                                 | 80 |
| 3.4  | <i>Coupe 3D de notre domaine de calcul (gauche) et nom des limites du domaine (droite).</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 80 |
| 3.5  | <i>Répartition de la fraction volumique de poudre sur le rayon de sortie pour différentes vitesses en entrée <math>u_{x0}</math> dans la configuration <math>a/R = 0,0256</math>.</i>                                                                                                                                                                                                                                                                           | 81 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.6  | Répartition de la fraction volumique de poudre en sortie, étude de l'influence de l'angle choisi dans la configuration $a/R = 0,0256$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 82 |
| 3.7  | Profils radiaux expérimentaux de fraction $\phi^s$ (gauche) et vitesses $\hat{v}$ (droite) en régime établi ( $\circ$ ). Comparaison aux résultats obtenus avec le modèle de Phillips originel ( $-$ ) et le modèle modifié dans cette thèse ( $-$ ) dans la configuration $a/R = 0,0256$ , pour des suspensions initialement homogènes à (a)(b) $\phi_0^s = 0,20$ , (c)(d) $\phi_0^s = 0,30$ et (e)(f) $\phi_0^s = 0,45$ . . . . . | 84 |
| 3.8  | Bilan des profils radiaux de fraction volumique de poudre observés en sortie de canal avec trois suspensions initialement homogènes ( $\phi_0^s = 0,20$ , $\phi_0^s = 0,30$ et $\phi_0^s = 0,45$ ) dans la configuration $a/R = 0,0256$ . . . . .                                                                                                                                                                                   | 85 |
| 3.9  | Superposition des profils de répartition de poudre et de taux de cisaillement en sortie de canal. Résultats obtenus pour une suspension initialement homogène en poudre à $\phi_0^s = 0,45$ dans la configuration $a/R = 0,0256$ . . . . .                                                                                                                                                                                          | 85 |
| 3.10 | Superposition des profils de vitesses et de viscosité en sortie de canal. Résultats obtenus pour une suspension initialement homogène en poudre à $\phi_0^s = 0,45$ dans la configuration $a/R = 0,0256$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                  | 86 |
| 3.11 | Bilan des profils radiaux de vitesses observés en sortie de canal avec trois suspensions initialement homogènes ( $\phi_0^s = 0,20$ , $\phi_0^s = 0,30$ et $\phi_0^s = 0,45$ ) dans la configuration $a/R = 0,0256$ . Comparaison avec un profil de vitesses de Poiseuille théorique. . . . .                                                                                                                                       | 86 |
| 3.12 | Longueurs d'établissement adimensionnées des profils radiaux de fraction volumique de poudre (gauche) et de vitesses (droite) des trois suspensions initialement homogènes ( $\phi_0^s = 0,20$ , $\phi_0^s = 0,30$ et $\phi_0^s = 0,45$ ) dans la configuration $a/R = 0,0256$ . . . . .                                                                                                                                            | 87 |
| 3.13 | Cas d'étude n° 1 : initialisation du domaine comme un obstacle poreux (zone rouge). La zone bleue correspond à la zone définissant le filtre à particules. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 90 |
| 3.14 | Champs de pression selon $y$ dans un milieu poreux de référence de perméabilité $K_a$ en écoulement établi. La perte de charge observée numériquement est de $\Delta p_a = 1,545 \text{ Pa}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                              | 91 |
| 3.15 | Champs de pression selon $y$ dans un milieu poreux de référence de perméabilité $K_b$ en écoulement établi. La perte de charge observée numériquement est de $\Delta p_b = 4,2916 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                  | 91 |
| 3.16 | Cas d'étude n° 2 : initialisation du domaine comme un gâteau particulaire. Vérification de la prise en compte du gâteau particulaire comme un obstacle poreux. Le filtre est caractérisé par la zone bleue. . . . .                                                                                                                                                                                                                 | 92 |
| 3.17 | Champs de pression selon $y$ dans le gâteau particulaire en écoulement établi. La perte de charge observée est de $\Delta p = 4,2916 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                               | 93 |
| 3.18 | Schéma des différents procédés de microfiltration : microfiltration transversale (gauche) et microfiltration frontale (droite). [Belfort et al., 1994] . . .                                                                                                                                                                                                                                                                        | 94 |
| 3.19 | Schéma de la superposition d'un gâteau particulaire 1D et d'une membrane dans un procédé type microfiltration frontale. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 95 |
| 3.20 | Domaine d'étude pour la simulation de la croissance du gâteau. État initial de la suspension homogène (vert) et du filtre (bleu). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 97 |
| 3.21 | Évolution temporelle de la fraction volumique de poudre. Visualisation de la croissance du gâteau particulaire dans un écoulement piloté par un gradient de pression constant $\Delta p$ , pour une suspension homogène à $\phi_b^s = 0,45$ . . . .                                                                                                                                                                                 | 99 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.22 | <i>Épaisseur du gâteau particulaire <math>\delta_c</math> en fonction du temps pour trois discrétisations spatiales différentes dans le cas d'un écoulement d'une suspension de concentration <math>\phi_b^s = 0,45</math>, à gradient de pression imposé. Comparaison adimensionnée avec la loi de Belfort théorique.</i>                         | 100 |
| 3.23 | <i>Erreur relative sur l'épaisseur du gâteau particulaire calculée numériquement et avec la loi de Belfort. Étude pour trois différentes discrétisations spatiales dans le cas d'un écoulement d'une suspension de concentration <math>\phi_b^s = 0,45</math>, à gradient de pression imposé.</i>                                                  | 101 |
| 3.24 | <i>Épaisseur du gâteau particulaire <math>\delta_c</math> en fonction du temps pour trois discrétisations spatiales différentes dans le cas d'un écoulement d'une suspension de concentration <math>\phi_b^s = 0,45</math>, à débit imposé. Comparaison adimensionnée avec la loi de Belfort théorique.</i>                                        | 102 |
| 3.25 | <i>Erreur relative sur l'épaisseur du gâteau particulaire calculée numériquement et avec la loi de Belfort. Étude pour trois discrétisations spatiales différentes dans le cas d'un écoulement d'une suspension de concentration <math>\phi_b^s = 0,45</math>, à débit imposé.</i>                                                                 | 102 |
| 4.1  | <i>Imagerie au MEB d'une coupe du matériau CMC après le procédé Slurry Cast et séchage. Observation de la création des macropores et fractures de retrait.</i>                                                                                                                                                                                     | 106 |
| 4.2  | <i>Exemples de configurations géométriques de torons, rencontrées dans la pré-forme fibreuse utilisée dans ces travaux. Vue selon une coupe 2D.</i>                                                                                                                                                                                                | 108 |
| 4.3  | <i>Schématisation de la configuration géométrique 2D retenue pour l'étude paramétrique. Les torons sont modélisés par des rectangles dont un est posé sur le filtre à particules.</i>                                                                                                                                                              | 108 |
| 4.4  | <i>Représentation du domaine de calcul pour l'étude paramétrique (gauche) et noms des limites du domaine (droite).</i>                                                                                                                                                                                                                             | 110 |
| 4.5  | <i>Champs de fraction volumique de poudre obtenus par simulation numérique de l'étude paramétrique n° 5.0 (cf tableau 4.1). Écoulement d'une suspension, initialement homogène en poudre à <math>\phi_0^s = 0,45</math>, autour de deux torons, piloté par un gradient de pression <math>\Delta p = 0,8</math> bar. (Suite sur la figure 4.6).</i> | 113 |
| 4.6  | <i>(Suite de la figure 4.5). Champs de fraction volumique de poudre obtenus par simulation numérique de l'étude paramétrique n° 5.0 (cf tableau 4.1). Écoulement d'une suspension, initialement homogène en poudre à <math>\phi_0^s = 0,45</math>, autour de deux torons, piloté par un gradient de pression <math>\Delta p = 0,8</math> bar.</i>  | 114 |
| 4.7  | <i>Veine de 3 mailles d'épaisseur entre le gâteau particulaire et le toron supérieur à <math>t = 3,96</math> s</i>                                                                                                                                                                                                                                 | 114 |
| 4.8  | <i>Visualisation de la macroporosité finale résultant de quatre écoulements d'une suspension initialement chargée à <math>\phi_0^s = 0,45</math>. Deux écoulements à gradient de pression imposé (a) &amp; (b), et deux à débit imposé (c) &amp; (d). Ces cas correspondent aux cas n° 5.x du tableau 4.1.</i>                                     | 115 |
| 4.9  | <i>Comparaison de la taille finale des macroporosités obtenues lors de l'écoulement d'une suspension chargée à <math>\phi^s = 0,45</math> (a) et <math>\phi^s = 0,40</math> (b).</i>                                                                                                                                                               | 117 |
| 4.10 | <i>Champ de fraction volumique de poudre à l'étape ultime de la simulation montrant la macroporosité finale résultant de l'écoulement d'une suspension initialement homogène à <math>\phi_0^s = 0,4</math>. Comparaison des résultats pour un écoulement piloté par gradient de pression (a) et par un débit (b).</i>                              | 117 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                              |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.11 | <i>Champs finaux de fraction volumique de poudre et taille de la macroporosité obtenue pour quatre suspensions différemment chargées en particules.</i> . . .                                                                                                                                | 118 |
| 4.12 | <i>Superposition de la taille moyenne de la macroporosité obtenue pour les cinq suspensions initiales (0,10 ; 0,20 ; 0,30 ; 0,40 &amp; 0,45). Plus la concentration initiale en particules est faible, plus la macroporosité est petite.</i> . . . . .                                       | 118 |
| 4.13 | <i>Représentation des deux domaines de calcul utilisés dans l'étude 2D du procédé APS. Configuration avec une disposition de torons parfaitement parallèles (a) puis décalés (b).</i> . . . . .                                                                                              | 121 |
| 4.14 | <i>Visualisation des inhomogénéités de compaction dans le renfort fibreux à la fin du procédé APS. Les conditions d'injection sont résumées dans le tableau 4.6. Le maillage utilisé dans cette simulation correspond à une résolution de <math>\Delta_3 = 5.10^{-6}</math> m.</i> . . . . . | 123 |
| 4.15 | <i>Évolution temporelle de la fraction volumique de poudre dans le domaine d'étude. Les conditions opératoires sont celles indiquées dans le tableau 4.6. Visualisation 2D de la croissance du gâteau particulaire autour des torons.</i>                                                    | 124 |
| 4.16 | <i>Comparaison expérimental/numérique en 2D de la compaction particulaire dans l'espace inter-fil. Visualisation des inhomogénéités de remplissage de la préforme en particules.</i> . . . . .                                                                                               | 125 |
| 4.17 | <i>Formation des macroporosités dans la simulation 2D du procédé APS. Trois étapes distinctes se répètent entre chaque épaisseur de torons. Le maillage utilisé ici correspond à la discrétisation <math>\Delta_3 = 5.10^{-6}</math> m.</i> . . . . .                                        | 126 |
| 4.18 | <i>Résultats de compaction obtenus sur la configuration parallèle (a) &amp; (c) et sur la configuration décalée (b) &amp; (d). Répartitions de la fraction volumique de poudre dans le domaine (a) &amp; (b) et tailles des macroporosités finales (c) &amp; (d).</i> . . . . .              | 127 |
| 4.19 | <i>Les trois résolutions de maillage utilisées dans l'étude de convergence spatiale sur la taille et la localisation des macroporosités. Influence de celles-ci sur les contours des fils du renfort fibreux.</i> . . . . .                                                                  | 128 |
| 4.20 | <i>Répartition finale de fraction volumique de particules selon les trois discrétisations utilisées pour l'étude de convergence en maillage.</i> . . . . .                                                                                                                                   | 129 |
| 4.21 | <i>Superposition spatiale du contour des macroporosités obtenues pour les maillages <math>\Delta_1 = 1.10^{-5}</math> m (—), <math>\Delta_2 = 6,6.10^{-6}</math> m (—), <math>\Delta_3 = 5.10^{-6}</math> m (—)</i> . . . . .                                                                | 130 |
| 4.22 | <i>Exemple d'une inhomogénéité résolue par le modèle développé dans ces travaux. Comparaison des résultats obtenus sur trois maillages de plus en plus fins.</i> . . . . .                                                                                                                   | 131 |
| 4.23 | <i>Schématisation de l'armure d'un tissage de type satin avec la localisation des décochements. Les fils de chaîne sont disposés verticalement et représentés par la couleur verte. Les fils de trame horizontaux sont eux caractérisés en bleu.</i> . . . . .                               | 135 |
| 4.24 | <i>Conception assistée par ordinateur d'une armure de satin de module 5 et de décochement 3.</i> . . . . .                                                                                                                                                                                   | 135 |
| 4.25 | <i>Résultat de la projection d'un obstacle lagrangien, sur un maillage eulérien, par la méthode de Ray-casting. Application à l'obstacle utilisé dans nos simulations 3D proches procédé APS.</i> . . . . .                                                                                  | 136 |
| 4.26 | <i>Répartition finale de poudre dans le domaine, après écoulement d'une suspension chargée initialement à <math>\phi_0^s = 0,20</math>. Visualisation de la taille des macroporosité dans cinq coupes de normale <b>y</b>.</i> . . . . .                                                     | 138 |



|      |                                                                                                                                                                                                                                               |     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.27 | <i>Répartition finale de poudre dans le domaine, après écoulement d'une suspension chargée initialement à <math>\phi_0^s = 0,20</math>. Visualisation de la taille des macroporosité dans cinq coupes de normale <math>\mathbf{z}</math>.</i> | 139 |
| 4.28 | <i>Répartition finale de poudre dans le domaine, après écoulement d'une suspension chargée initialement à <math>\phi_0^s = 0,45</math>. Visualisation de la taille des macroporosité dans cinq coupes de normale <math>\mathbf{y}</math>.</i> | 140 |
| 4.29 | <i>Répartition finale de poudre dans le domaine, après écoulement d'une suspension chargée initialement à <math>\phi_0^s = 0,45</math>. Visualisation de la taille des macroporosité dans cinq coupes de normale <math>\mathbf{z}</math>.</i> | 141 |
| 4.30 | <i>Zoom sur les macroporosités les plus importantes et résultantes de la compaction particulaire dans la préforme fibreuse pour une suspension initialement chargée à <math>\phi_0^s = 0,20</math>.</i>                                       | 142 |
| 4.31 | <i>Zoom sur les macroporosités les plus importantes et résultantes de la compaction particulaire dans la préforme fibreuse pour une suspension initialement chargée à <math>\phi_0^s = 0,45</math>.</i>                                       | 143 |
| 4.32 | <i>Comparaison expérimental/numérique en 3D de la compaction particulaire dans l'espace inter-fil. Visualisation des inhomogénéités de remplissage de la préforme.</i>                                                                        | 144 |
| 4.33 | <i>Macroporosités résultantes sur le plan <math>\mathbf{z} = 10,8</math> m, pour les deux suspensions étudiées.</i>                                                                                                                           | 144 |
| C.1  | <i>Schéma de la microfiltration frontal lors de l'écoulement d'une suspension au travers d'une membrane. [Belfort et al., 1994]</i>                                                                                                           | 157 |
| E.1  | <i>Schéma du procédé de compaction 1D selon la direction <math>\mathbf{y}</math> tel qu'il est résolu avec une approche numérique type volumes finis.</i>                                                                                     | 164 |

# Liste des tableaux

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |     |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.1 | <i>Les différentes dénominations des solutions en fonction du type de chaque constituant.</i>                                                                                                                                                                                                          | 11  |
| 1.2 | <i>Gamme de valeurs prises par les paramètres opératoires du procédé Slurry Cast APS.</i>                                                                                                                                                                                                              | 29  |
| 2.1 | <i>Exemple de modèles rhéologiques semi-empiriques permettant de lier la viscosité à la fraction volumique de particules en suspension.</i>                                                                                                                                                            | 45  |
| 2.2 | <i>Gamme de valeurs des paramètres de similitude</i>                                                                                                                                                                                                                                                   | 53  |
| 2.3 | <i>Valeur des coefficients <math>(a, b, c)</math> pour les schémas centrés, décentrés gauche et décentrés droite obtenus par la méthode des différences finies.</i>                                                                                                                                    | 58  |
| 3.1 | <i>Longueur d'établissement des profils de fraction volumique de poudre et de vitesses pour un rapport <math>a/R = 0,0256</math>. En notation adimensionnée via le diamètre du conduit <math>(L_{\phi^s, v}/D)</math> et notation réelle <math>(L_{\phi^s, v})</math>.</i>                             | 79  |
| 3.2 | <i>Ensemble des conditions aux limites appliquées dans la modélisation du canal.</i>                                                                                                                                                                                                                   | 80  |
| 3.3 | <i>Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques sur les longueurs d'établissement des profils de fraction volumique de poudre et de vitesses pour un rapport <math>a/R = 0,0256</math>. Explicitation de l'écart commis pour les trois suspensions initialement homogène en poudre.</i> | 87  |
| 3.4 | <i>Ensemble des conditions limites appliquées pour la simulation de l'écoulement dans un milieu poreux de référence.</i>                                                                                                                                                                               | 90  |
| 3.5 | <i>Ensemble des conditions limites appliquées pour la simulation de l'écoulement dans le gâteau particulaire.</i>                                                                                                                                                                                      | 92  |
| 3.6 | <i>Ensemble des conditions limites appliquées pour la simulation de la croissance du gâteau particulaire. Écoulement à gradient de pression imposé.</i>                                                                                                                                                | 98  |
| 3.7 | <i>Ensemble des conditions limites appliquées pour la simulation de la croissance du gâteau particulaire. Écoulement à débit imposé.</i>                                                                                                                                                               | 98  |
| 4.1 | <i>Conditions opératoires des 25 cas tests de l'étude paramétrique du procédé Slurry Cast/APS. Variation des paramètres concentration <math>\phi_0^s</math>, pression <math>\Delta p</math>, et vitesse <math>\mathbf{u}</math>.</i>                                                                   | 109 |
| 4.2 | <i>Valeur maximale du nombre de Reynolds pour les 25 cas tests de l'étude paramétrique du procédé Slurry Cast/APS.</i>                                                                                                                                                                                 | 109 |
| 4.3 | <i>Ensemble des conditions aux limites appliquées dans l'étude paramétrique 2D, pour un écoulement piloté par un gradient de pression imposé.</i>                                                                                                                                                      | 111 |
| 4.4 | <i>Ensemble des conditions aux limites appliquées dans l'étude paramétrique 2D, pour un écoulement piloté par un débit imposé, de vitesse <math>\mathbf{u}</math>.</i>                                                                                                                                 | 111 |

|     |                                                                                                                                                                                                             |     |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.5 | <i>Aire de la macroporosité résiduelle obtenue pour cinq concentrations initiales de suspensions. . . . .</i>                                                                                               | 119 |
| 4.6 | <i>Ensemble des conditions aux limites appliquées dans l'étude 2D du procédé APS. . . . .</i>                                                                                                               | 122 |
| 4.7 | <i>Surface occupée par la macroporosité, représentée sur la figure 4.22, en fonction de la résolution du maillage. Résultat en nombre approximatif de mailles occupées, et surface équivalente. . . . .</i> | 131 |
| 4.8 | <i>Localisation des décrochements dans l'armure de satin. . . . .</i>                                                                                                                                       | 134 |
| 4.9 | <i>Ensemble des conditions limites appliquées dans la simulation 3D de l'écoulement d'une suspension autour d'une préforme tissée de type satin. . . .</i>                                                  | 137 |

# Introduction générale

Le domaine de l'aérospatiale regroupe les sciences et les techniques qui permettent le transport matériel et humain dans l'atmosphère terrestre (aéronautique) et extraterrestre (astronautique). Ce domaine fait appel aux sciences relevant de la mécanique des fluides, telles que l'aérodynamique, mais également aux techniques propres à la conception et la propulsion d'aéronefs. Historiquement plus ancien motoriste aéronautique du monde, le groupe SAFRAN est désormais un équipementier de premier rang dans le domaine aérospatial, de la défense et de la sécurité. Pour ces deux derniers, le groupe SAFRAN est par exemple le leader mondial des solutions d'identité biométrique, des systèmes d'identification digitale et même de la détection d'explosifs pour les bagages en soute.

Du point de vue de l'aérospatiale, le groupe est un pionnier dans le développement de solutions à haute technologie concernant la propulsion de lanceurs spatiaux (Ariane 5), de missiles (Milan, MICA, ...), d'hélicoptères et d'avions, tant militaires que civils. En se focalisant uniquement sur l'aviation civile, nous pouvons citer l'exemple du moteur d'avion CFM56, fruit de la collaboration entre SNECMA (ancien SAFRAN) et GE (General Electric). Ce moteur d'avion est actuellement le moteur le plus vendu au monde et équipe des avions moyen-courriers tels que les Boeing 747 et Airbus A380.

Dans une volonté d'amélioration des performances du moteur tout en minimisant sa consommation en carburant et ses rejets en gaz polluants, une nouvelle génération est actuellement en cours de conception : le moteur LEAP. En plus de l'intérêt économique, ce projet s'inscrit dans la politique actuelle de réduction de l'impact humain sur l'environnement. A titre d'exemple, nous pouvons évoquer le programme européen de recherche *Clean Sky*, mené en collaboration entre la communauté européenne et les industries aéronautiques, et ayant pour principaux objectifs :

- une réduction de 50% des émissions de dioxyde de carbone ( $\text{CO}_2$ ),
- une réduction de 80% des émissions d'oxyde d'azote ( $\text{NO}$  &  $\text{NO}_2$ ),
- une réduction de 50% de la pollution sonore.

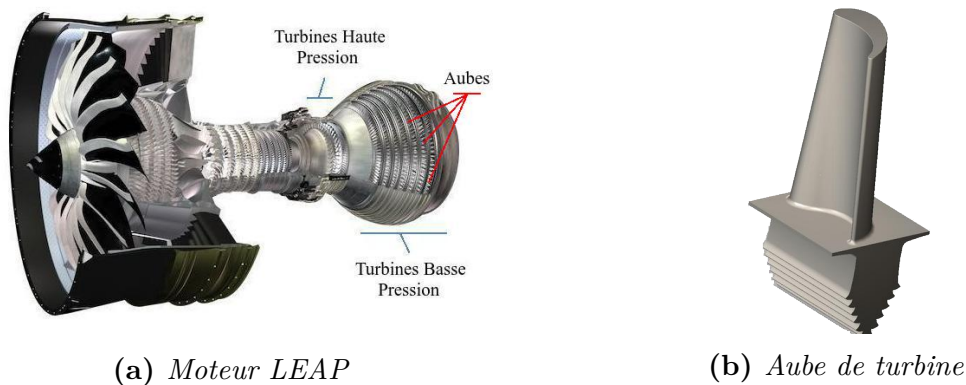
Le respect de ces objectifs industriels, économiques et environnementaux nécessite obligatoirement des avancées technologiques sur toutes les composantes du moteur existant. Nous pouvons citer le travail d'architecture et de conception optimisée des zones basses pression (figure 1a) ainsi que le travail de minimisation du poids du moteur, assurant fiabilité et faibles coûts d'opération et de maintenance. Du point de vu écologique, la réduction des rejets de gaz polluants est garantie via l'augmentation des températures de fonctionnement dans les zones haute pression (amélioration des cycles thermodynamiques de la combustion). Pour s'assurer que cette modification n'altère en rien le comportement mécanique des aubes de turbine présentes dans ces zones (figure 1b), il est indispensable que leur conception fasse appel à un nouveau type de matériau composite.

Toute la phase de recherche, d'étude et de tests de ce nouveau matériau composite ainsi que la production finale de la pièce moteur considérée a été confiée à l'entreprise SAFRAN Ceramics, centre d'excellence du groupe sur ce domaine. Ce type de matériau se distingue d'un matériau métallique classique homogène puisqu'il se compose de deux (ou plus) constituants non miscibles : l'armature fibreuse (assurant la robustesse de la pièce) et la matrice (englobant l'armature et assurant la cohésion de la pièce). Schématiquement, la fabrication d'un tel matériau se déroule en deux étapes :

1. la phase de tissage ou de tressage permettant la confection de l'armature fibreuse selon une forme bien déterminée,
2. la phase de densification générant la matrice autour de l'armature.

Nous reviendrons plus en détails sur la définition des matériaux composites ainsi que sur les différents procédés de fabrication au cours du chapitre 1 de ce mémoire.

La notion fondamentale d'une telle problématique est que le comportement thermomécanique d'une pièce manufacturée en matériau composite dépendra tant de la conception de l'armature fibreuse que de la densification matricielle. En effet, l'enchevêtrement des fils au sein de l'armature de la pièce suit un schéma bien précis, déterminé préalablement, et qui, après densification, confère à l'ensemble la solidité nécessaire au bon fonctionnement de la pièce. Cette robustesse est d'autant mieux garantie que la densification est optimale. Dans le cas particulier d'une aube de turbine, nous remarquons que sa géométrie n'est pas triviale (*cf* exemple donné en figure 1b) et présente énormément de discontinuités structurales, notamment entre sa base large et son corps effilé. Celles-ci impliquent la génération d'une armature fibreuse en trois dimensions, dont la complexité rend sa densification difficile. Ainsi, il est nécessaire que l'étape de création matricielle soit la mieux maîtrisée possible afin d'assurer la cohérence de la pièce finale et sa sûreté en fonctionnement.



**Figure 1** – *Vue simplifiée du moteur LEAP développé par SAFRAN (a) et d'une forme générale d'aube de turbine (b). L'aube n'est pas représentative de celles utilisées dans les moteurs LEAP.*

Pour palier à ces difficultés, SAFRAN Ceramics a mis au point un nouveau procédé de densification de matériau composite adapté aux aubes de turbine présentes dans le moteur LEAP. Celui-ci peut-être décrit en deux sous-étapes successives et bien distinctes. La première est l'étape de **Slurry Cast/APS** où de fines particules sont introduites dans l'armature. Cette étape équivaut à une pré-densification et permet une réduction et une homogénéisation de la porosité existante dans l'armature.

De cette manière, la remontée capillaire d'un métal fondu est grandement améliorée durant la seconde étape **RMI**. Ce métal réagissant avec les particules pour former la matrice. Ce procédé de densification étant relativement nouveau, les mécanismes physico-chimiques intrinsèques sont mal appréhendés par l'industriel, et ce, aussi bien lors de l'étape d'introduction des particules que lors de la remontée capillaire réactive. Dans une volonté de maîtrise du procédé de fabrication, de répétabilité des résultats et d'adaptabilité à l'échelle de la production, il est indispensable de comprendre toute la physique et d'expliquer l'influence de chaque paramètre opératoire sur le résultat final de densification.

Dans cette optique, l'industriel a décidé de lancer des campagnes d'études approfondies sur chaque étape du procédé décrit précédemment. Au sujet de la seule remontée capillaire réactive, nous pouvons citer les travaux expérimentaux d'Alexandre MARCHAIS [Marchais, 2016] et numériques d'Audrey PONS [Pons, 2017]. Les travaux qui nous intéressent dans cette thèse s'inscrivent dans cette démarche de compréhension en proposant une étude numérique de l'étape d'introduction des particules dans l'armature fibreuse. L'objectif principal de cette étude est de mettre au point un système d'équations permettant de résoudre le plus finement possible l'ensemble du procédé Slurry Cast/APS. Cette démarche de modélisation n'est pas immédiate car la physique d'imprégnation de l'armature par des particules fait appel à beaucoup de notions de la mécanique des fluides, telles que l'écoulement d'un fluide chargé, l'écoulement en milieux poreux et la rhéologie des fluides complexes. De plus, les particules à injecter ont une taille caractéristique bien inférieure à la résolution mise en place dans cette étude. Le modèle développé doit intégrer cette dissociation d'échelle en proposant une description macroscopique incluant le comportement microscopique des particules en suspension.

Le présent mémoire a pour objectif de synthétiser l'ensemble des travaux menés durant ces trois années de thèse : de la description détaillée de la physique, en passant par la conception du modèle jusqu'à l'étape finale permettant la simulation du procédé Slurry Cast/APS sur des préformes représentatives. Afin de présenter le plus clairement possible ces travaux, ce mémoire est organisé autour de quatre chapitres traduisant les quatre grandes étapes nécessaires à la conception et à l'utilisation du modèle numérique.

Le premier chapitre présente l'ensemble du contexte scientifique et industriel inhérent à ce procédé de pré-densification. Il y sera présenté les matériaux composites, de leur définition à leur conception, mais également des notions nécessaires à la description de la physique des suspensions de particules et de l'écoulement en milieu poreux. L'ensemble de la physique discutée sera alors replacée dans le contexte du procédé étudié, et les objectifs fixés par l'industriel SAFRAN Céramics seront présentés.

Dans un deuxième chapitre, toutes les équations du modèle seront explicitées, et les méthodes numériques permettant leur résolution expliquées. Ces équations, considérées dans le cadre de la mécanique des milieux continus, devront représenter toute la physique discutée au premier chapitre. Les méthodes numériques, basées sur des schémas aux volumes finis, ont pour objectifs de déterminer une solution approchée à ces équations.

Comme dans toute démarche d'élaboration d'un modèle numérique, l'étape de validation est une des plus importante. En effet, elle permet d'éprouver les résultats du modèle par comparaison avec des lois théoriques ou des résultats expérimentaux. Dans nos travaux cette validation est effectuée à l'aide des travaux de [Hampton et al., 1997] (sur la ségrégation particulaire) et de [Belfort et al., 1994] (sur la compaction et la filtration), et sera présentée dans le troisième chapitre.

Finalement, ce modèle numérique validé sera alors utilisé pour répondre aux questionnements de l'industriel concernant le procédé Slurry Cast/APS. A ce titre, le quatrième chapitre présentera les résultats d'une étude paramétrique permettant d'établir l'influence des paramètres opératoires sur l'homogénéité de remplissage de la préforme en particules. S'en suivra la présentation des résultats d'imprégnation 2D et 3D, dans des configurations de tissage proches de celles observées dans les aubes de turbines développées.

# Chapitre 1

## Contexte scientifique et problématique

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans une volonté de compréhension du procédé d'élaboration d'un matériau composite, par le développement et l'utilisation d'un modèle numérique d'équations aux dérivées partielles (EDP). Dans le but de faciliter la construction de ce modèle, il est primordial de définir l'ensemble des notions théoriques et physiques présentes dans ces travaux. De cette manière, nous pourrons effectuer un état des lieux général des travaux scientifiques dans ce domaine.

Pour résumer, le procédé de pré-densification Slurry Cast/APS permet l'introduction de fines particules au sein de l'armature fibreuse d'un matériau composite. Avant toute chose, il est intéressant de donner une définition générale des matériaux composites. C'est l'objectif de la première section de ce chapitre, qui présente très précisément les différents éléments constitutifs ainsi que les méthodes de fabrication. Par suite à cette section, nous discuterons de l'ensemble de la physique présente dans cette problématique, à savoir la mise en suspension des particules, la rhéologie de ces suspensions, les différentes échelles de modélisation et l'écoulement fluide en milieu poreux. Enfin, l'ensemble du procédé de fabrication des aubes de turbines mis en place par SAFRAN Ceramics, à savoir tissage de la préforme, pré-densification Slurry Cast/APS et densification finale RMI, sera présenté. Toutes les notions générales seront ainsi replacées dans le contexte industriel de cette thèse, ce qui nous permettra de fixer le cahier des charges que notre modèle devra satisfaire afin de répondre aux questionnements de l'industriel.

### 1.1 Matériaux composites

#### 1.1.1 Composite à matrice céramique (CMC)

Les matériaux composites se composent classiquement d'un renfort fibreux intégré dans une matrice métallique, organique ou céramique [Naslain, 1985]. Au vu du comportement final souhaité par l'industriel, le choix du matériau à développer s'est porté sur un composite à matrice céramique (CMC) qui offre le meilleur compromis légèreté/résistance à l'endommagement. La nomenclature pour décrire un CMC se présente de la manière suivante : Composition du renfort fibreux<sub>f</sub> / Composition de la matrice.



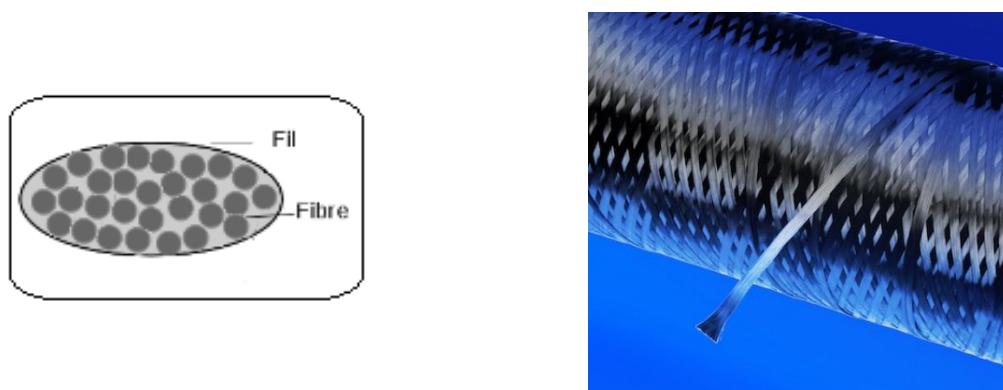
En notant  $C$  un composé carbone et  $SiC$  un composé de carbure de silicium, les CMC les plus répandus sont les  $C_f/C$ , les  $C_f/SiC$  ou les  $SiC_f/SiC$ . Nous reviendrons plus en détail dans les parties suivantes sur les procédés de fabrication permettant l'obtention de tels matériaux composites. En effet, dans cette partie, nous nous contentons de décrire le plus distinctement la composition interne d'un CMC classique.

Ainsi, fondamentalement, un CMC se compose de trois éléments :

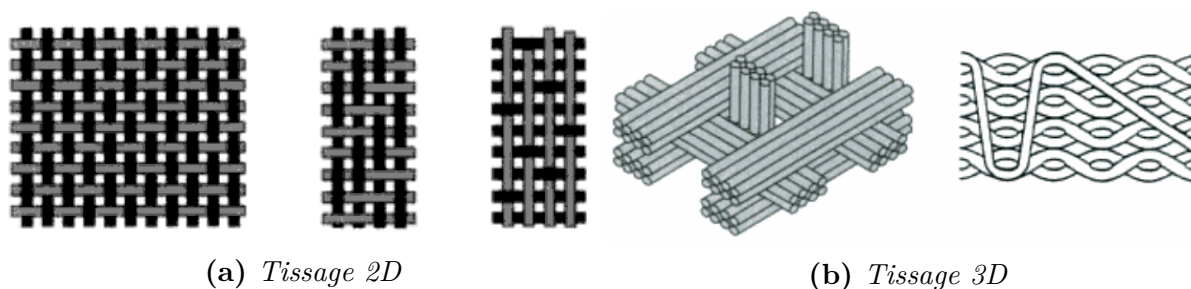
1. **Fibres** : regroupées en fils tressés entres eux, elles forment l'armature fibreuse.
2. **Interphase** : elle permet de séparer les fibres et la matrice.
3. **Matrice** : en englobant le renfort fibreux, elle assure la cohésion du CMC.

### FIBRE

Les fibres forment le squelette du composite thermostuctural. Ce sont elles qui lui procurent son excellent comportement mécanique et sa résistance à la traction et à la rupture. Ces fibres sont regroupées entre elles pour former des fils dont un schéma en coupe est donné sur la figure 1.1 (*gauche*). Le fil obtenu (figure 1.1 (*droite*)) est ensuite utilisé pour former une armature 1D, 2D ou même 3D [Gries et al., 2008] (*cf* figure 1.2). De la forme finale du tissage dépendra tant la résistance du matériau que la complexité des procédés de fabrication mis en jeu.



**Figure 1.1** – Schéma de la coupe d'un fil formé de fibres élémentaires (*gauche*) et vue macroscopique d'un fil (*droite*).



**Figure 1.2** – Exemple de différents renforts fibreux rencontrés dans les CMC. En 2D (**a**) et 3D (**b**). [Gries et al., 2008].

Dans une approche de modélisation/simulation d'un procédé de densification de CMC, comme celle dans laquelle s'inscrit cette thèse, plus le tissage final est complexe plus il sera difficile de trouver des motifs élémentaires représentatifs (VER) de l'armature et plus les simulations nécessiteront des grands domaines de discrétisation (ou maillage). Cette observation est déterminante pour bien définir les limites d'action d'une telle étude (nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 4 sur les résultats des simulations).

## INTERPHASE

Avant de densifier l'armature fibreuse pour former le CMC, il est parfois nécessaire d'y déposer une interphase afin d'isoler les fils. Celle-ci peut avoir plusieurs rôles. En premier lieu, elle peut être utilisée comme protection chimique vis à vis de la matrice. En effet, dans certains cas, les constituants présents dans les fils et la matrice peuvent générer des réactions chimiques pouvant dégrader le tissage et donc diminuer très fortement la résistance du matériau final. Elle peut également être utilisée comme protection contre l'oxydation naturelle des fils. Une autre utilité de l'interphase concerne la densification du CMC. En effet, elle permet d'uniformiser, sur une petite épaisseur, les contours des fils. Cette uniformisation est parfois nécessaire afin de maîtriser le procédé de densification du CMC qui suivra. Généralement composée de pyrocarbone (*PyC*) elle est déposée sur l'armature à l'aide du procédé CVI pour *Chemical Vapor Deposition*.

## MATRICE

La matrice d'un matériau composite est un composant très important car en englobant le renfort fibreux, elle assure la cohésion de la pièce finale. Son rôle est donc double puisqu'elle a également pour objectif de transférer les contraintes mécaniques subies par le matériau vers son armature fibreuse beaucoup plus rigide. C'est grâce à ce couplage matrice/renfort que la résistance mécanique du matériau thermostructural est assurée.

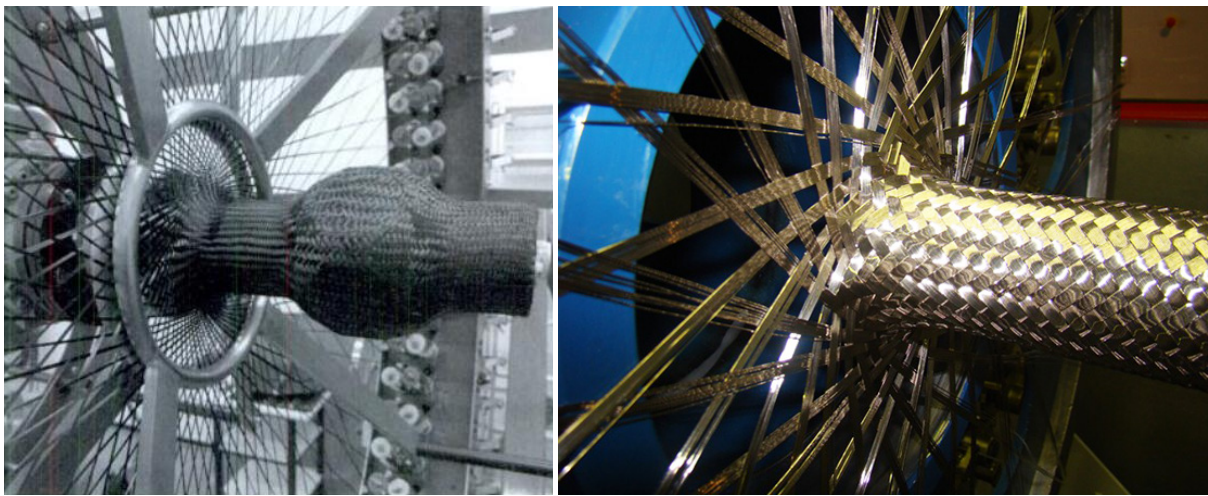
L'obtention d'une matrice homogène, c'est à dire sans défaut ni porosité, est très importante pour garantir un comportement mécanique irréprochable du CMC final. En effet, le moindre défaut engendrera d'importantes contraintes pouvant aller d'une simple fissure à une rupture totale du matériau. Dans le cas des matériaux à matrice auto-cicatrisante, les fissures générées au sein de la matrice peuvent être automatiquement bouchées, et ceci pendant le fonctionnement même de la pièce [Benazzouk et al., 2013] [Benazzouk, 2013]. Il est très important de totalement maîtriser le procédé de densification du CMC (création de la matrice) afin d'assurer un remplissage parfait du renfort fibreux. C'est dans cette optique qu'une telle démarche de modélisation/simulation trouve son sens. En effet, en exhibant l'ensemble des phénomènes physico-chimiques inhérents à ces procédés, elle permet :

- d'expliquer la formation de défaut dans la matrice en fonction des paramètres opératoires,
- d'étudier rapidement l'influence des paramètres opératoires sur l'homogénéité finale de la matrice,
- d'avoir une cartographie interne en 3D du matériau sans nécessiter de travailler ni de dégrader des pièces réelles,
- de manipuler facilement et rapidement par visualisation informatique des pièces manufacturées onéreuses ou longues à fabriquer.

### 1.1.2 Les étapes de fabrication d'un CMC

Une fois décrite la composition générale d'un matériau composite à matrice céramique (renfort tissé + interphase + matrice) il est intéressant d'en décrire les diverses étapes de fabrication. Comme vaguement exposé un peu plus haut, ces étapes sont essentiellement au nombre de trois.

Dans un premier temps, le squelette du CMC formé par des fibres céramiques est manufacturé selon un agencement bien précis permettant au matériau final de résister aux sollicitations thermiques et mécaniques que son utilisation lui confèrent. Pour cela, les fils sont tissés ou tressés à l'aide de tresseuses industrielles dont une illustration est donnée sur la figure 1.3. Ces machines ressemblent fortement à celles rencontrées dans l'industrie textile.



**Figure 1.3** – *Tresseuses industrielles d'armature de CMC. [Gries et al., 2008].*

Nous remarquons ici que la forme finale de l'armature fibreuse peut être très complexe, et nécessiter l'utilisation de machine de haute technologie.

Par suite à cette étape, une interphase en pyrocarbone peut être déposée sur une fine couche autour de l'armature avant l'étape finale. Cette dernière étape, appelée densification, permet d'introduire ou de générer la matrice autour et/ou à l'intérieur du renfort fibreux.

Nous pouvons distinguer quatre grandes familles de densification :

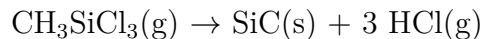
- Densification par frittage : une poudre est incorporée à l'intérieur de l'armature et est chauffée afin que les grains se soudent s'interpénètrent.
- Densification par voie gazeuse : un gaz est injecté dans l'armature où il se décompose et se dépose sur les fils. La croissance du dépôt tend à complètement envahir l'espace inter-fils générant la création d'une matrice homogène.
- Densification par voie liquide : l'injection et la pyrolyse d'un polymère à l'intérieur de l'armature permettent, après refroidissement, la génération de la matrice.
- Densification par réaction chimique : un premier composant est introduit préalablement dans la préforme et réagit dans un deuxième temps avec un composant gazeux ou liquide pour former la matrice.

Dans le cadre de cette thèse, nous ne nous intéresserons qu'aux trois dernières familles car ce sont celles qui apparaissent dans l'élaboration des pièces utilisées par SAFRAN Ceramics. En effet, bien que l'étude ne se concentre que sur une des nombreuses étapes de fabrication, il est intéressant de comprendre tous les mécanismes nécessaires à la création complète de la pièce. Ainsi, dans les trois parties suivantes, nous verrons plus en détails le principe des densifications par voie gazeuse, par voie liquide et enfin par réaction chimique.

### 1.1.3 Densification par voie gazeuse

Une des premières méthodes de densification que l'on se propose de considérer est la densification par voie gazeuse appelée CVI pour *Chemical Vapor Infiltration*. Celle-ci dérive de la méthode de dépôt chimique par voie gazeuse ou CVD [Drieux, 2013]. Toutefois, il y a une différence majeure entre ces deux méthodes. Ainsi, dans le cas de la CVD, le dépôt s'effectue sur la surface externe d'un matériau tandis que dans celui de la CVI, le dépôt s'effectue à l'intérieur d'un matériau poreux.

Le principe de base repose sur la décomposition d'un précurseur gazeux à l'intérieur de l'armature qui est chauffée par induction. La décomposition du précurseur peut se faire d'une manière homogène (à l'intérieur du gaz) ou hétérogène via un dépôt en fine couche sur le substrat chauffé. Dans le cas des CMC, un précurseur est couramment utilisé, c'est le Méthyltrichlorosilane de formule  $\text{CH}_3\text{SiCl}_3$  car il se décompose selon la réaction suivante :



Les avantages d'une telle méthode de densification sont nombreux. En effet, les températures et les pressions utilisées durant tout le procédé ne génèrent aucune modification de l'armature fibreuse. De plus, la matrice de carbure de silicium obtenue est très pure, ce qui est absolument nécessaire dans certaines applications, notamment nucléaires.

Cependant, la croissance du dépôt à l'intérieur du matériaux poreux va nécessairement générer des phénomènes d'occlusion provoquant la création de zones fermées non pourvues en réactifs. Ainsi, les pièces densifiées par CVI gardent une porosité résiduelle importante à la fin de leur fabrication.

### 1.1.4 Densification par voie liquide

La deuxième classe est la densification par voie liquide, où la matrice est formée à l'aide de l'injection d'un liquide à l'intérieur de l'armature fibreuse. Ce liquide peut être, soit un polymère, soit un métal fondu. On parlera dans le premier cas d'une densification LPI (pour *Liquid Polymer Infiltration*), PIP (pour *Polymer Infiltration and Pyrolysis*), RTM (pour *Resin Transfer Moulding*) ou bien LRI (pour *Liquid Resin Infusion*). Dans le deuxième cas on parlera plutôt de MI (pour *Melt Infiltration*) ou de RMI (pour *Reactive Melt Infiltration*).

Dans les procédés LPI ou PIP, le précurseur utilisé est un polymère, qui, en fonction de la matrice souhaitée (Carbone ou Carbure de Silicium), sera soit un hydrocarbure soit un polycarbosilane. Ce polymère est injecté au sein du renfort fibreux où sa pyrolyse formera la matrice.

L'inconvénient principal de l'utilisation de la pyrolyse est quelle entraîne une diminution de volume du composé. Il est donc nécessaire de répéter le procédé plusieurs fois afin de diminuer au maximum la porosité résiduelle. Cependant, d'une façon analogue au procédé CVI, la porosité résiduelle finale du CMC reste élevée.

Dans les procédés MI ou RMI le précurseur utilisé n'est plus un polymère, mais un métal en fusion [Hillig, 1994]. Dans ce procédé, l'injection du métal fondu est soit inerte (MI) soit réactive (RMI), avec un composant préalablement introduits dans l'espace inter-fil. Le principal inconvénient de ces méthodes est qu'un certain nombre de paramètres doivent être maîtrisés, comme par exemple la viscosité du métal, la réaction chimique ou même la mouillabilité du tissage [Hillig, 1988]. Cependant, si le procédé est maîtrisé, la porosité résiduelle finale du CMC sera bien moindre que pour les deux autres densifications.

### 1.1.5 Densification par réaction chimique

Enfin, le dernier procédé présenté ici est la densification par réaction chimique. Dans ce cas, un composé couramment présenté sous forme d'une poudre, est préalablement introduit dans l'espace inter-fils. Ce composé est exposé à un gaz ou un liquide (*cf* parties précédentes) dans le but de déclencher une réaction chimique permettant la formation de la matrice. Le procédé RMI se rapproche grandement de ce principe. De la même manière, un certain nombre de paramètres doivent être maîtrisés afin de correctement densifier le matériau. Cependant, dans ce procédé, la porosité résiduelle finale du CMC est, là aussi, peu importante.

Dans cette partie sur les matériaux composites, et plus particulièrement sur les composites à matrice céramique, nous avons vu qu'un CMC était un matériau complexe formé de plusieurs composants : le renfort tissé, l'interphase et la matrice. Chacun de ces composants ayant un rôle prédéfini et une fonction propre, ils confèrent à l'ensemble du matériau final, sa robustesse et sa légèreté. L'élaboration du renfort tissé est la première étape de fabrication, et est l'une des plus importantes. En effet, l'armature est tissée (ou tréssée) d'une manière précise afin de répondre parfaitement aux sollicitations thermiques et mécaniques du CMC final. Après le dépôt de l'interphase sur le tissage, la matrice vient densifier l'ensemble afin de lui apporter cohésion, robustesse et légèreté. Nous avons vu qu'il existe une multitude de procédés permettant de générer cette matrice avec chacun leur lot d'avantages et d'inconvénients. En fonction des besoins de chaque CMC et du type d'emploi de la pièce finale, certains procédés seront à bannir et d'autres à privilégier.

Il était important de présenter tous ces procédés de densification afin de parfaitement comprendre tous les mécanismes inhérents à celui étudié dans cette thèse. En effet, comme nous le verrons dans une prochaine partie (*cf* section 1.4), le procédé de densification que nous souhaitons modéliser à travers ces travaux est complexe et regroupe des problématiques rencontrées dans chaque type de densification.

Cependant, avant de présenter plus en détails le procédé étudié, il est important de présenter toute la physique du problème que nous allons étudier, à savoir la physique des suspensions particulières. La partie suivante s'attache donc à donner une définition générale des suspensions. Seront également évoqués les différents types de particules et les échelles caractéristiques que l'on peut trouver dans les suspensions. Enfin, après avoir discuté de la rhéologie de celles-ci, nous étudierons les différents axes de modélisation du suivi particulière.

## 1.2 Suspension particulaire

### 1.2.1 Présentation générale des suspensions

Par définition, une suspension est un mélange hétérogène d'un (ou plusieurs) composé(s) dans un milieu saturant. La dispersion fine des composés permet l'obtention d'un mélange à plusieurs phases non miscibles entre elles. Une suspension est à distinguer des solutions, où le(s) composé(s) est(sont) dissous dans la phase saturante pour ne former qu'une seule et même phase.

Dans une suspension hétérogène, chaque composé, mais également la phase porteuse, peut être sous la forme gazeuse, liquide ou solide. En fonction de l'état de la matière dans lequel se trouve le constituant et la phase porteuse, le mélange aura un nom bien spécifique. L'ensemble des dénominations pour les neuf cas existants, est répertorié dans le tableau 1.1.

**Table 1.1** – *Les différentes dénominations des solutions en fonction du type de chaque constituant.*

|                  | Composé Gazeux | Composé Liquide  | Composé Solide |
|------------------|----------------|------------------|----------------|
| Saturant Gazeux  | ∅              | Aérosol Liquide  | Aérosol Solide |
| Saturant Liquide | Mousse Aqueuse | Émulsion Liquide | Sol            |
| Saturant Solide  | Mousse Solide  | Émulsion Solide  | Sol Solide     |

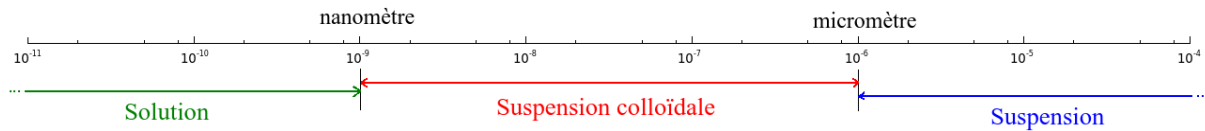
Afin de bien comprendre les différentes dénominations exposées ci-dessus, et ainsi illustrer les différents types de suspensions, on se propose de donner, pour chaque cas, une liste non exhaustive d'exemples de la vie courante :

- Mousse aqueuse : mousse de savon, de la bière ou même de certains extincteurs.
- Mousse solide (*généralement issue de la solidification de la phase liquide d'une mousse aqueuse*) : mousse de polyuréthane, mousse isolante.
- Aérosol liquide : les nuages ou la brume.
- Aérosol solide : l'ensemble des polluants ou des allergènes présents dans l'air.
- Émulsion liquide : mélange eau/huile (vinaigrette) ou le lait.
- Émulsion solide : l'exemple le plus parlant est le beurre.
- Sol : la peinture, le sang, etc.
- Sol solide : l'ensemble des verres.

L'étude que nous menons dans le cadre de cette thèse ne se concentre que sur des suspensions de particules solides dans un milieu saturant liquide. Ainsi, dans toute la suite du manuscrit, le terme de suspension ne se focalisera plus que sur le type "sol" du tableau 1.1.

Dans ce cadre précis des suspensions, une distinction est également faite en fonction de la taille des particules mises en suspension. On parlera de solution pour des particules de tailles inférieures au nanomètre ( $< 10^{-9}\text{m}$ ), de suspensions colloïdales pour des particules de tailles allant du nanomètre au micromètre ( $> 10^{-9}\text{m}$  et  $< 10^{-6}\text{m}$ ) et de suspension pour des tailles supérieures au micromètre [Hiemenz et al., 1986]. L'ensemble de ces dénominations est schématisé sur la figure 1.4, page 12.



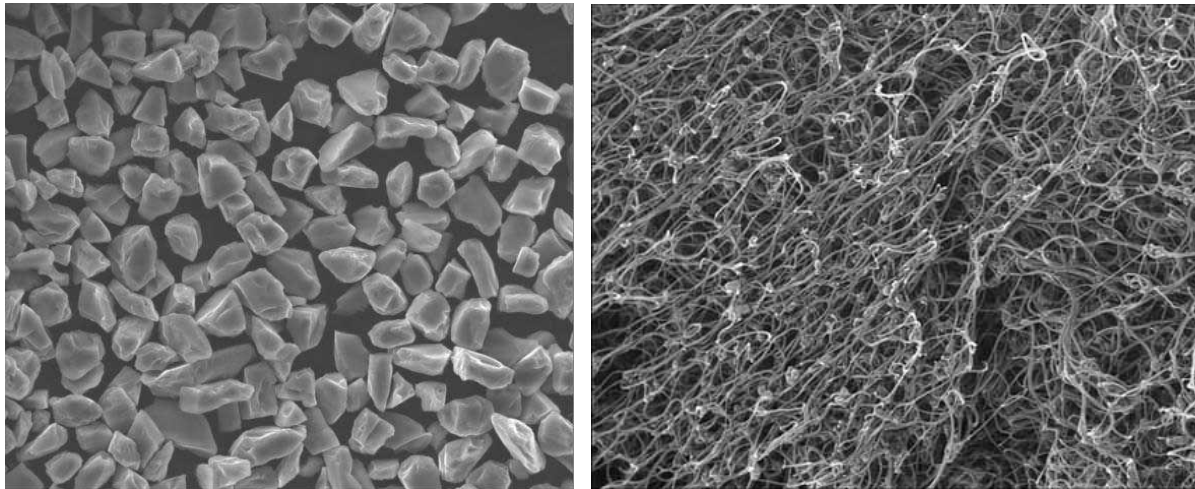


**Figure 1.4** – Dénomination des suspensions en fonction de la taille des particules.

Comme nous le reverrons plus loin (*cf* section 1.4), les suspensions concernées dans le procédé de densification que nous souhaitons modéliser utilisent des particules dont la distribution des tailles est comprise entre  $1\ \mu\text{m}$  et  $10\ \text{nm}$ . Dans la suite du manuscrit, la qualification de ces suspensions comme colloïdes ne fera référence qu'à cette gamme de taille des particules et non pas aux conditions d'utilisation des fluides chargés.

### 1.2.2 Les différents types de particules

Dans une problématique de suspensions colloïdales telles qu'elles sont présentées ci-dessus, et en particulier dans une problématique industrielle de densification de CMC, nous pouvons trouver toutes sortes de particules. Nous distinguons ainsi les formes élémentaires, observées dans les particules de carbone, de silice, ou de carbure de silicium, des formes effilées présentes dans la problématique des nanotubes de carbone (*cf* figure 1.5). Nous pouvons également les distinguer par leurs caractéristiques, notamment magnétiques.



**Figure 1.5** – Particules de carbure de silicium sous MEB (gauche). Agrégat de nanotube de carbone en suspension (droite).

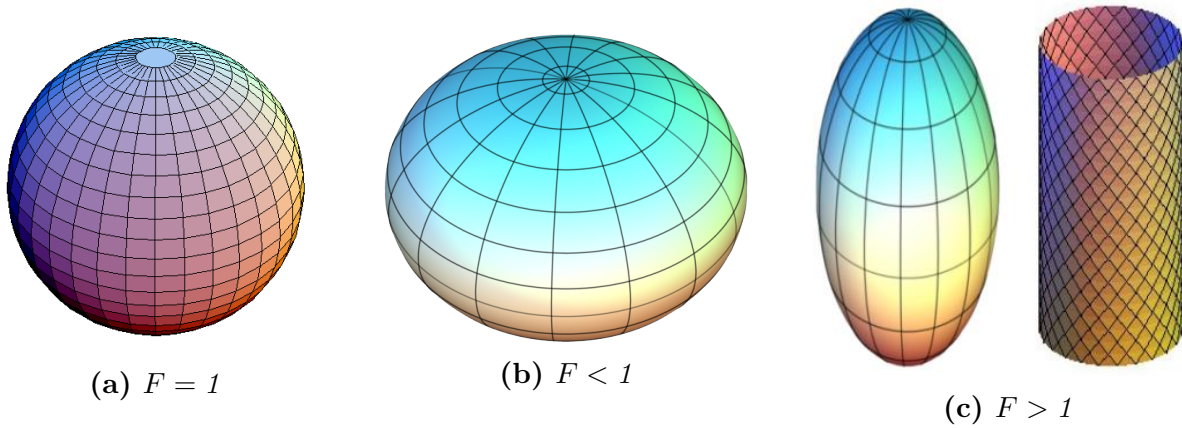
Dans une approche de modélisation et de simulation de suivi particulaire dans une suspension, aussi bien à l'échelle microscopique (celle des particules) qu'à l'échelle macroscopique (celle de l'armature du CMC), la connaissance parfaite des particules mises en jeu est primordiale. En effet, en fonction des particules utilisées, l'étude de leur interaction avec le fluide doit prendre en compte un certain nombre de paramètres qu'il est important de maîtriser. Ainsi, la taille, leur forme générale ou même les interactions de nature électrochimique seront des points clés dans la compréhension des phénomènes physico-chimiques inhérents aux suspensions particulières.

Dans une problématique de modélisation d'évolution des particules au sein d'une suspension colloïdale, il est parfois nécessaire de modéliser celles-ci à l'aide de géométries idéalisées. Les géométries idéalisées peuvent être vues comme des formes 3D de révolution dont le rapport de forme  $F$  est défini à l'aide de la formule suivante :

$$F = \frac{l}{d}$$

avec  $l$  la longueur sur l'axe de révolution et  $d$  la longueur sur la perpendiculaire à cet axe. En comparant ce rapport de forme  $F$  vis-à-vis de l'unité, trois formes de référence peuvent être différenciées. Des schématisations simples de celles-ci sont données sur la figure 1.6 :

1.  $F = 1$  : les particules sont vues comme des sphères.
2.  $F < 1$  : les particules sont vues comme des ellipses aplaties.
3.  $F > 1$  : les particules sont vues comme des ellipses allongées ou des cylindres.



**Figure 1.6** – Représentations simplifiées des particules en suspension. Modèle sphérique (a). Modèle aplati (b). Modèle allongé ou cylindrique (c).

Cette considération géométrique est parfois nécessaire dans le cas des modélisations à l'échelle microscopique (point de vue particulaire) car dans le cas des particules non-sphériques, leur orientation dans un écoulement donné aura des incidences. Cette problématique est souvent rencontrée dans le cas de suspensions de polymère ou de nanotubes de carbones. En effet, l'orientation et le potentiel enchevêtrement de particules non sphériques, influencent l'écoulement et notamment la rhéologie de la suspension considérée [Férec et al., 2009].

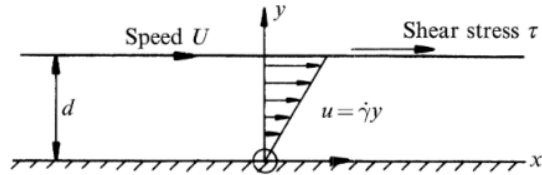
Cependant, l'orientation n'est pas l'unique explication du comportement rhéologique que nous observons dans les suspensions particulaires. En effet, ce phénomène est également observé pour des particules parfaitement sphériques. Il apparaît que les particules mises en suspension jouent un rôle sur la rhéologie de l'ensemble, puisque dans la majeure partie des cas, un comportement non-newtonien de celles-ci est observé.

C'est la raison pour laquelle nous nous attachons à présenter, dans la prochaine partie, l'ensemble des comportements rhéologiques susceptibles d'être rencontrés dans une problématique de modélisation de suspensions particulaires.



### 1.2.3 Rhéologie des fluides complexes

Par définition, la *Rhéologie* est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière [Bingham, 1930]. Elle permet d'étudier le comportement mécanique de la matière en exhibant des relations entre les déformations et les contraintes qu'elle subit. Dans l'approche de la mécanique des milieux continus, la rhéologie englobe des notions telles que l'élasticité et la plasticité des matériaux, ou la viscosité des fluides newtoniens ou les fluides complexes.



**Figure 1.7** – *Cisaillement simple. Écoulement d'un fluide newtonien entre une plaque immobile (bas) et une plaque mobile (haut) à vitesse  $U$  séparées d'une distance  $d$ .  $\dot{\gamma} = U/d$ . [Tanner, 1985].*

Dans le cadre général de la mécanique des fluides dits newtoniens en cisaillement simple (voir figure 1.7 [Tanner, 1985]) la relation existant entre les contraintes de cisaillement  $\tau$  et la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  est la relation linéaire suivante :

$$\tau = \mu \dot{\gamma}$$

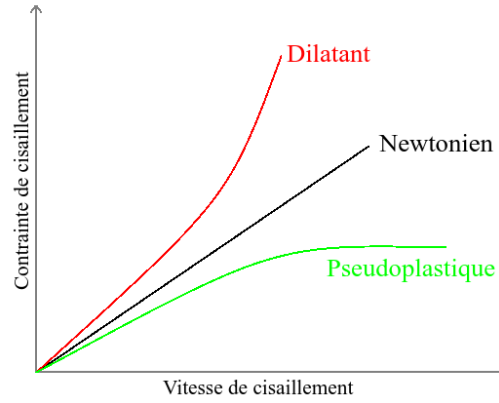
où  $\mu$ , viscosité du fluide, est considérée comme constante dans des conditions de température et de pression données. Dans le cadre des fluides complexes, ou non-newtoniens, cette viscosité n'est plus constante et dépend de la vitesse de cisaillement, et parfois du temps d'application du cisaillement. Ainsi, une distinction est à faire entre les fluides non-newtoniens indépendants du temps et ceux dépendants du temps.

Pour ces derniers, si à gradient de vitesse constant ( $\dot{\gamma} = cte$ ) les contraintes de cisaillement  $\tau$  diminuent au cours du temps, nous parlerons de fluide thixotrope. À l'inverse, nous parlerons de fluide rhéopexe.

Dans le cas des fluides non-newtoniens indépendants du temps, la contrainte de cisaillement  $\tau$  ne dépend que de la vitesse de cisaillement appliquée. Dans ce cas, trois types de comportement se distinguent :

1. les fluides viscoplastiques ou à seuil : l'écoulement n'est possible qu'à partir d'une contrainte minimale,
2. les fluides pseudoplastiques ou rhéofluidifiants : la contrainte de cisaillement diminue si la vitesse de cisaillement augmente,
3. les fluides dilatants ou rhéoépaississants : la contrainte de cisaillement augmente si la vitesse de cisaillement augmente.

Afin de comparer le comportement des fluides non-newtoniens au comportement des fluides newtoniens, une viscosité apparente  $\mu_a$  peut être définie comme le rapport entre les contraintes de cisaillement et la vitesse de cisaillement  $\tau/\dot{\gamma}$ . Ainsi, les évolutions de  $\tau$  en fonction de  $\dot{\gamma}$  pour un fluide pseudoplastique, newtonien et dilatant, peuvent être tracées sur un même graphe (cf figure 1.8, page 15).

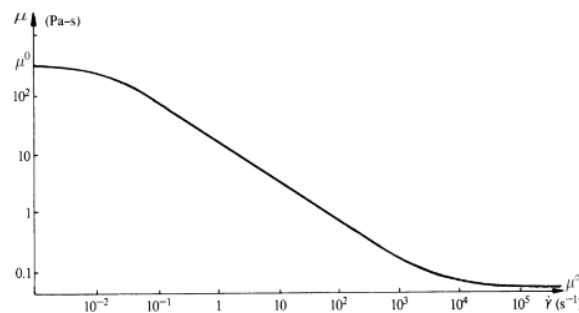


**Figure 1.8** – Évolution de la contrainte de cisaillement  $\tau$  en fonction de la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  pour des fluides pseudoplastique, newtonien et dilatant.

Les suspensions particulières utilisées dans une problématique industrielle de type densification de CMC sont dans la plupart des cas des fluides complexes dont la rhéologie est dépendante du taux de charge  $\phi^s$  ou de la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Dans une démarche de simulation de tels procédés, il est donc important d'utiliser des modèles afin de traduire le caractère non-newtonien de ces suspensions. Nous nous proposons ici, de lister quelques modèles permettant de caractériser pour chaque type de fluide non-newtonien, la relation entre les contraintes de cisaillement et la vitesse de cisaillement. Ces modèles seront donc indépendants du type de particules utilisées dans la suspension (*cf* sous section 1.2.2) et ne pourront traduire qu'un comportement apparent de celle-ci. L'origine et l'explication de tels comportements rhéologiques ne peuvent se comprendre qu'à l'échelle particulaire via des modèles bien précis (*cf* sous sections 1.2.4 & 1.2.5).

### FLUIDE RHEOFLUIDIFIANT

Ce type de fluide non-newtonien est le plus répandu dans le cas des suspensions particulières, et se traduit par une viscosité qui diminue lorsque la vitesse de cisaillement augmente. Cette relation de non linéarité n'est cependant pas toujours vérifiée. En effet, à faible et fort taux de cisaillement, la viscosité tend vers des valeurs constantes, respectivement  $\mu^0$  et  $\mu^\infty$ , traduisant un comportement newtonien [Tanner, 1985] (voir figure 1.9).



**Figure 1.9** – Évolution de la viscosité  $\mu_a$  en fonction de la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant. Mise en évidence du comportement newtonien à faible et fort taux de cisaillement. [Tanner, 1985].

Ainsi, en fonction des gammes de valeurs prises par le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  le modèle utilisé devra traduire ce comportement.

1. Loi puissance ou équation d'Ostwald-De Waele : [De Waele, 1923] [Ostwald, 1925]

$$\tau = K\dot{\gamma}^n$$

avec  $K$  le coefficient de consistance et  $n$  ( $n < 1$ ) l'indice de comportement. La viscosité du fluide avec ce modèle est donc  $\mu = K\dot{\gamma}^{n-1}$ . On remarque bien que cette loi n'étant qu'une loi puissance, elle ne peut pas traduire le comportement newtonien à faible et fort taux de cisaillement. Pour intégrer ces comportements limites on utilise des modèles à plusieurs paramètres.

2. Loi d'Ellis : [Bird et al., 1977] (*comportement newtonien à faible taux de cisaillement*)

$$\tau = \frac{\mu^0 \dot{\gamma}}{1 + (\tau/\tau_{1/2})^{\alpha-1}}$$

avec  $\tau_{1/2} = \tau(\mu = \mu^0/2)$  contrainte pour une viscosité égale à la moitié de la viscosité à très faible taux de cisaillement, et  $\alpha > 1$ .

3. Loi de Sisko : [Sisko, 1958] (*comportement newtonien à fort taux de cisaillement*)

$$\tau = \mu^\infty \dot{\gamma} + K\dot{\gamma}^n$$

4. Loi de Carreau-Yasuda : [Carreau, 1972][Yasuda, 1979] (*comportement newtonien à faible et fort taux de cisaillement*)

$$\tau = \left( \mu^\infty + (\mu^0 - \mu^\infty) (1 + (\tau\dot{\gamma})^a)^{\frac{n-1}{a}} \right) \dot{\gamma}$$

plus souvent écrite sous la forme :  $\frac{\mu - \mu^\infty}{\mu^0 - \mu^\infty} = (1 + (\tau\dot{\gamma})^a)^{\frac{n-1}{a}}$ . En fixant la valeur  $a = 2$  on retrouve la loi originelle de Carreau [Carreau, 1972].

5. Loi de Cross : [Cross, 1965]

$$\tau = \left( \mu^\infty + (\mu^0 - \mu^\infty) \left( \frac{1}{1 - (\lambda\dot{\gamma})^n} \right) \right) \dot{\gamma}$$

### FLUIDE RHEOEPAISSISSANT

Ce type de comportement est beaucoup moins fréquent que le comportement rhéofluidifiant. En général le modèle utilisé pour caractériser un tel fluide non-newtonien est un modèle en loi puissance comme présenté dans le paragraphe précédent mais avec un indice  $n > 1$ .

### FLUIDE VISCOPLASTIQUE

Comme présenté précédemment, un fluide viscoplastique, ou fluide à seuil, est un fluide dont l'écoulement ne peut se faire qu'à partir d'une contrainte minimale. Une fois cette condition vérifiée, ce type de fluide a un comportement plastique fluidifiant comparable au fluide rhéofluidifiant. Pour des petites variations de la contrainte de cisaillement  $\tau$ , nous admettons que le comportement du fluide est assimilé à celui d'un fluide newtonien. Le modèle adopté est celui du fluide de Bingham dont la loi comportementale est donnée par la relation :  $\tau = \tau_0 + \mu_a \dot{\gamma}$

Pour de plus grandes variations de contrainte, le caractère plastique fluidifiant peut être modélisé par la loi de Casson [Casson, 1959] :

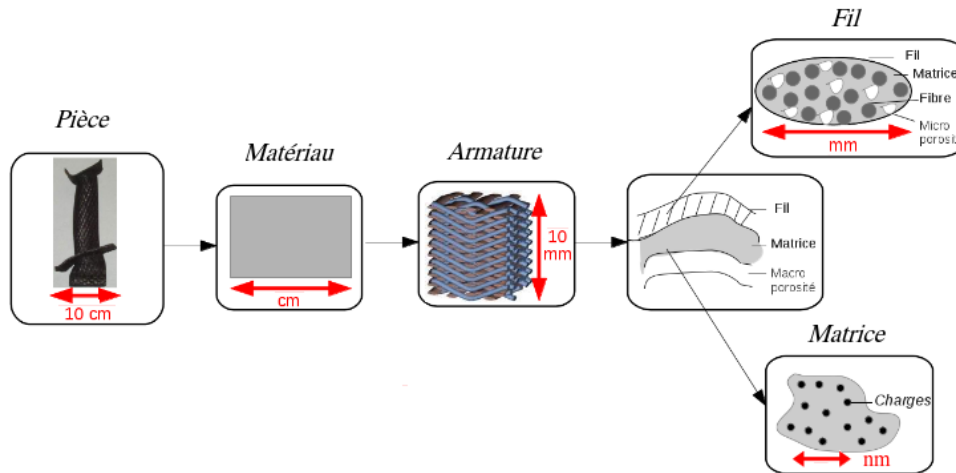
$$\tau^{1/2} = \tau_0^{1/2} + (\mu_a \dot{\gamma})^{1/2}$$

Il existe donc un nombre important de modèles permettant de traduire le comportement macroscopique des fluides non-newtoniens tels que les suspensions particulières. Dans une stratégie de modélisation macroscopique, il est donc primordial de bien connaître le domaine rhéologique d'étude de nos suspensions afin de choisir le modèle le plus adapté.

#### 1.2.4 Les différentes échelles de modélisation

Comme on vient de le voir, l'approche de modélisation de la rhéologie des suspensions est une approche macroscopique dans laquelle les particules ne sont pas suivies individuellement mais via une relation moyennée globale. Cette dissociation d'échelle est une problématique bien connue dans le domaine de la modélisation des écoulements de suspensions colloïdales de par la définition même des particules. En effet, l'utilisation de particules de taille de l'ordre d'une centaine de nanomètres implique forcément un choix d'échelle lors d'une approche de modélisation/simulation. Vraisemblablement, une étude sur l'imprégnation d'une pièce en CMC de l'ordre d'une dizaine de centimètres par une suspension de particules nanométriques ne pourra modéliser l'ensemble des échelles présentes (voir figure 1.10, page 18). Ainsi, l'échelle utilisée pour la modélisation des particules sera définie par les objectifs de l'étude.

C'est la raison pour laquelle un certain nombre de relations homogénéisées à l'échelle de la pièce en CMC sont utilisées, et ceci afin de correctement approcher le comportement de la suspension sans en modéliser toute la structure interne. L'obtention de telles relations macroscopiques se fait nécessairement par une étude élémentaire à l'échelle microscopique du comportement d'une (ou plusieurs) particule(s) vis-à-vis du fluide saturant ou d'autres particules. Les comportements exhibés sont ensuite homogénéisés et un changement d'échelle nous permet de définir la relation macroscopique du comportement étudié [Bugel, 2009].



**Figure 1.10** – Ensemble des échelles présentes dans la problématique d'imprégnation d'un CMC par une suspension particulière.

La réponse à la question "A-t-on besoin de modéliser l'ensemble des particules dans la suspension, ou, pouvons nous utiliser des modèles macroscopiques ?" permettra de déterminer l'échelle à laquelle l'étude sera menée.

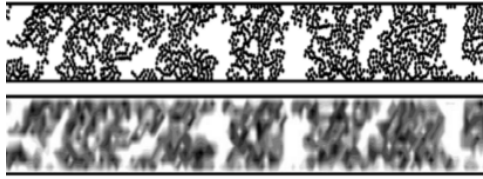
### 1.2.5 Stratégie de modélisation des particules

La présente sous-section a pour objectif de lister de manière non exhaustive les modèles permettant de suivre les particules dans une suspension et ceci à l'échelle microscopique et macroscopique.

#### ÉCHELLE MICROSCOPIQUE

A cette échelle, on souhaite comprendre et modéliser l'interaction d'une ou plusieurs particules par rapport au fluide saturant ou à d'autres particules [Ausias et al., 2006]. Cette physique pourra être étudiée aux échelles supérieures via des relations homogénéisées. Ces études se focalisant sur la physique à l'échelle de la particule, il est primordial d'utiliser les géométries idéalisées présentées en sous-section 1.2.2.

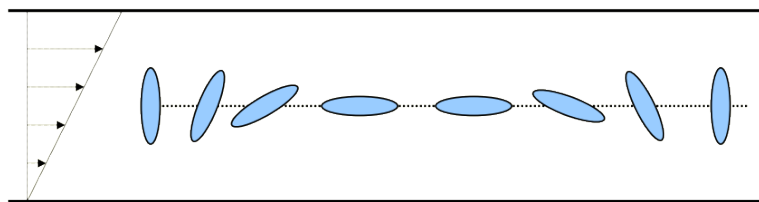
En se focalisant dans un premier temps sur les particules parfaitement sphériques, un certain nombre de phénomènes physiques peuvent être étudiés, comme par exemple la sédimentation particulaire, la compaction ou même la filtration. Un certain nombre d'études existent sur ce sujet, parmi lesquelles [Clift et al., 1978] [Elghobashi and Truesdell, 1992] [Ritz, 1997] [Maury, 1999] [Randrianarivelo et al., 2006] [Brändle de Motta et al., 2013] [Gondret et al., 2002] [Chiesa et al., 2005] [Pianet et al., 2006] [Durlofsky et al., 1987]. L'étude de l'écoulement du fluide saturant autour des particules permet de comprendre les mécanismes à l'origine de la migration particulaire ou même de la rhéologie de la suspension. L'approche utilisée dans ce type de simulation est une approche DNS (pour *Direct Numerical Simulation*) où la(les) particule(s) étudié(es) sont vues comme des solides mobiles interagissant avec le fluide saturant, généralement newtonien, résolu par les équations de Navier-Stokes.



**Figure 1.11** – *Simulation directe de la répartition particulaire d'un lit fluidisé (haut). Simulation à l'échelle macroscopique du phénomène, utilisation d'une fraction volumique (bas). [Randrianarivelo et al., 2006].*

Le comportement microscopique peut ensuite être moyenné afin d'obtenir une loi de comportement macroscopique permettant de parfaitement décrire la physique à une échelle d'observation supérieure (voir figure 1.11). Un exemple de modèle permettant une telle modélisation est donné dans [Brändle de Motta et al., 2011].

Dans le cas de particules "moins idéales" comme les particules aplaties, allongées ou cylindriques, un autre phénomène entre en jeu : l'orientation. En effet, le facteur de forme  $F$  aura un impact sur l'écoulement. Ainsi, une particule non sphérique (avec un  $F \neq 1$ , cf sous-section 1.2.2) en suspension dans un fluide verra son orientation modifiée par l'écoulement (voir figure 1.12). Cette modification perturbera l'écoulement fluide autour de la particule, impactant à son tour son orientation, et ainsi de suite. Il y aura donc un couplage entre l'écoulement et l'orientation dans ce type de problématique [Verweyst and Tucker, 2002].



**Figure 1.12** – *Modification de l'orientation d'une particule aplatie ( $F > 1$ ) dans un écoulement à cisaillement simple.*

Afin d'effectuer ce couplage, un certain nombre de modèles peuvent être utilisés. On peut par exemple citer le modèle de Jeffery [Jeffery, 1922] [Sepehr et al., 2004], ou bien la loi de Fokker-Planck [Chinesta et al., 2003] [Férec et al., 2008]. Comme dans le cas des particules sphériques, le suivi microscopique de l'orientation particulaire peut également s'exprimer à une échelle plus large via une homogénéisation des équations.

## ÉCHELLE MACROSCOPIQUE

L'enjeu majeur de l'étude macroscopique d'une suspension colloïdale, réside dans une compréhension la plus fine possible, des mécanismes microscopiques intrinsèques à celle-ci, dans le but de modéliser son comportement apparent. En effet, à une échelle opératoire, la suspension n'est pas vue de manière hétérogène (fluide + particules) mais homogène (fluide complexe).

Ainsi, dans une approche de la mécanique des milieux continus, la modélisation de l'écoulement doit être couplée à un suivi particulaire homogénéisé (concentration, orientation, etc) mais également à un comportement rhéologique complexe, voire même dans certains cas à des comportements thermiques, chimiques ou électrochimiques.

Un certain nombre de travaux ont pour objectifs de traduire à l'échelle macroscopique l'ensemble des phénomènes physiques dus à l'interaction entre particules. Dans le cadre de la rhéologie des suspensions colloïdales nous pouvons citer par exemple les travaux de [Mooney, 1951], [Krieger, 1972], [Brady and Bossis, 1985], [Brady and Bossis, 1988], et [Brady, 1993] qui permettent de lier la rhéologie des suspensions à leurs concentration en particules.

Dans le but de décrire un comportement général de la suspension, *i.e.*, de décrire l'écoulement de la suspension et ses effets sur la composition de celle-ci, il est nécessaire de mettre au point un modèle permettant de traduire toute la physique. En effet, celle-ci est complexe puisqu'elle décrit un phénomène de migration particulaire due à l'écoulement de la phase fluide. Cette migration ayant un impact sur la rhéologie de la suspension, et donc sur son écoulement. Pour prendre en compte toute cette physique, plusieurs approches ont été développées au cours des dernières décennies, parmi lesquelles [Brady and Bossis, 1988], [Phillips et al., 1992] ou bien [Louge, 1996].

Dans ces travaux nous ne retiendrons que la démarche de modélisation exposée dans les travaux de [Phillips et al., 1992]. La description de la migration particulaire dans une suspension colloïdale, se traduit au travers d'une équation de transport diffusion de la concentration en particule (*cf* chapitre 2). L'approche utilisée est de découpler les comportement de la phase fluide, considérée comme newtonienne, et de la phase solide, composée des particules. La description de l'écoulement de la phase fluide se fait donc au travers des équations de Navier-Stokes [Navier, 1822], [Navier and de Saint-Venant, 1864], [Stokes, 1905]. La concentration en particules de la suspension, considérée comme monomodale, est décrite par l'équation de Phillips [Phillips et al., 1992]. Afin de traduire le comportement non-newtonien de la suspension (*cf* sous-section 1.2.3) qui n'est pas initialement décrite avec ce modèle, il est nécessaire d'introduire une relation de dépendance entre la viscosité  $\mu$  et la concentration  $\phi^s$  en particule. Ainsi, en utilisant par exemple la loi de Krieger [Krieger, 1972], et en la couplant aux équations de Navier-Stokes et de Phillips, on peut décrire le comportement complet d'une suspension particulaire rhéofluidifiante.

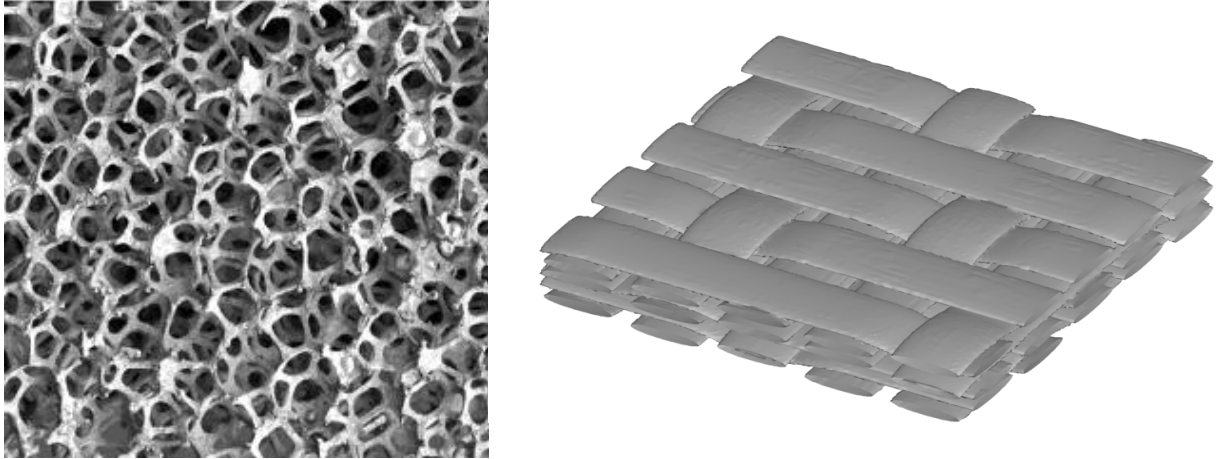
Bien que les travaux de cette thèse supposent que la suspension colloïdale soit monomodale, il est intéressant de noter qu'un certain nombre de travaux existent afin de modéliser le comportement macroscopique de suspensions multimodales plus complexes. On peut citer par exemple les travaux de [Pesche et al., 1998].

Au cours de ces deux premières sections, nous avons parcouru l'ensemble des problématiques inhérentes à la confection des matériaux composites à matrices céramiques, mais également à la physique des suspensions particulières. Afin de parfaitement encadrer la physique présente dans cette étude, il nous reste donc à évoquer la problématique d'écoulement en milieu poreux. En effet, tant par la structure même de l'armature du CMC à densifier que par les phénomènes de filtration découlant d'une compaction particulaire, nos futurs modèles devront intégrer la description d'un écoulement en milieu poreux. La prochaine section s'attache à présenter les caractéristiques principales de cette physique, d'un point de vue théorique et numérique.

## 1.3 Milieu poreux

### 1.3.1 Présentation générale

Par opposition à un matériau solide, un matériau (ou milieu) poreux est un solide constitué de zones vides appelées pores. On en retrouve aussi bien en milieu naturel, tels que les coraux, qu'en milieu industriel avec par exemple les armatures fibreuses des matériaux composites (voir figure 1.13).



**Figure 1.13** – Visualisation de deux milieux poreux : naturel, corail (gauche) et industriel, CAO d'une armature fibreuse de CMC (droite).

La caractérisation d'un milieu poreux peut se faire à l'aide de sa porosité  $\epsilon$ , représentant le rapport entre le volume des pores et le volume total du milieu :

$$\epsilon = \frac{V_{\text{pores}}}{V_{\text{total}}}$$

D'autres propriétés peuvent caractériser un milieu poreux, comme par exemple sa perméabilité  $K$  ou sa conductivité hydraulique  $C$ . La perméabilité est une grandeur intrinsèque au milieu et caractérise son aptitude à se laisser traverser par un fluide de référence, elle s'exprime en Darcy ( $D$ ) ou en  $m^2$ . La conductivité hydraulique du milieu est dépendante du fluide traversant. Elle est le produit entre la perméabilité du milieu et les caractéristiques du fluide :

$$C = \frac{\rho g}{\mu} K$$

avec  $\rho$  et  $\mu$  respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Cette conductivité hydraulique s'exprime en  $m.s^{-1}$  et est dépendante de la saturation du milieu (rapport volume de fluide et volume d'air).

Enfin, à l'aide d'une considération structurelle, nous distinguons les milieux poreux homogènes où l'espace poreux est identique selon les trois directions de l'espace, des milieux poreux hétérogènes où la perméabilité sera un tenseur dépendant de l'espace. Un fluide ne traversant pas ces deux milieux poreux de la même manière, les modèles permettant de décrire son écoulement dans ceux-ci devront prendre en compte cette distinction structurelle (voir sous-section suivante 1.3.2).



La physique des écoulements en milieu poreux s'inscrit parfaitement dans une étude numérique d'imprégnation d'une armature fibreuse d'un CMC par un fluide chargé en particules, et ceci à plusieurs échelles. En se plaçant dans un premier temps à l'échelle de la pièce formée à partir du matériau composite (*cf* figure 1.10), l'armature fibreuse peut être considérée comme un milieu poreux dans lequel s'écoule le fluide chargé. L'espace inter-torons représentera donc les pores du matériau composite qui, au vu de son tissage, sera considéré comme un milieu poreux hétérogène.

En se plaçant maintenant à l'échelle de l'armature, où le contour des fils est résolu, la physique des milieux poreux s'exprime au sein même de la suspension particulaire. En effet, dans le cadre d'une simulation de l'écoulement d'une suspension colloïdale à cette échelle, les particules ne peuvent être résolues une par une (*cf* sous-section 1.2.5). De ce fait, elles sont suivies dans le fluide saturant qu'au travers d'une grandeur moyennée : la fraction volumique de poudre  $\phi^s$ . Or, sous l'effet de l'écoulement, ces particules peuvent s'agglomérer et former des zones très denses en particules. Si dans ces zones, les particules sont immobiles et si le fluide s'écoule autour de celles-ci, alors l'écoulement peut être vu à l'échelle supérieure (échelle du tissage) comme un écoulement en milieu poreux. Par ailleurs, si ces particules sont assimilées à des sphères parfaites (*cf* sous-section 1.2.2), les agglomérats particulaires immobiles seront considérés comme des milieux poreux homogènes.

### 1.3.2 Écoulement en milieu poreux

La description de l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux se fait en reliant la vitesse apparente du fluide  $\mathbf{q}$  traversant et le gradient de pression  $\nabla p$  observé dans le milieu poreux. Cette vitesse apparente, appelée aussi vitesse de Darcy, est obtenue en divisant le débit du fluide  $\mathbf{Q}$  par la section du milieu poreux  $\mathbf{A}$  parallèle à ce flux. Cela n'est donc pas la vitesse interstitielle  $\mathbf{u}$  du fluide dans les pores du milieu poreux mais elle est reliée à celle-ci au travers de la porosité  $\epsilon$  :

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{A}} = \epsilon \mathbf{u} \quad (1.1)$$

La relation reliant  $\mathbf{q}$  et  $\nabla p$  est dépendante des caractéristiques du fluide  $(\rho, \mu)$ , des caractéristiques du milieu poreux (homogène, hétérogène) mais également de la saturation du milieu (rapport volume fluide et volume air). La première relation permettant de décrire l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux fut formulée par Henry Darcy [Darcy, 1856], elle relie la vitesse du fluide  $\mathbf{q}$  à la perte de charge à l'aide de la perméabilité du milieu :

$$\mathbf{q} = -\frac{K}{\mu} \nabla p$$

Cependant, cette relation n'est valable que pour un milieu poreux homogène et saturé en fluide. Elle fut par la suite généralisée à des milieux poreux insaturés et hétérogènes [Buckingham, 1907] :

$$\mathbf{q} = -\frac{K(p, \mathbf{X})}{\mu} \nabla p$$

où  $K(p, \mathbf{X})$  est le tenseur donnant la perméabilité en tout point du milieu poreux en fonction de sa saturation.

La forme actuelle de la loi de Darcy est une formulation vectorielle qui est généralisée aux fluides faiblement compressibles :

$$\mathbf{q} = -\frac{K}{\mu} (\nabla p - \rho \mathbf{g}) \quad (1.2)$$

$$-\frac{\mu}{K} \mathbf{q} - \nabla p + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (1.3)$$

avec  $K$  scalaire (généralisable en tenseur) et  $\mathbf{g}$  l'accélération de la pesanteur.

Pour que cette loi soit valide, il faut que l'écoulement à l'intérieur du milieu poreux soit rampant. Afin que cette condition soit vérifiée, il est nécessaire que le nombre de Reynolds,  $Re$  (défini ci-dessous), soit inférieur à l'unité [Muskat, 1938] [Schneebeli, 1955] et [Chauveteau and Thirriot, 1967].

$$Re = \frac{\rho \|\mathbf{q}\| D}{\mu} < 1$$

avec  $\rho$  et  $\mu$  respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide,  $D$  le diamètre moyen des pores du milieu poreux et  $\mathbf{u}$  la vitesse interstitielle du fluide.

Dans le cas d'écoulements inertiels en milieu poreux correspondant à des nombres de Reynolds supérieurs, la loi de Darcy est remplacée par la loi de Darcy/Ward-Forchheimer [Forchheimer, 1901] [Ward, 1964] traduisant la non linéarité de la perte de charge.

Parallèlement à ce modèle de Darcy, on note le développement du modèle de Brinkman [Brinkman, 1947] [Arquis, 1994] décrivant l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux idéalisé constitué de sphères dont la taille  $d$  est faible vis-à-vis de leur espacement  $e$ . Dans ce cas particulier, un terme est ajouté à la loi de Darcy afin de tenir compte des phénomènes de traînée générés par les sphères :

$$-\frac{\mu}{K} \mathbf{q} - \nabla p + \rho \mathbf{g} + \tilde{\mu} \Delta \mathbf{q} = 0 \quad (1.4)$$

avec  $\tilde{\mu}$  la viscosité effective définie par  $\tilde{\mu} = \mu/\epsilon$ . Ce modèle est formellement établi par changement d'échelle [Auriault, 1987] ou prise de moyenne [Whitaker, 1986]. Dans cette dernière référence, une preuve est donnée de l'expression de la viscosité effective

Cette dernière formulation est très intéressante dans une approche de modélisation numérique d'écoulement de suspension colloïdale où les particules sont assimilées à des sphères parfaites (*cf* sous-section 1.2.2). En effet, en faisant tendre vers 0 l'espacement entre les sphères du milieu poreux idéalisé, on se rapproche d'une géométrie caractéristique des aggrégats particuliers immobiles formés de particules parfaitement sphériques que l'on peut rencontrer dans les suspensions colloïdales. De plus, le terme de traînée ajouté ressemble fortement au terme de viscosité rencontrée dans les équations de Navier-Stokes. Ainsi, dans une approche globale où un écoulement libre et un écoulement en milieu poreux sont couplés, le modèle de Brinkman pourra être couplé aux équations de Navier-Stokes afin de modéliser l'ensemble de la physique du problème. Nous reviendrons plus en détail sur ce point dans le chapitre 2.

Toutes ces lois permettant de décrire l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux, utilisent des grandeurs comme la perméabilité  $K$ , la conductivité hydraulique  $C$  ou bien la porosité  $\epsilon$ , qui, une fois déterminées, caractérisent le milieu poreux.

### 1.3.3 Caractérisation d'un milieu poreux

Les techniques permettant d'exhiber les caractéristiques d'un milieu poreux sont nombreuses et présentent chacune des avantages et des inconvénients qui leurs sont propres.

#### 1. Porosimétrie par injection de mercure :

Initialement développée dans les travaux de WR. Purcell [Purcell, 1949], cette technique permet d'obtenir la distribution des tailles de pores par l'injection d'un volume de mercure via l'augmentation progressive d'un gradient de pression. Entre deux paliers de pression, il est nécessaire de respecter un temps d'équilibrage donné par la relation de Washburn [Washburn, 1921].

- Avantage(s) : la détermination d'une large gamme de rayons de pores.
- Inconvénient(s) : la toxicité du mercure et la mauvaise compréhension de la mouillabilité dans le matériau poreux.

#### 2. Imagerie 2D :

Dans le cadre des milieux poreux homogènes (*cf* sous-section 1.3.1) la détermination de la porosité volumique se déduit facilement de celle mesurée selon un plan de coupe aléatoire. Dans cette méthode de caractérisation, la visualisation d'une coupe du matériau poreux est étudiée (au Microscope Electronique à Balayage par exemple) et à chaque pixel est attribué une valeur binaire en fonction de sa composition (1 si solide, 0 si vide). L'ensemble permet de déduire l'espace poreux du plan de coupe et donc du volume total du milieu poreux considéré. Il est souvent nécessaire, et ceci afin de faciliter le traitement d'images, de préparer le milieu poreux afin de correctement distinguer les zones vides des zones solides (via l'injection de résines par exemple).

- Avantage(s) : la détermination précise des contours des pores.
- Inconvénient(s) : la destruction du matériau poreux.

#### 3. Imagerie 3D :

Le principal inconvénient de la détermination des caractéristiques d'un matériau poreux par l'imagerie 2D réside dans la destruction partielle ou totale de celui-ci. Afin d'éviter ceci, mais également afin d'étudier des milieux poreux hétérogènes, une autre technique de caractérisation est utilisée : la tomographie ou imagerie 3D. Dans cette technique, le volume du matériau est reconstruit à partir de mesures planes successives effectuées depuis l'extérieur de celui-ci (voir figure 1.14). Elle correspond à une succession d'imagerie 2D mais sans destruction du matériau étudié. Le mot tomographie désigne l'ensemble de ces méthodes de reconstruction, mais nous pouvons distinguer par exemple l'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM) ou la microtomographie par rayons X (où micro-CT,  $\mu$ -CT). L'IRM se base sur la résonance magnétique nucléaire et permet de cartographier l'intérieur d'un matériau en mesurant la résonance magnétique d'atomes préalablement excités à l'aide d'un aimant supra-conducteur. La microtomographie utilise quant à elle le principe d'absorption des rayons X par la matière afin de reconstituer le squelette du matériau poreux. Elle suppose que l'absorption de ces rayons est une fonction linéaire de la quantité de matière traversée. La reconstruction finale permet d'étudier très précisément l'espace poral, et donc de caractériser la porosité du matériau.

- Avantage(s) : non destructif, détermination précise des contours des pores.
- Inconvénient(s) : le volume d'étude est faible.



**Figure 1.14** – *Exemple de reconstruction de milieux poreux par tomographie. Visualisation de l'espace poral permettant la détermination des caractéristiques du milieu poreux.*

#### 4. Thermoporosimétrie :

La thermoporosimétrie est une autre technique de caractérisation de la porosité d'un milieu poreux [Brun et al., 1977]. Elle étudie l'influence de la taille des pores sur la température de solidification d'un fluide saturant le milieu poreux. En forçant la solidification de ce fluide dans le milieu poreux et en extrayant la chaleur latente de solidification, cette technique permet de déterminer un ensemble de rayons de capillaires supposés cylindriques.

- Avantage(s) : la détermination d'une large gamme de rayons de pores.
- Inconvénient(s) : le possible endommagement de la structure poreuse.

Il existe bien d'autres méthodes de caractérisation se basant sur des physiques de tout genre, telles que l'adsorption et la diffusion d'onde. L'objet de cette thèse n'étant pas de toutes les étudier, nous n'iront pas plus loin dans cette problématique. Cependant, il était nécessaire d'en présenter les plus communes et de remarquer que dans chaque cas, la caractérisation n'est pas aisée et nécessite souvent l'utilisation d'hypothèses structurales. Dans certains cas, les valeurs exactes de la porosité ou de la perméabilité peuvent être approchées à l'aide de modèles et de relations.

### 1.3.4 Modèle de perméabilité

Avant d'évoquer les modèles permettant d'approcher la perméabilité d'un milieu poreux de référence, il est nécessaire de définir un certain nombre de grandeurs [Dullien, 1992] :

1. La surface interne spécifique  $A$ , est le rapport entre l'aire de l'interface solide/pore

$$A_{I_{s/p}} \text{ sur le volume total d'étude } V_T : \quad A = \frac{A_{I_{s/p}}}{V_T}$$

2. La tortuosité  $T$ , traduisant la sinuosité du capillaire. Elle est le rapport entre la longueur réelle du capillaire  $L_p$  parcourue par une molécule fluide sur la longueur linéaire  $L$  entre les deux extrémités du capillaire. Une tortuosité égale à l'unité traduira donc un capillaire rectiligne :  $T = \frac{L_p}{L}$

3. Le diamètre hydraulique de pore  $D_H$ , rapport entre le volume du pore  $V_p$  et la surface mouillée  $S$  :  $D_H = \frac{V_p}{S}$

Ces notions à présent définies, nous pouvons nous intéresser aux modèles permettant de déterminer la perméabilité de milieux poreux de référence. Le premier est le modèle de capillaires parallèles, où l'ensemble du réseau poreux est modélisé par des capillaires cylindriques de même rayon  $r$ . La tortuosité de tels canaux est donc égale à l'unité. L'écoulement d'un fluide de viscosité  $\mu$  sous l'effet d'un gradient de pression  $\nabla p$  est, à l'échelle du capillaire, un écoulement de poiseuille dont le débit est donné par :

$$Q = \frac{\Delta p}{L} \frac{\pi r^4}{8\mu}$$

correspondant à une vitesse moyenne selon la section de passage  $\pi r^2$  de

$$u = \frac{\Delta p}{L} \frac{r^2}{8\mu}$$

en utilisant les équations (1.1) et (1.2) en supposant négligeable l'effet de la pesanteur il vient que

$$K = \frac{\epsilon}{8} r^2 \quad (1.5)$$

Afin d'étudier des milieux poreux plus complexes, possédant une certaine tortuosité, il est nécessaire de modifier la précédente loi de perméabilité. Initialement développé par [Kozeny, 1927], puis modifié par [Carman, 1937], [Carman, 1956], le modèle de Kozeny-Carman utilise celui des capillaires parallèles en y intégrant un facteur de forme  $k_0$ , ainsi que la tortuosité  $T$  du milieu poreux. Le diamètre hydraulique est également exhibé sous la forme : [Dullien, 1992]

$$D_H = \frac{4\epsilon}{A(1-\epsilon)}$$

Ils observent que la vitesse interstitielle d'un fluide de viscosité  $\mu$  à gradient de pression imposé  $\nabla p$  dans les pores de diamètre hydraulique  $D_H$  vaut :

$$u = \frac{\Delta p D_H^2}{16 L \mu k_0 T}$$

En remplaçant l'expression du diamètre hydraulique et en utilisant les équations (1.1) et (1.2) on en déduit le modèle suivant :

$$K = \frac{\epsilon^3}{k_0 T^2 A^2 (1-\epsilon)^2} \quad (1.6)$$

Dans le cas où le milieu poreux est un empilement compact de sphères solides de diamètre  $d$ , [Carman, 1937] établit que le facteur  $k_0 T^2$  vaut environs 5, et que la surface interne spécifique  $A = 6/d$ . Sous ces conditions, l'équation (1.6) devient :

$$K = \frac{\epsilon^3 d^2}{180(1-\epsilon)^2} \quad (1.7)$$

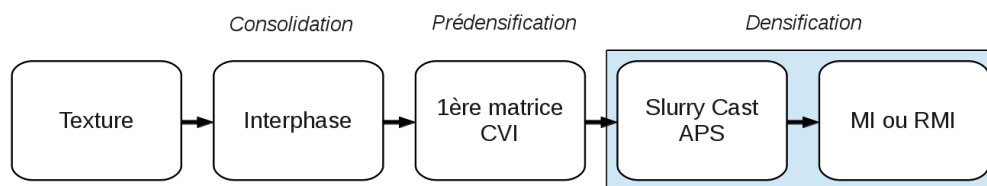
Cette dernière loi est particulièrement utile dans une modélisation d'écoulement de suspensions colloïdales où des agrégats de particules immobiles peuvent se former et peuvent agir sur la phase fluide comme un milieu poreux (*cf* sous-section 1.3.1). Cette remarque met un terme cette section sur la problématique des milieux poreux mais également l'ensemble des problématiques rencontrées dans cette étude : matériaux composites, suspensions particulières et milieux poreux. Afin de clore ce chapitre, il reste donc à situer la problématique industrielle de cette étude dans la richesse des notions physiques évoquées.

## 1.4 Problématique industrielle de ces travaux

Le but de cette dernière partie est d'utiliser toutes les notions présentées précédemment afin de comprendre l'intégralité de la physique présente dans le procédé de densification étudié dans cette thèse. L'objectif étant de faire un état des lieux final permettant de fixer la physique que devra résoudre notre modèle.

### 1.4.1 Élaboration complète de la pièce CMC concernée

Comme nous l'avons vu dans la première partie de ce chapitre, un matériau thermostuctural de type CMC est composé de trois éléments : une armature tissée, une interphase et une matrice céramique (*cf* section 1.1). Dans le cadre de cette thèse, le matériau étudié utilise des fils constitués de fibres élémentaires de carbure de silicium. Au vu de la forme finale de la pièce CMC, ces fils sont tissés selon une technique bien précise permettant l'obtention d'un renfort fibreux 3D complexe (*cf* image (b) figure 1.2, section 1.1). La forme finale de l'armature fibreuse relevant du secret industriel, aucune image de présentation du renfort ne pourra être donnée dans ces travaux. Les étapes permettant la densification de cette texture sont présentées sur la figure 1.15.



**Figure 1.15** – *Présentation des différentes étapes de fabrication du CMC étudié dans ces travaux. Décomposition de l'étape finale de densification.*

Une couche de pyrocarbone (*PyC*) est ensuite déposée sur l'armature tissée à l'aide d'un procédé de dépôt en phase gazeuse CVI (*cf* sous-section 1.1.3). Dans cette étude, l'armature sera considérée comme totalement isolée et les fils comme totalement imperméables à la suspension (fluide + particules). La zone inter-fils sera donc la seule zone où s'écoulera la suspension. Après une pré-densification par CVI, l'armature fibreuse passe finalement par l'étape de densification.

Le choix du type de densification s'est ici porté sur une densification par voie liquide MI (*cf* sous-section 1.1.4). De la silice en phase liquide est introduite dans l'armature par remontée capillaire.

Afin de s'assurer que le métal fondu imprègne toute la pièce par cette méthode, il est nécessaire de réduire la porosité de l'armature afin de diminuer la taille des canaux et ainsi améliorer la remontée capillaire.

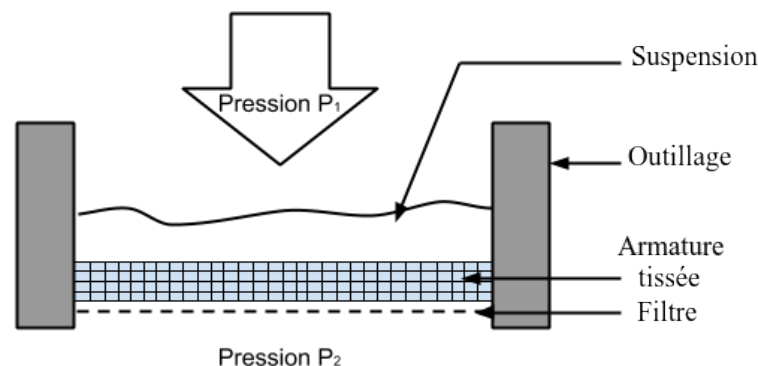
Dans ce but, il a été choisi d'introduire préalablement des particules dans la zone inter-fils à l'aide d'une phase fluide porteuse formant la suspension. Après séchage de l'ensemble, les particules confinées dans l'armature réduisent la porosité apparente de l'ensemble. Cette étape d'introduction des particules est l'étape **Slurry Cast/APS**. Nous y reviendrons plus en détail dans la sous-section suivante afin de connaître la composition de ces particules et leur rôle dans l'étape de densification.

Ainsi, l'étape de densification est découpée en deux sous-étapes (voir figure 1.15) : l'étape Slurry Cast/APS d'introduction des particules et l'étape de MI de remontée capillaire de silice fondue. Cette remontée capillaire pouvant être réactive si le métal fondu réagit avec les particules précédemment introduites. Nous parlerons de densification RMI (*cf* sous section 1.1.4 et 1.1.5).

De la même manière que pour l'étape de densification, SAFRAN Ceramics a souhaité découpler l'étude de cette densification en deux thèses. De ce fait, en plus de ces travaux sur le procédé Slurry Cast/APS, une deuxième thèse est menée en parallèle par Mlle Audrey PONS concernant la partie RMI [Pons, 2017]. Ces deux problématiques étant étroitement liées, elles sont donc menées en collaboration au sein du même laboratoire (l'I2M) et débouchent sur des communications communes [Arquis et al., 2015].

### 1.4.2 Procédé Slurry Cast/APS

Le terme *Slurry Cast* est un terme anglais signifiant "coulée de suspension" et son équivalent français peut être *APS* pour Aspiration de Poudre Submicronique. Combinés, ils dénomment le procédé de pré-densification permettant l'introduction de poudre dans une armature fibreuse.



**Figure 1.16** – Schématisation du procédé Slurry Cast APS permettant l'introduction de particules dans l'armature fibreuse à l'aide d'une suspension. Cas d'une infiltration à pression imposée.

Le principe d'injection (schématisé sur la figure 1.16, page 28) est le suivant : l'armature fibreuse est mise sur un filtre à particules dans une enceinte métallique. La suspension est ensuite déposée sur cette préforme puis l'enceinte est scellée.

A l'aide d'une pression imposée (gamme de valeur en tableau 1.2), on force la suspension à s'écouler au travers de l'armature. Le filtre à particules joue un rôle de séparation des phases liquide et solide de la suspension, et permet de confiner les particules dans le renfort.

Dans une configuration idéale, les particules traversent la préforme jusqu'au filtre et s'agglomèrent jusqu'à agencement compact pour réduire au maximum la zone inter-torons. Une fois la manipulation terminée, l'ensemble est séché afin de complètement retirer la phase fluide de la suspension restant dans le renfort. Plusieurs techniques peuvent être utilisées comme par exemple l'étuvage, la sublimation ou même la lyophilisation.

Une évolution a été développée en cours de thèse permettant l'injection de la suspension non plus à l'aide d'un gradient de pression, mais à l'aide d'un débit imposé, le reste du procédé restant inchangé. La gamme de valeurs des débits ou pression à imposer est très large et permet de balayer un certain nombre de conditions expérimentales d'injection. L'ensemble de ces valeurs est référencé dans le tableau 1.2.

**Table 1.2** – *Gamme de valeurs prises par les paramètres opératoires du procédé Slurry Cast APS.*

| Paramètre Opérateur | Valeur minimale        | Valeur maximale          |
|---------------------|------------------------|--------------------------|
| Débit imposé        | 2 cc.min <sup>-1</sup> | 160 cc.min <sup>-1</sup> |
| Pression imposée    | 1 bar                  | 10 bar                   |

### 1.4.3 Suspensions utilisées dans le procédé APS

Maintenant que le procédé d'introduction de charges dans la préforme a été présenté, nous pouvons désormais nous intéresser à la suspension particulaire utilisée en évoquant par exemple sa composition et sa granulométrie (*cf* sous-section 1.2.2) ou bien sa rhéologie (*cf* sous-section 1.2.3).

Les poudres utilisées dans le procédé développé par SAFRAN Ceramics sont des poudres de carbures de silicium (poudre *SiC*), qui peuvent être parfois complétées par des particules de carbone. La granulométrie des poudres de *SiC* utilisées ne peut malheureusement pas être précisément donnée dans ce document car elle relève du secret industriel. Cependant nous pouvons tout de même donner un ordre de grandeur. Ainsi deux types de particules sont utilisées :

1. Poudre 1 : répartition monomodale de l'ordre de la centaine de nanomètre.
2. Poudre 2 : répartition multimodale de l'ordre du micromètre.

La poudre principalement étudiée dans ces travaux est la poudre 1 monomodale. On remarque bien que les poudres utilisées dans ce procédé relèvent bien de la problématique des suspensions colloïdales présentée en section 1.2.



Ces poudres sont dispersées dans de l'eau distillée combinée à un dispersant (solution d'hydroxyde de tétraéthylamonium (TEAH)) dont la teneur est de l'ordre du %. Ce dernier assure la bonne mise en suspension et permet d'annuler les interactions électrostatiques et attractives entre particules (forces de Van der Waals). Une étude préalable nous a permis de vérifier qu'à concentration en particules constante, la viscosité de ces suspensions n'est pas dépendante du pH.

Une étude de rhéométrie a également été menée sur ces suspensions à l'aide d'un rhéomètre de type cylindre concentrique (écoulement de Couette). Elle a montré que les deux suspensions avaient un comportement rhéologique de type visco-plastique à seuil (*cf* sous-section 1.2.3) et également rhéofluidifiant. Ainsi, dans une approche de modélisation non-newtonienne de la suspension, le modèle permettant de lier la contrainte de cisaillement  $\tau$  et la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  peut être un modèle de Casson [Casson, 1959] :

$$\tau^{1/2} = \tau_0^{1/2} + (\mu_a \dot{\gamma})^{1/2}$$

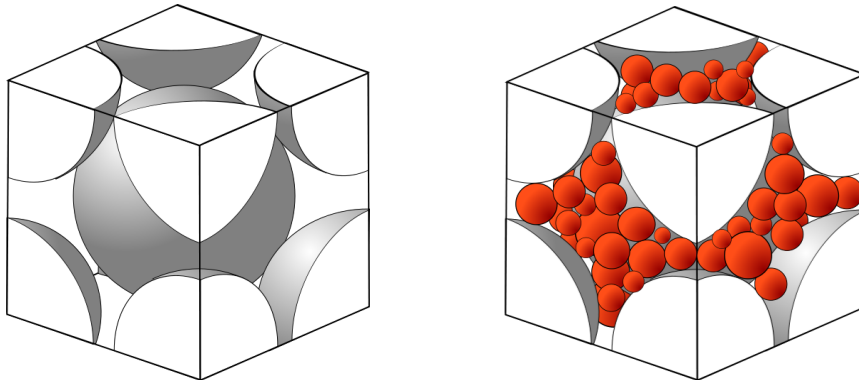
avec une contrainte seuil de cisaillement  $\tau_0$  très faible ( $< 10^{-6}$  Pa). Si on souhaite utiliser une approche newtonienne et lier la viscosité à la fraction volumique de poudre, le modèle utilisé peut être un modèle de Krieger [Krieger, 1972] (sous-section 1.2.5) :

$$\mu = \mu_0 \left( 1 - \frac{\phi^s}{\phi_m^s} \right)^{-k\phi_m^s}$$

avec  $\phi_m^s$  le taux de charge volumique maximal correspondant à un agencement compact des particules :

1. Poudre 1 :  $\phi_m^s \simeq 55$  % en volume.
2. Poudre 2 :  $\phi_m^s \simeq 65$  % en volume.

On remarque bien que la compaction maximale pour la poudre 2 multimodale est supérieure à celle de la poudre 1 monomodale. Ceci s'explique facilement par la composition même de la poudre 2 où l'espace entre les grosses particules peut être comblé par les petites (voir figure 1.17). Ces constatations peuvent être retrouvées expérimentalement en réalisant des "crus" de poudre correspondant à des agglomérations de particules seules [Marchais, 2016].

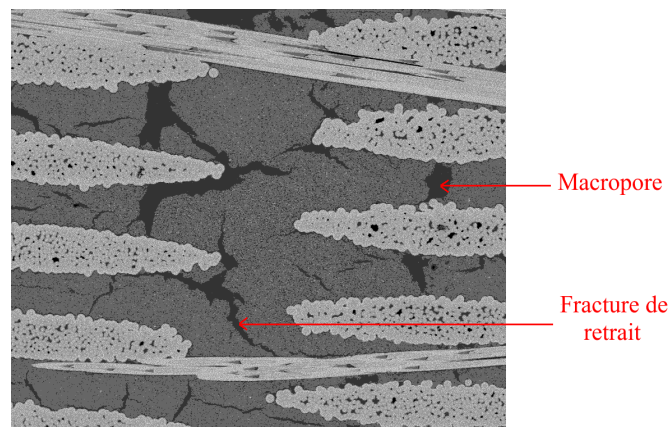


**Figure 1.17** – *Compaction maximale de particules sphériques monomodale (gauche) et multimodale (droite).*

### 1.4.4 Problématique du procédé APS

Les premières expérimentations menées sur le procédé APS au sein des locaux de SA-FRAN Ceramics et du laboratoire LCTS [Marchais, 2016] ont révélé un certain nombre de constatations. Il est apparu que le remplissage du renfort fibreux par la suspension n'était pas optimal et qu'un certain nombre de zones -appelées macropores - n'étaient pas parfaitement compactées par les particules.

De plus, il fut également observé que lors du séchage du renfort à la fin du procédé APS, le retrait de la phase fluide de la suspension engendrait la création de "fractures de retrait" dans les agglomérats particulières (voir figure 1.18).



**Figure 1.18** – *Imagerie au MEB d'une coupe du matériau CMC après le procédé Slurry Cast et séchage. Observation de la création des macropores et fractures de retrait.*

Ces phénomènes de mauvais remplissage d'une préforme fibreuse existent aussi dans d'autres types de densification comme avec les procédés RTM. Cette répartition finale de poudre non homogène dans la préforme peut s'avérer limitant vis-à-vis de la deuxième étape de densification : la remontée capillaire réactive de silicium liquide RMI. Cette remontée étant en plus réactive, des zones non pourvues en particules peuvent générer une mauvaise densification et donc potentiellement des faiblesses dans le matériau final. Il est donc primordial de comprendre toute la physique du procédé d'imprégnation afin de comprendre les mécanismes à l'origine de ces mauvais remplissages en poudre. Cependant, au vu de la forme de la pièce, il est difficile de comprendre et d'étudier l'influence des paramètres opératoires sur le remplissage final via une étude expérimentale. En effet, le tissage de la pièce étant complexe et la poudre étant friable, une exploration de la composition interne de l'armature après le procédé Slurry Cast semble très compliquée. C'est la raison pour laquelle le présente thèse, se basant sur la modélisation et la simulation, est nécessaire.

### 1.4.5 Objectifs de la thèse

Les avantages d'une étude numérique du procédé de pré-densification en particule Slurry Cast sont nombreux. On peut par exemple parler d'avantage économique car les matériaux développés sont complexes et leur manufacture onéreuse.

Une telle étude numérique, même si elle nécessite beaucoup de données expérimentales pour être validée, permet de limiter le nombre de fabrications de mauvaises pièces. En effet, si le modèle est vérifié, la simulation peut explorer plusieurs conditions expérimentales (comme les pressions imposées, le type de poudres utilisées, etc), sans pour autant recourir à des préformes fibreuses et des suspensions onéreuses. De plus, l'intérieur du matériau final obtenu par la simulation est directement accessible, contrairement au cas réel où son exploration peut engendrer sa destruction partielle ou totale.

Au vu des constatations énoncées à la sous-section précédente, un certain nombre d'objectifs a été fixé au début de cette thèse, et ceci afin de répondre aux nombreux questionnements de SAFRAN Ceramics concernant ce procédé APS :

1. Proposer un modèle robuste permettant de suivre l'écoulement d'une suspension, non pas à l'échelle de la pièce, mais à l'échelle des fibres de l'armature tissée. La simulation numérique ne verra donc pas le CMC comme un milieu poreux mais résoudra sa structure interne avec la complexité de son tissage.
2. Comprendre la physique complexe inhérente au procédé APS, à savoir écoulement de fluide chargé, écoulement en milieu poreux, migration particulaire.
3. Valider le modèle à l'aide d'expériences (issues de la littérature ou menées au sein de l'entreprise ou du laboratoire) ou de lois théoriques.
4. Mettre au point une étude paramétrique permettant de comprendre le rôle de chaque paramètre opératoire sur la répartition finale de particules dans le renfort fibreux.
5. Effectuer des simulations 2D et 3D sur des configurations d'armatures fibreuses comparables à celles observées dans le matériau composite.

## 1.5 Conclusions

Le procédé Slurry Cast d'introduction de charges dans une armature fibreuse d'un CMC est un procédé complexe dont la physique fait appel à beaucoup de notions de la mécanique des fluides et des solides. Ce chapitre avait pour objectif d'effectuer un état des lieux général de l'ensemble de ces notions.

Dans un premier temps, l'exploration de la problématique des matériaux composites nous a permis de comprendre la composition d'un CMC et le rôle joué par chaque composant dans le comportement final du matériau. La présentation des différents procédés de tressage du renfort fibreux mais également de densification matricielle a permis de situer le procédé Slurry Cast dans la richesse des procédés existants.

Dans un deuxième temps, l'étude de la problématique des suspensions particulières a été abordé. D'abord générale avec la présentation de l'ensemble des suspensions existantes elle fut par la suite recentrée sur le cas des suspensions fluides de particules solides. Les différents types de géométries simplifiées permettant de modéliser les particules furent également présentés. Une liste non exhaustive des modèles rhéologiques ainsi que des modèles microscopiques et macroscopiques de suivi particulaire a démontré que la modélisation des suspensions est complexe et nécessite une définition précise de l'échelle à laquelle on se place.

Enfin, la présentation de la physique des écoulements en milieu poreux a clos l'étude du contexte scientifique. La présentation générale des milieux poreux, puis de l'écoulement fluide dans ceux-ci, a montré que le procédé Slurry Cast pouvait être vu comme une infiltration en milieu poreux, et ceci à différentes échelles. Nous avons également vu que la détermination des caractéristiques du milieu poreux (perméabilité et porosité) est assez complexe mais qu'il existe un certain nombre de modèles permettant d'approcher ces valeurs. Ils seront utiles dans la détermination du modèle final.

Ce modèle final devra tenir compte de toute cette physique afin de correctement modéliser le procédé Slurry Cast (présenté en section 1.4) dans le but de répondre à toutes les interrogations de SAFRAN Ceramics.

Le chapitre suivant s'attache donc à présenter l'ensemble des stratégies de modélisation retenues permettant la définition du modèle utilisé dans ces travaux. Il présente en deuxième partie l'ensemble des schémas numériques utilisés permettant de déterminer une solution approchée aux équations du modèle.



# Chapitre 2

## Modèle et méthodes numériques

Le principal objectif de cette thèse est de mettre au point une modélisation du procédé de densification Slurry Cast/APS, présenté en section 1.4, afin de répondre aux questionnements de l'industriel SAFRAN Ceramics (*cf* sous-section 1.4.5). De par la richesse de la physique présente, ce procédé est complexe à modéliser. En effet, le modèle final doit décrire les phénomènes physiques présents dans des problématiques d'écoulement en milieu poreux, de ségrégation particulaire, de rhéologie non-newtonienne, de filtration, etc. Cette complexité de modélisation est d'autant plus accrue que ces phénomènes ne s'expriment pas à la même échelle.

Le choix fort de cette étude est de modéliser l'écoulement de la suspension à l'échelle des torons du tissage à densifier, en utilisant la mécanique des milieux continus. Ceci implique l'utilisation de lois macroscopiques permettant de traduire, à cette échelle, le comportement microscopique de la suspension particulaire. En effet, les particules utilisées dans les suspensions colloïdales (*cf* sous-section 1.2.1) ayant des tailles bien inférieures à la résolution du modèle, elle ne peuvent être modélisées.

En utilisant la mécanique des milieux continus, la stratégie de modélisation mise en place dans cette étude permet de décrire l'écoulement de la suspension colloïdale dans le tissage du CMC à l'aide du système d'équations suivantes :

- Équations de Navier-Stokes, en formulation incompressible, décrivant l'écoulement de la suspension colloïdale comme un fluide à viscosité variable,
- Équation de Phillips décrivant le transport et la diffusion des particules dans la suspension [Phillips et al., 1992],
- Loi rhéologique permettant de lier concentration en particules et viscosité, et traduisant le comportement non-newtonien de la suspension,
- Équation de Darcy permettant de décrire l'écoulement dans des agrégats particulaires immobiles se formant dans la suspension colloïdale.

L'objet de ce présent chapitre est, dans un premier temps, de justifier et d'explicitier ces équations. Cette étape débouchera sur l'élaboration du modèle final. Ce modèle sera, dans un deuxième temps, adimensionné, entraînant l'explicitation de nombres sans dimension, dont l'évaluation finalisera la caractérisation de l'écoulement présent dans le procédé Slurry Cast/APS. Enfin, l'ensemble des techniques et méthodes numériques, permettant l'obtention d'une solution approchée aux équations du modèle, seront décrites dans l'ultime partie de ce chapitre.

## 2.1 Équations du modèle

### 2.1.1 Approche globale Navier-Stokes/Brinkman

Pour rappel, la préforme fibreuse que l'on souhaite densifier est recouverte d'une interphase (*cf* sous-section 1.1.1) rendant les fils du tissage complètement imperméables à la suspension colloïdale injectée. Il est également supposé que cette préforme est *a priori* initialement saturée par la phase fluide de la suspension. Ainsi, la modélisation de notre procédé Slurry Cast/APS à l'échelle des torons, s'apparente à l'étude de l'écoulement autour d'obstacles imperméables d'un fluide, au sein duquel, de la migration particulaire est observée. Au vu de la taille des particules face à celle qui caractérise le domaine d'étude  $\Omega$ , elles ne sont pas vues comme des solides indépendants les uns des autres (comme elles le seraient à l'échelle microscopique), mais sont suivies à l'aide d'une variable homogénéisée à l'échelle macroscopique : la fraction volumique de poudre  $\phi^s$ . Cette grandeur macroscopique permet de quantifier la composition de la suspension colloïdale, tant en phase solide (via  $\phi^s = V_{\text{solide}}/V_{\text{total}}$ ) qu'en phase liquide (via  $\phi^f = 1 - \phi^s$ ).

La stratégie de modélisation retenue dans ces travaux permet de décrire l'écoulement de la suspension, non pas globalement (fluide saturant + particules), mais comme l'écoulement du fluide saturant, au sein duquel s'opère du transport et de la diffusion de particules. Le modèle possédera des équations propres à chaque phases de la suspension, qui seront par la suite couplées afin de correctement retranscrire le comportement macroscopique de la suspension colloïdale (comportement non-newtonien). Ces techniques permettant de coupler les équations seront expliquées au fur et à mesure de l'élaboration du modèle. C'est dans une première sous-section que seront explicitées les équations permettant de décrire la suspension comme un écoulement fluide à viscosité variable. Quant aux équations traduisant le transport et la diffusion des particules dans ce fluide, elles seront données dans la sous-section suivante.

Le premier écoulement fluide rencontré dans le procédé Slurry Cast/APS est l'écoulement d'une suspension colloïdale, dont la phase fluide est composée d'eau distillée et d'un dispersant, le tétraéthylamonium ou TEAH (*cf* sous-section 1.4.3). Ce dispersant n'étant qu'en faible quantité, de l'ordre du %, le comportement de la phase fluide s'apparente à celui de l'eau. Dans la mécanique classique des milieux continus, cet écoulement peut être modélisé à l'aide des équations de Navier-Stokes en formulation incompressible et monophasique (2.1), composées de l'équation de conservation de la masse et de l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})] \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $\mathbf{u}$  la vitesse du fluide,  $\rho$  et  $\mu$  respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide. Ce système d'équations monophasiques est utilisé ici en supposant que la préforme est complètement saturée par la phase fluide de la suspension. Sans cette hypothèse, l'injection serait diphasique car la suspension et l'air présent dans le tissage sont non miscibles. Il serait dès lors nécessaire d'introduire les forces de tensions superficielles, et de reconstruire l'interface entre les deux fluides.

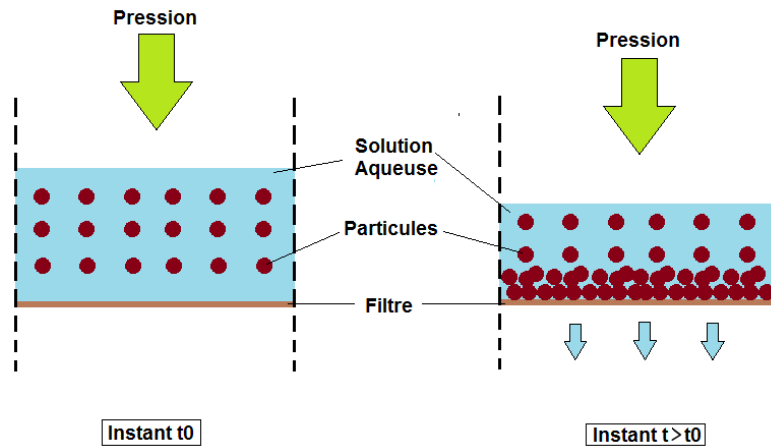
Il existe différentes techniques permettant de résoudre de tels écoulements, notamment via l'introduction d'une fonction de phase [Kataoka, 1986] [Vincent, 2010]. Cependant, dans la suite de cette étude, nous considérerons que la préforme est initialement saturée, et que l'écoulement monophasique est modélisé par le système (2.1). Le couplage des équations du système (2.1), et des équations de transport/diffusion des particules (présentées en sous-section 2.1.2 suivante), est effectué via l'introduction d'une dépendance des caractéristiques du fluide ( $\rho, \mu$ ) à la fraction volumique de poudre  $\phi^s$ . Concernant la masse volumique, une équation de mélange (2.2) est introduite :

$$\begin{aligned}\rho &= \phi^s \rho^s + \phi^f \rho^f = \phi^s \rho^s + (1 - \phi^s) \rho^f \\ \rho(\phi^s) &= (\rho^s - \rho^f) \phi^s + \rho^f\end{aligned}\tag{2.2}$$

avec  $\rho^s$  et  $\rho^f$  respectivement la masse volumique des particules et du fluide saturant, considérées comme constantes. La dépendance de la viscosité à la fraction volumique de poudre  $\phi^s$ , est introduite à l'aide d'une loi rhéologique que nous présenterons en sous-section 2.1.3.

Cependant, l'écoulement de la phase fluide de la suspension, décrit par les équations (2.1), n'est pas le seul écoulement fluide rencontré lors du procédé Slurry Cast/APS. En effet, dans une problématique d'étude de suspensions colloïdales, il est usuel d'observer la formation de zones très denses en particules : les agrégats (*cf* sous-section 1.4.3, figure 1.17). Ceux-ci, sont soit libres dans la phase liquide, soit immobiles, et de ce fait constitués de particules en agencement compact. Ils se caractérisent à l'échelle macroscopique par une fraction de poudre maximale  $\phi_m^s$ . S'ils sont immobiles, ces agrégats forment alors un gâteau particulaire. Ici, l'écoulement est celui de la phase saturante de la suspension colloïdale, autour de particules immobiles, car en agencement compact. Le gâteau particulaire sera caractérisé par une fraction volumique  $\phi_c^s = \phi_m^s$ .

Dans le cas du procédé Slurry Cast/APS, la formation du gâteau particulaire est due à la présence du filtre à particules car ce dernier joue un rôle de séparation entre la phase fluide et les particules de la suspension. Il force l'agglomération particulaire, c'est à dire, l'apparition et la croissance du gâteau. Une illustration simple de ce phénomène est donnée en figure 2.1.



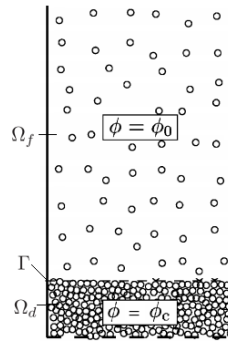
**Figure 2.1** – Formation du gâteau particulaire lors de l'écoulement 1D, à gradient de pression imposé, d'un fluide chargé en particules. Impact du filtre à particules sur le gâteau particulaire.



Les agrégats particulaires mobiles ainsi que le gâteau particulaire immobile, correspondent à des amas de particules disposées en agencement compact, et traduisent un maximum de la fraction volumique  $\phi^s$ , noté  $\phi_m^s$ . Dans le cas où celles-ci sont assimilées à des sphères de même rayon, cette valeur, théoriquement égale à 0,74 (agencement cubique faces centrées), est comprise entre 0,64 (arrangement aléatoire) et 0,68 (arrangement cubique centré) [Kitano et al., 1981] [Rintoul and Torquato, 1996] [Rutgers, 1962]. Dans notre étude, la géométrie interne du gâteau particulaire n'est pas résolue explicitement. L'écoulement fluide dans ces zones est, à l'échelle des fibres du tissage, et donc à l'échelle de la modélisation, vu comme un écoulement en milieu poreux (*cf* section 1.3).

On observe donc deux types d'écoulement fluide dans une problématique d'injection de particules au sein d'une préforme fibreuse. Le premier, considéré comme libre, où l'écoulement de la suspension peut être modélisé par les équations de Navier-Stokes (2.1) couplées avec les équations de transport des particules (*cf* sous-section 2.1.2). Le deuxième, caractérisant l'écoulement de la phase saturante de la suspension dans un milieu poreux, composé de particules en agencement compact.

Ainsi, notre domaine d'étude  $\Omega$  sera découpé en deux sous-domaines bien distincts : un domaine fluide chargé en particules libres et noté  $\Omega_f$ , et un domaine poreux  $\Omega_d$  composé de particules en agencement compact. Ces deux domaines sont séparés par une interface  $\Gamma$  (figure 2.2).



**Figure 2.2** – Représentation schématique des deux zones d'écoulement fluide pouvant être rencontrées dans le procédé *Slurry Cast/APS*. ( $\Omega_f$ ) domaine d'écoulement libre de la suspension chargée. ( $\Omega_d$ ) domaine d'écoulement en milieu poreux. ( $\Gamma$ ) interface de séparation des deux domaines.

Les équations régissant l'écoulement dans le domaine fluide  $\Omega_f$  doivent être complétées par les équations régissant l'écoulement dans le domaine poreux  $\Omega_d$ , et enfin les conditions de raccord à l'interface  $\Gamma$ . Pour cela il faut caractériser le milieu poreux, *i.e.*, définir la porosité  $\epsilon$  ainsi que la perméabilité  $K_c$  du gâteau particulaire (*cf* section 1.3).

Par définition, le gâteau est un milieu poreux constitué de particules dont l'agencement compact se traduit par une fraction volumique de poudre  $\phi_c^s$ . Cette valeur est constante, puisque le gâteau est incompressible et les particules immobiles. La définition de la porosité du milieu poreux est immédiate :

$$\epsilon = \frac{V_{\text{vide}}}{V_{\text{total}}} = \frac{V_{\text{total}} - V_{\text{solide}}}{V_{\text{total}}} = 1 - \phi_c^s \quad (2.3)$$

Concernant la perméabilité du gâteau, le modèle de Kozeny-Carman (1.7) (décrit dans la sous-section 1.3.4) s'applique *a priori* parfaitement à cette étude puisque le milieu poreux est constitué de sphères de même rayon en agencement compact :

$$K = \frac{d^2}{180} \frac{\epsilon^3}{(1 - \epsilon)^2}$$

Dans cette étude, ce modèle sera cependant utilisé sous la forme suivante (avec  $a$  le rayon moyen des particules) :

$$K_c = \frac{a^2}{45} \frac{(1 - \phi_c^s)^3}{\phi_c^{s^2}} \quad (2.4)$$

Le milieu poreux étant complètement caractérisé, l'écoulement de la phase fluide de la suspension (de viscosité  $\mu = 1.10^{-3}$  Pa.s) peut être décrit macroscopiquement à l'aide de la loi de Darcy (2.5) [Darcy, 1856] où  $\mathbf{q}$  est la vitesse de darcy définie par  $\mathbf{q} = \epsilon \mathbf{u}$  (avec  $\mathbf{u}$  la vitesse interstitielle, correspondant à la vitesse réelle au sein du milieu poreux).

$$-\frac{\mu}{K_c} \mathbf{q} - \nabla p = 0 \quad (2.5)$$

Dans cette étude, l'écoulement en milieu poreux est décrit à l'aide du modèle de Brinkman, développé parallèlement au modèle de Darcy [Brinkman, 1947] [Whitaker, 1986] [Auriault, 1987] [Arquis, 1994], et présenté dans la section 1.3 :

$$-\frac{\mu}{K_c} \mathbf{q} - \nabla p + \tilde{\mu} \Delta \mathbf{q} = 0 \quad (2.6)$$

avec  $\tilde{\mu}$  est la viscosité effective définie par  $\tilde{\mu} = \mu/\epsilon$ . L'introduction du terme de traînée permet de retranscrire l'influence sur l'écoulement fluide de la présence de particules solides et immobiles. Cette stratégie de modélisation de l'écoulement en milieu poreux s'avère particulièrement intéressante dans notre étude de l'écoulement dans le gâteau formé de l'agglomération des particules. En outre, elle est d'autant plus intéressante qu'elle peut être à l'origine d'une approche globale Navier-Stokes/Brinkman permettant de rendre compte d'écoulements fluides dans des systèmes mixtes fluide-poreux. En effet, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement du système (2.1) (écoulement dans un fluide pur), peut être couplée à l'équation (2.6) (écoulement dans un milieu poreux) :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \right] - \frac{\mu \epsilon}{K_c} \mathbf{u} \quad (2.7)$$

avec  $\mathbf{u}$  la vitesse du fluide (complexe dans  $\Omega_f$ , et interstitielle dans  $\Omega_d$ ). La distinction entre la résolution d'un écoulement de fluide pur ou d'un écoulement en milieu poreux se fait au travers de la perméabilité  $K_c$ . Dans le domaine fluide pur  $\Omega_f$  la perméabilité est considérée comme infinie et le terme de Darcy disparaît, nous retrouvons l'équation de conservation de la quantité de mouvement du système (2.1) :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \right] - \cancel{\frac{\mu \epsilon}{K_c} \mathbf{u}}$$

Dans le cas d'un écoulement en milieu poreux, la perméabilité n'est plus infinie mais très faible ( $10^{-10} - 10^{-14} \text{ m}^2$ ), rendant le terme poreux prédominant dans le système. Dès lors, l'équation de Brinkman (2.6) se retrouve directement (sachant que  $\mathbf{u} = \mathbf{q}/\epsilon$ ) :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \right] - \frac{\mu \epsilon}{K_c} \mathbf{u}$$

Bien que cette approche s'avère fort agréable, elle ne doit cependant pas occulter que les termes de l'équation (2.7) ne s'expriment pas sur les mêmes domaines. C'est la raison pour laquelle nous préférons présenter un modèle moins simplifié, formé des équations (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13) avec leur domaine d'application propre.

Avant de présenter ce modèle, il est nécessaire d'exhiber les conditions de raccordement en vitesse sur l'interface  $\Gamma$ , séparant la zone fluide  $\Omega_f$  et la zone poreuse  $\Omega_d$ . En notant par les indices  $t$  et  $n$  respectivement les vitesses tangentielles et normales, le raccordement à l'interface entre le fluide et le milieu poreux s'écrit :

$$\epsilon \mathbf{u}_n = \mathbf{q}_n \quad ; \quad \epsilon \mathbf{u}_t = \mathbf{q}_t \quad (2.8)$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{n}} = \tilde{\mu} \frac{\partial \mathbf{q}_t}{\partial \mathbf{n}} \quad (2.9)$$

Nous considérons alors que les équations de conservation de la masse et de la quantité de matière (2.1) sont valides dans la zone fluide  $\Omega_f$  tandis que l'équation de Brinkman (2.6) est valide dans la zone poreuse  $\Omega_d$ . Le système d'équations ainsi obtenu dans le domaine d'étude  $\Omega = \Omega_f \times \Omega_d$  est le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \mathbf{v} = \{\mathbf{u}, \mathbf{q}\} \quad \text{Dans } \Omega \quad (2.10) \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}]) & \text{Dans } \Omega_f \quad (2.11) \\ -\frac{\mu}{K_c} \mathbf{q} - \nabla p + \tilde{\mu} \Delta \mathbf{q} = 0 & \text{Dans } \Omega_d \quad (2.12) \\ \epsilon \mathbf{u}_n = \mathbf{q}_n \quad ; \quad \epsilon \mathbf{u}_t = \mathbf{q}_t \quad ; \quad \mu \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{n}} = \tilde{\mu} \frac{\partial \mathbf{q}_t}{\partial \mathbf{n}} & \text{Sur } \Gamma \quad (2.13) \end{array} \right.$$

Ce système définit l'ensemble des écoulements fluides présents dans la problématique d'injection d'une suspension colloïdale au seins d'une préforme de CMC, par le procédé Slurry Cast/APS. Cependant, aucune équation ne prend en compte l'influence de cet écoulement fluide sur le comportement des particules dans la suspension.

Il est à présent nécessaire d'exhiber le système d'équations permettant de traduire le transport et la diffusion des particules : le modèle de Phillips (*cf* sous-section 2.1.2 suivante). Par ailleurs, l'écoulement décrit par le système d'équations ci-dessus, possède un comportement newtonien, puisque la viscosité est constante et égale à celle du fluide saturant. Dans le but d'appréhender le comportement macroscopique non-newtonien de la suspension, il est également nécessaire de lier la viscosité à la fraction volumique de particules. Cette dépendance est introduite à l'aide d'une loi rhéologique présentée dans la sous-section 2.1.3.

### 2.1.2 Équation de Phillips

L'écoulement d'une suspension colloïdale peut être décrit comme celui d'un fluide newtonien chargé en particules sphériques nanométriques, dont les chocs entre-elles entraînent l'apparition de phénomènes de ségrégation [Gadala-Maria and Acrivos, 1980]. Lorsque l'on étudie ces suspensions à l'échelle microscopique, chaque particule est pleinement définie et vue comme un solide indéformable. La modélisation des chocs particulaires à cette échelle est immédiate et relève tant de la mécanique des fluides que celle des solides. Cependant, à une échelle supérieure, l'échelle macroscopique retenue ici, les particules ne sont plus résolues individuellement, mais à l'aide d'une grandeur moyenne  $\phi^s$ . Le suivi des particules en suspension n'est donc plus immédiat, mais peut se faire, par exemple, à l'aide d'une équation de transport-diffusion :

$$\frac{d\phi^s}{dt} = \nabla \cdot (D(\phi^s)\nabla\phi^s) + S(\phi^s) \quad (2.14)$$

avec  $D(\phi^s)$  et  $S(\phi^s)$  respectivement le coefficient de diffusion et le terme source de l'équation de transport-diffusion. En supposant, de plus, qu'à l'échelle macroscopique, les particules ont la même vitesse que le fluide saturant, l'expression de la dérivée particulaire est alors :

$$\frac{d\phi^s}{dt} = \frac{\partial\phi^s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi^s$$

Toute la problématique de modélisation à l'échelle macroscopique du comportement des particules nanométriques en solution, réside dans l'explicitation des grandeurs  $D(\phi^s)$  et  $S(\phi^s)$ . Un exemple de modèle largement utilisé à l'heure actuelle est celui de Phillips [Phillips et al., 1992], qui est une modification d'un modèle initialement développé par [Leighton and Acrivos, 1987]. Il utilise une équation de type transport-diffusion (2.14) pour expliquer le réaménagement local des charges dû aux contraintes de cisaillement locales.

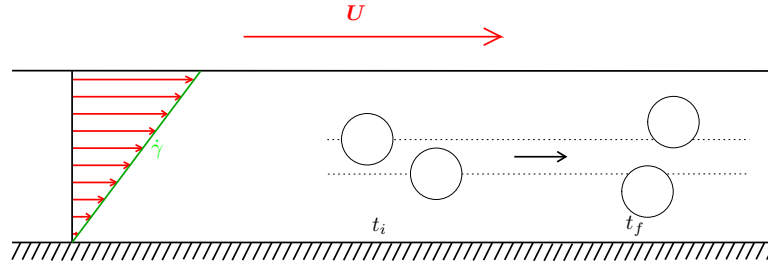
$$\frac{\partial\phi^s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi^s = -\nabla \cdot (\mathbf{N}_c + \mathbf{N}_\mu + \mathbf{N}_b) \quad (2.15)$$

Le terme convectif de cette équation (2.15) étant obtenu à partir du champ de vitesses résolu par les équations de Navier-Stokes (2.10) et (2.11) décrites dans la sous-section 2.1.1 précédente. Afin d'explicitier la partie diffusive, les travaux de [Phillips et al., 1992] se sont basés sur la théorie de collision irréversible entre deux corps. Ils ont ainsi identifié trois flux diffusifs indépendants :

1.  $\mathbf{N}_c$  : Flux diffusif causé par la variation spatiale des fréquences de collision entre les charges.
2.  $\mathbf{N}_\mu$  : Flux diffusif causé par la variation spatiale de la viscosité.
3.  $\mathbf{N}_b$  : Flux diffusif causé par les mouvements brownien des particules.

Concernant le flux  $\mathbf{N}_b$ , on peut montrer que les effets du mouvement brownien des particules sur la diffusion peuvent être négligés lorsque le nombre de Peclet associé aux charges  $Pe = \dot{\gamma}a^2/D_{part}$ , est très élevé [Mueller et al., 2010].

La détermination des flux  $\mathbf{N}_c$  et  $\mathbf{N}_\mu$  s'effectue donc à l'aide de la théorie de la collision irréversible entre deux particules parfaitement sphériques. Concernant le flux  $\mathbf{N}_c$ , ces travaux se placent dans le cas d'un écoulement à cisaillement constant (écoulement de Couette), sans variation spatiale de la viscosité (*cf* figure 2.3, page 42).



**Figure 2.3** – Collision entre deux particules sphériques dans un écoulement à cisaillement constant sans variation spatiale de viscosité. Le temps  $t_i$  correspond au temps avant collision et  $t_f$  après collision.

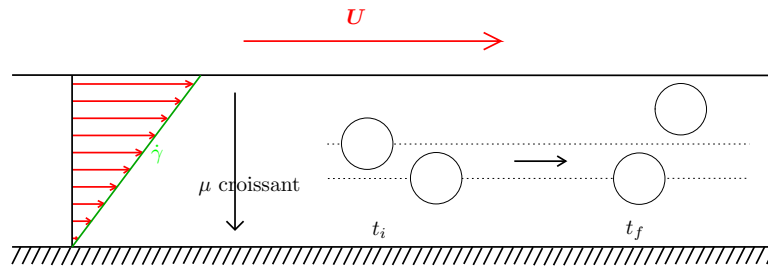
Dans ces travaux, l'écoulement est décrit comme un empilement de couches glissant les unes sur les autres à différentes vitesses. Ainsi, deux particules se situant sur deux lignes de courant différentes, n'auront pas la même vitesse. Le choc entre celles-ci dépendra de la différence de vitesse existant entre ces particules. Il dépendra également de la taille de celles-ci. En effet, plus les particules seront grandes, plus les chocs seront importants. En extrapolant ce comportement entre deux particules à un ensemble de particules, [Phillips et al., 1992] ont identifié 3 paramètres influençant le flux de collision particulaire dans des écoulements à faible vitesse :

1.  $\dot{\gamma}$  : le taux de cisaillement entraîne une migration des particules des zones à fort taux de cisaillement vers les zones à faible taux de cisaillement,
2.  $a$  : plus la taille des particules est grande, plus le phénomène de migration est accentué,
3.  $\phi^s$  : l'augmentation de la fraction volumique de poudre entraîne une augmentation de la fréquence des chocs entre les particules et donc augmente le phénomène de migration.

Toutes ces observations permettent l'expression du flux  $N_c$  de collisions entre particules, par l'expression suivante :

$$N_c = -D_c a^2 \left( \phi^{s2} \nabla \dot{\gamma} + \phi^s \dot{\gamma} \nabla \phi^s \right) \quad (2.16)$$

Concernant la détermination du flux  $N_\mu$ , les auteurs se sont placés dans la même configuration que précédemment, en imposant toutefois une variation de la viscosité (cf figure 2.4).



**Figure 2.4** – Collision entre deux particules sphériques dans un écoulement à cisaillement constant avec variation spatiale de viscosité. Le temps  $t_i$  correspond au temps avant collision et  $t_f$  après collision.

En observant que la variation de la viscosité entraînait une résistance du mouvement particulaire dans le sens des viscosités croissantes, ils en ont déduit la forme du flux  $\mathbf{N}_\mu$  suivante :

$$\mathbf{N}_\mu = -D_\mu \phi^{s2} \dot{\gamma} \left( \frac{a^2}{\mu} \right) \frac{d\mu}{d\phi^s} \nabla \phi^s \quad (2.17)$$

L'ensemble des flux diffusifs du modèle de Phillips est alors :

$$\begin{cases} \mathbf{N}_c = -D_c a^2 (\phi^{s2} \nabla \dot{\gamma} + \phi^s \dot{\gamma} \nabla \phi^s) \\ \mathbf{N}_\mu = -D_\mu \phi^{s2} \dot{\gamma} \left( \frac{a^2}{\mu} \right) \frac{d\mu}{d\phi^s} \nabla \phi^s \end{cases} \quad (2.18)$$

avec  $a$  le rayon des charges,  $D_c$  et  $D_\mu$  des constantes de l'ordre de l'unité déterminées empiriquement sur un écoulement de Couette. Le terme en  $\nabla \dot{\gamma}$  dans l'expression du flux  $\mathbf{N}_c$  permet d'imposer une migration due au gradient de cisaillement même sans gradient de particules dans l'écoulement. Dans une approche de modélisation de la ségrégation particulaire à l'aide d'une équation de transport-diffusion (2.14), ce terme sera considéré comme le terme source de l'équation car il ne s'exprime pas en fonction de  $\nabla \phi^s$ . L'équation du modèle de Phillips original est alors :

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi^s = \nabla \cdot (D(\phi^s) \nabla \phi^s) + S(\phi^s) \quad (2.19)$$

avec

$$\begin{cases} D(\phi^s) = D_c a^2 \phi^s \dot{\gamma} + D_\mu \phi^{s2} \dot{\gamma} \left( \frac{a^2}{\mu} \right) \frac{d\mu}{d\phi^s} \\ S(\phi^s) = \nabla \cdot (D_c a^2 \phi^{s2} \nabla \dot{\gamma}) \end{cases} \quad (2.20)$$

Le principal intérêt du modèle développé dans cette thèse, par rapport au modèle de Phillips original, réside dans l'intégration d'une condition limite spécifique aux parois solides. Celle-ci consiste à annuler les flux de particules au travers des solides imperméables, et ainsi, empêcher une diffusion particulaire selon leur normale entrante  $\mathbf{n}$ . Cette condition limite donnée dans l'équation (2.21), et couplée à une vitesse de transport nulle, permet l'obtention d'une fraction volumique nulle à la paroi.

$$\mathbf{n} \cdot (-\mathbf{N}_c + \mathbf{N}_\mu) = 0 \quad (2.21)$$

Comme nous le verrons dans le chapitre 3, cette condition aux limites nous permettra de parfaitement retranscrire la migration particulaire proche des parois solides. Le modèle final de Phillips permettant de suivre le mouvement des particules dans le fluide prend donc la forme finale suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi^s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi^s = \nabla \cdot \left( \left( D_c a^2 \phi^s \dot{\gamma} + D_\mu \phi^{s2} \dot{\gamma} \left( \frac{a^2}{\mu} \right) \frac{d\mu}{d\phi^s} \right) \nabla \phi^s \right) + \nabla \cdot (D_c a^2 \phi^{s2} \nabla \dot{\gamma}) \\ \mathbf{n} \cdot (-\mathbf{N}_c + \mathbf{N}_\mu) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.22)$$

que l'on peut également écrire sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi^s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi^s = -\nabla \cdot (\mathbf{N}_c + \mathbf{N}_\mu) \quad \text{dans } \Omega_f \\ \mathbf{n} \cdot (-\mathbf{N}_c + \mathbf{N}_\mu) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.24)$$

Dans cette sous-section sur la ségrégation particulaire, nous avons explicité une équation de suivi macroscopique sur la fraction volumique de poudre en suspension : l'équation de Phillips. Cette équation (2.22) ainsi que sa condition aux limites (2.23), sont ajoutées au modèle présenté dans la sous-section précédente, et composé des équations de Navier-Stokes/Brinkman (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13). En l'état, ce modèle permet de décrire tant l'écoulement de la phase fluide que la migration de la phase solide. Cependant, tous les comportements macroscopiques de la suspension ne sont pas encore modélisés par ces équations. En effet, le comportement non-newtonien de la suspension, inhérent à la présence des particules, n'est actuellement pas pris en compte. Ainsi, il est nécessaire d'introduire une loi rhéologique liant la viscosité à la fraction volumique de charge.

### 2.1.3 Lois rhéologiques

Les suspensions colloïdales sont des fluides complexes dont le comportement rhéologique est qualifié de non-newtonien. Dans ceux-ci, les contraintes de cisaillement ne sont plus reliées linéairement à la vitesse de cisaillement (*cf* sous-section 1.2.3). Ainsi, leur viscosité n'est donc plus constante, mais dépend localement de ces vitesses. Dans le cas des suspensions colloïdales de particules, cette non linéarité de la viscosité peut s'expliquer, à l'échelle microscopique, par l'interaction des particules avec le fluide saturant (qui lui est newtonien). Cependant, à l'échelle macroscopique, comme celle à laquelle se situe cette étude, cette interaction n'est pas directement résolue. Dans ce cas, il est primordial d'expliciter des lois permettant de rendre compte de ces phénomènes microscopiques sur le comportement macroscopique de la suspension.

La stratégie de cette étude n'est pas de modéliser l'ensemble de la suspension (fluide + particules) à l'aide des équations de Navier-Stokes en formulation non-newtonienne. Au contraire, le choix s'est porté sur le développement d'un modèle possédant des équations permettant de suivre l'écoulement d'un fluide newtonien, support d'un transport particulaire. Ainsi les équations de Navier-Stokes/Brinkman représentent l'écoulement de la suspension colloïdale comme un fluide au sein duquel l'équation de Phillips modélise le transport et la diffusion des particules. Cependant, ces équations ne sont pas encore couplées, et le fluide étudié au travers de ces lois est encore considéré comme newtonien. Les particules ne jouent alors qu'un rôle de traceurs inertes en suspension.

De par la mécanique même de construction du modèle, il est désormais nécessaire d'introduire une loi rhéologique liant la viscosité du fluide à la fraction volumique locale de particules  $\phi^s$ . Ainsi, la résolution de l'écoulement fluide par les équations de Navier-Stokes (2.11) et (2.10) générera un transport et une diffusion des particules en suspension, dont le suivi via la fraction volumique de poudre  $\phi^s$  sera effectué par l'équation de Phillips (2.22). Cette nouvelle répartition de poudre influencera la viscosité, au travers de la loi rhéologique, qui sera réintroduite dans les équations de Navier-Stokes, permettant ainsi de traduire le caractère non-newtonien de la suspension. Cette stratégie de modélisation est justifiée par un certain nombre de travaux ainsi que par des études expérimentales de viscosimétrie. On peut citer notamment le travail de [Mueller et al., 2010] dans lequel l'étude d'un fluide newtonien chargé en particules montre que de la fraction volumique locale en charge dépendra la viscosité du mélange.

Cette dépendance de la viscosité à la concentration en particules dans une suspension colloïdale est connue, et un certain nombre de modèles permettant de les lier ont été développés au cours des dernières décennies [Mooney, 1951] [Krieger, 1972] [Quemada, 1977] [Batchelor and Green, 1972] [Brady, 1993]. Tous ces modèles ont en commun d'explicitement la viscosité dynamique à l'aide de la viscosité  $\mu_0$  du fluide saturant newtonien, et d'une fonction de la fraction volumique de poudre  $\phi^s$  :

$$\mu = \mu_0 f(\phi^s) \quad (2.25)$$

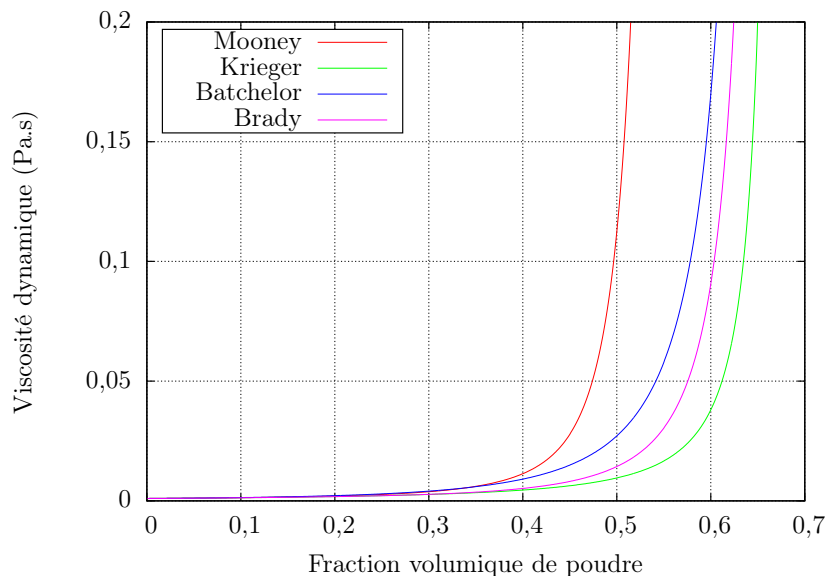
et diffèrent ainsi de par la définition même de la fonction  $f$ . Une liste, non exhaustive, de lois rhéologiques se basant sur le modèle (2.25), est donnée dans le tableau 2.1. Dans notre étude, le solvant étant constitué d'une faible quantité de dispersant TEAH et d'une majorité d'eau distillée, la viscosité  $\mu_0$  et la densité du solvant seront pris égaux à ceux de l'eau. Concernant les poudres utilisées dans le procédé Slurry Cast/APS (*cf* sous-section 1.4.3), leur densité est environ trois fois supérieure à la densité de l'eau.

**Table 2.1** – *Exemple de modèles rhéologiques semi-empiriques permettant de lier la viscosité à la fraction volumique de particules en suspension.*

| Modèle    | Loi de viscosité                                                                                           | Paramètre                                                  |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| Mooney    | $\mu = \mu_0 \exp\left(\frac{\eta \phi^s}{1 - k \phi^s}\right)$                                            | $\eta = 2, 5$ coefficient d'Einstein<br>$k = 1 \phi_m^s$   |
| Krieger   | $\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{\phi^s}{\phi_m^s}\right)^{-\eta \phi_m^s}$                                    | $\phi_m^s$ compacité maximale                              |
| Batchelor | $\mu = \mu_0(1 + \eta c + \beta c^2)$                                                                      | $c = \frac{\phi^s}{1 - k \phi^s}$<br>$5, 2 < \beta < 7, 6$ |
| Brady     | $\mu = \mu_0 \left(1 + \eta \phi^s + \beta \phi^{s2} \left(1 - \frac{\phi^s}{\phi_m^s}\right)^{-2}\right)$ |                                                            |

Le modèle décrit dans les travaux de [Quemada, 1977] peut être déduit de celui de Krieger en utilisant une fraction volumique maximale  $\phi_m^s$  de 0,8. L'exposant déterminé dans les travaux de Quemada correspond donc à une valeur de  $\eta \phi_m^s = 2$ . Comme vu précédemment, dans le cas de particules sphériques de même diamètre, cette compacité maximale, théoriquement égale à 0,74, est en réalité de l'ordre de 0,68. C'est cette valeur que nous utiliserons dans un premier temps car c'est la valeur prise dans les travaux de [Krieger, 1972], [Phillips et al., 1992] et de [Breil, 2001]. Une fois toutes ces grandeurs définies, on peut étudier l'évolution de la viscosité dynamique en fonction de la fraction volumique en poudre de ces différents modèles (figure 2.5, page 46).





**Figure 2.5** – Évolution de la viscosité dynamique de la suspension en fonction de la fraction volumique de poudre

Nous remarquons un comportement semblable à toutes ces lois : une augmentation peu marquée de la viscosité pour des fractions volumiques de poudre  $\phi^s \in [0; 0,1]$ , suivie d'une forte augmentation pour des suspensions plus concentrées. Toutes ces lois ayant une asymptote verticale pour  $\phi^s = \phi_m^s$ , *i.e.*, pour la fraction volumique de formation des agrégats particulaires. Cette dernière remarque est primordiale car elle indique que les agrégats, formés de particules en agencement compact, possèdent une viscosité infinie caractéristique des solides. Ainsi dans notre cas, si des agrégats mobiles de particules en agencement compact se forment dans le fluide, notre modèle les considérera comme des solides. Ils seront donc naturellement "poussés" par le fluide au travers de la contrainte de viscosité. Cependant, dans le cas où ces agrégats ne sont plus libres dans le fluide, mais immobiles (comme pour le gâteau particulaire), ils ne seront plus considérés comme des solides mais comme des milieux poreux. Dans ces zones, on activera une perméabilité finie caractéristique du milieu, afin que le terme de Darcy joue son rôle de filtration.

Le but de ces modèles rhéologiques est d'introduire le caractère non-newtonien des suspensions colloïdales dans le système d'équations newtoniennes formé des équations de Navier-Stokes-Brinkman (2.10) (2.11) (2.12) et (2.13) et des équations de Phillips (2.22) et (2.23). Au vu des suspensions utilisées dans le procédé Slurry Cast/APS (*cf* sous-section 1.4.3), le comportement non-newtonien à introduire est un comportement viscoplastique, voire rhéofluidifiant, étant donnée la contrainte seuil de cisaillement  $\tau_0$  très faible ( $< 10^{-6}$  Pa). Les modèles présentés dans le tableau 2.1 et sur la figure 2.5 s'avèrent donc parfaitement adaptés. En effet, on remarque que la viscosité diminue lorsque la fraction volumique de poudre  $\phi^s$  en suspension diminue. Or le modèle de Phillips, présenté dans la sous-section 2.1.2, introduit une migration particulaire des zones à fort taux de cisaillement vers celles à faible taux de cisaillement. Ainsi, dans ce modèle, l'augmentation locale de la vitesse de cisaillement aura pour conséquence l'apparition d'une migration particulaire, diminuant localement la fraction volumique  $\phi^s$ , et donc au travers de ces modèles, une diminution de la viscosité.

L'utilisation d'un de ces modèles rhéologiques traduira bien le comportement macroscopique rhéofluidifiant de la suspension puisqu'ils traduisent une diminution de la viscosité lorsque la vitesse de cisaillement augmente. Le choix final du modèle rhéologique à incorporer dans le modèle d'équations est ici peu important. En effet, chacun de ces modèles pouvant être calé aux relevés de viscosimétries des suspensions utilisées dans ce procédé, et ceci à l'aide de légères modifications telles que la compacité maximale. Cependant, comme énoncé plus haut, nous avons décidé de travailler avec la loi de Krieger puisque c'est celle qui s'adaptait le mieux aux comportements des suspensions utilisées par SAFRAN Ceramics. Cette loi étant largement utilisée dans le domaine des suspensions particulières, son implémentation sera d'autant plus facilitée.

Avant d'exhiber le modèle final, une dernière étape essentielle, n'a pas encore été présentée. Il s'agit de l'étape permettant de résoudre l'accumulation de particules et la formation du gâteau particulaire. En effet, nous avons déjà discuté de l'existence de deux types d'écoulements fluides dans cette étude, un libre et un en milieu poreux (*cf* sous-section 2.1.1). Cependant nous n'avons pas encore présenté la méthode permettant de modéliser la formation du milieu poreux. Cette méthode n'est pas triviale dans une approche macroscopique, comme celle dans laquelle s'inscrit cette étude, car les particules ne sont pas résolues individuellement. La structure du gâteau particulaire n'est pas résolue explicitement, et il est donc nécessaire de modifier quelque peu les équations afin de tenir compte de sa formation. La sous-section suivante s'attache à présenter cette méthode de modélisation de l'accumulation particulaire. Le modèle d'équations final sera présenté par la suite et clôturera cette section sur les équations du modèle.

#### 2.1.4 Prise en compte du filtre à particules en sortie

Tel qu'il est actuellement défini, le modèle simule l'écoulement de la suspension au travers de la préforme à densifier. Le couplage entre les équations de Navier-Stokes et l'équation de Phillips permet de déterminer la répartition spatiale en fraction volumique de poudre  $\phi^s$ , et son interaction sur la viscosité de la suspension. Cependant, ce modèle ne traduit pas encore toute la physique présente dans le procédé Slurry Cast/APS. En effet, dans celui-ci, SAFRAN Ceramics utilise un filtre à particules en sortie d'écoulement afin de confiner les particules dans la préforme. D'un point de vue macroscopique, ce filtre agit comme un milieu poreux perméable au fluide saturant de la suspension, mais imperméable aux particules. Or, cette dissociation de comportement vis-à-vis de chaque phase n'est pas encore intégrée dans le modèle. En l'état, l'ajout d'un filtre dans notre modèle comme milieu poreux, autorisera les particules à le traverser. Dans le but de modéliser parfaitement le procédé, il est donc maintenant nécessaire de modifier les équations du modèle afin de parfaitement intégrer le comportement du filtre sur l'écoulement de la suspension, *i.e.*, poreux pour le fluide saturant et imperméable aux particules.

Les observations suivantes, faites par SAFRAN Ceramics, ont été déterminantes dans la stratégie mise en place pour prendre en compte le comportement du filtre. Celles-ci seront également vérifiées lors de l'étape de validation exposée dans le chapitre 3.

1. Il agit comme un milieu poreux seulement vis-à-vis du fluide saturant.
2. Il est totalement imperméable aux particules.
3. Il ne se comprime pas au cours du temps.
4. Il ne s'encrasse pas en particules au cours du temps.

Ainsi, dans la modélisation, le filtre à particules sera considéré comme un milieu poreux, d'épaisseur  $\delta_m$ , et de perméabilité  $K_m$  (résistance à l'écoulement  $R_m = \delta_m/K_m$ ). Afin de le rendre totalement imperméable aux particules, et perméable au fluide saturant, l'idée est alors d'annuler le flux particulaire au travers du filtre. Pour cela, une modification de la vitesse  $\mathbf{u}_{TR}$  utilisée dans l'équation de Phillips (2.22) est nécessaire. Originellement égale à la vitesse résolue dans l'équation de Navier-Stokes  $\mathbf{u}_{NS}$ , la vitesse de transport devient alors :

- En amont du filtre  $\mathbf{u}_{TR} = \mathbf{u}_{NS}$ .
- En aval du filtre  $\mathbf{u}_{TR} = \mathbf{0}$ .

Cette méthode d'adaptation de la vitesse de transport se justifie parfaitement dans le cadre de cette modélisation, puisque la séparation d'échelle entre la taille des particules et la résolution du modèle est très marquée. En effet, la maille la plus fine utilisée dans notre étude contient beaucoup de particules (environ 10 dans chaque direction). Ainsi, il est réaliste de supposer que le phénomène d'accumulation particulaire n'est résolu que dans la seule épaisseur de cette maille. L'annulation des flux particuliers au travers du gâteau, via la pénalisation de la vitesse de transport, est bien justifiée. Cependant, cette modification implique localement une divergence non nulle dans les mailles support de l'accumulation. La condition assurée par l'équation de conservation de la masse (2.10) n'est donc localement plus assurée dans l'équation de Phillips (2.22). Or cette hypothèse de divergence nulle est utilisée dans l'élaboration du modèle puisqu'elle disparaît dans les bilans de flux :

$$\oint \phi^s \mathbf{u}_{TR} d\Sigma = \iiint \nabla \cdot (\phi^s \mathbf{u}_{TR}) dS = \iiint (\mathbf{u}_{TR} \nabla \phi^s + \phi^s \nabla \cdot \mathbf{u}_{TR}) dS$$

Dans le but de justifier la validité des équations et de la physique représentée, il est nécessaire de réintroduire cette divergence locale non-nulle dans le modèle de Phillips, soit via l'ajout d'un terme source (2.26), soit par sa réintroduction dans le terme de transport (2.27). L'utilisation d'une stratégie ou d'une autre trouve sens lors du choix du modèle numérique de résolution, et sera expliquée dans la section 2.3.

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial t} + \mathbf{u}_{TR} \cdot \nabla \phi^s = -\nabla \cdot (N_c + N_\mu) - \phi^s \nabla \cdot \mathbf{u}_{TR} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_{TR} \phi^s) = -\nabla \cdot (N_c + N_\mu) \quad (2.27)$$

La conservation de la masse des particules sera assurée, et l'accumulation particulaire parfaitement prise en compte. De plus, sans la présence du filtre, la vitesse de transport  $\mathbf{u}_{TR}$  sera la vitesse résolue par les équations de Navier-Stokes (2.10) et (2.11) (à divergence nulle) et on retrouvera le modèle de Phillips classique (2.15).

Afin de traduire la remontée de l'accumulation le long de l'écoulement, et donc de traduire l'épaississement et la dynamique d'évolution du gâteau particulaire, notre modèle annule tous les flux de particules dans les mailles considérées comme "compactées", *i.e* où  $\phi^s = \phi_c^s$ . L'évolution de la compaction particulaire se manifestera par un déplacement de la contrainte de la divergence non nulle de la vitesse de transport de maille en maille. Les zones compactées étant considérées comme un milieu poreux ayant une perméabilité propre  $K_c$ , elles joueront un rôle dans la détermination des vitesses résolues par les équations de Navier-Stokes (2.10) et (2.11).

### 2.1.5 Modèle d'équations final

La stratégie de modélisation mise en place dans cette étude a permis de mettre au point le système d'équations (2.28). Il permet de modéliser à l'échelle macroscopique l'écoulement d'une suspension, chargé en particules nanométriques, dans toute sa complexité : écoulement du fluide saturant, transport/diffusion des particules, interaction fluide/particule, compaction particulaire, écoulement en milieu poreux et comportement non-newtonien. Il sera nécessaire de vérifier que ce modèle représente bien la physique dans laquelle s'inscrit cette étude, en comparant les solutions à des expériences trouvées dans la littérature ou à des lois théoriques. Cette étape de validation est présentée dans le chapitre 3.

Avant cela, le modèle sera adimensionné, afin de faire apparaître les nombres sans dimension qui nous permettront d'étudier plus facilement l'écoulement que nous avons dans ce procédé Slurry Cast/APS. Enfin, il sera également nécessaire de présenter l'ensemble des méthodes numériques permettant de déterminer une solution approchée à ce modèle puisque cette étude s'inscrit dans une problématique de simulation numérique. Ces deux axes d'étude sont, dans cet ordre, les deux prochaines sections de ce chapitre.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad ; \quad \mathbf{v} = \{\mathbf{u}, \mathbf{q}\} & \text{Dans } \Omega \\ \rho(\phi^s) \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\phi^s) (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})] & \text{Dans } \Omega_f \\ \mathbf{u}_{TR} = \mathbf{u} \quad \text{si } \phi^s < \phi_m^s & \text{Dans } \Omega_f \\ \mathbf{u}_{TR} = 0 \quad \text{si } \phi^s = \phi_m^s & \text{Dans } \Omega_d \\ \frac{\partial \phi^s}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_{TR} \phi^s) = \nabla \cdot (D(\phi^s) \nabla \phi^s) + S(\phi^s) & \text{Dans } \Omega_f \quad (2.28) \\ \mathbf{n} \cdot (-(\mathbf{Nc} + \mathbf{N}_\mu)) = 0 & \text{Dans } \Omega \\ \mu(\phi^s) = \mu_0 \left( 1 - \frac{\phi^s}{\phi_c^s} \right)^{-\eta \phi_c^s} & \text{Dans } \Omega_f \\ -\frac{\mu}{K_c} \mathbf{q} - \nabla p + \tilde{\mu} \Delta \mathbf{q} = 0 & \text{Dans } \Omega_d \\ \epsilon \mathbf{u}_n = \mathbf{q}_n \quad ; \quad \epsilon \mathbf{u}_t = \mathbf{q}_t \quad ; \quad \mu \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{n}} = \tilde{\mu} \frac{\partial \mathbf{q}_t}{\partial \mathbf{n}} & \text{Sur } \Gamma \end{array} \right.$$

## 2.2 Adimensionnement du système d'équation

L'adimensionnement des équations du système évaluera l'importance de chaque terme dans notre configuration. En effet, celui-ci permet l'émergence des nombres sans dimension - ou "paramètres de similitude" - quantifiant l'effet des phénomènes physiques mis en jeu les uns par rapport aux autres. L'adimensionnement mis en place dans cette section ne s'effectue pas sur l'ensemble des équations du modèle (2.28), mais que sur les équations Navier-Stokes/Brinkman et Phillips, rappelées ci-dessous.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad ; \quad \mathbf{v} = \{\mathbf{u}, \mathbf{q}\} & \text{Dans } \Omega \quad (2.29) \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})] & \text{Dans } \Omega_f \quad (2.30) \\ -\frac{\mu}{K_c} \mathbf{q} - \nabla p + \tilde{\mu} \Delta \mathbf{q} = 0 & \text{Dans } \Omega_d \quad (2.31) \\ \frac{\partial \phi^s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi^s = \nabla \cdot (D(\phi^s) \nabla \phi^s) + S(\phi^s) & \text{Dans } \Omega_f \quad (2.32) \end{array} \right.$$

Afin d'effectuer cet adimensionnement, il est nécessaire de définir dans un premier temps des grandeurs de références propres à notre configuration d'étude. Dans notre cas, on prendra donc comme grandeurs caractéristiques :

1.  $L_c$  longueur de référence prise comme étant l'espace horizontal entre deux torons.
2.  $U_c$  vitesse de référence prise comme étant la vitesse moyenne dans l'espace inter-torons.

Ces grandeurs de références nous permettent ainsi de définir les variables sans dimension (notées à l'aide de l'indice \*)

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^* L_c, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^* U_c, \quad t = t^* \frac{L_c}{U_c}, \quad p = p^* \frac{\mu U_c}{L_c}$$

De l'adimensionnement de  $\mathbf{X}$ , se déduit celle de l'opérateur  $\nabla = \nabla^* / L_c$ .

### 2.2.1 Adimensionnement des équations de Navier-Stokes et de Brinkman

Dans cette sous-section, l'idée est d'utiliser les grandeurs de références présentées ci-dessus afin d'effectuer l'adimensionnement des équations régissant l'écoulement fluide de la suspension, *i.e.*, les équations de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement (Navier-Stokes et Darcy-Brinkman). L'obtention de la forme adimensionnée de l'équation de conservation de la masse est immédiate, et n'exhibe aucun paramètre de similitude :

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0$$

Pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement, les étapes de l'adimensionnement sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})] \\ \rho \left( \frac{U_c^2}{L_c} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{U_c^2}{L_c} \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* \right) &= -\nabla^* \left( \frac{\mu U_c}{L_c^2} p^* \right) + \nabla^* \cdot \left[ \frac{\mu U_c}{L_c^2} (\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*) \right] \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\nabla^* \left( \frac{1}{\text{Re}} p^* \right) + \nabla^* \cdot \left[ \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*) \right] \end{aligned}$$

Enfin, concernant l'équation de Brinkman, et étant donné que  $\mathbf{q}$  est une vitesse :  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^* U_c$ , l'adimensionnement prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{K_c} \mathbf{q} - \nabla p + \frac{\mu}{\epsilon} \Delta \mathbf{q} &= 0 \\ -\frac{\mu U_c}{K_c} \mathbf{q}^* - \nabla^* \left( \frac{\mu U_c}{L_c^2} p^* \right) + \frac{\mu U_c}{\epsilon L_c^2} \Delta^* \mathbf{q}^* &= 0 \\ \text{en divisant par } \mu U_c \text{ et multipliant par } L_c^2 \text{ il vient alors que :} \\ -\frac{1}{\text{Da}} \mathbf{q}^* - \nabla^* p^* + \frac{1}{\epsilon} \Delta^* \mathbf{q}^* &= 0 \end{aligned}$$

On obtient ainsi les formes adimensionnées des équations de conservation de la quantité de mouvement de Navier-Stokes (2.33) et de Brinkman (2.34).

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\nabla^* \left( \frac{1}{\text{Re}} p^* \right) + \nabla^* \cdot \left[ \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*) \right] \\ -\frac{1}{\text{Da}} \mathbf{q}^* - \nabla^* p^* + \frac{1}{\epsilon} \Delta^* \mathbf{q}^* &= 0 \end{aligned} \right. \quad (2.33)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\nabla^* \left( \frac{1}{\text{Re}} p^* \right) + \nabla^* \cdot \left[ \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*) \right] \\ -\frac{1}{\text{Da}} \mathbf{q}^* - \nabla^* p^* + \frac{1}{\epsilon} \Delta^* \mathbf{q}^* &= 0 \end{aligned} \right. \quad (2.34)$$

Cet adimensionnement fait ainsi apparaître deux paramètres de similitude :

1. Le nombre de Reynolds, rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses défini par  $\text{Re} = \frac{\rho U_c L_c}{\mu}$ .
2. Le nombre de Darcy,  $\text{Da} = \frac{K_c}{L_c^2}$ .

Ces nombres sans dimension n'auront pas la même expression si on se trouve dans le fluide chargé ou dans le milieu poreux formé de la compaction des particules. En effet, comme présenté dans la partie 2.1.1, le domaine d'étude  $\Omega$  est découpé en un domaine fluide  $\Omega_f$  et un domaine poreux  $\Omega_d$ . Dans le domaine fluide, l'écoulement de la suspension colloïdale étant régi par les équations de Navier-Stokes, seul le nombre de Reynolds aura un sens physique. Il sera alors dépendant de la fraction volumique locale de poudre  $\phi^s$ , et la gamme de valeurs prises est résumée dans le tableau 2.2 de la sous-section 2.2.3.

Dans le domaine poreux  $\Omega_d$ , constitutif de l'agglomération des particules sous forme d'un gâteau, l'écoulement est décrit par l'équation de Darcy-Brinkman. Le nombre de Reynolds aura un sens physique, mais sera dans ce cas constant, puisque le fluide qui s'écoule dans le milieu est newtonien ( $\rho$  et  $\mu$  constantes). Il sera cependant nécessaire de déterminer d'autres grandeurs de référence  $U_c$  et  $L_c$  dans ce domaine (comme par exemple la vitesse moyenne et le diamètre poral moyen). Contrairement au domaine fluide, l'autre paramètre de similitude, le nombre de Darcy  $\text{Da}$ , aura ici un sens physique et permettra la caractérisation de l'écoulement dans le milieu poreux.

### 2.2.2 Adimensionnement de l'équation de Phillips

L'équation de Phillips nous permet de suivre la répartition macroscopique du taux de charge, à l'aide d'une équation de transport diffusion sur la fraction volumique  $\phi^s$  (*cf* sous-section 2.1.2). L'adimensionnement de cette équation va nous permettre de quantifier les effets de transfert par advection par rapport au transfert par diffusion, et ceci grâce à la mise en évidence du nombre de Péclet massique  $Pe_m$ . Les étapes permettant l'adimensionnement de l'équation de Phillips sont identiques à celles utilisées dans la sous-section précédente. Ainsi, la substitution des variables sans dimension permet d'obtenir la forme adimensionnée (2.35) de l'équation.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^s}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \phi^s) &= \nabla \cdot (D(\phi^s) \nabla \phi^s) + S(\phi^s) \\ \frac{U_c}{L_c} \frac{\partial \phi^s}{\partial t^*} + \frac{U_c}{L_c} \nabla^* \cdot (\mathbf{u}^* \phi^s) &= \nabla^* \cdot \left( \frac{D(\phi^s)}{L_c^2} \nabla^* \phi^s \right) + S \\ \frac{\partial \phi^s}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\mathbf{u}^* \phi^s) &= \nabla^* \cdot \left( \frac{1}{Pe_m} \nabla^* \phi^s \right) + S^* \end{aligned} \quad (2.35)$$

Cet adimensionnement fait apparaître le nombre de Péclet massique  $Pe_m = \frac{L_c U_c}{D(\phi^s)}$ , où  $D(\phi^s)$  est la forme simplifiée du coefficient de diffusion :

$$D(\phi^s) = D_c a^2 \phi^s \dot{\gamma} + D_\mu \phi^{s2} \dot{\gamma} \left( \frac{a^2}{\mu} \right) \frac{d\mu}{d\phi^s}$$

Concernant le terme source, nous avons également choisi de garder une forme simplifiée de son expression :  $S^* = \frac{L_c}{U_c} S$  avec  $S = \nabla \cdot (D_c a^2 \phi^{s2} \nabla \dot{\gamma})$ . La dimension du terme source  $S$  étant en  $s^{-1}$  et le terme  $L_c/U_c$  en  $s$ , le nombre  $S^*$  est bien sans dimension.

De manière analogue au nombre de Darcy précédemment déterminé, le nombre de Péclet ne sera pas défini dans tout le domaine d'étude  $\Omega = \Omega_f \times \Omega_d$ . En effet, il n'aura de sens physique que dans le domaine d'application de l'équation de Phillips, *i.e.*, les zones d'écoulement fluide telles que les zones "non consolidées". Comme dans celle-ci les caractéristiques du fluide dépendent de la fraction volumique de poudre, le nombre de Peclet massique sera, à l'instar du nombre de Reynolds, dépendant de la fraction volumique en poudre. Ces deux nombres ne seront donc pas constants, mais évolueront dans une gamme de valeurs présentée dans la sous-section suivante.

### 2.2.3 Gamme de valeurs des paramètres de similitude

Pour déterminer les extrema de valeurs pris par les nombres de Reynolds et de Peclet massique, il est nécessaire de se placer dans des conditions particulières de mélange entre le fluide saturant et les particules. Le nombre de Reynolds étant une fonction de la fraction volumique de poudre  $\phi^s$  strictement décroissante (*cf* annexe A), ses extrema seront atteints respectivement pour une suspension sans charges et pour une suspension proche de l'agencement compact ( $\phi^s \simeq \phi_m^s$ ).

Pour le nombre de Peclet massique, les gammes de valeurs sont données, à rayon de charge constant (caractéristiques des poudres utilisée par SAFRAN Ceramics), pour un coefficient de diffusion maximal puis moyen.

**Table 2.2** – Gamme de valeurs des paramètres de similitude

| Paramètre                              | Expression                         | Variables                                                              | Valeur (ou Gamme)            |
|----------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| Nombre de Reynolds                     | $Re = \frac{\rho U_c L_c}{\mu}$    | $\phi^s \in [0 ; 0,68]$                                                | $Re \in [4.10^{-5} ; 0,02]$  |
| Nombre de Péclet                       | $Pe_m = \frac{L_c U_c}{D(\phi^s)}$ | $D_{moy}(\phi^s) \sim 1.10^{-16}$<br>$D_{max}(\phi^s) \sim 1.10^{-10}$ | $Pe_m \in [1.10^2 ; 1.10^8]$ |
| Nombre de Darcy<br>gâteau particulaire | $Da_g = \frac{K_c}{L_c^2}$         | $K_c = 3,6.10^{-16}$<br>si $\phi^s = 0,65$                             | $Da_g = 9.10^{-9}$           |
| Nombre de Darcy<br>préforme tissée     | $Da_p = \frac{K_p}{L_c^2}$         | $K_p \sim 1.10^{-10}$                                                  | $Da_p \sim 2,5.10^{-1}$      |

Enfin deux nombres différents de Darcy sont évoqués : l'un concernant l'écoulement dans le gâteau particulaire et l'autre concernant l'écoulement dans la préforme à densifier via le procédé Slurry Cast/APS. Le premier concerne directement cette étude puisque il s'agit du nombre de Darcy qui apparaît dans la forme adimensionnelle de l'équation de Brinkman (2.34), et caractérisant le gâteau particulaire comme un milieu poreux à l'échelle de modélisation. Le deuxième n'a qu'un but d'illustration, il donne le nombre de Darcy exhibé dans le cas où la préforme à densifier était vue, à l'échelle supérieure, comme un milieu poreux. Ce cas nous permettra de comparer le comportement du gâteau particulaire vis-à-vis de la préforme fibreuse.

L'estimation des gammes de valeurs des paramètres de similitude nous permet de faire les constatations suivantes :

- Les faibles valeurs prises par le nombre de Reynolds dans le domaine fluide  $\Omega_f$ , lieu de l'écoulement de la suspension chargée, permettent d'affirmer que l'écoulement est quasi rampant. Les forces visqueuses l'emportent donc devant les forces inertielles.
- Les vitesses utilisées dans le procédé Slurry Cast/APS, que cela soit à débit ou à pression imposés, nous donnent un nombre de Reynolds inférieur à l'unité dans le gâteau particulaire. L'écoulement à l'intérieur du milieu poreux est donc bien quasi rampant, la loi de Darcy est bien valable (*cf* section 1.3).
- Les fortes valeurs prises par le nombre de Peclet massique montre qu'au vu de la taille des poudres utilisées dans le procédé, leur mouvement en solution est essentiellement dû aux phénomènes de convection et peu aux phénomènes de diffusion.

La dernière constatation est très intéressante dans le cadre d'une étude numérique. En effet, il est connu qu'un nombre de Péclet massique aussi grand peut être problématique lors de la résolution numérique des équations. Il sera donc primordial que les méthodes numériques utilisées soient compatibles avec la résolution de l'équation de transport/diffusion à fort nombre de Peclet. Nous reviendrons sur ce point dans la section 2.3 suivante.



### 2.2.4 Conclusions partielles

Dans ces deux premières sous-sections nous avons vu l'établissement des équations régissant l'ensemble des écoulements complexes présents dans le procédé d'injection d'une suspension dans une préforme fibreuse. Une fois ces équations obtenues et le modèle final déterminé, une étude adimensionnée a permis de caractériser plus finement les écoulements à l'aide de paramètres de similitudes.

Des choix forts, mais justifiés, ainsi que des hypothèses simplificatrices ont été faits dans le but d'obtenir un modèle complexe, mais numériquement résoluble sur des temps caractéristiques du procédé. Le modèle devra être confronté à l'expérience afin de valider l'ensemble de ces choix et la stratégie associée (*cf* chapitre 3). Avant cela, il est cependant nécessaire d'explicitier l'ensemble des outils numériques permettant d'obtenir une solution approchée du modèle final (2.28). Dans ce but, la sous-section suivante présente l'ensemble des techniques et méthodes numériques utilisées dans cette étude.

## 2.3 Résolution numérique des équations

### 2.3.1 Définition générale des méthodes numériques

Les équations du modèle final (2.28) sont des équations aux dérivées partielles (ou EDP) non linéaires. Leur complexité rend leur résolution difficile, et l'obtention d'une solution analytique est généralement impossible. Afin de les résoudre, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques fournissant une solution approchée. Quelle que soit la méthode numérique utilisée, la stratégie principale est de discrétiser le système d'équations continues afin que la solution approchée vérifie des conditions plus faibles qu'initialement. La robustesse de la méthode numérique reposera alors sur la qualité de cette discrétisation qui assurera :

- l'existence de solutions,
- l'unicité d'une solution,
- la stabilité de la méthode, *i.e.*, la capacité de l'algorithme de résolution à maîtriser la propagation des erreurs numériques,
- la convergence de la méthode.

L'ensemble de ces critères est primordial lors de l'établissement d'une méthode de résolution numérique car il assure la détermination d'une solution unique approchant très finement la solution. Lors de la présentation d'une méthode, nous discuterons de ces points afin d'évaluer les conditions nécessaires qu'elle devra vérifier dans le but de fournir une solution approchée au modèle étudié.

Parmi la richesse des méthodes permettant d'approcher numériquement la solution d'une EDP, nous pouvons citer la méthode aux éléments finis, celle aux différences finies et celle aux volumes finis. Ces trois méthodes sont actuellement les plus utilisées dans les problèmes de résolution numérique en mécanique des fluides. La méthode aux différences finies se base sur l'approximation des dérivées partielles à l'aide d'un développement limité de Taylor-Young, alors que les deux autres se basent sur une approximation d'intégrales. Cependant, ces deux dernières diffèrent entre elles par la stratégie de résolution utilisée.

En effet, la méthode aux éléments finis approche la solution d'une EDP exprimée sous une formulation variationnelle (ou formulation faible) alors que la méthode aux volumes finis, utilise une formulation forte des équations. Les méthodes de résolution numérique aux différences et aux volumes finis, de par leur stratégie de résolution via des bilans de flux, s'adapteront parfaitement aux équations de notre modèle (2.28). C'est la raison pour laquelle, seules ces méthodes sont utilisées dans cette thèse.

Ainsi, dans la suite du manuscrit, nous présenterons dans un premier temps les stratégies de discrétisations temporelles et spatiales mises en œuvre avec chaque méthode. Elles seront alors utilisées pour expliciter les quelques schémas numériques utilisés dans cette étude. S'en suivra alors la discrétisation des équations du modèle (2.28) puis sa résolution par ces méthodes.

### 2.3.2 Discrétisation numérique

La stratégie principale des méthodes de résolution numérique des EDP, consiste à les exprimer, non plus de manière continue, mais de manière discrète. Les échelles temporelles et spatiales sont alors discrétisées en intervalles et volumes élémentaires. L'idée ici, est de prolonger au niveau discret, l'hypothèse de milieu continu qui nous a permis d'établir les équations du modèle. Ainsi, entre deux points de maillage ou deux pas de temps, nous supposons que les solutions sont constantes ou régulières, et qu'elles varient de façon "continue", comme le milieu physique modélisé.

#### DISCRÉTISATION TEMPORELLE

La première discrétisation nécessaire lors d'une résolution numérique est la discrétisation temporelle. L'idée ici est de découper l'échelle temporelle  $[0, T]$  en un nombre fini d'intervalles  $[t^n, t^{n+1}]$  de taille  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ . Dans le cas d'un découpage temporel régulier, tous les intervalles auront la même taille  $\Delta t$ , et on aura  $t^n = n\Delta t$ .

L'objectif principal d'une telle discrétisation, réside dans l'approximation du terme instationnaire rencontré dans les équations aux dérivées partielles. Pour une fonction  $\alpha$  dérivable, ce terme s'écrit :

$$\frac{\partial \alpha(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$$

La méthode aux différences finies, utilise un développement limité de Taylor-Young (2.36) pour approcher la dérivée précédente :

$$\alpha(\mathbf{X}, t^n + h) = \sum_{i=0}^N \frac{\alpha^{(i)}(\mathbf{X}, t^n)}{i!} h^i + o(h^N) \quad (2.36)$$

Ainsi, en observant que  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ , avec  $\Delta t$  suffisamment petit, et en effectuant un développement limité de Taylor-Young à l'ordre 1, de la fonction  $\alpha$ , supposée dérivable, il vient que :

$$\alpha(\mathbf{X}, t^{n+1}) = \alpha(\mathbf{X}, t^n + \Delta t) = \alpha(\mathbf{X}, t^n) + \Delta t \frac{\partial \alpha(\mathbf{X}, t^n)}{\partial t} + o(\Delta t)$$

En notant  $\alpha^n$ , l'approximation de  $\alpha(\mathbf{X}, t^n)$  à l'ordre 1, la dérivée de  $\alpha$  au temps  $n$  est alors approchée à l'aide de la méthode des différences finies par le terme (2.37).

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \alpha(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right)^n &= \frac{\alpha(\mathbf{X}, t^{n+1}) - \alpha(\mathbf{X}, t^n)}{\Delta t} + o(1) \\ &\simeq \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Cette approximation d'ordre 1, n'utilisant que les temps  $n + 1$  et  $n$ , est appelée schéma d'Euler. Elle permet d'approcher itérativement le terme instationnaire rencontré dans les EDP. D'autres schémas aux différences finies existent, parmi lesquels nous pouvons citer le schéma de GEAR (2.38). Celui-ci, contrairement au schéma d'Euler, est d'ordre 2 et utilise une approximation de la fonction  $\alpha$  au temps  $n - 1$ .

$$\left( \frac{\partial \alpha(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right)^n \simeq \frac{3\alpha^{n+1} - 4\alpha^n + \alpha^{n-1}}{2\Delta t} \quad (2.38)$$

Nous remarquons que dans la méthode des différences finies,  $\alpha^n$  est une approximation ponctuelle de la fonction  $\alpha$  au temps  $n$ , ce qui peut poser problème pour des fonctions définies seulement presque partout. Afin de s'affranchir de telles considérations, une autre méthode a été mise au point : la méthode aux volumes finis.

Dans celle-ci, l'échelle de temps est également discrétisée en intervalles finis  $[t^n, t^{n+1}]$ . Dans un but de simplification d'écriture, nous supposons ici que ces intervalles ont la même longueur  $\Delta t$ . Comme nous le verrons dans la suite de cette sous-section, l'espace est également discrétisé en un nombre fini de volumes élémentaires : les mailles, notée  $C_{i,j,k}$ .

La méthode aux volumes finis consiste alors à effectuer une intégration temporelle et spatiale de l'ensemble des termes de l'EDP à résoudre. Ainsi, l'approximation de la fonction  $\alpha$  au temps  $n$ , notée  $\alpha^n$ , est la moyenne de cette fonction sur le volume de contrôle  $C_{i,j,k}$  (que nous définirons ultérieurement).

$$\alpha^n = \frac{1}{mes(C_{i,j,k})} \int_{C_{i,j,k}} \alpha(\mathbf{X}, t^n) d\sigma$$

L'approximation du terme instationnaire des EDP, par la méthode des volumes finis, s'obtient par son intégration sur l'ensemble  $[t^n, t^{n+1}] \times C_{i,j,k}$ , et prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_{C_{i,j,k}} \left( \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \frac{\partial \alpha(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right)^n dt \right) dX &= \int_{C_{i,j,k}} (\alpha(\mathbf{X}, t^{n+1}) - \alpha(\mathbf{X}, t^n)) dX \\ &\simeq (\alpha^{n+1} - \alpha^n) mes(C_{i,j,k}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Il est à présent établi que les méthodes de résolutions numériques aux différences finies et aux volumes finis, bien qu'utilisant la même discrétisation temporelle, n'utilisent pas la même stratégie d'approximation. La première effectue une approximation ponctuelle des valeurs de la fonction  $\alpha$  au temps discret  $n$ , tandis que la seconde approche la moyenne de cette fonction sur des volumes de contrôle. Cette dernière méthode est moins restrictive quant aux caractéristiques que doit vérifier la fonction  $\alpha$ .

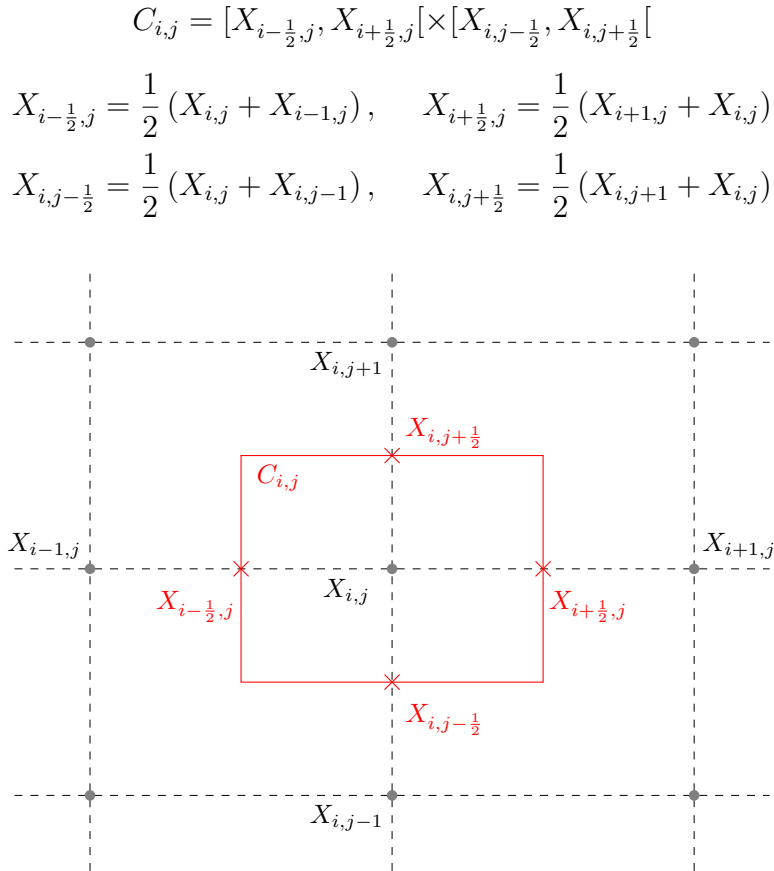
De plus, comme nous le verrons dans la discrétisation spatiale, la méthode aux volumes finis s'adapte parfaitement à l'approximation des flux que nous retrouvons dans les équations de la mécanique des fluides.

### DISCRÉTISATION SPATIALE

Afin de ne pas trop charger les formules de cette section, nous allons considérer une discrétisation spatiale 2D, le cas 3D se retrouvant facilement par l'ajout de la troisième composante de l'espace. De plus, nous sommes ici uniquement dans le cas d'un maillage cartésien, où la discrétisation spatiale se fait selon les deux directions orthogonales de l'espace. En effet, bien qu'il existe d'autres discrétisations spatiales, comme les maillages tétraédriques, notre logiciel de simulation Thetis n'utilise que des maillages cartésiens. Ainsi, une discrétisation spatiale cartésienne 2D représente tout l'espace continu à l'aide d'un nombre fini de points discrets ( $N$  dans la direction  $\mathbf{x}$  et  $M$  dans la direction  $\mathbf{y}$ ).

$$\{X_{i,j}\}, \quad (i,j) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}$$

La méthode des différences finies, au même titre que pour la discrétisation temporelle, n'utilisera que ces points ponctuels  $\{X_{i,j}\}$ . La méthode des volumes finis, utilisant des valeurs moyennes à l'aide d'intégrations volumiques, il est nécessaire de définir des volumes de contrôle : les mailles  $C_{i,j}$ . Les points  $\{X_{i,j}\}$ , étant considérés comme le centre de ces mailles, nous définissons des points intermédiaires (cf figure 2.6).



**Figure 2.6** – Discretisation de l'espace en un nombre fini de points et visualisation du volume de contrôle élémentaire  $C_{i,j}$  dans une approche 2D de la méthode des volumes finis.

En 2D, la discrétisation spatiale définit ainsi des pas d'espace pour la méthode des différences finies (2.40) ainsi que pour la méthode des volumes finis (2.41). Ces pas pouvant être constants si le maillage est considéré comme régulier.

$$\Delta x_i = X_{i+1,j} - X_{i,j} \quad \text{et} \quad \Delta y_j = X_{i,j+1} - X_{i,j} \quad (2.40)$$

$$\Delta x_i = X_{i+\frac{1}{2},j} - X_{i-\frac{1}{2},j} \quad \text{et} \quad \Delta y_j = X_{i,j+\frac{1}{2}} - X_{i,j-\frac{1}{2}} \quad (2.41)$$

La mesure du volume de contrôle  $C_{i,j}$  est définie comme le produit des pas d'espace (2.41) précédemment explicités.

$$\text{mes}(C_{i,j}) = \Delta x_i \times \Delta y_j$$

Cette discrétisation spatiale a pour objectif de déterminer une approximation discrète de la solution  $\alpha$  continue d'une EDP. Pour cela chacune des deux méthodes approche la fonction  $\alpha$  sur ces points discrets temporels et spatiaux. Pour rappel, la méthode aux différences finies approche la fonction  $\alpha$  au temps  $n$  et au point  $X_{i,j}$  par  $\alpha_{i,j}^n = \alpha(X_{i,j}, t^n)$ . Concernant la méthode aux volumes finis, l'approximation au temps  $n$  et au point  $X_{i,j}$  est la moyenne sur le volume  $C_{i,j}$  de la fonction  $\alpha$  :

$$\alpha_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta x_i \times \Delta y_j} \int_{C_{i,j}} \alpha(\mathbf{X}, t^n) dX \quad (2.42)$$

Au même titre que pour la variable temps, la résolution numérique d'une EDP passe également par une discrétisation des dérivées spatiales. Contrairement au terme instationnaire, les dérivées spatiales rencontrées dans les EDP de la mécanique des fluides ne le sont pas sur la seule fonction  $\alpha$ , mais sur une composée  $\mathbf{h}(\alpha)$ , correspondant à un flux :

$$\nabla \cdot (\mathbf{h}(\alpha)) = \frac{\partial f(\alpha)}{\partial x} + \frac{\partial g(\alpha)}{\partial y} = f'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + g'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

Pour approcher ces dérivées spatiales par la méthode des différences finies, nous utilisons, comme pour le temps, un développement limité de Taylor-Young (2.36). L'approximation finale peut exploiter trois points consécutifs de la discrétisation spatiale, et peut être généralisée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^n &\simeq \frac{a_x \alpha_{i+1,j}^n + b_x \alpha_{i,j}^n + c_x \alpha_{i-1,j}^n}{\Delta x} \\ \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^n &\simeq \frac{a_y \alpha_{i,j+1}^n + b_y \alpha_{i,j}^n + c_y \alpha_{i,j-1}^n}{\Delta y} \end{aligned}$$

En fonction des valeurs prises par les coefficients  $\{a, b, c\}$ , nous parlerons de schéma centré ou décentré aux différences finies. L'ensemble de ces valeurs, en fonction des schémas, est résumé dans le tableau 2.3.

**Table 2.3** – Valeur des coefficients  $(a, b, c)$  pour les schémas centrés, décentrés gauche et décentrés droite obtenus par la méthode des différences finies.

| Schéma          | $a$ | $b$ | $c$  |
|-----------------|-----|-----|------|
| Centré          | 1/2 | 0   | -1/2 |
| Décentré gauche | 0   | 1   | -1   |
| Décentré droite | 1   | -1  | 0    |

Avant de présenter la méthode d'approximation de la dérivée spatiale du flux  $\mathbf{h}(\alpha)$ , par la méthode des volumes finis, nous rappelons ici la formule de Green-Ostrogradsky 3D (2.43), liant l'intégrale, sur un volume  $V$ , de la divergence d'un vecteur  $\mathbf{F}$ , au flux de ce même vecteur à travers la frontière  $\delta V$ , de normale  $\mathbf{n}$  :

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\delta V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.43)$$

Ainsi, dans la méthode des volumes finis, la dérivée du flux  $\mathbf{h}(\alpha)$  est approchée après intégration sur le domaine élémentaire  $[t^n, t^{n+1}] \times C_{i,j}$  :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \int_{C_{i,j}} \nabla \cdot (\mathbf{h}(\alpha)(\mathbf{X}, t)) dX \right) dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \int_{\delta C_{i,j}} \mathbf{h}(\alpha)(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{n} d\gamma(X) \right) dt \quad (2.44)$$

L'expression de l'intégrale sur le bord  $\delta C_{i,j}$  dans l'équation (2.44), dans le cas d'un maillage cartésien 2D, est alors, avec  $f$  et  $g$  les composantes selon  $x$  et  $y$  du vecteur flux  $\mathbf{h}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\delta C_{i,j}} \mathbf{h}(\alpha)(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{n} d\gamma(X) &= \int_{X_{i-\frac{1}{2},j}}^{X_{i+\frac{1}{2},j}} \left( g(\alpha(X_{i,j+\frac{1}{2}}, t)) - g(\alpha(X_{i,j-\frac{1}{2}}, t)) \right) dx \\ &\quad + \int_{X_{i,j-\frac{1}{2}}}^{X_{i,j+\frac{1}{2}}} \left( f(\alpha(X_{i+\frac{1}{2},j}, t)) - f(\alpha(X_{i-\frac{1}{2},j}, t)) \right) dy \end{aligned}$$

Ainsi, dans une approche aux volumes finis, les flux des EDP à résoudre seront approchés par les flux numériques suivants :

$$F_{i+\frac{1}{2},j}^n \simeq \frac{1}{\Delta t \Delta y} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{X_{i,j-\frac{1}{2}}}^{X_{i,j+\frac{1}{2}}} f(\alpha(X_{i+\frac{1}{2},j}, t)) dy dt \quad (2.45)$$

$$G_{i,j+\frac{1}{2}}^n \simeq \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{X_{i-\frac{1}{2},j}}^{X_{i+\frac{1}{2},j}} g(\alpha(X_{i,j+\frac{1}{2}}, t)) dx dt \quad (2.46)$$

Permettant d'obtenir l'approximation de la dérivée spatiale par la méthode des volumes finis suivante :

$$\begin{aligned} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_{i,j}} \nabla \cdot (\mathbf{h}(\alpha)(\mathbf{X}, t)) dX dt &\simeq \Delta t \Delta y \left( F_{i+\frac{1}{2},j}^n - F_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) \\ &\quad + \Delta t \Delta x \left( G_{i,j+\frac{1}{2}}^n - G_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

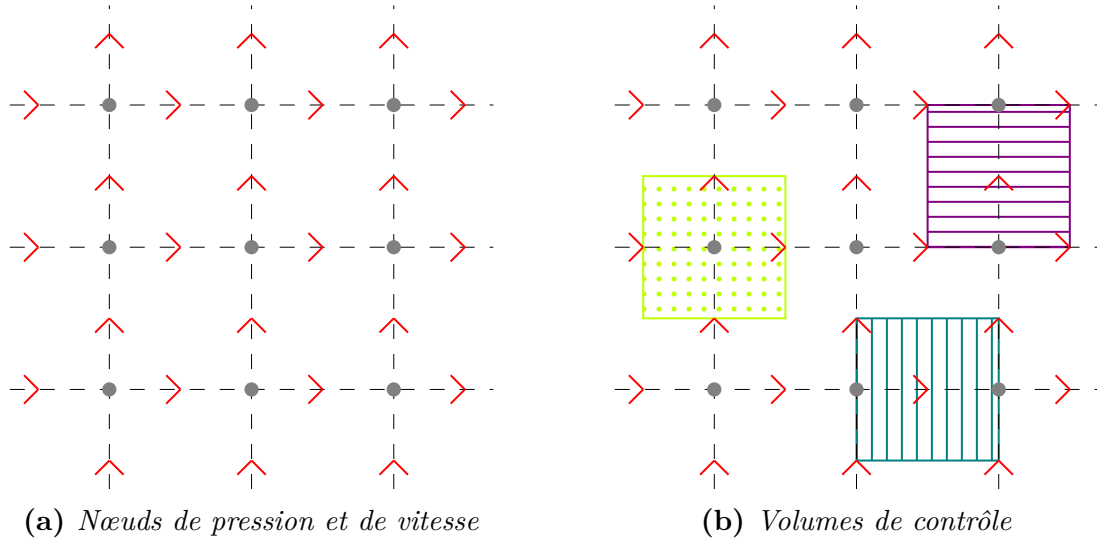
Un schéma aux volumes finis à  $2k+1$  points sera donc un schéma dans lequel les flux (2.45) et (2.46) seront exprimés par

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2},j}^n &= F(\alpha_{i-k+1,j}^n, \dots, \alpha_{i+k,j}^n) \\ G_{i,j+\frac{1}{2}}^n &= G(\alpha_{i,j-k+1}^n, \dots, \alpha_{i,j+k}^n) \end{aligned}$$

avec  $F$  et  $G$  des fonctions localement lipschitziennes telles que  $F(\alpha, \dots, \alpha) = f(\alpha)$  et  $G(\alpha, \dots, \alpha) = g(\alpha)$ .

Dans le cadre de la mécanique des fluides, les EDP permettant de traduire la physique de l'écoulement d'un fluide, font appel à des flux  $\mathbf{h}(\alpha)$  de la forme  $\mathbf{u}\alpha$ , avec  $\mathbf{u}$  la vitesse du fluide. Ainsi, dans une résolution par la méthode des volumes finis, il vient que les flux numériques (2.45) et (2.46) utilisent la vitesse  $\mathbf{u}$ , non pas sur les points de la discrétisation spatiale  $\{X_{i,j}\}$ , mais sur les points milieu  $\{X_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\}$ . Les valeurs scalaires sont donc moyennées sur le volume de contrôle  $C_{i,j}$  et s'expriment sur les points  $\{X_{i,j}\}$ , alors que les valeurs vectorielles s'expriment sur les points milieu  $\{X_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\}$ .

Afin de tenir compte de cette distinction, et de faciliter les calculs de la divergence de la vitesse (qui est un scalaire), il peut être judicieux d'utiliser un maillage décalé [Harlow et al., 1965]. Dans celui-ci, les scalaires et les composantes de la vitesse ne s'expriment pas sur la même grille mais sur des grilles propres, décalées entre elles d'une demi maille. Dans ce maillage, les scalaires sont discrétisés sur la grille de pression ( $\bullet$ ) et les vecteurs sur la grille de vitesse ( $>$  pour la composante  $x$ , et  $\wedge$  pour la composante  $y$ , cf figure 2.7).



**Figure 2.7** – Maillage cartésien 2D avec pas d'espace constant dans chaque direction. Représentation des points de la grille vitesse et de la grille pression (a). Définition des volumes de contrôle pour chaque type de point (b).

Sur la figure (b) 2.7, on remarque bien que l'expression de  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ , approchée par une méthode des volumes finis, est immédiate. En effet, cette méthode, par l'intermédiaire de la formule de Green-Ostrogradsky (2.43), permet d'exprimer cette divergence à l'aide des valeurs de  $\mathbf{u}$  sur le contour du volume de contrôle. Avec un tel maillage, les valeurs des composantes de la vitesse seront directement utilisables. C'est ce type de maillage qui est implémenté dans le code de calcul Thetis, utilisé dans cette thèse.

Avant de présenter les équations discrétisées du système (2.28), nous allons d'abord présenter quelques schémas aux volumes finis classiques, tels qu'ils sont utilisés dans le code de calcul Thetis.

### 2.3.3 Exemple de schémas aux volumes finis

L'objectif de cette sous-section est de présenter des exemples de schémas aux volumes finis simples pour une équation de transport 1D, à vitesse constante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \\ \alpha(x, t_0) = \alpha_0(x) \\ \alpha(x, t^n) = \alpha_h^n(x) = \sum_{C_i} \alpha_i^n \mathbb{1}_{C_i}(x) \end{cases} \quad (2.48)$$

$$(2.49)$$

Dans la méthode des volumes finis, des discrétisations temporelles et spatiales sont utilisées (cf sous-section 2.3.2). L'espace et le temps sont découpés en intervalles élémentaires  $[t^n, t^{n+1}] \times [X_{i-\frac{1}{2}}, X_{i+\frac{1}{2}}]$  sur lesquels l'équation (2.48) est intégrée :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{X_{i-\frac{1}{2}}}^{X_{i+\frac{1}{2}}} \left( \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dt \right) dX + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \int_{X_{i-\frac{1}{2}}}^{X_{i+\frac{1}{2}}} u \frac{\partial \alpha}{\partial x} dX \right) dt \\ 0 &= \int_{X_{i-\frac{1}{2}}}^{X_{i+\frac{1}{2}}} \left( \alpha(x, t^{n+1}) - \alpha(x, t^n) \right) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} u \left( \alpha(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - \alpha(x_{i-\frac{1}{2}}, t) \right) dt \\ 0 &\simeq \Delta x \left( \alpha_i^{n+1} - \alpha_i^n \right) + \Delta t \left( F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \end{aligned}$$

En utilisant l'approximation temporelle et spatiale (2.42) exposée dans la sous-section précédente, il vient que le schéma aux volumes finis pour l'équation (2.48) prend la forme générale suivante :

$$\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (2.50)$$

#### SCHÉMA UPWIND

Le premier schéma aux volumes finis présenté dans cette sous-section est le schéma décentré amont ou UPWIND. Afin d'explicitier, il est dans un premier temps nécessaire de définir la fonction  $\alpha_h^n(x)$ . Celle-ci est la fonction constante par maille valant  $\alpha_i^n$  dans la maille  $C_i = [X_{i-\frac{1}{2}}, X_{i+\frac{1}{2}}]$  :

$$\alpha_h^n(x) = \sum_{C_i} \alpha_i^n \mathbb{1}_{C_i}(x)$$

Cette fonction est prise comme condition initiale pour l'équation de transport 1D (2.48), dont la solution analytique est alors donnée par la méthode des caractéristiques (cf annexe B) :

$$\alpha(x, t) = \alpha_i^n(x - u(t - t^n))$$

Le flux numérique pour cette équation est défini par :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} u \alpha(x_{i+\frac{1}{2}}, t) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} u \alpha_i^n(x_{i+\frac{1}{2}} - u(t - t^n)) dt$$



La question fondamentale à la détermination du schéma UPWIND est de savoir dans quelle maille  $C_i$  se situe la quantité  $x_{i+\frac{1}{2}} - u(t - t^n)$  entre les instants  $n$  et  $n + 1$ , puisque la fonction  $\alpha_h^n(x)$  n'est définie que maille par maille. Plusieurs réponses sont possibles, et dépendent de la valeur de la vitesse  $u$  :

1. Si  $u > 0$  alors  $x_{i+\frac{1}{2}} - u(t - t^n) < x_{i+\frac{1}{2}}$  si  $t \in [t^n, t^{n+1}]$ . De plus, si  $u \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$  alors  $x_{i+\frac{1}{2}} - u(t - t^n) > x_{i-\frac{1}{2}}$ . Ainsi,  $x_{i+\frac{1}{2}} - u(t - t^n) \in C_i$
2. Si  $u < 0$  alors  $x_{i+\frac{1}{2}} - u(t - t^n) > x_{i+\frac{1}{2}}$  si  $t \in [t^n, t^{n+1}]$ . De plus, si  $-u \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$  alors  $x_{i+\frac{1}{2}} - u(t - t^n) < x_{i+\frac{3}{2}}$ . Ainsi,  $x_{i+\frac{1}{2}} - u(t - t^n) \in C_{i+1}$

Le flux numérique sera choisi de la manière suivante :

1. Si  $u > 0$  alors  $F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} u \alpha_i^n dt = u \alpha_i^n$
2. Si  $u < 0$  alors  $F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} u \alpha_{i+1}^n dt = u \alpha_{i+1}^n$

Ainsi, le schéma UPWIND final n'est bien défini que sous la condition de CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) :

$$|u| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (2.51)$$

Il dépendra alors de la valeur de la vitesse  $u$ . Si celle-ci est nulle, le schéma (2.50) est exact :  $\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n$ . Dans le cas où  $u > 0$ , le schéma UPWIND devient un schéma décentré à gauche :

$$\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha_i^n - \alpha_{i-1}^n)$$

Enfin, dans le cas où  $u < 0$ , le schéma UPWIND devient un schéma décentré à droite.

$$\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha_{i+1}^n - \alpha_i^n)$$

Ce schéma est donc un schéma aux volumes finis à trois points  $F_{i+\frac{1}{2}}^n = F(u_i^n, u_{i+1}^n)$ . Pour le cas 3D, ce schéma est obtenu de la même manière mais en effectuant une discrétisation volumique de l'espace. La CFL ainsi obtenue prend la forme suivante :

$$\max \left( |u_x| \frac{\Delta t}{\Delta x}, |u_y| \frac{\Delta t}{\Delta y}, |u_z| \frac{\Delta t}{\Delta z} \right) \leq 1$$

### SCHÉMA GÉNÉRAL

On se propose de déterminer ici l'écriture générale d'un schéma aux volumes finis à trois points. Dans ce cas, les expressions des flux numériques du schéma (2.50) sont :

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2}}^n &= F(\alpha_i^n, \alpha_{i+1}^n) = \lambda_1 \alpha_i^n + \lambda_2 \alpha_{i+1}^n \\ F_{i-\frac{1}{2}}^n &= F(\alpha_{i-1}^n, \alpha_i^n) = \lambda_1 \alpha_{i-1}^n + \lambda_2 \alpha_i^n \end{aligned} \quad (2.52)$$

La condition imposant que la fonction  $F$  soit lipschitzienne, *i.e.*,  $F(\alpha, \alpha) = u\alpha$  permet d'établir que  $\lambda_1 + \lambda_2 = u$ . Le schéma (2.50) peut alors se réécrire :

$$\begin{aligned}\alpha_i^{n+1} &= \alpha_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n) \\ \alpha_i^{n+1} &= \alpha_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\lambda_1 \alpha_i^n + \lambda_2 \alpha_{i+1}^n - \lambda_1 \alpha_{i-1}^n - \lambda_2 \alpha_i^n) \\ \alpha_i^{n+1} &= \alpha_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (\lambda_1 - \lambda_2) \alpha_i^n + \frac{u}{2} \alpha_{i+1}^n - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \alpha_{i+1}^n - \frac{u}{2} \alpha_{i-1}^n - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \alpha_{i-1}^n \right) \\ \alpha_i^{n+1} &= \alpha_i^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha_{i+1}^n - \alpha_{i-1}^n) + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\alpha_{i+1}^n - 2\alpha_i^n + \alpha_{i-1}^n)\end{aligned}$$

En posant  $q = \frac{\Delta t}{\Delta x} (2\lambda_1 - u)$ , appelé coefficient de viscosité du schéma, la formule générale d'une méthode aux volumes finis à trois points se déduit immédiatement :

$$\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha_{i+1}^n - \alpha_{i-1}^n) + \frac{q}{2} (\alpha_{i+1}^n - 2\alpha_i^n + \alpha_{i-1}^n) \quad (2.53)$$

Comme évoqué dans la sous-section 2.3.1, l'existence et l'unicité, d'une solution numérique de l'EDP approchant très précisément la solution initiale, sont assurées lorsque la méthode numérique est stable et convergente. Dès lors, il est nécessaire d'expliciter les conditions assurant stabilité et convergence des schémas numériques à trois points, présentées dans cette section. Pour cela, l'équation (2.53) doit être réécrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\alpha_i^{n+1} &= \left( \frac{q}{2} + u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \alpha_{i-1}^n + (1 - q) \alpha_i^n + \left( \frac{q}{2} - u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \alpha_{i+1}^n \\ \alpha_i^{n+1} &= \sum_{j=-1}^1 a_j(x, \Delta_{t,x}) \alpha_{i+j}^n\end{aligned}$$

La consistance et la stabilité d'un schéma assurent sa convergence. Concernant les schémas numériques aux volumes finis, la consistance est assurée dès que la condition suivante est satisfaite :

$$\sum_{j=-k}^k a_j(x, \Delta_{t,x}) = 1$$

Nous constatons immédiatement que les schémas s'écrivant sous la forme (2.53) seront consistants. De plus, si  $\forall j, a_j(x, \Delta_{t,x}) \geq 0$  alors le schéma est  $L^\infty$ -stable. Enfin, si ces coefficients  $a$  ne sont pas dépendants de la variable d'espace  $x$ , le schéma est monotone, *i.e.*, il est  $L^p$ -stable  $\forall p \in [1, \infty[$ . Ainsi, lors de chaque présentation de schéma, nous discuterons de leur consistance et de leur stabilité, afin d'établir leur convergence.

Concernant le schéma UPWIND précédemment établi, il peut se réécrire en utilisant la formulation générale (2.53) :

- Si  $u > 0$  :  $F_{i+\frac{1}{2}}^n = u\alpha_i^n$ , par identification  $\lambda_1 = u$  et  $\lambda_2 = 0$ , et  $q = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$ .
- Si  $u < 0$  :  $F_{i+\frac{1}{2}}^n = u\alpha_{i+1}^n$ , par identification  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 = u$ , et  $q = -u \frac{\Delta t}{\Delta x}$ .

La viscosité du schéma numérique UPWIND est définie par  $q_{upwind} = |u| \frac{\Delta t}{\Delta x}$ . De plus, celui-ci est consistant puisqu'il peut s'écrire sous la formulation générale :

$$\begin{aligned} \text{— Si } u > 0 : \alpha_i^{n+1} &= \left(1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \alpha_i^n + u \frac{\Delta t}{\Delta x} \alpha_{i-1}^n \\ \text{— Si } u < 0 : \alpha_i^{n+1} &= \left(1 + u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \alpha_i^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} \alpha_{i+1}^n \end{aligned}$$

Il est immédiat, que sous la condition de CFL (2.51), les coefficients du schéma UPWIND sont tous positifs. De plus, si la vitesse  $u$  est constante, ils sont indépendants de la variable d'espace  $X$ , et le schéma sera monotone. Ainsi, le schéma UPWIND est stable et consistant : il converge.

### SCHÉMA CENTRÉ

Le schéma centré est un schéma aux volumes finis à trois points sans coefficient de viscosité. Il s'obtient à partir de la formulation (2.53) avec la valeur  $q_c = 0$  :

$$\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha_{i+1}^n - \alpha_{i-1}^n) \quad (2.54)$$

$$\alpha_i^{n+1} = u \frac{\Delta t}{\Delta x} \alpha_{i-1}^n + \alpha_i^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} \alpha_{i+1}^n \quad (2.55)$$

En utilisant l'expression générale du flux numérique (2.52) et en remplaçant les valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , le flux numérique du schéma centré se déduit immédiatement :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{u}{2} \alpha_i^n + \frac{u}{2} \alpha_{i+1}^n \quad (2.56)$$

Nous remarquons que le schéma centré n'est pas monotone puisque les coefficients ne sont pas tous positifs, même sous une condition de CFL. Cependant, un schéma non monotone peut tout de même être stable. Concernant le schéma centré, l'utilisation d'un critère de Von Neumann, permet d'affirmer qu'il est  $L^2$ -stable, et donc convergent sur  $L^2$ .

### SCHÉMA LAX-FRIEDRICHS

Le schéma de Lax-friedrichs est également un schéma aux volumes finis à trois points, mais possédant une viscosité  $q_{LF} = 1$ . En utilisant la formulation générale (2.53) d'un tel schéma il vient :

$$\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha_{i+1}^n - \alpha_{i-1}^n) + \frac{1}{2} (\alpha_{i+1}^n - 2\alpha_i^n + \alpha_{i-1}^n) \quad (2.57)$$

$$\alpha_i^{n+1} = \left(\frac{1}{2} + u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \alpha_{i-1}^n + \left(\frac{1}{2} - u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \alpha_{i+1}^n \quad (2.58)$$

Par identification, nous déduisons les valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , et donc du flux numérique :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{u}{2} \left(1 + \frac{u \Delta t}{\Delta x}\right) \alpha_i^n + \frac{u}{2} \left(1 - \frac{u \Delta t}{\Delta x}\right) \alpha_{i+1}^n \quad (2.59)$$

Comme pour le schéma upwind, le schéma de Lax-Friedrichs est monotone si la condition de CFL est satisfaite. Etant par définition consistant, il est alors convergent.

**SCHEMA LAX-WENDROFF**

Enfin, le dernier schéma présenté dans cette section est le schéma de Lax-Wendroff, utilisant trois points. Le coefficient de viscosité de ce schéma est  $q_{LW} = \left(u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$ . Ce schéma prend la forme suivante :

$$\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha_{i+1}^n - \alpha_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \left(u \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (\alpha_{i+1}^n - 2\alpha_i^n + \alpha_{i-1}^n) \quad (2.60)$$

$$\alpha_i^{n+1} = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{u\Delta t}{2\Delta x} + 1\right) \alpha_{i-1}^n + \left(1 - \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) \alpha_i^n + \frac{u\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{u\Delta t}{2\Delta x} - 1\right) \alpha_{i+1}^n \quad (2.61)$$

Le flux numérique d'un tel schéma est le suivant :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{u}{2} \left(1 + \frac{u\Delta t}{\Delta x}\right) \alpha_i^n + \frac{u}{2} \left(1 - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\right) \alpha_{i+1}^n \quad (2.62)$$

D'une manière identique au schéma upwind et Lax-Friedrichs, le schéma Lax-Wendroff est monotone sous la condition de CFL si  $u$  est constante. Il converge donc dans le cas étudié ici. La résolution discrète de l'équation de Phillips se fera à l'aide d'un modèle de Lax-Wendroff TVD [Vincent and Caltagirone, 1999].

**2.3.4 Résolution des équations de Navier-Stokes**

Dans le but d'approcher numériquement la solution d'une EDP, les méthodologies de la mise en place d'un schéma aux volumes finis, ont été présentées dans les sous-sections précédentes. Elles vont maintenant être utilisées afin de discrétiser le système d'équations (2.28) utilisé dans cette thèse.

Dans un premier temps, nous nous focaliserons sur les équations de Navier-Stokes (2.10) (2.11) en présentant le schéma final permettant leur résolution à l'aide du code de calcul Thetis. Ces équations étant en formulation incompressible, les solutions inconnues vitesse et pression  $(\mathbf{u}, p)$  sont découplées. Il sera présenté une méthode de couplage des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement : la méthode du lagrangien augmenté. Avant de présenter la discrétisation des équations de Phillips (2.22) et (2.23), nous discuterons des méthodes de pénalisation sur la vitesse permettant de tenir compte des obstacles et des conditions aux limites. En effet, comme nous le verrons, le maillage utilisé dans le logiciel Thetis n'est pas adapté directement à la géométrie des obstacles. Ceux-ci ne sont pas explicitement résolus, mais pénalisés dans les équations par l'ajout de termes physiques et numériques. Enfin, pour clore ce chapitre, nous préciserons brièvement les solveurs permettant de résoudre les systèmes linéaires qui découlent de la discrétisation.

La présente section s'attache donc à discrétiser, au sens des volumes finis, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, qui sont rappelées ci-dessous :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})] \end{cases}$$

Dans le code de calcul Thetis, une discrétisation temporelle est mise en place : l'espace temporel  $[0, T]$  est découpé en un nombre fini d'intervalles  $[t^n, t^{n+1}]$ , pas obligatoirement réguliers, et de taille  $\Delta t$ . La discrétisation des termes instationnaires, comme les dérivées temporelles, peut se faire à l'aide du schéma d'Euler (2.37) ou à l'aide du schéma de GEAR (2.38). Dans le cadre de cette thèse, un schéma d'Euler est utilisé.

Concernant les autres termes de l'équation, ils peuvent être traités de façon explicite, *i.e.*, exprimés au temps  $n$ , ou bien de façon implicite, *i.e.*, exprimés au temps  $n + 1$ . Le choix fort du logiciel de calcul Thetis, est de les exprimer de manière implicite. Cela suppose que tous les termes soient linéaires car les méthodes implicites nécessitent la résolution d'un système linéaire. Or, l'implication du terme  $(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$  en  $(\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1})$  fait apparaître une non-linéarité qui ne peut pas être résolue par un système linéaire. Dans le but de remédier à ce problème, il est nécessaire de linéariser ce terme en :

$$\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} \simeq \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1}$$

La méthode n'est pas parfaitement implicite, mais semi-implicite. L'équation de conservation de la masse discrétisée en temps s'écrit alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$$

Concernant l'équation de la quantité de mouvement, la discrétisation temporelle semi-implicite des termes donne :

$$\rho^n \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} \right) = -\nabla p^{n+1} + \nabla \cdot \left[ \mu^n (\nabla \mathbf{u}^{n+1} + \nabla^T \mathbf{u}^{n+1}) \right]$$

Dans cette dernière relation, il est à noter que la masse volumique  $\rho$  ainsi que la viscosité  $\mu$  de la suspension ne sont, elles aussi, pas implicites, mais exprimées au temps  $n$ . De par la construction du modèle, cela signifie que le couplage entre les équations de Navier-Stokes et de Phillips n'est pas implicite puisque :

$$\rho^n = \rho(\phi^{sn}) \quad \text{et} \quad \mu^n = \mu(\phi^{sn})$$

Ce choix a été fait lors de la mise au point de la stratégie de résolution du modèle. En effet, pour un temps discret donné  $n$ , les équations de Navier-Stokes sont résolues en premier, et le couple vitesse/pression solution, est alors utilisé dans la résolution de l'équation de Phillips. La fraction volumique  $\phi^s$ , solution de cette équation est exprimée au temps  $n + 1$ , et est utilisée pour mettre à jour les caractéristiques  $(\rho, \mu)$  de la suspension. Ainsi, celles-ci ne seront utilisées que dans l'itération temporelle suivante. C'est la raison pour laquelle elles apparaissent de manière explicite dans l'équation de la quantité de mouvement. Cette stratégie d'explicitation a un impact sur le choix du pas de temps  $\Delta t$  à définir. En effet, celui-ci devra être dépendant du pas d'espace au travers d'une condition de CFL (2.51) plus restrictive :

$$CFL \leq 10^{-1}$$

Enfin, la discrétisation spatiale utilisée dans le logiciel Thetis est une discrétisation spatiale structurée cartésienne, où les mailles sont vues, en 3D, comme des pavés. De plus, le maillage est un maillage décalé (*cf* figure 2.7 et [Harlow et al., 1965]), avec une grille propre aux scalaires et une grille propre à chaque composante de la vitesse. Enfin, concernant la discrétisation spatiale, l'ensemble des schémas numériques aux volumes finis exposés précédemment pouvant être utilisés, aucune autre précision ne sera donnée. Les équations ne resteront que semi-discrétisée en temps dans ce manuscrit.

### 2.3.5 Couplage vitesse/pression - résolution de l'incompressibilité

Le système formé des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement est un système à deux inconnues : le couple vitesse/pression  $(\mathbf{u}, p)$ . Initialement l'équation de la conservation de la masse lie la divergence de la vitesse à la masse volumique de la manière suivante :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.63)$$

Or, la masse volumique est une grandeur dépendant de la pression et de la température :  $\rho = \rho(p, T)$ . Sa dérivée particulaire est définie par :

$$\frac{d\rho}{dt} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dt} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dt}$$

En supposant que l'écoulement est à dilatation nulle, *i.e.*,  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = 0$  et en réintroduisant la dérivée particulaire de la masse volumique dans l'équation (2.63), il vient que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= -\chi_T \frac{dp}{dt} \end{aligned} \quad (2.64)$$

L'équation (2.64) est celle de conservation de la masse liant la vitesse et la pression dans un écoulement compressible. Cependant, lorsque ce même écoulement est considéré comme incompressible, le coefficient de compressibilité  $\chi_T$  est nul le long d'une ligne de courant. En d'autres termes, cela revient à considérer que l'écoulement est à divergence nulle est donc que l'équation de conservation de la masse est :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Dans ce cas, les équations de Navier-Stokes sont découplées puisque la pression n'apparaît plus que dans l'équation de conservation de quantité de mouvement. En l'état, ces équations ne donnent pas une unique solution vitesse/pression  $(\rho, \mu)$  car n'importe quel champ de vitesse à divergence nulle convient. Il est donc nécessaire de coupler les équations de Navier-Stokes afin de déterminer des champs de pression et de vitesse cohérents.

Il existe différentes méthodes permettant de coupler ces équations, parmi lesquelles des méthodes de prévision correction, de projection et de pénalisation [Patankar, 1980], de splitting, etc. Cependant, les travaux de cette thèse utilisent une autre méthode appelée méthode du lagrangien augmenté [Vincent et al., 2004] [Fortin and Glowinski, 1982]. Le choix s'est porté sur cette méthode car elle possède de nombreux avantages. En effet, c'est une méthode dans laquelle aucune condition aux limites en pression n'est imposée et qui est, de plus, robuste et exacte (à la précision machine). Ce dernier point est assuré si la méthode converge car elle traite toutes les inconnues de façon couplée et instantanée, contrairement aux méthodes de splitting qui introduisent des erreurs numériques.

Cette méthode suppose que sur l'intervalle de temps  $[t^n, t^{n+1}]$  l'écoulement est numériquement considéré comme compressible tant que la contrainte d'incompressibilité n'est pas satisfaite. Ainsi, une semi-discrétisation en temps de l'équation (2.64) permet d'obtenir :

$$p^{n+1} = p^n - dp \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \quad (2.65)$$

Ce paramètre  $dp = \frac{\Delta t}{\chi^T}$  est le premier paramètre numérique du lagrangien augmenté. Pour rappel, l'équation semi-discrétisée en temps de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho^n \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} \right) = -\nabla p^{n+1} + \nabla \cdot [\mu^n (\nabla \mathbf{u}^{n+1} + \nabla^T \mathbf{u}^{n+1})]$$

Le terme  $p^{n+1}$ , déterminé dans l'équation (2.65) est alors réintroduit dans l'équation précédente pour donner le système final d'équations de Navier-Stokes semi-discrétisées suivant :

$$\rho^n \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} \right) = -\nabla p^n + dr \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}) + \nabla \cdot [\mu^n (\nabla \mathbf{u}^{n+1} + \nabla^T \mathbf{u}^{n+1})] \quad (2.66)$$

$$p^{n+1} = p^n - dp \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \quad (2.67)$$

De cette manière, les deux équations de Navier-Stokes incompressibles sont couplées sur chaque intervalle de temps  $[t^n, t^{n+1}]$ . L'algorithme de prise en compte de l'incompressibilité par la méthode du lagrangien augmenté, est un algorithme itératif d'Uzawa.

```

Data :  $U^n \quad p^n$ 
Initialization :  $U^{k=0} = U^n \quad p^{k=0} = p^n$ ;
while  $|p^{k+1} - p^k| > r$  do
     $k = k + 1$ ;
     $U^k$  solution de l'équation (2.66);
     $p^k$  solution de l'équation (2.67);
end
Result :  $U^{n+1} = U^k \quad p^{n+1} = p^k$ 

```

La convergence de l'algorithme du lagrangien augmenté est effective lorsque deux pressions itératives de l'algorithme d'Uzawa, sont identiques à la précision machine. Ce critère assure alors une divergence nulle de la vitesse dans l'équation (2.67), garantissant l'incompressibilité de l'écoulement. De plus, par cette méthode, les champs de vitesse et de pression résolus sont cohérents.

La qualité de la résolution de cet algorithme dépendra du choix fait concernant les paramètres  $dp$  et  $dr$  (de manière générale, il est imposé que  $dp = dr$ ). Des valeurs élevées de ceux-ci assureront une meilleure contrainte de divergence nulle de la vitesse, mais conduiront à une résolution plus difficile car le conditionnement de la matrice du système linéaire sera dégradé. Il est primordial de choisir ces paramètres en fonction du contexte étudié.

Pour s'affranchir de telles considérations, ils peuvent être calculés automatiquement au début de l'algorithme d'Uzawa, pour chaque itération temporelle  $n$ . La méthode de couplage est celle du lagrangien augmenté adaptative [Vincent et al., 2004] et ces paramètres deviennent des fonctions de l'espace et du temps.

A la fin de cette étape, les champs de pression et de vitesse calculés sont bien résolus sous la contrainte d'incompressibilité. Avant d'effectuer la discrétisation de l'équation de Phillips, il est nécessaire de présenter la méthode implémentée dans le logiciel Thetis, permettant de prendre en compte les obstacles, solides ou poreux, ainsi que les conditions aux limites.

### 2.3.6 Prise en compte des obstacles poreux et des conditions aux limites

Le code de calcul Thetis, développé au sein du laboratoire I2M, utilise un maillage structuré cartésien. Celui-ci correspond en 1D à un segment, en 2D à un rectangle et en 3D à un parallélépipède rectangle. Cette stratégie implique que le maillage généré n'est pas conforme aux géométries des obstacles. Ainsi, le code de calcul ne maille pas uniquement la zone fluide, comme pour le logiciel ANSYS-Fluent, mais intègre également les obstacles dans le maillage. Le logiciel Thetis utilise donc le principe des domaines fictifs et des frontières immergées [Saul'ev, 1963] [Caltagirone, 1994] [Arquis, 1994].

Les équations qui gouvernent l'écoulement ne doivent pas être résolues dans les mailles incluses dans des zones solides. Il est alors indispensable de pénaliser ces équations, par l'introduction de termes ad hoc, afin de tenir compte des caractéristiques de l'obstacle. Pour cela, un tenseur de pénalisation  $\mathbf{B}_u$  est intégré aux équations de Navier-Stokes.

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \mathbf{B}_u (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty) = -\nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \right] \quad (2.68)$$

Ce tenseur de pénalisation  $\mathbf{B}_u$  est généralement diagonal, mais peut devenir quelconque pour des milieux poreux anisotropes. Ses valeurs tendent vers 0 dans les zones fluides et vers l'infini dans les zones solides. De plus, les caractéristiques des solides modélisés peuvent varier en fonction des valeurs prises par le terme  $\mathbf{u}_\infty$ .

1. Si  $\mathbf{B}_u \rightarrow +\infty$  et  $\mathbf{u}_\infty = 0$  : les mailles pénalisées caractérisent un solide fixe imperméable,
2. Si  $\mathbf{B}_u \rightarrow +\infty$  et  $\mathbf{u}_\infty = \mathbf{u}_0 \neq 0$  : en plus d'être imperméable, le solide est à présent mobile dans l'écoulement [Ritz, 1997],
3. Enfin, si  $\mathbf{B}_u = \frac{\mu \epsilon}{K}$  et  $\mathbf{u}_\infty = 0$  : le solide est un milieu poreux immobile et isotrope (de perméabilité  $K$ ). Dès lors, l'équation résolue est celle de Darcy-Brinkman (2.12).

L'intégration d'obstacles sur un maillage cartésien, dans une approche aux domaines fictifs, peut se faire selon deux méthodes. La première, définit localement chaque maille comme solide ou fluide, en fonction de caractéristiques géométriques, préalablement établies par l'utilisateur au début du calcul. Cette méthode est à privilégier pour des obstacles simples, mais devient vite fastidieuse lorsque le nombre d'obstacles augmente.



Dans des cas plus complexes, comme l'étude 3D de pièces manufacturées, une autre méthode doit être utilisée. Celle-ci utilise un maillage lagrangien de l'objet, préalablement édité sous des logiciels de CAO, et le projette sur le maillage cartésien, à l'aide d'une méthode de Ray-casting [Sarhou, 2009]. Dans celle-ci, un rayon est lancé selon chaque point limite du maillage, et ceci dans chaque direction. Le nombre d'intersections avec l'objet permet de différencier les mailles cartésiennes situées à l'intérieur et à l'extérieur de celui-ci. Dans cette thèse, les deux méthodes présentées sont exploitées. Dans le chapitre 4, nous adopterons la première méthode pour générer des géométries 2D simples, utilisées pour l'étude paramétrique. La deuxième méthode sera quant à elle employée pour déterminer les contours d'une géométrie réaliste proche de la préforme fibreuse présente dans le matériau composite.

L'équation (2.68), ainsi pénalisée, peut tenir compte de tous les obstacles rencontrés dans notre étude. En effet, les torons de l'armature fibreuse, étant considérés comme imperméables, seront décrits par la pénalisation (1.). Les agrégats denses en particules, et mobiles dans l'écoulement, seront pénalisés par la viscosité. Enfin, le gâteau particulaire, composée de particules en agencement compact, utilisera la pénalisation (3.).

La méthode présentée ci-dessus permet d'introduire un comportement solide, dans des équations fluides, et ce afin de correctement modéliser les obstacles dans une formulation aux domaines fictifs. Afin de parfaitement présenter la résolution numérique des équations du modèle, par notre logiciel de calcul Thetis, il est nécessaire de présenter la méthode de prise en compte des conditions aux limites. Le formalisme utilisé est semblable à la méthode précédente. Ainsi, pour une fonction  $\alpha$ , scalaire ou vectorielle, la condition à la limite sur une frontière  $S$  de normale extérieure  $\mathbf{n}$ , est fixée par l'équation :

$$-\left. \frac{\partial \alpha}{\partial n} \right|_S = \mathbf{bi} (\alpha - \alpha_\infty) + \phi_0 \quad (2.69)$$

En fonction des valeurs prises par la matrice de pénalisation  $\mathbf{bi}$ , par la condition limite  $\alpha_\infty$  ou par le flux surfacique  $\phi_0$ , il peut être imposé plusieurs conditions aux limites :

1. **Neumann** :  $\mathbf{bi} = 0$  et  $\phi_0 = 0$ . Une condition de flux normal nul.
2. **Dirichlet** :  $\mathbf{bi} \rightarrow +\infty$  et  $\phi_0 = 0$ . Une condition de flux normal constant, tel que  $\alpha = \alpha_\infty$ .
3. **Fourier** :  $\mathbf{bi} \neq 0$  et  $\phi_0 = 0$ .

L'ensemble des conditions aux limites peuvent s'appliquer sur un scalaire ou sur un vecteur, comme la fraction volumique de poudre  $\phi^s$  ou la vitesse. L'utilisation d'une condition à la limite intégrant les flux  $\mathbf{N}_c$  et  $\mathbf{N}_\mu$  (2.23) est le principal apport de cette thèse, par rapport au modèle original de Phillips.

$$\mathbf{n} \cdot (-(\mathbf{N}_c + \mathbf{N}_\mu)) = 0$$

Cette condition à la limite a été intégrée au code de calcul Thetis, et permet l'annulation des flux diffusifs de l'équation de Phillips, au travers d'obstacles considérés comme imperméables aux particules. Elle est intégrée via l'adjonction d'un coefficient multiplicateur  $\frac{K_o}{K_o+1}$  sur tous les termes diffusifs de l'équation de Phillips ( $K_o = 10^{-20} \text{ m}^2$  dans l'obstacle,  $K_o = \infty$  partout ailleurs).

### 2.3.7 Résolution de l'équation de Phillips

La présentation de la discrétisation spatiale et temporelle, au sens des volumes finis, de l'équation de Phillips (2.22), clôture la discrétisation du modèle final (2.28). Pour rappel, l'équation de Phillips, écrite sous sa forme simplifiée, est :

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_{TR} \phi^s) = \nabla \cdot (D(\mathbf{u}_{TR}, \phi^s) \nabla \phi^s) + S(\mathbf{u}_{TR}, \phi^s)$$

Les schémas de discrétisation spatiale, présentés en sous-section 2.3.3, pouvant tous être utilisés, l'équation de Phillips n'est présentée ici que sous sa forme semi-discrétisée en temps (*cf* équations de Navier-Stokes, sous-section 2.3.4).

$$\frac{\phi^{sn+1} - \phi^{sn}}{\Delta t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_{TR}^{n+1} \phi^{sn+1}) = \nabla \cdot (D^n \nabla \phi^{sn+1}) + S^n \quad (2.70)$$

Mis à part le traitement explicite du coefficient de diffusion et du terme source, tous les termes de cette équation sont implicites, *i.e.*, exprimés au temps  $n + 1$ . Comme évoqué dans la sous-section 2.3.4, cette distinction est due à la stratégie de résolution du modèle. En effet, le coefficient de diffusion et le terme source de cette équation, sont fonction de la fraction volumique de poudre  $\phi^s$  et de la vitesse (au travers du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ ). Ils sont calculés avec  $\phi^{sn}$  et  $\dot{\gamma}^n$ , puisqu'ils sont déterminés avant la résolution de l'équation de Phillips. A la fin de cette résolution, le couple vitesse/pression  $(\mathbf{u}, p)$ , ainsi que la répartition de poudre dans la suspension  $\phi^s$ , sont déterminés au temps  $n+1$ . Cette dernière permet le calcul des caractéristiques du fluide  $(\rho, \mu)$ . Ainsi, la résolution du modèle final (2.28) au temps  $n + 1$  est effectuée. En procédant itérativement de la même manière, on résout le modèle sur chaque temps de la discrétisation spatiale.

### 2.3.8 Méthodes de résolution

L'explicitation de l'ensemble des méthodes numériques permettant la discrétisation des équations du modèle final (2.28), a été présentée. Il est désormais important de résoudre les systèmes linéaires engendrés par cette discrétisation afin d'approcher la solution initiale. Dans le code de calcul Thetis, deux méthodes sont implémentées :

1. une directe,
2. et une itérative : la méthode du BiGradient Conjugué.

Dans les deux cas, l'ensemble des équations à résoudre sont écrites sous la forme d'un système matriciel (avec  $X^{n+1}$  la solution à approcher) :

$$AX^{n+1} = b \quad (2.71)$$

La première méthode, directe, détermine cette solution par inversion de la matrice  $A$ , à l'aide d'algorithmes tels que la factorisation LU et le pivot de Gauss. Son principal avantage réside dans la bonne résolution des équations, malgré des valeurs de  $dp$  et  $dr$  élevés. La contrainte de divergence nulle, pour un écoulement incompressible, est donc parfaitement résolue.

Cependant, ce type de résolution utilise beaucoup de ressource mémoire, et n'est donc réellement utilisable que pour des problèmes simples, avec peu de points discrets. Dans cette thèse, la méthode directe n'a donc été utilisée que pour les cas 2D. Pour éviter d'utiliser trop de mémoire dans des cas plus complexes, comme pour les cas 3D, on utilise des méthodes itératives. Dans celles-ci, la solution  $X^{n+1}$  du système défini ci-dessus, est déterminée par approches successives  $X^k$  (cf algorithme d'Uzawa, sous-section 2.3.5). Parmi cette classe de méthodes, nous pouvons citer la méthode de Jacobi, de SOR (pour Successive Over Relaxation), de Gauss-Seidel ou encore du BiGradient Conjugué. C'est cette dernière méthode qui est implémentée dans le code de calcul Thetis. Le principe de la méthode du BiGradient Conjugué est d'approcher itérativement le minimum de la fonction  $f$  définie par :

$$f(X) = \|AX - b\|_2^2$$

Le minimum de la fonction est atteint pour la solution  $X^{n+1}$  du système matriciel à résoudre (2.71). Ainsi, à partir d'un point initial  $X^k$ , la méthode du BiGradient Conjugué détermine  $X^{k+1}$  comme le point minimisant la fonction  $f$  sur l'espace de Krylov :

$$\kappa_k = \text{Vect} \left( b, Ab, A^2b, \dots, A^{k-1}b \right)$$

La convergence des méthodes de résolution est très dépendante du conditionnement de la matrice  $A$ . Or, lorsque cette matrice est issue d'équations aux dérivées partielles, elle est généralement mal conditionnée ( $\text{Cond}_2(A) \gg 1$ ). Dans ce cas, il est nécessaire de préconditionner le système (2.71), afin d'améliorer la convergence des méthodes. Ce préconditionnement consiste à multiplier la matrice  $A$  du système par une matrice  $M^{-1}$  de telle sorte que le produit  $M^{-1}A$  soit mieux conditionné. Le système obtenu s'écrit alors :

$$M^{-1}AX = M^{-1}b$$

La méthode de résolution, directe ou itérative, est appliquée sur ce nouveau système et converge plus rapidement qu'avec celui d'origine. Toutes ces méthodes permettent la détermination d'une solution approchée au système d'équations général (2.28).

## 2.4 Conclusions

L'objectif principal de cette thèse est l'étude physique et numérique du procédé de densification Slurry-Cast/APS, mis au point par l'industriel SAFRAN Ceramics. Dans ce but, le présent chapitre s'attachait à décrire toutes les méthodes et stratégies retenues dans ces travaux, afin de modéliser et simuler l'écoulement de la suspension utilisée dans ce procédé.

Dans un premier temps, l'étude de l'ensemble de la physique présente a permis la mise au point d'un système complet d'équations. Celui-ci permettant de modéliser, à l'échelle des fils de la préforme à densifier, l'ensemble des phénomènes rencontrés. Pour cela, des choix forts ont été effectués, comme le suivi des particules en suspension au travers de la fraction volumique de poudre  $\phi^s$ . A l'aide de ce formalisme, l'écoulement fluide de la barbotine peut être décrit par les équations de Navier-Stokes (2.10) (2.11) et du modèle de Phillips (2.22).

Le caractère non-newtonien de la suspension est réintroduit à l'aide d'une loi rhéologique. Ces équations décrivant l'écoulement de la suspension ont été couplées à une équation de Brinkman (2.12), propre à une problématique de filtration. De cette manière, le système final (2.28), permet de suivre à la fois le transport des particules au sein d'un fluide porteur en mouvement, mais également le phénomène de compaction particulaire et de filtration qui en résulte.

Dans un deuxième temps, l'ensemble des méthodes numériques, permettant la résolution du système final, ont été présentées. D'abord générale, avec un bref aperçu des méthodes aux différences finies et aux volumes finis, cette présentation s'est ensuite focalisée sur cette dernière méthode. Celle-ci, via l'utilisation de discrétisations temporelle et spatiale, permet de réécrire les équations d'une manière discrète. La résolution de ces dernières est alors possible avec des algorithmes directs ou itératifs. Cette section s'est également attachée à expliciter l'ensemble des techniques numériques assurant une solution finale consistante avec la physique du problème. Ainsi, la méthode du lagrangien augmenté (assurant une divergence nulle pour un écoulement incompressible), les techniques de pénalisation des obstacles, ou encore la détermination des conditions aux limites, ont été discutées.

Afin de s'assurer que toutes les hypothèses, stratégies et choix physiques ou numériques, effectués dans cette partie, soit valables, il est à présent nécessaire de les valider. Cette étape de validation sera présentée dans le chapitre suivant.



# Chapitre 3

## Validation du modèle

Une fois le modèle bien déterminé et les équations gouvernant l'écoulement bien posées, il est nécessaire de trouver des cas expérimentaux de référence dans la littérature (ou issus d'expériences dédiées, réalisées au sein du laboratoire) afin de les comparer aux résultats des simulations. Cette étape, primordiale dans tout établissement d'un modèle, s'appelle l'étape de *validation*.

La complexité du modèle nous oblige à le valider en plusieurs étapes. Ainsi, la première étape de validation portera sur la seule migration particulaire dans un écoulement fluide de type suspension (eau + particules) modélisée par les équations de Navier-Stokes (2.10) et (2.11) et l'équation de Phillips (2.22). Pour cela, nous utiliserons les résultats expérimentaux et numériques exposés dans les travaux de [Hampton et al., 1997].

La deuxième validation se focalisera quant à elle sur la modélisation du filtre à particules et l'agglomération particulaire qui en découle. Afin de valider la formation du gâteau particulaire et son effet de filtration sur l'écoulement de la suspension, nous comparerons nos résultats de simulations aux résultats théoriques exposés dans les travaux de [Belfort et al., 1994].

### 3.1 Validation de la ségrégation particulaire

Cette thèse fût précédée de travaux, menés par Mlle Audrey PONS, au cours d'un stage de deuxième année en école d'ingénieur. Ce dernier avait comme objectifs principaux de quantifier les modèles existants sur la ségrégation particulaire et d'effectuer les premières implémentations dans le code. Le modèle de Phillips [Phillips et al., 1992] ayant déjà été étudié au sein du laboratoire I2M lors d'une précédente thèse [Breil, 2001], il fut très rapidement retenu et réimplémenté dans le code de calcul Thetis. Le choix de l'expérience test pour la validation de la ségrégation particulaire s'est alors porté sur les travaux expérimentaux de [Hampton et al., 1997]. En effet, en plus de fournir des données expérimentales conséquentes (en terme de concentration en poudre, profil de vitesse ou longueurs d'établissement), ces travaux fournissent également des premiers résultats de simulations issus du modèle de Phillips [Phillips et al., 1992].

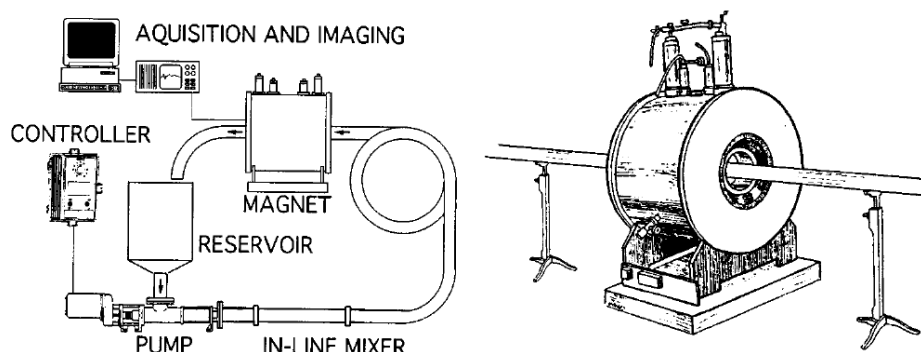
Ainsi, l'avantage d'une telle étude est double : les résultats issus de nos simulations peuvent être comparés à l'expérience mais aussi à de précédents résultats numériques.

La présente partie s'attache à présenter la comparaison des travaux expérimentaux avec les résultats numériques issus du modèle originel, mais également avec les résultats numériques issus du modèle développé dans cette thèse.

### 3.1.1 Migration particulaire dans une conduite cylindrique

Une suspension initialement homogène en poudre (concentration homogène), voit sa composition évoluer en espace et en temps dans un écoulement soumis à un cisaillement : c'est la ségrégation particulaire (cf partie 2.1.2). Ce phénomène est observé dans les écoulements de Couette (comme par exemple en rhéométrie) ou dans les écoulements de Poiseuille (écoulement dans des conduites cylindriques).

C'est sous cette observation et afin de quantifier cette ségrégation particulaire que les travaux de Hampton [Hampton et al., 1997] ont été menés. Ils décrivent l'écoulement d'une suspension initialement chargée uniformément en poudre dans une conduite cylindrique (figure 3.1 (gauche)) en explicitant à l'aide d'images RMN (Résonance Magnétique Nucléaire - figure 3.1 (droite)) des profils de concentrations radiaux le long de la conduite.



**Figure 3.1** – Montage expérimental utilisé. Boucle complète : réservoir, pompe, conduite cylindrique et dispositif RMN (gauche). Aimant Supraconducteur du système RMN (droite). [Hampton et al., 1997]

La suspension utilisée dans ces travaux est identique à celle utilisée dans les travaux de [Graham et al., 1991] et de [Abbott et al., 1991]. Elle est caractérisée par une densité de  $1180,7 \text{ kg.m}^{-3}$  et une viscosité de  $2.1 \text{ Pa.s}$  à  $28^\circ \text{C}$ .

En notant  $a$  le rayon moyen des particules et  $R$  le rayon du conduit, les travaux présentent deux dispositifs expérimentaux [Hampton et al., 1997]. Le premier montage fait intervenir un rapport  $a/R = 0,0256$  et utilise une conduite cylindrique de diamètre  $25,4 \text{ mm}$  sur une longueur de boucle totale de  $70 \text{ m}$  (voir figure 3.1). Le deuxième montage correspond quant à lui à un rapport de  $a/R = 0,0625$  et utilise une conduite de  $50,8 \text{ mm}$  de diamètre pour une boucle totale de  $70 \text{ m}$ .

Ces descriptions permettent alors de déterminer le rayon moyen de la poudre utilisée dans les deux configurations :

1. Dans la configuration  $a/R = 0,0256$  le rayon moyen est  $a = 325,12 \text{ }\mu\text{m}$ .
2. Dans la configuration  $a/R = 0,0625$  le rayon moyen est  $a = 1587,7 \text{ }\mu\text{m}$ .

Comme évoqué dans les travaux de [Hampton et al., 1997], ces deux configurations se situent au dessus de la limite théorique du modèle de Phillips de suivi des particules à l'aide d'une grandeur continue (la fraction volumique de poudre  $\phi^s$ ). En effet, afin de rester dans les limites de continuité du modèle, il ne faut pas dépasser une valeur de  $a/R$  d'environ 0,02. Néanmoins, la première configuration avec le plus petit ratio  $a/R$  est très proche de cette limite. Les résultats comparatifs menés dans ces travaux montreront que même proche de la limite, le modèle de Phillips semble correctement retranscrire la migration particulaire (voir figure 3.2).

De la même manière, il a été décidé de mener une campagne de simulations avec le ratio  $a/R = 0,0256$  et de la comparer aux résultats tant expérimentaux que numériques fournis dans les travaux de Hampton. Les résultats obtenus avec la configurations  $a/R = 0,0625$ , ne seront quant à eux pas exploités car la configuration se situe trop loin de la limite de continuité imposée par l'approche de type fluide homogène.

Une fois la configuration expérimentale retenue, les profils radiaux de poudre et de vitesses sont obtenus via imagerie RNM (cf figure 3.1). Dans le but de faciliter les comparaisons entre les profils de vitesses obtenus, il est nécessaire de normaliser les vitesses à l'aide d'une vitesse moyenne  $\bar{v}$  définie par :

$$\bar{v} = \frac{1}{A} \int_A v dA = \frac{Q}{A} \quad (3.1)$$

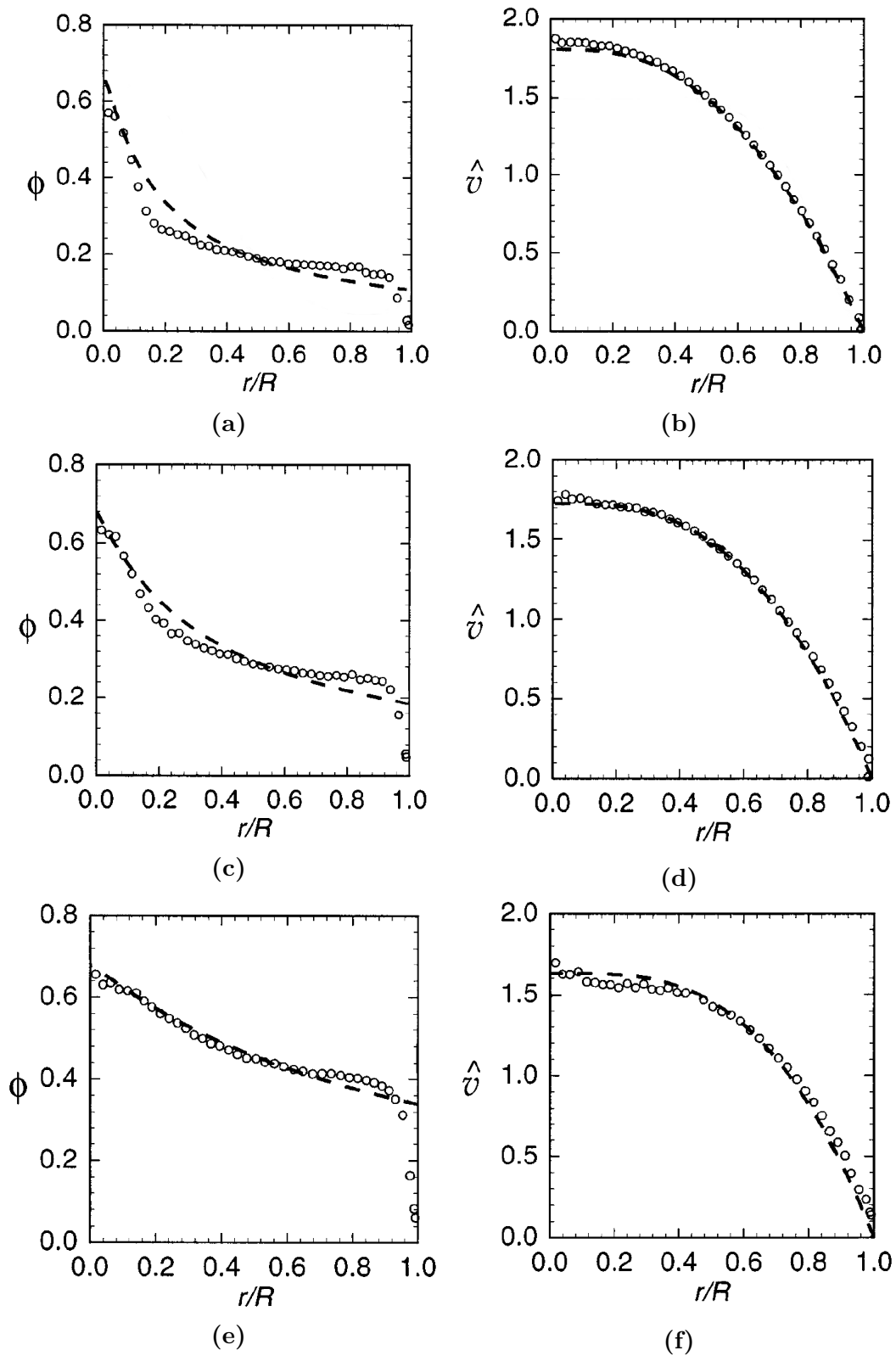
où  $A$  est la section droite du canal et  $Q$  le débit volume. La vitesse adimensionnée  $\hat{v}$  est alors obtenue en pondérant la vitesse  $v$  via la vitesse moyenne  $\bar{v}$ .

Dans la configuration  $a/R = 0,0256$  trois suspensions sont successivement étudiées : initialement homogène à  $\phi_0^s = 0,20$ , à  $\phi_0^s = 0,30$  puis à  $\phi_0^s = 0,45$ . Lorsque l'écoulement est établi, l'imagerie RNM permet d'obtenir les profils radiaux en poudre et en vitesses adimensionnées pour ces trois suspensions (cf figure 3.2).

En notant  $r$  la position sur une section droite de la conduite, on balaye alors tout le rayon du canal si  $r/R \in [0, 1]$ . Ainsi, l'étude des profils présentés sur la figure 3.2 permet d'effectuer les constatations suivantes :

1. **Profils expérimentaux sur  $\phi^s$**  : une sur-concentration en poudre au milieu de la conduite (correspondant à  $r/R = 0$ ) et une sous-concentration en poudre proche paroi ( $r/R = 1$ ). Entre les deux, la suspension est concentrée aux alentours de la valeur initiale  $\phi_0^s$ . Nous observons bien une migration particulaire des zones à fort taux de cisaillement vers celle à faible taux.
2. **Profils expérimentaux sur  $\hat{v}$**  : profil similaire à un profil de vitesse d'un écoulement de Poiseuille sans particule. Cependant, plus la suspension initiale est chargée, plus ce profil tend à s'éloigner du profil de référence de Poiseuille. Ceci s'explique par la disparité spatiale de viscosité : plus une suspension est concentrée, plus sa viscosité augmente (cf sous-section 1.2.3 et sous-section 2.1.3).
3. **Profils obtenus numériquement** : très bonne corrélation entre les résultats numériques et les profils de vitesses expérimentaux. Pour les profils radiaux en poudre  $\phi^s$ , les résultats numériques approchent correctement le phénomène de ségrégation dans la conduite, sauf dans la région proche paroi ( $r/R = 1$ ). En effet, la sous-concentration proche des obstacles ne semble pas correctement prise en compte dans le modèle originel.





**Figure 3.2** – Profils radiaux expérimentaux de fraction  $\phi^s$  (gauche) et vitesses adimensionnées (droite) en régime établi ( $\circ$ ). Comparaison avec les résultats obtenus avec le modèle de Phillips original (- -) dans la configuration  $a/R = 0,0256$ , pour des suspensions initialement homogènes à (a)(b)  $\phi_0^s = 0,20$ , (c)(d)  $\phi_0^s = 0,30$  et (e)(f)  $\phi_0^s = 0,45$ . [Hampton et al., 1997]

Enfin, le dernier point abordé dans les travaux [Hampton et al., 1997] concerne la longueur d'établissement des profils radiaux en poudre ( $L_{\phi^s}$ ) et en vitesses ( $L_v$ ). Ils ont en effet observé expérimentalement que ces longueurs sont fortement dépendante du rapport  $a/R$  mais également de la concentration initiale de la suspension  $\phi_0^s$  (cf tableau 3.1). Pour expliciter ces longueurs, il est nécessaire dans un premier temps de définir une grandeur  $E_p$  caractérisant l'évolution du profil radial le long du canal :

$$E_p = \frac{1}{A} \int \left| \frac{\varphi - \varphi_{ref}}{\varphi_{avg}} \right| dA \quad (3.2)$$

avec  $A$  la section droite du canal,  $\varphi \equiv \{\phi^s, v\}$ ,  $\varphi_{ref}$  un profil de référence (la concentration initiale homogène  $\phi_0^s$  par exemple) et  $\varphi_{avg}$  la valeur moyenne du profil de référence  $\varphi_{ref}$ .

Cette grandeur  $E_p$  approche asymptotiquement une valeur caractérisant l'établissement du profil de l'écoulement. Les travaux référencés définissent les longueurs d'établissement  $L_{\phi^s}$  et  $L_v$  comme le point où  $E_p$  atteint 95 % de sa valeur limite. Dans la configuration  $a/R = 0,0256$  les longueurs d'établissement des profils de concentration et de vitesses sont résumées dans le tableau 3.1. La notation  $L_{\phi^s, v}/D$  correspond aux longueurs adimensionnées à l'aide du diamètre du canal.

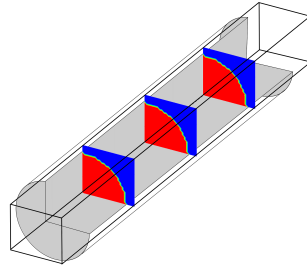
**Table 3.1** – *Longueur d'établissement des profils de fraction volumique de poudre et de vitesses pour un rapport  $a/R = 0,0256$ . En notation adimensionnée via le diamètre du conduit ( $L_{\phi^s, v}/D$ ) et notation réelle ( $L_{\phi^s, v}$ ).*

| $\phi_0^s$ | $L_{\phi^s}/D$ | $L_{\phi^s}$ | $L_v/D$ | $L_v$   |
|------------|----------------|--------------|---------|---------|
| 0,20       | 1126           | 28,60 m      | 478     | 12,14 m |
| 0,30       | 502            | 12,75 m      | 247     | 6,27 m  |
| 0,45       | 179            | 4,55 m       | 94      | 2,38 m  |

### 3.1.2 Mise en place de la simulation

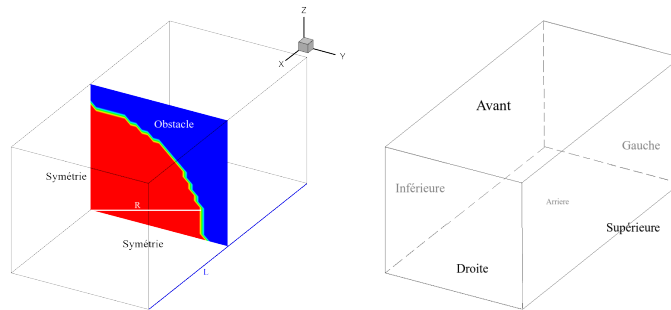
Afin d'obtenir des résultats cohérents lors de l'étape numérique, il est important de correctement représenter la géométrie du montage expérimental. Cependant, il est aussi nécessaire d'effectuer un certain nombre de simplifications afin de diminuer le temps nécessaire à la convergence des calculs. Dans le cas de la simulation numérique des travaux de [Hampton et al., 1997], un bon compromis entre temps de calcul et pertinence des résultats est alors obtenu sur un domaine de simulation ne représentant qu'un quart de section de canal (voir figure 3.3).

La stratégie de modélisation des obstacles dans le code de calcul Thétis est une stratégie dite de pénalisation. En effet, le maillage n'est pas adapté directement à la géométrie des obstacles (comme par exemple dans le logiciel ANSYS), mais utilise le principe des frontières immergées. Les limites des obstacles sont découplées du maillage, et ne sont prises en compte qu'au travers d'une pénalisation sur la vitesse (via la perméabilité). C'est la raison pour laquelle notre domaine d'étude est un pavé alors que nous voulons décrire l'écoulement dans une conduite cylindrique (figure 3.3, page 80).



**Figure 3.3** – *Domaine de simulation représentatif du montage expérimental des travaux de Hampton. La boîte noire représente le domaine d'étude numérique. En bleu, la zone imperméable et pénalisée (extérieur de la conduite). En rouge, la partie fluide (intérieur de la conduite).*

La représentation d'un quart de conduite cylindrique de rayon  $R = 0,0127$  m se fait à l'aide d'un pavé de section droite de côté 0,013 m. Étant donné que la longueur d'établissement des profils de  $\phi^s$  et  $v$  est dépendante de la concentration initiale de la suspension, plusieurs longueurs de canal ont été utilisées. L'étude s'est alors portée sur des canaux de longueur  $L = 30$  m,  $L = 15$  m et  $L = 5$  m correspondant respectivement à des suspensions de concentration initialement homogène à  $\phi_0^s = 0,20$ ,  $\phi_0^s = 0,30$  et  $\phi_0^s = 0,45$ . Afin de complètement caractériser la géométrie de notre étude, nous devons fixer des conditions aux limites sur la vitesses et sur la fraction volumique de poudre  $\phi^s$ . Pour cela, chaque condition aux limites est nommée puis affectée d'une valeur. L'ensemble des conditions aux limites utilisées sont présentées en figure 3.4 et dans le tableau 3.2.



**Figure 3.4** – *Coupe 3D de notre domaine de calcul (gauche) et nom des limites du domaine (droite).*

**Table 3.2** – *Ensemble des conditions aux limites appliquées dans la modélisation du canal.*

| Limite     | Condition Limite en Vitesse       | Condition Limite en Espèce          |
|------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| Gauche     | 1/4 de disque uniforme : $u_{x0}$ | 1/4 de disque uniforme : $\phi_0^s$ |
| Droite     | Neumann                           | Neumann                             |
| Supérieure | Paroi                             | Neumann                             |
| Inférieure | Symétrie                          | Neumann                             |
| Avant      | Paroi                             | Neumann                             |
| Arrière    | Symétrie                          | Neumann                             |

Une condition de **Neumann** correspond à un flux normal nul. Utilisé pour la vitesse, cette condition s'applique alors à chacune des trois composantes. Une condition de **Symétrie** impose une condition de **Neumann** sur la(les) composante(s) tangentielle(s) et annule la composante normale. Enfin une condition de **Paroi** imposera une vitesse nulle

Le maillage utilisé dans ce cas est un maillage cartésien comportant  $15 \times 15$  éléments ( $N_y \times N_z$ ) dans la section droite du canal, et respectivement  $N_x = 1500$ ,  $N_x = 750$  et  $N_x = 250$  éléments pour les longueurs  $L = 30$  m,  $L = 15$  m et  $L = 5$  m. Les pas d'espaces seront alors constants, et ceci dans les trois études correspondantes aux trois suspensions initiales ( $\phi_0^s = 0,20$ ,  $\phi_0^s = 0,30$  et  $\phi_0^s = 0,45$ ).

$$\Delta x = L_x/N_x = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (3.3)$$

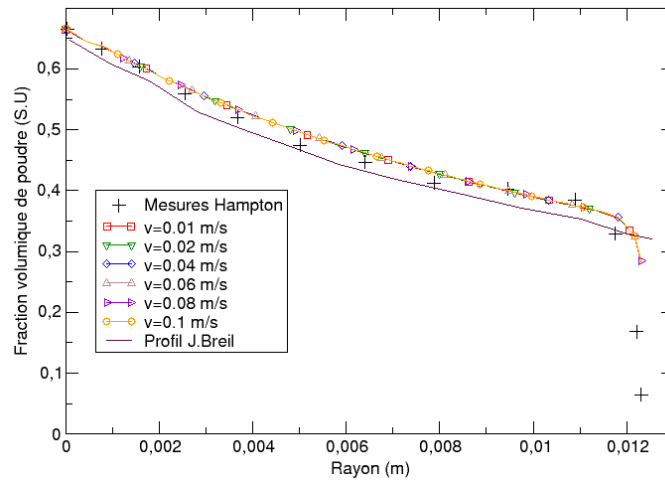
$$\Delta y = L_y/N_y = 8,6 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (3.4)$$

$$\Delta z = L_z/N_z = 8,6 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (3.5)$$

Avant de confronter nos résultats à ceux d'Hampton, il est nécessaire de complètement paramétrer le cas d'étude numérique, *i.e.*, de déterminer une vitesse d'entrée  $u_{x0}$  cohérente ainsi qu'un rayon de sortie sur lequel relever toutes les données. Il est aussi à noter que notre pas de temps  $dt$  a été choisi afin d'assurer la pertinence des résultats tout en gardant un temps de calcul raisonnable pour obtenir la solution stationnaire. Ils correspondent à une condition de  $CFL \sim 10^{-2}$  (*cf* section 2.3).

### 3.1.3 Choix de la vitesse d'entrée

Nous cherchons dans ce paragraphe à évaluer l'influence du choix de la vitesse d'entrée sur les profils de concentration obtenus en sortie. Pour rappel, l'étude s'effectue uniquement dans la configuration  $a/R = 0,0256$  pour trois suspensions initialement homogènes ( $\phi_0^s = 0,20$ ,  $\phi_0^s = 0,30$  et  $\phi_0^s = 0,45$ ). La figure 3.5 représente le profil radial de la fraction volumique de poudre en sortie de canal pour différentes vitesses d'entrée dans la configuration  $a/R = 0,0256$ , et une suspension initialement uniformément chargée à  $\phi_0^s = 0,45$ .



**Figure 3.5** – Répartition de la fraction volumique de poudre sur le rayon de sortie pour différentes vitesses en entrée  $u_{x0}$  dans la configuration  $a/R = 0,0256$ .

Nous remarquons que quelle que soit la vitesse choisie, aucune différence n'est observée entre les répartitions de fraction volumique de poudre  $\phi^s$  en sortie de canal. Ceci s'explique par la définition même du modèle de Phillips [Phillips et al., 1992] donnée dans la section 2.1.2 : en régime établi la répartition radiale de fraction volumique de poudre d'une suspension mise dans un écoulement cisailé ne dépend que du taux de cisaillement et non pas des valeurs absolues des vitesses mises en jeu.

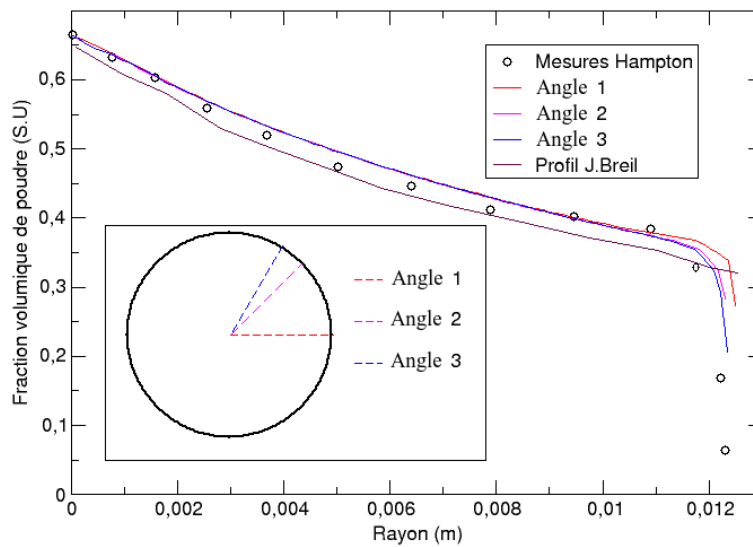
En effet, seul le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  (dérivée spatiale de la vitesse) intervient dans les termes de diffusion de l'équation de Phillips (2.22) (que nous rappelons ci-dessous) :

$$\begin{cases} N_c = -D_c a^2 (\phi^{s2} \nabla \dot{\gamma} + \phi^s \dot{\gamma} \nabla \phi^s) \\ N_\mu = -D_\mu \phi^{s2} \dot{\gamma} \left( \frac{a^2}{\mu} \right) \frac{d\mu}{d\phi^s} \nabla \phi^s \end{cases}$$

Le choix d'une vitesse est alors arbitraire car c'est sa distribution selon une section droite de canal qui influe sur la migration particulière et non sa valeur en elle même. Dans cette étude numérique, le choix de la vitesse d'entrée s'est porté sur  $u_{x0} = 0,1 \text{ m.s}^{-1}$  car cette valeur assure le meilleur compromis entre le temps nécessaire à la simulation et la rapidité de convergence des calculs.

### 3.1.4 Choix de l'angle de référence

Une fois la vitesse d'entrée choisie, il est nécessaire de chercher l'angle de référence sur lequel effectuer les relevés des profils. En effet, vu le faible nombre de mailles utilisées, le choix de l'angle de référence influencera les résultats. La figure 3.6 présente le profil de fraction volumique de poudre en sortie de canal pour trois angles différents, et ceci pour une vitesse d'entrée égale à  $0,1 \text{ m.s}^{-1}$  (cf paragraphe précédent) dans la configuration  $a/R = 0,0256$  et une suspension initialement uniformément chargée à  $\phi_0^s = 0,45$ .



**Figure 3.6** – Répartition de la fraction volumique de poudre en sortie, étude de l'influence de l'angle choisi dans la configuration  $a/R = 0,0256$ .

Les profils de  $\phi^s$  selon les trois angles de sortie sont très proches des profils obtenus expérimentalement (o) [Hampton et al., 1997]. Seules de petites différences apparaissent dans la partie proche de la paroi du canal ( $R \approx 0,012$  m). Elles s'expliquent par le rendu même de l'obstacle dans le code de calcul Thetis et sont donc dues au maillage (cf partie précédente et figure 3.4 (gauche)). En raffinant de plus en plus le maillage, les profils selon les trois angles tendraient donc vers un seul et même profil. Cependant, la configuration  $a/R = 0,0256$  se situant déjà en limite du modèle continu de Phillips [Phillips et al., 1992], le nombre de mailles dans une section droite de canal est fortement limité, et ne pourra donc excéder le nombre actuellement utilisé.

Le choix de l'angle de référence s'est donc naturellement porté sur l'angle 3 (voir figure 3.6) car c'est celui qui nous permet d'approcher le mieux les résultats expérimentaux malgré les limitations dues au maillage.

Ce choix parachève la configuration de l'étude numérique : définition de la géométrie, des conditions aux limites, des conditions d'entrée et des conditions de sortie. Une comparaison entre les résultats expérimentaux de [Hampton et al., 1997] et les résultats issus des simulations peut alors être engagée.

### 3.1.5 Résultats numériques de la migration particulaire dans une conduite cylindrique

L'étude numérique étant parfaitement paramétrée, nous pouvons dès lors comparer les résultats obtenus dans nos simulations aux résultats expérimentaux et numériques fournis dans ces travaux. Afin d'optimiser cette comparaison, la mise en forme sera identique à celle utilisée dans la section de présentation des résultats expérimentaux. Ainsi, dans la configuration  $a/R = 0,0256$ , la figure 3.7 en page 84, présente successivement pour les trois suspensions initiales ( $\phi_0^s = 0,20$ ,  $\phi_0^s = 0,30$  et  $\phi_0^s = 0,45$ ) les profils radiaux de concentration (colonne gauche) et de vitesses (colonne droite) en sortie de canal.

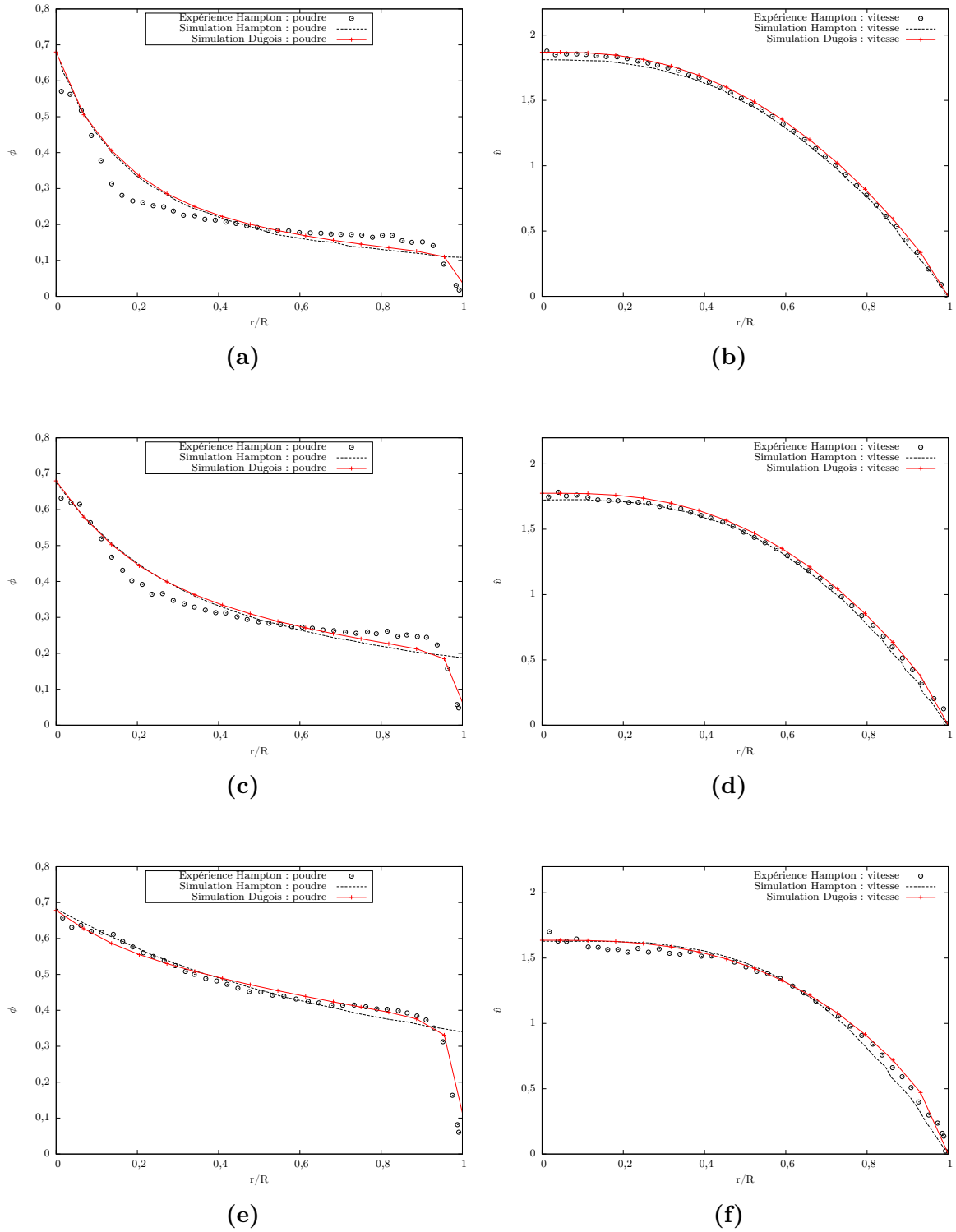
En reprenant exactement les mêmes constatations et comportements que ceux décrits précédemment, nous pouvons quantifier l'apport des modifications introduites dans cette thèse sur le modèle de Phillips originel.

#### Profils de $\phi^s$ en sortie

Les résultats de nos simulations et ceux du modèle originel sont en tout point identiques pour  $r/R \in [0; 0,8]$ . Ils approchent bien les valeurs radiales de  $\phi^s$  relevées expérimentalement. Seul le comportement proche paroi est amélioré grâce aux modifications apportées dans le présent travail. L'apport d'une condition de flux particulaire nul au travers des parois solides (équation (2.23)), intégrant les termes de Phillips, permet de parfaitement retranscrire l'appauvrissement en poudre observé proche de la paroi ( $r/R \approx 1$ ).

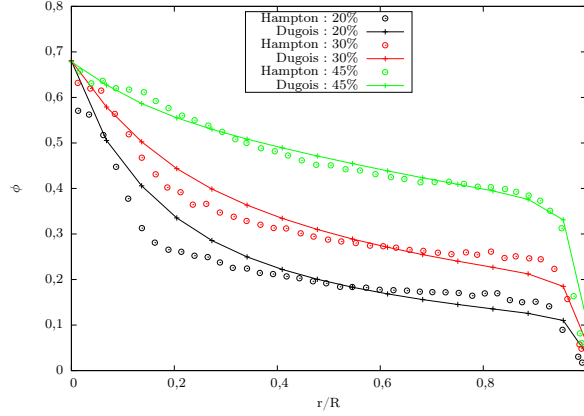
#### Profils de $\hat{v}$ en sortie

Dans l'ensemble, les profils issus de nos simulations semblent identiques à ceux obtenus avec le modèle originel. Nous constatons seulement une légère amélioration de la résolution des vitesses en sortie de canal. Cela pourrait s'expliquer par une meilleure prise en compte de la rhéologie via le modèle mis en place (cf sous-section 2.1.3) puisque aucune information sur le modèle rhéologique utilisé n'est donnée dans les travaux de [Hampton et al., 1997].



**Figure 3.7** – Profils radiaux expérimentaux de fraction  $\phi^s$  (gauche) et vitesses  $\hat{u}$  (droite) en régime établi ( $\circ$ ). Comparaison aux résultats obtenus avec le modèle de Phillips originel (---) et le modèle modifié dans cette thèse (—) dans la configuration  $a/R = 0,0256$ , pour des suspensions initialement homogènes à (a)(b)  $\phi_0^s = 0,20$ , (c)(d)  $\phi_0^s = 0,30$  et (e)(f)  $\phi_0^s = 0,45$ .

Pour une meilleure lisibilité, les profils radiaux de poudre en sortie pour les trois suspensions initiales peuvent être superposés (voir figure 3.8). Nous remarquons alors, qu'entre le centre du canal ( $r/R = 0$ ) et la paroi ( $r/R = 1$ ), la concentration de la suspension avoisine la valeur initiale  $\phi_0^s$ . De plus, les résultats du modèle semblent plus proches de l'expérience pour des suspensions très chargées en particules.

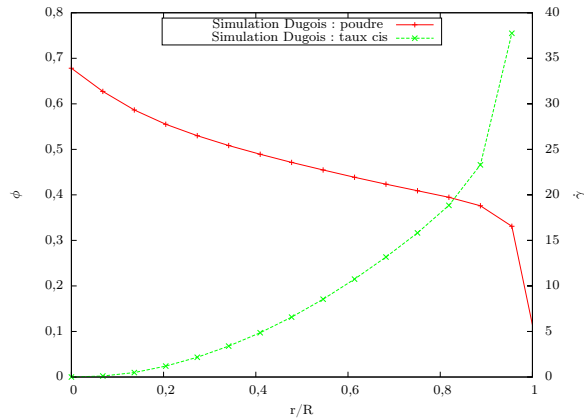


**Figure 3.8** – Bilan des profils radiaux de fraction volumique de poudre observés en sortie de canal avec trois suspensions initialement homogènes ( $\phi_0^s = 0,20$ ,  $\phi_0^s = 0,30$  et  $\phi_0^s = 0,45$ ) dans la configuration  $a/R = 0,0256$ .

D'autres constations ont aussi été évoquées précédemment :

1. La migration particulaire s'effectue des zones à fort taux de cisaillement vers celles à faible taux.
2. L'influence de la viscosité sur le profil de vitesse comparativement au profil obtenu lors d'un écoulement de Poiseuille d'un fluide non chargé.

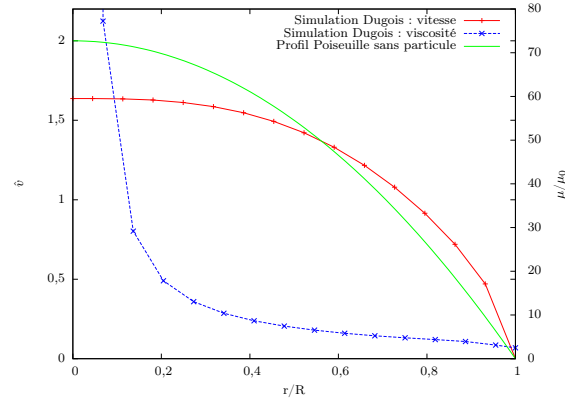
Pour vérifier les mécanismes de migration particulaire, nous pouvons superposer au profil de concentration de poudre en sortie (ordonnées de gauche de la figure 3.9) le profil du taux de cisaillement radial (ordonnées de droite). La présence des zones à fort taux de cisaillement proche de la paroi ( $r/R = 1$ ) explique la sous-concentration observée, et appuie l'hypothèse de migration vers les zones moins cisillées, situées au centre du canal.



**Figure 3.9** – Superposition des profils de répartition de poudre et de taux de cisaillement en sortie de canal. Résultats obtenus pour une suspension initialement homogène en poudre à  $\phi_0^s = 0,45$  dans la configuration  $a/R = 0,0256$ .



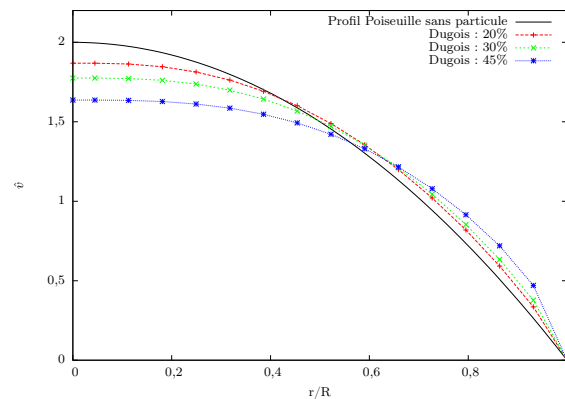
Pour quantifier l'effet de la viscosité sur les vitesses en sortie, on peut mettre en parallèle le profil de vitesses (ordonnées de gauche de la figure 3.10) et de viscosité (ordonnées de droite) en sortie de canal dans la configuration  $a/R = 0,0256$  et  $\phi_0^s = 0,45$ .



**Figure 3.10** – *Superposition des profils de vitesses et de viscosité en sortie de canal. Résultats obtenus pour une suspension initialement homogène en poudre à  $\phi_0^s = 0,45$  dans la configuration  $a/R = 0,0256$ .*

L'augmentation brusque de la viscosité au centre du canal est à rapprocher du comportement rhéologique évoqué dans la sous-section 2.1.3. En effet, si nous regardons le profil de viscosité et le profil de concentration, nous remarquons que la valeur prise par  $\phi^s$  au centre du canal est la valeur maximale  $\phi_m^s = 0,68$  caractérisant un comportement solide de la suspension. Ce comportement, modélisé par une viscosité infinie, a un effet direct sur les profils de vitesse en les éloignant du profil de vitesses observé lors d'un écoulement sans particule (écoulement de Poiseuille).

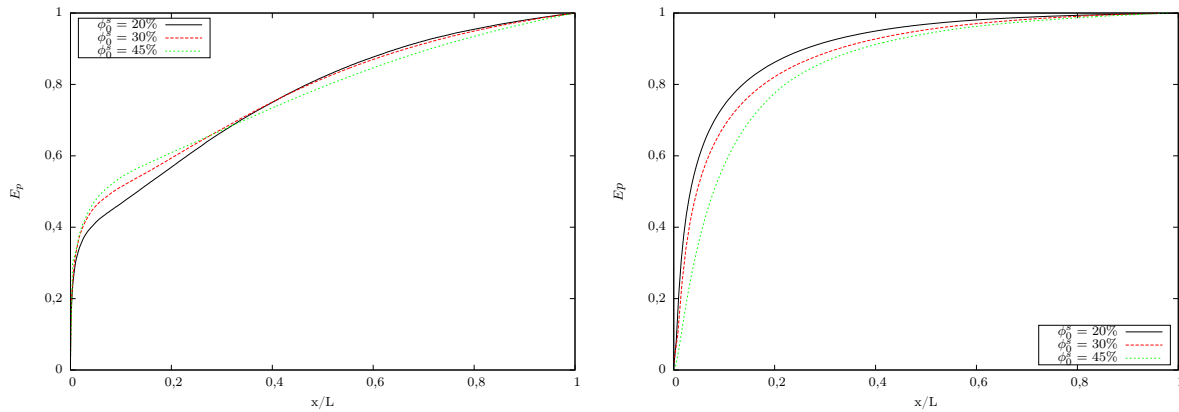
Pour s'assurer de la véracité de cette dernière observation, nous pouvons représenter l'ensemble des profils de vitesses obtenus en sortie de canal pour les trois suspensions initialement homogènes en poudre et dans la configuration  $a/R = 0,0256$  et les comparer au profil des vitesses obtenues en sortie de canal pour un écoulement de Poiseuille sans particule (voir figure 3.11).



**Figure 3.11** – *Bilan des profils radiaux de vitesses observés en sortie de canal avec trois suspensions initialement homogènes ( $\phi_0^s = 0,20$ ,  $\phi_0^s = 0,30$  et  $\phi_0^s = 0,45$ ) dans la configuration  $a/R = 0,0256$ . Comparaison avec un profil de vitesses de Poiseuille théorique.*

Enfin, pour parachever cette partie sur la validation du modèle de ségrégation particulaire, il reste à comparer les résultats obtenus numériquement aux résultats expérimentaux sur les longueurs d'établissement des profils radiaux en sortie. Pour rappel, les longueurs d'établissement des profils radiaux de poudre ( $L_{\phi^s}$ ) et de vitesses ( $L_v$ ) évaluées expérimentalement dans les travaux de [Hampton et al., 1997] sont résumées dans le tableau 3.1.

L'utilisation de la grandeur  $Ep$  définie dans l'équation (3.2) permet de suivre l'évolution des profils radiaux de fraction volumique de poudre (figure 3.12 (gauche)) et de vitesses (figure 3.12 (droite)) le long du canal (de longueur  $L$ ). En notant  $x$  une position axiale quelconque du canal, on balaye alors toute sa longueur lorsque  $x/L \in [0; 1]$ . Afin de comparer sur la même courbe l'établissement des profils pour les trois suspensions ( $\phi_0^s = 0,20$ ,  $\phi_0^s = 0,30$  et  $\phi_0^s = 0,45$ ), il est nécessaire d'adimensionner cette variable  $Ep$  par ses successives valeurs asymptotiques.



**Figure 3.12** – Longueurs d'établissement adimensionnées des profils radiaux de fraction volumique de poudre (gauche) et de vitesses (droite) des trois suspensions initialement homogènes ( $\phi_0^s = 0,20$ ,  $\phi_0^s = 0,30$  et  $\phi_0^s = 0,45$ ) dans la configuration  $a/R = 0,0256$ .

Les longueurs d'établissement des profils radiaux de poudre et de vitesses ( $L_{\phi^s}$  et  $L_v$ ) sont définies comme le point où  $Ep$  atteint 95% de sa valeur asymptotique. Le tableau 3.3 résume l'ensemble des longueurs d'établissement des profils de fraction volumique de poudre et de vitesses pour les trois suspensions initiales ( $\phi_0^s = 0,20$ ,  $\phi_0^s = 0,30$  et  $\phi_0^s = 0,45$ ).

**Table 3.3** – Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques sur les longueurs d'établissement des profils de fraction volumique de poudre et de vitesses pour un rapport  $a/R = 0,0256$ . Explicitation de l'écart commis pour les trois suspensions initialement homogène en poudre.

| $\phi_0^s$ | $L_{\phi^s}^{simu}$ | $L_{\phi^s}^{expé}$ | $\epsilon_{\phi^s}$ | $L_v^{simu}$ | $L_v^{expé}$ | $\epsilon_v$ |
|------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------|--------------|--------------|
| 0,20       | 29,20 m             | 28,60 m             | 2%                  | 12,14 m      | 12,62 m      | 4%           |
| 0,30       | 12,04 m             | 12,75 m             | 5%                  | 6,27 m       | 6,58 m       | 5%           |
| 0,45       | 4,20 m              | 4,55 m              | 7%                  | 2,38 m       | 2,53 m       | 6%           |

Les résultats numériques sont très proches des résultats expérimentaux avec un écart compris entre 2% et 7%. Il est intéressant de remarquer que plus la concentration initiale  $\phi_0^s$  est grande - et donc proche de la valeur maximale  $\phi_m^s$  - plus l'écart commis sur la longueur d'établissement des profils est grand. Ce phénomène s'explique par la construction et la résolution du modèle numérique dans le code de calcul Thétis. En effet, plus la fraction volumique  $\phi^s$  est grande, plus la viscosité est élevée (*cf* sous-section 2.1.3 sur la rhéologie). Or l'augmentation de la viscosité impacte négativement la résolution des vitesses (convergence plus difficile, résidus plus grands, divergence plus grande, ...). L'écart commis sur les vitesses est donc naturellement plus élevé dans le cas  $\phi_0^s = 0,45$  que dans le cas  $\phi_0^s = 0,20$ .

Pour résumer, cette partie avait pour objectif de valider l'implémentation du modèle de ségrégation particulaire dans le code de calcul Thétis. Pour cela, les données fournies dans les travaux de [Hampton et al., 1997] sur l'écoulement dans une conduite cylindrique de suspensions, initialement homogènes en concentration, ont été utilisées. Ils fournissent des données expérimentales sur des profils radiaux de poudre et de vitesses en sortie de canal, ainsi que sur les longueurs d'établissement correspondantes. La comparaison des résultats numériques et expérimentaux a permis de montrer que le modèle de Phillips [Phillips et al., 1992] implémenté dans le code de calcul Thetis retranscrivait correctement la physique de la ségrégation particulaire, et ceci même proche des limites de son domaine d'application (pour des grands rapports  $a/R$ ). En effet, dans la configurations  $a/R = 0,0256$  et pour différentes concentrations initiales de la suspension, les profils radiaux de poudre (figures 3.7 (gauche) et 3.8) de vitesses (figures 3.7 (droite) et 3.11) et les longueurs d'établissement (figure 3.12 et tableau 3.3) obtenus numériquement sont très proches des valeurs expérimentales. Enfin, il est à noter qu'une étude de convergence en maillage, bien qu'intéressante, est impossible. En effet, le maillage utilisée ici étant déjà situé à la limite de continuité dans l'approche milieux continus, un raffinement de celui-ci aurait été impossible

## 3.2 Validation de l'écoulement en milieu poreux

Dans le procédé APS, les particules sont introduites au sein de la préforme tissée via l'injection d'une suspension à pression ou débit imposé (voir figure 1.16 de la section 1.4). Le passage de cette suspension dans le tissage génère l'apparition de phénomènes de ségrégation particulaire qui en changent localement la concentration (voir section précédente). Cependant, la présence d'un filtre à particules en sortie d'outillage engendre une séparation entre le solvant et les particules de la suspension et confine ces dernières à l'intérieur du tissage. Ainsi, les particules sont transportées à l'intérieur du tissage jusqu'au filtre où elles s'accumulent (voir figure 2.1). Cette accumulation se traduit par la formation d'un gâteau particulaire correspondant à une compaction maximale des particules. Ce gâteau génère l'apparition de phénomène de filtration et sa croissance dépendra de l'apport en poudre via la suspension utilisée.

La formation du gâteau et son évolution sont donc des phénomènes complexes dont le modèle présenté dans le chapitre 2 s'attache à représenter la physique. Après avoir validé la partie sur la ségrégation particulaire, il est désormais nécessaire de vérifier si la méthode de prise en compte du filtre à particules est bien implémentée dans notre code de calcul Thetis.

Pour cela, deux étapes sont nécessaires : la première a pour objectif de vérifier si l'impact d'un gâteau particulaire invariant en temps et en espace est correctement pris en compte dans les calculs (écoulement en milieu poreux, comparaison à la loi de Darcy, etc) tandis que la deuxième a pour objectif de valider son évolution. La stratégie de validation sera, dans un premier temps d'initialiser un domaine avec une concentration de poudre  $\phi_0^s = \phi_c^s$  afin de générer un gâteau particulaire et d'y forcer le passage d'un fluide non chargé. Le champ de pression obtenu sera ainsi comparé au champ théorique fourni par le modèle de Darcy [Darcy, 1856]. Enfin, dans un second temps, la dynamique de formation d'un gâteau particulaire 1D obtenue numériquement sera comparée à la loi théorique d'évolution présentée dans les travaux de [Belfort et al., 1994].

### 3.2.1 Écoulement d'un fluide non chargé dans un milieu poreux

Afin de vérifier que la formation de notre gâteau particulaire est bien modélisée par la formation d'obstacles poreux dans notre simulation, nous avons mis au point deux cas tests. Le premier est l'étude de l'écoulement incompressible de notre fluide saturant (eau distillée) dans un milieu poreux de référence, tel qu'il est actuellement modélisé dans le code de calcul Thetis. Le but ici est de vérifier que l'écoulement dans un milieu poreux tel qu'implémenté dans Thetis est en accord avec la loi théorique de Darcy (1.2) dans une configuration homogène. Le deuxième cas n'utilise plus un milieu poreux de référence, mais directement notre modélisation du gâteau particulaire aux mêmes perméabilités que précédemment. En comparant alors les résultats obtenus dans les cas n°1 et n°2, nous validerons la prise en compte du gâteau particulaire comme un milieu poreux.

L'étude du cas n°1 est celle d'un fluide incompressible non chargé en particules. Le modèle de Phillips n'est pas utilisé et seules les équations de Navier-Stokes/Brinkman (2.10) et (2.11) sont résolues. Le but de cette première étude est de trouver la solution stationnaire du couple vitesse pression  $(\mathbf{q}, p)$  au travers de ce milieu poreux avec deux perméabilités différentes :

1.  $K_a = 1.10^{-10} \text{ m}^2$
2.  $K_b = 3,6.10^{-16} \text{ m}^2$

Ces choix de perméabilité ne sont pas anodins, car ils correspondent respectivement à la perméabilité du filtre et d'un agencement compact de nos particules donnée par la relation de Kozeny-Carman (2.4). La perméabilité  $K_b$  est donc la perméabilité caractéristique du gâteau particulaire qui sera utilisée dans le cas n°2. L'utilisation d'une telle perméabilité facilitera la comparaison des résultats du cas n°1 et n°2 et permettra de valider la prise en compte du gâteau particulaire comme un milieu poreux. Le fluide utilisé dans cette étude correspond au solvant des suspensions utilisées dans le procédé Slurry Cast/APS. Il s'agit d'eau distillée, possédant une viscosité  $\mu = 1.10^{-3} \text{ Pa.s}$ .

Dans un premier temps, nous pouvons déterminer les valeurs théoriques des pertes de charges attendues avec ces deux perméabilités à l'aide de la loi de Darcy (3.6).

$$\Delta p = \frac{\mu \|\mathbf{q}\| L_p}{K} \quad (3.6)$$

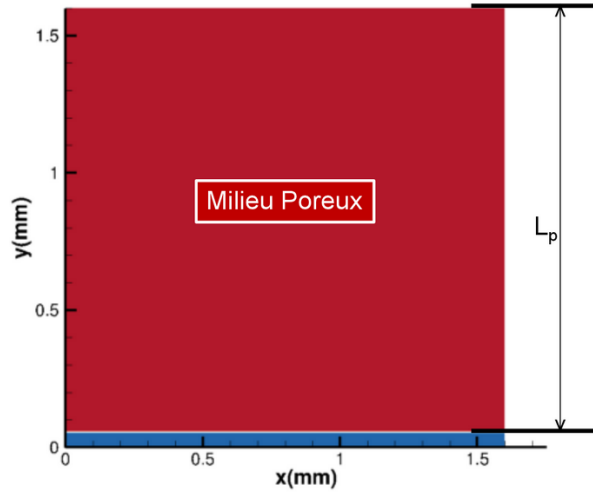
L'écoulement de ce fluide à la vitesse de  $\|\mathbf{q}\| = 1.10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$  dans le milieu poreux de référence à perméabilité  $K_a$  et de longueur  $L_p = 1,545.10^{-3} \text{ m}$  nous donne une perte de charge théorique selon la loi de Darcy (3.6) de :

$$\Delta p_a = 1,545 \text{ Pa} \quad (3.7)$$

En appliquant à présent la perméabilité  $K_b$  à notre milieu poreux, un calcul semblable nous permet de déterminer une perte de charge théorique selon la loi de Darcy de :

$$\Delta p_b = 4,2916.10^5 \text{ Pa} \quad (3.8)$$

Une fois les solutions théoriques  $\Delta p_a$  et  $\Delta p_b$  explicitées, une simulation sous le code de calcul Thétis peut être menée. Ainsi, un domaine est initialisé à l'aide d'un milieu poreux de référence (figure 3.13) où l'écoulement se fait du haut vers le bas avec un débit imposé. L'ensemble des conditions aux limites imposées sont synthétisées dans le tableau 3.4.



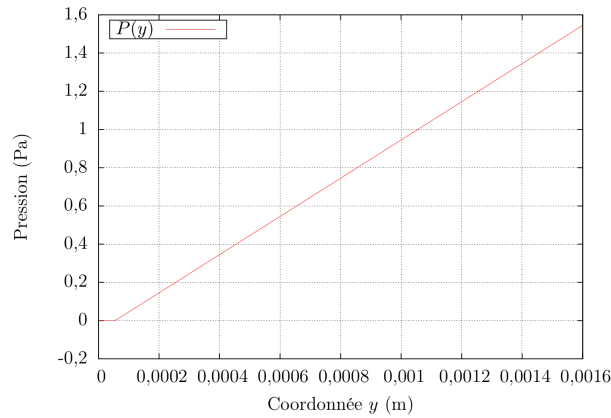
**Figure 3.13** – Cas d'étude n°1 : initialisation du domaine comme un obstacle poreux (zone rouge). La zone bleue correspond à la zone définissant le filtre à particules.

**Table 3.4** – Ensemble des conditions limites appliquées pour la simulation de l'écoulement dans un milieu poreux de référence.

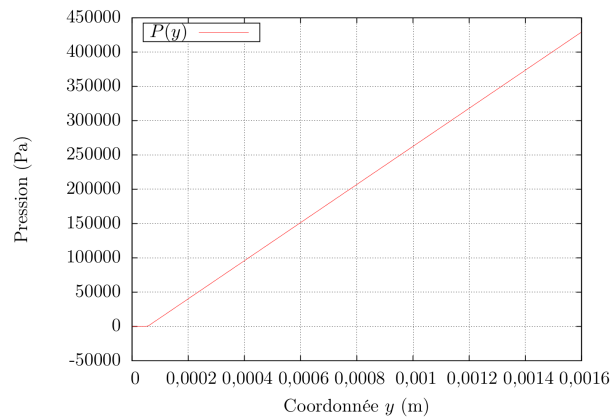
| Limite     | Condition Limite en Vitesse                        |
|------------|----------------------------------------------------|
| Supérieure | Constante<br>$q_{x0} = 1.10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ |
| Inférieure | Neumann                                            |
| Gauche     | Symétrie                                           |
| Droite     | Symétrie                                           |

Lorsqu'une solution stationnaire sur le couple vitesse/pression  $(\mathbf{q}, p)$  est déterminée, nous pouvons tracer la moyenne selon  $x$  des pressions  $p(y)$ , et ce pour les deux configurations  $K_a$  et  $K_b$  (respectivement figure 3.14 et 3.15, page 91).

Les pertes de charges résolues numériquement dans le milieu poreux de référence sont identiques à celles calculées à l'aide de la loi de Darcy (3.6).



**Figure 3.14** – Champs de pression selon  $y$  dans un milieu poreux de référence de perméabilité  $K_a$  en écoulement établi. La perte de charge observée numériquement est de  $\Delta p_a = 1,545 \text{ Pa}$ .



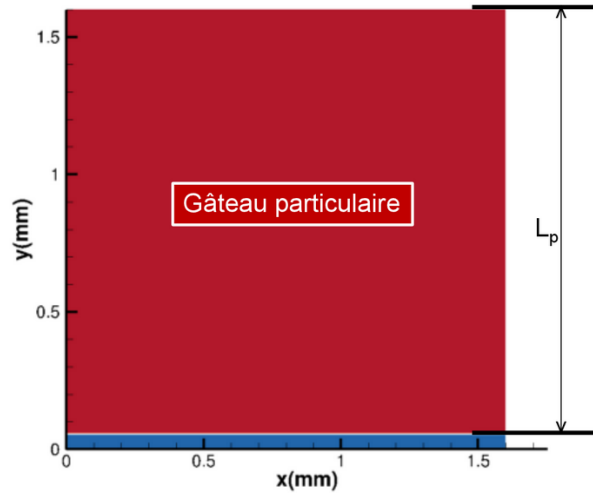
**Figure 3.15** – Champs de pression selon  $y$  dans un milieu poreux de référence de perméabilité  $K_b$  en écoulement établi. La perte de charge observée numériquement est de  $\Delta p_b = 4,2916 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

Les résultats numériques et théoriques étant identiques, nous en déduisons que le modèle de Navier-Stokes/Brinkman est correctement implémenté dans le code de calcul Thetis. Le modèle développé permet de correctement retranscrire la physique observée lors du couplage entre un écoulement libre et un écoulement en milieu poreux de type darcéen. Ainsi, les vitesses résolues dans l'écoulement libre (vitesses réelles) et dans le milieu poreux (vitesses de Darcy) sont correctement couplées au niveau de l'interface entre milieu poreux et le fluide. La stratégie de modélisation des milieux poreux dans le code de calcul Thetis nous permet de parfaitement retranscrire la physique de compaction particulaire observée dans le procédé Slurry Cast/APS car le gâteau particulaire créé peut être vu comme un milieu poreux darcéen.

### 3.2.2 Prise en compte du gâteau particulaire comme un milieu poreux

A la lumière de ces observations, il est nécessaire d'effectuer ce même test non plus sur un milieu poreux de référence, mais directement sur le gâteau particulaire. Le but étant de valider la physique complexe de la compaction particulaire : la création d'un gâteau particulaire pouvant être vue comme un milieu poreux darcéen dynamique, agissant comme un filtre vis-à-vis du fluide saturant et comme un obstacle vis-à-vis des particules de la suspension.

Pour cela, le modèle de Phillips (2.22) et (2.23) est réintroduit et couplé aux équations de Navier-Stokes/Brinkman (2.10) (2.11) (2.12) et (2.13). Le domaine de simulation n'est plus initialisé à l'aide d'un milieu poreux de référence, mais comme un milieu libre avec une suspension de concentration initiale  $\phi_0^s = \phi_c^s$  (figure 3.16). On génère alors un gâteau particulaire formé de particules sphériques dans un agencement compact, dont la perméabilité  $K_c = 3,6 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2$  est donnée par la relation de Kozeny-Carman (2.4). Pour vérifier que le gâteau particulaire est parfaitement considéré comme un milieu poreux, nous pourrions utiliser les résultats du cas n°1 précédent avec la perméabilité  $K_b$ . L'ensemble des conditions aux limites appliquées dans cette étude numérique d'écoulement dans le gâteau particulaire est référencé dans le tableau 3.5.

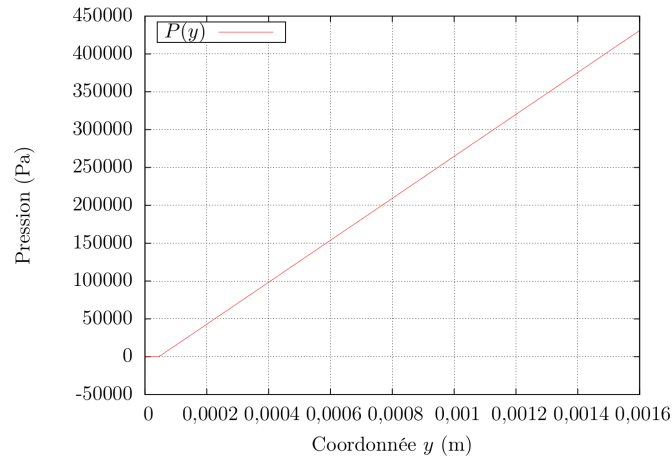


**Figure 3.16** – Cas d'étude n°2 : initialisation du domaine comme un gâteau particulaire. Vérification de la prise en compte du gâteau particulaire comme un obstacle poreux. Le filtre est caractérisé par la zone bleue.

**Table 3.5** – Ensemble des conditions limites appliquées pour la simulation de l'écoulement dans le gâteau particulaire.

| Limite     | Condition Limite en Vitesse                             | Condition Limite en Espèce    |
|------------|---------------------------------------------------------|-------------------------------|
| Supérieure | Constante : $u_{x0} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ | Constante : $\phi_0^s \neq 0$ |
| Inférieure | Neumann                                                 | Neumann                       |
| Gauche     | Symétrie                                                | Neumann                       |
| Droite     | Symétrie                                                | Neumann                       |

Au vue des limites appliquées dans cette simulation, l'écoulement se fait du haut vers le bas avec des conditions de symétrie sur les côtés. De plus, il a été choisi de fixer une condition d'injection non nulle sur la fraction volumique. De ce fait, nous vérifions qu'au cours du temps, aucune particule ne pénètre dans le gâteau particulaire. Cette condition nous a permis de vérifier que le gâteau était bien perméable au fluide saturant et imperméable aux particules. Ainsi que nous le verrons dans la prochaine section, le gâteau a donc une structure interne fixe et ne se comprime pas au cours du temps. Ainsi, en procédant comme dans le cas n°1, *i.e.*, en traçant la moyenne selon  $x$  des pressions  $p(y)$  une fois qu'une solution stationnaire du couple  $(q, p)$  déterminée, nous vérifions alors que la perte de charge calculée numériquement est exactement égale à la valeur théorique attendue (figure 3.17).



**Figure 3.17** – Champs de pression selon  $y$  dans le gâteau particulaire en écoulement établi. La perte de charge observée est de  $\Delta p = 4,2916 \cdot 10^5$  Pa.

Ces travaux sur la détermination du couple vitesse/pression  $(q, p)$  dans un milieu poreux de référence et dans notre gâteau particulaire nous ont permis de montrer deux choses. Dans un premier temps, en travaillant sur un milieu poreux de référence - tel qu'il est implémenté dans le code de calcul Thétis - avec un écoulement fluide non chargé en particules, nous avons démontré que le modèle Navier-Stokes/Brinkman couplant écoulement libre et écoulement en milieu poreux était pertinent et représentatif de la physique de notre procédé. Dans un deuxième temps, en simulant numériquement l'écoulement d'un fluide chargé dans le gâteau particulaire, nous avons démontré la validité du modèle de création du gâteau particulaire et des effets de filtration qui en découlent.

Cependant, ces travaux sur la validation de la compaction particulaire sont incomplets. En effet, seule la partie statique du problème de compaction particulaire, et donc seuls les effets de filtration ont été abordés. Or, le gâteau particulaire formé dans le procédé Slurry Cast/APS est évolutif, car la suspension filtrée au travers de celui-ci est elle aussi constituée de particules. Ainsi, la forme du gâteau particulaire est en constante évolution et nécessite donc d'être étudiée d'un point de vue dynamique. Ces travaux doivent donc être complétés d'une étude de validation de la dynamique de formation du gâteau particulaire. C'est l'objet de la prochaine section qui s'appuie sur les travaux de [Belfort et al., 1994].

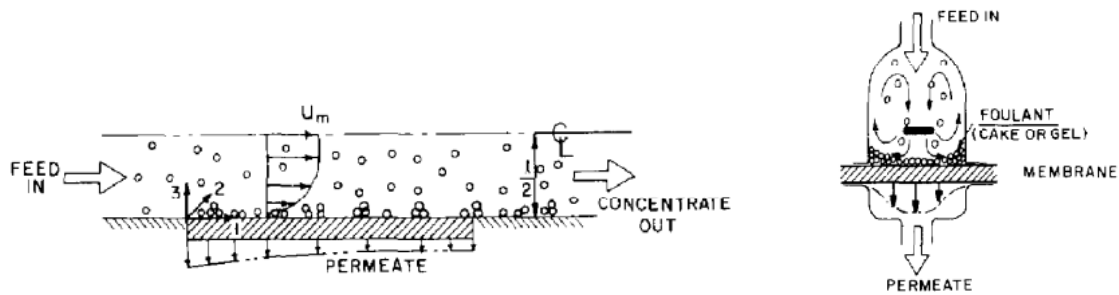


### 3.3 Validation de la compaction particulaire

Afin de terminer ce chapitre sur la validation du modèle, il est nécessaire de valider l'évolution de ce gâteau particulaire. Dans ce but, nous avons décidé de nous rapprocher des expériences sur la microfiltration, car ils s'apparentent à notre procédé Slurry-Cast APS. De nombreux travaux dans la littérature font référence à des travaux sur la microfiltration aussi bien d'un point de vue théorique qu'expérimental. Nous pouvons citer par exemple les travaux de [Belfort et al., 1994], [Bürger et al., 2001], [Kim and Hoek, 2002] ou [Vollebregt et al., 2010].

#### 3.3.1 Problématique de microfiltration

Dans cette partie sur la validation de l'évolution du gâteau particulaire, les travaux de [Belfort et al., 1994] s'avèrent très intéressants de par la richesse des mécanismes évoqués (ségrégation particulaire, loi rhéologique, perméabilité du gâteau particulaire, ...). De plus, ces travaux abordent aussi bien la problématique de la microfiltration transversale que de la filtration frontale (voir figure 3.18).



**Figure 3.18** – Schéma des différents procédés de microfiltration : microfiltration transversale (gauche) et microfiltration frontale (droite). [Belfort et al., 1994]

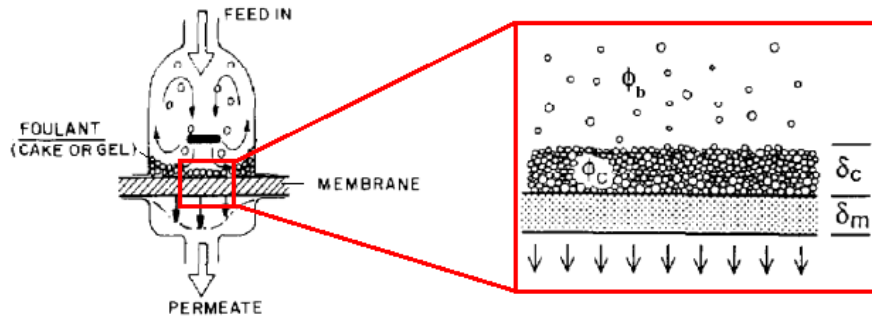
En se focalisant sur le procédé de microfiltration frontale (figure 3.18 (droite)), on remarque que le procédé Slurry Cast/APS est très comparable. En effet, il s'agit d'un écoulement frontal au travers d'une membrane d'un fluide chargé en particules dont la taille varie de  $0,1\text{--}20\text{ }\mu\text{m}$ , alors que celles utilisées dans notre procédé ont une taille moyenne de  $0,8\text{ }\mu\text{m}$ . De plus, l'écoulement est piloté à l'aide d'une différence de pression  $\Delta p = 100\text{--}300\text{ kPa}$ , qui peut être rapprochée des pressions mises en jeu dans le procédé Slurry Cast/APS (cf section 1.4).

Le point intéressant de cet article se trouve dans l'établissement d'une loi de croissance du gâteau particulaire. En effet, en se plaçant dans le cadre de la microfiltration frontale à gradient de pression imposé, ces travaux présentent la loi d'évolution de l'épaisseur d'un gâteau particulaire 1D. Bien que l'annexe C s'attache à présenter méthodiquement et en détails toutes les étapes permettant l'établissement d'une telle loi, il est nécessaire de présenter ici quelques étapes clés. Enfin, pour dépasser les travaux de [Belfort et al., 1994], nous nous proposons ici d'établir également la loi de croissance particulaire dans le cas où l'écoulement est piloté par un débit imposé, ceci afin de couvrir complètement le spectre des conditions opératoires utilisées dans notre procédé.

### 3.3.2 Loi d'évolution du gâteau particulaire

Avant de mettre en place la loi d'évolution du gâteau particulaire 1D dans un procédé de type microfiltration frontale (figure 3.19), il est nécessaire de lister toutes les variables utilisées. Nous considérons ainsi :

1.  $\delta_m$  l'épaisseur de la membrane.
2.  $\delta_c(t)$  l'épaisseur du gâteau particulaire.
3.  $\Delta p$  le gradient de pression imposé.
4.  $\mu_0$  la viscosité du fluide saturant de la suspension.
5.  $\phi_c^s$  la fraction volumique de poudre dans le gâteau particulaire.
6.  $\phi_b^s$  la fraction volumique de poudre dans la suspension à filtrer.
7.  $R_m$  la résistance à l'écoulement de la membrane,  $R_m = \delta_m / K_m$ .
8.  $R_c$  la résistance à l'écoulement du gâteau particulaire,  $R_c = \hat{R}_c \delta_c$ .



**Figure 3.19** – Schéma de la superposition d'un gâteau particulaire 1D et d'une membrane dans un procédé type microfiltration frontale.

La figure 3.19 montre que la membrane et le gâteau particulaire peuvent être vus comme deux résistances à l'écoulement, disposées en série. Ainsi, en se plaçant dans un premier temps dans un écoulement piloté par un gradient de pression imposé, alors le flux de filtration  $J$ , d'un fluide de viscosité  $\mu_0$  au travers du système membrane + gâteau, peut alors être décrit par la loi de Darcy et vaut :

$$J = \frac{\Delta p}{\mu_0 (R_m + R_c)} \quad (3.9)$$

Dans cette équation, la résistance du gâteau  $R_c = \hat{R}_c \delta_c$  utilise la grandeur  $\hat{R}_c$  qui caractérise sa résistance par unité de surface. Elle est calculée à l'aide de la relation de Kozeny-Carman (2.4) et est à rapprocher de l'inverse de la perméabilité qui a été utilisée dans la section précédente.

A l'aide de ce flux de filtration, nous pouvons effectuer un bilan de particules à la frontière entre le gâteau et la suspension à filtrer :

$$\left( J + \frac{d\delta_c}{dt} \right) \phi_b^s = \phi_c^s \frac{d\delta_c}{dt} \quad (3.10)$$

La loi de croissance du gâteau particulaire est alors l'évolution temporelle de l'épaisseur  $\delta_c(t)$ , solution de l'équation différentielle (3.11) obtenue en combinant les équations (3.9) et (3.10) avec une condition initiale nulle :

$$\begin{cases} \frac{d\delta_c}{dt} = \frac{\phi_b^s J}{(\phi_c^s - \phi_b^s)} = \frac{\phi_b^s \Delta p}{(\phi_c^s - \phi_b^s) \mu_0 (R_m + \hat{R}_c \delta_c)} \\ \delta_c(0) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Afin de résoudre simplement cette équation différentielle, quelques hypothèses sont nécessaires :

- $\Delta p$  est constant.
- $R_m$  est constant : pas d'écrasement ni d'encrassement de la membrane.
- $\phi_c^s$  et  $\hat{R}_c$  sont constants : pas de compression du gâteau particulaire.
- $\phi_b^s$  est constant : aucune variation de la concentration de la suspension.

Elles permettent ainsi d'établir la loi de croissance du gâteau particulaire lors d'un procédé de microfiltration frontale à gradient de pression imposé :

$$\delta_c(t) = \frac{R_m}{\hat{R}_c} \left[ \left( 1 + \frac{2t \hat{R}_c \phi_b^s \Delta p}{(\phi_c^s - \phi_b^s) \mu_0 R_m^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (3.12)$$

Afin d'aller plus loin que les résultats présentés dans les travaux de [Belfort et al., 1994], nous proposons ici de déterminer également la loi de croissance du gâteau particulaire lors d'un procédé de microfiltration frontale à débit imposée. Pour cela, il est nécessaire de redéfinir le flux de filtration  $J$ , qui dans ces nouvelles conditions s'écrit simplement comme :

$$J = \|\mathbf{q}\| \quad (3.13)$$

où  $\mathbf{q}$  est la valeur de la vitesse de filtration imposée. Ainsi, en utilisant la même démarche que précédemment, l'équation différentielle sur l'épaisseur du gâteau  $\delta_c(t)$  s'écrit simplement comme :

$$\begin{cases} \frac{d\delta_c}{dt} = \frac{\phi_b^s J}{(\phi_c^s - \phi_b^s)} = \frac{\phi_b^s \|\mathbf{q}\|}{(\phi_c^s - \phi_b^s)} \\ \delta_c(0) = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

En effectuant une intégration temporelle et en utilisant la condition initiale nulle, on obtient alors la loi de croissance du gâteau particulaire lors d'un procédé de microfiltration frontale à débit imposé :

$$\delta_c(t) = \frac{\phi_b^s \|\mathbf{q}\|}{(\phi_c^s - \phi_b^s)} t \quad (3.15)$$

Enfin, il peut aussi être intéressant de présenter ces lois d'évolution sous leur forme adimensionnée. Pour cela on introduit les variables sans dimension suivantes (notées \*) :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^* L_c, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}^* U_c, \quad t = t^* \frac{L_c}{U_c}, \quad p = p^* \frac{\mu U_c}{L_c}$$

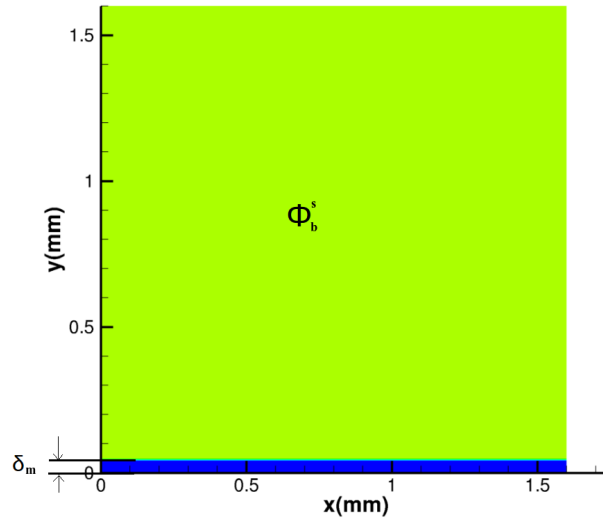
Après avoir déterminé les variables sans dimension  $L_c$  et  $U_c$ , l'adimensionnement des lois est directe (voir annexe D). L'expression adimensionnée de la loi de croissance à gradient de pression imposé (3.16) et à débit imposé (3.17) est alors :

$$\delta_c^* = \frac{R_m}{\hat{R}_c L_c} \left[ \left( 1 + \frac{2t^* \phi_b^s \hat{R}_c \Delta p^*}{(\phi_c^s - \phi_b^s) R_m^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (3.16)$$

$$\delta_c^* = \frac{\phi_b^s}{(\phi_c^s - \phi_b^s)} t^* \quad (3.17)$$

### 3.3.3 Mise en place de la simulation

Dans le but de conforter ces lois à nos résultats de simulation, il est nécessaire de se placer dans la même configuration que dans les travaux de [Belfort et al., 1994]. Le domaine de simulation sera donc un carrée de  $1,6 \text{ mm} \times 1,6 \text{ mm}$  (figure 3.20).



**Figure 3.20** – *Domaine d'étude pour la simulation de la croissance du gâteau. État initial de la suspension homogène (vert) et du filtre (bleu).*

Le maillage mis en place dans cette simulation est un maillage cartésien structuré comportant  $N_x \times N_y$  éléments. Étant donné que le phénomène de compaction étudié est seulement 1D et dirigé selon  $\mathbf{y}$ , seul le choix du nombre d'élément  $N_y$  influera sur la qualité des résultats. Afin d'étudier cette influence, trois discrétisations successives de cette direction sont mises en place pour  $N_{y1} = 80$ ,  $N_{y2} = 160$  et  $N_{y3} = 320$  éléments. Les maillages utilisés dans cette étude seront donc :

$$\Delta y_1 = L_y / N_{y1} = 2.10^{-5} \text{ m} \quad (3.18)$$

$$\Delta y_2 = L_y / N_{y2} = 1.10^{-5} \text{ m} \quad (3.19)$$

$$\Delta y_3 = L_y / N_{y3} = 5.10^{-6} \text{ m} \quad (3.20)$$

Une fois la géométrie fixée, et afin de complètement paramétrer la simulation, il est nécessaire de déterminer les paramètres opératoires. Pour cela, une membrane d'épaisseur  $\delta_m = 4.10^{-5}$  m et de perméabilité fixée  $K_m = 1.10^{-15}$  m<sup>2</sup>, est placée en sortie de domaine (figure 3.20). Sa résistance à l'écoulement définie par  $R_m = \delta_m/K_m$  est donc de  $R_m = 4.10^{10}$  m<sup>-1</sup>. Le reste du domaine est rempli d'une suspension constituée d'eau distillée ( $\mu_0 = 1.10^{-3}$  Pa.s) et de particules réparties de telle sorte que la suspension ait une concentration  $\phi_b^s$  uniforme. Ainsi, au temps initial, les particules sont au niveau de la membrane et le gâteau n'est pas encore formé.

De plus, la résistance du gâteau particulaire par unité de surface  $\hat{R}_c$  est calculée à partir de la relation de Kozeny-Carman (2.4) comme évoqué dans la partie précédente. Au vu de la taille des particules et de la concentration  $\phi_c^s$  à laquelle se forme le gâteau particulaire dans notre modèle, cette résistance vaut  $\hat{R}_c = 2.7.10^{15}$  m<sup>-2</sup>.

Enfin, pour forcer un écoulement du haut vers le bas du domaine, il est nécessaire de fixer les conditions aux limites résumées dans les tableaux 3.6 et 3.7 correspondant respectivement à un écoulement piloté par un gradient de pression imposé ou par un débit imposé.

**Table 3.6** – *Ensemble des conditions limites appliquées pour la simulation de la croissance du gâteau particulaire. Écoulement à gradient de pression imposé.*

| Limite     | Pression          | Vitesse  | Espèce                 |
|------------|-------------------|----------|------------------------|
| Supérieure | Constante : $p_1$ | Neumann  | Constante : $\phi_b^s$ |
| Inférieure | Constante : $p_2$ | Neumann  | Neumann                |
| Gauche     | Libre             | Symétrie | Neumann                |
| Droite     | Libre             | Symétrie | Neumann                |

**Table 3.7** – *Ensemble des conditions limites appliquées pour la simulation de la croissance du gâteau particulaire. Écoulement à débit imposé.*

| Limite     | Pression | Vitesse              | Espèce                 |
|------------|----------|----------------------|------------------------|
| Supérieure | Libre    | Constante : $u_{y0}$ | Constante : $\phi_b^s$ |
| Inférieure | Libre    | Neumann              | Neumann                |
| Gauche     | Libre    | Symétrie             | Neumann                |
| Droite     | Libre    | Symétrie             | Neumann                |

### 3.3.4 Résultats des simulations

Afin de s'affranchir de la valeur du gradient de pression ou du débit imposé dans la simulation, tous les résultats de cette partie seront présentés sous leur forme adimensionnée. Les lois de croissance théoriques utilisées ici seront les lois (3.16) et (3.17) déterminées dans la partie précédente et dans l'annexe D. Pour rappel, les grandeurs sans dimension sont notées à l'aide d'une \* et sont obtenues de la manière suivante :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^* L_c, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}^* U_c, \quad t = t^* \frac{L_c}{U_c}, \quad p = p^* \frac{\mu U_c}{L_c}$$

Les grandeurs  $L_c$  et  $U_c$ , utilisées dans l'adimensionnement, sont définies respectivement comme l'épaisseur maximale du gâteau particulaire et la vitesse au temps initial :

$$L_c = L_y - \delta_m$$

Hauteur du domaine moins l'épaisseur de la membrane.

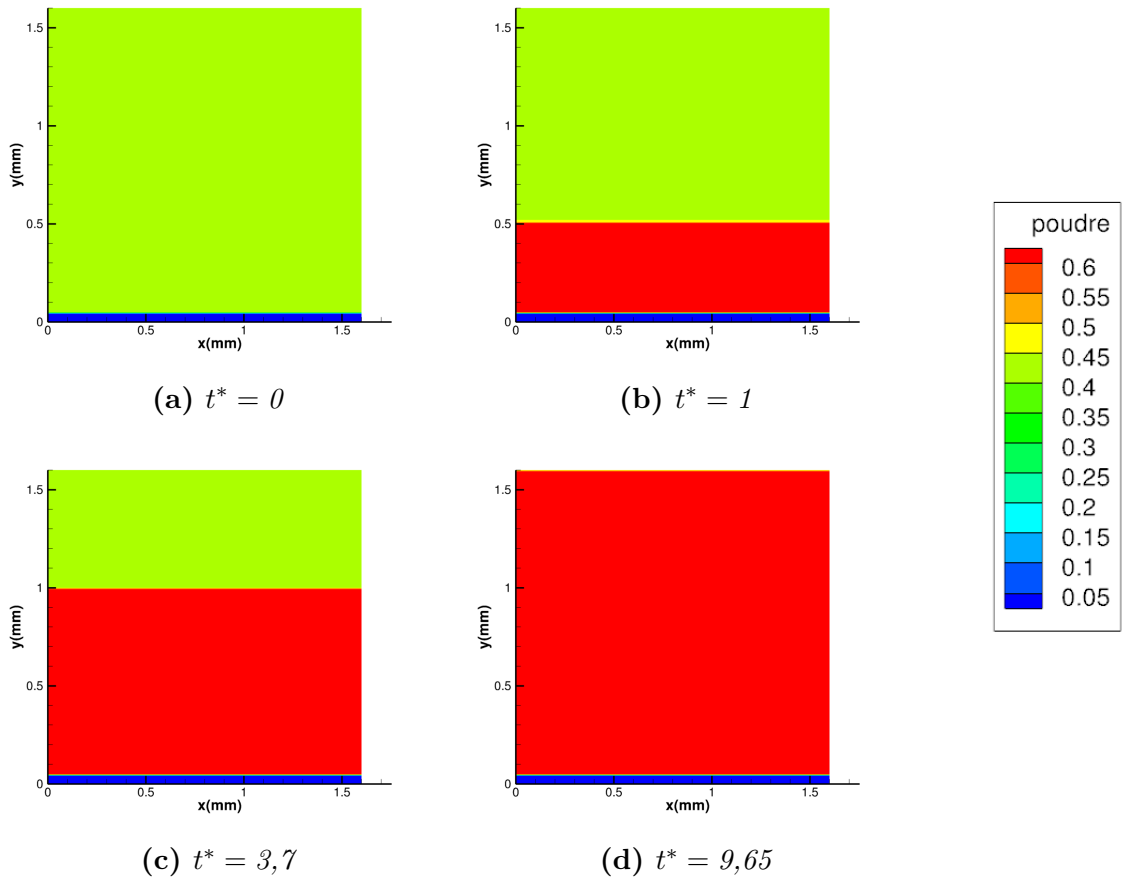
$$U_c = \frac{\Delta p}{\mu_0 R_m}$$

Pour un écoulement à gradient de pression imposé.

$$U_c = \|\mathbf{q}\|$$

Pour un écoulement à débit imposé.

Afin d'illustrer graphiquement l'évolution temporelle du gâteau particulaire lorsque l'écoulement est piloté par un gradient de pression, on peut se placer dans le cas d'une suspension initialement homogène à  $\phi_b^s = 0,45$  (3.21) avec un maillage  $\Delta x \times \Delta y_2$  régulier. Pour bien comprendre ces visualisations, nous pouvons nous rapprocher de la figure 3.20. La zone verte correspond à la suspension à filtrer et la partie rouge correspond au gâteau particulaire. De plus, l'écoulement étant du haut vers le bas, il est naturel d'avoir une dynamique de compaction dans l'autre sens.



**Figure 3.21** – Évolution temporelle de la fraction volumique de poudre. Visualisation de la croissance du gâteau particulaire dans un écoulement piloté par un gradient de pression constant  $\Delta p$ , pour une suspension homogène à  $\phi_b^s = 0,45$ .

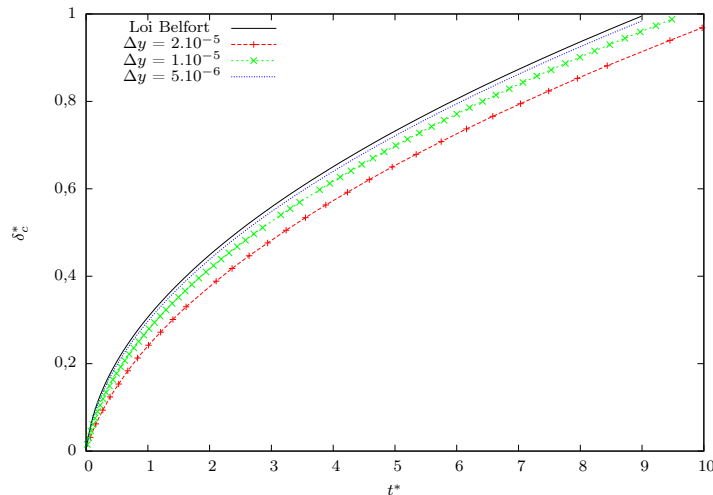
La première constatation graphique pouvant être donnée concerne la vitesse de croissance du gâteau particulaire, qui semble ralentir. En effet, la compaction d'un tiers du domaine ne nécessite qu'une unité temporelle (figure 3.21b) tandis que le deuxième tiers en nécessite presque trois de plus (figure 3.21c). Cette constatation s'accroît sur le dernier tiers, qui nécessite lui six unités temporelles pour être entièrement compacté. L'épaisseur du gâteau particulaire semble donc bien être une fonction en  $\sqrt{t}$ .

De surcroît, l'utilisation d'un modèle de suivi des particules via une grandeur homogénéisée (la fraction volumique de poudre  $\phi^s$ ) implique que la frontière entre le gâteau particulaire et la suspension ne se trouve que dans une maille  $\Delta x \times \Delta y$  (cf sous-section 2.1.4 et annexe E). Toute la physique du phénomène de compaction étant contenue dans une maille, elle est nécessairement dépendante du maillage choisi. L'utilisation de mailles trop grosses, et donc d'un maillage trop grossier, générera des erreurs importantes. C'est la raison pour laquelle plusieurs discrétisations, et donc hauteurs de maille  $\Delta y$  ont été étudiées. L'idée est de quantifier l'erreur commise par rapport à la loi théorique en fonction du maillage utilisé afin de vérifier que notre modèle converge spatialement.

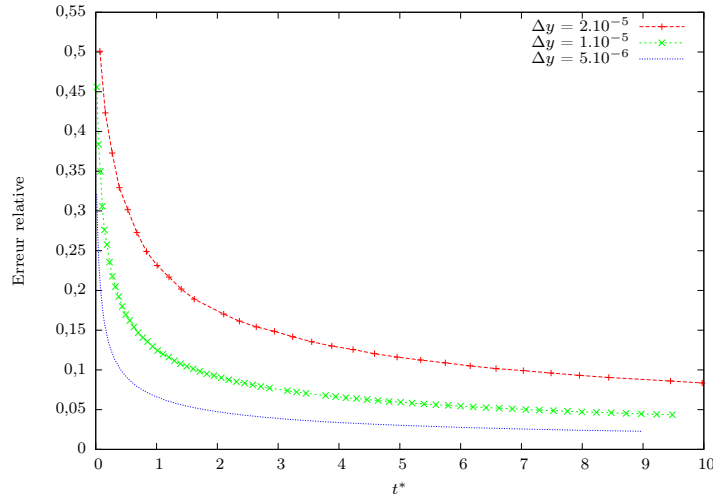
Dans un premier temps, l'étude porte sur la dynamique de croissance du gâteau particulaire dans le cas d'un écoulement piloté par un gradient de pression. Pour rappel, la loi théorique adimensionnée déterminée à l'aide des travaux de [Belfort et al., 1994] prend la forme suivante :

$$\delta_c^* = \frac{R_m}{\hat{R}_c L_c} \left[ \left( 1 + \frac{2t^* \phi_b^s \hat{R}_c \Delta p^*}{(\phi_c^s - \phi_b^s) R_m^2} \right)^{1/2} - 1 \right]$$

Nous pouvons, en relevant numériquement l'épaisseur de notre gâteau particulaire (voir annexe E), comparer les résultats des simulations pour les trois maillages différents à ceux obtenus avec la loi théorique (figure 3.22). De plus, le calcul de l'erreur relative entre la hauteur calculée numériquement et théoriquement nous permet de déterminer la sensibilité au maillage (figure 3.23, page 101).



**Figure 3.22** – Épaisseur du gâteau particulaire  $\delta_c$  en fonction du temps pour trois discrétisations spatiales différentes dans le cas d'un écoulement d'une suspension de concentration  $\phi_b^s = 0,45$ , à gradient de pression imposé. Comparaison adimensionnée avec la loi de Belfort théorique.



**Figure 3.23** – *Erreur relative sur l'épaisseur du gâteau particulaire calculée numériquement et avec la loi de Belfort. Étude pour trois différentes discrétisations spatiales dans le cas d'un écoulement d'une suspension de concentration  $\phi_b^s = 0,45$ , à gradient de pression imposé.*

Dans le cas du maillage le plus grossier, l'erreur commise est de l'ordre de 10%, alors qu'avec le maillage le plus fin elle n'est que de 2%. Cet écart s'explique facilement par la construction même du modèle. En effet, une maille n'est affectée d'une perméabilité que lorsqu'elle est entièrement remplie par le gâteau particulaire. Ainsi, les effets de filtration ne sont pas pris en compte proportionnellement à la hauteur du front particulaire, mais maille par maille. Plus celles-ci sont grosses, plus le temps nécessaire à leur remplissage par le gâteau augmente, plus l'erreur commise augmente.

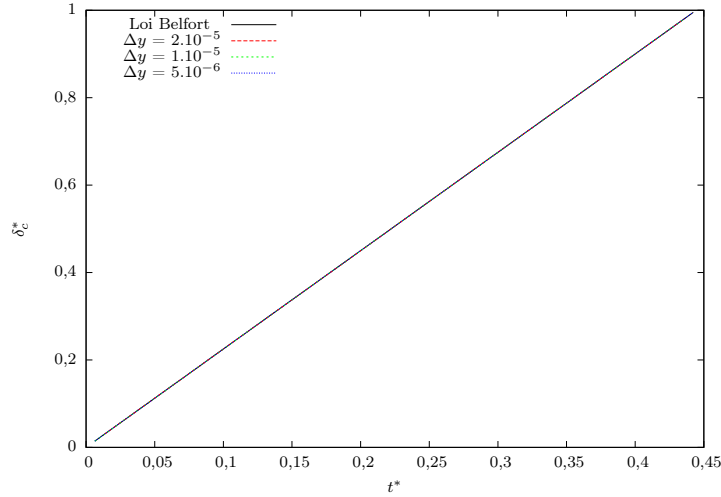
Cependant, même si les résultats obtenus avec le maillage le plus grossier sont à exclure, ceux obtenus avec un maillage intermédiaire ( $\Delta y = 1.10^{-5}\text{m}$ ), et avec un maillage fin ( $\Delta y = 5.10^{-6}\text{m}$ ) sont très concluants. La hauteur du front de gâteau est correctement capturée avec une erreur comprise entre 5% et 2%. Nous observons une convergence en maillage (*cf* figure 3.23) car l'erreur diminue si le pas d'espace  $\Delta y$  diminue.

La dynamique d'accumulation d'un front particulaire 1D dans un écoulement piloté par un gradient de pression est très bien résolue par le modèle numérique mis en place. Pour dépasser les travaux de [Belfort et al., 1994], une deuxième loi a précédemment été exhibée, et ceci dans le cas d'un écoulement à débit imposé. L'expression adimensionnée de cette loi est rappelée ci dessous :

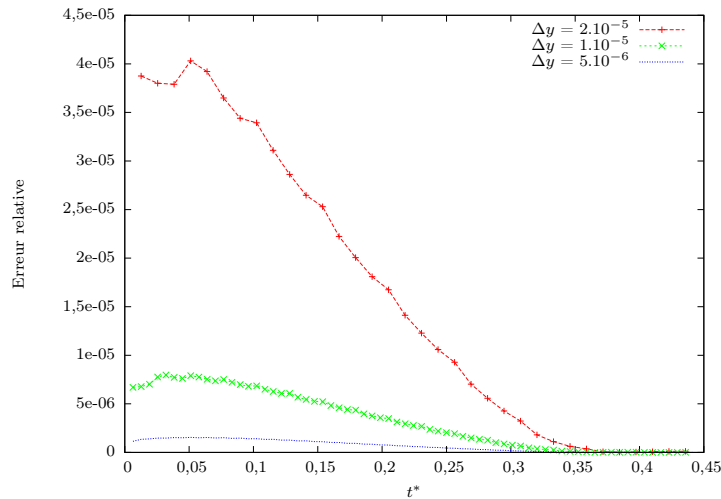
$$\delta_c^* = \frac{\phi_c^s}{(\phi_c^s - \phi_b^s)} t^*$$

Contrairement au cas précédent, cette loi est beaucoup plus simple puisque linéaire en temps. De la même manière que pour le cas précédent, nous pouvons tracer les évolutions de l'épaisseur  $\delta_c^*$  en fonction du temps adimensionné  $t^*$  dans le cas d'un écoulement à débit imposé, et ceci pour les trois maillages utilisés (figure 3.24, page 102). Les erreurs commises, pour chaque maillage, entre les résultats des simulations et la loi théorique sont résumées dans la figure 3.25, page 102.





**Figure 3.24** – Épaisseur du gâteau particulaire  $\delta_c$  en fonction du temps pour trois discrétisations spatiales différentes dans le cas d'un écoulement d'une suspension de concentration  $\phi_b^s = 0,45$ , à débit imposé. Comparaison adimensionnée avec la loi de Belfort théorique.



**Figure 3.25** – Erreur relative sur l'épaisseur du gâteau particulaire calculée numériquement et avec la loi de Belfort. Étude pour trois discrétisations spatiales différentes dans le cas d'un écoulement d'une suspension de concentration  $\phi_b^s = 0,45$ , à débit imposé.

Les résultats obtenus sont très proches de la solution théorique, et ce pour les trois maillages étudiés. Deux explications peuvent être données concernant la différence de précision des résultats entre les deux types d'écoulement étudiés (pression imposée et vitesse imposée). D'abord, d'un point de vue théorique, la dynamique de croissance mise en jeu dans le cas d'un écoulement à débit imposé est beaucoup plus simple puisque linéaire. Ensuite, l'écoulement complexe est résolu à l'aide des équations de Navier-Stokes (2.10) et (2.11) couplées au modèle de Brinkman (2.12). Les méthodes de résolution de ce modèle (*cf* chapitre 2, section 2.3), telles que la pénalisation des obstacles, le couplage vitesse/pression, etc, utilisent prioritairement la vitesse et non la pression.

Ainsi, même s'il est possible d'imposer numériquement des conditions de pression, il est plus naturel d'imposer un débit. En traduisant d'un point de vue numérique, cela signifie qu'au vu des stratégies retenues lors de la construction du code, l'erreur commise en imposant un gradient de pression sera plus grande que celle commise pour un débit imposé.

La physique de la compaction est très complexe de par l'ensemble des mécanismes mis en jeu : perméabilité de la membrane, filtration et dynamique du gâteau, couplage entre un écoulement libre et un écoulement en milieu poreux, etc. La comparaison entre nos résultats de simulation et une loi obtenue à l'aide des travaux de [Belfort et al., 1994] nous a permis de constater que le modèle développé dans cette thèse retranscrivait très fidèlement cette physique. Ainsi, que ce soit pour un écoulement piloté à l'aide d'un gradient de pression imposé ou à l'aide d'un débit imposé, la dynamique de croissance du gâteau particulaire et les effets de filtration qui en découlent, sont correctement modélisés par l'ensemble des équations du modèle développé.

## 3.4 Conclusions

L'objectif de ce chapitre était de présenter les résultats de validation du modèle final (2.28). Celui-ci étant très complexe, cette étape de validation a été divisée en deux sous-étapes bien distinctes.

Ainsi, dans le but d'éprouver les résultats concernant la seule ségrégation particulaire, nous sommes rapproché dans un premier temps des résultats expérimentaux et numériques présentés dans les travaux de Hampton [Hampton et al., 1997]. A la lumière de ceux-ci, nous avons démontré que le modèle final d'équations implémenté dans le code de calcul Thétis, retranscrivait très fidèlement à l'échelle macroscopique, le transport et la diffusion de particules microscopiques et libres en suspension. De plus, nous avons également montré que la modélisation de cette ségrégation était améliorée via l'introduction de la condition limite spécifique aux parois solides (2.21). En effet, comparativement au modèle de Phillips originel, l'annulation du flux de particules au travers des solides imperméables modélise plus finement les phénomènes de diffusion particulaire (*cf* figure 3.7, page 84).

Dans un second temps, la croissance du gâteau particulaire et les effets de filtration qui en découlent ont été étudiés. Après avoir vérifié que le couplage entre les équations de Navier-Stokes et de Brinkman était correctement implémenté dans le code Thétis, nous avons vérifié que la dynamique du gâteau particulaire était bien modélisée. Pour cela, nos résultats de simulation sur l'évolution temporelle de l'épaisseur du gâteau ont été comparés à la loi analytique déterminée dans les travaux de [Belfort et al., 1994]. De plus, nous avons démontré que les résultats sur la croissance du gâteau convergent spatialement. Ainsi, l'utilisation d'une discrétisation spatiale relativement grossière ( $10^{-5}$  m), assure une bonne modélisation de la compaction particulaire

Pour conclure ce chapitre, nous pouvons dire que le modèle final d'équation (2.28) a été entièrement validé. Il peut désormais être utilisé pour modéliser des écoulements de suspensions chargées dans des configurations géométriques et expérimentales proches du procédé Slurry Cast/APS.



# Chapitre 4

## Simulations numériques du procédé APS

Le modèle final d'équations (2.28), défini dans le chapitre 2, a été pleinement validé au cours du chapitre 3. Il modélise très fidèlement l'écoulement d'une suspension chargée en particules dans une préforme fibreuse, comme celui rencontré dans le procédé Slurry Cast/APS. Son utilisation, dans une étude numérique est alors pleinement justifiée, et doit permettre de répondre à l'ensemble des questionnements de SAFRAN Ceramics concernant ce procédé de densification (*cf* sous-section 1.4.5).

Dans le but d'y répondre, trois études numériques différentes ont été développées dans cette thèse.

1. Une étude paramétrique en 2D, sur une configuration géométrique idéalisée.
2. Une étude en 2D sur des configurations géométriques et opératoires proches du procédé APS.
3. Une étude en 3D sur une configuration de tissage de type satin, et des conditions opératoires proches du procédé.

La première étude a pour principal objectif de quantifier l'influence des paramètres opératoires ( $\Delta p$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\phi_0^s$ , ...) sur la taille des macroporosités observées à la fin du procédé Slurry Cast/APS (*cf* sous-section 1.4.4) [Marchais, 2016].

Dans le cas de l'étude numérique 2D, l'idée est de vérifier que la solution numérique du modèle, concernant la taille et la localisation des macroporosités, converge en espace. En d'autres termes, l'objectif de l'étude n°2 est d'observer que les macroporosités résolues sont indépendantes du maillage utilisé, à conditions opératoires fixées et dans une configuration géométrique proche du matériau réel.

Enfin, la troisième et dernière étude, est la simulation du procédé d'imprégnation en trois dimensions. Les préformes utilisées par SAFRAN Ceramics relevant du secret industriel, cette étude est menée sur une préforme classique de type satin. L'objectif d'une telle simulation est double, car, en plus de tester la robustesse du code de calcul, elle permet d'évaluer l'influence des effets 3D (comme la tortuosité) sur les observations 2D précédentes.

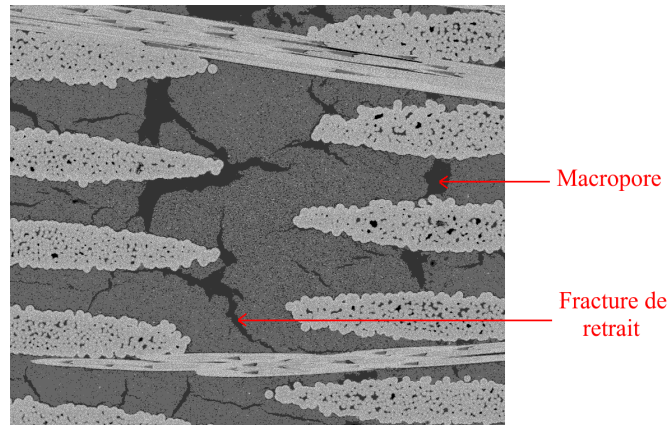
La structure de ce chapitre correspond ce découpage et présente ces trois études numériques dans trois sections consécutives.

## 4.1 Étude paramétrique 2D

### 4.1.1 Objectifs de l'étude

Le matériau composite, développé par SAFRAN Ceramics, est utilisé pour la fabrication d'une pièce hautement stratégique de moteur d'avion. Cette pièce étant soumise à de fortes contraintes thermiques et mécaniques, l'industriel a développé un procédé de fabrication complexe, utilisant un tissage 3D du renfort fibreux. Dans le but de réduire au maximum la porosité résiduelle finale de la pièce, et ainsi assurer son intégrité de fonctionnement, la densification de ce renfort a été découpée en deux étapes (*cf* section 1.4). La première consiste à injecter des particules dans le renfort afin de réduire la porosité apparente de l'espace inter-fils. Dans un deuxième temps, un métal fondu, réagissant éventuellement avec ces particules, est introduit par remontée capillaire. L'ensemble de la physique présente dans ces deux étapes est très complexe et difficile à appréhender. C'est la raison pour laquelle plusieurs travaux tant numériques (cette présente étude, [Pons, 2017]) qu'expérimentaux [Marchais, 2016] ont été mandatés par l'entreprise.

Cependant, les travaux expérimentaux ont révélé que, de l'homogénéité de la porosité présente à la fin de l'étape d'introduction des particules, dépend la qualité de la remontée capillaire du métal fondu. Or, de nombreuses études internes ont démontré que cette homogénéité n'était pas immédiate à la fin du procédé Slurry Cast/APS. En effet, comme le montre la figure 4.1, des macroporosités, ainsi que des fractures de retrait apparaissent entre les deux étapes de densification.



**Figure 4.1** – *Imagerie au MEB d'une coupe du matériau CMC après le procédé Slurry Cast et séchage. Observation de la création des macropores et fractures de retrait.*

Comme leur nom l'indique, les fractures de retrait apparaissent pendant l'étape de séchage suivant le procédé Slurry Cast/APS. Les travaux numériques de cette thèse n'étudiant que l'étape d'introduction des particules, sans l'étape de séchage, nous ne pourrions pas fournir d'explication sur les mécanismes à l'origine de l'apparition de ces fractures. Le modèle de suivi particulaire macroscopique mis en place peut cependant modéliser les macroporosités car leur taille est bien supérieure à la taille des particules, mais également à la résolution spatiale utilisée dans les simulations.

Au début de ces travaux, les mécanismes physiques à l'origine de la formation de ces macroporosités n'étaient pas connus, et les quelques expérimentations menées n'avaient pas fourni d'explication claire quant à leur présence. C'est la raison pour laquelle une telle étude a été développée. En effet, grâce à la description de l'ensemble de la physique présente dans ce procédé, ces travaux fournissent une explication à l'apparition de telles porosités. De plus, tant par la facilité de mise en place d'une simulation que par la rapidité des calculs (devant les expériences), un grand nombre de conditions opératoires peuvent être étudiées en peu de temps.

L'objectif d'une étude paramétrique du procédé APS, par l'utilisation des résultats numériques du modèle final, est donc double :

- expliquer les mécanismes de formation des macroporosités,
- quantifier l'influence des paramètres opératoires sur la taille de celles-ci.

Afin de mener à bien cette étude, il est nécessaire de lister l'ensemble des paramètres dont nous souhaitons étudier l'influence. Ici, quatre paramètres ont été retenus :

1. le gradient de pression  $\Delta p$  (si écoulement piloté par une pression imposée),
2. la vitesse d'injection  $\mathbf{u}$  (si écoulement piloté par un débit imposé),
3. la concentration initiale de la suspension injectée  $\phi_0^s$ ,
4. la taille des particules mises en suspension.

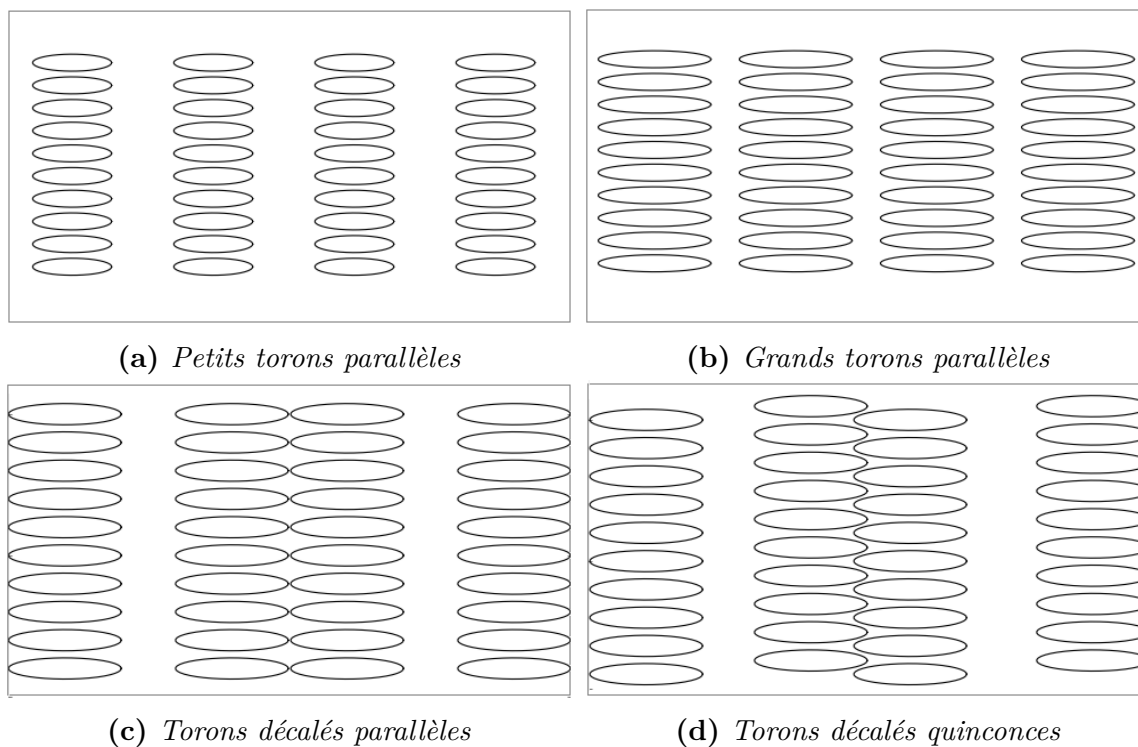
Les trois premiers paramètres sont évidents puisque ce sont les paramètres primaires utilisés dans le procédé. Le dernier paramètre n'est pas immédiat, mais trouve son sens dans les phénomènes de diffusion particulaire. En effet, nous avons vu au chapitre 2, que la taille des particules influait sur la diffusion (modèle de Phillips, sous-section 2.1.2). En jouant sur ce paramètre, nous quantifions l'effet de la diffusion sur la taille des macroporosités.

Une fois les paramètres déterminés, une méthodologie caractéristique de cette étude doit être mise en place. Celle-ci est présentée dans la sous-section suivante.

### 4.1.2 Méthodologie de l'étude

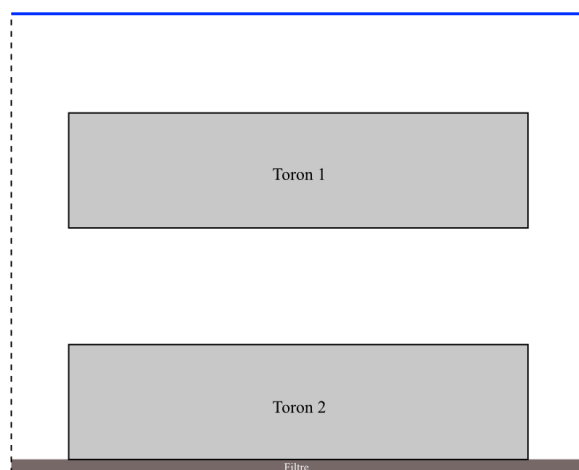
Comme évoqué précédemment, les techniques de tressage pour le matériau utilisé dans cette étude génèrent la création d'un CMC possédant une préforme fibreuse fortement anisotrope. La disposition des fils évolue énormément dans le matériau. Si nous assimilons la coupe d'un fil à un toron, alors différentes formes se retrouvent dans la même pièce : de presque rectangulaires à très allongées. Les rangées de torons peuvent être soit parfaitement parallèles les unes par rapport aux autres, soit plus ou moins espacées. Dans certaines configurations, un chevauchement peut même être observé. Une schématisation non exhaustive d'exemples de répartitions spatiales de torons pouvant être rencontrées dans la pièce est résumé sur la figure 4.2.

Ces différences de répartition des torons ne sont *a priori* pas anodines vis-à-vis des macroporosités puisqu'elles perturbent fortement l'écoulement de la suspension. La disposition des fils aura donc un effet sur la saturation du milieu en particules. Pour un même nombre de rangées et de torons, les macroporosités ne seront pas identiques d'une configuration à une autre (*cf* section 4.2).



**Figure 4.2** – Exemples de configurations géométriques de torons, rencontrées dans la pré-forme fibreuse utilisée dans ces travaux. Vue selon une coupe 2D.

Dans cette étude paramétrique, nous ne souhaitons étudier que l'influence des paramètres opératoires. Il est donc absolument nécessaire de fixer une configuration géométrique de torons, avant de mener à bien cette paramétrisation. Cette configuration géométrique de référence doit être simple, et assurer la génération de macroporosités. Elle se compose de deux torons rectangulaires parfaitement alignés verticalement dont un est accolé au filtre à particules (*cf* figure 4.3). L'écoulement est piloté soit par un gradient de pression soit par un débit, et s'effectue, en 2D, du haut vers le bas.



**Figure 4.3** – Schématisation de la configuration géométrique 2D retenue pour l'étude paramétrique. Les torons sont modélisés par des rectangles dont un est posé sur le filtre à particules.

Afin d'étudier l'influence des paramètres opératoires  $(\Delta p, \mathbf{u}, \phi_0^s)$ , nous devons définir un certain nombre de cas tests. Tous ces cas devant balayer l'ensemble des conditions opératoires présentes dans le procédé Slurry Cast/APS (*cf* tableau 1.2, section 1.4). Dans ce but, nous étudions l'écoulement de cinq suspensions, initialement chargées à différentes concentrations en poudre  $\phi_0^s$ , sous cinq conditions opératoires différentes :

- 3 cas de pression imposée  $\Delta p$ ,
- 2 cas de vitesse imposée  $\mathbf{u}$ .

En procédant de cette manière, l'ensemble des conditions opératoires utilisées en laboratoire, sont étudiées numériquement, aux travers de valeurs limites. De plus, en comparant tous les cas tests les uns aux autres, l'effet de chaque paramètre opératoire  $(\Delta p, \mathbf{u}, \phi_0^s)$  concernant la taille finale des macroporosités, peut être quantifié. L'ensemble des 25 cas tests mis en place dans cette étude paramétrique, sont résumés dans le tableau 4.1.

**Table 4.1** – *Conditions opératoires des 25 cas tests de l'étude paramétrique du procédé Slurry Cast/APS. Variation des paramètres concentration  $\phi_0^s$ , pression  $\Delta p$ , et vitesse  $\mathbf{u}$ .*

| $\phi_0^s$ | $\Delta p$ (bar) |           |           | $\mathbf{u}$ ( $m.s^{-1}$ ) |           |
|------------|------------------|-----------|-----------|-----------------------------|-----------|
|            | 0,8              | 1         | 8         | $10^{-6}$                   | $10^{-4}$ |
| 0,10       | cas n°1.0        | cas n°1.1 | cas n°1.2 | cas n°1.3                   | cas n°1.4 |
| 0,20       | cas n°2.0        | cas n°2.1 | cas n°2.2 | cas n°2.3                   | cas n°2.4 |
| 0,30       | cas n°3.0        | cas n°3.1 | cas n°3.2 | cas n°3.3                   | cas n°3.4 |
| 0,40       | cas n°4.0        | cas n°4.1 | cas n°4.2 | cas n°4.3                   | cas n°4.4 |
| 0,45       | cas n°5.0        | cas n°5.1 | cas n°5.2 | cas n°5.3                   | cas n°5.4 |

Enfin, une étude des paramètres de similitude (nombre de Reynolds et nombre de Péclet massique, *cf* section 2.2), assure qu'aucun cas test préalablement établi n'est redondant. En prenant l'exemple du nombre de Reynolds, d'expression  $Re = \frac{\rho L_c U_c}{\mu}$ , et en observant que ce nombre est maximal pour  $\phi^s = 0$ , car strictement décroissant en fonction du taux de charge  $\phi^s$  (*cf* annexe A), nous en déduisons que celui-ci est différent dans les cinq conditions d'écoulement (*cf* tableau 4.2). En prenant comme longueur de référence  $L_c$ , l'espace horizontal entre deux torons, cette valeur maximale est alors obtenue pour un écoulement de masse volumique  $\rho$ , et de viscosité  $\mu$  identiques à celles de l'eau.

**Table 4.2** – *Valeur maximale du nombre de Reynolds pour les 25 cas tests de l'étude paramétrique du procédé Slurry Cast/APS.*

|                      | $\Delta p$ (bar) |             |             | $\mathbf{u}$ ( $m.s^{-1}$ ) |               |
|----------------------|------------------|-------------|-------------|-----------------------------|---------------|
|                      | 0,8              | 1           | 8           | $10^{-6}$                   | $10^{-4}$     |
| $U_c$ ( $m.s^{-1}$ ) | $4.10^{-3}$      | $5.10^{-3}$ | $4.10^{-2}$ | $3,8.10^{-6}$               | $3,8.10^{-4}$ |
| $Re_{max}$           | $8.10^{-1}$      | 1           | 8           | $7,6.10^{-4}$               | $7,6.10^{-2}$ |

Concernant le nombre de Péclet massique, d'expression  $Pe_m = \frac{L_c U_c}{D}$ , il est dans chaque cas seulement dépendant du coefficient de diffusion  $D$ . Ce dernier est fonction du taux de charge  $\phi^s$ , des vitesses de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , et du carré du rayon moyen des charges  $a^2$  (*cf* sous-section 2.1.2).



Dans tout les cas tests, il aura le même ordre de grandeur, soit  $10^2$  au minimum. Afin de quantifier l'influence de la diffusion particulaire sur la taille des macroporosités, il est donc nécessaire d'étudier l'écoulement d'une sixième suspension, pour les cinq même conditions précédentes d'écoulement. Cette suspension sera constituée de particules 10 fois plus grosses que celles utilisées dans les cinq précédentes. Ainsi, le nombre de Péclet massique, caractéristique de son écoulement, sera au minimum de l'ordre de l'unité.

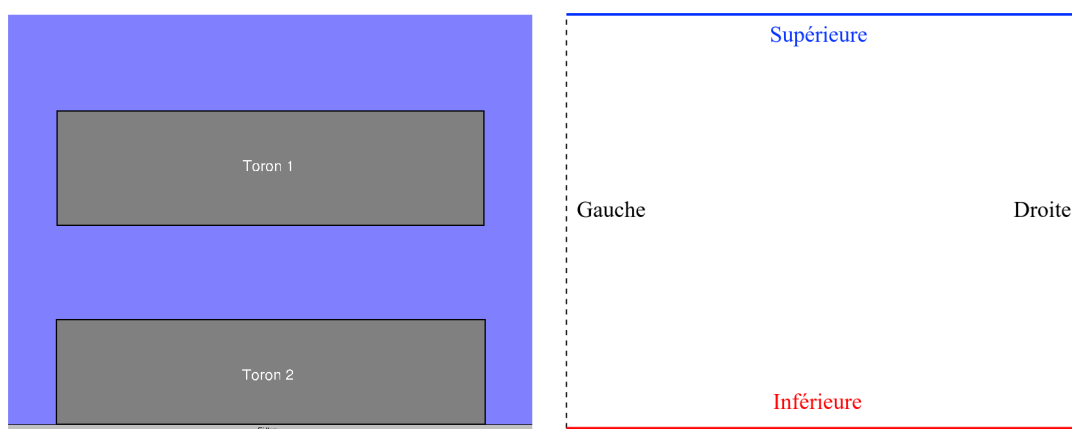
### 4.1.3 Mise en place de la simulation

Afin de mener à bien cette étude paramétrique et numérique du procédé de densification APS, nous devons discuter de l'ensemble des conditions des simulations. Pour cela il est primordial de définir :

- la géométrie du domaine d'étude,
- les conditions aux limites à appliquer,
- le maillage utilisé.

Concernant la géométrie du domaine de calcul, elle se rapproche de celle précédemment présentée (*cf* figure 4.3). Le domaine est un rectangle de  $1 \text{ mm} \times 0,8 \text{ mm}$  (*cf* figure 4.4 (*gauche*)). Deux obstacles rectangulaires, imperméables au fluide et aux particules, modélisent une géométrie de torons idéalisés. Ces deux torons ont des dimensions du même ordre de grandeur que ceux présents dans la préforme à densifier ( $0,8 \text{ mm} \times 0,2 \text{ mm}$ ).

Dans le domaine, ceux-ci sont alignés verticalement et le deuxième toron est considéré comme appartenant au filtre à particules. Ce dernier est, quant à lui, modélisé par un obstacle imperméable aux particules et perméable au fluide saturant de la suspension, comme présenté dans la sous-section 2.1.4. Tous ces obstacles sont pris en compte via la méthode de pénalisation présentée dans la sous-section 2.3.6.



**Figure 4.4** – Représentation du domaine de calcul pour l'étude paramétrique (*gauche*) et noms des limites du domaine (*droite*).

Afin d'effectuer nos simulations sur le plus petit domaine possible, des conditions de périodicité sont imposées à droite et à gauche du domaine (*cf* figure 4.4, tableaux 4.3 et 4.4). Ces conditions impliquent que le fluide "sortant" d'un des côtés est automatiquement "réintroduit" de l'autre.

De cette manière, la simulation de l'écoulement autour de ce motif de référence, composé de seulement deux torons, est équivalent à une simulation de l'écoulement autour du même motif infiniment répété. L'étude des cinq différentes conditions opératoires pilotant l'écoulement, et définies dans la sous-section précédente, peut se faire en jouant sur les vitesses ou pressions imposées aux limites supérieure et inférieure (*cf* figure 4.4 (*droite*)). L'ensemble des valeurs prises par ces conditions sont résumées dans les tableaux 4.3 et 4.4, correspondant respectivement à un écoulement piloté par un gradient de pression et par un débit.

Enfin, les concentrations des cinq différentes suspensions utilisées dans cette étude, sont paramétrées à l'aide de la condition aux limites sur l'espèce. En jouant sur la valeur de la constante  $\phi_0^s$  imposée à la limite supérieure, on pourra simuler l'écoulement de n'importe quelle suspension. Cette dernière termine l'ensemble des conditions imposées dans l'étude paramétrique. L'écoulement simulé se fera alors de la limite supérieure vers la limite inférieure.

**Table 4.3** – Ensemble des conditions aux limites appliquées dans l'étude paramétrique 2D, pour un écoulement piloté par un gradient de pression imposé.

| Limite     | Pression                           | Vitesse    | Espèce                 |
|------------|------------------------------------|------------|------------------------|
| Supérieure | Constante : $p_1 = \{0, 8; 1; 8\}$ | Neumann    | Constante : $\phi_0^s$ |
| Inférieure | Constante : $p_2 = 0$              | Neumann    | Neumann                |
| Gauche     | Libre                              | Périodique | Neumann                |
| Droite     | Libre                              | Périodique | Neumann                |

**Table 4.4** – Ensemble des conditions aux limites appliquées dans l'étude paramétrique 2D, pour un écoulement piloté par un débit imposé, de vitesse  $\mathbf{u}$ .

| Limite     | Pression | Vitesse                                         | Espèce                 |
|------------|----------|-------------------------------------------------|------------------------|
| Supérieure | Libre    | Constante : $\mathbf{u} = \{10^{-6}; 10^{-4}\}$ | Constante : $\phi_0^s$ |
| Inférieure | Libre    | Neumann                                         | Neumann                |
| Gauche     | Libre    | Périodique                                      | Neumann                |
| Droite     | Libre    | Périodique                                      | Neumann                |

La discrétisation spatiale utilisée définit un maillage cartésien structuré isométrique. En effet, le nombre de mailles utilisées dans chaque direction est calculé afin de définir un pas d'espace  $\Delta x = \Delta y = 1.10^{-5}$  m. Ce choix n'est pas anodin car il offre le meilleur compromis entre temps de calcul et précision des résultats. De plus, comme nous l'avons vu dans la section 3.3, ce maillage permet de correctement modéliser la dynamique de compaction du gâteau particulaire, tant à gradient de pression qu'à débit imposé.

La présentation de la discrétisation utilisée clôt cette présente sous-section. Les simulations nécessaires à cette étude sont pleinement paramétrées. Leurs résultats ainsi que leurs discussions sont donnés dans les deux sous-sections suivantes.

#### 4.1.4 Résultats des simulations

La ligne directrice de l'étude paramétrique, fixée par SAFRAN Ceramics, est de partir d'un cas test d'écoulement dont la macroporosité résultante est conséquente. La réduction progressive de la taille de cette macroporosité, par des modifications successives des paramètres opératoires, permet de déterminer leur influence dans le procédé de densification Slurry Cast/APS. Quelques simulations, préalables à cette étude paramétrique, avaient défini le cas n°5.0 (*cf* tableau 4.1) comme celui générant la macroporosité la plus importante. Les étapes de cette étude paramétrique sont alors :

1. étude de l'écoulement, à gradient de pression imposé  $\Delta p = 0,8$  bar, d'une suspension initialement chargée à  $\phi^s = 0,45$ .

**Objectif** : comprendre les mécanismes de formation de la macroporosité.

2. Modification du gradient ou du débit à imposer.

**Objectif** : étude de l'effet des paramètres opératoires.

3. Diminution de la concentration initiale de la concentration.

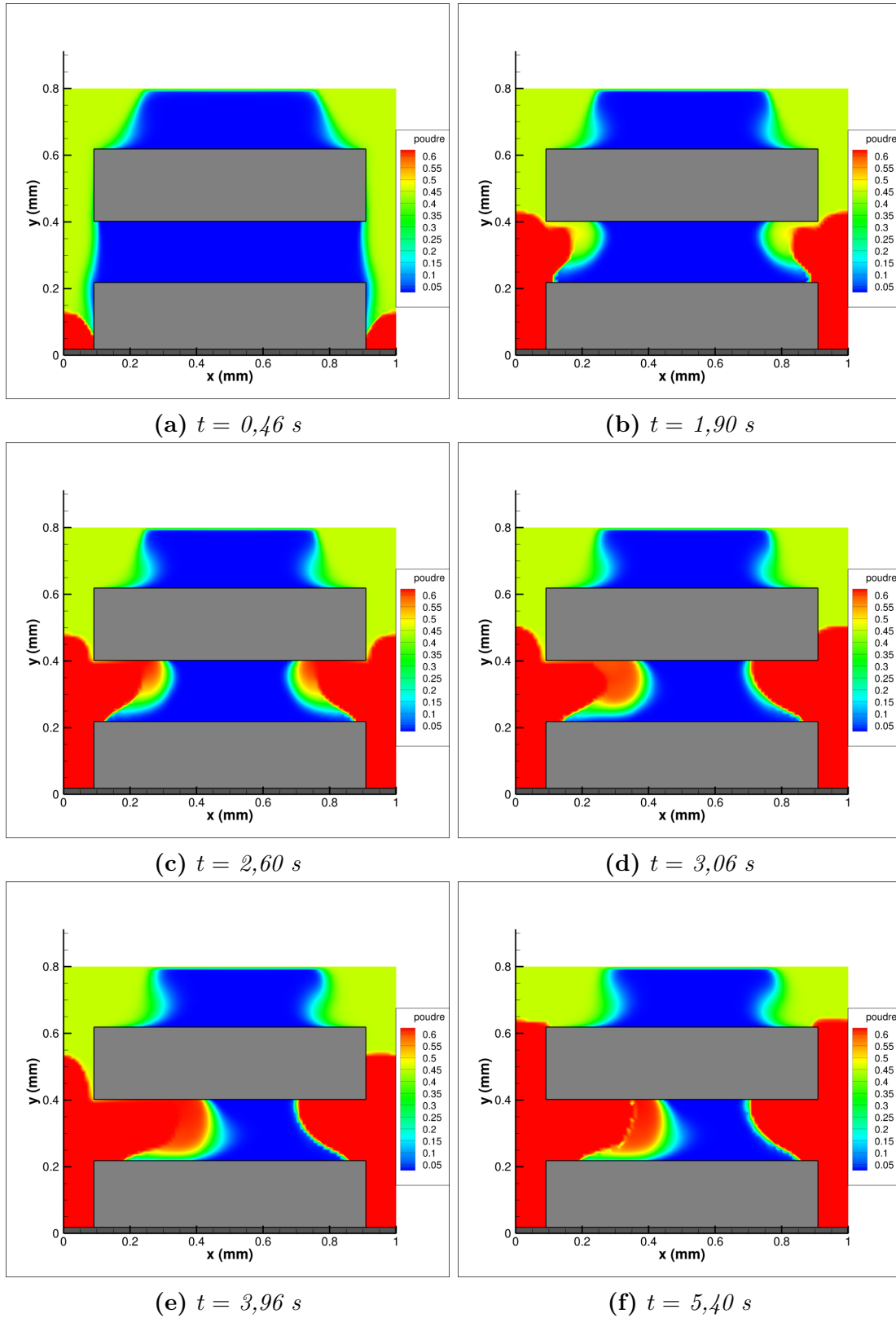
**Objectif** : quantifier l'influence du taux de charges.

### FORMATION DES MACROPOROSITÉS

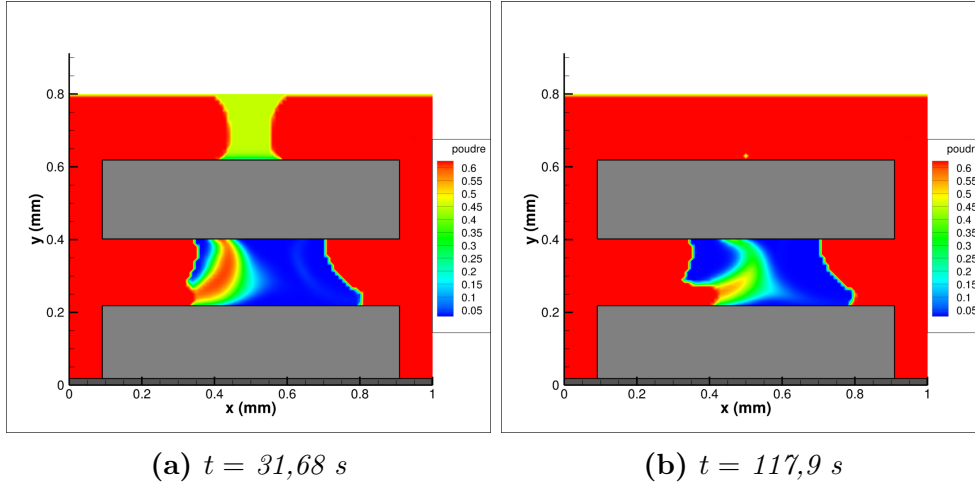
Afin de suivre cette méthodologie, souhaitée par l'industriel, nous allons débiter cette sous-section par la présentation des résultats de la simulation dans les conditions fixées par le cas n°5.0. Ce cas correspond à l'écoulement autour des deux torons de référence (*cf* figure 4.3), à gradient de pression imposé à 0,8 bar, d'une suspension initialement homogène à  $\phi_0^s = 0,45$ . Une représentation instantanée des champs de fraction volumique de poudre obtenus à l'aide de cette simulation, pour différents temps, sont représentés sur les figures 4.5 et 4.6. Le sens de l'écoulement se fait du haut du domaine vers le bas, et la compaction particulière dans l'autre sens. La formation de la macroporosité résulte du mécanisme de formation du gâteau, et peut être résumée en trois étapes :

1. Expansion du gâteau, filtre jusqu'au toron du haut (de la figure 4.5a à 4.5c).
2. Contact entre le gâteau et le toron supérieur du côté droit. L'apport en poudre, dans l'espace inter-torons, ne se fait plus que du côté gauche, via la création d'un espace semblable à une veine (figure 4.5d à 4.5e).
3. Fermeture de la veine suite à la compaction du gâteau (figure 4.5f). La zone inter-torons n'est plus alimentée en particules. Formation de la macroporosité avec piégeage de quelques particules dans cette zone (*cf* figure 4.6a à 4.6b).

Lors de l'étape n°2, nous observons une brisure de symétrie dans la formation du gâteau. Pour une hauteur d'environ 0,4 mm, nous remarquons que le gâteau entre en contact avec le toron supérieur, seulement du côté droit. Suite à cela, l'écoulement fluide se dissymétrise, empêchant le contact entre le gâteau et le toron de l'autre côté. Les concentrations étant élevées dans cette zone (proche de l'agencement compact), la rupture de symétrie peut s'expliquer par les différences locales de viscosité. En effet, une infime modification de la concentration proche de la valeur maximale, implique une variation importante de la viscosité (*cf* sous-section lois rhéologiques 2.1.3 et figure 2.5). Ainsi, pour  $\phi^s \in [0,63; 0,66]$  la viscosité double par centième de concentration, et triple même entre 0,66 et 0,67.

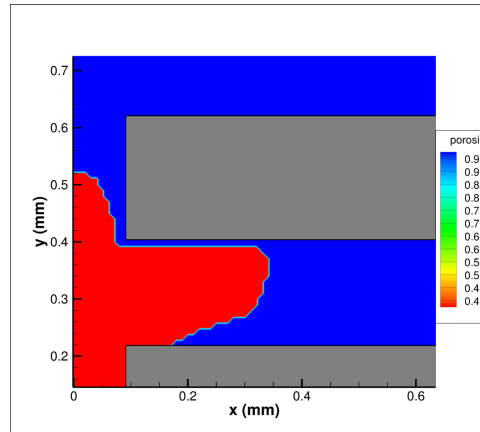


**Figure 4.5** – Champs de fraction volumique de poudre obtenus par simulation numérique de l'étude paramétrique n° 5.0 (cf tableau 4.1). Écoulement d'une suspension, initialement homogène en poudre à  $\phi_0^s = 0,45$ , autour de deux torons, piloté par un gradient de pression  $\Delta p = 0,8 \text{ bar}$ . (Suite sur la figure 4.6).



**Figure 4.6** – (Suite de la figure 4.5). Champs de fraction volumique de poudre obtenus par simulation numérique de l'étude paramétrique n°5.0 (cf tableau 4.1). Écoulement d'une suspension, initialement homogène en poudre à  $\phi_0^s = 0,45$ , autour de deux torons, piloté par un gradient de pression  $\Delta p = 0,8 \text{ bar}$ .

La veine créée lors de l'étape n°2, est difficilement observable sur la figure 4.5, mais peut aisément se retrouver lorsque seul le gâteau est visualisé (en rouge) via sa porosité :

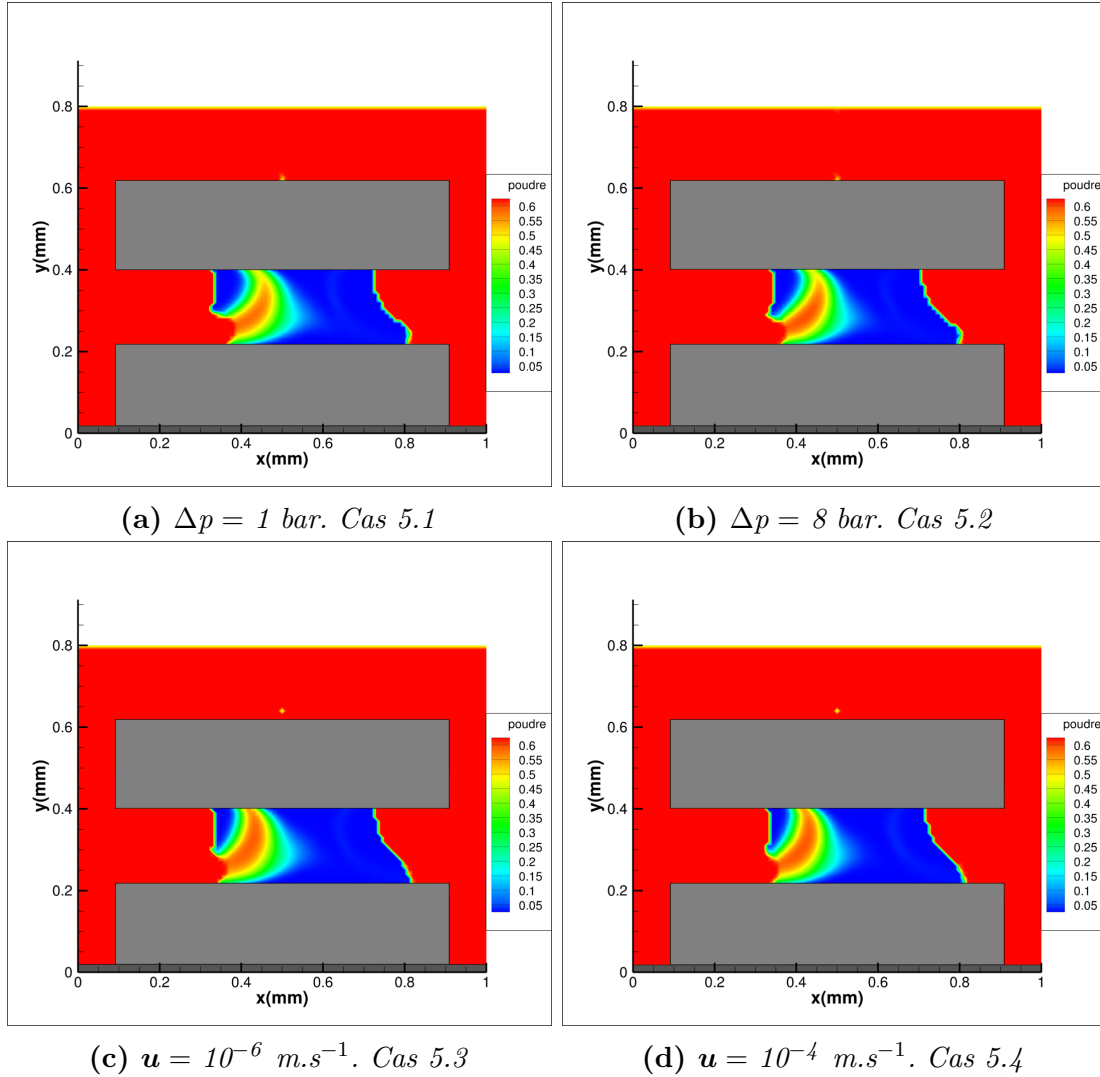


**Figure 4.7** – Veine de 3 mailles d'épaisseur entre le gâteau particulaire et le toron supérieur à  $t = 3,96 \text{ s}$

Cette rupture de symétrie s'observe aussi bien à gauche qu'à droite et tend à réduire la taille finale de la porosité résiduelle. Celle-ci serait en effet bien plus importante si le gâteau entraînait en contact avec le toron supérieur, simultanément des deux côtés. En effet, la création de cette veine augmente le temps d'approvisionnement en poudre de l'espace inter-torons, réduisant ainsi la taille finale de la macroporosité. La dynamique de formation du gâteau particulaire joue donc un rôle primordial lors de la formation de la macroporosité finale. Pour diminuer la taille de cette dernière, il est indispensable d'apporter suffisamment de particules dans la zone inter-torons. Il faut donc trouver des conditions permettant de ralentir le phénomène de compaction, soit en changeant les conditions d'injection (gradient de pression, débit), soit en changeant la concentration initiale des suspensions.

## INFLUENCE DES CONDITIONS D'INJECTION

Nous voulons étudier l'influence des conditions opératoires d'injection ( $\Delta p, u$ ), sur la taille de la macroporosité résiduelle. Pour cela, une suspension initialement homogène en poudre à  $\phi^s = 0,45$  est injectée sous les conditions définies par les cas 5.x du tableau 4.1. Une comparaison qualitative des macroporosités obtenues dans les cas 5.1 à 5.4 est reportée sur la figure 4.8. Les cas 5.0 et 5.1 étant représentatifs du même écoulement (*cf* nombre de Reynolds du tableau 4.2), seul un des deux est utilisé dans cette comparaison. Enfin, dans l'optique de faciliter la comparaison, seul le décentrage de la macroporosité du côté droit est étudié.



**Figure 4.8** – Visualisation de la macroporosité finale résultant de quatre écoulements d'une suspension initialement chargée à  $\phi_0^s = 0,45$ . Deux écoulements à gradient de pression imposé (a) & (b), et deux à débit imposé (c) & (d). Ces cas correspondent aux cas n°5.x du tableau 4.1.

Dans les quatre cas, la taille de la macroporosité finale est semblable, et ce malgré des vitesses d'écoulement très différentes. Il semble donc que la modification des conditions opératoires, pour une suspension donnée, n'ait que peu d'influence sur les défauts de compaction.

Seul le temps nécessaire au processus de remplissage est impacté (plus ou moins rapide selon les vitesses d'écoulement). Ce phénomène est également observé par les expérimentateurs de SAFRAN Ceramics dans des études menées en fin de procédé Slurry Cast/APS. Pour expliquer cette observation, nous pouvons nous rapprocher des travaux de validation présentés dans la section 3.1 du chapitre 3. Ainsi, l'écoulement dans la veine présentée en figure 4.7, est comparable à l'écoulement dans une conduite cylindrique, étudié dans les travaux de [Hampton et al., 1997], pour la configuration  $a/R = 0,0256$ . En effet, le rapport entre la taille des particules et le rayon d'une section de cette veine, vaut 0,02. Les conclusions du cas de validation précédemment utilisé, sont donc pleinement transposables à ce cas.

Une première piste d'explication réside dans les mécanismes de diffusion particulière. Nous avons en effet vu numériquement et expérimentalement que cette diffusion n'est pas directement dépendante de la vitesse, mais de sa dérivée : le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . En s'assurant que l'écoulement soit laminaire, une différence de plusieurs ordres de grandeur sur la vitesse d'écoulement n'a pas d'impact sur les phénomènes de diffusion présents dans la veine. Au vu des nombres de Reynolds, pour les cinq cas d'écoulements étudiés ici, cette condition est vérifiée (*cf* tableau 4.2).

De plus, ces phénomènes de ségrégation impactent la géométrie de ce canal puisqu'ils tendent à en réduire sa section effective. En effet, les particules ont tendance à migrer de la zone proche du toron vers la limite du gâteau (*cf* figure 3.7 avec  $r/R = 1$  zone proche toron, et  $r/R = 0$  zone proche gâteau). Ainsi, la longueur de la veine dépend de la ségrégation particulière et donc de la dynamique de compaction du gâteau. Plus la migration est rapide, moins la veine sera longue et plus la taille de la macroporosité sera importante.

La longueur maximale que peut prendre la veine, est à comparer à la longueur d'établissement des profils radiaux de poudre, présentés en tableau 3.1 et 3.3. Il est à observer que plus la concentration initiale de la suspension injectée dans le conduit est faible, plus cette longueur est grande. Il est donc légitime de penser que seule la concentration initiale de la suspension influe sur la taille finale de la macroporosité.

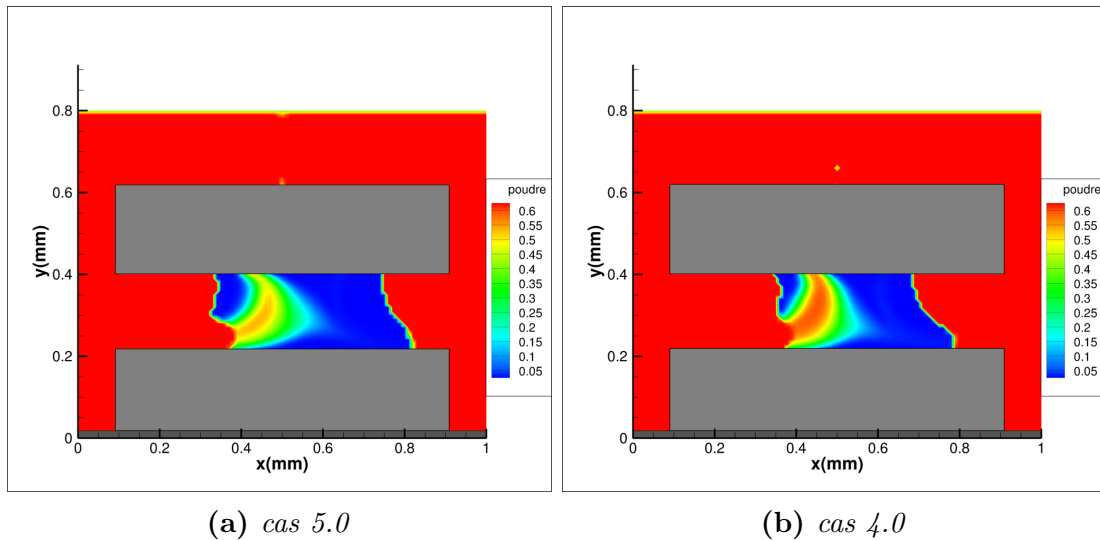
### INFLUENCE DE LA CONCENTRATION INITIALE

Pour s'assurer que la taille de la macroporosité est seulement dépendante de la concentration initiale, nous simulons l'écoulement d'une suspension de moins en moins chargée en particules. Pour cela, les cas 4.x, 3.x, 2.x et 1.x sont successivement étudiés.

La première comparaison est obtenue avec une suspension initialement chargée en particules à  $\phi_0^s = 0,40$ , et un gradient de pression imposé à  $\Delta p = 0,8$  bar. Les conditions opératoires sont donc identiques au cas d'étude 5.0 présenté sur les figures 4.5 et 4.6. Les étapes de formation de la macroporosité, dans le cas 4.0 étudié ici, sont en tout point identiques à celles observées précédemment. La macroporosité résultante dans ces conditions est représentée sur la figure 4.9b.

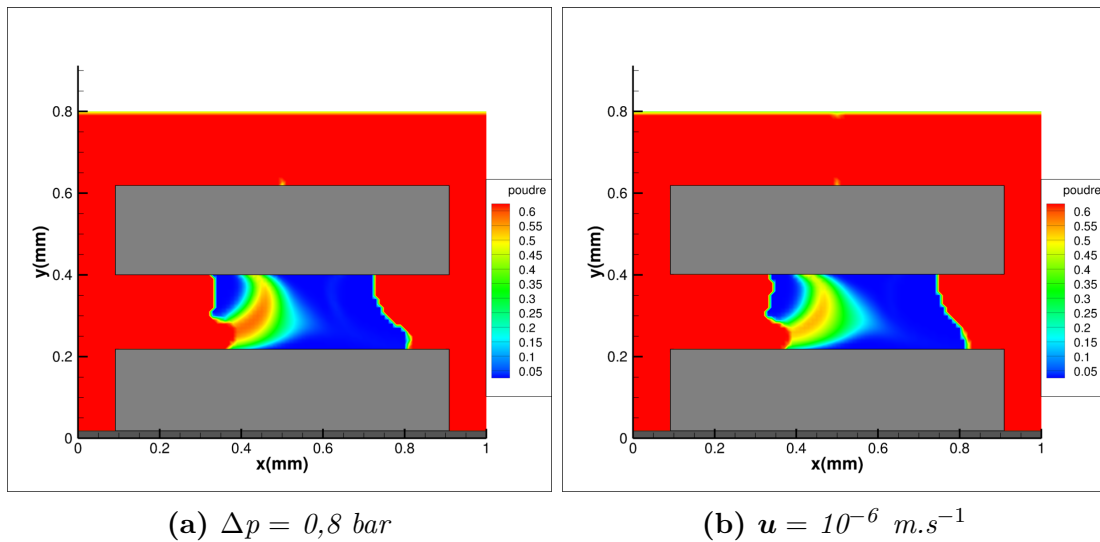
Une simple comparaison visuelle avec la macroporosité obtenue pour une suspension chargée initialement à  $\phi_0^s = 0,45$  (*cf* figure 4.9a) permet de constater une réduction de sa taille. Cette observation se confirme via un calcul de l'aire de la macroporosité, et établit une diminution d'environ 12% en volume :

- $7,5 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^2$  pour  $\phi_0^s = 0,45$ .
- $6,6 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^2$  pour  $\phi_0^s = 0,40$ .



**Figure 4.9** – Comparaison de la taille finale des macroporosités obtenues lors de l’écoulement d’une suspension chargée à  $\phi^s = 0,45$  (a) et  $\phi^s = 0,40$  (b).

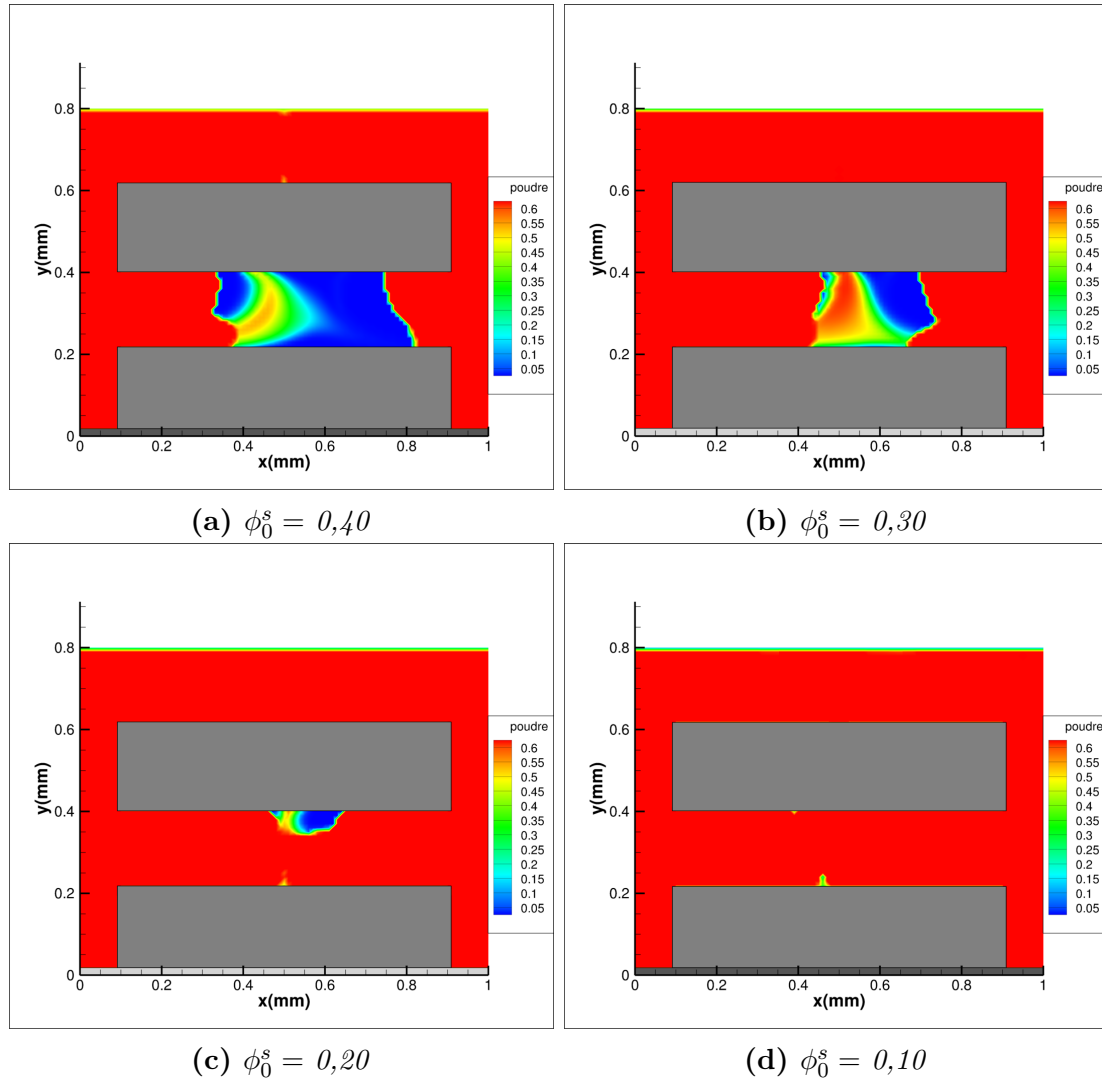
Une comparaison visuelle entre les cas 4.0 et 4.3 (cf tableau 4.1) est donnée en figure 4.10. Elle permet de vérifier que la taille de la macroporosité est bien indépendante des conditions opératoires d’injection. En effet, les macroporosités sont semblables pour un écoulement piloté par un gradient de pression  $\Delta p = 0,8$  bar et par un débit  $u = 10^{-6}$  m.s<sup>-1</sup>.



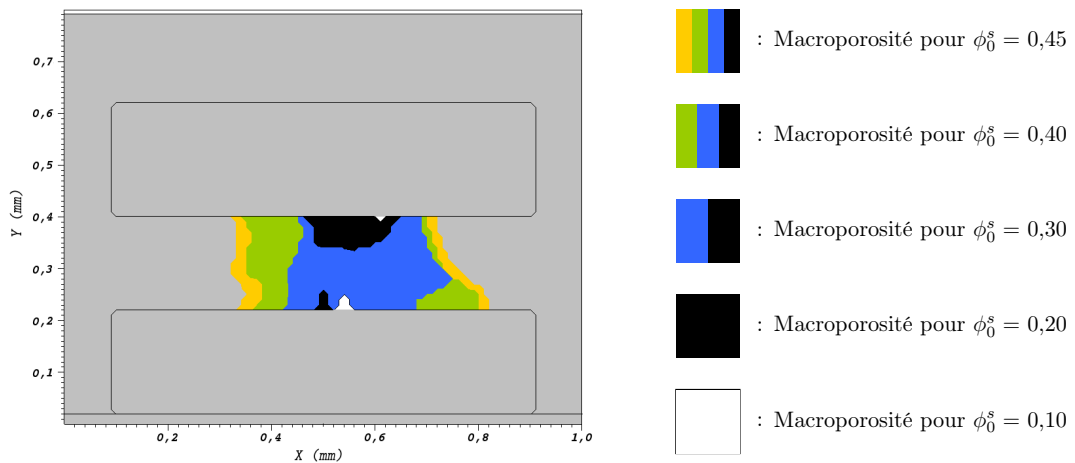
**Figure 4.10** – Champ de fraction volumique de poudre à l’étape ultime de la simulation montrant la macroporosité finale résultant de l’écoulement d’une suspension initialement homogène à  $\phi_0^s = 0,4$ . Comparaison des résultats pour un écoulement piloté par gradient de pression (a) et par un débit (b).

L’hypothèse selon laquelle seule la concentration initiale de la suspension influe sur la taille de la macroporosité semble donc être justifiée. Pour s’en assurer définitivement, nous pouvons comparer les résultats des simulations obtenues pour une concentration initiale à  $\phi_0^s = 0,30$ , à  $\phi_0^s = 0,20$  et à  $\phi_0^s = 0,10$  (cf figure 4.11). La comparaison est rendue plus facile si les macroporosités sont superposées les unes aux autres (cf figure 4.12, page 118).





**Figure 4.11** – Champs finaux de fraction volumique de poudre et taille de la macroporosité obtenue pour quatre suspensions différemment chargées en particules.



**Figure 4.12** – Superposition de la taille moyenne de la macroporosité obtenue pour les cinq suspensions initiales (0,10; 0,20; 0,30; 0,40 & 0,45). Plus la concentration initiale en particules est faible, plus la macroporosité est petite.

La superposition des macroporosités résiduelles obtenues pour cinq suspensions, démontre que leur taille dépend essentiellement de la fraction volumique initiale de particules injectées (*cf* tableau 4.5). Plus la suspension est initialement pauvre en particules, plus la taille de la macroporosité sera faible. De plus, les conditions opératoires d'injection de cette suspension n'ont d'effet que sur le temps effectif du procédé de densification. Ainsi, au regard des résultats de cette étude, il est nécessaire de trouver un compromis entre la rapidité du procédé et la taille maximale acceptable des macroporosités générées dans le renfort fibreux.

**Table 4.5** – Aire de la macroporosité résiduelle obtenue pour cinq concentrations initiales de suspensions.

| $\phi_0^s$     | 0,10                 | 0,20                | 0,30                | 0,40                | 0,45                |
|----------------|----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Aire ( $m^2$ ) | $3,1 \cdot 10^{-10}$ | $8,2 \cdot 10^{-9}$ | $4,5 \cdot 10^{-8}$ | $6,6 \cdot 10^{-8}$ | $7,5 \cdot 10^{-8}$ |

### 4.1.5 Conclusions de l'étude paramétrique 2D

L'objectif de cette section était de comprendre les phénomènes physiques responsables des inhomogénéités de compaction observées en fin de procédé Slurry Cast/APS. Pour cela, une étude de l'influence des paramètres opératoires ( $\Delta p, \mathbf{u}, \phi_0^s$ ) a été mise en place.

En travaillant au préalable sur une suspension chargée en particules à  $\phi_0^s = 0,45$ , nous avons établi que la formation d'une macroporosité était à corréler à la dynamique de compaction particulaire. Ainsi, de la vitesse de formation du gâteau dépend la taille finale de la macroporosité inter-torons. La diminution de la taille de cette dernière passe donc obligatoirement par une réduction de la vitesse de compaction.

Un premier axe de travail a porté sur la modification des conditions pilotant l'écoulement. En utilisant toujours une suspension chargée à  $\phi_0^s = 0,45$ , nous avons observé que la macroporosité résiduelle était semblable quels que soient les débits ou les pressions imposés. Au vu du modèle et des précédentes études de validation, ces résultats étaient cependant envisageables et attendus. L'étude s'est ensuite dirigée sur des modifications de la concentration initiale de la suspension. Il semblerait que seul ce paramètre opératoire influe sur la taille finale de la macroporosité. En effet, la macroporosité représente environ 10% du domaine pour la suspension initialement chargée à  $\phi_0^s = 0,45$ , tandis qu'elle disparaît presque entièrement lorsque  $\phi_0^s = 0,10$ .

Ces résultats sont encourageants puisqu'ils sont également observés en laboratoire (études internes à SAFRAN Céramics). Pour aller plus loin, il serait envisageable de continuer cette étude sur des géométries plus complexes et plus représentatives de celles observées dans le tissu réel (*cf* figure 4.2). L'idée étant de permettre aux expérimentateurs d'estimer, le plus finement possible, la localisation et la taille des macroporosités, dans des configurations géométriques de référence, en fonction des paramètres opératoires.

Cet axe n'a pour le moment pas été évoqué dans ces travaux, qui ne se sont concentrés que sur la physique générale du phénomène. Afin de rester dans cette optique, nous avons décidé de continuer ces travaux par une étude de convergence en maillage sur la taille et la localisation des macroporosités. Celle-ci, présentée dans la section suivante, a pour objectif de tester la fiabilité du modèle concernant la formation des inhomogénéités.

## 4.2 Étude 2D du procédé APS

### 4.2.1 Objectifs de l'étude

Au cours des deux précédents chapitres, nous avons vu que le modèle développé dans ces travaux était fiable et robuste. Son utilisation dans l'étude paramétrique précédente nous a permis de comprendre l'ensemble des mécanismes responsables de la formation des macroporosités.

Cependant, aucune simulation utilisant des configurations géométriques et expérimentales proches du procédé, n'a encore été présentée. Pour répondre aux attentes de l'industriel, une campagne de simulations en 2D a été lancée sur des géométries réalistes et se rapprochant de celles expérimentales.

Les apports d'une telle étude numérique sont multiples :

1. Simuler la saturation du milieu en particules, sur une configuration 2D simple mais représentative d'une coupe d'un renfort tissé, et des conditions opératoires du procédé.
2. Retrouver les observations expérimentales quant à l'apparition d'inhomogénéités de compaction.
3. Quantifier l'influence sur la compaction de légères modifications de la disposition des torons dans le renfort fibreux.
4. Vérifier que les inhomogénéités ne sont pas le résultat d'artefacts numériques.

Les deux premiers éléments de cette liste sont immédiatement compréhensibles car ils traduisent un besoin de l'industriel, et font partie du cahier des charges fixé en début de thèse.

Concernant le troisième, il trouve son sens dans les observations de l'étude paramétrique. En effet, comme nous l'avons vu sur la figure 4.2, la complexité du tressage implique la génération d'un renfort fibreux fortement anisotrope. Au sein du matériau, les fils ne sont ni régulièrement espacés ni parfaitement parallèles les uns par rapport aux autres. D'une coupe à l'autre, la disposition des torons tend à s'éloigner d'une disposition idéalisée et parfaitement ordonnée. Il est alors primordial d'étudier l'influence de ces modifications sur l'homogénéité de remplissage du renfort en particules.

Enfin, le quatrième apport cité est l'un des plus importants. Il s'inscrit naturellement dans une démarche de simulation numérique telle que la notre. En effet, lors de l'utilisation d'un modèle, il est indispensable de vérifier l'influence des erreurs numériques sur les résultats des simulations. Pour cela, une comparaison des résultats pour plusieurs configurations numériques (différents maillages par exemple) doit être menée. Pour que le modèle soit fiable il est indispensable que les résultats soient faiblement dépendants des maillages utilisés. Dans notre étude, cette démarche nous permettra de conclure que la formation des macropores n'est pas le résultat d'erreurs numériques.

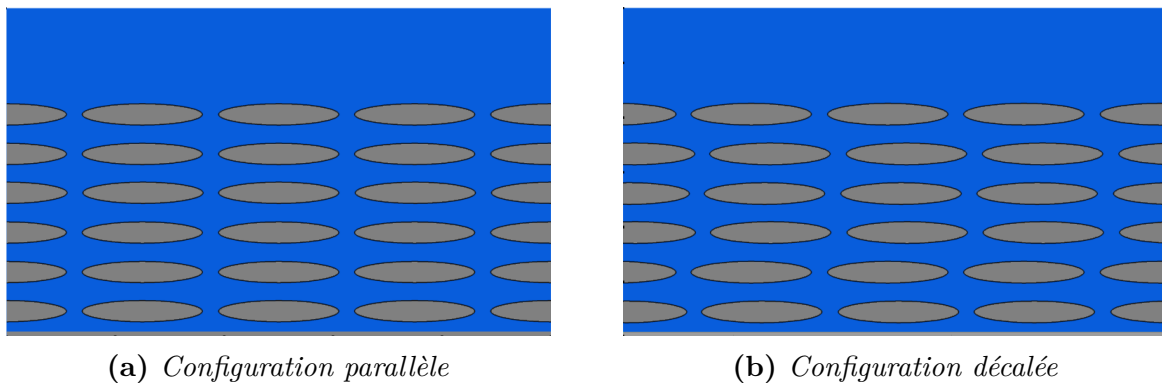
La configuration numérique étudiée dans cette section devra être la plus proche possible du procédé, tant par la disposition des torons que par les conditions opératoires fixées.

### 4.2.2 Mise en place de la simulation

Pour être le plus représentatif possible de la configuration expérimentale, le domaine retenu est un rectangle de  $5 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$ . La coupe 2D d'un fil du tissage est représentée par un toron de grand axe  $1,1 \text{ mm}$  et de petit axe  $0,2 \text{ mm}$ . Cette géométrie représentative du fil n'est pas choisie au hasard puisqu'elle reproduit la forme moyenne présente dans le tissage. Ces torons sont considérés comme des obstacles imperméables au fluide et aux particules, conformément à ceux présentés en sous-section 2.3.6. Par rapport à son(s) voisin(s), chaque motif de référence est espacé horizontalement de  $0,1 \text{ mm}$  et verticalement de  $0,2 \text{ mm}$ . Si l'on suppose que le domaine 2D est une coupe dans le sens des fils de chaîne du tissage, l'espacement vertical tend à rendre compte de la présence des fils de trame. Ainsi définie, chaque épaisseur de tissage se compose de 5 torons (*cf* figure 4.13).

Enfin, deux configurations sont retenues et correspondent à deux dispositions de torons :

1. **Configuration parallèle** : toutes les rangées sont parfaitement alignées verticalement les unes par rapport aux autres (figure 4.13a).
2. **Configuration décalée** : les rangées sont décalées les unes par rapport aux autres. (figure 4.13b).



**Figure 4.13** – Représentation des deux domaines de calcul utilisés dans l'étude 2D du procédé APS. Configuration avec une disposition de torons parfaitement parallèles (a) puis décalés (b).

La configuration 4.13b introduit un décalage entre chaque plan horizontal de tissage. L'idée est ici de commencer à tenir compte, en 2D, de la complexité du tissage 3D. En effet, dans la préforme fibreuse, l'inter-pénétration des plans de chaîne dans les plans de trame génère des disparités d'espacement entre les fils. C'est pour représenter ce phénomène que ces décalages sont ajoutés dans la configuration géométrique. Leur valeur est choisie arbitrairement, mais reste conforme avec les décalages observés dans le tissage réel.

La vocation première de cette configuration décalée n'est pas de modéliser parfaitement celle présente dans la réalité, mais permet de s'éloigner de la géométrie parallèle idéalisée. De cette manière, nous pouvons également quantifier l'influence de ce décalage sur la taille des macroporosités.

Enfin, comme pour toutes les simulations présentées dans ce chapitre, un filtre à particules est modélisé en sortie de domaine (correspondant en 2D au bas de la figure 4.13).

Une fois la configuration géométrique arrêtée, il est nécessaire de fixer les conditions opératoires à appliquer dans les simulations. Ici aussi nous souhaitons modéliser le plus fidèlement possible les conditions réelles de l'expérience. C'est la raison pour laquelle l'écoulement de la suspension sera numériquement piloté par un gradient de pression. Des conditions périodiques sont appliquées sur les côtés droit et gauche du domaine. De cette manière, l'écoulement sortant d'un côté est obligatoirement entrant de l'autre. Ce couplage se retrouve également géométriquement (cf figure 4.13), puisque la partie sortante d'un toron trouve son complémentaire de l'autre côté.

Concernant la suspension à injecter, elle est caractérisée par une concentration initiale à  $\phi_0^s = 0,20$ . Au vu des conclusions de l'étude paramétrique précédente, ce choix n'est pas idéal puisqu'il est à l'origine de la formation de macroporosités. Cependant, c'est la concentration la plus utilisée par les expérimentateurs. La majorité des analyses post procédé APS, ont été menées suite à l'injection d'une suspension à cette concentration. Si nous souhaitons comparer nos résultats numériques à ces études, nous pouvons retenir cette concentration. L'ensemble des conditions aux limites, appliquées dans cette étude 2D, sont résumées dans le tableau 4.6. Les deux configurations géométriques ainsi que ces conditions aux limites resteront inchangées tout au long de cette étude numérique.

**Table 4.6** – Ensemble des conditions aux limites appliquées dans l'étude 2D du procédé APS.

| Limite     | Pression                    | Vitesse    | Espèce                        |
|------------|-----------------------------|------------|-------------------------------|
| Supérieure | Constante : $p_1 = 0,8$ bar | Neumann    | Constante : $\phi_0^s = 0,20$ |
| Inférieure | Constante : $p_2 = 0$       | Neumann    | Neumann                       |
| Gauche     | Libre                       | Périodique | Neumann                       |
| Droite     | Libre                       | Périodique | Neumann                       |

Le troisième et dernier point à évoquer dans cette sous-section concerne la discrétisation spatiale utilisée. Comme nous l'avons évoqué précédemment, nous souhaitons vérifier que la dynamique de compaction n'est pas affectée par la propagation d'erreurs numériques. Pour s'en assurer, il est nécessaire d'utiliser plusieurs discrétisations spatiales dont la résolution est de plus en plus fine. Dans toutes les simulations, chaque discrétisation génère la création d'un maillage cartésien structuré, isométrique dans chaque direction, comportant  $N_x \times N_y$  éléments. Nous avons décidé de travailler sur trois maillages successifs possédant :

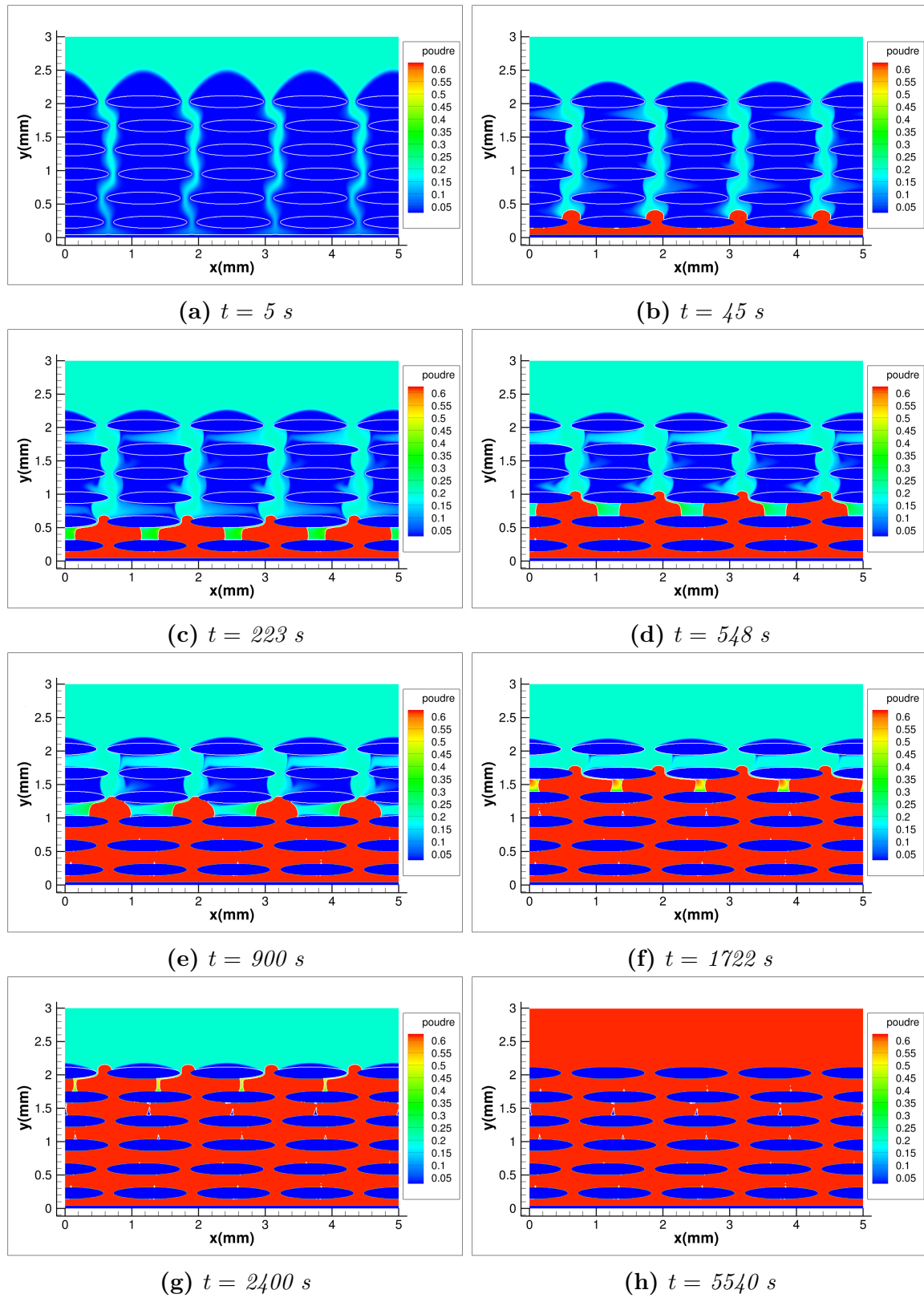
$$N_{x1} = 500 \text{ éléments et } N_{y1} = 300 \text{ éléments}$$

$$N_{x2} = 750 \text{ éléments et } N_{y2} = 450 \text{ éléments}$$

$$N_{x3} = 1000 \text{ éléments et } N_{y3} = 600 \text{ éléments}$$

Les trois maillages ainsi définis possèdent des pas d'espaces identiques selon  $x$  et  $y$  et valent respectivement  $\Delta_1 = 1.10^{-5}$  m,  $\Delta_2 = 6,6.10^{-6}$  m et  $\Delta_3 = 5.10^{-6}$  m. Le troisième sera utilisé comme référence pour présenter les résultats et étudier l'influence du décalage sur la compaction. Les deux autres ne seront utilisés que pour l'étude comparative concernant la dépendance des inhomogénéités aux erreurs numériques.

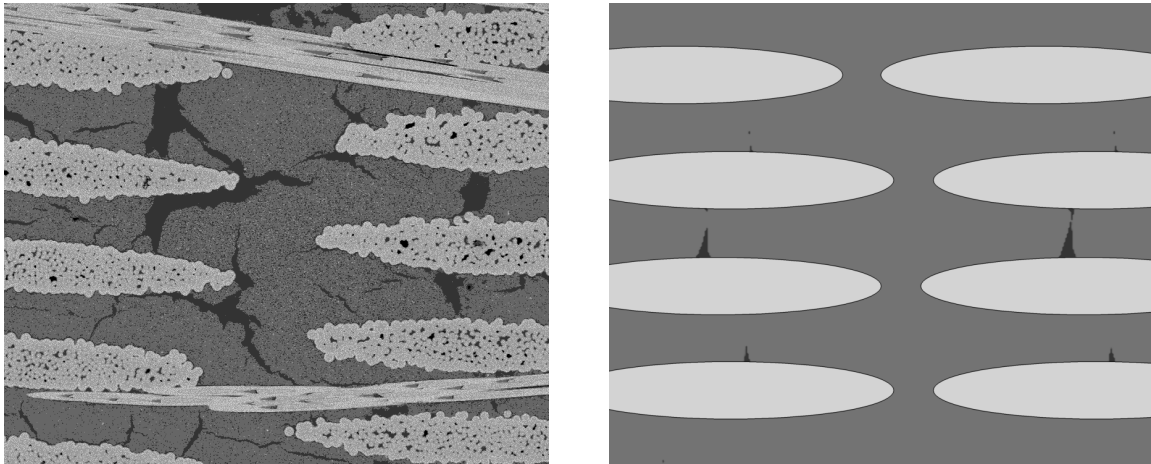




**Figure 4.15** – Évolution temporelle de la fraction volumique de poudre dans le domaine d'étude. Les conditions opératoires sont celles indiquées dans le tableau 4.6. Visualisation 2D de la croissance du gâteau particulaire autour des torons.

Une comparaison visuelle est également effectuée entre une coupe 2D issue de l'expérience (figure 4.16 (*gauche*)), et une issue de nos simulations (figure 4.16 (*droite*)). Il est à noter que la coupe expérimentale est obtenue après l'étape de séchage qui n'est pas prise en compte numériquement. Sur cette dernière, il est donc naturel de ne pas y visualiser les fractures de retrait. Cependant, en supposant que le phénomène de séchage accentue la taille des macroporosités, la comparaison expérimental/numérique montre que la formation des inhomogénéités est correctement prise en compte dans notre modèle. Il faut noter que seul un décalage horizontal a été introduit dans la configuration géométrique de la simulation, alors qu'il existe également un décalage vertical.

Ces résultats numériques sont encourageants puisqu'ils approchent convenablement les résultats expérimentaux, et ce, même lorsque la forme des fils est idéalisée. En effet, dans nos simulations les fils sont modélisés à l'aide d'une forme ellipsoïdale unique, alors que dans la réalité, elle varie légèrement. Enfin, les plus petites macroporosités peuvent être considérées comme des amorces de fissuration. Leur localisation peut donc donner une idée sur la potentielle présence de fissures de retrait. Cependant, d'autres travaux sont nécessaires, et notamment sur la mécanique de fissuration, afin de corroborer cette hypothèse.



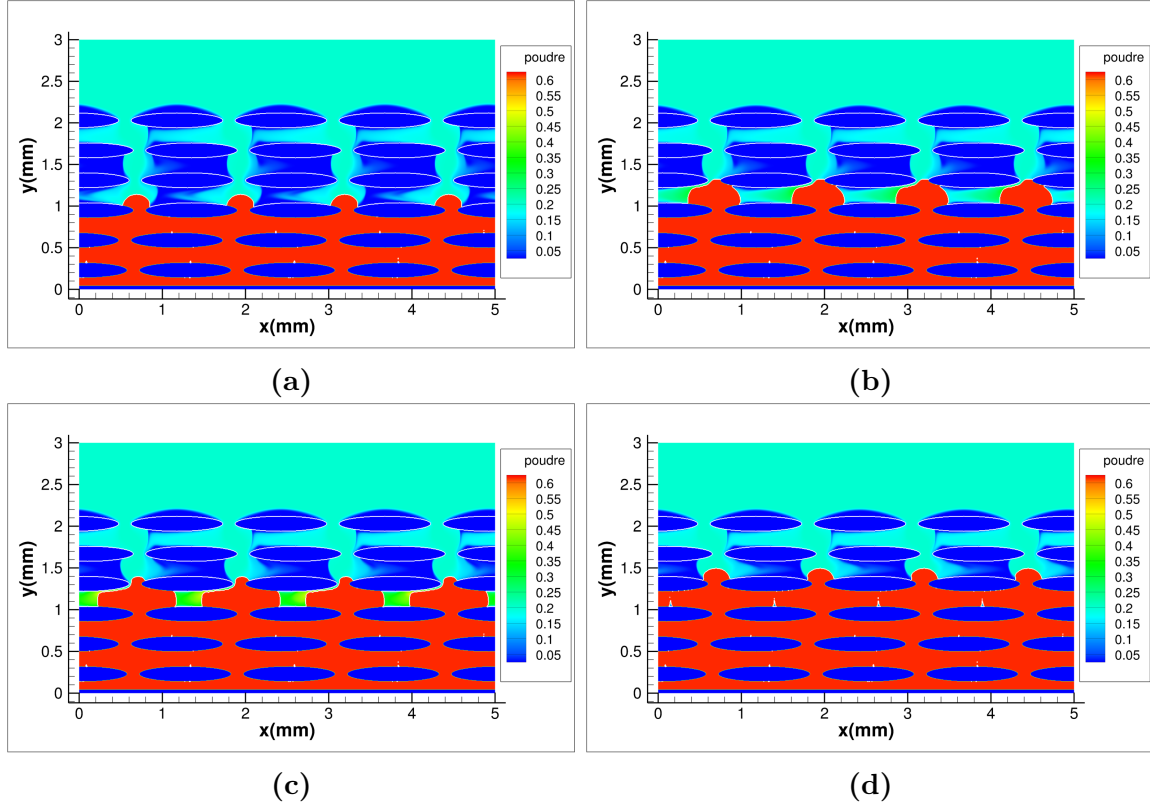
**Figure 4.16** – *Comparaison expérimental/numérique en 2D de la compaction particulaire dans l'espace inter-fil. Visualisation des inhomogénéités de remplissage de la préforme en particules.*

Pour comprendre les mécanismes de formation de ces inhomogénéités, nous pouvons regarder de plus près les résultats présentés sur la figure 4.15. Une première observation est que la compaction particulaire a un comportement cyclique entre chaque épaisseur de fils (plan horizontal de torons en 2D). De plus, la formation des macroporosités dans chaque épaisseur se fait selon trois étapes successives, qui peuvent facilement être identifiées en prenant l'exemple de la compaction entre la troisième et la quatrième rangée de torons (*cf* figure 4.17).

1. Une expansion verticale du gâteau dans la zone inter-torons (de la figure 4.17a à 4.17b).
2. Le gâteau entre en contact avec la rangée supérieure de torons, du côté du décalage (figure 4.17b). L'apport dans la zone non compactée en particules ne se fait plus que par l'autre côté (figure 4.17c).



3. Fermeture de la veine suite au contact du gâteau et du toron de l'autre côté. Génération d'une zone non dense en particules qui forme alors une macroporosité (figure 4.17d).

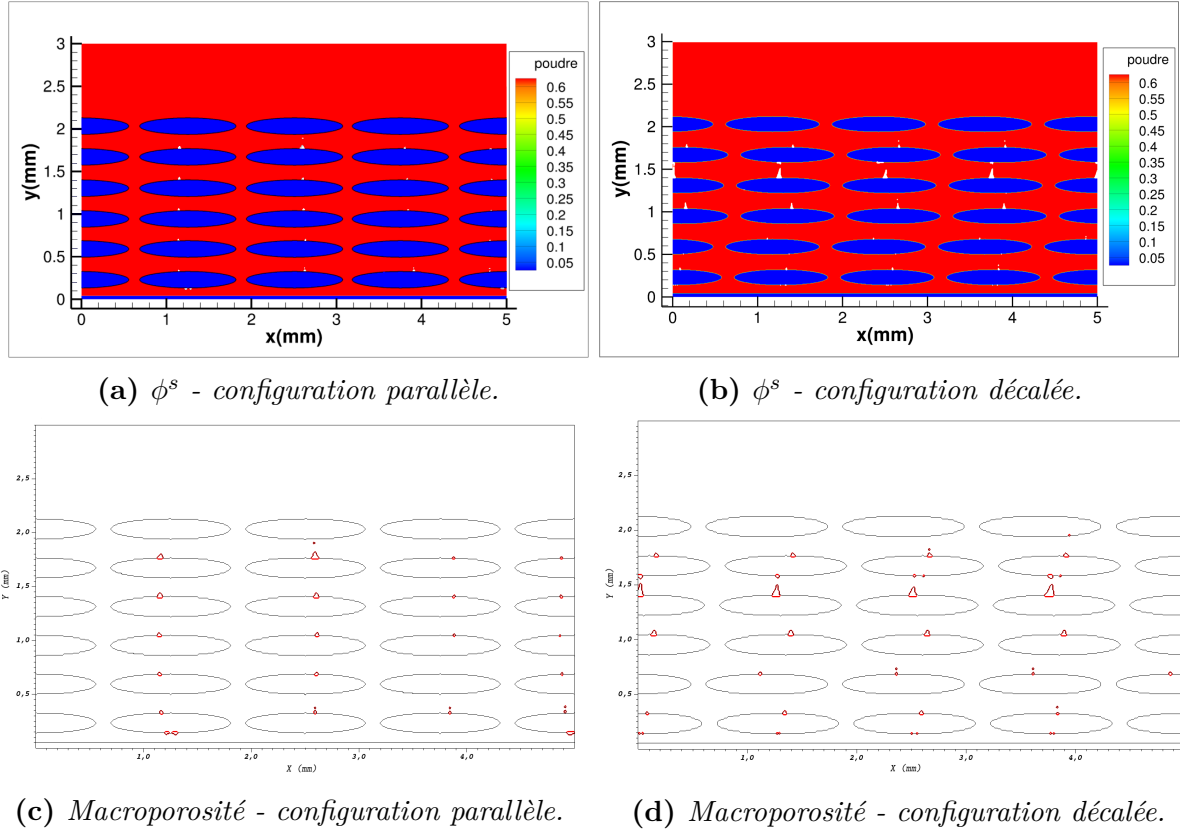


**Figure 4.17** – *Formation des macroporosités dans la simulation 2D du procédé APS. Trois étapes distinctes se répètent entre chaque épaisseur de torons. Le maillage utilisé ici correspond à la discrétisation  $\Delta_3 = 5.10^{-6}$  m.*

Le mécanisme de formation des inhomogénéités de remplissage est identique en tout point à celle déterminée dans l'étude paramétrique (sous-section 4.1.4). Cependant, la fermeture unilatérale par le gâteau particulière, de la zone inter-torons située entre deux rangées successives, semble dans ce cas, être gouvernée par le décalage. En d'autres termes, le gâteau bouche prioritairement l'apport en poudre du côté du décalage.

#### 4.2.4 Influence du décalage sur les macroporosités

Dans le but d'étudier l'influence du décalage sur la taille et la localisation des macroporosités, une comparaison peut être effectuée entre les deux configurations parallèle et décalée (présentées sur la figure 4.13). Des cartes de fraction volumique de poudre dans le domaine, à l'étape ultime de la simulation, ainsi que les tailles des macroporosités, obtenues numériquement sur les deux configurations de torons, sont représentées sur la figure 4.18. Cette figure montre que les inhomogénéités de compaction sont bien moins importantes dans la configuration parallèle que dans la configuration décalée. Cette observation est clairement mise en évidence si nous isolons seulement les contours des macroporosités (figures 4.18c et 4.18d)



**Figure 4.18** – Résultats de compaction obtenus sur la configuration parallèle (a) & (c) et sur la configuration décalée (b) & (d). Répartitions de la fraction volumique de poudre dans le domaine (a) & (b) et tailles des macroporosités finales (c) & (d).

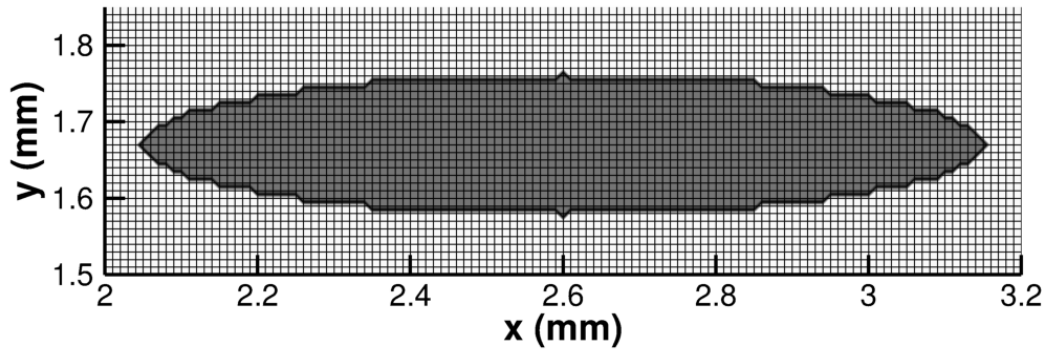
Cette observation se retrouve également par le calcul puisque les plus grosses macroporosités obtenues dans la configuration décalée sont environ trois fois plus importantes que celles obtenues dans la configuration parallèle. En effet, nous obtenons des inhomogénéités d'environ  $3.10^{-9} \text{ m}^2$  et  $1.10^{-9} \text{ m}^2$  respectivement dans les configurations décalée et parallèle. En l'état actuel des travaux, nous ne pouvons cependant pas prévoir la taille et la localisation des inhomogénéités dans une géométrie décalée fixée. Nous ne pouvons que conclure que leur probabilité de présence, ainsi que leur taille, est à corrélérer à une considération géométrique. En rajoutant cette observation aux conclusions de l'étude paramétrique présentée dans la section 4.1, il apparaît que la formation des macroporosités sera très dépendante des géométries de tissages. Pour aller plus loin, il serait intéressant de mener également une étude de l'influence des géométries sur l'apparition des inhomogénéités de compaction, dans lesquelles, à la fois la forme des tissus, mais également leur décalage seraient discutés.

#### 4.2.5 Étude de convergence en maillage

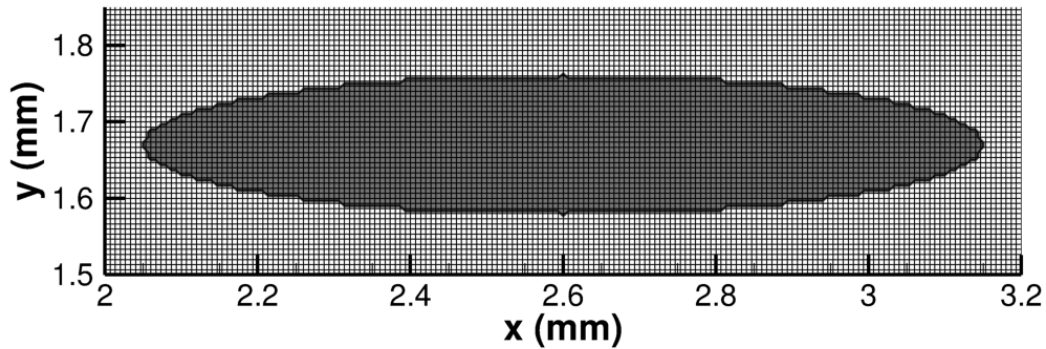
Un des objectifs de cette dernière partie sur les résultats des simulations 2D proche procédé APS, est de vérifier que la formation des macroporosités est correctement résolue par notre modèle. Il est nécessaire de vérifier l'influence des effets numériques sur la taille et la localisation de ces inhomogénéités de compaction.

Dans ce but, nous avons décidé de mener une étude de convergence en maillage, sur les résultats numériques des simulations de l'écoulement dans la configuration décalée (schématisée sur la figure 4.13b), et dans les conditions opératoires résumées dans la sous-section 4.2.2. Trois discrétisations spatiales différentes sont successivement utilisées :  $\Delta_1 = 1.10^{-5}$  m,  $\Delta_2 = 6,6.10^{-6}$  m et  $\Delta_3 = 5.10^{-6}$  m (*cf* sous-section 4.2.2).

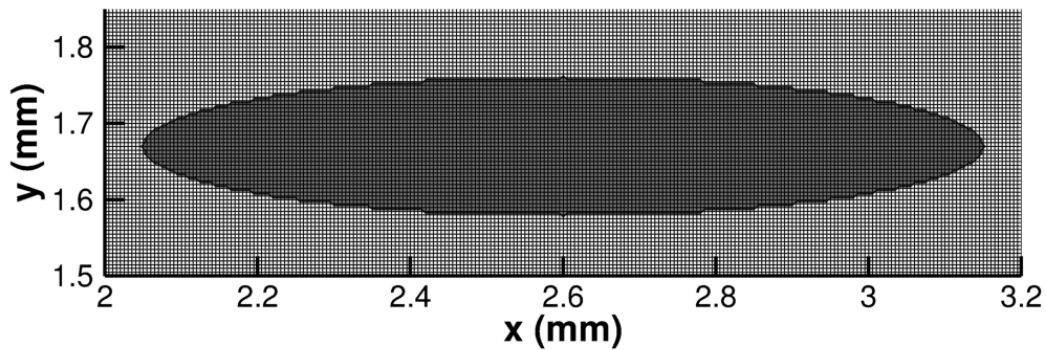
Une illustration des trois discrétisations est reportée sur la figure 4.19 sur laquelle sont également représentés les contours d'un obstacle de référence pour ces trois résolutions.



(a)  $\Delta_1 = 1.10^{-5}$  m.



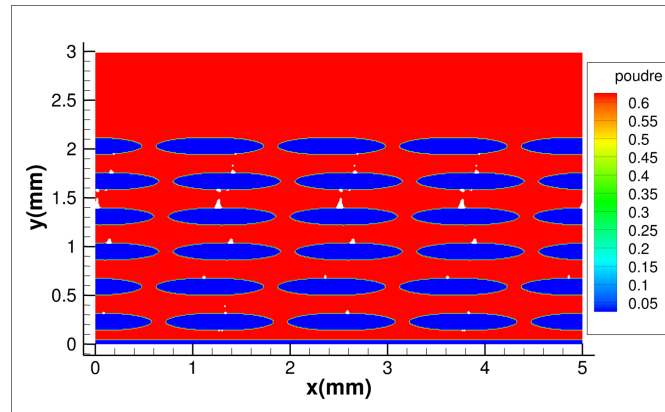
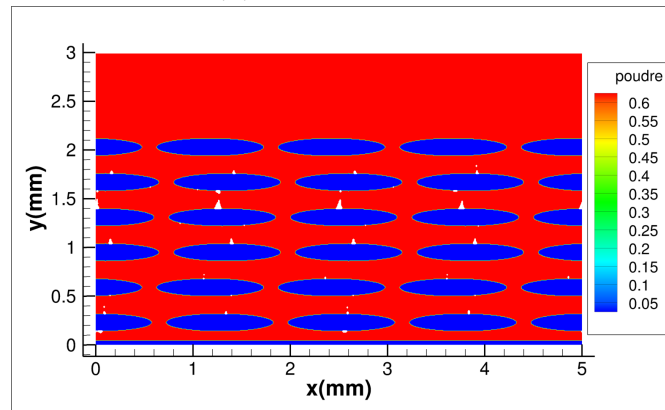
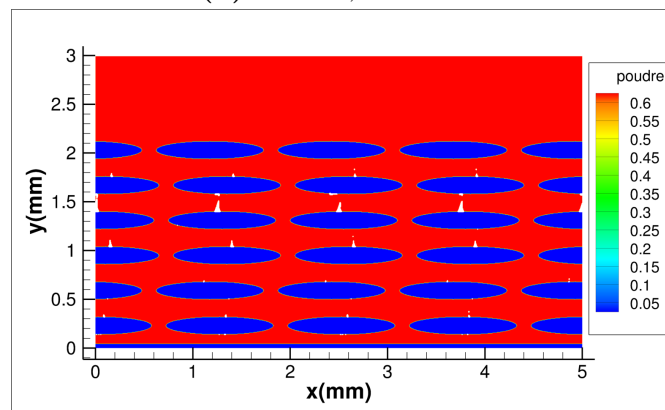
(b)  $\Delta_2 = 6,6.10^{-6}$  m.



(c)  $\Delta_3 = 5.10^{-6}$  m.

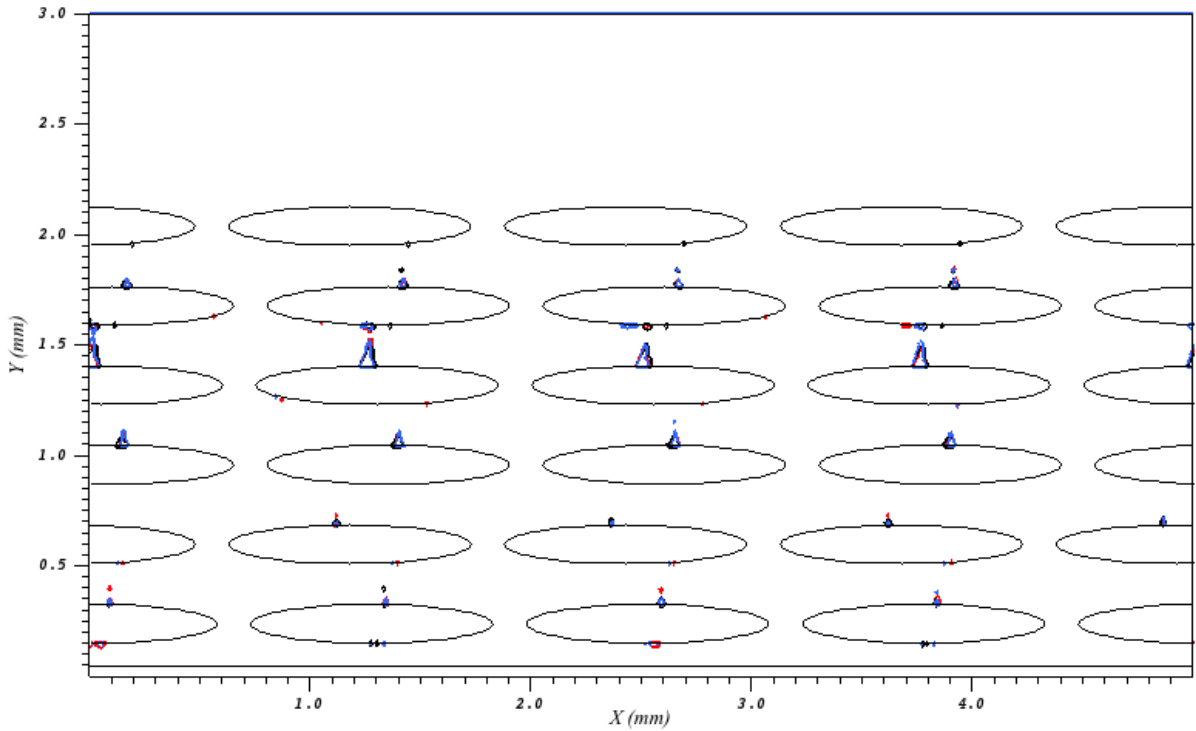
**Figure 4.19** – Les trois résolutions de maillage utilisées dans l'étude de convergence spatiale sur la taille et la localisation des macroporosités. Influence de celles-ci sur les contours des fils du renfort fibreux.

Les cartographies finales, de la répartition spatiale en fraction volumique de particules dans le domaine, obtenues pour les trois discrétisations spatiales utilisées, sont représentées sur la figure 4.20. Sur cette figure, la couleur rouge caractérise le gâteau particulaire, tandis que la couleur bleue définit les fils du tissage. Les macropores résultant d'une mauvaise compaction particulaire sont donc repérés par les incrustations blanches dans le gâteau. Une première observation indique que des inhomogénéités se forment dans les trois simulations. Celles-ci semblent avoir la même taille et sont visiblement situées aux mêmes endroits pour les trois maillages.

(a)  $\Delta_1 = 1.10^{-5} \text{ m.}$ (b)  $\Delta_2 = 6,6.10^{-6} \text{ m.}$ (c)  $\Delta_3 = 5.10^{-6} \text{ m.}$ 

**Figure 4.20** – Répartition finale de fraction volumique de particules selon les trois discrétisations utilisées pour l'étude de convergence en maillage.

Afin de corroborer cette observation, une comparaison par superposition peut être donnée. L'utilisation de trois couleurs différentes permet de tracer, sur le même graphique (*cf* figure 4.21), le contour des macroporosités obtenues respectivement pour les trois maillages. Par cette méthode de superposition, la comparaison des résultats permet d'observer que la formation des macroporosités n'est que faiblement impactée par la résolution utilisée. En effet, d'un maillage à l'autre, seules disparaissent les inhomogénéités plus petites que la taille d'une maille. Pour les autres, leurs localisations et leurs tailles sont quasiment identiques dans les trois cas numériques étudiés.

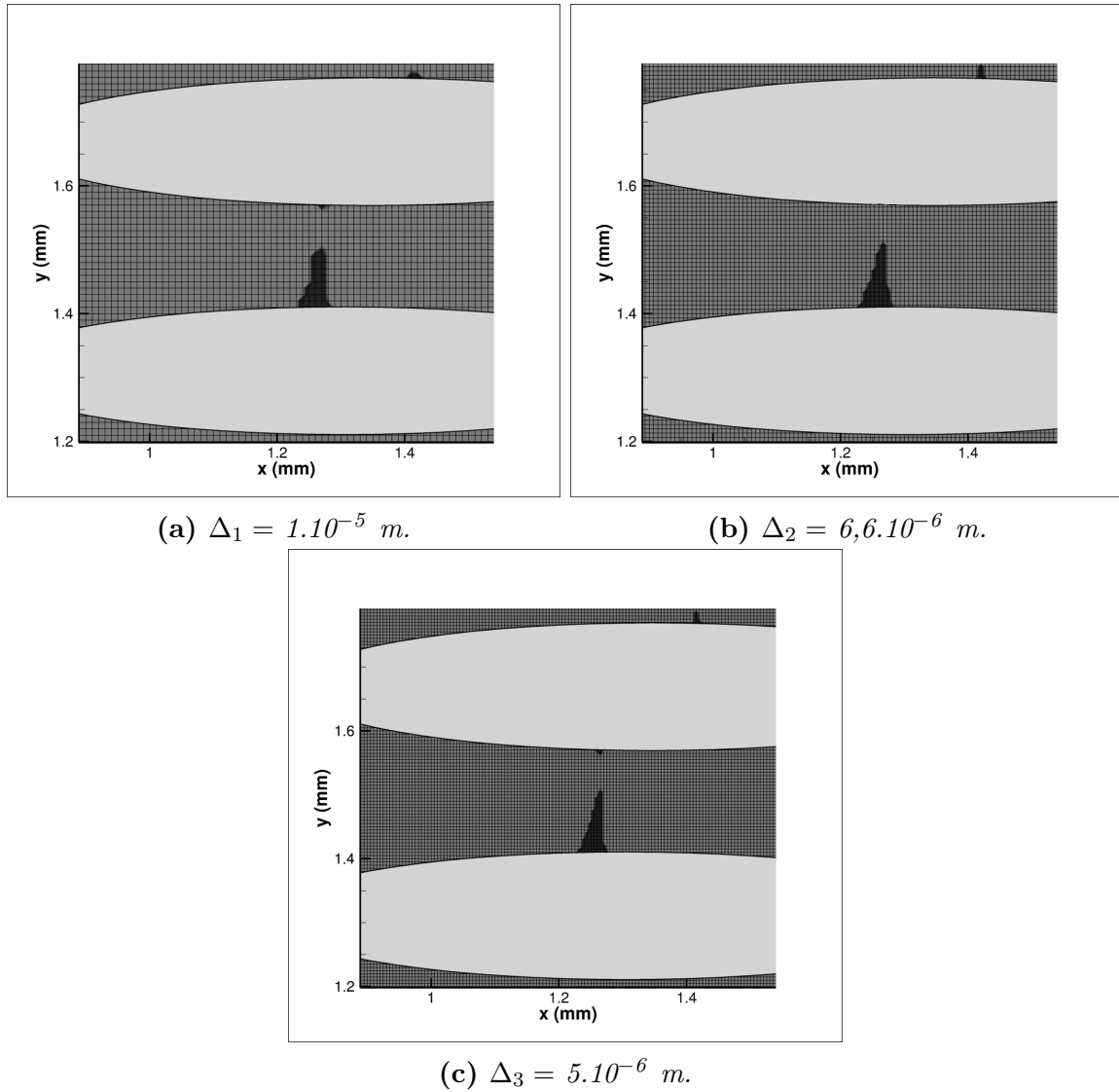


**Figure 4.21** – *Superposition spatiale du contour des macroporosités obtenues pour les maillages  $\Delta_1 = 1.10^{-5}$  m (—),  $\Delta_2 = 6,6.10^{-6}$  m (—),  $\Delta_3 = 5.10^{-6}$  m (—)*

Cette comparaison, effectuée à une échelle relativement grande vis-à-vis des inhomogénéités, n'est pour l'instant que qualitative. Pour s'assurer quantitativement de ces résultats, nous pouvons comparer plus finement la taille d'une macroporosité de référence, résolue dans les trois maillages. Pour satisfaire cette contrainte, l'étude d'une des macroporosités situées entre la quatrième et la cinquième rangée de torons, peut s'avérer judicieuse. C'est la raison pour laquelle, nous avons décidé de nous focaliser sur l'inhomogénéité située à une hauteur de 1,5 mm et une abscisse de 1,2 mm.

La représentation de ces contours, dans les trois discrétisations utilisées dans l'étude, est reportée sur la figure 4.22, page 131. Sur cette figure, les torons sont caractérisés par le gris le plus clair et la macroporosité par le plus sombre. Les formes des macroporosités résolues avec les maillages  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$ , et représentées respectivement en figure 4.22b et 4.22c, sont très proches. Concernant le résultat pour le maillage le plus grossier (*cf* figure 4.22a), la forme finale de la macroporosité est légèrement différente, mais cohérente avec les deux autres. Nous observons donc bien une convergence spatiale sur la taille et la localisation des macroporosités.

En utilisant l'aire d'un élément de référence dans chaque maillage, et en dénombrant ceux qui composent la macroporosité, nous pouvons approcher sa surface. Les résultats, résumés dans le tableau 4.5, montrent un écart d'environ 3,5% entre le maillage le plus fin et le plus grossier.



**Figure 4.22** – Exemple d'une inhomogénéité résolue par le modèle développé dans ces travaux. Comparaison des résultats obtenus sur trois maillages de plus en plus fins.

**Table 4.7** – Surface occupée par la macroporosité, représentée sur la figure 4.22, en fonction de la résolution du maillage. Résultat en nombre approximatif de mailles occupées, et surface équivalente.

| Discretisation (m)       | $\Delta x \times \Delta y \text{ (m}^2\text{)}$ | Nb mailles | Surface (m <sup>2</sup> ) |
|--------------------------|-------------------------------------------------|------------|---------------------------|
| $\Delta_1 = 1,0.10^{-5}$ | $1,0.10^{-10}$                                  | 25         | $2,50.10^{-9}$            |
| $\Delta_2 = 6,6.10^{-6}$ | $4,4.10^{-11}$                                  | 55         | $2,42.10^{-9}$            |
| $\Delta_3 = 5,0.10^{-6}$ | $2,5.10^{-11}$                                  | 95         | $2,37.10^{-9}$            |

La formation des macroporosités, par la résolution du modèle final (2.28), n'est que très faiblement impactée par les erreurs numériques. En effet, dans une configuration géométrique et opératoire fixée, les localisations et les tailles des macroporosités résultantes sont identiques quelle que soit la discrétisation spatiale utilisée.

### 4.2.6 Conclusions de l'étude 2D du procédé APS

L'objectif de cette section était de simuler, en deux dimensions, l'écoulement d'une suspension chargée en particules, autour d'obstacles dont la forme et la disposition se rapprochaient d'une configuration réelle, présente dans le procédé Slurry Cast/APS.

Pour cela, deux dispositions 2D différentes de torons ont été définies. Une première, où tous les obstacles sont alignés et parfaitement parallèles entre eux, et une deuxième, intégrant des décalages horizontaux par rapport à la précédente. Des simulations numériques sur le transport des particules et de la compaction, dans des conditions opératoires proches du procédé, et dans la configuration décalée, nous ont permis d'observer les mécanismes de création des inhomogénéités. Ceux-ci sont exactement identiques à ceux observés dans l'étude paramétrique (*cf* section 4.1).

Une comparaison des résultats précédents, avec ceux obtenus sur la configuration de torons parfaitement parallèles, a mis en lumière une dépendance des inhomogénéités de compaction au décalage entre torons. Cependant, aucune étude qualitative permettant de corrélérer la dimension du décalage à la taille des macroporosités n'a pour le moment été effectuée dans ces travaux.

Enfin, une étude numérique de convergence en maillage a été menée sur la résolution numérique des inhomogénéités de compaction. Celle-ci s'est avérée concluante puisque les tailles et localisations des macroporosités sont très proches quelle que soit la discrétisation spatiale utilisée. Ces résultats attestent de la bonne résolution des inhomogénéités de compaction par le modèle développé dans cette thèse. Ils sont, de plus, très encourageants puisque la détermination des macroporosités ne nécessite pas l'utilisation d'un maillage fin, et donc d'un temps de calcul conséquent. De cette manière, un grand nombre de configurations géométriques peuvent être étudiées rapidement en faisant appel à des discrétisations spatiales "grossières". Les résultats concernant les inhomogénéités seront alors assurément proches de ceux obtenus avec des maillages plus fins.

Dans la suite du manuscrit, nous allons présenter les résultats des simulations de l'écoulement d'une suspension chargée, autour d'une préforme fibreuse 3D. Les conditions d'écoulement seront les plus proches possible du procédé.

## 4.3 Étude 3D du procédé APS

### 4.3.1 Objectifs de l'étude

L'étude numérique 2D précédente (section 4.2), a permis de simuler numériquement l'écoulement et la compaction d'une suspension dans une configuration géométrique et opératoire proche du procédé APS.

Les résultats ont montré que la taille des inhomogénéités de compaction étaient dépendantes tant de la concentration initiale que de la disposition des fils dans la préforme. Cependant, ces résultats en deux dimensions ne donnent qu'une tendance de l'influence de certains paramètres, et ne peuvent en aucun cas être comparés rigoureusement à des résultats expérimentaux.

Dans la réalité du procédé Slurry Cast/APS, une représentation en deux dimensions de la préforme fibreuse à densifier ne pourra qu'approcher toute sa complexité (comme la tortuosité par exemple). Dans les simulations en 2D, la présence des macroporosités est due à la formation de zones non denses en particules qui, dans une configuration 3D, peuvent continuer d'être alimentées en particules en raison d'une connectivité assez différente. L'étude numérique 3D, sur une configuration proche du procédé APS, et présentée dans cette dernière partie du chapitre 4, a pour principal objectif de quantifier l'influence de la complexité de l'écoulement en trois dimensions, sur la présence et la taille des inhomogénéités.

Ce premier objectif est justifié par les besoins de l'industriel SAFRAN Ceramics concernant ce procédé de densification (*cf* sous-section 1.4.5). D'un point de vue plus académique, une telle étude en 3D est nécessaire pour tester la robustesse du modèle et du code de calcul utilisé pour les simulations.

L'utilité de cette dernière étude est donc double :

1. Elle fournit une réponse la plus précise possible aux questionnements de l'industriel concernant le procédé de densification Slurry Cast/APS. En se plaçant dans une configuration géométrique et opératoire retranscrivant toute la complexité du matériau à densifier, elle permet de visualiser directement les résultats de compaction dans toute la pièce.
2. Elle permet de tester la robustesse du modèle ainsi que la performance de résolution du code de calcul développé.

Afin de mener à bien cette étude, il est donc indispensable de présenter la géométrie de la préforme 3D modélisée dans cette étude. Celle-ci sera un obstacle imperméable tant au fluide saturant qu'aux particules de la suspension. Le choix retenu, et ses justifications, sont données dans la sous-section suivante.

### 4.3.2 Armature fibreuse étudiée

Le procédé de densification étudié dans cette thèse est utilisé pour la fabrication de pièces stratégiques, présentes dans les moteurs d'avions développés par SAFRAN Ceramics. Au vu de la forme finale de la pièce, et dans le but de garantir sa solidité, la préforme fibreuse générée pendant l'étape de tressage est très complexe. Son architecture est classée secret industriel et ne peut donc pas être explicitement présentée dans ces travaux.

Afin de tester le modèle implémenté dans le code de calculs Thetis, sur des géométries 3D, il est nécessaire d'utiliser une structure tissée plus conventionnelle. Pour cela, nous avons décidé de nous rapprocher d'un tissage de type satin. La discussion de la paramétrisation des simulations, ainsi que de leurs résultats, seront donnés dans les deux sous-sections suivantes. Avant cela, il est intéressant de présenter plus en détails, la problématique de confection de l'armature tissée utilisée dans ces simulations.



Le satin est, avec la toile et le serge, un des principaux tissage plan (*cf* section 1.1, figure 1.2a). Le principal avantage des tissages 2D se retrouve dans leur facilité de conception. Cependant, leur utilisation dans la confection d'une pièce 3D la rend obligatoirement plus fragile que si elle était faite avec une structure plus complexe (par exemple un tissage 3D). Cette étude ne relevant pas d'une caractérisation comportementale de matériau, la simplicité d'usage proposée par les tissages 2D s'avère fort intéressante. Avant d'étudier la spécificité du tissage satin, il est nécessaire de présenter le vocabulaire propre à cette problématique :

- La chaîne : composée des fils de chaîne, elle est le support de la trame. Les fils de chaîne sont généralement représentés verticalement dans les schématisations des tissus plans.
- La trame : composée des fils de trame. Tissée avec la chaîne, elle forme le tissu final.
- Les points de liage : correspondent aux points où les fils de chaîne surmontent les fils de trame.
- Les décochements : correspondent à l'inverse des points de liage. Ils dénomment ainsi l'ensemble des points du tissage où les fils de trame passent au dessus les fils de chaîne.

Le principe d'un tissage plan est de répéter, sur la surface désirée, un motif de base appelé **armure**. Cette armure est propre à chaque tissage et représente le plus petit motif élémentaire existant (équivalent du VER défini à la section 1.1). Sa schématisation permet de visualiser les points de liage ou les décochements à réaliser pour générer le tissage souhaité. Dans le cas général, cette schématisation se présente sous la forme d'un carré constitué de  $p$  colonnes (fils de chaîne) et  $p$  lignes (fils de trame). Dans le cas particulier de l'armure de satin, il n'y a qu'un décochement par ligne et par colonne, et leur localisation s'obtient facilement par la règle arithmétique suivante :

*Soit  $p^2$  le nombre de colonnes et de lignes de l'armure, numérotées respectivement de 0 à  $(p-1)$ . Si on note  $d$ , le numéro de la ligne où le décochement de la colonne n°1 a lieu, alors le décochement sur la colonne n° $k$  est localisé sur la ligne numéro  $k * d$  modulo  $p$ . L'armure sera alors de module  $p$  et de décochement  $d$ .*

Le plus petit motif représentatif du satin est composé de 5 fils de chaîne et 5 fils de trame. Comme présenté sur la figure 4.23, les colonnes et les lignes de cette armure sont numérotées chacune de 0 à 4 (les fils de chaîne en vert et les fils de trame en bleu).

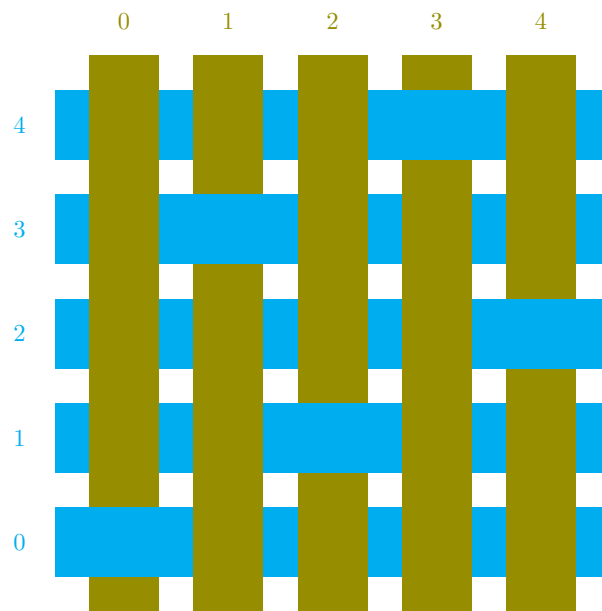
Une armure de satin est de modulo 5 et de décochement 3, *i.e* le fil de chaîne n°1 passe en dessous du fil de trame n°3. Les décochements dans un tissage satin se calculent donc de la manière suivante :

$$(3 \times \text{n}^\circ \text{ colonne}) \bmod 5$$

La localisation de tous les décochements présents dans l'armure du satin est résumée dans le tableau 4.8.

**Table 4.8** – Localisation des décochements dans l'armure de satin.

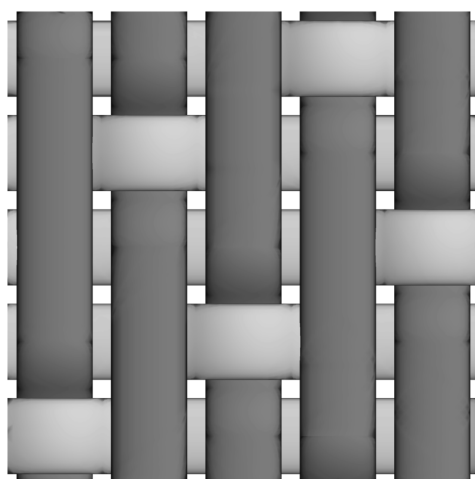
| Numéro colonne (fil de chaîne)       | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------------------------|---|---|---|---|---|
| Décochement sur ligne (fil de trame) | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |



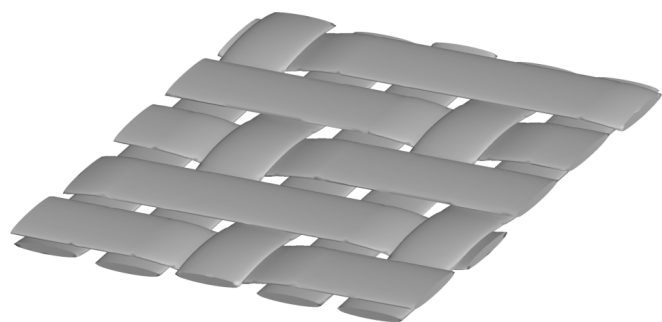
**Figure 4.23** – Schématisation de l'armure d'un tissage de type satin avec la localisation des décochements. Les fils de chaîne sont disposés verticalement et représentés par la couleur verte. Les fils de trame horizontaux sont eux caractérisés en bleu.

### 4.3.3 Mise en place de la simulation

Cette armure de satin définie sur la figure 4.23 est générée par ordinateur à l'aide d'un logiciel de CAO. Le résultat est donné sur la figure 4.24, avec une vue de dessus et une vue latérale. Une comparaison visuelle atteste immédiatement que les figures 4.24 et 4.23 sont identiques. Cette armure de satin générée par ordinateur, représente un pavé de côté 15,3 mm et d'épaisseur 0,71 mm.



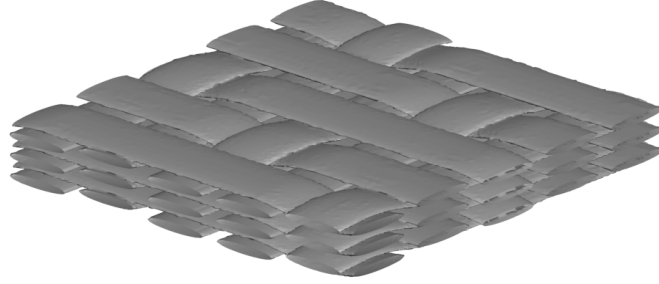
(a) Vue du dessus



(b) Vue latérale

**Figure 4.24** – Conception assistée par ordinateur d'une armure de satin de module 5 et de décochement 3.

Ce tissage plan de référence est superposé deux fois consécutivement pour former un modèle d'armature 3D simple. Comme évoqué dans le chapitre 2, et plus particulièrement dans la sous-section 2.3.6, l'intégration d'un tel obstacle lagrangien dans un code de calcul utilisant le principe des frontières immergées, implique fatalement une étape de projection de l'objet sur le maillage de résolution utilisé dans les simulations 3D. Cette projection s'effectue à l'aide d'une méthode de Ray-casting [Sarhou, 2009], et le résultat final pour notre obstacle, est donné sur la figure 4.25. Le domaine de calcul utilisé dans ces simulations est un pavé de côté 15,3 mm et d'épaisseur 3 mm. Le choix de l'épaisseur assure un espace suffisant entre l'entrée du domaine et l'obstacle.



**Figure 4.25** – *Résultat de la projection d'un obstacle lagrangien, sur un maillage eulérien, par la méthode de Ray-casting. Application à l'obstacle utilisé dans nos simulations 3D proches procédé APS.*

Sur la figure précédente nous pouvons remarquer que les contours de l'obstacle sont moins nets que ceux sur la figure 4.24b. Ces petits défauts sont dus au maillage en lui-même puisque celui-ci n'est pas adapté directement pour coller parfaitement aux contours de l'obstacle. Pour minimiser ces erreurs géométriques nous pouvons utiliser une discrétisation plus fine utilisant plus de points. Cependant, le temps nécessaires aux calculs seront grandement allongés.

Dans cette étude, le maillage a été choisi afin d'assurer une bonne résolution des contours de l'obstacle tout en minimisant le nombre de points. De cette manière, les temps de calculs nécessaires à cette étude restent raisonnables (environ 1 semaine de calculs sur 32 coeurs). Cette discrétisation est tri-dimensionnelle et comporte  $N_x \times N_y \times N_z$  éléments respectivement égaux à 100, 153 et 153. Les pas d'espaces ainsi calculés valent dans chaque direction :

$$\Delta x = 3.10^{-5} \text{ m}^2 \quad (4.1)$$

$$\Delta y = \Delta z = 1.10^{-4} \text{ m}^2 \quad (4.2)$$

Enfin, pour que la configuration des simulations soit complète, il est nécessaire de définir les conditions aux limites. L'écoulement est piloté par un gradient de pression imposé  $\Delta p$ . Il s'effectue de la limite supérieure (haut de la figure 4.25) vers la limite inférieure (bas de la figure), perpendiculairement au plan de tissage. Deux conditions d'entrée sur l'espèce sont successivement étudiées : une avec une concentration initiale à  $\phi_0^s = 0,20$  et une deuxième à  $\phi_0^s = 0,45$ . Sur les côtés du domaine, des conditions Libre, de Symétrie et de Neumann sont respectivement appliquées sur les limites pour la pression, la vitesse et d'espèce. L'ensemble est résumé dans le tableau 4.9.

**Table 4.9** – Ensemble des conditions limites appliquées dans la simulation 3D de l'écoulement d'une suspension autour d'une préforme tissée de type satin.

| Limite     | Condition en Pression | Condition en Vitesse | Condition en Espèce   |
|------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| Supérieure | Constante : $p_1$     | Neumann              | Constant : $\phi_0^s$ |
| Inférieure | Constante : $p_2$     | Neumann              | Neumann               |
| Gauche     | Libre                 | Symétrie             | Neumann               |
| Droite     | Libre                 | Symétrie             | Neumann               |
| Avant      | Libre                 | Symétrie             | Neumann               |
| Arrière    | Libre                 | Symétrie             | Neumann               |

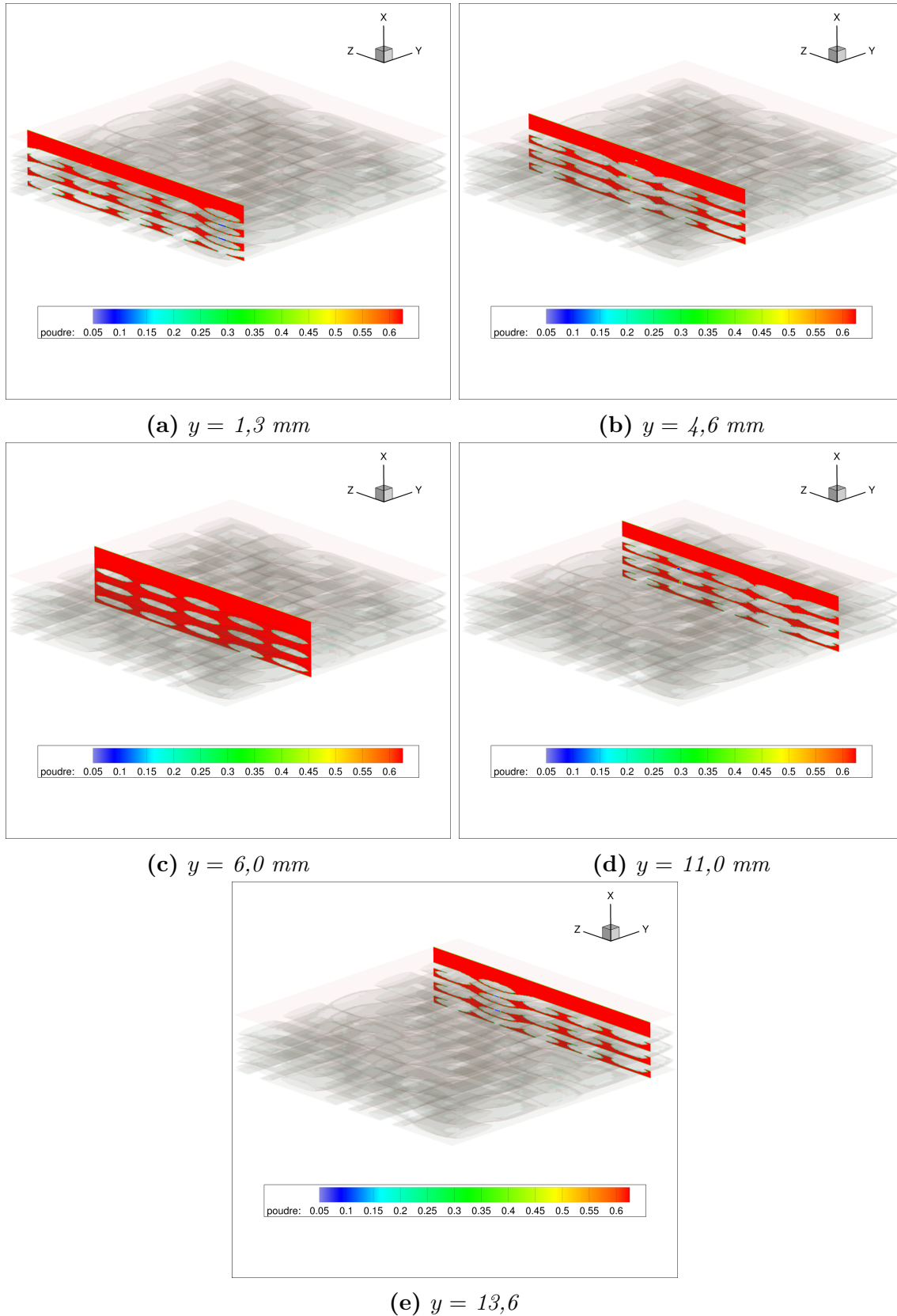
#### 4.3.4 Résultats des simulations

A l'aide de l'obstacle défini sur la figure 4.25, et des conditions aux limites du tableau 4.9, deux simulations numériques ont été menées et correspondent respectivement à des suspensions initialement chargées à  $\phi_0^s = 0,20$  et à  $\phi_0^s = 0,45$ . Dans le but de visualiser les macroporosités présentes en fin de procédé, nous pouvons tracer la répartition de poudre finale selon quelques coupes judicieusement choisies. Ces représentations sont proposées sur les figures suivantes :

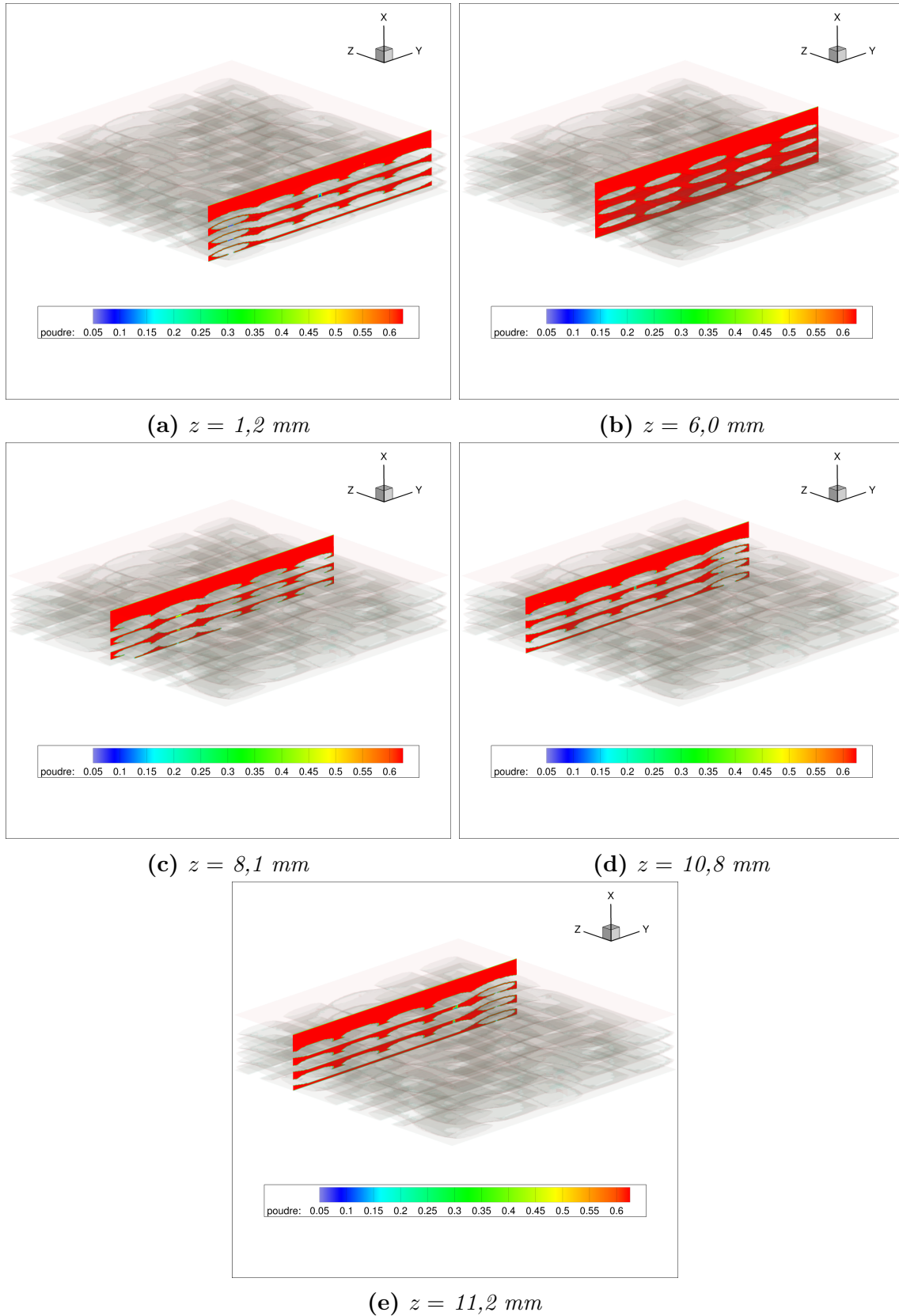
- Figure 4.26, page 138  
coupe normale à  $\mathbf{y}$  pour l'écoulement à  $\phi_0^s = 0,20$ .
- Figure 4.27, page 139  
coupe normale à  $\mathbf{z}$  pour l'écoulement à  $\phi_0^s = 0,20$ .
- Figure 4.28, page 140  
coupe normale à  $\mathbf{y}$  pour l'écoulement à  $\phi_0^s = 0,45$ .
- Figure 4.29, page 141  
coupe normale à  $\mathbf{z}$  pour l'écoulement à  $\phi_0^s = 0,45$ .

Afin de situer la position des coupes dans le matériau tout en gardant une certaine lisibilité, la préforme fibreuse a volontairement été mise en transparence et l'obstacle n'est pas tracé sur les coupes. Ainsi, sur toutes les figures suivantes, nous pouvons visualiser à la fois les zones parfaitement compactées (en rouge) et les macroporosités.

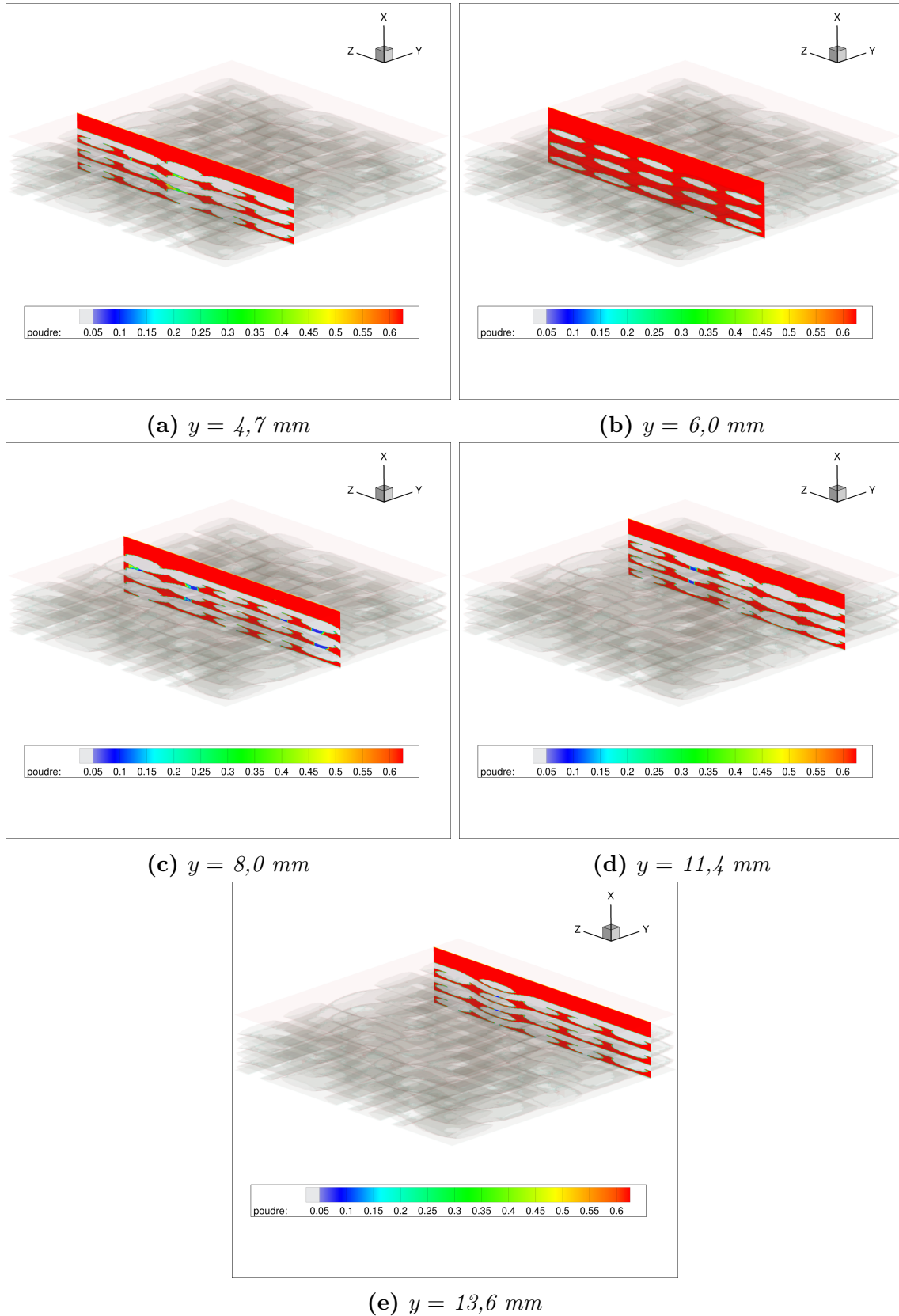
Pour la suspension initialement chargée à  $\phi_0^s = 0,20$ , la figure 4.30 présente des zooms sur les plus grosses macroporosités observées. Le volume de l'inhomogénéité la plus importante est de l'ordre de  $10^{-11} \text{ m}^3$ . Concernant la suspension initialement chargée à  $\phi_0^s = 0,45$ , la figure 4.31 permet une estimation de la taille des plus grosses macroporosités de l'ordre de  $10^{-10} \text{ m}^3$ . Les inhomogénéités sont généralement situées sous un croisement entre les fils de chaîne et les fils de trame. Ces localisations correspondent à des zones mortes de l'écoulement, et ne peuvent donc être alimentées en particules que par diffusion. Or la valeur élevée du nombre de Péclet massique, indique que c'est le transport par advection qui domine. Ainsi, les zones mortes n'étant que faiblement alimentées en particules, il est naturel d'y retrouver les macroporosités à la fin du procédé.



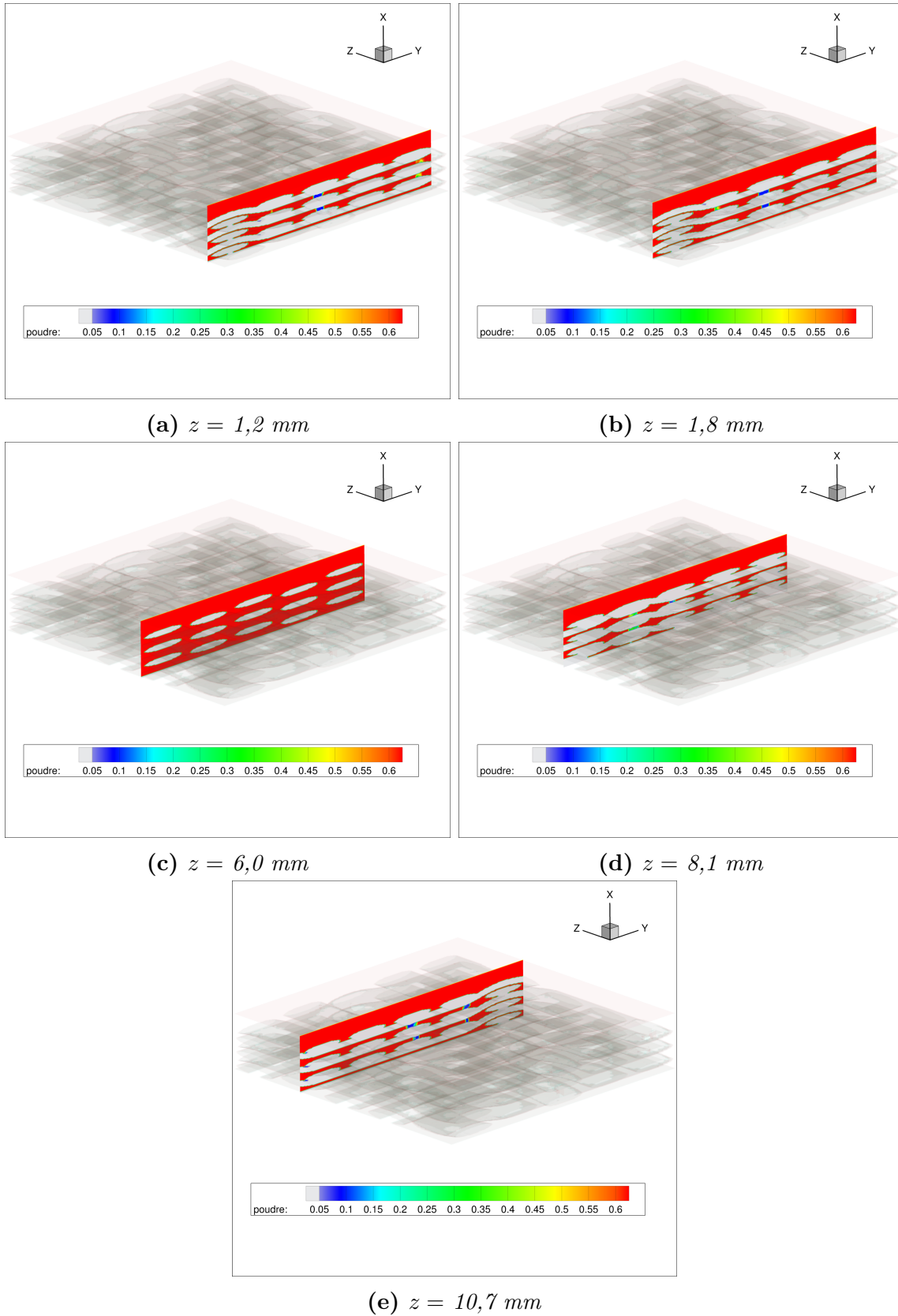
**Figure 4.26** – Répartition finale de poudre dans le domaine, après écoulement d'une suspension chargée initialement à  $\phi_0^s = 0,20$ . Visualisation de la taille des macroporosité dans cinq coupes de normale  $y$ .



**Figure 4.27** – Répartition finale de poudre dans le domaine, après écoulement d'une suspension chargée initialement à  $\phi_0^s = 0,20$ . Visualisation de la taille des macroporosité dans cinq coupes de normale  $z$ .

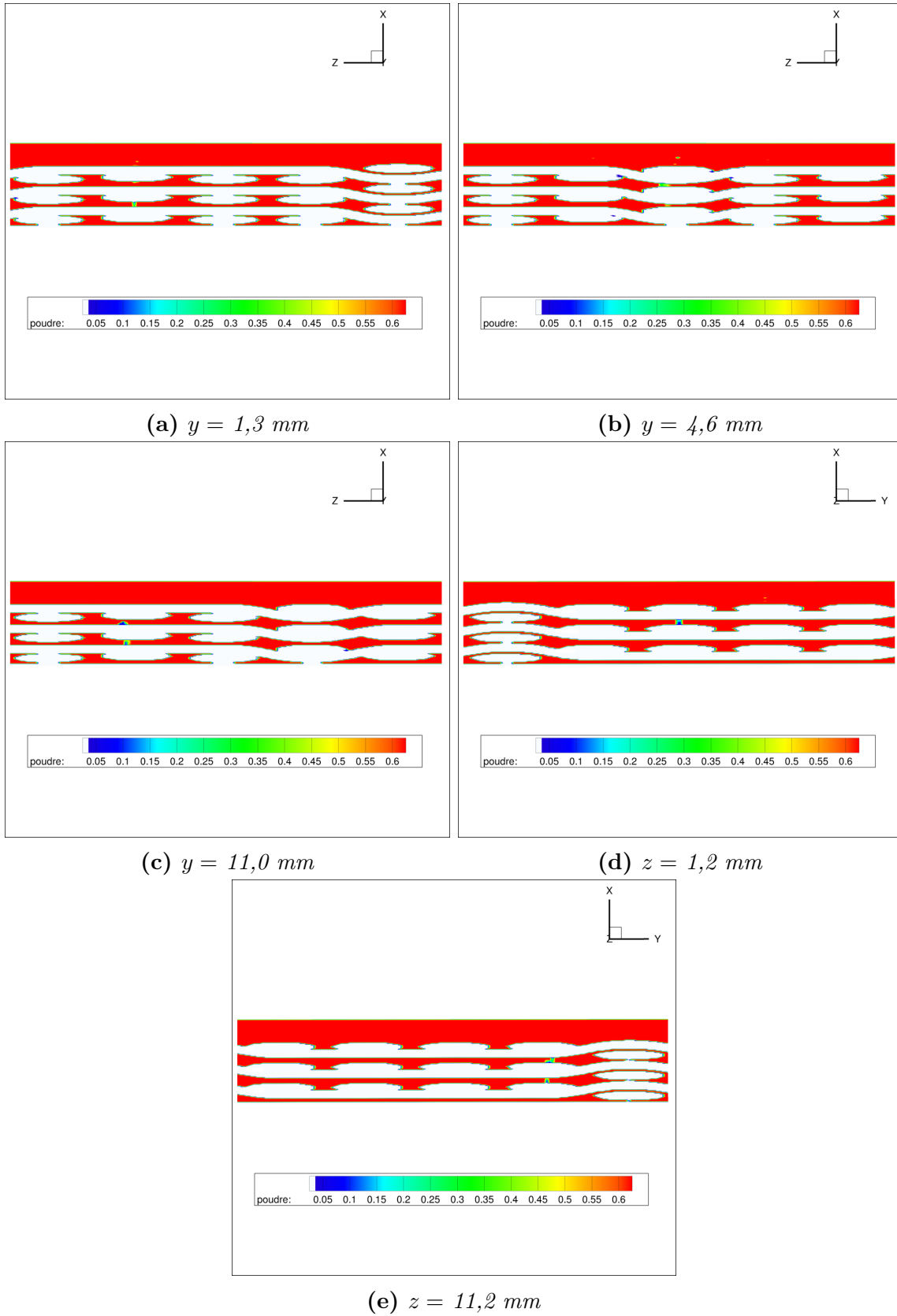


**Figure 4.28** – Répartition finale de poudre dans le domaine, après écoulement d'une suspension chargée initialement à  $\phi_0^s = 0,45$ . Visualisation de la taille des macroporosité dans cinq coupes de normale  $y$ .

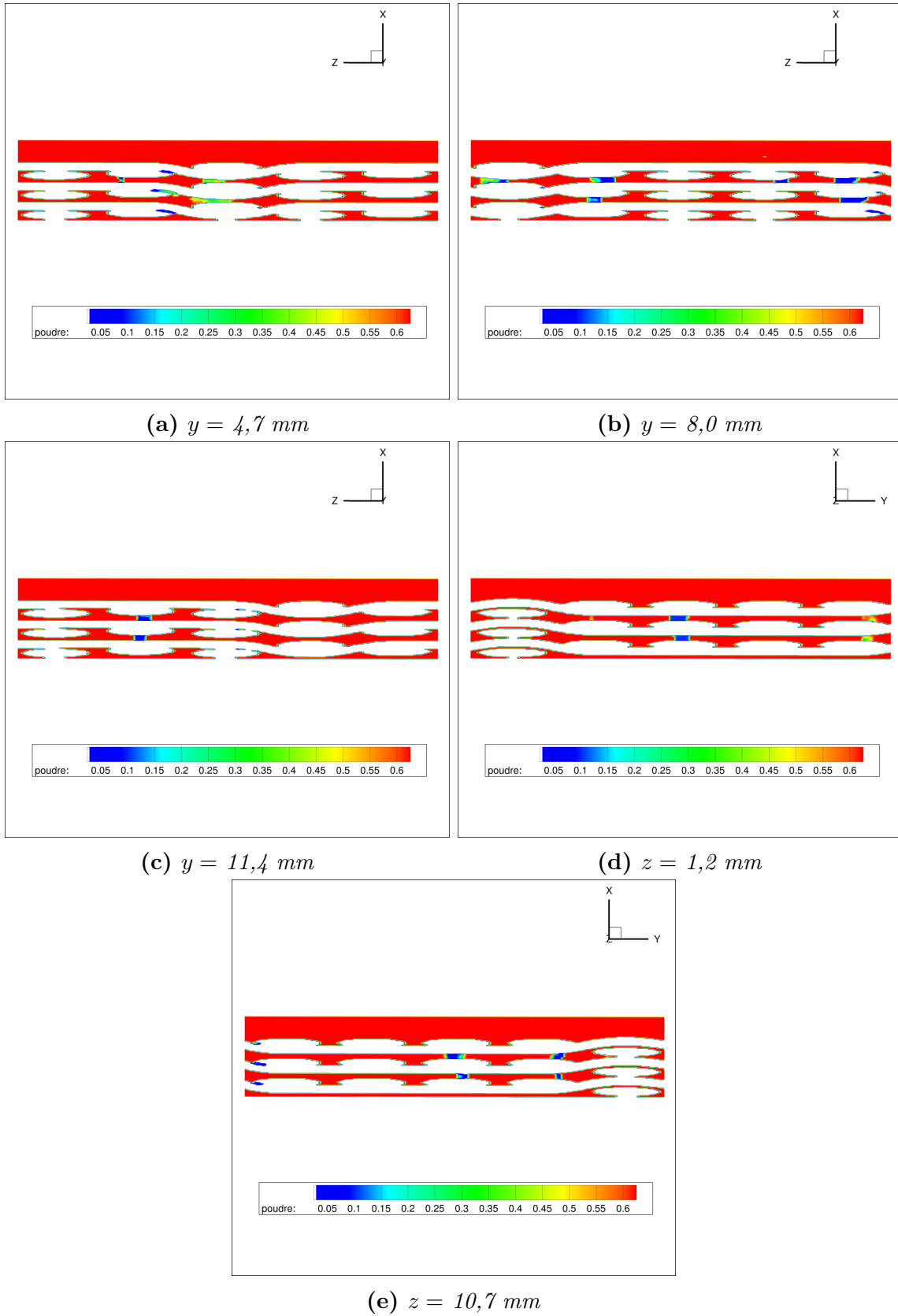


**Figure 4.29** – Répartition finale de poudre dans le domaine, après écoulement d'une suspension chargée initialement à  $\phi_0^s = 0,45$ . Visualisation de la taille des macroporosité dans cinq coupes de normale  $z$ .



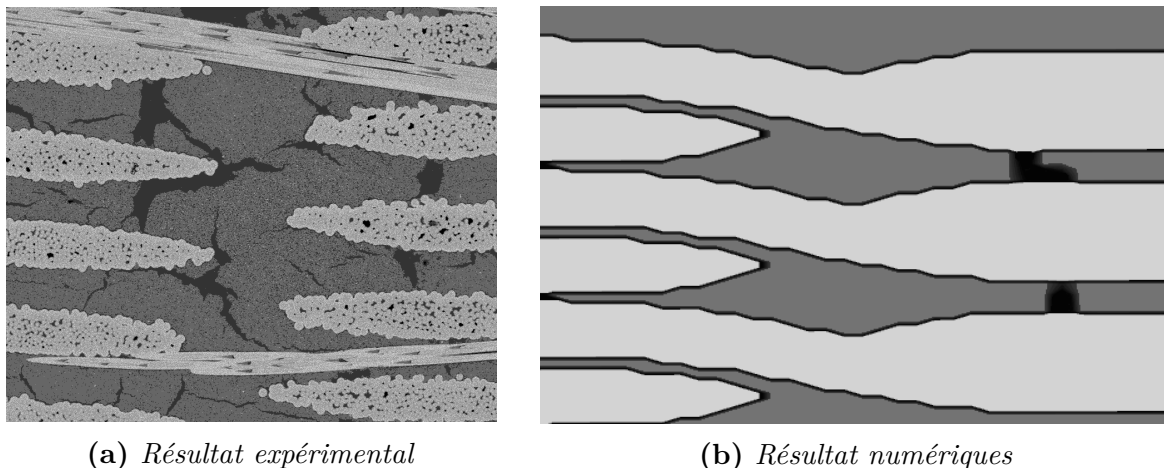


**Figure 4.30** – Zoom sur les macroporosités les plus importantes et résultantes de la compaction particulaire dans la préforme fibreuse pour une suspension initialement chargée à  $\phi_0^s = 0,20$ .



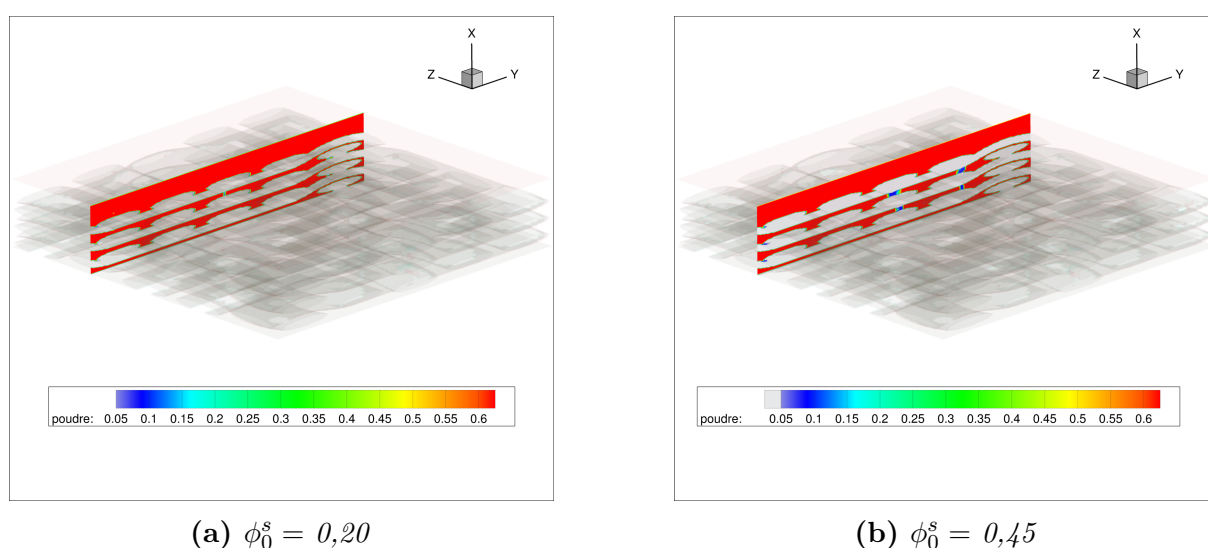
**Figure 4.31** – Zoom sur les macroporosités les plus importantes et résultantes de la compaction particulaire dans la préforme fibreuse pour une suspension initialement chargée à  $\phi_0^s = 0,45$ .

Comme pour l'étude 2D, une comparaison qualitative entre les résultats expérimentaux et numériques est effectuée et donnée en figure 4.32. Sur cette figure, les macroporosités et les fils du tissage sont repérés par des nuances de gris respectivement la plus sombre et la plus claire. Cette comparaison ne peut être que qualitative puisque seules les conditions opératoires sont proches. En effet, les deux géométries de tissage ne sont pas parfaitement identiques sur la figure 4.32.



**Figure 4.32** – Comparaison expérimental/numérique en 3D de la compaction particulaire dans l'espace inter-fil. Visualisation des inhomogénéités de remplissage de la préforme.

Malgré cette différence sur la géométrie du tissage retenue, les conclusions émises lors de la précédente étude 2D se retrouvent ici. Ainsi, les résultats en 3D mettent en lumière que les tailles des macroporosités finales sont grandement impactées par le taux initial de particules en suspension. Pour s'en assurer, une comparaison visuelle de la taille des macroporosités sur le même plan de coupe  $z = 10,8$  mm et pour les deux suspensions ( $\phi_0^s = 0,20$  et  $\phi_0^s = 0,45$ ) est donnée en figure 4.33.



**Figure 4.33** – Macroporosités résultantes sur le plan  $z = 10,8$  m, pour les deux suspensions étudiées.

Cette observation va dans le sens de celles effectuées dans l'étude paramétrique (section 4.1) ainsi que dans l'étude 2D proche APS (section 4.2). Cependant, pour aller plus loin, il serait intéressant d'effectuer des expériences rapides d'infiltration de particules dans des tissages industriels en satin, permettant une comparaison expérience/simulation rigoureuse et quantitative. De cette manière, le modèle pourrait être totalement validé et les simulations pourraient devenir prédictives. Sans ces expériences ces résultats ne sont cependant pas inexploitable. En effet, pour des configurations géométriques et opératoires données, ces simulations fournissent des cartographie 3D de répartition de poudre dans le tissage à la fin du procédé Slurry Cast/APS (et avant séchage). Elles permettent ainsi de répondre au premier objectif présenté dans la sous-section 4.3.1, *i.e.*, répondre aux questionnements de l'industriel concernant le procédé d'introduction de particules.

Le second objectif de cette étude était de quantifier l'influence des effets 2D sur la taille des macroporosités, et ce à l'aide d'une comparaison avec l'étude 2D précédemment présentée (*cf* section 4.2). Ainsi, bien qu'une représentation 2D ne peut pas parfaitement modéliser toute la complexité d'un tissage réel, l'intégration d'un décalage dans celle-ci dans le but de tenir compte de la tortuosité, permet d'obtenir des résultats cohérents. En effet, les macroporosités obtenues dans les simulations en 3D possèdent des volumes très proches des surfaces de vide résolues dans l'étude précédente. Les résultats présentés dans la section précédente sont donc très pertinents et fournissent une description très fidèle de la taille des macroporosités présentes dans l'expérience.

A titre de comparaison, la simulation 2D utilisant la résolution la plus grossière (*cf* sous-section 4.2.2) ne nécessite que 20h de calculs, tandis que la simulation 3D présentée dans cette section, a besoin d'environ une semaine de calcul (pour les mêmes ressources informatiques, soit 32 cœurs). Il vient ainsi que les deux études proches du procédé APS n'auront pas la même utilité. Celle en 3D fournira des résultats plus représentatifs sur la localisation et la taille des macroporosités mais nécessitera beaucoup d'heure de calculs, pendant que celle en 2D donnera rapidement une idée des tailles de celles-ci pour des conditions opératoires données.



# Conclusions générales et perspectives

Depuis quelques années, le groupe SAFRAN développe une nouvelle génération de moteur d'avion civil baptisé LEAP. En s'appuyant sur les points forts de son prédécesseur (le CFM56) et en utilisant de nouvelles technologies dans ce domaine, cette nouvelle génération sera plus performante, plus économe en carburant et plus propre. Pour garantir de telles caractéristiques, il est nécessaire de travailler tant sur l'architecture globale du moteur que sur la conception de pièces internes stratégiques. Ainsi, une attention particulière a été portée aux aubes de turbines de ce nouveau moteur. Pour rappel, l'augmentation des températures dans les zones haute pression assure une meilleure combustion et une diminution des rejets en gaz polluants. Cependant, afin d'assurer fiabilité et sécurité en fonctionnement, la mise en température de ces pièces ne doit pas se faire au détriment de leur robustesse. C'est la raison pour laquelle leur conception fait appel aux matériaux composites, car ceux-ci assurent un comportement thermo-mécanique inégalé face aux matériaux métalliques classiques.

De la forme finale des aubes de turbines utilisées dans le moteur LEAP dépendra la complexité de leur procédé de fabrication. En effet, comme nous l'avons vu dans la section 1.4 l'étape de tissage de la préforme est suivie d'une densification en deux étapes. Dans celle-ci, une poudre est préalablement introduite au sein du renfort tissé à l'aide d'une phase porteuse liquide. Cette étape, prénommée Slurry Cast/APS a pour principal objectif de réduire la porosité résiduelle de l'ensemble afin d'améliorer la remontée capillaire d'un métal fondu opérée durant la seconde étape (RMI). Ce métal réagit avec les particules et permet la densification du matériau, ce qui termine la fabrication de l'aube.

Pour maîtriser ce procédé de densification relativement nouveau, il est indispensable d'en comprendre l'ensemble des mécanismes physico-chimiques. Concernant l'étape RMI, il est par exemple nécessaire de limiter la réaction chimique entre le métal et les particules afin de ne pas empêcher la remontée capillaire. Pour l'étape précédente, la compréhension des phénomènes permet de lier les conditions d'injection de la suspension à l'homogénéité finale de remplissage, condition optimisant la remontée du métal fondu.

Afin d'améliorer la compréhension globale du procédé de densification, chaque étape peut être étudiée soit par l'expérience soit par l'utilisation d'outils numériques tels que la modélisation et la simulation. C'est dans ce dernier cadre que s'inscrivaient les travaux de cette thèse. En effet, nous nous proposons d'établir un modèle d'équations permettant de simuler, à l'échelle des fibres du renfort, l'écoulement chargé en particules ayant lieu durant l'étape Slurry Cast/APS. La seconde étape étant étudiée dans d'autres travaux [Pons, 2017] [Marchais, 2016].

Concernant l'étape d'introduction des particules, la mise en place d'un système d'équations modélisant très finement l'écoulement n'est pas immédiate. En effet, comme dans tout travail numérique, le champ d'action du modèle utilisé est limité par l'échelle concernée. Ainsi, tout phénomène physique observé à un autre niveau doit être étudié et retranscrit à l'échelle d'observation. Dans le cas particulier des travaux de cette thèse, cette observation se retrouvait au niveau même des particules. Le cahier des charges fixé par l'industriel nous a amené à déterminer un modèle à l'échelle des fibres du tissage. Or les particules mises en suspension sont bien plus petites (rapport 1/1000<sup>ème</sup>) et ne peuvent pas être directement prises en compte. Pour pouvoir suivre leur répartition dans la suspension, une grandeur moyenne, la fraction volumique de poudre  $\phi^s$ , a été retenue.

Dans le but de modéliser l'écoulement de la suspension et l'influence sur sa composition, l'ensemble phase porteuse et particules est suivi comme un fluide dont les caractéristiques (masse volumique, viscosité) sont dépendantes de cette fraction. Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, cette description se fait à l'aide des équations de Navier-Stokes (conservation de la masse et de la quantité de mouvement), avec une loi de mélange sur  $\rho$  et une loi rhéologique sur  $\mu$ . L'interaction particules/particules se résume dans notre étude à des chocs entre celles-ci. Pour tenir compte de cette migration particulière à l'échelle des fibres, une équation de transport-diffusion sur la fraction  $\phi^s$ , proposée dans les travaux de [Phillips et al., 1992], a été introduite. Afin de vérifier que ces équations retranscrivaient correctement l'écoulement d'un fluide chargé, nous nous sommes rapprochés des travaux exposés dans l'article [Hampton et al., 1997]. Ceux-ci étudient l'écoulement d'une suspension dans une conduite cylindrique et exhibent des profils radiaux de vitesse et de fraction volumique de poudre en sortie de canal. La comparaison des résultats de nos simulations avec les résultats expérimentaux et numériques fournis dans cette référence nous a permis de conclure quant à la validité du modèle. De plus, nous avons pu vérifier que la condition à la limite introduite dans ces travaux, consistant à annuler le flux de particules au travers d'obstacles imperméables, permettait d'améliorer significativement les résultats numériques en comparaison de l'expérience.

L'apport principal des travaux de cette thèse se situe au niveau de notre modèle qui, en plus de la ségrégation particulière, permet également de simuler des phénomènes de compaction et de confinement des particules. Dans le procédé Slurry Cast/APS, ces phénomènes sont dus à la présence d'un filtre à particules qui entraîne l'apparition de zones denses immobiles. Du fait de la séparation d'échelle, ces agrégats (formant le gâteau particulaire) sont définis comme des milieux poreux isotropes. L'écoulement dans ceux-ci est celui de la phase fluide de la suspension et est modélisé par une équation de Darcy-Brinkman. Cette approche globale entre un écoulement libre et un écoulement en milieu poreux permet de tenir compte de l'ensemble de la physique présente dans le procédé de pré-densification Slurry Cast/APS. Pour valider le couplage entre les équations de Navier-Stokes, de Phillips et de Darcy-Brinkman, nous avons comparé la croissance d'un front 1D de gâteau particulaire résolue numériquement avec une loi théorique fournie dans les travaux de [Belfort et al., 1994]. Cette dernière démarche nous a permis de complètement valider les résultats de notre modèle d'équations.

Une fois notre modèle d'équations complet validé, l'écoulement d'un fluide chargé dans des géométries de tissage proches de celles présentes dans les aubes a été simulé. L'idée étant de répondre le plus précisément possible aux questionnements de l'industriel SAFRAN Ceramics concernant le procédé Slurry Cast/APS. Le premier axe de travail s'est focalisé sur une étude paramétrique des conditions opératoires d'injection.

L'objectif sous-jacent d'un tel travail était de quantifier l'influence des paramètres (concentration initiale, pression ou vitesse d'injection, etc) sur la répartition finale de particules dans la préforme. En effet, des études antérieures à cette thèse ont montré la formation de macroporosités traduisant des inhomogénéités de remplissage, et limitant l'étape RMI. Cette étude paramétrique numérique a été effectuée en utilisant des géométries idéalisées de torons rectangulaires. De cette manière, seule l'influence des conditions d'injection fut éprouvée, ce qui nous a permis de déterminer que seule la concentration initiale de la suspension impactait la qualité du remplissage. Ces observations faisant écho à certaines constatations expérimentales menées à SAFRAN Ceramics.

Par suite à cette étude, nous sommes revenus à des configurations géométriques plus proches de celles observables dans le procédé de densification. D'abord en deux dimensions, ces configurations nous ont permis de comprendre les mécanismes à l'origine de la formation des macroporosités. Elles nous ont également amené à quantifier l'influence de légères modifications géométriques entre les fibres sur le remplissage. Celles-ci, en perturbant l'écoulement, entraînent une compaction particulière moins homogène dans le renfort. Cependant, ces constatations ne sont pour le moment qu'à un stade embryonnaire, et nécessiteraient plus de travail pour lier le décalage entre les fibres au remplissage.

Enfin, les résultats de notre modèle ont été utilisés pour simuler l'introduction de particules dans un renfort 3D de type satin. Cette ultime étude nous a permis d'éprouver notre modèle sur des configurations réalistes, de retrouver les conclusions de l'étude paramétrique et de vérifier celles de l'étude 2D précédente. Il a ainsi été démontré que ces derniers résultats, bien qu'issus de représentations simplifiées, retranscrivaient correctement la physique et conduisaient à une comparaison qualitative en accord avec l'expérience.

Tous les travaux menés durant cette thèse fournissent des réponses les plus précises possibles aux questionnements de l'industriel SAFRAN Ceramics. Cependant, ils soulèvent également d'autres interrogations et axes de recherches. En effet, de la même manière que le comportement des particules a été moyenné à l'échelle des fibres, les phénomènes de migration et de compaction pourraient être décrits de manière globale, à l'échelle de la pièce manufacturée. Le renfort tissé serait alors vu comme un milieu poreux hétérogène dont la perméabilité serait dépendante du remplissage en particules. L'idée étant alors de modéliser l'ensemble du procédé à l'aide d'une seule équation darcyenne.

Un autre axe de travail se situerait au niveau de l'influence des décalages entre les fibres. Comme évoqué plus haut, mais également dans le quatrième chapitre, la modification dans le placement des fibres a un effet sur l'homogénéité de remplissage. L'étude de ces phénomènes pourrait nous permettre de prédire le remplissage en particules après une simple analyse de la structure du tissage.

Il serait également intéressant de développer un modèle permettant de suivre la ségrégation d'une suspension multimodale. En effet, bien que les suspensions utilisées au début de la thèse soient monomodales, ce qui justifiait ce choix de modèle, de plus en plus d'expériences utilisent des suspensions bimodales voir multimodales. Ce travail pourrait s'effectuer soit par une refonte complète du modèle soit en élargissant l'équation de Philipps à ce type de suspensions.

Enfin, le dernier axe de travail soulevé par cette thèse se situe au niveau de l'étape de séchage permettant le retrait du fluide en fin de procédé Slurry Cast/APS. En effet le présent modèle permet de simuler numériquement la formation des macroporosités, mais en aucun cas celle des fissures de retrait.



Pour permettre de pleinement modéliser l'état du renfort fibreux tel qu'il est au début de l'étape RMI, un gros travail de modélisation des mécanismes de retrait du fluide et de fissuration des agrégats doit être mis en place.

# Annexe A

## Étude des variations du nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est un paramètre de similitude quantifiant les effets inertiels devant les effets visqueux. Ce nombre apparaît lors de l'adimensionnement des équations gouvernant la mécanique des fluides. Dans cette thèse, l'adimensionnement des équations du modèle final (2.28) génère l'apparition d'un nombre de Reynolds dépendant de la fraction volumique en poudre  $\phi^s$  :

$$\text{Re}(\phi^s) = \frac{\rho(\phi^s) L_c U_c}{\mu(\phi^s)}$$

Ce nombre évoluera donc en fonction de la répartition locale de charges en suspension. Afin d'exhiber les extrema de cette fonction de  $\phi^s$ , il est nécessaire d'effectuer une étude de ses variations. Par construction, les grandeurs  $L_c$  et  $U_c$  étant des constantes positives, les variations du nombre de Reynolds seront les mêmes que celles de la fonction  $f$ , définie par :

$$f(\phi^s) = \frac{\rho(\phi^s)}{\mu(\phi^s)}$$

Cette fonction est  $C^\infty$  sur l'intervalle  $[0; \phi_m^s[$ , et sa dérivée  $f'$ , est définie par :

$$f'(\phi^s) = \frac{\rho'(\phi^s)\mu(\phi^s) - \rho(\phi^s)\mu'(\phi^s)}{\mu^2(\phi^s)} \quad (\text{A.1})$$

La monotonie de la fonction  $f$  dépendra du signe de sa dérivée, qui est identique au signe du numérateur dans l'équation (A.1). L'expression de la viscosité dynamique de la suspension est :

$$\mu(\phi^s) = \mu_0 \left(1 - \frac{\phi^s}{\phi_m^s}\right)^{-\eta\phi_m^s} \quad (\text{A.2})$$

et sa dérivée a pour expression  $\mu'(\phi^s) = \eta \left(1 - \frac{\phi^s}{\phi_m^s}\right)^{-1} \mu(\phi^s)$ . La viscosité dynamique étant strictement positive sur l'intervalle  $[0; \phi_m^s[$ , il vient que le signe de  $f'$  est le même que le signe de la fonction  $g$  définie par :

$$g(\phi^s) = \rho'(\phi^s) - \eta \left(1 - \frac{\phi^s}{\phi_m^s}\right)^{-1} \rho(\phi^s) \quad (\text{A.3})$$

L'expression de la masse volumique de mélange est  $\rho(\phi^s) = \rho_s \phi^s + \rho_f \phi^f$ , avec  $(\rho_s, \rho_f)$  des constantes. En réécrivant cette fonction sous la forme :

$$\rho(\phi^s) = (\rho_s - \rho_f) \phi^s + \rho_f \quad (\text{A.4})$$

on en déduit immédiatement l'expression de sa dérivée  $\rho'(\phi^s) = \rho_s - \rho_f$ , constante sur l'intervalle  $[0; \phi_m^s[$ . Étant donné que  $\rho_s > \rho_f$ , il existe un  $\alpha > 0$  tel que

$$\rho_s = (\alpha + 1)\rho_f$$

La masse volumique de mélange peut alors s'écrire  $\rho(\phi^s) = (\alpha\phi^s + 1)\rho_f$ , et sa dérivée  $\rho' = \alpha\rho_f$ . En regroupant toutes ces observations, il vient que la fonction  $g$ , définie dans l'équation (A.3), se réécrit sous la forme :

$$g(\phi^s) = \rho_f \left( \alpha - \eta(\alpha\phi^s + 1) \left( 1 - \frac{\phi^s}{\phi_m^s} \right)^{-1} \right)$$

Pour rappel, le signe de cette fonction est le même que celui de la dérivée  $f'$  définie dans l'équation (A.1). Sa détermination donnera donc la monotonie de la fonction  $f$ , et donc celle du nombre de Reynolds. Pour cela, nous définissons les deux fonctions  $u$  et  $v$  suivantes :

$$u(\phi^s) = \eta(\alpha\phi^s + 1) \quad \text{et} \quad v(\phi^s) = \alpha \left( 1 - \frac{\phi^s}{\phi_m^s} \right)$$

Il est immédiat de constater que ces deux fonctions sont positives sur l'intervalle  $[0; \phi_m^s[$ , et que la fonction  $u$  est strictement croissante et la fonction  $v$  strictement décroissante.

| $\phi^s$                                            | 0        | 0,68                     |
|-----------------------------------------------------|----------|--------------------------|
| $\eta(\alpha\phi^s + 1)$                            | $\eta$   | $\eta(\alpha\phi^s + 1)$ |
| $\alpha \left( 1 - \frac{\phi^s}{\phi_m^s} \right)$ | $\alpha$ | 0                        |

D'après le tableau de variations, il vient que la fonction  $u$  est strictement supérieure à la fonction  $v$  sur l'intervalle  $[0; \phi_m^s]$  si et seulement si  $\eta > \alpha$ . La grandeur  $\eta$  est le coefficient d'Einstein, et vaut  $\eta = 2,5$  (cf sous-section 2.1.3). De plus, dans notre étude, la masse volumique des charges étant environs trois fois supérieure à la masse volumique du fluide saturant, nous en déduisons que  $\alpha \simeq 2$ . Ainsi, dans ces travaux, nous avons :

$$\begin{aligned} & \forall \phi^s \in [0; \phi_m^s[, \quad v(\phi^s) < u(\phi^s) \\ \Leftrightarrow & \quad \alpha \left( 1 - \frac{\phi^s}{\phi_m^s} \right) < \eta(\alpha\phi^s + 1) \\ \Leftrightarrow & \quad \alpha \left( 1 - \frac{\phi^s}{\phi_m^s} \right) - \eta(\alpha\phi^s + 1) < 0 \end{aligned}$$

Comme  $\phi^s \neq \phi_m^s$ , on peut diviser par  $1 - (\phi^s/\phi_m^s)$  :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \alpha - \eta(\alpha\phi^s + 1) \left(1 - \frac{\phi^s}{\phi_m^s}\right)^{-1} < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & g(\phi^s) < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & f'(\phi^s) < 0, \quad \forall \phi^s \in [0; \phi_m^s[. \end{aligned}$$

La fonction  $f = \frac{\rho(\phi^s)}{\mu(\phi^s)}$ , est donc strictement décroissante sur l'intervalle  $[0; \phi_m^s[$ . Le nombre de Reynolds, de l'écoulement d'une suspension donnée, sera donc maximum pour  $\phi^s = 0$ . Cette valeur maximale correspondra à l'écoulement du fluide saturant seul, de masse volumique  $\rho_f$ , et de viscosité  $\mu_0$ , et sera notée :

$$\text{Re}_{max} = \frac{\rho_f L_c U_c}{\mu_0} \tag{A.5}$$



# Annexe B

## Méthode des caractéristiques

Cette annexe a pour objectif de présenter la méthode des caractéristiques permettant la résolution d'une équation de conservation. Afin de simplifier les écritures des équations de cette annexe, nous nous placerons dans le cas d'une loi de conservation 1D. L'extrapolation de cette méthode au cas 2D ou 3D est immédiate lorsque cette méthode est appliquée à chaque composante des fonctions vectorielles.

Soit une fonction  $w$  à valeur de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$w : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto u(x, t) \end{cases}$$

Une loi de conservation monodimensionnelle sur la fonction  $w$  prend la forme de l'équation (B.1). Nous y ajoutons la condition initiale (B.2).

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial f(w)}{\partial x}(x, t) = 0 \\ w(x, t_0) = w_0(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(B.1)} \\ \text{(B.2)} \end{matrix}$$

avec  $f$  une fonction régulière  $C^1$  à valeur de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . L'écriture  $f(w)$  caractérise la composée de la fonction  $f$  et  $w$  :  $f \circ w$ . Soit  $X$  la fonction à valeur de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$X : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto X(t) = x \end{cases}$$

Enfin, en notant  $W$  la fonction telle que  $W(t) = w(X(t), t)$ , on remarque alors que :

$$W'(t) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) + X'(t) \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \quad \text{(B.3)}$$

Or, en considérant la fonction composée  $f(w)$  comme dérivable, l'équation (B.1) peut se réécrire :

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) + f'(w(x, t)) \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) = 0 \quad \text{(B.4)}$$

Ainsi, sous la condition  $X'(t) = f'(w(X(t), t))$  alors  $W'(t) = 0$ . Cette fonction  $X$  est appelée courbe caractéristique et est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} X'(t) = f'(w(X(t), t)) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases}$$

En supposant que  $X$  soit solution du système précédent, il vient que  $W'(t) = 0$ . La fonction  $W$  est donc constante et :

$$w(X(t), t) = W(t) = W(t_0) = w(X(t_0), t_0) = w(x_0, t_0) = w_0(t_0)$$

$$w(X(t), t) = w_0(t_0) \quad (\text{B.5})$$

La fonction  $w$  est donc constante le long de la caractéristique  $X$ . Cette considération permet d'écrire :

$$X'(t) = f'(w_0(t_0))$$

Étant donné que  $X(t_0) = x_0$ , l'expression de la caractéristique  $X$  est immédiate :

$$X(t) = (t - t_0)f'(w_0(x_0)) + x_0 \quad (\text{B.6})$$

En combinant les équations (B.5) et (B.6), nous obtenons :

$$w\left((t - t_0)f'(w_0(x_0)) + x_0, t\right) = w_0(x_0)$$

$$w(x, t) = w_0\left(x - (t - t_0)f'(w_0(x_0))\right)$$

Si pour tout couple  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ , nous pouvons trouver un et un seul  $x_0 \in \mathbb{R}$ , alors la fonction  $w$  déterminée ainsi est solution du système d'équation (B.1) et (B.2).

En se plaçant dans les conditions présentées dans la sous-section 2.3.3, pour l'exemple du schéma upwind, nous avons :

$$\begin{aligned} w &\equiv \alpha & w_0 &= \alpha_h^n \\ f(w)(x, t) &\equiv u\alpha(x, t) & f'(w(x, t)) &= u \\ t_0 &\equiv t^n \end{aligned}$$

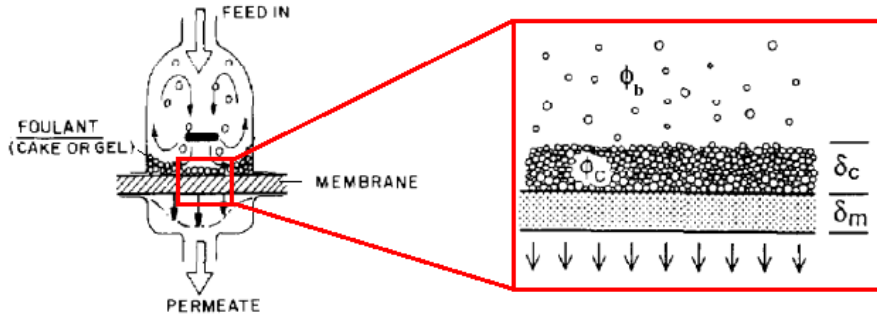
Par identification, la solution de l'équation de transport (2.48) sous la condition initiale  $\alpha(x, t^n) = \alpha_h^n(x)$ , est :

$$\alpha(x, t^n) = \alpha_h^n(x - (t - t^n))$$

## Annexe C

### Démonstration des lois de Belfort

Dans cette annexe, on propose une démonstration de la loi de Belfort exposée dans les travaux [Belfort et al., 1994] (voir équation (C.1)). Cette loi décrit la dynamique de croissance du gâteau particulaire lors d'une microfiltration frontale à gradient de pression imposée, *i.e.*, lors de l'écoulement frontal d'une suspension initialement homogène en poudre au travers d'une membrane. Une schématisation du procédé de microfiltration frontal est proposé dans la figure C.1.



**Figure C.1** – Schéma de la microfiltration frontale lors de l'écoulement d'une suspension au travers d'une membrane. [Belfort et al., 1994]

$$\delta_c(t) = \frac{R_m}{\hat{R}_c} \left[ \left( 1 + \frac{2t\hat{R}_c\phi_b^s\Delta p}{(\phi_c^s - \phi_b^s)\mu_0 R_m^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (C.1)$$

Pour aller plus loin, nous avons aussi déterminé la loi d'évolution du gâteau particulaire lors d'un écoulement non plus à gradient de pression imposé, mais à débit imposé. L'expression de cette loi est donnée par l'équation (C.2) et sa démonstration sera aussi donnée dans cette annexe.

$$\delta_c(t) = \frac{\phi_b^s \|\mathbf{q}\| t}{(\phi_c^s - \phi_b^s)} \quad (C.2)$$



Avant de présenter les démonstrations des lois (C.1) et (C.2), on rappelle le nom des variables utilisées et leur significations :

1.  $\delta_m$  l'épaisseur de la membrane.
2.  $\delta_c(t)$  l'épaisseur du gâteau particulaire.
3.  $\Delta p$  le gradient de pression imposé.
4.  $\mu_0$  la viscosité du fluide saturant de la suspension.
5.  $\phi_c^s$  la fraction volumique de poudre dans le gâteau particulaire.
6.  $\phi_b^s$  la fraction volumique de poudre dans la suspension à filtrer.
7.  $R_m$  la résistance à l'écoulement de la membrane,  $R_m = \delta_m/K_m$ .
8.  $R_c$  la résistance à l'écoulement du gâteau particulaire,  $R_c = \hat{R}_c\delta_c$ .

## C.1 Filtration à gradient de pression imposé

Dans cette partie, l'écoulement de la suspension initialement homogène en poudre au travers de la membrane se fait en imposant un gradient de pression. L'expression du flux de filtration  $J$  est donnée par la loi de Darcy [Darcy, 1856] :

$$J \equiv \frac{1}{A} \frac{dV}{dt} = \frac{\Delta p}{\mu_0 (R_m + R_c)} \quad (C.3)$$

où  $V$  est le volume de fluide traversant la membrane et  $A$  la surface externe de la membrane. Ainsi, un simple bilan de masse à la limite entre le gâteau particulaire et la suspension permet d'établir l'équation différentielle sur l'épaisseur  $\delta_c$  du gâteau :

$$\left( J + \frac{d\delta_c}{dt} \right) \phi_b^s = \phi_c^s \frac{d\delta_c}{dt} \quad (C.4)$$

$$\frac{d\delta_c}{dt} = \frac{\phi_b^s J}{(\phi_c^s - \phi_b^s)} = \frac{\phi_b^s \Delta p}{(\phi_c^s - \phi_b^s) \mu_0 (R_m + \hat{R}_c \delta_c)} \quad (C.5)$$

$$\boxed{\frac{d\delta_c}{dt} = \frac{\phi_b^s \Delta p}{(\phi_c^s - \phi_b^s) \mu_0 (R_m + \hat{R}_c \delta_c)}} \quad (C.6)$$

Pour résoudre facilement l'équation (C.6), il est nécessaire d'émettre un certain nombre d'hypothèses :

- (a)  **$R_m$  est constant** : pas d'écrasement ni d'encrassement de la membrane au cours du temps. La membrane rejette les particules et ne se déforme pas sous la pression.
- (b)  **$\phi_c^s$  et  $\hat{R}_c$  sont constants** : pas de compression du gâteau particulaire au cours du temps. Il n'y a pas de réorganisation structurale du gâteau au cours du temps.
- (c)  **$\phi_b^s$  est constant** : aucune variation spatiale ni temporelle dans la concentration de la suspension à filtrer. La concentration reste homogène au cours du temps.
- (d)  **$\Delta p$  est constant** : le gradient de pression imposé reste constant.

De plus, afin de faciliter la résolution, nous pouvons poser les variables  $\alpha$  et  $\beta$  suivantes, qui sont constantes d'après les hypothèses précédentes :

$$\alpha = \frac{\phi_b^s \Delta p}{\hat{R}_c (\phi_c^s - \phi_b^s) \mu_0} \quad \beta = \frac{R_m}{\hat{R}_c}$$

L'équation (C.6) peut alors se réécrire :

$$\frac{d\delta_c}{dt} = \frac{\alpha}{\beta + \delta_c}$$

En effectuant le changement de variable  $X(t) = \beta + \delta_c(t)$  il vient que

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{\alpha}{X(t)} \quad (C.7)$$

Il reconnaît alors la forme de la fonction  $X$  qui est une fonction racine  $X(t) = \sqrt{f(t)}$ . Par identification, pour satisfaire (C.7), il faut que  $f'(t) = 2\alpha$ .

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}} = \frac{f'(t)}{2X(t)} = \frac{\alpha}{X(t)} \quad (C.8)$$

On en déduit alors la forme de la fonction  $f$  :

$$f(t) = 2\alpha t + cte$$

Et comme à  $t = 0$ ,  $f(0) = X^2(0) = (\beta + \delta_c(0))^2 = \beta^2$ , il vient que :

$$\begin{aligned} cte &= \beta^2 \\ f(t) &= 2\alpha t + \beta^2 \end{aligned}$$

En remontant successivement, il vient que :

$$\begin{aligned} \delta_c(t) &= X(t) - \beta \\ &= \sqrt{f(t)} - \beta \\ &= \sqrt{2\alpha t + \beta^2} - \beta \\ \delta_c(t) &= \beta \left[ \left( 1 + \frac{2\alpha t}{\beta^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \end{aligned}$$

En remplaçant alors les variables  $\alpha$  et  $\beta$  par leur expression, on retrouve la loi de Belfort exprimant la dynamique du gâteau particulaire lors d'une filtration frontale à gradient de pression imposé.

$$\boxed{\delta_c(t) = \frac{R_m}{\hat{R}_c} \left[ \left( 1 + \frac{2t\hat{R}_c\phi_b^s\Delta p}{(\phi_c^s - \phi_b^s)\mu_0 R_m^2} \right)^{1/2} - 1 \right]}$$

## C.2 Filtration à débit imposé

En reprenant le même raisonnement que pour une filtration frontale à gradient de pression imposé, nous pouvons expliciter le flux de filtration  $J$  à l'aide de la loi de Darcy :

$$J \equiv \frac{1}{A} \frac{dV}{dt} = \|\mathbf{q}\| \quad (\text{C.9})$$

avec toujours  $V$  le volume de fluide traversant la membrane et  $A$  la surface externe de la membrane. Étant donné que la vitesse de filtration  $\|\mathbf{q}\|$  est constante. Il vient alors, en effectuant un bilan de matière au travers de la surface séparant le gâteau particulaire de la suspension que :

$$\left( J + \frac{d\delta_c}{dt} \right) \phi_b^s = \phi_c^s \frac{d\delta_c}{dt} \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{d\delta_c}{dt} = \frac{\phi_b^s J}{(\phi_c^s - \phi_b^s)} = \frac{\phi_b^s \|\mathbf{q}\|}{(\phi_c^s - \phi_b^s)} \quad (\text{C.11})$$

$$\boxed{\frac{d\delta_c}{dt} = \frac{\phi_b^s \|\mathbf{q}\|}{(\phi_c^s - \phi_b^s)}} \quad (\text{C.12})$$

L'équation (C.12) est très simple car sa partie droite est constante (utilisation des hypothèses précédentes). Il vient donc par intégration que :

$$\delta_c(t) = \frac{\phi_b^s \|\mathbf{q}\|}{(\phi_c^s - \phi_b^s)} t + cte \quad (\text{C.13})$$

Or à  $t = 0$ ,  $\delta_c(t) = 0$ , et donc  $cte = 0$ . Ainsi :

$$\boxed{\delta_c(t) = \frac{\phi_b^s \|\mathbf{q}\| t}{(\phi_c^s - \phi_b^s)}} \quad (\text{C.14})$$

# Annexe D

## Adimensionnement des lois de Belfort

### D.1 Variables sans dimension

Le but de cette partie est de proposer un adimensionnement des lois de Belfort (C.1) (C.2) démontrées dans l'annexe C. Afin de procéder à cet adimensionnement, il est nécessaire de définir dans un premier temps des grandeurs de références propres à notre configuration d'étude. Dans notre cas, deux grandeurs sont nécessaires :

- $L_c$  longueur de référence.
- $U_c$  vitesse de référence.

Ces grandeurs de référence nous permettent ainsi de définir les variables sans dimension (notées d'un indice \*).

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^* L_c, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}^* U_c, \quad t = t^* \frac{L_c}{U_c}, \quad p = p^* \frac{\mu U_c}{L_c}$$

#### Détermination de $L_c$ et $U_c$

Pour la longueur  $L_c$  on choisira dans les deux cas (gradient de pression imposé et débit imposé) l'épaisseur maximale du gâteau particulière. Ainsi, en notant  $L_{max}$  l'épaisseur du domaine d'étude, on aura que  $L_{max} = \delta_m + L_c$ , et donc que :

$$L_c = L_{max} - \delta_m \quad (D.1)$$

Concernant la vitesse de référence, nous devons séparer les deux cas d'étude. Lorsque le débit est imposé, le choix de  $U_c$  est simple et sera la norme de la vitesse de filtration imposée :

$$U_{cV} = \|\mathbf{q}\| \quad (D.2)$$

Dans le cas où le gradient de pression est imposé, la détermination de  $U_c$  est un peu plus complexe. On prendra la valeur de la vitesse au temps initial  $t = 0$  où  $\delta_c = 0$  :

$$U_{c\Delta p} = \frac{\Delta p}{\mu_0 R_m} \quad (D.3)$$

## D.2 Filtration à gradient de pression imposé

Dans le cas d'une filtration frontale à gradient de pression imposé, les variables sans dimension prennent la forme suivante :

$$\delta_c^* = \frac{\delta_c}{L_c}, \quad \Delta p^* = L_c R_m, \quad t^* = \frac{\Delta p}{\mu_0 R_m L_c} t$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation (C.1), il vient que :

$$\begin{aligned} \delta_c^* = \frac{\delta_c}{L_c} &= \frac{R_m}{\hat{R}_c L_c} \left[ \left( 1 + \frac{2 \frac{L_c}{U_c} t^* \phi_b^s \hat{R}_c \frac{\mu_0 U_c}{L_c} \Delta p^*}{(\phi_c^s - \phi_b^s) \mu_0 R_m^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \\ &= \frac{R_m}{\hat{R}_c L_c} \left[ \left( 1 + \frac{2 \cancel{L_c} t^* \phi_b^s \hat{R}_c \cancel{\mu_0} \Delta p^*}{(\phi_c^s - \phi_b^s) \mu_0 R_m^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \\ &= \frac{R_m}{\hat{R}_c L_c} \left[ \left( 1 + \frac{2 \frac{t^*}{U_c} \phi_b^s \hat{R}_c \cancel{\mu_0} U_c \Delta p^*}{(\phi_c^s - \phi_b^s) \cancel{\mu_0} R_m^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \\ &= \frac{R_m}{\hat{R}_c L_c} \left[ \left( 1 + \frac{2 \frac{t^*}{\cancel{U_c}} \phi_b^s \hat{R}_c \cancel{U_c} \Delta p^*}{(\phi_c^s - \phi_b^s) R_m^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\delta_c^* = \frac{R_m}{\hat{R}_c L_c} \left[ \left( 1 + \frac{2 t^* \phi_b^s \hat{R}_c \Delta p^*}{(\phi_c^s - \phi_b^s) R_m^2} \right)^{1/2} - 1 \right]} \quad (D.4)$$

## D.3 Filtration à débit imposé

Dans le cas d'une filtration frontale à débit imposé, les variables sans dimension prennent la forme suivante :

$$\delta_c^* = \frac{\delta_c}{L_c}, \quad \mathbf{q}^* = \frac{\mathbf{q}}{U_{cv}}, \quad t^* = \frac{U_{cv}}{L_c} t = \frac{\|\mathbf{q}\|}{L_c} t$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation (C.2), il vient que :

$$\delta_c^* = \frac{\delta_c}{L_c} = \frac{\phi_b^s \|\mathbf{q}\|}{(\phi_c^s - \phi_b^s) L_c \|\mathbf{q}\|} L_c t^*$$

$$\boxed{\delta_c^* = \frac{\phi_b^s}{(\phi_c^s - \phi_b^s)} t^*} \quad (D.5)$$

# Annexe E

## Calcul de la hauteur du front de compaction

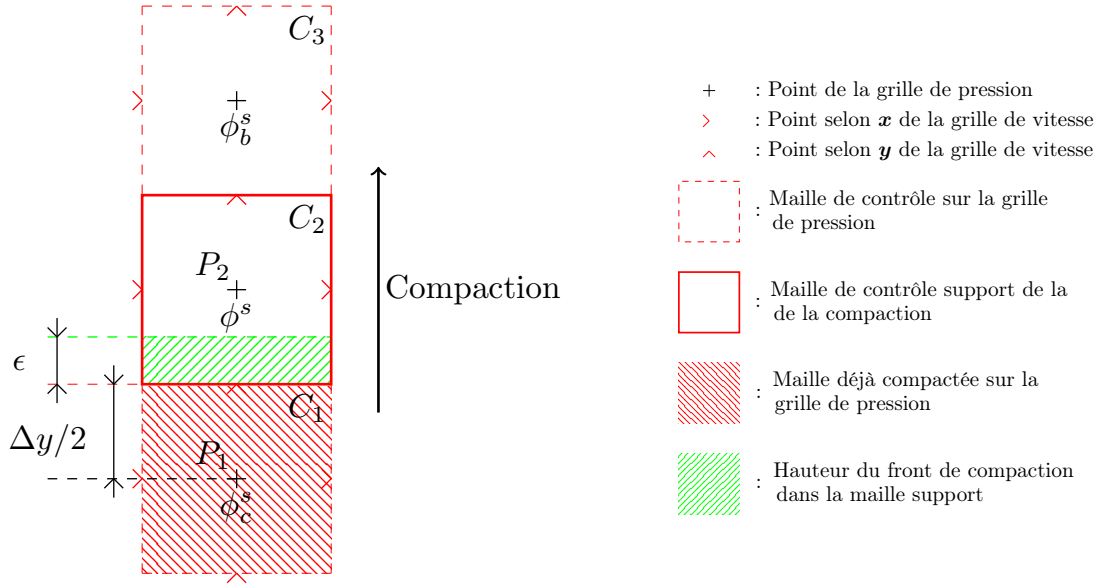
Dans cette annexe, nous souhaitons présenter la méthode de calcul numérique permettant de déterminer la hauteur du front du gâteau particulaire 1D explicité dans la partie 3.3. Pour rappel, cette partie utilise les travaux [Belfort et al., 1994] qui fournissent une loi de croissance d'un gâteau particulaire 1D (annexe C et D). L'idée principale ici est d'expliciter la méthode nous permettant d'obtenir directement la hauteur du front dans une approche aux volumes finis où seule la fraction volumique de poudre est calculée.

En effet, comme vu précédemment, l'approche du modèle de Phillips nous permet de suivre les particules dans une suspension de manière globale à l'aide d'une variable homogénéisée : la fraction volumique de poudre  $\phi^s$ . Or dans cette approche, les particules n'étant pas vue individuellement, la frontière entre le gâteau particulaire et la suspension n'est pas directement représentée. Cette information est en effet "cachée" et moyennée directement dans la variable  $\phi^s$ .

Dans une approche aux volumes finis (*cf* chapitre 2) chaque variable scalaire est calculée de manière discrète sur chaque point du maillage. Ces points sont alors définis comme le centre d'un volume élémentaire  $C$  : la maille. La valeur en chaque point du maillage est donc la moyenne de cette valeur sur le volume de contrôle  $C$ .

Cette approche, appliquée à notre cas de compaction particulaire 1D, et donc à la dynamique de croissance du gâteau particulaire, peut se schématiser par la figure E.1. Compte tenu du caractère 1D du phénomène étudié, et afin de simplifier cette représentation, nous ne schématisons ici qu'une discrétisation unidirectionnelle sur trois mailles successives ( $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ ).

En supposant qu'à l'instant  $t$  du cliché la maille  $C_1$  est déjà compacte, et sachant que la compaction s'effectue du bas vers le haut, il vient alors que la frontière entre le gâteau particulaire et la suspension se situe dans la maille du milieu  $C_2$ . La maille du bas  $C_1$  étant compacte, elle caractérise un milieu à 100% composé de gâteau particulaire, la valeur de la fraction volumique de cette maille est donc  $\phi_c^s$ . La maille du dessus  $C_3$  caractérise quand à elle un milieu à 100% composée de la suspension. Or, nous avons comme hypothèse (voir annexe C) que la suspension est de concentration constante. Ainsi, la maille du dessus  $C_3$  aura une fraction volumique  $\phi_b^s$ .



**Figure E.1** – Schéma du procédé de compaction 1D selon la direction  $y$  tel qu'il est résolu avec une approche numérique type volumes finis.

Ainsi, la maille du milieu  $C_2$  est composée à la fois du gâteau particulaire (de concentration constante  $\phi_c^s$ ) mais également de la suspension (de concentration constante  $\phi_b^s$ ). Supposons donc que le gâteau ait déjà compacté l'équivalent de la hauteur  $\epsilon$  dans cette maille. En sachant que la valeur de la fraction volumique au point  $P_2$ , notée  $\phi^s$ , approche l'intégrale sur la maille  $C_2$  de la fraction volumique par unité de surface, la hauteur  $\epsilon$  se retrouve par l'expression mathématique de  $\phi^s$ .

$$\phi^s \simeq \frac{1}{mes(C)} \iint_C \phi(x, y) dx dy \quad (E.1)$$

$$\begin{aligned} \phi^s &= \frac{1}{\Delta y \Delta x} \int_{\Delta x} dx \int_{\Delta y} \phi(y) dy \\ &= \frac{1}{\Delta y} \left( \int_0^\epsilon \phi_c^s dy + \int_\epsilon^{\Delta y} \phi_b^s dy \right) \\ \phi^s &= \frac{1}{\Delta y} \left( \epsilon \phi_c^s + (\Delta y - \epsilon) \phi_b^s \right) \end{aligned} \quad (E.2)$$

$$\boxed{\epsilon = \frac{\Delta y (\phi^s - \phi_b^s)}{\phi_c^s - \phi_b^s}} \quad (E.3)$$

En notant  $h$  la hauteur du point  $P_1$  dans le domaine étudié, il vient alors que l'épaisseur  $\delta_c$  du gâteau particulaire au temps  $t$  dans le domaine étudié est :

$$\delta_c = h + \frac{\Delta y}{2} + \epsilon \quad (E.4)$$

En effectuant ce calcul à chaque itération, nous obtenons donc la hauteur du gâteau particulaire à chaque instant que nous pouvons comparer à la hauteur théorique donnée par la loi déterminée dans les travaux de [Belfort et al., 1994].

# Bibliographie

- [Abbott et al., 1991] Abbott, J., Tetlow, N., Graham, A., Altobelli, S., Fukushima, E., Mondy, L., and Stephens, T. (1991). Experimental observations of particle migration in concentrated suspensions : Couette flow. *Journal of Rheology (1978-present)*, 35(5) :773–795.
- [Arquis, 1994] Arquis, E. (1994). *Transferts en milieu poreux et à l'interface : de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique*. PhD thesis, Université de Bordeaux I.
- [Arquis et al., 2015] Arquis, E., Pons, A., Dugois, K., Lebot, C., Valat, M., Lasseux, D., Vincent, S., and Descamps, C. (2015). Ecoulements capillaires et chargés dans les procédés d'élaboration de composites par APS et RMI. working paper or preprint.
- [Auriault, 1987] Auriault, J.-L. (1987). Nonsaturated deformable porous media : quasi-statics. *Transport in Porous media*, 2(1) :45–64.
- [Ausias et al., 2006] Ausias, G., Fan, X., and Tanner, R. (2006). Direct simulation for concentrated fibre suspensions in transient and steady state shear flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 135(1) :46 – 57.
- [Bansal, 2006] Bansal, N. P. (2006). *Handbook of ceramic composites*, volume 200. Springer Science & Business Media.
- [Batchelor and Green, 1972] Batchelor, G. and Green, J. (1972). The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order  $c^2$ . *Journal of Fluid Mechanics*, 56(03) :401–427.
- [Belfort et al., 1994] Belfort, G., Davis, R. H., and Zydney, A. L. (1994). The behavior of suspensions and macromolecular solutions in crossflow microfiltration. *Journal of Membrane Science*, 96(1) :1–58.
- [Benazzouk, 2013] Benazzouk, L. (2013). *Approche du comportement dynamique d'un oxyde liquide dans un matériau composite autocicatrisant «MAC»*. PhD thesis, Bordeaux I.
- [Benazzouk et al., 2013] Benazzouk, L., Arquis, E., Bertrand, N., Descamps, C., and Valat, M. (2013). Motion of a liquid bridge in a capillary slot : a numerical investigation of wettability and geometrical effects. *La Houille Blanche*, (3) :50–56.
- [Bingham, 1930] Bingham, E. C. (1930). Some fundamental definitions of rheology. *Journal of Rheology (1929-1932)*, 1(5) :507–516.
- [Bird et al., 1977] Bird, R. B., Armstrong, R. C., Hassager, O., and Curtiss, C. F. (1977). *Dynamics of polymeric liquids*, volume 1. Wiley New York.
- [Brady, 1993] Brady, J. F. (1993). The rheological behavior of concentrated colloidal dispersions. *The Journal of chemical physics*, 99(1) :567–581.



- [Brady and Bossis, 1985] Brady, J. F. and Bossis, G. (1985). The rheology of concentrated suspensions of spheres in simple shear flow by numerical simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 155 :105–129.
- [Brady and Bossis, 1988] Brady, J. F. and Bossis, G. (1988). Stokesian dynamics. *Annual review of fluid mechanics*, 20 :111–157.
- [Breil, 2001] Breil, J. (2001). *Modélisation du remplissage en propergol de moteur à propulsion solide*. PhD thesis, Université de Bordeaux I.
- [Brinkman, 1947] Brinkman, H. (1947). A calculation of the viscosity and the sedimentation constant for solutions of large chain molecules taking into account the hampered flow of the solvent through these molecules. *Physica*, 13(8) :447–448.
- [Brun et al., 1977] Brun, M., Lallemand, A., Quinson, J.-F., and Eyraud, C. (1977). A new method for the simultaneous determination of the size and shape of pores : the thermoporometry. *Thermochimica acta*, 21(1) :59–88.
- [Brändle de Motta et al., 2013] Brändle de Motta, J. C., Breugem, W.-P., Gazanion, B., Estivalezes, J.-L., Vincent, S., and Climent, E. (2013). Numerical modelling of finite-size particle collisions in a viscous fluid. *Physics of Fluids (1994-present)*, 25(8) :083302.
- [Brändle de Motta et al., 2011] Brändle de Motta, J. C., Vincent, S., Estivalezes, J.-L., and Climent, E. (2011). Simulation numérique des écoulements de suspension à l’aide d’une méthode de pénalisation des équations de navier-stokes. *20ème Congrès Français de Mécanique, 28 août/2 sept. 2011-25044 Besançon, France (FR)*.
- [Buckingham, 1907] Buckingham, E. (1907). Studies on the movement of soil moisture. *Department of Agriculture, Bureau of Soils*.
- [Bugel, 2009] Bugel, M. (2009). *Couplage entre la dynamique moléculaire et la mécanique des milieux continus*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1.
- [Bürger et al., 2001] Bürger, R., Concha, F., and H Karlsen, K. (2001). Phenomenological model of filtration processes : 1. cake formation and expression. *Chemical Engineering Science*, 56(15) :4537–4553.
- [Caltagirone, 1994] Caltagirone, J.-P. (1994). Sur l’interaction fluide-milieu poreux ; application au calcul des efforts exercés sur un obstacle par un fluide visqueux. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie*, 318(5) :571–577.
- [Carman, 1937] Carman, P. C. (1937). Fluid flow through granular beds. *Transactions-Institution of Chemical Engineeres*, 15 :150–166.
- [Carman, 1956] Carman, P. C. (1956). *Flow of gases through porous media*. Academic press.
- [Carreau, 1972] Carreau, P. J. (1972). Rheological equations from molecular network theories. *Transactions of The Society of Rheology (1957-1977)*, 16(1) :99–127.
- [Casson, 1959] Casson, N. (1959). Rheology of disperse systems. In *Proceedings of a Conference Organized by the British Society of Rheology*. Pergamon Press, New York.
- [Chauveteau and Thirriot, 1967] Chauveteau, G. and Thirriot, C. (1967). Régimes d’écoulement en milieu poreux et limite de la loi de darcy. *La Houille Blanche*, (2) :141–148.

- [Chiesa et al., 2005] Chiesa, M., Mathiesen, V., Melheim, J. A., and Halvorsen, B. (2005). Numerical simulation of particulate flow by the eulerian–lagrangian and the eulerian–eulerian approach with application to a fluidized bed. *Computers & chemical engineering*, 29(2) :291–304.
- [Chinesta et al., 2003] Chinesta, F., Chaidron, G., and Poitou, A. (2003). On the solution of fokker–planck equations in steady recirculating flows involving short fiber suspensions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 113(2–3) :97 – 125.
- [Chinesta and Poitou, 2002] Chinesta, F. and Poitou, A. (2002). Numerical analysis of the coupling between the flow kinematics and the fiber orientation in eulerian simulations of dilute short fiber suspensions flows. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 80(6) :1107–1114.
- [Clift et al., 1978] Clift, R., Grace, J. R., and Weber, M. E. (1978). *Bubbles, drops, and particles*. Courier Corporation.
- [Cross, 1965] Cross, M. M. (1965). Rheology of non-newtonian fluids : a new flow equation for pseudoplastic systems. *Journal of colloid science*, 20(5) :417–437.
- [Darcy, 1856] Darcy, H. (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : exposition et application...* Victor Dalmont.
- [De Waele, 1923] De Waele, A. (1923). Viscometry and plastometry. *Oil Color Chem Assoc J*, 6 :33–88.
- [Drieux, 2013] Drieux, P. (2013). *Synthesis of tubular SiC thick CVD coatings for thermostructural applications*. Theses, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I.
- [Dullien, 1992] Dullien, F. A. (1992). *Porous media : fluid transport and pore structure*. Academic press, 2<sup>nd</sup> edition.
- [Durlofsky et al., 1987] Durlofsky, L., Brady, J. F., and Bossis, G. (1987). Dynamic simulation of hydrodynamically interacting particles. *Journal of Fluid Mechanics*, 180 :21–49.
- [Elghobashi and Truesdell, 1992] Elghobashi, S. and Truesdell, G. (1992). Direct simulation of particle dispersion in a decaying isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 242 :655–700.
- [Forchheimer, 1901] Forchheimer, P. (1901). Wasserbewegung durch boden. *Z. Ver. Deutsch. Ing*, 45(1782) :1788.
- [Fortin and Glowinski, 1982] Fortin, M. and Glowinski, R. (1982). Méthodes de lagrangien augmenté : applications à la résolution numérique de problèmes aux limites.
- [Férec et al., 2009] Férec, J., Ausias, G., Heuzey, M. C., and Carreau, P. J. (2009). Modeling fiber interactions in semiconcentrated fiber suspensions. *Journal of Rheology*, 53(1) :49–72.
- [Férec et al., 2008] Férec, J., Heniche, M., Heuzey, M., Ausias, G., and Carreau, P. (2008). Numerical solution of the fokker–planck equation for fiber suspensions : Application to the folgar–tucker–lipscomb model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 155(1–2) :20 – 29.
- [Gadala-Maria and Acrivos, 1980] Gadala-Maria, F. and Acrivos, A. (1980). Shear-induced structure in a concentrated suspension of solid spheres. *Journal of Rheology (1978-present)*, 24(6) :799–814.

- [Gondret et al., 2002] Gondret, P., Lance, M., and Petit, L. (2002). Bouncing motion of spherical particles in fluids. *Physics of Fluids (1994-present)*, 14(2) :643–652.
- [Graham et al., 1991] Graham, A., Altobelli, S., Fukushima, E., Mondy, L., and Stephens, T. (1991). Note : Nmr imaging of shear-induced diffusion and structure in concentrated suspensions undergoing couette flow. *Journal of Rheology (1978-present)*, 35(1) :191–201.
- [Gries et al., 2008] Gries, T., Stüve, J., and Grundmann, T. (2008). *Textile Reinforcement Structures*, pages 21–47. In [Krenkel, 2008].
- [Hampton et al., 1997] Hampton, R., Mammoli, A., Graham, A., Tetlow, N., and Altobelli, S. (1997). Migration of particles undergoing pressure-driven flow in a circular conduit. *Journal of Rheology (1978-present)*, 41(3) :621–640.
- [Harlow et al., 1965] Harlow, F. H., Welch, J. E., et al. (1965). Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of fluids*, 8(12) :2182.
- [Hiemenz et al., 1986] Hiemenz, P. C. et al. (1986). *Principles of colloid and surface chemistry*, volume 188. M. Dekker New York.
- [Hillig, 1988] Hillig, W. B. (1988). Melt infiltration approach to ceramic matrix composites. *Journal of the American Ceramic Society*, 71(2).
- [Hillig, 1994] Hillig, W. B. (1994). Making ceramic composites by melt infiltration. *American Ceramic Society Bulletin ;(United States)*, 73(4).
- [Jeffery, 1922] Jeffery, G. B. (1922). The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 102(715) :161–179.
- [Kataoka, 1986] Kataoka, I. (1986). Local instant formulation of two-phase flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 12(5) :745–758.
- [Kim and Hoek, 2002] Kim, A. S. and Hoek, E. M. (2002). Cake structure in dead-end membrane filtration : Monte carlo simulations. *Environmental engineering science*, 19(6) :373–386.
- [Kitano et al., 1981] Kitano, T., Kataoka, T., and Shiota, T. (1981). An empirical equation of the relative viscosity of polymer melts filled with various inorganic fillers. *Rheologica Acta*, 20(2) :207–209.
- [Kozeny, 1927] Kozeny, J. (1927). About capillaries conducting water in the earth. *Sitzber. Akd. Wiss. Wien, Math. Naturv. Klasse*, 136 :271–306.
- [Krenkel, 2008] Krenkel, W. (2008). *Ceramic matrix composites : fiber reinforced ceramics and their applications*. Wiley-VCH.
- [Krieger, 1972] Krieger, I. M. (1972). Rheology of monodisperse latices. *Advances in Colloid and Interface Science*, 3(2) :111–136.
- [Lacanette et al., 2009] Lacanette, D., Vincent, S., Sarthou, A., Malaurent, P., and Caltagirone, J.-P. (2009). An eulerian/lagrangian method for the numerical simulation of incompressible convection flows interacting with complex obstacles : Application to the natural convection in the lascaux cave. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(11) :2528–2542.
- [Leighton and Acrivos, 1987] Leighton, D. and Acrivos, A. (1987). The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 181 :415–439.

- [Louge, 1996] Louge, A. (1996). *Etude théorique et expérimentale du comportement et de la ségrégation de milieux pâteux lors de l'extrusion*. PhD thesis, Université de la Méditerranée.
- [Marchais, 2016] Marchais, A. (2016). *Etude des mécanismes de montée capillaire du silicium liquide au sein d'une préforme en carbure de silicium*. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Lepetitcorps, Yann Physico-chimie de la matière condensée Bordeaux 2016.
- [Maury, 1999] Maury, B. (1999). Direct simulations of 2d fluid-particle flows in bi-periodic domains. *Journal of computational physics*, 156(2) :325–351.
- [Mooney, 1951] Mooney, M. (1951). The viscosity of a concentrated suspension of spherical particles. *Journal of colloid science*, 6(2) :162–170.
- [Mueller et al., 2010] Mueller, S., Llewellyn, E., and Mader, H. (2010). The rheology of suspensions of solid particles. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science*, 466(2116) :1201–1228.
- [Muskat, 1938] Muskat, M. (1938). The flow of homogeneous fluids through porous media. *Soil Science*, 46(2) :169.
- [Naslain, 1985] Naslain, R. (1985). *Introduction aux matériaux composites : Matrices métalliques et céramiques*. Centre National de la Recherche Scientifique.
- [Navier, 1822] Navier, C. L. M. H. (1822). Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. Master's thesis, Sci. Inst. France.
- [Navier and de Saint-Venant, 1864] Navier, C. L. M. H. and de Saint-Venant, A. B. (1864). Résumé des leçons sur l'application de la mécanique.
- [Ostwald, 1925] Ostwald, W. (1925). Ueber die geschwindigkeitsfunktion der viskosität disperser systeme. i. *Colloid & Polymer Science*, 36(2) :99.
- [Patankar, 1980] Patankar, S. (1980). *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC press.
- [Pesche et al., 1998] Pesche, R., Bossis, G., and Meunier, A. (1998). Simulation of particle segregation in a bidisperse suspension. In *Third International Conference on Multiphase Flow-ICMF'98 Lyon, France, June 8-12, 1998*, page 720.
- [Phillips et al., 1992] Phillips, R. J., Armstrong, R. C., Brown, R. A., Graham, A. L., and Abbott, J. R. (1992). A constitutive equation for concentrated suspensions that accounts for shear-induced particle migration. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics (1989-1993)*, 4(1) :30–40.
- [Pianet et al., 2006] Pianet, G., Arquis, E., and Vincent, S. (2006). 3d unsteady simulation of particle sedimentation towards high regimes. In *IUTAM Symposium on Computational Approaches to Multiphase Flow*, pages 185–196. Springer.
- [Pons, 2017] Pons, A. (2017). *Simulation de procédé d'infiltration capillaire réactive (RMI)*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1.
- [Purcell, 1949] Purcell, W. (1949). Capillary pressures-their measurement using mercury and the calculation of permeability therefrom. *Journal of Petroleum Technology*, 1(02) :39–48.
- [Quemada, 1977] Quemada, D. (1977). Rheology of concentrated disperse systems and minimum energy dissipation principle - viscosity-concentration relationship. *Rheologica Acta*, 16(1) :82–94.

- [Randrianarivelo et al., 2006] Randrianarivelo, T. N., Vincent, S., Simonin, O., and Caltagirone, J.-P. (2006). A dns approach dedicated to the analysis of fluidized beds. In *IUTAM Symposium on Computational Approaches to Multiphase Flow*, pages 207–214. Springer.
- [Rintoul and Torquato, 1996] Rintoul, M. and Torquato, S. (1996). Computer simulations of dense hard-sphere systems. *The Journal of chemical physics*, 105(20) :9258–9265.
- [Ritz, 1997] Ritz, J.-B. (1997). *Modélisation numérique des écoulements fluides particules*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1.
- [Rutgers, 1962] Rutgers, I. R. (1962). Relative viscosity of suspensions of rigid spheres in newtonian liquids. *Rheologica Acta*, 2(3) :202–210.
- [Sarhou, 2009] Sarhou, A. J. (2009). *Méthodes de domaines fictifs d'ordre élevé pour les équations elliptiques et de Navier-Stokes : application au couplage fluide-structure*. PhD thesis, Bordeaux 1.
- [Saul'ev, 1963] Saul'ev, V. K. (1963). On the solution of some boundary value problems on high performance computers by fictitious domain method. *Siberian Math. J*, 4(4) :912–925.
- [Schneebeli, 1955] Schneebeli, G. (1955). Expériences sur la limite de validité de la loi de darcy et l'apparition de la turbulence dans un écoulement de filtration. *La Houille Blanche*, (2) :141–149.
- [Sepehr et al., 2004] Sepehr, M., Ausias, G., and Carreau, P. (2004). Rheological properties of short fiber filled polypropylene in transient shear flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 123(1) :19 – 32.
- [Sisko, 1958] Sisko, A. (1958). The flow of lubricating greases. *Industrial & Engineering Chemistry*, 50(12) :1789–1792.
- [Stokes, 1905] Stokes, G. G. (1880-1905). Mathematical and physical papers. *Cambridge University*, I-V.
- [Tanner, 1985] Tanner, R. I. (1985). *Engineering rheology*, volume 52. OUP Oxford.
- [Verweyst and Tucker, 2002] Verweyst, B. E. and Tucker, C. L. (2002). Fiber suspensions in complex geometries : flow/orientation coupling. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 80(6) :1093–1106.
- [Vincent, 2010] Vincent, S. (2010). *Contribution à la modélisation et à la simulation numérique d'écoulements diphasiques de fluides non miscibles*. PhD thesis, Université de Bordeaux I.
- [Vincent and Caltagirone, 1999] Vincent, S. and Caltagirone, J.-P. (1999). Efficient solving method for unsteady incompressible interfacial flow problems. *International Journal for numerical methods in fluids*, 30(6) :795–811.
- [Vincent et al., 2004] Vincent, S., Caltagirone, J.-P., Lubin, P., and Randrianarivelo, T. N. (2004). An adaptative augmented lagrangian method for three-dimensional multimaterial flows. *Computers & fluids*, 33(10) :1273–1289.
- [Vollebregt et al., 2010] Vollebregt, H., Van Der Sman, R., and Boom, R. (2010). Suspension flow modelling in particle migration and microfiltration. *Soft Matter*, 6(24) :6052–6064.
- [Ward, 1964] Ward, J. (1964). Turbulent flow in porous media. *Journal of the Hydraulics Division*, 90(5) :1–12.

- [Washburn, 1921] Washburn, E. W. (1921). The dynamics of capillary flow. *Physical review*, 17(3) :273.
- [Whitaker, 1986] Whitaker, S. (1986). Flow in porous media i : A theoretical derivation of darcy's law. *Transport in porous media*, 1(1) :3–25.
- [Yasuda, 1979] Yasuda, K. (1979). *Investigation of the analogies between viscometric and linear viscoelastic properties of polystyrene fluids*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Chemical Engineering.