



Influences, stabilité au bruit et déficit isopérimétrique pour des modèles continus et discrets

Raphaël Bouyrie

► To cite this version:

Raphaël Bouyrie. Influences, stabilité au bruit et déficit isopérimétrique pour des modèles continus et discrets. Mathématique discrète [cs.DM]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2016. Français. NNT : 2016TOU30078 . tel-01514171

HAL Id: tel-01514171

<https://theses.hal.science/tel-01514171>

Submitted on 25 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le 21/06/2016 par :

Raphaël Bouyrie

**Influences, stabilité au bruit et déficit isopérimétrique pour des modèles
continus et discrets**

JURY

CORDERO-ERAUSQUIN DARIO
BARTHE FRANCK
LEDoux MICHEL
CATTIAUX PATRICK
FRADELIZI MATTHIEU
LEHEC JOSEPH

Université Paris VI
Université Toulouse III
Université Toulouse III
Université Toulouse III
Université Marne La Vallée
Université Paris IX

Rapporteur
Examineur
Directeur de Thèse
Examineur
Rapporteur
Examineur

École doctorale et spécialité :

MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées

Unité de Recherche :

Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)

Directeur de Thèse :

Michel Ledoux

Rapporteurs :

Dario Cordero-Erausquin et Matthieu Fradelizi

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à mon directeur de thèse, Michel Ledoux. J'ai pu mesurer durant ces quatre dernières années sa grande culture mathématique, l'élégance de ses travaux, et sa rigueur sans faille. Merci pour toutes ces discussions toujours instructives, même lorsque peu de mots ont été prononcés. J'en garderai un souvenir indélébile.

Je tiens également à remercier Dario Cordero-Erausquin et Mattieu Fradelizi d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Avant cela, je n'oublie pas que j'ai appris avec grand plaisir dans vos cours de master 2 (ainsi qu'Olivier Guédon) les fondamentaux sous-jacent à ce travail de thèse. En particulier, merci à Dario Cordero-Erausquin d'avoir encadré mon mémoire et m'avoir proposé un sujet passionnant. Je vous remercie également, ainsi que Franck Barthe, d'avoir consacré autant de temps et d'énergie dans le projet GeMeCoD, dont les conférences ont toutes été instructives.

Franck Barthe, Patrick Cattiaux et Joseph Lehec ont accepté de faire parti du jury et je les en remercie vivement.

Cette thèse s'est déroulée à l'Institut de Mathématiques de Toulouse. Merci aux membres administratifs et techniques de l'IMT, toujours disponibles et efficaces, pour avoir fait en sorte que tout se déroule sans anicroches.

Une part particulière revient aux doctorants de l'IMT. En premier lieu, merci aux membres actuels du bureau : Fanny (ma sœur), Sofiane (cousin - désolé, khouya est déjà pris) et Yurko (moy drug) avec qui on a formé un bureau inégalable. Merci à Billy et Stéphane de l'avoir assidument fréquenté pour les parties de coïncidences. Bien sûr, merci à vous pour tout le reste...

Un merci particulier pour Adil (khouya), dont je suis témoin de son mariage avec Marine - et maintenant de la naissance de sa fille, Éliane. Je n'oublie pas les anciens du bureau, Julie et Daniel. Viennent ensuite les doctorants de ma génération : Benoit, Claire B., Laurent, Malika, Mattieu, Mélanie, Nil et Pierre. Enfin, parmi ceux qui ont suivi, merci à Claire D., Daniel W., Tatiana, Ioana, Potpot. Merci pour tous les moments conviviaux passés en votre présence - merci également à Barbara pour les empanadas.

Avant d'arriver à Toulouse, j'ai bénéficié d'excellentes conditions durant ma scolarité. Si j'oublie ici nombre de personnes remarquables, je souhaiterais plus particulièrement en remercier deux : Guillaume Brevet, mon enseignant de maths sup et Alain Yger, chercheur à l'Université Bordeaux 1. Guillaume Brevet m'a fait comprendre comment allier passion, intuition et rigueur - son enseignement sera pour toujours une source d'inspiration. Puis vient Alain Yger, dont j'ai suivi les cours en Licence de théorie de l'intégration et d'analyse complexe en Master 1. Merci pour son enthousiasme et sa passion débordante. Je garde un excellent souvenir de mon stage de M1 effectué sous sa direction, qui a confirmé ma volonté de poursuivre dans cette voie.

Enfin, merci à toute ma famille pour son soutien constant depuis le temps déjà lointain où je comptais jusqu'à 300 quand on me disait d'attendre 5 minutes...

Notations

$(E, \mathcal{A}, \mu)$	Espace mesuré probabilisé, i.e. tel que $\mu(E) = 1$
$\mathbb{E}_\mu$	Espérance par rapport à μ
$\text{Var}_\mu = \mathbb{E}_\mu(\cdot - \mathbb{E}_\mu(\cdot) ^2)$	Variance par rapport à μ
γ_n	Mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^n$
$\varphi_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{ x ^2}{2}}$	densité de la mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^n$
$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_1(u) du$	fonction de répartition de la mesure gaussienne standard
$\mathcal{I}_\gamma = \varphi_1 \circ \Phi^{-1}$	Profil isopérimétrique de l'espace gaussien
$A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B$	différence symétrique entre deux ensembles A et B .
$C_c^\infty(\Omega)$	fonctions indéfiniment dérivables sur Ω à support compact
$W^{n,p}(M)$	Espaces de Sobolev des fonctions définies sur M telles que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\nabla^k f \in L^p(M)$
$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$	Fonction Gamma d'Euler
$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$	volume de la boule unité pour la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$
$M_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels
$A \odot B = (a_{ij} b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$	produit d'Hadamard de deux matrices carrées A et B de tailles n
$\mathbb{S}_1^n$	Sphère euclidienne n dimensionnelle de rayon $\sqrt{n-1}$
Γ, Γ_2	Opérateur carré du champ et son itéré
$(Q_t)_{t \geq 0}$	Semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck
$(T_t)_{t \geq 0}$	Semi-groupe de Bonami–Beckner
$\mathcal{S}_{\eta,b} = \text{Var}_\nu(T_{2 \log(\eta) })$	stabilité au bruit booléen
$\mathcal{S}_\eta = \text{Var}_{\gamma_n}(Q_{2 \log(\eta) })$	stabilité au bruit gaussien

Avant-propos

Au cours des dernières décennies, des travaux ont exploité la monotonie le long du flot de la chaleur pour atteindre diverses inégalités fonctionnelles ou isopérimétriques. Initialement considérée dans $\mathbb{R}^n$, cette approche s'est étendue à différents modèles tant continus que discrets. La majeure partie de cette thèse est consacrée à plusieurs développements récents. Les thèmes explorés par cette approche ont été originellement à l'intersection entre analyse, géométrie et probabilité, et ont eu un écho plus récemment en informatique théorique via l'analyse des fonctions booléennes.

Sur des variétés riemanniennes, des conditions uniformes de minoration de courbure ont des conséquences globales ; géométriques comme des bornes sur le diamètre ou la croissance du volume des boules, analytiques comme la validité d'inégalités intégrales qui impliquent notamment l'existence d'un trou spectral pour l'opérateur de Laplace–Beltrami. Une autre conséquence géométrique importante est l'extension par Gromov du théorème isopérimétrique prouvé par Lévy et Schmidt sur les sphères euclidiennes. Une contribution remarquable de Bakry et Émery [B-E] est la généralisation de la notion de courbure minorée dans le cadre des opérateurs de diffusion, ce qui inclut les exemples riemanniens. Cette généralisation englobe l'ajout d'une mesure à densité qui joue un rôle analogue à la courbure. Cette approche est le fondement moderne du développement de preuves dynamiques par flot de la chaleur. Les inégalités ainsi prouvées dans ce cadre englobent un large pan des mathématiques : en analyse des équations aux dérivées partielles via les injections de Sobolev ou les estimations sur les noyaux de chaleur, en théorie des probabilités via la convergence à l'équilibre et la concentration de la mesure, en géométrie via des théorèmes de comparaisons et des théorèmes isopérimétriques. Depuis une dizaine d'années, la notion de minoration de courbure a été étendue avec succès grâce aux travaux fondateurs de Sturm et Lott et Villani dans le cadre plus général d'espaces métriques mesurés, et de très récents résultats (cf [C-M1], [C-M2]) ont abouti à l'extension de ces inégalités avec des constantes optimales.

Pour certaines de ces inégalités, des phénomènes de rigidité ont lieu sur les variétés riemanniennes à courbure (strictement) positive : extrémalité du diamètre ou du trou spectral ou inégalités de Sobolev optimales impliquent une structure isométrique aux sphères euclidiennes. Ces phénomènes de rigidité se retrouvent dans le cadre d'espaces métriques mesurés.

La remarque de Bakry–Émery permet d'observer des similitudes entre l'espace gaussien et une variété à courbure de Ricci minorée. Dans le cadre de variétés riemanniennes à densité $(M, g, e^{-\psi} d\text{vol})$, l'espace de référence est alors l'espace gaussien. L'équation de la chaleur considérée est alors par rapport à un laplacien avec dérive $\Delta - \nabla\psi \cdot \nabla$. En plus d'inégalités fonctionnelles telles que l'inégalité de trou spectral ou de Sobolev logarithmique, un théorème de comparaison isopérimétrique analogue à celui Lévy–Gromov a été prouvé par Bakry et Ledoux en utilisant la monotonie du flot de la chaleur. Dans notre thèse, nous exploitons ces preuves pour obtenir des résultats de rigidité. En particulier, l'espace gaussien est le seul à admettre des cas d'égalités dans ces inégalités. Pour ce qui est du théorème isopérimétrique, on peut de plus obtenir par cette approche la caractérisation complète des ensembles extrémaux, qui sont des demi-espaces.

En ce qui concerne la stabilité du problème isopérimétrique, sur l'espace gaussien, la preuve de Bakry–Ledoux a été exploitée par Mossel et Neeman [M-N1] pour prouver des estimations robustes (i.e. indépendante de la dimension) sur le déficit isopérimétrique gaussien. Plus généralement, la question est double tout en étant vague : à quel point l'espace sous-jacent est proche de l'espace gaussien et à quel point l'ensemble ressemble à un ensemble extrémal (un demi-espace) ? Nous avons tenté de répondre à cette question en reprenant les arguments de Mossel et Neeman. Les résultats obtenus en ce sens dans cette thèse sont encore partiels et méritent d'être approfondis. Cela dit, la preuve par flot de la chaleur nous semble être la plus adaptée pour donner une réponse satisfaisante à cette question, la plupart des arguments étant en effet valides pour des espaces généraux satisfaisant la condition $CD(1, \infty)$.

La deuxième partie de thèse est consacrée à l'analyse des fonctions booléennes, un domaine

fortement lié à des questions en informatique théorique. En particulier, nous nous concentrons sur deux notions principales que sont la notion d’influences et de stabilité au bruit. Plusieurs inégalités mettant en jeu ces notions peuvent être démontrées par des techniques analogues aux preuves par flot de la chaleur dans le cadre continu, comme l’ont montré des travaux récents, notamment [CE-L], [K-M-S2], [M-N2]. Ces notions font également sens dans le cadre continu, suite aux travaux de Keller, Mossel et Sen [K-M-S1]. Le principal résultat de la thèse consiste en l’extension d’un critère quantitatif entre influences et stabilité au bruit sur des modèles à la fois discrets, comme des graphes de Schreier, et continus, comme des produits d’espaces euclidiens munis de mesures log-concaves.

Par commodité de lecture, nous avons regroupé les questions continues et discrètes dans deux parties distinctes, bien que des liens puissent être établis entre les deux.

La première partie est constituée de trois chapitres. Le premier est introductif : il décrit les inégalités fonctionnelles et géométriques considérées dans la suite et présente le cadre général d’un triplet de Markov (E, μ, Γ) qui découle de la théorie de Bakry et Émery. Nous nous efforçons de donner les preuves par interpolation le long du flot de la chaleur d’inégalités telles que l’inégalité de trou spectral, de Sobolev logarithmique ou encore le théorème de comparaison isopérimétrique de Bakry–Ledoux.

Le deuxième chapitre est consacré à la preuve par semi-groupe du théorème de Borell sur la caractérisation des ensembles maximisant la stabilité au bruit gaussienne. Ce schéma de preuve, comme souligné par Ledoux, se généralise et permet de retrouver plusieurs inégalités intégrales, ainsi que des versions multidimensionnelles du théorème de Borell. Nous établissons la caractérisation des cas d’égalités de telles inégalités.

Le troisième chapitre, en anglais, est consacré à la caractérisation des cas d’égalités pour les inégalités fonctionnelles dans le cas des variétés riemanniennes à densités. Cette caractérisation met en lumière des phénomènes de rigidité de type théorème d’Obata. Nous nous consacrons ensuite à la rigidité et à l’étude de la stabilité dans le théorème de comparaison isopérimétrique de Bakry–Ledoux. En particulier, nous mettons en lumière une condition suffisante (réalisée pour l’espace gaussien) pour obtenir des bornes indépendantes de la dimension sur le déficit isopérimétrique pour des modèles satisfaisant la condition $CD(1, \infty)$.

La deuxième partie concerne l’analyse des fonctions booléennes. Là encore, le premier chapitre est introductif et présente les notions qui nous ont intéressé, en particulier les notions d’influences et de stabilité au bruit. Nous discutons de l’analogue discret du théorème de Borell pour la stabilité au bruit qui porte le nom de “Majority is Stablest”.

Le deuxième chapitre est une adaptation de l’article [Bou] à paraître dans *Combinatorics, Probability and Computing*, dont le résultat est l’extension à des modèles à la fois continus et discrets d’un critère dû à Benjamini, Kalai et Schramm sur la sensibilité au bruit. La preuve de résultat se base sur un schéma d’interpolation le long de semi-groupe déjà exploité par Cordero-Erausquin et Ledoux. Ceci permet d’obtenir des résultats quantitatifs dans un cadre assez général qui recouvre des graphes de Schreier, y compris non produits comme les tranches du cube booléen, ainsi que des produits de mesures log-concaves. Le résultat sur les tranches du cube est exploité en lien avec un résultat de percolation dû à Broman, Garban et Steif.

Enfin dans le dernier chapitre, plus court, on utilise le critère quantitatif obtenu pour obtenir un analogue sur des graphes produits et des modèles de produits de mesures log-concaves du théorème “Juntas” de Friedgut initialement prouvé sur le cube discret.

Table des matières

I	Inégalités fonctionnelles et isopérimétrie pour des modèles continus : cas d'égalités et phénomènes de rigidité.	1
1	Introduction générale dans le cadre continu	3
1.1	Éléments de géométrie riemannienne	3
1.2	Isopérimétrie	5
1.3	Autres inégalités géométriques	10
1.4	Lichnerowicz et inégalités fonctionnelles	11
1.5	Théorie de Bakry–Émery	14
1.6	Hypercontractivité	16
1.7	Éléments de calcul “ T_2 ” et applications aux inégalités fonctionnelles et géométriques.	17
1.8	Présentation des travaux de la première partie.	24
2	Stabilité au bruit gaussien, inégalité de Borell et extensions.	27
2.1	Inégalité de Borell.	27
2.2	Extensions	32
2.3	Exemples et cas d'égalités	33
2.4	Variétés riemanniennes à densités.	35
2.5	Remarques sur la Stabilité/Rigidité	37
2.6	Remarques sur les sphères euclidiennes	38
3	Rigidity phenomenons for an infinite dimensional diffusion operator and stability for the spherical isoperimetry	43
3.1	Introduction	43
3.2	The infinite dimension setting	46
3.3	Geometric and functional inequalities	47
3.4	Stein's lemma/Second order Poincaré inequality.	48
3.5	An isoperimetric rigidity statement	50
3.6	Quantitative estimates in the Bakry–Ledoux comparison theorem.	53
II	Cadre discret : stabilité au bruit et influences.	59
4	Introduction générale dans le cadre discret	61
4.1	Analyse de Fourier discrète sur le cube	62
4.2	Hypercontractivité du semi-groupe de Bonami–Beckner	63
4.3	Généralisation à des espaces produits et aux graphes de Cayley/Schreier	66
4.4	Influences	68
4.5	Principaux résultats sur les influences	69
4.6	La notion de noise stability/sensitivity	72
4.7	Théorie du choix social et géométrie gaussienne.	75
4.8	Présentation des travaux de la seconde partie.	82

5	Critère BKS pour la noise stability	89
5.1	Introduction	89
5.2	Tools	92
5.3	The Gaussian and log-concave settings	93
5.4	The case of Boolean cube and other discrete product spaces	96
5.5	Results on Schreier and Cayley graphs and further examples	99
5.6	Comments on exclusion sensitivity	100
6	Some comments on Juntas	103
6.1	Introduction	103
6.2	Schreier and Cayley graphs setting	104
6.3	Case of the slice of the cube.	106
6.4	The continuous case.	109

Première partie

Inégalités fonctionnelles et isopérimétrie pour des modèles continus : cas d'égalités et phénomènes de rigidité.

Chapitre 1

Introduction générale dans le cadre continu

Ce chapitre introductif présente les éléments de base de notre thèse. Nous mettons l'accent sur les inégalités géométriques de type isopérimétrique et les inégalités fonctionnelles telles que les inégalités de Sobolev, Sobolev logarithmique et trou spectral. Ces inégalités fonctionnelles et géométriques sont présentées d'abord dans leur cadre naturel qui est celui des variétés riemanniennes. Ces inégalités ont été étendues, par Bakry et Émery, dans un cadre plus abstrait qui fait appel à des opérateurs de diffusions. En particulier, nous nous intéressons à l'obtention de ces inégalités avec des constantes optimales. L'accent est mis sur la rigidité et la stabilité de ces inégalités. Notons que les travaux récents, menés notamment par l'école italienne, dus à la notion de minoration de courbure de Ricci sur des espaces métriques mesurés ont abouti à l'établissement de ces inégalités avec constantes optimales dans ce cadre plus général.

1.1 Éléments de géométrie riemannienne

Cette section présente très succinctement quelques éléments de géométrie riemannienne en lien avec les thèmes de la thèse, notamment la notion la courbure de Ricci. Pour une présentation plus complète, nous renvoyons le lecteur à des ouvrages de références tels que [Cha] ou [G-H-L]. Nous supposons connus un bon nombre de préliminaires géométriques.

En premier lieu, nous redonnons la définition de l'opérateur de Laplace–Beltrami et les éléments de base de théorie spectrale pour pouvoir présenter les résultats que nous énoncerons par la suite.

Soit (M, g) une variété riemannienne (sans bord) n dimensionnelle complète et connexe munie de sa métrique riemannienne $g = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Le produit scalaire induit par g sera noté $\cdot$. Soit $(x^1, \dots, x^n)$ un système de coordonnées locales. On note $d\text{vol} = \sqrt{\det g} dx^1 \dots dx^n$ le volume riemannien. On note $\nabla = \nabla_g$ la connexion de Levi–Civita, telle que $(\nabla u)_i = \sum_{1 \leq j \leq n} g_{ij} \partial_{x_j} u$. Autrement dit, pour tout champ de vecteurs X , on a $X(u) = \nabla u \cdot X$. La divergence d'un champ de vecteur F est définie, en coordonnées locales, par $\text{div}(F) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i (\sqrt{\det g} F_i)$. L'opérateur de Laplace–Beltrami est défini par $\Delta = \Delta_g = \text{div} \nabla_g$, et s'écrit ainsi $\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_i (g_{ij} \sqrt{\det g} \partial_j)$. La hessienne d'une fonction lisse f est la forme bilinéaire symétrique définie pour tout champ de vecteurs X et Y par $\text{Hess}(f)(X, Y) = \nabla_X \nabla f \cdot Y$. C'est un fait classique que l'opérateur de Laplace–Beltrami est obtenu en prenant la trace de la hessienne.

Par le théorème de la divergence il s'ensuit, pour toutes fonctions u et $v \in C_c^\infty(M, \mathbb{R})$, la formule d'intégration par parties suivante :

$$\int_M u \Delta v d\text{vol} = \int_M \Delta u v d\text{vol} = - \int_M \nabla u \cdot \nabla v d\text{vol}.$$

Ceci est la formule de Green, qui sera fondamentale dans notre étude. Plus généralement, si $(M, g, \mu) = (M, g, e^{-\psi} d\mu)$ est une variété à poids, (avec ψ régulière), on définit l'opérateur $L = \operatorname{div}_\mu \nabla$, avec $\operatorname{div}_\mu F = e^\psi \operatorname{div}(e^{-\psi} F)$. On a alors $L = \Delta_g - \nabla \psi \cdot \nabla$, et pour toutes fonctions u et $v \in C_c^\infty(M, \mathbb{R})$

$$\int_M u L v d\mu = \int_M L u v d\mu = - \int_M \nabla u \cdot \nabla v d\mu.$$

L'opérateur $-\Delta$ est auto-adjoint et semi défini positif sur $C_c^\infty \subset L^2(M)$. Soit W_1 l'espace des fonctions f dans $L^2(M)$ et telles que leurs gradients au sens des distributions ∇f soient également dans $L^2(M)$. $W^1(M)$ est muni d'une structure d'espace de Hilbert par le produit scalaire suivant :

$$\langle u, v \rangle_{W^1} = \int_M u v d\operatorname{vol} + \int_M \nabla u \cdot \nabla v d\operatorname{vol}.$$

Si $W_0^1(M)$ désigne l'adhérence de $C_c^\infty(M)$ dans $W_1(M)$, on définit

$$W_0^2(M) = \{f \in W_0^1(M), \Delta f \in L^2(M)\},$$

où Δf est compris au sens des distributions. Alors par la formule de Green :

$$\forall u \in W_0^1(M), v \in W_0^2(M), \int_M u \Delta v d\operatorname{vol} = - \int_M \nabla u \cdot \nabla v d\operatorname{vol}.$$

Si la variété est complète, on peut étendre le laplacien en un opérateur auto-adjoint et semi-défini positif sur $L^2(M)$. Dans toute la suite, la notation Δ désignera cette extension. Notons que la formule de Green reste alors valable. De plus, par la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints, le spectre du laplacien $\sigma(-\Delta)$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}^+$. Lorsque la variété est compacte ou pour des mesures à poids $d\mu = e^{-\psi} d\operatorname{vol}$ telles que $\mu(M)$ est finie, le spectre est discret et $\sigma(-L) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$ avec $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 > 0$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$.

Une notion fondamentale en géométrie riemannienne qui sera centrale dans la suite de l'exposé est celle de courbure. Nous allons (très) succinctement donner la définition de courbure de Ricci. Grossièrement, la courbure de Ricci reflète la distorsion du volume le long d'une géodésique. Intuitivement cette distorsion est un grossissement en courbure positive ou un rétrécissement en courbure négative. Sans rentrer dans une définition générale qui utilise la notion de tenseur riemannien (voir [G-H-L], chapitre 1) nous la définissons à partir des champs de Jacobi.

Soit γ une géodésique de M . Soit γ_s une perturbation de γ au voisinage de 0 et $J(t) = \frac{d}{ds}|_0 \gamma_s(t) \in T_{\gamma(t)}M$. $J(t)$ est appelé champ de Jacobi. Alors il existe une famille d'applications linéaires $R(t) : T_{\gamma(t)}M \rightarrow T_{\gamma(t)}M$, indexées sur $t \in [0, 1]$ telle que pour tout champ de Jacobi $t \mapsto J(t)$ le long de γ , on a l'équation différentielle $J''(t) + R(t)J(t) = 0$, où $J''(t)$ désigne la dérivée seconde covariante le long de γ . Soit maintenant $B_t = (e_1(t), \dots, e_n(t))$ un repère orthonormal mobile le long de γ . Si on note encore $J(t)$ la matrice colonne représentant le vecteur $J(t)$ dans B_t , il existe pour tout une matrice de taille n , également notée $R(t)$, telle que l'on a l'équation différentielle $J''(t) + R(t)J(t) = 0$. Alors $R(t)$ est une matrice symétrique et $R(t)\gamma'(t) = 0$. De plus, la quantité $\operatorname{tr}(R(t))$ ne dépend que du point $x = \gamma(t)$ et du vecteur $v = \gamma'(t)$. En particulier elle est indépendante du repère choisi. On peut ainsi définir :

Définition 1.1.1. Soit $x = \gamma(t)$ et $v = \gamma'(t)$. La quantité $\operatorname{tr}(R(t))$, notée $\operatorname{Ric}_x(v, v)$, est appelée courbure de Ricci (en x et en v).

On peut montrer que, pour un certain $x \in M$ fixé, l'application $v \mapsto \operatorname{Ric}_g(v, v)(x)$ est une forme quadratique sur l'espace tangent $T_x M$. On peut donc prolonger celle-ci en une forme bilinéaire symétrique sur $T_x M \times T_x M$, également notée Ric_g (au point x).

Avant de poursuivre, donnons des exemples simples, ceux de $\mathbb{R}^n$ et les sphères euclidiennes $\mathbb{S}^n$.

La métrique $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est simplement donnée par la matrice identité. Le laplacien sur $\mathbb{R}^n$ est le laplacien usuel donné par $\sum_{i=1}^n \partial_i^2$. Notons que la formule de Green est la formule d'intégration par parties usuelle. Dans $\mathbb{R}^n$, la matrice ci dessus $R(t) = 0$ donc l'espace euclidien est de courbure nulle.

Sur les sphères euclidiennes, la métrique est donnée par $g_{ij} = \delta_{ij} - x^i x^j$. Alors $\det(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{c_n}{\sqrt{(1-|x|^2)^2}}$, où c_n est une constante de normalisation, et l'opérateur de Laplace–Beltrami s'écrit

$$\Delta = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (\delta_{ij} - x^i x^j) \partial_{ij} - n \sum_{i=1}^n x^i \partial_i,$$

qui prend également la forme suivante $\Delta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x^j \partial_i - x^i \partial_j)^2$.

La matrice de courbure vaut $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{n-1} \end{pmatrix}$ et ainsi la courbure de Ricci est constante et égale

à $n - 1$.

Sous des conditions de minoration de la courbure de Ricci, de nombreuses inégalités fonctionnelles et géométriques sont connues. Le but des sections qui suivent est de présenter ces inégalités, dont les applications sont au carrefour de l'analyse, de la géométrie et la théorie des probabilités.

1.2 Isopérimétrie

Le problème isopérimétrique a une longue histoire et peut être posé dans des espaces très généraux. En effet, on a seulement besoin d'une mesure pour définir le "volume" et d'une distance pour définir le "bord" d'un ensemble. Sur un espace métrique (E, d, μ) , on considère le contenu de Minkowski

$$\mu^+(A) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(A_r) - \mu(A)}{r},$$

où $A_r = \{y \in E, d(x, A) \leq r\}$, avec $d(x, A) = \inf\{d(x, y), y \in A\}$. Ceci constituera notre définition du bord d'un ensemble. Définissons le profil isopérimétrique de l'espace de la façon suivante :

$$\mathcal{I}_{(E, d, \mu)}(v) = \inf\{\mu^+(A), A \subset E, \mu(A) = v\}.$$

Le problème isopérimétrique consiste à trouver le profil isopérimétrique ainsi que les ensembles atteignant l'infimum à mesure fixée. C'est en général un problème très difficile ; il est complètement résolu dans peu d'espaces. Un catalogue récent de ces espaces sont décrits dans [E-M], appendice H. Tous ces espaces sont lisses et possèdent une forte symétrie - ou ce sont des perturbations de tels espaces. Notons que le problème isopérimétrique est résolu dans les espaces à courbure de Ricci constante : l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, les sphères euclidiennes $\mathbb{S}^n$ et les espaces hyperboliques $\mathbb{H}_n$ munis de leurs volumes riemanniens. Les deux derniers cas ont été établis par Schmidt [Sch].

1.2.1 Isopérimétrie euclidienne

Le problème isopérimétrique sur le plan euclidien est un problème concret et vieux de plusieurs millénaires. La légende raconte qu'il était déjà connu - ou du moins pressenti - par la reine Didon à Carthage. Les ensembles minimisant la longueur à aire fixée sont des disques. Plus généralement, dans $\mathbb{R}^n$, les ensembles minimisant la surface à volume fixé sont des boules euclidiennes. Ce n'est que vers la fin du XIXe siècle que le problème est résolu de manière rigoureuse par Brunn, Minkowski puis Lusternik [Lus] grâce à l'inégalité suivante de Brunn–Minkowski–Lusternik. On note vol_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.2.1. *Soit A et B deux ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$. Si $A + B := \{x + y, x \in A, y \in B\}$ désigne la somme de Minkowski, alors $\text{vol}_n(A + B)^{1/n} \geq \text{vol}_n(A)^{1/n} + \text{vol}_n(B)^{1/n}$.*

En remarquant qu'il y a égalité dans le cas où A et B sont des boules euclidiennes centrées en un même point, cela implique l'inégalité isopérimétrique euclidienne, que l'on énonce classiquement sous la forme suivante :

Théorème 1.2.2. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et A^* la boule centrée de même volume que A . Alors

$$\frac{\text{vol}_n^+(A)}{\text{vol}(A)_n^{1-1/n}} \geq \frac{\text{vol}_n^+(A^*)}{\text{vol}_n(A^*)^{1-1/n}} = n\omega_n^{1/n}.$$

Le profil isopérimétrique euclidien satisfait donc $\mathcal{J}_E(v) = n\omega_n^{1/n}v^{1-1/n}$.

Outre son intérêt historique, l'inégalité isopérimétrique euclidienne est équivalente, par la formule de la co-aire, à une classe d'inégalité fonctionnelle importante, celle de Sobolev L^1 . Elle s'énonce sous la forme suivante :

$$\forall f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n), \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| dx.$$

Nous renvoyons à [Ma'] pour une présentation complète des inégalités de Sobolev euclidiennes. Notons qu'en appliquant cette dernière inégalité à f^α , pour $\alpha > 1$, on atteint les inégalités de Sobolev avec exposants p sous la forme suivante

$$\forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \|f\|_{\frac{np}{n-p}} \leq C_{n,p} \|\nabla f\|_p, \quad (1.1)$$

avec toutefois des constantes $C_{n,p}$ sous optimales.

Une question naturelle, à laquelle nous nous intéresserons sur d'autres espaces par la suite, va être de considérer la stabilité des inégalités isopérimétrique. C'est-à-dire, si un ensemble est de mesure de bord presque minimale, à quel point est-il "proche" un ensemble extrémal? Notons que cette question n'a semble-t-il été considérée que récemment. Les travaux de l'école italienne ont abouti à une version optimale du déficit de l'inégalité isopérimétrique euclidienne. Pour énoncer le résultat, on définit l'asymétrie de Fraenkel d'un ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^n$ par

$$\lambda(A) = \min \left\{ \frac{d(A, x + A^*)}{r^n}, x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

où r est le rayon de la boule A^* , c'est-à-dire $\left(\frac{\text{vol}(A)}{\omega_n} \right)^{1/n}$ et $d(E, F) = \text{vol}(E \Delta F)$ est la mesure de la différence symétrique. Alors, Figalli, Maggi et Pratelli [F-M-G] démontrent le résultat suivant, optimal en la dépendance en δ :

Théorème 1.2.3. Soit $\delta(A) = \frac{\text{vol}_n^+(A) - \text{vol}_n^+(A^*)}{\text{vol}_n^+(A^*)}$. Alors il existe une constante $C = C(n)$ telle que

$$\lambda(A) \leq C(n) \sqrt{\delta(A)}.$$

Dans la suite, nous ne nous intéresserons pas d'avantage dans ce travail à l'isopérimétrie euclidienne. Parmi les espaces où le problème isopérimétrique est complètement résolu, nous nous concentrerons sur les sphères euclidiennes $(\mathbb{S}^n, \sigma_n)$ et l'espace gaussien $(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$.

1.2.2 Isopérimétrie sphérique

Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère euclidienne de dimension n . Le problème isopérimétrique sur les sphères a été résolu par Lévy au début des années 20 [Lev] puis Schmidt de manière rigoureuse dans les années 40 par des techniques de symétrisations [Sch]. Les ensembles extrémaux sont des boules géodésiques, c'est-à-dire une intersection de la sphère n dimensionnelle avec un demi-espace de l'espace euclidien ambiant. Notons qu'à la limite où la mesure des ensembles tend vers 0, le théorème suivant implique le théorème isopérimétrique euclidien.

Théorème 1.2.4. Soit $A \subset \mathbb{S}^n$. Alors $\sigma_n^+(A) \geq \sigma_n^+(C)$ où C désigne une calotte sphérique satisfaisant $\sigma(C) = \sigma(A)$.

En fait, le résultat démontré est le suivant : $\forall r > 0, \sigma_n(A) = \sigma_n(C_r) \Rightarrow \sigma_n(A_r) \geq \sigma_n(C_r)$. La connaissance des ensembles extrémaux permet alors de déterminer explicitement le profil isopérimétrique. Si $a \in [-1, 1]$, et $C = \{x \in \mathbb{S}^n, x_1 \leq a\}$, alors

$$\frac{\text{vol}_n(C)}{\text{vol}_n(\mathbb{S}^n)} = \frac{\text{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}{\text{vol}_n(\mathbb{S}^n)} \int_{-1}^a (1-t^2)^{\frac{n-2}{2}} dt = \int_{-1}^a h_n(t) dt = H_n(a).$$

De plus son contenu de Minkowski vaut alors $h_n(a)$, de sorte que le profil isopérimétrique sphérique satisfait $\mathcal{J}_{\sigma_n}(v) = h_n(H_n^{-1}(v))$. On peut dans certains régimes donner des estimations plus explicites en terme de fonctions usuelles. Lorsque v tend vers 0, $\mathcal{J}_{\sigma_n}(v) \sim a_n v^{\frac{n-1}{n}}$ (comme pour le profil isopérimétrique euclidien). Notons également que pour $v = 1/2$, $H_n^{-1}(1/2) = 0$ et ainsi $\mathcal{J}_{\sigma_n}(1/2) = h_n(0) = \frac{\text{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}{\text{vol}_n(\mathbb{S}^n)}$.

Ce théorème implique que presque toute la sphère est recouverte par l'élargissement d'un ensemble de demi-mesure de rayon de l'ordre de $O(n^{-1/2})$. En effet, si $\sigma(A) = 1/2$,

$$\sigma_n(A_r) \geq \sigma_n(C_r) \geq 1 - 2e^{-nr^2/2}.$$

Les constantes ci-dessus sont optimales ; notons que par des arguments simples, on peut démontrer l'existence de constantes positives c_1, c_2 plus faibles telles que $\sigma_n(C_r) \geq 1 - c_1 e^{-c_2 nr^2}$. De manière fonctionnelle, ceci implique de la concentration sous-gaussienne pour des fonctions lipschitziennes sur la sphère via la proposition suivante, démontrée par Lévy.

Proposition 1.2.5. Soit $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ L -lipschitzienne et $\text{med}(f)$ sa médiane. Alors

$$\sigma_n(|f - \text{med}(f)| \geq r) \leq 2e^{-\frac{nr^2}{2L^2}}.$$

Cette dernière proposition a des conséquences très importantes et est à l'origine du phénomène de concentration de la mesure. Le résultat sur la sphère a également comme conséquence d'impliquer la résolution du problème isopérimétrique sur l'espace gaussien. C'est l'objet de la sous-section suivante.

1.2.3 Isopérimétrie gaussienne

Soit $\Pi_{N+1,n}$ la projection canonique de $\mathbb{R}^N$ sur $\mathbb{R}^n$, avec $N \geq n$. Alors, si $\sigma_{N,1}$ désigne la mesure de surface sur la sphère N dimensionnelle de courbure égale à 1 (i.e. de rayon $\sqrt{N-1}$), on a pour tout ensemble borélien $A \subset \mathbb{R}^n$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{N,1}(\Pi_{N+1,n}^{-1}(A \cap \mathbb{S}_N^1)) = \gamma_n(A)$. Cette observation, attribuée (faussement semble-t-il) à Poincaré stipule que l'espace gaussien peut être "vu" comme une limite de sphères N dimensionnelles de rayon $\sqrt{N}$.

Au milieu des années 70, en utilisant le résultat de Lévy et cette observation, Sudakov et Tsirelson [Su-Ts], et Borell [Bor1] de manière indépendante, résolvent le problème isopérimétrique dans l'espace Gaussien $(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$ et démontrent que les ensembles extrémaux sont des demi-espaces.

Théorème 1.2.6. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et H un demi-espace tel que $\gamma_n(A) = \gamma_n(H)$. Alors

$$\gamma_n^+(A) \geq \gamma_n^+(H) = \varphi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A))).$$

Le profil isopérimétrique gaussien $\mathcal{J}_\gamma$ vaut donc $\mathcal{J}_\gamma(v) = \varphi \circ \Phi^{-1}(v)$. Une propriété remarquable est qu'il ne dépend pas de la dimension, contrairement à ceux de l'espace euclidien et des sphères euclidiennes. Notons qu'une formulation équivalente est donnée sur les élargissements : $\forall r > 0, \gamma_n(A) = \gamma_n(H) \Rightarrow \gamma_n(A_r) \geq \gamma_n(H_r)$. En effet cette inégalité se réécrit

$$\gamma_n(A_r) \geq \Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + r),$$

qui s'obtient en intégrant l'inégalité $\gamma_n^+(A) \geq \gamma_n^+(H)$. De même que sur les sphères, ce théorème entraîne de nombreux résultats importants de concentration par le fait que si $\gamma_n(H) \geq 1/2$, $\gamma_n(H_r) \geq \Phi(r) \geq 1 - e^{-r^2/2}$. Ainsi, de façon analogue à la sphère, les fonctions lipschitziennes sur l'espace gaussien ont des déviations sous-gaussiennes par rapport à leurs moyennes.

De manière indépendante, par des techniques de symétrisation, Ehrhard [Ehr] au milieu des années 80 donne une autre preuve du théorème d'isopérimétrie gaussienne via l'inégalité suivante, analogue à celle de Brunn–Minkowski pour l'espace euclidien :

$$\forall A, B \subset \mathbb{R}^n, \forall \alpha + \beta = 1, \Phi^{-1}(\gamma_n(\alpha A + \beta B)) \geq \alpha \Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + \beta \Phi^{-1}(\gamma_n(B)).$$

Notons que sa forme générale (i.e. sans hypothèses spécifiques sur les ensembles) est due à Borell au début des années 2000 [Bor3].

Au début des années 90, dans un travail remarquable [Bob2], Bobkov montre que l'isopérimétrie gaussienne est équivalente à une inégalité fonctionnelle, dite de Bobkov, suivante

$$\mathcal{J}_\gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n \right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\mathcal{J}_\gamma^2(f) + |\nabla f|^2} d\gamma \quad (1.2)$$

pour tout fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ (localement) lipschitzienne. L'argument de Bobkov consiste à prouver cette inégalité sur l'espace à deux points $\{0, 1\}$ muni de $\mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$, c'est-à-dire établir, pour tout $a, b \in (0, 1)^2$,

$$\mathcal{J}_\gamma \left(\frac{a+b}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\mathcal{J}_\gamma^2(a) + \frac{|b-a|^2}{4}} + \sqrt{\mathcal{J}_\gamma^2(b) + \frac{|b-a|^2}{4}} \right),$$

puis obtenir l'inégalité sur le cube discret $\{0, 1\}^n$ par tensorisation avant d'en déduire l'inégalité pour l'espace gaussien par un argument utilisant le théorème de la limite centrale. Pour vérifier que cette inégalité est bien équivalente à l'inégalité de Bobkov, on applique cette inégalité pour une suite de fonctions f_ε approchant $\mathbf{1}_A$ (classiquement f_ε vaut 1 sur A , est linéaire sur $A^\varepsilon \setminus A$ et nulle en dehors de A^ε). Alors cela implique quand $\varepsilon \rightarrow 0$ l'inégalité $I_\gamma(\gamma(A)) \leq \gamma^+(A)$.

Réciproquement, la version ensembliste implique la version fonctionnelle. En effet, si l'on définit l'épigraphe d'une fonction $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$A_g = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_{n+1} \leq g(x)\},$$

alors

$$\gamma^+(A_g) = \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{1 + |\nabla g|^2}(x) \varphi_{n+1}(x, g(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(g(x)) \sqrt{1 + |\nabla g|^2}(x) d\gamma_n(x).$$

De plus, par composition des dérivations, si $g = \Phi^{-1} \circ f$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(g(x)) \sqrt{1 + |\nabla g|^2}(x) d\gamma_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\mathcal{J}_\gamma^2(f) + |\nabla f|^2} d\gamma_n(x).$$

Le terme de droite de l'inéquation (1.2) correspond donc à la mesure de bord de l'épigraphe de $\Phi^{-1} \circ f$. De plus, par théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g d\gamma = \gamma_{n+1}(A_g),$$

et ainsi l'isopérimétrie gaussienne $n+1$ dimensionnelle $\mathcal{J}_\gamma(\gamma_{n+1}(A_g)) \leq \gamma^+(A_g)$ implique bien l'inégalité de Bobkov.

S'il est immédiat de vérifier que les demi-espaces sont des ensembles extrémaux, il est plus délicat de démontrer que ce sont les seuls. Ce n'est qu'à la fin des années 90 que Carlen et Kierce [C-K]

en font la démonstration complète, sans hypothèses de régularité sur le bord des ensembles. Cette caractérisation s'appuie sur une preuve due à Bakry et Ledoux sur la forme fonctionnelle de Bobkov. En fait, la définition de mesure de bord utilisée par les auteurs fait suite à une définition due à De Giorgi [DG], mais qui coïncide en général avec le contenu de Minkowski. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 3.

Plus tard, Mossel et Neeman ont travaillé cette preuve pour donner une version quantitative de l'isopérimétrie gaussienne dans [M-N1]. Nous reviendrons en détails sur cette preuve dans le chapitre suivant. Notons qu'à la suite de ces travaux, Eldan [Eld], puis Barchiesi, Brancolini et Julin [B-B-J] ont obtenu par des arguments différents la version quantitative optimale (sauf dans le cas unidimensionnel) que nous énonçons sous une forme moins précise.

Théorème 1.2.7. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\gamma_n^+(A) = \mathcal{J}_\gamma(\gamma_n(A)) + \delta$. Alors il existe un demi-espace H tel que $\gamma_n(A) = \gamma_n(H)$ et une constante positive C telle que*

$$\gamma_n(A \Delta H) \leq C(\gamma_n(A))\sqrt{\delta}.$$

S'il est difficile, voire impossible de caractériser les ensembles extrémaux sur un espace général, il est en revanche possible d'estimer son profil isopérimétrique. Ce simple fait a des conséquences importantes en ce qui concerne la concentration et les inégalités fonctionnelles.

1.2.4 Théorèmes de comparaison

Les deux problèmes isopérimétriques sur la sphère et sur l'espace gaussien admettent les deux généralisations suivantes. Gromov [Grn] obtient un résultat de comparaison du profil isopérimétrique d'une variété riemannienne de courbure de Ricci minorée par r par rapport à celui de la sphère. Le théorème de comparaison de Lévy–Gromov s'énonce ainsi :

Théorème 1.2.8. *Soit V une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 2$ dont la courbure de Ricci est uniformément minorée par r . Soit $d\mu = \frac{d\text{vol}}{\text{vol}(V)}$ la mesure normalisée. Alors le profil isopérimétrique vérifie $\mathcal{J}_\mu \geq \mathcal{J}_{\sigma_{r,n}}$ où $\sigma_{r,n}$ est la mesure normalisée sur la sphère n dimensionnelle de courbure de Ricci constante égale r .*

Une version pour l'espace gaussien de ce résultat a été établie par Bakry et Ledoux [B-L1]. L'énoncé ci-dessous est une version partielle, dans le cas des variétés riemanniennes, du théorème de Bakry–Ledoux qui s'énonce dans un cadre plus général décrit plus bas.

Théorème 1.2.9. *Soit (M, g, μ) une variété riemannienne à poids telle que $\text{Ric}_g + \text{Hess}\psi \geq \kappa$ où $\mu = e^{-\psi} d\text{vol}$. Alors le profil isopérimétrique vérifie $\mathcal{J}_{(M,g,\mu)} \geq \sqrt{\kappa} \mathcal{J}_{(\mathbb{R}^n, \gamma)} = \mathcal{J}_{(\mathbb{R}^n, \gamma_\kappa)}$ où γ_κ est la mesure gaussienne dans $\mathbb{R}^n$ de variance $\frac{1}{\kappa} \text{Id}$.*

Ces théorèmes montrent que les espaces de références (sphères euclidiennes et espace gaussien) sont ceux qui minimisent la surface à volume fixé. De manière plus importante, ces théorèmes de comparaisons impliquent des inégalités de concentration sous-gaussienne sur des espaces plus généraux. Le théorème de Lévy–Gromov est en effet à l'origine du phénomène de concentration de la mesure mis en avant par Vitali Milman. Les applications de ce phénomène sont nombreuses notamment pour les études locales des espaces de Banach mais aussi dans de nombreux autres domaines en probabilités et statistiques.

Plus généralement, pour ce qui est d'une caractérisation récente et complète des théorèmes de comparaison des profils isopérimétriques, nous renvoyons à l'article d'Emanuel Milman [Mil1]. L'auteur y démontre des théorèmes de comparaisons dans le cas des variétés riemanniennes avec ou sans poids, avec minoration de courbure quelconque (y compris négatives), avec de plus des conditions sur le diamètre des variétés.

En particulier, ces travaux en lien avec le théorème du diamètre de Myers cité dans la section suivante permet de démontrer de la rigidité dans le théorème de comparaison de Lévy–Gromov, à

savoir que les seules variétés riemanniennes telles qu'il existe $v \in (0, 1)$ satisfaisant $\mathcal{J}_{(\mathbb{S}^n, g)}(v) = \mathcal{J}_{(M, g)}(v)$ sont les sphères elles-mêmes à transformations isopérimétriques près. Ce phénomène de rigidité remonte à Bayle [Bay] qui l'a démontré par des arguments différents. Dans le cas du théorème de comparaison de Bakry–Ledoux, un théorème de rigidité a été prouvé par Morgan [Mor]. Nous y reviendrons plus tard dans la thèse.

Très récemment, Cavalletti et Mondino [C-M1] ont démontré l'analogie du théorème de comparaison de Lévy–Gromov sur des espaces métriques mesurés (avec condition de non branchements de géodésiques) satisfaisant une condition de courbure dimension $CD^*(\kappa, N)$, $N < \infty$ appropriée. L'énoncé de cette condition nécessite des préliminaires techniques dont nous ne parlons pas. Nous renvoyons à la section 6 pour une définition de condition de courbure dimension dans le cadre plus classique des variétés riemanniennes.

L'argument principal des auteurs est de démontrer un théorème de localisation analogue à celui démontré par Kannan, Lovasz et Simonovits [K-L-S] dans le cas de l'espace euclidien. Un énoncé analogue a d'abord été établi récemment dans le cas des variétés par Klartag [Kla]. Cette technique de localisation permet alors de se ramener sur un espace unidimensionnel sur lequel les résultats sont déjà connus. En particulier, le résultat de Milman permet d'établir de plus dans ce cadre général un phénomène de rigidité analogue au cas des variétés via un argument sur le diamètre. Les cas d'égalités sont des suspensions sphériques - nous renvoyons à [C-M1] pour la définition précise. Le résultat principal de [C-M1] est le suivant :

Théorème 1.2.10. *Soit (E, d, μ) un espace métrique mesuré satisfaisant $CD^*(\kappa, N)$ avec $N \in \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{J}_{(E, d, \mu)} \geq \mathcal{J}_{(\mathbb{S}_\kappa^N, g, \sigma_{\kappa, N})}$. De plus s'il existe $v \in (0, 1)$ tel que $\mathcal{J}_{X, d, m}(v) = \mathcal{J}_{(\mathbb{S}_\kappa^N, g, \sigma_{\kappa, N})}(v)$ alors (X, d, m) est une suspension sphérique.*

Notons que l'extension du théorème de Bakry–Ledoux dans ce cadre général d'espace métriques mesurés avec une condition de courbure positive est encore un problème ouvert.

1.3 Autres inégalités géométriques

Sous la condition de courbure minorée, plusieurs implications géométriques sont connues dans le cadre riemannien. Parmi les plus théorèmes les plus célèbres, le théorème de Bonnet–Myers affirme qu'une variété riemannienne de courbure minorée par $\kappa > 0$ est compacte. De plus son diamètre est majoré par celui de la sphère de même courbure κ .

Théorème 1.3.1. *Soit M une variété riemannienne de dimension $n \geq 2$ et de courbure de Ricci minorée par κ . Alors son diamètre est fini et est majorée par celui de la sphère euclidienne n dimensionnelle de courbure constante κ , c'est-à-dire $\pi \sqrt{\frac{n-1}{\kappa}}$.*

Citons également le théorème de comparaison de Bishop–Gromov sur la croissante des boules.

Théorème 1.3.2. *Soit M une variété riemannienne de dimension $n \geq 2$ et de courbure de Ricci minorée par κ . Soit $p \in M$. Alors*

$$r \mapsto \frac{B_d(p, r)}{r^n}$$

est décroissante.

Une combinaison de ces résultats entraîne qu'une variété riemannienne n -dimensionnelle de courbure minorée par κ est de volume majoré par celui de la boule euclidienne n -dimensionnelle dont la courbure du bord est κ . Il est naturel de s'intéresser à la rigidité de ces théorèmes. Le théorème de Topogonov–Cheng affirme qu'à transformation isométrique près, le diamètre maximal est atteint seulement sur les sphères. Il en est ainsi de même pour le volume.

Ces inégalités géométriques mettent en lien courbure et dimension. Ces deux notions sont liées à travers des inégalités fonctionnelles célèbres et intéressantes que nous présentons dans la section suivante.

1.4 Lichnerowicz et inégalités fonctionnelles

Dans cette section nous présentons les inégalités de trou spectral, Sobolev et Sobolev logarithmique dans le cadre de variétés riemanniennes à courbure minorée.

1.4.1 Cas des variétés sans poids

Soit (M, g, vol) une variété riemannienne n -dimensionnelle avec Δ l'opérateur de Laplace–Beltrami. L'opérateur de Laplace–Beltrami permet de considérer l'équation de la chaleur associée $\partial_t u = \Delta u$.

Courbure et dimension sont liées par la minoration de Lichnerowicz qui stipule que si la courbure de Ricci est uniformément minorée par $\kappa > 0$ et si λ_1 désigne la première valeur propre non nulle de l'opérateur Δ , alors $\lambda_1 \geq \frac{n\kappa}{n-1}$. Les prémices riemanniennes se trouvent dans la formule de Bochner suivante :

$$\frac{1}{2} \Delta(|\nabla f|^2) - \nabla \Delta f \cdot \nabla f = \text{Ric}_g(\nabla f, \nabla f) + \|\text{Hess}(f)\|_{HS}^2.$$

De plus, rappelons que l'opérateur de Laplace–Beltrami en une fonction f est obtenu en prenant la trace de la hessienne de f . Ainsi, l'inégalité de Schwarz implique alors $\|\text{Hess}(f)\|_{HS}^2 \geq \frac{1}{n}(\Delta f)^2$. Montrons pourquoi cela implique aisément l'inégalité de Lichnerowicz. La formule de Green implique

$$\int_M \left(\frac{1}{2} \Delta(|\nabla f|^2) - \nabla \Delta f \cdot \nabla f \right) d\text{vol} = \int_M (\Delta f)^2 d\text{vol},$$

et ainsi, comme $\text{Ric}_g \geq \kappa g$,

$$\int_M (\Delta f)^2 d\text{vol} \geq \kappa \int_M |\nabla f|^2 d\text{vol} + \frac{1}{n} \int_M (\Delta f)^2 d\text{vol} = \kappa \int_M f(-\Delta f) d\text{vol} + \frac{1}{n} \int_M (\Delta f)^2 d\text{vol}.$$

Appliquons l'inégalité précédente à une fonction propre f associée à λ_1 normalisée de façon à ce que $\int_M f^2 d\text{vol} = 1$. On obtient alors $\lambda_1^2 \geq \kappa \lambda_1 + \frac{1}{n} \lambda_1^2$, et ainsi $\lambda_1 \geq \frac{n\kappa}{n-1}$. Rappelons que $-\Delta$ se prolonge en un opérateur symétrique positif sur $L^2(M)$. En décomposant de manière spectrale, la minoration $\lambda_1 \geq \frac{n\kappa}{n-1}$ implique l'inégalité suivante :

Théorème 1.4.1. *Pour toute fonction $f \in H^2(M)$,*

$$\text{Var}_\mu(f) = \int_M f^2 d\mu - \left(\int_M f d\mu \right)^2 \leq \frac{n-1}{n\kappa} \int_M |\nabla f|^2 d\mu,$$

où $H^2(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}, \int_M f^2 d\mu + \int_M |\nabla f|^2 d\mu < +\infty\}$.

Cette inégalité est appelée inégalité de trou spectral, pour les raisons invoquées ci-dessus. Elle est également communément appelée inégalité de Poincaré. En effet, elle a été d'abord démontrée par Poincaré sur un convexe borné de $\mathbb{R}^n$ (avec une constante non optimale), c'est-à-dire

$$\int_K f dx = 0 \implies \int_K f^2 dx \leq C_K \int_K |\nabla f|^2 dx.$$

Notons que dans ce cadre, la constante optimale dans cette inégalité a été obtenue par Payne et Weinberger et vaut $\frac{\pi^2}{\text{diam}^2(K)}$ [Pa-We].

En analyse des équations aux dérivées partielles, sur une variété M les espaces de Sobolev $W^{n,p}(M)$, définis par Sobolev dans les années 30, sont des espaces qui sont naturellement considérés. Dans $\mathbb{R}^n$, les inégalités de Sobolev (1.1) vues plus haut assurent le plongement $W^{n,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. De façon générale, les inégalités de Sobolev s'écrivent, pour des variétés compactes n dimensionnelles,

$$\left(\int_M |f|^{p^*} d\mu \right)^{p/p^*} \leq A(p) \int_M |\nabla f|^p d\mu + B(p) \int_M |f|^p d\mu$$

avec $p^* > p$ et $A(p), B(p) > 0$. Ces inégalités de Sobolev ont été largement étudiées. Il a été démontré par Sobolev qu'une telle inégalité est possible si et seulement si $p^* \leq \frac{pn}{n-p}$. Une question naturelle a été celle de la recherche des constantes optimales $A(p)$ et $B(p)$. Sur les sphères euclidiennes $\mathbb{S}^n$, $n \geq 1$, la détermination des ces constantes ainsi que des fonctions extrémales a d'abord été établie par Aubin [Aub] et Talenti [Tlt]. En utilisant des techniques de symétrisations, ainsi que le théorème de comparaison isopérimétrique de Lévy–Gromov, Ilias [Ili] a étendu les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes n dimensionnelles dont la courbure de Ricci est minorée par une constante strictement positive. Le résultat obtenu, optimal par rapport aux constantes, est le suivant.

Théorème 1.4.2. *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 2$ et de courbure de Ricci minorée par $\kappa > 0$. Alors, pour toute $f \in H^2(M)$, $\forall p \in (2, \frac{2n}{n-2}]$,*

$$\frac{n\kappa}{(n-1)(p-2)} \left(\left(\int_M |f|^p d\mu \right)^{2/p} - \int_M |f|^2 d\mu \right) \leq \int_M |\nabla f|^2 d\mu.$$

En particulier, pour l'exposant critique, $p^* = \frac{2n}{n-2}$,

$$\left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \frac{n-1}{4n(n-2)\kappa} \int_M |\nabla f|^2 d\mu + \int_M |f|^2 d\mu.$$

Quelques années plus tard, Bakry redémontrera cette inégalité par des arguments nouveaux qui seront présentés plus bas. Il est plus surprenant de constater que ces inégalités de Sobolev ont des conséquences géométriques et sont liées avec le théorème de comparaison de Myers. En effet, Bakry et Ledoux ont établi qu'une telle inégalité de Sobolev implique une finitude du diamètre. Ayant d'abord obtenu une borne non optimale (du type $\pi\sqrt{\frac{n}{\kappa}}$), Bakry et Ledoux [B-L2] ont démontré que l'inégalité de Sobolev optimale implique le théorème de Myers. De plus, les auteurs montrent que si le diamètre est maximal, cela entraîne un cas d'égalité dans l'inégalité de Sobolev. Ceci n'étant possible que sur la sphère, il en résulte une nouvelle démonstration du théorème de rigidité de Topogonov et Cheng.

Lorsque $p = 2$, l'inégalité est interprétée comme l'inégalité de Sobolev logarithmique suivante.

Théorème 1.4.3. *Pour toute fonction $f \in L^2 \log L^2(M)$,*

$$\text{Ent}_\mu(f^2) = \int_M f^2 \log f^2 d\mu - \left(\int_M f^2 d\mu \right) \log \left(\int_M f^2 d\mu \right) \leq \frac{n-1}{n\kappa} \int_M |\nabla f|^2 d\mu.$$

Il est à noter que cette inégalité est adimensionnelle. Elle peut être en effet déduite de l'inégalité de Sobolev précédente (avec exposant maximal p^*) lorsque la dimension n tend vers l'infini. Comme on le verra, ce phénomène d'indépendance de la dimension est caractéristique du cas des variétés à poids $(M, g, e^{-\psi} d\text{vol})$ avec une condition de minoration de la hessienne du potentiel ψ .

1.4.2 Cas de l'espace gaussien.

Soit donc une variété riemannienne à poids $(M, g, e^{-\psi} d\text{vol})$, avec ψ non constant et $L = \Delta - \nabla\psi \cdot \nabla$ le Witten-Laplacien. L'équation associée $\partial_t u = Lu$ est l'équation de la chaleur usuelle avec un terme de dérive additionnel du premier ordre, plus connue sous le nom d'équation Fokker-Planck linéaire. De manière plus traditionnelle, en notant $p = ue^{-\psi}$, cette dernière équation se réécrit $\partial_t p = \Delta p + \nabla \cdot (p \nabla \psi)$.

Dans de tels espaces, les inégalités de Sobolev ne sont en général plus valides, au contraire de l'inégalité de trou spectral et de Sobolev logarithmique.

Un exemple crucial en probabilité est bien sûr l'espace gaussien $(\mathbb{R}^n, L, \gamma_n)$. Le lemme de Poincaré permet de déterminer les inégalités de trou spectral et de Sobolev logarithmique. En effet l'inégalité de trou spectral à une sphère N -dimensionnelle de rayon $\sqrt{N-1}$ (notée $\mathbb{S}_1^N$) s'écrit

$$\text{Var}_\sigma(f) \leq \frac{N-1}{N} \int_{\mathbb{S}_1^N} |\nabla f|^2 d\sigma,$$

ce qui après passage à la limite en N , implique par lemme de Poincaré que, pour tout $n \geq 1$,

$$\text{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n.$$

De même, comme pour $p \rightarrow 2$, $\frac{\|f\|_p^2 - \|f\|_2^2}{p-2} \rightarrow \text{Ent}_\mu(f)$, l'inégalité de Sobolev optimale appliquée à $\mathbb{S}_1$ implique l'inégalité de Sobolev logarithmique suivante :

$$\text{Ent}_{\gamma_n}(f^2) \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu.$$

Cette inégalité a d'abord été établie par Gross [Grs]. Toutes ces inégalités sont indépendantes de la dimension n , comme pour le problème isopérimétrique. Comme indiqué par le lemme de Poincaré, l'espace gaussien est intrinsèquement un objet de courbure 1 et de dimension infinie.

En ce qui concerne l'inégalité de trou spectral, on peut aussi plus simplement calculer le spectre de l'opérateur $L = \Delta - x \cdot \nabla$.

$L^2(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$ est un espace hilbertien (pour le produit scalaire canonique) et de plus sa base hilbertienne est donnée par les polynômes de Hermite $(H_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$. De plus ces polynômes sont vecteurs propres de l'opérateur $-L$ associés aux valeurs propres $|\alpha|$. $-L$ a donc pour spectre $\mathbb{N}$. Ceci implique donc que l'inégalité de trou spectral optimal est

$$\text{Var}_{\gamma_n}(f) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n,$$

avec de plus égalité si et seulement si f est à constante près l'une des fonctions coordonnées x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$.

En ce qui concerne l'inégalité de Sobolev logarithmique, elle peut être déduite de manière analogue à l'espace euclidien de l'isopérimétrie par un argument utilisant la formule de la co-aire (cf [Le2]). De manière plus directe, Beckner a réalisé que l'inégalité de Sobolev logarithmique découle par un argument de limite de l'inégalité de Bobkov. Dans un cadre plus général, on verra une démonstration encore plus simple qui est due aux travaux de Bakry et Émery [B-E].

On a vu précédemment que le théorème de Myers sur une variété à courbure minorée implique une finitude du diamètre ce qui implique que les fonctions lipschitziennes définies sur une telle variété sont bornées. Lorsque l'on affaiblit la condition de courbure et que l'on considère des variétés à densités, ce résultat n'est bien sûr plus vrai, comme le montre l'exemple des fonctions linéaires sur l'espace gaussien. Cependant, de telles fonctions sont nécessairement très concentrées autour de leurs moyennes au sens où elles ont des inégalités de déviations sous-gaussienne. De façon plus générale, l'argument de Herbst affirme le fait suivant. Soit f une fonction 1-lipschitzienne. Alors

$$\text{Ent}_\mu(f^2) \leq 2 \int_E |\nabla f|^2 d\mu \implies \mathbb{E}(e^{\lambda f}) \leq e^{\lambda^2/2}.$$

Ceci combiné à l'inégalité de Markov implique des inégalités de concentration sous-gaussienne. Ainsi, la seule connaissance d'une inégalité de Sobolev Logarithmique, condition plus faible qu'une inégalité isopérimétrique, implique de la concentration. Notons que c'est à partir de cette remarque que Bakry et Ledoux ont démontré que les inégalités de Sobolev dimensionnelles impliquent le théorème de Myers.

L'extension de ces inégalités à d'autres variétés est un cas intéressant. Dans l'article fondateur [B-E], les auteurs donnent une approche unifiée qui s'applique à la fois aux variétés sans poids et avec poids, permettant de plus d'atteindre les constantes optimales dans les deux cas. Les travaux de [B-E] permettent d'étendre ces résultats dans un cadre abstrait nettement plus général que ceux présentés plus haut.

Le paragraphe suivant est consacré à la présentation de la théorie, communément appelée théorie de Bakry-Émery, qui permet cette approche unifiée.

1.5 Théorie de Bakry–Émery

Cette section a pour but de présenter le modèle de notre travail. Nous référons le lecteur à l'ouvrage très complet [B-G-L1], ou pour une présentation plus succincte à [Le3]. Le critère courbure-dimension introduit par Bakry et Émery est un objet fondamental dans l'étude des inégalités fonctionnelles et géométriques modernes.

1.5.1 Semi-groupes

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé. Une famille $(P_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs agissant sur un domaine $\mathcal{D}$ de fonctions définies sur E est appelée semi-groupe si elle vérifie les deux propriétés suivantes : $P_0 = \text{Id}$ et pour tout $s, t \geq 0$, $P_{t+s} = P_t \circ P_s$. Le semi-groupe est dit markovien si $(P_t)_{t \geq 0}$ pour tout $t \geq 0$, $P_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$. Le générateur infinitésimal du semi-groupe L de $(P_t)_{t \geq 0}$ est défini par

$$\forall f \in \mathcal{D}_2(L), Lf := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t f - f}{t}$$

où le domaine de Dirichlet $\mathcal{D}_2(L) \subset \mathcal{D}$ est l'ensemble des fonctions f in $L^2(\mu)$ pour laquelle cette limite existe. Réciproquement, L et $\mathcal{D}_2(L)$ détermine complètement $(P_t)_{t \geq 0}$. Par définition et par propriété de semi-groupe, on a alors $\frac{\partial}{\partial t} P_t f = L P_t f$ avec $P_0 f = f$. On écrit alors de manière intuitive $P_t = e^{tL}$.

À un générateur L , est associée une forme bilinéaire symétrique positive, appelée opérateur carré du champ, et notée Γ par

$$\forall f, g \in \mathcal{D}(L)^2, \Gamma(f, g) = \frac{1}{2} \left(L(fg) - fLg - gLf \right).$$

Un semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ est dit markovien si $\forall t \geq 0$, $P_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$. On supposera de plus que les mesures μ sont réversibles pour L et $(P_t)_{t \geq 0}$, i.e.

$$\forall f, g \in L^2(\mu), \int_E f Lg d\mu = \int_E g Lf d\mu,$$

et invariantes $(P_t)_{t \geq 0}$

$$\forall f \in L^1(\mu), \int_E P_t f d\mu = \int_E f d\mu.$$

Lorsque (E, μ, Γ) est un espace probabilisé, on a également la propriété d'ergodicité suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t f = \int_E f d\mu.$$

Un semi-groupe possède, en général, un noyau de probabilité qui s'écrit $p_t(x, \cdot)$ où pour toute fonction $f \in L^1(E)$,

$$P_t f(x) = \int_E f(y) p_t(x, dy), \quad t \geq 0, x \in E.$$

$p_t(x, \cdot)$ est alors une mesure de probabilité. On dit que le noyau est à densité si l'on a la représentation suivante

$$P_t f(x) = \int_E f(y) p_t(x, y) d\mu(y), \quad t \geq 0, x \in E.$$

Dans le cas où L est l'opérateur de Laplace–Beltrami sur une variété, $(P_t)_{t \geq 0}$ est appelé semi-groupe de la chaleur et $p_t(x, y)$ est le noyau de la chaleur associée. L'exemple le plus classique est bien sûr donné par le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$, qui prend la forme suivante :

$$P_t f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy.$$

De façon générale, de nombreux résultats d'estimations sur le noyau de la chaleur existent dans la littérature.

1.5.2 Triplet de Markov

Soit L un opérateur de diffusion c'est-à-dire que pour tout $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\psi(0) = 0$, et $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{D}$, on a :

$$L\psi(f_1, \dots, f_k) = \sum_{i=1}^k \partial_i \psi(f_1, \dots, f_k) Lf_i + \sum_{1 \leq i, j \leq k} \partial_{ij}^2 \psi(f_1, \dots, f_k) \Gamma(f_i, f_j).$$

Une diffusion L engendre un semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ par $(P_t = e^{tL})_{t \geq 0}$. L'opérateur de Laplace–Beltrami sur une variété riemannienne est un exemple pertinent de diffusion, auquel est associé le semi-groupe de la chaleur $(e^{t\Delta})_{t \geq 0}$.

Suivant Paul André Meyer, Bakry et Emery définissent les itérés $(\Gamma_n)_{n \geq 0}$ de l'opérateur “carré du champ” Γ (Γ_1 ci-dessous) en posant $\Gamma_0(f, g) = fg$ puis par récurrence :

$$\forall n \geq 1, \quad \Gamma_n(f, g) = \frac{1}{2} \left(L(\Gamma_{n-1}(f, g)) - \Gamma_{n-1}(f, Lg) - \Gamma_{n-1}(g, Lf) \right).$$

Posons pour alléger les notations $\Gamma_n(f) = \Gamma_n(f, f)$. La propriété de diffusion est à l'origine des formules de compositions suivantes.

$$\Gamma(u(f)) = u'(f)^2 \Gamma(f), \quad \Gamma_2(u(f)) = u'(f)^2 \Gamma_2(f) + u'(f)u''(f) \Gamma(f, \Gamma(f)) + u''(f)^2 \Gamma(f)^2.$$

Lorsque (M, g, vol) est une variété riemannienne et Δ est l'opérateur de Laplace–Beltrami, l'opérateur carré du champ $\Gamma(f)$ est égal à $|\nabla f|^2$, et la formule de Bochner prend la forme plus synthétique suivante :

$$\Gamma_2(f) = \text{Ric}_g(\nabla f, \nabla f) + \|\text{Hess}(f)\|_{HS}^2.$$

En conséquence, si la variété riemannienne est n -dimensionnelle avec une courbure de Ricci minorée par κ , la formule de Bochner associée à l'inégalité de Schwarz implique que :

$$\Gamma_2(f) \geq \kappa |\nabla f|^2 + \frac{1}{n} (\Delta f)^2 = \kappa \Gamma(f) + \frac{1}{n} (\Delta f)^2.$$

En fait, cette condition caractérise le fait d'être de courbure minorée par κ et de dimension majorée par n . En effet, appliquons cette dernière inégalité à une famille de fonctions f_α telles qu'en un $x_0 \in M$, $\nabla f_\alpha = v_0$ et $\text{Hess} f_\alpha(x_0) = \alpha \text{Id}_{\dim M}$. Alors d'après la formule de Bochner on obtient :

$$\Gamma_2(f_\alpha) = \text{Ric}(v_0, v_0) + \dim(M) \alpha^2 \geq \kappa |v_0|^2 + \frac{(\dim(M) \alpha)^2}{n},$$

ce qui implique en faisant tendre α vers 0 que $\text{Ric} \geq \kappa$ et faisant tendre α vers l'infini que $\dim(M) \leq n$. Ainsi énoncé, cette caractérisation est propice à une définition plus générale de *courbure-dimension*.

Définition 1.5.1. (E, μ, Γ) satisfait le critère de courbure dimension $CD(\kappa, n)$ si et seulement si :

$$\forall f \in \mathcal{D}, \quad \Gamma_2(f) \geq \kappa \Gamma(f) + \frac{1}{n} (Lf)^2.$$

Bien sûr, il est immédiat que $CD(\kappa, n) \Rightarrow CD(\kappa', n)$ pour $\kappa' \leq \kappa$ et $CD(\kappa, n) \Rightarrow CD(\kappa', m)$ pour $n \leq m$. Le critère de courbure dimension $CD(\kappa, n)$ est donc une condition de courbure minorée par κ et de dimension majorée par n .

Si $n \in \mathbb{N}$, les espaces modèles sont naturellement donnés par l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ si $\kappa = 0$, et par les sphères euclidiennes $\mathbb{S}^n$ de rayon $\sqrt{\frac{n-1}{\kappa}}$ si $\kappa > 0$. De plus la formule de Bochner prend la forme synthétique suivante $\Gamma_2(f) = \kappa \Gamma(f) + \|\text{Hess}(f)\|_{HS}^2$.

Plus généralement, comme vu plus haut, on s'intéresse à des variétés riemanniennes à poids $d\mu = e^{-V} d\text{vol}$. L'opérateur de diffusion associée est $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$. Alors la remarque de Bakry et Émery est que le carré du champ itéré Γ_2 agit sur les fonctions de la forme suivante :

$$\Gamma_2(f) = (\nabla^2 V + \text{Ric}_g)(\nabla f, \nabla f),$$

et ainsi la condition $CD(\kappa, \infty) \Gamma_2 f \geq \kappa \Gamma f$ se réalise si $\nabla^2 V + \text{Ric}_g \geq \kappa$ uniformément comme tenseurs symétriques. Ce tenseur est appelé *tenseur de Bakry-Emery*. Il traduit en définitive le rôle de courbure apporté par un potentiel strictement convexe.

L'espace modèle est donnée par l'espace gaussien $(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$, qui vérifie $CD(1, \infty)$ puisque la hessienne de $x \mapsto \frac{|x|^2}{2}$ est la matrice identité. On voit ainsi que la définition de dimension ne coïncide pas nécessairement avec la dimension topologique. L'observation de Poincaré est particulièrement instructive à cet égard. Rappelons que l'espace gaussien peut être vu comme limite de sphères n -dimensionnelles de rayon $\sqrt{n-1}$, qui sont des espaces de classe $CD(1, n)$. Cela explique également pourquoi les inégalités fonctionnelles et géométriques sur l'espace gaussien sont adimensionnelles.

Le semi-groupe sous-jacent $(Q_t)_{t \geq 0}$ est appelé semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck. Il agit sur les fonctions du domaine de Dirichlet $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto Q_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) d\gamma(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) q_t(x, y) d\gamma(y),$$

avec q_t le noyau de Mehler associé. Notons que

$$q_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \exp\left(\frac{e^{-2t}|x|^2 - 2e^{-t}x \cdot y + e^{-2t}|y|^2}{2(1-e^{-2t})}\right).$$

Plus généralement, puisque $\mathbb{R}^n$ est plat, $(\mathbb{R}^n, \mu(dx) = e^{-V(x)}dx)$ satisfait $CD(\kappa, \infty)$ si et seulement si $\nabla^2 V \geq \kappa$, ce qui correspond à la classe des mesures log-concaves par rapport à la mesure gaussienne γ_κ .

Bien sûr, un des intérêts majeur du critère de courbure-dimension de Bakry-Emery est que l'on peut considérer des espaces plus généraux que des variétés. Néanmoins une contrainte est la donnée d'un opérateur de diffusion qui nécessite déjà une structure régulière.

Un deuxième intérêt majeur est l'efficacité de ce critère vis-à-vis des inégalités fonctionnelles et géométriques. Dans ce cadre, on dit que (E, μ, Γ) satisfait à une inégalité de trou spectral $SG(\kappa)$ si

$$\forall f \in \mathcal{D}, \text{Var}_\mu(f) \leq \frac{1}{\kappa} \int_E \Gamma(f) d\mu = \mathcal{E}(f, f). \quad (1.3)$$

De même, on dit que (E, μ, Γ) satisfait à une inégalité de Sobolev logarithmique $LS(\kappa)$ si

$$\forall f \in \mathcal{D}, \kappa \text{Ent}_\mu(f^2) \leq 2 \mathcal{E}(f, f). \quad (1.4)$$

De même, on dit que (E, μ, Γ) satisfait à une inégalité de Sobolev (avec exposant critique) si

$$\forall f \in \mathcal{D}, \left(\int_E |f|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu \right)^{\frac{n-2}{n}} - \int_E |f|^2 d\mu \leq \frac{n-1}{4n(n-2)\kappa} \mathcal{E}(f, f). \quad (1.5)$$

Notons λ la meilleure (i.e. plus grande) constante dans l'inégalité de trou spectral et ρ la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev logarithmique. De façon générale, l'existence d'une inégalité de Sobolev logarithmique implique que l'inégalité de trou spectral est réalisée et de plus $\rho \leq \lambda$. En effet, en appliquant (1.4) à $1 + \varepsilon f$ et en faisant tendre ε vers 0, cela implique à la limite (1.3) par le fait que $\text{Ent}_\mu((1 + \varepsilon f)^2) \sim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\varepsilon^2 \text{Var}_\mu f$.

1.6 Hypercontractivité

L'hypercontractivité est une notion fondamentale de notre thèse, dont nous nous servirons surtout dans la deuxième partie en lien avec des applications discrètes. Historiquement, le terme est apparu à la fin des années 60 en physique quantique. Il est classique de voir que les semi-groupes de diffusion sont contractifs, i.e. continus de L^p dans eux mêmes avec $\|P_t\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq 1$. La propriété

d'hypercontractivité est une propriété plus forte qui traduit la régularisation d'une fonction le long du semi-groupe. C'est-à-dire pour $q = f(p, t) \geq p$, $\|P_t\|_{L^p \rightarrow L^q} \leq 1$. La propriété d'hypercontractivité du semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck remonte à Nelson, à la fin des années 60. Il s'énonce sous la forme suivante :

Théorème 1.6.1. *Soit $(Q_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck. Alors si $q(t) = 1 + (p - 1)e^{2t}$,*

$$\|Q_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \gamma_n) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^n, \gamma_n)} \leq 1.$$

Si de plus $q > q(t)$, Q_t n'est pas continu de $L^p(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$.

Peu de temps après, le lemme de Bonami sur le cube discret (nous reviendrons en détail sur ce lemme dans la deuxième partie) permet de retrouver ce résultat via le théorème de la limite centrale. Puis, par un argument remarquable, Gross a remarqué que la propriété d'hypercontractivité d'un semi-groupe est équivalente au fait que l'espace sous-jacent muni de la diffusion satisfait à une inégalité de Sobolev Logarithmique. On dira que $(P_t)_{t \geq 0}$ est hypercontractif avec constante ρ si $\|P_t\|_{L^p(E, \mu) \rightarrow L^q(E, \mu)} \leq 1$ pour $q(t) = 1 + (p - 1)e^{2\rho t}$. Nous rappelons l'argument de Gross.

Proposition 1.6.2. *$(P_t)_{t \geq 0}$ est hypercontractif avec constante ρ si et seulement si (E, μ, Γ) satisfait $LS(\rho)$.*

Démonstration. Soit $F : t \mapsto \|P_t f\|_{q(t)}$. Alors

$$\frac{d}{dt}(F(t)^{q(t)}) = q(t)F'(t)F(t)^{q(t)-1} + q'(t)\log F(t)F(t)^{q(t)}.$$

Mais

$$\frac{d}{dt}(F(t)^{q(t)}) = \frac{d}{dt} \int_E (P_t f)^{q(t)} d\mu = \int_E q'(t)(\log P_t f)(P_t f)^{q(t)} + q(t)LP_t f (P_t f)^{q(t)-1} d\mu,$$

et ainsi

$$q(t)F'(t)F(t)^{q(t)-1} = \frac{q'(t)}{q(t)} \text{Ent}_\mu((P_t f)^{q(t)/2}) + q(t) \int_E LP_t f (P_t f)^{q(t)-1} d\mu$$

Or par réversibilité et invariance de L par rapport à μ , puis par composition

$$\int_E LP_t f (P_t f)^{q(t)-1} d\mu = - \int_E \Gamma(P_t f, P_t f^{q(t)-1}) d\mu = - \int_E (q(t) - 1)(P_t f)^{q(t)-2} \Gamma(P_t f) d\mu,$$

donc

$$\begin{aligned} q(t)^2 F'(t) F(t)^{q(t)-1} &= q'(t) \text{Ent}_\mu((P_t f)^{q(t)/2}) - q(t)^2 \int_E (q(t) - 1)(P_t f)^{q(t)-2} \Gamma(P_t f) d\mu \\ &= q'(t) \text{Ent}_\mu((P_t f)^{q(t)/2}) - 4(q(t) - 1) \int_E \Gamma(P_t f^{q(t)/2}) d\mu. \end{aligned}$$

Ainsi si $q'(t) = \rho 2(q(t) - 1)$, $F'(t) \leq 0$ en vertu de l'inégalité de Sobolev logarithmique. Or la condition $q'(t) = \rho 2(q(t) - 1)$ s'énonce $q(t) = 1 + (q(0) - 1)e^{2\rho t}$. □

1.7 Éléments de calcul “ Γ_2 ” et applications aux inégalités fonctionnelles et géométriques.

Dans [B-E], les auteurs démontrent que la condition $CD(\kappa, n)$, $n \in (0, \infty]$, sur un espace probabilisé implique la validité des inégalités fonctionnelles citées en introduction avec constantes optimales.

Dans cette section, nous nous concentrons essentiellement sur le cadre $CD(\kappa, \infty)$, où nous rappelons les preuves qui permettent d'obtenir les inégalités de trou spectral et de Sobolev logarithmiques avec constantes optimales. Pour ce qui est des espaces satisfaisant la condition $CD(\kappa, n)$, $n < \infty$, nous renvoyons le lecteur à [Bak1] en ce qui concerne les preuves des inégalités de Sobolev et Sobolev logarithmiques établies avec constantes optimales.

L'idée générale est d'utiliser une interpolation le long du semi-groupe. Les auteurs démontrent l'équivalence entre le critère $CD(\kappa, \infty)$ et une sorte de commutation entre l'opérateur Γ et le semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ sous la forme du lemme suivant.

Lemme 1.7.1. *Sous la condition $CD(\kappa, \infty)$ on a $\forall t \geq 0$, $\Gamma(P_t f) \leq e^{-2\kappa t} P_t(\Gamma(f))$.*

Démonstration. L'idée est de considérer $\varphi(s) = P_s \Gamma(P_{t-s} f)$, $s \in [0, t]$. Alors $\varphi'(s) = L P_s(\Gamma(P_{t-s} f)) + P_s(\frac{d}{ds} \Gamma(P_{t-s} f))$. Puisque $\Gamma(f, g)$ est une forme bilinéaire et $\frac{d}{ds} P_s = L P_s$, $\frac{d}{ds} \Gamma(P_{t-s} f) = -2\Gamma(P_{t-s} f, L P_{t-s} f)$. Ainsi $\varphi'(s) = P_s(L(\Gamma(P_{t-s} f)) - 2\Gamma(P_{t-s} f, L P_{t-s} f)) = P_s(2\Gamma_2(P_{t-s} f))$ et ainsi

$$\forall s \in [0, t], \varphi'(s) - 2\kappa \varphi(s) \geq 0$$

d'où $\varphi(t) \leq e^{2\kappa t} \varphi(0)$ ce qui conclut. □

Notons que pour le semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$ ou pour le semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck, il y a commutation exacte sous la forme suivante $\nabla P_t f = P_t \nabla f$, et $\nabla Q_t f = e^{-t} Q_t \nabla f$, qui découle directement de l'expression explicite des semi-groupes.

Dans le cas des diffusions sur une variété riemannienne, la condition de commutation $|\nabla P_t f|^2 \leq e^{-2\kappa t} P_t(|\nabla f|^2)$ admet la version plus forte - par l'inégalité de Jensen - suivante $|\nabla P_t f| \leq e^{-\kappa t} P_t(|\nabla f|)$. Dans le cas des diffusions sur un triplet de Markov abstrait, Bakry a démontré de manière analogue que la condition $\Gamma_2 \geq \Gamma$ implique $P_t \sqrt{\Gamma(f)} \leq e^{-\kappa t} \sqrt{\Gamma(P_t f)}$. (cf [B-G-L1]). Comme il y a égalité en t , en dérivant cette inégalité en t - cf le lemme suivant, on constate que la version infinitésimale implique un auto renforcement de la condition $\Gamma_2 - \kappa \Gamma \geq 0$ sous la forme suivante :

$$\Gamma(\Gamma_2 - \kappa \Gamma) \geq \frac{1}{4} \Gamma(\Gamma). \quad (1.6)$$

De façon plus générale, la propriété de diffusion d'un semi-groupe donne les formules de dérivations (en temps) suivantes :

Lemme 1.7.2. *Soit ψ une fonction assez régulière (C^2 suffit) sur un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{D}$ et $t > 0$ fixé, tel que $\forall u \in [0, t]$, $(P_u f, \Gamma P_u f) \subset \mathcal{O}$. Alors, en notant $f_{t-s} = P_{t-s} f$,*

$$\frac{d}{ds} P_s(\psi(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s} f))) = P_s K,$$

où l'on note

$$K = 2\partial_2 \psi \Gamma_2(f_{t-s}) + \partial_{11} \psi \Gamma(f_{t-s}) + 2\partial_1 \partial_2 \psi \Gamma(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) + \partial_{22} \psi \Gamma(\Gamma(f_{t-s})).$$

Démonstration. Par définition du semi-groupe,

$$\frac{d}{ds} P_s(\psi(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s} f))) = P_s \left(L \psi(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s} f)) + \frac{d}{ds} \psi(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) \right).$$

Par la propriété de diffusion, on a de plus

$$L \psi(f_1, \dots, f_k) = \sum_{i=1}^k \partial_i \psi(f_1, \dots, f_k) L f_i + \sum_{1 \leq i, j \leq k} \partial_{ij}^2 \psi(f_1, \dots, f_k) \Gamma(f_i, f_j)$$

et ainsi

$$\begin{aligned} L\psi(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) &= \partial_1 \psi(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) Lf_{t-s} + \partial_2 \psi(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) L\Gamma(f_{t-s}) \\ &+ \partial_{11} \psi(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) \Gamma(f_{t-s}) + 2\partial_1 \partial_2 \psi(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) \Gamma(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) \\ &+ \partial_{22} \psi(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) \Gamma(\Gamma(f_{t-s})). \end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{d}{ds} \psi(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) = -\partial_1 \psi(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) Lf_{t-s} - 2\partial_2 \psi(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) \Gamma(f_{t-s}, L\Gamma f_{t-s}),$$

cela conclut le lemme en utilisant la définition de Γ_2 . □

Les corollaires suivants découlent aisément du lemme précédent. Ils sont cependant fondamentaux car ils impliquent des inégalités fonctionnelles citées en introduction.

Corollaire 1.7.3. $\frac{d}{ds} P_s(f_{t-s}^2) = 2P_s(\Gamma(f_{t-s})),$ et $\frac{d^2}{ds^2} P_s(f_{t-s}^2) = 4P_s(\Gamma_2(f_{t-s})).$

Ce corollaire permet de démontrer l'inégalité de trou spectral. Notons que par définition des itérés du carré du champ, on a en fait pour tout $n \geq 1$, $\frac{d}{ds} P_s(\Gamma_{n-1}(f_{t-s})) = 2P_s(\Gamma_n(f_{t-s})).$

Corollaire 1.7.4. $\frac{d}{ds} P_s(f_{t-s} \log f_{t-s}) = 2P_s(f_{t-s} \Gamma(\log f_{t-s})),$ et $\frac{d^2}{ds^2} P_s((f_{t-s} \log f_{t-s})) = 4P_s(f_{t-s} \Gamma_2(\log f_{t-s})).$

Ce corollaire, comme nous le verrons plus bas, permet de démontrer des inégalités de Sobolev logarithmiques. Nous donnons un dernier corollaire qui met en jeu une forme inverse de l'isopérimétrie gaussienne.

Corollaire 1.7.5.

$$\frac{d}{ds} P_s(\mathcal{J}_\gamma(f_{t-s})) = P_s(\mathcal{J}_\gamma(f_{t-s})^{-1} \Gamma(f_{t-s})), = P_s(\mathcal{J}_\gamma(f_{t-s}) \Gamma(\Phi^{-1}(f_{t-s}))).$$

1.7.1 Preuve des inégalités fonctionnelles dans le cas d'un générateur de diffusion infini-dimensionnel

Commençons par le cas le plus simple, la démonstration de l'inégalité de Poincaré. Par ergodicité, puis théorème fondamental de l'analyse, la variance se développe le long du semi-groupe de la chaleur de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Var}_\mu(f) &= \int_{\mathbb{R}^n} (P_t f)^2 d\mu - \left(\int_E f d\mu \right)^2 = - \int_0^\infty \frac{d}{ds} \int_E (P_s f)^2 d\mu ds \\ &= -2 \int_0^\infty \int_E P_s f L(P_s f) d\mu ds = 2 \int_0^\infty \int_E \Gamma(P_s f) d\mu ds. \end{aligned}$$

Dans le cas où $\kappa > 0$, l'inégalité de Poincaré suit alors facilement : en effet en utilisant le lemme 1.7.1 qui permet d'échanger semi-groupe et opérateur Γ , comme μ est invariante pour $(P_t)_{t \geq 0}$,

$$2 \int_0^\infty \int_E \Gamma(P_s f) d\mu ds \leq 2 \int_0^\infty e^{-2\kappa s} \int_E P_s \Gamma(f) d\mu ds = 2 \int_0^\infty e^{-2\kappa s} ds \int_E \Gamma(f) d\mu,$$

ce qui donne, l'inégalité de Poincaré avec constante κ .

En fait, cette inégalité est locale, au sens où l'on démontre de même que ponctuellement :

$$C(\kappa, t) \Gamma(P_t f) \leq P_t f^2 - (P_t f)^2 \leq D(\kappa, t) P_t(\Gamma(f)),$$

où $C(\kappa, t) = \int_0^t e^{2\kappa u} du$ et $D(\kappa, t) = \int_0^t e^{-2\kappa u} du$. On écrit en effet :

$$P_t f^2 - (P_t f)^2 = \int_0^t \frac{d}{ds} P_s((P_{t-s} f)^2) ds = 2 \int_0^t P_s(\Gamma P_{t-s} f) ds.$$

Par la propriété de commutation on a $e^{2\kappa s} \Gamma(P_s(P_{t-s} f)) \leq P_s(\Gamma P_{t-s} f) \leq e^{-2\kappa(t-s)} P_s P_{t-s}(\Gamma f)$. Par propriété de semi-groupe, il s'ensuit :

$$e^{2\kappa s} \Gamma(P_t f) \leq P_s(\Gamma P_{t-s} f) \leq e^{-2\kappa(t-s)} P_t(\Gamma(f)),$$

ce qui conclut l'assertion.

Le même raisonnement peut être ainsi appliqué pour atteindre l'inégalité de Sobolev logarithmique.

Proposition 1.7.6. *Soit (E, μ, Γ) un espace de probabilité satisfaisant $CD(\kappa, \infty)$, avec $\kappa \in \mathbb{R}$. Alors, sous la condition $CD(\kappa, \infty)$,*

$$C(\kappa, t) \frac{\Gamma(P_t f)}{P_t f} \leq P_t(f \log f) - P_t f \log P_t f \leq D(\kappa, t) P_t \left(\frac{\Gamma(f)}{f} \right),$$

avec encore $C(\kappa, t) = \int_0^t e^{2\kappa s} ds$ et $D(\kappa, t) = \int_0^t e^{-2\kappa s} ds$. En particulier, si $\kappa > 0$, (E, μ, Γ) satisfait $LS(\kappa)$.

Démonstration. La preuve est très similaire à celle vue plus haut pour établir l'inégalité de Poincaré. D'après le corollaire et le fait que $\Gamma(\log g) = \frac{\Gamma(g)}{g^2}$

$$P_t(f \log f) - P_t f \log P_t f = \int_0^t \frac{d}{ds} P_s(P_{t-s} f \log P_{t-s} f) ds = \int_0^t P_s \left(\frac{\Gamma(P_{t-s} f)}{P_{t-s} f} \right) ds,$$

Or par le corollaire 1.7.4, $F : s \mapsto e^{-2\kappa s} P_s(P_{t-s} f \Gamma(\log P_{t-s} f))$ est croissante car

$$F'(s) = 2e^{-2\kappa s} P_s(P_{t-s} f (\Gamma_2 - \kappa \Gamma)(\log P_{t-s} f)).$$

Ainsi, utilisant la propriété de commutation dans les deux sens,

$$e^{2\kappa(t-s)} \frac{\Gamma(P_t f)}{P_t f} = e^{2\kappa(t-s)} \frac{\Gamma(P_s(P_{t-s} f))}{P_s(P_{t-s} f)} \leq P_s \left(\frac{\Gamma(P_{t-s} f)}{P_{t-s} f} \right) \leq e^{-2\kappa t} P_t \left(\frac{\Gamma(f)}{f} \right).$$

Le résultat suit par intégration. De nouveau, si $\kappa > 0$, en faisant tendre $t \rightarrow \infty$, par ergodicité l'inégalité de droite appliqué à f^2 entraîne l'inégalité de Sobolev logarithmique $LS(\kappa)$ car

$$\frac{\Gamma(f^2)}{f^2} = 4\Gamma(f).$$

□

Si les inégalités de trou spectral et de Sobolev logarithmiques sont antérieures aux travaux de Bakry-Émery, ce n'est pas le cas des formes inverses. Ces inégalités sont intéressantes. En effet, la forme inverse de l'inégalité de Poincaré implique que pour toute fonction bornée par 1, $P_t f$ est $1/\sqrt{C(\kappa, t)}$ -Lipschitz au sens où $\Gamma(P_t f) \leq 1/C(\kappa, t)$. Cette propriété a été mise en lumière par Ledoux, qui l'a utilisée pour donner une nouvelle démonstration d'une inégalité de Buser [Le1] sur la minoration de la constante de trou spectral. Cette nouvelle preuve s'appuie sur le lemme suivant, dont nous nous resservirons par la suite :

Lemme 1.7.7. *Soit (E, μ, Γ) satisfaisant $CD(0, \infty)$. Alors*

$$\forall f \in L^1(E), \|f - P_t f\|_1 \leq \sqrt{t} \|\sqrt{\Gamma(f)}\|_1. \quad (1.7)$$

Démonstration. Par dualité des espaces L^p , $p \in [1, \infty]$, prenons $g \in L^\infty(E)$ telle que $\|g\|_\infty \leq 1$. Par le théorème fondamental de l'analyse et de nouveau l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned} \int_E (f - P_t f) g d\mu &= - \int_E g \int_0^t \frac{d}{ds} P_s f ds d\mu = - \int_0^t \int_E g L P_s f d\mu ds \\ &= - \int_0^t \int_E P_s g L f d\mu ds = \int_0^t \int_E \Gamma(P_s g, f) d\mu ds \\ &\leq \int_0^t \int_E \Gamma(P_s g)^{1/2} d\mu \int_E \Gamma(f)^{1/2} d\mu ds \leq \int_0^t \frac{ds}{2\sqrt{s}} \int_E \Gamma(f)^{1/2} d\mu, \end{aligned}$$

ce qui conclut puisque $\|f - P_t f\|_1 = \sup_{\|g\|_\infty=1} \int_E (f - P_t f) g d\mu$.

□

Pour ce qui est de la forme inverse de l'inégalité de Sobolev logarithmique, cela implique que $0 \leq f \leq 1$,

$$C(\kappa, t) \Gamma(\log P_t f) \leq -\log(P_t f)$$

et ainsi $\phi = (-\log P_t f)^{1/2}$ est $\frac{1}{\sqrt{2C(\kappa, t)}}$ -Lipschitz au sens où $\Gamma(\phi) \leq \frac{1}{2C(\kappa, t)}$.

Cette propriété a été utilisé par Hino [Hin] pour prouver des inégalités de type Wang–Harnack. Plus tard Ledoux [Le5] a utilisé ce fait pour prouver un théorème d'Emanuel Milman sur l'équivalence entre isopérimétrie et concentration sous une hypothèse de minoration de courbure. Plus récemment, et nous y reviendrons dans le chapitre 3, ce fait a été utilisé par Mossel et Neeman pour prouver des estimations indépendantes de la dimension sur le déficit isopérimétrique gaussien [M-N1].

Citons une autre lemme, qui met en jeu la fonction isopérimétrique gaussienne, qui découle du corollaire 1.7.5. Comme pour l'inégalité de Sobolev logarithmique inverse, ce lemme a récemment été exploité par Bakry, Gentil et Ledoux pour prouver des inégalités de type Wang–Harnack [B-G-L2].

Lemme 1.7.8. $\Gamma(\Phi^{-1} \circ P_t f) \leq \frac{e^{-2t}}{1-e^{-2t}} = k_t^2$.

Démonstration. La preuve suit les mêmes lignes que les précédentes. Par le corollaire 1.7.5,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\gamma^2(f_t) - (P_t(\mathcal{J}_\gamma f))^2 &= - \int_0^t \frac{d}{ds} \left(P_s(\mathcal{J}_\gamma(f_{t-s})) \right)^2 ds \\ &= 2 \int_0^t P_s(\mathcal{J}_\gamma(f_{t-s})) P_s(\mathcal{J}_\gamma(f_{t-s}))^{-1} \Gamma(f_{t-s}) ds \\ &\geq 2 \int_0^t (P_s(\sqrt{\Gamma f_{t-s}}))^2 dt \geq 2 \Gamma f_t \int_0^t e^{2s} ds, \end{aligned}$$

où on utilise à la dernière ligne l'inégalité de Schwarz et la propriété de commutation entre $(P_t)_{t \geq 0}$ et $\sqrt{\Gamma}$. Cela implique que $\Gamma f_t \leq \frac{\mathcal{J}_\gamma^2(f_t)}{e^{2t}-1}$, ce qui est équivalent à l'énoncé du lemme

$$\Gamma(\Phi^{-1}(f_t)) \leq \frac{1}{e^{2t}-1} = k_t^2.$$

□

En utilisant l'estimation $\mathcal{J}_\gamma(x) \sim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{-2 \log x}$, cette inégalité peut être prouvée, à constante près, par le biais de l'inégalité de Sobolev logarithmique inverse. Toutefois l'estimation donnée par la fonction isopérimétrique permet d'obtenir des bornes optimales. En effet, sur l'espace gaussien, il y a égalité dans le lemme si $\Phi^{-1}(f)$ est linéaire.

1.7.2 Théorème de comparaison isopérimétrique de Bakry–Ledoux

Les calculs effectués plus haut ont été mis à profit par Bakry et Ledoux pour pouvoir démontrer un analogue du théorème de Lévy–Gromov [B-L1] de la forme fonctionnelle (1.2) de l’isopérimétrie gaussienne due à Bobkov. Remarquant que par ergodicité $\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_t f$, $f = Q_0 f$, Bakry et Ledoux considèrent la fonction

$$h : s \in [0, \infty) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\mathcal{J}_\gamma^2(Q_s f) + |\nabla Q_s f|^2} d\gamma$$

et démontrent qu’elle est décroissante, ce qui implique bien l’inégalité de Bobkov (1.2).

En fait, dans la cadre abstrait d’un triplet de Markov (pris ci-dessous sous la condition $CD(\kappa, \infty)$), l’idée est de nouveau de dériver $F : s \mapsto P_s(\psi(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s}f)))$, cette fois pour $\psi(x, y) = \sqrt{\mathcal{J}_\gamma^2(x) + \frac{1}{\kappa}y}$. Alors $\partial_2 \psi(x, y) = \frac{1}{2\kappa\psi(x, y)}$ et

$$\partial_{11} \psi(x, y) = -\frac{(\mathcal{J}_\gamma'(x)\mathcal{J}_\gamma(x))^2 - (1 + \mathcal{J}_\gamma^2(x))\psi^2(x, y)}{\psi^3(x, y)},$$

$$\partial_{12} \psi(x, y) = \frac{\mathcal{J}_\gamma'(x)\mathcal{J}_\gamma(x)}{\kappa\psi^3(x, y)}, \quad \partial_{22} \psi(x, y) = -\frac{1}{4\kappa\psi^3(x, y)}$$

(où l’on utilise l’équation $\mathcal{J}_\gamma''\mathcal{J}_\gamma = -1$). En utilisant le lemme 1.7.2, on notant $F'(s) = P_s K$, et après quelques manipulations algébriques, il vient :

$$\begin{aligned} \psi^3 K &= (\Gamma_2 f_{t-s} - \kappa \Gamma f_{t-s}) \mathcal{J}_\gamma^2(f_{t-s}) - \mathcal{J}_\gamma(f_{t-s}) \mathcal{J}_\gamma'(f_{t-s}) \Gamma(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) + \mathcal{J}_\gamma'(f_{t-s})^2 \Gamma(f_{t-s})^2 \\ &+ \Gamma(f_{t-s}) (\Gamma_2(f_{t-s}) - \kappa \Gamma(f_{t-s})) - \frac{1}{4} \Gamma(\Gamma(f_{t-s})). \end{aligned}$$

Ainsi comme le second terme est positif (par la propriété (1.6)),

$$F'(s) \geq P_s \left(\frac{(\Gamma_2 f_{t-s} - \kappa \Gamma f_{t-s}) \mathcal{J}_\gamma^2(f_{t-s}) - \mathcal{J}_\gamma(f_{t-s}) \mathcal{J}_\gamma'(f_{t-s}) \Gamma(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) + \mathcal{J}_\gamma'(f_{t-s})^2 \Gamma(f_{t-s})^2}{\psi^3(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s}))} \right).$$

En utilisant de nouveau la propriété (1.6), on voit que le numérateur, qui est une forme quadratique en $\mathcal{J}_\gamma(f_{t-s})$ et $\mathcal{J}_\gamma'(f_{t-s})$, est toujours positif. Ainsi F est bien croissante le long du semi-groupe.

Cela implique en particulier le théorème suivant, analogue de Lévy–Gromov dans un cadre abstrait. En effet, lorsque $\sqrt{\Gamma(f)}(x) = \limsup_{d(x, y) \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(x)}{d(x, y)}$ (comme sur les variétés riemanniennes à poids où $\sqrt{\Gamma(f)} = |\nabla f|$), cela implique le théorème suivant, que est la version généralisée du théorème 1.2.9.

Théorème 1.7.9. *Soit (E, μ, Γ) un triplet markovien satisfaisant la condition $CD(\kappa, \infty)$. Alors*

$$\mu^+(A) \geq \mathcal{J}_{\gamma_\kappa}(\mu(A))$$

où γ_κ est la mesure gaussienne dans $\mathbb{R}^n$ de variance $\kappa^{-1} \text{Id}$.

Derrière ces calculs qui peuvent paraître quelque peu fastidieux, il y a une intuition géométrique claire qui découle du cas gaussien. Rappelons que le membre de droite de l’inégalité de Bobkov correspond à la mesure de bord de l’ensemble $A = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_{n+1} \leq \Phi^{-1} \circ f(x)\}$. Par la propriété d’ergodicité du semi-groupe, $\Phi^{-1} \circ Q_s f$ converge vers une demi-espace lorsque s tends vers l’infini ∞ . De plus, le semi-groupe ayant des propriétés de régularisation, cette mesure de bord devrait décroître le long du semi-groupe. C’est en effet ce que révèlent les calculs effectués plus haut.

Sous la forme gaussienne, il y a ainsi égalité lorsque $\Phi^{-1} \circ f$ est linéaire (car alors l’épigraphe correspondant est un demi-espace). Suivant l’idée de Carlen et Kerce [C-K], on peut exprimer $F'(s)$ en terme de $\Phi^{-1} \circ f_{t-s}$. Par les formules

$$\Gamma(u(f)) = u'(f)^2 \Gamma(f), \quad \Gamma_2(u(f)) = u'(f)^2 \Gamma_2(f) + u'(f) u''(f) \Gamma(f, \Gamma(f)) + u''(f)^2 \Gamma(f)^2,$$

appliquées à $u = \Phi^{-1}$, puisque $(\Phi^{-1})' = \frac{1}{\mathcal{J}_\gamma}$ et $(\Phi^{-1})'' = -\frac{\mathcal{J}_\gamma'}{\mathcal{J}_\gamma^2}$ on a :

$$\psi^3(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) = \mathcal{J}_\gamma^3(f_{t-s})(1 + \Gamma(\Phi^{-1}(f_{t-s}))^{3/2}$$

et

$$\mathcal{J}_\gamma^2(f_{t-s})(\Gamma_2 - \kappa\Gamma)(f_{t-s}) - \mathcal{J}_\gamma(f_{t-s})\mathcal{J}_\gamma'(f_{t-s})\Gamma(f_{t-s}, \Gamma(f_{t-s})) + \mathcal{J}_\gamma'(f_{t-s})^2\Gamma(f_{t-s})^2 = \mathcal{J}_\gamma^4(f_{t-s})(\Gamma_2 - \kappa\Gamma)(\Phi^{-1} \circ f_{t-s}).$$

Ainsi,

$$F'(s) \geq P_s \left(\frac{\mathcal{J}_\gamma(f_{t-s})(\Gamma_2 - \kappa\Gamma)(\Phi^{-1} \circ f_{t-s})}{(1 + \Gamma(\Phi^{-1}(f_{t-s}))^{3/2}} \right).$$

L'avantage de cette forme est qu'elle fait apparaître le facteur $\Gamma_2 - \kappa\Gamma$ qui est déjà présent dans les inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique. Cette forme est la plus adaptée pour caractériser les fonctions extrémales. Nous y reviendrons dans le chapitre 3, où nous prouvons le théorème de rigidité dû à Morgan dans le cadre des variétés riemanniennes à densités.

Revenant au cadre riemannien, Barthe et Maurey [B-M] ont démontré l'équivalence sur une variété riemannienne (M, g, μ) entre la comparaison du profil isopérimétrique $\mathcal{J}_M$ à celui de la gaussienne et une inégalité de Bobkov par des arguments utilisant le calcul stochastique. Plus précisément,

$$\forall A \subset M, \mu^+(A) \geq \sqrt{\kappa} I_\gamma(\mu(A))$$

et

$$\mathcal{J}_\gamma \left(\int_M f d\mu \right) \leq \int_M \sqrt{\mathcal{J}_\gamma^2(f) + \frac{1}{\kappa} |\nabla f|^2} d\mu$$

sont équivalentes pour toute fonction f localement Lipschitz. Nous nous resservirons de cette équivalence pour le cas des sphères n dimensionnelles de courbures constantes égales à 1 afin d'étudier le déficit isopérimétrique sur ces espaces.

1.8 Présentation des travaux de la première partie.

Le chapitre 2 présente la notion de stabilité au bruit gaussien, notion qui sera de nouveau rencontrée dans la deuxième partie de thèse. Nous présentons la preuve par semi-groupe du théorème de Borell [Bor2] sur la caractérisation des ensembles maximisant la stabilité au bruit gaussienne. Ce schéma de preuve, comme souligné par Ledoux [Le6], se généralise et permet de retrouver plusieurs inégalités intégrales, ainsi que des versions multidimensionnelles du théorème de Borell. Nous nous concentrons essentiellement sur la caractérisation des cas d'égalités grâce à ces preuves par semi-groupes de telles inégalités. Nous voyons notamment un phénomène de rigidité apparaître sur des variétés riemanniennes à densité. Nous concluons le chapitre par des remarques sur les sphères euclidiennes $\mathbb{S}^n$, $n \geq 1$. Ces remarques mettent en lumière des différences entre les objets de type $CD(\kappa, n)$, $n < \infty$, comme les variétés compactes n dimensionnelles munies de leurs mesures uniformes probabilisées et des objets de type $CD(\kappa, \infty)$.

Dans le chapitre 3, nous étudions des phénomènes de rigidité dans le cadre de variétés riemanniennes munies d'un opérateur de diffusion infini-dimensionnel (i.e. satisfaisant une condition $CD(\kappa, \infty)$ avec $\kappa > 0$). Nous étudions la caractérisation des cas d'égalités dans les inégalités fonctionnelles telles que l'inégalité de trou spectral ou Sobolev logarithmique. De tels hypothèses impliquent un "splitting" de la variété en produit d'une droite gaussienne et d'une autre variété. Ceci est l'analogue du théorème d'Obata pour les variétés riemanniennes compactes à courbures positivement minorées. De plus les cas d'égalités pour le trou spectral sont, comme pour l'espace gaussien, des vecteurs propres du générateur du semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck associés à la valeur propre κ : c'est-à-dire les fonctions coordonnées. De même, les fonctions exponentielles sont les seules extrémales pour l'inégalité de Sobolev logarithmique (et donc également pour l'inégalité d'hypercontractivité par l'argument de Gross) ; ce résultat a été démontré au début des années 90 par Carlen [Car].

Théorème 1.8.1. *Soit $(M, g, e^{-\psi} d\text{vol})$ une variété de classe $CD(\kappa, \infty)$, $\kappa > 0$. S'il existe une fonction non constante réalisant l'égalité dans l'inégalité de trou spectral ou de Sobolev logarithmique, alors*

$$(M, g, e^{-\psi} d\text{vol}) = (\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma_\kappa) \times (M', g', e^{-\psi'} d\text{vol}).$$

De plus, dans la direction gaussienne, dans le premier cas f est linéaire et dans le deuxième cas, f est exponentielle.

Les arguments que nous utilisons sont uniquement basés sur les preuves d'interpolations le long des semi-groupes : cette méthode a déjà été utilisé par Bentaleb [Ben2].

Pour ce qui est de la caractérisation des ensembles isopérimétriques dans le théorème de comparaison de Bakry–Ledoux (dans le cadre des variétés), le point de départ est le travail de Carlen et Kerce [C-K]. Les auteurs remarquent en effet que la détermination complète des cas d'égalités de l'inégalité isopérimétrique gaussienne découle de la preuve par semi-groupe de Bakry et Ledoux. Comme rappelé dans l'introduction, pour que A soit extrémal, il faut et il suffit que pour tout $t \geq 0$, $\text{Hess}(\Phi^{-1} \circ Q_t \mathbf{1}_A) = 0$, autrement dit que $\Phi^{-1} \circ Q_t \mathbf{1}_A$ soit linéaire. Or Carlen et Kerce prouvent qu'un tel ensemble est nécessairement un demi-espace. Cette preuve a pour avantage de considérer des ensembles mesurables quelconques, sans hypothèses spécifiques sur la régularité de leurs bords. En effet, quelque soit A mesurable, $t > 0$, $x \mapsto Q_t \mathbf{1}_A(x)$ est de classe C^∞ .

Une généralisation de leur argument permet d'étendre ce résultat dans le cadre des variétés riemanniennes à densités $(M, g, \mu = e^{-\psi} d\text{vol})$ satisfaisant une condition $CD(\kappa, \infty)$, $\kappa > 0$. En effet, comme nous l'avons remarqué, l'argument de Carlen et Kerce implique plus généralement qu'un ensemble isopérimétrique A est tel que pour tout $t > 0$, $(\Gamma_2 - \Gamma)(\Phi^{-1} \circ P_t \mathbf{1}_A) = 0$. Dans des variétés riemanniennes, de tels ensembles existent toujours, et peuvent être supposé suffisamment réguliers pour que $\mu^+(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_M |\nabla P_t \mathbf{1}_A| d\mu$. Ceci implique un théorème de rigidité dans le théorème de comparaison de Bakry–Ledoux.

Théorème 1.8.2. Soit (M, g, μ) une variété riemannienne de classe $CD(\kappa, \infty)$. S'il existe $v \in (0, 1)$ tel que $\mathcal{J}_{(M, \mu)}(v) = \mathcal{J}_{(\mathbb{R}, \gamma_\kappa)}(v)$ alors $(M, g, \mu) = (\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma_\kappa) \times (M', g', \mu')$. De plus, les ensembles extrémaux sont de la forme $(-\infty, \Phi_\kappa^{-1}(v)) \times M'$.

Cet énoncé est analogue au phénomène de rigidité dans le théorème de comparaison de Lévy–Gromov, et a été déjà prouvé par Franck Morgan [Mor] par des arguments plus géométriques.

Dans un deuxième temps, nous étudions le déficit dans le problème isopérimétrique pour des espaces satisfaisant la condition $CD(1, \infty)$. À notre connaissance, dans ce cadre, il n'y a pas de résultat de stabilité pour le problème isopérimétrique ailleurs que sur l'espace gaussien. Le point de départ est le travail de Mossel et Neeman [M-N1] sur le déficit isopérimétrique gaussien à partir de la fonctionnelle de Bobkov. Les auteurs minorent la dérivée le long du semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck pour obtenir des estimées indépendantes de la dimension sur le déficit isopérimétrique gaussien. Le résultat obtenu, exprimé sous la forme ensembliste, est le suivant.

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est tel que $\gamma_n^+(A) = \mathcal{J}_\gamma(\gamma_n(A)) + \delta$, il existe un demi-espace H de même mesure que A et une constante positive $C = C(\gamma_n(A))$ telle que $\gamma_n(A \Delta H) \leq C(\gamma_n(A))(\log \delta^{-1})^{-1/2}$.

Ce résultat, qui est sous-optimal en la dépendance en δ (qui est de l'ordre de $\sqrt{\delta}$), a pour principal avantage d'obtenir des estimations indépendantes de la dimension sur le déficit isopérimétrique. Ce résultat, amélioré par la suite comme rappelé en introduction, a été le premier reflétant le caractère indépendant de la dimension. Nous nous sommes attaché à généraliser le plus possible les arguments de [M-N1]. Comme on verra dans le chapitre 3, dans l'approche par semi-groupe de l'inégalité de Bobkov, beaucoup d'arguments employés par Mossel et Neeman sont valides pour des triplets de Markov généraux. Dans une certaine mesure, on peut étendre le schéma de preuve de [M-N1].

Rappelons que pour l'espace gaussien, les auteurs démontrent que $P_t \mathbf{1}_A$ est proche d'une fonction linéaire pour $t \in (c, c+1)$ avec $c > 0$ une constante numérique. En exploitant la condition $\gamma^+(A) < \infty$, les auteurs concluent par des arguments spectraux qui semblent spécifique au cas gaussien. Le principal apport est d'exploiter la condition $\|P_t f - f\|_1 \leq O(\sqrt{t})$ afin d'éviter ces arguments. La principale difficulté consiste à démontrer une borne sur la hessienne de $P_t f$ indépendante de la dimension. Dans le cas gaussien, il existe $\eta \geq 2$ et $C > 0$ telle que $\|\nabla^2 \Phi^{-1} P_t f\|_{HS}^2 \leq \frac{C |\log P_t f|}{t^\eta}$ (pour tout $t \geq 0$). Une inégalité similaire devrait être vraie sur les sphères euclidiennes n dimensionnelles de rayon $\sqrt{n-1}$ pour n assez grand. De même, une telle inégalité devrait être vrai au moins pour une sous classe de mesures log-concaves satisfaisant la condition $CD(1, \infty)$. Nous faisons donc cette hypothèse.

Hypothèse 1.8.3. Supposons qu'il existe des constantes numériques indépendantes de la dimension C, η telles que, pour tout $t \in (0, 1)$,

$$\|\text{Hess}(\Phi^{-1}(P_t f))\|_{HS}^2 \leq \frac{C \max\{|\log(P_t f)|, |\log(1 - P_t f)|\}}{t^\eta}. \quad (\mathcal{H})$$

Cette hypothèse entraîne les résultats suivants.

Théorème 1.8.4. Soit $(\mathbb{S}_1^n, \mu)$ la sphère euclidienne de rayon $\sqrt{n-1}$ munie de sa mesure de probabilité uniforme μ . Si $(\mathcal{H})$ est vraie, soit A un ensemble tel que $\mu^+(A) = \mathcal{J}_\gamma(\mu(A)) + \delta$. Alors il existe une calotte sphérique H et une constante strictement positive c telle que :

$$\mu(A \Delta H) \leq O(|\log \delta|^{-c}).$$

Comme on travaille sur la fonctionnelle de Bobkov, il n'y a pas d'espoir d'obtenir une caractérisation complète des ensembles extrémaux. Rappelons qu'il n'y a pas encore de preuve par semi-groupe de l'isopérimétrie sphérique. Toutefois, comme la fonction isopérimétrique $\mathcal{J}_{\{\mathbb{S}_1^n, g_1, \mu\}}$ converge en tout point vers la fonction isopérimétrique gaussienne $\mathcal{J}_\gamma$, ce théorème peut s'exprimer seulement en termes d'isopérimétrie sphérique. Tenter d'étudier la stabilité du problème isopérimétrique sphérique par cette approche fait donc sens. En particulier, en corollaire du théorème précédent, on obtient :

Corollaire 1.8.5. Soit $(\mathbb{S}_1^n, \mu)$ la sphère euclidienne de rayon $\sqrt{n-1}$ munie de sa mesure de probabilité uniforme μ . Soit A un ensemble tel que $\mu^+(A) = \mathcal{J}_{\{\mathbb{S}_1^n, g_1, \mu\}}(\mu(A)) + \delta$. Alors il existe une calotte sphérique H et une constante strictement positive c telle que :

$$\mu(A \Delta H) \leq O(|\log \delta_n|^{-c}),$$

où $\delta = \max(\delta, \frac{1}{n})$.

Un autre classe naturelle est celle des mesures log-concaves sur $\mathbb{R}^n$ satisfaisant la condition $CD(1, \infty)$. Un cas d'égalité implique par la remarque précédente qu'une marginale est gaussienne et que l'ensemble est un demi-espace dont l'orthogonal est la direction gaussienne. Soit $(\mathbb{R}^n, \mu = e^{-V(x)} dx)$ un espace satisfaisant la condition $CD(1, \infty)$. De façon heuristique, si A est un sous-ensemble tel que $\mu^+(A) \approx I_\gamma(A)$, alors $A \approx H$, où H est un demi-espace, et de plus la mesure μ doit avoir une marginale "proche" de la mesure gaussienne. Cette formulation est volontairement très vague. Toutefois, le résultat obtenu sur le déficit doit être comme pour l'espace gaussien indépendant de la dimension n . Soit $(P_t)_{t \geq 0}$ dont le générateur est donné par $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$.

Théorème 1.8.6. Soit $(\mathbb{R}^n, d\mu(x) = e^{-V(x)} dx)$ satisfaisant $CD(1, \infty)$ avec de plus $\nabla^2 V \leq K$ où $K \geq 1$. Supposons que $(\mathcal{H})$ soit vraie. Alors si $A \subset \mathbb{R}^n$ est tel que $\mu^+(A) \leq \mathcal{J}_\gamma(\mu(A)) + \delta$, il existe $v_0 \in \mathbb{R}^n$ $x_0 \in \mathbb{R}$, $c > 0$ et un ensemble B de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n, \nabla V(x) \cdot v_0 + x_0 \geq 0\}$, tel que $\mu(B) = \mu(A)$ et

$$\mu(A \Delta B) \leq O_{\mu(A)}(|\log \delta|^{-c}).$$

Notons que dans cet énoncé, la comparaison ne se fait pas à des demi-espaces mais à des sous-ensembles dépendants du potentiel V coïncidant avec des demi-espaces lorsque V est un potentiel quadratique. Ceci est due à la forme d'une "inégalité de Poincaré" de second ordre pour des mesures log-concaves.

Chapitre 2

Stabilité au bruit gaussien, inégalité de Borell et extensions.

Dans ce chapitre, nous nous tournons vers une autre inégalité géométrique, due à Borell au milieu des années 80 [Bor2]. Cette inégalité peut être vue comme une extension de l'inégalité isopérimétrique gaussienne. La motivation principale de chapitre vient d'une nouvelle preuve récente due à Mossel et Neeman dans [M-N2] par semi-groupe de cette inégalité. L'application de cette preuve par les auteurs est celle d'une estimation indépendante de la dimension pour le déficit. Ces estimations ont des applications en théorie de la complexité et en théorie du choix social. Nous discuterons de l'analogue discret de cette question dans la deuxième partie de la thèse.

Dans [Le6], Ledoux a étendu le schéma de preuve pour obtenir, ou retrouver, de nombreuses inégalités fonctionnelles et géométriques connues. De plus, certaines de ces inégalités peuvent être étendues sur des variétés riemanniennes satisfaisant une condition $CD(\kappa, \infty)$. La plupart du contenu de ce chapitre est directement issu de [Le6]. Néanmoins, nous y ajoutons certaines remarques notamment sur les cas d'égalités de ces inégalités qui font apparaître un phénomène de rigidité qui sera examiné plus en détails dans le chapitre suivant. De plus, l'analogue de cette question sur les sphères euclidiennes soulève un problème digne d'intérêt sachant qu'aucune preuve par semi-groupe de l'isopérimétrie sphérique n'est connue à ce jour.

2.1 Inégalité de Borell.

Définissons la stabilité au bruit gaussienne ("Gaussian noise stability" en anglais) d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ par

$$\mathcal{S}_\eta(A) := \mathbb{P}(X \in A \text{ \& \& } \eta X + \sqrt{1 - \eta^2} Y \in A).$$

avec $X \sim N(0, 1)$ et Y une copie indépendante de X . De façon équivalente, $\mathcal{S}_\eta(A) = \mathbb{P}(X \in A, X' \in A)$ où (X, X') sont des variables gaussiennes η -corrélées. La stabilité au bruit gaussienne est reliée au semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck par

$$\mathcal{S}_\eta(A) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A Q_t(1_A) d\gamma_n = \|Q_{t/2} 1_A\|_2^2,$$

où $\eta = e^{-t}$.

Une première question naturelle est de savoir quels sont les ensembles qui maximisent cette quantité. Une autre question, duale de la première, et liée à des problèmes discrets est de savoir quels sont les ensembles qui sont sensibles, c'est-à-dire tels que $\mathcal{S}_\eta(A) - \gamma(A)^2$ soit petit. Pour ce qui est de la première question, le problème découle d'un résultat (plus général) dû à Borell implique que parmi tous les ensembles mesurables, les demi-espaces sont les plus stable. Pour ce qui est de la seconde, nous reportons ce problème à la deuxième partie.

Le résultat de Borell implique le théorème suivant. Deux demi-espaces sont dit parallèles s'il existe un vecteur unitaire $a \in \mathbb{S}^n$ tel que $\mathbb{R}a$ soit l'orthogonal commun des bords ∂H et ∂K .

Théorème 2.1.1. *Pour tous ensembles mesurables A et B de $\mathbb{R}^n$, si H, K sont des demi-espaces parallèles tels que $\gamma(A) = \gamma(H)$ et $\gamma(B) = \gamma(K)$, alors*

$$\int_A Q_t(\mathbf{1}_B) d\gamma \leq \int_H Q_t(\mathbf{1}_K) d\gamma,$$

et donc en particulier si $A = B$,

$$\mathcal{S}_\eta(A) \leq \mathcal{S}_\eta(H).$$

Les demi-espaces sont les ensembles extrémaux pour le problème isopérimétrique. C'est assez intuitif de penser qu'ils sont aussi les plus stables. De manière heuristique, moins il y a de bord, moins une petite perturbation a de chance de s'échapper de l'ensemble initial. Cette intuition a été formellement prouvée par Ledoux. Rappelons que l'inégalité de Poincaré inverse implique pour la mesure gaussienne que

$$\|f - Q_t f\|_{L^1(\gamma)} \leq \sqrt{2} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{e^{2s} - 1}} \|\nabla f\|_{L^1(\gamma)} = \sqrt{2} \text{Arccos}(e^{-t}) \|\nabla f\|_1.$$

De plus lorsque f approche la fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$ d'un ensemble A , $\|\nabla f\|_1$ tend vers la mesure de bord $\gamma^+(A)$. Par dualité, l'inégalité de Poincaré inverse implique pour toute fonction bornée $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\langle f - Q_t f, g \rangle \leq \sqrt{2} \text{Arccos}(e^{-t}) \|\nabla f\|_1 \|g\|_\infty.$$

En appliquant ce principe à $f = \mathbf{1}_A$, $g = \mathbf{1}_{A^c}$, on obtient en fait grâce à la formule de Mehler une amélioration de cette inégalité sous la forme suivante :

$$\gamma(A) - \mathcal{S}_{e^{-t}}(A) \leq \frac{\text{Arccos}(e^{-t})}{\sqrt{2\pi}} \gamma^+(A).$$

Cette inégalité est optimale en les constantes (cf [Le1]), au sens où

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \left(\gamma(H) - \mathcal{S}_{e^{-t}}(H) \right) = \gamma^+(H)$$

pour H un demi-espace ($\text{Arccos}(e^{-t}) \sim \sqrt{2t}$ quand t tend vers 0). Comme le résultat de Borell se réécrit

$$\gamma(H) - \mathcal{S}_{e^{-t}}(H) \leq \gamma(A) - \mathcal{S}_{e^{-t}}(A),$$

en faisant tendre t vers 0, on obtient $\gamma^+(H) \leq \gamma^+(A)$. Ceci est l'énoncé du théorème isopérimétrique gaussien. Nous avons vu plus haut que Bakry et Ledoux en ont donné une preuve par semi-groupe. Ledoux a conjecturé que de même l'inégalité de Borell admettait également une preuve par semi-groupe. Cette conjecture est restée ouverte pendant près de vingt ans. La difficulté était qu'au contraire de l'isopérimétrie, la forme fonctionnelle initiale de l'inégalité de Borell - due à Borell lui-même - implique des réarrangements de fonctions et s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f P_t g d\gamma_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} f^* P_t g^* d\gamma_n,$$

où f^* est le réarrangé symétrique décroissant de f (par rapport à la mesure gaussienne). Ainsi formulé, l'utilisation du semi-groupe n'est pas claire, car rien n'indique comment atteindre un réarrangé par semi-groupe.

Dans [M-N2], Mossel et Neeman donnent une nouvelle forme fonctionnelle de l'inégalité de Borell, directement inspirée par celle de Bobkov, en introduisant la fonction suivante

$$J_\rho^B(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_H Q_t(1_K) d\gamma, \quad u, v \in (0, 1)^2$$

où H et K sont des demi-espaces parallèles tels que $\gamma(H) = u$, $\gamma(K) = v$. Plus explicitement,

$$J_\rho^B(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} q_t(x, y) d\gamma_n(x) d\gamma_n(y).$$

Il est clair que $J_\rho^B(0, *) = J_\rho^B(*, 0) = 0$ et $J_\rho^B(1, 1) = 1$, ce qui implique alors que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, J_\rho^B(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(y)) = \mathbf{1}_{A \times B}(x, y).$$

Comme pour l'inégalité de Bobkov, Mossel et Neeman ont remarqué que l'inégalité de Borell qui se réécrit, pour tous sous-ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^n$,

$$\int_A Q_t \mathbf{1}_B(x) d\gamma_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A(x) \mathbf{1}_B(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) d\gamma_{2n}(x, y) \leq J_\rho^B(\gamma_n(A), \gamma_n(B))$$

est équivalente à la forme fonctionnelle suivante

$$\forall f, g : \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1], \int_{\mathbb{R}^{2n}} J_\rho^B(f(x), g(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)) d\gamma_{2n}(x, y) \leq J_\rho^B\left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n, \int_{\mathbb{R}^n} g d\gamma_n\right). \quad (2.1)$$

Cette forme fonctionnelle implique immédiatement la formulation sur les ensembles. Réciproquement, par le même raisonnement utilisant les épigraphes de fonctions, la forme ensembliste implique la forme fonctionnelle (2.1) (cf [M-N2]).

Notons que par changement de variables,

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} J_\rho^B(f(x), g(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)) d\gamma_n(x) d\gamma_n(y) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} J_\rho^B(f(x), g(y)) q_t(x, y) d\gamma_{2n}(x, y).$$

Par invariance du semi-groupe $(Q_t)_{t \geq 0}$ par rapport à la mesure gaussienne, $(x, y) \mapsto q_t(x, y) d\gamma(x, y)$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. L'utilisation du semi-groupe est maintenant claire : on considère la fonction

$$\psi : s \mapsto \int_{\mathbb{R}^{2n}} J_\rho^B(Q_s f(x), Q_s g(y)) q_t(x, y) d\gamma_{2n}(x, y),$$

en espérant qu'elle soit décroissante en s . C'est effectivement le cas comme prouvé par Mossel et Neeman. Comme on peut le constater, ce raisonnement permet de considérer des fonctions de deux variables J plus générales. Pour décrire les fonctions J qui satisfont cette propriété de monotonie le long du semi-groupe $(Q_t)_{t \geq 0}$, Ledoux a introduit la définition de ρ -convexité [Le6]. Soit $J : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour $\rho \in (0, 1)$, on dit que J est ρ -convexe si, uniformément en tant que matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} \partial_{11}J & \rho \partial_{12}J \\ \rho \partial_{12}J & \partial_{22}J \end{pmatrix} \geq 0.$$

J est dite ρ -concave si $-J$ est ρ -convexe. L'argument de Mossel et Neeman repose sur le fait suivant, dont la preuve est reportée à un cadre plus général.

Lemme 2.1.2. Soit J ρ -concave. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} J(f(x), g(y)) q_t(x, y) d\gamma(x) d\gamma(y) \leq J\left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma, \int_{\mathbb{R}^n} g d\gamma\right).$$

Plus précisément

$$\psi : s \mapsto \int_{\mathbb{R}^{2n}} J(Q_s f(x), Q_s g(y)) q_t(x, y) d\gamma(x) d\gamma(y)$$

est monotone car

$$\psi'(s) = - \iint_{\mathbb{R}^{2n}} {}^T \begin{pmatrix} \nabla Q_s f(x) \\ \nabla Q_s g(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{11} J I_n & \rho \partial_{12} J I_n \\ \rho \partial_{12} J I_n & \partial_{22} J I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla Q_s f(x) \\ \nabla Q_s g(y) \end{pmatrix} p_t(x, y) d\gamma_n(x) d\gamma_n(y).$$

Comme remarqué par O'Donnell, la condition suffisante de ρ -concavité est également nécessaire. En effet, prenant $f(x) = a + \varepsilon x$, $g(y) = b + \varepsilon y$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient :

$$n(\partial_{11} J_\rho(a, b) + 2\rho \partial_{12} J_\rho(a, b) + \partial_{22} J_\rho(a, b))\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \leq 0,$$

et ainsi J_ρ est ρ -concave.

Le théorème de Borell suit si J_ρ^B est ρ -concave. Or, par des calculs élémentaires :

$$\partial_{11} J_\rho^B(u, v) = -\rho q_t(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \frac{\mathcal{J}_\gamma(v)}{\mathcal{J}_\gamma(u)}$$

$$\partial_{22} J_\rho^B(u, v) = -\rho q_t(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \frac{\mathcal{J}_\gamma(u)}{\mathcal{J}_\gamma(v)}$$

et

$$\partial_{12} J_\rho^B(u, v) = q_t(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$$

et ainsi $\partial_{11} J_\rho^B(u, v), \partial_{22} J_\rho^B(u, v) \leq 0$ et $\partial_{11} J_\rho^B(u, v) \partial_{22} J_\rho^B(u, v) = \rho^2 (\partial_{12} J_\rho^B(u, v))^2$: J_ρ^B est bien ρ -concave.

Les demi-espaces étant extrémaux, comme pour l'inégalité de Bobkov, il y a des cas d'égalités non triviaux dans cet inégalité. La caractérisation de ces ensembles est un peu plus aisée que pour l'inégalité de Bobkov. En effet la condition nécessaire est alors que $(\nabla Q_s f, \nabla Q_s g)^t$ appartient au noyau de $\Gamma \odot \nabla^2 J_\rho^B$ pour tout $s > 0$. Cette condition se réécrit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \frac{\mathcal{J}_\gamma(Q_s g(y))}{\mathcal{J}_\gamma(Q_s f(x))} |\nabla Q_s f(x)|^2 - 2 \nabla Q_s f(x) \cdot \nabla Q_s g(y) + \frac{\mathcal{J}_\gamma(P_s f(x))}{\mathcal{J}_\gamma(Q_s g(y))} |\nabla P_s g(y)|^2 = 0,$$

et ainsi $|\nabla(\Phi^{-1} Q_s f(x))| = |\nabla(\Phi^{-1} Q_s g(y))|$. Ceci implique que les deux quantités sont constantes. Si f et g sont des fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables, ces ensembles sont des demi-espaces - on retrouve alors la caractérisation due à Carlen et Kerce.

Un autre exemple de fonction ρ -convexe est donnée par les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ $J_\rho^H(u, v) = u^\alpha v^\beta$, avec α et β réels. J_ρ^H est ρ -concave dès lors que $\partial_{11} J_\rho^H, \partial_{22} J_\rho^H \leq 0$ et $\partial_{11} J_\rho^H \partial_{22} J_\rho^H = \rho^2 (\partial_{12} J_\rho^H)^2$, ce qui implique $(\alpha - 1)(\beta - 1) \leq \rho^2 \alpha \beta$. Ainsi la conclusion

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} J_\rho^H(f(x), g(y)) q_t(x, y) d\gamma(x) d\gamma(y) \leq J_\rho^H\left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma, \int_{\mathbb{R}^n} g d\gamma\right),$$

implique par changement de variables,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^n} g^\beta(\rho x + \sqrt{1 - \rho^2} y) d\gamma_n(y) d\gamma_n(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n\right)^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^n} g d\gamma_n\right)^\beta.$$

Si α et β sont dans $(0, 1)$, en posant $\alpha = 1/q' = 1 - 1/q$ et $\beta = 1/p$, cela implique que pour toute fonction $f \in L^{q'}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(\rho x + \sqrt{1 - \rho^2} y) d\gamma_n(y) d\gamma_n(x) \leq \|f\|_{q'} \|g\|_p$$

et comme q' est l'exposant conjugué de q , par dualité il en vient en posant $\rho = e^{-t}$,

$$\|Q_t g\|_q \leq \|g\|_p$$

pour $e^{-2t} \leq \frac{p-1}{q-1}$, ce qui est exactement le contenu du théorème d'hypercontractivité de Nelson.

Notons que si $\alpha > 1$, $\beta > 1$ J_ρ^H est ρ -convexe et l'inégalité est ainsi renversée. Cela implique l'inégalité d'hypercontractivité inverse due à Borell au milieu des années 80 pour des exposants entre 0 and 1 : soit $0 < p, q < 1$, $e^{-2t} \leq \frac{p-1}{q-1}$, alors $\|Q_t g\|_q \geq \|g\|_p$.

C'est un résultat dû à Carlen [Car] que les fonctions exponentielles sont les seules fonctions qui réalisent l'égalité dans l'inégalité d'hypercontractivité. Avec cette preuve par semi-groupe, on retrouve ce résultat de manière plus simple que la démonstration originelle de Carlen. On peut en effet écrire

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} J_\rho^H(f(x), g(y)) q_t(x, y) d\gamma(x) d\gamma(y) - J_\rho^H\left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma, \int_{\mathbb{R}^n} g d\gamma\right) = \int_0^\infty \psi'(s) ds$$

avec

$$\psi'(s) = - \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \begin{pmatrix} \nabla Q_s f(x) \\ \nabla Q_s g(y) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \partial_{11} J_\rho^H I_n & \rho \partial_{12} J_\rho^H I_n \\ \rho \partial_{12} J_\rho^H I_n & \partial_{22} J_\rho^H I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla Q_s f(x) \\ \nabla Q_s g(y) \end{pmatrix} q_t(x, y) d\gamma_{2n}(x, y).$$

La dérivée s'exprime ainsi comme

$$\psi'(s) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} A(x, y, s) \left| \nabla Q_s f(x) - \frac{B(x, y, s)}{A(x, y, s)} \nabla Q_s g(y) \right|^2 q_t(x, y) d\gamma(x) d\gamma(y)$$

avec

$$A(x, y, s) = -\partial_{11} J_\rho^H(Q_s f(x), Q_s g(y)) \quad \text{et} \quad B(x, y, s) = \rho \partial_{12} J_\rho^H(Q_s f(x), Q_s g(y)).$$

ce qui prend la forme suivante :

$$\psi'(s) = \alpha(1 - \alpha) \int_{\mathbb{R}^{2n}} J_\rho^H(Q_s f(x), Q_s g(y)) \left| \nabla \log Q_s f(x) - C_{\alpha, \beta} \nabla \log Q_s g(y) \right|^2 q_t(x, y) d\gamma(x, y),$$

où l'on pose $C_{\alpha, \beta} = \frac{\rho\beta}{\alpha-1}$. Il y a égalité si et seulement si pour tout $s > 0$, il existe $c(s) > 0$ telle que

$$\frac{\nabla Q_s f}{Q_s f}(x) = C_{\alpha, \beta} \frac{\nabla Q_s g}{Q_s g}(y) = c(s),$$

ce qui implique que $\log Q_s f$ et $C_{\alpha, \beta} \log Q_s g$ sont des fonctions linéaires avec même pente, et donc $Q_s f$ et $Q_s g$ sont des fonctions exponentielles pour tout $s > 0$. Cela implique que f et g doivent être exponentielles.

En effet, par hypothèse $Q_s f = e^{\langle c(s), x + b_s \rangle}$. Or un calcul direct montre que si $f_0 = e^{\langle a, x + b \rangle}$, alors $Q_s f_0 = e^{\langle e^{-s} a, x + b \rangle}$ et $Q_s^{-1} f_0 = e^{\langle e^s a, x + b \rangle}$. Ainsi, selon que $c(s) \leq e^{-s} a$ ou $c(s) > e^s a$, on peut trouver un $s_1 \geq 0$ tel que $f = Q_{s_1} f_0$ ou $f = Q_{s_1}^{-1} f_0$: dans les deux cas, f est exponentielle. De même pour g , et en repassant à une fonction dans la dualité, cela implique le résultat de Carlen. L'avantage de cette caractérisation par rapport à la preuve initiale de Carlen est qu'elle évite tout argument de symétrisation et est de ce fait plus directe.

2.2 Extensions

Le schéma de preuve précédent s'avère être assez général. En effet, soit une fonction $J : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$, $m \geq 2$ et un vecteur gaussien $(X_1, \dots, X_m)$ de loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$. Notons $\mathbb{E}_\Gamma$ l'espérance par rapport à la loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$. L'idée est de nouveau de considérer une interpolation le long du semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck. Soit donc $\psi : s \mapsto \mathbb{E}_\Gamma(J(Q_s f_1(X_1), \dots, Q_s f_m(X_m)))$. Quelques calculs montrent que la dérivée de ψ s'exprime en termes de la matrice hessienne de J et de la matrice de covariance Γ . Cela implique une condition suffisante pour que ψ soit croissante, qui s'avère également nécessaire par la même remarque d'O'Donnell.

Proposition 2.2.1. *Soit $J : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Alors J satisfait la condition de Γ -concavité, i.e.*

$$\Gamma \odot \nabla^2 J = (\partial_{kl} J \Gamma_{kl})_{1 \leq k, l \leq m} \leq 0,$$

(au sens des matrices symétriques), si et seulement si

$$\mathbb{E}_\Gamma(J(g_1(X_1), \dots, g_m(X_m))) \leq J(\mathbb{E}g_1, \dots, \mathbb{E}g_m).$$

Démonstration. Puisque Γ est une matrice symétrique et positive, on peut écrire $\Gamma = A^t A$, avec $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Alors, la condition $\Gamma \odot \nabla^2 J \leq 0$ se lit $\forall (v_k, v_l)_{1 \leq k, l \leq m}$, $\sum_{1 \leq k, l \leq m} \partial_{kl} J A_l^t A_k v_k \cdot v_l \leq 0$, et la conclusion peut être reformulée en

$$\int_{\mathbb{R}} J(g_1 \circ A_1, \dots, g_m \circ A_m) d\gamma \leq J\left(\int_{\mathbb{R}} g_1 d\gamma, \dots, \int_{\mathbb{R}} g_m d\gamma\right).$$

Soit

$$\psi(s) = \int_{\mathbb{R}} J(Q_s g_1 \circ A_1, \dots, Q_s g_m \circ A_m) d\gamma,$$

de sorte que $\psi(0) = \mathbb{E}_\Gamma(J(g_1(X_1), \dots, g_m(X_m)))$ et $\lim_{s \rightarrow \infty} \psi(s) = J(\mathbb{E}g_1, \dots, \mathbb{E}g_m)$. Alors

$$\psi'(s) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^m \partial_i J(Q_s g_1 \circ A_1, \dots, Q_s g_m \circ A_m) L Q_s g_i \circ A_i d\gamma,$$

et pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_i J(Q_s g_1 \circ A_1, \dots, Q_s g_m \circ A_m) L P_s g_i \circ A_i d\gamma = - \int_{\mathbb{R}} \nabla \partial_i J(Q_s g_1 \circ A_1, \dots, Q_s g_m \circ A_m) \cdot \nabla Q_s g_i \circ A_i d\gamma$$

Ensuite,

$$\nabla(Q_s g_i \circ A_i) = {}^t A_i \nabla(Q_s g_i) \circ A_i,$$

et donc

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= - \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^m \nabla \partial_i J(Q_s g_1 \circ A_1, \dots, Q_s g_m \circ A_m) \cdot \nabla Q_s g_i \circ A_i d\gamma \\ &= - \sum_{1 \leq k, l \leq m} \int_{\mathbb{R}} \partial_{kl} J(Q_s g_1 \circ A_1, \dots, Q_s g_m \circ A_m) A_k^t A_l \nabla(Q_s g_k) \circ A_k \cdot \nabla(Q_s g_l) \circ A_l d\gamma, \end{aligned}$$

et ainsi $\psi'(s) \geq 0$ par hypothèse, ce qui implique $\psi(0) \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \psi(s)$.

Pour voir que la condition est également nécessaire, on prend $g_1(x) = a_1 + \varepsilon_1 x, \dots, g_m(x) = a_m + \varepsilon_m x$. Si l'on écrit $a = (a_1, \dots, a_m)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, l'inégalité précédente se réécrit

$$\sum_{1 \leq k, l \leq n} \partial_{kl} J(a) \Gamma_{kl} \varepsilon_k \varepsilon_l + o(|\varepsilon|^2) \leq 0,$$

et ainsi nécessairement $\Gamma \odot \nabla^2 J \leq 0$.

□

2.3 Exemples et cas d'égalités

La proposition 2.2.1 permet de retrouver plusieurs inégalités intéressantes qui étendent celles de Borell et d'hypercontractivité. En premier lieu, comme montrée par Neeman [Nee], on peut retrouver une version multidimensionnelle de l'inégalité de Borell sous la forme du théorème suivant :

Théorème 2.3.1. *Soit $X = (X_1, \dots, X_m)$ un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^{nm}$ de matrice de covariance Γ telle que les termes diagonaux Γ_{ii} soient égaux à 1 et les autres termes Γ_{ij} soient positifs. Alors pour tous ensembles boréliens $B_1, \dots, B_m$ dans $\mathbb{R}^n$,*

$$\mathbb{P}_\Gamma(X_1 \in B_1, \dots, X_m \in B_m) \leq \mathbb{P}_\Gamma(X_{11} \leq b_1, \dots, X_{m1} \leq b_m)$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $b_i = \Phi^{-1}(\mathbb{P}(X_i \in B_i))$.

Ce théorème s'obtient à partir de la proposition précédente en considérant

$$J(u_1, \dots, u_m) = \mathbb{P}_\Gamma(X_1 \leq \Phi^{-1}(u_1), \dots, X_m \leq \Phi^{-1}(u_m)).$$

En particulier, on retrouve un résultat dû à Isaksson et Mossel [I-M], où la matrice de covariance est donnée par $\Gamma_{ii} = 1$ et pour $i \neq j$, $\Gamma_{ij} = \rho > 0$ (appelé "théorème échangeable gaussien"). Notons que les calculs (cf [Nee]) permettent de déterminer les cas d'égalités qui sont là encore des demi-espaces.

De même, la proposition 2.2.1 contient une version multidimensionnelle de l'hypercontractivité. C'est-à-dire, si l'on prend dans la proposition précédent le processus d'Ornstein–Uhlenbeck $(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_m})$ de matrice de covariance $e^{-|t_k - t_l|}$ et cette fois comme fonction $J(u_1, \dots, u_m) = u_1^{c_1} \dots u_m^{c_m}$, alors la condition

$$\sum_{k,l} \partial_{kl} J A_l^t A_k v_k v_l \leq 0$$

se lit

$$\sum_{k,l} c_k c_l e^{-|t_k - t_l|} v_k \cdot v_l \leq \sum_k c_k v_k^2,$$

et la conclusion correspond à une version multidimensionnelle de l'hypercontractivité :

$$\int_{\mathbb{R}^{nm}} g_1^{c_1}(x_1) \dots g_m^{c_m}(x_m) \prod_{i=1}^m q_{t_{i+1}-t_i}(x_i, x_{i+1}) d\gamma_{mn} \leq \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^n} g_i d\gamma_n \right)^{c_i}.$$

Notons que si

$$\psi(s) = \int_{\mathbb{R}^{nm}} (Q_s g_1)^{c_1}(x_1) \dots (Q_s g_m)^{c_m}(x_m) \prod_{i=1}^m q_{t_{i+1}-t_i}(x_i, x_{i+1}) d\gamma_{mn}(x_1, \dots, x_m),$$

alors

$$\begin{aligned} \psi'(s) = & \int_{\mathbb{R}^{nm}} (Q_s g_1)^{c_1}(x_1) \dots (Q_s g_m)^{c_m}(x_m) \prod_{i=1}^m q_{t_{i+1}-t_i}(x_i, x_{i+1}) \times \\ & \left(\sum_k c_k (\nabla \log Q_s g_k(x_k))^2 - \sum_{k,l} c_k c_l e^{-|t_k - t_l|} \nabla \log Q_s g_k(x_k) \cdot \nabla \log Q_s g_l(x_l) \right) d\gamma_{mn}. \end{aligned}$$

Par hypothèses, la forme quadratique réelle $\mathcal{Q}_s$ entre parenthèses est (semi) positive (pour tout $s \geq 0$). Par réduction classique des formes quadratiques réelles, il existe des formes linéaires indépendantes, $l_1, \dots, l_K$ avec $K < m$ et des nombres positifs a_i telles que

$$\mathcal{Q}_s(X_{1,s}, \dots, X_{m,s}) = \sum_{i=1}^K a_i l_i^2(X_{1,s}, \dots, X_{m,s})$$

où $X_{i,s} = \nabla \log Q_s g_i(x_i)$. En particulier cela implique que s'il y a égalité, chacun des X_i sont constants et ainsi toutes les fonctions sont exponentielles.

Ce schéma de preuve donne également les inégalités de Brascamp–Lieb géométriques. L'approche par semi-groupe des inégalités géométriques de Brascamp–Lieb a été mise en avant et perfectionnée par Bennett, Carbery, Christ et Tao [B-C-C-T], et dans le cas des sphères par Carlen, Lieb et Loss [C-L-L].

Nous nous restreignons à un cas simple, une forme des inégalités de Brascamp Lieb géométriques mise en avant par Ball [Bal] pour laquelle cette preuve par semi-groupe remonte à l'article de Barthe et Cordero-Erausquin [B-CE].

Si l'on prend $J(u_1, \dots, u_m) = u_1^{c_1} \dots u_m^{c_m}$, $g_i \circ A_i = f_i(u_i \cdot x)$, pour des vecteurs unitaires u_i et des nombres positifs c_i tels que l'on ait la décomposition géométrique suivante $\sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i = Id_n$, la conclusion se lit alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i^{c_i}(x \cdot u_i) d\gamma_n \leq \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_i d\gamma \right)^{c_i}.$$

La condition $\sum_{k,l} \partial_{kl} J A_l^t A_k v_k v_l \leq 0$ se réécrit $\left| \sum_{k=1}^m c_k u_k v_k \right|^2 = \sum_{1 \leq k, l \leq m} c_k c_l u_k \cdot u_l v_k v_l \leq \sum_{k=1}^m c_k v_k^2$.

Le fait qu'elle soit réalisée est une conséquence de la condition géométrique (cf [B-CE]) qui implique que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|^2 = \sum_{i=1}^m c_i (u_i \cdot x)^2$. En effet, en écrivant $y = \sum_{k=1}^m c_k u_k v_k$, on a alors

$$|y|^4 = \left(\sum_{k=1}^m c_k v_k u_k \cdot y \right)^2 \leq \sum_{k=1}^m c_k v_k^2 \sum_{k=1}^m c_k (u_k \cdot y)^2 = |y|^2 \sum_{k=1}^m c_k v_k^2,$$

ce qui revient bien à $|y|^2 = \left| \sum_{k=1}^m c_k u_k v_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^m c_k v_k^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m (Q_s f_i(x \cdot u_i))^{c_i} \times \\ &\quad \left[\sum_{k=1}^m c_k \nabla(\log Q_s f_k(x \cdot u_k))^2 - \sum_{k,l} c_k c_l u_k \cdot u_l \nabla(\log Q_s f_k(x \cdot u_k)) \nabla(\log Q_s f_l(x \cdot u_l)) \right] d\gamma \end{aligned}$$

est positif pour tout $s > 0$. En utilisant l'identité $(\sum_i a_i b_i)^2 + \sum_{k < l} (a_k b_l - a_l b_k)^2 = |a|^2 |b|^2$ avec

$$a = (c_k^{1/2} \nabla \log Q_s f_k(x \cdot u_k))_k \quad b = (c_k^{1/2} (y \cdot u_k))_k, \quad y = \sum_{j=1}^m c_j \nabla \log Q_s f_j(x \cdot u_j) u_j,$$

on peut ainsi réécrire

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m (Q_s f_i(x \cdot u_i))^{c_i} \times \\ &\quad \left[\sum_{1 \leq k < l \leq m} c_k c_l \left(\nabla \log Q_s f_k(x \cdot u_k) \sum_{j=1}^m c_j \nabla \log Q_s f_j(x \cdot u_j) u_j \cdot u_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \nabla \log Q_s f_l(x \cdot u_l) \sum_{j=1}^m c_j \nabla \log Q_s f_j(x \cdot u_j) u_j \cdot u_k \right)^2 \right] d\gamma. \end{aligned}$$

Dans certains cas particuliers, les cas d'égalités peuvent être facilement retrouvés.

Mentionnons deux cas particuliers bien connus : quand $n = 1$ et quand $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ forme une base orthonormée.

Quand $n = 1$ $u_i = 1$, $\sum_{i=1}^m c_i = 1$ ceci est simplement l'inégalité multi-Hölder. L'expression de la dérivée de ψ se simplifie sur la forme suivante :

$$\psi'(s) = \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^m (Q_s f_i(x))^{c_i} \left[\sum_{k < l} c_k c_l \left(\sum_{j=1}^m c_j \nabla \log Q_s f_j(x) \right)^2 \left(\nabla \log Q_s f_k(x) - \nabla \log Q_s f_l(x) \right)^2 \right] d\gamma,$$

et il y a donc égalité si et seulement si $\nabla \log f_1(x) = \dots = \nabla \log f_m(x)$ et donc si et seulement si

$$\frac{f_1}{\int_{\mathbb{R}} f_1} = \dots = \frac{f_m}{\int_{\mathbb{R}} f_m}.$$

Quand $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une base orthonormée, $c_i = 1$ et alors $\forall s > 0$, $\psi'(s) = 0$. L'égalité obtenue n'est en fait qu'un cas particulier du théorème de Fubini.

Dans le cas $n \geq 2$, si chaque u_i est différent (dans $\mathbb{S}^{n-1}/\{-1, 1\}$) et lorsque pour toute famille J avec $|J| = m - 1$ on a $\text{vect}\{(u_j)_{j \in J}\} = \mathbb{R}^n$, il y a égalité si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, $f_k = \alpha_k e^{-a(t-v \cdot u_k)^2}$. Cela a été prouvé par Barthe dans [Bar1] par une approche utilisant le transport de masse. En utilisant une preuve par semi-groupe, cette conclusion a été retrouvée par Valdimarsson [Val], mais on faisant l'hypothèse plus forte que les fonctions sont dans la classe de Schwarz. Notons que les conditions géométriques semblent toutefois assez délicates à manipuler pour retrouver une condition nécessaire des cas d'égalités dans l'expression de ψ' .

Nous renvoyons à l'article de Bennett, Carbery, Christ et Tao [B-C-C-T] pour de plus amples discussions à ce sujet. Il est à noter cependant que l'approche par transport de masse due à Barthe permet de déterminer les fonctions extrémales de manière plus directe.

2.4 Variétés riemanniennes à densités.

La preuve initiale de Mossel et Neeman (pour J une fonction de deux variables ρ -convexe) peut également s'étendre sur une variété riemannienne à poids $(M, L, d\mu)$ satisfaisant la condition $CD(\kappa, n)$. On rappelle que $L = \Delta - \nabla \psi \cdot \nabla$ et $d\mu = e^{-\psi} d\text{vol}$ pour ψ une fonction de classe C^2 . Alors, on rappelle que par intégrations par parties :

$$\int_M f(-Lg) d\mu = \int_M \nabla f \cdot \nabla g d\mu.$$

Soit p_t le noyau de P_t , i.e. $P_t f(x) = \int_M f(y) p_t(x, dy)$. Le même schéma de preuve dû à Mossel et Neeman implique le lemme suivant :

Lemme 2.4.1.

$$\int_M \int_M J_\rho(f(x), g(y)) p_t(x, dy) d\mu(x) \leq J_\rho \left(\int_M f d\mu, \int_M g d\mu \right)$$

dès que

$$\begin{pmatrix} \partial_{11} J_\rho & e^{-\kappa t} \partial_{12} J_\rho \\ e^{-\kappa t} \partial_{12} J_\rho & \partial_{22} J_\rho \end{pmatrix} \leq 0.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \int_{M \times M} J_\rho(P_s f(x), P_s g(y)) p_t(x, dy) d\mu(x) \\ &= \int_{M \times M} \partial_1 J_\rho(P_s f(x), P_s g(y)) L P_s f(x) p_t(x, dy) d\mu(x) \quad (a) \\ &+ \int_{M \times M} \partial_2 J_\rho(P_s f(x), P_s g(y)) L P_s g(y) p_t(x, dy) d\mu(x), \quad (b) \end{aligned}$$

en utilisant $\frac{d}{ds}P_s = LP_s$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} (a) &= - \int_{M \times M} \partial_{11} J_\rho(P_s f(x), P_s g(y)) |\nabla P_s f(x)|^2 p_t(x, dy) d\mu(x) \\ &\quad - \int_{M \times M} \partial_1 J_\rho(P_s f(x), P_s g(y)) \nabla P_s f(x) \cdot \nabla_x p_t(x, dy) d\mu(x). \end{aligned}$$

De plus $\nabla P_t f = \nabla_x (\int_M f(y) p_t(x, dy)) = \int_M f(y) \nabla_x p_t(x, dy)$ et $|\nabla P_t f| \leq e^{-\kappa t} P_t(|\nabla f|)$ implique que

$$\left| \int_M f(y) \nabla_x p_t(x, dy) \right| \leq e^{-\kappa t} \int_M |\nabla f|(y) p_t(x, dy).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &- \left| \int_{M \times M} \partial_1 J_\rho(P_s f(x), P_s g(y)) \nabla P_s f(x) \cdot \nabla_x p_t(x, dy) d\mu(x) \right| \geq \\ &- e^{-\kappa t} \int_{M \times M} \partial_{12} J_\rho(P_s f(x), P_s g(y)) |\nabla P_s f(x)| |\nabla P_s g(y)| p_t(x, dy) d\mu(x), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (a) &\geq - \int_{M \times M} \partial_{11} J_\rho(P_s f(x), P_s g(y)) |\nabla P_s f(x)|^2 p_t(x, dy) d\mu(x) \\ &- e^{-\kappa t} \int_{M \times M} |\partial_{12} J_\rho(P_s f(x), P_s g(y)) \nabla P_s f(x)| |\nabla P_s g(y)| p_t(x, dy) d\mu(x). \end{aligned}$$

Cela implique, en posant $\psi(s) = \int_{M \times M} J_\rho(P_s f(x), P_s g(y)) p_t(x, dy) d\mu(x)$ que

$$\psi'(s) \geq \int_{M \times M} \begin{pmatrix} |\nabla P_s f(x)| \\ |\nabla P_s g(y)| \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \partial_{11} J_\rho & e^{-\kappa t} \partial_{12} J_\rho \\ e^{-\kappa t} \partial_{12} J_\rho & \partial_{22} J_\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nabla P_s f(x)| \\ |\nabla P_s g(y)| \end{pmatrix} p_t(x, dy) d\mu(x),$$

et ainsi le lemme suit car par ergodicité :

$$J_\rho \left(\int_M f d\mu, \int_M g d\mu \right) - \int_{M \times M} J_\rho(f(x), g(y)) p_t(x, dy) d\mu(x) = \int_0^\infty \psi'(s) ds.$$

□

Concernant la stabilité au bruit, la conclusion de ce lemme se lit :

Proposition 2.4.2. *Soit M une variété riemannienne lisse satisfaisant la condition $CD(\kappa, \infty)$. Alors, pour tous sous ensembles $A, B \subset M \times M$,*

$$\int_M \mathbf{1}_A P_t \mathbf{1}_B d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_H Q_{\kappa t} \mathbf{1}_K d\gamma,$$

où H et K sont des demi-espaces tels que $\mu(A) = \gamma(K)$ and $\mu(B) = \gamma(H)$, où l'on rappelle que $(Q_t)_{t \geq 0}$ désigne le semi-groupe d'Ornstein Uhlenbeck.

Lorsque $t \rightarrow 0$, on retrouve ainsi le théorème de comparaison isopérimétrique de Bakry–Ledoux. Les calculs menés dans cette preuve par semi-groupe sont toutefois nettement moins lourds que pour l'inégalité de Bobkov. Cette preuve semble ainsi être la plus simple connue à ce jour de ce théorème.

En ce qui concerne l'hypercontractivité, nous avons le corollaire suivant :

Proposition 2.4.3. *Soit M une variété Riemannienne à densité satisfaisant la condition $CD(\kappa, \infty)$. Alors, si $q = 1 + (p - 1)e^{\kappa t}$, $\|P_t f\|_q \leq \|f\|_p$.*

Le semi-groupe correspondant est ainsi hypercontractif avec constante κ . Cette dernière proposition retrouve, par l'argument de Gross, le résultat donné par l'inégalité de Sobolev logarithmique dans ce cadre.

2.5 Remarques sur la Stabilité/Rigidité

2.5.1 Cas d'égalités

Sur l'espace gaussien, nous avons vu que ces preuves par semi-groupes permettent de déduire les cas d'égalités. Sur une variété Riemannienne satisfaisant la condition de courbure, en plus de la condition d'appartenir au noyau de $\Gamma \odot \nabla^2 J$, il doit y avoir égalité dans la condition de commutation. En dérivant cette égalité, il en vient, par les calculs vus en introduction, la condition que $\Gamma_2 - \kappa \Gamma = 0$.

Dans $(\mathbb{R}^n, d\mu = e^{-V(x)} dx)$, rappelons que $\Gamma_2(f) = \nabla^2 V(\nabla f, \nabla f) + \|\text{Hess} f\|_{HS}^2$. L'égalité implique que f est affine dans la direction d'un vecteur propre de la hessienne de V associée à la valeur propre κ . Soit $a \in \mathbb{S}^n$ un tel vecteur propre. Choisissons une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ de la forme

$\mathcal{B} = (a, e_2, \dots, e_n)$. Alors $V(x) - \kappa \frac{(x \cdot a)^2}{2}$ a sa hessienne dans la base $\mathcal{B}$ de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$. Ainsi,

l'espace contient une droite gaussienne : l'espace gaussien est le seul admettant cas d'égalités non triviaux. La proposition suivante suit :

Proposition 2.5.1. *Soit $(\mathbb{R}^n, \mu)$ satisfaisant $CD(\kappa, \infty)$. S'il existe des ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,*

$$\int_M 1_A P_t 1_B d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} 1_H Q_{\kappa t} 1_K d\gamma,$$

alors $(\mathbb{R}^n, \mu) = (\mathbb{R}, \gamma_\kappa) \times (\mathbb{R}^{n-1}, \mu_1)$ où $(\mathbb{R}^{n-1}, \mu_1)$ satisfait $CD(\kappa, \infty)$ et A et B sont des demi-espaces dont l'orthogonal est la droite gaussienne.

Notons que les cas d'égalités pour l'inégalité isopérimétrique ne découlent pas de cette preuve à cause du passage à la limite en t . On verra toutefois dans le prochain chapitre que la conclusion est la même en ce qui concerne les cas d'égalités dans l'inégalité de Bobkov. Cela implique en fait un phénomène de rigidité analogue à celui qui existe pour le théorème de comparaison de Lévy–Gromov.

De plus, le même phénomène de rigidité implique que les seules fonctions non constantes extrémales sont exponentielles pour des mesures log-concaves, ce qui étend le résultat de Carlen.

Corollaire 2.5.2. *Soit $(\mathbb{R}^n, \mu)$ satisfaisant $CD(\kappa, \infty)$. Alors, s'il existe une fonction non constante f telle que $\|P_t f\|_q = \|f\|_p$, alors $(\mathbb{R}^n, \mu) = (\mathbb{R}, \gamma_\kappa) \times (\mathbb{R}^{n-1}, \mu_1)$ et f est exponentielle dans la direction gaussienne.*

Le même raisonnement peut être effectué pour l'inégalité de trou spectral et de Sobolev logarithmique. Dans le prochain chapitre, nous verrons que le même phénomène de rigidité a lieu pour ces inégalités. Notons que par l'argument de Gross, les cas d'égalités dans les inégalités d'hypercontractivité et de Sobolev logarithmique sont identiques.

2.5.2 Remarques sur le déficit

Dans le même esprit que leurs travaux sur le déficit isopérimétrique gaussien, Mossel et Neeman se servent à nouveau de cette preuve par semi-groupe pour obtenir des bornes indépendantes de la

dimension du déficit dans l'inégalité de Borell [M-N2]. Le schéma de preuve est identique au cas gaussien.

L'inégalité d'Hölder inverse pour $r, \in (0, 1)$, $\beta > 0$ tels que $1/r - 1/\beta = 1$ appliquée par rapport à la mesure $q_t(x, y)d\gamma(x)d\gamma(y)$ implique l'inégalité

$$\psi'(s) \geq \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} \left| q_t(v_s(x), w_s(y)) \mathcal{J}(Q_s f(x)) \mathcal{J}(Q_s g(y)) \right|^{-\beta} q_t(x, y) d\gamma(x) d\gamma(y) \right)^{-1/\beta} \times \\ \left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} \left| \nabla v_s(x) - \nabla w_s(y) \right|^{2r} q_t(x, y) d\gamma(x) d\gamma(y) \right)^{1/r}.$$

Le premier terme est minoré par des inégalités de concentrations. Le deuxième fait appel à une inégalité de Poincaré modifiée qui fait intervenir les projections orthogonales de ∇v_s et ∇w_s (dans $L^2(\gamma)$) sur le sous-espace des fonctions affines. Le résultat obtenu par les auteurs est le suivant :

Proposition 2.5.3. Soit $\delta = J_\eta^B(\mathbb{E}f, \mathbb{E}g) - \mathbb{E}_\eta J_\eta^B(f, g)$. Alors il existe $a \in \mathbb{R}^n$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathbb{E}|f(X) - \Phi(\langle a, X \rangle + b_1)|^2 \leq C(\rho, \text{Var}_\gamma(f))\delta^{c(\eta)}$$

et

$$\mathbb{E}|g(X) - \Phi(\langle a, X \rangle + b_2)|^2 \leq C(\rho, \text{Var}_\gamma(g))\delta^{c(\eta)}.$$

Notons que $c(\eta)$ de l'ordre de $1/4$ pour η proche de 0 mais tendant vers 0 quand η tends vers 1. Ce résultat permet tout de même d'obtenir à la limite des bornes indépendantes de la dimension dans le déficit isopériétrique gaussienne. Nous renvoyons à [M-N2] pour des commentaires détaillés sur ce dernier point. Notons que par des arguments de calculs stochastiques, Eldan [Eld] démontre des bornes (quasi optimales) en $\delta^{1/2} \log(\frac{1}{\delta})$ pour le déficit exprimé sur les ensembles. Son approche ne permet semble-t-il toutefois pas d'obtenir des bornes similaires sur une version fonctionnelle, ni même sur la version avec deux ensembles distincts.

On pourrait, à l'instar de cette preuve de Mossel et Neeman, s'intéresser à la stabilité de l'inégalité d'hypercontractivité avec ce même schéma de preuve. Un obstacle concernant l'hypercontractivité est le fait suivant : on peut démontrer l'existence d'un t petit tel que $\log Q_t f$ est proche (en norme L^2 d'une fonction linéaire). Il est toutefois plus délicat de remonter à $\log f$. Les contrôles sur l'écart entre f et $Q_t f$ (en norme L^1 ou L^2) ne permettent pas d'en déduire un contrôle entre $\log f$ et $\log Q_t f$ (la fonction exponentielle n'étant pas lipschitzienne...). Pour la mesure gaussienne, en faisant une hypothèse supplémentaire que $t \mapsto \|\log Q_t f\|_2$ est lipschitzienne, ce qui revient à une condition particulière et peu commune sur l'information de Fischer, on pourrait en déduire des bornes analogues à celles de Mossel et Neeman (i.e. polynomiales en δ).

2.6 Remarques sur les sphères euclidiennes

Sur une variété Riemannienne (M, g) satisfaisant la condition $CD(n-1, n)$, l'argument de Mossel et Neeman présenté plus haut implique l'inégalité pour les fonctions $J_{e^{-(n-1)t}}^H$ et $J_{e^{-(n-1)t}}^B$. Cela ne permet toutefois pas d'atteindre la constante d'hypercontractivité optimale qui vaut dans ce cas n comme rappelé en introduction. L'inégalité sur la fonctionnelle de Borell implique à la limite $\mathcal{J}_{(M,g)} \geq \sqrt{n-1} \mathcal{J}_\gamma$. Nous avons déjà vu que cette conclusion suit par l'inégalité de Bobkov suivante prouvée par l'argument de Bakry et Ledoux :

$$\mathcal{J}_\gamma \left(\int_M f d\mu \right) \leq \int_M \sqrt{\mathcal{J}_\gamma(f)^2 + \frac{1}{n-1} |\nabla f|^2} d\mu.$$

Sur les sphères euclidiennes, par l'argument de Barthe et Maurey, l'inégalité de Bobkov optimale avec constante c_n (c'est-à-dire $\mathcal{J}_\gamma(\int_{\mathbb{S}^n} f d\sigma) \leq \int_{\mathbb{S}^n} \sqrt{\mathcal{J}_\gamma(f)^2 + \frac{1}{c_n^2} |\nabla f|^2} d\sigma$) est telle que c_n est la

meilleure constante dans l'inégalité $\mathcal{J}_{\mathbb{S}^n} \geq c_n \mathcal{J}_\gamma$. Par des arguments standards (cf e.g. [B-M]),

$$c_n = \inf_{a \in (0,1)} \frac{\mathcal{J}_{(\mathbb{S}^n, g, \mu)}(a)}{\mathcal{J}_\gamma(a)} = \frac{\mathcal{J}_{(\mathbb{S}^n, g, \mu)}(1/2)}{\mathcal{J}_\gamma(1/2)} = \sqrt{2\pi} \frac{\text{vol}_{n-1}(\mathbb{S}_{n-1})}{\text{vol}_n(\mathbb{S}_n)} = \sqrt{2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Cette quantité est (strictement) comprise entre $\sqrt{n-1}$ et $\sqrt{n}$. En effet, par (stricte) log-convexité de la fonction Γ , si $n \geq 2$,

$$\frac{n-1}{2} \Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right) < \frac{n-1}{2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right),$$

ce qui implique $c_n > \sqrt{n-1}$. Ainsi $\sqrt{\frac{n-1}{2}} < \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{n-1}{2} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{n-1}{\sqrt{2}c_{n-1}}$, soit $c_{n-1} < \sqrt{n-1}$. D'où $\forall n \geq 1, c_n \in (\sqrt{n-1}, \sqrt{n})$.

En conséquence l'inégalité suivante

$$\int_{\mathbb{S}^n} \int_{\mathbb{S}^n} J_{e^{-nt}}^B(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(y)) p_t(x, y) d\sigma_n(x) d\sigma_n(y) \leq J_{e^{-nt}}^B(\sigma(A), \sigma(B))$$

n'est pas vraie pour tout $t > 0$ et tous ensembles A et B , car par l'argument de Ledoux liant inégalité de Borell et isopérimétrie, on aurait alors $\mathcal{J}_{(\mathbb{S}^n, \sigma_n)} \geq \sqrt{n} \mathcal{J}_\gamma$.

La constante d'hypercontractivité de la sphère $\mathbb{S}^n$ valant n , cette inégalité est vraie pour $J_{e^{-nt}}^H$. Ceci met en évidence une différence entre les fonctions J^B et J^H . Dans le cas du cube discret nous verrons également qu'une inégalité du même type est vérifiée pour J^H mais pas pour J^B .

La difficulté est que la condition de commutation ne prend pas en compte la dimension. On peut toutefois se demander s'il est possible d'avoir un argument analogue pour l'inégalité de Borell sur la sphère. Cette dernière inégalité prend la forme

$$\int_{\mathbb{S}^n} \mathbf{1}_A P_t \mathbf{1}_B d\sigma_n \leq \int_{\mathbb{S}^n} \mathbf{1}_H P_t \mathbf{1}_K d\sigma_n,$$

pour H et K des calottes sphériques parallèles et telles que $\sigma_n(A) = \sigma_n(H)$, $\sigma_n(B) = \sigma_n(K)$. D'après Baernstein et Taylor [Ba-Ta], la version fonctionnelle de ce résultat prend une forme analogue au cas gaussien

$$\int_{\mathbb{S}^n} f_1 P_t f_2 d\sigma_n \leq \int_{\mathbb{S}^n} f_1^* P_t f_2^* d\sigma_n,$$

où f^* désigne le réarrangé symétrique décroissant sphérique. Par le même argument de Mossel et Neeman, on peut introduire la fonction

$$J_t^{\mathbb{S}^n}(\sigma_n(A), \sigma_n(B)) = \int_H \int_K p_t^{(n)}(x, y) d\sigma_n(x) d\sigma_n(y),$$

en notant $p_t^{(n)}(x, y)$ le noyau de la chaleur sur la sphère $\mathbb{S}^n$. Le noyau de la chaleur admet la représentation explicite suivante :

$$p_t^{(n)}(x, y) = \sum_{m \geq 0} e^{-m(m+n-1)t} Z_m^n(x \cdot y),$$

où les polynômes Z_m^n sont les polynômes de Gegenbauer. Ils sont donnés par l'expression explicite suivante :

$$Z_m^n(u) = A_{n,m} \frac{2^m}{\Gamma(n)} \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(-1)^j \Gamma(n+m-j)}{2^{2j} j! (m-2j)!} u^{m-2j},$$

où les coefficients $A_{n,m}$, $n, m \geq 0$ sont tels que $\|Z_m^n\|_2 = 1$. Ces polynômes satisfont entre autres l'équation différentielle $\frac{d}{du}Z_m^n(u) = Z_{m+1}^{n-1}(u)$ (cf [M-W]). L'expression de $J_t^{\mathbb{S}_n}$ prend ainsi la forme explicite suivante :

$$J_t^{\mathbb{S}_n}(\alpha, \beta) = \int_{\{x_1 \leq H_n^{-1}(\alpha)\}} \int_{\{y_1 \leq H_n^{-1}(\beta)\}} p_t^{(n)}(x, y) d\sigma_n(x) d\sigma_n(y),$$

où l'on rappelle que $H_n(u) = \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{\text{vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{-1}^u (1-t^2)^{\frac{n-2}{2}} dt$.

Notons que contrairement au cas gaussien qui est muni d'une structure produit, une version fonctionnelle de l'inégalité de Borell donnée par cette fonction n'est pas équivalente à une version ensembliste. Cependant, intuitivement, par les mêmes effets de régularisation du semi-groupe,

$$F : s \mapsto \int_{\mathbb{S}^n} \int_{\mathbb{S}^n} J_t^{\mathbb{S}_n}(P_s \mathbf{1}_A, P_s \mathbf{1}_B) p_t^{(n)}(x, y) d\sigma_n(x) d\sigma_n(y)$$

devrait être décroissante. Toutefois, ceci est nettement plus difficile à établir. La première difficulté est que l'expression de $J_t^{\mathbb{S}_n}$ est plus compliquée du fait de l'expression noyau de la chaleur et du profil isopérimétrique sphérique. La deuxième est que le raisonnement plus haut fait intervenir une inégalité. Pour conserver l'égalité, il est nécessaire d'utiliser une commutation exacte qui se traduit par l'égalité suivante, valable pour tout $n : \nabla P_t^{(n)} = e^{-nt} \nabla P_t^{(n+2)}$ (cf [Ben1]). Ceci fait intervenir dans la dérivée de F la forme quadratique associée à la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \partial_{11} J_t^{\mathbb{S}_n} p_t^{(n)} & e^{-nt} \partial_{12} J_t^{\mathbb{S}_n} p_t^{(n+2)} \\ e^{-nt} \partial_{12} J_t^{\mathbb{S}_n} p_t^{(n+2)} & \partial_{22} J_t^{\mathbb{S}_n} p_t^{(n)} \end{pmatrix}$$

et il est nettement plus difficile, même pour les premières valeurs de n , de vérifier qu'elle est négative - si tant est qu'elle le soit.

Une autre remarque est que l'existence de cas d'égalités implique que $J_t^{\mathbb{S}_n}$ n'est pas $e^{-(n-1)t}$ -concave. Comme $\mathbb{S}^n$ satisfait la condition $CD(n-1, n)$, il n'y a aucune fonction réalisant l'égalité

$$|\nabla P_t f| = e^{-(n-1)t} P_t |\nabla f|.$$

Comme nous le verrons dans le prochain chapitre, une telle fonction est nécessairement vecteur propre du laplacien sphérique Δ associée à la valeur propre $n-1$, ce qui n'existe pas. L'existence de telles fonctions est donc un cas spécifique aux espaces satisfaisant seulement une condition $CD(n-1, \infty)$ et aucune condition $CD(n-1, N)$ pour $N < \infty$. Ainsi, si $J_t^{\mathbb{S}_n}$ était $e^{-(n-1)t}$ -concave, on aurait alors pour tous ensembles boréliens A et B de $\mathbb{S}^n$:

$$\int_{\mathbb{S}^n} \int_{\mathbb{S}^n} J_t^{\mathbb{S}_n}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) p_t^{(n)}(x, y) d\sigma_n(x) d\sigma_n(y) < J_t^{\mathbb{S}_n}(\sigma_n(A), \sigma_n(B)),$$

ce qui est bien entendu faux.

Utilisons maintenant l'égalité le long du semi-groupe découlant de l'identité $\nabla P_t^{(n)} = e^{-nt} P_t \nabla^{(n+2)}$ pour $J_{e^{-nt}}^B$ - qui rappelons le est e^{-nt} -concave par définition. Alors comme l'inégalité globale est fautive en générale, ceci signifie que

$$\begin{pmatrix} \partial_{11} J_{e^{-nt}}^B p_t^{(n)} & e^{-nt} \partial_{12} J_{e^{-nt}}^B p_t^{(n+2)} \\ e^{-nt} \partial_{12} J_{e^{-nt}}^B p_t^{(n+2)} & \partial_{22} J_{e^{-nt}}^B p_t^{(n)} \end{pmatrix}$$

n'est pas symétrique négative en tout point. Ainsi, comme les termes diagonaux sont négatifs et comme on rappelle que

$$\partial_{11} J_{e^{-nt}}^B \partial_{22} J_{e^{-nt}}^B = (e^{-nt} \partial_{12} J_{e^{-nt}}^B)^2,$$

cela signifie que le déterminant de la matrice n'est pas (toujours) positif ou nul. Celui-ci vaut

$$\partial_{11}J_{e^{-nt}}^B \partial_{22}J_{e^{-nt}}^B ((p_t^{(n)})^2 - (p_t^{(n+2)})^2)$$

par la relation $\partial_{11}J_{e^{-nt}}^B \partial_{22}J_{e^{-nt}}^B = e^{-2nt}(\partial_{12}J_{e^{-nt}}^B)^2$. Comme ce terme est positif en tout point, cela signifie que l'on a pas toujours $p_t^{(n)}(x, y) \geq p_t^{(n+2)}(x, y)$.

En ce qui concerne la fonction d'hypercontractivité exacte $J_{e^{-nt}}^H$ par dualité l'inégalité suivante

$$J_{e^{-nt}}^H \left(\int_{\mathbb{S}^n} f d\sigma_n, \int_{\mathbb{S}^n} g d\sigma_n \right) \geq \iint_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n} J_{e^{-nt}}^H(f(x), g(y)) p_t^{(n)}(x, y) d\sigma_n(x) d\sigma_n(y),$$

est vraie pour toutes fonctions positives et intégrables f et g . En revanche, si l'on interpole le long du semi-groupe de la chaleur en introduisant la fonction

$$\psi : s \mapsto \iint_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n} J_{e^{-nt}}^H(P_s f(x), P_s g(y)) p_t^{(n)}(x, y) d\sigma_n(x) d\sigma_n(y),$$

ψ n'est pas forcément croissante. En effet la forme quadratique associée à ψ' est

$$\begin{pmatrix} \partial_{11}J_{e^{-nt}}^H p_t^{(n)} & e^{-nt} \partial_{12}J_{e^{-nt}}^H p_t^{(n+2)} \\ e^{-nt} \partial_{12}J_{e^{-nt}}^H p_t^{(n+2)} & \partial_{22}J_{e^{-nt}}^H p_t^{(n)} \end{pmatrix},$$

qui n'est pas (toujours) négative, comme son déterminant est du signe de $p_t^{(n)} - p_t^{(n+2)}$. Cette méthode d'interpolation par semi-groupe ne permet donc pas d'atteindre la constante exacte n dans le cas des sphères euclidiennes $\mathbb{S}^n$.

Chapitre 3

Rigidity phenomenons for an infinite dimensional diffusion operator and stability for the spherical isoperimetry

3.1 Introduction

In this chapter, we study rigidity phenomenons for spaces endowed with an infinite dimension diffusion operators. The natural setting consists of abstract Markov triples (E, μ, Γ) , which belongs to the Bakry–Emery framework [B-E]. This setting encircles the examples of weighted Riemannian manifolds with generalized Ricci curvature bounded from below and without any condition on the dimension, justifying the term “infinite dimension”. In such framework, sharp geometric and functional inequalities has been established using the principle of monotonicity along the heat flow. In the case of Riemannian manifolds of finite dimension n , some rigidity occurs for inequality such as spectral gap, Myers’ maximal diameter theorem or Lévy–Gromov isoperimetric comparison theorem. Very recent works ([C-M1], [C-M2]) provided analogous statements of these important results in the more general framework of metric measure spaces, with moreover analogous rigidity phenomenons. The infinite dimensional case presents in various aspects less rigidity. For example there is no longer boundedness on the diameter of manifolds (as immediately checked by considering the Gaussian space). The aim of this chapter is to study some rigidity phenomenons in this setting using semigroup tools. In particular, we deal with Bakry–Ledoux comparison theorem, the analogous statement of the Lévy–Gromov comparison theorem in infinite dimension setting. Using semigroup tools, Mossel and Neeman have derive robust dimension free bounds over the Gaussian isoperimetric deficit. We somewhat extend their arguments to obtain some isoperimetric deficit results over the Euclidean spheres.

A main geometric problem is isoperimetry, that is the problem of minimizing boundary given a fixed volume. Isoperimetrical problems has a long history, and make sense in very general metric measure spaces (E, d, μ) . Indeed, one only need a measure to define the “volume” and a distance to define the “boundary”. In this context, denote the outer Minkowski content by

$$\mu^+(A) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(A_r) - \mu(A)}{r},$$

with $A_r = \{y \in E, d(x, A) \leq r\}$, where $d(x, A) = \inf\{d(x, y), y \in A\}$. Define then the isoperimetric profile of the set (E, d, μ) by

$$\mathcal{I}_{(E, d, \mu)}(v) = \inf\{\mu^+(A), A \subset E, \mu(A) = v\}.$$

The isoperimetric problem is two-fold : one aims to find the function $\mathcal{I}_{(E, d, \mu)}$ as well as describing the optimal sets. In general such a problem is very difficult to solve. Even the existence of optimal sets,

called isoperimetric sets, is far from being guaranteed. Throughout this note, we will consider the isoperimetric problem over a Riemannian manifold M with some probability measure μ of the form $e^{-\psi} d\text{vol}$, where vol designs the canonical Riemannian volume. We will consider the usual distance induced by the metric g . As a consequence, $\mathcal{J}_{(M,d,\mu)}$ is defined on $[0, 1]$ and symmetric with respect to $1/2$.

The Euclidean spheres are among the few examples in which the isoperimetric problem is completely solved. This goes back to the early XXth century by Lévy and Schmidt. The extremal sets are, perhaps unsurprisingly, the spherical caps. Later on, Gromov have extended the proof to more general Riemannian manifold with Ricci curvature bounded from below. The Lévy–Gromov comparison theorem can be then stated as follows.

Theorem 3.1.1. *Let (M, g) be a compact Riemannian manifold of dimension $n \geq 2$ with Ricci curvature bounded from below by $\kappa > 0$ (in the sense that $\text{Ric}_{(M,g)} \geq \kappa g$). Let $d\mu = \frac{d\text{vol}}{\text{vol}(M)}$ be its normalized measure. Then its isoperimetric profile satisfies $\mathcal{J}_\mu \geq \mathcal{J}_{\sigma_{\kappa,n}}$ where $\sigma_{\kappa,n}$ is the normalized measure over the n dimensional sphere whose Ricci curvature is equal to κ , that is with radius $\sqrt{\frac{n-1}{\kappa}}$.*

The above statement links curvature and dimension. Curvature and dimension are also linked by Lichnerowicz' minoration of the first eigenvalue of the Laplace–Beltrami operator λ_1 . In the above setting, Lichnerowicz theorem expresses that $\lambda_1 \geq \frac{n\kappa}{n-1}$. Actually, this constant arises in classical functional inequalities that will be recalled below. First of all, Lichnerowicz' minoration is equivalent to the following spectral gap inequality (by classical integration by parts).

For all $f \in H^2(M)$,

$$\text{Var}_\mu(f) = \int_M f^2 d\mu - \left(\int_M f d\mu \right)^2 \leq \frac{n-1}{n\kappa} \int_M |\nabla f|^2 d\mu,$$

where we have denoted $H^2(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}, \int_M f^2 d\mu + \int_M |\nabla f|^2 d\mu < +\infty\}$.

A further important functional inequality is given by the following Sobolev logarithmic inequality. For all $f \in L^2 \log L^2(M)$,

$$\text{Ent}_\mu(f^2) = \int_M f^2 \log f^2 d\mu - \left(\int_M f^2 d\mu \right) \log \left(\int_M f^2 d\mu \right) \leq 2 \frac{n-1}{n\kappa} \int_M |\nabla f|^2 d\mu.$$

The optimal constant $\frac{n-1}{n\kappa}$ in this inequality is somewhat challenging to reach. In the case of the spheres $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, it has been established by Mueller and Weissler [M-W].

For the further purposes it is of interest to note that some rigidity occurs. The Topogonov–Cheng theorem asserts that maximal diameter is achieved only for the spheres, up to isometric transformations. This rigidity statement also holds for Lévy–Gromov theorem. Indeed, this follows from the Topogonov–Cheng's theorem (a proof appears in [Bay]).

For the spectral gap inequality, a rigidity statement for the spectral gap inequality has been established by Obata. That is, a n dimensional Riemannian manifold with Ricci curvature bounded from below by κ whose spectral gap constant is equal to $\frac{n\kappa}{n-1}$ is isometric to the Euclidean Sphere $\mathbb{S}_\kappa^n$. As a consequence of an inequality due to Rothaus [Rot], the same rigidity holds for the Sobolev logarithmic inequality (see also [B-G-L1]).

It is an observation actually going back to Poincaré that the Gaussian space can be seen as limit of n dimensional Euclidean spheres of radius $\sqrt{n-1}$ when n goes to infinity. This observation and the Lévy–Gromov's theorem is at the root of the Gaussian isoperimetry, proved in the mid 70's independently by Ehrhard and Sudakov–Tsirelson. The isoperimetric sets are the half spaces. That is, if $A \subset \mathbb{R}^n$ and H is a half space such that $\gamma(A) = \gamma(H)$ then

$$\gamma_n^+(A) \geq \gamma_n^+(H) = \varphi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A))).$$

It is an immediate consequence that the isoperimetric profile $\mathcal{J}_\gamma$ of the Gaussian space is the function $\varphi \circ \Phi^{-1}$. The main property of this theorem is that it is dimension free. Few years later, a proof of

Bobkov of a functional version led to an extension of Lévy–Gromov comparison theorem by Bakry and Ledoux, in a fairly abstract setting that rely on a *curvature dimension* condition and that will be described in Section 2.

Theorem 3.1.2. *Let (M, μ, Γ) be a Markov triple satisfying the curvature dimension condition $CD(\kappa, \infty)$. Then the isoperimetric profile satisfies $\mathcal{J}_\mu \geq \sqrt{\kappa} \mathcal{J}_\gamma = \mathcal{J}_{\gamma_\kappa}$ where γ_κ is the Gaussian measure on $\mathbb{R}^n$ with covariance matrix $\kappa^{-1}\text{Id}$.*

In addition of the proof of Bakry–Ledoux, two others proofs of this theorem are known. One by Bobkov for log-concave measures using localization techniques and one by Franck Morgan ([Mor]) for manifold with densities using more geometric arguments. In the setting of manifolds with densities, we note that a rigidity statement follows from the proof of Franck Morgan. Notice also that the Bakry–Ledoux setting is the more general, as it allows for more general structure than Riemmanian manifolds. Besides, this semigroup proof is well-suited to investigate case of near equality. This idea has been put in shape by Mossel and Neeman [M-N1], who were the firsts to derive dimension free bounds for the Gaussian isoperimetry.

In the infinite dimension setting (i.e. spaces satisfying a $CD(\kappa, \infty)$ condition), there is no hope for a complete analogous statement of Obata’s theorem. That is, the Gaussian space is not the only one achieving the optimal spectral gap constant. However, under stronger assumptions, we show that rigidity occurs for weighted manifolds. More precisely, we get an extension of Carlen’s results about characterisation equality cases in Sobolev logarithmic inequality. This characterisation works as well for the spectral gap inequality. That is why we can see the following statement as an infinite dimension analogous of Obata’s theorem.

Theorem 3.1.3. *Let $(M, g, e^{-\psi} d\text{vol})$ with $\text{Ric}_g + \text{Hess}\psi \geq \kappa$. If there exist a non constant function f achieving equality in the spectral gap, inequality, then*

$$(M, g, e^{-\psi} d\text{vol}) = (\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma_\kappa) \times (M', g', e^{-\psi'} d\text{vol}),$$

and f is a linear function in the Gaussian direction. If there exists a non constant function achieving equality in the Sobolev logarithmic equation, then the same splitting holds and f is an exponential function in the Gaussian direction.

For the isoperimetric comparison theorem, we re-derive the rigidity result of Franck Morgan using Bakry–Ledoux’s semigroup proof. That is

Theorem 3.1.4. *Let (M, d, μ) a weighted Riemannian manifold of $CD(\kappa, \infty)$ class. If there exists a $v \in (0, 1)$ such that $\mathcal{J}_{(M, \mu)}(v) = \mathcal{J}_{(\mathbb{R}, \gamma_\kappa)}(v)$ then $(M, g, \mu) = (\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma_\kappa) \times (M', g', \mu')$. Moreover the isoperimetric minimizers are of the form $(-\infty, \Phi_\kappa^{-1}(v)) \times M'$.*

In addition, working through the semi group proof of Bakry–Ledoux, we extend the results of Mossel and Neeman, under the addition restriction of a technical hypothesis. The class of spaces consists of $\mathbb{R}^n$ endowed with a log-concave measures and high dimensional spheres of appropriate radius so that it is of curvature one.

This chapter is organized as follow. In the next section we make some comments about the infinite dimensional setting. Then we recall the functional and geometric inequalities. In section 3.4 we state as a consequence of a lemma by Stein the theorem 3.1.3. In section 3.5 we show how to deduce a rigidity statement for the isoperimetric problem and Theorem 3.1.4. Then section 3.6 is devoted to the extension of Mossel and Neeman’s arguments.

Throughout this chapter, the letters c, C will design positive numerical constants that can change from a line to another.

3.2 The infinite dimension setting

As quickly announced in the introduction, the infinite dimensional setting corresponding to the $CD(\kappa, \infty)$ condition differs concerning rigidity. In this setting, the model space is the Gaussian space $(\mathbb{R}^n, \gamma_\kappa)$, which shares the same functional and geometric inequalities for all $n \geq 0$. An analogous of Obata's theorem would be the following statement : if a weighted manifold (M, μ, Γ) have the optimal constant κ for the Spectral Gap inequality, then the manifold splits as $(M, \mu, \Gamma) = (\mathbb{R}, L, \gamma_\kappa) \times (M', \Gamma', \mu')$. However this is not hard to exhibit counterexample of this statement. For example the probability space $(\mathbb{R}, \mu)$ with $\mu(dx) = \frac{1}{2}e^{-x^2/2 + \sqrt{1+x^2}}dx$ satisfies $CD(1, \infty)$ and have both spectral gap and Sobolev Logarithmic constant equal to 1. Therefore this is not a specific property of the Gaussian space, although our example is a perturbation of this space. One may wonder if the exact spectral gap constant 1 is attained only for perturbations of the Gaussian measure of this form.

To reach rigidity with a splitting theorem involving Gaussian space, we need therefore to make stronger assumptions. This happens if we impose that there is non constant extremal functions for this inequalities. Furthermore, we can establish characterisation of these extremal functions. We note that this conclusion overlaps with the work of Bentaleb [Ben2]. Although the author uses very similar tools as ours, we will still give the complete proofs in the next sections for the reader's convenience.

In contrast of functional inequality, the isoperimetric problem in the setting of $CD(\kappa, \infty)$ models is more rigid. Indeed, for manifolds with densities, a rigidity theorem for the Bakry–Ledoux's comparison theorem has been established by Franck Morgan. This rigidity is similar to one that occurs for the Lévy–Gromov theorem. The proof relies on deep results from geometric measure theory which ensure that in such setting there is always a regular set that minimizes the isoperimetric problem. Note that for the real line, Bobkov [Bob1] has proved that minimizers exist and are half-lines in the weaker class of log-concave measures (not strictly and without regularity assumptions on the potential). We will make the more general observation that if there is a non trivial minimizer in an abstract Markov triple, then some kind of rigidity occurs. In particular, we recover Morgan's theorem for isoperimetric problem with characterisation of the optimal sets in the setting of a weighted Riemmanian manifold.

The starting point is a functional form of the Gaussian isoperimetry. In a remarkable work [Bob2], Bobkov showed that the Gaussian isoperimetry is equivalent to the following functional inequality

$$\mathcal{J}_\gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n\right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\mathcal{J}_\gamma^2(f) + |\nabla f|^2} d\gamma, \quad (3.1)$$

for each function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ locally Lipschitz. Using this inequality to a sequence of Lipschitz functions $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ approaching $\mathbf{1}_A$ as ε goes to 0 implies back $I_\gamma(\gamma(A)) \leq \gamma^+(A)$. Bobkov's original proof is build in three steps. Firstly, one proves the inequality on the two point space $\{0, 1\}$, the using tensorization property of the inequality one establishes it on the discrete cubes $\{0, 1\}^n$, $n \geq 1$ before proving it on the Gaussian space by means of a central limit argument.

Noticing that by ergodicity, $\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_t f$, and that $f = Q_0 f$, Bakry and Ledoux's idea [B-L1] is to consider the function

$$\psi : s \in [0, \infty) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\mathcal{J}_\gamma^2(Q_s f) + |\nabla Q_s f|^2} d\gamma$$

and showing that it is non increasing, recovering therefore Bobkov inequality.

A main advantage of this proof and its tools is that it can be easily adapted on a Markov triple (E, μ, Γ) with the condition $CD(\kappa, \infty)$ described in the previous section. The result is the following

$$\mathcal{J}_\gamma\left(\int_E f d\mu\right) \leq \int_E \sqrt{\mathcal{J}_\gamma^2(f) + \frac{1}{\kappa^2} \Gamma f} d\mu \quad (3.2)$$

for each function f , $E \rightarrow [0, 1]$ locally Lipschitz. By the way, it yields the comparison theorem announced in the introduction.

As we will see below, the isoperimetric problem admits a minimizer for every manifold with density. Towards rigidity, whenever $\mathcal{J}_{(M,g,\mu)} = \mathcal{J}_{\gamma_\kappa}$, this will imply that there is always a constant extremal function for the Bobkov's inequality. This is not the case for the functional inequalities such as Sobolev logarithmic or spectral gap inequality.

3.3 Geometric and functional inequalities

In this section, we recall how to reach sharp geometric and functional inequalities in the abstract framework of Section 2. The starting point is that the curvature dimension criterion of Bakry–Emery implies a commutation between Γ and the semigroup $(P_t)_{t \geq 0}$ in the following sense.

Lemma 3.3.1. *Under $CD(\kappa, \infty)$ we have for all $t \geq 0$,*

$$\Gamma(P_t f) \leq e^{-2\kappa t} P_t \Gamma(f). \quad (3.3)$$

It is relevant to point out that in the case of the heat semigroup $(P_t)_{t \geq 0}$ on the Euclidean spaces and the Ornstein–Uhlenbeck semigroup $(Q_t)_{t \geq 0}$ on the Gaussian space we have an exact commutation, which follows immediately from the explicit formulas of such semigroups. That is, for smooth functions f of the respective Dirichlet domains, $\nabla P_t f = P_t \nabla f$ and $\nabla Q_t f = e^{-t} Q_t \nabla f$.

3.3.1 Functional inequalities

Using the above lemma, we reach the following propositions.

Proposition 3.3.2. *Let (E, μ, Γ) be a probability space satisfying $CD(\kappa, \infty)$. Then, under $CD(\kappa, \infty)$,*

$$C(\kappa, t) \Gamma(P_t f) \leq P_t(f^2) - (P_t f)^2 \leq D(\kappa, t) P_t(\Gamma(f)),$$

where $C(\kappa, t) = \int_0^t e^{2\kappa s} ds$ and $D(\kappa, t) = \int_0^t e^{-2\kappa u} du$. In particular, if $\kappa > 0$, (E, μ, Γ) satisfies $SG(\kappa)$.

Proposition 3.3.3. *Let (E, μ, Γ) be a probability space satisfying $CD(\kappa, \infty)$. Then, under $CD(\kappa, \infty)$,*

$$C(\kappa, t) \frac{\Gamma(P_t f)}{P_t f} \leq P_t(f \log f) - P_t f \log P_t f \leq D(\kappa, t) P_t \left(\frac{\Gamma(f)}{f} \right),$$

where again $C(\kappa, t) = \int_0^t e^{2\kappa s} ds$ and $D(\kappa, t) = \int_0^t e^{-2\kappa s} ds$. In particular, if $\kappa > 0$, (E, μ, Γ) satisfies $LS(\kappa)$.

Let us discuss the reverse form of this inequalities. The reverse Poincaré inequality implies that each bounded (by one) function is $1/\sqrt{C(\kappa, t)}$ -Lipschitz in the sense that $\Gamma(P_t f) \leq 1/C(\kappa, t)$. Indeed it implies the following lemma (see [Le1])

Lemma 3.3.4. *Let (E, μ) satisfying $CD(0, \infty)$. Then*

$$\forall f \in L^1(E), \|f - P_t f\|_1 \leq \sqrt{t} \|\sqrt{\Gamma(f)}\|_1. \quad (3.4)$$

Turning to the reverse Sobolev Logarithmic inequality, it implies that whenever $0 \leq f \leq 1$,

$$C(\kappa, t) \Gamma(\log P_t f) \leq -\log(P_t f)$$

so that $\phi = (-\log P_t f)^{1/2}$ is $\frac{1}{\sqrt{2C(\kappa, t)}}$ -Lipschitz in the sense that $\Gamma(\phi) \leq \frac{1}{2C(\kappa, t)}$.

3.3.2 Bakry–Ledoux comparison theorem

As discussed in Section 3.2, given a Markov triple (E, μ, Γ) with the condition $CD(1, \infty)$, Bakry and Ledoux gave a semigroup proof of Bobkov’s inequality. While some of the computations arising are somewhat tedious, the following proposition is a consequence of [B-L1], which implies the Bobkov inequality.

Proposition 3.3.5. *Let*

$$\psi : s \in [0, \infty) \mapsto \int_E \sqrt{\mathcal{G}_\gamma^2(P_s f) + \Gamma P_s f} d\mu,$$

then

$$-\psi'(s) \geq \int_E \frac{\mathcal{G}_\gamma(P_s f)(\Gamma_2 - \Gamma)(\Phi^{-1} \circ P_s f)}{(1 + \Gamma(\Phi^{-1} \circ P_s f))^{3/2}} d\mu.$$

Of course, since the derivative is non positive, ψ is decreasing along the semigroup which implies the Bobkov’s inequality, and so the isoperimetric conclusion.

3.4 Stein’s lemma/Second order Poincaré inequality.

The aim of this section is to put forward a rigidity phenomenon that occurs when there exists a non constant function achieving equality in the above geometric and functional inequalities. A common factor that appears in the proofs is the non negative quantity $\Gamma_2 - \kappa\Gamma$. In order to have equality, it is necessary that this quantity is equal to 0.

In addition, we derive a second order Poincaré type inequality for the spheres and a subclasses of log-concave measures.

3.4.1 Stein’s lemma

Without loss of generality, we can assume that in any of the above inequalities, $\int_E f d\mu = 0$. Let us take a (smooth) function achieving equality in spectral gap inequality, Sobolev logarithmic or Bobkov inequality. Then, there is equality in the commutation (3.3), which implies the equality $\Gamma_2 = \Gamma$. More precisely, $\Gamma_2(f) = \Gamma(f)$ for the spectral gap inequality, $\Gamma_2(\log f) = \Gamma(\log f)$ for the Sobolev Logarithmic inequality and $\Gamma_2(\Phi^{-1} \circ f) = \Gamma(\Phi^{-1} \circ f)$ for the Bobkov’s inequality. Besides, we have the following Stein’s lemma.

Lemma 3.4.1. *Assume that (Ω, Γ, μ) satisfies $CD(\kappa, \infty)$ and that there exists f non constant such that $\Gamma_2(f) = \kappa\Gamma(f)$. Then $Lf = -\kappa f$. In particular the law of f is Gaussian.*

Proof. Without loss of generality, we can make the assumption that $\int_\Omega f d\mu = 0$. Then by Schwarz inequality and by the spectral gap inequality,

$$\kappa \int_\Omega \Gamma f d\mu = \kappa \int_\Omega f(-Lf) d\mu \leq \kappa \left(\int_\Omega f^2 d\mu \int_\Omega (Lf)^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \left(\kappa \int_\Omega \Gamma(f) d\mu \int_\Omega (Lf)^2 d\mu \right)^{1/2},$$

so that

$$\kappa \int_\Omega \Gamma f d\mu \leq \int_\Omega (Lf)^2 d\mu = \int_\Omega \Gamma_2(f) d\mu.$$

Since by hypothesis $\Gamma_2(f) = \kappa\Gamma(f)$, there is equality everywhere. Then, there exists a negative real number k such that $Lf = kf$ and necessary $k = -\kappa$.

For the next statement we refer to [Le5].

□

Let (E, μ, Γ) be a $CD(\kappa, n)$ space, with $n < \infty$. It is important to point out that since the first eigenvalue of L is given by $\frac{n\kappa}{n-1}$ there is no function achieving $\Gamma_2(f) = \kappa\Gamma(f)$. In fact this property is true only for “real” $CD(\kappa, \infty)$ spaces, that is not satisfying $CD(\kappa, n)$ for any finite n .

When $(M, g, e^{-\psi} d\text{vol})$ is a weighted Riemannian manifold, as a consequence of the Bochner’s formula,

$$\Gamma_2(f) = \Gamma(f) \implies \text{Ric}_g(\nabla f, \nabla f) + (\nabla^2 \psi - \kappa \text{Id})(\nabla f, \nabla f) + \|\nabla^2 f\|_{\text{HS}}^2 = 0,$$

and the conclusion of Stein’s lemma reads

$$\Delta_g f - \nabla \psi \cdot \nabla f = -\kappa f.$$

When the manifold is $\mathbb{R}^n$, it easily implies that there is a Gaussian marginal and f is an eigenvector of L is the Gaussian direction.

More generally, the first equality implies that $\nabla^2 f = 0$. Taking the trace yields $\Delta_g f = 0$. Besides, ∇f is constant, say a , and f is of the form $f(x) = a \cdot x$. This implies $\nabla \psi(x) \cdot a = a \cdot x$. This equation implies $(\nabla^2 \psi - \kappa \text{Id})(\nabla f, \nabla f) = 0$. Therefore, in the direction a of the tangent space, the Ricci curvature is equal to 0. We believe that this fact implies that the manifold is a Cartesian product with a one dimensional Gaussian space.

Using the needle decomposition of Klartag [Kla], the last assertion implies anyway (see [C-M1]) the following theorem.

Theorem 3.4.2. *Let $(M, g, e^{-\psi} d\text{vol})$ as above. If there exist a non constant extremizer f in one of the inequality of Section 3.3, then*

$$(M, g, e^{-\psi} d\text{vol}) = (\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma_\kappa) \times (M', g', e^{-\psi'} d\text{vol}),$$

and f , $\log f$ or $\Phi^{-1}(f)$ is an eigenfunction of the Ornstein-Uhlenbeck semigroup associated to the eigenvalue κ , that is a linear function.

In particular, the Gaussian space is the only weighted manifold for which there is non trivial extremizers. The linear functions are the only non constant functions achieving equality in the spectral gap inequality and the exponential functions are the only non constant functions achieving equality in Sobolev logarithmic inequality.

For the isoperimetric inequality, we are interested in finding extremals sets. Actually, the fact that half spaces are the only isoperimetric minimizers is a consequence of the last assertion of the proposition. This characterisation is due to Carlen and Kerce and will be recall in the next section. The next subsection is devoted to establish a “second order Poincaré” inequality, which can be seen as a quantitative form of the Stein’s lemma.

3.4.2 Second order Poincaré type inequality

With little additional effort, we can give a lower bound on $\int_E (\Gamma_2 f - \Gamma f) d\mu$ in term of the L^2 distance of the operator $L + \text{Id}$. Indeed, let (E, μ, Γ) be a $CD(1, \infty)$ space. Fix a function f on the Dirichlet domain. Therefore, by the condition $\Gamma_2 \geq \Gamma$ and the spectral gap inequality, we get

$$\int_E (Lf)^2 d\mu = \int_E \Gamma_2 f d\mu \geq \int_E \Gamma f d\mu \geq \int_E f^2 d\mu.$$

Thus

$$\begin{aligned} \int_E (\Gamma_2 f - \Gamma f) d\mu &= \int_E (Lf)^2 d\mu - \int_E f(-Lf) d\mu \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\int_E (Lf)^2 d\mu - 2 \int_E f(-Lf) + \int_E f^2 d\mu \right) \\ &= \frac{1}{2} \|f + Lf\|_{L^2(\mu)}^2. \end{aligned}$$

This inequality is of interest in view of studying robustness of geometric or functional inequalities.

As an example, let (E, μ, Γ) be the Gaussian space. Then, the eigenvectors of the operator $-L$ are given by the Hermite polynomials h_α associated to the eigenvalues $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. If $f_k = \sum_{\alpha, |\alpha|=k} \langle f, h_\alpha \rangle h_\alpha$ designs the chaos of order k , $k \in \mathbb{N}$, we have that

$$\|f + Lf\|_{L^2(\mu)}^2 = \sum_{k \geq 2} (k-1)^2 f_k^2 \geq \sum_{k \geq 2} f_k^2 = \|f - \Pi_1 f\|_2^2,$$

with Π_1 being the projection on linear functions. Since in the Gaussian space, $\Gamma_2 - \Gamma$ is simply the Hilbert-Schmidt norm of the Hessian, this implies in particular a second order Poincaré inequality. This inequality appears in a sharp form in [M-N1] (i.e. without the factor 2) and is used by the authors to prove robust dimension free Gaussian isoperimetry. As the quantity $\Gamma_2 - \Gamma$ arises in the above geometric and functional inequalities, it will be useful to generalize this inequality to others spaces.

Recent results ([CE], [Mil2]) allow us to extend this second order Poincaré inequality for more general log-concave measures with Hessian bounded from below and above i.e. $1 \leq \nabla^2 V \leq K$. Indeed following E. Milman's result, the spectrum $(\lambda_k)_{k \geq 0}$ of the operator $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$ satisfies $\lambda_k \geq k$ for all $k \in \mathbb{N}$. As a result, $(\lambda_k - 1)^2 \geq \frac{1}{2} \lambda_k$ for all $k \geq 2$ and so we have

$$\|f + Lf\|_2^2 = \sum_{k \geq 2} (\lambda_k - 1)^2 f_k^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{k \geq 2} \lambda_k f_k^2 = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu - \text{Var}_\mu(f) \right).$$

The right hand-side is simply the spectral gap deficit, say δ_{SG} . As a consequence of a more general result concerning variance Brascamp–Lieb inequality of Cordero-Erausquin [CE], there exists $C = C(K) > 0$ $v_0 \in \mathbb{R}^n$ and $t_0 \in \mathbb{R}$ such that $\delta_{SG} \geq C \|f - \nabla V \cdot v_0 + t_0\|_2^2$ and so

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\|\text{Hess} f\|_{HS}^2 + (\nabla^2 V - \text{Id})(\nabla f, \nabla f)) e^{-V(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma_2 f - \Gamma f) d\mu \geq C \|f - \nabla V \cdot v_0 + t_0\|_2^2.$$

Here $t_0 = -\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = -\mathbb{E}f$ and $v_0 = \int_{\mathbb{R}^n} x(f(x) - \mathbb{E}f) d\mu(x)$. This can be seen as a generalized second order Poincaré inequality.

Another interesting example is given by the spheres $(\mathbb{S}_1^n, g_1)$ satisfying the $CD(1, n)$ condition (that is of radius $\sqrt{n-1}$ with this normalization) with the associated Laplace–Beltrami operator Δ . The eigenvalues of $-\Delta$ are given by $\lambda_k = k(n+k-1)/(n-1)$ and it is clear that whenever $k \geq 2$, $(\lambda_k - 1)^2 \geq 1$. Thus

$$\int_{\mathbb{S}_1^n} (\Gamma_2 f - \Gamma f) d\mu = \int_{\mathbb{S}_1^n} \|\nabla^2 f\|_{HS}^2 d\mu \geq \frac{1}{2} \|f + \Delta f\|_2^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{k \geq 2} f_k^2.$$

Besides, it is well known that the corresponding eigenvectors $(Z_k)_{|k| \geq 1}$ are given by the spherical harmonics (see e.g. [M-W]). The eigenvectors associated to λ_1 are simply given by the coordinates functions. As a consequence, similarly as in the Gaussian space, the right hand side corresponds to $\|f - \Pi_1 f\|_2^2$ where $\Pi_1 f$ is the projection of f on linear functions. For similar results in that direction, we refer the reader to [Mec].

3.5 An isoperimetric rigidity statement

We now turn to the isoperimetric rigidity statement. The naive approach is to take $f = \mathbf{1}_A$ in Bobkov inequality as $P_t \mathbf{1}_A$ is a smooth function whenever $t > 0$. Intuitively, $\lim_{t \rightarrow 0} \int_M |\nabla P_t \mathbf{1}_A| d\mu$ is a good candidate for the boundary measure of A . However we have defined the isoperimetric problem relatively to the Minkowski content $\mu^+(A) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu(A^\varepsilon) - \mu(A)}{\varepsilon}$. In [C-K], the isoperimetric problem is given with respect to another definition of boundary, the weighted relative perimeter,

that will be recalled below. Still, it is known for a while that in Gaussian space the isoperimetric problem can be taken with respect to any kind of definition of perimeters. The remark in [C-K] is that our naive definition of boundary using the semigroup agrees with the weighted relative perimeter. Actually, as we shall show, this fact is more general.

Let $(M, g, d\text{vol})$ be a Riemannian manifold. We denote by $|Du|$ the variation, in the sense of De Giorgi [DG], of $u \in L^1(M)$ defined by

$$|Du|(M) = \sup \left\{ \int_M u \operatorname{div} \varphi \, d\text{vol}, \varphi \in C_c^1(M, \mathbb{R}) \text{ \& } \|\varphi\|_\infty \leq 1. \right\}$$

When u is the indicator function of a set A , $|Du|$ is called perimeter of A . It has been established in [Car-M] that the variation of u is linked with the standard heat kernel $(P_t)_{t \geq 0} = (e^{t\Delta})_{t \geq 0}$ in the following sense.

Proposition 3.5.1. *For all $u \in L^1(M)$,*

$$|Du| = \lim_{t \rightarrow 0} \int_M |\nabla P_t u| \, d\text{vol}.$$

When (M, g, μ) is a weighted Riemannian manifold, one naturally extends the definition of De Giorgi and define the weighted-perimeter as follows.

Definition 3.5.2. *Let $(M, g, d\mu = e^{-\psi} d\text{vol})$ a weighted Riemannian manifold with $(P_t)_{t \geq 0}$ its relative semigroup. Then we define the relative perimeter of $A \subset M$ by*

$$\operatorname{Per}_\psi(A) = \sup \left\{ \int_A (\operatorname{div} \varphi - \nabla \psi \cdot \varphi) \, d\mu, \varphi \in C_c^1(M, \mathbb{R}) \text{ \& } \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

The proof of [Car-M] can be easily adapted as below to reach the following conclusion. Actually, in the Gaussian space, a similar proof appears in [C-K].

Proposition 3.5.3. *For all $A \subset M$,*

$$\operatorname{Per}_\psi(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_M |\nabla P_t \mathbf{1}_A| \, d\mu. \quad (3.5)$$

Proof. First, as shown in [Car-M], one have

$$\operatorname{Per}_\psi(A) = \sup \left\{ \int_A (\operatorname{div} \varphi - \nabla \psi \cdot \varphi) \, d\mu, \varphi \in C^1(M, \mathbb{R}) \text{ \& } \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Then one have, for all $\varphi \in C^1(M, \mathbb{R})$ with $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, by integration by parts,

$$\begin{aligned} \int_A (\operatorname{div} \varphi - \nabla \psi \cdot \varphi) \, d\mu &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M P_t \mathbf{1}_A (\operatorname{div} \varphi - \nabla \psi \cdot \varphi) \, d\mu \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \langle \nabla P_t \mathbf{1}_A, \varphi \rangle \, d\mu \leq \lim_{t \rightarrow 0} \int_M |\nabla P_t \mathbf{1}_A| \, d\mu. \end{aligned}$$

Conversely, for all $\varphi \in C^1(M, \mathbb{R})$ with $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, by integrations by parts, and using the fact that $(P_t)_{t \geq 0}$ is self adjoint,

$$\begin{aligned} \int_M \langle \nabla P_t \mathbf{1}_A, \varphi \rangle \, d\mu &= \int_A P_t (\operatorname{div} \varphi - \nabla \psi \cdot \varphi) \, d\mu \\ &= \int_A (\operatorname{div} P_t(\varphi) - \nabla \psi \cdot P_t(\varphi)) \, d\mu \leq \operatorname{Per}_\psi(A), \end{aligned}$$

the last inequality following from the fact that $\|P_t \varphi\|_\infty \leq 1$. Since

$$\int_M |\nabla P_t \mathbf{1}_A| d\mu = \sup_{\varphi, \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1} \int_M \langle \nabla P_t \mathbf{1}_A, \varphi \rangle d\mu = \sup_{\varphi \in C^1(M, \mathbb{R}), \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1} \int_M \langle \nabla P_t \mathbf{1}_A, \varphi \rangle d\mu,$$

it concludes the proof. □

As an immediate consequence, this definition of boundary is the limit in Bobkov semigroup functional, i.e.

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \text{Per}_\psi(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \sqrt{\mathcal{J}_\gamma^2(P_t \mathbf{1}_A) + \frac{1}{\kappa} |\nabla P_t \mathbf{1}_A|^2} d\mu.$$

Now define the isoperimetric problem with respect to this definition of boundary, i.e. define the following isoperimetric profile

$$\tilde{\mathcal{J}}_{(M, g, \mu)}(v) = \inf\{\text{Per}_\psi(A), A \subset M, \mu(A) = v\}.$$

It is known that in general, for any Borel set $A \subset M$, $\mu^+(A) \geq \text{Per}_\psi(A)$ so that this isoperimetric problem is *a priori* weaker than the one we have formulated. However, with respect to this new notion of boundary, for any weighted manifold endowed with probability (finite) measure the infimum is a minimum. This fact is not hard to prove, see [R-R]. Since for each v there exists an extremal set of measure v , say A , by the above fact, $t \mapsto P_t \mathbf{1}_A$ has to be constant along Bobkov functional. This in turns implies rigidity by the preceding section.

It is well known that when the boundary of A is “regular enough” (say with C^2 smooth boundary ∂A), its relative perimeter agrees with its Minkowski content and both are equal to $\int_{\partial A} \psi(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x)$. In [C-K], the authors define indeed the Gaussian isoperimetric problem with $\tilde{\mathcal{J}}_{(\mathbb{R}^n, \gamma_n)}(v)$. In this space, the isoperimetric problems with respect to any kind of boundary agree. This property has been used by Carlen and Kerce, although somewhat hidden in [C-K]. They are able to establish full characterisation of isoperimetric sets, without any smoothness assumptions.

Actually the conclusion remains true in the more general setting of weighted Riemannian manifold. That is, in weighted Riemannian manifold there is a minimizer such that $\text{Per}_\psi(A)$ agrees with the Minkowski content $\mu^+(A)$ and moreover both are equal to $\int_{\partial A} \psi(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x)$. In fact, there exists a minimizer A whose boundary ∂A is the union of a regular part $\partial_r A$ and a closed set of singularity $\partial_s A$, empty is the dimension n is less or equal than 7, and of Hausdorff dimension at most $n - 8$ if $n \geq 8$. This follows from the works on geometric measure theory initiated by Almgren, Morgan and others (see [Mil1], section 2.2, for a comprehensive discussion on this topic). We refer to [Mil1] for a complete bibliography. As a result, in this setting we have that $\tilde{\mathcal{J}}_{(M, g, \mu)} = \mathcal{J}_{(M, g, \mu)}$.

The above discussion implies the following fact. Let $(M, g, e^{-\psi} d\text{vol})$ a weighted Riemannian manifold of $CD(\kappa, \infty)$ class, that is $\text{Ric}_g + \nabla^2 \psi \geq \kappa$. Assume that there is equality in one point $v \in (0, 1)$ in Bakry–Ledoux comparison theorem. Then there is a set $A \subset M$ of measure v achieving equality in Bobkov inequality. The previous sections imply therefore a splitting theorem. Moreover, in the Gaussian direction, $\Phi^{-1} \circ Q_t \mathbf{1}_A$ is a linear function. Following [C-K], this implies that A must be an half space. In order to be self contained, let us recall their proof that also appears in [M-N1].

Lemma 3.5.4. *Let A be a subset of $\mathbb{R}^n$ such that $\Phi^{-1} \circ Q_t \mathbf{1}_A$ is a linear function. Then A is an half-space.*

Proof. Let f_t to be $Q_t \mathbf{1}_A$. Then by hypothesis $f_t = \Phi(\langle a_t, x + b_t \rangle)$. Now let $H = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle a, x \rangle + b \geq 0\}$ with $a \in \mathbb{S}^{n-1}$, $b \in \mathbb{R}$ such that $\gamma(H) = \gamma(A)$. Define $k_t = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}}$. Then a fairly easy calculation shows that $Q_t \mathbf{1}_H = \Phi(\langle k_t a, x + b \rangle)$. If $k_t > |a_t|$, we can find a $s > 0$ such that $k_{t+s} = |a_t|$ and then there is an half space H_1 such that $Q_{t+s} \mathbf{1}_{H_1} = Q_t \mathbf{1}_A$ so that $Q_s \mathbf{1}_{H_1} = \mathbf{1}_A$. This is impossible since $Q_t f$ is smooth for every $t > 0$. Therefore $k_t \leq |a_t|$ and for the same smoothness assumptions necessary $k_t = |a_t|$. Then $A = H$ since the semigroup $(Q_t)_{t \geq 0}$ is one-to-one. □

Summarizing, we have the following theorem.

Theorem 3.5.5. *Let (M, g, μ) a weighted Riemannian manifold of $CD(\kappa, \infty)$ class. If there exists a $v \in (0, 1)$ such that $\mathcal{J}_{(M, \mu)}(v) = \mathcal{J}_{(\mathbb{R}, \gamma_\kappa)}(v)$ then $(M, g, \mu) = (\mathbb{R}, |\cdot|, \gamma_\kappa) \times (M', g', \mu')$. Moreover the isoperimetric minimizers are of the form $(-\infty, \Phi_\kappa^{-1}(v)) \times M'$.*

This theorem is not new : indeed, it has been already proved by Franck Morgan [Mor] using more geometrical arguments. This proof only use semigroup arguments.

3.6 Quantitative estimates in the Bakry–Ledoux comparison theorem.

The main property of the Gaussian isoperimetric profile is this it is dimension free. That is why a robust estimate on the isoperimetric deficit should also be dimension free. The first result in Gaussian space in that respect is the work of Mossel and Neeman, using the Bakry–Ledoux semi group proof [M-N1] of the Bobkov inequality. Later on, Eldan, using stochastic arguments, and the Barchiesi, Brancolini and Julin [B-B-J] have improved the bounds over the deficit up to optimality. The aim of this section is to push Mossel and Neeman’s scheme of proof to obtain dimension free deficit bounds in the Bobkov inequality for more general spaces satisfying the $CD(1, \infty)$ condition. On those examples, cases of near equality have to imply that both near extremal sets are close to half spaces and that the subsequent space is close to the Gaussian space in an appropriate sense. There is some vagueness in this affirmation because it seems that there is no canonical way to define a good notion of closeness with respect to the Gaussian space.

A natural classes of examples are given by log-concave measures $d\mu(x) = e^{-V(x)}dx$ on $\mathbb{R}^n$ with the condition $\nabla^2 V \geq 1$. The deficit for more general symmetric log-concave measures on the real line appears in the work of de Castro [DC]. Dimension free estimates are left open on $\mathbb{R}^n$.

An other interesting instance is given by the n dimensional Euclidean sphere of radius $\sqrt{n-1}$ - denoted by $\mathbb{S}_1^n$ - equipped with the uniform measure is close to the Gaussian space for large n . Indeed, the Poincaré lemma indicates that this space looks like the Gaussian space. Moreover, the isoperimetric sets are spherical caps and therefore of the same shape as the isoperimetric sets for the Gaussian space.

In [Bar2], it is proven by the author that, point-wise, $\mathcal{J}_{\{\mathbb{S}_1^n, g_1, \mu\}}^{\frac{n}{n-1}} \leq \mathcal{J}_\gamma$. Therefore we get the estimates valid for all $v \in (0, 1)$,

$$\mathcal{J}_{\{\mathbb{S}_1^n, g_1, \mu\}}^{\frac{n}{n-1}}(v) \leq \mathcal{J}_\gamma(v) \leq \mathcal{J}_{\{\mathbb{S}_1^n, g_1, \mu\}}(v),$$

and since for all $t \in (0, 1)$, $t - t^{\frac{n}{n-1}} = O(n^{-1})$, it implies that for all $v \in (0, 1)$, $\mathcal{J}_{\{\mathbb{S}_1^n, g_1, \mu\}}(v) - \mathcal{J}_\gamma(v) = O(n^{-1})$. Towards robust isoperimetry, this is a good insight that one can consider it on the spheres $\mathbb{S}_1^n$ for some large n .

It is well known that for small sets, the spherical isoperimetric profile is equivalent to the map $x \mapsto x^{(n-1)/n}$ (up to some constant a_n), whereas the Gaussian isoperimetric function behaves as the map $x \mapsto x\sqrt{-2\log x}$. This implies that, relative to the measure of sets, the Bobkov inequality is a pretty bad approximation for the spherical isoperimetry for small sets. Recall that the optimal Bobkov inequality over $\mathbb{S}_1^n$ is

$$\mathcal{J}_\gamma\left(\int_{\mathbb{S}_1^n} f d\mu\right) \leq \int_{\mathbb{S}_1^n} \sqrt{\mathcal{J}_\gamma^2(f) + \frac{n-1}{c_n^2} |\nabla f|^2} d\mu,$$

where $c_n = \sqrt{2\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}}$. Using Stirling formula, it is easily seen that $\frac{n-1}{c_n^2} = 1 - (2n)^{-1} + o(n^{-1})$. Therefore, the preceding estimate $\mathcal{J}_{\{\mathbb{S}_1^n, g_1, \mu\}}(v) - \mathcal{J}_\gamma(v) = O(n^{-1})$ is sharp.

In what follow, let (E, μ, Γ) be a $CD(1, \infty)$ space. Either $(\mathbb{R}^n, \mu)$ which implies that μ is a strictly log-concave measure with a smooth density or $(\mathbb{S}_1^n, g_1, \mu)$ the sphere of radius $\sqrt{n-1}$. We denote by $(P_t)_{t \geq 0}$ the underlying semigroup, and p_t the corresponding heat kernel.

Hypothesis 3.6.1. Assume that there exists some positive constants C, η such that, for all $t \in (0, 1)$,

$$\|\text{Hess}(\Phi^{-1}(P_t f))\|_{HS}^2 \leq \frac{C \max\{|\log(P_t f)|, |\log(1 - P_t f)|\}}{t^\eta}. \quad (\mathcal{H})$$

This hypothesis is satisfied for the Gaussian space with exponent $\eta = 1$. This inequality may appear weird, but this is a kind of reverse Sobolev logarithmic inequality of second order. On the Gaussian space it is satisfied with exponent $\eta = 1$. Two different proofs have been given. Either directly by using the expression of the Ornstein-Uhlenbeck kernel (see [M-N1]), either by pushing to the second order the arguments of the proof that amounts to the reverse Sobolev logarithmic inequality (see [Nee]). However in the first case computations are specific to the Ornstein-Uhlenbeck semigroup. In the second case, one needs to use an exact commutation between P_t and ∇ , which is no longer true for any other $CD(1, \infty)$ space than the Gaussian space.

We now state the main result of this section. We turn to log-concave measures. Then $(\mathcal{H})$ implies, under the additional restriction that the Hessian of the potential V is bounded, i.e. $1 \leq \nabla^2 V \leq K$, the following theorem. We do not know for which log-concave measures $(\mathcal{H})$ holds, neither if it is valid on the Euclidean spheres $\mathbb{S}_1^n$.

Theorem 3.6.2. Let $(\mathbb{S}_1^n, \mu)$ with μ the uniform probability measure. If $(\mathcal{H})$ holds, for each measurable subset A of $\mathbb{S}_1^n$ such that

$$\mu^+(A) = \mathcal{J}_\gamma(\mu(A)) + \delta,$$

there exists a spherical cap H with $\mu(H) = \mu(A)$ and a positive constant $c \in (1/3, 1/2)$ such that

$$\mu(A \Delta H) \leq O(|\log \delta|^{-c}).$$

By the preceding discussion, this implies the following corollary for the deficit on the isoperimetric problem over the spheres $(\mathbb{S}_1^n, \mu)$.

Corollary 3.6.3. Let $(\mathbb{S}_1^n, \mu)$ with μ the uniform probability measure. If $(\mathcal{H})$ holds, then for all measurable subset A of $\mathbb{S}_1^n$ such that

$$\mu^+(A) - \mathcal{J}_{(\mathbb{S}_1^n, g_1, \mu)}(\mu(A)) = \delta,$$

there exists a spherical cap H with $\mu(H) = \mu(A)$ and a positive constant $c \in (1/3, 1/2)$ such that

$$\mu(A \Delta H) \leq O_{\mu(A)}(|\log \delta_n|^{-c}),$$

where $\delta_n = \max(\delta, n^{-1})$.

Turning to log-concave measures, the analogous statement is the following.

Theorem 3.6.4. Let $(\mathbb{R}^n, d\mu(x) = e^{-V(x)} dx)$ with $1 \leq \nabla^2 V \leq K$ and assume that $(\mathcal{H})$ holds. Let A be a set such that

$$\mu^+(A) \leq \mathcal{J}_\gamma(\mu(A)) + \delta.$$

Then there exists a set B with $\mu(B) = \mu(A)$ of the form $B = \{x \in \mathbb{R}^n, \nabla V(x) \cdot v_0 + x_0 \geq 0\}$, with some $v_0 \in \mathbb{R}^n$ and $x_0 \in \mathbb{R}$, and a positive constant c such that

$$\mu(A \Delta B) \leq O(|\log \delta|^{-c}).$$

We now turn to the proof of our main result. The scheme of proof is directly inspired from the work of [M-N1]. We will use the general notation (E, μ, Γ) , keeping in mind that most of the arguments are valid for general spaces.

Proof of Theorem 3.6.2. The starting point is the semigroup proof of [B-L1] of the functional version of the Bobkov inequality. We recall that if f is the characteristic function of a measurable set A , then $\delta = \Psi(0) - \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = \int_0^\infty -\Psi'(t) dt$, where $\Psi : t \in [0, \infty) \mapsto \int_E \sqrt{\mathcal{J}_\gamma^2(P_t f) + \Gamma P_t f} d\mu$. Moreover, by the remark of Section 3.3, for all $t > 0$,

$$-\Psi'(t) \geq \int_E \frac{\mathcal{J}_\gamma(P_t f)(\Gamma_2 - \Gamma)(\Phi^{-1} \circ P_t f)}{(1 + \Gamma(\Phi^{-1} \circ P_t f))^{3/2}} d\mu,$$

so that

$$\delta = \mu^+(A) - \mathcal{J}_\gamma(\mu(A)) \geq \int_0^\infty \int_E \frac{\mathcal{J}_\gamma(P_t \mathbf{1}_A)(\Gamma_2 - \Gamma)(\Phi^{-1} \circ P_t \mathbf{1}_A)}{(1 + \Gamma(\Phi^{-1} \circ P_t \mathbf{1}_A))^{3/2}} d\mu dt.$$

Take now a general smooth function $f : E \rightarrow [0, 1]$. Recall that, since $(P_t)_{t \geq 0}$ is mass preserving, for all $t \geq 0$, $P_t f$ takes value in $[0, 1]$. As we saw in the preceding sections, when equality holds in the Bobkov inequality, we have that for every $t > 0$, $(\Gamma_2 - \Gamma)(\Phi^{-1} \circ P_t f) = 0$ and therefore $\Phi^{-1}(f)$ is linear. Besides, this implies a Cartesian product structure with a Gaussian space. In spaces we are considering, there is no longer equality, but the set A must look like a half space or a spherical cap when δ is small. In a preceding section, we gave a lower bound of $\int_E (\Gamma_2 - \Gamma)(g) d\mu$ in terms of projection over linear functions in the case of Euclidean spheres $\mathbb{S}_1^n$ or function of the type $x \mapsto \langle a, \nabla V(x) + b \rangle$ for log-concave measures on $\mathbb{R}^n$.

In order to make use of this lower bound, the first task is to remove the quotient in the integrand, which is done due to the following classical lemma.

Lemma 3.6.5. *For all function $f : E \rightarrow [0, 1]$, for all $t > 0$, the following holds*

$$\Gamma(\Phi^{-1} \circ P_t f) \leq \frac{e^{-2t}}{1 - e^{-2t}} = k_t^2.$$

Therefore, this implies $(1 + \Gamma(\Phi^{-1} \circ P_t f))^{-3/2} \geq (1 + k_t^2)^{-3/2}$ and since $(1 + k_t^2)^{-3/2} \sim (2t)^{-3/2}$ as t goes to 0, for all $t_0 > 0$ and for some constant C that can be explicit,

$$\delta \geq \frac{C}{t_0^{-3/2}} \int_{t_0}^{2t_0} \int_E \mathcal{J}_\gamma(P_t f)(\Gamma_2 - \Gamma)(\Phi^{-1} \circ P_t f) d\mu dt.$$

As a consequence, by the mean value theorem, there exists a $t \in (t_0, 2t_0)$ such that

$$\delta \geq C t_0^{5/2} \int_E \mathcal{J}_\gamma(P_t f)(\Gamma_2 - \Gamma)(\Phi^{-1} \circ P_t f) d\mu \geq 2^{-5/2} C t_0^{5/2} \int_E \mathcal{J}_\gamma(P_t f)(\Gamma_2 - \Gamma)(\Phi^{-1} \circ P_t f) d\mu. \quad (3.6)$$

All the remaining work is devoted to take account of the extra term $\mathcal{J}_\gamma(P_t f)$ (which is small whenever $P_t f$ is close to 0 and 1).

To get rid of this extra term, Mossel and Neeman use the reverse Hölder inequality. After some work, this implies that $\Phi^{-1}(P_t f)$ is close to a linear function for some $t \in (c, c + 1)$ when $c > 0$ is universal. In order to conclude, the authors need a “time reversal” argument. For that they use spectral estimates that seem to be rather specific to the Gaussian space - even though it seems that it should work on the spheres. Our approach avoids this use by choosing an appropriate small t . Then the “time reversal” argument follows easily. Indeed, since we are close to achieve equality, $\|\sqrt{\Gamma(f)}\|_1$ is finite and so the reverse Poincaré inequality ensures that f and $P_t f$ are close in L^1 distance. Besides, Φ is a Lipschitz map, so that $\Phi^{-1}(P_t f)$ and $\Phi^{-1}(f)$ are as least that close. More precisely, our proof continues as follows.

Since $x \mapsto \mathcal{J}_\gamma(x)$ is increasing on $(0, 1/2)$ and symmetric with respect to $1/2$ on $(0, 1)$, for $\varepsilon < 1/2$ we get that

$$\begin{aligned} \int_E \mathcal{J}_\gamma(P_t f)(\Gamma_2 - \Gamma)(\Phi^{-1} \circ P_t f) d\mu &\geq \int_{\{\varepsilon \leq P_t f \leq 1-\varepsilon\}} \mathcal{J}_\gamma(P_t f)(\Gamma_2 - \Gamma)(\Phi^{-1} \circ P_t f) d\mu \\ &\geq \mathcal{J}_\gamma(\varepsilon) \int_{\{\varepsilon \leq P_t f \leq 1-\varepsilon\}} (\Gamma_2 - \Gamma)(\Phi^{-1} \circ P_t f) d\mu. \end{aligned}$$

Besides, when x goes to 0, $\mathcal{J}_\gamma(x) \sim x\sqrt{-2\log x}$ so that $x \mapsto \frac{\mathcal{J}_\gamma(x)}{x\sqrt{|\log x|}}$ is bounded from below by a positive constant C . Therefore,

$$\int_E \mathcal{J}_\gamma(P_t f)(\Gamma_2 - \Gamma)(\Phi^{-1} \circ P_t f) d\mu \geq C\varepsilon\sqrt{|\log \varepsilon|} \int_{\{\varepsilon \leq P_t f \leq 1-\varepsilon\}} (\Gamma_2 - \Gamma)(\Phi^{-1} \circ P_t f) d\mu.$$

Recalling (3.6), we deduce that

$$\delta \geq Ct^{5/2}\varepsilon\sqrt{|\log \varepsilon|} \int_{\{\varepsilon \leq P_t f \leq 1-\varepsilon\}} (\Gamma_2 - \Gamma)(\Phi^{-1} \circ P_t f) d\mu. \quad (3.7)$$

Moreover, denoting $h_t = \Phi^{-1} \circ P_t f$,

$$\int_{\{\varepsilon \leq P_t f \leq 1-\varepsilon\}} (\Gamma_2 - \Gamma)(h_t) d\mu = \int_E (\Gamma_2 - \Gamma)(h_t) d\mu - \int_{\{P_t f \leq \varepsilon\}} (\Gamma_2 - \Gamma)(h_t) d\mu - \int_{\{P_t f \geq 1-\varepsilon\}} (\Gamma_2 - \Gamma)(h_t) d\mu. \quad (3.8)$$

The first term is precisely what we are looking for, as we proved a lower bound of it in previous section. We therefore need to show that, for an appropriate choice of ε , we do not lose too much while subtracting the integral on the sets $\{P_t f \leq \varepsilon\}$ and $\{P_t f \geq 1-\varepsilon\}$. For that, we need the point wise upper bound on $(\Gamma_2 - \Gamma)(h_t)$, which is the reason we made the hypothesis $(\mathcal{H})$. Recall that, point-wise,

$$\forall t \leq 1, (\Gamma_2 - \Gamma)(h_t) \leq \frac{C \max\{|\log(P_t f)|, |\log(1 - P_t f)|\}}{t^\eta},$$

so that

$$\int_{\{P_t f \leq \varepsilon\}} (\Gamma_2 - \Gamma)(h_t) d\mu \leq \frac{C}{t^\eta} \int_{\{P_t f \leq \varepsilon\}} |\log(P_t f)| d\mu$$

and

$$\int_{\{P_t f \geq 1-\varepsilon\}} (\Gamma_2 - \Gamma)(h_t) d\mu \leq \frac{C}{t^\eta} \int_{\{P_t f \geq 1-\varepsilon\}} |\log(1 - P_t f)| d\mu.$$

By symmetry, both integrals are bounded in the same manner. We deal with the first one. Denote $g = \sqrt{|\log P_t f|}$. Recall that as a consequence of the reverse Log-Sobolev inequality g is $1/(2\sqrt{t})$ -Lipschitz and so by classical concentration for Lipschitz maps, $\mu(\{g \geq u\}) \leq e^{-2tu^2}$. Since

$$\int_{\{P_t f \leq \varepsilon\}} |\log(P_t f)| d\mu = \int_{g \geq \sqrt{|\log \varepsilon|}} g^2 d\mu,$$

by the layer-cake representation,

$$\int_{g \geq \sqrt{|\log \varepsilon|}} g^2 d\mu = 2 \int_{\sqrt{|\log \varepsilon|}}^{\infty} u \mu(\{g \geq u\}) du \leq 2 \int_{\sqrt{|\log \varepsilon|}}^{\infty} u e^{-2tu^2} du = \frac{1}{2t} e^{-2t|\log \varepsilon|}.$$

Thus

$$\int_{\{P_t f \leq \varepsilon\}} (\Gamma_2 - \Gamma)(h_t) d\mu + \int_{\{P_t f \geq 1-\varepsilon\}} (\Gamma_2 - \Gamma)(h_t) d\mu \leq \frac{C}{t^{\eta+1}} e^{-2t|\log \varepsilon|}. \quad (3.9)$$

Therefore, using (3.7), (3.8), and (3.9), we get

$$\delta \geq Ct^{5/2}\varepsilon\sqrt{|\log \varepsilon|} \left(\int_E (\Gamma_2 - \Gamma)(h_t) d\mu - \frac{1}{t^{\eta+1}} e^{-2t|\log \varepsilon|} \right),$$

so that

$$\int_E (\Gamma_2 - \Gamma)(h_t) d\mu \leq C \left(\frac{\delta}{t^{5/2}\varepsilon\sqrt{|\log \varepsilon|}} + \frac{1}{t^{\eta+1}} e^{-2t|\log \varepsilon|} \right).$$

Besides, recall that the Poincaré inequality of second order for $(E, \mu, \Gamma) = (\mathbb{S}_1^n, \mu)$ implies that

$$\|h_t - \Pi_1 h_t\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{S}_1^n} (\Gamma_2 - \Gamma)(h_t) d\mu,$$

with Π_1 the projection over linear functions. The preceding implies then

$$\|h_t - \Pi_1 h_t\|_2^2 \leq C \left(\frac{\delta}{t^{5/2} \varepsilon \sqrt{|\log \varepsilon|}} + \frac{1}{t^{\eta+1}} e^{-2t|\log(\varepsilon)|} \right). \quad (3.10)$$

Now, we recall that as a consequence of the reverse Poincaré inequality (3.4) holds, i.e.

$$\|f - P_t f\|_1 \leq \sqrt{t} \|\sqrt{\Gamma(f)}\|_1.$$

Since we are close to a case of equality, we can make the assumption that $\|\sqrt{\Gamma(f)}\|_1 \leq \mathcal{J}_\gamma(\mathbb{E}f) + \delta \leq 2$ otherwise δ is large and the announced claim is still true. This implies that $\|f - P_t f\|_1 \leq 2\sqrt{t}$ and since Φ is 1-Lipschitz, for every norm $\|\cdot\|$, $\|P_t f - \Phi(\Pi_1 h_t)\| \leq \|h_t - \Pi_1 h_t\|$. Using the triangular inequality,

$$\|f - \Phi(\Pi_1 h_t)\|_{L^1(\mathbb{S}^n)} \leq 2\sqrt{t} + \|P_t f - \Phi(\Pi_1 h_t)\|_1. \quad (3.11)$$

Besides,

$$\|P_t f - \Phi(\Pi_1 h_t)\|_1 \leq \|P_t f - \Phi(\Pi_1 h_t)\|_2 \leq \|h_t - \Pi_1 h_t\|_2. \quad (3.12)$$

Using (3.10), (3.11) and (3.12), we obtain

$$\|f - \Phi(\Pi_1 h_t)\|_{L^1(\mathbb{S}^n)} \leq 2\sqrt{t} + C \left(\frac{\delta}{t^{5/2} \varepsilon \sqrt{|\log \varepsilon|}} + \frac{1}{t^{\eta+1}} e^{-2t|\log(\varepsilon)|} \right)^{1/2}.$$

Recall that $\varepsilon \in (0, 1/2)$ and $t > 0$ are arbitrary. It remains to optimize over t and ε . We can take $t = |\log(\delta)|^{-2c}$, for some $c \in (0, 1/2)$, and $\varepsilon = \delta^{1/2}$. The second term between the brackets decays in a polynomial rate of δ so that it yields

$$\|f - \Phi(\Pi_1 f_\delta)\|_{L^1(\mathbb{S}^n)} \leq O(|\log \delta|^{-c}), \quad (3.13)$$

where we have denoted $f_\delta = h_t$ for this choice of t . To recover the statement of Theorem 3.6.2, we now need to go back to sets. The following arguments are directly taken from [M-N1].

First, we apply this result for some smooth approximation f of $\mathbf{1}_A$. Using strong continuity of $(P_t)_{t \geq 0}$, we can find a small $t > 0$ such that for every $g \in L^1(E)$,

$$\|\mathbf{1}_A - g\|_1 \leq \|P_t \mathbf{1}_A - g\|_1 + \delta.$$

Since $P_t \mathbf{1}_A$ is smooth for every $t \geq 0$, we can apply (3.13) for $f = P_t \mathbf{1}_A$ and $g = \Phi(\Pi_1 f_\delta)$ so that

$$\|\mathbf{1}_A - \Phi(\Pi_1 f_\delta)\|_1 \leq O(|\log \delta|^{-c}).$$

Then we have the following lemma from [M-N1].

Lemma 3.6.6. *Let A be measurable set and $g = \Phi(\Pi_1 g_1)$ for some function g_1 . Let $B = \{\Pi_1 g_1 \geq 0\}$. Then*

$$\mu(A \Delta B) = \int_E |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B| d\mu \leq \int_E |\mathbf{1}_A - g| d\mu.$$

The set $\{\Pi_1 g_1 \geq 0\}$ is a spherical cap as $\Pi_1 g_1$ is a linear map. Theorem 3.6.2 is thus established. $\square$

If $(E, \mu, \Gamma) = (\mathbb{R}^n, d\mu)$ with $d\mu(x) = e^{-V(x)} dx$ and $1 \leq \nabla^2 V \leq K$, K independent of n we have seen previously that

$$\int_E (\Gamma_2 - \Gamma)(h_t) d\mu \geq C \|h_t - \nabla V \cdot v_t + a_t\|_2^2.$$

If $(\mathcal{H})$ holds, we can conclude similarly to reach Theorem 3.6.4.

Deuxième partie

Cadre discret : stabilité au bruit et influences.

Chapitre 4

Introduction générale dans le cadre discret

L'analyse booléenne a connu un grand essor durant les 30 dernières années.

Les fonctions booléennes (i.e. à valeurs dans $\{0, 1\}$) sont peut-être les objets les plus basiques en informatique théorique. Au-delà de cette branche, elles interviennent de manière cruciale dans de nombreux autres domaines des mathématiques, en combinatoire, théorie des graphes aléatoires, physique statistique mais aussi en théorie du choix social, théorie des espaces de Banach et géométrie gaussienne via le théorème de la limite centrale. Nous présentons, de manière non exhaustive, quelques domaines dont les problématiques ont des liens avec le cadre de notre travail.

Parmi les domaines étudiés, on peut citer en premier lieu la “théorie du choix social”, une branche issue de l'économie, via l'étude de l'organisation d'un scrutin. L'issue d'une élection à deux candidats, disons 0 et 1 peut être modélisée par une fonction booléenne, dite fonction de choix, qui détermine le vainqueur. Au suffrage universel, la fonction de choix correspond à ce qu'on appelle la fonction Majorité. Lorsque l'issue ne dépend que de la volonté d'une seule personne, la fonction correspondante est celle qui associe une coordonnée. Ces fonctions sont appelées en conséquence fonctions dictateurs. D'autres systèmes de votes, qui respectent un principe moral de neutralité - ceux où aucun votant n'a trop d'influence sur le résultat - sont possibles. Citons l'exemple des majorités récursives qui régit l'élection présidentielle aux États-Unis, ou encore celle de majorités à poids.

Une élection peut également faire intervenir plus de deux candidats. Cette dernière situation a été étudiée dès le XVIII^e siècle par le marquis de Condorcet. Ce dernier énonce un célèbre paradoxe : il est toujours possible au suffrage universel d'obtenir un “issue irrationnelle”, c'est à dire une issue où le premier candidat est préféré au deuxième, qui est préféré au troisième lui-même étant préféré au premier. Au milieu du XX^e siècle, l'économiste Arrow a démontré que seuls le choix d'une seule personne évite la possibilité d'une issue irrationnelle - c'est le théorème d'impossibilité d'Arrow [Arr]. Au début des années 2000, Kalai [Kal] donne une preuve théorique de ce théorème se basant uniquement sur l'analyse de Fourier discrète. Il prouve au passage que la probabilité d'obtenir une issue irrationnelle est minimisée pour le suffrage universel parmi les “bons” systèmes de votes, c'est-à-dire ceux tels que personne n'ait une grande influence sur le résultat.

En second lieu, on peut citer le domaine des graphes aléatoires. Sur de tels graphes, certaines propriétés sont modélisées par des fonctions booléennes. Par exemple, pour prendre un modèle simple, considérons un graphe à n sommets sur lequel chaque arête a une probabilité $p \in (0, 1)$ d'être présente ou non. Alors plusieurs propriétés sur les arêtes peuvent être modélisées par des fonctions du cube discret $\{0, 1\}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ muni de la mesure biaisée ν_p . Par exemple, y-a-t-il une composante connexe dans le graphe ? Est-ce que le graphe contient un k -cycle ? Ces propriétés citées sont monotones par rapport à p . Un fait récurrent est de considérer une suite graphes dont le nombre de sommets tend vers l'infini. Est associée à cette suite de graphes une suite de fonctions booléennes $(f_n)_{n \geq 0}$ définies $\{0, 1\}^{\alpha_n}$ pour α_n tendant vers l'infini. On étudie le comportement asymptotique de certaines de ces

fonctions. Au milieu des années 90, Friedgut et Kalai [F-K] ont étudié les phénomènes de seuil de ces propriétés de graphes monotones pour n . Leurs travaux s'appuient sur des résultats fondateurs sur les fonctions booléennes du cube que nous présenterons.

Enfin, dans un autre domaine, en théorie de la percolation, de nombreuses propriétés sont modélisées par des fonctions booléennes. Sur le réseau $\mathbb{Z}^2$, considérons par exemple le rectangle $[n] \times [n]$. Mettons des arêtes sur le réseau avec probabilité $1/2$. À l'événement qui correspond à une percolation, c'est-à-dire un chemin de gauche à droite (ou de bas en haut) est associé naturellement une fonction booléenne de $\{0, 1\}^{n^2} \rightarrow \{0, 1\}$. L'étude théorique des fonctions booléennes et son application en percolation a été mise en lumière par Benjamini, Kalai et Schramm [B-K-S]. Ces auteurs mettent en lien deux notions centrales de notre thèse, celle d'influence d'une fonction booléenne et celle de sensibilité au bruit.

Une référence introductive, complète et récente sur l'analyse des fonctions booléennes est l'ouvrage de Ryan O'Donnell "Analysis of Boolean functions" [OD]. En ce qui concerne l'utilisation des fonctions booléennes en percolation, nous renvoyons le lecteur aux notes de Garban et Steif [G-S]. Pour ce qui est de l'utilisation des influences, nous renvoyons le lecteur au survey de Kalai et Safra [K-S].

La grande majorité des travaux effectués sur l'analyse des fonctions booléennes s'appuie sur l'analyse de Fourier sur le cube discret, devenue un outil indispensable. L'analyse de Fourier sur le cube commence au début du XXe siècle avec les travaux de Walsh et Paley qui construisent une base ortho-normée sur le cube discret, désormais appelée base de Walsh ou Fourier-Walsh. Le résultat fondateur et sous-jacent à tous les développements récents date cependant du début des années 70. Ce sont les travaux de Bonami [Bon] (publiés en français et semble-t-il passé d'abord inaperçu sur le plan international) puis Beckner [Bec] qui aboutissent au théorème d'hypercontractivité de qui est depuis appelé semi-groupe de Bonami-Beckner, un élément fondamental de l'analyse booléenne. Notons que ce résultat est postérieur au premier théorème d'hypercontractivité du semi-groupe d'Ornstein Uhlenbeck de Nelson [Nel] (cependant incomplet) mais qu'il est plus fort au sens où, par théorème de la limite centrale, il le contient - comme remarqué par Gross.

Il faut cependant attendre la fin des années 80 pour voir ce théorème prouver sa force dans l'étude théorique des fonctions booléennes, avec les travaux de Kahn, Kalai et Linial [K-K-L] puis ceux de Talagrand [Tal1]. Ces travaux ont joué un rôle prépondérant dans l'analyse des phénomènes de seuil étroits dans les graphes aléatoires. Ils jouent également un rôle prépondérant dans un grand nombre de domaines en informatique théorique. Nous convions le lecteur à la discussion introductive de l'article [O-W] pour des références plus précises à ce sujet. L'hypercontractivité, notion rencontrée dans le cadre continu, joue un rôle récurrent dans le domaine de l'analyse des fonctions booléennes et est un élément à la base d'une très grande partie des résultats que nous citerons, y compris les nôtres.

Le but de la section suivante est d'introduire les concepts basiques d'analyse de Fourier discrète sur le cube. Ceci permet alors d'établir le théorème d'hypercontractivité dû à Bonami puis Beckner. Nous discutons ensuite de la généralisation à des espaces discrets plus généraux.

Dans les sections qui suivent, nous définissons les deux notions principales de notre travail, celles d'influences et de stabilité au bruit. Nous faisons un court rappel historique des résultats établis en lien avec ces notions. Nous nous concentrons ensuite sur l'analogue discret du théorème de Borell concernant la stabilité au bruit. Enfin, nous présentons nos travaux sur le critère quantitatif entre stabilité au bruit et influences.

4.1 Analyse de Fourier discrète sur le cube

Cette section présente les éléments basiques de l'analyse de Fourier discrète sur le cube. Le cube discret n dimensionnel est l'espace à deux points tensorisé n fois. Par commodité, il est parfois préférable de le définir comme $\{-1, 1\}^n$ ou comme $\{0, 1\}^n$. Par ce qui concerne l'analyse de Fourier, il

est commun d'utiliser $\{-1, 1\}^n$ comme définition.

4.1.1 Base de Walsh

Soit $(\{-1, 1\}^n, \nu)$ le cube discret muni de la mesure uniforme. Alors $L^2(\{-1, 1\}^n, \nu)$ est un espace euclidien où le produit scalaire est le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\nu)}$.

À la suite des travaux de Walsh, une base orthonormée de cette espace est connue. Il s'agit de $(W_S)_{S \subset [n]}$ où $W_S(x) = \prod_{i \in S} x_i$. En effet, par indépendance des x_i , $1 \leq i \leq n$,

$$\langle W_S, W_T \rangle_{L^2(\{-1, 1\}^n, \nu)} = \mathbb{E}_\nu W_S(x) W_T(x) = \mathbb{E}_\nu \prod_{i \in S \Delta T} x_i = \prod_{i \in S \Delta T} \mathbb{E}_\nu x_i = \delta(T, S).$$

La base $(W_S)_{S \subset [n]}$ est appelée base de Fourier–Walsh. Ainsi, toute fonction $f \in L^2(\nu)$ se décompose en polynômes multilinéaires de manière canonique $f = \sum_{S \subset [n]} \hat{f}(S) W_S$ avec $\hat{f}(S) = \langle f, W_S \rangle_{L^2(\nu)}$.

Cette décomposition a déjà été rencontrée dans l'espace gaussien $(\mathbb{R}^n, \gamma)$. En effet les polynômes d'Hermite $h_S(x) = \prod_{i \in S} h_i(x_i)$ sont également une base orthonormée de $(\mathbb{R}^n, \gamma)$.

4.1.2 Analyse de Fourier

L'analyse de Fourier discrète comporte quelques formules connues, comme celle de Parseval :

$$\mathbb{E}_\nu f(x) g(x) = \sum_{S \subset [n]} \hat{f}(S) \hat{g}(S).$$

Ceci donne en particulier $\mathbb{E}_\nu(f) = \hat{f}(\emptyset)$, $\text{Var}_\nu(f) = \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}(S)^2$.

L'analyse de Fourier discrète s'est avérée d'un usage récurrent pour tous les problèmes que nous citons plus bas.

4.2 Hypercontractivité du semi-groupe de Bonami–Beckner

Dans cette section, nous présentons la preuve historique du théorème d'hypercontractivité de Bonami–Beckner sur le cube discret. Ce théorème nécessite bien sûr de définir au préalable un semi-groupe sur cet espace.

4.2.1 Semi-groupe de Bonami–Beckner

Définissons L “le Laplacien discret” comme $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n D_i$ où D_i est la i -ème dérivée de $f : C_n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $D_i f(x) = f(\tau_i x) - f(x)$ avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $\tau_i x$ obtenu à partir de x en changeant la i -ème coordonnée. On définit la forme de Dirichlet, pour f, g des fonctions définies sur le cube, par

$$\mathcal{E}(f, g) = \int_{\{-1, 1\}^n} f(-Lg) d\nu = \int_{\{-1, 1\}^n} \nabla f \cdot \nabla g d\nu,$$

où $\nabla h = (D_1 h, \dots, D_n h)$. Alors les éléments de la base de Fourier–Walsh sont vecteurs propres de l'opérateur L . En effet,

$$LW_S(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (W_S(x) - W_S(\tau_i x)) = -|S|W_S(x)$$

car $W_S(x) - W_S(\tau_i x) = 21_{i \in S} W_S(x)$. L engendre un semigroupe $(T_t = e^{tL})_{t \geq 0}$, appelé semigroupe de Bonami–Beckner. Ainsi,

$$T_t f = \sum_{S \subset [n]} e^{-t|S|} \hat{f}_S W_S = \sum_{k=0}^n e^{-tk} f^k,$$

où l'on note $f^{=k} = \sum_{S, |S|=k} \hat{f}(S) W_S$ la partie homogène d'ordre k . Ce semigroupe est markovien ($T_t 1 = 1$), symétrique par rapport à ν au sens que pour tout $f, g : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{\{-1, 1\}^n} f T_t g d\nu = \int_{\{-1, 1\}^n} g T_t f d\nu,$$

les deux quantités étant égales à $\sum_{k=0}^n e^{-2tk} \langle f^{=k}, g^{=k} \rangle$.

Le semi-groupe de Bonami Beckner admet, à l'instar du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck, la représentation explicite suivante :

$$T_t f(x) = \int_{\{0, 1\}^n} f(y) k_t(x, y) d\nu(y) = \int_{\{0, 1\}^n} f(y) \prod_{i=1}^n (1 + e^{-t} x_i y_i) d\nu(y).$$

En effet $\prod_{i=1}^n (1 + e^{-t} x_i y_i) = \sum_{S \subset [n]} e^{-t|S|} W_S(x) W_S(y)$, de sorte que

$$\int_{\{0, 1\}^n} f(y) \prod_{i=1}^n (1 + e^{-t} x_i y_i) d\nu(y) = \sum_{S \subset [n]} e^{-t|S|} \langle f, W_S \rangle W_S(x) = T_t f(x).$$

La base de Walsh s'adapte pour le cas où le cube est muni de la mesure biaisée avec un biais $p \in (0, 1)$. Cette fois, on considère le cube discret comme étant $\{0, 1\}^n$, qui est donc muni de $\nu_p = ((1-p)\delta_0 + p\delta_1)^{\otimes n}$. Alors $(\omega_S)_{S \subset [n]}$ où $\omega_S(x) = \prod_{i \in S} \frac{x_i - p}{\sqrt{p(1-p)}}$ est une base orthonormée de $L^2(\{0, 1\}^n, \nu_p)$. On définit le "laplacien" par $L = 2p(1-p) \sum_{i=1}^n D_i$, qui vérifie de même $L\omega_S = -|S|\omega_S$. Ainsi, le semi-groupe engendré par L agit de la même façon que dans le cas uniforme :

$$T_t^p f = \sum_{S \subset [n]} e^{-t|S|} \hat{f}(S) \omega_S.$$

4.2.2 Hypercontractivité

Rappelons que la propriété d'hypercontractivité d'un semi-groupe s'écrit en général $\|P_t f\|_q \leq \|f\|_r$, où $q = f(r, t) \geq r$. Dans le cas gaussien, on rappelle que $q = 1 + (r-1)e^{2t}$ est l'exposant optimal. Par commodité, on considère le cube comme étant $\{-1, 1\}^n$, muni de la mesure uniforme. Sur le cube discret, par tensorisation, cette inégalité est vraie si et seulement si elle est vraie sur l'espace à deux points. En effet, avec des notations probabilistes, si $x = (\tilde{x}, x_n)$, et en supposant l'inégalité vraie sur le cube $n-1$ dimensionnel

$$\|T_t f\|_{L^q(\{-1, 1\}^n)} = (\mathbb{E}_{x_n} \mathbb{E}_{\tilde{x}} (T_t f)^q)^{1/q} \leq (\mathbb{E}_{x_n} (\mathbb{E}_{\tilde{x}} f^r)^{q/r})^{1/q} \leq (\mathbb{E}_{x_n} (\mathbb{E}_{\tilde{x}} f^r))^{1/r} = \|f\|_{L^r(\{-1, 1\}^n)},$$

où la dernière inégalité est vraie en vertu de l'inégalité de Jensen (car $r/q \leq 1$).

Sur l'espace à deux points, l'idée de Bonami et Beckner est la suivante. Par dualité, on peut supposer $1 \leq r \leq q \leq 2$, et par homogénéité on peut considérer $f : \varepsilon \in \{-1, 1\} \mapsto 1 + \varepsilon a$, avec $a \in (0, 1)$. On a alors $T_t f : \varepsilon \in \{-1, 1\} \mapsto 1 + \varepsilon e^{-t} a$. On cherche ainsi $q = f(r, t)$ tel que :

$$\left[\frac{1}{2} (1 - e^{-t} a)^q + \frac{1}{2} (1 + e^{-t} a)^q \right]^{1/q} \leq \left[\frac{1}{2} (1 - a)^r + \frac{1}{2} (1 + a)^r \right]^{1/r}.$$

Comme $a \in (0, 1)$, on peut directement développer en série entière, ce qui donne :

$$\left(\sum_{k \geq 0} \frac{q(q-1) \cdots (q-2k+1)}{2k!} e^{-2tk} a^{2k} \right)^{r/q} \leq \sum_{k \geq 0} \frac{r(r-1) \cdots (r-2k+1)}{2k!} a^{2k}.$$

De plus comme $r/q \leq 1$, et par l'inégalité $(1+x)^\lambda \leq 1+\lambda x$ si $\lambda \in (0, 1)$,

$$\left(\sum_{k \geq 0} \frac{q(q-1) \cdots (q-2k+1)}{2k!} e^{-2tk} a^{2k} \right)^{r/q} \leq \sum_{k \geq 0} \frac{r}{q} \frac{q(q-1) \cdots (q-2k+1)}{2k!} e^{-2tk} a^{2k}.$$

Finalement, dès que

$$(q-1) \cdots (q-2k+1) e^{-2tk} \leq (r-1) \cdots (r-2k+1),$$

l'inégalité est satisfaite.

Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{r-k}{q-k} - \frac{r-1}{q-1} = \frac{(1-k)(q-r)}{(q-k)(q-1)} \geq 0$ si $1 \leq r \leq q \leq 2$. Ainsi pour $e^{-2t} = \frac{r-1}{q-1}$, l'inégalité est satisfaite. De plus, pour $k=1$ il y a alors égalité dans la dernière ligne de sorte que $e^{-2t} = \frac{r-1}{q-1}$ est optimal.

La contrainte $e^{-2t} \leq \frac{r-1}{q-1}$ est la même que celle sur l'espace gaussien. Ceci n'est pas innocent. En effet par le même argument de Gross que pour les modèles continus, l'hypercontractivité avec ces constantes est équivalente à l'inégalité de Sobolev logarithmique suivante :

$$\text{Ent}_\nu f^2 \leq \mathcal{E}(f, f),$$

où l'on note $\text{Ent}_\nu f^2 = \mathbb{E}_\nu f^2 \log f^2 - \mathbb{E}_\nu f^2 \log(\mathbb{E}_\nu f^2)$ et où $\mathcal{E}(f, f) = \sum_{i=1}^n \|D_i f\|_{L^2(\nu)}^2$ est la forme de Dirichlet définie plus haut.

On rappelle que l'argument de Gross consiste à étudier $F : t \mapsto \|T_t f\|_{q(t)}$, et l'on a les égalités suivantes :

$$\frac{d}{dt}(F(t)^{q(t)}) = q(t)F'(t)F(t)^{q(t)-1} + q'(t)\log F(t)F(t)^{q(t)},$$

et

$$q(t)^2 F'(t)F(t)^{q(t)-1} = q'(t)\text{Ent}_\nu((P_t f)^{q(t)/2}) - q(t)^2 \mathcal{E}(P_t f, (P_t f)^{q(t)-1}).$$

Contrairement au cas continu, on n'intègre pas par parties dans la forme de Dirichlet. Pour conclure de manière analogue, on dispose du lemme suivant :

Lemme 4.2.1. $\mathcal{E}(g, g^{q-1}) \geq \frac{4(q-1)}{q^2} \mathcal{E}(g^{q/2}, g^{q/2})$.

Démonstration. Il suffit de prouver, pour tout $0 \leq a < b$,

$$\frac{4(q-1)}{q^2} (a^{q/2} - b^{q/2})^2 \leq (a-b)(a^{q-1} - b^{q-1}).$$

Or ceci résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet

$$\left(\int_a^b t^{q/2-1} dt \right)^2 \leq \int_a^b dt \int_a^b t^{q-2} dt,$$

ce qui donne l'inégalité voulue. □

Ainsi, on obtient

$$q(t)^2 F'(t)F(t)^{q(t)-1} \leq q'(t)\text{Ent}_\nu((P_t f)^{q(t)/2}) - 4(q(t)-1)\mathcal{E}((P_t f)^{q(t)/2}, (P_t f)^{q(t)/2}),$$

et F est ainsi décroissante si $q(t) = 1 + (q(0)-1)e^{2\rho t}$ et ρ désigne la constante de Sobolev logarithmique.

Sur l'espace à deux points l'inégalité de Sobolev logarithmique se réécrit, en notant $u = f(1)$ et $v = f(-1)$,

$$\frac{1}{2}(u^2 \log^2 u + v^2 \log^2 v) - \frac{u^2 + v^2}{2} \log\left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right) \leq \frac{(v-u)^2}{2}.$$

Cette inégalité présente l'avantage de s'établir de manière un peu plus directe que l'inégalité d'hypercontractivité de Bonami et Beckner citée plus haut. De manière plus globale, il est possible de déterminer des inégalités de Sobolev logarithmiques sur des modèles discrets plus généraux. Ceci nécessite de définir une forme de Dirichlet $\mathcal{E}$, ce que nous verrons dans la prochaine section.

En revanche une preuve d'hypercontractivité directe comme celle présentée plus haut est bien plus délicate, même sur un exemple simple comme un espace à trois points muni de la mesure uniforme.

Pour l'inégalité de Sobolev logarithmique, voyons l'exemple du cube discret muni de la mesure biaisée. La forme de Dirichlet est de manière analogue $\mathcal{E}(f, g) = \langle f, -Lg \rangle_{L^2(\nu_p)} = \langle \nabla f, \nabla g \rangle_{L^2(\nu_p)}$.

Sur l'espace à deux points, l'inégalité de Sobolev logarithmique avec constante $C(p)$ s'écrit

$$2[pu^2 \log^2 u + (1-p)v^2 \log^2 v - (pu^2 + (1-p)v^2) \log(pu^2 + (1-p)v^2)] \leq C(p)p(1-p)(v-u)^2.$$

Cette inégalité est plus difficile à établir que pour le cas uniforme. Diaconis et Saloff-Coste [D-SC] ont démontré que la meilleure constante $C(p)$ vaut $2 \frac{p-(1-p)}{\log p - \log(1-p)}$. Par l'argument de Gross le semi-groupe $(T_t^p)_{t \geq 0}$ est hypercontractif avec constante $C(p)$. Notons que cette constante tend vers 0 si p tend vers 0.

4.3 Généralisation à des espaces produits et aux graphes de Cayley/Schreier

Soit Ω un espace fini muni d'une mesure de probabilité μ avec une chaîne de Markov K , invariante et réversible par rapport à μ , i.e. telle que :

$$\forall (x, y) \in \Omega^2, \quad \sum_{x \in \Omega} K(x, y) \mu(x) = \mu(y) \quad \text{et} \quad K(x, y) \mu(x) = K(y, x) \mu(y).$$

Soit $L = K - Id$, générateur du semi-groupe $P_t = e^{tL}$, $t \geq 0$.

La forme de Dirichlet associée est la forme bilinéaire symétrique suivante :

$$\mathcal{E}(f, g) = \int_{\Omega} f(-Lg) d\mu = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Omega} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) K(x, y) \mu(y)$$

pour f, g des fonctions définies sur Ω .

Un exemple intéressant qui englobe le cas du cube discret est donné par un produit de tels espaces munis de la mesure produit suivante : $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ avec $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$, où l'on prend la chaîne de Markov produit. C'est-à-dire, si $i = 1, \dots, n$, et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $L_i f = \int_{\Omega_i} f d\mu_i - f$ on considère le générateur sur l'espace produit

$$Lf = \sum_{i=1}^n L_i f.$$

La forme de Dirichlet $\mathcal{E}$ se décompose ainsi en

$$\mathcal{E}(f, f) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} L_i(f)^2 d\mu_i. \quad (4.1)$$

Ce cadre, que l'on appellera cadre produit contient le cube biaisé avec $\Omega_1 = \cdots = \Omega_n = \{-1, 1\}$, où chacun des espaces est équipé de la mesure $p\delta_{-1} + q\delta_1$.

Parmi les exemples classiques, cela recouvre également les tores discrets, c'est-à-dire les exemples où pour tout i , $\Omega_i = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ pour $m \geq 3$ muni de la mesure uniforme. Ces modèles produits sont un cas particulier de graphes de Schreier et de Cayley. Des études récentes ont été menées sur de tels graphes ([CE-L], [O-W]), qui contiennent des exemples non produits. Nous définissons maintenant ces graphes.

Soit G un groupe fini contenant un sous-ensemble générateur S , stable par conjugaison et agissant transitivement sur un ensemble fini Ω . Pour $g \in G$, $x \in \Omega$, soit x^g l'action de g sur x . On définit alors le graphe de Schreier ayant pour sommets Ω et pour arêtes (x, y) lorsqu'il existe un $s \in S$ tel que $y = x^s$.

Un graphe de Cayley est le cas particulier où le groupe agit sur lui même, c'est-à-dire $G = \Omega$. Dans ce cas, le graphe (G, V) est donc l'ensemble des sommets $(g)_{g \in G}$ avec arêtes $(g, gs)_{g \in G, s \in S}$. Pour les applications qui suivent, nous ferons l'hypothèse que le sous-ensemble générateur S est symétrique, c'est-à-dire $S^{-1} = S$.

Deux exemples non produits importants de tels graphes sont donnés par les tranches du cube booléen (ou modèle de Bernoulli-Laplace) et le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Le sous-ensemble des transpositions $\mathcal{T}_n$ engendre le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et satisfait l'hypothèse de symétrie. Ainsi le graphe de Cayley correspondant est donné par $(\sigma, \sigma\tau)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \tau \in \mathcal{T}_n}$.

Pour $n \geq 1$, $1 \leq k < n$, les tranches d'ordre k du cube booléen sont définies par

$$\binom{[n]}{k} = \{x \in \{0, 1\}^n, \sum_{i=1}^n x_i = k\}.$$

Le groupe agissant transitivement sur $\binom{[n]}{k}$ est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ par $x^\sigma = (x_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}$, et le graphe associé est $(x, x^{(ij)})_{\{x \in \binom{[n]}{k}, (ij) \in \mathcal{T}_n\}}$.

Étant donné un graphe de Schreier ou de Cayley G , soit μ la mesure uniforme et K le noyau de transition donné par

$$K(g_1, g_2) = \frac{1}{|S|} 1_S(g_1 g_2^{-1}), \quad g_1, g_2 \in G,$$

qui correspond à la marche aléatoire au plus proche voisin.

Ce noyau engendre un semi-groupe $(P_t = e^{tL})_{t \geq 0}$, où $L = K - Id$. La forme de Dirichlet associée $\mathcal{E}$ s'écrit ainsi :

$$\mathcal{E}(f, f) = \frac{1}{2|S|} \sum_{g \in G} \sum_{s \in S} [f(gs) - f(g)]^2 \mu(g) = \frac{1}{2|S|} \sum_{s \in S} \|D_s f\|_{L^2(G)}^2,$$

où l'on note $D_s f : g \mapsto f(gs) - f(g)$ dans le cas d'un graphe de Cayley et

$$\mathcal{E}(f, f) = \frac{1}{2|S|} \sum_{x \in \Omega} \sum_{s \in S} [f(x^s) - f(x)]^2 \mu(x) = \frac{1}{2|S|} \sum_{s \in S} \|D_s f\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où $D_s f : x \mapsto f(x^s) - f(x)$ dans le cas d'un graphe de Schreier.

Par exemple dans le cas des tranches du cube ou du groupe symétrique, avec la normalisation ci-dessus, $Lf = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} D_{\tau_{ij}} f$. De plus, on a alors $P_t f(x) = e^{-t} \sum_{m \geq 0} \frac{t^m}{m!} K^m f(x) = \mathbb{E}_\mu f(y)$ où y est obtenu à partir de x en effectuant m transpositions aléatoires, où $m \sim \mathcal{P}(t)$ (loi de Poisson de paramètre t).

Dans ce contexte, on dit que (Ω, L, μ) satisfait à une inégalité de trou spectral $SG(\kappa)$ si :

$$\forall f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \kappa \text{Var}_\mu(f) \leq \mathcal{E}(f, f). \quad (4.2)$$

De même, on dit que (Ω, Γ, μ) satisfait à une inégalité de Sobolev logarithmique $LS(\kappa)$ si :

$$\forall f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \kappa \text{Ent}_\mu(f^2) \leq 2 \mathcal{E}(f, f). \quad (4.3)$$

Nous noterons λ (λ_n) et ρ (ρ_n) les meilleures (i.e. plus grandes) constantes dans ces inégalités. De façon générale on a toujours $\lambda \geq \rho$ (par le même argument de linéarisation qu'en continu).

Dans la cadre produit $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, ces inégalités se tensorisant, on a $\lambda = \min(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ et $\rho = \min(\rho_1, \dots, \rho_N)$.

Notons qu'avec les normalisations choisies, il y a un facteur $\frac{1}{n}$ dans ces constantes par rapport à celles données sur le cube booléen. L'argument de Gross implique de nouveau de manière analogue l'hypercontractivité, qui est un outil fondamental pour de nombreuses applications, pour des modèles discrets satisfaisant une inégalité de Sobolev logarithmique. Ainsi, les inégalités de Sobolev logarithmique ont été très étudiées dans ce cadre. Une référence fournie à ce sujet est l'article de Diaconis et Saloff-Coste [D-SC]. Donnons quelques exemples explicites.

Pour les tores discrets $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$, la constante de trou spectral vaut, dans la normalisation des graphes de Cayley, $\lambda = \frac{1 - \cos(\frac{2\pi}{m})}{n}$, celle de Sobolev logarithmique est égal à celle du trou spectral pour m impair, et déterminée pour m pair par Chen et Sheu [Ch-Sh]. Dans les deux cas, ces constantes sont de l'ordre de $\frac{1}{nm^2}$ pour m grand. Pour les groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$, on a $\lambda_n = \frac{1}{n}$ et $\rho_n = \frac{a}{n \log n}$ pour $a > 0$ [D-SC]. Sur les tranches du cube d'ordre k , $\lambda_n = \frac{1}{n}$, et ρ_n satisfait $\rho_n^{-1} \sim n \log \frac{n^2}{k(n-k)}$. Ce résultat a été obtenu par Lee et Yau [L-Y]. Il est intéressant de constater que lorsque k est de l'ordre de n , la constante de Sobolev logarithmique est du même ordre que celle du trou spectral - ce qui n'est pas le cas pour les groupes symétriques. Ceci est à l'origine du fait que la plupart des résultats présentés dans la section suivante s'étendent dans le cas des tranches du cube et non dans le cas des groupes symétriques. Nous discuterons ce point plus en détails dans la présentation de nos résultats.

4.4 Influences

Cette section est destinée à présenter une notion fondamentale dans l'analyse des fonctions booléennes, la notion d'influence. Nous avons déjà défini la notion d'influence géométrique dans le cas continu, directement inspirée par celle plus ancienne d'influence d'une fonction booléenne. Sur le cube, la notion d'influence est claire et possède une définition unique.

Si l'on pense à $f : \{-1, 1\}^n \mapsto \{-1, 1\}$ comme une fonction de choix pour un vote, l'influence de la i -ème coordonnée mesure la probabilité que le résultat de l'élection change si le i -ème votant change son vote. Cette définition s'étend à des fonctions à valeurs réelles, comme nous le verrons plus bas. Dans la suite, on considérera des fonctions à valeurs dans $\{0, 1\}$ (ou $\{-1, 1\}$), $[0, 1]$ ou $\mathbb{R}$.

Définition 4.4.1. Soit $f : \{0, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}$. La i -ème coordonnée est dite "pivotale" si $f(x) \neq f(x^{\oplus i})$ où $x^{\oplus i}$ désigne le vecteur obtenu à partir de x en changeant le signe de la i -ème coordonnée.

Définition 4.4.2. Soit $f : \{0, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}$. L'influence de la i -ème coordonnée est donnée par

$$I_i(f) = \mathbb{P}_{x \sim \nu}(f(x) \neq f(x^{\oplus i}))$$

où $x^{\oplus i}$ désigne le vecteur obtenu à partir de x en changeant le signe de la i -ème coordonnée.

La somme de toutes les influences est appelée somme totale (également nommée initialement "average sensitivity"), et est souvent notée $I(f)$. Lorsque f est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble du cube A , la somme totale représente la fraction d'arêtes reliant un point de A à un point de $\{-1, 1\}^n \setminus A$. C'est ce qu'on définit comme la mesure de bord d'un ensemble, et ainsi la somme des influences est liée à un problème isopérimétrique discret.

Notons que pour des fonctions à valeurs dans $\{0, 1\}$, (à une normalisation près) $I_i(f) = \|D_i f\|_1 = \|D_i f\|_p^p$ où D_i est l'opérateur de dérivation discrète défini plus haut. En lien avec l'analyse de Fourier discrète, il est intéressant d'exprimer les influences en termes spectraux. Il n'est pas difficile de voir que

$$I_i(f) = \sum_{s \in S} \hat{f}(s)^2.$$

Cette remarque étant faite, on définit plus généralement l'influence $I_i(f)$ de la i -ème coordonnée d'une fonction $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathbb{E}_{x_i}(\text{Var} f) = \sum_{s \in S} \hat{f}(s)^2.$$

En conséquence, la somme totale d'influences s'écrit de manière spectrale

$$I(f) = \sum_{i=1}^n I_i(f) = \sum_{S \subseteq [n]} |S| \hat{f}(S)^2 = \sum_{k \geq 0} k \|f^{\neq k}\|_2^2.$$

Parmi les exemples les plus célèbres, les fonctions Majorité et Dictateurs sont définies par

$$\text{Maj}_n \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}, x \mapsto \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^n x_i \geq n/2\}} \quad \text{et} \quad \text{Dic}_i \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}, x \mapsto x_i.$$

Ces deux fonctions seront dans la suite des fonctions modèles.

Alors il est immédiat que $I_j(\text{Dic}_i) = \delta_{ij}$. Il n'est pas difficile de démontrer que les influences de la fonction majorité sont de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, i.e. pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $I_i(\text{Maj}_n) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Sur les exemples de modèles discrets présentés dans la section précédente, la notion d'influence s'étend naturellement à partir de la remarque $I_i(f) = \|D_i f\|_1$. Sur un graphe de Schreier ou de Cayley - cela inclut le cadre produit, nous avons défini un opérateur de dérivation discrète, L_i ou D_s . La définition d'influence s'étend ainsi naturellement.

Définition 4.4.3. L'influence de la i -ème coordonnée $f : \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$I_i(f) = \|L_i f\|_1.$$

Il est à noter que sur le cube discret, avec les notations précédentes, il y a une différence de normalisation entre les deux définitions. Pour un graphe de Schreier ou de Cayley quelconque, on a la définition suivante :

Définition 4.4.4. L'influence d'un élément $s \in S$ pour $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $I_s(f) = \|D_s f\|_1$.

Dans le cas des tranches du cube (d'ordre k), les influences des transpositions $I_{\tau_{ij}}^k f$ sont reliées aux influences des coordonnées $I_i f$ sur le cube. Définissons l'influence d'une transposition sur le cube par $I_{\tau_{ij}} f = \mathbb{P}(f(x^{(ij)}) \neq f(x))$. Alors, pour tout i , $I_i(f) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{\tau_{ij}} f$, et de plus, par formule des probabilités totales, pour toute transposition τ_{ij} ,

$$I_{\tau_{ij}} f = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(x_1 + \dots + x_n = k) I_{\tau_{ij}}^k f = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} I_{\tau_{ij}}^k f.$$

Par exemple, si toutes les influences de f tendent vers 0, les influences sur les tranches tendent également vers 0 pour toutes les tranches sauf une proportion négligeable.

Plus bas, nous mentionnerons un travail de Filmus [Fil] qui permet de relever sur le cube des fonctions définies seulement sur des tranches de celui-ci. Là encore, les influences correspondantes sont liées.

4.5 Principaux résultats sur les influences

4.5.1 Théorème isopérimétrique de Harper

Par convention, ici, le cube discret sera $\{0, 1\}^n$. On le munit de l'ordre lexicographique. On définit la distance de Hamming

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \#\{i \in \{1, \dots, n\}, x_i \neq y_i\}.$$

Une arête est un couple (xy) avec $(x, y) \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n$ tel que $d(x, y) = 1$ (x et y sont dits "voisins").

Le problème isopérimétrique sur le cube discret nécessite une définition du bord. On définit le bord arête par $\partial_e A = \{(xy), x \in A, y \notin A\}$. L'inégalité isopérimétrique de Harper [Har] donne ainsi une borne inférieure sur la somme totale des influences. Les ensembles extrémaux sont des réunions de sous-cubes, c'est-à-dire les sous-ensembles d'ordre m constitués des m premiers sommets pour l'ordre lexicographique.

Théorème 4.5.1. *Soit $A \subset \{0, 1\}^n$ tel que $|A| = m \leq 2^{n-1}$, et C un sous cube d'ordre m . Alors*

$$\frac{|\partial_e A|}{|A|} \geq \frac{|\partial_e C|}{|C|} = m(n - \log_2 m)$$

En termes d'influences, ce résultat s'énonce de la façon suivante :

$$I(f) \geq -\mathbb{E}_\nu f \log_2 \mathbb{E}_\nu f.$$

En conséquence, il existe une influence au moins de l'ordre de $\frac{1}{n}$. Ce résultat se retrouve en utilisant l'inégalité d'Efron Stein - ou de Poincaré. En effet, ce résultat se réécrit :

$$\text{Var}_\mu(f) \leq \frac{1}{4} I(f).$$

4.5.2 Conjecture Entropie/Influence

L'inégalité de Sobolev logarithmique donne une autre borne inférieure pour la somme totale des influences, c'est-à-dire

$$\text{Ent}_\nu(f^2) \leq CI(f),$$

où C est une constante numérique qui ne dépend que de la normalisation choisie. Au milieu des années 90, dans leur étude sur les phénomènes de seuil, Friedgut et Kalai [F-K] conjecturent une version spectrale de cette inégalité :

Conjecture 4.5.2. *Pour toute fonction $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$, il existe une constante C universelle telle que :*

$$\sum_{S \subset [n]} \hat{f}^2(S) \log \left(\frac{1}{\hat{f}^2(S)} \right) \leq CI(f) = C \sum_{S \subset [n]} |S| \hat{f}^2(S).$$

La condition d'être booléenne est nécessaire. Cette conjecture est intéressante car elle implique de nombreux résultats intéressants. En particulier, elle implique des phénomènes de seuils étroits. Elle contient également le théorème de Kahn-Kalai-Linial que nous énonçons plus bas. Elle permettrait de mieux relier le comportement du spectre de la fonction f en fonction de la somme de ses influences. Enfin, elle est intimement liée à des problèmes d'informatique théorique.

Elle est appelée conjecture entropie/influence, et c'est encore un problème ouvert aujourd'hui. Seuls quelques cas particuliers de cette conjecture ont été résolus (par exemple par O'Donnell et Zhou [OD-Z] en faisant l'hypothèse que f est symétrique, c'est-à-dire invariante par permutation des coordonnées).

4.5.3 Tribes, KKL, Talagrand

Concernant le comportement du maximum des influences, un résultat pionnier est dû à Ben-Or et Linial ([BO-L]). De manière surprenante, les auteurs exhibent des fonctions booléennes, appelés *tribes* telles que l'influence de chaque coordonnée n'excède pas $\frac{\log n}{n}$. La fonction majorité n'est donc pas celle qui minimise le maximum des influences, car ces dernières sont toutes de l'ordre de $n^{-1/2}$. Ces fonctions sont définies de la façon suivante. Si $n = km$,

$$\text{Tribes}_{km} x = ((x_1, \dots, x_k), \dots, (x_{m(k-1)+1}, \dots, x_{km})) \in \{0, 1\}^{km}$$

vaut 1 si et seulement si l'une des tribus de longueur k ($x_{j(k-1)+1}, \dots, x_{jk}$) est la tribu où tous les x_i sont égaux à 1. Ben-Or et Linial démontrent que pour n grand, si $k \approx \log n - \log \log n$, toutes les influences sont au plus de l'ordre de $\frac{\log n}{n}$, plus précisément la proposition suivante :

Proposition 4.5.3.

$$I_i(\text{Tribes}_n) = \frac{\log n}{n} \left(1 + o(1)\right).$$

Démonstration. Premièrement la probabilité qu'une des tribus est la tribu $(1, \dots, 1)$ vaut 2^{-k} . Ainsi, par borne d'union, $\mathbb{P}(\text{Tribes}_n = 0) = (1 - 2^{-k})^m$. Ensuite i est pivotale si et seulement si tous les éléments de la tribu contenant i sont tous égaux à 1 et qu'aucune autre tribu n'est dans cette configuration. Ceci arrive avec probabilité $2^{-(k-1)}(1 - 2^{-k})^{m-1}$ - ce qui est par définition l'influence de la i -ème coordonnée. Cette quantité est minimale si $k = \log n - \log \log n + \log \log 2$, et vaut alors $\frac{\log n}{n} \left(1 + o(1)\right)$. $\square$

Ben Or et Linial conjecturent que ce résultat est optimal. Motivés par ce résultat, Kahn, Kalai et Linial démontrent la conjecture de Ben Or et Linial au sens où toute fonction booléenne possède une influence plus grande que $\frac{\log n}{n}$. C'est le théorème KKL, qui est un résultat fondamental dans l'analyse des fonctions booléennes, où l'analyse de Fourier discrète en lien avec l'hypercontractivité du semi-groupe de Bonami-Beckner joue un rôle crucial dans la preuve.

Théorème 4.5.4. Soit $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$, $c > 0$,

$$I_i(f) \geq c \text{Var}_p(f) \frac{\log n}{n}.$$

Peu après, ce résultat sera étendu au cube muni de la mesure biaisée de paramètre p indépendant de n [BKal]. Inspiré par ces travaux, Talagrand [Tal1] démontre une inégalité sur le cube biaisée de paramètre p , appelée désormais inégalité de Talagrand qui implique le résultat de Kahn-Kalai-Linial et sa généralisation au cas biaisé. Là encore les outils utilisés dans la preuve de ce résultat font appel à l'analyse de Fourier discrète associée avec l'hypercontractivité.

Théorème 4.5.5. Soit $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Alors

$$\text{Var}_{p_p}(f) \leq C(p) \sum_{i=1}^n \frac{I_i(f)}{1 + \log(I_i(f))}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que cette inégalité implique bien l'existence d'une coordonnée i telle que $I_i(f) \geq C'(p) \text{Var}_{p_p}(f) \frac{\log n}{n}$. Ce n'est que récemment ([O-W], [CE-L]) que ces résultats ont été étendus à des espaces discrets plus généraux tels que les graphes de Schreier et de Cayley dont on connaît une borne explicite sur la constante d'hypercontractivité. Ces exemples recouvrent les tores discrets $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$, le modèle de Bernoulli-Laplace $\binom{[n]}{k}$ ou les groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$.

En fait, l'inégalité démontrée par Talagrand est valable pour des fonctions à valeurs réelles et s'écrit, pour $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\text{Var}_p(f) \leq C(p) \sum_{i=1}^n \frac{\|D_i f\|_2^2}{1 + \log(\|D_i f\|_2 / 2\sqrt{p(1-p)}\|D_i f\|_1)}.$$

Cette inégalité est une version améliorée de l'inégalité de Poincaré. Nous avons vu dans le cadre continu que la théorie des semi-groupes est un outil très efficace vis-à-vis de cette inégalité. En utilisant la décomposition de la variance le long du semi-groupe de la chaleur et en utilisant l'hypercontractivité du semi-groupe, on retrouve l'inégalité de Talagrand (cf [CE-L]). Ce schéma de preuve de l'inégalité de Talagrand s'adapte en fait très bien sur des modèles où la forme de Dirichlet se décompose le long de "directions".

4.5.4 Le théorème “Junta” de Friedgut

Parmi les autres résultats, un théorème fondateur est celui de Friedgut [Fri], le théorème “Junta”. Une *junta*, junte en français est une fonction ne dépendant que d’un nombre fixé de coordonnées. Si f est une junte, c’est une conséquence immédiate que sa somme totale d’influences est bornée. Le théorème de Friedgut s’énonce de la façon suivante :

Théorème 4.5.6. *Soit $f : \{0, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}$ d’influence totale égale à I . Alors f est ε proche d’une $e^{O(I/\varepsilon)}$ -junta, c’est-à-dire d’une fonction dépendant au plus de $e^{O(I/\varepsilon)}$ -coordonnées.*

Ce théorème trouve son intérêt si l’on pense à la somme totale des influences comme le nombre de coupures dans un graphe. Ce n’est que récemment que ce théorème a été étendu de façon plus générale sur des graphes de Cayley produits ([Sa-Tu]) ou sur le tore continu [Aus]. Un résultat analogue, suite à la définition d’influences géométrique, apparaît dans [K-M-S1] pour certaines classes de mesures de Boltzmann. La question de l’étendre sur des exemples de graphes non produits reste en grande partie ouverte. En effet, les principales preuves utilisent, soit l’analyse de Fourier discrète ([Sa-Tu]), soit de façon cruciale la structure produit du graphe ([Aus]). Une seule généralisation sur l’exemple du modèle de Bernoulli–Laplace a été étendue par Wimmer [Wim] puis indépendamment par Filmus [Fil], là encore en utilisant des techniques d’analyse de Fourier discrète. Dans le dernier chapitre, nous donnerons un schéma de preuve commun basé sur l’argument d’Austin et qui a l’avantage de démontrer un théorème analogue à celui de Friedgut pour tous les exemples produits. Les constantes sont toutefois moins bonnes que celles précédemment obtenues.

4.5.5 Théorèmes de structures

Pour clore cette section, mentionnons un autre résultat ne faisant pas intervenir la notion d’influence mais uniquement les coefficients de Fourier : le théorème de Friedgut–Kalai–Naor [F-K-N]. Il établit que si les coefficients de Fourier d’une fonction booléenne f sont essentiellement concentrés sur le premier niveau, f est proche d’une fonction dictateur.

Théorème 4.5.7. *Soit $f^{>k} = \sum_{k < |S| \leq n} \hat{f}(S) W_S$. Si $\|f^{>1}\|_2^2 \leq \varepsilon$, il existe $i \in [n]$ tel que $\|f - \text{Dic}_i\|_2 = O(\varepsilon)$.*

La généralisation à des niveaux supérieurs de ce résultat est dû à Kindler et Safran [Ki-Sa] :

Théorème 4.5.8. *Si $\|f^{>k}\|_2^2 \leq \varepsilon$, il existe une fonction h dépendant de $O(k, p)$ coordonnées de degré au plus k tel que $\|f - h\|_2 = O_{k,p}(\varepsilon)$.*

Les deux résultats précédents s’énonçant en termes de décomposition spectrale, il est plus difficile a priori de les étendre à des exemples de graphes non produits. La construction de Filmus permet toutefois de les étendre sur le modèle de Bernoulli Laplace. Dans [F-K-M-W], les auteurs se servent de ce résultat pour des problèmes de combinatoire du type Erdős–Ko–Rado sur l’intersection de familles d’ensembles à t éléments.

4.6 La notion de noise stability/sensitivity

Repensons à une fonction booléenne sur le cube discret comme une fonction de choix pour le résultat d’une élection. Aucune élection n’étant infaillible, on peut se demander ce qu’il se passe s’il y a une probabilité (petite) que chacun des votes soit mal interprété. De la même façon, dans d’autres domaines, on s’intéresse à des petites perturbations (bruits) de la distribution initiale donnée sur le cube booléen. C’est pourquoi on introduit naturellement la notion de “noise stability” booléenne, de la même façon que sur l’espace gaussien.

En théorie de la percolation, Benjamini Kalai et Schramm ont popularisé cette notion. Dans [B-K-S], les auteurs démontrent entre autres que la probabilité d’avoir un chemin de gauche à droite

(une percolation) dans le rectangle $[n] \times [n+1] \subset \mathbb{Z}^2$ est asymptotiquement sensible au bruit au sens défini plus bas. Sans rentrer dans les détails, cela veut dire la chose suivante.

Considérons une configuration où il y a une percolation de gauche à droite : si l'on lui ajoute un bruit η indépendant de n (même très petit), alors il n'est plus possible de prédire s'il y a encore percolation. Autrement dit, si f est la fonction booléenne correspondante à l'événement de percolation et X est un vecteur aléatoire de $\{0, 1\}^n$, la connaissance de $f(X)$ ne donne pas d'information sur $f((1-\eta)X + \eta X')$, où X' est un autre vecteur aléatoire de $\{0, 1\}^n$ indépendant de X .

4.6.1 Le cas du cube discret

Nous avons déjà défini la notion de stabilité au bruit dans le cadre gaussien. Rappelons que dans ce cadre, $\mathcal{S}_\eta(f) = \mathbb{E}_\gamma[f(X)f(Y)]$ où X et Y sont des variables gaussiennes η -corrélées. La définition est identique sur le cube.

Définition 4.6.1.

$$\mathcal{S}_{\eta,b}(f) = \mathbb{E}_\nu[f(X)f(X^\eta)] = \mathbb{E}_{\nu \otimes \nu}[f(X)f(Y)],$$

où X, Y sont des variables distribuées selon ν et η -corrélées.

La notion de stabilité au bruit est liée à celle duale de sensibilité au bruit ("noise sensitivity" en anglais). La sensibilité au bruit d'une fonction est la quantité $\mathcal{NS}_{\eta,b}(f) = \mathcal{S}_{\eta,b}(f) - \mathbb{E}_\nu^2(f)$. Une suite de fonctions booléennes est dite asymptotiquement sensible au bruit, ou simplement sensible au bruit, si la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{NS}_{\eta,b}(f_n)$ converge vers 0. De même la stabilité au bruit d'un ensemble est défini par la stabilité au bruit de sa fonction caractéristique.

Le principal résultat de l'article [B-K-S] est de prouver un critère de sensibilité au bruit pour des fonctions booléennes. Ce critère est le suivant : si la somme des carrés des influences d'une suite de fonctions booléennes $(f_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0, alors la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est sensible au bruit. Comme application, la fonction de percolation de premier passage dans un rectangle est sensible au bruit. En fait les auteurs donnent plusieurs exemples de fonctions booléennes issues de modèles de percolation où les influences sont calculables et le critère utilisable.

Comme pour l'espace gaussien, la sensibilité au bruit peut être exprimée en terme de semi-groupe donc de manière spectrale de la façon suivante. Soit $\eta = e^{-t}$,

$$\mathcal{S}_{\eta,b}(f) = \mathbb{E}_\nu(f T_t f) = \sum_{k=0}^{\deg f} \eta^k \|f^{\neq k}\|_2^2,$$

et de même pour le cube biaisé,

$$\mathcal{S}_\eta(f) = \mathbb{E}_{\nu_p}(f T_t^p f) = \mathbb{E}_{\nu_p}((T_{t/2}^p f)^2).$$

La sensibilité au bruit, pour un bruit η , correspond ainsi à la covariance entre f et $T_{-\log \eta} f$. Parmi les questions naturelles, on peut se demander quelles sont les fonctions les plus stables au bruit ou au contraire celles qui sont sensibles au bruit.

Sans hypothèses spécifiques, les fonctions booléennes non constantes de moyenne nulle les plus stables au bruit sont les fonctions dictateurs. Ce résultat est immédiat en utilisant la décomposition de Fourier plus haut. En effet, si f de moyenne nulle, $\sum_{k=0}^{\deg f} \eta^k \|f^{\neq k}\|_2^2 \leq \eta$ avec égalité si et seulement pour tout $k \neq 1$, $\|f^{\neq k}\|_2 = 0$, c'est-à-dire si f est un dictateur.

En fait, l'idée de départ des spécialistes est qu'étudier le spectre de la fonction f donne des informations sur sa sensibilité au bruit. Intuitivement, plus le spectre est concentré sur les premiers niveaux, plus la fonction est stable au bruit. Au contraire, une fonction sensible au bruit devrait avoir un spectre très étendu. Rappelons que la formule de Parseval implique que $\sum_{i=1}^n \|f_n^{\neq k}\|_2^2 = 1$. De plus, si η est fixé, il est clair que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{NS}_\eta(f_n) = 0 \iff \forall m \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \|f_n^{\neq k}\|_2^2 = 0.$$

Cette équivalence est à l'origine du travail de Benamini, Kalai et Schramm [B-K-S]. En adaptant une inégalité de Talagrand, les auteurs bornent les coefficients $\|f_n^k\|_2^2$ en termes de la somme des carrés des influences $\sum_{i=1}^n I_i^2(f_n)$. De là ils en tirent le critère suivant, dit de Benamini–Kalai–Schramm :

Théorème 4.6.2. *Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions booléennes définies sur $\{0, 1\}^n$. Alors :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n I_i^2(f_n) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{NS}_\eta(f_n) = 0.$$

4.6.2 Espaces discrets et graphes de Schreier

De manière plus générale, à la lumière des exemples booléens et gaussiens, on peut définir une notion de “noise stability” sur les espaces discrets présentés plus haut en utilisant l’expression $\mathbb{E}_\mu((P_{t/2}f)^2)$. Toutefois, nous avons défini le bruit η comme une quantité entre 0 et 1. Il reste donc à déterminer la relation entre le bruit η et le paramètre du semi-groupe t . L’inégalité de trou spectral suivante nous éclaire sur ce point : si f est de moyenne nulle,

$$\mathbb{E}_\mu((P_t f)^2) \leq e^{-\lambda t} \mathbb{E}_\mu(f^2).$$

L’inégalité de trou spectral implique ainsi une convergence exponentielle vers l’équilibre proportionnelle au trou spectral λ .

Définition 4.6.3. *Posons $\eta = e^{-\lambda t}$. On définit la “noise stability” d’une fonction $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ par*

$$\mathcal{S}_\eta(f) = \mathbb{E}_\mu((P_{t/2}f)^2) = \mathbb{E}_{\mu \otimes \mu}(f(x)f(y)),$$

où y est obtenu en faisant agir sur x aléatoirement m éléments de S où $m \sim \mathcal{P}(\lambda^{-1} \log(\eta^{-1}))$.

On définit de même la “noise sensitivity” par $\mathcal{NS}_\eta(f) = \mathcal{S}_\eta(f) - (\mathbb{E}_\mu f)^2$. Avec cette définition, la majoration donnée par l’inégalité de trou spectral est similaire à celle du cube : $\mathcal{NS}_\eta(f) \leq \eta \text{Var}_\mu(f)$. En particulier, si η est fixé et $(\|f_n\|_2)_{n \geq 0}$ uniformément minorée, l’inégalité de trou spectral ne donne pas d’information sur le comportement de la noise sensitivity $\mathcal{NS}_\eta(f_n)$ de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$.

Parmi les questions naturelles, se posent les suivantes : étant donné une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ sur des graphes $(\Omega_n)_{n \geq 0}$ (où implicitement le cardinal de Ω_n tend vers l’infini), sous quelles conditions $(f_n)_{n \geq 1}$ est sensible au bruit (i.e. $\mathcal{S}_\eta(f_n)$ converge vers 0) ? Au contraire y-a-t-il une fonction de η qui borne les suites $(\mathcal{S}_\eta(f_n))_{n \geq 0}$?

Concernant la “noise sensitivity”, nous répondrons partiellement à la question en étendant le critère de Benamini–Kalai–Schramm en donnant de plus une version quantitative. En particulier, qualitativement, nous obtenons le critère suivant :

Théorème 4.6.4. *Soit $(G_n)_{n \geq 0}$ une suite de graphes de Schreier engendrés par S_n , de constantes de trou spectral λ_n et de Sobolev logarithmique ρ_n . Supposons que le rapport $\frac{\rho_n}{\lambda_n}$ soit uniformément minoré par $c > 0$. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de $G_n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sum_{s \in S_n} I_s(f_n)^2 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors $(f_n)_{n \geq 0}$ est sensible au bruit, c’est-à-dire que pour tout $\eta > 0$, $\mathcal{S}_\eta(f_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.*

Ce résultat sera présenté dans le chapitre suivant et est un cas particulier des travaux présentés dans [Bou].

Remarquons que ce théorème n’est pas vrai quand $\frac{\rho_n}{\lambda_n}$ tend vers 0. Un exemple est donné par le cube discret $\{0, 1\}^N$ muni de la mesure biaisée avec un biais de $1/N$.

Soit $N = \frac{n(n-1)}{2}$, et un graphe à n sommets sur lequel une arête est mise avec probabilité $1/N$. Si f_n désigne la fonction booléenne qui vaut 1 si et seulement le graphe contient un triangle, alors $\sum_{i=1}^N I_i^2(f_n)$ tend vers 0 tandis que que $(f_n)_{n \geq 0}$ est stable au bruit.

Pour ce qui est du problème de maximiser la “noise stability”, nous avons vu plus haut que les fonctions dictateurs sont extrémales. Le cas des fonctions dictateurs est un cas extrême où une coordonnée a beaucoup d’influence. Il est intéressant (surtout si l’on pense à des systèmes de votes) de se restreindre à la classe de fonctions booléennes dont toutes les influences tendent vers 0 quand n tend vers l’infini. Sous cette condition, cette question s’avère beaucoup plus intéressante. Notons que pour l’espace gaussien, le théorème de Borell répond à la question même pour des ensembles de petites influences géométriques. La différence fondamentale est que sur le cube, il n’y a plus d’invariance par rotations et les demi espaces du cubes peuvent avoir des comportements très différents.

La section suivante est consacrée à la présentation du théorème “majority is stablest”, qui comme on le verra, présente des analogies avec les problèmes vus dans le cadre continu en première partie.

4.7 Théorie du choix social et géométrie gaussienne.

Par commodité, on prendra ici $\{0, 1\}^n$ pour le cube booléen, et des fonctions booléennes sont des fonctions à valeurs dans $\{0, 1\}$. La fonction majorité s’écrit alors $x \mapsto \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^n x_i \geq n/2\}}(x)$, où par simplicité on suppose que n est impair. Grâce au théorème de la limite centrale, on peut calculer la limite de la “noise stability” des fonctions Maj_n quand n tend vers l’infini. Cette valeur a été calculée dès le XIXe siècle par Sheppard [She].

4.7.1 La stabilité au bruit de la Majorité.

On rappelle que la stabilité au bruit η de la fonction majorité de taille n est par définition $\mathcal{S}_{\eta,b}(\text{Maj}_n) = \mathbb{E}_\nu[\text{Maj}_n(X)\text{Maj}_n(Y)]$, pour des variables X et Y η -corrélées. Or on peut remplacer $\{\sum_{i=1}^n x_i \geq n/2\}$ par $\{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (x_i - 1/2) \geq 0\}$. Comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (x_i - 1/2)$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{\eta,b}(\text{Maj}_n) = \mathbb{E}_\eta[\mathbf{1}_{\{X \geq 0\}} \mathbf{1}_{\{Y \geq 0\}}],$$

où l’espérance est prise sous la loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ \eta & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, par invariance par rotation de la loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$, cette dernière quantité vaut donc $J_\eta^B(1/2, 1/2)$. On rappelle que

$$J_\eta^B(1/2, 1/2) = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 p_\eta(x, y) d\gamma_1(x) d\gamma_1(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2-2\eta xy+y^2}{2(1-\eta^2)}} dx dy.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2-2\eta xy+y^2}{2(1-\eta^2)}} dx dy &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\eta^2)}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(y-\eta x)^2}{2(1-\eta^2)}} dy d\gamma_1(x) \\ &= \int_0^\infty \Phi\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}x\right) d\gamma_1(x). \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale se calcule facilement en remarquant que si on pose $\Psi : \alpha \mapsto \int_0^\infty \Phi(\alpha x) d\gamma_1(x)$, alors $\Psi'(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty x e^{-(\alpha^2+1)x^2/2} dx = \frac{1}{2\pi(\alpha^2+1)}$ d’où l’on tire que $\Psi(\alpha) = \frac{1}{4} + \frac{\arctan(\alpha)}{2\pi}$. Ainsi, si $\alpha = \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$,

$$J_\eta^B(1/2, 1/2) = \frac{1}{4} + \frac{\arctan(\alpha)}{2\pi} = \frac{1}{4} + \frac{\arcsin(\eta)}{2\pi}.$$

Cette dernière fonction de η sera désormais appelée stabilité au bruit de la fonction majorité. En utilisant la concavité de la fonction arcsinus, on retrouve bien que cette valeur est inférieure à celle correspondant à des fonctions dictateurs (qui vaut alors avec cette définition du cube $\frac{1+\eta}{4}$). Si l'on impose que toutes les influences tendent vers 0, en revanche, le problème de maximiser la stabilité au bruit devient non trivial.

4.7.2 Le théorème “Majority is stablest”

Un problème célèbre appelé “Max-Cut”, en algorithmique et en théorie des graphes, consiste à trouver le nombre maximal de coupures. Ce problème est un problème NP-complet de théorie des graphes. Il admet, sous la conjecture de jeu unique émise par Khot en 2004, une approximation par un algorithme polynomial dont l'ordre est donné par la stabilité au bruit de la fonction Majorité. Khot et al. [K-K-O-M] conjecturent que la fonction majorité maximise essentiellement la stabilité au bruit, au sens où elle est extrémale à un terme d'erreur près qui tend vers 0 quand le maximum des influences tend vers 0. L'application principale de cette conjecture est la capacité à optimiser la proportion d'approximation algorithmique du problème Max-Cut. La conjecture est prouvée peu après par Mossel, O'Donnell et Oleskiewicz [M-O-O] et porte le nom de Théorème “Majority is Stablest”.

Théorème 4.7.1 (Théorème “Majority is Stablest”). *Soit $f : \{0, 1\}^n \rightarrow [0, 1]$ tel que $\max_i I_i(f) \leq \tau$, alors*

$$\mathcal{S}_{\eta,b}(f) \leq J_{\eta}^B(\mathbb{E}_{\nu}(f), \mathbb{E}_{\nu}(f)) + C(\eta) \left(\frac{\log \log 1/\tau}{\log 1/\tau} \right).$$

Rappelons que sur l'espace gaussien, on a $\mathcal{S}_{\eta}(A) \leq \mathcal{S}_{\eta}(H) = J_{\eta}^B(\mathbb{E}_{\nu}(\mathbf{1}_A), \mathbb{E}_{\nu}(\mathbf{1}_A))$, c'est-à-dire l'inégalité du théorème sans terme d'erreur. Le théorème “Majority is Stablest” s'apparente ainsi à une version analogue sur le cube discret du résultat de Borell. Il n'est pas surprenant qu'en effet, les deux preuves connues à ce jour de ce théorème utilise le résultat de Borell. La première preuve de [M-O-O] l'utilise ainsi qu'un “principe d'invariance”, une sorte de vaste généralisation du théorème de Berry-Esseen.

Rappelons que la décomposition en polynômes multilinéaires $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_S \hat{f}(S) W_S(x)$ permet de relever toute fonction f du cube discret $\{0, 1\}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Comme $W_S(x)$ est précisément $\prod_{i \in S} h_1(x_i)$ où h_1 correspond au premier polynôme de Hermite, $Q_t h_S$ et $T_t W_S$ agissent de la même façon sur la fonction relevée, que nous noterons de la même façon f . De plus, si la fonction possède de petites influences, les distributions de $f(X)$ et de $f(G)$ sont alors proches, si $X \sim \nu$ et $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Plus précisément, voici un énoncé du “principe d'invariance” de Mossel, O'Donnell et Oleskiewicz.

Théorème 4.7.2. *Soit ψ une fonction C -Lipschitz. Soit f dont les influences sont plus petites que τ et de degré au plus d . Alors*

$$|\mathbb{E}_{\nu}(\psi(f)) - \mathbb{E}_{\gamma}(\psi(f))| \leq O(C) 2^d \tau^{1/4}. \quad (4.4)$$

Ce théorème permet de relever une fonction booléenne sur $\mathbb{R}^n$ tout en conservant ces propriétés à une petite erreur près. En utilisant le théorème de Borell pour la fonction relevée, on peut alors conclure. Montrons succinctement comment on peut atteindre par ce principe le théorème “Majority is stablest”.

Posons $\eta = e^{-t}$. L'idée est d'utiliser le principe d'invariance à $\psi(T_t f) = (T_t f)^2$, qui n'est évidemment pas lipschitzienne. Mais comme f est à valeurs dans $[0, 1]$, on peut définir une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ Sq telle que $\mathbb{E}_{\nu}(\text{Sq}(f)) = \mathcal{S}_{\eta}(f)$. Précisément

$$\text{Sq} : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x).$$

On a alors, par (4.4),

$$|\mathcal{S}_{\eta,b}(f) - \mathbb{E}_{\gamma}(\text{Sq} Q_t f)| = |\mathbb{E}_{\nu}(\text{Sq} T_t f) - \mathbb{E}_{\gamma}(\text{Sq} Q_t f)| \leq O(C) 2^d \tau^{1/4}.$$

Une seconde difficulté est que la fonction relevée f sur $\mathbb{R}^n$ n'est plus forcément à valeur dans $[0, 1]$ ce qui empêche d'appliquer directement le théorème de Borell. Si on définit $F = \max(0, \min(1, f))$, alors $|F - f| = \text{dist}_{[0,1]} F$, et $\text{dist}_{[0,1]}$ est une fonction 1 lipschitzienne. Comme $(Q_t)_{t \geq 0}$ est une contraction et Sq est 2 lipschitzienne,

$$|\mathbb{E}_\gamma(\text{Sq} Q_t f) - \mathbb{E}_\gamma(\text{Sq} Q_t F)| = |\mathbb{E}_\gamma(\text{Sq} Q_t f) - \mathcal{S}_\eta(F)| \leq 2\mathbb{E}_\gamma(|Q_t f - Q_t F|) \leq 2\mathbb{E}_\gamma(\text{dist}_{[0,1]} F).$$

De plus, comme f et F coïncident sur $[0, 1]$, on a par (4.4),

$$|\mathbb{E}_\gamma(\text{dist}_{[0,1]} F) - \mathbb{E}_\gamma(\text{dist}_{[0,1]} F)| = \mathbb{E}_\gamma(\text{dist}_{[0,1]} F) \leq O(C)2^d \tau^{1/4}.$$

De plus, par l'inégalité de Borell, $\mathcal{S}_\eta(F) \leq J_\eta^B(\mathbb{E}_\gamma F, \mathbb{E}_\gamma F)$. L'inégalité ci-dessus implique que

$$|\mathbb{E}_\gamma F - \mathbb{E}_\gamma f| \leq \mathbb{E}_\gamma(\text{dist}_{[0,1]} F) \leq O(C)2^d \tau^{1/4},$$

et comme $\mu \mapsto J_\eta^B(\mu, \mu)$ est $C(\eta)$ -lipschitzienne, ceci prouve que

$$\mathcal{S}_{\eta,b}(f) \leq J_\eta^B(\mathbb{E}_\gamma f, \mathbb{E}_\gamma f) + C(\eta)2^d \tau^{1/4}.$$

Pour une fonction f générale, on considère sa restriction au d premiers degrés $f^{\leq d}$. On utilise l'inégalité précédente pour $f^{\leq d}$, puis on choisit d en fonction de τ pour optimiser les paramètres. On aboutit ainsi à la borne suivante, dont le terme d'erreur tend bien vers 0 avec τ :

$$\mathcal{S}_{\eta,b}(f) \leq J_\eta^B(\mathbb{E}_\gamma f, \mathbb{E}_\gamma f) + C(\eta) \left(\frac{\log \log 1/\tau}{\log 1/\tau} \right).$$

Mentionnons que dans un travail récent, Filmus, Kindler, Mossel et Wimmer sont capables de démontrer ce théorème sur le modèle de Bernoulli–Laplace en établissant sur ce graphe un principe d'invariance analogue à celui de Mossel O'Donnell et Oleskiewicz.

Quelques années plus tard, De, Mossel et Neeman [D-M-Ne] redémontrent ce résultat par un argument de tensorisation à partir d'une inégalité sur l'espace à deux points, procédant ainsi de manière analogue à Bobkov pour sa preuve sur l'isopérimétrie gaussienne. Nous donnons une preuve de De, Mossel et Neeman dans le cadre des mesures biaisées.

Rappelons que la forme fonctionnelle due à Mossel et Neeman du théorème de Borell s'écrit

$$\mathbb{E}_\eta(J_\eta^B(f(X), g(Y))) \leq J_\eta^B(\mathbb{E}_\gamma f, \mathbb{E}_\gamma g),$$

avec (X, Y) des variables gaussiennes η -corrélées. L'énoncé analogue sur le cube discret n'est pas vrai, car les fonctions dictateurs sont des contre exemples comme vu plus haut. Cependant, la conclusion du théorème “Majority is Stablest” est que l'inégalité ci-dessus est “presque vraie” sur le cube sous la condition qu'aucune influence ne soit prédominante, i.e. que toutes les influences tendent vers 0 avec n . Comme $J_\eta^B(x, y) \geq xy$, l'énoncé de “Majority is Stablest” se déduit de l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}_\eta(J_\eta^B(f(X), g(Y))) \leq J_\eta^B(\mathbb{E}_\gamma f, \mathbb{E}_\gamma g) + o_\tau(1),$$

ce qui est précisément établi dans [D-M-Ne]. La preuve repose sur une inégalité établie sur le cube discret obtenue à partir d'une inégalité sur l'espace à deux points et d'un argument de tensorisation. L'inégalité dans [D-M-Ne] est obtenue pour la mesure uniforme, mais elle s'obtient de la même manière sur le cube biaisé. Notons $\kappa_\eta = \kappa_{e^{-t}} = k_t^p$ le noyau du semi-groupe $(T_t^p)_{t \geq 0} = (e^{tL})_{t \geq 0}$ où l'on rappelle que $Lf = \int_{\{-1,1\}} f d\nu_p - f$. Alors $t \mapsto k_t^p$ est solution de l'équation différentielle $y' = 1 - y$, et ainsi $k_t^p(x, y) = (k_0^p(x, y) - 1)e^{-t} + 1$ avec les conditions initiales données par $f(x) = \int_\Omega f(y) k_0^p(x, y) d\nu_p(y)$, ce qui donne $k_0^p(1, 1) = 1/p$, $k_0^p(-1, -1) = 1/(1-p)$ et $k_0^p(1, -1) = k_0^p(-1, 1) = 0$.

Notons $f : x \in \{-1, 1\} \mapsto a + ux$, $g : y \in \{-1, 1\} \mapsto b + vy$, $\mathbb{E}_\eta J_\eta^B(f, g)$ s'écrit alors explicitement comme

$$(p^2 + p(1-p)\eta)J_\eta^B(a+u, b+v) + ((1-p)^2 + p(1-p)\eta)J_\eta^B(a-u, b-v) + p(1-p)(1-\eta)(J_\eta^B(a+u, b-v) + J_\eta^B(a-u, b+v)).$$

De plus,

$$J_\eta^B(\mathbb{E}f, \mathbb{E}g) = J_\eta^B(a + (2p-1)u, b + (2p-1)v).$$

Par un développement de Taylor à l'ordre 3 en (u, v) , on obtient :

$$\mathbb{E}_\eta J_\eta^B(f, g) - J_\eta^B(\mathbb{E}f, \mathbb{E}g) = A_p(\partial_{11}J_\eta^B(a, b)u^2 + 2\eta\partial_{12}J_\eta^B(a, b)uv + \partial_{22}J_\eta^B(a, b)v^2) + O(|u|^3, |v|^3, \eta)$$

où $A_p = 2p(1-p)$. On rappelle que J_η^B est η -concave, c'est-à-dire

$$M_\eta = \begin{pmatrix} \partial_{11}J_\eta^B & \eta\partial_{12}J_\eta^B \\ \eta\partial_{12}J_\eta^B & \partial_{22}J_\eta^B \end{pmatrix} \leq 0.$$

De plus, quelques calculs montrent qu'il existe des constantes $C(\eta)$ et $c(\eta)$ telles que :

$$\forall i+j=3, |\partial_{i,j}^3 J_\eta^B(x, y)| \leq C(\eta) \left(\frac{1}{x(1-x)y(1-y)} \right)^{c(\eta)}.$$

Ainsi sur l'espace à deux points, on a "l'inégalité de Borell discrète" pour des fonctions à valeurs dans $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$:

$$\mathbb{E}_\eta J_\eta^B(f, g) \leq J_\eta^B(\mathbb{E}_{\nu_p} f, \mathbb{E}_{\nu_p} g) + C(\eta, p)\varepsilon^{-c(\eta)}(|f - \mathbb{E}_{\nu_p} f|^3 + |g - \mathbb{E}_{\nu_p} g|^3). \quad (4.5)$$

Cette équation se tensorise sous la forme suivante :

$$\mathbb{E}_\eta J_\eta^B(f, g) \leq J_\eta^B(\mathbb{E}_{\nu_p^{\otimes n}} f, \mathbb{E}_{\nu_p^{\otimes n}} g) + C(\eta, p)\varepsilon^{-c(\eta)}(\Delta_n(f) + \Delta_n(g)), \quad (4.6)$$

avec $\Delta_n(f)$ défini par récurrence comme $\Delta_1(f) = \mathbb{E}_{\nu_p}|f - \mathbb{E}_{\nu_p} f|^3$ et $\Delta_n(f) = \mathbb{E}_{X_n}(\Delta_{n-1}f_{X_n}) + \Delta_1(\mathbb{E}(f_{X_n}|X_n))$. Pour $f = g$, puisque $J_\eta^B(x, y) \geq xy$, (4.6) implique que :

$$\mathcal{S}_\eta^p(f) \leq J_\eta^B(\mathbb{E}_{\nu_p^{\otimes n}} f, \mathbb{E}_{\nu_p^{\otimes n}} g) + C(\eta, p)\varepsilon^{-c(\eta)}\Delta_n(f).$$

La tâche principale de [D-M-Ne] est donc de borner le terme d'erreur $C(\eta, p)\varepsilon^{-c(\eta)}\Delta_n(f)$ par le maximum des influences de f . Or dans le cas biaisé,

$$\mathbb{E}(|f - \mathbb{E}_{\nu_p}(f)|^3) = \frac{p^2 + (1-p)^2}{\sqrt{p(1-p)}} |\hat{f}(1)|^3 = K_p |\hat{f}(1)|^3.$$

Par récurrence, en notant $S_i = \{i+1, \dots, n\}$, on obtient

$$\Delta_n(f) = K_p \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{X \in \{-1, 1\}^{S_i}} |\hat{f}_X(i)|^3 = K_p \sum_{S \in [n], S \neq \emptyset} \hat{f}^3(S).$$

En réécrivant

$$\sum_{S \in [n], S \neq \emptyset} \hat{f}^3(S) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{X \in \{-1, 1\}^{S_i}} |\hat{f}_X(i)|^3$$

l'idée est d'utiliser l'inégalité (4.6) à une petite perturbation de f , pour pouvoir utiliser l'hypercontractivité. Par abus de notation, on note $T_{1-\eta_1}^p f$ pour $T_{-\log(1-\eta_1)}^p f$. Pour η_1 petit, cette perturbation n'affecte pas trop la stabilité au bruit car

$$|\mathcal{S}_\eta^p(f) - \mathcal{S}_\eta^p(T_{1-\eta_1}^p f)| = |\mathcal{S}_\eta^p(f) - \mathcal{S}_{(1-\eta_1)^2\eta}^p(f)| \leq O(\eta_1). \quad (4.7)$$

De plus, l'hypercontractivité du semi-groupe (T_t^p) implique que

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{X \in \{-1,1\}^{S_i}} |\widehat{T_{1-\eta_1}^p f}_X(i)|^r \leq \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{X \in \{-1,1\}^{S_i}} |\hat{f}_X(i)|^2 \right)^{r/2} \quad (4.8)$$

avec $r = 1 + (1 - \eta_1)^{-2C_p}$, où l'on rappelle que $C_p = 2 \frac{2p-1}{\log p - \log(1-p)}$. Comme pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{E}_{X \in \{-1,1\}^{S_i}} |\hat{f}_X(i)|^2 \leq \sum_{i \in S} \hat{f}^2(S) = I_i(f) \leq \tau,$$

et comme l'identité de Parseval implique que

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{X \in \{-1,1\}^{S_i}} |\hat{f}_X(i)|^2 = \sum_{S \in [n], S \neq \emptyset} \hat{f}^2(S) = \text{Var}_{\nu_p}(f) \leq 1,$$

on a par (4.8) la majoration suivante :

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{X \in \{-1,1\}^{S_i}} |\widehat{T_{1-\eta_1}^p f}_X(i)|^r \leq \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{X \in \{-1,1\}^{S_i}} |\widehat{T_{1-\eta_1}^p f}_X(i)|^2 \right)^{\frac{r-2}{2}} \tau^{\frac{r-2}{2}} \leq \tau^{\frac{r-2}{2}}.$$

Ainsi, si η_1 est assez petit, cela implique que $r \leq 3$ et, de plus, il existe une constante numérique $c \in (0, 1)$ telle que :

$$\Delta_n(T_{1-\eta_1}^p f) \leq K_p \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{X \in \{-1,1\}^{S_i}} |\widehat{T_{1-\eta_1}^p f}_X(i)|^r \leq K_p \tau^{cC_p\eta_1},$$

et alors

$$\mathcal{S}_{(1-\eta_1)^2\eta}^p(f) \leq J_\eta^B(\mathbb{E}(f), \mathbb{E}(f)) + C(\eta, p) \varepsilon^{-c(\eta)} \tau^{cC_p\eta_1}. \quad (4.9)$$

Lorsque p est indépendant de n , on peut enlever les dépendances en p .

Soit maintenant une fonction générale $f : \{0, 1\}^n \rightarrow [0, 1]$. On tronque la fonction sur $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ en prenant $f_\varepsilon^+ = \max(\varepsilon, f)$ et ensuite $f_\varepsilon = \min(1 - \varepsilon, f_\varepsilon^+)$. On lui applique une petite perturbation $T_{1-\eta_1}^p$, et par les inégalités (4.7), (4.10) et le fait que $\mu \mapsto J_\eta^B(\mu, \mu)$ est $C(\eta)$ -lipschitzienne,

$$\mathcal{S}_\eta^p(f) \leq \mathcal{S}_{(1-\eta_1)^2\eta}^p(f_\varepsilon) + C(\varepsilon + \eta_1) \leq J_\eta^B(\mathbb{E}(f), \mathbb{E}(f)) + C(\eta)(\varepsilon + \eta_1 + \varepsilon^{-c(\eta)} \tau^{c\eta_1}).$$

En choisissant η_1 et ε de manière appropriée, on en déduit ainsi

$$\mathcal{S}_\eta^p(f) \leq J_\eta^B(\mathbb{E}(f), \mathbb{E}(f)) + C(\eta) \left(\frac{\log \log 1/\tau}{\log 1/\tau} \right). \quad (4.10)$$

Ceci est la version biaisée du théorème "Majority is stablest".

4.7.3 Remarque sur les espaces discrets généraux et résultat sur les tranches du cube

Une question en grande partie ouverte est celle de la généralisation de ce théorème sur des modèles discrets plus généraux. Nous avons en effet défini les notions de stabilité au bruit et d'influences sur de tels espaces. La question plutôt générale est de savoir pour quels graphes (G_n, V_n) , munis de leurs mesures uniformes μ_n , l'inégalité suivante est vraie pour tout $f : G_n \rightarrow [0, 1]$ telles que $\max_{s \in S_n} I_s(f) = \tau$,

$$\mathcal{S}_\eta(f) \leq J_\eta^B(\mathbb{E}_{\mu_n}(f), \mathbb{E}_{\mu_n}(f)) + o_\tau(1).$$

À ce jour, il existe une généralisation autre que sur le cube de ce résultat, sur les tranches du cube booléen d'ordre k $\binom{[n]}{k} := \{x \in \{0, 1\}^n, \sum_{i=1}^n x_i = k\}$, avec k de l'ordre de n . Rappelons que sur cet espace, l'inégalité de Talagrand est vraie. Notons $S_\eta^s(f)$ la “noise stability” dans ce contexte. On rappelle que les influences sont définies par

$$I_{ij}f := \|x \mapsto f(x) - f(x^{(ij)})\|_{L^1(\mu)} = \|D_{(ij)}f\|_{L^1(\mu)}$$

où μ est la mesure uniforme sur $\binom{[n]}{k}$. Alors on a le théorème suivant :

Théorème 4.7.3. *Pour toute fonction définie sur $\binom{[n]}{k}$ à valeurs dans $[0, 1]$ et dont les influences sont bornées par τ , on a*

$$S_\eta^s(f) \leq J_\eta^B(\mathbb{E}_\mu(f), \mathbb{E}_\mu(f)) + o_\tau(1).$$

Ce théorème est en fait un corollaire de l'extension du principe d'invariance aux tranches du cube. Une fois ce principe établi, la preuve suit par les mêmes arguments, rappelés plus haut, que ceux de [M-O-O].

Ce principe d'invariance s'appuie sur le travail préalable de Filmus [Fil]. Dans [Fil], Filmus construit une base orthonormée de polynômes multilinéaires pour les tranches du cube. Ceci permet de relever toute fonction du cube sur $\mathbb{R}^n$ et donc également sur le cube booléen. Notons pour f définie sur les tranches du cube, $\tilde{f}$ la fonction relevée sur le cube. Cette opération préserve l'espérance, c'est-à-dire que si $p = k/n$, $\mathbb{E}_\mu f = \mathbb{E}_{\nu_p} \tilde{f}$. De plus comme dans le cas du cube, la base $(\chi_a)_a$ est telle que les éléments qui la constituent sont des fonctions propres du semi-groupe sous-jacent $(P_t)_{t \geq 0}$. Ainsi, de manière spectrale, on peut écrire

$$\mathcal{S}_\eta^s(f) = \sum_{d=0}^{\deg f} \eta^{c_k} \|f^{=k}\|_2^2,$$

où cette fois $c_k = k(1 - (k-1)/n)$. Contrairement aux cas du cube et de l'espace gaussien, les semi-groupes n'agissent pas de la même façon sur χ_a . Toutefois, si n est assez grand, c'est “presque” le cas. En effet,

$$\mathcal{S}_\eta^s(f) - \mathcal{S}_\eta^p(\tilde{f}) = \sum_{k=0}^{\deg f} (\eta^{c_k} - \eta^k) \|f^{=k}\|_2^2,$$

et comme pour tout $k \leq n/2$, $\eta > 1/2$, $\eta^{c_k} - \eta^k \leq \frac{C(\eta)}{n}$, on a pour toute fonction définie sur les tranches du cube à valeurs dans $[0, 1]$

$$\mathcal{S}_\eta^s(f) - \mathcal{S}_\eta^p(\tilde{f}) \leq \frac{C(\eta)}{n}.$$

De même, les influences de f et $\tilde{f}$ sont presque du même ordre si le degré de f est bas. Nous avons en effet le lemme suivant :

Lemme 4.7.4. *Pour toute fonction f de degré au plus d définie sur $\binom{[n]}{k}$, si l'on pose $I_i(f) = \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} I_{ij}(f)$, alors*

$$I_i(\tilde{f}) \leq \frac{2d}{p(1-p)(n-d)} \text{Var}_\mu(f) + \frac{2n}{p(1-p)(n-d)} I_i(f).$$

La contrainte de se restreindre à des fonctions de faible degré n'est pas trop restrictive. En effet, on peut prendre $d = n^{1/3}$ plus haut. La restriction d'une fonction générale à ses termes de degré au plus $n^{1/3}$ n'affecte sa noise stability et son espérance que d'un terme négligeable $o_n(1)$. La difficulté en vue d'appliquer (4.10) est que l'extension $\tilde{f}$ n'est pas forcément à valeur dans $[0, 1]$.

Si l'on définit $F = \max(0, \min(1, \tilde{f}))$, il reste à démontrer que les quantités $\mathcal{S}_\eta^p(\tilde{f}) - \mathcal{S}_{\eta,p}(F)$ et $\mathbb{E}_{\nu_p} F - \mathbb{E}_{\nu_p}(\tilde{f})$ sont petites. Le principe d'invariance le garantit, mais il est possible que l'on puisse obtenir ce résultat de manière plus directe.

Pour en revenir à la généralisation possible sur des modèles plus généraux, deux difficultés se présentent. La preuve discrète de De Mossel et Neeman, bien que basée sur une idée simple, nécessite d'écrire la première ligne. Même sur les tranches du cube booléen, ce n'est pas clair.

La preuve par principe d'invariance, quant à elle, nécessite la bonne connaissance d'une base orthonormée sur laquelle décomposer les fonctions selon ses "degrés".

4.7.4 Remarque sur l'hypercontractivité.

Pour conclure cette section, faisons une remarque sur l'hypercontractivité. Comme expliqué dans le cas gaussien, un autre exemple de fonction η -concave est donné par fonction d'hypercontractivité $J_\eta^H(u, v) = u^\alpha v^\beta$ avec $\alpha\beta\eta^2 = (\alpha-1)(\beta-1)$. Le lemme de Bonami sur deux points $\|T_t f\|_{L^p(\{-1,1\})} \leq \|f\|_{L^q(\{-1,1\})}$ implique par dualité :

$$\mathbb{E}_\eta J_\eta^H(f, g) \leq J_\eta^H(\mathbb{E}_\nu f, \mathbb{E}_\nu g),$$

et ainsi par tensorisation, l'hypercontractivité dualisée s'écrit :

$$\mathbb{E}_\eta J_\eta^H(f, g) \leq J_\eta^H(\mathbb{E}_{\nu^{\otimes n}} f, \mathbb{E}_{\nu^{\otimes n}} g).$$

Cela signifie que contrairement à la fonction de Borell J_η^B , l'inégalité pour J_η^H s'écrit de la même façon que pour le cas gaussien. Cette propriété est ainsi strictement plus forte que celle d' η -concavité. En fait, le cas à deux points s'écrit :

$$(1 + \eta)[(1 + u)^\alpha(1 + v)^\beta + (1 - u)^\alpha(1 - v)^\beta] + (1 - \eta)[(1 - u)^\alpha(1 + v)^\beta + (1 + u)^\alpha(1 - v)^\beta] \leq 4.$$

Par homogénéité, u, v peuvent être supposés dans $(0, 1)$. Contrairement au cas non dualisé, cette inégalité s'avère de manière surprenante beaucoup plus délicate à prouver. En développant en série entière, elle se réécrit :

$$\sum_{k \geq 1} \frac{2}{(2k)!} \left(a_k v^{2(k+1)} + b_k \eta v^{2k} \right) \leq 0,$$

avec

$$a_k = \sum_{0 \leq j < k} \binom{2k}{2j+1} \binom{\alpha}{2j+1} \binom{\beta}{2(k-j)+1} \left(\frac{u}{v}\right)^{2j+1} \quad b_k = \sum_{0 \leq m \leq k} \binom{2k}{2m} \binom{\alpha}{2m} \binom{\beta}{2(k-m)} \left(\frac{u}{v}\right)^{2m}$$

et contrairement au cas à deux points, tous les termes du développements ne sont pas nécessairement négatifs.

Notons que nous avons trouvé une preuve directe de cette inégalité par Schramm and Tsirelson [Sc-Ts] (écrite dans le cas où $\alpha = \beta$). Ce lemme sur deux points est utilisé par les auteurs pour donner une preuve à l'inégalité d'hypercontractivité sur des modèles d'arbres en utilisant un argument de martingale.

4.8 Présentation des travaux de la seconde partie.

Cette section a pour but de présenter les travaux réalisés dans l'article [Bou]. Le résultat principal est l'extension d'une version quantitative du critère de Benjamini, Kalai et Schramm à des modèles de graphes de Schreier assez généraux, ainsi que sa version sur des modèles continus. L'analogue continu nécessite la définition d'influences et de stabilité au bruit dans ce cadre. Nous nous appuyons sur la définition d'influences géométriques de Keller, Mossel et Sen, issue de [K-M-S1], qui est présentée dans la sous-section suivante.

Avant d'aborder le critère de Benjamini, Kalai et Schramm, il nous semble bon de présenter succinctement les extensions faites par O'Donnell et Wimmer et Cordero-Erausquin et Ledoux des inégalités de Kahn, Kalai et Linial et de Talagrand sur des modèles de graphes de Cayley ou de Schreier. En effet, le schéma de preuve de nos résultats est directement inspiré de celui de [CE-L]. L'article [O-W] présente quant à lui plusieurs intérêts. En premier lieu, les auteurs y donnent un critère sur les graphes pour avoir une commutation entre le semi-groupe et les influences. Cette propriété est cruciale et est présente dans tous les travaux cités. De plus, cette preuve fait apparaître un lien entre la constante de Sobolev logarithmique et celle de trou spectral pour qu'une inégalité de ce type puisse améliorer l'inégalité de Poincaré. Enfin, les idées de la preuve d'O'Donnell et Wimmer ont été reprises par Förstström qui de manière indépendante à notre travail a également étendu le critère B-K-S sur des graphes de Schreier.

Influences géométriques

Soit $(\mathbb{R}^n, \mu^{\otimes n})$ un espace probabilisé. Dans ce cadre continu, Keller, Mossel et Sen [K-M-S1] définissent la notion d'influence géométrique d'une coordonnée i , $i \in \{1, \dots, n\}$ par

$$I_i^{\mathcal{G}}(A) = \mathbb{E}_x[\mu^+(A_i^x)].$$

Ici $A_i^x \subset \mathbb{R}$ est la restriction de A le long de la fibre $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire

$$A_i^x = \{y \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) \in A\}$$

et où l'on rappelle que μ^+ dénote le contenu inférieur de Minkowski. De manière heuristique, $I_i^{\mathcal{G}}(A) = \mathbb{E}_\mu(|\partial_i \mathbf{1}_A|)$. Plus précisément, comme démontré par les auteurs, lorsque l'ensemble A est monotone (i.e. $\mathbf{1}_A$ est monotone), $I_i^{\mathcal{G}}(A) = \lim_{f \rightarrow \mathbf{1}_A} \mathbb{E}_\mu(|\partial_i f|)$. Concernant cette définition d'influences géométriques, plusieurs remarques peuvent être faites. Pour un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ croissant ou décroissant, la somme $\sum_{i=1}^n I_i^{\mathcal{G}}(A)$ représente la mesure de bord pour l'élargissement uniforme, c'est-à-dire

$$\mu_\infty^+(A) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(A + [-r, r]^n) - \mu(A)}{r}.$$

Lorsque A est un sous-ensemble dont le bord ∂A est une surface régulière dont nous notons σ_A sa mesure de surface, si ρ désigne la densité de μ et n_A la normale extérieure à A , on a :

$$\mu_\infty^+(A) = \int_{\partial A} \|n_A(x)\|_1 \rho(x) d\sigma_A(x).$$

Remarquons que comme $\|n_A\|_1 \geq 1$, on a toujours $\mu_\infty^+(A) \geq \mu^+(A)$.

Les auteurs prouvent un analogue du théorème de Kahn, Kalai et Linial pour des mesures de Boltzmann de la forme $\mu(dx) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-|x|^\beta} dx$, c'est-à-dire $\max_i I_i^{\mathcal{G}}(A) \geq \frac{\log n}{n}$. La preuve repose essentiellement sur des arguments géométriques.

Rappelons que l'inégalité de Talagrand implique celle de Kahn, Kalai et Linial. L'extension de l'inégalité de Talagrand sur l'espace gaussien - et plus généralement sur des mesures log-concaves, bien que non publiée, était connu depuis longtemps par les spécialistes. Un obstacle à l'application

de cette inégalité aux influences géométriques est que $\mathbb{E}_\mu(\partial_i f)^2$ ne converge pas vers la i -ème influence géométrique d'un ensemble lorsque f approche la fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$. Dans [CE-L], les auteurs modifient donc l'inégalité de Talagrand de façon à n'exprimer que des normes L^1 de dérivées. L'inégalité qui en découle permet de retrouver l'analogue du théorème KKL pour les mesures $\mu(dx) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-|x|^\beta} dx$, mais seulement pour $\beta \geq 2$.

Notons également qu'un travail indépendant de Barthe et Huou [B-H] sur le problème isopérimétrique sous l'élargissement uniforme permet de retrouver le théorème K-K-L de Keller, Mossel et Sen sous une forme plus intrinsèque.

Dans [K-M-S2], les auteurs lient cette notion d'influence géométrique à celle de noise stability/sensitivity en utilisant une version quantitative du critère B-K-S due à Keller et Kindler sur le cube et un argument utilisant le théorème de la limite centrale. Le résultat qui en découle est une version quantitative analogue sur l'espace gaussien. Dans nos travaux, nous donnons une preuve dont le schéma est directement inspiré de celui de [CE-L] sur l'inégalité de Talagrand. Ce schéma permet d'étendre les résultats de [K-M-S2] à des produits de mesures log-concaves satisfaisant le critère de courbure $CD(\kappa, \infty)$ de Bakry–Emery, en plus de couvrir des espaces discrets plus généraux.

Noise stability/sensitivity

De manière duale au concept de noise stability, on définit celui de noise sensitivity gaussienne par $\mathcal{NS}_\eta^g(A) = \mathcal{S}_\eta(A) - \gamma(A)^2$. Notons que cette définition n'est pas universelle. On peut également définir la noise sensitivity par $\gamma(A) - \mathcal{S}_\eta(A)$, ce qui correspond en notation probabiliste à $\mathbb{P}(X \in A, Y \notin A)$, pour (X, Y) des variables gaussiennes η -corrélées. Nous conserverons la première définition.

Une suite d'ensembles $(A_n \subset \mathbb{R}^n)_{n \geq 0}$ est dite asymptotiquement sensible au bruit si $\mathcal{NS}_\eta^g(A_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Comme pour les modèles discrets, la noise sensitivity se définit à l'aide du semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck par

$$\mathcal{NS}_\eta^g(A) = \text{Var}_\gamma(Q_{t/2} \mathbf{1}_A),$$

pour $\eta = e^{-t}$. De manière plus générale, pour des mesures log-concaves, on pose donc naturellement la définition suivante :

Définition 4.8.1. Soit $(\mathbb{R}^n, \mu)$ satisfaisant la condition $CD(\kappa, \infty)$. Alors on définit la noise sensitivity d'une fonction f par

$$\mathcal{NS}_\eta(f) = \text{Var}_\gamma(P_{t/2} f),$$

où $\eta = e^{-\kappa t}$.

Notons que si H est un demi-espace tel que $\mu(A) = \gamma(H)$, le théorème de comparaison obtenu dans le chapitre 2 implique donc que

$$\mathcal{NS}_\eta(A) \leq \mathcal{NS}_\eta^g(H).$$

O'Donnell, Wimmer et K-K-L

Dans cette sous-section, nous donnons un aperçu général de la preuve du théorème K-K-L généralisé par O'Donnell et Wimmer dans [O-W]. Soit (X, G) un graphe de Schreier. Notons $\{0 = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots\}$, le spectre de $-L$ (avec $\lambda_1 = \lambda$ le trou spectral), et f_i les fonctions propres associées aux valeurs propres λ_i . On note également ρ la constante d'hypercontractivité du graphe et on rappelle que $\rho \leq \lambda$. De manière cruciale, les auteurs s'appuient sur une commutation entre le semi-groupe P_t et les opérateurs de dérivation D_s . Leur hypothèse est que le groupe générateur S est une réunion de classe de conjugaison. Alors, dans ce cas, on dispose du lemme suivant :

Lemme 4.8.2. *Supposons que S soit une réunion de classes de conjugaison. Alors pour tout $s \in S$, $D_s P_t = P_t D_s$.*

Démonstration. Nous allons prouver que les opérateurs K et $I - D_s$ commutent, ce qui implique la même chose pour L et D_s . Puisque $(I - D_s)f(x) = f(x^s)$, on a

$$K(I - D_s)f(x) = \mathbb{E}_{s'}[(I - D_s)f(x^{s'})] = \mathbb{E}_{s'}[f(x^{s's})] = \mathbb{E}_{s'}[f(x^{ss^{-1}s's})].$$

Comme $s' \mapsto s^{-1}s's$ est une injection sur S , et puisque S est un ensemble fini, c'est aussi une bijection. Ainsi

$$\mathbb{E}_{s'}[f(x^{ss^{-1}s's})] = \mathbb{E}_t[f(x^{st})] = Kf(x^s) = (I - D_s)(Kf)(x).$$

Comme L et D_s commutent, c'est également le cas pour $(P_t)_{t \geq 0}$ et D_s . □

De plus, les auteurs supposent que les fonctions sont booléennes. Ce dernier point implique que pour tout $r \geq 1$, $I_s(f) = \|D_s f\|_r^r$. Ceci, combiné à l'hypercontractivité, entraîne le fait suivant

$$I_s(P_t f) = \|D_s P_t f\|_2^2 = \|P_t D_s f\|_2^2 \leq \|D_s f\|_{1+e^{-\rho t}}^2 = I_s(f)^{\frac{2}{1+e^{-2\rho t}}}.$$

On peut ainsi majorer $\sum_{s \in S} I_s(P_t f)$ en termes de $\sum_{s \in S} I_s(f)$ et du maximum des influences (grâce au facteur $2(1 + e^{-2\rho t})^{-1} > 1$). Par décomposition spectrale selon l'opérateur L , on exprime de plus la somme des influences comme

$$\sum_{s \in S} I_s(f) = \mathcal{E}(f) = \sum_{i \geq 0} \lambda_i \|f_i\|_2^2.$$

Appliquant cette égalité à $P_t f$, pour tout $\Lambda \geq 0$, on peut également minorer la somme des influences de $P_t f$ par $(\min_{i \leq \Lambda} \lambda_i e^{-t\lambda_i}) \sum_{0 \leq i \leq \Lambda} \|f_i\|_2^2$.

En choisissant $t = \frac{\ln 3}{2} \frac{1}{\rho}$ et $\Lambda = \frac{2\mathcal{E}(f)}{\text{Var}_\mu(f)}$, $\min_{i \leq \Lambda} \lambda_i e^{-t\lambda_i} = \Lambda 3^{-\frac{\Lambda}{\rho}}$, $\sum_{0 \leq i \leq \Lambda} \|f_i\|_2^2 \geq \frac{1}{2} \text{Var}_\mu(f)$, et ainsi

$$\sum_{s \in S} I_s(P_t f) \geq \mathcal{E}(f) 3^{-\frac{\Lambda}{\rho}}.$$

Mais d'autre part, $\frac{2}{1+e^{-2\rho t}} = 4/3$ donc l'hypercontractivité implique que

$$\sum_{s \in S} I_s(P_t f) \leq \sum_{s \in S} I_s(f)^{3/2} \leq \mathcal{E}(f) \max_{s \in S} \sqrt{I_s(f)}.$$

En particulier, en combinant les deux bornes, on obtient $\max_{s \in S} \sqrt{I_s(f)} \geq 3^{-\frac{\Lambda}{\rho}}$. En remplaçant Λ par son expression, cette inégalité implique qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\max_{s \in S} I_s(f) \geq c \rho \log\left(\frac{1}{\rho}\right) \text{Var}_\mu(f).$$

Ce résultat est exprimé en termes de normalisation de graphes de Cayley. Il contient bien le théorème K-K-L sur le cube biaisé. Il est intéressant et important de noter que l'inégalité de trou spectral implique que $\max_{s \in S} I_s(f) \geq c \lambda \text{Var}_\mu(f)$, ce qui signifie que la proposition améliore l'inégalité de trou spectral si et seulement si le ratio $\frac{\rho_n}{\lambda_n} \log\left(\frac{1}{\rho_n}\right)$ tend vers l'infini avec n .

Ce résultat n'est pas en soi surprenant : si l'hypercontractivité n'est pas assez forte, l'inégalité n'améliore pas celle de Poincaré. Rappelons que de nombreux exemples concrets sont disponibles où l'on connaît un ordre de grandeur de ces constantes. Par exemple, pour le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, O'Donnell et Wimmer montrent qu'une minoration plus forte que celle donnée par le trou spectral ne peut pas être vraie. En effet, on a le lemme suivant :

Lemme 4.8.3. Soit f_n la fonction caractéristique d'un dérangement de $\mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire une permutation σ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma(i) \neq i$. Alors $\forall n \geq 1$, $\text{Var}_\mu(f_n) \geq 1/9$ et $\forall \tau_{ij} \in \mathcal{T}_n$, $I_{\tau_{ij}}(f_n) \leq \frac{2}{n}$.

Démonstration. Par un principe d'exclusion/inclusion classique, le nombre total de dérangements est égal à $n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. Ainsi $\mathbb{P}(f_n = 1) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \in (1/2, 1/3)$, et donc $\inf_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_\mu(f_n) > 0$. De plus, toutes les transpositions ont mêmes influences. Or $(f(\sigma \circ (12)) \neq f(\sigma))$ si et seulement si $\sigma(1) = 2$ ou $\sigma(2) = 1$. Ceci arrive avec probabilité au plus $2/n$, et ainsi pour toute transposition $\tau_{ij} \in \mathcal{T}_n$, $I_{\tau_{ij}}(f) \leq 2/n$. $\square$

Une remarque concernant cet article, dont l'esprit de la preuve est similaire à l'article original de Kahn, Kalai et Linial, est que les résultats sont énoncés pour des fonctions à valeurs dans $\{0, 1\}$. Il est en effet crucial d'utiliser l'égalité pour tout $r \geq 1$, $I_s(f) = \|D_s f\|_r^r$, faute de quoi la preuve ne fonctionne plus. L'inégalité de Talagrand généralisée par Cordero-Erausquin et Ledoux permet de s'affranchir de cette condition. Nous présentons le schéma de leur preuve dans la sous-section suivante.

L'inégalité de Talagrand d'après Cordero-Erausquin et Ledoux

La preuve d'O'Donnell et Wimmer présentée utilise la décomposition de la forme de Dirichlet le long de "directions" données par le générateur S du graphe de Schreier ou Cayley. L'inégalité de Talagrand sous cette condition de décomposition s'adapte très bien à la condition que, en un certain sens, les directions commutent avec l'opérateur de dérivations. Ceci peut être exprimé de façon abstraite, qui s'applique immédiatement à des exemples concrets. c'est-à-dire, partant de la décomposition suivante :

$$\mathcal{E}(f, f) = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \Gamma_i(f)^2 d\mu, \quad (4.11)$$

supposons que les opérateurs Γ_i commutent avec le semi-groupe au sens où il existe κ tel que $i = 1, \dots, m$

$$\Gamma_i(P_t f) \leq e^{\kappa t} P_t(\Gamma_i f). \quad (4.12)$$

Cette propriété, caractéristique du critère $\Gamma_2 \geq \kappa \Gamma$ dans le cadre continu, est néanmoins un peu différente dans le cas discret. En effet, on demande seulement une commutation selon toutes les directions et non une commutation globale. Dans les exemples de graphes de Schreier ou Cayley que nous considérons, la commutation entre l'opérateur de Markov L et les dérivées D_s découlent de l'hypothèse $S = S^{-1}$ (comme vu plus haut).

Notons toutefois qu'à partir du laplacien discret (somme aux plus proches voisins), Kozma, Klartag, Ralli et Tetali [K-K-R-T] donnent une définition du "carré du champ" et de ses itérés, et définissent ainsi une notion de courbure minorée similaire à celle de Bakry-Emery. Cette définition implique de manière analogue au cadre continu une commutation entre le semi-groupe et l'opérateur de dérivation. On pourrait ainsi considérer des produits de tels espaces discrets pour établir une généralisation de l'inégalité de Talagrand.

Pour les modèles continus, c'est le critère de Bakry-Emery qui permet cette commutation. Rappelons que pour le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^n$, $\partial_i Q_t f = e^{-t} Q_t(\partial_i f)$ c'est-à-dire (4.12) avec $\kappa = 1$. Pour les mesures log-concaves $d\mu(x) = e^{-V(x)} dx$ sur $\mathbb{R}^n$, dès que V satisfait $\text{Hess}(V) \geq c$ avec $c \in \mathbb{R}^+$, pour toute fonction lisse $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$,

$$|\nabla P_t f| \leq e^{-ct} P_t(|\nabla f|). \quad (4.13)$$

Si l'on prend un produit de telles mesures $d\mu_i(x) = e^{-V_i(x)} dx$, $i = 1, \dots, m$, tel que chaque V_i satisfasse $\text{Hess}(V_i) \geq c_i$ avec $c_i \in \mathbb{R}^+$, on obtient une décomposition du type (4.11) avec $\Gamma_i = \nabla_i$ et $\kappa = \min c_i$. Notons que l'on pourrait considérer de manière identique des produits de variétés Riemanniennes à poids $(M_i, g_i, e^{-\psi_i} d\text{vol})$ tels que $\text{Ric}_{g_i} + \text{Hess}\psi_i \geq c_i$.

Pour l'inégalité de Talagrand, le point de départ est d'utiliser la décomposition de la variance le long de la forme de Dirichlet, c'est-à-dire

$$\mathrm{Var}_\mu(f) = 2 \int_0^\infty \mathcal{E}(P_u f, P_u f) du = 2 \sum_{s \in S} \int_0^\infty \|D_s P_u f\|_2^2 du.$$

Notons que sur les modèles discrets, la commutation exacte $D_s P_u$ ne permet pas de pouvoir intégrer jusqu'à l'infini. Cependant l'inégalité de trou spectral avec constante λ a pour forme équivalente :

$$\forall T > 0, \mathrm{Var}_\mu(f) \leq \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}} \left(\|f\|_2^2 - \|P_T f\|_2^2 \right).$$

Ceci permet de se restreindre à un domaine fini d'intégration $[0, T]$, car on a de même

$$\|f\|_2^2 - \|P_T f\|_2^2 = 2 \int_0^T \sum_{s \in S} \|D_s P_u f\|_2^2 du.$$

L'utilisation de la propriété de commutation et ainsi que l'hypercontractivité du semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ implique alors (cf [CE-L] pour les détails) que :

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \frac{C}{\rho |S|} \sum_{s \in S} \frac{I_s(f)}{1 + \log(I_s(f))}.$$

Nous retrouvons bien la condition $\rho \log(1/\rho) \gg \lambda$ pour que cette inégalité améliore celle de Poincaré. Notons que ces arguments par semi-groupe permettent de considérer des fonctions à valeurs réelles, et ainsi la condition d'être booléenne n'est pas nécessaire.

L'argument n'est pas exactement le même dans le cadre continu. Pour pouvoir exprimer l'inégalité de Talagrand en termes d'influences géométriques, il faut une borne seulement en terme des normes L^1 des dérivées partielles $\partial_i f$, ce qui est fait dans [CE-L]. Les auteurs prouvent ainsi l'inégalité suivante, pour $d\mu(x) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-|x|^\beta} dx$, avec $\beta \geq 2$:

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq C(\rho) \sum_{i=1}^n \frac{\|\partial_i f\|_1 (1 + \|\partial_i f\|_1)}{(1 + \log^+(1/\|\partial_i f\|_1))^{1/2}}$$

et retrouvent les résultats de [K-M-S1] (mais seulement pour $\beta \geq 2$).

Le critère de Benjamini-Kalai-Schramm

Nous en venons à la présentation de l'extension du critère de Benjamini, Kalai et Schramm sur des modèles plus généraux et de sa version quantitative. Peu après notre travail, un article de Forströmm est paru recoupant certains de nos résultats, avec toutefois des versions quantitatives plus faibles que les nôtres. Une condition commune qui ressort toutefois est que le critère fonctionne lorsque les constantes d'hypercontractivité ρ et de trou spectral λ sont du même ordre. Dans [For], l'auteur applique ses résultats à la notion "d'exclusion sensitivity". En appendice, nous utilisons nos résultats pour redémontrer un théorème dû à Broman, Garban et Steif [B-G-S].

Les outils de la preuve de [For] sont très proches de ceux d'O'Donnell et Wimmer. L'auteur reprend l'équivalence remarquée par Benjamini, Kalai et Schramm :

$$\mathcal{S}_\rho(f_n) \rightarrow 0 \iff \forall \Lambda_n > 0, \sum_{\lambda_{i,n} \leq \Lambda_n} \|\widehat{f_{n,i}}\|_2^2 \rightarrow 0,$$

où l'on écrit $\{0 = \lambda_{0,n}, \lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{i,n}, \dots\}$, le spectre de L_n (avec $\lambda_{1,n} = \lambda_n$ le trou spectral), et où $f_{n,i}$ sont les fonctions propres associées à $\lambda_{1,n}$. L'auteur borne les sommes à droite associant hypercontractivité et inégalité d'Hölder sous la condition que $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions booléennes.

Une condition qui apparaît alors nécessaire est que $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n}{\lambda_n} > 0$. Comme rappelé dans le cas du cube biaisé $\{0, 1\}^n, (p_n \delta_0 + (1 - p_n) \delta_1)^{\otimes n}$, le critère B-K-S n'a pas lieu même qualitativement.

Notre preuve s'appuie sur la décomposition de la variance le long du semi-groupe, déjà utilisée dans [CE-L] :

$$\text{Var}_\mu(P_t f) = 2 \int_t^\infty \mathcal{E}(P_u f, P_u f) du = 2 \sum_{s \in S} \int_t^\infty \|D_s P_u f\|_2^2 du.$$

Dans le cas de graphes de Schreier, la commutation exacte ne permet pas d'intégrer jusqu'à l'infini. Cependant, l'inégalité de trou spectral implique l'inégalité suivante :

$$\forall T > 0, \text{Var}_\mu(f) \leq \frac{1}{1 - e^{-\lambda T}} \int_0^T \mathcal{E}(P_u f, P_u f) du.$$

Comme dans [CE-L], on utilise ensuite la condition de commutation (4.12). A la différence de l'inégalité de Talagrand, le résultat voulu ne fait intervenir que des normes L^1 . Rappelons que nous devons majorer cette quantité par la somme des carrés des influences, c'est-à-dire de la somme des carrés des normes L^1 de $D_s f$. L'hypercontractivité ne permettant pas d'atteindre la norme L^1 (seulement des normes $L^{q(t)}$, $1 < q(t) \leq 2$), l'idée est couper l'intégrale en espace en deux bouts, l'un où $D_s P_u f \leq M \|D_s P_u f\|_1$ (ce qui fait apparaître les carrés des normes L^1) et son complémentaire. Nous utilisons l'hypercontractivité sur le sous-ensemble où $D_s P_u f > M \|D_s P_u f\|_1$ pour retrouver la variance de f en utilisant de nouveau sa représentation le long du semi-groupe. Dans le cas de graphes de Schreier (ou Cayley), le résultat obtenu est le suivant :

$$\forall f : G \rightarrow \mathbb{R}, \text{Var}_\mu(P_t f) \leq \frac{7}{\lambda} \left(\frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} I_s(f)^2 \right)^{c(1-e^{\rho t})} (\text{Var}_\mu f)^{1-c(1-e^{\rho t})}.$$

Cette estimation quantitative est plus précise que celle établie par Förstström, et comme dans le travail de Cordero-Erausquin et Ledoux, il n'y a plus besoin d'imposer de conditions particulières sur f (le fait qu'elle soit dans L^2 est déjà nécessaire pour définir sa stabilité au bruit). Notons que nous retrouvons la condition $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n}{\lambda_n} > 0$ pour ce que ce critère soit utilisable. C'est le cas des structures produits (où le rapport est indépendant de n) et des tranches du cube d'ordre k s'il existe $c > 0$ tel que $cn \leq k(1 - c)n$. En revanche, ce n'est pas le cas sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. On peut à l'instar des travaux de O'Donnell et Wimmer sur le théorème KKL, se demander si le critère de Benjamini, Kalai et Schramm est satisfait. Par exemple, la suite des fonctions caractéristiques de dérangements f_n satisfait :

$$\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} I_{\tau_{ij}}^2(f_n) \leq \frac{4}{n}.$$

On peut se demander si néanmoins, la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite stable au bruit.

Un autre avantage est la souplesse de la preuve permet de l'appliquer aux mêmes modèles que [CE-L], et donc en particulier également à un cadre continu. Pour des produits de mesures log-concaves (par rapport à la gaussienne) à densités régulières (c'est-à-dire tels que $(\mathbb{R}, \mu)$ satisfasse $CD(1, \infty)$), le résultat obtenu, exprimé sur les ensembles en termes d'influences géométriques, prend la forme suivante :

$$\mathcal{S}_\eta(A_n) \leq 4\sqrt{1 - \eta^2} \left(\sum_{i=1}^n I_i^\eta(A_n) \right)^{c\eta} \mu(A_n)^{2-2c\eta}.$$

Ce résultat est non trivial. En effet, prenons un exemple issu de [K-M-S1]. Considérons l'espace gaussien $(\mathbb{R}^n, \gamma)$. Alors, d'après [K-M-S1] (Proposition 4.3), pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, si l'on note $A_n = (-\infty, a_n]^n$ où a_n est tel que $\gamma((-\infty, a_n]^n) = 1/2$, on a :

$$I_i^\eta(A_n) \approx \frac{(\log n)^{1/2}}{n}.$$

Ainsi, alors que $\gamma(A_n)^2 = 1/4$, $\sum_{i=1}^n I_i^{\mathcal{G}}(A_n)^2 \approx \frac{(\log n)}{n}$. On en tire que $\mathcal{S}_\eta(A_n) \leq 4 \left(\frac{\log n}{n} \right)^{c\eta}$, c'est-à-dire que la suite d'ensembles $(A_n)_{n \geq 0}$ est sensible au bruit.

Une autre remarque, issue de [CE-L], est l'implication d'une majoration non triviale de la variance du semi-groupe de la chaleur sur les sphères euclidiennes $\mathbb{S}^n$.

Chapitre 5

Critère BKS pour la noise stability

[Ce chapitre est une adaptation de l'article [Bou], à paraître dans *Combinatorics, Probability and Computing*.]

Keller and Kindler recently established a quantitative version of the famous Benamini –Kalai–Schramm Theorem on noise sensitivity of Boolean functions. The result was extended to the continuous Gaussian setting by Keller, Mossel and Sen by means of a Central Limit Theorem argument. In this work, we present a direct approach of these results, both in discrete and continuous settings. The proof relies on semigroup decompositions together with a suitable cut-off argument allowing for the efficient use of the classical hypercontractivity tool behind these results. It extends to further models of interest such as families of log-concave measures and Cayley and Schreier graphs.

5.1 Introduction

The notion of influences of variables on Boolean functions has been extensively studied over the last twenty years, with applications in various areas such as combinatorics, statistical physics and theoretical computer science, in particular cryptography and computational lower bounds (see e.g. the survey [K-S]). Similarly, the noise sensitivity of a Boolean function is a measure of how its values are likely to change under a slightly perturbed input. Noise sensitivity became an important concept which is useful in many fields such as for instance percolation, from which it was originally defined in [B-K-S]. For an overview of the topic, see e.g. the survey [G-S], in which the noise sensitivity concept and the results of [B-K-S] are used in several percolation models.

Noise sensitivity and influences are closely related. In this work, we will be concerned with recent connections between influences and asymptotic noise sensitivity. To start with, let us recall these two important concepts on the discrete cube $\{-1, 1\}^n$. Rather than noise sensitivity, we describe the dual notion of noise stability. Throughout this paper, denote by ν the product measure $(p\delta_{-1} + (1-p)\delta_1)^{\otimes n}$ on $\{-1, 1\}^n$ where $p \in (0, 1)$.

Let $A \subset \{-1, 1\}^n$. For $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n$ and $i = 1, \dots, n$, let $\tau_i x \in \{-1, 1\}^n$ be the vector obtained from x by changing x_i in $-x_i$ and leaving the other coordinates unchanged. The *influence* of the i -th coordinate on the set A is by definition

$$I_i(A) = 2\nu\{x \in \{-1, 1\}^n; x \in A, \tau_i x \notin A\}.$$

Similarly, the influence of the i -th coordinate on a function $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is given by

$$I_i(f) = \|f(x) - f(\tau_i x)\|_{L^1(\nu)},$$

so that $I_i(A) = I_i(\mathbf{1}_A)$.

Turning to noise stability, let $\eta \in (0, 1)$ and let $X = (X_1, \dots, X_n)$ be distributed according to ν on $\{-1, 1\}^n$. Let $X^\eta = (X_1^\eta, \dots, X_n^\eta)$ be a $(1 - \eta)$ -correlated copy of X , that is $X_j^\eta = X_j$ with probability

$1 - \eta$ and $X_j^\eta = X'_j$ with probability η where X' is an independent copy of X . For a function $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$, following the notations of [K-M-S2], define its *noise stability* as

$$\text{VAR}(f, \eta) = \mathbb{E}_\eta[f(X)f(X^\eta)] - \mathbb{E}_\eta[f(X)]^2.$$

Similarly, for a subset $B \subset \{-1, 1\}^n$, define its noise stability by $\text{VAR}(B, \eta) := \text{VAR}(\mathbf{1}_B, \eta)$. A sequence of functions/sets $(f_{n_\ell})_{n_\ell}, (B_{n_\ell})_{n_\ell}$ over $\{-1, 1\}^{n_\ell}, \ell \in \mathbb{N}$, where $n_\ell \nearrow \infty$, is said (*asymptotically*) *noise sensitive* if its noise stability tends to 0 as ℓ tends to ∞ , that is

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \text{VAR}(f_{n_\ell}, \eta) = 0$$

or

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \text{VAR}(B_{n_\ell}, \eta) = 0$$

for each $\eta \in (0, 1)$.

A first connection between noise sensitivity and influences have been established by Benjamini, Kalai and Schramm in the paper [B-K-S] in the context of percolation theory. They gave a criterion for a sequence a sets to be noise sensitive in terms of the sum of square of the influences. More precisely, one of the main results of [B-K-S] is the following.

Theorem 5.1.1. *Let $B_\ell \subset \{-1, 1\}^{n_\ell}, \ell \in \mathbb{N}$. If*

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_\ell} I_i(B_\ell)^2 = 0, \quad (5.1)$$

then $(B_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ is asymptotically noise sensitive.

This theorem was obtained first for the uniform measure ($p = \frac{1}{2}$). Recently, Keller and Kindler [K-K] established a quantitative version of this result, including the case of biased measure, assuming the bias p does not depend on n . The proof of this quantitative bound goes by Fourier–Walsh expansion together with hypercontractive bounds to control the tails of chaos in the expansion (hypercontractivity is actually also at the root of the asymptotic Theorem 5.1.1). The result is stated below as (5.2) (in a slightly more general form), but before we present the analogous continuous version which has a similar form.

Indeed, the quantitative version of [K-K] has been extended to the continuous Gaussian setting by Keller, Mossel and Sen [K-M-S2]. To describe the result, we need to introduce the corresponding definitions. Let $d\mu(x) = e^{-|x|^2/2} \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}}$ be the canonical Gaussian measure on $\mathbb{R}^n$. For W, W' independent with distribution μ , and $\eta > 0$, set

$$W^\eta = \sqrt{1 - \eta^2} W + \eta W'.$$

For $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, providing that $\|f(W)\|_{L^2(\mu)} < \infty$, define the Gaussian noise stability of f as

$$\text{VAR}^\mathcal{G}(f, \eta) = \mathbb{E}_\mu[f(W)f(W^\eta)] - \mathbb{E}_\mu[f(W)]^2.$$

Similarly, for a (Borel measurable) subset $A \subset \mathbb{R}^n$, set

$$\text{VAR}^\mathcal{G}(A, \eta) = \text{VAR}^\mathcal{G}(\mathbf{1}_A, \eta).$$

In order to discuss the analogue of Theorem 5.1.1 in the Gaussian case, it is necessary to define the influence of the i -th coordinate on a subset $A \subset \mathbb{R}^n$. To this aim, the authors of [K-M-S2] introduce the notion of geometric influence defined by

$$I_i^\mathcal{G}(A) = \mathbb{E}_x[\mu^+(A_i^x)].$$

In the latter expression, $A_i^x \subset \mathbb{R}$ is the restriction of A along the fibre of $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, that is

$$A_i^x = \{y \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) \in A\}$$

and μ^+ denotes the lower Minkowski content, that is for any Borel measurable set $D \subset \mathbb{R}$,

$$\mu^+(D) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(D + [-r, r]) - \mu(D)}{r}$$

(where μ here is the standard Gaussian distribution on $\mathbb{R}$). We refer to [K-M-S1], [K-M-S2] for further developments on geometric influences and their applications.

In both the cube and Gaussian settings, the quantitative noise sensitivity bounds of [K-K] and [K-M-S2] may be then expressed in the following form : for any bounded (by 1) function f and any $\eta \in (0, 1)$,

$$\text{VAR}(f, \eta) \leq C_1 \left(\sum_{i=1}^n I_i(f)^2 \right)^{C_2 \eta} \quad (5.2)$$

for the discrete cube and

$$\text{VAR}^{\mathcal{G}}(f, \eta) \leq C_1 \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_1^2 \right)^{C_2 \eta^2} \quad (5.3)$$

for the Gaussian space, where C_1, C_2 are some positive numerical constants. The results in [K-K] and [K-M-S2] actually extend under a control in $L^2(\mu)$. Indeed, the proof of the Gaussian result in [K-M-S2] relies on the result of the discrete cube in [K-K] together with an appropriate Central Limit Theorem argument. A close inspection of the arguments from [K-K] actually reveals that the Fourier–Walsh decomposition approach may be adapted to a Fourier–Hermite decomposition in the Gaussian case so to yield the same conclusion. Therefore, the boundedness of the functions can be weakened into a control in L^2 .

The Fourier decomposition approach is however somewhat limited to the examples of the discrete cube and the Gauss space due to the suitable commutation between the semigroup and the orthogonal basis of the Fourier decomposition (see [Maz]). In this paper, we develop a new, simpler, proof of these quantitative relationships (5.2) and (5.3) which moreover applies to more general examples. One main ingredient will be once again hypercontractivity as in all previous works [B-K-S], [K-K], [K-M-S2]. The starting point of the proof follows closely the work of [CE-L] which reproves Talagrand’s inequality of [Tal1] for more general models. The framework of [CE-L] applies in a rather general context where hypercontractivity holds together with specific commutation properties. It covers product of (strictly) log-concave probability measures and also discrete examples, including the biased discrete cube or more general Schreier or Cayley graphs.

In this framework, we will establish quantitative relationships between noise stability and influences strengthening therefore the results of [B-K-S], [K-K] and [K-M-S2], under furthermore weaker assumptions. The proposed simpler and more efficient proof relies on semigroup decompositions and cut-off arguments. The following is a sample illustration of the results of this work (in the continuous setting). More complete statements will be presented in the process of the paper.

Theorem 5.1.2. *Let $(\mathbb{R}^n, \mu^{\otimes n})$ with μ on $\mathbb{R}$ on the line of the form $d\mu(x) = e^{-v} dx$ where $v'' \geq c$ uniformly for some $c > 0$. Then, for any $t \geq 0$, and any smooth $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in $L^2(\mu^{\otimes n})$, there exists $C > 0$ depending only on c such that*

$$\text{Var}_{\mu}(P_t f) \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_1^2 \right)^{\frac{1-e^{-ct}}{2}} \|f\|_2^{1+e^{-ct}}.$$

Here $(P_t)_{t \geq 0}$ is the underlying semigroup with invariant measure μ . It will be one of the purposes of the next section to link the quantity $\text{Var}_{\mu}(P_t f)$ to noise stability. In particular, for the

Gaussian measure, we will see that $\text{VAR}^{\mathcal{G}}(f, \eta) = \text{Var}_{\mu}(P_{t/2}f)$ with $e^{-t} = \sqrt{1-\eta^2}$ so that Theorem 5.1.2 covers (5.3). With a common scheme of proof, an analogous statement will be established for discrete models covering in particular the discrete cube (5.2) endowed with any biased measure $(p\delta_{-1} + (1-p)\delta_1)^{\otimes n}$.

The note is organised as follows. In Section 5.2, we describe a convenient framework in order to describe the tools required to the proof of our results. The general setting contains two main illustrations, probability measures on finite state spaces that are invariant for some Markov kernel and continuous product probability measures on $\mathbb{R}^n$ where each measure is of the form $d\mu(x) = e^{-V(x)}dx$ for V a smooth potential. In Section 5.3, we establish the announced result on $(\mathbb{R}^n, d\mu(x) = \bigotimes_{i=1}^n e^{-V_i(x)}dx)$ when the potentials V_i are convex, which contains Theorem 5.1.2. Section 5.4 is devoted to the discrete case in the setting of product spaces. We then focus on non-product examples in Section 5.5, including the symmetric group and the sphere. Finally we conclude with an application in percolation theory of our quantitative result.

5.2 Tools

In this section, we describe some of the functional tools which will be used in the proof of the main results of this work. They cover Poincaré and logarithmic Sobolev inequalities, and the equivalent hypercontractivity property of the underlying semigroups.

Consider therefore the preceding setting of a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ equipped with a semigroup $(P_t)_{t \geq 0}$ with generator L and Dirichlet form $\mathcal{E}$, invariant and symmetric with respect to μ .

Say that the couple (L, μ) satisfies a spectral gap, or Poincaré, inequality whenever there exists $\lambda > 0$ such that

$$\lambda \text{Var}_{\mu}(f) \leq \mathcal{E}(f, f) \quad (5.4)$$

for every function f on the Dirichlet domain. The spectral gap constant is the largest λ such that (5.4) holds. It is equivalent to the fact (see [CE-L]) that for every mean-zero functions f in $L^2(\mu)$, and every $t > 0$,

$$\|P_t f\|_2 \leq e^{-\lambda t} \|f\|_2.$$

It is then not hard to check (see [CE-L]), that the spectral gap inequality with constant λ is equivalent to the fact that for every centred function f (i.e. $\int_{\Omega} f d\mu = 0$),

$$\forall t > 0, \text{Var}_{\mu}(f) \leq \frac{1}{1 - e^{-\lambda t}} (\|f\|_2^2 - \|P_t f\|_2^2). \quad (5.5)$$

Similary, say that (L, μ) satisfies a logarithmic Sobolev inequality whenever there exists $\rho > 0$ such that

$$\rho \text{Ent}_{\mu}(f^2) \leq 2 \mathcal{E}(f, f) \quad (5.6)$$

for every function f on the Dirichlet domain. The logarithmic Sobolev constant is the largest $\rho > 0$ such that (5.6) holds. Since the work of Gross [Grs] (cf. [Bak1], [Aal], [B-G-L1]...), it is known that the logarithmic Sobolev inequality is equivalent to the hypercontractivity of the semigroup $(P_t)_{t \geq 0}$ (see [Nel]) in the sense that for all $f \in L^p(\mu)$ and all $t > 0$, $1 < p < q < \infty$ with $p \geq 1 + (q-1)e^{-2\rho t}$,

$$\|P_t f\|_q \leq \|f\|_p. \quad (5.7)$$

It is classical that $\lambda \geq \rho$. It is also a main feature of these inequalities that they are stable by product, so that the spectral gap and logarithmic Sobolev constants of a product space are the minimum of the spectral gap and logarithmic Sobolev constants of each factor in the product. As standard examples, $\lambda = \rho = 1$ for the standard Gaussian measure on $\mathbb{R}^n$ and similarly for the uniform measure on the discrete cube. For the further purposes, let us emphasize also that if $d\mu(x) = e^{-V(x)}dx$ on $\mathbb{R}^n$ is such

that the Hessian of the potential V satisfies $\text{Hess}(V) \geq c > 0$ (uniformly, as symmetric matrices), then $\lambda \geq \rho \geq c$.

In each class of examples of the above subsections, a key property is the decomposition of the Dirichlet form along “directions”. We will be interested into situations in which these directions commute in an appropriate sense with derivation. This may be expressed in the following abstract formulation, that immediately applies to the various examples of interest. Namely, assume that there is a decomposition of the Dirichlet form $\mathcal{E}$ along “directions” i for some operators Γ_i such that for any suitable f on Ω ,

$$\mathcal{E}(f, f) = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \Gamma_i(f)^2 d\mu, \quad (5.8)$$

where the operators Γ_i are commuting with the semigroup in a sense that there exists a real constant κ such that for every $i = 1, \dots, m$

$$\Gamma_i(P_t f) \leq e^{\kappa t} P_t(\Gamma_i f). \quad (5.9)$$

To illustrate this property, consider the example of the Ornstein-Uhlenbeck semigroup on $\mathbb{R}^n$ for which $\partial_i P_t f = e^{-t} P_t(\partial_i f)$ yielding therefore (5.8) with $\kappa = 1$. In the framework of a log-concave measure $d\mu(x) = e^{-V(x)} dx$, it is known (see e.g. [Bak1], [B-G-L1]) that whenever the Hessian of the potential V satisfies $\text{Hess}(V) \geq c$ where $c \in \mathbb{R}$, for every smooth $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ and every $t \geq 0$,

$$|\nabla P_t f| \leq e^{-ct} P_t(|\nabla f|). \quad (5.10)$$

Therefore, a product of log-concave measures $d\mu_i(x) = e^{-V_i(x)} dx$, $i = 1, \dots, m$, for which each potential V_i satisfies $\text{Hess}(V_i) \geq c_i$ with $c_i \in \mathbb{R}$, is another instance of the decomposition (5.8) with $\Gamma_i = \nabla_i$ and $\kappa = \min c_i$. In the discrete product setting, we may take $\Gamma_i = L_i$. On the cube, the relations $D_i T_t^p f = T_t^p D_i f$ then ensure the suitable commutation with $\kappa = 0$.

Such general decompositions have been emphasized in [CE-L] in connections with the study of influences. They are similarly useful here, and together with hypercontractivity will be at the root of the main conclusions. Further concrete examples of interest are presented in Section 5 below.

5.3 The Gaussian and log-concave settings

The section will be devoted to the proof of Theorem 5.1.2, actually in a more general formulation. It is worthwhile mentioning that the content of our statements are invariant under translation of the functions by a constant. Therefore, in the remaining of the paper, it will be implicitly assumed that all functions are centred. We furthermore introduce a convenient notation, for a function f on the respective continuous or discrete state spaces, and $r \in [1, 2]$,

$$\mathcal{S}_r(f) = \sum_{i=1}^m \|\nabla_i f\|_r^2$$

Consider a probability measure μ on $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_m}$ of the form $d\mu(x) = \bigotimes_{i=1}^m e^{-V_i(x)} dx$ with $\text{Hess}(V_i) \geq c > 0$ for every $i = 1, \dots, m$. Recall that in this setting $\lambda \geq \rho \geq c$.

Theorem 5.3.1. *Let μ as above and let $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ be C^1 -smooth and in $L^2(\mu)$. Then, for every $r \in [1, 2]$ and every $t \geq 0$,*

$$\text{Var}_{\mu}(P_t f) \leq \max\left(4, \frac{4}{c}\right) e^{-ct} \mathcal{S}_r(f)^{\alpha(t)} \|f\|_2^{2-2\alpha(t)}$$

where

$$\alpha(t) = \frac{r(1 - e^{-\rho t})}{2(1 + (1-r)e^{-\rho t})}.$$

To compare with the results of [K-M-S2] in the Gaussian case (corresponding therefore to $m = n$, $n_1 = \dots = n_m = 1$, and V_i quadratic) for which $\lambda = \rho = c = 1$, Theorem 5.3.1 indicates that for all $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ and every $t \geq 0$,

$$\text{Var}_\mu(P_t f) \leq 4e^{-t} \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{L^1(\mu)}^2 \right)^{\frac{(1-e^{-t})}{2}} \|f\|_2^{2\frac{(1+e^{-t})}{2}}.$$

It may always be assumed that $\mathcal{S}_1(f) \leq \|f\|_2^2$ otherwise the above inequality is empty. As $2(1-e^{-t}) \geq 1 - e^{-2t}$, it thus yields the inequality of [K-M-S2] with $C_1 = 4$ and $C_2 = \frac{1}{4}$. Moreover, we have an exponential decay in t , something already given by the spectral gap inequality. In fact our results are of interest for t in a range that does not exceed the inverse of the spectral gap constant. For larger t , Theorem 5.3.1 does not improve upon Poincaré inequality.

It may be observed furthermore that for $r = 2$, $\alpha(t)$ is constantly equal to 1 (in this particular case we recover the spectral gap inequality with weaker constants).

Proof of Theorem 5.3.1. We make the assumption that f is such that, for some fixed $r \in [1, 2]$,

$$\mathcal{S}_r(f) = \sum_{i=1}^m \|\nabla_i f\|_r^2 \leq \|f\|_2^2,$$

otherwise there is nothing to prove.

We start with the decomposition of the variance along the semi group, that is

$$\text{Var}_\mu(P_t f) = 2 \int_t^\infty \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_i P_s f|^2 d\mu ds.$$

The main step of the proof consists in the following cut-off argument. Namely, for $i = 1, \dots, m$ and $M > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_i P_s f|^2 d\mu = \int_{\{|\nabla_i P_s f| \leq M \|\nabla_i f\|_r\}} |\nabla_i P_s f|^2 d\mu + \int_{\{|\nabla_i P_s f| > M \|\nabla_i f\|_r\}} |\nabla_i P_s f|^2 d\mu. \quad (5.11)$$

The first integral is bounded from above as

$$\begin{aligned} \int_{\{|\nabla_i P_s f| \leq M \|\nabla_i f\|_r\}} |\nabla_i P_s f|^2 d\mu &\leq (M \|\nabla_i f\|_r)^{2-r} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_i P_s f|^r d\mu \\ &\leq (M \|\nabla_i f\|_r)^{2-r} e^{-rcs} \int_{\mathbb{R}^n} (P_s |\nabla_i f|)^r d\mu \end{aligned}$$

where we used the commutation property (5.10) which ensures that $|\nabla_i P_s f| \leq e^{-cs} P_s(|\nabla_i f|)$. Since P_s is a contraction in $L^r(\mu)$, and since $r \geq 1$, it follows that

$$\int_{\{|\nabla_i P_s f| \leq M \|\nabla_i f\|_r\}} |\nabla_i P_s f|^2 d\mu \leq e^{-cs} M^{2-r} \|\nabla_i f\|_r^2.$$

After integrating in time and summing over $i = 1, \dots, m$, we reach a first bound

$$\sum_{i=1}^m \int_t^\infty \int_{\{|\nabla_i P_s f| \leq M \|\nabla_i f\|_r\}} |\nabla_i P_s f|^2 d\mu ds \leq \frac{1}{c} e^{-ct} M^{2-r} \mathcal{S}_r(f). \quad (5.12)$$

We now focus on bounding from above

$$\sum_{i=1}^m \int_{\{|\nabla_i P_s f| > M \|\nabla_i f\|_r\}} |\nabla_i P_s f|^2 d\mu.$$

To this task, for every $i = 1, \dots, m$, Hölder's inequality applied to $|\nabla_i P_s f|^2$ and $\mathbf{1}_{\{|\nabla_i P_s f| > M \|\nabla_i f\|_r\}}$ yields

$$\int_{\{|\nabla_i P_s f| > M \|\nabla_i f\|_r\}} |\nabla_i P_s f|^2 d\mu \leq \mu\{|\nabla_i P_s f| > M \|\nabla_i f\|_r\}^{\frac{1}{q}} \|\nabla_i P_s f\|_{2p}^2$$

for every $p, q \geq 1$ such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Yet, using (5.10) once more,

$$\|\nabla_i P_s f\|_{2p}^2 \leq e^{-cs} \|P_{s/2}(|\nabla_i P_{s/2} f|)\|_{2p}^2.$$

Now, the hypercontractive property (5.7) ensures that for $p = p(s)$ with $2p(s) - 1 = e^{\rho s}$,

$$\|P_{s/2}(|\nabla_i P_{s/2} f|)\|_{2p}^2 \leq \|\nabla_i P_{s/2} f\|_2^2.$$

Putting the two inequalities together, we infer that

$$\int_{\{|\nabla_i P_s f| > M \|\nabla_i f\|_r\}} |\nabla_i P_s f|^2 d\mu \leq e^{-cs} \mu\{|\nabla_i P_s f| > M \|\nabla_i f\|_r\}^{\frac{1}{q(s)}} \|\nabla_i P_{s/2} f\|_2^2 \quad (5.13)$$

with

$$q(s) = \frac{p(s)}{p(s) - 1} = \frac{e^{\rho s} + 1}{e^{\rho s} - 1}.$$

By Markov's inequality, we further obtain, using again the commutation (5.10) and the contraction property, that

$$\mu\{|\nabla_i P_s f| > M \|\nabla_i f\|_r\} \leq \frac{1}{M^r \|\nabla_i f\|_r^r} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_i P_s f|^r d\mu \leq \frac{e^{-rcs}}{M^r}. \quad (5.14)$$

The above bounds (5.13) and (5.14) therefore imply

$$\int_t^\infty \int_{\{|\nabla_i P_s f| > M \|\nabla_i f\|_r\}} |\nabla_i P_s f|^2 d\mu ds \leq \int_t^\infty \left(\frac{e^{-cs}}{M}\right)^{\frac{r}{q(s)}} e^{-cs} \|\nabla_i P_{s/2} f\|_2^2 ds.$$

We then notice that the function

$$s \mapsto \frac{1}{q(s)} = \tanh(\rho s/2)$$

is increasing. Hence, for every $M \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \left(\frac{e^{-cs}}{M}\right)^{\frac{r}{q(s)}} e^{-cs} \|\nabla_i P_{s/2} f\|_2^2 ds &\leq e^{-ct} \left(\frac{e^{-ct}}{M}\right)^{\frac{r}{q(t)}} \int_t^\infty \|\nabla_i P_{s/2} f\|_2^2 ds \\ &\leq \frac{e^{-ct}}{M^{\frac{r}{q(t)}}} \int_0^\infty \|\nabla_i P_{s/2} f\|_2^2 ds. \end{aligned}$$

Summing over $i = 1, \dots, m$,

$$\sum_{i=1}^m \int_t^\infty \int_{\{|\nabla_i P_s f| > M \|\nabla_i f\|_r\}} |\nabla_i P_s f|^2 d\mu ds \leq \frac{e^{-ct}}{M^{\frac{r}{q(t)}}} \sum_{i=1}^m \int_0^\infty \|\nabla_i P_{s/2} f\|_2^2 ds.$$

Using again the decomposition of the variance along the semigroup,

$$\sum_{i=1}^m \int_0^\infty \|\nabla_i P_{s/2} f\|_2^2 ds = \text{Var}_\mu(f) = \|f\|_2^2$$

(recall that f is centred) so that

$$\sum_{i=1}^m \int_t^\infty \int_{\{|\nabla_i P_s f| > M \|\nabla_i f\|_r\}} |\nabla_i P_s f|^2 d\mu ds \leq \frac{e^{-ct}}{M^{\frac{r}{q(t)}}} \|f\|_2^2. \quad (5.15)$$

By the decomposition (5.11), the two bounds (5.12) and (5.15) therefore yield

$$\text{Var}_\mu(P_t f) \leq \max\left(2, \frac{2}{c}\right) e^{-ct} \left(\mathcal{S}_r(f) M^{2-r} + \frac{1}{M^{\frac{r}{q(t)}}} \|f\|_2^2 \right).$$

Here, we recall that $M \geq 1$. Given the assumption $\|f\|_2^2 \geq \mathcal{S}_r(f)$, we can choose M such that

$$\mathcal{S}_r(f) M^{2-r} = \frac{1}{M^{\frac{r}{q(t)}}} \|f\|_2^2.$$

We therefore get

$$M^{2-r+\frac{r}{q(t)}} = \frac{\|f\|_2^2}{\mathcal{S}_r(f)},$$

so that, finally

$$\text{Var}_\mu(P_t f) \leq \max\left(4, \frac{4}{c}\right) e^{-ct} \left(\sum_{i=1}^n \|\nabla_i f\|_r^2 \right)^{\frac{r}{r+(2-r)q(t)}} \|f\|_2^{2\frac{(2-r)q(t)}{r+(2-r)q(t)}}.$$

Replacing $q(t)$ by its explicit form, we conclude to the announced claim. Theorem 5.3.1 is established. $\square$

5.4 The case of Boolean cube and other discrete product spaces

This section develops the corresponding analysis on the cube and discrete product models.

To deal with the Boolean cube $\{-1, 1\}^n$, consider the discrete product structure consisting of a product space $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ with product probability measure $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$, each factor (Ω_i, μ_i) being endowed with the Markov operator $L_i f = \int_{\Omega_i} f d\mu_i - f$. We recall that the Dirichlet form $\mathcal{E}$ admits the decomposition

$$\mathcal{E}(f, f) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} L_i(f)^2 d\mu_i,$$

and that the equality $\text{Var}_\mu f = \mathcal{E}(f, f)$ implies that the spectral gap constant is equal to 1. The underlying (product) semigroup $(P_t)_{t \geq 0}$ will be assumed to be hypercontractive with constant ρ (equivalently, each (L_i, μ_i) is hypercontractive with constant ρ). In this context, we denote

$$\mathcal{S}_r(f) = \sum_{i=1}^m \|L_i f\|_r^2.$$

Theorem 5.4.1. *In the preceding setting, let $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, such that $f \in L^2(\mu)$. Then, if $r \in [1, 2]$ and $t \geq 0$,*

$$\text{Var}_\mu(P_t f) \leq 7 \left(\sum_{i=1}^n \|L_i f\|_r^2 \right)^{\alpha(t)} \|f\|_2^{2-2\alpha(t)}$$

where

$$\alpha(t) = \frac{r(1 - e^{-\rho t})}{2(1 + (1-r)e^{-\rho t})}.$$

Theorem 5.4.1 contains the result of [K-K] for the discrete cube $\Omega = \{-1, 1\}^n$ with $\mu = \nu_p = (p\delta_{-1} + q\delta_1)^{\otimes n}$. To make the connection, notice that we can assume that

$$\mathcal{S}_r(f) = \sum_{i=1}^n \|L_i f\|_r^2 \leq \|f\|_2^2,$$

otherwise there is nothing to prove. With the previous notations, it is easily seen that for every $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\|L_i f\|_r^r = (pq^r + p^r q) \|D_i f\|_r^r.$$

Thereby, we get

$$\text{Var}_{\nu_p}(P_t f) \leq 7(pq^r + p^r q)^{\frac{2}{r}\alpha(t)} \left(\sum_{i=1}^n \|D_i f\|_r^2 \right)^{\alpha(t)} \|f\|_2^{2-2\alpha(t)}.$$

In the case $r = 1$, we point out that the right-hand side is

$$7(2pq)^{1-e^{-\rho t}} \left(\sum_{i=1}^n \|D_i f\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}(1-e^{-\rho t})} \|f\|_2^{(1+e^{-\rho t})},$$

so that, since $4pq \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\nu_p}(P_t f) &\leq 7(4pq)^{\frac{1}{2}(1-e^{-\rho t})} \left(pq \sum_{i=1}^n \|D_i f\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}(1-e^{-\rho t})} \|f\|_2^{(1+e^{-\rho t})} \\ &\leq 7 \left(pq \sum_{i=1}^n I_i(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}(1-e^{-\rho t})} \|f\|_2^{(1+e^{-\rho t})}. \end{aligned}$$

Recall that $\text{Var}_{\nu_p}(P_t f) = \text{VAR}(f, \eta)$ for $\eta = 1 - e^{-2t}$. On the other hand, it is known (see [CE-L]) the logarithmic Sobolev constant is equal to

$$\rho = \frac{2(p-q)}{\log p - \log q} \quad (= 1 \text{ if } p = q).$$

Since for each $p \in (0, 1)$, $\rho \leq 1$ using that $\eta\rho/2 \leq 1 - (1-\eta)^{\rho/2} = 1 - e^{-\rho t}$,

$$\left(pq \sum_{i=1}^n I_i(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}(1-e^{-\rho t})} \|f\|_2^{(1+e^{-\rho t})} \leq \left(pq \sum_{i=1}^n I_i(f)^2 \right)^{\rho\eta/4} \|f\|_2^{2-\rho\eta/2},$$

which amounts to the main result of [K-K] as emphasized in the introduction. In the uniform case (i.e $p = q$), we have $\rho = 1$ and we get

$$\text{VAR}(f, \eta) \leq 7 \cdot \left(\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n I_i(f)^2 \right)^{\frac{1}{4}\eta} \|f\|_2^{2-\frac{1}{2}\eta}.$$

The above result is similar to Theorem 4 of [K-K] with weaker assumptions on f . In the biased case, the constants are somewhat weaker for small p or q .

It is worth to point out that the quantitative relationship of Theorem 5.4.1 yields empty results when $\log p$ is of order $\log n$. In this range indeed, the theorem does not hold even qualitatively (see [K-K]).

Proof of Theorem 5.4.1. The scheme of proof is completely similar to the one developed in the continuous setting for Theorem 5.3.1. We nevertheless introduce a further trick, replacing the decomposition of the variance along the semigroup by its restriction to a finite domain of integration in time $[0, T]$ for some $T \geq 0$ in the form of the identity

$$\|f\|_2^2 - \|P_T f\|_2^2 = - \int_0^T \frac{d}{ds} \|P_s f\|_2^2 ds = 2 \int_0^T \mathcal{E}(P_s f, P_s f) ds = 2 \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |L_i P_s f|^2 d\mu ds.$$

Hence, by (5.5),

$$\text{Var}_{\mu}(P_t f) \leq \frac{2}{1-e^{-T}} \int_t^{t+T} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |L_i P_s f|^2 d\mu ds.$$

For each $i = 1, \dots, n$, we again cut the integral into two parts with $M \geq 1$. The same commutation and contraction argument yield

$$\int_{\{|L_i P_s f| \leq M \|L_i f\|_r\}} |L_i P_s f|^2 d\mu \leq (M \|L_i f\|_r)^{2-r} \int_{\Omega} |L_i P_s f|^r d\mu \leq M^{2-r} \|L_i f\|_r^2.$$

Therefore

$$\text{Var}_{\mu}(P_t f) \leq \frac{2T}{1-e^{-T}} \left(\mathcal{S}_r(f) M^{2-r} + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sum_{i=1}^n \int_{\{|L_i P_s f| > M \|L_i f\|_r\}} |L_i P_s f|^2 d\mu ds \right).$$

Above the truncation level, for each $i = 1, \dots, n$, the same argument based on the Hölder and hypercontractivity inequalities yields

$$\begin{aligned} \int_{\{|L_i P_s f| > M \|L_i f\|_r\}} |L_i P_s f|^2 d\mu &\leq \mu\{|L_i P_s f| > M \|L_i f\|_r\}^{\frac{1}{q}} \|L_i P_s f\|_{2p}^2 \\ &\leq \|L_i P_{s/2} f\|_2^2 \mu\{|L_i P_s f| > M \|L_i f\|_r\}^{\frac{1}{q(s)}} \\ &\leq \frac{1}{M^{\frac{r}{q(s)}}} \|L_i P_{s/2} f\|_2^2, \end{aligned}$$

with $q(s) = \frac{e^{\rho s} + 1}{e^{\rho s} - 1}$. Therefore,

$$\int_t^{t+T} \sum_{i=1}^n \int_{\{|L_i P_s f| > M \|L_i f\|_r\}} |L_i P_s f|^2 d\mu ds \leq \frac{1}{M^{\frac{r}{q(t)}}} \sum_{i=1}^n \int_t^{t+T} \|L_i P_{s/2} f\|_2^2 ds.$$

Since

$$\sum_{i=1}^n \int_t^{t+T} \|L_i P_{s/2} f\|_2^2 ds \leq \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} \|L_i P_{s/2} f\|_2^2 ds = \|f\|_2^2,$$

we thus get that

$$\text{Var}_{\mu}(P_t f) \leq \frac{2\max(1, T)}{1-e^{-T}} \left(M^{2-r} \mathcal{S}_r(f) + \|f\|_2^2 \frac{1}{M^{\frac{r}{q(t)}}} \right).$$

The theorem then follows as in the conclusion of the proof of Theorem 5.3.1, using moreover the fact that

$$\inf_{T>0} \frac{4\max(1, T)}{1-e^{-T}} = \frac{4}{1-e^{-1}} \leq 7.$$

□

5.5 Results on Schreier and Cayley graphs and further examples

This section briefly discusses further examples of interest, basically non-product models, for which the preceding approach may be developed similarly. The basic ingredients for such extension are the decomposition of the variance into directional derivatives and hypercontractivity.

A non-product space example for which there is a decomposition (5.8) with commutation (5.9) as well as hypercontractivity (5.7) and spectral gap (5.4) in the continuous case is given by the spheres $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) equipped with the normalized measure μ .

Consider for $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $D_{i,j} = x_j \partial_i - x_i \partial_j$. The Dirichlet form associated with the spherical Laplacian

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D_{i,j}^2$$

takes the form

$$\mathcal{E}(f, f) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(-\Delta f) d\mu = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (D_{i,j} f)^2 d\mu.$$

Since we clearly have $\Delta D_{i,j} = D_{i,j} \Delta$, (5.9) holds with $\kappa = 0$. Consider again heat semigroup $(P_t f)_{t \geq 0} = (e^{t\Delta} f)_{t \geq 0}$ generated by the Laplacian Δ . It is known (see e.g. [Bak1]) that the spectral gap constant and the logarithmic Sobolev constant are both equal to $n - 1$. Our results can then be stated as follows.

Theorem 5.5.1. *Let $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, where $n \geq 2$ be C^1 -smooth and in $L^2(\mu)$. Then, for any $t \geq 0$, $r \in [1, 2]$,*

$$\text{Var}_\mu(P_t f) \leq 7 \left(\sum_{i,j=1}^n \|D_{i,j} f\|_r^2 \right)^{\alpha(t)} \|f\|_2^{2-2\alpha(t)},$$

where

$$\alpha(t) = \frac{r(1 - e^{-(n-1)t})}{2(1 + (1-r)e^{-(n-1)t})}.$$

Proof. The proof follows the scheme of the one of Theorem 5.3.1, with however the twist emphasized in the discrete framework of Section 4, i.e. restricting to a finite domain of integration in time $[0, T]$ for some $T \geq 0$ using (5.5) and replacing the logarithmic Sobolev constant by its value $n - 1$. Then, we just notice that for every $\lambda \geq 1$

$$\inf_{T>0} \frac{4 \max(1, T)}{1 - e^{-\lambda T}} = \frac{4}{1 - e^{-\lambda}} \leq 7.$$

□

Recall that the Poincaré inequality implies that $\text{Var}_\mu(P_t f) \leq e^{-(n-1)t} \text{Var}_\mu(f)$. Since the logarithmic Sobolev constant and the spectral gap constant are equal in this case, Theorem 5.5.1 provides some non-trivial bound on $\text{Var}_\mu(P_t f)$ in specific ranges of t (for example when t is of order $\frac{1}{n}$).

Among discrete examples, the recent work of [O-W] investigates the examples of general Schreier or Cayley graphs. In the context of Subsection 2.3, recall that the Dirichlet form $\mathcal{E}$ takes the form

$$\mathcal{E}(f, f) = \frac{1}{2|S|} \sum_{x \in \Omega} \sum_{s \in S} [f(x^s) - f(x)]^2 \mu(x) = \frac{1}{2|S|} \sum_{s \in S} \|D_s f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

It is shown in [O-W] that the commutation (5.9) holds with $\kappa = 0$ (see also [CE-L]). Denote as usual by $(P_t)_{t \geq 0}$ the underlying semigroup attached to this Dirichlet form, and let λ be the spectral gap constant and ρ the logarithmic Sobolev constant. Noticing that there is a positive constant C such that $\inf_{T>0} \frac{\max(1, T)}{1 - e^{-\lambda T}} \leq \frac{C}{\lambda}$, we get the following theorem from the general scheme of proof developed in Section 4.

Theorem 5.5.2. *Let Ω be a Schreier or Cayley graph and $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Then, for any $t \geq 0$,*

$$\text{Var}_\mu(P_t f) \leq \frac{C}{\lambda} \left(\frac{1}{2|S|} \sum_{s \in \mathcal{S}} \|D_s f\|_r^2 \right)^{\alpha(t)} \|f\|_2^{2-2\alpha(t)},$$

for some numerical constant $C > 0$ where

$$\alpha(t) = \frac{r(1 - e^{-\rho t})}{2(1 + (1-r)e^{-\rho t})}.$$

Explicit examples with known respective spectral gap and logarithmic Sobolev constants are given in [O-W]. Among them, the above theorem for product graphs such as $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$ are particular cases of Theorem 5.4.1. But it also covers two non product models of graphs, namely the symmetric group and the slices of the Boolean cube.

In the case of the symmetric group $\mathfrak{S}_n$, recall that its Cayley graph structure with the generating set given by the subgroup of the transpositions $\mathcal{T}_n$. The spectral gap is equal to $\frac{2}{n-1}$, and the logarithmic Sobolev constant is greater than $\frac{a}{n \log n}$ for some $a > 0$ (see [D-SC]). It is then of interest to understand the content of Theorem 5.5.2. The issue is that, when t is of order of the inverse of spectral gap constant, i.e. of order n , the exponent $1 - e^{-at/n \log n}$ goes to 0 as n tends to infinity so that it yields an empty bound for $\text{Var}_\mu(P_t f)$. For larger t , the decay of $\text{Var}_\mu(P_t f)$ is ensured by the spectral gap inequality since it implies $\text{Var}_\mu(P_t f) \leq e^{-2t/(n-1)} \text{Var}_\mu(f)$. Hence, Theorem 5.5.2 does not improve upon the spectral gap inequality. As for the results of [O-W], [CE-L], this is due to the smallness of the logarithmic Sobolev constant in this model.

Let us turn to the slices of the cube. For $n \geq 1$, $1 \leq k < n$, the slices (of order k) of the Boolean cube are defined by $\binom{[n]}{k} = \{x \in \{0, 1\}^n, \sum_{i=1}^n x_i = k\}$. The symmetric group is acting on $\binom{[n]}{k}$ by $x^\sigma = (x_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}$, so that it has a Schreier graph structure. The generators are given by the transpositions τ_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, with $x^{\tau_{ij}}$ being obtained from x by switching i and j . Then, it is known that the spectral gap constant is $\lambda = \frac{1}{n}$, and the logarithmic Sobolev constant ρ satisfy $\rho^{-1} \sim n \log \frac{n^2}{k(n-k)}$ (see [L-Y]). In particular when $\frac{k}{n}$ is bounded away from 0 and 1, both constants are of the same order. Theorem 5.5.2 (again with $r = 1$) implies that

$$\text{Var}_\mu(P_t f) \leq Cn \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i < j} (I_{\tau_{ij}} f)^2 \right)^{(1-e^{-t\rho})/2} \|f\|_2^{1+e^{-t\rho}}$$

where $I_{\tau_{ij}} f$ is the influence of the transposition τ_{ij} on f . Consider then the noise operator $S_\eta^s f = \text{Var}_\mu(P_{(n-1)t/2} f)$ with $e^{-t} = \eta$ (see [F-K-M-W]). With this normalizing, both the spectral gap and logarithmic Sobolev constants are of order 1. Then, Theorem 5.5.2 implies that whenever $\frac{k}{n}$ is bounded away from 0 and 1, there exists some positive constants C_1, c such that

$$S_\eta^s f \leq C_1 \left(\frac{1}{n} \sum_{i < j} (I_{\tau_{ij}} f)^2 \right)^{c\eta} \|f\|_2^{2-2c\eta}. \quad (5.16)$$

Therefore, the original [B-K-S] criterion holds over slices of the Boolean cube, that is, if the sum of the square of the influences of a sequence of functions f_{n_ℓ} tends to 0, then f_{n_ℓ} is noise sensitive. It is worth to point out that variant of this result over the slices has been recently established in [For]. Such result is applied in connection with another notion of sensitivity, the exclusion sensitivity defined and studied by Broman, Garban and Steif.

5.6 Comments on exclusion sensitivity

This section is devoted to the link made in [For] between the Benjamini–Kalai–Schramm criterion for the noise stability on the slices of the Boolean cube and the notion of exclusion sensitivity for functions defined on the Boolean cube. To start with, we recall the definition of exclusion sensitivity.

Let a sequence $(f_n)_{n \geq 0}$ of Boolean functions (i.e. mapping to $\{0, 1\}$) defined on the Boolean cubes $\{0, 1\}^n$. For $x \in \{0, 1\}^n$, set $|x| = x_1 + \dots + x_n$. For each $n \geq 1$, pick $X_0^{(n)} \sim \mu_n$, where μ_n is the uniform measure on $\{0, 1\}^n$; and let $X^{(n)}$ be a random walk on the slice $\binom{[n]}{|X_0^{(n)}|}$. The sequence $(f_n)_{n \geq 0}$ is said to be (asymptotically) exclusion sensitive if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} XS_\alpha(f_n) = \text{Cov}(f_n(X_0^{(n)}), f_n(X_{an}^{(n)})) = 0$$

for any $\alpha > 0$. In [B-G-S], the authors have linked exclusion sensitivity with influences. More precisely, the content of the results of [B-G-S] is similar to the Benjamini-Kalai-Schramm criterion.

Theorem 5.6.1. *Let $(f_n)_{n \geq 0} : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ be a sequence of Boolean function such that $\sum_{i=1}^n I_i^2 f_n$ goes to 0. Then the sequence $(f_n)_{n \geq 0}$ is exclusion sensitive.*

Using the scheme of proof of [For], we are aiming to show that our quantitative relationship over the slices (5.16) implies another proof of this theorem. We refer the reader to [For], and we only sketch the main arguments.

Let a sequence $(f_n)_{n \geq 0} : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ and denote $\varepsilon_n = \sum_{i=1}^n I_i^2 f_n$. Fix $\alpha > 0$. In order to be consistent with our definition of noise stability on the slices, we will show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov}(f_n(X_0^{(n)}), f_n(X_{\alpha(n-1)}^{(n)})) = 0$$

whenever $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. This obviously does not change the content of Theorem 5.6.1.

The following lemma is the main ingredient linking exclusion sensitivity with noise stability over the slices.

Lemma 5.6.2. *For any $n \geq 0$, $f_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, and $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned} \text{Cov}(f_n(X_0^{(n)}), f_n(X_t^{(n)})) &= 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \left\{ \mathbb{E} \left[f(X_0^{(n)}) f(X_t^{(n)}) \mid |X_0^{(n)}| = k \right] - \mathbb{E} \left[f(X_0^{(n)}) \mid |X_0^{(n)}| = k \right]^2 \right\} \\ &+ \text{Var}(\mathbb{E}[f(w) \mid |w| = |X_0^{(n)}|]). \end{aligned}$$

Since as shown in [For], if $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\mathbb{E}[f(w) \mid |w| = |X_0^{(n)}|]) = 0$, it is enough to show that the first sum goes to 0 whenever $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Yet, for $t = \alpha(n-1)$, if $\mu_{n,k}$ designs the uniform measure on the slices of order k ,

$$\mathbb{E} \left[f(X_0^{(n)}) f(X_{\alpha(n-1)}^{(n)}) \mid |X_0^{(n)}| = k \right] - \mathbb{E} \left[f(X_0^{(n)}) \mid |X_0^{(n)}| = k \right]^2 = \text{Cov}_{\mu_{n,k}}(f, P_{\alpha(n-1)} f) = \text{Var}_{\mu_{n,k}}(P_{\frac{\alpha(n-1)}{2}} f).$$

With the notations of Section 5.5, this corresponds to $S_{e^{-\alpha}}^{s_k} f$. That is, the first sum in the expression of lemma 5.6.2 is the expectation of the noise stability of f over the slices of order k when k is distributed according to the binomial law $B(n, 1/2)$. If $d \in (0, 1/2)$, by Chernoff's bound we can find some numerical (positive) constant c_1 such that

$$\sum_{k=0}^{\lfloor dn \rfloor} \mathbb{P}(|X_0^{(n)}| = k) = \sum_{k=\lceil (1-d)n \rceil}^n \mathbb{P}(|X_0^{(n)}| = k) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor dn \rfloor} \binom{k}{n} \leq e^{-c_1 n}.$$

It is therefore enough to bound the noise stability of f over the slices of order $k \in (dn, (1-d)n)$ for some $d < 1/2$. To this task, in view of (5.16), for any $n \geq 1$ and any given Boolean function f_n over the Boolean cube $\{0, 1\}^n$, we need to bound $\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} I_{\tau_{ij}}^k(f_n)^2$, $\lfloor dn \rfloor < k < \lceil (1-d)n \rceil$, in term of ε_n .

Define $I_{\tau_{ij}} f$ on the cube to be $\mathbb{P}(f(x^{(ij)}) \neq f(x))$. It is clear that for any $1 \leq i < j \leq n$, $I_{\tau_{ij}} f \leq I_i(f) + I_j(f)$. Therefore, using the inequality $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$,

$$\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (I_{\tau_{ij}} f_n)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^n I_i^2 f_n = 4\varepsilon_n.$$

Besides, $I_{\tau_{ij}}f$ is related to the influences $I_{\tau_{ij}}^k f$ on the slices of order k , $k \in \{0, \dots, n\}$, by the law of total probability

$$I_{\tau_{ij}}f = \mathbb{P}(f(x^{(ij)}) \neq f(x)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \mathbb{P}(f(x^{(ij)}) \neq f(x) | |x| = k) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} I_{\tau_{ij}}^k f.$$

This implies - we confer to [For] for the details - that for all $k \in \{1, \dots, n\}$ but a fraction of probability at most $\varepsilon_n^{1/3}$ with respect to the binomial law,

$$\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} I_{\tau_{ij}}^k (f_n)^2 \leq O(\varepsilon_n^{1/3}). \quad (5.17)$$

Denote A_{ε_n} the subset of $[n]$ where (5.17) is satisfied, and $A_{\varepsilon_n, d} = A_{\varepsilon_n} \cap \{\lfloor dn \rfloor, \dots, \lceil (1-d)n \rceil\}$. For all $k \in A_{\varepsilon_n, d}$, there exists by (5.16) some positive constants C_1, c such that $S_{e^{-\alpha}}^{s_k} f \leq C_1 \varepsilon_n^{ce^{-\alpha}}$. Therefore

$$2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} S_{e^{-\alpha}}^{s_k} f \leq 2^{-n} \sum_{k \notin A_{\varepsilon_n, d}} \binom{k}{n} S_{e^{-\alpha}}^{s_k} + C_1 \varepsilon_n^{ce^{-\alpha}} \leq 2e^{-c_1 n} + \varepsilon_n^{1/3} + C_1 \varepsilon_n^{ce^{-\alpha}}.$$

If $\varepsilon_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, this implies that $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov}(f_n(X_0^{(n)}), f_n(X_{a(n-1)}^{(n)})) = 0$. That is, the sequence $(f_n)_{n \geq 0}$ is exclusion sensitive, which is exactly the content of Theorem 5.6.1 of [B-G-S].

Chapitre 6

Some comments on Juntas

6.1 Introduction

This chapter is devoted to present some analogous statements of the Juntas theorem of Friedgut. Recently, a particular attention was given in both continuous and discrete cases. To name a few, [Sa-Tu] and [Beal] generalized this work in a discrete setting respectively to Cartesian product of Graphs and discrete tori. We also point out the work of Austin [Aus] and Keller, Mossel and Sen [K-M-S1] respectively for the continuous torus and a certain class of Boltzmann measures. In this chapter, our purpose is twofold. We begin by showing how to obtain these generalizations for the quantitative relationship of the preceding chapter (up to constants) via a generalization of Austin's arguments. Then, we present a new result (to the best of our knowledge) in the continuous case and more precisely for products of log-concave measures.

Before starting, we recall some basic definitions. Let a Boolean function $f : \{-1, 1\}^n \mapsto \{-1, 1\}$ on the discrete cube endowed with the uniform probability and denote the total influence $\sum_i I_i(f)$ by $I(f)$.

Definition 6.1.1. A Boolean function $f : \{-1, 1\}^n \mapsto \{-1, 1\}$ is called a k -junta if it depends only on k coordinates.

A junta function will be a function that depends on only a fixed number, i.e independent of n , of coordinates. Recall that ν is the uniform measure on $\{-1, 1\}^n$.

Definition 6.1.2. A (ε, k) -junta is a boolean function f such that there exists a k -junta function g with $\|f - g\|_{L^1(\nu)} \leq \varepsilon$.

If f is a junta, it is an immediate consequence that $I(f) = O(1)$. Friedgut [Fri] has proved a kind of converse statement of this fact, by the following theorem.

Theorem 6.1.3. Set $f : \{-1, 1\}^n \mapsto \{-1, 1\}$ with total influence equal to $I(f)$. Then f is a $O(\varepsilon, e^{O(I(f)/\varepsilon)})$ -junta.

Such theorem has been partially extended to monotone graph properties on random graph $G(n, p)$. This can be view as a monotone function $f : \{-1, 1\}^{\binom{n}{2}} \mapsto \{-1, 1\}$, endowed with the product measure $(p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1})^{\otimes N}$, with $N = \binom{n}{2}$. Non-product examples has also been investigated and an analogous theorem has been proven for the slices of the cube independently by Wimmer [Wim] and by Filmus [Fil].

In what follows, we are aiming to show that Austin's argument combined with both Theorem 5.3.1 and 5.4.1 is actually enough to obtain most of the existing results. On top of that, the consideration of general L^2 functions allows us to remove the condition for the function to be Boolean valued. Clearly, the other sticking point of our proof is its simplicity. The idea is as simple as the proof. Indeed, a function with small total influence is such that a large number of its coordinates have either no or few influences. This remark strongly suggests that the function must remain close to its

average over such coordinates and therefore should be essentially determined by a small number of them.

The next section is devoted to proof of the main result of this chapter. In the second to last section, we note that the orthonormal construction of Filmus in the case of the slices of the Boolean cube allows to conclude similarly to a Juntas theorem. In the last section, we discuss the case of product of log-concave measures.

6.2 Schreier and Cayley graphs setting

In what follows let (G, V) be a Schreier or Cayley graph with uniform probability measure μ . Denote as usual λ the spectral gap constant and ρ the hypercontractive constant. Let $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Set for $\{s_1, \dots, s_k\} \subset S$, $T = S \setminus \{s_1, \dots, s_k\}$, $\mathcal{C}$ the set generated by $(s_j)_{j \in T}$ and

$$\Pi_T f(x) = \sum_{s \in \mathcal{C}} f(x^s) \mu(s),$$

the function obtained from f by averaging over $\mathcal{C}$. Clearly, $\Pi_T f$ depends only on $s_1, \dots, s_k$, i.e. $\sum_{s \in T} I_s(\Pi_T f) = 0$. The main idea is to show that when the total influence does not depend on n , f is close to the k -junta $\Pi_T f$, where $s_1, \dots, s_k$ are coordinates of “large” influences.

6.2.1 The case of product structures.

When the Cayley graph is a product graph V^n , the generating set S is given by

$$s_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), i \in [n],$$

where 1 is the i -th place. Moreover, recall that the influences are defined by $I_i f = \|L_i f\|_1$, where $L_i f = f(\cdot + e_i) - f$. In this context, one have the following junta theorem.

Theorem 6.2.1. *Let V^n be a Cayley or Schreier graph product with Sobolev logarithmic constant ρ . Let $f : V^n \mapsto \{-1, 1\}$ and set $I(f) = \sum_{i=1}^n I_i(f)$. Then f is a $O(\varepsilon, \exp(O(\frac{I(f)|\log(\varepsilon\rho)|}{\rho\varepsilon^2})))$ -junta.*

The proof of the theorem relies essentially of the following lemma, due to Austin [Aus] in the continuous case $\Omega = [0, 1]$. To state this, we need to use some notations. Let $\{s_{j_1}, \dots, s_{j_k}\}$ to be a subset of the canonical basis (that will correspond the coordinates of “large influence”). We identify s_{j_i} with j_i . Denote $T = \{t_1, \dots, t_{n-k}\}$ so that $[n]$ is the disjoint union of $\{j_1, \dots, j_k\}$ and $\{t_1, \dots, t_{n-k}\}$. Define then $f_0 = f$, and for all $1 \leq i \leq n - k$, $f_i = \Pi_{S \setminus \{t_i\}} f_{i-1}$, that is integrate successively with respect to the coordinates of T . Then the sequence $(f_i)_{1 \leq i \leq n-k}$ is a reverse martingale.

Lemma 6.2.2. *Suppose that $f : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ with for each $i \in \{1, \dots, n\}$, $\|L_i f\|_\infty \leq 1$. Denote by $I(f)$ to total influence of f . If $\eta > 0$ and $t > 0$ are fixed, then*

$$\|P_t f - \Pi_T P_t f\|_2^2 \leq \frac{7I(f)}{\rho^2} \eta^{\frac{1-e^{-2\rho t}}{2}},$$

where T is such that $\forall i \in \{j_1, \dots, j_k\}$, $I_i f = \|L_i f\|_1 \geq \eta$.

Proof of lemma 6.2.2. By the fact that $(P_t f)_i$ is a reverse martingale,

$$\|P_t f - \Pi_T P_t f\|_{L^2(V^n)}^2 = \sum_{i \in T} \|(P_t f)_{i-1} - \Pi_{S \setminus \{j_i\}} (P_t f)_{i-1}\|_{L^2(V^n)}^2 = \sum_{i \in T} \|(P_t f)_{i-1} - (P_t f)_i\|_{L^2(V^n)}^2.$$

But, for each i , by Theorem 5.4.1 with $r = 1$ and by the spectral gap inequality,

$$\|(P_t f)_{i-1} - (P_t f)_i\|_{L^2(V^n)}^2 \leq \frac{7}{\lambda} \|L_i f\|_1^{2\alpha(t)} \|f\|_2^{2-2\alpha(t)} \leq \frac{7}{\lambda^2} \|L_i f\|_1^{2\alpha(t)} \|L_i f\|_2^{2-2\alpha(t)},$$

where we recall that $\alpha(t) = \frac{1-e^{-2\rho t}}{2}$. Therefore,

$$\|P_t f - \Pi_T P_t f\|_{L^2(V^n)}^2 = \sum_{i \in T} \|(P_t f)_{i-1} - (P_t f)_i\|_{L^2(V^n)}^2 \leq \frac{7}{\lambda^2} \sum_{i \in T} \|L_i f\|_1^{2\alpha(t)} \|L_i f\|_2^{2-2\alpha(t)}.$$

Applying Hölder inequality with exponents $\left(\frac{1}{\alpha(t)}, \frac{1}{1-\alpha(t)}\right)$ yields

$$\sum_{i \in T} \|L_i f\|_1^{2\alpha(t)} \|L_i f\|_2^{2-2\alpha(t)} \leq \left(\sum_{i \in T} \|L_i f\|_1^2\right)^{\alpha(t)} \left(\sum_{i \in T} \|L_i f\|_2^2\right)^{1-\alpha(t)}.$$

Using the fact that by assumption $\|L_i f\|_2^2 \leq \|L_i f\|_1 \|L_i f\|_\infty \leq \|L_i f\|_1$ and

$$\sum_{i \in T} \|L_i f\|_1^2 \leq \eta \times \sum_{i \in T} \|L_i f\|_1,$$

we also get

$$\left(\sum_{i \in T} \|L_i f\|_1^2\right)^{\alpha(t)} \left(\sum_{i \in T} \|L_i f\|_2^2\right)^{1-\alpha(t)} \leq \eta^{\alpha(t)} \sum_{i \in T} \|L_i f\|_1 \leq \eta^{\alpha(t)} I(f).$$

Hence $\|P_t f - \Pi_T P_t f\|_{L^2(V^n)}^2 \leq \frac{7I(f)}{\lambda^2} \eta^{\alpha(t)}$. Since $\rho \leq \lambda$, the lemma is proven. $\square$

To conclude to amount to Theorem 6.2.1, we now use the following lemma, that is due to Bakry [Bak1] in continuous setting.

Lemma 6.2.3. $\forall f : V^n \rightarrow \mathbb{R}, \forall t \geq 0, \|f - P_t f\|_{L^2(\mu)}^2 \leq t \mathcal{E}(f, f)$.

Proof. Recall that $-L$ is a (semi) positive operator on $L^2(V^n)$. Let $\{0, \lambda_1 = \lambda, \lambda_2, \dots\}$ to be its spectrum. Hence $\mathcal{E}(f, f) = \langle f, -L f \rangle_{L^2(\mu)} = \sum_{k \geq 1} \lambda_k \|f^{=k}\|_2^2$ and $\|f - P_t f\|_{L^2(\mu)}^2 = \sum_{k \geq 1} (1 - e^{-t\lambda_k}) \|f^{=k}\|_2^2$. The lemma follows then from the inequality $1 - e^{-x} \leq x$ valid for all $x > 0$. $\square$

Since Π_T is a projection, one also have $\|\Pi_T f - \Pi_T P_t f\|_2 \leq t \mathcal{E}(f, f)$. Besides,

$$\mathcal{E}(f, f) = \sum_{i=1}^n \|L_i f\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^n \|L_i f\|_1 \|L_i f\|_\infty \leq I(f).$$

It follows from the triangle inequality that for all $t \geq 0$,

$$\|f - \Pi_T f\|_2 \leq (\sqrt{2t} + \sqrt{7}\rho^{-1} \eta^{\frac{1-e^{-2\rho t}}{4}}) I(f).$$

Recall that $\Pi_T f$ depends only on k coordinates, and since for each $i \in \{1, \dots, k\}$, $I_{s_i} f \geq \eta$, one have $k \leq I(f) \eta^{-1}$. Choose now $t = \frac{\varepsilon^2}{4I(f)}$, and η such that $\rho^{-1} \eta^{\frac{1-e^{-2\rho t}}{4}} I(f) = \frac{\varepsilon}{6}$. Then $\eta = \exp(-O(\frac{I(f)|\log(\varepsilon\rho)|}{\rho\varepsilon^2}))$ and $\|f - \Pi_T f\|_2 \leq \varepsilon$. Therefore, every f satisfying the assumption $\max_{1 \leq i \leq n} \|L_i f\|_\infty \leq 1$ is a $O(\varepsilon, \exp(O(\frac{I(f)|\log(\varepsilon\rho)|}{\rho\varepsilon^2})))$ -junta.

In this statement, the important point is that if $I(f)$ do not depend on n , f stays close to a function that depends on a fixed number, namely a junta. The estimate is however weaker (due to the extra $\log \varepsilon$ term) than the ones following from the previous works, but in this form the functions can be real-valued.

To emphasis its interest, Theorem 6.2.1 contains numerous of known results. The simplest case is $\Omega = (\{0, 1\}, \nu_p)$. Then recall that the hypercontractive constant is $\rho = 2^{\frac{p-(1-p)}{\log p - \log(1-p)}}$. If p is independent of N , the following result holds (the case $p = 1/2$ is the original Friedgut's junta theorem for Boolean functions) :

Corollary 6.2.4. *Let $f : (\{0, 1\}^n, \nu_p^n) \mapsto \{0, 1\}$ with $\|\partial f\|_1 = I(f)$ and p independent of n . Then there exists $g : (\{0, 1\}^n, \nu_p^n) \mapsto \{0, 1\}$ such that g is a $e^{O(\frac{I(f)\log(\varepsilon)}{\varepsilon})}$ -junta and $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$.*

Proof. Indeed, according to our previous results $\|f - E_S f\|_2 \leq \varepsilon$. Setting $g = \frac{\text{sgn}(E_S f) + 1}{2}$, we then have

$$\mathbb{P}(f \neq g) \leq \|f - E_S f\|_2^2 \leq \varepsilon^2,$$

and g depends on coordinates of S , with $|S| = e^{O(\frac{I(f)\log(\varepsilon)}{\varepsilon^2})}$. Substituting ε^2 by ε yields the result. $\square$

Another interesting instance is given by the discrete tori $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$ for $m \geq 2$ as in [Beal]. Let $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ be the canonical base of $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$. Recall that we have then $\lambda = \frac{1 - \cos(\frac{2\pi}{m})}{n}$ and $\rho \sim \lambda$ (i.e. of the same order). Then, the following corollary holds.

Corollary 6.2.5. *Let $m \geq 2$. Let $f : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n \rightarrow \{0, 1\}$ with total influence $I(f)$ defined as*

$$I(f) = \frac{1}{m^n} \sum_{i=1}^n \sum_{x \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n} |f(x \oplus e_i) - f(x)|.$$

Then there exists a function g depending on at most $\exp\left(O\left(\frac{I(f)m^4 \log(m^2/\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\right)$ coordinates such that

$$\|f - g\|_{L^1((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n)} = \frac{1}{m^n} \sum_{x \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

This is a weak form of Theorem 5 of [Beal], and similar up to the logarithmic factor to the result obtained in [Sa-Tu], but with a somewhat simpler proof.

More generally, Theorem 6.2.1 is a particular case of the recent work of Sachdeva and Tulsiani [Sa-Tu]. Namely, if G is a graph, and $G^{\square k}$ is its k -th power, then any boolean function with total influence $I(f)$ on $V(G^{\square k})$ is a $O(\varepsilon, \exp(O(\frac{I(f)}{\rho^\varepsilon})))$ -junta.

The proof of [Sa-Tu] relies on an appropriate control on the entropy in the spirit of a work of Rossignol [Ros]. It is mentioned that the results can be extend for more general Markov chains K that the one attached with the standard random walk to the nearest neighbour.

We notice that the proof of lemma 6.2.2 heavily relies on the Cartesian product structure. Indeed, in the non product setting, the reverse martingale argument fails. For a general graph, the lack of structure impends to bound efficiently $\|f - \Pi_T f\|_{L^1(G)}$. In the next section, we make use of a construction by Filmus [Fil] to obtain a similar conclusion over the slices of the Boolean cube with this scheme of proof.

6.3 Case of the slice of the cube.

Recent results of Wimmer and Filmus however have extended this Junta conclusion to the slices of the hypercube. The symmetric group $\mathfrak{S}_n$ and the slices of Boolean cube defined by $\binom{[n]}{k} := \{x \in \{0, 1\}^n, \sum_{i=1}^n x_i = k\}$ are relevant non products examples of Cayley or Schreier graphs. Recall that previous results of harmonic analysis over Boolean cube have been extended such as the KKL theorem [O-W] and Talagrand's inequality [CE-L]. In the case of the symmetric group, the two above results are not improving upon the Poincaré inequality and we have seen that the quantitative B-K-S relationship also yields empty conclusion. The reason for it is that the hypercontractive constant, of order $1/(n \log n)$, is too small with respect to the spectral gap of order $1/n$.

For the Junta-Theorem, in [Wim], it is pointed out that it is false for the symmetric group, but the author is able to deduce a junta-theorem for the slice of the hypercube $\binom{[n]}{k}$ when k/n is bounded away from 0 and 1. In this context the total influence is defined by

$$\text{Inf}(f) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Inf}_{ij}(f)$$

and similarly, the total influence up to k coordinates is $\text{Inf}^{(k)}(f) = \frac{1}{k} \sum_{1 \leq i < j \leq k} \text{Inf}_{ij}(f)$. Note that for Boolean values functions the Dirichlet form is related to the influences by

$$\mathcal{E}(f, f) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i < j} \text{Inf}_{ij}(f) = \frac{1}{n-1} \text{Inf}(f).$$

A counterexample for the symmetric group is given by the following lemma.

Lemma 6.3.1. *Let $f : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{0, 1\}$ defined by $f(\sigma) = 1$ if and only if σ is a derangement, that is for each $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma(i) \neq i$. Then $\text{Inf}(f) = O(1)$ and any function $g : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{0, 1\}$ depending only on $n/12$ coordinates is such that $\mathbb{P}_\mu(f \neq g) \geq 1/4$, where μ is the uniform measure on $\mathfrak{S}_n$.*

Proof. Recall that for each transposition (ij) , $\text{Inf}_{ij}(f) \leq 2/n$. Thus, the total influence is independent of n . But, as shown in [Wim], any function $g : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{0, 1\}$ depending only on the last $n/12$ coordinates is such that $\mathbb{P}_\mu(f \neq g) \geq 1/4$. $\square$

Recently, Filmus [Fil] gave of proof of the Friedgut–Wimmer theorem for slices of the hypercube. The purpose of the following is to recall Filmus’s main arguments and to show that the preceding scheme of proof can be applied.

Without loss of generality, we can choose η such that $\text{Inf}_{ij}f \leq \eta$ whenever $i, j \notin S$ where $S = \{n-m+1, \dots, n\}$, which means in the above notations that the set $\mathcal{C}$ is the set $\mathcal{T}_{n-m}$ of all transpositions of the all integers less or equal than $n-m$. $\Pi_T f(x) = \frac{1}{(n-m)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-m}} f(x^\sigma)$ is therefore the function obtained from f by averaging over all permutations of $[n-m]$ and depends only on the last m coordinates.

A main result of [Fil] is to build in $\binom{[n]}{k}$ an orthogonal basis of multilinear polynomials $((\chi_B)_{B \in \mathcal{B}_n})$ where $\mathcal{B}_n$ are subsets of $\{1, \dots, n\}$ called “top sets”. Then, it is proven that each of the function f can be decomposed into on

$$f = \sum_{B \in \mathcal{B}_n} \hat{f}(B) c_B \chi_B,$$

where as usual $\hat{f}(B) = \langle f, \chi_B \rangle_{L^2(\binom{[n]}{k})}$. Moreover, we have that

$$f - \Pi_T f = \sum_{B \in \mathcal{B}_n, B \cap [n-m] \neq \emptyset} \hat{f}(B) c_B \chi_B,$$

and so

$$\|f - \Pi_T f\|_2^2 = \sum_{B \in \mathcal{B}_n, B \cap [n-m] \neq \emptyset} \hat{f}(B)^2 c_B.$$

A key property of this basis is that as in the case of the Boolean cube, each χ_B is an eigenvector of the operator L and so of the semigroup $(P_t)_{t \geq 0}$. The corresponding eigenvalues are equal to $\frac{2|B|(n+1-|B|)}{n(n-1)}$. If we define $H_t = P_{\frac{(n-1)t}{2}}$, then

$$H_t f = \sum_{B \in \mathcal{B}_n} \exp\left(-t \frac{|B|(n+1-|B|)}{n}\right) \hat{f}(B) c_B \chi_B,$$

and

$$\|H_t f - \Pi_T H_t f\|_2^2 = \sum_{B \in \mathcal{B}_n, B \cap [n-m] \neq \emptyset} \exp\left(-t \frac{|B|(n+1-|B|)}{n}\right) \hat{f}(B)^2 c_B.$$

Another important result of [Fil] is to express the total influences in terms of the orthogonal basis χ_B , similarly as in the case of the Boolean cube. More precisely, the following lemma holds.

Lemma 6.3.2.

$$\forall 1 \leq k \leq n, \text{Inf}^{(k)}(f) = \sum_{B \in \mathcal{B}_n} \frac{|B \cap [k]|(k+1-|B \cap [k]|)}{k} \hat{f}(B)^2 c_B.$$

In particular,

$$\text{Inf}(f) = \sum_{B \in \mathcal{B}_n} \frac{|B|(n+1-|B|)}{n} \hat{f}(B)^2 c_B.$$

We now show how it suffices to conclude to a Junta theorem. First, we can write

$$\text{Inf}^{(k)}(H_t f) = \sum_{B \in \mathcal{B}_n} \exp\left(-t \frac{|B|(n+1-|B|)}{n}\right) \frac{|B \cap [k]|(k+1-|B \cap [k]|)}{k} \hat{f}(B)^2 c_B.$$

Since for each $k \geq 1$ and $|B \cap [k]| > 0$ one have $1 \leq \frac{|B \cap [k]|(k+1-|B \cap [k]|)}{k}$,

$$\|H_t f - \Pi_T H_t f\|_2^2 = \sum_{B \in \mathcal{B}_n, B \cap [n-m] \neq \emptyset} \exp\left(-t \frac{|B|(n+1-|B|)}{n}\right) \hat{f}(B)^2 c_B \leq \text{Inf}^{(n-m)}(H_t f).$$

Recall that the hypercontractive inequality expresses that $\text{Inf}_{ij}(H_t f) \leq (\text{Inf}_{ij}(f))^{\alpha(t)}$ with $\alpha(t) = \frac{1}{1+e^{-\rho t}}$, with ρ the hypercontractive constant of $(H_t)_{t \geq 0}$. The Lee–Yau result [LY] implies that if k/n is bounded away from 0 and 1, $\rho = O(1)$. It yields

$$\|H_t f - \Pi_T H_t f\|_2^2 \leq \frac{1}{n-m} \sum_{1 \leq i < j \leq n-m} (\text{Inf}_{ij}(f))^{\alpha(t)}.$$

By assumption, for each $1 \leq i < j \leq n-m$, $\text{Inf}_{ij}(f) \leq \eta$. Thus

$$\|H_t f - \Pi_T H_t f\|_2^2 \leq \frac{\eta^{\alpha(t)-1}}{n-m} \sum_{1 \leq i < j \leq n-m} \text{Inf}_{ij}(f) \leq \frac{n}{n-m} \eta^{\alpha(t)-1} \text{Inf}(f).$$

Recall that Lemma 6.2.3 ensures that

$$\|f - H_t f\|_{L^2(\mu)}^2 \leq \frac{(n-1)t}{2} \mathcal{E}(f, f) = \frac{t}{2} \text{Inf}(f).$$

Since Π_T is a projection, the preceding arguments yield this time,

$$\|f - \Pi_T f\|_2^2 \leq (t + \frac{n}{n-m} \eta^{\alpha(t)-1}) \text{Inf}(f).$$

Taking $t = \frac{\varepsilon}{2\text{Inf}(f)}$, there exists a constant c such that $\eta^{\alpha(t)-1} \leq \eta^{c\varepsilon}$. Finally we use the following lemma of [Fil] (see also [Wim]) :

Lemma 6.3.3. *For every function on the slice f , every $\tau > 0$, there exists a set S of cardinality at most $O(\frac{\text{Inf}(f)}{\tau})$ such that for every $i, j \notin S$, $\text{Inf}_{ij} f < \tau$.*

It implies that one can take $m = O(\frac{\text{Inf}(f)}{\tau})$ and it yields the Junta conclusion for slices of the hypercube :

Theorem 6.3.4. *Let $f : (\binom{[n]}{k}, \mu) \mapsto \{0, 1\}$ with $\text{Inf}(f) = O(1)$. Then there exists $g : \binom{[n]}{k} \mapsto \{0, 1\}$ such that g is a $e^{O(\frac{\log(\varepsilon)}{\varepsilon})}$ -junta and $\|f - g\|_{L^1(\mu)} \leq \varepsilon$.*

6.4 The continuous case.

The preceding easily extends to the continuous setting, namely products of log-concave measures. For sake of simplicity, consider only product spaces $(\mathbb{R}^n, \mu^{\otimes n})$ with $d\mu(x) = e^{-v} dx$, $v'' \geq c > 0$ for $n \geq 1$. Then, starting from Theorem 5.3.1, one can reach with the same scheme of proof (keeping the same notations), the following inequality

$$\|P_t f - \Pi_T P_t f\|_2^2 \leq \frac{4}{c \max(1, c)} e^{-ct} \left(\sum_{i \in T} \|\partial_i f\|_1^2 \right)^{(1-e^{-ct})/2} \left(\sum_{i \in T} \|\partial_i f\|_2^2 \right)^{(1+e^{-ct})/2}.$$

By the preceding arguments, the next junta theorem holds.

Theorem 6.4.1. *Let $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-1, 1]$ with $\sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{L^1(\mu^{\otimes n})} = I(f)$. There exists a function g such that g depends of at most $\exp\left(O\left(\frac{I(f)|\log(\varepsilon c)|}{c\varepsilon^{3/2}}\right)\right)$ coordinates and $\|f - g\|_{L^1(\mu^{\otimes n})} \leq \varepsilon$.*

It is of interest to understand the content of this result in connection with geometric influences. Say that a set A is *increasing* if whenever $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in A$ as soon as for each $i \in 1, \dots, n$, $x_i \leq y_i$ or *decreasing* if whenever $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in A$ when for each $i \in 1, \dots, n$, $x_i \geq y_i$. For monotone (either increasing or decreasing) sets, the total influence $\sum_{i=1}^n I_i^{\mathcal{G}}(A) = I(f)$ is the measure of the boundary under uniform enlargement (see [K-M-S1]).

Corollary 6.4.2. *Take $(\mathbb{R}^n, \mu^{\otimes n})$ with $d\mu(x) = e^{-v(x)} dx$, $v'' \geq c > 0$, a log-concave measure on the real line. For any monotone set A with $\sum_{i=1}^n I_i^{\mathcal{G}}(A) = I(f)$, there exists a set B such that $\mathbf{1}_B$ is determined by at most $e^{O\left(\frac{I(f)|\log(\varepsilon c)|}{c\varepsilon^{3/2}}\right)}$ -coordinates and $\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B\|_1 \leq \varepsilon$.*

This corollary expresses that any monotone set whose boundary measure under uniform enlargement does not depend on the dimension essentially lies on a subspace of fixed dimension. We refer to Theorem 3.13 of [K-M-S1] for similar results in that direction. We note that in [K-M-S1] the authors are able to deal with family of Boltzmann measures $\mu_p^{\otimes n}$ ($p \geq 2$) given by

$$d\mu_p(x) = \frac{1}{Z_p} e^{-|x|^p} dx,$$

where Z_p is the normalizing constant. Since for $p > 2$, these measures are not strictly log-concave measures, we are not able to prove an analogous result in this case.

Bibliographie

- [A-B-G-M] D. AHLBERG E. BROMAN S. GRIFFITHS R. MORRIS *Noise sensitivity in continuum percolation*. Israel J. Math. 201 no. 2, p. 847–899. (2014)
- [Aal] C. ANÉ, S. BLACHÈRE, D. CHAFAÏ, P. FOUGÈRES, I. GENTIL, F. MALRIEU, C. ROBERTO, G. SCHEFFER *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*. Panoramas et Synthèses, Vol. 10 Soc. Math. de France (2000) [92](#)
- [Arr] K. ARROW. *A difficulty in the concept of social welfare*. The Journal of Political Economy, 58(4) p. 328–346 (1950) [61](#)
- [Aub] T. AUBIN, *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*. Grundlehren Math. Wiss. Springer-Verlag, New York (1982) [12](#)
- [Aus] T. AUSTIN, *On the failure of concentration for the l^∞ -ball*. Israel J. Math, (2014) [72](#), [103](#), [104](#)
- [Ba-Ta] A. BAERNSTEIN, B.A TAYLOR *Spherical rearrangements, subharmonic functions and $*$ -functions in n -space* Duke Math. J., 1996, Vol.43 2 (1976) [39](#)
- [Bak1] D. BAKRY *L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes*. Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992), vol 1581 of Lecture Notes in Math., pages 1–114. Springer, Berlin, 1994. (1992) [18](#), [92](#), [93](#), [99](#), [105](#)
- [Bak2] D. BAKRY *On Sobolev and Sobolev logarithmic inequalities for Markov semigroups.*, Séminaire de Probabilités XIX, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, New York 1123 p.177-206 (1997)
- [B-E] D. BAKRY, M. EMERY *Diffusions hypercontractives.*, Séminaire de Probabilités XIX, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, New York 1123 p.177-206 (1985) [v](#), [13](#), [17](#), [43](#)
- [B-G-L1] D. BAKRY, I. GENTIL, M. LEDOUX. *Analysis and geometry of Markov diffusion operators*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 348. Springer (2014) [14](#), [18](#), [44](#), [92](#), [93](#)
- [B-G-L2] D. BAKRY, I. GENTIL, M. LEDOUX. *On Harnack inequalities and optimal transportation*. Ann. del. Scu. Norm. Sup. di Pisa, Classi di Scienze, V, Vol. XIV, (2015) [21](#)
- [B-L1] D. BAKRY, M. LEDOUX. *Lévy–Gromov comparison Theorem for an infinite dimensional generators*. Invent. Math., 123 259-281 (1996) [9](#), [22](#), [46](#), [48](#), [55](#)
- [B-L2] D. BAKRY, M. LEDOUX. *Sobolev inequalities and Myers's diameter theorem for an abstract Markov generator*. Duke Math. J., 1996, Vol85 (1996) [12](#)
- [Bal] K. M. BALL. *Volumes of sections of cubes and related problems*. In J. Lindenstrauss and V. D. Milman, editors, Israel seminar on Geometric Aspects of Functional Analysis, number 1376 in Lectures Notes in Math. Springer-Verlag, (1989) [34](#)
- [B-B-J] M. BARCHIESI, A. BRANCOLINI, V. JULIN *Sharp dimension free quantitative estimates for the Gaussian isoperimetric inequality* To appear in Annal of Probab (2015) [9](#), [53](#)
- [Bar1] F. BARTHE, *On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality*, Invent. Math. 134, p.335-361 (1998) [35](#)
- [Bar2] F. BARTHE, *Log-concave and spherical models in isoperimetry*, Geom. Asp. Funct. Anal. 12, p.32-55 (2002) [53](#)
- [B-CE] F. BARTHE, D. CORDERO-ERAUSQUIN *Inverse Brascamp-Lieb inequalities along the Heat equation* Geom. Asp. of Fonct. Anal. (2002) [34](#)

- [B-C-L-M] F. BARTHE, D. CORDERO-ERAUSQUIN, M. LEDOUX, B. MAUREY *Correlation and Brascamp-Lieb inequalities for Markov semigroups*. Int. Math. Res. Not. no. 10, 2177–2216 (2011)
- [B-H] F. BARTHE, B. HUOU *Perimeters, uniform enlargement and high dimensions*, to appear in Official Journal of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability (201.) 83
- [B-M] F. BARTHE, B. MAUREY. *Some remarks on isoperimetry of Gaussian type*. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat. 36, no. 4, p. 419–434 (2000) 23, 39
- [Bay] V. BAYLE *Propriétés de concavité du profil isopérimétrique et applications.*, Ph.D thesis, Institut Joseph Fourier, Grenoble (2004) 10, 44
- [Bec] W. BECKNER *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. of Math. 102(1), p. 159-182 (1975) 62
- [BO-L] M. BEN OR, N. LINIAL *Collective coin flipping* Randomness and Computation"Academic Press, New York, p. 91-115. (1990) 70
- [Beal] I. BENJAMINI, D. ELLIS, E. FRIEDGUT, N. KELLER, A. SEN *Junta in the l^1 -grid and Lipschitz maps between discrete tori*, available online at <http://arxiv.org/pdf/1311.6958v3.pdf> 103, 106
- [B-K-S] I. BENJAMINI, G. KALAI, O. SCHRAMM *Noise sensitivity of boolean functions and applications to percolation*, Publ I.H.E.S 90, p. 5-43 (1999) 62, 72, 73, 74, 89, 90, 91, 100
- [B-C-C-T] J. BENNETT, A. CARBERY, M. CHRIST, T.TAO *Brascamp-Lieb inequalities : finiteness, structure and extremals*. Geom. Funct. Anal. 17 no. 5, p. 1343–1415 (2008) 34, 35
- [Ben1] A. BENTALEB. *Inégalité de Sobolev pour l'opérateur ultrasphérique* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 317, no. 2, p. 187–190 (1993) 40
- [Ben2] A. BENTALEB. *Sur les fonctions extrémales des inégalités de Sobolev des opérateurs de diffusion*. Séminaire de probabilités de Strasbourg 36, p. 230-250 (2002). 24, 46
- [Bob1] S. BOBKOV. *Extremal properties of half-spaces for log-concave distributions*. Ann. of Probab. 24, p. 35-48 (1996) 46
- [Bob2] S. BOBKOV. *An isoperimetric inequality on the discrete cube, and an elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space*. Ann. of Probab. 25, p. 206-214 (1997) 8, 46
- [Bon] A. BONAMI *Étude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$* , Annal. Inst. Fourier (Grenoble), 20 (2) p. 335-402 1971 (1970) 62
- [Bor1] C. BORELL *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Invent. Math. Vol. 30 p. 207-216 (1975) 7
- [Bor2] C. BORELL *Geometric bounds on the Ornstein-Uhlenbeck velocity process*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, Vol. 70 (1) p. 1-13 (1985) 24, 27
- [Bor3] C. BORELL *The Ehrhard inequality*, C. R. Acad. Sci. Paris 337 p.663–666 (2003) 8
- [BKal] J. BOURGAIN, J. KAHN, G. KALAI, Y. KATZNELSON, N. LINIAL *The influence of variables in product spaces*. Israel J. Math. 77, no. 1-2, p. 55–64 (1992) 71
- [Bou] R. BOUYRIE *On quantitative BKS relationship for discrete and continuous models*, to appear in Combinatorics, Probability and Computing vi, 74, 82, 89
- [Br-Li] H. J. BRASCAMP, E. LIEB *Best constants in Young's inequality, its converse, and its generalization to more than three functions*. Advances in Math. 20 no. 2, 151–173 (1976)
- [B-G-S] E. BROMAN, C. GARBAN, J. STEIF *Exclusion sensitivity of Boolean functions*. Probab. Theory Related Fields 155 , no. 3-4, p. 621–663 (2013) 86, 101, 102
- [Car] E. CARLEN, *Some integral identities and inequalities for entire functions and their application to the coherent state transform*, J. Funct. Anal. 97, 231–249 (1991) 24, 31
- [C-K] E. CARLEN, C. KERCE, *On the Cases of Equality in Bobkov's Inequality and Gaussian Rearrangement*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 13, p. 1–18 (2001) 8, 22, 24, 50, 51, 52

- [C-L-L] E. CARLEN, E. LIEB, M. LOSS *A sharp analog of Young's inequality on $\mathbb{S}^n$ and related entropy inequalities*. J. Geom. Anal. 14 no. 3, p.487–520. (2004) [34](#)
- [Car-M] A. CARBONARO, G. MAUCERI *A note on bouded variation and heat semigroup on Riemannian manifolds*, Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 76 p.155-160 (2007)
- [C-M1] F. CAVALLETTI, A. MONDINO *Sharp geometric and functional inequalities in metric-measure spaces with lower Ricci curvatiure bounds*, preprint 2015 [51](#)
- [C-M2] F. CAVALLETTI, A. MONDINO *Sharp and rigid isoperimetric inequalities in metric-measure spaces with lower Ricci curvature bounds*, preprint 2015 [v](#), [10](#), [43](#), [49](#)
- [Cha] I. CHAVEL *Riemannian Geometry : A modern introduction*, Cambridge Tracts in Math., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993 (1993) [v](#), [43](#)
- [Ch-Sh] J.Y. CHEN, Y.C. SHEU *On the log-Sobolev constant for the simple random walk on the n-cycle : the even cases*. J. Funct. Anal. 202, no. 2, p. 473–485. (2003) [3](#)
[68](#)
- [CE] D. CORDERO-ERAUSQUIN, *Transport inequalities for log-concave measures, quantitative forms and applications*, Can. J. of Math. (2015) [50](#)
- [CE-L] D. CORDERO-ERAUSQUIN, M. LEDOUX. *Hypercontractives measures, Talagrand's inequality, and influences*, Geometric Aspects of Functional Analysis, Springer, 2012, p. 169-189 (2011) [vi](#), [66](#), [71](#), [82](#), [83](#), [86](#), [87](#), [88](#), [91](#), [93](#), [97](#), [99](#), [100](#), [106](#)
- [DC] Y. DE CASTRO. *Quantitative isoperimetric inequalities on the real line*. Ann. Math. Blaise Pascal 18 no. 2, p. 251–271. (2011) [53](#)
- [DG] E. DE GIORGI. *Frontiere orientate di misura minima*. Seminario di Matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1960-61. (1961) [9](#), [51](#)
- [D-M-Ne] A. DE, E. MOSSEL, J. NEEMAN *Majority is Stablest : Discret and SoS* STOC'13—Proceedings of the 2013 ACM Symposium on Theory of Computing, p.477–486, ACM, New York (2013) [77](#), [78](#)
- [D-SC] P. DIACONIS, L. SALOFF-COSTE *Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains*, Ann. Appl. Prob. 6, p. 695-750 (1996) [66](#), [68](#), [100](#)
- [E-M] M. EICHMAIR, J. METZGER, *Unique isoperimetric foliations of asymptotically flat manifolds in all dimensions*. Invent. Math. 194, no. 3, p 591–630 (2013) [5](#)
- [Eld] R. ELKAN, *A two-sided estimate for the Gaussian noise stability deficit*, Invent. Math Vol. 201 p. 561-624 (2015) [9](#), [38](#)
- [Ehr] A. EHRHARD, *Symétrisation dans l'espace de Gauss*, Math. Scand. 53, p. 281–301 (1983) [8](#)
- [F-M-G] A. FIGALLI, F. MAGGI, A. PRATELLI, *A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities*, Invent. Math. (2010) [6](#)
- [Fil] Y. FILMUS *Orthogonal basis for functions over a slice of the Boolean hypercube* The Electronic Journal of Combinatorics, Vol. 23 (2016) [69](#), [72](#), [80](#), [103](#), [106](#), [107](#), [108](#)
- [F-K-M-W] Y. FILMUS, E. MOSSEL, G. KINDLER, K. WIMMER *Invariant principle on slices*, to appear in Computational Complexity Conference (2016) [72](#), [100](#)
- [For] M.P. FÖRSTOM *A noise sensitivity theorem for Schreier graphs*. Available online at <http://arxiv.org/abs/1501.01828> (2015) [86](#), [100](#), [101](#), [102](#)
- [Fri] E. FRIEDGUT *Boolean functions with low average sensitivity depend on few coordinates*. Combinatorica, p. 27-35 (1998) [72](#), [103](#)
- [F-K] E. FRIEDGUT, G. KALAI *Every monotone graph property has a sharp threshold*. Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), no. 10, 2993–3002. [62](#), [70](#)
- [F-K-N] E. FRIEDGUT, G. KALAI, A. NAOR *Boolean functions whose Fourier transform is concentrated on the first two levels*. Adv. in Appl. Math. 29, no. 3, 427–437. (2002) [72](#)

- [G-H-L] S. GALLOT, D. HULIN, AND J. LAFONTAINE *Riemannian geometry* Springer-Verlag, Berlin, 1(2) :3, (1990) [3](#), [4](#)
- [G-S] C. GARBAN, J. E. STEIF *Lectures on Noise Sensitivity and Percolation*, Cambridge University Press (2014) [62](#), [89](#)
- [Grm] M. GROMOV. *Paul Lévy's isoperimetric inequality*. preprint, I.H.E.S., (1980) [9](#)
- [Grs] L. GROSS *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math., 97 : p. 1061-1083 (1975) [13](#), [92](#)
- [Har] L. HARPER. *Optimal assignments of numbers to vertices*. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 12, p.131–135 (1964) [70](#)
- [Hin] M. HINO *On short time asymptotic behaviour of some symmetric diffusions on general state spaces*, Potential Anal1 16, p. 249-264 (2002) [21](#)
- [Ili] S. ILIAS *Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), no. 2, 151–165 33 (1983) [12](#)
- [I-M] M. ISAKSSON, E. MOSSEL *Maximally stable Gaussian partitions with discrete applications*. Israel J. Math. 189 p. 347–396 (2012) [33](#)
- [K-K-L] J. KAHN, G. KALAI, N. LINIAL *The influence of variables on Boolean functions*, Proc. 29th Ann. Symp. on Foundations of Comp. Sci., Computer Society Press, , pp. 68-80. (1988) [62](#)
- [K-S] G. KALAI, S. SAFRA *Threshold phenomena and influence*, Computational Complexity and Statistical Physics, Oxford Univ. Press, 25-60 (2006) [62](#), [89](#)
- [Kal] G. KALAI *Fourier-theoretic perspective on the Condorcet paradox and Arrow's theorem* Adv. in Appl. Math. 29, no. 3, p. 412–426. (2002) [61](#)
- [K-L-S] R. KANNAN, L. LOVASZ, M. SIMONOVITS, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*. Discrete Comput. Geom., Vol. 13, No. 3–4, p. 541 - 559 (1995) [10](#)
- [K-K] N. KELLER, G. KINDLER *Quantitative relationship between noise sensitivity and influences*, Combinatorica 2013, Vol.33 : 45-71 (2013) [90](#), [91](#), [97](#), [98](#)
- [K-M-S1] N. KELLER, E. MOSSEL, A. SEN *Geometric influences*, Ann. of Probab. 2012, Vol.40 : p. 1135 - 1166 (2012) [vi](#), [72](#), [82](#), [86](#), [87](#), [91](#), [103](#), [109](#)
- [K-M-S2] N. KELLER, E. MOSSEL, A. SEN *Geometric influences II : Correlation inequalities and noise sensitivity*, Ann. Inst. H. Poincaré, Vol.50, No4 : p. 1121 - 1139 (2014) [vi](#), [83](#), [90](#), [91](#), [94](#)
- [K-K-O-M] S. KHOT, G. KINDLER, R. O'DONNELL, E. MOSSEL *Optimal inapproximability results for MAX-CUT and other 2-variable CSPs ?* SIAM J. Comput. 37, no. 1 p. 319–357 (2007) [76](#)
- [Ki-Sa] G. KINDLER, S. SAFRA *Noise-Resistant Boolean-Functions are Juntas* Manuscript. (2004) [72](#)
- [Kla] B. KLARTAG, *Needle decompositions in Riemannian geometry*, Mem. Amer. Math. Soc. (2015) [10](#), [49](#)
- [K-K-R-T] B. KLARTAG, G. KOZMA, P. RALLI, P. TETALI *Discrete curvature and abelian groups* To appear in Canadian. J. of Math. (2016) [85](#)
- [L-Y] T.Y. LEE, H.T. YAU *Logarithmic Sobolev inequality for some models of random walks* Ann. Of Probab. 1998 ; Vol.26 : p. 1855-1873 (1998) [68](#), [100](#), [108](#)
- [Le1] M. LEDOUX *A simple analytic proof of an inequality by P. Buser.*, Proc. Amer. Math. Soc. 121, p.951-959 , (1994) [20](#), [28](#), [47](#)
- [Le2] M. LEDOUX *Isoperimetry and Gaussian analysis.*, Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1994), , pages 165–294. Springer, Berlin, 1996, (1994) [13](#)
- [Le3] M. LEDOUX *The geometry of Markov diffusion generators.*, Ann. Fac. Sci., Toulouse IX, p. 305-366, (2000) [14](#)
- [Le4] M. LEDOUX *From concentration to isoperimetry : semigroup proofs.*, Contemp. Math., 545, Amer. Math. Soc., p. 155–166 (2011)

- [Le5] M. LEDOUX *Chaos of a Markov operator and the fourth moment condition.*, Ann. of Probab. 40, p.2439-2459, (2012) [21](#), [48](#)
- [Le6] M. LEDOUX *Remark on noise stability, Brascamp–Lieb and Slepian lemma.*, Geom. Asp. of Funct. Anal., Lecture Notes in Math. 2116, Springer p. 309-333, (2014) [24](#), [27](#), [29](#)
- [Lev] P. LÉVY. *Leçons d'analyse fonctionnelle.* Gauthier-Villars, Paris (1922) [6](#)
- [L-V] J. LOTT AND C. VILLANI. *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport.* Ann. of Math. (2), 169 (3) p.903–991 (2009)
- [Lus] L. LUSTERNIK. *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige meßbare Mengen.* C.R.Acad. Sci. URSS, 8 p. 55–58 (1935) [5](#)
- [Ma'] V. MAZ'YA. *Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 342. Springer, (2011) [6](#)
- [Maz] O. MAZET *Classification des Semi-Groupes associés à une famille de polynômes orthogonaux* Lecture Notes in Math. 1655, p. 40-53 1997. Springer, (1997) [91](#)
- [Mec] E. MECKES *On the approximate normality of eigenfunctions of the Laplacian.* Trans. Amer. Math. Soc. 361, no. 10, 5377–5399, (2009) [50](#)
- [Mil1] E. MILMAN, *Sharp Isoperimetric inequalities and model spaces for Curvature-Dimension-Diameter condition* J. Eur. Math. Soc. 17, p.1041–1078, (2015) [9](#), [52](#)
- [Mil2] E. MILMAN, *Spectral estimates, contractions and hypercontractivity* preprint , (2015) [50](#)
- [Mor] F. MORGAN, *Manifold with densities* Notices Amer. Math. Soc. 52, p.853-858, (2005) [10](#), [25](#), [45](#), [53](#)
- [M-N1] E. MOSSEL, J. NEEMAN *Robust dimension free Gaussian isoperimetry* Ann. of Probab. 43, p.971-991, (2015) [v](#), [9](#), [21](#), [25](#), [45](#), [50](#), [52](#), [53](#), [54](#), [57](#)
- [M-N2] E. MOSSEL, J. NEEMAN *Robust optimality of Gaussian noise stability* J. Eur. Math. Soc. 17, p.433–482, (2015) [vi](#), [27](#), [29](#), [38](#)
- [M-O-O] E. MOSSEL, R. O'DONELL, K. OLESZKIEWICZ *Noise stability of functions with low influences, invariance and optimality* Annals of Mathematics, 171(1) . 295–341, (2010) [76](#), [80](#)
- [M-W] C.E. MUELLER, F.B. WEISLER *Hypercontractivity for the heat semigroup for ultraspherical polynomials and on the n-Spheres* Journ. of Funct. Analysis Vol 48, p.252-283, (1982) [40](#), [44](#), [50](#)
- [Nee] J. NEEMAN, *Isoperimetry and noise sensitivity in Gaussian space* Ph.Dissertation, University of California, Berkeley, (2013) [33](#), [54](#)
- [Nel] E. NELSON *The free Markov field.* J. Funct. Anal. 12, p. 211-227 (1973) [62](#), [92](#)
- [OD] R. O'DONNELL, *Analysis of Boolean functions.* Cambridge University Press (2014) [62](#)
- [O-W] R. O'DONNELL, K. WIMMER *KKL, Kruskal-Katona, and monotone nets.* 50th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2009), 725734, IEEE Computer Soc., Los Alamitos, CA, (2009) [62](#), [66](#), [71](#), [82](#), [83](#), [99](#), [100](#), [106](#)
- [OD-Z] R. O'DONNELL, Y. ZHOU *Approximability and proof complexity.* In Proceedings of the 24th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, p. 1537–1556 (2013) [70](#)
- [Pa-We] L. E. PAYNE, H. F. WEINBERGER *An optimal Poincaré inequality for convex domains.* Arch. Rational Mech. Anal. 5, p. 286–292 (1960) [11](#)
- [R-R] M. RITORÉ, C. ROSALES *Existence and characterisation of regions minimizing perimeter under a volume constraint inside Euclidean cones* Tran. Amer. Math. Soc., electronics, p. 4601-4622 (2004) [52](#)
- [Ros] R. ROSSIGNOL, *Threshold for monotone symmetric properties through a Logarithmic Sobolev inequality.* Anal. of Probab. 34, 5, p.1707–1725. (2005) [106](#)

- [Rot] O. S. ROTHHAUS, Hypercontractivity and the Bakry-Emery criterion for compact Lie groups. *J. Funct. Anal.* 65 no. 3, p.358–367. (1986) [44](#)
- [Sa-Tu] S. SACHDEVA M. TULSIANI *Cuts in Cartesian Products of Graphs* Available online at <http://arxiv.org/abs/1105.3383> (2013) [72](#), [103](#), [106](#)
- [Sch] E. SCHMIDT. *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie*. I. *Math. Nachr.*, 1, p. 81–157 (1948)
- [Sc-Ts] [5](#), [6](#)
O. SCHRAMM, B. S. TSIREL'SON. *Trees, not cubes : hypercontractivity, cosiness, and noise stability*. *Electron. Comm. Probab.* 4, p.39–49 (1999) [81](#)
- [She] W. SHEPPARD. *On the application of the theory of error to cases of normal distribution and normal correlation*. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 192 p.101–167, 531 (1899) [75](#)
- [Su-Ts] V. N. SUDAKOV, B. S. TSIREL'SON. *Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures*. *J. Soviet. Math.* 9, p. 9–18 (1978) [7](#)
- [Tal1] M. TALAGRAND *On Russo's Approximate Zero-One Law*, *Ann. of Probab.*, 22 p. 1576-1587 (1994) [62](#), [71](#), [91](#)
- [Tal2] M. TALAGRAND *How much increasing sets are positively correlated ?*, *Combinatorica*, 16 p. 243-258 (1996)
- [Tal3] M. TALAGRAND *On Boundary and Influences*, *Combinatorica*, 17 p. 275-285 (1997)
- [Tlt] G. TALENTI *Best constant in Sobolev inequality*, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 110 p. 353–372. (1976) [12](#)
- [Val] S. I. VALDIMARSSON *Optimisers for the Brascamp-Lieb inequality*. *Israel J. Math.* 168, p. 253–274 (2008) [35](#)
- [VR-S] M.-K. VON RENESSE AND K.-T. STURM. *Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature*. *Comm. Pure Appl. Math.*, 58(7) :923–940, (2005)
- [Wim] K. WIMMER *Low influences of slices of the Boolean are juntas* IEEE 29th Conference on Computational Complexity—CCC 2014, 120–131, IEEE Computer Soc., Los Alamitos, CA, (2014) [72](#), [103](#), [106](#), [107](#), [108](#)

Les travaux menés dans cette thèse sont en lien avec les inégalités fonctionnelles et géométriques, dans le cadre continu et discret. En particulier, nous exploitons le principe de monotonie le long du flot de la chaleur, dont les conséquences ont été nombreuses en analyse, géométrie et probabilité depuis les travaux fondateurs de Bakry et Émery. Plus récemment, ce principe a été utilisé pour répondre à des questions d'informatiques théoriques via l'analyse des fonctions booléennes.

Dans une première partie, nous présentons diverses inégalités à intégrales multiples et inégalités de type géométriques obtenues par monotonie le long du semi-groupe de la chaleur. Nous caractérisons, par la plupart d'entre elles, les cas d'égalités et mettons en évidence des phénomènes de rigidité dans le cas de variétés riemanniennes. En particulier nous étudions la rigidité pour le théorème de comparaison isopérimétrique de Bakry-Ledoux en utilisant leur preuve par flot de la chaleur. Cette preuve a été exploitée par Mossel et Neeman pour obtenir un résultat de stabilité robuste dans le cas gaussien. Nous reprenons cette preuve et nous la simplifions, en particulier en éliminant la plupart des arguments spécifiques au cas gaussien. Cela laisse espoir d'obtenir une version quantitative pour des mesures log-concaves plus générales ou sur les sphères euclidiennes de grandes dimensions.

La deuxième partie est consacrée à l'analyse des fonctions booléennes. Le résultat principal de cette partie est l'extension d'un critère dû à Benjamini, Kalai et Schramm liant sensibilité au bruit et influences d'une fonction booléenne. Ce critère a été récemment étendu sur l'espace gaussien à travers le concept d'influences géométriques. En particulier, nous donnons une nouvelle preuve quantitative de ce résultat, basée sur des arguments de semi-groupes. Le résultat ainsi obtenu s'étend à des modèles de graphes de Schreier plus généraux que le cube ainsi qu'à des modèles continus autre que l'espace gaussien. En particulier, la version quantitative sur les tranches du cube booléen a des conséquences en théorie de la percolation. Dans un dernier chapitre, nous mettons en lien ce critère quantitatif pour donner une généralisation à des graphes produits du théorème "Junta" de Friedgut.

The general topic of this Ph.D thesis is functional and geometrical inequalities, in both continuous and discrete setting. In particular, we make use of the monotone property along the heat flow, which had led to important developments in analysis, geometry and probability since the pioneer work of Bakry and Émery. More recently, this principle has been used in the analysis of Boolean functions in view of application in theoretical computer science.

In the first part, we present some multiple integrals inequalities and geometric type inequalities obtained by monotonicity along the heat flow. We characterize, for most of them, equality cases and we put forward rigidity phenomenon in the setting of Riemannian manifolds. In particular, we study rigidity for the Bakry-Ledoux isoperimetric comparison theorem using their semigroup proof. This proof has been exploited by Mossel and Neeman to derive robust dimension free bounds for the Gaussian isoperimetry. We simplify their proof and in particular remove most of Gaussian-specific parts. This gives hope to derive robust estimates to more general log-concave measures or on high dimensional Euclidean spheres.

The second part is devoted to analysis of Boolean functions. The principal contribution in this field is the extension of a criterion of Benjamini, Kalai and Schramm linking noise sensitivity and influences of a Boolean function. Such a criterion has been extended recently in continuous setting via the concept of geometric influence. We give a new, semigroup, proof of a quantitative version of it previously established in the discrete cube and in the Gaussian space. This quantitative version generalizes both to various models of Schreier graphs and more general continuous spaces. In particular, the quantitative version over the slices of the Boolean cube has consequences in percolation theory. In the last chapter, we link this quantitative criterion with a generalization over graph products of the "Junta" theorem of Friedgut.