



HAL
open science

Étude et implémentation de méthodes de volumes finis pour les fluides incompressibles

Sébastien Zimmermann

► **To cite this version:**

Sébastien Zimmermann. Étude et implémentation de méthodes de volumes finis pour les fluides incompressibles. Mathématiques [math]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2006. Français. NNT : 2006CLF21643 . tel-01511202

HAL Id: tel-01511202

<https://theses.hal.science/tel-01511202>

Submitted on 20 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0
International License

N° d'Ordre : D.U. 1643

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL

**ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES
N°481**

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Spécialité :

Mathématiques Appliquées

Par **ZIMMERMANN Sébastien**

Diplômé d'Études Approfondies.

**ÉTUDE ET IMPLÉMENTATION DE MÉTHODES DE
VOLUMES FINIS POUR LES FLUIDES INCOMPRESSIBLES.**

Soutenue publiquement le 13 février 2006 devant la commission d'examen.

M. Mohamed AMARA
M. François JAUBERTEAU
M. Rachid TOUZANI (Directeur de thèse)
M. Youcef AMIRAT
M. Thierry DUBOIS
Mme Raphaëlle HERBIN

Introduction

Problème considéré

On s'intéresse dans ce travail à la simulation numérique de l'écoulement d'un fluide incompressible, caractérisé par un champ de vitesse \mathbf{u} et une pression p , dans un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^2 .

On suppose qu'au sein du fluide, le phénomène physique de diffusion prédomine sur celui de convection. Une fois adimensionalisés, $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifient alors les équations de Stokes :

$$\mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0. \quad (4)$$

Les équations (1) et (2) traduisent respectivement les principes physiques de conservation du moment et de la masse. \mathbf{f} représente une force extérieure appliquée au fluide. \mathbf{u}_0 est la vitesse initiale du fluide.

Une particularité de ces équations est que les deux inconnues \mathbf{u} et p sont reliées implicitement par la contrainte d'incompressibilité (2) : on ne dispose pas d'une équation explicite pour la pression.

Construction des méthodes numériques

Lorsqu'on cherche à construire une méthode numérique pour les équations (1)-(4), trois problèmes se posent. Tout d'abord, on ne dispose pas d'une équation explicite à discrétiser pour le calcul de la pression. Ce premier point est ici résolu en utilisant une méthode de *projection* qui introduit dans le schéma numérique une telle équation. Ensuite, quelle discrétisation en espace utiliser ? Les méthodes de différences finies sont faciles à implémenter, mais limitées à des géométries simples. Les méthodes d'éléments finis permettent de traiter des géométries complexes. Par contre, elles ne vérifient pas toujours certaines lois de conservation des grandeurs physiques. C'est pourquoi le choix s'est porté finalement sur une méthode de *volumes finis*. Enfin, quelle discrétisation en temps utiliser ? Nous nous intéresserons dans ce travail à différents schémas d'ordre 1 (Implicite) et d'ordre 2 (Crank-Nicolson, Formule de différences rétrograde).

Description des méthodes numériques

Les méthodes numériques introduites pour les équations de Stokes (1)-(4) sont notées **VF-I**, **VF-CN** et **VF-BDF**. Elles diffèrent par le schéma en temps utilisé. Elles utilisent une méthode de projection, qui permet à la fois de calculer la pression et d'imposer la contrainte d'incompressibilité (2).

La discrétisation en espace repose sur une méthode de volumes finis sur maillage triangulaire. Les inconnues pour la vitesse et la pression sont toutes deux constantes par maille.

La discrétisation des opérateurs apparaissant dans les équations (1)-(2) (gradient, divergence, laplacien) garantit un certain nombre de propriétés. En particulier, les opérateurs discrets correspondant à la divergence et au gradient sont adjoints, et vérifient une condition inf-sup si le maillage est uniforme. L'opérateur discret correspondant au laplacien utilisé pour la projection garantit une propriété d'orthogonalité. Pour l'équation des moments (1), les opérateurs discrets correspondant au gradient et au laplacien sont *consistants* : ils tendent vers leurs analogues continus lorsqu'on raffine le maillage.

Présentation du travail

Nous présentons d'abord dans le chapitre 1 les éléments utiles à la discrétisation des équations de Stokes (1)-(4). L'introduction dans le chapitre 2 des méthodes de projection, utilisées en particulier pour le calcul de la pression, permet alors de construire les schémas **VF-I**, **VF-CN** et **VF-BDF**. L'étude de ces schémas nécessite un certain nombre de résultats préliminaires qui sont exposés dans le chapitre 3. L'étude de la stabilité des schémas est entreprise dans le chapitre 4. On en déduit en particulier la convergence des solutions calculées par les schémas **VF-I**, **VF-CN** et **VF-BDF** vers la solution des équations (1)-(4). Des estimations d'erreur pour les schémas **VF-I** et **VF-BDF** sont montrées dans le chapitre 5. Enfin les résultats numériques du chapitre 6 permettent de valider les schémas introduits.

Notons que dans tous les calculs apparaissant dans le texte, C désigne une constante positive générique. Elle ne dépend que du domaine Ω et des données \mathbf{u}_0 , \mathbf{f} , T . Par ailleurs les propositions des chapitres 1 et 3 admettent souvent une version vectorielle. Nous présentons la version scalaire, et y faisons référence lorsque la version vectorielle est utilisée. Enfin les calculs des chapitres 4 et 5 s'inspirent des travaux de J. L. GUERMOND [6] et J. SHEN (par exemple [7] et [8]).

Mise en perspective

Si les méthodes de différences finies et d'éléments finis pour les équations de Stokes ont été abondamment étudiées, peu de résultats existent pour les méthodes de volumes finis. Hors du contexte des méthodes de projection utilisées ici, citons les travaux récents [10] de R. HERBIN et R. EYMARD. Ils utilisent une méthode de pénalisation pour le calcul de la pression.

Dans le contexte des méthodes de projection, on trouve déjà dans la littérature des exemples d'implémentations en volumes finis ([2] et [13] par exemple) ; l'analyse mathématique de tels schémas n'avait par contre pas été faite jusqu'à présent. S. FAURE [15] étudie la stabilité d'un schéma de ce type couplant volumes finis et méthodes de projection, sur un maillage rectangulaire uniforme. Pour un maillage triangulaire, le travail présenté ici est à notre connaissance la première analyse mathématique complète d'une telle méthode.

Table des matières

Introduction	1
1 Cadre discret	5
1.1 Le maillage	5
1.2 Espaces utilisés	7
1.2.1 Espaces continus	7
1.2.2 Espaces discrets	8
1.2.3 Propriétés des espaces discrets	10
1.3 Opérateurs de projection	11
1.3.1 Définition	11
1.3.2 Propriétés des opérateurs de projection	13
1.4 Opérateurs discrets	14
1.4.1 Construction	14
1.4.2 Opérateurs obtenus	18
1.4.3 Propriétés des opérateurs discrets	19
2 Présentation des schémas	31
2.1 Les méthodes de projection	31
2.2 Discrétisation en temps	32
2.3 Schémas obtenus	33
3 Résultats préliminaires	37
3.1 Opérateurs de projection	37
3.2 Opérateurs discrets	41
3.3 Condition inf-sup	48
4 Stabilité et convergence des schémas	55
4.1 Stabilité des schéma	55
4.1.1 Stabilité du schéma VF-I	56
4.1.2 Stabilité du schéma VF-CN	60
4.1.3 Stabilité du schéma VF-BDF	64
4.2 Convergence des schémas	68
4.2.1 Convergence du schéma VF-I	68
4.2.2 Convergence du schéma VF-CN	84
4.2.3 Convergence du schéma VF-BDF	85

5	Estimations d'erreur	87
5.1	Définition des erreurs	88
5.2	Estimation des erreurs pour le schéma VF-I	89
5.2.1	Équations vérifiées par les erreurs pour le schéma VF-I	89
5.2.2	Estimation des erreurs de consistance pour le schéma VF-I	92
5.2.3	Estimations d'erreur pour le schéma VF-I	97
5.3	Estimation des erreurs pour le schéma VF-BDF	105
5.3.1	Équations vérifiées par les erreurs pour le schéma VF-BDF	106
5.3.2	Estimation des erreurs de consistance pour le schéma VF-BDF	108
5.3.3	Estimations d'erreur pour le schéma VF-BDF	110
6	Résultats numériques	119
6.1	Vérification des propriétés des opérateurs	120
6.2	Validation des estimations d'erreur	122
6.3	Comparaison entre projection exacte et approchée	125
6.4	Comparaison avec une méthode d'éléments finis	126
	Conclusion	129
	Bibliographie	132

Chapitre 1

Cadre discret

Après avoir discrétisé le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ par un maillage triangulaire (section 1.1), nous définissons sur ce maillage un certain nombre d'espaces discrets (section 1.2). Sur ces espaces, on construit des opérateurs (section 1.4), qui permettent la discrétisation des équations de Stokes (1)-(4).

1.1 Le maillage

Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est discrétisé à l'aide d'un maillage triangulaire. Nous définissons un certain nombre de notations associées à ce maillage, et précisons les hypothèses faites sur celui-ci.

Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ considéré sera supposé polygonal pour simplifier. Soit \mathcal{T}_h un maillage du domaine Ω , formé de triangles ayant une arête commune et une seule avec les triangles voisins : $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$. L'ensemble formé des trois triangles ayant une arête commune avec le triangle $K \in \mathcal{T}_h$ sera noté $\mathcal{V}(K)$ (figure 1.1).



FIG. 1.1 – Maillage du domaine Ω (à gauche) et l'ensemble $\mathcal{V}(K)$ (à droite).

Si $K \in \mathcal{T}_h$ est un triangle du maillage, on note $|K|$ son aire. \mathcal{E}_K désigne l'ensemble de ses arêtes ; $h_{K,\sigma}$ est la hauteur associée à l'arête $\sigma \in \mathcal{E}_K$.

\mathcal{E}_h désigne l'ensemble des arêtes du maillage : $\mathcal{E}_h = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}_K$. La longueur d'une arête $\sigma \in \mathcal{E}_h$ est notée $|\sigma|$. L'ensemble des arêtes situées à l'intérieur du domaine Ω (resp. au bord) sera noté \mathcal{E}_h^{int} (resp. \mathcal{E}_h^{ext}) : $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^{int} \cup \mathcal{E}_h^{ext}$. Sur la figure 1.1, \mathcal{E}_h^{int} et \mathcal{E}_h^{ext} sont représentés respectivement en pointillés et en gras.

Le milieu d'une arête $\sigma \in \mathcal{E}_h$ est noté \mathbf{x}_σ . Si $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$, K_σ et L_σ désignent les triangles ayant σ comme arête commune. Si $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$, seul le triangle K_σ situé à l'intérieur du domaine est défini. On note $\mathcal{V}_\sigma = \{K_\sigma, L_\sigma\}$ si $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$ et $\mathcal{V}_\sigma = \{K_\sigma\}$ si $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$.

$\mathbf{n}_{K,\sigma}$ désigne la normale à l'arête σ du triangle K , pointant vers l'extérieur de K . Si L est le triangle tel que $\sigma = K \cap L$, nous avons $\mathbf{n}_{K,\sigma} = -\mathbf{n}_{L,\sigma}$.

\mathbf{x}_K est le centre du cercle circonscrit au triangle K . On suppose que les angles intérieurs des triangles du maillage ne dépassent pas $\frac{\pi}{2}$, de sorte que $\mathbf{x}_K \in K$.



FIG. 1.2 – Notations utilisées pour le maillage.

Pour toute arête intérieure $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$, D_σ désigne le quadrilatère obtenu en joignant les extrémités de σ avec les points \mathbf{x}_{K_σ} et \mathbf{x}_{L_σ} (figure 1.3). Pour une arête du bord $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$, D_σ est le triangle obtenu en joignant les extrémités de σ avec le point \mathbf{x}_{K_σ} .

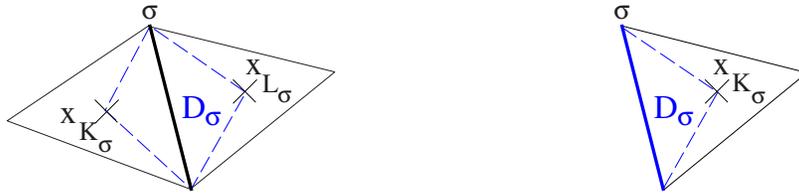


FIG. 1.3 – Définition de D_σ pour une arête intérieure (à gauche) et du bord (à droite).

Si $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$ est une arête intérieure, la distance entre les centres des cercles circonscrits à K_σ et L_σ sera notée $d_\sigma = d(\mathbf{x}_{K_\sigma}, \mathbf{x}_{L_\sigma})$. Si $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$ est une arête du bord, on notera cette fois $d_\sigma = d(\mathbf{x}_\sigma, \mathbf{x}_{K_\sigma})$. On définit alors pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}_h$ la quantité τ_σ par

$$\tau_\sigma = \frac{|\sigma|}{d_\sigma}.$$

Étant donnés 2 triangles $K \in \mathcal{T}_h$ et $L \in \mathcal{T}_h$ ayant une arête commune $\sigma \in \mathcal{E}_h$, on définit

$$\alpha_{K,L} = \frac{d(\mathbf{x}_L, \mathbf{x}_\sigma)}{d(\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_L)}.$$

Notons que $\alpha_{K,L} \in [0, 1]$ et $\alpha_{K,L} + \alpha_{L,K} = 1$.

Le plus grand diamètre des cercles circonscrits aux triangles représente la finesse du maillage ; il est noté h .

Enfin, l'hypothèse suivante sur le maillage sera utile

Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \text{(HM)} \quad & \forall \sigma \in \mathcal{E}_h, \quad d(\mathbf{x}_{K_\sigma}, \sigma) \geq C|\sigma|, \\ & \forall \sigma \in \mathcal{E}_h, \quad |\sigma| \geq Ch. \end{aligned}$$

Cette hypothèse de régularité sur le maillage est usuelle dans l'analyse des schémas de volumes finis (voir [9] par exemple). Elle est en particulier vérifiée si le maillage considéré est *uniforme*, *i.e.* formé de triangles équilatéraux.

L'hypothèse **(HM)** implique la propriété suivante :

Pour tout triangle $K \in \mathcal{T}_h$, notons h_K et ρ_K les diamètres respectifs des cercles circonscrits et inscrits.

(MR) Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq C.$$

Cette autre hypothèse de régularité sur le maillage lui interdit de trop grandes déformations. Elle intervient dans l'étude des espaces d'éléments finis introduits ci-dessous.

1.2 Espaces utilisés

Nous introduisons ici les espaces utilisés pour l'étude du problème de Stokes (1)-(4) et les espaces discrets les approchant. Nous rappelons ensuite quelques propriétés vérifiées par ces espaces discrets.

1.2.1 Espaces continus

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{C}^k = \mathcal{C}^k(\Omega)$ (resp. $\mathcal{C}^k([a, b])$) désigne l'ensemble des fonctions définies sur Ω (resp. $[a, b]$) dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues. $\mathcal{C}_0^\infty = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ (resp. $\mathcal{C}_0^\infty([a, b])$) est l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω (resp. $[a, b]$).

Si $p \in [1, \infty]$, on note $L^p = L^p(\Omega)$ l'espace de Lebesgue associé, muni de sa norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. Sa version vectorielle est l'espace $\mathbf{L}^p = (L^p)^2$. Pour $p = 2$, afin d'alléger les notations, on utilisera le symbole $|\cdot|$ pour désigner les normes associées aux espaces L^2 et \mathbf{L}^2 . La distinction avec la valeur absolue se fait suivant le contexte. On utilise aussi l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$. On note également :

$$L_0^2 = \{q \in L^2; \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0\}.$$

Les espaces de Sobolev $W^{p,q} = W^{p,q}(\Omega)$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$) sont formés des fonctions de L^q dont les dérivées partielles (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre p appartiennent à L^q . Ils sont munis de la norme associée $\|\cdot\|_{W^{p,q}}$. Si $q = 2$, on note $H^p = W^{p,2}$ et $\|\cdot\|_p$ la norme associée. Si $D \subset \Omega$ est un ouvert, on utilise également l'espace $H^p(D)$. $H_0^p = H_0^p(\Omega)$ est l'adhérence de \mathcal{C}_0^∞ dans H^p . Les versions vectorielles de ces espaces sont notées $\mathbf{W}^{p,q}$, $\mathbf{H}^p = (H^p)^2$ et $\mathbf{H}_0^p = (H_0^p)^2$. Les normes associées sont encore notées $\|\cdot\|_p$. On utilise également l'espace $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^2)$.

Rappelons que les espaces \mathcal{C}^k et $(\mathcal{C}^k)^2$ sont denses respectivement dans $W^{p,q}$ et $\mathbf{W}^{p,q}$. Par ailleurs, puisque $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, si $p \geq 2$, une fonction de $H^p(\Omega)$ ou $\mathbf{H}^p(\Omega)$ est égale presque partout à une fonction continue (théorème d'injection de Sobolev). Il est ainsi possible de donner un sens aux valeurs ponctuelles $q(\mathbf{x})$ et $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ pour $q \in H^p$, $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^p$, $\mathbf{x} \in \Omega$ et $p \geq 2$.

Si X est un espace de Banach, $\mathcal{C}(0, T; X)$ (resp. $L^p(0, T; X)$ et $\mathcal{C}_0^\infty(0, T; X)$) désigne l'espace des fonctions mesurables $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow X$ telles que l'application $t \in [0, T] \rightarrow \|\mathbf{u}(t)\|_X$ soit continue (resp. L^p et \mathcal{C}_0^∞), muni de sa norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(0, T; X)}$ (resp. $\|\cdot\|_{L^p(0, T; X)}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_0^\infty(0, T; X)}$).

Sur les espaces L^p et H^p , il est possible de définir les opérateurs suivants. L'ensemble des suites de L^p étant noté $(L^p)^\mathbb{N}$, on désigne par :

$$\delta : (L^p)^\mathbb{N} \rightarrow (L^p)^\mathbb{N}$$

l'opérateur prenant la différence entre deux termes consécutifs d'une suite. L'image de la suite $(u^m)_{m \in \mathbb{N}} \in (L^p)^\mathbb{N}$ par δ est la suite $(\delta u^m)_{m \in \mathbb{N}} \in (L^p)^\mathbb{N}$, définie par

$$\begin{aligned} \delta u^0 &= u^0, \\ \forall m \geq 1, \quad \delta u^m &= u^m - u^{m-1}. \end{aligned}$$

La version vectorielle de l'opérateur δ ,

$$\boldsymbol{\delta} : (\mathbf{L}^p)^\mathbb{N} \rightarrow (\mathbf{L}^p)^\mathbb{N},$$

est définie par $\boldsymbol{\delta} = (\delta)^2$. Les opérateurs gradient, divergence, et laplacien sont notés respectivement ∇ , div , Δ . Le symbole ∇ est défini, pour tout $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbf{H}^1$ par

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \nabla u_1^T \\ \nabla u_2^T \end{pmatrix}.$$

La version vectorielle du laplacien est $\boldsymbol{\Delta} = (\Delta)^2$. Enfin, si $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbf{H}^1$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbf{H}^1$, on note

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \sum_{i=1}^2 (\nabla u_i, \nabla v_i). \quad (1.1)$$

A partir des espaces L^p et H^p , on définit les espaces suivants, qui interviennent dans l'étude du problème de Stokes (1)-(4) :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1; \text{div } \mathbf{v} = 0\}, \\ \mathbf{H} &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2; \text{div } \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ \mathbf{H}(\text{div}) &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2; \text{div } \mathbf{v} \in L^2\}. \end{aligned}$$

1.2.2 Espaces discrets

Afin d'approcher les espaces L^2 et H^1 , on utilise les espaces discrets suivants. Les espaces usuels pour les méthodes de volumes finis sont :

$$\begin{aligned} P_0 &= \{v \in L^2; \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \text{ est constant}\}, \\ P_0^0 &= \{v \in P_0; \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0\}. \end{aligned}$$

On introduit également les espaces d'éléments finis

$$\begin{aligned} P_1^d &= \{v \in L^2; \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \text{ est affine}\}, \\ P_1^c &= \{v \in P_1^d \cap \mathcal{C}^0; \forall \sigma \in \mathcal{E}_h^{\text{ext}}, v|_{\sigma} = 0\}, \\ P_1^{nc} &= \{v \in P_1^d; \forall \sigma \in \mathcal{E}_h, v \text{ est continu au milieu de } \sigma\}. \end{aligned}$$

Les versions vectorielles de ces espaces sont notées

$$\mathbf{P}_0 = (P_0)^2, \quad \mathbf{P}_1^d = (P_1^d)^2, \quad \mathbf{P}_1^c = (P_1^c)^2, \quad \mathbf{P}_1^{nc} = (P_1^{nc})^2.$$

L'exposant dans la notation P_1^{nc} indique qu'il s'agit d'une approximation non conforme de H^1 , *i.e.* non incluse dans H^1 . En effet, soit $q_h \in P_1^{nc}$. Les discontinuités localisées au niveau des arêtes font que

$$\nabla q_h \notin \mathbf{L}^2.$$

Par contre, si l'on considère l'opérateur $\tilde{\nabla}_h : L^2 \rightarrow \mathbf{P}_0$, obtenu par restriction de ∇ sur chaque triangle du maillage

$$\forall v \in L^2, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \tilde{\nabla}_h v|_K = \nabla v|_K,$$

alors on a bien

$$\tilde{\nabla}_h q_h \in \mathbf{L}^2.$$

On note $\|\cdot\|_{1,h}$ la norme associée à ce gradient discret $\tilde{\nabla}_h$ sur l'espace P_1^{nc} :

$$\forall q_h \in P_1^{nc}, \quad \|q_h\|_{1,h} = \left(|q_h|^2 + |\tilde{\nabla}_h q_h|^2 \right)^{1/2}.$$

Le gradient discret $\tilde{\nabla}_h$ et sa norme associée $\|\cdot\|_{1,h}$ seront utilisés plus généralement sur l'espace P_1^d .

L'espace P_0 n'est pas non plus inclus dans H^1 . Il est malgré tout possible de définir l'analogue d'une norme H^1 au niveau discret. Pour $u_h \in P_0$, on note

$$\|u_h\|_h = \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} \tau_\sigma (u_{L_\sigma} - u_{K_\sigma})^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} \tau_\sigma |u_{K_\sigma}|^2 \right)^{1/2}.$$

Si $\mathbf{u}_h = (u_h^1, u_h^2) \in \mathbf{P}_0$, on utilisera la même notation

$$\|\mathbf{u}_h\|_h = \left(\sum_{i=1}^2 \|u_{h,i}\|_h^2 \right)^{1/2}.$$

Les *degrés de liberté* associés aux espaces P_0 et P_1^{nc} , autrement dit les valeurs utilisées pour définir une fonction de l'espace, sont représentées sur la figure 1.4 par des points. Pour l'espace P_0 , une fonction est définie par sa valeur sur chaque triangle du maillage. Pour l'espace P_1^{nc} , c'est la valeur prise par la fonction au milieu de chaque arête qui est utilisée.

L'espace $\mathbf{H}(\text{div})$ est approché par les espaces de **R**aviart-**T**homas de plus bas degré :

$$\begin{aligned} \mathbf{RT}_0^d &= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{P}_1^d; \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_K, \quad \mathbf{v}|_K \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \text{ est constant} \}, \\ \mathbf{RT}_0^c &= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{RT}_0^d; \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall L \in \mathcal{V}(K), \quad \mathbf{v}|_K \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = \mathbf{v}|_L \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \}. \end{aligned}$$

On peut vérifier [3] que

$$\mathbf{RT}_0^d = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2; \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \exists \mathbf{a}_K \in \mathbb{R}^2, b_K \in \mathbb{R}; \quad \forall \mathbf{x} \in K, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_K + b_K \mathbf{x} \}.$$

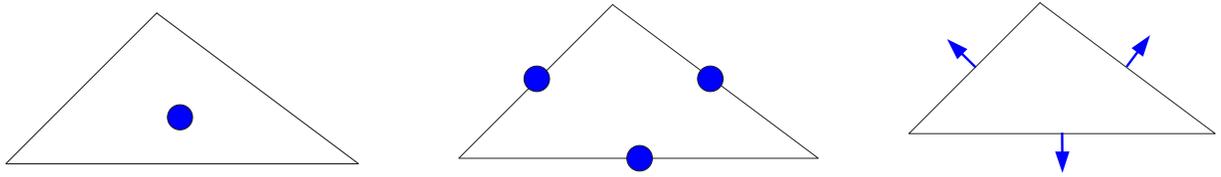


FIG. 1.4 – Degrés de liberté pour P_0 (à gauche), P_1^{nc} (au centre), et \mathbf{RT}_0^c (à droite).

L'indice utilisé dans la notation de ces espaces indique que sur les arêtes du maillage, la composante normale des fonctions de ces espaces est une constante. L'exposant dans la notation \mathbf{RT}_0^d indique que les fonctions de cet espace sont en général discontinues au niveau des arêtes. L'exposant dans la notation \mathbf{RT}_0^c indique qu'au niveau des arêtes du maillage, les fonctions de cet espace ont une composante normale continue. Les degrés de liberté associés aux espaces \mathbf{RT}_0^c et \mathbf{RT}_0^d sont les valeurs des composantes normales sur les arêtes (figure 1.4).

1.2.3 Propriétés des espaces discrets

Nous présentons certaines propriétés des espaces P_0 et P_1^{nc} définis dans la section 1.2.2.

Propriétés de l'espace P_0

Proposition 1.1 (Inégalité de Poincaré discrète sur l'espace P_0 , cf [9]).

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v_h \in P_0$

$$|v_h| \leq C \|v_h\|_h.$$

Proposition 1.2 (Inégalité inverse sur l'espace P_0).

On suppose que le maillage vérifie l'hypothèse **(HM)**. Il existe alors une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u_h \in P_0$

$$\|v_h\|_h \leq \frac{C}{h} |v_h|.$$

DÉMONSTRATION. Par définition de $\|\cdot\|_h$

$$h^2 \|v_h\|_h^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} h^2 \tau_\sigma (v_{L_\sigma} - v_{K_\sigma})^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} h^2 \tau_\sigma (v_{K_\sigma})^2.$$

En utilisant l'hypothèse sur le maillage **(HM)** on obtient

$$h^2 \tau_\sigma = h^2 \frac{|\sigma|}{d_\sigma} \leq C h^2 \leq C |\sigma| d_\sigma \leq C |\sigma| h_{K_{\sigma,\sigma}} \leq C |K_\sigma|;$$

de même

$$h^2 \tau_\sigma \leq C |L_\sigma|.$$

Par ailleurs

$$(v_{L_\sigma} - v_{K_\sigma})^2 \leq 2(v_{L_\sigma}^2 + v_{K_\sigma}^2),$$

donc

$$\begin{aligned}
h^2 \|v_h\|_h^2 &\leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} (|K_\sigma| v_{K_\sigma}^2 + |L_\sigma| v_{L_\sigma}^2) + C \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} |K_\sigma| v_{K_\sigma}^2 \\
&\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| v_K^2 \\
&\leq C |v_h|^2.
\end{aligned}$$

■

Propriétés de l'espace P_1^{nc} :

Proposition 1.3 (Inégalité de Poincaré sur l'espace P_1^{nc} , cf [17]).

Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $q_h \in P_1^{nc}$ vérifiant $\int_\Omega q_h(x) dx = 0$, on a

$$|q_h| \leq C |\nabla q_h|.$$

Proposition 1.4 (Inégalité inverse sur l'espace P_1^{nc} , cf [14], p. 112).

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $q_h \in P_1^{nc}$

$$|\tilde{\nabla}_h q_h| \leq \frac{C}{h} |q_h|.$$

1.3 Opérateurs de projection

Aux espaces discrets introduits dans la section 1.2.2 sont associés des opérateurs de projection. Nous présentons les définitions de ces opérateurs, ainsi que certaines de leurs propriétés.

1.3.1 Définition

Les opérateurs de projection correspondant aux différents espaces discrets sont définis comme suit.

– Pour l'espace P_0 , les opérateurs

$$\begin{aligned}
\Pi_{P_0} &: L^2 \rightarrow P_0, \\
\tilde{\Pi}_{P_0} &: \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H^2(K) \rightarrow P_0,
\end{aligned}$$

sont tels que pour tout $w \in L^2$:

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (\Pi_{P_0} w)_K = \frac{1}{|K|} \int_K w \, d\mathbf{x}, \quad (1.2)$$

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (\tilde{\Pi}_{P_0} w)_K = w(\mathbf{x}_K). \quad (1.3)$$

– Pour l'espace P_1^c , l'opérateur

$$\Pi_{P_1^c} : H_0^1 \rightarrow P_1^c$$

est tel que pour tout $v \in H_0^1$:

$$\forall \phi \in P_1^c, \quad (\nabla(\Pi_{P_1^c} v), \nabla \phi) = (\nabla v, \nabla \phi).$$

– Pour l'espace P_1^{nc} , l'opérateur

$$\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} : L^2 \rightarrow P_1^{nc}$$

est tel que pour tout $v \in L^2$:

$$\forall \psi \in P_1^{nc}, \quad (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} v, \psi) = (v, \psi). \quad (1.4)$$

– Pour l'espace \mathbf{RT}_0^c , l'opérateur

$$\Pi_{\mathbf{RT}_0^c} : \mathbf{H}(\text{div}) \rightarrow \mathbf{RT}_0^c$$

est tel que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div})$:

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_h, \quad \int_{\sigma} \Pi_{\mathbf{RT}_0^c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\sigma = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\sigma. \quad (1.5)$$

Notons que, pour tout $w \in L^2$ et tout $\phi \in P_0$:

$$\begin{aligned} (\Pi_{P_0} w, \phi) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Pi_{P_0} w \phi d\mathbf{x} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \phi|_K \int_K \Pi_{P_0} w d\mathbf{x} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \phi|_K \int_K \left(\frac{1}{|K|} \int_K w(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \phi|_K \int_K w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= (w, \phi). \end{aligned}$$

Ainsi Π_{P_0} est l'opérateur de projection de L^2 sur son sous-espace P_0 , tout comme $\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}}$ est l'opérateur de projection de L^2 sur son sous-espace P_1^{nc} . Ces deux opérateurs sont donc naturellement stables pour la norme L^2 . L'opérateur $\Pi_{P_1^c}$ est l'opérateur de projection de H_0^1 sur son sous-espace P_1^c , et est donc stable pour la norme H^1 . L'opérateur $\Pi_{\mathbf{RT}_0^c}$ permet d'approcher une fonction donnée sur les arêtes du maillage. Les versions vectorielles des opérateurs de projection Π_{P_0} , $\tilde{\Pi}_{P_0}$ et $\Pi_{P_1^c}$ sont notées :

$$\Pi_{\mathbf{P}_0} = (\Pi_{P_0})^2, \quad \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} = (\tilde{\Pi}_{P_0})^2, \quad \Pi_{\mathbf{P}_1^c} = (\Pi_{P_1^c})^2.$$

1.3.2 Propriétés des opérateurs de projection

Nous présentons maintenant les propriétés vérifiées par les opérateurs de projection introduits ci-dessus.

Propriétés des opérateurs Π_{P_0} et $\tilde{\Pi}_{P_0}$:

Proposition 1.5 (Stabilité de la projection $\tilde{\Pi}_{P_0}$).

Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in H^2$:

$$|\tilde{\Pi}_{P_0} v| \leq C \|v\|_2.$$

DÉMONSTRATION. En deux dimensions, l'espace H^2 est inclus dans l'espace des fonctions continues \mathcal{C}^0 , et l'injection est continue. On déduit donc de (1.3)

$$|\tilde{\Pi}_{P_0} v|^2 = \int_{\Omega} |(\tilde{\Pi}_{P_0} v)(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| v(\mathbf{x}_K)^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \|v\|_2^2 \leq C \|v\|_2^2. \quad \blacksquare$$

Proposition 1.6 (L'opérateur Π_{P_0} est auto-adjoint).

Pour tous $v \in L^2$ et $w \in L^2$, on a

$$(\Pi_{P_0} v, w) = (v, \Pi_{P_0} w).$$

DÉMONSTRATION. En utilisant la définition (1.2) de l'opérateur Π_{P_0} et le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} (\Pi_{P_0} v, w) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\Pi_{P_0} v)_K w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left(\frac{1}{|K|} \int_K v(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \right) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left(\frac{1}{|K|} \int_K w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) v(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\Pi_{P_0} w)_K v(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &= (\Pi_{P_0} w, v). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 1.7 (Estimation de l'erreur due à la projection Π_{P_0} , cf [14], p. 109).

On suppose que le maillage vérifie (MR). Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in H^1$

$$|v - \Pi_{P_0} v| \leq C h \|v\|_1.$$

Propriété de l'opérateur $\Pi_{P_1^c}$

Proposition 1.8 (Estimation de l'erreur due à la projection $\Pi_{P_1^c}$, cf [14], p. 109).

On suppose que le maillage vérifie (MR). Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in H_0^1$

$$|v - \Pi_{P_1^c} v| \leq C h \|v\|_1.$$

Propriété de l'opérateur $\Pi_{\mathbf{RT}_0^c}$

Proposition 1.9 (Estimation de l'erreur due à la projection $\Pi_{\mathbf{RT}_0^c}$, cf [3], p. 132).
On suppose que le maillage vérifie (MR). Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1$

$$|\mathbf{v} - \Pi_{\mathbf{RT}_0^c} \mathbf{v}| \leq C h \|\mathbf{v}\|_1.$$

1.4 Opérateurs discrets

Les équations de Stokes (1)-(4) font intervenir les opérateurs gradient, divergence, et laplacien. A partir des espaces introduits dans la section 1.2, on construit leurs analogues discrets.

1.4.1 Construction

Soient $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ des fonctions régulières. On cherche à calculer une approximation du gradient et du laplacien de q , ainsi qu'une approximation de la divergence de \mathbf{u} . Pour cela, on approche d'abord q par une fonction affine par morceaux $q_h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Celle-ci est construite à partir de l'ensemble $(D_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}_h}$ qui forme une partition de $\bar{\Omega}$:

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathcal{E}_h, \quad q_h|_{D_\sigma} \text{ est affine,} \\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_h^{int}, \quad q_h(\mathbf{x}_{K_\sigma}) = q(\mathbf{x}_{K_\sigma}), \quad q_h(\mathbf{x}_{L_\sigma}) = q(\mathbf{x}_{L_\sigma}), \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}, \quad q_h(\mathbf{x}_{K_\sigma}) = q(\mathbf{x}_{K_\sigma}). \quad (1.7)$$

Notons que q_h n'est pas défini de manière unique. En effet

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_h, \quad \exists (a_\sigma, b_\sigma, c_\sigma); \quad q_h|_{D_\sigma}(x, y) = a_\sigma + b_\sigma x + c_\sigma y.$$

Il y a donc trois degrés de liberté pour q_h par arête σ . Or, les équations (1.6) et (1.7) en imposent respectivement deux pour les arêtes intérieures et un pour les arêtes du bord. Ces degrés de liberté supplémentaires serviront à imposer des conditions aux limites sur q_h , correspondant à celles vérifiées par q .

Par ailleurs, en construisant pour chaque composante de \mathbf{v} une approximation analogue à celle définie pour q , on obtient une fonction affine par morceaux sur $(D_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}_h}$, notée $\mathbf{v}_h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Construction du gradient discret

Soit $K \in \mathcal{T}_h$ un triangle. La formule du gradient donne :

$$\frac{1}{|K|} \int_K \nabla q \, d\mathbf{x} = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_\sigma q \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\sigma \simeq \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_\sigma q_h \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\sigma.$$

Comme $q_h|_\sigma$ est une fonction affine, on a

$$\int_\sigma q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = |\sigma| q_h(\mathbf{x}_\sigma).$$

La valeur de q_h en \mathbf{x}_σ est calculée à partir de $q_h(\mathbf{x}_{K_\sigma}) = q(\mathbf{x}_{K_\sigma})$ et $q_h(\mathbf{x}_{L_\sigma}) = q(\mathbf{x}_{L_\sigma})$ (figure 1.5) comme décrit ci-dessous.

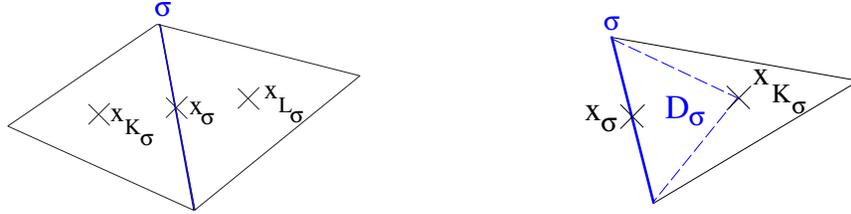


FIG. 1.5 – Calcul de $q_h(\mathbf{x}_\sigma)$ pour une arête intérieure (à gauche) et au bord (à droite).

Considérons d'abord le cas d'une arête intérieure $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$. Les points \mathbf{x}_σ , \mathbf{x}_{K_σ} , \mathbf{x}_{L_σ} sont tous situés sur la médiatrice de l'arête σ . La restriction de q_h au segment $[\mathbf{x}_{K_\sigma}, \mathbf{x}_{L_\sigma}]$ a donc pour pente (figure 1.6)

$$\frac{q_h(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - q_h(\mathbf{x}_\sigma)}{d(\mathbf{x}_{L_\sigma}, \mathbf{x}_\sigma)} = \frac{q_h(\mathbf{x}_\sigma) - q_h(\mathbf{x}_{K_\sigma})}{d(\mathbf{x}_{K_\sigma}, \mathbf{x}_\sigma)}.$$

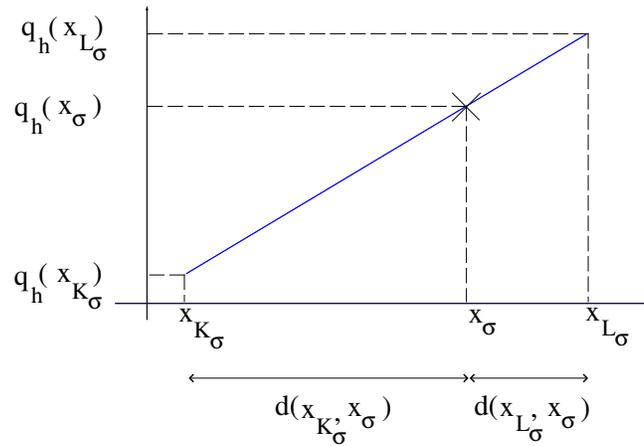


FIG. 1.6 – Calcul de la valeur interpolée $q_h(\mathbf{x}_\sigma)$.

On en déduit

$$q_h(\mathbf{x}_\sigma) = \alpha_{K_\sigma, L_\sigma} q_h(\mathbf{x}_{K_\sigma}) + \alpha_{L_\sigma, K_\sigma} q_h(\mathbf{x}_{L_\sigma}) = \alpha_{K_\sigma, L_\sigma} q(\mathbf{x}_{K_\sigma}) + \alpha_{L_\sigma, K_\sigma} q(\mathbf{x}_{L_\sigma}),$$

avec

$$\alpha_{K_\sigma, L_\sigma} = \frac{d(\mathbf{x}_{L_\sigma}, \sigma)}{d(\mathbf{x}_{K_\sigma}, \mathbf{x}_{L_\sigma})}.$$

Considérons maintenant le cas d'une arête $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$ située au bord du domaine. Puisqu'on dispose de 3 degrés de liberté sur $q_h|_{D_\sigma}$ et que seul $q_h(\mathbf{x}_{K_\sigma}) = p(\mathbf{x}_{K_\sigma})$ est fixé pour l'instant, $q_h(\mathbf{x}_\sigma)$ peut être choisi librement (figure 1.5).

On suppose que q satisfait une condition aux limites homogène de Neumann. On impose les mêmes conditions aux limites sur la fonction q_h . Comme $q_h|_{D_\sigma}$ est une fonction affine, $\nabla q_h \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}|_{D_\sigma}$ est une constante. On l'évalue en utilisant les points \mathbf{x}_σ et \mathbf{x}_{K_σ}

$$0 = \nabla q_h \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}|_\sigma = \frac{q_h(\mathbf{x}_\sigma) - q_h(\mathbf{x}_{K_\sigma})}{d(\mathbf{x}_\sigma, \mathbf{x}_{K_\sigma})},$$

ce qui donne

$$q_h(\mathbf{x}_\sigma) = q_h(\mathbf{x}_{K_\sigma}) = q(\mathbf{x}_{K_\sigma}).$$

En résumé, on a obtenu l'approximation suivante pour le gradient de la fonction q

$$\begin{aligned} \frac{1}{|K|} \int_K \nabla q \, d\mathbf{x} &\simeq \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| \left(\alpha_{K_\sigma, L_\sigma} q(\mathbf{x}_{K_\sigma}) + \alpha_{L_\sigma, K_\sigma} q(\mathbf{x}_{L_\sigma}) \right) \mathbf{n}_{K,\sigma} \\ &+ \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}} |\sigma| q(\mathbf{x}_{K_\sigma}) \mathbf{n}_{K,\sigma}. \end{aligned}$$

Construction de la divergence discrète

Soit $K \in \mathcal{T}_h$. D'après la formule de la divergence

$$\frac{1}{|K|} \int_K \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_\sigma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\sigma \simeq \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_\sigma \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\sigma.$$

On distingue alors le cas des arêtes intérieures et celui des arêtes du bord. Pour une arête intérieure $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}$, en procédant comme pour le calcul du gradient discret, on obtient

$$\int_\sigma \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\sigma = |\sigma| \left(\alpha_{K_\sigma, L_\sigma} \mathbf{v}(\mathbf{x}_{K_\sigma}) + \alpha_{L_\sigma, K_\sigma} \mathbf{v}(\mathbf{x}_{L_\sigma}) \right) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}.$$

Pour les arêtes du bord, on suppose que \mathbf{v} vérifie une condition aux limites homogène de Dirichlet. On impose, pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$:

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{x}_\sigma) = 0,$$

d'où

$$\int_\sigma \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\sigma = 0.$$

On obtient alors l'approximation suivante

$$\frac{1}{|K|} \int_K \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \simeq \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| \left(\alpha_{K_\sigma, L_\sigma} \mathbf{v}(\mathbf{x}_{K_\sigma}) + \alpha_{L_\sigma, K_\sigma} \mathbf{v}(\mathbf{x}_{L_\sigma}) \right) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}.$$

Malheureusement, l'opérateur de divergence discrète déduit de cette approximation ne vérifie pas une propriété essentielle. Il n'est en effet pas *adjoint* à l'opérateur de gradient discret (proposition 1.15). C'est pourquoi on utilisera finalement la formule suivante, qui donne bien un opérateur adjoint

$$\frac{1}{|K|} \int_K \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \simeq \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| \left(\alpha_{L_\sigma, K_\sigma} \mathbf{v}(\mathbf{x}_{K_\sigma}) + \alpha_{K_\sigma, L_\sigma} \mathbf{v}(\mathbf{x}_{L_\sigma}) \right) \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma}.$$

Construction du laplacien discret

Soit $K \in \mathcal{T}_h$. En appliquant la formule de la divergence on obtient

$$\frac{1}{|K|} \int_K \Delta q \, d\mathbf{x} = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_\sigma \nabla q \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma} \, d\sigma \simeq \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_\sigma \nabla q_h \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma} \, d\sigma.$$

Considérons d'abord le cas d'une arête intérieure $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$ (figure 1.7). Comme $q_h|_{D_\sigma}$ est une fonction affine, $\nabla q_h \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma}|_{D_\sigma}$ est une constante. On l'évalue à l'aide des points \mathbf{x}_{K_σ} et \mathbf{x}_{L_σ} :

$$\nabla q_h \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma}|_{D_\sigma} = \frac{1}{d_\sigma} (q_h(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - q_h(\mathbf{x}_{K_\sigma})) = \frac{1}{d_\sigma} (q(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - q(\mathbf{x}_{K_\sigma})).$$

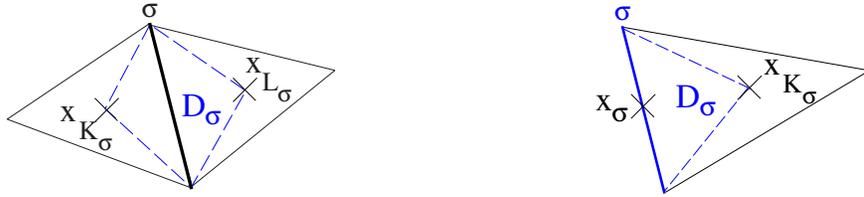


FIG. 1.7 – Calcul de $\nabla q_h(\mathbf{x}_\sigma) \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma}$ pour une arête intérieure (à gauche) et au bord.

Pour une arête extérieure $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$, la condition aux limites sur q intervient. On suppose que q vérifie une condition aux limites homogène de Dirichlet. On impose alors la condition aux limites suivante sur q_h

$$q_h(\mathbf{x}_\sigma) = 0.$$

On évalue $\nabla q_h \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma}|_{D_\sigma}$ en utilisant les points \mathbf{x}_σ et \mathbf{x}_{K_σ}

$$\nabla q_h \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma}|_{D_\sigma} = \frac{1}{d_\sigma} (q_h(\mathbf{x}_\sigma) - q_h(\mathbf{x}_{K_\sigma})) = -\frac{1}{d_\sigma} q(\mathbf{x}_{K_\sigma}).$$

Ainsi, on obtient l'approximation suivante pour le laplacien

$$\frac{1}{|K|} \int_K \Delta q \, d\mathbf{x} \simeq \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} \tau_\sigma (q(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - q(\mathbf{x}_{K_\sigma})) - \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}} \tau_\sigma q(\mathbf{x}_{K_\sigma}).$$



FIG. 1.8 – Gradient et divergence discrets : construction (à gauche) et support (à droite).

1.4.2 Opérateurs obtenus

En utilisant les constructions précédentes, on définit les opérateurs discrets ∇_h , div_h , Δ_h , $\tilde{\Delta}_h$ correspondant au gradient, à la divergence et au laplacien.

Définition : L'opérateur discret correspondant au gradient est défini par

$$\begin{aligned} \nabla_h : P_0 &\rightarrow \mathbf{P}_0 \\ q_h &\rightarrow \nabla_h q_h \end{aligned}$$

avec pour tout triangle $K \in \mathcal{T}_h$

$$\begin{aligned} \nabla_h q_h|_K &= \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| \left(\alpha_{K\sigma, L\sigma} q_{K\sigma} + \alpha_{L\sigma, K\sigma} q_{L\sigma} \right) \mathbf{n}_{K,\sigma} \\ &+ \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}} |\sigma| q_{K\sigma} \mathbf{n}_{K,\sigma}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Définition : L'opérateur discret correspondant à la divergence est défini par

$$\begin{aligned} \text{div}_h : \mathbf{P}_0 &\rightarrow P_0 \\ \mathbf{v}_h &\rightarrow \text{div}_h \mathbf{v}_h \end{aligned}$$

avec pour tout triangle $K \in \mathcal{T}_h$

$$\text{div}_h \mathbf{v}_h|_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| \left(\alpha_{L\sigma, K\sigma} \mathbf{v}_{K\sigma} + \alpha_{K\sigma, L\sigma} \mathbf{v}_{L\sigma} \right) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}. \quad (1.9)$$

Ces deux opérateurs sont donc construits à partir d'une interpolation au niveau des arêtes du maillage. Si $\sigma \in \mathcal{E}_h$ est une arête du maillage, une valeur associée à σ est déduite des valeurs aux points $\mathbf{x}_{K\sigma}$ et $\mathbf{x}_{L\sigma}$ (figure 1.8).

Le *support* des opérateurs ∇_h et div_h , autrement dit l'ensemble des éléments du maillage utilisé pour leur construction sur un triangle K , est l'ensemble $\mathcal{V}(K)$ des triangles voisins de K (figure 1.8).

Définition : Le premier opérateur correspondant au laplacien est défini par

$$\begin{aligned} \Delta_h : P_0 &\rightarrow P_0 \\ q_h &\rightarrow \text{div}_h(\nabla_h q_h) \end{aligned}$$

Définition : Le second opérateur correspondant au laplacien est défini par

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_h : P_0 &\rightarrow P_0 \\ q_h &\rightarrow \tilde{\Delta}_h q_h.\end{aligned}$$

avec pour tout triangle $K \in \mathcal{T}_h$

$$\tilde{\Delta}_h q_h|_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} \tau_\sigma (q_{L_\sigma} - q_{K_\sigma}) - \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}} \tau_\sigma q_{K_\sigma}. \quad (1.10)$$

Enfin, on note

$$\tilde{\Delta}_h = (\tilde{\Delta}_h)^2.$$

Les supports respectifs des laplaciens discrets Δ_h et $\tilde{\Delta}_h$ sont représentés ci-dessous (figure 1.9).

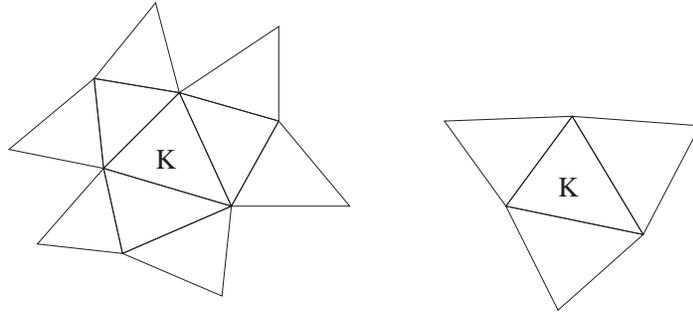


FIG. 1.9 – Support des laplaciens discrets : Δ_h (à gauche) et $\tilde{\Delta}_h$ (à droite).

1.4.3 Propriétés des opérateurs discrets

On montre maintenant que les opérateurs discrets définis dans la section 1.4.2 vérifient des propriétés de stabilité (propositions 1.11 et 1.12) et de consistance (propositions 1.13 et 1.14). Les opérateurs discrets correspondant au gradient et à la divergence sont adjoints (proposition 1.15).

Rappelons que pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}_h$, \mathcal{V}_σ est défini par $\mathcal{V}_\sigma = \{K_\sigma, L_\sigma\}$ si $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$ et $\mathcal{V}_\sigma = \{K_\sigma\}$ si $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$. Si $\sigma \in \mathcal{E}_h$ et $T \in \mathcal{V}_\sigma$, on pose pour tout $g \in \mathcal{C}^1$

$$E_T^\sigma(g) = \int_\sigma \int_0^1 \nabla g(t\mathbf{x}_T + (1-t)\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_T - \mathbf{x}) dt d\sigma, \quad (1.11)$$

et pour tout $g \in \mathcal{C}^2$

$$F_T^\sigma(g) = \int_\sigma \int_0^1 \nabla \nabla(g)(t\mathbf{x}_T + (1-t)\mathbf{x})(\mathbf{x}_T - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}) dt d\sigma, \quad (1.12)$$

$$G_T^\sigma(g) = \int_\sigma \int_0^1 \nabla \nabla(g)(t\mathbf{x}_T + (1-t)\mathbf{x})(\mathbf{x}_T - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_T - \mathbf{x}) dt d\sigma. \quad (1.13)$$

Si $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$ et $T \in \mathcal{V}_\sigma$, on pose pour tout $g \in \mathcal{C}^2$

$$H_T^\sigma(g) = \int_\sigma \int_0^1 \mathbf{H}(g)(t\mathbf{x}_T + (1-t)\mathbf{x})(\mathbf{x}_T - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_T - \mathbf{x}) t dt d\sigma, \quad (1.14)$$

où $\mathbf{H}(g)$ est la matrice hessienne de g .

Ces termes sont des restes de développements de Taylor. Ils interviennent dans les preuves des propositions présentées plus loin. On a le résultat suivant.

Proposition 1.10 *Si $\sigma \in \mathcal{E}_h$ et $T \in \mathcal{V}_\sigma$, on a pour tout $g \in \mathcal{C}^1$*

$$|E_T^\sigma(g)| \leq h |D_\sigma \cap T|^{1/2} \left(\int_{D_\sigma \cap T} |\nabla g(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \right)^{1/2} \quad (1.15)$$

et pour tout $g \in \mathcal{C}^2$

$$|F_T^\sigma(g)| + |G_T^\sigma(g)| \leq 2h^2 |D_\sigma \cap T|^{1/2} \left(\int_{D_\sigma \cap T} |\nabla \nabla(g)(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \right)^{1/2}. \quad (1.16)$$

De plus, si $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$ et $T \in \mathcal{V}_\sigma$, on a pour tout $g \in \mathcal{C}^2$

$$|H_T^\sigma(g)| \leq h^2 |D_\sigma \cap T|^{1/2} \left(\int_{D_\sigma \cap T} |\mathbf{H}(g)(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \right)^{1/2}. \quad (1.17)$$

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma \in \mathcal{E}_h$ et $T \in \mathcal{V}_\sigma$. Pour tout $\mathbf{x} \in \sigma$ on a $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_T| \leq h$. On déduit ainsi de (1.11)–(1.14)

$$|E_T^\sigma(g)| \leq h \int_\sigma \int_0^1 |\nabla g(t\mathbf{x}_T + (1-t)\mathbf{x})| dt d\sigma,$$

$$|F_T^\sigma(g)| + |G_T^\sigma(g)| \leq 2h^2 \int_\sigma \int_0^1 |\nabla \nabla g(t\mathbf{x}_T + (1-t)\mathbf{x})| dt d\sigma,$$

et

$$|H_T^\sigma(g)| \leq h^2 \int_\sigma \int_0^1 |\mathbf{H}(g)(t\mathbf{x}_T + (1-t)\mathbf{x})| dt d\sigma.$$

On a donc

$$|E_T^\sigma(g)| \leq h \int_{D_\sigma \cap T} |\nabla g(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y},$$

$$|F_T^\sigma(g)| + |G_T^\sigma(g)| \leq 2h^2 \int_{D_\sigma \cap T} |\nabla \nabla g(\mathbf{y})| d\mathbf{y},$$

et

$$|H_T^\sigma(g)| \leq h^2 \int_{D_\sigma \cap T} |\mathbf{H}(g)(\mathbf{y})| d\mathbf{y}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient (1.15)–(1.17). ■

Des estimations (1.15)–(1.17) on déduit la stabilité des opérateurs discrets correspondant au gradient et au laplacien.

Proposition 1.11 (Stabilité de l'opérateur ∇_h).

On suppose que le maillage vérifie l'hypothèse **(HM)**. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $q \in H^2$

$$\|\nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0}q)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C |\nabla q|.$$

DÉMONSTRATION. Posons $q_h = \tilde{\Pi}_{P_0}q$. Soit $K \in \mathcal{T}_h$. On a

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| (\alpha_{K,L_\sigma} q_K + \alpha_{L_\sigma,K} q_{L_\sigma}) \mathbf{n}_{K,\sigma} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| ((1 - \alpha_{L_\sigma,K}) q_K + \alpha_{L_\sigma,K} q_{L_\sigma}) \mathbf{n}_{K,\sigma} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| q_K \mathbf{n}_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| \alpha_{L_\sigma,K} (q_{L_\sigma} - q_K) \mathbf{n}_{K,\sigma}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

En reportant (1.18) dans la définition (1.8) il vient

$$\begin{aligned} |K| |\nabla_h q_h|_K &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| q_K \mathbf{n}_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| \alpha_{L_\sigma,K} (q_{L_\sigma} - q_K) \mathbf{n}_{K,\sigma} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| \alpha_{L_\sigma,K} (q_{L_\sigma} - q_K) \mathbf{n}_{K,\sigma}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Soit $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}$. Supposons dans un premier temps que $q \in \mathcal{C}^1$. Si $\mathbf{x} \in \sigma$ on a les développements de Taylor

$$q(\mathbf{x}_{L_\sigma}) = q(\mathbf{x}) + \int_0^1 \nabla q(t\mathbf{x}_{L_\sigma} + (1-t)\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}) dt \quad (1.20)$$

et

$$q(\mathbf{x}_K) = q(\mathbf{x}) + \int_0^1 \nabla q(t\mathbf{x}_K + (1-t)\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) dt. \quad (1.21)$$

Prenons la différence entre (1.20) et (1.21), et intégrons sur σ . Il vient

$$|\sigma| (q(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - q(\mathbf{x}_K)) = E_{L_\sigma}^\sigma(q) - E_K^\sigma(q).$$

On déduit de (1.15)

$$|\sigma| |q(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - q(\mathbf{x}_K)| \leq 2h |D_\sigma|^{1/2} \left(\int_{D_\sigma} |\nabla q(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \right)^{1/2}. \quad (1.22)$$

D'après l'hypothèse **(HM)** on a

$$h |D_\sigma|^{1/2} = h \left(\frac{1}{2} |\sigma| d_\sigma \right)^{1/2} \leq h^2 \leq C |\sigma| d_\sigma \leq C |K|. \quad (1.23)$$

En reportant (1.23) dans (1.22) on obtient pour tout $q \in \mathcal{C}^1$

$$\frac{|\sigma|}{|K|} |q_{L_\sigma} - q_K| = \frac{|\sigma|}{|K|} |q(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - q(\mathbf{x}_K)| \leq C |\nabla q|. \quad (1.24)$$

De la densité de \mathcal{C}^1 dans H^2 on déduit que (1.24) est encore valable si $q \in H^2$. En reportant (1.24) dans (1.19) on obtient

$$\|\nabla_h q_h\|_{\mathbf{L}^\infty} = \sup_{K \in \mathcal{T}_h} |\nabla_h q_h| \leq C |\nabla q|. \quad \blacksquare$$

Proposition 1.12 (Stabilité de l'opérateur $\tilde{\Delta}_h$)

On suppose que le maillage vérifie l'hypothèse **(HM)**. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in H^2 \cap H_0^1$

$$|\tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{P_0} v)| \leq C \|v\|_1.$$

DÉMONSTRATION. Posons $v_h = \tilde{\Pi}_{P_0} v$. Soit $K \in \mathcal{T}_h$. Supposons dans un premier temps que $v \in \mathcal{C}_0^\infty$. Soit $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}$. Pour tout $\mathbf{x} \in \sigma$ on a les développements de Taylor

$$v(\mathbf{x}_{L_\sigma}) = v(\mathbf{x}) + \int_0^1 \nabla v(t\mathbf{x}_{L_\sigma} + (1-t)\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}) dt \quad (1.25)$$

et

$$v(\mathbf{x}_K) = v(\mathbf{x}) + \int_0^1 \nabla v(t\mathbf{x}_K + (1-t)\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) dt. \quad (1.26)$$

Prenons la différence entre (1.25) et (1.26) et intégrons sur σ . Il vient

$$|\sigma| (v(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - v(\mathbf{x}_K)) = E_{L_\sigma}^\sigma(v) - E_K^\sigma(v).$$

On déduit de (1.15)

$$|\sigma| |v_{L_\sigma} - v_K| = |\sigma| |v(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - v(\mathbf{x}_K)| \leq h |D_\sigma|^{1/2} \left(\int_{D_\sigma} |\nabla v(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \right)^{1/2}. \quad (1.27)$$

Soit maintenant $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}$. Si $\mathbf{x} \in \sigma$ on a le développement de Taylor

$$v(\mathbf{x}_K) = v(\mathbf{x}) + \int_0^1 \nabla v(t\mathbf{x}_K + (1-t)\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) dt. \quad (1.28)$$

Puisque $v \in \mathcal{C}_0^\infty$ on a $v(\mathbf{x}) = 0$. En intégrant (1.28) sur σ on obtient donc

$$|\sigma| v(\mathbf{x}_K) = E_K^\sigma(v).$$

On déduit de (1.15)

$$|\sigma| |v_K| = |\sigma| |v(\mathbf{x}_K)| \leq h |D_\sigma|^{1/2} \left(\int_{D_\sigma} |\nabla v(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \right)^{1/2}. \quad (1.29)$$

De la densité de \mathcal{C}_0^∞ dans $H^2 \cap H_0^1$ on déduit que (1.27) et (1.29) sont encore valables pour $v \in H^2 \cap H_0^1$. D'après la définition (1.10) on a

$$|K| \left| \tilde{\Delta}_h v_h \right|_K^2 \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} \beta_\sigma |\sigma|^2 |v_{L_\sigma} - v_K|^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}} \beta_\sigma |\sigma|^2 |v_K|^2, \quad (1.30)$$

avec pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}_h$

$$\beta_\sigma = \frac{3\tau_\sigma^2}{|\sigma|^2|K|}.$$

D'après l'hypothèse **(HM)** on a

$$\beta_\sigma h^2 |D_\sigma| = \frac{3}{d_\sigma^2|K|} \frac{h^2}{2} |\sigma| d_\sigma = \frac{3}{2} \frac{h^2}{d_\sigma} \frac{|\sigma|}{|K|} \leq \frac{3}{2} \frac{h^2}{|K|} \leq C. \quad (1.31)$$

Reportons (1.27) et (1.29) dans (1.30) et utilisons (1.31). Il vient

$$|K| \left| \tilde{\Delta}_h v_h \right|_K^2 \leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{D_\sigma} |\nabla v(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y}.$$

En sommant sur $K \in \mathcal{T}_h$, on obtient

$$|\tilde{\Delta}_h v_h|^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \left| \tilde{\Delta}_h v_h \right|_K^2 \leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h} \int_{D_\sigma} |\nabla v(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \leq C \|v\|_1^2. \quad \blacksquare$$

On vérifie maintenant la consistance des opérateurs discrets correspondant au gradient et au laplacien. Les preuves utilisent la stabilité de ces opérateurs (propositions 1.11 et 1.12).

Proposition 1.13 (Consistance de l'opérateur ∇_h).

*On suppose que le maillage vérifie l'hypothèse **(HM)**. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $q \in H^2$*

$$|\Pi_{\mathbf{P}_0}(\nabla q) - \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0} q)| \leq C h \|q\|_2. \quad (1.32)$$

DÉMONSTRATION. Soit $q \in C^2(\bar{\Omega})$ et $K \in \mathcal{T}_h$. En utilisant la formule du gradient on déduit de la définition (1.8)

$$|K| \left(\Pi_{\mathbf{P}_0}(\nabla q) - \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0} q) \right) \Big|_K = \int_K \nabla q d\mathbf{x} - |K| \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0} q) \Big|_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} I_K^\sigma, \quad (1.33)$$

avec pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}$

$$I_K^\sigma = \int_\sigma \left(q - (\alpha_{K,L_\sigma} q(\mathbf{x}_K) + \alpha_{L_\sigma,K} q(\mathbf{x}_{L_\sigma})) \right) \mathbf{n}_{K,\sigma} d\sigma \quad (1.34)$$

et pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}$

$$I_K^\sigma = \int_\sigma (q - q(\mathbf{x}_K)) \mathbf{n}_{K,\sigma} d\sigma. \quad (1.35)$$

Soit $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}$. Si $\mathbf{x} \in \sigma$, on a les développements de Taylor

$$q(\mathbf{x}_K) = q(\mathbf{x}) + \nabla q(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) + \int_0^1 \mathbf{H}(q)(t\mathbf{x}_K + (1-t)\mathbf{x}) (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) t dt, \quad (1.36)$$

$$q(\mathbf{x}_{L_\sigma}) = q(\mathbf{x}) + \nabla q(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}) + \int_0^1 \mathbf{H}(q)(t\mathbf{x}_{L_\sigma} + (1-t)\mathbf{x})(\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}) t dt, \quad (1.37)$$

et

$$\nabla q(\mathbf{x}) = \nabla q(\mathbf{x}_K) - \int_0^1 \nabla \nabla q(t\mathbf{x}_K + (1-t)\mathbf{x})(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) dt. \quad (1.38)$$

Substituons (1.38) dans (1.36), (1.37) et intégrons sur σ . Il vient

$$\int_\sigma (q(\mathbf{x}_K) - q) d\sigma = |\sigma| \nabla q(\mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_\sigma) - G_K^\sigma(q) + H_K^\sigma(q) \quad (1.39)$$

et

$$\int_\sigma (q(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - q) d\sigma = |\sigma| \nabla q(\mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}_\sigma) - G_{L_\sigma}^\sigma(q) + H_{L_\sigma}^\sigma(q). \quad (1.40)$$

Multiplions (1.39) par $-\alpha_{K,L_\sigma} \mathbf{n}_{K,\sigma}$, (1.40) par $-\alpha_{L_\sigma,K} \mathbf{n}_{K,\sigma}$ et additionnons les égalités obtenues. Puisque $\alpha_{L_\sigma,K} + \alpha_{K,L_\sigma} = 1$, on déduit de (1.34)

$$\begin{aligned} & -\alpha_{L_\sigma,K} \int_\sigma (q(\mathbf{x}_K) - q) \mathbf{n}_{K,\sigma} d\sigma - \alpha_{K,L_\sigma} \int_\sigma (q(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - q) \mathbf{n}_{K,\sigma} d\sigma \\ &= \int_\sigma \left(q - (\alpha_{K_\sigma,L_\sigma} q(\mathbf{x}_{K,\sigma}) + \alpha_{L_\sigma,K_\sigma} q(\mathbf{x}_{L,\sigma})) \right) \mathbf{n}_{K,\sigma} d\sigma = I_K^\sigma. \end{aligned}$$

D'autre part

$$-\alpha_{K,L_\sigma} (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_\sigma) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} - \alpha_{L_\sigma,K} (\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}_\sigma) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = -\alpha_{K,L_\sigma} \alpha_{L_\sigma,K} (d_\sigma - d_\sigma) = 0.$$

On obtient donc

$$I_K^\sigma = -\alpha_{L_\sigma,K} (G_K^\sigma(q) + H_K^\sigma(q)) \mathbf{n}_{K,\sigma} - \alpha_{K,L_\sigma} (G_{L_\sigma}^\sigma(q) + H_{L_\sigma}^\sigma(q)) \mathbf{n}_{K,\sigma}.$$

En utilisant (1.16) et (1.17), on en déduit

$$|I_K^\sigma|^2 \leq 2h^4 |D_\sigma| \int_{D_\sigma} (|\mathbf{H}(q)(\mathbf{y})|^2 + |\nabla \nabla q(\mathbf{y})|^2) d\mathbf{y}. \quad (1.41)$$

Soit maintenant $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}$. Si $\mathbf{x} \in \sigma$ on a le développement de Taylor

$$q(\mathbf{x}_K) = q(\mathbf{x}) + \nabla q(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) + \int_0^1 \mathbf{H}(q)(t\mathbf{x}_K + (1-t)\mathbf{x})(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) t dt. \quad (1.42)$$

Multiplions (1.42) par $\mathbf{n}_{K,\sigma}$ et intégrons sur σ . En utilisant (1.35) il vient

$$-I_K^\sigma = J_K^\sigma(q) \mathbf{n}_{K,\sigma} + H_K^\sigma(q) \mathbf{n}_{K,\sigma} \quad (1.43)$$

où

$$J_K^\sigma(q) = \int_\sigma \nabla q(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Si $\mathbf{x} \in \sigma$ on a $|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}| \leq h$. On en déduit

$$|J_K^\sigma(q)| \leq Ch^2 \|\nabla q\|_{\mathbf{L}^\infty(\sigma)} \leq Ch^2 \|\nabla q\|_{\mathbf{L}^\infty(\partial D_\sigma)}.$$

On a $\nabla q \in \mathbf{W}^{1,r}$ avec $r > 2$. Du théorème de trace sur les espaces de Sobolev, on déduit

$$|J_K^\sigma(q)| \leq C h^2 \|\nabla q\|_{\mathbf{L}^\infty(\partial D_\sigma)} \leq C h^2 \left(\int_{D_\sigma} (|\nabla q(\mathbf{y})|^2 + |\nabla \nabla q(\mathbf{y})|^2) d\mathbf{y} \right)^{1/2}. \quad (1.44)$$

Reportons (1.44) dans (1.43) et utilisons (1.17). Il vient

$$\begin{aligned} |I_K^\sigma|^2 &\leq 2 |J^\sigma(q)|^2 + 2 |H_K^\sigma(q)|^2 \leq h^4 |D_\sigma| \int_{D_\sigma} |\mathbf{H}(q)(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \\ &\quad + h^4 \int_{D_\sigma} (|\nabla q(\mathbf{y})|^2 + |\nabla \nabla q(\mathbf{y})|^2) d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Reportons les estimations (1.41) et (1.45) dans (1.33). On obtient

$$\begin{aligned} &|K| \left| \left(\Pi_{\mathbf{P}_0}(\nabla q) - \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0} q) \right) \right|_K^2 \\ &\leq \frac{3}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |I_K^\sigma|^2 \\ &\leq C h^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} \frac{h^2 |D_\sigma|}{|K|} \int_{D_\sigma} (|\nabla \nabla q(\mathbf{y})|^2 + |\mathbf{H}(q)(\mathbf{y})|^2) d\mathbf{y} \\ &\quad + C h^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}} \frac{h^2}{|K|} \int_{D_\sigma} (|\nabla q(\mathbf{y})|^2 + |\nabla \nabla q(\mathbf{y})|^2) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse **(HM)** on a

$$h^2 |D_\sigma| = \frac{h^2}{2} |\sigma| d_\sigma \leq C (|\sigma| d_\sigma)^2 \leq C |K|^2, \quad h^2 \leq |K|.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |K| \left| \left(\Pi_{\mathbf{P}_0}(\nabla q) - \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0} q) \right) \right|_K^2 &\leq C h^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} \int_{D_\sigma} (|\nabla \nabla q(\mathbf{y})|^2 + |\mathbf{H}(q)(\mathbf{y})|^2) d\mathbf{y} \\ &\quad + C h^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}} \int_{D_\sigma} (|\nabla q(\mathbf{y})|^2 + |\nabla \nabla q(\mathbf{y})|^2) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |\Pi_{\mathbf{P}_0}(\nabla q) - \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0} q)|^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \left| \left(\Pi_{\mathbf{P}_0}(\nabla q) - \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0} q) \right) \right|_K^2 \\ &\leq C h^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} \int_{D_\sigma} (|\nabla \nabla q(\mathbf{y})|^2 + |\mathbf{H}(q)(\mathbf{y})|^2) d\mathbf{y} \\ &\quad + C h^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} \int_{D_\sigma} (|\nabla q(\mathbf{y})|^2 + |\nabla \nabla q(\mathbf{y})|^2) d\mathbf{y} \\ &\leq C h^2 \|q\|_2^2. \end{aligned}$$

On a ainsi montré (1.32) pour $q \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$. Soit maintenant $q \in H^2$. L'espace $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ est dense dans H^2 . Il existe donc une suite de fonctions de $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$, notée $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, telle que lorsque $n \rightarrow \infty$

$$\|q_n - q\|_2 \rightarrow 0. \quad (1.46)$$

D'après la proposition 1.11 on a

$$\begin{aligned} |\Pi_{\mathbf{P}_0}(\nabla(q_n - q)) - \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0}(q_n - q))| &\leq |\Pi_{\mathbf{P}_0}(\nabla(q_n - q))| + |\nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0}(q_n - q))| \\ &\leq \|q_n - q\|_2. \end{aligned} \quad (1.47)$$

En utilisant (1.46) et (1.47) on obtient (1.32) pour $q \in H^2$. \blacksquare

Proposition 1.14 (Consistance de l'opérateur $\tilde{\Delta}_h$).

On suppose que le maillage vérifie l'hypothèse (HM). Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in H^2 \cap H_0^1$

$$|\Pi_{P_0}(\Delta v) - \tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{P_0}v)| \leq C h \|v\|_2. \quad (1.48)$$

DÉMONSTRATION. Supposons dans un premier temps que $v \in \mathcal{C}_0^\infty$. Soit $K \in \mathcal{T}_h$. En utilisant la définition (1.10) et la formule de la divergence on a

$$\begin{aligned} &|K| \left(\Pi_{P_0}(\Delta v) - \tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{P_0}v) \right) \Big|_K \\ &= \int_K \Delta v \, d\mathbf{x} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} \tau_\sigma (v(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - v(\mathbf{x}_K)) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}} \tau_\sigma v(\mathbf{x}_K) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_\sigma \nabla v \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\sigma - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} \tau_\sigma (v(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - v(\mathbf{x}_K)) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}} \tau_\sigma v(\mathbf{x}_K) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} R_K^\sigma, \end{aligned} \quad (1.49)$$

avec pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}$

$$R_K^\sigma = \int_\sigma \left(\nabla v \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} - \frac{1}{d_\sigma} (v(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - v(\mathbf{x}_K)) \right) d\sigma \quad (1.50)$$

et pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}$

$$R_K^\sigma = \int_\sigma \left(\nabla v \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} + \frac{1}{d_\sigma} v(\mathbf{x}_K) \right) d\sigma. \quad (1.51)$$

Soit $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}$. Pour tout $\mathbf{x} \in \sigma$ on a les développements de Taylor

$$v(\mathbf{x}_{L_\sigma}) = v(\mathbf{x}) + \nabla v(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}) + \int_0^1 \mathbf{H}(v)(t\mathbf{x}_{L_\sigma} + (1-t)\mathbf{x})(\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}) \, t \, dt \quad (1.52)$$

et

$$v(\mathbf{x}_K) = v(\mathbf{x}) + \nabla v(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) + \int_0^1 \mathbf{H}(v)(t\mathbf{x}_K + (1-t)\mathbf{x})(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) \, t \, dt. \quad (1.53)$$

Prenons la différence entre (1.52) et (1.53) et intégrons sur σ . On a

$$\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}_K = d_\sigma \mathbf{n}_{K,\sigma},$$

et d'après (1.50)

$$\int_\sigma (v(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - v(\mathbf{x}_K) - d_\sigma \nabla v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}) d\sigma = -d_\sigma R_K^\sigma.$$

On obtient ainsi

$$-d_\sigma R_K^\sigma = H_{L_\sigma}^\sigma(v) - H_K^\sigma(v).$$

On déduit de (1.17)

$$d_\sigma^2 |R_K^\sigma|^2 \leq 2h^4 |D_\sigma| \int_{D_\sigma} |\mathbf{H}(q)(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y}. \quad (1.54)$$

Soit maintenant $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}$. Si $\mathbf{x} \in \sigma$ on a le développement de Taylor

$$\nabla v(\mathbf{x}) = \nabla v(\mathbf{x}_K) + \int_0^1 \nabla \nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}_K)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_K) dt. \quad (1.55)$$

Multiplions (1.55) par $\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}$ et intégrons sur σ . Puisque

$$\int_\sigma \nabla v(\mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \nabla v(\mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_\sigma) = 0$$

on obtient

$$\int_\sigma \nabla v(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}) d\mathbf{x} = F_K^\sigma(v). \quad (1.56)$$

Si $\mathbf{x} \in \sigma$ on a la décomposition suivante

$$\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x} = (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_K) + (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) = d_\sigma \mathbf{n}_{K,\sigma} + (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}).$$

On déduit donc de (1.56)

$$\int_\sigma \nabla v(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) d\mathbf{x} = F_K^\sigma(v) - \int_\sigma d_\sigma \nabla v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\mathbf{x}. \quad (1.57)$$

Pour tout $\mathbf{x} \in \sigma$ on a le développement de Taylor

$$v(\mathbf{x}_K) = v(\mathbf{x}) + \nabla v(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) + \int_0^1 \mathbf{H}(v)(t\mathbf{x}_K + (1-t)\mathbf{x})(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) t dt. \quad (1.58)$$

Puisque $v \in \mathcal{C}_0^\infty$ on a $v(\mathbf{x}) = 0$. Intégrons (1.58) sur σ . En utilisant (1.51) et (1.57) il vient

$$d_\sigma R_K^\sigma = \int_\sigma (v(\mathbf{x}_K) + d_\sigma \nabla v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}) d\sigma = F_K^\sigma(v) + H_K^\sigma(v).$$

En utilisant (1.16) et (1.17) on en déduit

$$d_\sigma^2 |R_K^\sigma|^2 \leq 2h^4 |D_\sigma| \int_{D_\sigma} |\mathbf{H}(v)(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} + 2h^4 |D_\sigma| \int_{D_\sigma} |\nabla \nabla v(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y}. \quad (1.59)$$

Reportons (1.54) et (1.59) dans (1.49). On obtient pour tout $K \in \mathcal{T}_h$

$$\begin{aligned} |K| \left| \left(\Pi_{P_0}(\Delta v) - \tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{P_0} v) \right) \Big|_K \right|^2 &\leq 3 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |I_K^\sigma|^2 \\ &\leq 3 h^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \frac{h^2 |D_\sigma|}{d_\sigma^2 |K|} \int_{D_\sigma} (|\mathbf{H}(v)(\mathbf{y})|^2 + |\nabla \nabla v(\mathbf{y})|^2) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse **(HM)** on a pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}_K$

$$h^2 |D_\sigma| \leq C h^2 \frac{|\sigma|}{2} d_\sigma \leq C h^4 \leq C h^2 |K| \leq C d_\sigma^2 |K|.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |K| \left| \left(\Pi_{P_0}(\Delta v) - \tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{P_0} v) \right) \Big|_K \right|^2 &\leq C h^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{D_\sigma} (|\mathbf{H}(v)(\mathbf{y})|^2 + |\nabla \nabla v(\mathbf{y})|^2) d\mathbf{y} \\ &\leq C h^2 \|v\|_2^2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |\Pi_{P_0} \Delta v - \tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{P_0} v)|^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \left| \Pi_{P_0}(\Delta v) - \tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{P_0} v) \Big|_K \right|^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| h^2 \|v\|_2^2 \\ &\leq C h^2 \|v\|_2^2. \end{aligned}$$

On a ainsi montré (1.48) pour $v \in \mathcal{C}_0^\infty$. Soit maintenant $v \in H^2 \cap H_0^1$. L'espace \mathcal{C}_0^∞ est dense dans $H^2 \cap H_0^1$. Il existe donc une suite de fonctions de \mathcal{C}_0^∞ , notée $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, telle que pour $n \rightarrow \infty$

$$\|v_n - v\|_2 \rightarrow 0. \quad (1.60)$$

D'après la proposition 1.12

$$\begin{aligned} |\Pi_{P_0} \Delta(v_n - v) - \tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{P_0}(v_n - v))| &\leq |\Pi_{P_0} \Delta(v_n - v)| + |\tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{P_0}(v_n - v))| \\ &\leq C \|v_n - v\|_2. \end{aligned} \quad (1.61)$$

De (1.60) et (1.61) on déduit que (1.48) est valable pour $v \in H^2 \cap H_0^1$. ■

Les opérateurs $\nabla : H^1 \rightarrow \mathbf{L}^2$ et $-\text{div} : \mathbf{H}_0^1 \rightarrow L^2$ sont *adjoints*, au sens où, pour tous $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1$ et $q \in H^1$, on a

$$(\mathbf{v}, \nabla q) = -(q, \text{div } \mathbf{v}) + \int_{\partial\Omega} q (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\gamma = -(q, \text{div } \mathbf{v}).$$

La proposition suivante montre que les opérateurs discrets correspondants ∇_h et $-\text{div}_h$ jouissent également de cette propriété.

Proposition 1.15 (Les opérateurs ∇_h et $-\text{div}_h$ sont adjoints).

Si $\mathbf{v}_h \in \mathbf{P}_0$ et $q_h \in P_0$, on a

$$(\mathbf{v}_h, \nabla_h q_h) = -(q_h, \text{div}_h \mathbf{v}_h).$$

DÉMONSTRATION. D'après la définition (1.8) de ∇_h on a

$$(\mathbf{v}_h, \nabla_h q_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{v}_K \cdot \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} |\sigma| (\alpha_{K,L_\sigma} q_K + \alpha_{L_\sigma,K} q_{L_\sigma}) \mathbf{n}_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{ext}}} |\sigma| q_K \mathbf{n}_{K,\sigma} \right).$$

Cette égalité s'écrit sous la forme suivante

$$(\mathbf{v}_h, \nabla_h q_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} q_K (S_1 + S_2 + S_3)$$

avec

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} |\sigma| \alpha_{K,L_\sigma} \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}, \\ S_2 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} |\sigma| \alpha_{K,L_\sigma} \mathbf{v}_{L_\sigma} \cdot \mathbf{n}_{L_\sigma,\sigma}, \\ S_3 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} |\sigma| \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}. \end{aligned}$$

En utilisant la relation $\alpha_{K,L_\sigma} + \alpha_{L_\sigma,K} = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} |\sigma| (1 - \alpha_{L_\sigma,K}) \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} |\sigma| \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} |\sigma| \alpha_{L_\sigma,K} \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $\mathbf{n}_{L_\sigma,\sigma} = -\mathbf{n}_{K,\sigma}$, on a

$$S_2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} |\sigma| \alpha_{K,L_\sigma} \mathbf{v}_{L_\sigma} \cdot \mathbf{n}_{L_\sigma,\sigma} = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} |\sigma| \alpha_{K,L_\sigma} \mathbf{v}_{L_\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 &= - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} |\sigma| (\alpha_{L,K_\sigma} \mathbf{v}_K + \alpha_{K,L_\sigma} \mathbf{v}_{L_\sigma}) \cdot \mathbf{n}_{K,L_\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n}_{K,L_\sigma} \\ &= -|K| \text{div}_h \mathbf{v}_h|_K + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n}_{K,L_\sigma}. \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n}_{K,L_\sigma} = \mathbf{v}_K \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| \mathbf{n}_{K,L_\sigma} = 0;$$

on obtient donc

$$(\mathbf{v}_h, \nabla_h q_h) = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} q_K |K| \text{div}_h \mathbf{v}_h|_K = -(q_h, \text{div}_h \mathbf{v}_h). \quad \blacksquare$$

Chapitre 2

Présentation des schémas

On cherche à calculer une solution approchée des équations de Stokes (1)-(4). Les méthodes de projection introduites dans la section 2.1 sont utilisées pour calculer une approximation de la pression et traiter la contrainte d'incompressibilité (2). En les combinant avec une discrétisation en temps (section 2.2) et en espace, on en déduit les schémas **VF-I**, **VF-CN** et **VF-BDF** de la section 2.3.

2.1 Les méthodes de projection

Nous introduisons les méthodes de projection. Elles permettent d'approcher le champ de vitesse et la pression solutions des équations de Stokes (1)-(4).

Les méthodes de projection ont été introduites conjointement par A. CHORIN et R. TEMAM dans les années 60 (*cf* [11] et [4]). Elles s'insèrent dans le cadre plus général des méthodes de décomposition d'opérateur, ou *splitting*. Elles sont basées sur l'idée suivante.

Décomposition de Helmholtz. *Un champ de vecteurs $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1$ peut s'écrire comme la somme d'un champ de vecteurs solénoïdal (i.e. à divergence nulle) et d'un gradient; autrement dit, il existe $(\mathbf{v}, \nabla\phi) \in \mathbf{H}^1 \times L^2$ tels que :*

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{v} + \nabla\phi, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} &= 0.\end{aligned}$$

Avec ces méthodes, un premier champ de vitesse vérifiant l'équation des moments (1) est calculé, sans tenir compte de la contrainte d'incompressibilité (2). De ce champ de vitesse on déduit en utilisant la décomposition de Helmholtz, d'une part un gradient qui est utilisé pour calculer la pression intervenant dans (1), et d'autre part un second champ de vitesses solénoïdal. Ainsi, on *projette* le premier champ de vitesses sur l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle.

Remarque. *La projection $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1 \rightarrow (\mathbf{v}, \nabla\phi) \in \mathbf{H}^1 \times \mathbf{L}^2$ définie par la décomposition de Helmholtz est orthogonale, au sens où*

$$(\mathbf{v}, \nabla\phi) = -(\phi, \operatorname{div} \mathbf{v}) = 0.$$

2.2 Discrétisation en temps

On combine maintenant les méthodes de projection présentées dans la section 2.1 avec des schémas d'intégration en temps. On en déduit des schémas en temps incluant le calcul de la pression et imposant la contrainte d'incompressibilité.

L'intervalle de temps $[0, T]$ sur lequel on cherche à calculer la solution est découpé en intervalles

$$[0, T] = \bigcup_{n=0}^{N-1} [t_n, t_{n+1}] \quad \text{avec} \quad \forall n \in \{0, \dots, N\} \quad t_n = nk,$$

où $k = T/N$ est le pas de temps. Si (\mathbf{u}, p) est la solution du problème de Stokes (1)-(4), on approche alors $\mathbf{u}(t_n)$ par $\tilde{\mathbf{u}}^n$ et \mathbf{u}^n , $p(t_n)$ par p^n . Le premier champ de vitesse $\tilde{\mathbf{u}}^n$ vérifie de façon approchée l'équation des moments (1) mais pas la contrainte d'incompressibilité (2). Le deuxième champ de vitesse \mathbf{u}^n vérifie la contrainte d'incompressibilité. Il se déduit de $\tilde{\mathbf{u}}^n$ par la décomposition de Helmholtz (section 2.1). On obtient ainsi l'algorithme suivant.

On part de $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^2$ et $p^0 \in L_0^2$. Puis $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$ se déduit de (\mathbf{u}^n, p^n) comme suit.

– **Première étape :**

Suivant le schéma en temps utilisé, $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in \mathbf{H}_0^1$ est donné par :

Schéma Implicite (I).

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{k} - \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \nabla p^n &= \mathbf{f}(t_{n+1}), \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\partial\Omega} &= 0; \end{aligned}$$

Schéma de Crank-Nicolson (CN).

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{k} - \Delta \left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2} \right) + \nabla p^n &= \frac{\mathbf{f}(t_{n+1}) + \mathbf{f}(t_n)}{2}, \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\partial\Omega} &= 0; \end{aligned}$$

Schéma de type Backward Differentiation Formulae (BDF).

$$\begin{aligned} \frac{3\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2k} - \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \nabla p^n &= \mathbf{f}(t_{n+1}), \\ \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

– **Deuxième étape (de projection) :**

$(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in \mathbf{H}(\text{div}) \times L_0^2$ vérifient

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} &= \mathbf{u}^{n+1} + \alpha k \nabla(p^{n+1} - p^n), \\ \text{div } \mathbf{u}^{n+1} &= 0, \\ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

avec, suivant le schéma en temps utilisé

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{(I)}, \\ \frac{1}{2} & \text{(CN)}, \\ \frac{2}{3} & \text{(BDF)}. \end{cases}$$

Notons que pour initialiser le schéma en temps **(BDF)**, on a besoin d'une valeur \mathbf{u}^1 . Elle est obtenue en appliquant initialement le schéma en temps **(I)**.

Par ailleurs, en appliquant l'opérateur divergence à l'équation (2.1), et en tenant compte des conditions aux limites, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta \Phi^{n+1} &= \frac{1}{\alpha k} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \\ \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial n} &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$\Phi^{n+1} = p^{n+1} - p^n.$$

C'est sous cette forme que l'étape de projection sera implémentée.

2.3 Schémas obtenus

Dans l'algorithme de la section 2.2, on choisit d'approcher les espaces \mathbf{H}_0^1 , $\mathbf{H}(\operatorname{div})$ et L_0^2 respectivement par les espaces discrets \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_0 et P_0^0 . Les opérateurs différentiels sont remplacés par les opérateurs discrets correspondant définis dans la section 1.4. On obtient ainsi trois schémas, notés **VF-I**, **VF-CN** et **VF-BDF**.

Notons pour $m \in \{0, \dots, N\}$

$$\mathbf{f}_h^m = \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{f}(t_m). \quad (2.1)$$

On initialise l'algorithme avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h^0 &= \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0, \\ p_h^0 &\in L_0^2. \end{aligned}$$

On définit également $\tilde{\mathbf{u}}_h^0 = \mathbf{u}_h^0$. Cette valeur n'est pas nécessaire pour la définition de l'algorithme. Elle est en revanche commode pour l'analyse des schémas obtenus.

Pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$, $(\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1})$ se déduit de $(\tilde{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{u}_h^n, p_h^n)$ comme suit.

– **Première étape :**

$\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \in \mathbf{P}_0$ vérifie :

Schéma VF-I

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k} - \tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \nabla_h p_h^n = \mathbf{f}_h^{n+1}, \quad (2.2)$$

Schéma VF-CN

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k} - \tilde{\Delta}_h \left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n}{2} \right) + \nabla_h p_h^n = \frac{\mathbf{f}_h^{n+1} + \mathbf{f}_h^n}{2}, \quad (2.3)$$

Schéma VF-BDF

$$\frac{3\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{2k} - \tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \nabla_h p_h^n = \mathbf{f}_h^{n+1}. \quad (2.4)$$

– **Deuxième étape (projection) :**

$p_h^{n+1} \in P_0^0$ vérifie :

$$\Delta_h(p_h^{n+1} - p_h^n) = \frac{1}{\alpha k} \operatorname{div}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \quad (2.5)$$

avec

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{VF-I,} \\ \frac{1}{2} & \text{VF-CN,} \\ \frac{2}{3} & \text{VF-BDF.} \end{cases}$$

$\mathbf{u}_h^{n+1} \in \mathbf{P}_0$ s'en déduit par

$$\mathbf{u}_h^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \alpha k \nabla_h(p_h^{n+1} - p_h^n). \quad (2.6)$$

Les conditions aux limites associées pour $m \in \{1, \dots, N\}$ aux inconnues $\tilde{\mathbf{u}}_h^m$ et p_h^m n'apparaissent pas explicitement dans les équations (2.2), (2.3), (2.4) et (2.5). Elles interviennent en revanche dans la définition des opérateurs discrets (section 1.4).

Notons que pour les schémas **VF-I**, **VF-CN** et **VF-BDF**, la pression et les composantes horizontales et verticales de la vitesse sont constantes sur chaque triangle du maillage . Les degrés de liberté associés sont représentés ci-dessous (figure 2.1).

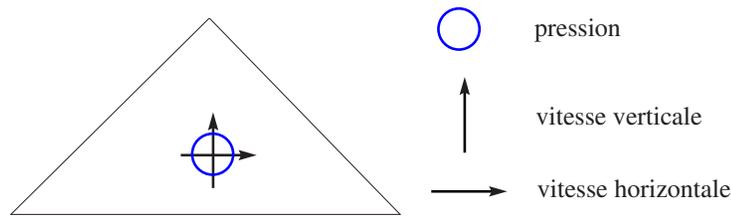


FIG. 2.1 – Degrés de liberté pour les schémas **VF-I**, **VF-CN** et **VF-BDF**.

D'autre part la propriété d'orthogonalité de la décomposition de Helmholtz (section 2.1) se retrouve au niveau discret.

Proposition 2.1 (Orthogonalité de la projection discrète)

Pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$ on a

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_h \mathbf{u}_h^m &= 0, \\ \forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad (\mathbf{u}_h^m, \nabla_h p_h^n) &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

DÉMONSTRATION. Soit $m \in \{1, \dots, N\}$. Appliquons l'opérateur de divergence discrète à l'équation (2.6), et comparons avec l'équation (2.5). On obtient :

$$\operatorname{div}_h \mathbf{u}_h^m = \operatorname{div}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^m - \frac{1}{\alpha k} \operatorname{div}_h (\nabla_h (p_h^m - p_h^{m-1})) = \operatorname{div}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^m - \frac{1}{\alpha k} \Delta_h (p_h^m - p_h^{m-1}) = 0.$$

Puisque les opérateurs ∇_h et $-\operatorname{div}_h$ sont adjoints (proposition 1.15), on a alors, pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$, et tout $n \in \{0, \dots, N\}$:

$$(\mathbf{u}_h^m, \nabla_h p_h^n) = -(p_h^n, \operatorname{div}_h \mathbf{u}_h^m) = 0.$$

On a ainsi montré (2.7). ■

Remarque 1 La construction des opérateurs discrets $\tilde{\Delta}_h$ et ∇_h est basée sur l'intégration, sur chaque triangle du maillage, des opérateurs continus correspondant Δ et ∇ (section 1.4). Les équations des moments discrètes (2.2), (2.3) et (2.4) sont donc une approximation des équations (2.1), (2.1) et (2.1) de la section 2.2, intégrées sur chaque triangle du maillage. Les schémas **VF-I**, **VF-CN** et **VF-BDF** sont donc bien des schémas de volumes finis.

Remarque 2 Nous disposons de deux opérateurs discrets associés au laplacien : $\tilde{\Delta}_h$ et Δ_h (section 1.4.2). Le support de $\tilde{\Delta}_h$ est plus petit que celui de Δ_h ; la résolution des systèmes linéaires associés s'en trouve facilitée. Malheureusement l'utilisation de $\tilde{\Delta}_h$ au lieu de Δ_h dans (2.5) ne permet pas de garantir la propriété d'orthogonalité discrète (proposition 2.1) utilisée dans l'analyse des schémas.

Chapitre 3

Résultats préliminaires

L'analyse des schémas **VF-I**, **VF-CN** et **VF-BDF** introduits dans le chapitre 2 nécessite un certain nombre de résultats, qui sont présentés ici. Les sections 3.1 et 3.2 sont consacrées aux opérateurs de projection et aux opérateurs discrets du chapitre 1. La condition inf-sup de la section 3.3 (théorème 3.1) permet de montrer les estimations sur la pression du chapitre 4.

3.1 Opérateurs de projection

Proposition 3.1 (Estimation de l'erreur d'interpolation sur P_0).

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in H^2$

$$|\tilde{\Pi}_{P_0} v - \Pi_{P_0} v| \leq C h \|v\|_2. \quad (3.1)$$

Soit $s > 2$. Si le maillage est uniforme, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in W^{2,s}$

$$|\tilde{\Pi}_{P_0} v - \Pi_{P_0} v| \leq C h^2 \|v\|_{W^{2,s}}. \quad (3.2)$$

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord que $v \in \mathcal{C}^1$. Soit $K \in \mathcal{T}_h$ et $\mathbf{x} \in K$. On a le développement de Taylor

$$v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}_K) + \int_0^1 \nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_K) dt.$$

En intégrant sur K , on obtient

$$\Pi_{P_0} v|_K - v(\mathbf{x}_K) = \frac{1}{|K|} \int_K \int_0^1 \nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_K) dt d\mathbf{x}.$$

Si $\mathbf{x} \in K$, on a $|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}| \leq h$. On en déduit

$$|\Pi_{P_0} v|_K - v(\mathbf{x}_K)| \leq \frac{h}{|K|} \int_K \int_0^1 |\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}_K)| dt d\mathbf{x}.$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, on procède au changement de variable

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z} = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}_K. \quad (3.3)$$

Notons K_t l'image de K par le changement de variable (3.3). On obtient

$$|v(\mathbf{x}_K) - \Pi_{P_0} v|_K \leq \frac{h}{|K|} \int_0^1 \int_{K_t} \frac{1}{t} |\nabla v(\mathbf{z})| d\mathbf{z} dt. \quad (3.4)$$

Soit maintenant $r > 2$. Puisque $K_t \subset K$ pour tout $t \in [0, 1]$, on a d'après l'inégalité de Hölder

$$\int_{K_t} |\nabla v(\mathbf{z})| d\mathbf{z} \leq |K_t|^{1-1/r} \left(\int_K |\nabla v(\mathbf{z})|^r d\mathbf{z} \right)^{1/r};$$

soit, puisque $|K_t| = t^2|K|$:

$$\int_{K_t} |\nabla v(\mathbf{z})| d\mathbf{z} \leq t^{2-2/r} |K|^{1-1/r} \left(\int_K |\nabla v(\mathbf{z})|^r d\mathbf{z} \right)^{1/r}. \quad (3.5)$$

En reportant (3.5) dans (3.4) il vient

$$|v(\mathbf{x}_K) - \Pi_{P_0} v|_K \leq \frac{h}{|K|^{1/r}} \left(\int_0^1 t^{1-2/r} dt \right) \left(\int_K |\nabla v(\mathbf{z})|^r d\mathbf{z} \right)^{1/r}.$$

Ainsi

$$|\tilde{\Pi}_{P_0} v - \Pi_{P_0} v|^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |v(\mathbf{x}_K) - \Pi_{P_0} v|_K^2 \leq C h^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K|^{1-2/r} \left(\int_K |\nabla v(\mathbf{z})|^r d\mathbf{z} \right)^{2/r}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on en déduit

$$|\tilde{\Pi}_{P_0} v - \Pi_{P_0} v|^2 \leq C h^2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \right)^{1-2/r} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla v(\mathbf{z})|^r d\mathbf{z} \right)^{2/r} \leq C h^2 \|v\|_{W^{1,r}}^2;$$

soit, puisque $H^2 \subset W^{1,r}$

$$|\tilde{\Pi}_{P_0} v - \Pi_{P_0} v|^2 \leq C h^2 \|v\|_2^2.$$

On a ainsi vérifié (3.1) pour $v \in \mathcal{C}^1$. De la densité de \mathcal{C}^1 dans H^2 on déduit (3.1) pour $v \in H^2$. Montrons à présent (3.2). On suppose que le maillage est uniforme. Soit $v \in \mathcal{C}^2$. Si $\mathbf{x} \in \Omega$ on a le développement de Taylor

$$v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}_K) + \nabla v(\mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_K) + \int_0^1 \mathbf{H}(v)(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}_K)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_K) t dt,$$

où $\mathbf{H}(v)$ désigne la matrice hessienne de v . En intégrant sur K et en introduisant le centre de gravité du triangle K

$$\mathbf{x}_G = \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{x} d\mathbf{x},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \Pi_{P_0} v|_K - v(\mathbf{x}_K) &= \nabla v(\mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_K) \\ &+ \frac{1}{|K|} \int_K \int_0^1 \mathbf{H}(v)(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}_K)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_K) t dt d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Sur un maillage uniforme (formé de triangles équilatéraux), le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit au triangle sont confondus, *i.e.* $\mathbf{x}_G = \mathbf{x}_K$. Puisque $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_K| \leq h$ si $\mathbf{x} \in K$, on en déduit

$$|\Pi_{P_0} v|_K - v(\mathbf{x}_K)| \leq C \frac{h^2}{|K|} \int_K \int_0^1 |\mathbf{H}(v)(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}_K)| t dt d\mathbf{x}.$$

En procédant ensuite comme pour la preuve de (3.1) on obtient

$$|\Pi_{P_0} v - \tilde{\Pi}_{P_0} v| \leq C h^2 \|v\|_{W^{2,s}}.$$

On a ainsi montré (3.2) pour $v \in \mathcal{C}^2$. De la densité de \mathcal{C}^2 dans $W^{2,s}$ on déduit (3.2) pour $v \in W^{2,s}$. ■

Proposition 3.2 *Si $q_h \in P_0$, son projeté $\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h$ est donné par*

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_h^{int}, \quad (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) = \frac{|K_\sigma|}{|K_\sigma| + |L_\sigma|} q_{K_\sigma} + \frac{|L_\sigma|}{|K_\sigma| + |L_\sigma|} q_{L_\sigma}, \quad (3.6)$$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}, \quad (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) = q_{K_\sigma}. \quad (3.7)$$

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma \in \mathcal{E}_h$. Pour calculer $(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma)$, considérons la fonction $\psi_\sigma \in P_1^{nc}$ telle que

$$\psi_\sigma(\mathbf{x}_{\sigma'}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \sigma', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que ψ_σ est nulle en dehors de $K_\sigma \cup L_\sigma$ si $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$ et de K_σ si $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$. D'après la définition (1.4) de l'opérateur $\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}}$, on a

$$(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h, \psi_\sigma) = (q_h, \psi_\sigma).$$

Considérons d'abord le cas d'une arête intérieure $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$. En utilisant une formule d'intégration numérique, on a

$$\begin{aligned} (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h, \psi_\sigma) &= \sum_{K \in \{K_\sigma, L_\sigma\}} \frac{|K|}{3} \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_K} (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_{\sigma'}) \psi_\sigma(\mathbf{x}_{\sigma'}) \\ &= \left(\frac{|K_\sigma|}{3} + \frac{|L_\sigma|}{3} \right) (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma). \end{aligned} \quad (3.8)$$

De même

$$\begin{aligned} (q_h, \psi_\sigma) &= \sum_{K \in \{K_\sigma, L_\sigma\}} q_K \int_K \psi_\sigma d\mathbf{x} \\ &= \sum_{K \in \{K_\sigma, L_\sigma\}} q_K \frac{|K|}{3} \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_K} \psi_\sigma(\mathbf{x}_{\sigma'}) \\ &= q_{K_\sigma} \frac{|K_\sigma|}{3} + q_{L_\sigma} \frac{|L_\sigma|}{3}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

En comparant (3.8) et (3.9) on obtient l'équation (3.6). Par ailleurs, pour une arête du bord $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$,

$$(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h, \psi_\sigma) = \frac{|K_\sigma|}{3} \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_{K_\sigma}} (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_{\sigma'}) \psi_\sigma(\mathbf{x}_{\sigma'}) = \frac{|K_\sigma|}{3} (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma). \quad (3.10)$$

De même

$$(q_h, \psi_\sigma) = q_{K_\sigma} \int_{K_\sigma} \psi_\sigma d\mathbf{x} = q_{K_\sigma} \frac{|K_\sigma|}{3} \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_{K_\sigma}} \psi_\sigma(\mathbf{x}_{\sigma'}) = q_{K_\sigma} \frac{|K_\sigma|}{3}. \quad (3.11)$$

En comparant (3.10) et (3.11), on obtient (3.7). \blacksquare

Proposition 3.3 *Pour tout $q \in L^2$ on a*

$$\int_{\Omega} (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de prendre $\psi = \chi_\Omega$ dans la définition (1.4), où χ_Ω désigne la fonction caractéristique de Ω . \blacksquare

Proposition 3.4 (La divergence discrète est nulle sur l'espace $\mathbf{RT}_0^c \cap \mathbf{P}_0$).

Si $\mathbf{v}_h \in \mathbf{RT}_0^c \cap \mathbf{P}_0$, alors

$$\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h = 0.$$

DÉMONSTRATION. Soit $K \in \mathcal{T}_h$. D'après (1.9) on a

$$\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h|_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| (\alpha_{L_\sigma, K} \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma} + \alpha_{K, L_\sigma} \mathbf{v}_{L_\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma}).$$

Puisque $\mathbf{v}_h \in \mathbf{RT}_0^c$, on a

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_K, \quad \mathbf{v}|_K \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma} = \mathbf{v}|_{L_\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma}.$$

On en déduit

$$\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h|_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| (\alpha_{L_\sigma, K} + \alpha_{K, L_\sigma}) \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma}.$$

Soit, puisque $\alpha_{K_\sigma, L_\sigma} + \alpha_{L_\sigma, K_\sigma} = 1$,

$$\operatorname{div}_h \mathbf{v}_h|_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma} = \mathbf{v}_K \cdot \left(\frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| \mathbf{n}_{K, \sigma} \right) = 0. \quad \blacksquare$$

Proposition 3.5 (Image par $\Pi_{\mathbf{RT}_0^c}$ d'un champ de vitesse solénoïdal).

Si $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div})$ vérifie $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, alors

$$\Pi_{\mathbf{RT}_0^c} \mathbf{v} \in \mathbf{P}_0.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\mathbf{v}_h = \Pi_{\mathbf{RT}_0^c} \mathbf{v}$. En appliquant la formule de la divergence et la définition (1.5) de l'opérateur $\Pi_{\mathbf{RT}_0^c}$, on obtient

$$0 = \int_K \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial K} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = \int_{\partial K} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = \int_K \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}. \quad (3.12)$$

Soit $K \in \mathcal{T}_h$. Puisque $\mathbf{RT}_0^c \subset \mathbf{RT}_0^d$, il existe $\mathbf{a}_K \in \mathbb{R}^2$ et $b_K \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall \mathbf{x} \in K, \quad \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_K + b_K \mathbf{x}.$$

On a donc $\operatorname{div} \mathbf{v}_h|_K = 2b_K$. En utilisant (3.12), on en déduit

$$\forall \mathbf{x} \in K, \quad \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_K. \quad \blacksquare$$

3.2 Opérateurs discrets

On définit l'opérateur $\widetilde{\operatorname{div}}_h : \mathbf{P}_0 \rightarrow P_1^{nc}$ par

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathcal{E}_h^{int}, \quad (\widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}_\sigma) &= \frac{3|\sigma|}{|K_\sigma| + |L_\sigma|} (\mathbf{v}_{L_\sigma} - \mathbf{v}_{K_\sigma}) \cdot \mathbf{n}_{K_\sigma, \sigma}, \\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}, \quad (\widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}_\sigma) &= -\frac{3|\sigma|}{|K_\sigma|} \mathbf{v}_{K_\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K_\sigma, \sigma}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{P}_0$.

Proposition 3.6 (Stabilité de l'opérateur $\widetilde{\operatorname{div}}_h$).

On suppose que le maillage vérifie (HM). Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{P}_0$

$$|\widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{v}_h| \leq C \|\mathbf{v}_h\|_h. \quad (3.14)$$

DÉMONSTRATION. D'après la définition (3.13) de l'opérateur $\widetilde{\operatorname{div}}_h$ on a

$$\begin{aligned} |\widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{v}_h|^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{|K|}{3} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{v}_h(\mathbf{x}_\sigma)|^2 \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{|K|}{3} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} \frac{9|\sigma|^2}{(|K| + |L_\sigma|)^2} |(\mathbf{v}_{L_\sigma} - \mathbf{v}_K) \cdot \mathbf{n}_{K_\sigma, \sigma}|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}} \frac{9|\sigma|^2}{|K|^2} |\mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n}_{K_\sigma, \sigma}|^2 \right). \end{aligned}$$

Écrivons les sommes précédentes comme des sommes sur les arêtes du maillage. Il vient

$$|\widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{v}_h|^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} \frac{3|\sigma|^2 |K_\sigma|}{(|K_\sigma| + |L_\sigma|)^2} |(\mathbf{v}_{L_\sigma} - \mathbf{v}_{K_\sigma}) \cdot \mathbf{n}_{K_\sigma, \sigma}|^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} \frac{3|\sigma|^2}{|K_\sigma|} |\mathbf{v}_{K_\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K_\sigma, \sigma}|^2. \quad (3.15)$$

D'après (HM)

$$\frac{3|\sigma|^2|K_\sigma|}{(|K_\sigma|+|L_\sigma|)^2} \leq \frac{3|\sigma|^2}{|K_\sigma|} = 3 \frac{|\sigma|d_\sigma}{|K_\sigma|} \frac{|\sigma|}{d_\sigma} = 3 \frac{|\sigma|d_\sigma}{|K_\sigma|} \tau_\sigma \leq C \frac{h^2}{h^2} \tau_\sigma \leq C \tau_\sigma.$$

On déduit donc de (3.15)

$$|\widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{v}_h|^2 \leq C \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{\text{int}}} \tau_\sigma |\mathbf{v}_{L_\sigma} - \mathbf{v}_{K_\sigma}|^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{\text{ext}}} \tau_\sigma |\mathbf{v}_{K_\sigma}|^2 \right) \leq C \|\mathbf{v}_h\|_h^2. \quad \blacksquare$$

Proposition 3.7 (Calcul de l'opérateur ∇_h sur maillage uniforme).

On suppose le maillage uniforme. On a pour tous $q_h \in P_0$ et $\mathbf{v}_h \in \mathbf{P}_0$

$$\nabla_h q_h = \widetilde{\nabla}_h(\widetilde{\Pi}_{P_1^{\text{nc}}} q_h), \quad (3.16)$$

$$(\mathbf{v}_h, \nabla_h q_h) = -(\widetilde{\Pi}_{P_1^{\text{nc}}} q_h, \widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{v}_h). \quad (3.17)$$

De plus il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1$

$$\left| \Pi_{P_0}(\widetilde{\operatorname{div}}_h(\widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{v}) \right| \leq C h \|\mathbf{v}\|_2. \quad (3.18)$$

DÉMONSTRATION. Le maillage étant uniforme, on a

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_h^{\text{int}}, \quad \alpha_{K_\sigma, L_\sigma} = \frac{1}{2}. \quad (3.19)$$

Soit $K \in \mathcal{T}_h$. En utilisant la définition (1.8) de l'opérateur ∇_h et la formule du gradient, on déduit de (3.19)

$$\begin{aligned} \int_K \left(\nabla_h q_h - \widetilde{\nabla}_h(\widetilde{\Pi}_{P_1^{\text{nc}}} q_h) \right) d\mathbf{x} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} \frac{|\sigma|}{2} (q_{K_\sigma} + q_{L_\sigma}) \mathbf{n}_{K,\sigma} \\ &+ \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{ext}}} |\sigma| q_{K_\sigma} \mathbf{n}_{K,\sigma} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_\sigma (\widetilde{\Pi}_{P_1^{\text{nc}}} q_h) \mathbf{n}_{K,\sigma} d\sigma. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Puisque $q_h \in P_0$, on déduit de la proposition 3.2

$$\int_\sigma \widetilde{\Pi}_{P_1^{\text{nc}}} q_h d\sigma = |\sigma| (\widetilde{\Pi}_{P_1^{\text{nc}}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) = \begin{cases} \frac{|\sigma|}{2} (q_{K_\sigma} + q_{L_\sigma}) & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_h^{\text{int}}, \\ |\sigma| q_{K_\sigma} & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_h^{\text{ext}}. \end{cases} \quad (3.21)$$

En reportant (3.21) dans (3.20), on obtient (3.16). Montrons à présent (3.17). D'après (3.16) on a

$$(\mathbf{v}_h, \nabla_h q_h) = (\mathbf{v}_h, \widetilde{\nabla}_h(\widetilde{\Pi}_{P_1^{\text{nc}}} q_h)) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{v}_K \cdot \left(\int_K \widetilde{\nabla}_h(\widetilde{\Pi}_{P_1^{\text{nc}}} q_h) d\mathbf{x} \right).$$

Soit, en utilisant la formule du gradient

$$(\mathbf{v}_h, \nabla_h q_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{v}_K \cdot \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| (\widetilde{\Pi}_{P_1^{\text{nc}}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) \mathbf{n}_{K,\sigma} \right). \quad (3.22)$$

On a

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{v}_K \cdot \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) \mathbf{n}_{K,\sigma} \right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) (\mathbf{v}_{K_\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K_\sigma,\sigma} + \mathbf{v}_{L_\sigma} \cdot \mathbf{n}_{L_\sigma,\sigma}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) (\mathbf{v}_{K_\sigma} - \mathbf{v}_{L_\sigma}) \cdot \mathbf{n}_{K_\sigma,\sigma}, \tag{3.23}
\end{aligned}$$

et

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{v}_K \cdot \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}} |\sigma| (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) \mathbf{n}_{K,\sigma} \right) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} |\sigma| (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) \mathbf{v}_{K_\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K_\sigma,\sigma}. \tag{3.24}$$

En reportant (3.23) et (3.24) dans (3.22) on obtient

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_h, \nabla_h q_h) &= - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) (\mathbf{v}_{L_\sigma} - \mathbf{v}_K) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \\
&\quad + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} |\sigma| (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) \mathbf{v}_{K_\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
& -(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h, \widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{v}_h) \\
&= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{|K|}{3} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) \frac{3|\sigma|}{|K| + |L_\sigma|} (\mathbf{v}_{L_\sigma} - \mathbf{v}_K) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{|K|}{3} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}} (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) \frac{3|\sigma|}{|K|} \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \\
&= S_1 + S_2. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Écrivons S_1 et S_2 comme des sommes sur les arêtes du maillage. On obtient respectivement

$$\begin{aligned}
S_1 &= - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) \left(\frac{|K_\sigma|}{3} \frac{3}{|K_\sigma| + |L_\sigma|} (\mathbf{v}_{L_\sigma} - \mathbf{v}_{K_\sigma}) \cdot \mathbf{n}_{K_\sigma,\sigma} \right. \\
&\quad \left. + \frac{|L_\sigma|}{3} \frac{3}{|K_\sigma| + |L_\sigma|} (\mathbf{v}_{K_\sigma} - \mathbf{v}_{L_\sigma}) \cdot \mathbf{n}_{L_\sigma,\sigma} \right) \\
&= - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) \left(\frac{|K_\sigma|}{|K_\sigma| + |L_\sigma|} + \frac{|L_\sigma|}{|K_\sigma| + |L_\sigma|} \right) (\mathbf{v}_{L_\sigma} - \mathbf{v}_{K_\sigma}) \cdot \mathbf{n}_{K_\sigma,\sigma} \\
&= - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h} |\sigma| (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) (\mathbf{v}_{L_\sigma} - \mathbf{v}_{K_\sigma}) \cdot \mathbf{n}_{K_\sigma,\sigma}, \tag{3.27}
\end{aligned}$$

et

$$S_2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} |\sigma| (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) \mathbf{v}_{K_\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K_\sigma, \sigma}. \quad (3.28)$$

Reportons (3.27) et (3.28) dans (3.26) et comparons avec (3.25). Il vient

$$\begin{aligned} -(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h, \widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{v}_h) &= - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma| (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) (\mathbf{v}_{L_\sigma} - \mathbf{v}_{K_\sigma}) \cdot \mathbf{n}_{K_\sigma, \sigma} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} |\sigma| (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}_\sigma) \mathbf{v}_{K_\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K_\sigma, \sigma} \\ &= (\mathbf{v}_h, \nabla_h q_h). \end{aligned}$$

On a ainsi prouvé (3.17). Il reste à montrer (3.18). Soit $\mathbf{v} \in (\mathcal{C}_0^\infty)^2$ et $K \in \mathcal{T}_h$. D'après la définition (1.2) de l'opérateur Π_{P_0} on a

$$\left(\Pi_{P_0} \left(\widetilde{\operatorname{div}}_h(\tilde{\Pi}_{P_0} \mathbf{v}) \right) - \Pi_{P_0}(\operatorname{div} \mathbf{v}) \right) \Big|_K = \frac{1}{|K|} \int_K (\widetilde{\operatorname{div}}_h(\tilde{\Pi}_{P_0} \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}.$$

En utilisant la formule de la divergence on en déduit

$$\begin{aligned} &\left(\Pi_{P_0} \left(\widetilde{\operatorname{div}}_h(\tilde{\Pi}_{P_0} \mathbf{v}) \right) - \Pi_{P_0}(\operatorname{div} \mathbf{v}) \right) \Big|_K \\ &= \frac{1}{|K|} \int_K \widetilde{\operatorname{div}}_h(\tilde{\Pi}_{P_0} \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_\sigma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma} \, d\sigma \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \left(\frac{1}{3} (\widetilde{\operatorname{div}}_h(\tilde{\Pi}_{P_0} \mathbf{v}))(\mathbf{x}_\sigma) - \frac{1}{|K|} \int_\sigma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma} \, d\sigma \right) \\ &= S_K. \end{aligned}$$

Pour calculer S_K , on distingue dans la somme le cas des arêtes intérieures et celui des arêtes du bord. Pour les arêtes intérieures $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$, le maillage étant uniforme, $|L_\sigma| = |K|$. En utilisant la définition (3.13) de $\widetilde{\operatorname{div}}_h$, on en déduit

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} \left(\frac{1}{3} (\widetilde{\operatorname{div}}_h(\tilde{\Pi}_{P_0} \mathbf{v}))(\mathbf{x}_\sigma) - \frac{1}{|K|} \int_\sigma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma} \, d\sigma \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} \frac{1}{|K|} \int_\sigma \left(\frac{1}{2} (\mathbf{v}(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_K)) - \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma} \, d\sigma \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} \frac{1}{|K|} \int_\sigma \left(\frac{1}{2} (\mathbf{v}(\mathbf{x}_{L_\sigma}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}_K)) - \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma} \, d\sigma \\ &\quad - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} \frac{|\sigma|}{|K|} \mathbf{v}(\mathbf{x}_K) \cdot \mathbf{n}_{K, \sigma}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Puisque $\mathbf{v} \in (\mathcal{C}_0^\infty)^2$, on a $\mathbf{v}|_\sigma = 0$ si $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$. On déduit donc de (3.13)

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}} \left(\frac{1}{3} (\widetilde{\text{div}}_h(\widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{v}))(\mathbf{x}_\sigma) - \frac{1}{|K|} \int_\sigma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\sigma \right) = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{ext}} \frac{|\sigma|}{|K|} \mathbf{v}(\mathbf{x}_K) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}. \quad (3.30)$$

En additionnant (3.29) et (3.30) il vient

$$S_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} \frac{1}{|K|} \int_\sigma \left(\frac{1}{2} (\mathbf{v}(\mathbf{x}_{L_\sigma}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}_K)) - \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\sigma - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \frac{|\sigma|}{|K|} \mathbf{v}(\mathbf{x}_K) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}.$$

Puisque

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \frac{|\sigma|}{|K|} \mathbf{v}(\mathbf{x}_K) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = \frac{1}{|K|} \mathbf{v}(\mathbf{x}_K) \cdot \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| \mathbf{n}_{K,\sigma} \right) = 0$$

on obtient finalement

$$S_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{int}} \frac{1}{|K|} \int_\sigma \left(\frac{1}{2} (\mathbf{v}(\mathbf{x}_{L_\sigma}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}_K)) - \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\sigma. \quad (3.31)$$

Notons $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Soit $i \in \{1, 2\}$. Si $\mathbf{x} \in \sigma$ on a les développements de Taylor

$$v_i(\mathbf{x}_{L_\sigma}) = v_i(\mathbf{x}) + \nabla v_i(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}) + \int_0^1 \mathbf{H}(v_i)(t\mathbf{x}_{L_\sigma} + (1-t)\mathbf{x})(\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}) dt, \quad (3.32)$$

$$v_i(\mathbf{x}_K) = v_i(\mathbf{x}) + \nabla v_i(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) + \int_0^1 \mathbf{H}(v_i)(t\mathbf{x}_K + (1-t)\mathbf{x})(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) dt, \quad (3.33)$$

et

$$\nabla v_i(\mathbf{x}) = \nabla v_i(\mathbf{x}_K) - \int_0^1 \nabla \nabla v_i(t\mathbf{x}_K + (1-t)\mathbf{x})(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) dt. \quad (3.34)$$

Substituons (3.34) dans (3.32), (3.33) et intégrons sur σ . Il vient

$$\int_\sigma (v_i(\mathbf{x}_{L_\sigma}) - v_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \nabla v_i(\mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}_\sigma) - F_{L_\sigma}^\sigma(v_i) + H_{L_\sigma}^\sigma(v_i) \quad (3.35)$$

et

$$\int_\sigma (v_i(\mathbf{x}_K) - v_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \nabla v_i(\mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_\sigma) - F_K^\sigma(v_i) + H_K^\sigma(v_i). \quad (3.36)$$

Les termes $F_{L_\sigma}^\sigma(v_i)$, $F_K^\sigma(v_i)$, $H_{L_\sigma}^\sigma(v_i)$, $H_K^\sigma(v_i)$ sont donnés par (1.12) et (1.14). Additionnons (3.35) et (3.36). Puisque le maillage est uniforme on a

$$(\mathbf{x}_{L_\sigma} - \mathbf{x}_\sigma) + (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_\sigma) = d(\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_\sigma) (\mathbf{n}_{L_\sigma, \sigma} + \mathbf{n}_{K, \sigma}) = 0.$$

On obtient ainsi

$$\int_\sigma (v_i(\mathbf{x}_{L_\sigma}) + v_i(\mathbf{x}_K) - 2v_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = -F_K^\sigma(v_i) - F_{L_\sigma}^\sigma(v_i) + H_K^\sigma(v_i) + H_{L_\sigma}^\sigma(v_i). \quad (3.37)$$

Reportons (3.37) dans (3.31) et utilisons les estimations (1.16), (1.17). Il vient

$$|S_K|^2 \leq h^4 \frac{|D_\sigma|}{|K|^2} \sum_{i=1}^2 \int_{D_\sigma} (|\mathbf{H}(v_i)(\mathbf{y})|^2 + |\nabla \nabla v_i(\mathbf{y})|^2) d\mathbf{y} \leq h^4 \frac{|D_\sigma|}{|K|^2} \|\mathbf{v}\|_2^2.$$

D'après (HM) on a

$$h^2 |D_\sigma| \leq C |K|^2.$$

On en déduit

$$\left| \left(\Pi_{P_0}(\widetilde{\operatorname{div}}_h(\widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{v}) \right) \Big|_K \right|^2 = |S_K|^2 \leq C h^2 \|\mathbf{v}\|_2^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left| \Pi_{P_0}(\widetilde{\operatorname{div}}_h(\widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{v}) \right|^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \left| \left(\Pi_{P_0}(\widetilde{\operatorname{div}}_h(\widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{v}) \right) \Big|_K \right|^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| h^2 \|\mathbf{v}\|_2^2 \\ &\leq C h^2 \|\mathbf{v}\|_2^2. \end{aligned}$$

On a ainsi montré (3.18) pour $v \in (\mathcal{C}_0^\infty)^2$. Soit maintenant $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1$. L'espace $(\mathcal{C}_0^\infty)^2$ est dense dans $\mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1$. Il existe donc une suite de fonctions de $(\mathcal{C}_0^\infty)^2$, notée $(\mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, telle que pour $n \rightarrow \infty$

$$\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_2 \rightarrow 0. \quad (3.38)$$

D'après la proposition 3.6 on a

$$|\widetilde{\operatorname{div}}_h(\widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n))| \leq C \|\widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n)\|_h. \quad (3.39)$$

avec (proposition 3.9)

$$\|\widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n)\|_h^2 = - \left(\widetilde{\Delta}_h(\widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n)), \widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n) \right). \quad (3.40)$$

Or, d'après la proposition 1.5, on a

$$|\widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n)| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_n\|_2; \quad (3.41)$$

et d'après la proposition 1.14

$$\begin{aligned} \left| \widetilde{\Delta}_h(\widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n)) \right| &\leq \left| \widetilde{\Delta}_h(\widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n)) - \Pi_{\mathbf{P}_0} \Delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n) \right| \\ &\quad + |\Pi_{\mathbf{P}_0} \Delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n)| \\ &\leq C \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Reportons (3.41) et (3.42) dans (3.40). Il vient

$$\|\widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n)\|_h \leq C \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_2. \quad (3.43)$$

En reportant (3.43) dans (3.39), on obtient

$$|\widetilde{\operatorname{div}}_h(\widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n))| \leq C \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_2.$$

D'autre part

$$|\operatorname{div}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_2.$$

On en déduit

$$\left| \Pi_{\mathbf{P}_0} \left(\widetilde{\operatorname{div}}_h(\widetilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n)) - \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right| \leq C \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\|_2. \quad (3.44)$$

En combinant (3.38) et (3.44) on obtient que (3.18) est valable pour $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1$. ■

Proposition 3.8 (L'opérateur $\widetilde{\Delta}_h$ est auto-adjoint).

Si $u_h \in P_0$ et $v_h \in P_0$, on a

$$(\widetilde{\Delta}_h u_h, v_h) = (u_h, \widetilde{\Delta}_h v_h).$$

DÉMONSTRATION. On utilise la définition (1.10) de $\widetilde{\Delta}_h$, et on réécrit la somme sur les triangles du maillage comme une somme sur les arêtes :

$$\begin{aligned} (\widetilde{\Delta}_h u_h, v_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} v_K \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} \tau_\sigma (v_{L_\sigma} - v_K) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{ext}}} \tau_\sigma u_K \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} \tau_\sigma (v_{L_\sigma} - v_K) (u_{L_\sigma} - u_K) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{ext}}} \tau_\sigma v_K u_K \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} u_K \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} \tau_\sigma (v_{L_\sigma} - v_K) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} u_K \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{ext}}} \tau_\sigma v_K \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} u_K \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} \tau_\sigma (v_{L_\sigma} - v_K) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{ext}}} \tau_\sigma v_K \right) \\ &= (u_h, \widetilde{\Delta}_h v_h). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Proposition 3.9 (Lien entre l'opérateur $\widetilde{\Delta}_h$ et la norme discrète $\|\cdot\|_h$).

Si $u_h \in P_0$ et $v_h \in P_0$ on a

$$-(\widetilde{\Delta}_h u_h, v_h) \leq \|u_h\|_h \|v_h\|_h, \quad (3.45)$$

$$-(\widetilde{\Delta}_h u_h, u_h) = \|u_h\|_h^2. \quad (3.46)$$

DÉMONSTRATION. Soient $u_h \in P_0$ et $v_h \in P_0$. En utilisant la définition (1.10) de $\widetilde{\Delta}_h$ puis en réécrivant les sommes sur les triangles du maillage sous forme de sommes sur les arêtes, on a

$$\begin{aligned} -(\widetilde{\Delta}_h u_h, v_h) &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} v_K \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} \tau_\sigma (u_{L_\sigma} - u_K) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{ext}}} \tau_\sigma u_K \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{\text{int}}} \tau_\sigma (v_{L_\sigma} - v_K) (u_{L_\sigma} - u_K) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{ext}}} \tau_\sigma u_K v_K. \end{aligned} \quad (3.47)$$

En particulier, en prenant $v_h = u_h$, on obtient (3.46). En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (3.47), il vient

$$\begin{aligned} -(\tilde{\Delta}_h u_h, v_h) &\leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} \tau_\sigma |v_{L_\sigma} - v_K|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} \tau_\sigma |u_{L_\sigma} - u_K|^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} \tau_\sigma |u_{K_\sigma}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} \tau_\sigma |v_{K_\sigma}|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Soit, en utilisant l'inégalité $ab + cd \leq \sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + d^2}$:

$$\begin{aligned} &-(\tilde{\Delta}_h u_h, v_h) \\ &\leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} \tau_\sigma |v_{L_\sigma} - v_K|^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} \tau_\sigma |v_{K_\sigma}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} \tau_\sigma |u_{L_\sigma} - u_K|^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} \tau_\sigma |u_{K_\sigma}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|u_h\|_h \|v_h\|_h. \end{aligned}$$

On a ainsi montré (3.45). ■

3.3 Condition inf-sup

L'opérateur divergence et les espaces L_0^2 , \mathbf{H}_0^1 vérifient la propriété suivante, dite *condition inf-sup* (cf [16] par exemple). Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\inf_{q \in L_0^2 \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1 \setminus \{0\}} -\frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_1 |q|} \geq C. \quad (3.48)$$

Nous allons montrer une propriété analogue pour l'opérateur discret div_h défini par (1.8) avec les espaces P_0^0 et \mathbf{P}_0 . Elle servira à établir des estimations sur la pression.

Lemme 3.1 *On suppose que le maillage est uniforme. Il existe alors une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall v_h \in P_1^c, \quad \|\Pi_{P_0} v_h\|_h \leq C \|v_h\|_1. \quad (3.49)$$

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{V}_h l'ensemble des sommets du maillage, \mathcal{V}_h^{int} (resp. \mathcal{V}_h^{ext}) l'ensemble des sommets situés à l'intérieur du domaine Ω (resp. sur le bord). Pour tout triangle $K \in \mathcal{T}_h$, notons \mathcal{V}_K l'ensemble de ses sommets. Pour tout sommet $S \in \mathcal{V}_K$, la normale extérieure et la hauteur associées à l'arête opposée à S sont notées respectivement $\mathbf{n}_{K,S}$ et $h_{K,S}$ (figure 3.1). Pour tout sommet $S \in \mathcal{V}_h^{int}$, on définit $\phi_S \in P_1^c$ par

$$\forall S' \in \mathcal{V}_h, \quad \phi_S(S') = \begin{cases} 1 & \text{si } S = S', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction ϕ_S est nulle en dehors de l'ensemble $\mathcal{N}(S)$ des triangles admettant S pour sommet (figure 3.1). Un calcul élémentaire montre que pour tout triangle $K \in \mathcal{N}(S)$, on a $\nabla \phi_S|_K = -\frac{1}{h_{K,S}} \mathbf{n}_{K,S}$.



FIG. 3.1 – Représentation de $\mathcal{N}(S)$ pour $S \in \mathcal{V}_h^{int}$; définition de $h_{K,S}$, $\mathbf{n}_{K,S}$.

Puisque l'ensemble $(\phi_S)_{S \in \mathcal{V}_h^{int}}$ forme une base de P_1^c , on a

$$\begin{aligned}
 \|v_h\|_1^2 &\geq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla v_h|^2 d\mathbf{x} \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left| \sum_{S \in \mathcal{V}_K \cap \mathcal{V}_h^{int}} v_h(S) \nabla \phi_S|_K \right|^2 d\mathbf{x} \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \left| \sum_{S \in \mathcal{V}_K \cap \mathcal{V}_h^{int}} \frac{1}{h_{K,S}} v_h(S) \mathbf{n}_{K,S} \right|^2 \\
 &= A_1 + A_2, \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \sum_{S \in \mathcal{V}_K \cap \mathcal{V}_h^{int}} \frac{1}{h_{K,S}^2} (v_h(S))^2, \\
 A_2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \sum_{S', S'' \in \mathcal{V}_K \cap \mathcal{V}_h^{int}, S' \neq S''} \frac{1}{h_{K,S'}} \frac{1}{h_{K,S''}} (\mathbf{n}_{K,S'} \cdot \mathbf{n}_{K,S''}) v_h(S') v_h(S'').
 \end{aligned}$$

Pour un maillage \mathcal{T}_h uniforme, on a $h_{K,S} = \frac{3}{4}h$, $|K| = \frac{3}{16}h^2\sqrt{3}$ et $\mathbf{n}_{K,S'} \cdot \mathbf{n}_{K,S''} = -\frac{1}{2}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{S \in \mathcal{V}_K \cap \mathcal{V}_h^{int}} (v_h(S))^2, \\
 A_2 &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{S', S'' \in \mathcal{V}_K \cap \mathcal{V}_h^{int}, S' \neq S''} v_h(S') v_h(S'').
 \end{aligned}$$

Ces sommes sont ensuite écrites comme des sommes sur les arêtes de la triangulation. L'ensemble des sommets voisins d'une arête intérieure $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$ (resp. d'une arête du bord $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$) est noté $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ (resp. $\{S_1, S_2, S_3\}$) (figure 3.2).

On pose pour $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$,

$$\begin{aligned}
 a_\sigma &= v_h(S_1), & b_\sigma &= v_h(S_2), \\
 c_\sigma &= v_h(S_3), & d_\sigma &= v_h(S_4).
 \end{aligned}$$

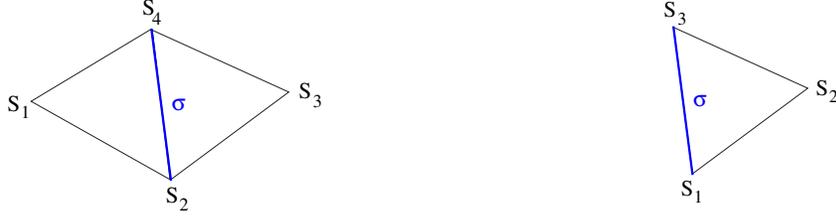


FIG. 3.2 – L'ensemble des sommets voisins de $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$ (à gauche) et $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$.

Puisque $v_h \in P_1^c$ on a $v_h|_\sigma = 0$. Pour $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$, on a donc $v_h(S_1) = v_h(S_3) = 0$. On note

$$a_\sigma = v_h(S_2).$$

Le maillage étant uniforme, chaque sommet $S \in \mathcal{V}_h^{int}$ appartient à six triangles. On en déduit

$$\sqrt{3} A_1 = 6 \sum_{S \in \mathcal{V}_h^{int}} (v_h(S))^2. \quad (3.51)$$

Considérons l'expression

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} (a_\sigma^2 + b_\sigma^2 + c_\sigma^2 + d_\sigma^2) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} a_\sigma^2. \quad (3.52)$$

On vérifie que chaque sommet $S \in \mathcal{V}_h^{int}$ apparait douze fois dans (3.52). On en déduit

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} (a_\sigma^2 + b_\sigma^2 + c_\sigma^2 + d_\sigma^2) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} a_\sigma^2 = 12 \sum_{S \in \mathcal{V}_h^{int}} (v_h(S))^2. \quad (3.53)$$

En comparant (3.51) et (3.53) on obtient

$$\sqrt{3} A_1 = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} (a_\sigma^2 + b_\sigma^2 + c_\sigma^2 + d_\sigma^2) + \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} a_\sigma^2. \quad (3.54)$$

D'autre part, chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$ appartient à deux triangles. On en déduit

$$-\sqrt{3} A_2 = 2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} b_\sigma d_\sigma. \quad (3.55)$$

Considérons l'expression

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} (a_\sigma b_\sigma + a_\sigma d_\sigma + b_\sigma c_\sigma + c_\sigma d_\sigma).$$

Chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$ a quatre arêtes voisines. On en déduit

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} (a_\sigma b_\sigma + a_\sigma d_\sigma + b_\sigma c_\sigma + c_\sigma d_\sigma) = 4 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} b_\sigma d_\sigma. \quad (3.56)$$

En comparant (3.55) et (3.56) on obtient

$$-\sqrt{3} A_2 = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} (a_\sigma b_\sigma + a_\sigma d_\sigma + b_\sigma c_\sigma + c_\sigma d_\sigma). \quad (3.57)$$

Enfin

$$\|\Pi_{P_0} v_h\|_h^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} \tau_\sigma \left((\Pi_{P_0} v_h)|_{L_\sigma} - (\Pi_{P_0} v_h)|_{K_\sigma} \right)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} \tau_\sigma \left((\Pi_{P_0} v_h)|_{K_\sigma} \right)^2.$$

Si $\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}$ on a

$$(\Pi_{P_0} v_h)|_{K_\sigma} = \frac{1}{|K_\sigma|} \int_{K_\sigma} v_h \, d\mathbf{x} = \frac{1}{3} \sum_{S' \in \mathcal{V}_{K_\sigma}} v_h(S') = \frac{1}{3} (a_\sigma + b_\sigma + d_\sigma)$$

et

$$(\Pi_{P_0} v_h)|_{L_\sigma} = \frac{1}{3} (b_\sigma + c_\sigma + d_\sigma).$$

Si $\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}$ on a

$$(\Pi_{P_0} v_h)|_{K_\sigma} = \frac{1}{3} a_\sigma.$$

Le maillage étant uniforme on a

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}_h^{int}, \quad \tau_\sigma = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}, \quad \tau_\sigma = 2\sqrt{3},$$

de sorte que

$$\|\Pi_{P_0} v_h\|_h^2 = \frac{\sqrt{3}}{9} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} (c_\sigma - a_\sigma)^2 + 2 \frac{\sqrt{3}}{9} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} a_\sigma^2. \quad (3.58)$$

Reportons (3.54) et (3.57) dans (3.50). En utilisant (3.58) on obtient pour tout $\gamma > 0$

$$2\sqrt{3} (\|v_h\|_{1,h}^2 - \gamma \|\Pi_{P_0} v_h\|_h^2) \geq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{int}} q(a_\sigma, b_\sigma, c_\sigma, d_\sigma) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}} (1 - \frac{\gamma}{9}) a_\sigma^2, \quad (3.59)$$

la forme quadratique $q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ étant définie par

$$q(a, b, c, d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ad - bc - cd - \frac{\gamma}{18} (c - a)^2.$$

Posons $\delta = \frac{\gamma}{18}$. En utilisant la réduction canonique de Gauss on vérifie que

$$\begin{aligned} q(a, b, c, d) &= (1 - \delta) \left[a + \frac{1}{1 - \delta} \left(-\frac{1}{2} (b + d) + \delta c \right) \right]^2 + \frac{2(1 - 2\delta)}{3 - 4\delta} \left[c - \frac{1 - 2\delta}{2(1 - \delta)} d \right]^2 \\ &+ \frac{3 - 4\delta}{4 - 4\delta} \left[b + \frac{1}{3 - 4\delta} (d + (4\delta - 2)c) \right]^2 + \frac{1 - 2\delta}{2(3 - 4\delta)(1 - \delta)} d^2. \end{aligned}$$

On en déduit que si $0 < \delta < \frac{1}{2}$, soit $0 < \gamma < 9$, la forme quadratique q est définie positive. Ainsi, d'après (3.59), on a pour tout $0 < \gamma < 9$

$$\|v_h\|_1^2 - \gamma \|\Pi_{P_0} v_h\|_h^2 > 0.$$

Ceci conclut la preuve de (3.49). ■

Lemme 3.2 *On suppose que le maillage vérifie l'hypothèse (HM). On a alors*

$$\forall q_h \in P_0, \quad \sup_{\mathbf{u}_h \in \mathbf{P}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}} -\frac{(q_h, \operatorname{div}_h \mathbf{u}_h)}{\|\mathbf{u}_h\|_h} \geq C h |\nabla_h q_h|.$$

DÉMONSTRATION. Soit $q_h \in P_0$. On définit $\mathbf{u}_h \in \mathbf{P}_0$ par $\mathbf{u}_h = \nabla_h q_h$. En utilisant la proposition 1.15 on a

$$-(q_h, \operatorname{div}_h \mathbf{u}_h) = (\mathbf{u}_h, \nabla_h q_h) = |\nabla_h q_h|^2 = |\nabla_h q_h| \|\mathbf{u}_h\|.$$

D'après la proposition 1.2, on a

$$\|\mathbf{u}_h\|_h \leq \frac{C}{h} |\mathbf{u}_h|.$$

Ainsi

$$-(q_h, \operatorname{div}_h \mathbf{u}_h) \geq \frac{h}{C} |\nabla_h q_h| \|\mathbf{u}_h\|_h. \quad \blacksquare$$

Théorème 3.1 (Condition inf-sup pour l'opérateur div_h).

Pour un maillage uniforme, on a

$$\forall q_h \in P_0^0, \quad \sup_{\mathbf{u}_h \in \mathbf{P}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}} -\frac{(q_h, \operatorname{div}_h \mathbf{u}_h)}{\|\mathbf{u}_h\|_h} \geq C |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h|. \quad (3.60)$$

DÉMONSTRATION. Soit $q_h \in P_0^0$. Comme $\int_{\Omega} q_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$, d'après la proposition 3.3, on a encore $\int_{\Omega} (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$. Ainsi $\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h \in L_0^2$; on peut donc lui appliquer la condition inf-sup (3.48) vérifiée par l'opérateur div .

L'inégalité (3.48) implique qu'il existe $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1$ et une constante $C > 0$ tels que :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}\|_1 \leq C |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h|. \quad (3.61)$$

Posons

$$\mathbf{v}_h = \Pi_{\mathbf{P}_1^c} \mathbf{v}.$$

On cherche à minorer $-(q_h, \operatorname{div}_h(\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{v}_h))$. En utilisant la proposition 1.15 et le fait que $\nabla_h q_h \in \mathbf{P}_0$ on a

$$-(q_h, \operatorname{div}_h(\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{v}_h)) = (\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{v}_h, \nabla_h q_h) = (\mathbf{v}_h, \nabla_h q_h). \quad (3.62)$$

On utilise la décomposition suivante :

$$(\mathbf{v}_h, \nabla_h q_h) = (\mathbf{v}, \nabla_h q_h) - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, \nabla_h q_h). \quad (3.63)$$

Les opérateurs $\nabla : H^1 \rightarrow \mathbf{L}^2$ et $-\operatorname{div} : \mathbf{H}_0^1 \rightarrow L^2$ sont adjoints. Le premier terme dans (3.63) s'écrit donc, en utilisant (3.61)

$$(\mathbf{v}, \nabla_h q_h) = (\mathbf{v}, \tilde{\nabla}_h(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h)) = -(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h, \operatorname{div} \mathbf{v}) = |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h|^2. \quad (3.64)$$

Par ailleurs, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le second terme dans (3.63) est majoré par

$$|(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, \nabla_h q_h)| \leq |\mathbf{v} - \mathbf{v}_h| |\nabla_h q_h|.$$

En utilisant la proposition 1.8 puis (3.61) on a

$$|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h| = |\mathbf{v} - \Pi_{\mathbf{P}_1^c} \mathbf{v}| \leq C h \|\mathbf{v}\|_1 \leq C h |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h|$$

Donc

$$|(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, \nabla_h q_h)| \leq C h |\nabla_h q_h| |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h|. \quad (3.65)$$

Substituons les estimations (3.64) et (3.65) dans (3.63) et utilisons (3.62). Il vient

$$-(q_h, \operatorname{div}_h(\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{v}_h)) \geq (|\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h| - C h |\nabla_h q_h|) |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h|. \quad (3.66)$$

Il reste à faire apparaître la norme $\|\cdot\|_h$. L'opérateur de projection $\Pi_{\mathbf{P}_1^c}$ est stable en norme H^1 . On en déduit, en utilisant (3.61)

$$\|\mathbf{v}_h\|_1 = \|\Pi_{\mathbf{P}_1^c} \mathbf{v}\|_1 \leq \|\mathbf{v}\|_1 \leq C |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h|. \quad (3.67)$$

D'après le lemme 3.1,

$$\|\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{v}_h\|_h \leq C \|\mathbf{v}_h\|_1. \quad (3.68)$$

On déduit de (3.67) et (3.68)

$$|\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h| \geq C \|\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{v}_h\|_h. \quad (3.69)$$

En substituant (3.69) dans (3.66), on obtient qu'il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$-(q_h, \operatorname{div}_h(\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{v}_h)) \geq \left(C_1 |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h| - C_2 h |\nabla_h q_h| \right) \|\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{v}_h\|_h.$$

On en déduit

$$\sup_{\mathbf{u}_h \in \mathbf{P}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}} -\frac{(q_h, \operatorname{div}_h \mathbf{u}_h)}{\|\mathbf{u}_h\|_h} \geq C_1 |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h| - C_2 h |\nabla_h q_h|. \quad (3.70)$$

Or on a montré (lemme 3.2) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{\mathbf{u}_h \in \mathbf{P}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}} -\frac{(q_h, \operatorname{div}_h \mathbf{u}_h)}{\|\mathbf{u}_h\|_h} \geq C h |\nabla_h q_h|. \quad (3.71)$$

En comparant les minorants dans (3.70) et (3.71), et en notant que

$$\forall t \geq 0, \quad \max\left(C t, C_1 |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h| - C_2 t\right) \geq \frac{C C_1}{C + C_2} |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h|,$$

on obtient finalement (3.60). ■

Remarque 3 (Hypothèse sur le maillage pour la condition inf-sup).

L'hypothèse d'uniformité du maillage dans le théorème 3.1 est assez contraignante. Peut-on s'en passer? Cette hypothèse est liée à deux propriétés : le lemme 3.1 et la proposition 3.7. La preuve du lemme 3.1 peut certainement être faite pour un maillage plus général. La proposition 3.7 utilise le fait que $\nabla_h p_h$ et $\nabla(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h)$ coïncident sur un maillage uniforme. Dès lors, pourquoi ne pas adopter d'emblée comme opérateur discret :

$$\nabla_h p_h = \nabla(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h) \quad ?$$

Dans ce cas, un petit calcul montre que l'opérateur de divergence discrète adjoint $\text{div}_h : \mathbf{P}_0 \rightarrow P_0$ est défini par

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (\text{div}_h \mathbf{u}_h)_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \frac{|\sigma|}{|K| + |L_\sigma|} (\mathbf{u}_{L_\sigma} - \mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}.$$

On obtient alors un laplacien discret $\Delta_h = \text{div}_h(\nabla_h)$ ayant le même support que celui utilisé ici. Si cette approche n'a pas été retenue, c'est qu'il est moins coûteux d'utiliser directement une pression discrète $p_h \in P_1^{nc}$: le laplacien discret associé fait alors intervenir moins de degrés de liberté.

Chapitre 4

Stabilité et convergence des schémas

En utilisant les résultats présentés dans le chapitre 3, on s'intéresse maintenant à la stabilité et à la convergence des schémas **VF-I**, **VF-CN** et **VF-BDF** introduits dans le chapitre 2. La stabilité du schéma **VF-I** (resp. **VF-CN** et **VF-BDF**), énoncée dans le théorème 4.1 (resp. 4.2 et 4.3), est montrée dans la section 4.1.1 (resp. 4.1.2 et 4.1.3). Le résultat de convergence pour le schéma **VF-I** (resp. **VF-CN** et **VF-BDF**) est énoncé dans le théorème 4.4 (resp. 4.5 et 4.6) de la section 4.2.1 (resp. 4.2.2 et 4.2.3).

On utilise l'hypothèse suivante sur les données dans (1)–(4)

$$\begin{aligned} \text{(HD)} \quad & \mathbf{f} \in \mathcal{C}(0, T; \mathbf{L}^2), \quad \mathbf{f}_t \in \mathcal{C}(0, T; \mathbf{L}^2), \\ & \mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{2,r} \text{ avec } r > 2. \end{aligned}$$

On utilise également l'hypothèse suivante sur les valeurs initiales des schémas

$$\text{(HIS)} \quad \text{Il existe une constante } C > 0 \text{ telle que } |\nabla_h p_h^0| \leq C.$$

Cette condition est satisfaite en particulier si $p_h^0 = 0$. Notons qu'on a $|\mathbf{u}_h^0| = |\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0| \leq C$.

4.1 Stabilité des schéma

De la propriété d'orthogonalité des schémas (proposition 2.1) on déduit le résultat préliminaire suivant.

Lemme 4.1 (Conséquence de l'orthogonalité de la projection discrète).

Pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$ on a

$$|\mathbf{u}_h^m|^2 - |\tilde{\mathbf{u}}_h^m|^2 + |\mathbf{u}_h^m - \tilde{\mathbf{u}}_h^m|^2 = 0. \quad (4.1)$$

DÉMONSTRATION. Pour $m = 0$, $\mathbf{u}_h^0 = \tilde{\mathbf{u}}_h^0$ et l'équation (4.1) est trivialement vérifiée. Soit maintenant $m \in \{1, \dots, N\}$. D'une part, en utilisant l'identité algébrique $2a(a-b) = a^2 - b^2 + (a-b)^2$, on a

$$(2\mathbf{u}_h^m, \mathbf{u}_h^m - \tilde{\mathbf{u}}_h^m) = |\mathbf{u}_h^m|^2 - |\tilde{\mathbf{u}}_h^m|^2 + |\mathbf{u}_h^m - \tilde{\mathbf{u}}_h^m|^2. \quad (4.2)$$

D'autre part rappelons que d'après (2.6)

$$\tilde{\mathbf{u}}_h^m - \mathbf{u}_h^m = \alpha k \nabla_h (p_h^m - p_h^{m-1}).$$

On déduit donc de la propriété d'orthogonalité de la projection discrète (proposition 2.1)

$$(2 \mathbf{u}_h^m, \mathbf{u}_h^m - \tilde{\mathbf{u}}_h^m) = -2 \alpha k (\mathbf{u}_h^m, \nabla_h (p_h^m - p_h^{m-1})) = 0. \quad (4.3)$$

En comparant (4.2) et (4.3), on obtient bien (4.1). ■

4.1.1 Stabilité du schéma VF-I

Théorème 4.1 (Stabilité du schéma VF-I).

On considère le schéma VF-I. On suppose que les données vérifient l'hypothèse (HD) et que les valeurs initiales du schéma vérifient l'hypothèse (HIS). Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$

$$|\mathbf{u}_h^m|^2 + k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\mathbf{u}}_h^n\|_h^2 + k^2 |\nabla_h p_h^m|^2 \leq C. \quad (4.4)$$

Supposons de plus que le maillage est uniforme. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$

$$\frac{1}{k} |\delta \mathbf{u}_h^m| + k \sum_{n=0}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^n|^2 \leq C. \quad (4.5)$$

DÉMONSTRATION. Soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Prenons le produit scalaire de (2.2) avec $2k \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}$. On obtient

$$\left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k}, 2k \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \right) - 2k (\tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) + 2k (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \nabla_h p_h^n) = 2k (\mathbf{f}_h^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}). \quad (4.6)$$

Les différents termes apparaissant dans (4.6) sont traités comme suit.

Tout d'abord en utilisant l'identité algébrique $2a(a-b) = a^2 + b^2 + (a-b)^2$ on a

$$\left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k}, 2k \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \right) = |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_h^n|^2 + |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n|^2.$$

D'après (4.1) on a

$$|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}|^2 = |\mathbf{u}_h^{n+1}|^2 + |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2;$$

on en déduit

$$\left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k}, 2k \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \right) = |\mathbf{u}_h^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_h^n|^2 + |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n|^2 + |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2. \quad (4.7)$$

En appliquant la proposition 3.9 on a

$$-2k (\tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) = 2k \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h^2. \quad (4.8)$$

Par ailleurs, d'après la propriété d'orthogonalité de la projection (proposition 2.1), on a

$$\begin{aligned} 2k (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \nabla_h p_h^n) &= 2k (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \nabla_h p_h^n) - 2k (\mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla_h p_h^n) \\ &= 2k (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla_h p_h^n). \end{aligned}$$

Rappelons l'équation de la projection discrète (2.6)

$$\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1} = k \nabla_h (p_h^{n+1} - p_h^n);$$

on en déduit

$$\begin{aligned} 2k (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \nabla_h p_h^n) &= 2k^2 (\nabla_h (p_h^{n+1} - p_h^n), \nabla_h p_h^n) \\ &= k^2 (|\nabla_h p_h^{n+1}|^2 - |\nabla_h p_h^n|^2 - |\nabla_h (p_h^{n+1} - p_h^n)|^2). \end{aligned} \quad (4.9)$$

D'autre part en multipliant l'équation (2.6) par $2k \nabla_h (p_h^{n+1} - p_h^n)$ on a

$$\begin{aligned} 2k^2 |\nabla_h (p_h^{n+1} - p_h^n)|^2 &= 2k (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla_h (p_h^{n+1} - p_h^n)) \\ &\leq k^2 |\nabla_h (p_h^{n+1} - p_h^n)|^2 + |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$k^2 |\nabla_h (p_h^{n+1} - p_h^n)|^2 \leq |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2. \quad (4.10)$$

Enfin, en utilisant l'hypothèse **(HD)** et la proposition 1.1, on a

$$2k (\mathbf{f}_h^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) = 2k (\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{f}(t_{n+1}), \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) \leq Ck |\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{f}(t_{n+1})| |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}| \leq Ck |\mathbf{f}(t_{n+1})| \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h;$$

soit, d'après l'inégalité de Young :

$$2k (\mathbf{f}_h^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) \leq \frac{k}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h^2 + Ck |\mathbf{f}(t_{n+1})|^2 \leq \frac{k}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h^2 + Ck \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2)}^2. \quad (4.11)$$

En additionnant (4.7)–(4.11) on obtient

$$|\mathbf{u}_h^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_h^n|^2 + |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n|^2 + \frac{k}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h^2 + \frac{k^2}{2} (|\nabla_h p_h^{n+1}|^2 - |\nabla_h p_h^n|^2) \leq Ck.$$

Soit $m \in \{1, \dots, N\}$. En sommant de $n = 0$ à $m - 1$ il vient

$$|\mathbf{u}_h^m|^2 + \sum_{n=0}^{m-1} |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n|^2 + \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{m-1} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h^2 + \frac{k^2}{2} |\nabla_h p_h^m|^2 \leq C + |\mathbf{u}_h^0|^2 + \frac{k^2}{2} |\nabla_h p_h^0|^2.$$

En utilisant l'hypothèse **(HIS)** on en déduit (4.4).

Montrons (4.5). On suppose désormais que le maillage est uniforme. Appliquons l'opérateur δ à (2.2) et (2.6). On obtient pour tout $n \in \{1, \dots, N - 1\}$

$$\frac{\delta \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \delta \mathbf{u}_h^n}{k} - \tilde{\Delta}_h (\delta \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) + \nabla_h (\delta p_h^n) = \delta \mathbf{f}_h^{n+1} \quad (4.12)$$

et pour tout $n \in \{0, \dots, N - 1\}$

$$\delta \mathbf{u}_h^{n+1} = \delta \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + k \nabla_h (\delta p_h^{n+1} - \delta p_h^n).$$

L'équation (4.12) est encore valable pour $n = 0$ en posant

$$p_h^{-1} = p_h^0, \quad \mathbf{u}_h^{-1} = \mathbf{u}_h^0 - k \tilde{\Delta}_h \mathbf{u}_h^0 - k \mathbf{f}_h^0. \quad (4.13)$$

Multiplions (4.12) par $k \delta \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}$. En utilisant l'hypothèse **(HD)** on a

$$2k (\delta \mathbf{f}_h^{n+1}, \delta \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) = 2k (\Pi_{\mathbf{P}_0} \delta \mathbf{f}(t_{n+1}), \delta \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) \leq Ck |\delta \mathbf{f}(t_{n+1})| \|\delta \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h$$

avec

$$|\delta \mathbf{f}(t_{n+1})| = \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}_t(s) ds \right| \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} |\mathbf{f}_t(s)| ds \leq k \|\mathbf{f}_t\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2)};$$

on en déduit

$$2k (\delta \mathbf{f}_h^{n+1}, \delta \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) \leq Ck^2 \|\delta \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h \leq \frac{k}{2} \|\delta \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h^2 + Ck^3.$$

En procédant ensuite comme pour la preuve de (4.4) on obtient pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$

$$|\delta \mathbf{u}_h^m|^2 + \frac{k^2}{2} |\nabla_h(\delta p_h^m)|^2 \leq Ck^2 + |\delta \mathbf{u}_h^0|^2 + \frac{k^2}{2} |\nabla_h(\delta p_h^0)|^2. \quad (4.14)$$

D'après (4.13) on a

$$\delta p_h^0 = p_h^0 - p_h^{-1} = 0. \quad (4.15)$$

Par ailleurs, on a

$$|\tilde{\Delta}_h \mathbf{u}_h^0| = |\tilde{\Delta}_h(\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0)| \leq |\tilde{\Delta}_h(\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0 - \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0)| + |\tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0)|. \quad (4.16)$$

En utilisant l'hypothèse **(HD)** et la proposition 1.12 on a

$$|\tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0)| \leq C \|\mathbf{u}_0\|_2. \quad (4.17)$$

D'après la proposition 3.9 on a

$$\begin{aligned} |\tilde{\Delta}_h(\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0 - \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0)|^2 &= (\tilde{\Delta}_h(\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0 - \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0), \tilde{\Delta}_h(\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0 - \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0)) \\ &\leq \|\tilde{\Delta}_h(\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0 - \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0)\|_h \|\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0 - \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0\|_h; \end{aligned}$$

soit, en utilisant la proposition 1.1

$$|\tilde{\Delta}_h(\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0 - \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0)|^2 \leq \frac{C}{h^2} |\tilde{\Delta}_h(\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0 - \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0)| \|\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0 - \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0\|.$$

Puisque le maillage est uniforme, on obtient en utilisant l'hypothèse **(HD)** et la proposition 3.1

$$|\tilde{\Delta}_h(\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0 - \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0)| \leq \frac{C}{h^2} \|\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0 - \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0\| \leq C \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{W}^{2,r}}. \quad (4.18)$$

En reportant (4.17) et (4.18) dans (4.16) on obtient

$$|\tilde{\Delta}_h \mathbf{u}_h^0| \leq C \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{W}^{2,r}}. \quad (4.19)$$

On déduit de (4.13) et (4.19)

$$|\delta \mathbf{u}_h^0|^2 = |\mathbf{u}_h^0 - \mathbf{u}_h^{-1}|^2 \leq 2 |\tilde{\Delta}_h \mathbf{u}_h^0|^2 + 2 |\mathbf{f}_h^0|^2 \leq C \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{W}^{2,r}}^2 + C \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2)}^2 \leq C. \quad (4.20)$$

Reportons (4.15) et (4.20) dans (4.14). On obtient pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$

$$|\delta \mathbf{u}_h^m|^2 \leq C k^2. \quad (4.21)$$

Soit maintenant $n \in \{0, \dots, N-1\}$. D'après (2.6) on a

$$\nabla_h p_h^{n+1} = \nabla_h p_h^n + \frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}}{k};$$

or, d'après (2.2) :

$$\nabla_h p_h^n = -\frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k} + \tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{f}_h^{n+1}.$$

On en déduit

$$\nabla_h p_h^{n+1} = -\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k} + \tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{f}_h^{n+1}. \quad (4.22)$$

Le maillage étant uniforme, d'après la condition inf-sup (3.60) et la proposition 1.15, il existe $\mathbf{v}_h \in \mathbf{P}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $C > 0$ tels que

$$C \|\mathbf{v}_h\|_h |\tilde{\Pi}_{P_1^c} p_h^{n+1}| \leq -(p_h^{n+1}, \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h) = (\nabla_h p_h^{n+1}, \mathbf{v}_h). \quad (4.23)$$

D'après (4.22) on a

$$(\nabla_h p_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) \leq -\left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k}, \mathbf{v}_h\right) + (\tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + (\mathbf{f}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h);$$

en utilisant les propositions 1.1 et 3.9 on en déduit

$$\begin{aligned} (\nabla_h p_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) &\leq \frac{|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n|}{k} \|\mathbf{v}_h\| + \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h \|\mathbf{v}_h\|_h + |\mathbf{f}_h^{n+1}| \|\mathbf{v}_h\| \\ &\leq C \left(\frac{|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n|}{k} + \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h + |\mathbf{f}_h^{n+1}| \right) \|\mathbf{v}_h\|_h. \end{aligned} \quad (4.24)$$

En comparant (4.23) et (4.24) on obtient

$$C |\tilde{\Pi}_{P_1^c} p_h^{n+1}| \leq \frac{|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n|}{k} + \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h + |\mathbf{f}_h^{n+1}|.$$

Soit $m \in \{1, \dots, N\}$. En élevant au carré et en sommant de $n = 0$ à $m-1$ il vient

$$k \sum_{n=0}^{m-1} |\tilde{\Pi}_{P_1^c} p_h^{n+1}|^2 \leq C k \sum_{n=0}^{m-1} \frac{|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n|^2}{k^2} + C k \sum_{n=0}^{m-1} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h^2 + C k \sum_{n=0}^{m-1} |\mathbf{f}_h^{n+1}|^2. \quad (4.25)$$

D'après (4.21) on a

$$k \sum_{n=0}^{m-1} \frac{|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n|^2}{k^2} = k \sum_{n=0}^{m-1} \frac{|\delta \mathbf{u}_h^{n+1}|^2}{k^2} = k \sum_{n=1}^m \frac{|\delta \mathbf{u}_h^n|^2}{k^2} \leq C. \quad (4.26)$$

En utilisant l'hypothèse **(HD)** on a

$$k \sum_{n=0}^{m-1} |\mathbf{f}_h^{n+1}|^2 = k \sum_{n=0}^{m-1} |\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{f}(t_{n+1})|^2 \leq k \sum_{n=0}^{m-1} |\mathbf{f}(t_{n+1})|^2 \leq k \sum_{n=0}^{m-1} \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 \leq C. \quad (4.27)$$

Enfin d'après (4.4) on a

$$k \sum_{n=0}^{m-1} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h^2 = k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\mathbf{u}}_h^n\|_h^2 \leq C. \quad (4.28)$$

Reportons les estimations (4.26), (4.27) et (4.28) dans (4.25). On en déduit

$$k \sum_{n=0}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^n|^2 = k |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^0|^2 + k \sum_{n=1}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^n|^2 \leq C + k \sum_{n=0}^{m-1} |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^{n+1}|^2 \leq C. \quad (4.29)$$

En combinant (4.21) et (4.29) on obtient (4.5). ■

4.1.2 Stabilité du schéma VF-CN

Théorème 4.2 (Stabilité du schéma VF-CN).

*On considère le schéma VF-CN. On suppose que les données vérifient l'hypothèse **(HD)** et que les valeurs initiales du schéma vérifient l'hypothèse **(HIS)**. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$*

$$|\mathbf{u}_h^m|^2 + k \sum_{n=0}^{m-1} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n\|_h^2 + k^2 |\nabla_h p_h^m|^2 \leq C. \quad (4.30)$$

Supposons de plus que le maillage est uniforme. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$

$$\frac{1}{k} |\delta \mathbf{u}_h^m| + k \sum_{n=0}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^n|^2 \leq C. \quad (4.31)$$

DÉMONSTRATION. Soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Prenons le produit scalaire de (2.3) avec $k(\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n)$. On obtient

$$\begin{aligned} & k \left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k}, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n \right) - k \left(\tilde{\Delta}_h(\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n), \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n \right) + k (\nabla_h p_h^n, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n) \\ &= \frac{k}{2} (\mathbf{f}_h^n + \mathbf{f}_h^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Tout d'abord

$$k \left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k}, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n \right) = |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_h^n|^2;$$

soit, en utilisant (4.1)

$$k \left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k}, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n \right) = |\mathbf{u}_h^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_h^n|^2 + |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2. \quad (4.33)$$

D'après la proposition 3.9 on a

$$-k (\tilde{\Delta}_h(\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n), \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n) = k \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n\|_h^2. \quad (4.34)$$

Par ailleurs en utilisant la propriété d'orthogonalité de la projection discrète (proposition 2.1)

$$\begin{aligned} k (\nabla_h p_h^n, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n) &= k (\nabla_h p_h^n, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) + k (\nabla_h p_h^n, \mathbf{u}_h^n) \\ &= k (\nabla_h p_h^n, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) - k (\nabla_h p_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}) \\ &= k (\nabla_h p_h^n, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

En substituant l'équation de la projection (2.6) dans (4.35), on a

$$\begin{aligned} k (\nabla_h p_h^n, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n) &= \frac{k^2}{2} (\nabla_h p_h^n, \nabla_h(p_h^{n+1} - p_h^n)) \\ &= \frac{k^2}{4} (|\nabla_h p_h^{n+1}|^2 - |\nabla_h p_h^n|^2 - |\nabla_h(p_h^{n+1} - p_h^n)|^2). \end{aligned} \quad (4.36)$$

D'autre part, en multipliant (2.6) par $k \nabla_h(p_h^{n+1} - p_h^n)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{2} |\nabla_h(p_h^{n+1} - p_h^n)|^2 &= k (\nabla_h(p_h^{n+1} - p_h^n), \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}) \\ &\leq \frac{k^2}{4} |\nabla_h(p_h^{n+1} - p_h^n)|^2 + |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{k^2}{4} |\nabla_h(p_h^{n+1} - p_h^n)|^2 \leq |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2. \quad (4.37)$$

En utilisant l'hypothèse **(HD)** et la proposition 1.1 on a

$$\frac{k}{2} (\mathbf{f}_h^{n+1} + \mathbf{f}_h^n, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n) \leq k \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2)} |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n| \leq C k \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n\|_h;$$

soit d'après l'inégalité de Young

$$\frac{k}{2} (\mathbf{f}_h^{n+1} + \mathbf{f}_h^n, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n) \leq \frac{k}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n\|_h^2 + C k. \quad (4.38)$$

En combinant (4.33)–(4.38) il vient

$$|\mathbf{u}_h^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_h^n|^2 + \frac{k}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n\|_h^2 + \frac{k^2}{4} (|\nabla_h p_h^{n+1}|^2 - |\nabla_h p_h^n|^2) \leq C k.$$

Soit $m \in \{1, \dots, N\}$. En sommant de $n = 0$ à $m - 1$ et en utilisant l'hypothèse **(HIS)** on obtient (4.30).

Montrons (4.31). On suppose que le maillage est uniforme. Appliquons l'opérateur δ à (2.3) et (2.6). On obtient pour tout $n \in \{1, \dots, N - 1\}$

$$\frac{\delta \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \delta \mathbf{u}_h^n}{k} - \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_h(\delta \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \delta \mathbf{u}_h^n) + \nabla_h(\delta p_h^n) = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{f}_h^{n+1} + \delta \mathbf{f}_h^n) \quad (4.39)$$

et pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\delta \mathbf{u}_h^{n+1} = \delta \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \frac{1}{2} \nabla_h (\delta p_h^{n+1} - p_h^n).$$

Posons

$$p_h^{-1} = p_h^0, \quad \mathbf{u}_h^{-1} = \mathbf{u}_h^0 - k \tilde{\Delta}_h \mathbf{u}_h^0 - k \mathbf{f}_h^0.$$

On a

$$\frac{\delta \tilde{\mathbf{u}}_h^1 - \delta \mathbf{u}_h^0}{k} - \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_h (\delta \tilde{\mathbf{u}}_h^1) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{f}_h^1. \quad (4.40)$$

Multiplions (4.39) par $k(\delta \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \delta \mathbf{u}_h^n)$, (4.40) par $k \delta \tilde{\mathbf{u}}_h^1$, et sommons les égalités obtenues. En procédant comme pour la preuve de (4.30) on obtient pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$

$$|\delta \mathbf{u}_h^m|^2 + k^2 |\nabla_h (\delta p_h^m)| \leq C k^2. \quad (4.41)$$

Soit maintenant $n \in \{0, \dots, N-1\}$. En reportant (2.6) dans l'équation des moments (2.3) il vient

$$\frac{1}{2} \nabla_h (p_h^{n+1} + p_h^n) = -\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k} + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_h (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n) + \frac{1}{2} (\mathbf{f}_h^{n+1} + \mathbf{f}_h^n). \quad (4.42)$$

Le maillage étant uniforme, d'après la condition inf-sup (3.60), il existe $\mathbf{v}_h \in \mathbf{P}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $C > 0$ tels que

$$C \|\mathbf{v}_h\|_h \left| \tilde{\Pi}_{P_1^{nc}}(p_h^{n+1} + p_h^n) \right| \leq -\frac{1}{2} ((p_h^{n+1} + p_h^n), \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h) = \frac{1}{2} (\nabla_h (p_h^{n+1} + p_h^n), \mathbf{v}_h). \quad (4.43)$$

D'après (4.42) on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\nabla_h (p_h^{n+1} + p_h^n), \mathbf{v}_h) &= \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k}, \mathbf{v}_h \right) + \frac{1}{2} (\tilde{\Delta}_h (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n), \mathbf{v}_h) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{f}_h^{n+1} + \mathbf{f}_h^n, \mathbf{v}_h); \end{aligned}$$

en utilisant les propositions 1.1 et 3.9 on en déduit

$$\frac{1}{2} (\nabla_h (p_h^{n+1} + p_h^n), \mathbf{v}_h) \leq C \left(\left| \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k} \right| + \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n\|_h + \frac{1}{2} (|\mathbf{f}_h^{n+1}| + |\mathbf{f}_h^n|) \right) \|\mathbf{v}_h\|_h.$$

En comparant avec (4.43) il vient

$$\left| \tilde{\Pi}_{P_1^{nc}}(p_h^{n+1} + p_h^n) \right| \leq C \left(\left| \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k} \right| + \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n\|_h + \frac{1}{2} (|\mathbf{f}_h^{n+1}| + |\mathbf{f}_h^n|) \right).$$

Soit $m \in \{1, \dots, N\}$. En sommant de $n = 0$ à $m-1$ on obtient

$$\begin{aligned} k \sum_{n=0}^{m-1} \left| \tilde{\Pi}_{P_1^{nc}}(p_h^{n+1} + p_h^n) \right|^2 &\leq C k \sum_{n=0}^{m-1} \frac{|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n|^2}{k^2} + C k \sum_{n=0}^{m-1} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n\|_h^2 \\ &\quad + C k \sum_{n=0}^m |\mathbf{f}_h^n|^2. \end{aligned} \quad (4.44)$$

D'après (4.41) on a

$$k \sum_{n=0}^{m-1} \frac{|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n|^2}{k^2} = k \sum_{n=0}^{m-1} \frac{|\delta \mathbf{u}_h^{n+1}|^2}{k^2} \leq k \sum_{n=1}^m \frac{|\delta \mathbf{u}_h^n|^2}{k^2} \leq k \sum_{n=1}^m C \leq C. \quad (4.45)$$

D'autre part on a

$$k \sum_{n=0}^m |\mathbf{f}_h^n|^2 = k \sum_{n=0}^m |\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{f}(t_n)|^2 \leq k \sum_{n=0}^m |\mathbf{f}(t_n)|^2 \leq k \sum_{n=0}^m \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2)}^2 \leq C, \quad (4.46)$$

et d'après l'estimation (4.30)

$$k \sum_{n=0}^{m-1} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^n\|_h^2 \leq C. \quad (4.47)$$

En reportant (4.45), (4.46) et (4.47) dans (4.44) on obtient

$$k \sum_{n=0}^{m-1} \left| \tilde{\Pi}_{P_1^{nc}}(p_h^{n+1} + p_h^n) \right|^2 \leq C. \quad (4.48)$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, $p_h^n \in P_0^0 \subset L_0^2$. D'après la proposition 3.3 on a

$$\int_{\Omega} (\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^n)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} p_h^n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

On peut donc appliquer l'inégalité de Poincaré sur P_1^{nc} (proposition 1.3) :

$$k \sum_{n=0}^{m-1} |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}}(p_h^{n+1} - p_h^n)|^2 = k \sum_{n=0}^{m-1} |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}}(\delta p_h^{n+1})|^2 \leq C k \sum_{n=0}^{m-1} \left| \tilde{\nabla}_h(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}}(\delta p_h^{n+1})) \right|^2.$$

Le maillage étant uniforme, on déduit de la proposition 3.2

$$k \sum_{n=0}^{m-1} \left| \tilde{\nabla}_h(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}}(\delta p_h^{n+1})) \right|^2 = k \sum_{n=0}^{m-1} |\nabla_h(\delta p_h^{n+1})|^2;$$

donc, en utilisant (4.41)

$$k \sum_{n=0}^{m-1} |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}}(p_h^{n+1} - p_h^n)|^2 \leq k \sum_{n=0}^{m-1} |\nabla_h(\delta p_h^{n+1})|^2 \leq C. \quad (4.49)$$

En combinant (4.49) avec (4.48) on obtient

$$k \sum_{n=0}^{m-1} |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^{n+1}|^2 \leq 2k \sum_{n=0}^{m-1} |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}}(p_h^{n+1} - p_h^n)|^2 + 2k \sum_{n=0}^{m-1} |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}}(p_h^{n+1} + p_h^n)|^2 \leq C.$$

Ainsi

$$k \sum_{n=0}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^n|^2 = k |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^0|^2 + k \sum_{n=1}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^n|^2 \leq C + k \sum_{n=0}^{m-1} |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^{n+1}|^2 \leq C. \quad (4.50)$$

En combinant (4.41) et (4.50) on obtient (4.31). ■

4.1.3 Stabilité du schéma VF-BDF

Théorème 4.3 (Stabilité du schéma VF-BDF).

On considère le schéma **VF-BDF**. On suppose que les données vérifient l'hypothèse **(HD)** et que les valeurs initiales du schéma vérifient l'hypothèse **(HIS)**. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$

$$|\mathbf{u}_h^m|^2 + k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\mathbf{u}}_h^n\|_h^2 + k^2 |\nabla_h p_h^m|^2 \leq C. \quad (4.51)$$

Supposons de plus que le maillage est uniforme. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$

$$\frac{1}{k} |\delta \mathbf{u}_h^m| + k \sum_{n=0}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^n|^2 \leq C. \quad (4.52)$$

DÉMONSTRATION. Soit $n \in \{1, \dots, N-1\}$. Prenons le produit scalaire de (2.4) avec $4k \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}$. On obtient

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3 \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - 4 \mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{2k}, 4k \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \right) - 4k (\tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) + 4k (\nabla_h p_h^n, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) \\ &= 4k (\mathbf{f}_h^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Tout d'abord on a

$$\begin{aligned} 4k (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \frac{3 \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - 4 \mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{2k}) &= 2 (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, 3 \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - 4 \mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}) \\ &= 2 (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, 3 (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}) + 3 \mathbf{u}_h^{n+1} - 4 \mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}) \\ &= 6 (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}) + 2 (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, 3 \mathbf{u}_h^{n+1} - 4 \mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}) \\ &= A + B. \end{aligned} \quad (4.54)$$

En utilisant l'identité algébrique $2a(a-b) = a^2 + b^2 + (a-b)^2$ on a

$$A = 3 (|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_h^{n+1}|^2 + |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2);$$

or, d'après (4.1)

$$|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}|^2 = |\mathbf{u}_h^{n+1}|^2 + |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2.$$

On en déduit

$$A = 6 |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2. \quad (4.55)$$

Estimons maintenant B . En écrivant

$$\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} = \mathbf{u}_h^{n+1} + (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}),$$

on peut décomposer B ainsi

$$B = 2 (\mathbf{u}_h^{n+1}, 3 \mathbf{u}_h^{n+1} - 4 \mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}) + 2 (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}, 3 \mathbf{u}_h^{n+1} - 4 \mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}). \quad (4.56)$$

Le second terme apparaissant dans (4.56) est nul. En effet, d'après l'équation de projection (2.6), on a

$$\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1} = \frac{2k}{3} \nabla_h(p^{n+1} - p_h^n);$$

donc, en utilisant la proposition 2.1

$$(\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}, 3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}) = \frac{2k}{3} (\nabla_h(p^{n+1} - p_h^n), 3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}) = 0.$$

Ainsi B s'écrit

$$B = 2(\mathbf{u}_h^{n+1}, 3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}).$$

En utilisant l'identité algébrique $2(3a - 4b + c, a) = a^2 - b^2 + (2a - b)^2 - (2b - c)^2 + (a - 2b + c)^2$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} B &= |\mathbf{u}_h^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_h^n|^2 + |2\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n|^2 - |2\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}|^2 \\ &\quad + |\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}|^2. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Reportons l'expression de B (4.57) et celle de A (4.55) dans (4.54). Il vient

$$\begin{aligned} &4k(\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \frac{3\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{2k}) \\ &= |\mathbf{u}_h^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_h^n|^2 + 6|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2 + |2\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n|^2 - |2\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}|^2 \\ &\quad + |\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}|^2. \end{aligned} \quad (4.58)$$

D'après la proposition 3.9 on a

$$-4k(\tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) = 4k \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h^2. \quad (4.59)$$

Par ailleurs, en utilisant la proposition 2.1 et (2.6), on a

$$\begin{aligned} 4k(\nabla_h p_h^n, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) &= 4k(\nabla_h p_h^n, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}) \\ &= \frac{4k^2}{3} (|\nabla p_h^{n+1}|^2 - |\nabla p_h^n|^2 - |\nabla p_h^{n+1} - \nabla p_h^n|^2). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Or, en multipliant l'équation (2.6) par $4k\nabla_h(p_h^{n+1} - p_h^n)$, on a

$$\frac{8k^2}{3} |\nabla(p_h^{n+1} - p_h^n)|^2 = 4k(\mathbf{u}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \nabla(p_h^{n+1} - p_h^n)) \leq \frac{4k^2}{3} |\nabla(p_h^{n+1} - p_h^n)|^2 + 3|\mathbf{u}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}|^2;$$

ainsi

$$\frac{4k^2}{3} |\nabla(p_h^{n+1} - p_h^n)|^2 \leq 3|\mathbf{u}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}|^2. \quad (4.61)$$

Enfin, en utilisant la proposition 1.1 et l'inégalité de Young, on a

$$4k(\mathbf{f}_h^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) \leq 4k \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2)} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h \leq 3k \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h^2 + Ck \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2)}^2. \quad (4.62)$$

Combinons (4.58)–(4.62). On obtient

$$\begin{aligned} &|\mathbf{u}_h^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_h^n|^2 + |2\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n|^2 - |2\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}|^2 + |\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}|^2 \\ &\quad + 3|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2 + k \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h^2 + \frac{4k^2}{3} (|\nabla_h p_h^{n+1}|^2 - |\nabla_h p_h^n|^2) \leq Ck. \end{aligned}$$

Soit $m \in \{2, \dots, N\}$. En sommant de $n = 1$ à $m - 1$ il vient

$$\begin{aligned} & |\mathbf{u}_h^m|^2 + |2\mathbf{u}_h^m - \mathbf{u}_h^{m-1}|^2 + 3 \sum_{n=1}^{m-1} |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2 + k \sum_{n=1}^{m-1} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h^2 + \frac{4k^2}{3} |\nabla_h p_h^m|^2 \\ & \leq C + 4|\mathbf{u}_h^1|^2 + |2\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^0|^2 + k^2 |\nabla_h p_h^1|^2. \end{aligned}$$

Les valeurs \mathbf{u}_h^0 , \mathbf{u}_h^1 et p_h^1 sont celles données par le schéma **VF-I**. On déduit donc de (4.4)

$$4|\mathbf{u}_h^1|^2 + |2\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^0|^2 + k^2 |\nabla_h p_h^1|^2 \leq C.$$

On a ainsi montré (4.51) pour $m \in \{2, \dots, N\}$. Si $m = 1$, (4.51) découle de (4.4).

Montrons (4.52). on suppose désormais que le maillage est uniforme. Appliquons l'opérateur δ à (2.4) et (2.6). On obtient pour tout $n \in \{2, \dots, N - 1\}$

$$\frac{3\delta\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - 4\delta\mathbf{u}_h^n + \delta\mathbf{u}_h^{n-1}}{2k} - \tilde{\Delta}_h(\delta\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}) + \nabla_h(\delta p_h^n) = \delta\mathbf{f}_h^{n+1} \quad (4.63)$$

et pour tout $n \in \{0, \dots, N - 1\}$

$$\delta\mathbf{u}_h^{n+1} = \delta\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \frac{2k}{3} \nabla_h(\delta p_h^{n+1} - \delta p_h^n)$$

Soit $\tilde{\mathbf{u}}_h^1 \in \mathbf{P}_0$ la solution de

$$3\tilde{\mathbf{u}}_h^1 - 2k\tilde{\Delta}_h\tilde{\mathbf{u}}_h^1 = \mathbf{u}_h^1; \quad (4.64)$$

posons

$$\mathbf{u}_h^{-1} = 3\delta\tilde{\mathbf{u}}_h^2 - 4\delta\mathbf{u}_h^1 + \mathbf{u}_h^0 - 2k\tilde{\Delta}_h(\delta\tilde{\mathbf{u}}_h^2) + 2k\nabla_h(\delta p_h^1) - 2k\delta\mathbf{f}_h^2. \quad (4.65)$$

L'équation (4.63) a ainsi encore un sens pour $n = 1$. En procédant comme pour la preuve de (4.51) on obtient que pour tout $m \in \{2, \dots, N\}$

$$|\delta\mathbf{u}_h^m|^2 + k^2 |\nabla_h(\delta p_h^m)|^2 \leq Ck^2 + 4|\delta\mathbf{u}_h^1|^2 + |2\delta\mathbf{u}_h^1 - \delta\mathbf{u}_h^0|^2 + k^2 |\nabla_h(\delta p_h^1)|^2. \quad (4.66)$$

Par un calcul élémentaire on déduit de (4.64) et (4.65)

$$2\delta\mathbf{u}_h^1 - \delta\mathbf{u}_h^0 = -\delta\mathbf{u}_h^1 - 2k\delta\mathbf{f}_h^2 + 2k\mathbf{f}_h^2;$$

en utilisant (4.5) on en déduit

$$|2\delta\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^0|^2 \leq C|\delta\mathbf{u}_h^1|^2 + Ck^2(|\mathbf{f}_h^2|^2 + |\mathbf{f}_h^1|^2) \leq Ck^2.$$

En combinant cette estimation avec (4.14), on déduit de (4.66)

$$|\delta\mathbf{u}_h^m|^2 \leq Ck^2. \quad (4.67)$$

Soit maintenant $n \in \{1, \dots, N - 1\}$. En reportant (2.6) dans (2.4) on obtient

$$\nabla_h p_h^{n+1} = -\frac{3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{2k} + \tilde{\Delta}_h\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \mathbf{f}_h^{n+1}. \quad (4.68)$$

Le maillage étant uniforme, on peut appliquer la condition inf-sup (3.60). Il vient

$$C \|\mathbf{v}_h\|_h |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^{n+1}| \leq -(p_h^{n+1}, \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h) = (\nabla_h p_h^{n+1}, \mathbf{v}_h). \quad (4.69)$$

D'après (4.68) on a

$$(\nabla_h p_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) = -\left(\frac{3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{2k}, \mathbf{v}_h\right) + (\tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + (\mathbf{f}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h);$$

soit, en utilisant les propositions 1.1 et 3.9

$$(\nabla_h p_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) \leq C \left(\frac{|3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}|}{2k} + \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h + |\mathbf{f}_h^{n+1}| \right) \|\mathbf{v}_h\|_h.$$

En comparant avec (4.69) on obtient

$$|\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^{n+1}| \leq C \left(\frac{|3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}|}{2k} + \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h + |\mathbf{f}_h^{n+1}| \right).$$

Soit $m \in \{2, \dots, N\}$. En sommant de $n = 1$ à $m - 1$ il vient

$$\begin{aligned} k \sum_{n=1}^{m-1} |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^{n+1}|^2 &\leq C k \sum_{n=1}^{m-1} \frac{|3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}|^2}{4k^2} + C k \sum_{n=1}^{m-1} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h^2 \\ &\quad + k \sum_{n=1}^{m-1} |\mathbf{f}_h^{n+1}|^2. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Notons que

$$3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1} = 3(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n) - (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) = 3\delta\mathbf{u}_h^{n+1} - \delta\mathbf{u}_h^n;$$

d'après (4.67) on a donc

$$k \sum_{n=1}^{m-1} \frac{|3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}|^2}{4k^2} \leq C k \sum_{n=1}^{m-1} \frac{|\delta\mathbf{u}_h^n|^2}{k^2} \leq C. \quad (4.71)$$

D'autre part on a

$$k \sum_{n=1}^{m-1} |\mathbf{f}_h^{n+1}|^2 = k \sum_{n=1}^{m-1} |\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{f}(t_{n+1})|^2 \leq k \sum_{n=1}^{m-1} |\mathbf{f}(t_{n+1})|^2 \leq k \sum_{n=1}^{m-1} \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 \leq C, \quad (4.72)$$

et d'après (4.51)

$$k \sum_{n=1}^{m-1} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}\|_h^2 = k \sum_{n=2}^m \|\tilde{\mathbf{u}}_h^n\|_h^2 \leq C. \quad (4.73)$$

Reportons (4.71), (4.72) et (4.73) dans (4.70). Puisque les valeurs p_h^0 et p_h^1 sont données par le schéma **VF-I**, on déduit de (4.5)

$$k \sum_{n=0}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^n|^2 = k \sum_{n=0}^1 |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^n|^2 + k \sum_{n=1}^{m-1} |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^{n+1}|^2 \leq C.$$

En combinant cette estimation avec (4.67) on obtient (4.52). ■

4.2 Convergence des schémas

En utilisant les estimations des théorèmes 4.1, 4.2 et 4.3, on montre ici la convergence des schémas **VF-I**, **VF-CN** et **VF-BDF** (théorèmes 4.4, 4.5 et 4.6). Les preuves nécessitent un critère de compacité. On ne peut utiliser l'inclusion compacte $\mathbf{H}_0^1 \subset \mathbf{L}^2$, car l'espace discret \mathbf{P}_0 n'est pas un sous-espace de \mathbf{H}_0^1 . C'est pourquoi on fait appel à la transformée de Fourier (lemmes 4.2, 4.3, 4.4) et à une propriété de l'espace \mathbf{P}_0 (lemme 4 dans [9]).

Notons $\varepsilon = \max(h, k)$. On définit les applications

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\varepsilon : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbf{P}_0, & \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbf{P}_0, & \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbf{P}_0, \\ p_\varepsilon : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbf{P}_0, & \mathbf{f}_\varepsilon : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbf{P}_0, \end{aligned}$$

de la manière suivante. Pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$ et tout $t \in [t_n, t_{n+1}]$ on a

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\varepsilon(t) &= \mathbf{u}_h^n, & \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t) &= \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, & \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c(t) &= \tilde{\mathbf{u}}_h^n + \frac{1}{k}(t - t_n)(\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^n), \\ p_\varepsilon(t) &= p_h^n, & \mathbf{f}_\varepsilon(t) &= \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{f}(t_{n+1}), \end{aligned} \quad (4.74)$$

et pour tout $t \in]-\infty, 0[\cup]T, \infty[$ on a

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\varepsilon(t) &= \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t) = \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c(t) = \mathbf{f}_\varepsilon(t) = \mathbf{0}, \\ p_\varepsilon(t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Les fonctions $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c$ et $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ sont représentées sur la figure 4.1.

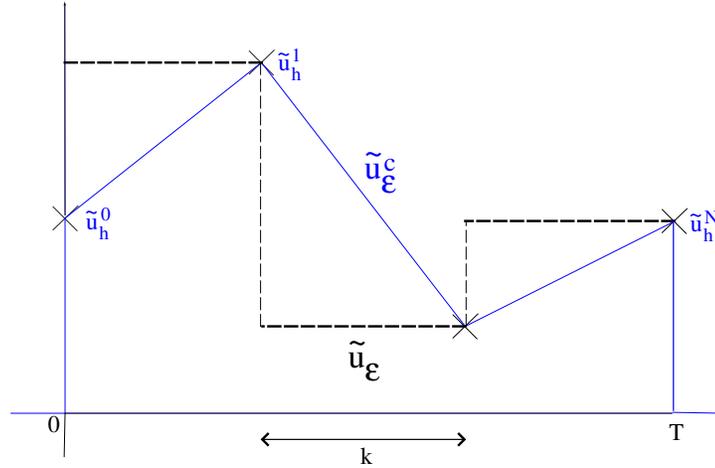


FIG. 4.1 – Représentation des fonctions $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c$ et $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ sur $[0, T]$.

On s'intéresse à la convergence des suites $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c)_{\varepsilon>0}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.2.1 Convergence du schéma VF-I

Rappelons que la transformée de Fourier $\hat{\mathbf{v}}$ d'une fonction $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ est définie par

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \hat{\mathbf{v}}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\tau t} \mathbf{v}(t) dt. \quad (4.76)$$

On a le résultat suivant.

Lemme 4.2 *On considère le schéma **VF-I**. On suppose que les données vérifient l'hypothèse **(HD)**, que les valeurs initiales du schéma vérifient **(HIS)** et que le maillage est uniforme. Alors, pour tout $0 < \gamma < \frac{1}{4}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma} |\widehat{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(\tau)|^2 d\tau \leq C. \quad (4.77)$$

DÉMONSTRATION. Notons χ_I la fonction caractéristique d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On définit l'application $\mathbf{g}_{\varepsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P}_0$ de la manière suivante. Pour tout $t \in]-\infty, 0[\cup]T, \infty[$ on pose $\mathbf{g}_{\varepsilon}(t) = 0$, et pour tout $t \in [0, T]$, $\mathbf{g}_{\varepsilon}(t) \in \mathbf{P}_0$ est solution de

$$\widetilde{\Delta}_h \mathbf{g}_{\varepsilon}(t) = \widetilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t) + \mathbf{f}_{\varepsilon}(t) - \nabla_h p_{\varepsilon}(t) - \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t-k) - \mathbf{u}_{\varepsilon}(t)}{k} \chi_{[t_1, T]}. \quad (4.78)$$

Des estimations du théorème 4.1 on déduit des estimations sur \mathbf{g}_{ε} comme suit. Multiplions (4.78) par $-\mathbf{g}_{\varepsilon}(t)$. Il vient

$$\begin{aligned} -(\widetilde{\Delta}_h \mathbf{g}_{\varepsilon}(t), \mathbf{g}_{\varepsilon}(t)) &= -(\widetilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t), \mathbf{g}_{\varepsilon}(t)) - (\mathbf{f}_{\varepsilon}(t), \mathbf{g}_{\varepsilon}(t)) \\ &\quad + \left(\nabla_h p_{\varepsilon}(t) + \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t-k) - \mathbf{u}_{\varepsilon}(t)}{k} \chi_{[t_1, T]}, \mathbf{g}_{\varepsilon}(t) \right). \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.9 on a

$$-(\widetilde{\Delta}_h \mathbf{g}_{\varepsilon}(t), \mathbf{g}_{\varepsilon}(t)) = \|\mathbf{g}_{\varepsilon}(t)\|_h^2 \quad (4.79)$$

et

$$-(\widetilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t), \mathbf{g}_{\varepsilon}(t)) \leq \|\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t)\|_h \|\mathbf{g}_{\varepsilon}(t)\|_h. \quad (4.80)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la proposition 1.1 on a

$$-(\mathbf{f}_{\varepsilon}(t), \mathbf{g}_{\varepsilon}(t)) \leq |\mathbf{f}_{\varepsilon}(t)| |\mathbf{g}_{\varepsilon}(t)| \leq C |\mathbf{f}_{\varepsilon}(t)| \|\mathbf{g}_{\varepsilon}(t)\|_h. \quad (4.81)$$

D'après (2.6) on a

$$\nabla_h p_{\varepsilon}(t) + \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t-k) - \mathbf{u}_{\varepsilon}(t)}{k} \chi_{[t_1, T]} = \nabla_h p_{\varepsilon}(t) + \nabla_h (p_{\varepsilon}(t) - p_{\varepsilon}(t-k)) \chi_{[t_1, T]}.$$

Le maillage étant uniforme, on déduit de la proposition 3.7

$$\begin{aligned} &\left(\nabla_h p_{\varepsilon}(t) + \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t-k) - \mathbf{u}_{\varepsilon}(t)}{k} \chi_{[t_1, T]}, \mathbf{g}_{\varepsilon}(t) \right) \\ &= - \left(\widetilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_{\varepsilon}(t) + (\widetilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_{\varepsilon}(t) - \widetilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_{\varepsilon}(t-k)) \chi_{[t_1, T]}, \widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{g}_{\varepsilon}(t) \right). \end{aligned}$$

Soit, en utilisant la proposition 3.6

$$\begin{aligned} &\left(\nabla_h p_{\varepsilon}(t) + \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t-k) - \mathbf{u}_{\varepsilon}(t)}{k} \chi_{[t_1, T]}, \mathbf{g}_{\varepsilon}(t) \right) \\ &\leq \left| \widetilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_{\varepsilon}(t) + (\widetilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_{\varepsilon}(t) - \widetilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_{\varepsilon}(t-k)) \chi_{[t_1, T]} \right| \left| \widetilde{\operatorname{div}}_h \mathbf{g}_{\varepsilon}(t) \right| \\ &\leq C \left(|\widetilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_{\varepsilon}(t)| + |\widetilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_{\varepsilon}(t)| \chi_{[t_1, T]} + |\widetilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_{\varepsilon}(t-k)| \chi_{[t_1, T]} \right) \|\mathbf{g}_{\varepsilon}(t)\|_h. \quad (4.82) \end{aligned}$$

Combinons (4.79), (4.80), (4.81) et (4.82). En simplifiant par $\|\mathbf{g}_\varepsilon(t)\|_h$ et en intégrant de $t = 0$ à T il vient

$$\int_0^T \|\mathbf{g}_\varepsilon(t)\|_h dt \leq C \int_0^T |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_\varepsilon(t)| dt + \int_0^T |\mathbf{f}_\varepsilon(t)| dt + \int_0^T \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)\|_h dt. \quad (4.83)$$

D'une part de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de (4.5) on déduit

$$\begin{aligned} \int_0^T |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_\varepsilon(t)| dt &\leq \left(\int_0^T 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_\varepsilon(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{T} \left(k \sum_{n=0}^N |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^n|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C. \end{aligned} \quad (4.84)$$

D'autre part, l'opérateur $\Pi_{\mathbf{P}_0}$ étant stable en norme \mathbf{L}^2 , on a

$$\int_0^T |\mathbf{f}_\varepsilon(t)| dt = k \sum_{n=1}^N |\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{f}(t_n)| \leq k \sum_{n=1}^N |\mathbf{f}(t_n)| \leq k \sum_{n=1}^N \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C. \quad (4.85)$$

Enfin d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (4.4) on a

$$\int_0^T \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)\|_h dt \leq \sqrt{T} \int_0^T \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)\|_h^2 dt \leq C k \sum_{n=1}^N \|\tilde{\mathbf{u}}_h^n\|_h^2 \leq C. \quad (4.86)$$

En reportant les estimations (4.84), (4.85) et (4.86) dans (4.83) on obtient

$$\int_0^T \|\mathbf{g}_\varepsilon(t)\|_h dt \leq C.$$

En utilisant la définition (4.76) on en déduit

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \|\widehat{\mathbf{g}}_\varepsilon(\tau)\|_h \leq C. \quad (4.87)$$

De (4.87) on déduit maintenant l'estimation (4.4).

Puisque la fonction $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c$ est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} , et discontinue aux points $t = 0$ et $t = T$, l'équation (2.2) s'écrit

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c = \tilde{\Delta}_h \mathbf{g}_\varepsilon + \tilde{\mathbf{u}}_h^0 \delta_0 - \tilde{\mathbf{u}}_h^N \delta_T, \quad (4.88)$$

où δ_0 et δ_T sont des distributions de Dirac localisées en 0 et T respectivement. Soit $\tau \in \mathbb{R}$. En prenant la transformée de Fourier de (4.88) on obtient

$$-2i\pi\tau \widehat{\tilde{\mathbf{u}}}_\varepsilon(\tau) = \tilde{\Delta}_h \widehat{\mathbf{g}}_\varepsilon(\tau) + \tilde{\mathbf{u}}_h^0 - \tilde{\mathbf{u}}_h^N e^{-2i\pi\tau T}. \quad (4.89)$$

Prenons le produit scalaire de (4.89) avec $i\widehat{\tilde{\mathbf{u}}}_\varepsilon(\tau)$. En utilisant les propositions 1.1 et 3.9 il vient

$$\begin{aligned} 2\pi|\tau| |\widehat{\tilde{\mathbf{u}}}_\varepsilon(\tau)|^2 &\leq C \|\widehat{\mathbf{g}}_\varepsilon(\tau)\|_h \|\widehat{\tilde{\mathbf{u}}}_\varepsilon(\tau)\|_h + (|\tilde{\mathbf{u}}_h^0| + |\tilde{\mathbf{u}}_h^N|) |\widehat{\tilde{\mathbf{u}}}_\varepsilon(\tau)| \\ &\leq C (\|\widehat{\mathbf{g}}_\varepsilon(\tau)\|_h + |\tilde{\mathbf{u}}_h^0| + |\tilde{\mathbf{u}}_h^N|) \|\widehat{\tilde{\mathbf{u}}}_\varepsilon(\tau)\|_h. \end{aligned} \quad (4.90)$$

D'après (2.6) et (4.4) on a

$$|\tilde{\mathbf{u}}_h^0| \leq C \quad \text{et} \quad |\tilde{\mathbf{u}}_h^N| \leq |\mathbf{u}_h^N| + k |\nabla_h p_h^N| + k |\nabla_h p_h^{N-1}| \leq C. \quad (4.91)$$

D'après la définition (4.4), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (4.76) on a

$$\|\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau)\|_h \leq \int_0^T \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)\|_h dt \leq \sqrt{T} \int_0^T \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)\|_h^2 dt \leq k \sqrt{T} \sum_{n=1}^N \|\tilde{\mathbf{u}}_h^n\|_h^2 \leq C. \quad (4.92)$$

Reportons les estimations (4.87), (4.91) et (4.92) dans (4.90). On obtient qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad |\tau| |\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau)|^2 \leq C. \quad (4.93)$$

Par ailleurs on vérifie que si $0 < \gamma < \frac{1}{4}$ on a pour tout $\tau \in \mathbb{R}$

$$|\tau|^{2\gamma} \leq \frac{2(1+|\tau|)}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}. \quad (4.94)$$

En multipliant (4.94) par $|\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau)|^2$ et en intégrant sur \mathbb{R} il vient

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma} |\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau)|^2 d\tau \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{2|\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau)|^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} d\tau + \int_{\mathbb{R}} \frac{2|\tau| |\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau)|^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} d\tau = I_1 + I_2. \quad (4.95)$$

D'une part on a

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{2|\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau)|^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} d\tau \leq \left(\sup_{s \in [0, T]} \frac{2}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \right) \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau)|^2 d\tau \leq C \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau)|^2 d\tau.$$

En utilisant l'égalité de Parseval pour la transformée de Fourier, la proposition 1.1, puis (4.4), on en déduit

$$I_1 \leq C \int_{\mathbb{R}} |\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau)|^2 d\tau \leq C k \sum_{n=1}^N |\tilde{\mathbf{u}}_h^n|^2 \leq C k \sum_{n=1}^N \|\tilde{\mathbf{u}}_h^n\|_h^2 \leq C. \quad (4.96)$$

D'après (4.93) on a

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{2|\tau| |\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau)|^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} d\tau \leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{(1+|\tau|^{1-2\gamma})^2} \leq C. \quad (4.97)$$

En reportant les majorations (4.96) et (4.97) dans (4.95) on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma} |\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon|^2 dt \leq C.$$

On a ainsi montré (4.77). ■

Du lemme précédent on déduit maintenant la convergence du schéma.

Théorème 4.4 (Convergence du schéma VF-I).

On considère le schéma **VF-I**. On suppose que les données vérifient l'hypothèse **(HD)**, que les valeurs initiales du schéma vérifient **(HIS)** et que le maillage est uniforme. Alors il existe

$$\mathbf{u} \in \mathcal{C}(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}) \quad (4.98)$$

vérifiant

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2) \quad (4.99)$$

telle que lorsque $\varepsilon = \max(h, k) \rightarrow 0$

$$\mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathbf{L}^2). \quad (4.100)$$

Pour tout $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, T])$, \mathbf{u} vérifie

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \int_0^T \psi(t) \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v})) - (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})) \right) dt = 0. \quad (4.101)$$

Enfin

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \quad (4.102)$$

DÉMONSTRATION. Dans ce qui suit, toute suite extraite d'une suite $(\mathbf{v}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sera encore notée $(\mathbf{v}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, et toutes les limites qui apparaissent correspondent à $\varepsilon \rightarrow 0$. De (4.4) on déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2)}^2 = k \sum_{n=0}^N |\mathbf{u}_h^n|^2 \leq C.$$

Par ailleurs on déduit de (4.4) et de la proposition 1.1

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)|^2 dt = k \sum_{n=1}^N |\tilde{\mathbf{u}}_h^n|^2 \leq C k \sum_{n=1}^N \|\tilde{\mathbf{u}}_h^n\|_h^2 \leq C.$$

Un calcul élémentaire montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2)} \leq C \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2)} \leq C.$$

Ainsi les suites $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c)_{\varepsilon>0}$ sont bornées dans $L^2(0, T; \mathbf{L}^2)$. On en déduit qu'il existe $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2)$, $\tilde{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2)$ et $\tilde{\mathbf{u}}^c \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2)$ telles que, à une extraction de sous-suite près, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\varepsilon &\rightharpoonup \mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon &\rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; \mathbf{L}^2), \\ \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c &\rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}}^c. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Montrons que les limites \mathbf{u} , $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{u}}^c$ dans (4.103) coïncident.

D'après (4.103) on a

$$(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \rightarrow |\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}|^2. \quad (4.104)$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$|(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)| \leq |\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}| |\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon|. \quad (4.105)$$

Cherchons la limite de $|\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon|$. On a

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon|^2 &= k \sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{u}_h^n - \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}|^2 \\ &= k \sum_{n=0}^{N-1} |(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n+1}) + (\mathbf{u}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1})|^2 \\ &\leq 2k \sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2 + 2k \sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{u}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}|^2. \end{aligned} \quad (4.106)$$

D'après (4.5) on a

$$k \sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2 = k \sum_{n=0}^{N-1} |\delta \mathbf{u}_h^{n+1}|^2 \leq C k^2. \quad (4.107)$$

De plus en utilisant (2.6) et (4.5) on a

$$k \sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{u}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}|^2 = k \sum_{n=0}^{N-1} |k \nabla_h (p_h^{n+1} - p_h^n)|^2 = k^3 \sum_{n=0}^N |\nabla_h (\delta p_h^{n+1})|^2 \leq C k^2. \quad (4.108)$$

En reportant (4.107) et (4.108) dans (4.106) on obtient

$$|\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon| \rightarrow 0. \quad (4.109)$$

En combinant (4.104), (4.105) et (4.109) il vient

$$(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \rightarrow 0 = |\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}|^2.$$

On en déduit

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}. \quad (4.110)$$

Montrons également que $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^c$. D'après la définition (4.74)–(4.75) de $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ et $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c$, on a

$$|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c|^2 \leq C k \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^n|^2. \quad (4.111)$$

On utilise la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^n &= (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^{n+1}) - (\tilde{\mathbf{u}}_h^n + \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^n) \\ &= (\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}) + (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n) - (\tilde{\mathbf{u}}_h^n - \mathbf{u}_h^n). \end{aligned} \quad (4.112)$$

On déduit de (4.107), (4.108), (4.112)

$$k \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^n|^2 \leq 4k \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1}|^2 + 2k \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^n|^2 \leq Ck. \quad (4.113)$$

En reportant (4.113) dans (4.111) on obtient

$$|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c| \rightarrow 0. \quad (4.114)$$

On en déduit que les limites des suites $(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c)_{\varepsilon>0}$ sont égales :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^c. \quad (4.115)$$

Combinons finalement (4.110) et (4.115). On obtient que les limites des suites $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c)_{\varepsilon>0}$ dans (4.103) sont égales :

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^c \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2).$$

Montrons maintenant que les convergences faibles (4.103) des suites $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, $(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c)_{\varepsilon>0}$ vers \mathbf{u} sont des convergences fortes. Considérons d'abord la suite $(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Posons

$$\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathbf{u}.$$

En utilisant la transformée de Fourier, on va vérifier que $\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $L^2(0, T; \mathbf{L}^2)$. Soit $M > 0$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon}(\tau)|^2 d\tau = \int_{|\tau| \leq M} |\widehat{\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon}(\tau)|^2 d\tau + \int_{|\tau| \geq M} |\widehat{\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon}(\tau)|^2 d\tau = I_\varepsilon^M + J_\varepsilon^M. \quad (4.116)$$

Estimons J_ε^M . Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ on a

$$|\widehat{\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon}(\tau)|^2 = |\widehat{\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon}(\tau) - \widehat{\mathbf{u}}(\tau)|^2 \leq 2|\widehat{\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon}(\tau)|^2 + 2|\widehat{\mathbf{u}}(\tau)|^2.$$

Intégrons sur $\{\tau \in \mathbb{R}; |\tau| \geq M\}$. On obtient

$$J_\varepsilon^M \leq 2 \int_{|\tau| \geq M} |\widehat{\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon}(\tau)|^2 d\tau + 2 \int_{|\tau| \geq M} |\widehat{\mathbf{u}}(\tau)|^2 d\tau. \quad (4.117)$$

On a

$$\int_{|\tau| \geq M} |\widehat{\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon}(\tau)|^2 d\tau \leq \frac{1}{M^{2\gamma}} \int_{|\tau| \geq M} |\tau|^{2\gamma} |\widehat{\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon}(\tau)|^2 d\tau;$$

en utilisant (4.77) on en déduit

$$\int_{|\tau| \geq M} |\widehat{\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon}(\tau)|^2 d\tau \leq \frac{C}{M^{2\gamma}}. \quad (4.118)$$

En remplaçant (4.118) dans (4.117) il vient

$$J_\varepsilon^M \leq \frac{2C}{M^{2\gamma}} + 2 \int_{|\tau| \geq M} |\widehat{\mathbf{u}}(\tau)|^2 d\tau. \quad (4.119)$$

Intéressons-nous maintenant à I_ε^M . Soient $\tau \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathbf{L}^2$. On déduit de la définition (4.76)

$$(\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau), \phi) = \int_0^T (\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t), e^{-2i\pi\tau t} \phi) dt.$$

L'application $t \rightarrow e^{-2i\pi\tau t} \phi$ est un élément de $L^2(0, T; \mathbf{L}^2)$. Or, d'après (4.103), on a $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}$ faiblement dans $L^2(0, T; \mathbf{L}^2)$. On en déduit

$$(\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau), \phi) = \int_0^T (\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t), e^{-2i\pi\tau t} \phi) dt \rightarrow \int_0^T (\tilde{\mathbf{u}}(t), e^{-2i\pi\tau t} \phi) dt = (\widehat{\mathbf{u}}(\tau), \phi).$$

Ainsi

$$\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau) \rightharpoonup \widehat{\mathbf{u}}(\tau) \quad \text{faiblement dans } \mathbf{L}^2. \quad (4.120)$$

Montrons que cette convergence est forte. Soit $\mathbf{w}_{\varepsilon, \tau} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\mathbf{w}_{\varepsilon, \tau}|_\Omega = \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau), \quad \mathbf{w}_{\varepsilon, \tau}|_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega} = \mathbf{0}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t) \in \mathbf{P}_0$. De la définition (4.76) on déduit que $\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau) \in \mathbf{P}_0$. D'après le lemme 4 dans [9], il existe donc une constante $C > 0$ telle que pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2$

$$\|\mathbf{w}_{\varepsilon, \tau}(\cdot + \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{w}_{\varepsilon, \tau}\|_h^2 \leq \|\mathbf{w}_{\varepsilon, \tau}\|_h^2 (|\boldsymbol{\eta}| + Ch). \quad (4.121)$$

En utilisant la définition (4.76), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (4.4) on a

$$\|\mathbf{w}_{\varepsilon, \tau}\|_h^2 = \|\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau)\|_h^2 \leq C \int_0^T \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)\|_h^2 dt \leq C k \sum_{n=1}^N \|\tilde{\mathbf{u}}_h^n\|_h^2 \leq C. \quad (4.122)$$

En utilisant le théorème 1 de [9], on déduit de (4.120), (4.121) et (4.122)

$$\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau) \rightarrow \widehat{\mathbf{u}}(\tau) \quad \text{dans } \mathbf{L}^2.$$

D'où

$$\widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon(\tau) = \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau) - \widehat{\mathbf{u}}(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}^2.$$

Il s'ensuit que pour tout $M > 0$ on a

$$I_\varepsilon^M = \int_{|\tau| \leq M} |\widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon(\tau)|^2 d\tau \rightarrow 0.$$

Soit $\eta > 0$. D'après la limite précédente, il existe $\varepsilon(\eta) > 0$ tel que pour tout $M > 0$ et tout $\varepsilon > \varepsilon(\eta)$

$$|I_\varepsilon^M| < \frac{\eta}{2}.$$

D'après (4.119) il existe $M(\eta)$ tel que pour tout $M > M(\eta)$ et tout $\varepsilon > 0$

$$|J_\varepsilon^M| < \frac{\eta}{2}.$$

Reportons ces majorations dans (4.116). On obtient que pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon(\eta) > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > \varepsilon(\eta)$

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathbf{v}}_{\varepsilon}(\tau)| d\tau < \eta.$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathbf{v}}_{\varepsilon}(\tau)|^2 d\tau \rightarrow 0. \quad (4.123)$$

Or, d'après l'égalité de Parseval, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathbf{v}}_{\varepsilon}(\tau)|^2 d\tau = \int_{\mathbb{R}} |\tilde{\mathbf{v}}_{\varepsilon}(\tau)|^2 d\tau.$$

On déduit donc de (4.123)

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon} - \mathbf{u} \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathbf{L}^2).$$

D'autre part, d'après (4.109) et (4.114), on a

$$|\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon} - \mathbf{u}_{\varepsilon}| \rightarrow 0 \quad |\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon} - \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}^c| \rightarrow 0.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\varepsilon} &\rightarrow \mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon} &\rightarrow \mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}^c &\rightarrow \mathbf{u} \end{aligned} \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathbf{L}^2), \quad (4.124)$$

avec $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2)$.

Vérifions maintenant que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$. Soit $\bar{\mathbf{u}}_{\varepsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ l'application définie ainsi. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$\bar{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t)|_{\Omega} = \tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t), \quad \bar{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t)|_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega} = \mathbf{0}.$$

La suite $(\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ converge dans $L^2(0, T; \mathbf{L}^2)$ vers \mathbf{u} . On en déduit que $(\bar{\mathbf{u}}_{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ converge dans $L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2))$ vers l'application $\bar{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2))$ définie ainsi. Pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\bar{\mathbf{u}}(t)|_{\Omega} = \mathbf{u}(t), \quad \bar{\mathbf{u}}(t)|_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega} = \mathbf{0}. \quad (4.125)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t) \in \mathbf{P}_0$. D'après le lemme 4 dans [9], il existe donc une constante $C > 0$ telle que pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$|\bar{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t)(\cdot + \boldsymbol{\eta}) - \bar{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t)|^2 \leq \|\bar{\mathbf{u}}_{\varepsilon}(t)\|_h^2 |\boldsymbol{\eta}| (|\boldsymbol{\eta}| + C h).$$

Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(0, T; (\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}))^2)$. En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz et (4.4) on obtient pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{1}{|\boldsymbol{\eta}|} (\bar{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)(\cdot + \boldsymbol{\eta}) - \bar{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)), \phi(t) \right) dt \\ & \leq \left(\int_0^T \frac{|\bar{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)(\cdot + \boldsymbol{\eta}) - \bar{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)|^2}{|\boldsymbol{\eta}|^2} dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T |\phi(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ & \leq \sqrt{1 + C \frac{h}{|\boldsymbol{\eta}|}} \left(\int_0^T \|\bar{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)\|_h^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T |\phi(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ & \leq \sqrt{1 + C \frac{h}{|\boldsymbol{\eta}|}} \left(k \sum_{n=1}^N \|\tilde{\mathbf{u}}_h^n\|_h^2 dt \right)^{1/2} \|\phi\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2))} \\ & \leq C \sqrt{1 + C \frac{h}{|\boldsymbol{\eta}|}} \|\phi\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2))}. \end{aligned}$$

Faisons tendre $\varepsilon = \max(h, k)$ vers 0. En utilisant la convergence faible (4.103), on obtient que pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$\int_0^T \left(\frac{1}{|\boldsymbol{\eta}|} (\bar{\mathbf{u}}(t)(\cdot + \boldsymbol{\eta}) - \bar{\mathbf{u}}(t)), \phi(t) \right) dt \leq C \|\phi\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2))}.$$

Soit encore, par un changement de variable :

$$\int_0^T \left(\frac{1}{|\boldsymbol{\eta}|} (\phi(\cdot - \boldsymbol{\eta}, t) - \phi(t)), \bar{\mathbf{u}} \right) dt \leq C \|\phi\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2))}. \quad (4.126)$$

Si $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^2 , prenons $\boldsymbol{\eta} = \eta \mathbf{e}_i$ ($i \in \{1, 2\}$) dans (4.126), avec $\eta > 0$, et passons à la limite lorsque $\eta \rightarrow 0$. On obtient que pour $i \in \{1, 2\}$ et pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(0, T; (\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}))^2)$

$$\int_0^T \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \bar{\mathbf{u}}(t) \right) dt \leq C \|\phi\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2))}. \quad (4.127)$$

Ceci montre que pour $i \in \{1, 2\}$ la dérivée de $\bar{\mathbf{u}}$ par rapport à x_i au sens des distributions vérifie

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_i} \in (L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)))' = L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)).$$

On a ainsi montré que $\bar{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^2))$. En utilisant (4.125) on en déduit

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1).$$

Pour montrer que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ il reste à vérifier que

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{presque partout.}$$

Puisque $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{H}_0^1)$, on sait que $\operatorname{div} \mathbf{u} \in L^2(0, T; L^2)$. Soit $q \in L^2(0, T; \mathcal{C}_0^\infty)$. En intégrant par parties on a

$$-\int_0^T (q(t), \operatorname{div} \mathbf{u}(t)) dt = \int_0^T (\nabla q(t), \mathbf{u}(t)) dt.$$

En écrivant $\mathbf{u} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon) + \mathbf{u}_\varepsilon$ il vient

$$\begin{aligned} \int_0^T (\nabla q(t), \mathbf{u}(t)) dt &= \int_0^T (\nabla q(t), (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon)(t)) dt + \int_0^T (\nabla q(t), \mathbf{u}_\varepsilon(t)) dt \\ &= A_\varepsilon + B_\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.128)$$

En utilisant la convergence faible (4.103) on a

$$A_\varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.129)$$

Par ailleurs en écrivant $\nabla q = (\nabla q - \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0}q)) + \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0}q)$ il vient

$$\begin{aligned} B_\varepsilon &= \int_0^T \left((\nabla q - \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0}q))(t), \mathbf{u}_\varepsilon(t) \right) dt + \int_0^T (\nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0}q))(t), \mathbf{u}_\varepsilon(t) dt \\ &= B_\varepsilon^1 + B_\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (4.130)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la proposition 1.14 on a

$$\begin{aligned} |B_\varepsilon^1| &\leq \|\nabla q - \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0}q)\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2)} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2)} \\ &\leq Ch \|q\|_{L^2(0, T; H^2)} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2)} \\ &\leq Ch. \end{aligned} \quad (4.131)$$

D'après les propositions 1.15 et 2.1 on a pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$ et tout $t \in [t_n, t_{n+1}]$

$$\left(\nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0}q(t)), \mathbf{u}_\varepsilon(t) \right) = \left(\nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0}q(t)), \mathbf{u}_h^n \right) = -(\tilde{\Pi}_{P_0}q(t), \operatorname{div}_h \mathbf{u}_h^n) = 0,$$

de sorte que

$$\int_0^T \left(\nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0}q(t)), \mathbf{u}_\varepsilon(t) \right) dt = 0 = B_2. \quad (4.132)$$

Reportons les estimations (4.131) et (4.132) dans (4.130), puis (4.130) et (4.129) dans (4.128). En passant à la limite pour $\varepsilon = \max(h, k) \rightarrow 0$ on obtient

$$\forall q \in L^2(0, T; \mathcal{C}_0^\infty), \quad \int_0^T (q(t), \operatorname{div} \mathbf{u}(t)) dt = 0.$$

Puisque l'espace \mathcal{C}_0^∞ est dense dans L^2 on en déduit

$$\forall q \in L^2(0, T; L^2), \quad \int_0^T (q(t), \operatorname{div} \mathbf{u}(t)) dt = 0.$$

Ainsi

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{presque partout .}$$

Au total, on a vérifié que

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V}). \quad (4.133)$$

Montrons maintenant que \mathbf{u} vérifie (4.101). D'après (2.2) on a pour tout $t \in [0, T]$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c}{dt} = \tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \nabla_h p_\varepsilon + \mathbf{f}_\varepsilon. \quad (4.134)$$

Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0, T])$ vérifiant $\psi(T) = 0$, et $\mathbf{w} \in \mathbf{V} \cap (\mathcal{C}_0^\infty)^2$. En multipliant (4.134) par $\psi(t)\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w}$ et en intégrant sur $[0, T]$ il vient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \psi(t) \left(\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c}{dt}, \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w} \right) dt - \int_0^T \psi(t) (\tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w}) dt + \int_0^T \psi(t) (\nabla_h p_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w}) dt \\ &= \int_0^T \psi(t) (\mathbf{f}_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w}) dt. \end{aligned} \quad (4.135)$$

On va passer à la limite dans (4.135) pour $\varepsilon \rightarrow 0$. D'après les propositions 1.7 et 3.1 on a

$$|\mathbf{w} - \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w}| \leq |\mathbf{w} - \Pi_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w}| + |\Pi_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w} - \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w}| \leq Ch \|\mathbf{w}\|_2,$$

de sorte que lorsque $\varepsilon = \max(h, k) \rightarrow 0$

$$\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w} \quad \text{dans } \mathbf{L}^2. \quad (4.136)$$

En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \psi(t) \left(\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c}{dt}, \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w} \right) dt &= [\psi(t) (\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w})]_0^T - \int_0^T \psi'(t) (\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w}) dt \\ &= -\psi(0) (\tilde{\mathbf{u}}_h^0, \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w}) - \int_0^T \psi'(t) (\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w}) dt. \end{aligned} \quad (4.137)$$

L'opérateur $\Pi_{\mathbf{P}_0}$ étant auto-adjoint (proposition 1.6), on déduit de (4.136)

$$(\tilde{\mathbf{u}}_h^0, \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w}) = (\Pi_{\mathbf{P}_0}\mathbf{u}_0, \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w}) = (\mathbf{u}_0, \Pi_{\mathbf{P}_0}(\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w})) = (\mathbf{u}_0, \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w}) \rightarrow (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}).$$

D'après (4.124) on a $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c \rightarrow \mathbf{u}$ dans $L^2(0, T; \mathbf{L}^2)$. On déduit donc de (4.136)

$$\int_0^T \psi'(t) (\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w}) dt \rightarrow \int_0^T \psi'(t) (\mathbf{u}(t), \mathbf{w}) dt.$$

On obtient ainsi en passant à la limite dans (4.137)

$$\int_0^T \psi(t) \left(\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c}{dt}, \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}\mathbf{w} \right) dt \rightarrow -\psi(0) (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) - \int_0^T \psi'(t) (\mathbf{u}(t), \mathbf{w}) dt. \quad (4.138)$$

Par ailleurs, d'après la proposition 3.8, on a

$$\int_0^T \psi(t) (\tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) dt = \int_0^T \psi(t) (\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t), \tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w})) dt.$$

On a la décomposition suivante

$$\tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) = (\tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) - \Pi_{\mathbf{P}_0}(\Delta \mathbf{w})) + \Pi_{\mathbf{P}_0}(\Delta \mathbf{w}).$$

On en déduit

$$\int_0^T \psi(t) (\tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) dt = A_\varepsilon + B_\varepsilon, \quad (4.139)$$

avec

$$A_\varepsilon = \int_0^T \psi(t) (\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t), \Pi_{\mathbf{P}_0}(\Delta \mathbf{w})) dt = \int_0^T \psi(t) (\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t), \Delta \mathbf{w}) dt$$

et

$$B_\varepsilon = \int_0^T \psi(t) (\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t), \tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) - \Pi_{\mathbf{P}_0}(\Delta \mathbf{w})) dt.$$

D'après (4.124), on a $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{u}$ dans $L^2(0, T; \mathbf{L}^2)$. On en déduit

$$A_\varepsilon \rightarrow \int_0^T \psi(t) (\mathbf{u}(t), \Delta \mathbf{w}) dt.$$

Puisque $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ et $\mathbf{w} \in (\mathcal{C}^\infty)^2$ on a en intégrant par parties

$$\int_0^T \psi(t) (\mathbf{u}(t), \Delta \mathbf{w}) dt = - \int_0^T \psi(t) ((\mathbf{u}(t), \mathbf{w})) dt.$$

Rappelons que la notation $((\cdot, \cdot))$ est définie par (1.1). Ainsi

$$A_\varepsilon \rightarrow - \int_0^T ((\mathbf{u}(t), \mathbf{w})) dt. \quad (4.140)$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la proposition 1.14, on a

$$|B_\varepsilon| \leq C |\tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) - \Pi_{\mathbf{P}_0}(\Delta \mathbf{w})| \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2)} \leq C h \|\mathbf{w}\|_2 \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2)} \leq C h.$$

Ainsi lorsque $\varepsilon = \max(h, k) \rightarrow 0$ on a

$$B_\varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.141)$$

En reportant (4.140) et (4.141) dans (4.139), on obtient

$$\int_0^T (\tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) dt \rightarrow - \int_0^T \psi(t) ((\mathbf{u}(t), \mathbf{w})) dt. \quad (4.142)$$

Par ailleurs on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$(\nabla_h p_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) = (\nabla_h p_\varepsilon(t), \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) + (\nabla_h p_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w} - \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}). \quad (4.143)$$

Le maillage est uniforme. On déduit donc de la proposition 3.7

$$(\nabla_h p_\varepsilon(t), \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) = (\nabla_h p_\varepsilon(t), \mathbf{w}) = (\tilde{\nabla}_h(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_\varepsilon(t)), \mathbf{w}).$$

Puisque $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ on a $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$. En intégrant par parties on obtient donc

$$(\nabla_h p_\varepsilon(t), \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) = -(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_\varepsilon(t), \operatorname{div} \mathbf{w}) = 0. \quad (4.144)$$

D'autre part

$$(\nabla_h p_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w} - \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) = (\tilde{\nabla}_h(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_\varepsilon(t)), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w} - \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}).$$

En appliquant la proposition 3.1 on en déduit

$$(\nabla_h p_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w} - \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) \leq |\tilde{\nabla}_h(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_\varepsilon(t))| |\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w} - \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}| \leq C h^2 |\tilde{\nabla}_h(\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_\varepsilon(t))|.$$

Soit, en utilisant l'inégalité inverse sur P_1^{nc} (proposition 1.4)

$$(\nabla_h p_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w} - \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) \leq C h |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_\varepsilon(t)|. \quad (4.145)$$

Reportons (4.144) et (4.145) dans (4.143), multiplions par $\psi(t)$, et intégrons sur $t \in [0, T]$. On obtient

$$\int_0^T \psi(t) (\nabla_h p_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) dt \leq C h \|\psi\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^T |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_\varepsilon(t)| dt.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (4.5) on en déduit

$$\begin{aligned} \int_0^T \psi(t) (\nabla_h p_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) dt &\leq C h \left(\int_0^T |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_\varepsilon(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq C h \left(k \sum_{n=0}^N |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} p_h^n|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C h. \end{aligned}$$

Ainsi lorsque $\varepsilon = \max(h, k) \rightarrow 0$ on a

$$\int_0^T \psi(t) (\nabla_h p_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) dt \rightarrow 0. \quad (4.146)$$

Enfin, pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$(\mathbf{f}_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) = (\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{f}(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) = (\mathbf{f}(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w});$$

en utilisant (4.136) on en déduit

$$\int_0^T \psi(t) (\mathbf{f}_\varepsilon(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) dt = \int_0^T \psi(t) (\mathbf{f}(t), \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w}) dt \rightarrow \int_0^T \psi(t) (\mathbf{f}(t), \mathbf{w}) dt. \quad (4.147)$$

Reportons les limites obtenues (4.138), (4.142), (4.146) et (4.147) dans (4.135). On obtient que pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{V} \cap \mathcal{C}_0^\infty$

$$-\psi(0) (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) - \int_0^T \psi'(t) (\mathbf{u}(t), \mathbf{w}) dt + \int_0^T \psi(t) \left(((\mathbf{u}(t), \mathbf{w})) - (\mathbf{f}(t), \mathbf{w})) \right) dt = 0.$$

L'espace $\mathbf{V} \cap (\mathcal{C}_0^\infty)^2$ est dense dans \mathbf{V} . On en déduit que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ et tout $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0, T])$ vérifiant $\psi(T) = 0$, on a

$$-\psi(0) (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) - \int_0^T \psi'(t) (\mathbf{u}(t), \mathbf{w}) dt + \int_0^T \psi(t) \left(((\mathbf{u}(t), \mathbf{v})) - (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}) \right) dt = 0.$$

Si $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, T])$, on a $\phi(0) = 0$ et par définition de la dérivée au sens des distributions

$$\int_0^T \phi'(t) (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) dt = - \int_0^T \phi(t) \frac{d}{dt} (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) dt.$$

On a donc pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, T])$

$$\int_0^T \phi(t) \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v})) - (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}) \right) dt = 0.$$

On a ainsi montré (4.101).

Vérifions maintenant la régularité (4.99) sur $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$. En utilisant la proposition 1.1 et (4.5) on a

$$\left\| \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c}{dt} \right\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2)}^2 = k \sum_{n=1}^N \frac{|\delta\tilde{\mathbf{u}}_h^n|^2}{k^2} \leq C k \sum_{n=1}^N \frac{\|\delta\tilde{\mathbf{u}}_h^n\|_h^2}{k^2} \leq C.$$

Ainsi la suite $\left(\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c}{dt} \right)_{\varepsilon > 0}$ est bornée dans $L^2(0, T; \mathbf{L}^2)$. Il existe donc $\boldsymbol{\alpha} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2)$ telle que, à une extraction de sous-suite près, on a

$$\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c}{dt} \rightharpoonup \boldsymbol{\alpha} \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; \mathbf{L}^2). \quad (4.148)$$

On en déduit que pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, T])$ et tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

$$\int_0^T \phi(t) \left(\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c}{dt}, \mathbf{v} \right) dt \rightarrow \int_0^T \phi(t) (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v}) dt.$$

D'autre part, en utilisant une intégration par parties et la convergence (4.124), on a

$$\int_0^T \phi(t) \left(\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c}{dt}, \mathbf{v} \right) dt = - \int_0^T \phi'(t) (\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c, \mathbf{v}) dt \rightarrow - \int_0^T \phi'(t) (\mathbf{u}, \mathbf{v}) dt.$$

En comparant les limites on obtient

$$\int_0^T \phi(t) (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v}) dt = - \int_0^T \phi'(t) (\mathbf{u}, \mathbf{v}) dt.$$

Or, par définition de la dérivée au sens des distributions, on a

$$\int_0^T \phi(t) \frac{d}{dt} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) dt = - \int_0^T \phi'(t) (\mathbf{u}, \mathbf{v}) dt.$$

On obtient ainsi que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ et tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(0, T)$

$$\int_0^T \phi(t) \frac{d}{dt} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) dt = \int_0^T \phi(t) (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v}) dt. \quad (4.149)$$

Rappelons le résultat suivant ([12], p. 250).

Proposition 4.1 *Soit \mathbf{X} un espace de Banach. Notons \mathbf{X}' son dual, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité correspondant. Soient $\mathbf{U} \in L^1(0, T; \mathbf{X})$ et $\mathbf{G} \in L^1(0, T; \mathbf{X})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe $\mathbf{U}_0 \in \mathbf{X}$ tel que, pour presque tout $t \in [0, T]$,*

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0 + \int_0^t \mathbf{G}(s) ds. \quad (4.150)$$

(ii) *Pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, T])$ et tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{X}'$, on a*

$$\int_0^T \phi(t) \frac{d}{dt} \langle \mathbf{U}(t), \boldsymbol{\xi} \rangle dt = \int_0^T \phi(t) \langle \mathbf{G}(t), \boldsymbol{\xi} \rangle dt. \quad (4.151)$$

Posons

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}', \quad \mathbf{U} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{G} = \boldsymbol{\alpha}.$$

D'après (4.133) on a $\mathbf{U} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$; en particulier $\mathbf{U} \in L^1(0, T; \mathbf{X})$. De plus

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{\alpha} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2) \subset L^1(0, T; \mathbf{X}).$$

On peut donc appliquer la proposition 4.1. D'après (4.149), l'assertion (4.151) est vérifiée. L'assertion équivalente (4.150) implique que

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2). \quad (4.152)$$

On a ainsi montré (4.99).

On déduit également de (4.150)

$$\mathbf{u} \in \mathcal{C}(0, T; \mathbf{H}).$$

De plus $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ d'après (4.133). On a ainsi montré la régularité (4.98) sur \mathbf{u} .

Montrons enfin la condition initiale (4.102). En combinant (4.148) et (4.152), on obtient

$$\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c}{dt} \rightharpoonup \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; \mathbf{L}^2). \quad (4.153)$$

Soit $\mathbf{w} \in \mathbf{V} \cap (\mathcal{C}_0^\infty)^2$ et $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0, T])$ vérifiant $\psi(T) = 0$. En utilisant la convergence forte (4.136) on déduit de (4.153)

$$\int_0^T \psi(t) \left(\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c}{dt}, \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w} \right) dt \rightarrow \int_0^T \psi(t) \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{w} \right) dt.$$

D'après (4.149) et (4.152) on a

$$\int_0^T \psi(t) \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{w} \right) dt = \int_0^T \psi(t) \frac{d}{dt} (\mathbf{u}, \mathbf{w}) dt;$$

en utilisant une intégration par parties et la régularité (4.98) de \mathbf{u} on en déduit

$$\int_0^T \psi(t) \frac{d}{dt} (\mathbf{u}, \mathbf{w}) dt = -\psi(0) (\mathbf{u}(0), \mathbf{w}) - \int_0^T \psi'(t) (\mathbf{u}(t), \mathbf{w}) dt.$$

On obtient ainsi

$$\int_0^T \psi(t) \left(\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c}{dt}, \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{w} \right) dt \rightarrow -\psi(0) (\mathbf{u}(0), \mathbf{w}) - \int_0^T \psi'(t) (\mathbf{u}(t), \mathbf{w}) dt. \quad (4.154)$$

Comparons (4.138) et (4.154). On obtient que pour tout $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0, T])$ vérifiant $\psi(T) = 0$, on a

$$\psi(0) (\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{w}) = 0.$$

On en déduit

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

On a ainsi montré (4.102).

Enfin, d'après (4.103), il existe une suite extraite de $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge vers \mathbf{u} . Or on peut montrer ([12], p. 254) que l'application \mathbf{u} vérifiant (4.98), (4.99), (4.101) et (4.102) est unique. On en déduit la convergence de l'ensemble de la suite $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vers \mathbf{u} . On a ainsi montré (4.100). ■

4.2.2 Convergence du schéma VF-CN

Lemme 4.3 *On considère le schéma VF-CN. On suppose que les données vérifient l'hypothèse (HD), que les valeurs initiales du schéma vérifient (HIS), et que le maillage est uniforme. Alors, pour tout $0 < \gamma < \frac{1}{4}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma} |\widehat{\tilde{\mathbf{u}}}_\varepsilon(\tau)|^2 d\tau \leq C.$$

DÉMONSTRATION. Elle est analogue à celle faite pour le schéma VF – I (lemme 4.2). La fonction $\mathbf{g}_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P}_0$ est définie cette fois pour tout $t \in [0, T]$ par

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_h \mathbf{g}_\varepsilon(t) &= \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_h (\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t) + \mathbf{u}_\varepsilon(t)) - \nabla_h p_\varepsilon(t) \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{f}_\varepsilon(t) + \mathbf{f}_\varepsilon(t-k)) - \frac{\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t-k) - \mathbf{u}_\varepsilon(t)}{k} \chi_{[t_1, T]}. \end{aligned}$$

Les calculs sont ensuite similaires à ceux effectués pour montrer (4.77). ■

Théorème 4.5 (Convergence du schéma VF-CN).

On considère le schéma VF-CN. On suppose que les données vérifient l'hypothèse (HD), que les valeurs initiales du schéma vérifient (HIS), et que le maillage est uniforme. Alors il existe

$$\mathbf{u} \in \mathcal{C}(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V})$$

vérifiant

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2)$$

telle que lorsque $\varepsilon = \max(h, k) \rightarrow 0$

$$\mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathbf{L}^2).$$

Pour tout $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, T])$, \mathbf{u} vérifie

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \int_0^T \psi(t) \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v})) - (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})) \right) dt = 0.$$

Enfin

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

DÉMONSTRATION. En utilisant le lemme 4.3, la démonstration est analogue à celle faite pour le schéma **VF-I** (théorème 4.4). La majoration de $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ est modifiée comme suit. En utilisant (4.30) on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2)} &= k \sum_{n=0}^N |\tilde{\mathbf{u}}_h^n|^2 \\ &= k |\mathbf{u}_h^0|^2 + k \sum_{n=1}^N |\tilde{\mathbf{u}}_h^n|^2 \\ &= k |\mathbf{u}_h^0|^2 + k \sum_{n=1}^N |\tilde{\mathbf{u}}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1} - \mathbf{u}_h^{n-1}|^2 \\ &\leq k |\mathbf{u}_h^0|^2 + 2k \sum_{n=1}^N |\tilde{\mathbf{u}}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}|^2 + 2k \sum_{n=1}^N |\mathbf{u}_h^{n-1}|^2 \\ &\leq k |\mathbf{u}_h^0|^2 + Ck \sum_{n=1}^N \|\tilde{\mathbf{u}}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}\|_h^2 + 2k \sum_{n=1}^N |\mathbf{u}_h^{n-1}|^2 \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Pour le reste, les calculs sont analogues à ceux effectués pour le schéma **VF-I**. ■

4.2.3 Convergence du schéma VF-BDF

Lemme 4.4 *On considère le schéma VF-BDF. On suppose que les données vérifient l'hypothèse (HD), que les valeurs initiales du schéma vérifient (HIS), et que le maillage est uniforme. Alors, pour tout $0 < \gamma < \frac{1}{4}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma} |\widehat{\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon}(\tau)|^2 d\tau \leq C.$$

DÉMONSTRATION. Elle est analogue à celle faite pour le schéma **VF-I** (lemme 4.2). L'application $\mathbf{g}_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P}_0$ vérifie cette fois pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_h \mathbf{g}_\varepsilon(t) &= \left(\tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t) - \nabla_h p_\varepsilon(t) + \mathbf{f}_\varepsilon(t) - 2 \frac{\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t-k) - \mathbf{u}_\varepsilon(t)}{k} \right) \chi_{[t_1, T]} \\ &+ \frac{\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(t-2k) - \mathbf{u}_\varepsilon(t)}{2k} \chi_{[t_2, T]}. \end{aligned}$$

L'égalité (4.88) devient

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^c}{dt}(t-k) \\ &= \tilde{\Delta}_h \mathbf{g}_\varepsilon + \frac{3}{2} (\tilde{\mathbf{u}}_h^0 \delta_0 - \tilde{\mathbf{u}}_h^N \delta_T) - \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{u}}_h^1 \delta_{t_1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^N \delta_{T+k}) + \frac{3}{2} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^1 - \tilde{\mathbf{u}}_h^0}{k} \chi_{[0, t_1]} \\ & \quad - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^N - \tilde{\mathbf{u}}_h^{N-1}}{k} \chi_{[T, T+k]}. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit en prenant la transformée de Fourier, une égalité (4.89) modifiée : pour tout $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & -2i\pi\tau \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{-2i\pi\tau k} \right) \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau) \\ &= \tilde{\Delta}_h \widehat{\mathbf{g}}_\varepsilon(\tau) + \left(\frac{3}{2} (\tilde{\mathbf{u}}_h^0 - \tilde{\mathbf{u}}_h^N e^{-2i\pi T}) - \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{u}}_h^1 - \tilde{\mathbf{u}}_h^N e^{-2i\pi T}) \right) \frac{e^{-2i\pi k} - 1}{k} \\ & \quad + \left(\frac{3}{2} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^1 - \tilde{\mathbf{u}}_h^0}{k} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^N - \tilde{\mathbf{u}}_h^{N-1}}{k} e^{-2i\pi T} \right) \frac{e^{-2i\pi k} - 1}{k}. \end{aligned}$$

Les termes supplémentaires apparaissant dans le membre de droite sont majorés grâce à (4.4) et (4.5). Par ailleurs d'après l'inégalité triangulaire

$$\left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{-2i\pi\tau k} \right| \geq \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right| \geq 1,$$

de sorte que

$$| -2i\pi\tau \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon | \leq | -2i\pi\tau \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{-2i\pi\tau k} \right) \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon(\tau) |.$$

Les autres calculs sont similaires à ceux effectués pour le schéma **VF-I**. ■

Théorème 4.6 (Convergence du schéma VF-BDF).

*On considère le schéma **VF-BDF**. On suppose que les données vérifient l'hypothèse **(HD)**, que les valeurs initiales du schéma vérifient **(HIS)**, et que le maillage est uniforme. Alors il existe*

$$\mathbf{u} \in \mathcal{C}(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V})$$

vérifiant

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2)$$

telle que lorsque $\varepsilon = \max(h, k) \rightarrow 0$

$$\mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } L^2(0, T; \mathbf{L}^2).$$

Pour tout $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, T])$, \mathbf{u} vérifie

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \int_0^T \psi(t) \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}(t), \mathbf{v})) - (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})) \right) dt = 0.$$

Enfin

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

DÉMONSTRATION. Elle est similaire à celle faite pour le schéma **VF-I**. ■

Chapitre 5

Estimations d'erreur

Ce chapitre est consacré à l'obtention d'estimations d'erreur pour les schémas **VF-I** et **VF-BDF**. Nous définissons d'abord les erreurs (section 5.1). Nous établissons ensuite dans la section 5.2.1 les équations vérifiées par ces erreurs pour le schéma **VF-I**. Nous faisons de même dans la section 5.3.1 pour le schéma **VF-BDF**. Les équations d'erreur font intervenir des erreurs de consistance. Les erreurs de consistance associées au schéma **VF-I** (resp. **VF-BDF**) sont estimées dans la section 5.2.2 (resp. 5.3.2). On en déduit les estimations d'erreur énoncées dans le théorème 5.1 de la section 5.2.3 pour le schéma **VF-I**. Les estimations d'erreur pour le schéma **VF-BDF** sont énoncées dans le théorème 5.2 de la section 5.3.3.

En utilisant les espaces introduits dans la section 1.2, le problème de Stokes (1)-(4) peut être formulé ainsi. À partir des données

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2), \quad \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H},$$

on cherche $\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{H})$ solution de

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \\ (\mathbf{u}(0), \mathbf{v}) &= (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (5.1)$$

En deux dimensions, une méthode de Galerkin permet de montrer que ce problème admet une solution unique ([12], p. 254). Du théorème de de Rham ([12], p. 14) on déduit l'existence d'une unique pression p vérifiant $\int_\Omega p \, d\mathbf{x} = 0$ et $\nabla p \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1})$, telle que l'équation (1) est vérifiée au sens des distributions. En supposant \mathbf{u}_0 et \mathbf{f} plus réguliers, on obtient une solution (\mathbf{u}, p) plus régulière.

Dans tout le chapitre, \mathbf{u} désigne la solution de (5.1) et p la pression qui s'en déduit. On suppose que (\mathbf{u}, p) vérifient

$$\begin{aligned} (\mathbf{HR}) \quad & \mathbf{u} \in \mathcal{C}(0, T; \mathbf{H}^2) \quad \text{et} \quad p \in \mathcal{C}(0, T; H^2), \\ & \mathbf{u}_t \in L^2(0, T; \mathbf{H}^2) \quad \text{et} \quad p_t \in L^2(0, T; H^2), \\ & \mathbf{u}_{tt} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2) \quad \text{et} \quad \nabla p_{tt} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2), \\ & \mathbf{u}_{ttt} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2). \end{aligned}$$

On utilise aussi l'hypothèse suivante sur les valeurs initiales du schéma

$$(\mathbf{HIE}) \quad \text{Il existe une constante } C > 0 \text{ telle que } |\nabla p(0) - \nabla_h p_h^0| \leq Ch.$$

5.1 Définition des erreurs

On définit les erreurs obtenues en approchant la solution des équations de Stokes (1)-(4) par les schémas **VF-I** et **VF-BDF**.

Soit $m \in \{0, \dots, N\}$. Les valeurs exactes $\mathbf{u}(t_m)$ et $p(t_m)$ sont approchées par les valeurs $\tilde{\mathbf{u}}_h^m$, \mathbf{u}_h^m et p_h^m . On définit les erreurs

$$\tilde{\mathbf{e}}_h^m = \mathbf{u}(t_m) - \tilde{\mathbf{u}}_h^m, \quad (5.2a)$$

$$\mathbf{e}_h^m = \mathbf{u}(t_m) - \mathbf{u}_h^m, \quad (5.2b)$$

$$q_h^m = p(t_m) - p_h^m. \quad (5.2c)$$

Sous l'hypothèse **(HR)**, on a $\mathbf{u}(t_m) \in \mathbf{H}^1$ et $p(t_m) \in L^2$. On a choisi (section 2.3) d'approcher ces espaces par les espaces discrets \mathbf{P}_0 et P_0 . D'autre part, l'étape de projection (2.1) fait apparaître l'espace $\mathbf{H}(\text{div})$. Cet espace est naturellement approché (section 1.2) par l'espace discret \mathbf{RT}_0^c . On définit donc les erreurs d'interpolation

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_h^m = \mathbf{u}(t_m) - \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_m), \quad (5.3a)$$

$$\xi_h^m = p(t_m) - \tilde{\Pi}_{P_0} p(t_m), \quad (5.3b)$$

$$\boldsymbol{\eta}_h^m = \mathbf{u}(t_m) - \Pi_{\mathbf{RT}_0^c} \mathbf{u}(t_m). \quad (5.3c)$$

Notons que nous disposons (section 1.4) de deux opérateurs de projection associés à l'espace P_0 , qui sont Π_{P_0} et $\tilde{\Pi}_{P_0}$. On choisit d'utiliser $\tilde{\Pi}_{P_0}$ et $\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} = (\tilde{\Pi}_{P_0})^2$ dans les définitions (5.3a) et (5.3b) afin de pouvoir appliquer les résultats de consistance des opérateurs discrets. D'autre part, l'utilisation de l'espace \mathbf{RT}_0^c dans (5.3c) permet de garantir une propriété d'orthogonalité sur les erreurs (propositions 5.1 et 5.18). Des définitions (5.2) et (5.3) on déduit

$$\tilde{\mathbf{e}}_h^m = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^m + \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h^m, \quad (5.4a)$$

$$\mathbf{e}_h^m = \boldsymbol{\epsilon}_h^m + \boldsymbol{\eta}_h^m, \quad (5.4b)$$

$$q_h^m = \pi_h^m + \xi_h^m, \quad (5.4c)$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^m = \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_m) - \tilde{\mathbf{u}}_h^m, \quad (5.5a)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_h^m = \Pi_{\mathbf{RT}_0^c} \mathbf{u}(t_m) - \mathbf{u}_h^m, \quad (5.5b)$$

$$\pi_h^m = \tilde{\Pi}_{P_0} p(t_m) - p_h^m. \quad (5.5c)$$

Les termes (5.5a), (5.5b) et (5.5c) sont les analogues discrets des erreurs (5.2).

Remarque : Par rapport aux schémas **VF-I** et **VF-BDF**, l'analyse du schéma **VF-CN** fait apparaître un terme supplémentaire dépendant de l'erreur d'interpolation (5.3c). Ce terme ne peut être estimé avec une précision suffisante. C'est pourquoi l'analyse d'erreur qui suit est limitée aux schémas **VF-I** et **VF-BDF**.

5.2 Estimation des erreurs pour le schéma VF-I

Pour le schéma VF-I, on établit dans la section 5.2.1 les équations vérifiées par les erreurs. Ces équations font apparaître des erreurs de consistance qui sont estimées dans la section 5.2.2. On en déduit les estimations d'erreur de la section 5.2.3 (théorème 5.1).

5.2.1 Équations vérifiées par les erreurs pour le schéma VF-I

On cherche les équations vérifiées par les termes $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^m$, $\boldsymbol{\epsilon}_h^m$ et π_h^m définis pour $m \in \{0, \dots, N\}$ par (5.5a), (5.5b) et (5.5c).

Soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Sous l'hypothèse (HR), (\mathbf{u}, p) vérifie à l'instant t_{n+1}

$$\mathbf{u}_t(t_{n+1}) - \Delta \mathbf{u}(t_{n+1}) + \nabla p(t_{n+1}) = \mathbf{f}(t_{n+1}). \quad (5.6)$$

Cette équation s'écrit

$$\frac{\mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}(t_n)}{k} - \Delta \mathbf{u}(t_{n+1}) + \nabla p(t_n) - \mathbf{f}(t_{n+1}) = \mathbf{R}_{(\mathbf{I})}^{n+1} \quad (5.7)$$

avec

$$\mathbf{R}_{(\mathbf{I})}^{n+1} = \frac{\mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}(t_n)}{k} - \mathbf{u}_t(t_{n+1}) + \nabla(p(t_n) - p(t_{n+1})). \quad (5.8)$$

Appliquons l'opérateur $\Pi_{\mathbf{P}_0}$ à (5.7). On obtient

$$\frac{\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_{n+1}) - \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_n)}{k} - \Pi_{\mathbf{P}_0} \Delta \mathbf{u}(t_{n+1}) + \Pi_{\mathbf{P}_0} \nabla p(t_n) - \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{f}(t_{n+1}) = \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{R}_{(\mathbf{I})}^{n+1}. \quad (5.9)$$

Rappelons l'équation (2.2) associée au schéma VF-I

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{k} - \tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \nabla_h p_h^n - \mathbf{f}_h^{n+1} = 0. \quad (5.10)$$

Prenons la différence entre (5.9) et (5.10). Il vient

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_{n+1}) - \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}}{k} \right) - \left(\frac{\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_h^n}{k} \right) - \left(\Pi_{\mathbf{P}_0} \Delta \mathbf{u}(t_{n+1}) - \tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \right) \\ & + (\Pi_{\mathbf{P}_0} \nabla p(t_n) - \nabla_h p_h^n) - (\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{f}(t_{n+1}) - \mathbf{f}_h^{n+1}) = \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{R}_{(\mathbf{I})}^{n+1}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

L'équation (5.11) fait intervenir l'opérateur $\Pi_{\mathbf{P}_0}$ alors que les définitions (5.5a) et (5.5b) utilisent respectivement les opérateurs $\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0}$ et $\Pi_{\mathbf{RT}_6}$. On pose donc pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$

$$\mathbf{I}_h^m = \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_m) - \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_m) \quad (5.12)$$

et

$$\mathbf{D}_h^m = \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_m) - \Pi_{\mathbf{RT}_6} \mathbf{u}(t_m). \quad (5.13)$$

Notons que $\Pi_{\mathbf{RT}_6} \mathbf{u}(t_m) \in \mathbf{P}_0$ d'après la proposition 3.5; en particulier, $\mathbf{D}_h^m \in \mathbf{P}_0$. Avec ces notations, le premier terme dans (5.11) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_{n+1}) - \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}}{k} &= \frac{\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_{n+1}) - \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_{n+1})}{k} + \frac{\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_{n+1}) - \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}}{k} \\ &= \frac{1}{k} (\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1} - \mathbf{I}_h^{n+1}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

et le second

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_h^n}{k} &= \frac{\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_n) - \Pi_{\mathbf{RT}_0^c} \mathbf{u}(t_n)}{k} + \frac{\Pi_{\mathbf{RT}_0^c} \mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_h^n}{k} \\ &= \frac{1}{k} (\boldsymbol{\epsilon}_h^n + \mathbf{D}_h^n). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$, on définit l'erreur de consistance associée au laplacien

$$\mathbf{L}_h^m = \Pi_{\mathbf{P}_0} \Delta \mathbf{u}(t_m) - \tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_m)) \quad (5.16)$$

et celle associée au gradient

$$\mathbf{G}_h^m = -\Pi_{\mathbf{P}_0} \nabla p(t_m) + \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0} p(t_m)). \quad (5.17)$$

Avec ces notations on a

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbf{P}_0} \Delta \mathbf{u}(t_{n+1}) - \tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} &= \Pi_{\mathbf{P}_0} \Delta \mathbf{u}(t_{n+1}) - \tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_{n+1})) \\ &\quad + \tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_{n+1})) - \tilde{\Delta}_h \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \\ &= \mathbf{L}_h^{n+1} + \tilde{\Delta}_h \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1} \end{aligned} \quad (5.18)$$

et

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbf{P}_0} \nabla p(t_{n+1}) - \nabla_h p_h^{n+1} &= \Pi_{\mathbf{P}_0} \nabla p(t_{n+1}) - \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0} p(t_{n+1})) \\ &\quad + \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0} p(t_{n+1})) - \nabla_h p_h^{n+1} \\ &= -\mathbf{G}_h^{n+1} + \nabla_h \pi_h^{n+1}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$, posons

$$\mathbf{T}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1} = \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{R}_{(\mathbf{I})}^{n+1}. \quad (5.20)$$

D'après (5.8), on a

$$\mathbf{T}_{h,(\mathbf{I})}^m = \Pi_{\mathbf{P}_0} \left(\frac{\mathbf{u}(t_m) - \mathbf{u}(t_{m-1})}{k} - \mathbf{u}_t(t_m) + \nabla(p(t_{m-1}) - p(t_m)) \right). \quad (5.21)$$

Enfin d'après (2.1)

$$\mathbf{f}_h^{n+1} = \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{f}(t_{n+1}). \quad (5.22)$$

En reportant (5.14), (5.15), (5.18), (5.19), (5.20) et (5.22) dans (5.11), il vient

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_h^n}{k} - \tilde{\Delta}_h \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1} + \nabla_h \pi_h^n = \frac{1}{k} (\mathbf{I}_h^{n+1} + \mathbf{D}_h^n) + \mathbf{L}_h^{n+1} + \mathbf{G}_h^n + \mathbf{T}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}.$$

Cette équation fait apparaître la quantité suivante.

Définition : Pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$, l'erreur de consistance $\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^m \in \mathbf{P}_0$ est définie par

$$\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^m = \frac{1}{k} (\mathbf{I}_h^m + \mathbf{D}_h^{m-1}) + \mathbf{L}_h^m + \mathbf{G}_h^{m-1} + \mathbf{T}_{h,(\mathbf{I})}^m. \quad (5.23)$$

Les termes \mathbf{I}_h^m , \mathbf{D}_h^{m-1} , \mathbf{L}_h^m , \mathbf{G}_h^{m-1} et $\mathbf{T}_{h,(\mathbf{I})}^m$ sont donnés respectivement par (5.12), (5.13), (5.16), (5.17) et (5.21). Si $m = 0$ on pose $\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^0 = \mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^1$.

On obtient ainsi le résultat suivant.

Proposition 5.1 *On suppose que le schéma utilisé est VF-I et que l'hypothèse (HR) est vérifiée. On a pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$*

$$\frac{\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^n}{k} - \tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^{n+1} + \nabla_h \pi_h^n = \mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}. \quad (5.24)$$

Intéressons-nous maintenant à l'étape de projection (2.6). Soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$. D'après la définition (5.12) on a

$$\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_{n+1}) = \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_{n+1}) + \mathbf{I}_h^{n+1}, \quad (5.25)$$

et d'après la définition (5.13)

$$\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_{n+1}) = \Pi_{\mathbf{RT}_0^c} \mathbf{u}(t_{n+1}) + \mathbf{D}_h^{n+1}. \quad (5.26)$$

En reportant (5.26) dans (5.25) on obtient

$$\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_{n+1}) = \Pi_{\mathbf{RT}_0^c} \mathbf{u}(t_{n+1}) + \mathbf{I}_h^{n+1} + \mathbf{D}_h^{n+1}. \quad (5.27)$$

Rappelons l'équation de l'étape de projection (2.6)

$$\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} = \mathbf{u}_h^{n+1} + k \nabla_h (p_h^{n+1} - p_h^n). \quad (5.28)$$

Soustrayons (5.28) de (5.27). En utilisant les définitions (5.5a) et (5.5b) il vient

$$\tilde{\epsilon}_h^{n+1} = \epsilon_h^{n+1} - k \nabla_h (p_h^{n+1} - p_h^n) + \mathbf{D}_h^{n+1} + \mathbf{I}_h^{n+1}. \quad (5.29)$$

D'après la définition (5.5c) on a

$$-k \nabla_h (p_h^{n+1} - p_h^n) = k \nabla_h (\pi_h^{n+1} - \pi_h^n) - k \nabla_h (\tilde{\Pi}_{P_0} (p(t_{n+1}) - p(t_n))). \quad (5.30)$$

En reportant (5.30) dans (5.29) on obtient

$$\tilde{\epsilon}_h^{n+1} = \epsilon_h^{n+1} + k \nabla_h (\pi_h^{n+1} - \pi_h^n) + \mathbf{I}_h^{n+1} + \mathbf{D}_h^{n+1} - k \nabla_h (\tilde{\Pi}_{P_0} (p(t_{n+1}) - p(t_n))).$$

Cette équation fait apparaître la quantité suivante.

Définition : Pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$, l'erreur de consistance $\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^m \in \mathbf{P}_0$ est définie par

$$\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^m = \mathbf{I}_h^m + \mathbf{D}_h^m - k \nabla_h (\tilde{\Pi}_{P_0} (p(t_m) - p(t_{m-1}))). \quad (5.31)$$

Les termes \mathbf{I}_h^m et \mathbf{D}_h^m sont donnés respectivement par (5.12) et (5.13).

On obtient ainsi :

Proposition 5.2 *On suppose que le schéma utilisé est VF-I et que l'hypothèse (HR) est vérifiée. On a pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$*

$$\tilde{\epsilon}_h^{n+1} = \epsilon_h^{n+1} + k \nabla_h (\pi_h^{n+1} - \pi_h^n) + \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}. \quad (5.32)$$

5.2.2 Estimation des erreurs de consistance pour le schéma VF-I

Les équations vérifiées par les erreurs (section 5.2.1) font apparaître des erreurs de consistance que l'on estime ici.

Rappelons que les erreurs de consistance $\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^m$ et $\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^m$ sont définies pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$ par (5.23) et (5.31). Ces définitions utilisent les termes \mathbf{I}_h^m , \mathbf{D}_h^m , \mathbf{L}_h^m et \mathbf{G}_h^m donnés par (5.12), (5.13), (5.16) et (5.17). On estime donc d'abord ces termes.

Proposition 5.3 *On suppose que le maillage vérifie (HM) et que (\mathbf{u}, p) vérifient (HR). Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$ on a*

$$|\mathbf{I}_h^m| + |\mathbf{D}_h^m| + |\mathbf{L}_h^m| \leq C h \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)} \quad (5.33)$$

et

$$|\mathbf{G}_h^m| \leq C h \|p\|_{L^\infty(0,T;H^2)}. \quad (5.34)$$

DÉMONSTRATION. Soit $m \in \{0, \dots, N\}$. D'après la définition (5.12) et la proposition 3.1 on a

$$|\mathbf{I}_h^m| = |\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_m) - \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_m)| \leq C h \|\mathbf{u}(t_m)\|_2 \leq C h \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}.$$

D'après la définition (5.13) on a

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_h^m &= \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_m) - \Pi_{\mathbf{RT}_0} \mathbf{u}(t_m) \\ &= (\Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_m) - \mathbf{u}(t_m)) + (\mathbf{u}(t_m) - \Pi_{\mathbf{RT}_0} \mathbf{u}(t_m)); \end{aligned}$$

en utilisant les propositions 1.7 et 1.9 on en déduit

$$|\mathbf{D}_h^m| \leq C h \|\mathbf{u}(t_m)\|_1 \leq C h \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}.$$

En utilisant la définition (5.16) et la proposition 1.14 on a

$$|\mathbf{L}_h^m| = |\Pi_{\mathbf{P}_0} \Delta \mathbf{u}(t_m) - \tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t_m))| \leq C h \|\mathbf{u}(t_m)\|_2 \leq C h \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}.$$

D'après la définition (5.17) on a

$$|\mathbf{G}_h^m| = |\Pi_{\mathbf{P}_0} \nabla p(t_m) - \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0} p(t_m))|;$$

en utilisant la proposition 1.13 on en déduit

$$|\mathbf{G}_h^m| \leq C h \|p(t_m)\|_2 \leq C h \|p\|_{L^\infty(0,T;H^2)}. \quad \blacksquare$$

Proposition 5.4 *On suppose que le maillage vérifie (HM) et que (\mathbf{u}, p) vérifient (HR). Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$ on a*

$$|\delta \mathbf{I}_h^m| + |\delta \mathbf{D}_h^m| + |\delta \mathbf{L}_h^m| \leq C h \sqrt{k} \left(\int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\mathbf{u}_t(s)\|_2^2 ds \right)^{1/2} \quad (5.35)$$

et

$$|\delta \mathbf{G}_h^m| \leq C h \sqrt{k} \left(\int_{t_{m-1}}^{t_m} \|p_t(s)\|_2^2 ds \right)^{1/2}. \quad (5.36)$$

DÉMONSTRATION. Soit $m \in \{1, \dots, N\}$. D'après la définition (5.12) et la proposition 3.1 on a

$$|\delta \mathbf{I}_h^m| = |\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \delta \mathbf{u}(t_m) - \Pi_{\mathbf{P}_0} \delta \mathbf{u}(t_m)| \leq C h \|\delta \mathbf{u}(t_m)\|_2.$$

D'après la définition (5.13) on a

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{D}_h^m &= \Pi_{\mathbf{P}_0} \delta \mathbf{u}(t_m) - \Pi_{\mathbf{RT}_0^c} \delta \mathbf{u}(t_m) \\ &= (\Pi_{\mathbf{P}_0} \delta \mathbf{u}(t_m) - \delta \mathbf{u}(t_m)) + (\delta \mathbf{u}(t_m) - \Pi_{\mathbf{RT}_0^c} \delta \mathbf{u}(t_m)). \end{aligned}$$

En utilisant les propositions 1.7 et 1.9 on en déduit

$$|\delta \mathbf{D}_h^m| \leq C h \|\delta \mathbf{u}(t_m)\|_1 \leq C h \|\delta \mathbf{u}(t_m)\|_2 \leq C h \sqrt{k} \left(\int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\mathbf{u}_t(s)\|_2^2 ds \right)^{1/2}.$$

D'après la définition (5.16) et la proposition 1.14 on a

$$|\delta \mathbf{L}_h^m| \leq |\Pi_{\mathbf{P}_0} \Delta \mathbf{u}(t_m) - \tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \delta \mathbf{u}(t_m))| \leq C h \|\delta \mathbf{u}(t_m)\|_2.$$

Puisque

$$\delta \mathbf{u}(t_m) = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \mathbf{u}_t(s) ds,$$

on obtient en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\delta \mathbf{I}_h^m| + |\delta \mathbf{L}_h^m| + |\delta \mathbf{G}_h^m| \leq C h \sqrt{k} \left(\int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\mathbf{u}_t(s)\|_2^2 ds \right)^{1/2}.$$

D'après la définition (5.17) et la proposition 1.13 on a

$$|\delta \mathbf{G}_h^m| = |\Pi_{\mathbf{P}_0} \nabla \delta p(t_m) - \nabla_h(\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \delta p(t_m))|$$

avec

$$\delta p(t_m) = p(t_m) - p(t_{m-1}) = \int_{t_{m-1}}^{t_m} p_t(s) ds.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$|\delta \mathbf{G}_h^m| \leq C h \sqrt{k} \left(\int_{t_{m-1}}^{t_m} \|p_t(s)\|_2^2 ds \right)^{1/2}. \quad \blacksquare$$

Des propositions 5.3 et 5.4 on déduit les estimations suivantes pour l'erreur de consistance $\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^m$.

Proposition 5.5 *On suppose que le maillage vérifie (HM) et que (\mathbf{u}, p) vérifient (HR). Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$k \sum_{n=1}^N |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right). \quad (5.37)$$

DÉMONSTRATION. Soit $n \in \{1, \dots, N\}$. D'après la définition (5.23) on a

$$|\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 \leq 5 \left(\frac{1}{k^2} |\mathbf{I}_h^n|^2 + \frac{1}{k^2} |\mathbf{D}_h^{n-1}|^2 + |\mathbf{L}_h^n|^2 + |\mathbf{G}_h^{n-1}|^2 + |\mathbf{T}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 \right). \quad (5.38)$$

D'après (5.33) et (5.34) on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k^2} |\mathbf{I}_h^n|^2 + \frac{1}{k^2} |\mathbf{D}_h^{n-1}|^2 + |\mathbf{L}_h^n|^2 + |\mathbf{G}_h^{n-1}|^2 \\ & \leq C h^2 (\|p\|_{L^\infty(0,T;H^2)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}^2) + C \frac{h^2}{k^2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}^2. \end{aligned} \quad (5.39)$$

D'après la définition (5.21) on a

$$|\mathbf{T}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 \leq 2 \left| \frac{\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}(t_{n-1})}{k} - \mathbf{u}_t(t_n) \right|^2 + 2 |\nabla(p(t_n) - p(t_{n-1}))|^2.$$

En utilisant les développements de Taylor

$$\begin{aligned} \nabla(p(t_{n-1}) - p(t_n)) &= \int_{t_n}^{t_{n-1}} \nabla p_t(s) ds, \\ \mathbf{u}(t_{n-1}) - \mathbf{u}(t_n) + k \mathbf{u}_t(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n-1}} (t_{n-1} - s) \mathbf{u}_{tt}(s) ds, \end{aligned}$$

on en déduit

$$|\mathbf{T}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 \leq C k \int_{t_{n-1}}^{t_n} (|\mathbf{u}_{tt}(s)|^2 + |\nabla p_t(s)|^2) ds. \quad (5.40)$$

Reportons les estimations (5.39) et (5.40) dans (5.38). En sommant de $m = 1$ à N , il vient

$$\begin{aligned} k \sum_{n=1}^N |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 &\leq C k^2 (\|\mathbf{u}_{tt}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2)}^2 + \|\nabla p_t\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2)}^2) \\ &+ C h^2 (\|p\|_{L^\infty(0,T;H^2)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}^2) + C \frac{h^2}{k^2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 5.6 *On suppose que le maillage vérifie (HM) et que (\mathbf{u}, p) vérifient (HR). Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$k \sum_{n=2}^N |\delta \mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 \leq C (k^4 + k^2 h^2 + h^2). \quad (5.41)$$

DÉMONSTRATION. Soit $n \in \{2, \dots, N\}$. En appliquant l'opérateur δ à la définition (5.23) on obtient

$$\delta \mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^n = \frac{1}{k} (\delta \mathbf{I}_h^n + \delta \mathbf{D}_h^{n-1}) + \delta \mathbf{L}_h^n + \delta \mathbf{G}_h^{n-1} + \delta \mathbf{T}_{h,(\mathbf{I})}^n.$$

On en déduit

$$|\delta \mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 \leq 5 \left(\frac{1}{k^2} |\delta \mathbf{I}_h^n|^2 + \frac{1}{k^2} |\delta \mathbf{D}_h^{n-1}|^2 + |\delta \mathbf{L}_h^n|^2 + |\delta \mathbf{G}_h^{n-1}|^2 + |\delta \mathbf{T}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 \right). \quad (5.42)$$

D'après (5.35) et (5.36) on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k^2} |\delta \mathbf{I}_h^n|^2 + \frac{1}{k^2} |\delta \mathbf{D}_h^{n-1}|^2 + |\delta \mathbf{L}_h^n|^2 + |\delta \mathbf{G}_h^{n-1}|^2 \\ & \leq C \left(h^2 k + \frac{h^2}{k} \right) \int_{t_{n-2}}^{t_n} \|\mathbf{u}_t(s)\|_2^2 ds + C h^2 k \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \|p_t(s)\|_2^2 ds. \end{aligned} \quad (5.43)$$

D'après la définition (5.21) on a

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{T}_{h,(\mathbf{I})}^n &= \Pi_{\mathbf{P}_0} \left(\frac{\mathbf{u}(t_n) - 2\mathbf{u}(t_{n-1}) + \mathbf{u}(t_{n-2})}{k} - \mathbf{u}_t(t_n) + \mathbf{u}_t(t_{n-1}) \right) \\ &+ \Pi_{\mathbf{P}_0} \nabla(-p(t_{n-2}) + 2p(t_{n-1}) - p(t_n)). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Des développements de Taylor

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t_n) &= \mathbf{u}(t_{n-1}) + k \mathbf{u}_t(t_{n-1}) + \frac{k^2}{2} \mathbf{u}_{tt}(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s)^2 \mathbf{u}_{ttt}(s) ds, \\ \mathbf{u}(t_{n-2}) &= \mathbf{u}(t_{n-1}) - k \mathbf{u}_t(t_{n-1}) + \frac{k^2}{2} \mathbf{u}_{tt}(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_{n-2}} (t_{n-2} - s)^2 \mathbf{u}_{ttt}(s) ds, \\ \mathbf{u}_t(t_n) &= \mathbf{u}_t(t_{n-1}) + k \mathbf{u}_{tt}(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s) \mathbf{u}_{ttt}(s) ds, \end{aligned}$$

on déduit en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\mathbf{u}(t_n) - 2\mathbf{u}(t_{n-1}) + \mathbf{u}(t_{n-2})}{k} - \mathbf{u}_t(t_n) + \mathbf{u}_t(t_{n-1}) \right|^2 \\ & \leq C k^3 \left(\int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} |\mathbf{u}_{ttt}(s)|^2 ds + \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\mathbf{u}_{ttt}(s)|^2 ds \right). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Des développements de Taylor

$$\begin{aligned} \nabla p(t_n) &= \nabla p(t_{n-1}) + k \nabla p_t(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s) \nabla p_{tt}(s) ds, \\ \nabla p(t_{n-2}) &= \nabla p(t_{n-1}) - k \nabla p_t(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_{n-2}} (t_{n-2} - s) \nabla p_{tt}(s) ds, \end{aligned}$$

on déduit en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & |\nabla(-p(t_{n-2}) + 2p(t_{n-1}) - p(t_n))|^2 \\ & \leq C k^3 \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} |\nabla p_{tt}(s)|^2 ds + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} |\nabla p_{tt}(s)|^2 ds \right). \end{aligned} \quad (5.46)$$

En reportant les estimations (5.45) et (5.46) dans (5.44) on obtient

$$|\delta \mathbf{T}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 \leq C k^3 \int_{t_{n-2}}^{t_n} (|\mathbf{u}_{ttt}(s)|^2 + |\nabla p_{tt}(s)|^2) ds. \quad (5.47)$$

Reportons les estimations (5.43) et (5.47) dans (5.42). Il vient

$$\begin{aligned} |\delta \mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 &\leq C k^3 \int_{t_{n-2}}^{t_n} (|\mathbf{u}_{ttt}(s)|^2 + |\nabla p_{tt}(s)|^2) ds \\ &+ C \left(h^2 k + \frac{h^2}{k} \right) \int_{t_{n-2}}^{t_n} \|\mathbf{u}_t(s)\|_2^2 ds + C h^2 k \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \|p_t(s)\|_2^2 ds. \end{aligned}$$

En sommant de $n = 2$ à N on obtient

$$\begin{aligned} k \sum_{n=2}^N |\delta \mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 &\leq C k^4 (\|\mathbf{u}_{ttt}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2)}^2 + \|\nabla p_{tt}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2)}^2) + C h^2 \|\mathbf{u}_t\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^2)} \\ &+ C h^2 k^2 (\|p_t\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^2)} + \|\mathbf{u}_t\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^2)}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Des propositions 5.3 et 5.4 on déduit également les estimations suivantes pour l'erreur de consistance $\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^m$.

Proposition 5.7 *On suppose que le maillage vérifie (HM) et que (\mathbf{u}, p) vérifient (HR). Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$*

$$|\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^m|^2 \leq C (k^4 + h^2). \quad (5.48)$$

DÉMONSTRATION. Soit $m \in \{1, \dots, N\}$. D'après la définition (5.31) on a

$$|\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^m|^2 \leq 3 \left(|\mathbf{D}_h^m|^2 + |\mathbf{I}_h^m|^2 + k^2 \left| \nabla_h (\tilde{\Pi}_{P_0}(p(t_m) - p(t_{m-1}))) \right|^2 \right). \quad (5.49)$$

D'après (5.33) on a

$$|\mathbf{I}_h^m|^2 + |\mathbf{D}_h^m|^2 \leq C h^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}^2. \quad (5.50)$$

D'après la proposition 1.11 on a

$$\left| \nabla_h (\tilde{\Pi}_{P_0}(p(t_m) - p(t_{m-1}))) \right|^2 \leq C \|p(t_m) - p(t_{m-1})\|_1^2 \leq C \|p(t_m) - p(t_{m-1})\|_2^2.$$

Puisque

$$p(t_m) - p(t_{m-1}) = \int_{t_{m-1}}^{t_m} p_t(s) ds$$

on en déduit

$$\left| \nabla_h (\tilde{\Pi}_{P_0}(p(t_m) - p(t_{m-1}))) \right|^2 \leq C k^2 \|p_t\|_{L^\infty(0,T;H^2)}^2. \quad (5.51)$$

En reportant les estimations (5.50) et (5.51) dans (5.49), on obtient

$$|\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^m|^2 \leq C (k^4 \|p_t\|_{L^\infty(0,T;H^2)}^2 + h^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}^2). \quad \blacksquare$$

Proposition 5.8 *On suppose que le maillage vérifie (HM) et que (\mathbf{u}, p) vérifient (HR). Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$k \sum_{n=2}^N |\delta \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 \leq C (k^6 + k^2 h^2). \quad (5.52)$$

DÉMONSTRATION. Soit $n \in \{2, \dots, N\}$. D'après la définition (5.31) on a

$$\begin{aligned} |\delta \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 &\leq 3 |\delta \mathbf{D}_h^{n-1}|^2 + 3 |\delta \mathbf{I}_h^{n-1}|^2 \\ &\quad + 3 k^2 \left| \nabla_h (\tilde{\Pi}_{P_0}(p(t_n) - 2p(t_{n-1}) + p(t_{n-2}))) \right|^2. \end{aligned} \quad (5.53)$$

D'après (5.35)

$$|\delta \mathbf{I}_h^n|^2 + |\delta \mathbf{D}_h^{n-1}|^2 \leq C h^2 k \int_{t_{n-2}}^{t_n} \|\mathbf{u}_t(s)\|_2^2 ds. \quad (5.54)$$

D'après la proposition 1.11 on a

$$\left| \nabla_h (\tilde{\Pi}_{P_0}(p(t_n) - 2p(t_{n-1}) + p(t_{n-2}))) \right|^2 \leq C |\nabla(p(t_n) - 2p(t_{n-1}) + p(t_{n-2}))|^2.$$

En utilisant les développements de Taylor

$$\begin{aligned} p(t_n) &= p(t_{n-1}) + k p_t(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s) p_{tt}(s) ds, \\ p(t_{n-2}) &= p(t_{n-1}) - k p_t(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_{n-2}} (t_{n-2} - s) p_{tt}(s) ds, \end{aligned}$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$\left| \nabla_h (\tilde{\Pi}_{P_0}(p(t_n) - 2p(t_{n-1}) + p(t_{n-2}))) \right|^2 \leq C k^3 \int_{t_{n-2}}^{t_n} |\nabla p_{tt}(s)|^2 ds. \quad (5.55)$$

Reportons les estimations (5.54) et (5.55) dans (5.53) et sommons de $n = 2$ à N . Il vient

$$k \sum_{n=2}^N |\delta \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 \leq C h^2 k^2 \|\mathbf{u}_t\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^2)}^2 + C k^6 \|\nabla p_{tt}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2)}^2. \quad \blacksquare$$

5.2.3 Estimations d'erreur pour le schéma VF-I

Des équations vérifiées par les erreurs (section 5.2.1) et des estimations des erreurs de consistance (section 5.2.2) on déduit les estimations d'erreur pour le schéma VF-I (théorème 5.1).

Rappelons que les termes $\tilde{\epsilon}_h^m$, ϵ_h^m et π_h^m sont définis pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$ par (5.5a), (5.5b) et (5.5c). La propriété suivante est l'analogie pour les erreurs de la propriété d'orthogonalité de la projection (proposition 2.1).

Lemme 5.1 *Pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$ et tout $n \in \{0, \dots, N\}$ on a*

$$(\epsilon_h^m, \nabla_h \pi_h^n) = 0. \quad (5.56)$$

Pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$ on a

$$|\tilde{\epsilon}_h^m|^2 - |\epsilon_h^m|^2 + |\tilde{\epsilon}_h^m - \epsilon_h^m|^2 = 2 (\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^m, \epsilon_h^m). \quad (5.57)$$

DÉMONSTRATION. Soit $m \in \{0, \dots, N\}$ et $n \in \{0, \dots, N\}$. D'après la proposition 2.1 on a

$$(\mathbf{u}_h^m, \nabla_h \pi_h^n) = 0. \quad (5.58)$$

D'après les propositions 3.4 et 3.5, on a

$$\operatorname{div}_h(\Pi_{\mathbf{RT}_0} \mathbf{u}(t_m)) = 0;$$

en appliquant la proposition 1.15, on en déduit

$$(\Pi_{\mathbf{RT}_0} \mathbf{u}(t_m), \nabla_h \pi_h^n) = -(\pi_h^n, \operatorname{div}_h(\Pi_{\mathbf{RT}_0} \mathbf{u}(t_m))) = 0. \quad (5.59)$$

En utilisant la définition (5.5b), on déduit de (5.58) et (5.59)

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\epsilon}_h^m, \nabla_h \pi_h^n) &= (\Pi_{\mathbf{RT}_0} \mathbf{u}(t_m) - \mathbf{u}_h^m, \nabla_h \pi_h^n) \\ &= (\Pi_{\mathbf{RT}_0} \mathbf{u}(t_m), \nabla_h \pi_h^n) - (\mathbf{u}_h^m, \nabla_h \pi_h^n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Soit maintenant $m \in \{1, \dots, N\}$. D'après la proposition 5.2 on a

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^m - \boldsymbol{\epsilon}_h^m = k \nabla_h(\pi_h^m - \pi_h^{m-1}) + \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^m.$$

Prenons le produit scalaire de l'équation précédente avec $2\boldsymbol{\epsilon}_h^m$. On obtient

$$2(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^m - \boldsymbol{\epsilon}_h^m, \boldsymbol{\epsilon}_h^m) = 2k(\nabla_h(\pi_h^m - \pi_h^{m-1}), \boldsymbol{\epsilon}_h^m) + 2(\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^m, \boldsymbol{\epsilon}_h^m). \quad (5.60)$$

D'après (5.56) on a

$$(\nabla_h(\pi_h^m - \pi_h^{m-1}), \boldsymbol{\epsilon}_h^m) = 0. \quad (5.61)$$

D'après l'identité algébrique $2(a - b, b) = a^2 - b^2 + (a - b)^2$ on a

$$2(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^m - \boldsymbol{\epsilon}_h^m, \boldsymbol{\epsilon}_h^m) = |\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^m|^2 - |\boldsymbol{\epsilon}_h^m|^2 + |\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^m - \boldsymbol{\epsilon}_h^m|^2. \quad (5.62)$$

En reportant (5.61) et (5.62) dans (5.60), on obtient (5.57). ■

Rappelons d'autre part le résultat suivant.

Lemme 5.2 (Lemme de Gronwall discret, cf [5]).

Soient $\alpha, \delta \in \mathbb{R}_+^*$, $N \in \mathbb{N}^*$. On considère des suites positives $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que

$$\forall m \in \{1, \dots, N\}, \quad a_m + \delta \sum_{n=1}^m b_n \leq \delta \sum_{n=1}^m a_n + \delta \sum_{n=1}^m c_n + \alpha.$$

Supposons que $\delta < 1$. Alors pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$ on a

$$a_m + \delta \sum_{n=1}^m b_n \leq \left(\delta \sum_{n=1}^N c_n + \alpha \right) \exp \left(\frac{\delta N}{1 - \delta} \right).$$

En utilisant les lemmes 5.1 et 5.2, on va estimer maintenant les termes $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^m$, $\boldsymbol{\epsilon}_h^m$ et π_h^m .

Proposition 5.9 *On considère le schéma VF-I avec $k < \frac{1}{4}$. On suppose que le maillage vérifie (HM), que (\mathbf{u}, p) vérifient (HR) et que les valeurs initiales du schéma vérifient (HIE). Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$*

$$|\epsilon_h^m|^2 + k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\epsilon}_h^n\|_h^2 + k^2 |\nabla_h \pi_h^m|^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right). \quad (5.63)$$

DÉMONSTRATION. Soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$. En multipliant (5.24) par $2k\tilde{\epsilon}_h^{n+1}$ on obtient

$$\left(\frac{\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^n}{k}, 2k\tilde{\epsilon}_h^{n+1} \right) - 2k(\tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^{n+1}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) + 2k(\nabla_h \pi_h^n, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) = 2k(\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}). \quad (5.64)$$

D'après l'identité algébrique $2(a-b, b) = a^2 - b^2 + (a-b)^2$ on a

$$\left(\frac{\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^n}{k}, 2k\tilde{\epsilon}_h^{n+1} \right) = |\tilde{\epsilon}_h^{n+1}|^2 - |\epsilon_h^n|^2 + |\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^n|^2.$$

Or, d'après (5.57), on a

$$|\tilde{\epsilon}_h^{n+1}|^2 = |\epsilon_h^{n+1}|^2 + |\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}|^2 + 2(\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}, \epsilon_h^{n+1});$$

on en déduit

$$\left(\frac{\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^n}{k}, 2k\tilde{\epsilon}_h^{n+1} \right) = |\epsilon_h^{n+1}|^2 - |\epsilon_h^n|^2 + |\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^n|^2 + |\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}|^2 + 2(\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}, \epsilon_h^{n+1}). \quad (5.65)$$

D'après la proposition 3.9

$$-2k(\tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^{n+1}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) = 2k\|\tilde{\epsilon}_h^{n+1}\|_h^2. \quad (5.66)$$

D'après (5.56) on a

$$\begin{aligned} 2k(\nabla_h \pi_h^n, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) &= 2k(\nabla_h \pi_h^n, \tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}) + 2k(\nabla_h \pi_h^n, \epsilon_h^{n+1}) \\ &= 2k(\nabla_h \pi_h^n, \tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}). \end{aligned}$$

Or, d'après (5.32), on a

$$\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1} = k\nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n) + \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1};$$

on en déduit

$$2k(\nabla_h \pi_h^n, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) = 2k^2(\nabla_h \pi_h^n, \nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)) + 2k(\nabla_h \pi_h^n, \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}).$$

Soit, en utilisant une identité algébrique

$$\begin{aligned} 2k(\nabla_h \pi_h^n, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) &= k^2(|\nabla_h \pi_h^{n+1}|^2 - |\nabla_h \pi_h^n|^2 - |\nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)|^2) \\ &\quad - 2k(\nabla_h \pi_h^n, \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}). \end{aligned} \quad (5.67)$$

D'après l'inégalité de Young

$$2k(\nabla_h \pi_h^n, \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}) \leq k^3 |\nabla_h \pi_h^n|^2 + \frac{1}{k} |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}|^2. \quad (5.68)$$

Par ailleurs, en multipliant (5.32) par $2k \nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)$ il vient

$$2k^2 |\nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)|^2 = 2k (\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}, \nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)) - 2k (\nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n), \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}).$$

Soit, en utilisant l'inégalité de Young,

$$\begin{aligned} 2k^2 |\nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)|^2 &\leq k^2 |\nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)|^2 + |\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}|^2 \\ &\quad + k^3 |\nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)|^2 + \frac{1}{k} |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}|^2. \end{aligned}$$

Puisque

$$k^3 |\nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)|^2 \leq 2k^3 (|\nabla_h \pi_h^{n+1}|^2 + |\nabla_h \pi_h^n|^2)$$

on en déduit

$$k^2 |\nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)|^2 \leq 2k^3 (|\nabla_h \pi_h^{n+1}|^2 + |\nabla_h \pi_h^n|^2) + \frac{1}{k} |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}|^2 + |\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}|^2. \quad (5.69)$$

D'après la proposition 1.1 on a

$$2k (\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) \leq 2k |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}| |\tilde{\epsilon}_h^{n+1}| \leq Ck |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}| \|\tilde{\epsilon}_h^{n+1}\|_h;$$

soit, en utilisant l'inégalité de Young

$$2k (\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) \leq k \|\tilde{\epsilon}_h^{n+1}\|_h^2 + Ck |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}|^2. \quad (5.70)$$

En additionnant les inégalités (5.65) à (5.70) on déduit de (5.64)

$$\begin{aligned} |\epsilon_h^{n+1}|^2 - |\epsilon_h^n|^2 + k \|\tilde{\epsilon}_h^{n+1}\|_h^2 + k^2 (|\nabla_h \pi_h^{n+1}|^2 - |\nabla_h \pi_h^n|^2) \\ \leq Ck^3 (|\nabla_h \pi_h^n|^2 + |\nabla_h \pi_h^{n+1}|^2) + \frac{C}{k} |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}|^2 + Ck |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}|^2. \end{aligned}$$

Soit $m \in \{1, \dots, N\}$. En sommant de $n = 0$ à $m - 1$ il vient

$$|\epsilon_h^m|^2 + k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\epsilon}_h^n\|_h^2 + k^2 |\nabla_h \pi_h^m|^2 \leq 3k^3 \sum_{n=1}^m |\nabla_h \pi_h^n|^2 + \alpha, \quad (5.71)$$

avec

$$\alpha = |\epsilon_h^0|^2 + k^2 |\nabla_h \pi_h^0|^2 + \frac{C}{k} \sum_{n=1}^N |\mathbf{P}_h^n|^2 + Ck \sum_{n=1}^N |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2. \quad (5.72)$$

Posons

$$\delta = 3k$$

et pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} a_m &= |\epsilon_h^m|^2 + k^2 |\nabla_h \pi_h^m|^2, \\ b_m &= \frac{1}{3} \|\tilde{\epsilon}_h^m\|_h^2. \end{aligned}$$

L'inégalité (5.71) implique que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$

$$a_m + \delta \sum_{n=0}^m b_m \leq \delta \sum_{n=0}^m a_n + \alpha.$$

Si $\delta < 1$, soit $k < \frac{1}{3}$, on déduit du lemme 5.2 que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$

$$|\epsilon_h^m|^2 + k^2 |\nabla_h \pi_h^m|^2 + k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\epsilon}_h^n\|^2 \leq \alpha \exp\left(\frac{3kN}{1-3k}\right). \quad (5.73)$$

Si $k < \frac{1}{4}$ on a

$$\exp\left(\frac{3kN}{1-3k}\right) \leq \exp(12T) \leq C. \quad (5.74)$$

Estimons α . D'après la définition (5.5b) on a

$$\begin{aligned} |\epsilon_h^0|^2 &= |\Pi_{\mathbf{RT}_0^c} \mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_h^0|^2 = |\Pi_{\mathbf{RT}_0^c} \mathbf{u}(0) - \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(0)|^2 \\ &\leq |\Pi_{\mathbf{RT}_0^c} \mathbf{u}(0) - \mathbf{u}(0)|^2 + |\mathbf{u}(0) - \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(0)|^2. \end{aligned}$$

En appliquant les propositions 1.7 et 1.9, on obtient

$$|\epsilon_h^0|^2 \leq C h^2 \|\mathbf{u}(0)\|_1^2 \leq C h^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}^2. \quad (5.75)$$

D'après la définition (5.5c) on a

$$\nabla_h \pi_h^0 = \nabla_h (\tilde{\Pi}_{P_0} p(0) - p_h^0) = \nabla_h (\tilde{\Pi}_{P_0} p(0)) - \Pi_{\mathbf{P}_0} \nabla p(0) + \Pi_{\mathbf{P}_0} \nabla p(0) - \nabla_h p_h^0.$$

D'après la proposition 1.13 on a

$$|\nabla_h (\tilde{\Pi}_{P_0} p(0)) - \Pi_{\mathbf{P}_0} \nabla p(0)| \leq C h \|p(0)\|_2 \leq C h \|p\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}.$$

En utilisant la stabilité de l'opérateur $\Pi_{\mathbf{P}_0}$ pour la norme \mathbf{L}^2 et l'hypothèse **(HIE)** on a

$$|\Pi_{\mathbf{P}_0} \nabla p(0) - \nabla_h p_h^0| = |\Pi_{\mathbf{P}_0} (\nabla p(0) - \nabla_h p_h^0)| \leq |\nabla p(0) - \nabla_h p_h^0| \leq C h.$$

On obtient ainsi

$$|\nabla_h \pi_h^0| \leq C h. \quad (5.76)$$

D'après (5.37) et (5.48) on a

$$\frac{1}{k} \sum_{n=1}^N |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 + k \sum_{n=1}^N |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2}\right). \quad (5.77)$$

En reportant (5.75), (5.76) et (5.77) dans (5.72) il vient

$$\alpha \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2}\right). \quad (5.78)$$

En reportant (5.74) et (5.78) dans (5.73), on obtient (5.63). ■

Proposition 5.10 *On considère le schéma VF-I avec $k < \frac{1}{4}$. On suppose que le maillage vérifie (HM), que (\mathbf{u}, p) vérifient (HR) et que les valeurs initiales du schéma vérifient (HIE). On suppose de plus que que $\tilde{\mathbf{u}}_h^0 = \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0$ et que $\mathbf{u}_{tt} \in \mathcal{C}(0, k; \mathbf{L}^2)$, $\nabla p_t \in \mathcal{C}(0, k; \mathbf{L}^2)$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$*

$$|\delta \epsilon_h^m|^2 + k^2 |\nabla_h \delta \pi_h^m|^2 \leq C (k^4 + k^2 h^2 + h^2). \quad (5.79)$$

DÉMONSTRATION. En appliquant l'opérateur δ à (5.24) et (5.32) on obtient pour tout $n \in \{1, \dots, N-1\}$

$$\frac{\delta \tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \delta \epsilon_h^n}{k} - \tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^{n+1} + \nabla_h (\delta \pi_h^n) = \delta \mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1} \quad (5.80)$$

et pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\delta \tilde{\epsilon}_h^{n+1} = \delta \epsilon_h^{n+1} + k \nabla_h (\delta \pi_h^{n+1} - \delta \pi_h^n) + \delta \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}.$$

On définit les valeurs ϵ_h^{-1} et $\nabla_h \pi_h^{-1}$ par

$$\epsilon_h^{-1} = \epsilon_h^0 + k \mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^1 + \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^1 + k \nabla_h \pi_h^0 - \tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^0. \quad (5.81)$$

et

$$k \nabla_h \pi_h^{-1} = k \nabla_h \pi_h^0 + \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^1 + \epsilon_h^0 - \tilde{\epsilon}_h^0. \quad (5.82)$$

L'équation (5.80) est ainsi encore valable pour $n = 0$. En procédant ensuite comme pour la preuve de (5.63) on obtient pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$

$$|\delta \epsilon_h^m|^2 + k^2 |\nabla_h (\delta \pi_h^m)|^2 \leq |\delta \epsilon_h^0|^2 + k^2 |\nabla_h (\delta \pi_h^0)|^2 + \frac{C}{k} \sum_{n=2}^N |\delta \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 + C k \sum_{n=2}^N |\delta \mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2. \quad (5.83)$$

Estimons le membre de droite dans (5.83). D'après (5.81) on a

$$|\delta \epsilon_h^0|^2 = |\epsilon_h^0 - \epsilon_h^{-1}|^2 \leq 4 k^2 |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^1|^2 + 4 |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^1|^2 + 4 k^2 |\nabla_h \pi_h^0|^2 + 4 |\tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^0|^2. \quad (5.84)$$

Estimons le second membre de (5.84). Le terme $\tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^0$ ne peut être estimé avec une précision suffisante en général. C'est pourquoi on suppose que $\tilde{\mathbf{u}}_h^0 = \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0$. On a alors

$$\tilde{\epsilon}_h^0 = 0. \quad (5.85)$$

D'autre part on a d'après (5.48)

$$|\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^1|^2 \leq C (k^4 + k^2 h^2 + h^2). \quad (5.86)$$

Par ailleurs d'après (5.40)

$$|\mathbf{T}_{h,(\mathbf{I})}^1|^2 \leq C k^2 (\|\mathbf{u}_{tt}\|_{L^\infty(0,k;\mathbf{L}^2)}^2 + \|\nabla p_t\|_{L^\infty(0,k;\mathbf{L}^2)}^2);$$

en utilisant (5.38) et (5.39) on en déduit

$$|\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^1|^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right). \quad (5.87)$$

Enfin d'après (5.76)

$$k^2 |\nabla_h \pi_h^0|^2 \leq C k^2 h^2 \|p\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}. \quad (5.88)$$

En reportant (5.85), (5.86), (5.87) et (5.88) dans (5.84) on obtient

$$|\delta \epsilon_h^0|^2 \leq C (k^4 + k^2 h^2 + h^2). \quad (5.89)$$

D'autre part, on déduit de (5.82) et (5.85)

$$k^2 |\nabla_h(\delta \pi_h^0)|^2 = k^2 |\nabla_h(\pi_h^0 - \pi_h^{-1})|^2 \leq 2 |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^1|^2 + 2 |\epsilon_h^0|^2;$$

soit, en utilisant (5.75) et (5.86)

$$k^2 |\nabla_h(\delta \pi_h^0)|^2 \leq C (k^4 + h^2 + k^2 h^2). \quad (5.90)$$

Enfin, d'après (5.41) et (5.52), on a

$$\frac{1}{k} \sum_{n=2}^N |\delta \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 + k \sum_{n=2}^N |\delta \mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 \leq C (k^4 + h^2 + k^2 h^2). \quad (5.91)$$

En reportant (5.89), (5.90) et (5.91) dans (5.83), on obtient (5.79). \blacksquare

Remarque : Dans la proposition précédente, les hypothèses $\tilde{\mathbf{u}}_h^0 = \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_{tt} \in \mathcal{C}(0, k; \mathbf{L}^2)$, $\nabla p_t \in \mathcal{C}(0, k; \mathbf{L}^2)$ peuvent être remplacées par des hypothèses sur les valeurs \mathbf{u}_h^1 et p_h^1 . Dans ce cas, un schéma d'ordre plus élevé que **VF-I** est nécessaire pour initialiser \mathbf{u}_h^1 et p_h^1 . Notre choix d'hypothèses permet de ne pas faire intervenir d'autre schéma que **VF-I**.

Des propositions 5.9 et 5.10 on déduit le résultat suivant.

Proposition 5.11 *On considère le schéma **VF-I** avec $k < \frac{1}{4}$. On suppose que le maillage est uniforme, que (\mathbf{u}, p) vérifient **(HR)** et que les valeurs initiales du schéma vérifient **(HIE)**. On suppose de plus que $\tilde{\mathbf{u}}_h^0 = \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0$ et que $\mathbf{u}_{tt} \in \mathcal{C}(0, k; \mathbf{L}^2)$, $\nabla p_t \in \mathcal{C}(0, k; \mathbf{L}^2)$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$*

$$k \sum_{n=1}^m |\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_1^{nc}} \pi_h^n|^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right). \quad (5.92)$$

DÉMONSTRATION. Montrons maintenant (5.92). Soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$. D'après (5.32) on a

$$\nabla_h \pi_h^{n+1} = \nabla_h \pi_h^n + \frac{\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}}{k} - \frac{1}{k} \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1};$$

or, d'après (5.24)

$$\nabla_h \pi_h^n = -\frac{\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^n}{k} + \tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^{n+1} + \mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}.$$

On en déduit

$$\nabla_h \pi_h^{n+1} = -\frac{\epsilon_h^{n+1} - \epsilon_h^n}{k} + \tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^{n+1} + \mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1} - \frac{1}{k} \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}. \quad (5.93)$$

D'après la condition inf-sup (3.60), il existe $\mathbf{v}_h \in \mathbf{P}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vérifiant

$$|\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} \pi_h^{n+1}| \|\mathbf{v}_h\|_h \leq -(\pi_h^{n+1}, \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h) = (\nabla_h \pi_h^{n+1}, \mathbf{v}_h). \quad (5.94)$$

Prenons le produit scalaire de (5.93) avec \mathbf{v}_h . Il vient

$$(\nabla_h \pi_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) = -\left(\frac{\boldsymbol{\epsilon}_h^{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_h^n}{k}, \mathbf{v}_h\right) + (\tilde{\Delta}_h \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + (\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1} - \frac{1}{k} \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}, \mathbf{v}_h).$$

D'après la proposition 1.1 on a

$$-\left(\frac{\boldsymbol{\epsilon}_h^{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_h^n}{k}, \mathbf{v}_h\right) \leq \frac{|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_h^n|}{k} |\mathbf{v}_h| \leq C \frac{|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_h^n|}{k} \|\mathbf{v}_h\|_h$$

et

$$(\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1} - \frac{1}{k} \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}, \mathbf{v}_h) \leq \left(|\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}| + \frac{1}{k} |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}|\right) |\mathbf{v}_h| \leq C \left(|\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}| + \frac{1}{k} |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}|\right) \|\mathbf{v}_h\|_h.$$

D'après la proposition 3.9 on a

$$(\tilde{\Delta}_h \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) \leq \|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1}\|_h \|\mathbf{v}_h\|_h.$$

On en déduit

$$(\nabla_h \pi_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) \leq C \left(\|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1}\|_h + \frac{|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_h^n|}{k} + |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}| + \frac{1}{k} |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}| \right) \|\mathbf{v}_h\|_h. \quad (5.95)$$

En comparant (5.94) et (5.95) on obtient pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$

$$|\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} \pi_h^{n+1}| \leq C \left(\|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1}\|_h + \frac{|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_h^n|}{k} + |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}| + \frac{1}{k} |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^{n+1}| \right).$$

Soit $m \in \{1, \dots, N\}$. En élevant au carré et en sommant de $n = 0$ à $m-1$ on obtient

$$\begin{aligned} k \sum_{n=1}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} \pi_h^n|^2 &\leq C k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^n\|_h^2 + C k \sum_{n=0}^{m-1} \frac{|\boldsymbol{\epsilon}_h^{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_h^n|^2}{k^2} \\ &\quad + C k \sum_{n=1}^N |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 + \frac{C}{k} \sum_{n=1}^N |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2. \end{aligned} \quad (5.96)$$

En utilisant (5.63) et (5.77) on a

$$2k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1}\|_h^2 + 2k \sum_{n=1}^N |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 + \frac{2}{k} \sum_{n=1}^N |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^n|^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right). \quad (5.97)$$

D'après (5.79) on a d'autre part

$$k \sum_{n=0}^{m-1} \frac{|\boldsymbol{\epsilon}_h^{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_h^n|^2}{k^2} = k \sum_{n=1}^m \frac{|\delta \boldsymbol{\epsilon}_h^n|^2}{k^2} \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right). \quad (5.98)$$

En reportant (5.97) et (5.98) dans (5.96) on obtient (5.92). ■

Des estimations des termes $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^m$, $\boldsymbol{\epsilon}_h^m$ et π_h^m (propositions 5.9 et 5.11) on déduit les estimations suivantes pour les erreurs $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^m$, \mathbf{e}_h^m et q_h^m .

Théorème 5.1 (Estimations d'erreur pour le schéma VF-I).

On considère le schéma **VF-I** avec $k < \frac{1}{4}$. On suppose que le maillage vérifie **(HM)**, que (\mathbf{u}, p) vérifient **(HR)** et que les valeurs initiales du schéma vérifient **(HIE)**. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$

$$|\mathbf{e}_h^m|^2 + k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \tilde{\mathbf{e}}_h^m\|_h^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right). \quad (5.99)$$

On suppose de plus que le maillage est uniforme, que $\tilde{\mathbf{u}}_h^0 = \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0$ et que $\mathbf{u}_{tt} \in \mathcal{C}(0, k; \mathbf{L}^2)$, $\nabla p_t \in \mathcal{C}(0, k; \mathbf{L}^2)$. On a alors

$$k \sum_{n=1}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h^n|^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right). \quad (5.100)$$

DÉMONSTRATION. Soit $m \in \{0, \dots, N\}$. En appliquant la proposition 1.9, on déduit de (5.3c) que

$$|\boldsymbol{\eta}_h^m|^2 \leq C h^2 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1)}^2. \quad (5.101)$$

Reportons (5.101) et l'estimation (5.63) dans (5.4b). On obtient

$$|\mathbf{e}_h^m|^2 \leq 2 |\boldsymbol{\epsilon}_h^m|^2 + 2 |\boldsymbol{\eta}_h^m|^2 \leq C \left(h^2 + k^2 + \frac{h^2}{k^2} \right). \quad (5.102)$$

D'autre part, d'après les définitions (5.2a) et (5.5a), on a

$$\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \tilde{\mathbf{e}}_h^m = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^m;$$

en utilisant (5.63) on en déduit

$$k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \tilde{\mathbf{e}}_h^m\|_h^2 = k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^m\|_h^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right). \quad (5.103)$$

En combinant (5.102) et (5.103) on obtient (5.99). Montrons (5.100). En utilisant la stabilité de l'opérateur $\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}}$ pour la norme L^2 , l'équation (5.3b) et la proposition 1.7 on a

$$|\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} \xi_h^m| \leq |\xi_h^m| \leq C h^2 \|p\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1)}. \quad (5.104)$$

D'après (5.4c) on a

$$k \sum_{n=1}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h^n|^2 \leq 2 k \sum_{n=1}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} \xi_h^n|^2 + 2 k \sum_{n=1}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} \pi_h^n|^2 \quad (5.105)$$

En reportant (5.92) et (5.104) dans (5.105), on obtient (5.100). ■

5.3 Estimation des erreurs pour le schéma VF-BDF

Pour le schéma **VF-BDF**, on établit dans la section 5.3.1 les équations vérifiées par les erreurs. Ces équations font apparaître des erreurs de consistance qui sont estimées dans la section 5.3.2. On en déduit les estimations d'erreur de la section 5.3.3 (théorème 5.2).

5.3.1 Équations vérifiées par les erreurs pour le schéma VF-BDF

On cherche les équations vérifiées par les termes $\tilde{\epsilon}_h^m$, ϵ_h^m et π_h^m définis pour $m \in \{0, \dots, N\}$ par (5.5a), (5.5b) et (5.5c).

Soit $n \in \{1, \dots, N-1\}$. L'équation (5.6) s'écrit

$$\frac{3\mathbf{u}(t_{n+1}) - 4\mathbf{u}(t_n) + \mathbf{u}(t_{n-1}))}{2k} - \Delta\mathbf{u}(t_{n+1}) + \nabla p(t_n) - \mathbf{f}(t_{n+1}) = \mathbf{R}_{(\mathbf{BDF})}^{n+1}, \quad (5.106)$$

avec

$$\mathbf{R}_{(\mathbf{BDF})}^{n+1} = \frac{3\mathbf{u}(t_{n+1}) - 4\mathbf{u}(t_n) + \mathbf{u}(t_{n-1}))}{2k} - \mathbf{u}_t(t_{n+1}) + \nabla(p(t_n) - p(t_{n+1})). \quad (5.107)$$

En appliquant l'opérateur $\Pi_{\mathbf{P}_0}$ à (5.106) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{3\Pi_{\mathbf{P}_0}\mathbf{u}(t_{n+1}) - 4\Pi_{\mathbf{P}_0}\mathbf{u}(t_n) + \Pi_{\mathbf{P}_0}\mathbf{u}(t_{n-1}))}{2k} - \Pi_{\mathbf{P}_0}\Delta\mathbf{u}(t_{n+1}) \\ + \Pi_{\mathbf{P}_0}\nabla p(t_n) - \mathbf{f}_h^{n+1} = \Pi_{\mathbf{P}_0}\mathbf{R}_{(\mathbf{BDF})}^{n+1}. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Rappelons l'équation (2.4)

$$\frac{3\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{2k} - \tilde{\Delta}_h\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} + \nabla_h p_h^n - \mathbf{f}_h^{n+1} = 0. \quad (5.109)$$

Prenons la différence entre (5.108) et (5.109). On obtient

$$\begin{aligned} \frac{3(\Pi_{\mathbf{P}_0}\mathbf{u}(t_{n+1}) - \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1})}{2k} - \frac{2(\Pi_{\mathbf{P}_0}\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_h^n)}{k} + \frac{\Pi_{\mathbf{P}_0}\mathbf{u}(t_{n-1}) - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2k} \\ - \left(\Pi_{\mathbf{P}_0}\Delta\mathbf{u}(t_{n+1}) - \tilde{\Delta}_h\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} \right) + (\Pi_{\mathbf{P}_0}\nabla p(t_n) - \nabla_h p_h^n) = \Pi_{\mathbf{P}_0}\mathbf{R}_{(\mathbf{BDF})}^{n+1}. \end{aligned} \quad (5.110)$$

D'après les définitions (5.5a) et (5.12) on a

$$\Pi_{\mathbf{P}_0}\mathbf{u}(t_{n+1}) - \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} = \tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \mathbf{I}_h^{n+1}. \quad (5.111)$$

D'après les définitions (5.5b) et (5.13) on a

$$\Pi_{\mathbf{P}_0}\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_h^n = \epsilon_h^n - \mathbf{D}_h^n; \quad (5.112)$$

de même

$$\Pi_{\mathbf{P}_0}\mathbf{u}(t_{n-1}) - \mathbf{u}_h^{n-1} = \epsilon_h^{n-1} - \mathbf{D}_h^{n-1}. \quad (5.113)$$

D'après (5.18) et (5.19) on a

$$\Pi_{\mathbf{P}_0}\Delta\mathbf{u}(t_{n+1}) - \tilde{\Delta}_h\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} = \mathbf{L}_h^{n+1} + \tilde{\Delta}_h\tilde{\epsilon}_h^{n+1} \quad (5.114)$$

et

$$\Pi_{\mathbf{P}_0}\nabla p(t_n) - \nabla_h p_h^n = -\mathbf{G}_h^n + \nabla_h \pi_h^n. \quad (5.115)$$

Le dernier terme dans (5.110) correspond à la discrétisation en temps. Pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$, posons

$$\mathbf{T}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1} = \Pi_{\mathbf{P}_0} \mathbf{R}_{(\mathbf{BDF})}^{n+1}. \quad (5.116)$$

On déduit de (5.107)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{h,(\mathbf{BDF})}^m &= \Pi_{\mathbf{P}_0} \left(\frac{3 \mathbf{u}(t_m) - 4 \mathbf{u}(t_{m-1}) + \mathbf{u}(t_{m-2})}{2k} - \mathbf{u}_t(t_m) \right) \\ &+ \Pi_{\mathbf{P}_0} \nabla(p(t_{m-1}) - p(t_m)). \end{aligned} \quad (5.117)$$

Reportons (5.111)–(5.116) dans (5.110). On obtient

$$\begin{aligned} &\frac{3 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1} - 4 \boldsymbol{\epsilon}_h^n + \boldsymbol{\epsilon}_h^{n-1}}{2k} - \tilde{\boldsymbol{\Delta}}_h \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1} + \nabla_h \pi_h^n \\ &= \frac{1}{2k} (3 \mathbf{I}_h^{n+1} + 4 \mathbf{D}_h^n - \mathbf{D}_h^{n-1}) + \mathbf{L}_h^{n+1} + \mathbf{G}_h^n + \mathbf{T}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}. \end{aligned}$$

Cette équation fait apparaître la quantité suivante.

Définition : Pour tout $m \in \{2, \dots, N\}$, l'erreur de consistance $\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^m \in \mathbf{P}_0$ est définie par

$$\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^m = \frac{1}{2k} (3 \mathbf{I}_h^m + 4 \mathbf{D}_h^{m-1} - \mathbf{D}_h^{m-2}) + \mathbf{L}_h^m + \mathbf{G}_h^{m-1} + \mathbf{T}_{h,(\mathbf{BDF})}^m. \quad (5.118)$$

Les termes \mathbf{I}_h^m , \mathbf{D}_h^{m-1} et \mathbf{D}_h^{m-2} , \mathbf{L}_h^m , \mathbf{G}_h^{m-1} et $\mathbf{T}_{h,(\mathbf{BDF})}^m$ sont donnés respectivement par (5.12), (5.13), (5.16), (5.17) et (5.117). Si $m = 1$ on pose $\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^1 = \mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^2$.

On a ainsi montré :

Proposition 5.12 *On suppose que le schéma utilisé est VF-BDF et que l'hypothèse (HR) est vérifiée. Pour tout $n \in \{1, \dots, N-1\}$ on a*

$$\frac{3 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1} - 4 \boldsymbol{\epsilon}_h^n + \boldsymbol{\epsilon}_h^{n-1}}{2k} - \tilde{\boldsymbol{\Delta}}_h \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1} + \nabla_h \pi_h^n = \mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}. \quad (5.119)$$

Intéressons-nous maintenant à l'étape de projection. Soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Rappelons l'équation de la projection (2.6)

$$\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} = \mathbf{u}_h^{n+1} + \frac{2k}{3} \nabla_h(p_h^{n+1} - p_h^n). \quad (5.120)$$

Prenons la différence entre les équations (5.27) et (5.120). En utilisant les définitions (5.5a) et (5.5b) on obtient

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_h^{n+1} - \frac{2k}{3} \nabla_h(p_h^{n+1} - p_h^n) + \mathbf{D}_h^{n+1} + \mathbf{I}_h^{n+1}.$$

En utilisant (5.30) on en déduit

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_h^{n+1} + \frac{2k}{3} \nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n) + \mathbf{I}_h^{n+1} + \mathbf{D}_h^{n+1} - \frac{2k}{3} \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0}(p(t_{n+1}) - p(t_n))).$$

Cette équation fait apparaître la quantité suivante.

Définition : Pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$, l'erreur de consistance $\mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^m \in \mathbf{P}_0$ est définie par

$$\mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^m = \mathbf{I}_h^m + \mathbf{D}_h^m - \frac{2k}{3} \nabla_h (\tilde{\Pi}_{P_0}(p(t_m) - p(t_{m-1}))). \quad (5.121)$$

Les termes \mathbf{I}_h^m et \mathbf{D}_h^m sont donnés respectivement par (5.12) et (5.13).

On a ainsi montré :

Proposition 5.13 *On suppose que le schéma utilisé est VF-BDF et que l'hypothèse (HR) vérifiée. On a pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$*

$$\tilde{\epsilon}_h^{n+1} = \epsilon_h^{n+1} + \frac{2k}{3} \nabla_h (\pi_h^{n+1} - \pi_h^n) + \mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}. \quad (5.122)$$

5.3.2 Estimation des erreurs de consistance pour le schéma VF-BDF

Les équations vérifiées par les erreurs (section 5.3.1) font apparaître des erreurs de consistance, que l'on estime ici.

Rappelons que les erreurs de consistance $\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^m$ et $\mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^m$ sont définies pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$ par (5.118) et (5.121).

Proposition 5.14 *On suppose que le maillage vérifie (HM) et que (\mathbf{u}, p) vérifient (HR). Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$k \sum_{n=2}^N |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right). \quad (5.123)$$

DÉMONSTRATION. Soit $n \in \{2, \dots, N\}$. D'après la définition (5.118) on a

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 &\leq \frac{27}{2k^2} |\mathbf{I}_h^n|^2 + \frac{24}{k^2} |\mathbf{D}_h^{n-1}|^2 + \frac{3}{2} |\mathbf{D}_h^{n-2}|^2 + 6 |\mathbf{L}_h^n|^2 + 6 |\mathbf{G}_h^{n-1}|^2 \\ &\quad + 6 |\mathbf{T}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2. \end{aligned} \quad (5.124)$$

D'après (5.33) et (5.34) on a

$$\begin{aligned} &\frac{27}{2k^2} |\mathbf{I}_h^n|^2 + \frac{24}{k^2} |\mathbf{D}_h^{n-1}|^2 + \frac{3}{2} |\mathbf{D}_h^{n-2}|^2 + 6 |\mathbf{L}_h^n|^2 + 6 |\mathbf{G}_h^{n-1}|^2 \\ &\leq C h^2 (\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}^2 + \|p\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}^2) + C \frac{h^2}{k^2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}^2. \end{aligned} \quad (5.125)$$

D'après la définition (5.117) on a

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 &\leq 2 \left| \frac{3\mathbf{u}(t_n) - 4\mathbf{u}(t_{n-1}) + \mathbf{u}(t_{n-2})}{2k} - \mathbf{u}_t(t_n) \right|^2 \\ &\quad + 2 |\nabla(p(t_n) - p(t_{n-1}))|^2. \end{aligned}$$

En utilisant les développements de Taylor

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t_n) &= \mathbf{u}(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}_t(s) ds, & \mathbf{u}(t_{n-1}) &= \mathbf{u}(t_{n-2}) + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \mathbf{u}_t(s) ds, \\ \mathbf{u}_t(s) &= \mathbf{u}_t(t_n) + \int_{t_n}^s \mathbf{u}_{tt}(x) dx, & p(t_n) &= p(t_{n-1}) + \int_{t_n}^{t_{n-1}} p_t(s) ds, \end{aligned}$$

ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$|\mathbf{T}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 \leq C k \int_{t_{n-2}}^{t_n} (|\mathbf{u}_{tt}(s)|^2 + |\nabla p_t|^2) ds. \quad (5.126)$$

Reportons (5.125) et (5.126) dans (5.124). En sommant de $n = 2$ à N , on obtient

$$\begin{aligned} k \sum_{n=2}^N |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 &\leq C k^2 (\|\mathbf{u}_{tt}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2)}^2 + \|\nabla p_t\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2)}^2) + C \frac{h^2}{k^2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}^2 \\ &+ C h^2 (\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}^2 + \|p\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2)}^2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 5.15 *On suppose que le maillage vérifie (HM) et que (\mathbf{u}, p) vérifient (HR). Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$k \sum_{n=2}^N |\delta \mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 \leq C (k^4 + k^2 h^2 + h^2). \quad (5.127)$$

DÉMONSTRATION. Soit $n \in \{3, \dots, N\}$. En appliquant l'opérateur δ à la définition (5.23) on obtient

$$\delta \mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^n = \frac{1}{2k} (3 \delta \mathbf{I}_h^n + 4 \delta \mathbf{D}_h^{n-1} - \delta \mathbf{D}_h^{n-2}) + \delta \mathbf{L}_h^n + \delta \mathbf{G}_h^{n-1} + \delta \mathbf{T}_{h,(\mathbf{BDF})}^n.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |\delta \mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 &\leq \frac{27}{2k^2} |\delta \mathbf{I}_h^n|^2 + \frac{24}{k^2} |\delta \mathbf{D}_h^{n-1}|^2 + \frac{3}{2} |\delta \mathbf{D}_h^{n-2}|^2 + 6 |\delta \mathbf{L}_h^n|^2 + 6 |\delta \mathbf{G}_h^{n-1}|^2 \\ &+ 6 |\delta \mathbf{T}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2. \end{aligned} \quad (5.128)$$

D'après (5.35) et (5.36)

$$\begin{aligned} &\frac{27}{2k^2} |\delta \mathbf{I}_h^n|^2 + \frac{24}{k^2} |\delta \mathbf{D}_h^{n-1}|^2 + \frac{3}{2} |\delta \mathbf{D}_h^{n-2}|^2 + 6 |\delta \mathbf{L}_h^n|^2 + 6 |\delta \mathbf{G}_h^{n-1}|^2 \\ &\leq C \left(h^2 k + \frac{h^2}{k} \right) \int_{t_{m-2}}^{t_m} \|\mathbf{u}_t(s)\|_2^2 ds + C h^2 k \int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}} \|p_t(s)\|_2^2 ds. \end{aligned} \quad (5.129)$$

D'après la définition (5.117) on a

$$\begin{aligned} |\delta \mathbf{T}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 &\leq 2 \left| \frac{3\mathbf{u}(t_n) - 7\mathbf{u}(t_{n-1}) + 5\mathbf{u}(t_{n-2})}{2k} - \mathbf{u}_t(t_n) + \mathbf{u}_t(t_{n-1}) \right|^2 \\ &+ 2 |\nabla(p(t_n) - 2p(t_{n-1}) + p(t_{n-2}))|^2. \end{aligned}$$

En utilisant des développements de Taylor on en déduit

$$|\delta \mathbf{T}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 \leq C k^3 \int_{t_{n-3}}^{t_n} (|\mathbf{u}_{ttt}(s)|^2 + |\nabla p_{tt}(s)|^2) ds. \quad (5.130)$$

Reportons (5.130) et (5.129) dans (5.128). En sommant de $n = 3$ à N il vient

$$\begin{aligned} k \sum_{n=3}^N |\delta \mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^m|^2 &\leq C k^4 (\|\mathbf{u}_{ttt}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2)} + \|\nabla p_{tt}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2)}) \\ &\quad + C h^2 k^2 (\|\mathbf{u}_t\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^2)}^2 + \|p_t\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^2)}^2) + C h^2 \|\mathbf{u}_t\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^2)}^2. \end{aligned}$$

De plus $\delta \mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^2 = \mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^2 - \mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^1 = \mathbf{0}$. On obtient ainsi (5.127). ■

Les preuves des propositions suivantes sont très proches de celles des propositions 5.7 et 5.8 correspondant au schéma **VF-I**.

Proposition 5.16 *On suppose que le maillage vérifie (HM) et que (\mathbf{u}, p) vérifient (HR). Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$*

$$|\mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^m|^2 \leq C (k^4 + h^2). \quad (5.131)$$

Proposition 5.17 *On suppose que le maillage vérifie (HM) et que (\mathbf{u}, p) vérifient (HR). Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$k \sum_{n=2}^N |\delta \mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 \leq C (k^6 + k^2 h^2). \quad (5.132)$$

5.3.3 Estimations d'erreur pour le schéma VF-BDF

Des équations vérifiées par les erreurs (section 5.3.1) et des estimations des erreurs de consistance (section 5.3.2) on déduit les estimations d'erreur pour le schéma **VF-BDF** (théorème 5.2).

Rappelons que les termes $\tilde{\epsilon}_h^m$, ϵ_h^m et π_h^m sont définis pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$ par (5.5a), (5.5b) et (5.5c). La propriété suivante est l'analogue pour les erreurs de la propriété d'orthogonalité de la projection (proposition 2.1).

Proposition 5.18 *Pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$ et tout $n \in \{0, \dots, N\}$ on a*

$$(\epsilon_h^m, \nabla_h \pi_h^n) = 0. \quad (5.133)$$

Pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$ on a

$$|\tilde{\epsilon}_h^m|^2 - |\epsilon_h^m|^2 + |\tilde{\epsilon}_h^m - \epsilon_h^m|^2 = 2(\mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^m, \epsilon_h^m). \quad (5.134)$$

DÉMONSTRATION. Elle est très proche de celle faite pour la proposition 5.1 correspondant au schéma **VF-I**. ■

On estime maintenant les termes $\tilde{\epsilon}_h^m$, ϵ_h^m et π_h^m .

Proposition 5.19 *On considère le schéma VF-BDF avec $k < \frac{1}{5}$. On suppose que le maillage vérifie (HM), que (\mathbf{u}, p) vérifient (HR) et que les valeurs initiales du schéma vérifient (HIE). Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$*

$$|\epsilon_h^m|^2 + k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\epsilon}_h^n\|_h^2 + k^2 |\nabla_h \pi_h^m|^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right). \quad (5.135)$$

DÉMONSTRATION. Soit $n \in \{1, \dots, N-1\}$. En multipliant (5.119) par $4k \tilde{\epsilon}_h^{n+1}$ on obtient

$$\begin{aligned} & 4k \left(\frac{3\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - 4\epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}}{2k}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1} \right) - 4k (\tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^{n+1}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) + 4k (\nabla_h \pi_h^n, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) \\ &= 4k (\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}). \end{aligned} \quad (5.136)$$

Nous allons estimer chaque terme dans (5.136). On a

$$\begin{aligned} 4k \left(\frac{3\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - 4\epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}}{2k}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1} \right) &= 2(3\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - 4\epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) \\ &= 2(3(\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}) + 3\epsilon_h^{n+1} - 4\epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) \\ &= 6(\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) + 2(3\epsilon_h^{n+1} - 4\epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) \\ &= A + B. \end{aligned} \quad (5.137)$$

En utilisant une identité algébrique on a

$$A = 3(|\tilde{\epsilon}_h^{n+1}|^2 - |\epsilon_h^{n+1}|^2 + |\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}|^2);$$

or, d'après (5.134)

$$|\tilde{\epsilon}_h^{n+1}|^2 - |\epsilon_h^{n+1}|^2 = |\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}|^2 + 2(\mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}, \epsilon_h^{n+1}).$$

On en déduit

$$A = 6|\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}|^2 + 6(\mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}, \epsilon_h^{n+1}).$$

Soit, en utilisant l'inégalité de Young :

$$A \leq 6|\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}|^2 + k|\epsilon_h^{n+1}|^2 + \frac{C}{k} |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}|^2. \quad (5.138)$$

D'autre part en utilisant la décomposition

$$\tilde{\epsilon}_h^{n+1} = \epsilon_h^{n+1} + (\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1})$$

on a

$$B = B_1 + B_2 \quad (5.139)$$

avec

$$B_1 = 2(3\epsilon_h^{n+1} - 4\epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1})$$

et

$$B_2 = 2(3\epsilon_h^{n+1} - 4\epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}, \epsilon_h^{n+1}).$$

En utilisant une identité algébrique on a

$$B_2 = |\epsilon_h^{n+1}|^2 - |\epsilon_h^n|^2 + |2\epsilon_h^{n+1} - \epsilon_h^n|^2 - |2\epsilon_h^n - \epsilon_h^{n-1}|^2 + |\epsilon_h^{n+1} - 2\epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}|^2. \quad (5.140)$$

D'après (5.122) on a

$$\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1} = \frac{2k}{3} \nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n) + \mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1};$$

on en déduit

$$B_1 = B_{11} + B_{12} \quad (5.141)$$

avec

$$B_{11} = \frac{4k}{3} (3\epsilon_h^{n+1} - 4\epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}, \nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n))$$

et

$$B_{12} = 2(3\epsilon_h^{n+1} - 4\epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}, \mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}).$$

D'après (5.133) on a

$$B_{11} = 0.$$

De plus

$$B_{12} = (-2\epsilon_h^{n+1} + 4(2\epsilon_h^{n+1} - \epsilon_h^n) - 2(2\epsilon_h^n - \epsilon_h^{n-1}), \mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}).$$

En utilisant l'inégalité de Young, on déduit donc de (5.141)

$$B_1 \leq k(|\epsilon_h^{n+1}|^2 + |2\epsilon_h^{n+1} - \epsilon_h^n|^2 + |2\epsilon_h^n - \epsilon_h^{n-1}|^2) + \frac{C}{k} |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}|^2. \quad (5.142)$$

Ceci conclut l'estimation du terme (5.137).

D'après la proposition 3.9 on a

$$-4k(\tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^{n+1}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) = 4k \|\tilde{\epsilon}_h^{n+1}\|_h^2. \quad (5.143)$$

Intéressons-nous maintenant au terme de pression. D'après (5.133) on a

$$\begin{aligned} 4k(\nabla_h \pi_h^n, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) &= 4k(\nabla_h \pi_h^n, \tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}) + 4k(\nabla_h \pi_h^n, \epsilon_h^{n+1}) \\ &= 4k(\nabla_h \pi_h^n, \tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}); \end{aligned}$$

or, d'après (5.122) :

$$\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1} = \frac{2k}{3} \nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n) + \mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}.$$

On en déduit

$$4k(\nabla_h \pi_h^n, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) = \frac{8k^2}{3} (\nabla_h \pi_h^n, \nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)) + 4k(\nabla_h \pi_h^n, \mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}).$$

Soit, en utilisant une identité algébrique :

$$\begin{aligned} 4k(\nabla_h \pi_h^n, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) &= \frac{4k^2}{3} (|\nabla_h \pi_h^{n+1}|^2 - |\nabla_h \pi_h^n|^2 - |\nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)|^2) \\ &\quad + 4k(\nabla_h \pi_h^n, \mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}). \end{aligned} \quad (5.144)$$

On a

$$4k (\nabla_h \pi_h^n, \mathbf{P}_h^{n+1}) \leq k^3 |\nabla_h \pi_h^n|^2 + \frac{4}{k} |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}|^2. \quad (5.145)$$

D'autre part, en multipliant (5.122) par $4k \nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)$, il vient

$$\frac{8k^2}{3} |\nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)|^2 = 4k (\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}, \nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)) - 4k (\nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n), \mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}).$$

Soit, en utilisant l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} \frac{8k^2}{3} |\nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)|^2 &\leq \frac{4k^2}{3} |\nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)|^2 + 3 |\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}|^2 \\ &\quad + 2k^3 (|\nabla_h \pi_h^{n+1}|^2 + |\nabla_h \pi_h^n|^2) + \frac{4}{k} |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}|^2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{4k^2}{3} |\nabla_h(\pi_h^{n+1} - \pi_h^n)|^2 \leq 3 |\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}|^2 + 2k^3 (|\nabla_h \pi_h^{n+1}|^2 + |\nabla_h \pi_h^n|^2) + \frac{4}{k} |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}|^2 \quad (5.146)$$

En combinant (5.144), (5.145), et (5.146) il vient

$$\begin{aligned} \frac{4k^2}{3} (|\nabla_h \pi_h^{n+1}|^2 - |\nabla_h \pi_h^n|^2) - 4k (\nabla_h \pi_h^n, \epsilon_h^{n+1}) &\leq 3k^3 (|\nabla_h \pi_h^{n+1}|^2 + |\nabla_h \pi_h^n|^2) \\ &\quad + \frac{1}{4k} |\mathbf{P}_h^{n+1}|^2 + 3 |\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}|^2. \end{aligned} \quad (5.147)$$

Enfin, d'après la proposition 1.1, on a

$$k (\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) \leq k |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}| |\tilde{\epsilon}_h^{n+1}| \leq Ck |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}| \|\tilde{\epsilon}_h^{n+1}\|_h.$$

Soit, en utilisant l'inégalité de Young

$$k (\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}, \tilde{\epsilon}_h^{n+1}) \leq 3k \|\tilde{\epsilon}_h^{n+1}\|_h^2 + Ck |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}|^2. \quad (5.148)$$

En additionnant (5.137)– (5.140), (5.142), (5.143), (5.147) et (5.148) on déduit de (5.136)

$$\begin{aligned} |\epsilon_h^{n+1}|^2 - |\epsilon_h^n|^2 + |2\epsilon_h^{n+1} - \epsilon_h^n|^2 - |2\epsilon_h^n - \epsilon_h^{n-1}|^2 + k \|\tilde{\epsilon}_h^{n+1}\|_h^2 + \frac{4k^2}{3} (|\nabla_h \pi_h^{n+1}|^2 - |\nabla_h \pi_h^n|^2) \\ \leq 2k |\tilde{\epsilon}_h^{n+1}|^2 + k (|2\epsilon_h^{n+1} - \epsilon_h^n|^2 + |2\epsilon_h^n - \epsilon_h^{n-1}|^2) + 3k^3 (|\nabla_h \pi_h^n|^2 + |\nabla_h \pi_h^{n+1}|^2) \\ + \frac{1}{4k} |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}|^2 + Ck |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}|^2. \end{aligned}$$

Soit $m \in \{2, \dots, N\}$. En sommant de $n = 1$ à $m - 1$ on obtient

$$\begin{aligned} |\epsilon_h^m|^2 + |2\epsilon_h^m - \epsilon_h^{m-1}|^2 + k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\epsilon}_h^n\|_h^2 + \frac{4k^2}{3} |\nabla_h \pi_h^m|^2 \\ \leq \beta + 2k \sum_{n=1}^m (|\epsilon_h^n|^2 + |2\epsilon_h^n - \epsilon_h^{n-1}|^2) + 6k^3 \sum_{n=1}^m |\nabla_h \pi_h^n|^2 \end{aligned}$$

avec

$$\beta = |\epsilon_h^1|^2 + |2\epsilon_h^1 - \epsilon_h^0|^2 + \frac{4k^2}{3} |\nabla_h \pi_h^1|^2 + \frac{C}{k} \sum_{n=2}^N |\mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 + Ck \sum_{n=2}^N |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2.$$

Les valeurs \mathbf{u}_h^0 , \mathbf{u}_h^1 et p_h^1 sont celles données par le schéma **VF-I**. On déduit donc de (5.63)

$$|\epsilon_h^1|^2 + |2\epsilon_h^1 - \epsilon_h^0|^2 + \frac{4k^2}{3} |\nabla_h \pi_h^1|^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right).$$

D'après (5.123) et (5.131) on a d'autre part

$$\frac{1}{k} \sum_{n=2}^N |\mathbf{P}_h^n|^2 + k \sum_{n=2}^N |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right).$$

On obtient ainsi

$$\beta \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right).$$

Si $k < \frac{1}{5}$, en appliquant le lemme 5.2, on en déduit (5.135) pour $m \in \{2, \dots, N\}$. Pour $m = 1$, (5.135) découle de l'estimation (5.63) pour le schéma **VF-I**. ■

Proposition 5.20 *On considère le schéma **VF-BDF** avec $k < \frac{1}{5}$. On suppose que le maillage vérifie **(HM)**, que (\mathbf{u}, p) vérifient **(HR)**, et que les valeurs initiales du schéma vérifient **(HIE)**. On suppose de plus que $\tilde{\mathbf{u}}_h^0 = \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0$ et que $\mathbf{u}_{tt} \in \mathcal{C}(0, 2k; \mathbf{L}^2)$, $\nabla p_t \in \mathcal{C}(0, 2k; \mathbf{L}^2)$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$*

$$|\delta \epsilon_h^m|^2 \leq C (k^4 + h^2 k^2 + h^2). \quad (5.149)$$

DÉMONSTRATION. En appliquant l'opérateur δ à (5.119) et (5.122) on obtient pour tout $n \in \{2, \dots, N-1\}$

$$\frac{3\delta \tilde{\epsilon}_h^{n+1} - 4\delta \epsilon_h^n + \delta \epsilon_h^{n-1}}{2k} - \tilde{\Delta}_h \delta \tilde{\epsilon}_h^{n+1} + \nabla_h (\delta \pi_h^n) = \delta \mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1} \quad (5.150)$$

et pour tout $n \in \{1, \dots, N-1\}$

$$\delta \tilde{\epsilon}_h^{n+1} = \delta \epsilon_h^{n+1} + \frac{2k}{3} \nabla_h (\delta \pi_h^{n+1} - \delta \pi_h^n) + \delta \mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}.$$

On définit ϵ_h^{-1} par

$$\epsilon_h^{-1} = 2\epsilon_h^0 - \epsilon_h^1 - k \nabla_h (\delta \pi_h^1) - \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^1 - 2k \mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^1 + 2k \mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^2. \quad (5.151)$$

D'autre part les valeurs $\tilde{\mathbf{u}}_h^1$, \mathbf{u}_h^1 , p_h^1 sont données par le schéma **VF-I**. On a donc d'après (5.24) et (5.32)

$$\frac{\tilde{\epsilon}_h^1 - \epsilon_h^0}{k} - \tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^1 + \nabla_h \pi_h^0 = \mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^1 \quad (5.152)$$

et

$$\tilde{\epsilon}_h^1 = \epsilon_h^1 + k \nabla_h(\delta\pi_h^1) + \mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^1. \quad (5.153)$$

En combinant (5.151), (5.152) et (5.153), on vérifie que (5.150) est encore valable pour $n = 1$. En procédant ensuite comme pour la preuve de (5.135) on obtient que pour tout $m \in \{2, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} |\delta\epsilon_h^m|^2 &\leq C (|\delta\epsilon_h^1|^2 + |2\delta\epsilon_h^1 - \delta\epsilon_h^0|^2 + \frac{4k^2}{3} |\nabla_h(\delta\pi_h^1)|^2) \\ &\quad + \frac{C}{k} \sum_{n=2}^N |\delta\mathbf{P}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 + Ck \sum_{n=2}^N |\delta\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2. \end{aligned} \quad (5.154)$$

Estimons le second membre dans l'équation précédente. Les valeurs \mathbf{u}_h^0 , \mathbf{u}_h^1 et p_h^1 sont données par le schéma **VF-I**. On déduit donc de (5.79)

$$|\delta\epsilon_h^1|^2 + \frac{4k^2}{3} |\nabla_h(\delta\pi_h^1)|^2 \leq C(k^4 + h^2k^2 + h^2). \quad (5.155)$$

D'après (5.151) on a d'autre part

$$\begin{aligned} |2\delta\epsilon_h^1 - \delta\epsilon_h^0|^2 &\leq 5|\delta\epsilon_h^0|^2 + 5k^2 |\nabla_h(\delta\pi_h^1)|^2 \\ &\quad + 5|\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^1|^2 + 20k^2 |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^1|^2 + 20k^2 |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^2|^2. \end{aligned} \quad (5.156)$$

D'après (5.79) et (5.89) on a

$$5|\delta\epsilon_h^0|^2 + 5k^2 |\nabla_h(\delta\pi_h^1)|^2 \leq C(k^4 + k^2h^2 + h^2)$$

et d'après (5.86), (5.87) on a

$$5|\mathbf{P}_{h,(\mathbf{I})}^1|^2 + 20k^2 |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{I})}^1|^2 \leq C(k^4 + k^2h^2 + h^2);$$

enfin en utilisant (5.124), (5.125) et (5.126)

$$k^2 |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^2|^2 \leq Ck^4 (\|\mathbf{u}_t\|_{L^\infty(0,2k;\mathbf{L}^2)} + \|\nabla p_t\|_{L^\infty(0,2k;\mathbf{L}^2)}).$$

En reportant ces estimations dans (5.156) on obtient

$$|2\delta\epsilon_h^1 - \delta\epsilon_h^0|^2 \leq C(k^4 + k^2h^2 + h^2). \quad (5.157)$$

D'après (5.127) et (5.132) on a par ailleurs

$$\frac{1}{k} \sum_{n=2}^N |\delta\mathbf{P}_h^n|^2 + k \sum_{n=2}^N |\delta\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 \leq C(k^4 + k^2h^2 + h^2). \quad (5.158)$$

En reportant (5.155), (5.157) et (5.158) dans (5.154) on obtient (5.149) pour $m \in \{2, \dots, N\}$. Pour $m = 1$, (5.149) découle de l'estimation (5.79) pour le schéma **VF-I**. ■

Proposition 5.21 *On considère le schéma VF-BDF avec $k < \frac{1}{5}$. On suppose que le maillage est uniforme, que (\mathbf{u}, p) vérifient (HR) et que les valeurs initiales du schéma vérifient (HIE). On suppose de plus que $\tilde{\mathbf{u}}_h^0 = \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0$ et que $\mathbf{u}_{tt} \in \mathcal{C}(0, 2k; \mathbf{L}^2)$, $\nabla p_t \in \mathcal{C}(0, 2k; \mathbf{L}^2)$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$*

$$k \sum_{n=1}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} \pi_h^n|^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right). \quad (5.159)$$

DÉMONSTRATION. Soit $n \in \{1, \dots, N-1\}$. D'après (5.122) on a

$$\nabla_h \pi_h^{n+1} = \nabla_h \pi_h^n + \frac{3}{2} \frac{\tilde{\epsilon}_h^{n+1} - \epsilon_h^{n+1}}{k} - \frac{1}{k} \mathbf{P}_h^{n+1}.$$

Or, d'après (5.119)

$$\nabla_h \pi_h^n = -\frac{3 \tilde{\epsilon}_h^{n+1} - 4 \epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}}{2k} + \tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^{n+1} + \mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}.$$

On en déduit

$$\nabla_h \pi_h^{n+1} = -\frac{3 \epsilon_h^{n+1} - 4 \epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}}{2k} + \tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^{n+1} + \mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1} - \frac{1}{k} \mathbf{P}_h^{n+1}. \quad (5.160)$$

D'après la condition inf-sup (3.60), il existe $\mathbf{v}_h \in \mathbf{P}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ vérifiant

$$|\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} \pi_h^{n+1}| \|\mathbf{v}_h\|_h \leq -(\pi_h^{n+1}, \operatorname{div}_h \mathbf{v}_h) = (\nabla_h \pi_h^{n+1}, \mathbf{v}_h). \quad (5.161)$$

Multiplions (5.160) par \mathbf{v}_h . Il vient

$$\begin{aligned} (\nabla_h \pi_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) &= -\left(\frac{3 \epsilon_h^{n+1} - 4 \epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}}{2k}, \mathbf{v}_h \right) + (\tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) \\ &\quad + \left(\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1} - \frac{1}{k} \mathbf{P}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h \right). \end{aligned}$$

D'après la proposition 1.1 on a

$$\begin{aligned} -\left(\frac{3 \epsilon_h^{n+1} - 4 \epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}}{2k}, \mathbf{v}_h \right) &\leq \frac{|3 \tilde{\epsilon}_h^{n+1} - 4 \epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}|}{2k} |\mathbf{v}_h| \\ &\leq C \frac{|3 \tilde{\epsilon}_h^{n+1} - 4 \epsilon_h^n + \epsilon_h^{n-1}|}{2k} \|\mathbf{v}_h\|_h, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1} - \frac{1}{k} \mathbf{P}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h \right) &\leq \left(|\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}| + \frac{1}{k} |\mathbf{P}_h^{n+1}| \right) |\mathbf{v}_h| \\ &\leq C \left(|\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}| + \frac{1}{k} |\mathbf{P}_h^{n+1}| \right) \|\mathbf{v}_h\|_h. \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.9 on a

$$(\tilde{\Delta}_h \tilde{\epsilon}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) \leq \|\tilde{\epsilon}_h^{n+1}\|_h \|\mathbf{v}_h\|_h.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} (\nabla_h \pi_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) &\leq C \left(\|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1}\|_h + \frac{|3\boldsymbol{\epsilon}_h^{n+1} - 4\boldsymbol{\epsilon}_h^n + \boldsymbol{\epsilon}_h^{n-1}|}{2k} \right) \|\mathbf{v}_h\|_h \\ &\quad + \left(|\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}| + \frac{1}{k} |\mathbf{P}_h^{n+1}| \right) \|\mathbf{v}_h\|_h. \end{aligned} \quad (5.162)$$

En comparant (5.161) et (5.162) on obtient pour tout $n \in \{1, \dots, N-1\}$

$$|\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} \pi_h^{n+1}| \leq \|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^{n+1}\|_h + \frac{|3\boldsymbol{\epsilon}_h^{n+1} - 4\boldsymbol{\epsilon}_h^n + \boldsymbol{\epsilon}_h^{n-1}|}{2k} + |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^{n+1}| + \frac{1}{k} |\mathbf{P}_h^{n+1}|.$$

Soit $m \in \{2, \dots, N\}$. En sommant de $n = 1$ à $m-1$ on obtient

$$\begin{aligned} k \sum_{n=2}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} \pi_h^n|^2 &\leq 2k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^n\|_h^2 + 2k \sum_{n=1}^{m-1} \frac{|3\boldsymbol{\epsilon}_h^{n+1} - 4\boldsymbol{\epsilon}_h^n + \boldsymbol{\epsilon}_h^{n-1}|^2}{4k^2} \\ &\quad + 2k \sum_{n=2}^N |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 + \frac{2}{k} \sum_{n=2}^N |\mathbf{P}_h^n|^2. \end{aligned} \quad (5.163)$$

En utilisant (5.123), (5.127) et (5.135) on a

$$2k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^n\|_h^2 + 2k \sum_{n=2}^N |\mathbf{C}_{h,(\mathbf{BDF})}^n|^2 + \frac{2}{k} \sum_{n=2}^N |\mathbf{P}_h^n|^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right). \quad (5.164)$$

On déduit de (5.149)

$$\begin{aligned} k \sum_{n=1}^{m-1} \frac{|3\boldsymbol{\epsilon}_h^{n+1} - 4\boldsymbol{\epsilon}_h^n + \boldsymbol{\epsilon}_h^{n-1}|^2}{4k^2} &= k \sum_{n=1}^{m-1} \frac{|3\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\epsilon}_h^{n+1} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\epsilon}_h^n|^2}{4k^2} \leq C k \sum_{n=1}^m \frac{|\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\epsilon}_h^m|^2}{k^2} \\ &\leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right). \end{aligned} \quad (5.165)$$

En reportant (5.164) et (5.165) dans (5.163) on obtient (5.159). \blacksquare

Des estimations des termes $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_h^m$, $\boldsymbol{\epsilon}_h^m$ et π_h^m (propositions 5.19 et 5.21) on déduit les estimations suivantes pour les erreurs $\tilde{\mathbf{e}}_h^m$, \mathbf{e}_h^m et q_h^m .

Théorème 5.2 (Estimations d'erreur pour le schéma VF-BDF).

On considère le schéma VF-BDF avec $k < \frac{1}{5}$. On suppose que le maillage vérifie (HM), que (\mathbf{u}, p) vérifient (HR) et que les valeurs initiales du schéma vérifient (HIE). Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$

$$|\mathbf{e}_h^m|^2 + k \sum_{n=1}^m \|\tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \tilde{\mathbf{e}}_h^n\|_h^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right).$$

On suppose de plus que le maillage est uniforme, que $\tilde{\mathbf{u}}_h^0 = \tilde{\Pi}_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}_0$ et que $\mathbf{u}_{tt} \in \mathcal{C}(0, 2k; \mathbf{L}^2)$, $\nabla p_t \in \mathcal{C}(0, 2k; \mathbf{L}^2)$. On a alors

$$k \sum_{n=1}^m |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h^n|^2 \leq C \left(k^2 + h^2 + \frac{h^2}{k^2} \right).$$

DÉMONSTRATION. Elle est très proche de celle faite pour le schéma **VF-I** (théorème 5.1). Il suffit de combiner les propositions 5.19 et 5.21 avec des estimations des erreurs d'interpolation définies par (5.3a), (5.3b) et (5.3c). ■

Chapitre 6

Résultats numériques

On considère le domaine $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Le maillage typique utilisé est représenté sur la figure 6.1.

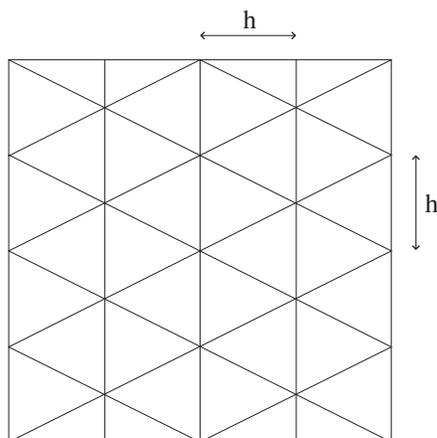


FIG. 6.1 – Maillage de $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ pour $h = \frac{1}{4}$.

On définit les fonctions $\mathbf{u} : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $p : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \begin{pmatrix} \sin^2(\pi x) \sin(2\pi y) \\ -\sin(2\pi x) \sin^2(\pi y) \end{pmatrix} \sin t, \quad p(x, y, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi y) \sin t. \quad (6.1)$$

On vérifie facilement que le couple (\mathbf{u}, p) satisfait les équations (1)–(4). Cette solution des équations de Stokes est utilisée comme solution de référence pour les résultats numériques de ce chapitre.

Rappelons les notations suivantes. Pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$, $(\tilde{\mathbf{u}}_h^m, \mathbf{u}_h^m, p_h^m)$ est la solution calculée à l'aide du schéma **VF-I**, **VF-CN** ou **VF-BDF**. Les erreurs correspondantes sont pour la vitesse

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_h^m &= \mathbf{u}(t_m) - \tilde{\mathbf{u}}_h^m, \\ \mathbf{e}_h^m &= \mathbf{u}(t_m) - \mathbf{u}_h^m, \end{aligned}$$

et pour la pression

$$q_h^m = p(t_m) - p_h^m.$$

On utilise de plus dans ce chapitre les notations suivantes. On pose

$$\tilde{\mathbf{e}}_h = (\tilde{\mathbf{e}}_h^m)_{m \in \{0, \dots, N\}}, \quad \mathbf{e}_h = (\mathbf{e}_h^m)_{m \in \{0, \dots, N\}}, \quad \mathbf{q}_h = (\mathbf{q}_h^m)_{m \in \{0, \dots, N\}}.$$

Soit $q \in [1, \infty]$. Si $f = (f_n)_{n \in \{0, \dots, N\}} \in (L^q)^{N+1}$ et $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_n)_{n \in \{0, \dots, N\}} \in (\mathbf{L}^q)^{N+1}$, on pose

$$\|f\|_{\ell^2(L^q)} = \left(k \sum_{n=0}^N \|f_n\|_{L^q}^2 \right)^{1/2}, \quad \|f\|_{\ell^\infty(L^q)} = \max_{n \in \{0, \dots, N\}} \|f_n\|_{L^q},$$

et

$$\|\mathbf{f}\|_{\ell^2(\mathbf{L}^q)} = \left(k \sum_{n=0}^N \|\mathbf{f}_n\|_{\mathbf{L}^q}^2 \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{f}\|_{\ell^\infty(\mathbf{L}^q)} = \max_{n \in \{0, \dots, N\}} \|\mathbf{f}_n\|_{\mathbf{L}^q}.$$

Si $v_h \in P_0$ et $\mathbf{v}_h \in \mathbf{P}_0$, notons

$$\|v_h\|_{H_h^1} = \|v_h\|_h, \quad \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}_h^1} = \|\mathbf{v}_h\|_h. \quad (6.2)$$

On pose alors pour tous $f_h = (f_h^n)_{n \in \{0, \dots, N\}} \in (P_0)^{N+1}$ et $\mathbf{f}_h = (\mathbf{f}_h^n)_{n \in \{0, \dots, N\}} \in (\mathbf{P}_0)^{N+1}$

$$\|f_h\|_{\ell^2(H_h^1)} = \left(k \sum_{n=0}^N \|f_h^n\|_{H_h^1}^2 \right)^{1/2}, \quad \|f_h\|_{\ell^\infty(H_h^1)} = \max_{n \in \{0, \dots, N\}} \|f_h^n\|_{H_h^1},$$

et

$$\|\mathbf{f}_h\|_{\ell^2(\mathbf{H}_h^1)} = \left(k \sum_{n=0}^N \|\mathbf{f}_h^n\|_{\mathbf{H}_h^1}^2 \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{f}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{H}_h^1)} = \max_{n \in \{0, \dots, N\}} \|\mathbf{f}_h^n\|_{\mathbf{H}_h^1}.$$

On présente ci-dessous les résultats de calculs numériques effectués à l'aide du logiciel SCILAB 3.0 (<http://www.scilab.org>). Les graphiques ont été obtenus grâce au logiciel MATLAB 6.1. Le schéma d'éléments finis de la section 6.4 a été implémenté en utilisant le logiciel FREEFEM++ (<http://www.freefem.org>).

6.1 Vérification des propriétés des opérateurs

On se propose de vérifier numériquement la consistance des opérateurs discrets associés au gradient, à la divergence et au laplacien, ainsi que la condition inf-sup (3.60).

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

Les erreurs de consistance associées à f et aux opérateurs ∇_h , div_h et $\tilde{\Delta}_h$ sont notées respectivement

$$e_h^G(f) = \Pi_{\mathbf{P}_0}(\nabla f) - \nabla_h(\tilde{\Pi}_{P_0} f), \quad e_h^D(f) = \Pi_{P_0}(\text{div} f) - \text{div}_h(\tilde{\Pi}_{P_0} f),$$

et

$$e_h^L(f) = \Pi_{P_0}(\Delta f) - \tilde{\Delta}_h(\tilde{\Pi}_{P_0} f).$$

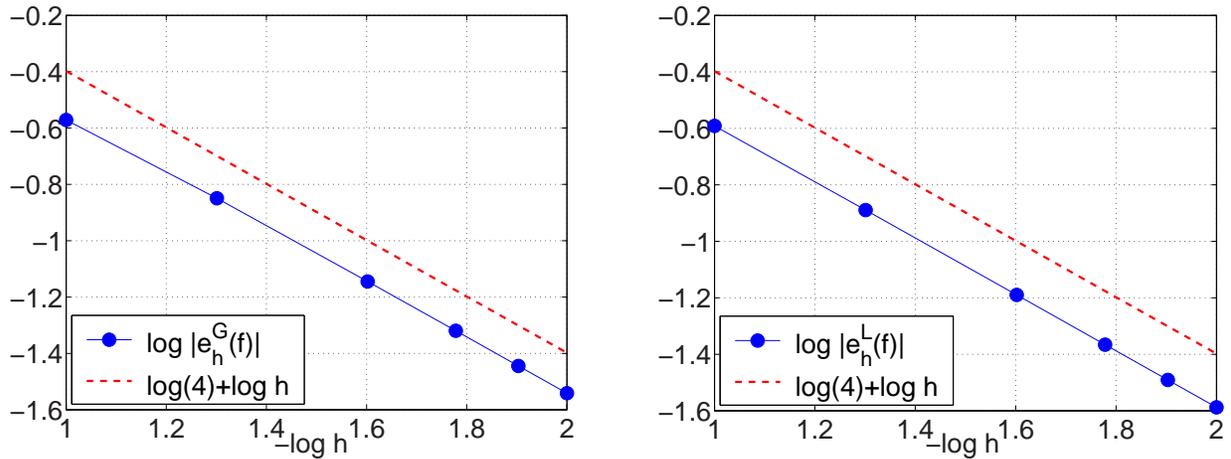


FIG. 6.2 – Vérification de la consistance des opérateurs ∇_h (à gauche) et $\tilde{\Delta}_h$ (à droite).

La figure 6.2 présente les variations de $\log |e_h^G(f)|$ et $\log |e_h^L(f)|$ en fonction de $\log h$. On en déduit que pour tout $h \in [10^{-2}, 10^{-1}]$ on a

$$\log |e_h^G(f)| \leq \log(4) + \log h, \quad \log |e_h^L(f)| \leq \log(4) + \log h,$$

de sorte que

$$|e_h^G(f)| \leq 4h, \quad |e_h^L(f)| \leq 4h.$$

On retrouve ainsi les estimations des propositions 1.13 et 1.14. La figure 6.3 présente d'autre part les variations de $\log |e_h^D(f)|$ en fonction de $\log h$. On en déduit que pour tout $h \in [10^{-2}, 10^{-1}]$ on a

$$|e_h^D(f)| \leq 2h.$$

On a ainsi vérifié numériquement la consistance des opérateurs ∇_h , div_h et $\tilde{\Delta}_h$.

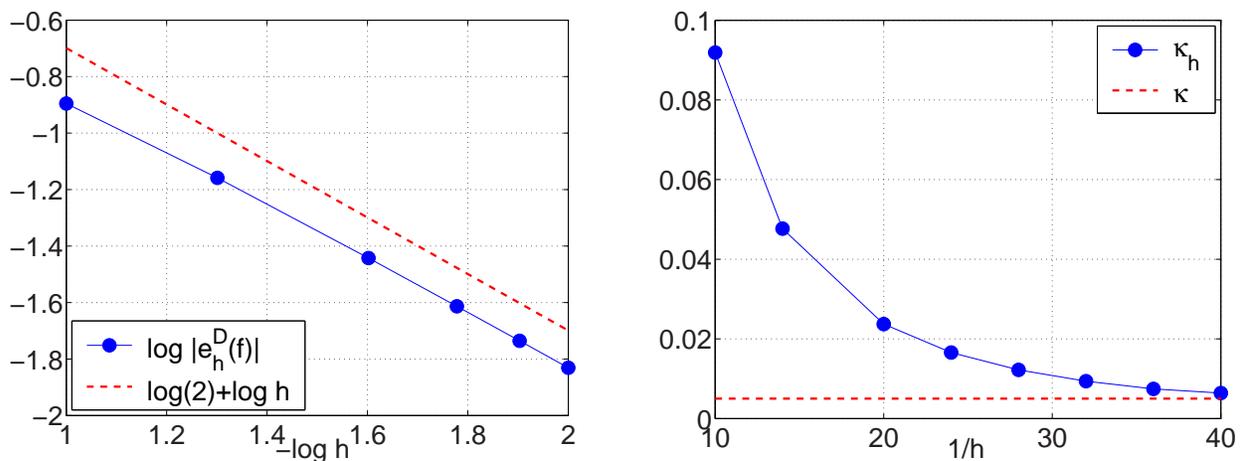


FIG. 6.3 – Vérification de la consistance de div_h (à gauche) et de la condition inf-sup.

Intéressons-nous maintenant à la condition inf-sup (3.60). Posons

$$\kappa_h = \inf_{p_h \in P_0^0 \setminus \{0\}} \sup_{\mathbf{u}_h \in \mathbf{P}_0 \setminus \{0\}} - \frac{(q_h, \operatorname{div}_h \mathbf{u}_h)}{\|\mathbf{u}_h\|_h |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h|}.$$

D'après le théorème 3.1, si le maillage est uniforme, il existe une constante $\kappa > 0$ telle que pour tout $h > 0$

$$\kappa_h \geq \kappa. \quad (6.3)$$

On va vérifier numériquement que (6.3) est encore valable sur le maillage non uniforme (mais structuré) utilisé ici.

Les applications $q_h \mapsto \|q_h\|_h^2$ et $q_h \mapsto |\tilde{\Pi}_{P_1^{nc}} q_h|^2$ sont des formes quadratiques sur P_0 . Notons respectivement N_h et P_h les matrices associées. Notons également G_h la matrice associée à l'opérateur $\nabla_h : P_0 \rightarrow \mathbf{P}_0$. Soit Λ_h l'ensemble des valeurs propres non nulles des matrices $G_h^t N_h^{-1} G_h$ et $G_h P_h^{-1} G_h^t$. Posons

$$\alpha_h = \min_{\lambda_h \in \Lambda_h} |\lambda_h|.$$

On vérifie ([3], p.75) que $\alpha_h = \kappa_h$. On a calculé et représenté sur la figure 6.3 les variations de $\alpha_h = \kappa_h$ en fonction de $1/h$. On en déduit que (6.3) est bien vérifié numériquement.

6.2 Validation des estimations d'erreur

Pour le schéma **VF-I** avec $h = 1/200$ et $k = 10^{-2}$, la figure 6.4 présente la première composante de \mathbf{e}_h^N , ainsi que q_h^N . On observe que l'erreur sur la pression présente un pic important au voisinage des bords $x = 0$ et $x = 1$, alors que ce n'est pas le cas pour les bords $y = 0$ et $y = 1$.

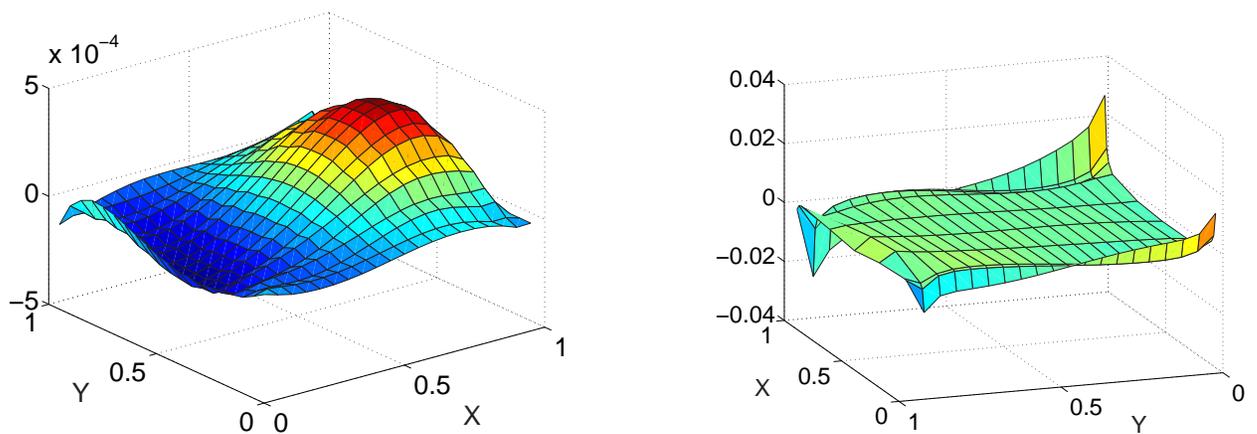


FIG. 6.4 – Représentation de l'erreur : vitesse (à gauche) et pression.

L'explication est la suivante. L'opérateur ∇_h est construit en imposant au bord (section 1.4) la condition de Neumann homogène. La pression p_h^N calculée à l'aide de $\Delta_h = \text{div}_h(\nabla_h)$ (équation (2.5)) vérifie donc au sens discret la condition de Neumann homogène. Or la pression p donnée par (6.1) vérifie la condition de Dirichlet homogène sur les bords $x = 0$ et $x = 1$. La différence entre les conditions aux limites vérifiées par $p(1)$ et p_h^N sur les bords $x = 0$ et $x = 1$ fait apparaître une couche limite numérique sur $q_h^N = p(1) - p_h^N$. On vérifie sur la figure 6.4 que ce problème ne se pose pas pour la vitesse.

On cherche à présent à valider les estimations d'erreur (5.99) et (5.100) pour le schéma **VF-I**. Considérons d'abord les erreurs sur la vitesse. Pour $k = 10^{-4}$ et $h \in [\frac{1}{120}, \frac{1}{60}]$, on a représenté sur la figure 6.5 les variations de $\log(\|\mathbf{e}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{L}^\infty)})$, $\log(\|\mathbf{e}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{L}^2)})$, $\log(\|\tilde{\mathbf{e}}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{H}_h^1)})$ et $\log(\|\tilde{\mathbf{e}}_h\|_{\ell^2(\mathbf{H}_h^1)})$ en fonction de $\log h$.

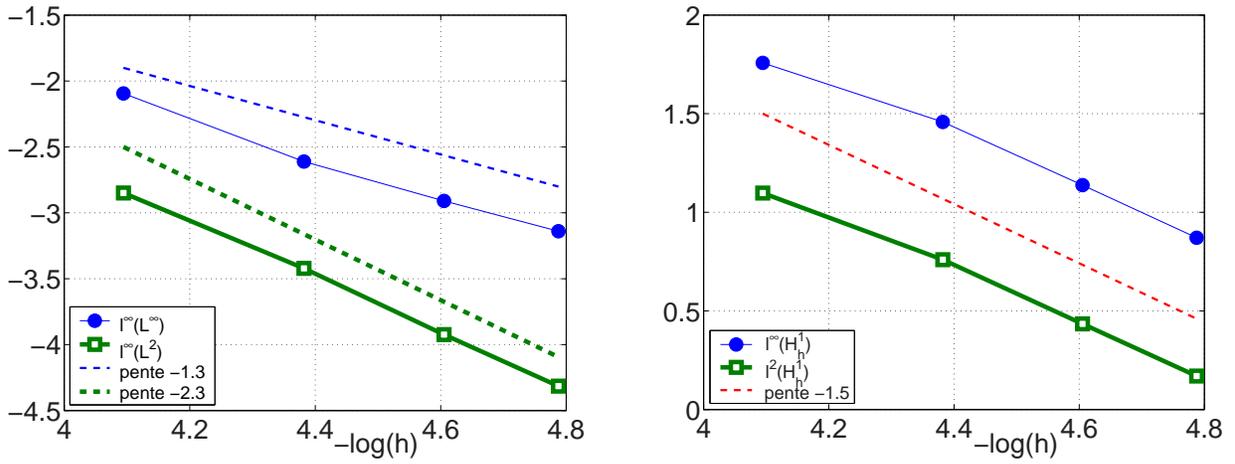


FIG. 6.5 – Erreur sur la vitesse en fonction de h pour le schéma **VF-I**.

On en déduit

$$\log(\|\mathbf{e}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{L}^\infty)}) \leq \log C + 1.3 \log(h), \quad \log(\|\mathbf{e}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{L}^2)}) \leq \log C + 2.3 \log(h),$$

et

$$\log(\|\tilde{\mathbf{e}}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{H}_h^1)}) + \log(\|\tilde{\mathbf{e}}_h\|_{\ell^2(\mathbf{H}_h^1)}) \leq \log C + 1.5 \log(h).$$

Ainsi pour $k = 10^{-4}$ on a

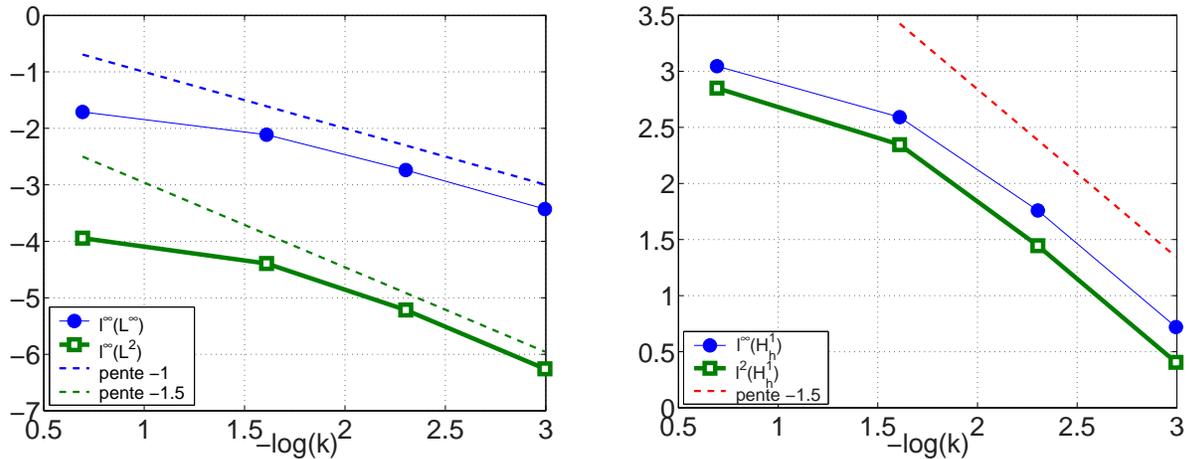
$$\|\mathbf{e}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{L}^\infty)} \leq C h^{1.3}, \quad \|\mathbf{e}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{L}^2)} \leq C h^{2.3}, \quad (6.4)$$

et

$$\|\tilde{\mathbf{e}}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{H}_h^1)} + \|\tilde{\mathbf{e}}_h\|_{\ell^2(\mathbf{H}_h^1)} \leq C h^{1.5}. \quad (6.5)$$

De même, pour $h = \frac{1}{200}$ et $k \in [0.05, 0.5]$, on a représenté sur la figure 6.6 les variations de $\log(\|\mathbf{e}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{L}^\infty)})$, $\log(\|\mathbf{e}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{L}^2)})$, $\log(\|\tilde{\mathbf{e}}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{H}_h^1)})$ et $\log(\|\tilde{\mathbf{e}}_h\|_{\ell^2(\mathbf{H}_h^1)})$ en fonction de $\log k$. On en déduit que pour $h = \frac{1}{200}$ on a

$$\|\mathbf{e}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{L}^\infty)} \leq C k, \quad \|\mathbf{e}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{L}^2)} + \|\tilde{\mathbf{e}}_h\|_{\ell^\infty(\mathbf{H}_h^1)} + \|\tilde{\mathbf{e}}_h\|_{\ell^2(\mathbf{H}_h^1)} \leq C k^{1.5}. \quad (6.6)$$

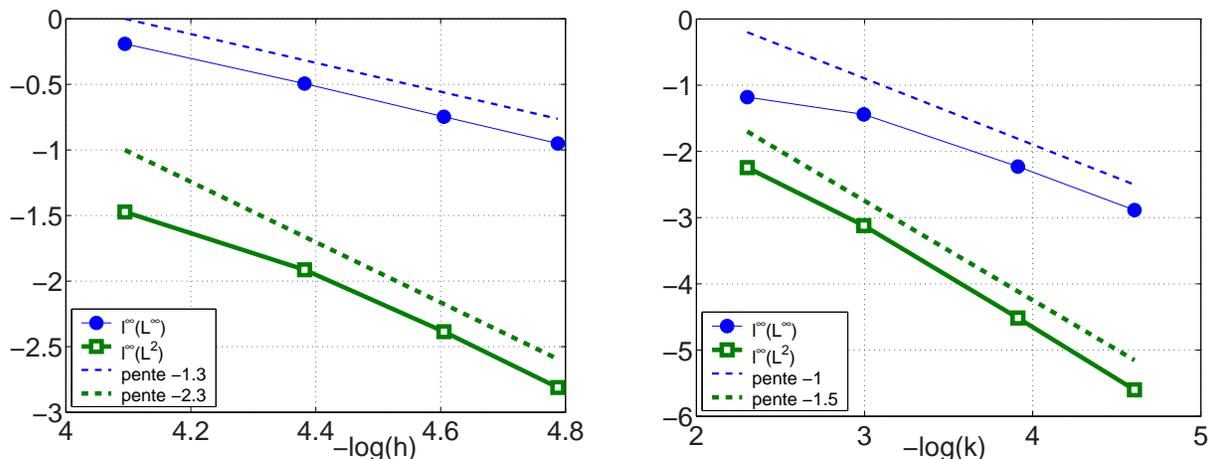
FIG. 6.6 – Erreur sur la vitesse en fonction de k pour le schéma **VF-I**.

Intéressons-nous maintenant aux erreurs sur la pression. Pour $k = 10^{-4}$ et $h \in [\frac{1}{120}, \frac{1}{60}]$, la figure 6.7 représente $\log(\|q_h\|_{\ell^\infty(L^\infty)})$ et $\log(\|q_h\|_{\ell^\infty(L^2)})$ en fonction de $\log h$. On en déduit que pour $k = 10^{-4}$ on a

$$\|q_h^m\|_{\ell^\infty(L^\infty)} \leq C h^{1.3}, \quad \|q_h^m\|_{\ell^\infty(L^2)} \leq C h^{2.3}. \quad (6.7)$$

Pour $h = \frac{1}{200}$ et $k \in [10^{-2}, 10^{-1}]$, la figure 6.7 représente de même $\log(\|q_h\|_{\ell^\infty(L^\infty)})$ et $\log(\|q_h\|_{\ell^\infty(L^2)})$ en fonction de $\log k$. On en déduit que pour $h = \frac{1}{200}$ on a

$$\|q_h^m\|_{\ell^\infty(L^\infty)} \leq C k, \quad \|q_h^m\|_{\ell^\infty(L^2)} \leq C k^{1.5}. \quad (6.8)$$

FIG. 6.7 – Erreur sur la pression en fonction de h et k pour le schéma **VF-I**.

Comparons les estimations (6.4), (6.5), (6.6), (6.7) et (6.8) correspondant aux résultats numériques obtenus pour le schéma **VF-I** avec les résultats théoriques (5.99) et (5.100). On observe que pour la solution des équations de Stokes et le maillage considérés ici, les

ordres de convergence en temps et en espace (puissances de h et k) obtenus sont bien meilleurs que les résultats théoriques.

On a également implémenté les schémas **VF-CN** et **VF-BDF**. Suivant les normes utilisées, on obtient les ordres de convergence en temps du tableau 6.1, et les ordres de convergence en espace du tableau 6.2. On observe que les schémas **VF-CN** et **VF-BDF** se comportent de façon similaire, pour la solution des équations de Stokes et le maillage considérés ici.

Norme	Schéma utilisé		
	VF-I	VF-CN	VF-BDF
$\ell^\infty(\mathbf{L}^2)$	1.5	2	2
$\ell^\infty(\mathbf{L}^\infty)$	1	2	2
$\ell^2(\mathbf{H}_h^1)$	1.5	2	2
$\ell^\infty(\mathbf{H}_h^1)$	1.5	2	2

Norme	Schéma utilisé		
	VF-I	VF-CN	VF-BDF
pression			
$\ell^\infty(L^2)$	1.5	1.5	1.5
$\ell^\infty(L^\infty)$	1	1	1

TAB. 6.1 – *Ordres de convergence en temps : vitesse (à gauche) et pression.*

Norme	Schéma utilisé		
	VF-I	VF-CN	VF-BDF
$\ell^\infty(\mathbf{L}^2)$	2.3	2.3	2.3
$\ell^\infty(\mathbf{L}^\infty)$	1.3	1.3	1.3
$\ell^2(\mathbf{H}_h^1)$	1.5	1.5	1.5
$\ell^\infty(\mathbf{H}_h^1)$	1.5	1.5	1.5

Norme	Schéma utilisé		
	VF-I	VF-CN	VF-BDF
pression			
$\ell^\infty(L^2)$	2.3	2.3	2.3
$\ell^\infty(L^\infty)$	1.1	1.1	1.1

TAB. 6.2 – *Ordres de convergence en espace : vitesse (à gauche) et pression.*

6.3 Comparaison entre projection exacte et approchée

On étudie ici numériquement une variante des schémas **VF-I**, **VF-CN** et **VF-BDF**.

L'opérateur $\Delta_h = \operatorname{div}_h(\nabla_h)$ utilisé pour calculer la pression (équation (2.5)) permet de garantir que

$$\forall m \in \{0, \dots, N\} \quad \operatorname{div}_h \mathbf{u}_h^m = 0. \quad (6.9)$$

Cette propriété est utile pour l'étude mathématique du schéma. L'opérateur Δ_h présente néanmoins l'inconvénient d'avoir un support large (section 1.4.2). Les matrices des systèmes linéaires associés sont donc moins creuses que pour une discrétisation standard du laplacien. Ceci pénalise les temps de calcul. On peut donc remplacer Δ_h par l'opérateur suivant : $\Delta'_h : P_0 \rightarrow P_0$ est tel que pour tout $q_h \in P_0$ et tout triangle $K \in \mathcal{T}_h$, on a

$$\Delta'_h q_h|_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_h^{\text{int}}} \tau_\sigma (q_{L_\sigma} - q_K). \quad (6.10)$$

La définition (6.10) de Δ'_h est analogue à la définition (1.10) de $\tilde{\Delta}_h$. Elle correspond à une condition au bord de Neumann, alors qu'à $\tilde{\Delta}_h$ est associée une condition aux bords de Dirichlet. Le support de Δ'_h est le même que $\tilde{\Delta}_h$. Il est donc (section 1.4.2) plus petit que celui de Δ_h , ce qui accélère la résolution des systèmes linéaires associés.

Le schéma obtenu en utilisant l'opérateur Δ'_h au lieu de Δ_h correspond à une projection approchée, puisque la propriété (6.9) n'est plus vérifiée. On compare le schéma **VF-I** (projection exacte) avec le schéma associé à la projection approchée, pour $h = 1/200$ et $k = 10^{-2}$.

On a d'abord calculé la suite des divergences discrètes $\text{div}_h \mathbf{u}_h = (\text{div}_h \mathbf{u}_h^m)_{m \in \{0, \dots, N\}}$. On en déduit les normes $\|\text{div}_h \mathbf{u}_h\|_{\ell^2(L^2)}$ et $\|\text{div}_h \mathbf{u}_h\|_{\ell^\infty(L^2)}$ données sur la figure 6.8. On trouve que pour la projection exacte, la propriété (6.9) est vérifiée (aux erreurs d'arrondi près) et que ce n'est pas le cas pour la projection approchée.

Projection	Norme divergence discrète	
	$\ell^2(L^2)$	$\ell^\infty(L^2)$
exacte	$.066 \times 10^{-15}$	$.107 \times 10^{-15}$
approchée	.00509660	.00814925

Projection	Norme erreur pression	
	$\ell^2(L^2)$	$\ell^\infty(L^\infty)$
exacte	.0036972	.0557627
approchée	.0042169	.0612483

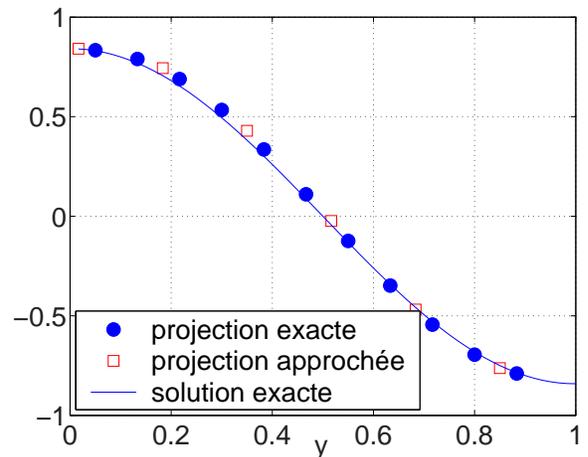


FIG. 6.8 – Comparaison entre projection exacte et approchée.

D'autre part, on a calculé la suite des erreurs sur la pression $q_h = (q_h^m)_{m \in \{0, \dots, N\}}$. Les normes $\|q_h\|_{\ell^2(L^2)}$ et $\|q_h\|_{\ell^\infty(L^2)}$ correspondantes sont données sur la figure 6.8. On a également représenté sur la figure 6.8 le graphe de $y \rightarrow p_h^N(1/2, y)$. On observe que les résultats numériques correspondant au schéma **VF-I** (projection exacte) et à la projection approchée sont très proches.

La projection approchée fournit ainsi des résultats numériques proches de ceux donnés par les schémas **VF-I**, **VF-CN** et **VF-BDF**, pour un temps de calcul moindre. Néanmoins, le fait que la condition (6.9) ne soit pas satisfaite pose problème lorsqu'on considère des solutions peu régulières des équations de Navier-Stokes [1].

6.4 Comparaison avec une méthode d'éléments finis

On compare ici le schéma **VF-I** avec un schéma d'éléments finis.

Posons

$$P_1^{nc,0} = \{v_h \in P_1^{nc}; \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_h^{ext}, \quad v_h(\mathbf{x}_\sigma) = 0\}.$$

Pour tous $\mathbf{u}_h = (u_h^1, u_h^2) \in (P_1^{nc})^2$ et $\mathbf{v}_h = (v_h^1, v_h^2) \in (P_1^{nc})^2$, on note

$$((\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h))_h = \sum_{i=1}^2 (\tilde{\nabla}_h u_h^i, \tilde{\nabla}_h v_h^i).$$

Pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$, soit $(\hat{\mathbf{u}}_h^m, \hat{p}_h^m) \in (P_1^{nc,0})^2 \times P_0^0$ solution de

$$\forall \mathbf{v}_h \in (P_1^{nc,0})^2, \quad \left(\frac{\hat{\mathbf{u}}_h^{m+1} - \hat{\mathbf{u}}_h^m}{k}, \mathbf{v}_h \right) + ((\hat{\mathbf{u}}_h^m, \mathbf{v}_h))_h - (\hat{p}_h^m, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \quad (6.11)$$

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \int_K \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}_h^m = 0. \quad (6.12)$$

Le système (6.11)-(6.12) correspond à une discrétisation des équations de Stokes (1)-(4) à l'aide du schéma **(I)** pour la discrétisation en temps et des éléments finis de Crouzeix-Raviart pour la discrétisation en espace.

Prenons $h = 1/60$ et $k = 10^{-2}$. On compare la solution de (6.11)-(6.12) avec celle fournie par le schéma **VF-I**. On a représenté sur la figure 6.9 la première composante de $y \mapsto \hat{\mathbf{u}}_h^N(1/2, y)$ et $y \mapsto \mathbf{u}_h^N(1/2, y)$, ainsi que $y \mapsto p_h^N(1/2, y)$ et $y \mapsto \hat{p}_h^N(1/2, y)$.

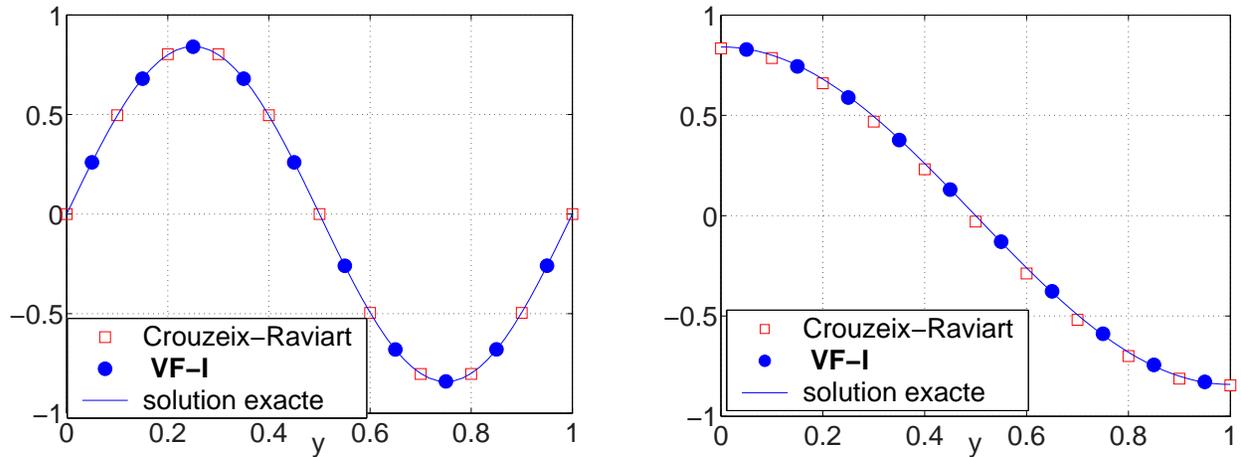


FIG. 6.9 – Comparaison avec une solution de référence : vitesse (à gauche) et pression.

On observe que la solution obtenue avec le schéma **VF-I** est très proche de celle donnée par le schéma d'éléments finis.

Conclusion

Nous avons introduit dans ce travail trois nouveaux schémas numériques pour les équations de Stokes évolutives en deux dimensions.

Une méthode de projection permet de calculer la pression et de traiter la contrainte d'incompressibilité. Pour la discrétisation en temps, plusieurs schémas ont été considérés, d'ordre un (implicite) et deux (Crank-Nicholson, formule de différentiation rétrograde). La discrétisation en espace repose sur une méthode de volumes finis sur maillage triangulaire. Les inconnues pour la vitesse et la pression sont toutes deux constantes par maille. Les opérateurs discrets correspondant au gradient, à la divergence, et au laplacien vérifient des propriétés de stabilité et de consistance. L'opérateur discret associé à la divergence vérifie une condition inf-sup.

L'étude de la stabilité de ces schémas a été réalisée. Nous en avons déduit leur convergence vers une solution des équations de Stokes. Nous avons également montré des estimations d'erreur et validé les schémas par des simulations numériques.

Perspectives

Si on ajoute aux équations de Stokes un terme tenant compte du phénomène physique de convection, on obtient les équations de Navier Stokes incompressibles. L'extension des schémas présentés ici à ce cas, physiquement plus réaliste, a été réalisée. L'analyse mathématique correspondante a été effectuée, et des résultats numériques ont été obtenus. Ce travail est en cours de rédaction.

On peut ensuite généraliser les schémas à des fluides incompressibles régis par des équations plus complexes. Les fluides quasi-newtoniens, par exemple, sont régis par des équations de Navier Stokes modifiées comportant un terme de diffusion non linéaire. Ils interviennent dans nombre de situations physiques importantes, comme les écoulements sanguins. La discrétisation par volumes finis permet de bien capter les discontinuités présentes dans ce type d'écoulement.

D'autre part, notons que les schémas introduits dans ce travail utilisent des inconnues pour la vitesse et la pression toutes deux constantes par mailles. Cette discrétisation facilite l'élaboration de méthodes multi-niveaux adaptées à la simulation numérique de la turbulence.

Bibliographie

- [1] A.S. ALMGREN, J. B. BELL, W. Y. CRUTCHFIELD. Approximate projection methods : Part i. inviscid analysis. *SIAM J. Sci. Comput.*, 22(4), 2000.
- [2] D. KIM, H. CHOI. A second-order time-accurate finite volume method for unsteady incompressible flow on hybrid unstructured grids. *J. Comp. Phys.*, 162 :411–428, 2000.
- [3] F. BREZZI, M. FORTIN. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag, 1991.
- [4] J. CHORIN. On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, 23 :341–353, 1969.
- [5] J.G. HEYWOOD, R. RANNACHER. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem iv. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27 :353–384, 1990.
- [6] J. L. GUERMOND. Some implementations of projection methods for Navier-Stokes equations. *M2AN*, 30(5) :637–667, 1996.
- [7] J. SHEN. On error estimates of projection methods for Navier-Stokes equations : first-order schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(1) :57–77, 1992.
- [8] J. SHEN. On error estimates of projection methods for Navier-Stokes equations : second-order schemes. *Math. Comp.*, 65(215) :1039–1065, 1996.
- [9] R. EYMARD, T. GALLOUËT, R. HERBIN. *Finite volume methods*. P.G. Ciarlet and J.L. Lions eds, North-Holland, 2000.
- [10] R. HERBIN, R. EYMARD. A cell-centered finite volume scheme on general meshes for the Stokes equations in two space dimension. *C.R.A.S.*, 337(2) :125–128, 2003.
- [11] R. TEMAM. Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode de pas fractionnaires II. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 33 :377–385, 1969.
- [12] R. TEMAM. *Navier-Stokes equations : theory and numerical analysis*. North-Holland, 1984.
- [13] S. BOIVIN, F. CAYRE, J. M. HERARD. A finite volume method to solve the Navier-Stokes equations for incompressible flows on unstructured meshes. *Int. J. Therm. Sci.*, 39 :806–825, 2000.
- [14] S. C. BRENNER AND L. R. SCOTT. *The mathematical theory of finite element methods*. Springer-Verlag, 2002.
- [15] S. FAURE. *Méthodes de volumes finis et multiniveaux pour les équations de Navier-Stokes, de Burgers et de la chaleur*. Thèse de l'Université de Paris Sud - Orsay, 2003.

- [16] V. GIRAULT AND P. A. RAVIART. *Finite Element Methods for Navier-Stokes equations : Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, 1986.
- [17] Y. ACHDOU, C. BERNARDI AND F. COQUEL. A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of Darcy's equations. *Numerische Mathematik*, 96(1) :17–42, 2003.

Résumé

Cette thèse introduit trois nouveaux schémas numériques pour les équations de Stokes évolutives en deux dimensions. Une méthode de projection permet de calculer la pression et de traiter la contrainte d'incompressibilité. Pour la discrétisation en temps, plusieurs schémas sont utilisés, d'ordre un (implicite) et deux (Crank-Nicholson, formule de différentiation rétrograde). La discrétisation en espace repose sur une méthode de volumes finis sur maillage triangulaire. Les inconnues pour la vitesse et la pression sont toutes deux constantes par maille. Les opérateurs discrets correspondant au gradient, à la divergence, et au laplacien vérifient des propriétés de stabilité et de consistance. L'opérateur discret associé à la divergence vérifie une condition inf-sup. Après avoir montré la stabilité de ces schémas, nous en déduisons leur convergence vers la solution des équations de Stokes. Nous montrons également des estimations d'erreur et validons les schémas par des simulations numériques.

Mots clés : Fluides incompressibles, équations de Stokes, méthodes de projection, méthodes de volumes finis.

Abstract

We introduce in this work three numerical schemes for the two-dimensional Stokes equations. We use a projection (fractional step) method to compute the pressure and deal with the incompressibility constraint. Several time-stepping schemes are used : implicit, Crank-Nicholson, Backward Differentiation Formulae. For the space discretization, we use a finite volume method on a triangular mesh. The discrete pressure and velocity are both piecewise constant. The discrete gradient, divergence and laplacian operators satisfy stability and consistency properties. The discrete divergence operator satisfies moreover an inf-sup (Babuska-Brezzi) condition. We prove the stability of the schemes, and their convergence towards the solution of the Stokes equations. We prove also error estimates, and give some numerical results.

Keywords : Incompressible fluids, Stokes equations, projection method, finite volume methods.