



**HAL**  
open science

# Transport optimal et équations des gaz sans pression avec contrainte de densité maximale

Anthony Preux

► **To cite this version:**

Anthony Preux. Transport optimal et équations des gaz sans pression avec contrainte de densité maximale. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paris-Saclay, 2016. Français. NNT : 2016SACLS435 . tel-01514922

**HAL Id: tel-01514922**

**<https://theses.hal.science/tel-01514922>**

Submitted on 26 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

*Établissement d'inscription* : Université Paris-Sud

*Laboratoire d'accueil* : Laboratoire de mathématiques d'Orsay, UMR 8628 CNRS

## THÈSE DE DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

*Spécialité* : Mathématiques appliquées

**Monsieur Anthony Preux**

Transport optimal et équations des gaz sans pression avec  
contrainte de densité maximale

*Date de soutenance* : 21 Novembre 2016 à Orsay

*Après avis des rapporteurs* : DIDIER BRESCH (Université Savoie Mont Blanc)  
MICHAEL WESTDICKENBERG (RWTH Aachen University)

*Jury de soutenance* :

FRANÇOIS BOUCHUT	(Université Paris-Est Marne-la-Vallée) Président
LAURENT BOUDIN	(Université Pierre et Marie Curie) Examineur
DIDIER BRESCH	(Université Savoie Mont Blanc) Rapporteur
BERTRAND MAURY	(Université Paris-Saclay) Directeur de thèse
QUENTIN MERIGOT	(Université Paris-Saclay) Examineur
MICHAEL WESTDICKENBERG	(RWTH Aachen University) Rapporteur

Anthony Preux  
anthonypreux@gmail.com

Thèse préparée au Département de Mathématiques d'Orsay  
Laboratoire de mathématiques (UMR 8628), Bâtiment 425  
Université Paris-Sud 91405 Orsay Cedex

# Remerciements

---

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse. Je te remercie Bertrand de m'avoir proposé un sujet très passionnant dans la lignée des travaux que toi et tes doctorants aviez réalisés. Je te remercie pour tes très nombreuses aides, tes grandes idées, ton soutien et ton sens de l'humour. Bref, je te remercie pour tout ce que tu m'as apporté durant ces trois (trois et demi) années.

J'adresse mes sincères remerciements à Didier Bresh et Michael Westdickenberg qui ont eu la grande bonté de rapporter cette thèse.

Je remercie tous ceux que j'ai croisés à l'Université Paris-Sud durant ces sept années (et oui sept ans...)! Pour commencer, je remercie Dominique Hulin et Nathalie Carrière pour leurs conseils administratifs et pédagogiques. Je remercie tous les professeurs que j'ai eus durant mes années de L3 et M1 qui m'ont permis d'accéder à l'ENS de Cachan. Je remercie tous les professeurs que j'ai eus durant ma préparation à l'agrégation de Mathématiques sans qui je n'aurais pas aussi bien réussi, avec une pensée particulière à Claudine Picaronny et Claire Renard qui m'ont toujours donné de bons conseils. Je remercie tous les professeurs de mon M2 EDP pour leurs excellents cours.

Bien évidemment, je remercie tous les doctorants de l'équipe ANEDP. En premier, je remercie Clémentine et Fatima qui ont eu la lourde (très lourde...) tâche de me supporter durant deux ans. Je remercie Yuèyuan avec qui j'ai passé de très bonnes soirées. Je remercie également Pierre, Samer, Christèle, Perla, Jana, Loïc, Antonin, Paul, Fabien, Bo, Nina, Tony, Maxime et Jean. Je remercie tous les permanents de l'équipe ANEDP et aussi nos secrétaires (Estelle et Catherine) pour leurs travaux administratifs. Je remercie Filippo et Frédéric pour leurs différents conseils. Je remercie Pascal Auscher pour ses conseils en matière de pédagogie, Patrick Gérard sans qui je n'aurais pas eu ce nouveau travail et Nicolas Burq pour nos diverses discussions.

Je remercie la totalité des membres de la plus grande et la plus extraordinaire (je pèse mes mots) des équipes de football. Bien sûr, je parle de l'équipe de football du Laboratoire de mathématique d'Orsay (même si elle ne contient pas que des matheux). Je remercie Rachid pour son travail en dehors du terrain pour que cette équipe existe encore. Je vous remercie de m'avoir permis d'être le dernier rempart de votre équipe durant ces trois ans.

---

Mes derniers remerciements vont à mes plus précieux amis et à mes familles. Je remercie Nicolas pour ses “grandes” idées de promenades à droite et à gauche. Je remercie Thomas pour les différentes discussions qu’on a eues durant ma thèse. Je remercie tous les amis de Nina avec qui on a fait de bonnes soirées détente. Je remercie toute la famille de Nina pour m’avoir accueilli ces deux dernières années. Je remercie Nina pour sa présence à mes côtés au quotidien. Je remercie ma petite famille, sans vous je ne serais pas là... Je remercie mon frère qui est toujours là pour me faire rire. Je remercie mon père pour m’avoir accompagné jusque là. Enfin, mes dernières pensées vont à ma mère. Je pense fort à toi tous les jours...

# Résumé

---

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux équations des gaz sans pression avec contrainte de congestion qui soulèvent encore de nombreuses questions.

La stratégie que nous proposons repose sur des précédents travaux sur le mouvement de foule dans le cadre de l'espace de Wasserstein, et sur un modèle granulaire avec des collisions inélastiques. Elle consiste en l'étude d'un schéma discrétisé en temps dont les suites doivent approcher les solutions de ces équations. Le schéma se présente de la manière suivante : à chaque pas de temps, le champ des vitesses est projeté sur un ensemble lui permettant d'éviter les croisements entre particules, la densité est ensuite déplacée selon le nouveau champ des vitesses, puis est projetée sur l'ensemble des densités admissibles (inférieures à une valeur seuil donnée). Enfin, le champ des vitesses est mis à jour en tenant compte du parcours effectué par les particules. En dimension 1, les solutions calculées par le schéma coïncident avec les solutions connues pour ce système. En dimension 2, les solutions calculées respectent les propriétés connues des solutions des équations de gaz sans pression avec contrainte de congestion. De plus, on retrouve des similarités entre ces solutions et celles du modèle granulaire microscopique dans des cas où elles sont comparables.

Par la suite, la discrétisation en espace pose des problèmes et a nécessité l'élaboration d'un nouveau schéma de discrétisation du coût Wasserstein quadratique. Cette méthode que nous avons baptisée *méthode du balayage transverse* consiste à calculer le coût en utilisant les flux de masses provenant d'une certaine cellule et traversant les hyperplans définis par les interfaces entre les cellules.



# Abstract

---

In this thesis, we consider the pressureless Euler equations with a congestion constraint. This system still raises many open questions and aside from its one-dimensional version, very little is known.

The strategy that we propose relies on previous works of crowd motion models with congestion in the framework of the Wasserstein space, and on a microscopic granular model with inelastic collisions. It consists of the study of a time-splitting scheme. The first step is about the projection of the current velocity field on a set, avoiding the fact that trajectories do not cross during the time step. Then the scheme moves the density with the new velocity field. This intermediate density may violate the congestion constraint. The third step projects it on the set of admissible densities. Finally, the velocity field is updated taking into account the positions of physical particles during the scheme. In the one-dimensional case, solutions computed by the algorithm match with the ones that we know for these equations. In the two-dimensional case, computed solutions respect some properties that can be expected to be verified by the solutions to these equations. In addition, we notice some similarities between solutions computed by the scheme and the ones of the granular model with inelastic collisions.

Later, this scheme is discretized with respect to the space variable in the purpose of numerical computations of solutions. The resulting algorithm uses a new method to discretize the Wasserstein cost. This method, called *Transverse Sweeping Method* consists in expressing the cost using the mass flow from any cell and crossing hyperplanes defined by interfaces between cells.



# Table des matières

---

Remerciements	i
Résumé	iii
Abstract	v
Introduction générale	1
<b>I Schémas de discrétisation en temps pour les équations de gaz sans pression avec contrainte de congestion</b>	<b>13</b>
<b>1 Schémas étudiés</b>	<b>15</b>
1.1 Projection selon la métrique de Wasserstein quadratique . . . . .	16
1.2 Schéma 1 . . . . .	23
1.2.1 Description du schéma . . . . .	24
1.2.2 Propriétés liées aux suites du schéma 1. . . . .	25
1.2.3 Propriétés des suites d'interpolées. . . . .	29
1.2.4 Équation vérifiée par les suites d'interpolées . . . . .	33
1.2.5 Cadre des sticky blocks . . . . .	37
1.2.6 Le problème de la dimension supérieure . . . . .	42
1.3 Schéma 2 . . . . .	42
1.3.1 Description du schéma . . . . .	44
1.3.2 Equations vérifiées par les suites d'interpolées . . . . .	48
<b>2 Schéma de projection double</b>	<b>53</b>
2.1 La projection de la vitesse . . . . .	53
2.2 Le schéma . . . . .	56
2.3 Analyse partielle du schéma . . . . .	57
2.3.1 En dimension quelconque . . . . .	59
2.3.2 Cas de la dimension 1 . . . . .	65
<b>II Méthode du balayage transverse</b>	<b>69</b>
<b>Equations flots-gradients et schéma JKO</b>	<b>73</b>

<b>3</b>	<b>Méthode du balayage transverse en dimension 1</b>	<b>81</b>
3.1	Description et analyse de la méthode . . . . .	81
3.1.1	Description de la méthode . . . . .	82
3.1.2	Etude du schéma pour l'équation de continuité . . . . .	86
3.1.3	Convergence numérique pour l'équation de la chaleur . . . . .	96
3.2	Ajout de la contrainte de congestion . . . . .	98
3.2.1	Equation de continuité avec contrainte de congestion . . . . .	100
<b>4</b>	<b>Méthode du balayage transverse en dimension 2</b>	<b>103</b>
4.1	Description et analyse de la méthode . . . . .	104
4.1.1	Description . . . . .	104
4.1.2	Schéma JKO et étude sur l'équation de continuité . . . . .	108
4.2	Schéma numérique utilisé et simulations . . . . .	119
4.2.1	Description de la méthode de simplification . . . . .	119
4.2.2	Algorithme pour l'équation de continuité . . . . .	123
4.2.3	Etude numérique dans le cas de l'équation de la chaleur . . . . .	127
4.3	Equation flot-gradients avec contrainte de congestion . . . . .	131
4.3.1	Le balayage d'une mesure . . . . .	134
4.3.2	Equation de continuité avec contrainte de congestion . . . . .	135
4.3.3	Mouvement de foule . . . . .	138
<b>III</b>	<b>Programmation et tests numériques</b>	<b>143</b>
<b>5</b>	<b>Programmation</b>	<b>145</b>
5.1	Dicrétisation spatiale utilisée . . . . .	146
5.2	Projection des vitesses sur $\mathcal{M}_{\rho^n}^c$ . . . . .	147
5.3	Etape de transport de la densité . . . . .	148
5.4	Projection de la densité sur $K$ . . . . .	149
5.5	Construction de la nouvelle vitesse . . . . .	151
<b>6</b>	<b>Tests numériques</b>	<b>155</b>
6.1	Sticky blocks . . . . .	155
6.2	Tests d'un choc . . . . .	158
6.3	Test du barrage . . . . .	166
6.4	Test du sablier . . . . .	170
<b>A</b>	<b>Boîte à outils sur le transport Optimal</b>	<b>177</b>
<b>B</b>	<b>Une autre méthode de discrétisation du coût Wasserstein quadratique</b>	<b>183</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>192</b>

# Introduction générale

---

L'écoulement d'un fluide dit parfait est régi par les équations d'Euler comprenant l'équation de continuité et les équations de conservation de la quantité de mouvement :

$$\partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla \pi = f$$

où  $\rho$  représente la densité,  $u$  la vitesse,  $f$  les forces extérieures s'exerçant sur le fluide et  $\pi$  le terme de pression. Cette équation peut être déclinée de différentes manières selon les hypothèses qu'on applique aux quantités physiques. Si on suppose que le fluide est homogène et incompressible, le système d'équations devient :

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = 0, \\ \partial_t \rho + \rho(u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = f \end{cases} \quad (1)$$

appelé *système d'Euler incompressible*.

Dans un autre contexte, on peut considérer que la pression ne dépend que de la densité. On obtient alors les *équations d'Euler barotropes* :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla \pi(\rho) = f \end{cases} \quad (2)$$

avec, par exemple,  $\pi(\rho) = \kappa \rho^\gamma$  avec  $\kappa > 0$  et le coefficient isentropique  $\gamma > 1$ . Le système que nous étudierons provient d'une version dégénérée des équations d'Euler. Il est obtenu en considérant qu'aucune pression ne s'exerce sur le fluide ( $\pi \equiv 0$ ). Il est communément appelé *équations d'Euler sans pression*. À ce système, nous rajoutons une contrainte sur la densité. Celle-ci ne peut pas dépasser une valeur seuil. Cette contrainte va se caractériser par l'ajout d'un gradient d'une pression dans les équations de conservation de la quantité de mouvement. Bien que ce système implique une pression spécifique, ces équations sont appelées *les équations de gaz sans pression avec contrainte de congestion*.

## De Boltzmann à Euler

Une des manières de modéliser un système de particules fut introduite par Boltzmann et Maxwell. Elle a pour but de modéliser le comportement macroscopique d'un gaz raréfié à partir des caractéristiques des particules qui le composent. Un système de particules peut être décrit par une fonction de distribution  $f(t, x, v)$  où  $t$  et  $x$  représente les variables de temps et d'espace. La variable  $v \in \mathbb{R}^d$  représente la vitesse cinétique ( $d$  représente la dimension). Cette manière de modéliser les particules permet de définir plusieurs vitesses en un même point. Pour retrouver la quantité de matière que contient l'ensemble  $A$  à l'instant  $t$ , il est nécessaire d'intégrer  $v$  sur l'ensemble des vitesses possibles et  $x$  sur  $A$  :

$$\int_{v \in \mathbb{R}^d} \int_{x \in A} f(t, x, v) dx dv.$$

L'équation de Boltzmann décrit le comportement hors équilibre d'un gaz raréfié de particules où les seules interactions sont des collisions élastiques binaires. Elle s'écrit comme suit

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{Q(f)}{\epsilon}, \quad (3)$$

où  $f$  est la distribution de particules décrite ci-dessus,  $Q$  l'opérateur de collision de Boltzmann et  $\epsilon > 0$  le libre parcours moyen des particules. L'équation de Boltzmann sans collision est alors obtenue en supposant que  $Q \equiv 0$  :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0. \quad (4)$$

## Méthode des moments et équations des gaz sans pression

On peut simplifier cette équation en considérant que l'on peut définir localement une vitesse unique aux particules. On retrouve les quantités macroscopiques locales telles que la densité des particules ou la quantité de mouvement en intégrant la fonction de répartition par rapport à  $v$ . Ainsi, la densité locale des particules  $\rho$  est donnée par

$$\rho(t, x) = \int_{v \in \mathbb{R}^d} f(t, x, v) dv,$$

la quantité de mouvement locale  $E$  par

$$E(t, x) = \int_{v \in \mathbb{R}^d} f(t, x, v) v dv.$$

Ces deux quantités correspondent au moment d'ordre 0 et d'ordre de 1 de la distribution  $f$  selon  $v$ .

On pose  $u = dE/d\rho$ , dans le cadre de la dimension 1, si on intègre par rapport à  $v$

---

formellement l'équation de Boltzmann on obtient l'équation de continuité :

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0.$$

Cette équation traduit le fait que les particules considérées dans la densité  $\rho$  au point  $x$  se déplacent à la vitesse  $u(x)$ . Elle contient également la conservation de la masse locale. De la même manière, si on note :

$$\mathcal{M}_2(t, x) = \int_{v \in \mathbb{R}^d} f(t, x, v) v^2 dv$$

qu'on multiplie par  $v$  et que l'on intègre formellement l'équation de Boltzmann, il en résulte l'équation :

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\mathcal{M}_2) = 0.$$

De plus, si l'on suppose que l'on peut définir en chaque point  $x$  de  $\mathbb{R}$  une vitesse locale  $u(t, x)$ , ce qui revient à supposer que  $f$  est de la forme :

$$f(t, x, v) = \rho(t, x) \delta(v - u(t, x))$$

l'équation résultant de ce procédé est l'équation dite de conservation de la quantité de mouvement

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) = 0.$$

Cette équation, comme son nom l'indique, stipule de manière différentielle que sur chaque élément de surface, la quantité de mouvement sur cet élément à l'instant  $t + dt$  est celle de l'instant  $t$  moins le flux sortant de quantité de mouvement intégré entre  $t$  et  $t + dt$ .

**Remarque.** Cette méthode est généralisable pour obtenir des équations différentielles sur les moments de la vitesse. Si  $P$  est un polynôme en la variable  $v = (v_1, \dots, v_d)$  on définit :

$$\langle P, f \rangle(t, x) := \int_{v \in \mathbb{R}^d} P(v) f(t, x, v) dv.$$

Si on multiplie par  $P$  et on intègre de manière formelle l'équation de Boltzmann on obtient :

$$\partial_t \langle P, f \rangle + \nabla_x \cdot \langle v P, f \rangle = \langle P, Q(f) \rangle. \quad (5)$$

En résumé, le système résultant de nos deux intégrations est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

et est communément appelé le système des *équations de gaz sans pression*.

Il est important de constater que, même si au départ l'équation de Boltzmann sans colli-

sion ne prend pas en compte les collisions entre particules. Le fait d'imposer que l'on peut définir localement une vitesse  $u$  en chaque point  $x$  de  $\mathbb{R}$  impose que ces collisions sont prises en compte.

Même pour des données régulières, les caractéristiques peuvent se croiser et mènent à une incompatibilité pour le terme de vitesse  $u$ . Cependant, il est tout de même possible de définir une vitesse qui sera solution de ces équations au sens faible.

En résumé, le système (6) peut être vu comme les équations de conservation du moment d'ordre 0 et d'ordre 1 de l'équation de Boltzmann sans collision. Par conséquent, il fait partie de la famille des systèmes de loi de conservation que nous définissons ci-dessous. Cependant, implicitement, il contraint plus le couple densité/vitesse en traitant les collisions entre particules se trouvant au même point.

## Systèmes de loi de conservation et équations d'Euler

Les systèmes de loi de conservation nous permettent d'exprimer à l'aide d'équations différentielles le fait que certaines quantités mesurables d'un système physique sont conservées au cours du temps. Ces systèmes peuvent s'écrire sous la forme :

$$\partial_t U + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} F_i(U) = 0$$

avec  $U(t, x) \in \mathbb{R}^m$  représentant les quantités physiques conservées,  $t \in \mathbb{R}$  la variable de temps et  $x \in \mathbb{R}^d$  la variable d'espace, enfin  $F$  représente le flux du système.

Le système d'Euler de la dynamique des gaz rentre dans ce domaine, il est constitué des équations décrivant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla \pi = 0 \end{cases} \quad (7)$$

où  $\rho$  représente la densité et  $u$  la vitesse locale des particules, enfin  $\pi$  est le terme de pression. Comme mentionné précédemment, il existe plusieurs lois de pressions, par exemple, le cas où  $\pi(\rho) = \kappa \rho^\gamma$  avec  $\kappa > 0$  et  $\gamma > 1$  nous donne les *équations d'Euler isentropiques*. On retrouve les *équations de gaz sans pression* appelées aussi *système d'Euler sans pression* en imposant que la pression est nulle :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Ce genre de système est souvent analysé avec une approche hyperbolique, cependant le système des gaz sans pression est faiblement hyperbolique (valeurs propres réelles mais la matrice

---

jacobienne n'est pas diagonalisable). On peut montrer que, dans ce cas, la  $i^e$  composante du vecteur  $u$  est l'unique valeur propre de  $F_i$ . Comme il est décrit dans [14] ou [19], ce modèle peut créer des masses de Dirac même si les données initiales sont régulières. Par conséquent, il est nécessaire de définir dans un sens très faible la notion de solutions de ce système.

Dans le cadre de la dimension 1, l'existence de solutions de (6) a été prouvée dans [39] et [31], en approchant les mesures initiales par des masses de Dirac (sticky particles ou particules collantes). Une autre notion de solutions a été mise en avant dans [15] pour laquelle l'existence et l'unicité sont obtenues. Le mouvement de ces particules est calculé en suivant une approche dite "event-driven". On calcule à quel temps aura lieu la prochaine collision entre deux particules pour la traiter. La particule résultante de la collision a une masse et une quantité de mouvement égale respectivement à la somme des masses et des quantités de mouvement des deux particules. La solution sticky particles converge vers la solution de l'équation (6) lorsque le nombre de particules tend vers l'infini. Cette approche a été introduite dans [69] pour un modèle de formation des galaxies au début de l'univers.

Ce système a été étudié dans le cadre des systèmes hyperboliques de lois de conservation (voir par exemple [20] et [55]), malgré son manque d'hyperbolicité. Une preuve d'unicité a été donnée dans [41] avec certaines conditions d'entropie et d'énergie. Ce système a aussi été reformulé et analysé sous forme d'inclusion différentielle du premier ordre, voir [25, 54]. D'autres approches ont été proposées, par exemple, dans [26] en utilisant la théorie du transport optimal, avec une régularisation visqueuse dans [65] ou encore dans [17] dont la stratégie utilisée a permis de construire un schéma numérique (voir [18]). Une autre approche avec des sticky particles de taille finie est utilisée dans [68].

## Equations des gaz sans pression avec contrainte de congestion en dimension 1

Nous nous intéressons à la situation où la densité de particules ne peut pas dépasser une valeur seuil normalisée à 1. Cela correspond aux équations de gaz sans pression avec une contrainte de congestion qui s'écrivent dans le cas de la dimension 1 comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi) = 0, \\ \rho \leq 1, \\ (1 - \rho)\pi = 0, \\ \pi \geq 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

Une première approche et un schéma numérique ont été donnés dans [16], et l'existence de solutions a été prouvée dans [11]. L'approche est constructive et dédiée à la dimension 1. Elle est homologue à l'approche sticky particles : les particules sont remplacées par des blocs congestionnés qui ont la même dynamique que les particules collantes. La pression  $\pi$  s'ac-

tive seulement dans les zones congestionnées (une collision est représentée sur la figure 1). Dans [13] un système similaire est obtenu et analysé comme limite du modèle Aw-Rascle.

Les deux systèmes (6) et (9) admettent une infinité de solutions dont certaines ne sont pas physiques. Par exemple, considérons le cas sans congestion (6), et la mesure  $\rho$  définie comme suit :  $\rho$  est un Dirac de masse 1 en 0 durant  $[0, 1]$ , et se divise au temps 1 en deux Dirac de masses  $1/2$ , l'une se dirigeant vers la droite à vitesse  $u$ , la seconde dans l'autre sens à vitesse  $-u$ , où  $u > 0$  est une vitesse choisie arbitrairement. Le couple  $(\rho, u)$  décrit ci-dessus vérifie le système (6) bien qu'il ne correspond à aucune réalité physique. Le fait qu'une telle solution soit compatible avec (6), bien qu'aucune force d'interaction n'apparaisse peut s'expliquer de la manière suivante : une masse de Dirac peut être considérée comme la somme de deux Dirac de masse  $1/2$  au même point. La séparation s'effectue en exerçant une impulsion sur l'une des moitiés, et l'impulsion opposée sur l'autre. Tant que la somme des impulsions est nulle, elles n'ont aucune action sur le système, et les mesures obtenues vérifient la formulation faible du système. Le moment de la séparation est arbitraire, et chacune des composantes peut de nouveau être divisée en des composantes plus petites, à n'importe quel moment, tant qu'il y a conservation locale de la masse et de la quantité de mouvement.

Des solutions similaires peuvent être construites pour le système (9). Un bloc peut soudainement se diviser en deux parties égales, avec une pression singulière en temps, mais régulière en espace (affine par morceaux s'annulant aux bords du bloc et maximale au centre). On pourrait espérer retrouver l'unicité en imposant la décroissance de l'énergie cinétique. Ce n'est pas suffisant, comme l'exemple suivant le montre : considérons deux Dirac de même masse rentrant en collision en 0 avec des vitesses opposées  $u$  et  $-u$ , elles peuvent devenir un unique Dirac dont la masse serait la somme des deux précédentes mais elles peuvent aussi rebondir et repartir dans le sens inverse avec une vitesse de  $eu$  et  $-eu$  respectivement. Pour n'importe quelle constante  $e \in [0, 1]$  (coefficient de restitution), la solution décroît en énergie (avec conservation de l'énergie dans le cas purement élastique  $e = 1$ ).

Nous verrons que, pour espérer retrouver l'unicité, ce système doit être complété par une équation précisant la nature des collisions.

## Le modèle étudié

Le modèle que nous allons étudier dans cette thèse peut être vu comme la synthèse de deux modèles existants. Le premier modèle est le modèle granulaire avec lois de collisions inélastiques (voir [4, 47]) qui correspond à une version microscopique de celui que nous étudierons. Les modèles microscopiques sont très dépendants de la géométrie des particules, en cela notre modèle n'est pas une "pure" extension macroscopique de modèle granulaire avec collisions inélastiques. Le second modèle est le modèle du mouvement de foule étudié dans [49, 51]. Il peut être vu comme la version d'ordre 1 en temps du modèle que nous étudierons, dans le sens où la vitesse n'est pas libre mais contrainte à être la plus proche possible (dans un

certain sens) d'une vitesse imposée. Nous allons d'abord décrire ces deux modèles avant de donner celui que nous étudierons par la suite.

## Modèle microscopique avec collisions inélastiques

Au niveau microscopique, le mouvement de particules rigides peut être modélisé comme suit. On considère  $N$  sphères rigides dans  $\mathbb{R}^d$ , avec le même rayon  $r > 0$ , de masse 1, et de centres  $q_1, \dots, q_N$ . On note  $q \in \mathbb{R}^{dN}$  le vecteur des positions, et  $D_{ij} = |q_j - q_i| - r$  les distances entre chaque grain. L'ensemble des configurations admissibles est alors l'ensemble des positions permettant aux grains d'être à distance positive les uns des autres :

$$\tilde{K} = \left\{ q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{dN}, D_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j \right\}.$$

Le cône des vitesses admissibles (c'est-à-dire des vitesses qui ne mènent pas à l'entrecroisement des grains) est défini pour chaque  $q \in \tilde{K}$  comme

$$C_{\tilde{K}}(q) = \{v \in \mathbb{R}^{dN}, D_{ij} = 0 \implies G_{ij} \cdot v \geq 0\},$$

où  $G_{ij} \in \mathbb{R}^{dN}$  est le gradient de  $D_{ij}$ . Le mouvement des particules rigides soumis à un champ de force  $f$  (pouvant inclure des interactions, c'est-à-dire que  $f$  peut dépendre de  $q$ ) avec des collisions inélastiques peut s'écrire (voir [4, 47]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} dq/dt = u, \\ du/dt = f + \sum_{i < j} \pi_{ij} G_{ij}, \\ q \in \tilde{K}, \\ \pi_{ij} D_{ij} = 0 \quad \forall i, j, \\ \pi_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j, \\ u^+ = \mathbb{P}_{C_{\tilde{K}}(q)}(u^-). \end{array} \right. \quad (10)$$

Les  $\pi_{ij}$  jouent le rôle d'une pression discrète, ce sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes de non-croisement des particules  $q \in \tilde{K}$ . Les vitesses  $u^+$  et  $u^-$  correspondent aux vitesses pré- et post-collision (les vitesses sont à variation totale bornée, ainsi les limites à gauche et à droite sont bien définies, voir [47] pour plus de détails). Lorsqu'il n'y a aucun contact, toutes les distances  $D_{ij}$  sont positives, alors  $\pi_{ij} \equiv 0$ ,  $C_{\tilde{K}}(q) = \mathbb{R}^{dN}$ , et nous retrouvons les lois de Newton pour un système à  $N$  particules. Les forces d'interactions  $\pi_{ij}$  sont des mesures en temps et sont singulières dès qu'une collision a lieu.

L'existence de solutions pour ce système a été prouvée par [4, 47]. Notons que, même si le système est formellement bien-posé (l'unicité est obtenue tant que le nombre de collisions est borné), l'unicité nécessite que le terme de forçage  $f$  soit analytique (voir en particulier [4]).

**Remarque.** On peut noter que d'autres lois de collision peuvent être prises en compte dans

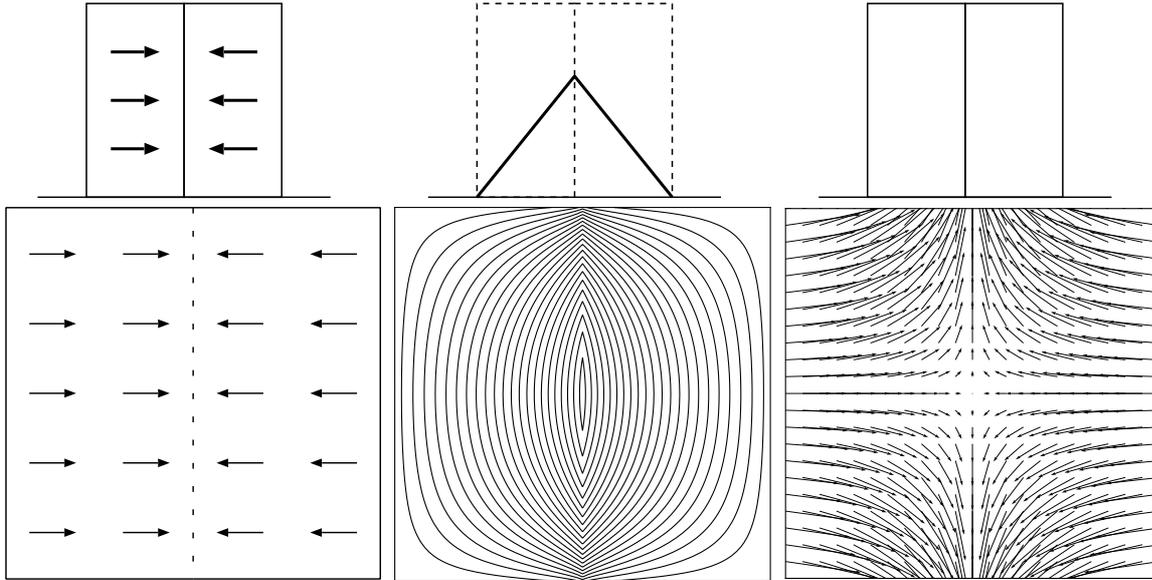


FIGURE 1 – Collision entre deux blocs rectangulaires : vitesse pré-collision, la pression instantanée et la vitesse post-collision (en haut dans le cas de la dimension 1, en bas le cas de la dimension 2).

le cas microscopique, pour cela, introduisons le cône normal extérieur de  $\tilde{K}$  :

$$\begin{aligned} N_{\tilde{K}}(q) &= C_q^\circ = \left\{ v \in \mathbb{R}^{dN}, v \cdot w \leq 0 \quad \forall w \in C_{\tilde{K}}(q) \right\} \\ &= \left\{ v = - \sum_{i < j} \pi_{ij} G_{ij}, \pi_{ij} \geq 0, D_{ij} \pi_{ij} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Soit  $e \in [0, 1]$  le coefficient de restitution ( $e = 0$  correspond au cas non élastique et  $e = 1$  au cas purement élastique), une loi de collision plus générale serait (voir [4]) :

$$u^+ = u^- - (1 + e) \mathbb{P}_{N_{\tilde{K}}(q)}(u^-). \quad (11)$$

## Modèle de mouvement de foule

La gestion de la congestion dans des équations d'évolution a été étudiée pour un modèle macroscopique de mouvement de foule introduit dans [51] et [49]. Le modèle amène à considérer une vitesse dite "désirée", c'est la vitesse  $U(x)$  que quelqu'un placé en  $x$  veut spontanément avoir si il est seul. Cependant, chaque individu doit prendre en compte la contrainte de congestion  $\rho \leq 1$ , et on appelle  $K$  l'ensemble des densités correspondantes. Pour cela, nous considérons qu'à chaque instant, la vitesse désirée est projetée (au sens  $L^2$ ) sur le cône des vitesses admissibles. Cet ensemble est défini comme l'ensemble des vitesses qui ne mènent pas à une violation de la contrainte. Plus formellement, (voir [49] pour les détails) il est défini de

---

manière duale par :

$$C_K(\rho) = \left\{ v \in L^2, \int v \cdot \nabla q \leq 0, \forall q \in H^1, q \geq 0, q(1 - \rho) = 0 \right\}. \quad (12)$$

Le modèle s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ u = \mathbb{P}_{C_K(\rho)}(U). \end{cases} \quad (13)$$

Dans l'esprit des algorithmes Catching-Up initialement proposés par [53], et appliqués dans un modèle microscopique de mouvement de foule dans [50], un algorithme discrétisé en temps a été proposé dans [51] pour gérer ce type de problème d'évolution. Il consiste simplement à transporter la densité durant un pas de temps donné avec la vitesse désirée, ce qui viole possiblement la contrainte de congestion. Ensuite, on la projette au sens Wasserstein sur l'ensemble des densités admissibles  $K$ . Le schéma se lit comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{\rho}^{n+1} = (\text{Id} + \tau U) \# \rho^n, \\ \rho^{n+1} = \mathbb{P}_K^{\mathcal{W}_2}(\tilde{\rho}^{n+1}). \end{cases} \quad (14)$$

## Le modèle

Le modèle est la version étendue en dimension quelconque du système (9) avec une loi de collision prenant en compte les considérations vues dans les deux modèles précédents :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla \pi = 0, \\ \rho \leq 1, \\ (1 - \rho)\pi = 0, \\ \pi \geq 0, \\ u^+ = P_{C_K(\rho)}(u^-). \end{cases} \quad (15)$$

Dans le système précédent,  $\pi$  est un champ scalaire positif. Il est l'homologue continu de la pression  $\pi_{ij}$  qui prend en compte les interactions entre particules voisines dans le modèle microscopique.

Comme dit précédemment, dans le cas de la dimension 1, il est naturel et relativement facile de construire des solutions exactes au système (9). De plus, ces solutions (les sticky blocks) décrites dans [11] vérifient la loi de collision inélastique que nous avons ajouté à ce système. Une telle collision est représentée sur la figure 1 (en haut). On peut voir tout particulièrement que le champ pression  $\pi$  (au milieu) est activé uniquement au moment de l'impact. L'opposé de son gradient annule instantanément le champ des vitesses pré-collision.

En dimension supérieure, une telle solution analytique n'est pas directement<sup>1</sup> envisageable. Considérons l'exact homologue des sticky blocks en dimension 1 : deux blocs rectangulaires et congestionnés avec des vitesses opposées. Au moment de l'impact, on peut montrer que  $\pi$  résout un problème de Poisson sur un domaine correspondant aux deux blocs rectangulaires. Le terme source est l'opposé de la divergence du champ des vitesses pré-collision (ici, cela correspond à une distribution singulière supportée par l'interface séparant les deux blocs) et les conditions de bords extérieurs sont des conditions de Dirichlet homogène. Le champ de pression correspondant et la vitesse corrigée sont représentés sur la figure 1 (en bas), au milieu et à droite respectivement.

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'existence de solutions peut être obtenue de plusieurs manières ([11, 13, 16]). En dimension supérieure, le système (15) (sans la loi de collision inélastique) peut être obtenu formellement comme la limite des équations d'Euler barotropes par le biais du terme de pression (voir [30]). Notons aussi que des solutions de (15) (sans la loi de collision également) avec un terme de viscosité supplémentaire, peuvent être construites (voir [22, 45, 60]) comme limite de solutions des équations de Navier-Stokes compressible avec un terme de pression singulier jouant le rôle de barrière. Pour le moment, à notre connaissance, il n'y a pas de résultat d'existence ou d'unicité pour le système des gaz sans pression avec contrainte de congestion (15) en dimension supérieure à 1.

Dans cette thèse, nous proposons d'étudier les équations (15) via un schéma discrétisé en temps que nous avons proposé. Ce schéma est dans l'esprit du schéma de prédiction-corrrection utilisé pour les mouvements de foules. Il nous permet de construire des suites de densité et de champ des vitesses dont on peut s'attendre qu'elles convergent vers les solutions faibles de notre problème. Cependant, à l'heure actuelle, nous ne sommes pas capables de prouver une telle convergence, mais nous donnons des résultats qui attestent d'une certaine consistance de ce schéma vis-à-vis de l'équation (voir chapitre 2).

Cette thèse est composée principalement de deux parties :

- Le première partie sera consacrée à la description des schémas de discrétisation temporelle élaborés pour les équations de gaz sans pression avec contrainte de congestion. Les schémas seront présentés dans l'ordre chronologique pour permettre aux lecteurs de comprendre la démarche qui nous a menée à l'élaboration du schéma final.

Le premier schéma étudié est consistant en dimension 1. Il redonne la dynamique des sticky blocks. De plus, l'énergie cinétique du système de particules décroît au cours du temps. Cependant, la manière dont il met à jour la vitesse à chaque pas de temps impose que cette dernière soit le gradient d'une fonction. Par conséquent, il n'est pas

---

1. Signalons néanmoins un travail en cours visant à généraliser d'une certaine manière ce procédé constructif de type « sticky blocks » à la dimension 2 : voir [12]

---

consistant avec les équations de gaz sans pression avec contrainte de congestion en dimension supérieure.

Le second schéma modifie la manière de mettre à jour la vitesse. Elle définit la nouvelle vitesse de manière plus naturelle en utilisant la trajectoire des particules au cours de chaque étape du schéma. Il est donc utilisable au-delà de la dimension 1. Cependant, si la vitesse est définie de manière plus naturelle, elle ne prend plus en compte les possibles croisements entre particules qui doivent alors être gérés d'une autre manière.

Le schéma final gère ces croisements en projetant préalablement le champ des vitesses sur un ensemble permettant de les éviter. Bien que ce dernier schéma ne possède pas une analyse complète, des résultats que nous développerons attestent d'une certaine consistance de celui-ci envers les équations.

- La seconde partie de cette thèse est consacrée à une méthode permettant de calculer le coût Wasserstein quadratique pour des densités discrétisées. Elle a été élaborée pour pallier à un problème observé lors de la discrétisation spatiale du schéma des gaz sans pression avec contrainte de congestion. Comme nous le verrons au début de la seconde partie, dans un contexte de volumes finis, on peut discrétiser d'une manière naturelle la fonctionnelle du coût Wasserstein quadratique. Cependant, cette discrétisation crée d'importants problèmes lorsqu'on l'incorpore à une fonctionnelle discrète que l'on cherche à minimiser sous certaines contraintes. Par exemple, dans le cas où on discrétise la fonctionnelle JKO devant générer les solutions de l'équation d'advection à vitesse constante, les densités solutions de la fonctionnelle discrète souffrent d'un effet de locking. Si le pas de temps est trop petit, la densité reste immobile. La méthode que nous avons élaborée estime le coût de transport Wasserstein quadratique d'une densité discrète à une autre en calculant le flux de masse partant d'une cellule et traversant les hyperplans formant les interfaces de chaque cellule. Cette méthode que nous avons baptisée *méthode du balayage transverse* permet de corriger les problèmes que nous obtenions avec la discrétisation dite naturelle. De plus, nous verrons qu'en dimension 1 et 2, le coût pour transporter une densité constante supportée sur une cellule au translaté de cette densité est le même dans l'espace continu que dans l'espace discrétisé dans un sens que nous préciserons. Nous verrons que cette méthode donne de bons résultats numériques via le schéma JKO, mais aussi pour la projection sur l'ensemble des densités admissibles.

Enfin, une dernière partie sera consacrée à la programmation et aux applications numériques du schéma pour les équations de gaz sans pression avec contrainte de congestion.



PREMIÈRE PARTIE

**Schémas de discrétisation en temps  
pour les équations de gaz sans  
pression avec contrainte de  
congestion**

---



# Schémas étudiés

---

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux schémas que nous avons envisagés durant ma thèse. Bien que nous ayons été finalement amenés à privilégier une troisième approche (voir chapitre 2), nous avons décidé de les présenter pour que la progression de notre recherche soit plus claire. Ils sont dans le même esprit que l'algorithme Catching-up utilisé dans le modèle macroscopique (13) page 9. Trois étapes sont nécessaires à chaque pas de temps : une première étape transporte la matière avec le champ des vitesses donné ; la seconde étape projette la densité obtenue sur l'ensemble des densités admissibles, ce qui nous donne la densité du pas de temps suivant ; une dernière étape permet de reconstruire un champ des vitesses pour le pas de temps suivant.

La première section de ce chapitre détaillera la projection utilisée dans tous les schémas que nous avons étudiés. Les deux autres sections serviront à l'étude des schémas.

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Projection selon la métrique de Wasserstein quadratique</b>	<b>16</b>
<b>1.2</b>	<b>Schéma 1 . . . . .</b>	<b>23</b>
1.2.1	Description du schéma . . . . .	24
1.2.2	Propriétés liées aux suites du schéma 1. . . . .	25
1.2.3	Propriétés des suites d'interpolées. . . . .	29
1.2.4	Équation vérifiée par les suites d'interpolées . . . . .	33
1.2.5	Cadre des sticky blocks . . . . .	37
1.2.6	Le problème de la dimension supérieure . . . . .	42
<b>1.3</b>	<b>Schéma 2 . . . . .</b>	<b>42</b>
1.3.1	Description du schéma . . . . .	44
1.3.2	Equations vérifiées par les suites d'interpolées . . . . .	48

---

## 1.1 Projection selon la métrique de Wasserstein quadratique

Nous décrivons ici la notion de projection utilisée par tous les schémas décrits dans cette thèse. On note que l'ensemble des densités admissibles est le suivant :

$$K = \{\rho \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \mid \rho \leq 1\}.$$

Dans cette thèse, nous confondrons la mesure de probabilité  $\rho$  avec sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté sur laquelle des deux notions est utilisée.

**Définition 1.1.** On note  $\mathcal{W}_2$  la distance de Wasserstein quadratique entre  $\rho$  et  $\nu$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{W}_2(\rho, \nu)^2 = \min_{\mu \in \Pi(\rho, \nu)} \left\{ \int_{x, y \in \mathbb{R}^d} \|x - y\|^2 d\mu(x, y) \right\} \quad (1.1)$$

avec  $\Pi(\rho, \nu)$  l'ensemble des plans de  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  dont la première marginale vaut  $\rho$  et la seconde  $\nu$ . En d'autres termes,  $\mu(A \times B)$  représente la masse de particules de la densité  $\rho$  partant de l'ensemble mesurable  $A$  qui s'est déplacée vers l'ensemble mesurable  $B$  pour former  $\nu$ , ce qui implique :

1.  $\mu(A \times \mathbb{R}^d) = \rho(A)$ , pour tout ensemble mesurable  $A \subset \mathbb{R}^d$  ;
2.  $\mu(\mathbb{R}^d \times B) = \nu(B)$ , pour tout ensemble mesurable  $B \subset \mathbb{R}^d$ .

Pour plus d'informations sur le transport optimal, nous renvoyons le lecteur à l'annexe A à la page 177 ou encore [67] et [63] par exemple.

**Proposition 1.2** (Projection sur  $K$ ). Soit  $\rho \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  alors il existe un unique  $\bar{\rho} \in K$  tel que :

$$\bar{\rho} := \operatorname{argmin}_{\nu \in K} \{\mathcal{W}_2(\rho, \nu)\}. \quad (1.2)$$

Par la suite, on utilisera la notation :  $\bar{\rho} := \mathbb{P}_K^{\mathcal{W}_2}(\rho)$ .

L'existence et l'unicité ont notamment été démontrées dans [49] avec un cadre plus général utilisant l'algorithme JKO (voir définition 2.17 page 74). La preuve d'unicité utilise notamment la notion de géodésique généralisée présente dans la preuve du lemme 1.5 (voir aussi [2] page 207 pour plus de détails).

Quelques notions de transport optimal sont rappelées dans l'annexe A. La formulation Bénéamou-Brenier (voir l'annexe A à la page 182) représente ce coût comme le minimum d'énergie cinétique nécessaire au système des particules pour que leur densité retourne dans l'ensemble des densités admissibles  $K$ . Ce minimum est obtenu en animant les particules d'un mouvement rectiligne uniforme et est indépendant du temps choisi (à un scaling près).

Le lemme suivant a été prouvé dans [49] et permet de considérer le transport optimal entre

une mesure quelconque et son projeté comme un déplacement de particules donné par le gradient d'une fonction positive n'agissant que sur la zone saturée (congestionnée) du projeté. La projection dans  $K$  peut donc être considérée comme l'action d'une pression qui étalerait la masse afin de rester dans l'ensemble des densités admissibles.

**Lemme 1.3.** *Soit  $\rho \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  et  $\bar{\rho} \in K$  son projeté sur  $K$ , alors et il existe  $\pi \in \{p \in H^1_\rho \mid p \geq 0, (1 - \bar{\rho})p = 0\}$  tel que*

$$\rho = (\text{Id} + \nabla\pi)_\# \bar{\rho}.$$

*Démonstration.* La preuve faite dans [49] consiste à montrer dans un premier temps qu'il existe un potentiel de Kantorovich (dépendant de  $\rho$ )  $\phi$  tel que :

$$\bar{\rho} \in \operatorname{argmin}_{\nu \in K} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \nu(x) dx \right\}$$

cela implique qu'il existe  $l \in \mathbb{R}$  tel que  $\nu$  vérifie :

$$\nu(x) \begin{cases} = 1 & \text{si } \phi(x) < l, \\ \in [0, 1] & \text{si } \phi(x) = l, \\ = 0 & \text{si } \phi(x) > l, \end{cases}$$

on définit  $\pi = (l - \phi)^+$  et on a alors  $\pi \geq 0$  et  $\pi = 0$  si  $\bar{\rho} < 1$ . De plus, on sait que le transport optimal entre  $\bar{\rho}$  et  $\rho$  est  $\text{Id} - \nabla\phi$ , on obtient alors :

$$\rho = (\text{Id} + \nabla\pi)_\# \bar{\rho}.$$

□

On pose  $\mathcal{M}_1(\rho)$  le moment d'ordre 1 de la densité  $\rho$  :

$$\mathcal{M}_1(\rho) = \int_{\mathbb{R}^d} x d\rho(x).$$

Le lemme suivant montre que ce moment est conservé par projection sur  $K$  :

**Corollaire 1.4.** *Soit  $\rho \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  et  $\bar{\rho} \in K$  son projeté sur  $K$ , alors*

$$\mathcal{M}_1(\bar{\rho}) = \mathcal{M}_1(\rho).$$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser la définition de  $\pi$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(\rho) &:= \int_{\mathbb{R}^d} x d\rho(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (x + \nabla\pi(x)) \bar{\rho}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} x \bar{\rho}(x) dx \end{aligned}$$

car  $\pi \in \{p \in H^1_\rho \mid p \geq 0, (1 - \bar{\rho})p = 0\}$ .

□

Nous verrons que ce lemme est très utile et permet à nos schémas de conserver la quantité de mouvement.

Le lemme suivant en partie démontré dans [62] sera utilisé pour montrer la décroissance de l'énergie cinétique du schéma 1 et du schéma final (dans le cas de la dimension 1).

**Lemme 1.5.** *Soit  $\rho \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  et  $(\bar{\rho}, \bar{\nu}) \in K \times K$  de telle sorte que  $\bar{\rho} = \mathbb{P}_K^{\mathcal{W}_2}(\rho)$  alors*

$$\mathcal{W}_2(\bar{\rho}, \bar{\nu})^2 \leq \mathcal{W}_2(\bar{\nu}, \rho)^2 - \mathcal{W}_2(\bar{\rho}, \rho)^2.$$

*Démonstration.* Supposons que  $\rho$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Soient  $\mathbf{r}_{\bar{\nu}}$  le transport optimal entre  $\rho$  et  $\bar{\nu}$  et  $\mathbf{r}_{\bar{\rho}}$  le transport optimal entre  $\rho$  et  $\bar{\rho}$ . On construit  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{3d})$  avec (voir figure 1.1) :

$$\begin{cases} \mathbb{X}_{\#}^{1,2} \mu = (\mathbf{r}_{\bar{\nu}} \otimes \text{Id})_{\#} \rho, \\ \mathbb{X}_{\#}^{2,3} \mu = (\text{Id} \otimes \mathbf{r}_{\bar{\rho}})_{\#} \rho, \end{cases} \quad (1.3)$$

avec  $\mathbb{X}^i$  l'application projection sur la  $i^{\text{e}}$  marginale (voir annexe A page 179 ou encore la définition 1.31 page 44). On définit la géodésique généralisée joignant  $\bar{\nu}$  à  $\bar{\rho}$  avec comme base  $\rho$  (voir [2] page 207) par  $\bar{\rho}_t = ((1-t)\mathbb{X}^1 + t\mathbb{X}^3)_{\#} \mu$  et  $\mathbf{r}_t = (1-t)\mathbf{r}_{\bar{\nu}} + t\mathbf{r}_{\bar{\rho}}$ , nous allons montrer que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\bar{\rho}_t \in K$ . Comme  $\mathbf{r}_{\bar{\nu}}$  et  $\mathbf{r}_{\bar{\rho}}$  sont des transports optimaux,  $\nabla \mathbf{r}_{\bar{\nu}}$  et  $\nabla \mathbf{r}_{\bar{\rho}}$  sont en chaque point des éléments de l'ensemble des matrices symétriques définies positives  $\mathcal{S}^{++}$ . De plus, en utilisant la convexité de  $M \rightarrow \det(M)^{-1}$  sur  $\mathcal{S}^{++}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_t &= ((1-t)\mathbb{X}^1 + t\mathbb{X}^3)_{\#} \mu \\ &= ((1-t)\mathbf{r}_{\bar{\nu}} + t\mathbf{r}_{\bar{\rho}})_{\#} \rho \\ &= (\mathbf{r}_t)_{\#} \rho \\ &= \frac{\rho}{|\det(\nabla \mathbf{r}_t)|} \circ (\mathbf{r}_t)^{-1} \\ &= \frac{\rho}{|\det((1-t)\mathbf{r}_{\bar{\nu}} + t\mathbf{r}_{\bar{\rho}})|} \circ (\mathbf{r}_t)^{-1} \\ &\leq \frac{(1-t)\rho}{\det(\nabla \mathbf{r}_{\bar{\nu}})} \circ (\mathbf{r}_t)^{-1} + \frac{t\rho}{\det(\nabla \mathbf{r}_{\bar{\rho}})} \circ (\mathbf{r}_t)^{-1} \\ &\leq (1-t)\bar{\nu} \circ (\mathbf{r}_t)^{-1} + t\bar{\rho} \circ (\mathbf{r}_t)^{-1} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Enfin, posons

$$\mathcal{W}_{\mu}(\bar{\rho}_t, \rho)^2 := \int_{\mathbb{R}^d} \|(1-t)z + tx - y\|^2 d\mu(z, y, x) \quad (1.4)$$

le coût pour transporter  $\bar{\rho}_t$  sur  $\rho^1$  en utilisant le plan de transport  $\mu$ . L'égalité

$$\|(1-t)z + tx - y\|^2 = (1-t)\|z - y\|^2 + t\|y - x\|^2 - t(1-t)\|x - z\|^2$$

nous permet d'obtenir les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_\mu(\bar{\rho}_t, \rho)^2 &= (1-t) \int_{\mathbb{R}^d} \|z-y\|^2 d\mu + t \int_{\mathbb{R}^d} \|y-x\|^2 d\mu - t(1-t) \int_{\mathbb{R}^d} \|x-z\|^2 d\mu \\
 &:= (1-t) \mathcal{W}_\mu(\bar{\nu}, \rho)^2 + t \mathcal{W}_\mu(\bar{\rho}, \rho)^2 - t(1-t) \mathcal{W}_\mu(\bar{\nu}, \bar{\rho})^2 \\
 &= (1-t) \mathcal{W}_2(\bar{\nu}, \rho)^2 + t \mathcal{W}_2(\bar{\rho}, \rho)^2 - t(1-t) \mathcal{W}_\mu(\bar{\nu}, \bar{\rho})^2,
 \end{aligned}$$

la dernière étant obtenue en utilisant le fait que deux des plans marginaux de  $\mu$  sont optimaux (voir (1.3)). Comme  $((1-t)\mathbb{X}^1 + t\mathbb{X}^3 \otimes \mathbb{X}^2)_{\#}\mu$  est un plan de transport entre  $\bar{\rho}_t$  et  $\rho$  il vient directement que  $\mathcal{W}_\mu(\bar{\rho}_t, \rho)^2 \geq \mathcal{W}_2(\bar{\rho}_t, \rho)^2$ . De plus,  $\bar{\rho}_t \in K$  et  $\bar{\rho} = \mathbb{P}_K^{\mathcal{W}_2}(\rho)$  donc

$$\mathcal{W}_\mu(\bar{\rho}_t, \rho)^2 \geq \mathcal{W}_2(\bar{\rho}_t, \rho)^2 \geq \mathcal{W}_2(\bar{\rho}, \rho)^2.$$

On a donc que l'application  $t \in [0, 1] \rightarrow \mathcal{W}_\mu(\bar{\rho}_t, \rho)^2$  est toujours plus grande que sa valeur en  $t = 1$  d'où :

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d(\mathcal{W}_\mu(\bar{\rho}_t, \rho)^2)}{dt} \right|_{t=1^-} &\leq 0 \\
 -\mathcal{W}_2(\bar{\nu}, \rho)^2 + \mathcal{W}_2(\bar{\rho}, \rho)^2 + \mathcal{W}_\mu(\bar{\nu}, \bar{\rho})^2 &\leq 0 \\
 \mathcal{W}_\mu(\bar{\nu}, \bar{\rho})^2 &\leq \mathcal{W}_2(\bar{\nu}, \rho)^2 - \mathcal{W}_2(\bar{\rho}, \rho)^2.
 \end{aligned}$$

Dans le cas général, soit  $\mathbf{t}$  le transport optimal entre  $\bar{\rho}$  et  $\rho$ , on pose

$$\mathbf{t}_\epsilon = (1-\epsilon)\mathbf{t} + \epsilon \text{Id}$$

et  $\rho_\epsilon = \mathbf{t}_{\epsilon\#}\bar{\rho}$ . On pose  $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{3d})$  le plan défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{X}_{\#}^{1,2} \tilde{\mu} &= (\text{Id} \times \mathbf{t})_{\#}\bar{\rho}, \\
 \mathbb{X}_{\#}^{1,3} \tilde{\mu} &= (\text{Id} \times \mathbf{t}_\epsilon)_{\#}\bar{\rho}.
 \end{aligned}$$

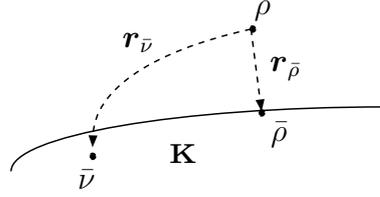
Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_2(\rho, \rho_\epsilon)^2 &\leq \mathcal{W}_{\tilde{\mu}}(\rho, \rho_\epsilon)^2 \\
 &:= \int_{x,y,z \in \mathbb{R}^d} \|x-y\|^2 d\tilde{\mu}(z, y, x) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{t}_\epsilon(z) - \mathbf{t}(z)\|^2 \bar{\rho}(z) dx \\
 &= \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{t}(z) - z\|^2 \bar{\rho}(z) dx \\
 &= \epsilon^2 \mathcal{W}_2(\rho, \bar{\rho})^2
 \end{aligned}$$

avec la même méthode on peut prouver que :

$$\mathcal{W}_2(\bar{\rho}, \rho_\epsilon) \leq (1-\epsilon) \mathcal{W}_2(\bar{\rho}, \rho).$$

Ces dernières inégalités prouvent que  $\bar{\rho} = \mathbb{P}_K^{\mathcal{W}_2}(\rho_\epsilon)$ , en effet, supposons que cela soit pas le cas


 FIGURE 1.1 – Plan de transport  $\mu$ .

et notons  $\bar{\rho}_\epsilon$  le projeté de  $\rho_\epsilon$  sur  $K$ . Il en suit les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2(\rho, \bar{\rho}_\epsilon) &\leq \mathcal{W}_2(\rho_\epsilon, \bar{\rho}_\epsilon) + \mathcal{W}_2(\rho, \rho_\epsilon) \\ &< \mathcal{W}_2(\rho_\epsilon, \bar{\rho}) + \mathcal{W}_2(\rho, \rho_\epsilon) \\ &= \mathcal{W}_2(\rho, \bar{\rho}) \end{aligned}$$

ce qui est impossible car  $\bar{\rho} = \mathbb{P}_K^{\mathcal{W}_2}(\rho)$ . Maintenant, comme  $\mathbf{t}$  est un transport optimal, il est monotone ce qui impose que :

$$\langle \mathbf{t}_\epsilon(x) - \mathbf{t}_\epsilon(y), x - y \rangle \geq \epsilon \|x - y\|^2$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|\mathbf{t}_\epsilon(x) - \mathbf{t}_\epsilon(y)\| \geq \epsilon \|x - y\|.$$

Soit  $y_0 \in \text{Im}(\mathbf{t}_\epsilon)$ , il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  tel que  $\mathbf{t}_\epsilon(x_0) = y_0$ . Si  $x \notin B(x_0, \frac{\delta}{\epsilon})$  la boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $\frac{\delta}{\epsilon}$ , alors

$$\|\mathbf{t}_\epsilon(x_0) - \mathbf{t}_\epsilon(x)\| \geq \epsilon \times \frac{\delta}{\epsilon} \geq \delta$$

et, par conséquent

$$\rho_\epsilon(B(y_0, \delta)) \leq \bar{\rho}\left(B(x_0, \frac{\delta}{\epsilon})\right).$$

En conclusion,  $\|\rho_\epsilon\|_\infty \leq \frac{1}{\epsilon^\alpha} \|\rho\|_\infty$  et est donc absolument continue. En utilisant l'inégalité trouvée dans le cas où  $\rho$  est absolument continue et en l'appliquant à  $\rho_\epsilon$  on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2(\bar{\rho}, \bar{\nu})^2 &\leq \mathcal{W}_2(\bar{\nu}, \rho_\epsilon)^2 - \mathcal{W}_2(\bar{\rho}, \rho_\epsilon)^2 \\ &\leq \mathcal{W}_2(\bar{\nu}, \rho)^2 - \mathcal{W}_2(\bar{\rho}, \rho)^2 + 2\mathcal{W}_2(\rho, \rho_\epsilon) (\mathcal{W}_2(\rho_\epsilon, \bar{\nu}) + \mathcal{W}_2(\bar{\rho}, \rho_\epsilon)) \end{aligned}$$

et il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\mathcal{W}_2(\bar{\rho}, \bar{\nu})^2 \leq \mathcal{W}_2(\bar{\nu}, \rho)^2 - \mathcal{W}_2(\bar{\rho}, \rho)^2 + 2\epsilon M.$$

En tendant  $\epsilon$  vers 0, on obtient l'égalité escomptée.

□

Pour illustrer la notion de projection, nous allons calculer la projection sur  $K$  d'un bloc sursaturé accolé à deux blocs saturés (voir figure 1.2). Cette exemple nous sera très utile par la suite, ce type de situation étant fréquent lorsque l'on applique notre schéma avec comme condition de départ des blocs saturés se déplaçant à vitesses constantes (cadre de l'approche sticky blocks expliqué dans l'introduction page 6 et introduit par [11]).

**Proposition 1.6.** *Soit  $\rho$  une densité définie comme suit (voir figure 1.2)*

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, L_a], \\ 2 & \text{si } x \in [L_a, L_a + L_b], \\ 1 & \text{si } x \in [L_a + L_b, L_a + L_b + L_c], \end{cases} \quad (1.5)$$

avec  $L_a, L_b, L_c \geq 0$ , alors

$$\bar{\rho} = \mathbb{P}_K^{\text{W}^2}(\rho) = \mathbb{1}_{[-d, L_a + 2L_b + L_c - d]}$$

avec  $d$  représentant le déplacement vers la gauche des blocs :

$$d = \frac{L_b(L_b + L_c)}{(L_a + 2L_b + L_c)}.$$

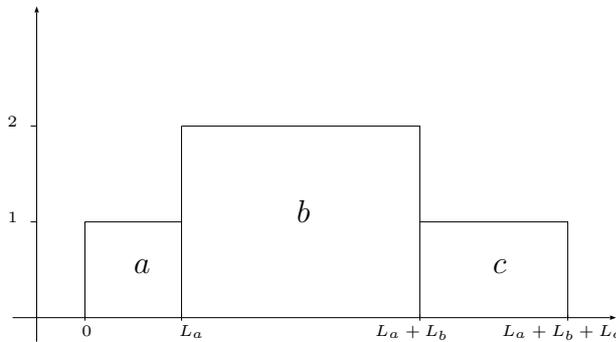


FIGURE 1.2 – La densité étudiée dans la proposition 1.6.

**Remarque 1.7.** *Si  $L_c > L_a$ , c'est-à-dire si le bloc congestionné "c" de droite est plus long que celui de gauche alors  $d > \frac{L_b}{2}$ , les blocs préfèrent s'étaler un peu plus vers la gauche que la droite car il y a moins de particules à déplacer. Inversement si  $L_c < L_a$  les blocs préfèrent s'étaler un peu plus vers la droite que la gauche. De plus,*

$$\lim_{L_c \rightarrow +\infty} \frac{L_b(L_b + L_c)}{(L_a + 2L_b + L_c)} = L_b$$

*les blocs tendent à s'étaler exclusivement à gauche quand le bloc de droite "c" tend à devenir de longueur infinie, même s'il existera toujours une partie de la masse qui se dirigera vers la droite.*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{t}$  le transport optimal entre  $\rho$  et  $\bar{\rho}$ ,  $\mathbf{t}$  est donc une application monotone du support de  $\rho$  à valeur dans le support de  $\bar{\rho}$ . D'après le lemme 1.3 page 17 il est à image dans  $\{x \in \mathbb{R}, \bar{\rho}(x) = 1\}$ , comme  $\rho$  est composé de blocs de densité supérieure ou égale à 1, il en suit que  $\bar{\rho} = \mathbb{1}_A$ . On peut montrer que  $A$  est a fortiori un intervalle. En effet, supposons que  $A$  admet au moins deux composantes connexes, il existe alors un intervalle  $I = ]I_l, I_r[$  entre deux blocs de  $\bar{\rho}$ . Maintenant,  $\mathbf{t}(I_l) - I_l \geq 0$  sinon, comme la dimension est 1, l'application  $\mathbf{t}$  est continue sur chaque composante de  $\bar{\rho}$  (voir le lemme 1.3) et il existe un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $] - \infty, I_l[$  tel que :

$$\forall x \in \mathcal{O}, \mathbf{t}(x) - x < 0.$$

Transporter la masse de  $\mathcal{O}$  dans  $I$  serait alors moins coûteux, ce qui n'est pas possible car  $\mathbf{t}$  est le transport optimal. De même,  $\mathbf{t}(I_r) - I_r \leq 0$ , mais comme  $\mathbf{t}$  est monotone, cela implique forcément que  $\rho(I) = 0$  alors que  $\rho(]I_r, +\infty[) > 0$  et  $\rho(] - \infty, I_l[) > 0$ , donc  $\rho$  a deux composantes connexes, ce qui n'est pas le cas (voir la figure 1.3).

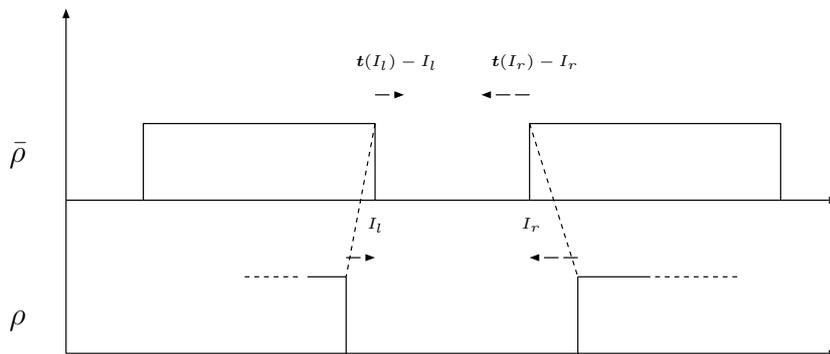


FIGURE 1.3 – Le sens de déplacement des particules entre  $\rho$  et  $\bar{\rho}$  créé obligatoirement deux composantes connexes.

Pour finir cette preuve, il suffit de trouver l'intervalle optimal (de la forme  $A_d = [-d, L_a + 2L_b + L_c - d]$ ).

Soit  $\mathbf{t}_d$  le transport optimal entre  $\rho$  et  $\mathbb{1}_{A_d}$ , comme  $\mathbf{t}_d$  est monotone, il est clair qu'il est de la forme :

$$\mathbf{t}_d(x) \begin{cases} x - d & \text{si } x \in [0, L_a], \\ 2x - (L_a + d) & \text{si } x \in [L_a, L_a + L_b], \\ x + (L_b - d) & \text{si } x \in [L_a + L_b, L_a + L_b + L_c]. \end{cases}$$

Calculons maintenant  $J_d$  le coût du transport (au carré) entre  $\rho$  et  $\mathbb{1}_{A_d}$  :

$$\begin{aligned}
J_d &= \int_{\mathbb{R}} (t_d(x) - x)^2 \rho(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} d^2 dx + \int_{L_a}^{L_a+L_b} (x - L_a - d)^2 2 dx + \int_{L_a+L_b}^{L_a+L_b+L_c} (L_b - d)^2 dx \\
&= d^2 L_a + 2 \frac{(L_b - d)^3}{3} + 2 \frac{d^3}{3} + (L_b - d)^2 L_c \\
&= (L_a + 2L_b + L_c) d^2 + (-2L_b^2 - 2L_c L_b) d + \frac{2L_b^3}{3} + L_c L_b^2.
\end{aligned}$$

Le minimum de  $J_d$  est obtenu en  $d = \frac{L_b(L_b + L_c)}{(L_a + 2L_b + L_c)}$  ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Remarque 1.8.** Dans l'exemple précédent, on peut remarquer que

$$t_d(x)^{-1} = \begin{cases} x + d & \text{si } x \in [-d, L_a - d], \\ \frac{x}{2} + \frac{(L_a + d)}{2} & \text{si } x \in [L_a - d, L_a + 2L_b - d], \\ x + (-L_b + d) & \text{si } x \in [L_a + 2L_b - d, L_a + 2L_b + L_c - d], \end{cases}$$

on a donc

$$\nabla \pi(x) = \begin{cases} d & \text{si } x \in [-d, L_a - d], \\ -\frac{x}{2} + \frac{(L_a + d)}{2} & \text{si } x \in [L_a - d, L_a + 2L_b - d], \\ (-L_b + d) & \text{si } x \in [L_a + 2L_b - d, L_a + 2L_b + L_c - d], \end{cases}$$

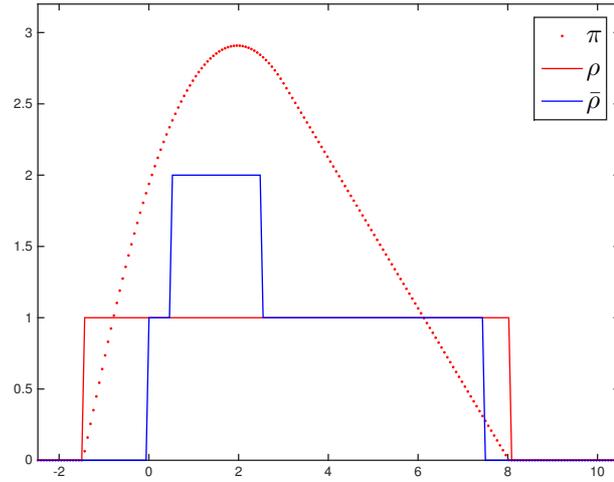
et pour finir

$$\pi(x) = \begin{cases} d(x + d) & \text{si } x \in [-d, L_a - d], \\ -\frac{x^2}{4} + \frac{(L_a + d)}{2} x + c_2 & \text{si } x \in [L_a - d, L_a + 2L_b - d], \\ (-L_b + d)x + c_3 & \text{si } x \in [L_a + 2L_b - d, L_a + 2L_b + L_c - d], \end{cases}$$

avec  $c_2 = \frac{dL_a}{2} + \frac{3d^2}{4} - \frac{L_a^2}{4}$  et  $c_3 = L_b(L_b + L_a - d) + d^2$ . On retrouve le lemme 1.3 car  $\pi \in \{p \in H_{\bar{\rho}}^1 \mid p \geq 0, (1 - \bar{\rho})p = 0\}$  (voir un exemple figure 1.4).

## 1.2 Schéma 1

Dans cette section, nous allons présenter le premier schéma discrétisé en temps que nous avons proposé puis étudié durant ma thèse. La première sous-section sert à la description du schéma. La sous-section 1.2.2 introduit les principales propriétés des suites calculées à l'aide du schéma. Nous présentons dans la sous-section 1.2.3 les résultats de compacité des suites d'interpolées. Nous montrons dans la sous-section 1.2.4 que ces suites vérifient l'équation de continuité et qu'elles sont solutions d'équations proches des équations de conservation de la


 FIGURE 1.4 – Exemple de la proposition 1.6, avec  $L_a = 0.5$ ,  $L_b = 2$  et  $L_c = 5$ .

quantité de mouvement avec un terme supplémentaire consistant. Nous démontrons dans 1.2.5 que, en dimension 1 et dans le cas où la donnée initiale est compatible avec la dynamique des sticky blocks, la solution calculée par le schéma converge vers la solution sticky blocks. Enfin, nous verrons dans la dernière sous-section 1.2.6 que ce schéma ne peut être utilisé en dimension supérieure.

### 1.2.1 Description du schéma

Dans cette sous-section, nous allons décrire le premier schéma proposé pour les équations de gaz sans pression avec contrainte de congestion :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla \pi = 0, \\ \rho \leq 1, \\ (1 - \rho)\pi = 0, \\ \pi \geq 0, \\ u^+ = P_{C_K(\rho)}(u^-), \end{cases} \quad (1.6)$$

avec

$$C_K(\rho) = \left\{ v \in L^2, \int v \cdot \nabla q \leq 0, \forall q \in H^1, q \geq 0, q(1 - \rho) = 0 \right\}. \quad (1.7)$$

Le schéma peut se décrire de la manière suivante : pour un couple densité/vitesse  $(\rho_\tau^n, u_\tau^n)$  donné,  $\tau$  un pas de temps fixé, nous transportons  $\rho_\tau^n$  par  $\text{Id} + \tau u_\tau^n$ . Cette nouvelle densité est susceptible de dépasser la contrainte de congestion, on la corrige en la projetant sur l'ensemble des densités inférieures ou égales à 1 en utilisant la métrique de Wasserstein quadratique. Enfin, on calcule la nouvelle vitesse en utilisant le transport optimal entre la mesure d'arrivée

corrigée et celle de départ.

L'idée principale de ce schéma réside dans la manière de renouveler la vitesse. On utilise le transport optimal  $\mathbf{t}^{n+1}$  entre  $\rho^{n+1}$  et  $\rho^n$  pour représenter le déplacement effectué par les particules entre  $n\tau$  et  $(n+1)\tau$  : une particule arrivée en  $x \in \text{spt}(\rho^{n+1})$  est partie de  $\mathbf{t}^{n+1}(x) \in \text{spt}(\rho^n)$ . Cela peut sembler être cohérent pour plusieurs raisons. Tout d'abord, le transport optimal entre deux mesures est bien une application qui permet de décrire le déplacement de masse d'une densité à une autre. De plus, comme le transport optimal est monotone, on a :  $\forall x \neq y, \forall t \in [0, \tau]$

$$\left(\frac{(n+1)\tau - x}{\tau}\right) \mathbf{t}(x) + \left(\frac{x - n\tau}{\tau}\right) x \neq \left(\frac{(n+1)\tau - x}{\tau}\right) \mathbf{t}(y) + \left(\frac{x - n\tau}{\tau}\right) y,$$

c'est-à-dire que, si on considère que le mouvement des particules est rectiligne uniforme sur  $[n\tau, (n+1)\tau]$ , deux particules provenant de  $\mathbf{t}^{n+1}(x)$  et  $\mathbf{t}^{n+1}(y)$  respectivement, ne se retrouvent pas sur un même point durant leur déplacement en  $x$  et  $y$  respectivement. Les collisions qui ont lieu durant cet intervalle de temps sont prises en compte par le réarrangement effectué entre les particules lors de l'utilisation du transport optimal.

Pour des raisons d'esthétisme, nous omettrons par la suite l'indice " $\tau$ " s'il n'y a aucune ambiguïté sur le pas de temps utilisé. De plus, si  $\rho \in K$ , on notera  $d\rho(x) = \rho(x)dx$ , c'est-à-dire qu'on confondra  $\rho$  avec sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

**Schéma 1.** Soit  $(\rho^0, u^0)$  une densité et une vitesse initiales données,  $\tau > 0$  un pas de temps fixé. À partir de  $(\rho^n, u^n)$ , le schéma calcule  $(\rho^{n+1}, u^{n+1})$  de la manière suivante

$$\begin{cases} \tilde{\rho}^{n+1} = (Id + \tau u^n) \# \rho^n, \\ \rho^{n+1} = \mathbb{P}_K^{\mathcal{W}_2}(\tilde{\rho}^{n+1}), \\ u^{n+1} = \frac{Id - \mathbf{t}^{n+1}}{\tau}, \end{cases} \quad (1.8)$$

où  $\mathbf{t}^{n+1}$  est le transport optimal entre  $\rho^{n+1}$  et  $\rho^n$ .

On rappelle que  $K = \{\rho \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d), \rho \leq 1\}$ .

**Remarque 1.9.** Pour définir la nouvelle vitesse  $u^{n+1}$ , il est essentiel d'utiliser le transport optimal entre  $\rho^{n+1}$  et  $\rho^n$  et non son inverse. En effet, comme  $\mathbf{t}^{n+1}$  est défini sur le support de  $\rho^{n+1}$ , il permet de définir une nouvelle vitesse pour chaque élément de ce support.

## 1.2.2 Propriétés liées aux suites du schéma 1.

Par la suite, nous allons montrer que le schéma 1 est bien défini, c'est-à-dire que pour un couple densité/vitesse donné approchant la solution à l'instant  $t$ , celui-ci calcule un unique

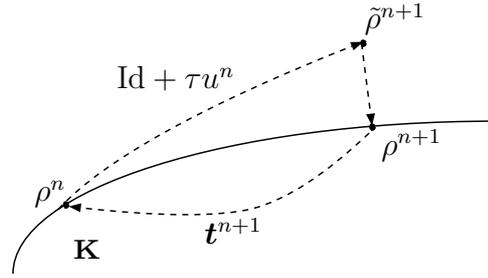


FIGURE 1.5 – Schéma 1.

couple densité/vitesse qui sera notre approximation de la solution pour un temps  $t + \tau$ . Ensuite, nous verrons quelques résultats que nous pouvons obtenir sur les suites construites par ce schéma.

**Proposition 1.10.** *Soit  $(\rho^n, u^n) \in K \times L^2_{\rho^n}$  le schéma 1 donne un unique couple  $(\rho^{n+1}, u^{n+1}) \in K \times L^2_{\rho^{n+1}}$ . De plus, on a les deux propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned}
 & \bullet \int_{\mathbb{R}^d} \|u^{n+1}(x)\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|u^n(x)\|^2 \rho^n(x) dx; \\
 & \bullet \mathcal{W}_2(\rho^{n+1}, \rho^n) \leq \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n-1}).
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

**Remarque 1.11.** *Les estimations (1.9) sont très importantes pour obtenir des propriétés de compacité sur les suites calculées par les schémas et pouvoir ainsi prouver une quelconque convergence de ces suites vers les équations (1.6).*

*Démonstration.* En premier lieu,  $\tilde{\rho}^{n+1} = (\text{Id} + \tau u^n) \# \rho^n$  est bien un élément de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 d\tilde{\rho}^{n+1}(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \|x + \tau u^n(x)\|^2 \rho^n(x) dx \\
 &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^d} (\|x\|^2 + \tau^2 \|u^n(x)\|^2) \rho^n(x) dx \\
 &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 \rho^n(x) dx + 2\tau^2 \int_{\mathbb{R}^d} \|u^n(x)\|^2 \rho^n(x) dx \\
 &< +\infty.
 \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le lemme 1.3 page 17, on a bien l'existence de  $\rho^{n+1}$  élément de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  tel que  $\rho^{n+1} = \mathbb{P}_K^{\mathcal{W}_2}(\tilde{\rho}^{n+1})$ . Soit  $\mathbf{t}^{n+1}$  le transport optimal entre  $\rho^{n+1}$  et  $\rho^n$  (il existe car les deux mesures sont des éléments de  $K$ , voir annexe A page 179). On peut définir la vitesse  $v^{n+1} = \frac{\text{Id} - \mathbf{t}^{n+1}}{\tau}$  qui est bien un élément défini sur le support de  $\rho^{n+1}$ . En utilisant

le lemme 1.5 page 18

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \|u^{n+1}(x)\|^2 \rho^{n+1}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left\| \frac{x - \mathbf{t}^{n+1}(x)}{\tau} \right\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \\
&= \frac{1}{\tau^2} \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n+1})^2 \\
&\leq \frac{1}{\tau^2} \mathcal{W}_2(\rho^n, \tilde{\rho}^{n+1})^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \|u^n(x)\|^2 \rho^n(x) dx.
\end{aligned}$$

De plus, comme  $u^n = \frac{\text{Id} - \mathbf{t}^n}{\tau}$  on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|u^n(x)\|^2 \rho^n(x) dx = \frac{1}{\tau^2} \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n-1})^2$$

d'où la seconde propriété.  $\square$

Une autre propriété importante de ces suites est qu'elles conservent la quantité de mouvement.

**Proposition 1.12.** *Soit un couple densité/vitesse  $(\rho^n, u^n) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \times L^2_{\rho^n}$  alors le couple  $(\rho^{n+1}, u^{n+1})$  calculé par le schéma 1 est tel que :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^n(x) \rho^n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} u^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) dx.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} u^n(x) \rho^n(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{x + \tau u^n(x)}{\tau} - \frac{x}{\tau} \right) \rho^n(x) dx \\
&= \frac{1}{\tau} \left( \mathcal{M}_1(\tilde{\rho}^{n+1}) - \mathcal{M}_1(\rho^n) \right)
\end{aligned}$$

de même on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} u^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{x - \mathbf{t}^{n+1}(x)}{\tau} \right) \rho^{n+1}(x) dx \\
&= \frac{1}{\tau} \left( \mathcal{M}_1(\rho^{n+1}) - \mathcal{M}_1(\rho^n) \right).
\end{aligned}$$

On obtient l'égalité escomptée en utilisant le corollaire 1.4 page 17.  $\square$

Posons  $C_0 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} \|v^0(x)\|^2 \rho^0(x) dx}$  représentant l'énergie cinétique initiale de notre système. Nous allons montrer que l'on peut contrôler la croissance du moment d'ordre 2 de  $\rho^n$  indépendamment de  $\tau$ . Pour cela, nous allons utilisé le lemme suivant :

**Lemme 1.13.** *Soit  $\mathcal{M}_2(\rho^n) := \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 \rho^n(x) dx$  alors*

$$\mathcal{M}_2(\rho^{n+1}) \leq 2\mathcal{M}_2(\rho^n) + 2\tau^2 C_0^2.$$

*Démonstration.* Cette première estimation découle simplement de l'inégalité  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ . En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_2(\rho^{n+1}) &:= \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \|x - t^{n+1}(x) + t^{n+1}(x)\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \\
 &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^d} \|x - t^{n+1}(x)\|^2 \rho^{n+1}(x) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^d} \|t^{n+1}(x)\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \\
 &\leq 2\mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n+1})^2 + 2\mathcal{M}_2(\rho^n) \\
 &\leq 2\tau^2 C_0^2 + 2\mathcal{M}_2(\rho^n)
 \end{aligned}$$

car  $\mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n+1}) \leq \mathcal{W}_2(\rho^0, \rho^1) \leq \tau^2 C_0^2$ . □

**Proposition 1.14.** *Soient  $\tau > 0$  et  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $N\tau = T$  alors*

$$\mathcal{M}_2(\rho^N) \leq e^{TC_0} \mathcal{M}_2(\rho^0) + e^{TC_0} TC_0 \left( 2 + \frac{\tau^2 C_0^2}{2} \right).$$

*Démonstration.* Cette preuve utilise principalement l'inégalité de Cauchy-Schwartz, le lemme de Grönwall, le lemme 1.13 et l'inégalité  $\sqrt{\alpha} \leq 1 + \frac{\alpha}{4}$  pour  $\alpha \geq 0$ . On a l'estimation

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}_2(\rho^{n+1}) - \mathcal{M}_2(\rho^n)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left( \|x\|^2 - \|t^{n+1}(x)\|^2 \right) \rho^{n+1}(x) dx \right| \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \|x\|^2 - \|t^{n+1}(x)\|^2 \right| \rho^{n+1}(x) dx \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \|x - t^{n+1}(x)\| \left( \|x\| + \|t^{n+1}(x)\| \right) \rho^{n+1}(x) dx \\
 &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} \|x - t^{n+1}(x)\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sqrt{\mathcal{M}_2(\rho^n)} + \sqrt{\mathcal{M}_2(\rho^{n+1})} \right) \\
 &\leq \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n+1}) \left( 2 + \frac{\mathcal{M}_2(\rho^n)}{4} + \frac{\mathcal{M}_2(\rho^{n+1})}{4} \right) \\
 &\leq \tau C_0 \left( 2 + \frac{\tau^2 C_0^2}{2} + \mathcal{M}_2(\rho^n) \right).
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\mathcal{M}_2(\rho^n) \leq \mathcal{M}_2(\rho^{n-1})(1 + \tau C_0) + \tau C_0 \left( 2 + \frac{\tau^2 C_0^2}{2} \right)$$

et en utilisant le lemme de Grönwall discret

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_2(\rho^N) &\leq e^{TC_0} \mathcal{M}_2(\rho^0) + \sum_{i=0}^{N-1} e^{C_0(N-i)\tau} \tau C_0 \left( 2 + \frac{\tau^2 C_0^2}{2} \right) \\
 &\leq e^{TC_0} \mathcal{M}_2(\rho^0) + e^{TC_0} TC_0 \left( 2 + \frac{\tau^2 C_0^2}{2} \right).
 \end{aligned}$$

□

Par la suite, nous allons connecter chaque couple de mesures  $(\rho^n, \rho^{n+1})$  par une géodésique de l'espace de Wasserstein. Cette interpolation revient à animer les particules d'un mouvement rectiligne uniforme entre leur point de départ  $\mathbf{t}^{n+1}(x)$  et leur point d'arrivée  $x$ . Elle est très utilisée en transport optimal (voir [63, 67]) car elle a l'avantage de satisfaire l'équation de continuité (voir la proposition 1.22). En effet, on peut montrer que si  $\nu$  et  $\rho$  sont des densités de probabilité telles que  $\nu = \mathbf{t}_{\#}\rho$  avec  $\mathbf{t}$  est une application de transport, alors  $\rho_t = ((1-t)\text{Id} + t\mathbf{t})_{\#}\rho$  est solution de l'équation de continuité avec comme densité initiale (en  $t = 0$ )  $\rho$  et densité finale (en  $t = 1$ )  $\nu$ . À chaque instant  $t$ ,  $\rho_t$  est la densité obtenue lorsque l'on suit les particules de manière lagrangienne entre leur point de départ  $x \in \text{spt}(\rho)$  et leur point d'arrivée  $\mathbf{t}(x) \in \text{spt}(\nu)$  si elles suivent un mouvement rectiligne uniforme.

### 1.2.3 Propriétés des suites d'interpolées.

**Définition 1.15.** Pour  $\tau > 0$ , on définit la fonction  $t \rightarrow \rho_\tau(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  de la manière suivante :

$$\rho_\tau(t) = \left(T_\tau^{n+1}(t)\right)_{\#}\rho^{n+1}, \text{ si } t \in [n\tau, n\tau + \tau],$$

avec

$$T_\tau^{n+1}(t) = \left(\frac{n\tau + \tau - t}{\tau}\right)\mathbf{t}^{n+1} + \left(\frac{t - n\tau}{\tau}\right)\text{Id}$$

et  $\mathbf{t}^{n+1}$  le transport optimal entre  $\rho^{n+1}$  et  $\rho^n$ .

Dans le but de trouver une certaine compacité sur la famille des suites d'interpolées, nous allons prouver que :

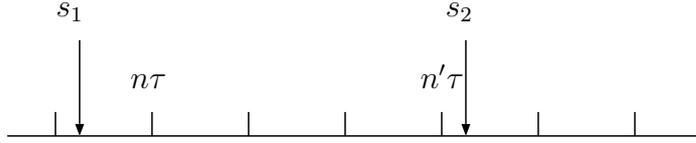
1. elles sont définies dans  $\mathcal{L}([0, T[, \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$ , l'espace des fonctions lipschitz en temps à valeur dans  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  ;
2. à  $t$  fixé la suite  $(\mathcal{M}_2(\rho_\tau(t))^2)_{\tau>0}$  est  $\tau$ -uniformément bornée.

**Lemme 1.16.** Soit  $t, t' \in [n\tau, n\tau + \tau]$ , alors

$$\begin{cases} \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho_\tau(t)) \leq \left(\frac{t - n\tau}{\tau}\right) \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n+1}), \\ \mathcal{W}_2(\rho^{n+1}, \rho_\tau(t)) \leq \left(\frac{n\tau + \tau - t}{\tau}\right) \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n+1}), \\ \mathcal{W}_2(\rho_\tau(t'), \rho_\tau(t)) \leq \left(\frac{|t - t'|}{\tau}\right) \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n+1}). \end{cases} \quad (1.10)$$

*Démonstration.* Définissons

$$\begin{cases} \mu_0 = \left(T_\tau^{n+1}(n\tau) \otimes T_\tau^{n+1}(t)\right)_{\#}\rho^{n+1}, \\ \mu_1 = \left(\text{Id} \otimes T_\tau^{n+1}(t)\right)_{\#}\rho^{n+1}, \\ \mu_2 = \left(T_\tau^{n+1}(t') \otimes T_\tau^{n+1}(t)\right)_{\#}\rho^{n+1}, \end{cases}$$


 FIGURE 1.6 – Représentation de  $s_1$  et  $s_2$  dans  $\tau\mathbb{N}$ .

trois plans de transport transportant  $\rho^{n+1}$  sur  $\rho_\tau(t)$ ,  $\rho^n$  sur  $\rho_\tau(t)$  et  $\rho_\tau(t)$  sur  $\rho_\tau(t')$  respectivement. On a alors

$$\begin{cases} \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho_\tau(t))^2 \leq \mathcal{W}_{\mu_0}(\rho^n, \rho_\tau(t))^2 = \left(\frac{t - n\tau}{\tau}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{t}^{n+1} - \text{Id})^2 \rho^{n+1} dx, \\ \mathcal{W}_2(\rho^{n+1}, \rho_\tau(t))^2 \leq \mathcal{W}_{\mu_1}(\rho^{n+1}, \rho_\tau(t))^2 = \left(\frac{n\tau + \tau - t}{\tau}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{t}^{n+1} - \text{Id})^2 \rho^{n+1} dx, \\ \mathcal{W}_2(\rho_\tau(t), \rho_\tau(t'))^2 \leq \mathcal{W}_{\mu_2}(\rho_\tau(t), \rho_\tau(t'))^2 = \left(\frac{t - t'}{\tau}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{t}^{n+1} - \text{Id})^2 \rho^{n+1} dx, \end{cases}$$

d'où les inégalités escomptées. On rappelle que si  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d})$  est un plan de transport entre les mesures  $\rho$  et  $\nu$  appartenant à  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mathcal{W}_\mu(\rho, \nu)$  représente le coût de déplacer  $\rho$  sur  $\nu$  en utilisant le transport  $\mu$ . Cette notion a déjà été utilisée en (1.4) à la page 18. Il est par définition plus grand que le coût optimal  $\mathcal{W}_2(\rho, \nu)$ .  $\square$

**Proposition 1.17.**  $\forall \tau > 0$ ,  $\rho_\tau \in \mathcal{L}([0, T], \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$ , l'espace des fonctions Lipschitz en temps à valeurs dans  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ , de plus,  $\forall s_1, s_2 > 0$  :

$$\mathcal{W}_2(\rho_\tau(s_1), \rho_\tau(s_2)) \leq |s_1 - s_2| C_0.$$

*Démonstration.* Pour la preuve, supposons que  $s_2 \geq s_1$  et définissons  $n$  et  $n'$  de la manière suivante (voir figure 1.6)

$$\begin{cases} n = \lfloor \frac{s_1}{\tau} \rfloor + 1, \\ n' = \lfloor \frac{s_2}{\tau} \rfloor, \end{cases} \quad (1.11)$$

alors, si on a  $n \leq n'$ , c'est-à-dire s'il existe un entier  $n$  tel que  $s_1 \leq n\tau \leq s_2$  on a

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{W}_2(\rho_\tau(s_1), \rho_\tau(s_2)) \\
 \leq & \mathcal{W}_2(\rho_\tau(s_1), \rho_\tau(n\tau)) + \sum_{j=n}^{n'-1} \mathcal{W}_2(\rho_\tau(j\tau), \rho_\tau(j\tau + \tau)) + \mathcal{W}_2(\rho_\tau(n'\tau), \rho_\tau(s_2)) \\
 = & \mathcal{W}_2(\rho_\tau(s_1), \rho^n) + \sum_{j=n}^{n'-1} \mathcal{W}_2(\rho^j, \rho^{j+1}) + \mathcal{W}_2(\rho^{n'}, \rho_\tau(s_2)) \\
 \leq & \left( \frac{n\tau - s_1}{\tau} \right) \mathcal{W}_2(\rho^{n-1}, \rho^n) + \sum_{j=n}^{n'-1} \mathcal{W}_2(\rho^j, \rho^{j+1}) + \left( \frac{s_2 - n'\tau}{\tau} \right) \mathcal{W}_2(\rho^{n'}, \rho^{n'+1}) \\
 \leq & \left( \frac{n\tau - s_1}{\tau} + (n' - n) + \frac{s_2 - n'\tau}{\tau} \right) \mathcal{W}_2(\rho^0, \rho^1) \\
 \leq & \left( \frac{s_2 - s_1}{\tau} \right) \tau \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} \|u^0(x)\|^2 \rho^0(x) dx} \\
 \leq & (|s_2 - s_1|) C_0.
 \end{aligned}$$

Maintenant, si ce n'est pas le cas, il existe alors un entier  $n$  tel que  $n\tau \leq s_1 \leq s_2 \leq n\tau + \tau$  et on a facilement

$$\mathcal{W}_2(\rho_\tau(s_1), \rho_\tau(s_2)) \leq \left( \frac{|s_2 - s_1|}{\tau} \right) \mathcal{W}_2(\rho_\tau^n, \rho_\tau^{n+1}) \leq |s_2 - s_1| C_0.$$

En conclusion, on obtient bien le résultat voulu dans tous les cas.  $\square$

**Remarque 1.18.** *L'inégalité obtenue est en fait optimale, pour le couple densité/vitesse initial suivant :*

$$\begin{cases} \rho^0(x) = \mathbb{1}_{]0,1[}(x); \\ (\rho u)^0(x) = \mathbb{1}_{]0,1[}(x). \end{cases} \quad (1.12)$$

L'algorithme donne la suite  $\rho^n$  définie comme suit (voir la proposition 1.27) :

$$\rho^n(x) = \mathbb{1}_{]n\tau, 1+n\tau[}(x)$$

et son interpolation ne dépend plus de  $\tau$  :

$$\rho_\tau(t, x) = \mathbb{1}_{]t, 1+t[}(x)$$

on obtient :

$$\mathcal{W}_2(\rho_\tau(s_1), \rho_\tau(s_2)) = |s_1 - s_2| = |s_1 - s_2| \sqrt{\int_{\mathbb{R}} u^0(x)^2 \rho^0(x) dx}.$$

**Lemme 1.19.** *Si  $t \in [n\tau, n\tau + \tau]$ , alors*

$$\mathcal{M}_2(\rho_\tau(t)) \leq \left( \frac{n\tau + \tau - t}{\tau} \right) \mathcal{M}_2(\rho^n) + \left( \frac{t - n\tau}{\tau} \right) \mathcal{M}_2(\rho^{n+1}).$$

*Démonstration.* En utilisant la convexité de  $x \rightarrow \|x\|^2$  on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_2(\rho_\tau(t)) &:= \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 \rho_\tau(t, x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 (T_\tau^{n+1}(t))_\# \rho^{n+1}(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left\| \left( \frac{t-n\tau}{\tau} \right) x + \left( \frac{n\tau + \tau - t}{\tau} \right) \mathbf{t}^{n+1}(x) \right\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \\
 &\leq \left( \frac{t-n\tau}{\tau} \right) \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 \rho^{n+1}(x) dx + \left( \frac{n\tau + \tau - t}{\tau} \right) \int_{\mathbb{R}^d} \|\mathbf{t}^{n+1}(x)\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \\
 &= \left( \frac{t-n\tau}{\tau} \right) \mathcal{M}_2(\rho^{n+1}) + \left( \frac{n\tau + \tau - t}{\tau} \right) \mathcal{M}_2(\rho^n).
 \end{aligned}$$

□

Ce lemme et la proposition 1.14 page 28 nous permettent d'assurer que pour tout temps  $t$ , la famille  $(\rho_\tau(t))_{\tau>0}$  des suites d'interpolées au temps  $t$  est  $\tau$ -uniformément bornée.

En utilisant cette dernière propriété et le caractère  $\tau$ -uniformément lipschitz des courbes  $\rho_\tau$ , le théorème d'Ascoli-Arzelà nous permet d'extraire une sous-suite (que l'on note  $\tau_h$ ) telle que :

$$\rho_{\tau_h} \rightharpoonup \rho \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d).$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la suite d'interpolée de la vitesse et à ses propriétés.

**Proposition 1.20.** *Soit  $t \in [n\tau, n\tau + \tau]$  on définit*

$$u_\tau(t) = u^{n+1} \circ \left( T_\tau^{n+1}(t, \cdot) \right)^{-1} \in L^2_{\rho_\tau(t)},$$

alors la vitesse  $u_\tau(t)$  est bien définie comme un élément de  $L^2_{\rho_\tau(t)}$  de plus :

$$\|u_\tau(t)\|_{L^2_{\rho_\tau(t)}} = \|u^{n+1}\|_{L^2_{\rho^{n+1}}}.$$

*Démonstration.* Tout d'abord,  $T_\tau^{n+1}(t, \cdot) : \text{spt}(\rho^{n+1}) \rightarrow \text{spt}(\rho_\tau(t))$  est bien une application bijective pour tout  $t \in [n\tau, n\tau + \tau]$ , pour cela on peut remarquer que :

$$\langle T_\tau^{n+1}(t, x) - T_\tau^{n+1}(t, y), x - y \rangle \geq \frac{t-n\tau}{\tau} \|x - y\|^2$$

de plus,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} \|u_\tau(t, x)\|^2 \rho_\tau(t, x) dx &:= \int_{\mathbb{R}^d} \|u^{n+1}(t, (T_\tau^{n+1}(t, x))^{-1})\|^2 \rho_\tau(t, x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \|u^{n+1}(x)\|^2 \rho^{n+1}(x) dx.
 \end{aligned}$$

□

**Proposition 1.21.** *Soit  $E_\tau = u_\tau \rho_\tau$  la mesure représentant la quantité de mouvement du système alors :*

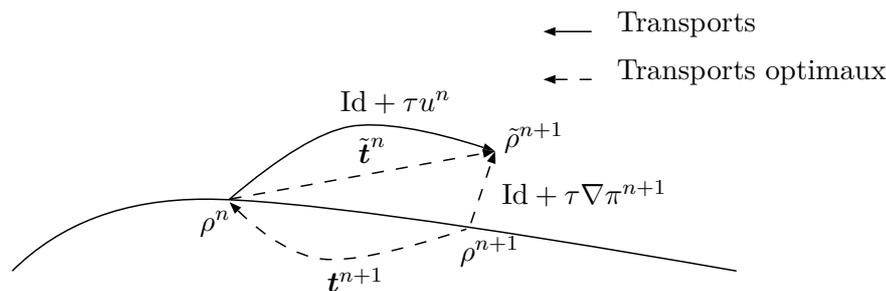


FIGURE 1.7 – Définition de chacun des transports utilisés.

1. la suite  $(u_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}^+}$  est uniformément bornée dans  $L^2([0, T], L^2_{\rho_\tau(t)})$  ;
2.  $(E_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}^+} := (u_\tau \rho_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}^+}$  est une suite de mesures uniformément bornée.

*Démonstration.* 1. Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $N\tau = T$ , on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \|u_\tau(t, x)\|^2 \rho_\tau(t, x) dx dt &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{j\tau}^{j\tau+\tau} \int_{\mathbb{R}^d} \|u_\tau(t, x)\|^2 \rho_\tau(t, x) dx dt \\
 &= \tau \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}^d} \|u^{n+1}(x)\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \\
 &\leq N\tau \int_{\mathbb{R}^d} \|u^0(x)\|^2 \rho^0(x) dx \\
 &= TC_0^2.
 \end{aligned}$$

2. On a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \|u_\tau(t, x)\| \rho_\tau(t, x) dx dt &\leq \sqrt{\int \int \|u_\tau\|^2 \rho_\tau dx dt} \sqrt{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\tau dx dt} \\
 &= \sqrt{C_0^2 T} \sqrt{T} \\
 &\leq C_0 T.
 \end{aligned}$$

□

Cette dernière propriété nous permet d'extraire de la suite  $(E_{\tau_h})_{h>0}$  une sous-suite qui converge faiblement au sens des mesures de  $[0, T] \otimes \mathbb{R}^d$ .

## 1.2.4 Équation vérifiée par les suites d'interpolées

À partir de là, on se place en dimension 1, nous allons voir comment les suites d'interpolées se comportent vis-à-vis des équations des gaz sans pression avec contrainte de congestion (1.6) page 24. Comme attendu, la vitesse transporte les densités.

**Proposition 1.22.** *Soit  $\tau > 0$ , le couple  $(\rho_\tau, u_\tau)$  est solution faible de l'équation de transport avec pour vitesse celle définie dans la proposition 1.20.*

*Démonstration.* Soient  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbb{R})$  et  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $N\tau \leq T < (N+1)\tau$  alors

$$\begin{aligned}
 & \langle \rho_\tau, \partial_t \phi \rangle + \langle \rho_\tau u_\tau, \partial_x \phi \rangle \\
 = & \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_t \phi(t, x) \rho_\tau(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_x \phi(t, x) \rho_\tau(t, x) u_\tau(t, x) dx dt \\
 = & \sum_{n=0}^N \left( \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \int_{\mathbb{R}} [\partial_t \phi(t, x) + u_\tau(t, x) \partial_x \phi(t, x)] (T_\tau^{n+1}(t, x)) \# \rho^{n+1}(x) dx dt \right) \\
 = & \sum_{n=0}^N \left( \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \int_{\mathbb{R}} \left[ \partial_t \phi(t, T_\tau^{n+1}(t, x)) + u_\tau(t, T_\tau^{n+1}(t, x)) \partial_x \phi(t, T_\tau^{n+1}(t, x)) \right] \rho^{n+1}(x) dx dt \right) \\
 = & \sum_{n=0}^N \left( \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \int_{\mathbb{R}} \left[ \partial_t \phi(t, T_\tau^{n+1}(t, x)) + u^{n+1}(x) \partial_x \phi(t, T_\tau^{n+1}(t, x)) \right] \rho^{n+1}(x) dx dt \right)
 \end{aligned}$$

or,  $\frac{d}{dt}(T_\tau^{n+1}(t, x)) = u^{n+1}(x)$  ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
 & \langle \rho_\tau, \partial_t \phi \rangle + \langle \rho_\tau u_\tau, \partial_x \phi \rangle \\
 = & \sum_{n=0}^N \left( \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{d}{dt} \phi(t, T_\tau^{n+1}(t, x)) \right] \rho^{n+1}(x) dx dt \right) \\
 = & \sum_{n=0}^N \left( \int_{\mathbb{R}} \left[ \phi(n\tau + \tau, T_\tau^{n+1}(n\tau + \tau, x)) - \phi(n\tau, T_\tau^{n+1}(n\tau, x)) \right] \rho^{n+1}(x) dx dt \right) \\
 = & \sum_{n=0}^N \left( \int_{\mathbb{R}} \left[ \phi(n\tau + \tau, x) - \phi(n\tau, \mathbf{t}^{n+1}(x)) \right] \rho^{n+1}(x) dx dt \right).
 \end{aligned}$$

De plus, en utilisant que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(n\tau, \mathbf{t}^{n+1}(x)) \rho^{n+1}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(n\tau, x) \rho^n(x) dx$$

on obtient finalement

$$\langle \rho_\tau, \partial_t \phi \rangle + \langle \rho_\tau u_\tau, \partial_x \phi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \phi(0, x) \rho^0(x) dx.$$

□

**Remarque 1.23.** On peut remarquer que la proposition 1.22 est toujours vraie en dimension supérieure. Ceci dit, nous allons voir dans la sous-section suivante que ce schéma n'a que peu d'intérêt au delà de la dimension 1.

On définit  $\mathbf{r}^{n+1}$  le transport optimal entre  $\rho^{n+1}$  et  $\tilde{\rho}^{n+1}$ , on rappelle que, d'après le lemme 1.3 page 17, il existe  $\pi^{n+1} \in \{p \in H_{\rho^{n+1}}^1 \mid p \geq 0, (1 - \rho^{n+1})p = 0\}$  tel que

$$\mathbf{r}^{n+1} = \text{Id} + \tau \nabla \pi^{n+1}.$$

Enfin, notons  $\tilde{\mathbf{t}}^n$  le transport optimal entre  $\rho^n$  et  $\tilde{\rho}^{n+1}$  (voir figure 1.7 page 33). La proposition suivante montre que le couple  $(\rho_\tau, u_\tau)$  est solution d'une version discrète de l'équation de

conservation de la quantité de mouvement avec un terme de consistance et un terme jouant le rôle de gradient de pression.

**Proposition 1.24.** *Pour tout  $\phi \in \mathcal{C}^\infty([0, T[ \times \mathbb{R}), \forall \tau > 0,$*

$$\langle \rho_\tau u_\tau, \partial_t \phi \rangle + \langle \rho_\tau u_\tau^2, \partial_x \phi \rangle - \sum_{n=0}^N \langle \mathcal{P}_n, \phi \rangle + \langle \rho^0 u^0, \phi(0, \cdot) \rangle = \sum_{n=0}^N \langle \epsilon_n, \phi \rangle$$

avec :

- $N \in \mathbb{N}$  tel que  $N\tau \leq T < (N+1)\tau$  ;
- $\langle \epsilon_n, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(n\tau, x) \left[ u^n(x) - \frac{\tilde{\mathbf{t}}^n(x) - x}{\tau} \right] \rho^n(x) dx$  ;
- $\langle \mathcal{P}_n, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(n\tau, \mathbf{t}^{n+1}(x)) \nabla \pi^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) dx$ .

*Démonstration.* Posons  $\mu^{n+1} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$  le plan de transport à trois marginales tel que :

- $\mathbb{X}_{\#}^{2,3} \mu = (\mathbf{r}^{n+1} \otimes \text{Id})_{\#} \rho^{n+1}$  ;
- $\mathbb{X}_{\#}^{1,3} \mu = (\mathbf{t}^{n+1} \otimes \text{Id})_{\#} \rho^{n+1}$ .

En dimension 1, l'application  $\tilde{\mathbf{t}}^n = \mathbf{r}^{n+1} \circ (\mathbf{t}^{n+1})^{-1}$  transporte  $\rho^n$  sur  $\tilde{\rho}^{n+1}$  et est monotone. C'est le transport optimal entre ces deux mesures. En utilisant ce plan, on obtient que

$$\begin{aligned} & \langle \rho_\tau u_\tau, \partial_t \phi \rangle + \langle \rho_\tau u_\tau^2, \partial_x \phi \rangle \\ &= \sum_{n=0}^N \left( \int_{n\tau}^{n\tau+\tau} \int_{\mathbb{R}} \partial_t \phi(t, x) (u_\tau \rho_\tau)(t, x) dx dt + \int_{n\tau}^{n\tau+\tau} \int_{\mathbb{R}} \partial_t \phi(t, x) (u_\tau^2 \rho_\tau)(t, x) dx dt \right) \\ &= \sum_{n=0}^N \left( \int_{n\tau}^{n\tau+\tau} \int_{\mathbb{R}} \left[ \partial_t \phi(t, T_\tau^{n+1}(x)) u^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) + \partial_t \phi(t, T_\tau^{n+1}(x)) u^{n+1}(x)^2 \right] \rho^{n+1}(x) dx dt \right) \\ &= \sum_{n=0}^N \left( \int_{n\tau}^{n\tau+\tau} \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{d}{dt} \phi(t, T_\tau^{n+1}(x)) \right] u^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) dx dt \right) \\ &= \sum_{n=0}^N \left( \int_{\mathbb{R}} \left[ \phi(n\tau + \tau, x) - \phi(n\tau, \mathbf{t}^{n+1}(x)) \right] u^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) dx dt \right) \\ &= -\langle \rho^0 u^0, \phi(0, \cdot) \rangle + \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}} \left[ \phi(n\tau, x) u^n(x) \rho^n(x) - \phi(n\tau, \mathbf{t}^{n+1}(x)) u^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) \right] dx \\ &= -\langle \rho^0 u^0, \phi(0, \cdot) \rangle + \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \phi(n\tau, z) u^n(z) - \phi(n\tau, \mathbf{t}^{n+1}(x)) \left( \frac{x - \mathbf{t}^{n+1}(x)}{\tau} \right) \right] d\mu^{n+1}(z, y, x) \\ &= -\langle \rho^0 u^0, \phi(0, \cdot) \rangle + \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \phi(n\tau, z) u^n(z) - \phi(n\tau, z) \left( \frac{x - z}{\tau} \right) \right] d\mu^{n+1}(z, y, x) \end{aligned}$$

pour finir,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \phi(n\tau, z) u^n(z) - \phi(n\tau, z) \left( \frac{x-z}{\tau} \right) \right] d\mu^{n+1}(z, y, x) \\
 = & \int_{\mathbb{R}^3} \phi(n\tau, z) \left[ u^n(z) - \left( \frac{x-y}{\tau} + \frac{y-z}{\tau} \right) \right] d\mu^{n+1}(z, y, x) \\
 = & \int_{\mathbb{R}^3} \phi(n\tau, z) \left[ u^n(z) - \left( \frac{y-z}{\tau} \right) \right] d\mu^{n+1}(z, y, x) - \int_{\mathbb{R}^3} \phi(n\tau, z) \left( \frac{x-y}{\tau} \right) d\mu^{n+1}(z, y, x) \\
 = & \int_{\mathbb{R}} \phi(n\tau, z) \left[ u^n(z) - \left( \frac{\tilde{\mathbf{t}}^n(z) - z}{\tau} \right) \right] \rho^n(z) dz - \int_{\mathbb{R}^3} \phi(n\tau, z) \left( \frac{x-y}{\tau} \right) d\mu^{n+1}(z, y, x) \\
 = & \int_{\mathbb{R}} \phi(n\tau, z) \left[ u^n(z) - \left( \frac{\tilde{\mathbf{t}}^n(z) - z}{\tau} \right) \right] \rho^n(z) dz + \int_{\mathbb{R}} \phi(n\tau, \mathbf{t}^{n+1}(x)) \nabla \pi^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) dx \\
 = & \langle \epsilon_n, \phi \rangle + \langle \mathcal{P}_n, \phi \rangle.
 \end{aligned}$$

□

Les termes  $\mathcal{P}_n$  correspondent au terme  $\nabla \pi$  des équations de gaz sans pression avec contrainte de congestion (1.6) page 24, définissons  $\mathcal{P}_\tau$  comme suit :

$$\langle \mathcal{P}_\tau, \phi \rangle := \sum_{n=0}^N \langle \mathcal{P}_n, \phi \rangle = \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}} \phi(n\tau, \mathbf{t}^{n+1}(x)) \nabla \pi^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) dx,$$

on peut contrôler l'énergie déployée par  $\mathcal{P}_\tau$  grâce au lemme suivant :

**Lemme 1.25.** *Pour tout  $\tau > 0$ ,  $N \in \mathbb{N} \mid N\tau \leq T < (N+1)\tau$ , on a :*

$$\sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}} \left\| \nabla \pi^{n+1}(x) \right\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \leq C_0^2.$$

*Démonstration.* En utilisant le lemme 1.5, on a

$$\mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n+1})^2 \leq \mathcal{W}_2(\rho^n, \tilde{\rho}^{n+1})^2 - \mathcal{W}_2(\tilde{\rho}^{n+1}, \rho^{n+1})^2$$

et par conséquent,

$$\mathcal{W}_2(\tilde{\rho}^{n+1}, \rho^{n+1})^2 \leq \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n-1})^2 - \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n+1})^2,$$

car

$$\mathcal{W}_2(\rho^n, \tilde{\rho}^{n+1}) \leq \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n-1}).$$

On obtient

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}} \left\| \nabla \pi^{n+1}(x) \right\|^2 \rho^{n+1}(x) dx & \leq \frac{1}{\tau^2} \sum_{n=0}^N \left( \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n-1})^2 - \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n+1})^2 \right) \\
 & \leq \frac{\mathcal{W}_2(\rho^0, \rho^1)^2}{\tau^2} \\
 & \leq C_0^2.
 \end{aligned}$$

□

Cependant, contrôler cette énergie semble insuffisant pour obtenir une quelconque convergence du terme  $\mathcal{P}_\tau$ . Par exemple, on ne peut obtenir ainsi que la mesure est  $\tau$ -uniformément bornée en espace-temps.

Les termes  $\epsilon_n$  sont dus aux erreurs commises sur la vitesse à chaque pas de temps. En effet, le transport optimal entre  $\rho^{n+1}$  et  $\rho^n$  ne représente pas le réel transport des particules entre ces deux densités mais un réarrangement de celles-ci pour éviter toutes collisions entre particules.

Il est difficile de dire si la somme des termes  $\epsilon_n$  converge vers 0 dans un certain espace. Le lemme suivant, prouvé dans [2] (chapitre 8) va en ce sens mais ne nous permet pas de le démontrer.

**Lemme 1.26.** *Soit  $\rho \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ,  $\tilde{\rho}_\tau = (Id + \tau v)_\# \rho$  et  $\mu_\tau \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^2)$  le plan de transport optimal entre les deux mesures défini à l'aide de l'application  $Id + \tau v$ , alors*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{x,y \in \mathbb{R}} \left\| \frac{y - x - \tau v(x)}{\tau} \right\|^2 d\mu_\tau(x, y) = 0.$$

Ce qui nous permet de dire que si la densité  $\rho^n$  était fixée et ne dépendait plus de  $\tau$

$$\epsilon_n \xrightarrow{L_{\rho^n}^2} 0.$$

Cependant, nous n'aurions toujours rien sur la somme des termes  $\epsilon_n$ . À défaut d'obtenir la convergence de ce schéma en 1D, un moyen d'observer le bon comportement de ces solutions vis-à-vis des équations (15) est de calculer les solutions obtenues lorsque la donnée initiale doit engendrer une solution de type sticky blocks. En effet, il a été démontré dans [11] que cette classe de solutions était assez riche pour passer à la limite faible dans (9). Par conséquent, il s'avère utile de calculer les solutions de notre schéma dans le cas où la donnée initiale est une collection de blocs avec un champ des vitesses constant par blocs.

### 1.2.5 Cadre des sticky blocks

A titre d'exemple, nous allons étudier le schéma dans le cas où le couple  $(\rho^0, u^0)$  est donné par

$$\begin{aligned} \rho^0 &= \mathbb{1}_{[-L_G, 0]} + \mathbb{1}_{[e, e+L_D]}, \\ (\rho u)^0 &= u_G \mathbb{1}_{[-L_G, 0]} + u_D \mathbb{1}_{[e, e+L_D]}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

où  $L_G > 0$  représente la taille du bloc de gauche,  $L_D > 0$  celle du bloc de droite et  $e \geq 0$  est la distance séparant les deux blocs.

**Proposition 1.27.** *Soit  $(\rho^0, u^0)$  le couple densité/vitesse de (1.13), alors si l'écart entre les deux blocs est plus grand que leurs déplacements durant  $\tau$  :  $e > \tau(u_G - u_D)$ , les deux blocs se déplacent à leurs vitesses respectives durant le pas de temps  $\tau$  et les particules conservent*

leurs vitesses :

$$\begin{aligned}\rho^1 &= \mathbb{1}_{[-L_G + \tau u_G, +\tau u_G]} + \mathbb{1}_{[e + \tau u_D, e + L_D + \tau u_D]}, \\ (\rho u)^1 &= u_G \mathbb{1}_{[-L_G + \tau u_G, +\tau u_G]} + u_D \mathbb{1}_{[e + \tau u_D, e + L_D + \tau u_D]}.\end{aligned}$$

*Démonstration.* On applique les étapes du schéma 1 au couple densité/vitesse donné.

$$\tilde{\rho}^1 = (\text{Id} + \tau u^0) \# \rho^0 = \mathbb{1}_{[-L_G + \tau u_G, +\tau u_G]} + \mathbb{1}_{[e + \tau u_D, e + L_D + \tau u_D]}$$

et comme  $e > \tau(u_G - u_D)$  on a bien que  $[-L_G + \tau u_G, +\tau u_G] \cap [e + \tau u_D, e + L_D + \tau u_D] = \emptyset$  et par conséquent  $\tilde{\rho}^1 \in K$  et  $\rho^1 = \tilde{\rho}^1$ . Le transport optimal  $(\mathbf{t}^1)^{-1}$  entre  $\rho^0$  et  $\rho^1$  étant monotone, il envoie le bloc de gauche et de droite sur son translaté de  $\tau u_G$  et de  $\tau u_D$  respectivement et la nouvelle vitesse  $u^1 = \frac{\text{Id} - \mathbf{t}^1}{\tau}$  donne aux blocs une vitesse de  $u_G$  et  $u_D$ .  $\square$

**Proposition 1.28.** Soit  $(\rho^0, u^0)$  le couple densité/vitesse de (1.13),  $t \rightarrow (\rho(t), u(t))$  la solution exacte des équations (9) (page 5) donnée par l'approche sticky blocks avec  $(\rho(0), u(0)) = (\rho^0, u^0)$ , alors si l'écart entre les deux blocs est plus petit que leurs déplacements durant  $\tau$  :  $e < \tau(u_G - u_D)$ , les deux blocs vont entrer en collision. Si le pas de temps est assez petit  $\tau(u_G - u_D) < \frac{\min(L_G, L_D)}{2}$  au bout de deux étapes nous obtenons :

- $u^2 = u(2\tau)$  ;
- $\mathcal{W}_2(\rho(2\tau), \rho^2) = 0$  .

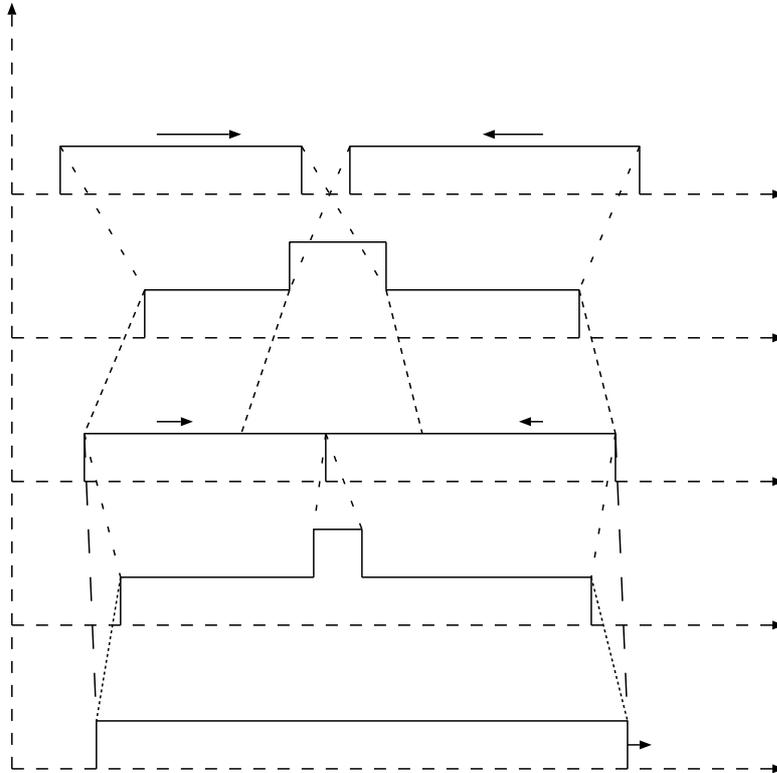


FIGURE 1.8 – Résultats obtenus en appliquant le schéma 1 au couple densité/vitesse initial de la proposition 1.28.

*Démonstration.* Comme dans la preuve précédente, on va appliquer le schéma à  $\rho^0$ , si  $\tau(u_G - u_D) < \frac{\min(L_G, L_D)}{2}$ , on obtient

$$\tilde{\rho}^1 = (\text{Id} + \tau u^0)_{\#} \rho^0 = \mathbb{1}_{[-L_G + \tau u_G, +\tau u_G]} + \mathbb{1}_{[e + \tau u_D, e + L_D + \tau u_D]}$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\rho}^1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-L_G + \tau u_G, e + \tau u_D], \\ 2 & \text{si } x \in [e + \tau u_D, \tau u_G], \\ 1 & \text{si } x \in [\tau u_G, L_D + e + \tau u_D], \end{cases}$$

posons  $\Delta u = u_G - u_D$ , d'après la proposition 1.6 page 21 on obtient alors

$$\rho^1 = \mathbb{1}_{[-L_G + \tau u_G - d_1, L_D + \tau u_G - d_1]}$$

avec

$$d_1 = \frac{(\tau \Delta u - e)L_D}{L_G + L_D}.$$

Maintenant, le transport optimal  $\mathbf{t}^1$  entre  $\rho^1$  et  $\rho^0$  étant monotone, il transporte la partie gauche et la partie droite du bloc de  $\rho^1$  sur le bloc de gauche et de droite de  $\rho^0$  respectivement, ainsi

$$\left( \frac{\text{Id} - \mathbf{t}^1}{\tau} \right) (x) = \begin{cases} u_G - \frac{d_1}{\tau} & \text{si } x \in [-L_G + \tau u_G - d_1, +\tau u_G - d_1], \\ u_D + \Delta u - \frac{e + d_1}{\tau} & \text{si } x \in [+ \tau u_G - d_1, L_D + \tau u_G - d_1]. \end{cases}.$$

On remarque que  $\left( u_G - \frac{d_1}{\tau} \right) - \left( u_D + \Delta u - \frac{e + d_1}{\tau} \right) = \frac{e}{\tau}$ , le bloc est divisé en deux parties n'ayant pas la même vitesse. La différence de vitesse correspond à la distance séparant les deux blocs initialement divisée par le pas de temps. On applique une seconde fois le schéma,

$$\tilde{\rho}^2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-L_G + 2\tau u_G - 2d_1, +2\tau u_G - 2d_1 - e], \\ 2 & \text{si } x \in [+2\tau u_G - 2d_1 - e, +2\tau u_G - 2d_1], \\ 1 & \text{si } x \in [+2\tau u_G - 2d_1, L_D + 2\tau u_G - 2d_1 - e], \end{cases}$$

et  $\rho^2 = \mathbb{1}_{[-L_G + 2\tau u_G - 2d_1 - d_2, L_D + 2\tau u_G - 2d_1 - d_2]}$  avec

$$d_2 = \frac{eL_D}{L_G + L_D}.$$

Comme les densités  $\rho^2$  et  $\rho^1$  sont formées d'un unique bloc, le transport optimal  $\mathbf{t}^2$  entre les

deux est une translation, donc la vitesse  $\frac{\text{Id} - \mathbf{t}^2}{\tau}$  est constante sur tout le bloc et vaut :

$$\begin{aligned} &= \frac{x - \mathbf{t}^2(x)}{\tau} \\ &= u_G - \frac{d_1 + d_2}{\tau} \\ &= \frac{L_G u_G + L_D u_D}{L_G + L_D}. \end{aligned}$$

De plus, nous avons la solution exacte donnée par l'approche sticky blocks

$$\rho(2\tau) = \mathbb{1}_{[-L_G + \frac{e}{\Delta u} u_G + (2\tau - \frac{e}{\Delta u}) \frac{L_G u_G + L_D u_D}{L_G + L_D}, L_D + \frac{e}{\Delta u} u_G + (2\tau - \frac{e}{\Delta u}) \frac{L_G u_G + L_D u_D}{L_G + L_D}]}.$$

Posons  $c = \frac{e}{\tau \Delta u} \in [0, 1[$ , comme  $\rho^2$  est aussi un bloc (l'indicatrice d'un intervalle), le transport optimal entre les deux mesures est une translation d'amplitude :

$$\begin{aligned} \Delta &= \left( -L_G + (2\tau - ct) \frac{u_G L_G + L_D u_D}{L_G + L_D} + c\tau u_G \right) - (-L_G + 2\tau u_G - 2d_1 - d_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où  $\mathcal{W}_2(\rho(2\tau), \rho^2) = 0$ . □

**Remarque 1.29.** *Le schéma va "coller" les deux blocs dès le premier pas de temps, mais comme ceux-ci n'ont pas parcouru la même distance, ils ont des vitesses différentes au premier pas de temps. Le deuxième pas permet d'uniformiser la vitesse sur tout le bloc. Cette dernière constatation couplée au fait que le schéma conserve la quantité de mouvement suffit à prouver cette proposition, nous nous en servirons dans le second cas avec plusieurs collisions.*

Le schéma possède un bon comportement vis à vis de la collision de deux blocs saturés. En fait, c'est aussi le cas vis-à-vis de la collision de plusieurs blocs entre-eux au même pas de temps si celui-ci est plus petit que  $\frac{\min(L_i)}{2\|v\|_\infty}$ , où  $L_i$  représente la longueur des blocs saturés.

**Proposition 1.30.** *Soit le couple densité/quantité de mouvement  $(\rho^0, \rho^0 u^0)$  suivant :*

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \sum_{i=0}^N \mathbb{1}_{[\Sigma_i + E_i, \Sigma_{i+1} + E_i]}, \\ (\rho u)(x) &= \sum_{i=0}^N u_{i+1} \mathbb{1}_{[\Sigma_i + E_i, \Sigma_{i+1} + E_i]}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

avec  $E_0 = 0$  et  $E_{i+1} - E_i = e_{i+1} \geq 0$  correspond à la distance entre deux blocs saturés,  $\Sigma_0 = 0$  et  $\Sigma_{i+1} - \Sigma_i = L_i > 0$  représente la longueur des blocs (voir figure 1.9). Définissons le couple  $(\rho, u)$  solution des équations des gaz sans pression (9) suivant l'approche sticky blocks avec

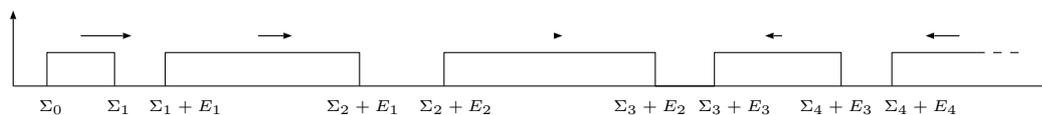


FIGURE 1.9 – Densité de la proposition 1.30.

conditions initiales  $(\rho^0, u^0)$ . On obtient les deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_2(\rho^2, \rho(2\tau)) = 0, \\ u^2 = u(2\tau). \end{cases}$$

*Démonstration.* Si  $\tau \leq \frac{\min(L_i)}{2\|v\|_\infty}$  alors  $\tilde{\rho}^1$  est une collection de blocs congestionnés de taille :

$$L_i - \tau(\Delta U_i + \Delta U_{i-1}) + e_i + e_{i-1} \geq L_i - \min(L_i) \geq 0$$

séparés par des blocs de densité égale à 2 et de taille :

$$\tau \Delta U_i - e_i$$

avec  $e_i = 0$  si  $i \notin \{0, \dots, N\}$ . Comme  $\tilde{\rho}^1$  ne possède qu'une seule composante connexe où la densité est congestionnée ou surcongestionnée, la projection de  $\tilde{\rho}^1$  sur  $K$  est l'indicatrice d'un intervalle. Le transport optimal entre  $\rho^1$  et  $\rho^0$  étant monotone, il conserve l'ordre qu'avaient les particules initialement : la partie la plus à gauche du bloc représentant  $\rho^1$  est envoyée sur le bloc le plus à gauche de  $\rho^0$ , de taille  $L_1$  et ainsi de suite. Comme au départ, les blocs étaient séparés par un espace vide de particules de longueur  $e_i$ ,  $\rho^1$  ne possède pas une vitesse uniforme. Il est constitué de blocs de longueur  $L_i$  ayant un écart de vitesse avec celui de droite de  $\frac{e_i}{\tau}$ . La densité  $\tilde{\rho}^2$  a la même configuration que  $\tilde{\rho}^1$ , il est constitué de blocs congestionnés de taille :

$$L_i - e_i - e_{i-1} \geq L_i - \tau(\Delta U_i + \Delta U_{i-1}) \geq 0$$

séparés par des blocs surcongestionnés de densité 2 et de taille  $e_i$ . La projection sur  $K$  nous redonne un unique bloc congestionné (l'indicatrice d'un intervalle) et le transport optimal entre  $\rho^2$  et  $\rho^1$  est une translation, ce qui permet au bloc constituant  $\rho^2$  d'avoir une vitesse uniforme. De plus, comme le schéma conserve la quantité de mouvement, il est clair que la vitesse de l'unique bloc constituant  $\rho^2$  est la vitesse permettant de conserver la quantité de mouvement. De plus, le centre de masse se déplaçant à cette vitesse, il se trouve à la même position sur  $\rho^2$  et  $\rho(2\tau)$ . Ainsi, on obtient :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_2(\rho^2, \rho(2\tau)) = 0, \\ u^2 = u(2\tau). \end{cases}$$

□

Cette dernière propriété nous permet d'affirmer que les solutions calculées par le schéma

converge vers la solution sticky blocks. De plus, cette famille de solutions est suffisante pour construire des solutions dans un cadre plus général décrit dans [11].

Malgré le manque d'une analyse complète du schéma, les résultats que nous obtenons nous laissent penser que le schéma 1 possède un bon comportement vis-à-vis des équations des gaz sans pression avec contrainte de congestion (eq. (9) page 5) dans le cas de la dimension 1. Ceci dit, nous allons montrer que ce schéma possède des problèmes en dimension supérieure qui nécessitent l'élaboration d'une stratégie alternative.

### 1.2.6 Le problème de la dimension supérieure

Dans cette sous-section, nous allons voir qu'il paraît impossible que les suites d'interpolées du schéma 1 approchent des solutions des équations des gaz sans pression avec contrainte de congestion (15) en dehors du cadre de la dimension 1. Tout d'abord, revenons à la définition de la nouvelle vitesse :

$$u^{n+1} = \frac{\text{Id} - \mathbf{t}^{n+1}}{\tau},$$

comme  $\mathbf{t}^{n+1}$  est un transport optimal, il est le gradient d'une fonction convexe, par conséquent, la nouvelle vitesse  $u^{n+1}$  semble a fortiori un gradient et ne peut correspondre à la vitesse de la solution si celle-ci n'en est pas un.

Prenons pour exemple en dimension 2, le couple densité/vitesse initial suivant (voir Figure 1.10) :

$$\begin{cases} \rho^0(r, \theta) = \mathbb{1}_{B(0,1/\pi)}(r, \theta), \\ u^0(r, \theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta)), \end{cases} \quad (1.15)$$

défini avec les coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . On remarque que le champ des vitesses est invariant par rapport à toute rotation autour du centre 0. Il en suit que  $\tilde{\rho}^{n+1}$  est une densité ne dépendant que du rayon  $r$ . De même, le projeté  $\rho^{n+1}$  et, par conséquent le déplacement  $\text{Id} - \mathbf{t}^{n+1}$  dépendent que de  $r$  également. La nouvelle vitesse est donc exclusivement radiale et n'est en rien reliée à la vitesse initiale.

Il convient donc de définir un nouveau schéma qui contraindrait moins le champ des vitesses que le premier. Une manière naturelle de définir le nouveau champ des vitesses serait d'utiliser les applications de transport de chacune des étapes du schéma afin de suivre le parcours réel des particules au fil des différentes étapes du schéma. C'est autour de cette idée qu'a été construit le second schéma dont nous allons parler dans la section suivante.

## 1.3 Schéma 2

Cette section est consacrée au second schéma discrétisé en temps que nous avons proposé et étudié durant ma thèse. Il pose les bases du schéma que nous avons finalement adopté (décrit au chapitre suivant). La sous-section 1.3.1 sert à la description du schéma et aux propriétés importantes de celui-ci. La sous-section 1.3.2 montre que les suites d'interpolées

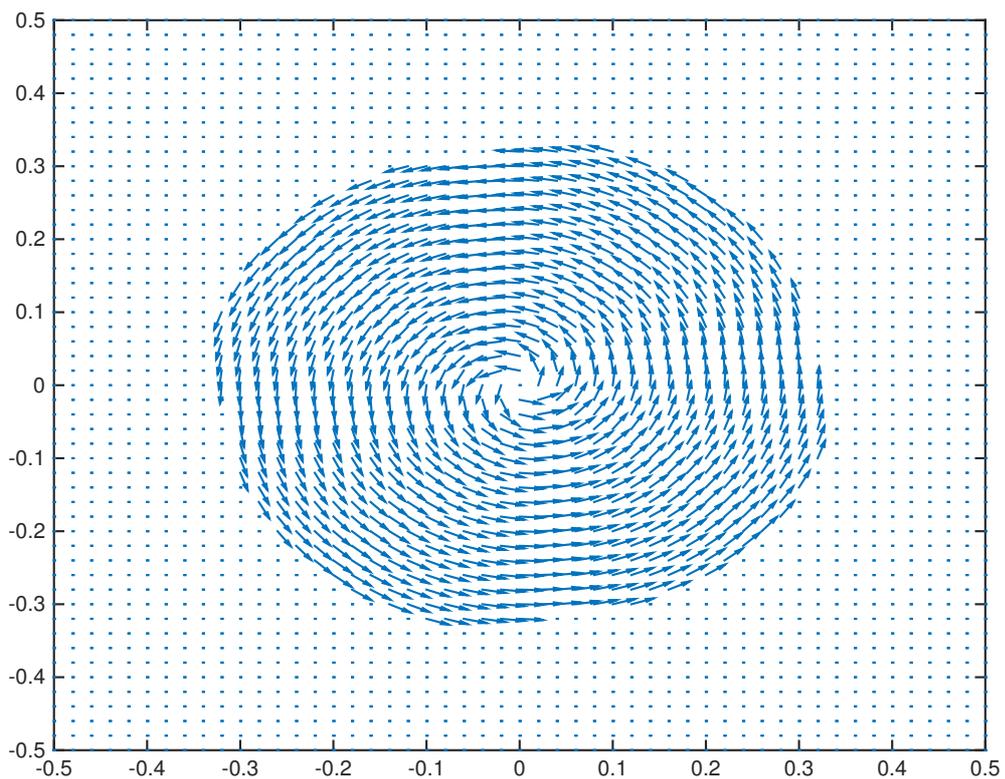
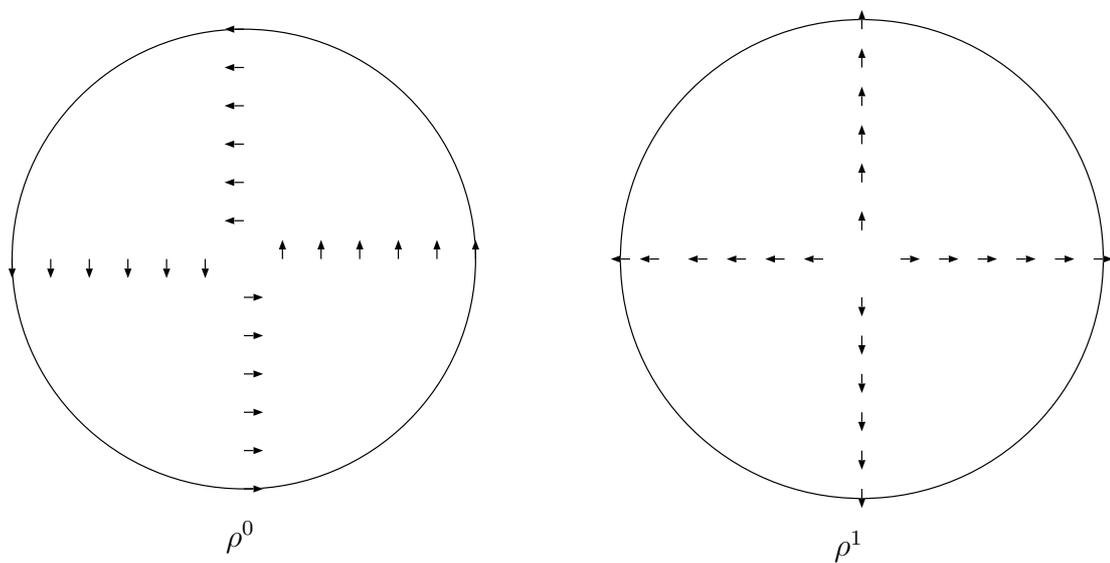


FIGURE 1.10 – Contre-exemple en dimension 2 pour le schéma 1, en haut la solution proposée par le schéma 1, en bas, une représentation numérique de la solution  $\rho(\tau)$  avec  $\Delta x = 0.02$  et  $\tau = 0.01$ .

suivent un système d'équations similaire à (1.6). Cependant, ce schéma ne prend pas en compte correctement les collisions entre les particules ce qui nous amènera au schéma final.

### 1.3.1 Description du schéma

Avant de donner explicitement le schéma, nous avons besoin de définir certains objets utiles. Supposons que la densité  $\rho^{n+1}$  soit calculée à partir de  $\rho^n$  de la même manière que le schéma 1 page 25. On peut définir  $s^{n+1}$  et  $r^{n+1}$  comme dans la section précédente (voir figure 1.12), c'est-à-dire

$$\begin{cases} s^{n+1} = \text{Id} + \tau u^n, \\ r^{n+1} = \text{Id} + \tau \nabla \pi^{n+1}. \end{cases} \quad (1.16)$$

Ainsi,  $s^{n+1}$  représente un transport de  $\rho^n$  à  $\tilde{\rho}^{n+1}$  et  $r^{n+1}$  est le transport optimal entre  $\rho^{n+1}$  et  $\tilde{\rho}^{n+1}$ . À partir de là, on peut définir deux plans de transport, l'un entre  $\rho^n$  et  $\tilde{\rho}^{n+1}$  et l'autre de  $\tilde{\rho}^{n+1}$  à  $\rho^{n+1}$ .

**Définition 1.31.** *On définit les plans de transport suivants :*

1.  $\mu_s^{n+1} = (\text{Id} \otimes s^{n+1})_{\#} \rho^n \in \Gamma(\rho^n, \tilde{\rho}^{n+1})$  ;
2.  $\mu_r^{n+1} = (r^{n+1} \otimes \text{Id})_{\#} \rho^{n+1} \in \Gamma(\tilde{\rho}^{n+1}, \rho^{n+1})$  ;

où  $\mu = (r \otimes s)_{\#} \rho$  est un plan de transport entre ces deux marginales  $r_{\#} \rho$  et  $s_{\#} \rho$  défini comme suit : pour toute fonction  $f$  mesurable :

$$\int_{(x,y) \in \mathbb{R}^d} f(x,y) d\mu(x,y) = \int_{z \in \mathbb{R}^d} f(r(z), s(z)) d\rho(z).$$

On rappelle que  $\Gamma(\rho, \nu) = \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d}) \mid \mathbb{X}_{\#}^1 \mu = \rho, \mathbb{X}_{\#}^2 \mu = \nu\}$  défini l'ensemble des plans de transport entre  $\rho$  et  $\nu$  (voir l'annexe A pour plus de détails).

En utilisant ces deux plans de transport, on peut définir les plans de transport dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{3d})$  qui respectent le déplacement des particules entre  $\rho^n$ ,  $\tilde{\rho}^{n+1}$  et  $\rho^{n+1}$ . C'est-à-dire, un plan à trois marginales dont le déplacement des particules entre  $\rho^n$  et  $\tilde{\rho}^{n+1}$  est donné par le transport  $s^{n+1}$  et celui entre  $\rho^{n+1}$  et  $\tilde{\rho}^{n+1}$  donné par  $r^{n+1}$  (voir figure 1.11 page 45). L'existence d'un tel plan à trois marginales est prouvée par ce qu'on appelle communément le gluing lemma :

**Lemme 1.32** (Gluing). *Il existe un plan  $\tilde{\mu}^{n+1} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{3d})$  tel que :*

1.  $\int_{x \in \mathbb{R}^d} d\tilde{\mu}^{n+1}(z, y, x) = d\mu_s^{n+1}(z, y)$  ;
2.  $\int_{z \in \mathbb{R}^d} d\tilde{\mu}^{n+1}(z, y, x) = d\mu_r^{n+1}(y, x)$  ;
3.  $\int_{y \in \mathbb{R}^d} d\tilde{\mu}^{n+1}(z, y, x) = d\mu^{n+1}(z, x)$ , avec  $\mu^{n+1} \in \Gamma(\rho^n, \rho^{n+1})$ .

Le preuve de ce lemme est donnée notamment dans [63] chapitre 5 (page 164, voir aussi annexe A). L'unicité d'un tel transport est obtenue si et seulement si  $s^{n+1}$  ou  $r^{n+1}$  est bijective. La figure 1.11 nous donne un exemple où il n'y a pas unicité d'un tel plan : les particules

situées en  $z_1$  et  $z_2$  se déplacent en  $y$  ( $s^{n+1}(z_1) = s^{n+1}(z_2) = y$ ), puis une partie de ces particules se déplace en  $x_1$ , une autre en  $x_2$  ( $r^{n+1}(x_1) = r^{n+1}(x_2) = y$ ). Maintenant, on ne peut pas reconstruire le déplacement des particules entre  $\rho^n$  et  $\rho^{n+1}$  car une partie de l'information a été perdue : on ne peut distinguer si les particules qui se situent en  $x_1$  provenaient de  $z_1$  ou de  $z_2$ .

Nous allons décrire un schéma qui permet de construire des suites de couple densité/vitesse  $(\rho^n, u^n)$  dans le but d'approcher les solutions des équations (15) page 9. Il aboutira à l'élaboration du schéma que nous avons adopté.

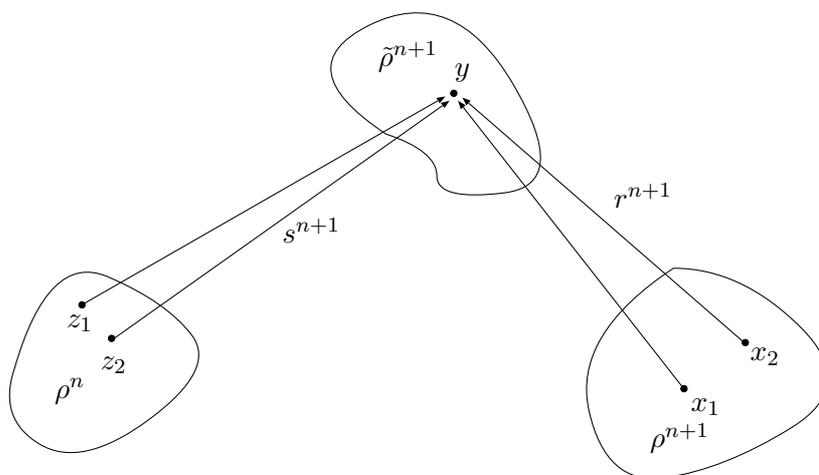


FIGURE 1.11 – Situation où le plan  $\mu^{n+1}$  n'est pas défini de manière unique.

On rappelle qu'aucune hypothèse ne nous permet d'affirmer que le plan  $\tilde{\mu}^{n+1}$  est défini de manière unique. Ceci dit, supposons qu'il le soit ou que l'on donne un procédé permettant de sélectionner de manière unique le plan  $\tilde{\mu}^{n+1}$ . Nous allons voir que sous cette condition, le schéma est bien défini et a de bonnes propriétés :

**Schéma 2.** Soit  $(\rho^0, u^0)$  un couple densité/vitesse initial donné,  $\tau > 0$  un pas de temps fixé. À partir de  $(\rho^n, u^n)$ , le schéma calcule  $(\rho^{n+1}, u^{n+1})$  de la manière suivante

$$\begin{cases} \tilde{\rho}^{n+1} = (Id + \tau u^n) \# \rho^n, \\ \rho^{n+1} = \mathbb{P}_K^{\mathbb{W}_2}(\tilde{\rho}^{n+1}), \\ u^{n+1} = dE^{n+1}/d\rho^{n+1}, \end{cases} \quad (1.17)$$

avec

- $E^{n+1} = \int_{z \in \mathbb{R}^d} \left( \frac{x - z}{\tau} \right) d\mu^{n+1}(z, x)$  ;
- $\mu^{n+1}$  ayant les propriétés du lemme 1.32.

**Remarque 1.33.** Le lemme de désintégration de mesure (voir l'annexe A page 180) nous permet d'affirmer que  $E^{n+1}$  est absolument continue par rapport à  $\rho^{n+1}$ . En effet, soit  $\xi$  :

$\mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  tel que :

$\forall \phi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{2d})$ , on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(z, x) d\mu^{n+1}(z, x) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(z, x) d\xi_x(z) \rho^{n+1}(x) dx \quad (1.18)$$

on a donc

$$u^{n+1}(x) = \int_{z \in \mathbb{R}^d} \left( \frac{x - z}{\tau} \right) d\xi_x(z). \quad (1.19)$$

**Proposition 1.34.** Soit un couple densité vitesse  $(\rho^n, u^n) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \times L^2_{\rho^n}$  et  $\tilde{\mu}^{n+1} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{3d})$  ayant les propriétés du gluing lemma (voir lemme 1.32), alors le procédé calcule un unique couple  $(\rho^{n+1}, u^{n+1}) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \times L^2_{\rho^{n+1}}$ .

*Démonstration.* Commençons par prouver que  $u^{n+1} \in L^2_{\rho^{n+1}}$ , en utilisant l'inégalité de Jensen et les notations du lemme 1.32, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{x \in \mathbb{R}^d} \|u^{n+1}(x)\| \rho^{n+1}(x) dx \\ := & \int_{x \in \mathbb{R}^d} \left\| \int_{z \in \mathbb{R}^d} \left( \frac{x - z}{\tau} \right) d\xi_x(z) \right\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \\ \leq & \int_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{z \in \mathbb{R}^d} \left\| \frac{x - z}{\tau} \right\|^2 d\xi_x(z) \rho^{n+1}(x) dx \\ = & \int_{z, x \in \mathbb{R}^d} \left\| \frac{x - z}{\tau} \right\|^2 d\mu^{n+1}(z, x) \\ \leq & \int_{z, y, x \in \mathbb{R}^d} \left( 2 \left\| \frac{x - y}{\tau} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{y - z}{\tau} \right\|^2 \right) d\tilde{\mu}^{n+1}(z, y, x) \\ = & 2 \int_{x, y \in \mathbb{R}^d} \left\| \frac{x - y}{\tau} \right\|^2 d\mu_r^{n+1}(y, x) + 2 \int_{z, y \in \mathbb{R}^d} \left\| \frac{y - z}{\tau} \right\|^2 d\mu_s^{n+1}(z, y) \\ = & 2 \int_{x \in \mathbb{R}^d} \left\| \nabla \pi^{n+1}(x) \right\|^2 \rho^{n+1}(x) dx + 2 \int_{z \in \mathbb{R}^d} \|u^n(z)\|^2 \rho^n(z) dz \\ \leq & 4 \int_{z, y \in \mathbb{R}^d} \|u^n(z)\|^2 \rho^n(z) dz \end{aligned}$$

car  $\mu_s^{n+1}$  est un plan admissible pour la projection de  $\tilde{\rho}^{n+1}$  sur  $K$  ce qui implique

$$\int_{x \in \mathbb{R}^d} \left\| \nabla \pi^{n+1}(x) \right\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \leq \int_{z \in \mathbb{R}^d} \|u^n(z)\|^2 \rho^n(z) dz. \quad (1.20)$$

Maintenant que nous avons cette estimation pour  $u^{n+1}$  on peut conclure en observant que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2(\rho^{n+1}) & := \int_{x \in \mathbb{R}^d} \|x\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \\ & = \int_{z, x \in \mathbb{R}^d} \|x\|^2 d\mu^{n+1}(z, x) \\ & \leq \int_{z, x \in \mathbb{R}^d} \left( 2 \|x - z\|^2 + 2 \|z\|^2 \right) d\mu^{n+1}(z, x) \\ & = 2\mathcal{M}_2(\rho^n) + 2\tau^2 \left\| u^{n+1} \right\|_{L^2_{\rho^{n+1}}}^2. \end{aligned}$$

□

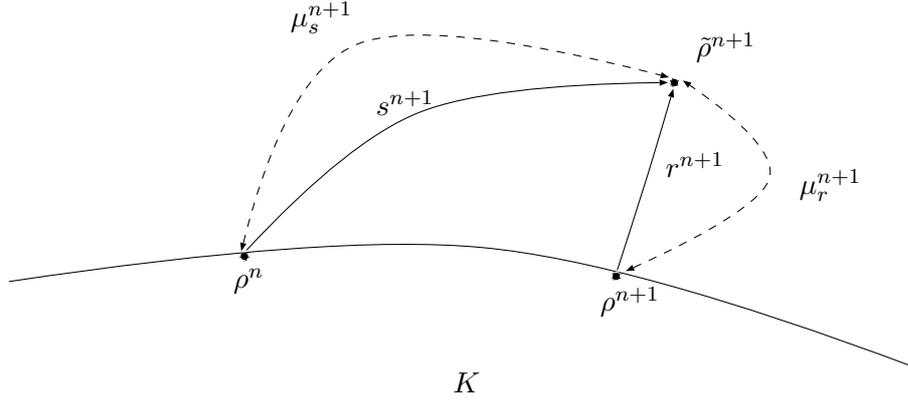


FIGURE 1.12 – Représentation des différents plans de transport du schéma 2

Le lemme suivant permet de voir la nouvelle vitesse au temps  $(n+1)\tau$  en  $x \in \text{spt}(\rho^{n+1})$  comme la somme de deux termes :

- un terme représentant la vitesse résultante de la conservation de la quantité de mouvement de toutes les vitesses des particules arrivant en  $x$  au temps  $n\tau$  ;
- un terme représentant la correction effectuée à la vitesse pour que la densité ne dépasse pas la contrainte de congestion.

**Lemme 1.35** (Décomposition). *Soit  $n \in \mathbb{N}$  on a :*

$$E^{n+1} = -\nabla\pi^{n+1}\rho^{n+1} + \bar{E}^n \quad (1.21)$$

avec  $\bar{E}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u^n(z) d\mu^{n+1}(z, x)$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} E^{n+1}(x) &= \int_{z,y \in \mathbb{R}^d} \left( \frac{x-z}{\tau} \right) d\tilde{\mu}^{n+1}(z, y, x) \\ &= \int_{z,y \in \mathbb{R}^d} \left( \frac{x-y}{\tau} + \frac{y-z}{\tau} \right) d\tilde{\mu}^{n+1}(z, y, x) \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^d} \left( \frac{x-y}{\tau} \right) d\mu_r^{n+1}(y, x) + \int_{z,y \in \mathbb{R}^d} \left( \frac{y-z}{\tau} \right) d\tilde{\mu}^{n+1}(z, y, x) \\ &= -\nabla\pi^{n+1}(x)\rho^{n+1}(x) + \int_{z \in \mathbb{R}^d} u^n(z) d\mu^{n+1}(z, x). \end{aligned}$$

□

**Corollaire 1.36.** *Il y a conservation de la quantité de mouvement, c'est-à-dire :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{x \in \mathbb{R}^d} E^{n+1}(x) dx = \int_{x \in \mathbb{R}^d} E^n(x) dx.$$

*Démonstration.* Tout d'abord, cette intégrale est bien définie car nous avons l'estimation suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|E^n(x)\| dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} \|u^n(x)\|^2 \rho^n(x) dx \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \rho^n(x) dx \right)^{1/2}.$$

De plus, en utilisant le lemme 1.35 on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} E^{n+1}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \pi^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) dx + \int_{z,x \in \mathbb{R}^d} u^n(z) d\mu^{n+1}(z, x) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \pi^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} u^n(z) \rho^n(z) dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} E^n(z) dz
 \end{aligned}$$

par définition de  $\pi^{n+1}$ . □

Par la suite, nous allons voir que nous pouvons définir des suites d'interpolées dans le même esprit que dans la section 1.15 page 29 et qu'elles sont solutions d'un système d'équations similaire à celui des gaz sans pression avec contrainte de congestion.

### 1.3.2 Equations vérifiées par les suites d'interpolées

Rappelons encore qu'avec les hypothèses actuelles, le déplacement des particules ne peut plus être clairement défini dans certains cas. On peut s'en convaincre avec l'exemple suivant (en dimension 2, voir figure 1.13), soit  $\rho^n = \mathbb{1}_{B(0,1/\pi)}$  et  $s^{n+1} = a \in \mathbb{R}^2$ . La densité intermédiaire résultant du déplacement des particules est  $\tilde{\rho}^{n+1} = \delta_a$ . En projetant cette mesure sur  $K$ , on trouve que  $\rho^{n+1} = \mathbb{1}_{B(a,1/\pi)}$  et  $r^{n+1} = a$ . Cependant, si on veut construire la trajectoire qu'a suivi une particule partant de  $x \in B(0,1/\pi)$ , elle s'est déplacée pour arriver en  $a$  après la première étape de l'algorithme. Cependant, comme l'image de  $r^{n+1}$  est le singleton  $\{a\}$ , le plan de transport ne permet pas de distinguer le point d'arrivée de la particule (l'application n'est pas injective). En d'autres termes, tous les plans  $\tilde{\mu}^{n+1}$  qui concentrent la matière en  $a$  puis la répartissent de manière uniforme dans  $B(a,1/\pi)$  sont des plans admissibles pour le gluing lemma (voir 1.32) et il y a autant de trajectoires possibles que de plans admissibles.

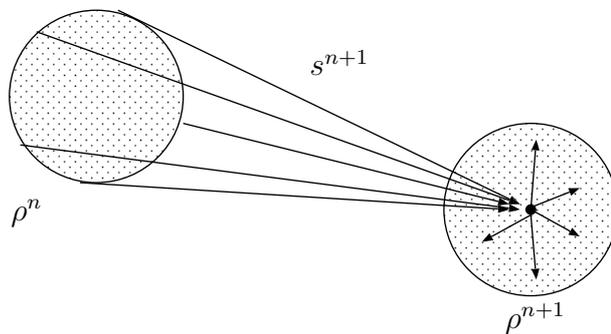


FIGURE 1.13 – Situation où l'on perd l'unicité des trajectoires des particules.

Pour un plan  $\tilde{\mu}^{n+1}$  fixé, on peut définir le mouvement des particules partant de  $z \in \mathbb{R}^d$  du support de  $\rho^n$  et arrivant en  $x$  sur le support de  $\rho^{n+1}$  comme étant rectiligne uniforme. Ainsi, on peut définir des mesures interpolées pour chaque suite de mesures donnée par le schéma.

À l'instant  $t \in ]n\tau, (n+1)\tau[$ , la densité interpolée  $\rho_\tau(t)$  est la mesure qu'on obtient à  $t$  si on anime les particules d'un mouvement rectiligne uniforme entre  $n\tau$  et  $(n+1)\tau$ .

**Définition 1.37.** On définit  $S_\tau^{n+1} \in \mathcal{C}([n\tau, (n+1)\tau] \times \mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R}^d)$  comme suit :

$$S_\tau^{n+1}(t, z, x) = \left( \frac{(n+1)\tau - t}{\tau} \right) z + \left( \frac{t - n\tau}{\tau} \right) x.$$

$S_\tau^{n+1}(t, z, x)$  représente la position d'une particule partant de  $z$  au temps  $n\tau$ , arrivant à  $x$  au temps  $(n+1)\tau$  et animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

Soit  $\Omega = [0, T] \times \mathbb{R}^d$ , en utilisant  $S_\tau^{n+1}$ , on peut définir les mesures  $\rho_\tau \in \mathcal{M}(\Omega)$ ,  $E_\tau \in \mathcal{M}^d(\Omega)$  et  $\mathcal{N}_\tau \in \mathcal{M}^{d^2}(\Omega)$  de la manière suivante :  $\forall \phi \in \mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $\psi \in \mathcal{C}_0(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ,  $A \in \mathcal{C}_0(\Omega, M_d(\mathbb{R}))$  :

$$\begin{aligned} \langle \rho_\tau, \phi \rangle &= \sum_{n=0}^N \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(t, S_\tau^{n+1}(t, z, x)) d\mu^{n+1}(z, x), \\ \langle E_\tau, \psi \rangle &= \sum_{n=0}^N \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left( \frac{x - z}{\tau} \right) \cdot \psi(t, S_\tau^{n+1}(t, z, x)) d\mu^{n+1}(z, x), \\ \langle \mathcal{N}_\tau, A \rangle &= \sum_{n=0}^N \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left[ A(t, S_\tau^{n+1}(t, z, x)) \left( \frac{x - z}{\tau} \right) \right] \cdot \left( \frac{x - z}{\tau} \right) d\mu^{n+1}(z, x), \end{aligned}$$

avec  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $N\tau < T \leq (N+1)\tau$ .

**Remarque 1.38.** Les trois mesures définies ci-dessus sont les généralisations des interpolations utilisées pour le schéma 1.

On peut montrer que le couple  $(\rho_\tau, E_\tau)$  est solution de l'équation de transport.

**Proposition 1.39.**  $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)$  :

$$\langle \rho_\tau, \partial_t \phi \rangle + \langle E_\tau, \nabla_x \phi \rangle = -\langle \rho^0, \phi(0, \cdot) \rangle.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} & \langle \rho_\tau, \partial_t \phi \rangle + \langle E_\tau, \nabla \phi \rangle \\ &= \sum_{n=0}^N \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left[ \partial_t \phi(t, S_\tau^{n+1}(t, z, x)) + \left( \frac{x - z}{\tau} \right) \cdot \nabla \phi(t, S_\tau^{n+1}(t, z, x)) \right] d\mu^{n+1}(z, x) \\ &= \sum_{n=0}^N \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{d}{dt} \left[ \phi(t, S_\tau^{n+1}(t, z, x)) \right] d\mu^{n+1}(z, x) \\ &= \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}^{2d}} (\phi((n+1)\tau, x) - \phi(n\tau, z)) d\mu^{n+1}(z, x) \\ &= \sum_{n=0}^N \left( \left[ \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi((n+1)\tau, x) d\mu^{n+1}(z, x) \right] - \left[ \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(n\tau, z) d\mu^{n+1}(z, x) \right] \right) \\ &= \sum_{n=0}^N \left( \left[ \int_{\Omega} \phi((n+1)\tau, x) \rho^{n+1}(x) dx \right] - \left[ \int_{\Omega} \phi(n\tau, z) \rho^n(z) dz \right] \right) \\ &= - \int_{\Omega} \phi(0, z) \rho^0(z) dz. \end{aligned}$$

□

Le couple  $(E_\tau, \mathcal{N}_\tau)$  est solution des équations de conservation de la quantité de mouvement avec un terme supplémentaire correspondant au gradient de pression apparaissant dans les équations (1.6).

**Proposition 1.40.**  $\forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  :

$$\langle E_\tau, \partial_t \psi \rangle + \langle \mathcal{N}_\tau, \nabla \psi \rangle - \langle \mathcal{P}_\tau, \psi \rangle = -\langle E^0, \psi(0, \cdot) \rangle$$

avec :

$$\langle \mathcal{P}_\tau, \psi \rangle = \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}^{2d}} \psi(n\tau, z) \cdot \nabla \pi^{n+1}(x) d\mu^{n+1}(z, x).$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} & \langle E_\tau, \partial_t \psi \rangle + \langle \mathcal{N}_\tau, \nabla \psi \rangle \\ &= \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \left( \partial_t \phi(t, S_\tau^{n+1}) + \nabla \psi(t, S_\tau^{n+1}) \left( \frac{x-z}{\tau} \right) \right) \cdot \left( \frac{x-z}{\tau} \right) d\mu^{n+1}(z, x) \\ &= \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \left( \frac{d}{dt} [\phi(t, S_\tau^{n+1}(t, z, x))] \right) \cdot \left( \frac{x-z}{\tau} \right) d\mu^{n+1}(z, x) \\ &= \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}^{2d}} [\phi((n+1)\tau, x) - \phi(n\tau, z)] \cdot \left( \frac{x-z}{\tau} \right) d\mu^{n+1}(z, x) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(0, z) \left( \frac{x-z}{\tau} \right) d\mu^1(z, x) + \sum_{n=1}^N \langle R_n, \psi \rangle \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(0, z) \left( \frac{x-y}{\tau} + \frac{y-z}{\tau} \right) d\tilde{\mu}^1(z, y, x) + \sum_{n=1}^N \langle R_n, \psi \rangle \\ &= -\langle E^0, \phi(0, \cdot) \rangle - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(0, z) \left( \frac{x-y}{\tau} \right) d\tilde{\mu}^1(z, y, x) + \sum_{n=1}^N \langle R_n, \psi \rangle \end{aligned}$$

Avec  $R_n$  définit comme suit :

$$\begin{aligned} \langle R_n, \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \psi(n\tau, x) \cdot \left( \frac{x-z}{\tau} \right) d\mu^n(z, x) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \psi(n\tau, z) \cdot \left( \frac{x-z}{\tau} \right) d\mu^{n+1}(z, x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(n\tau, x) \cdot E^n(x) dx - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \psi(n\tau, z) \cdot \left( \frac{x-z}{\tau} \right) d\mu^{n+1}(z, x) \end{aligned}$$

maintenant, nous allons voir que l'on peut simplifier cette expression grâce au second terme :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{2d}} \psi(n\tau, z) \cdot \left( \frac{x-z}{\tau} \right) d\mu^{n+1}(z, x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{3d}} \psi(n\tau, z) \cdot \left( \frac{x-y}{\tau} \right) d\tilde{\mu}^{n+1}(z, y, x) + \int_{\mathbb{R}^{3d}} \psi(n\tau, z) \cdot \left( \frac{y-z}{\tau} \right) d\tilde{\mu}^{n+1}(z, y, x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{3d}} \psi(n\tau, z) \cdot \left( \frac{x-y}{\tau} \right) d\tilde{\mu}^{n+1}(z, y, x) + \int_{\mathbb{R}^{2d}} \psi(n\tau, z) \cdot \left( \frac{y-z}{\tau} \right) d\mu_s^{n+1}(z, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{3d}} \psi(n\tau, z) \cdot \left( \frac{x-y}{\tau} \right) d\tilde{\mu}^{n+1}(z, y, x) + \int_{\mathbb{R}} \psi(n\tau, z) \cdot E^n(z) dz \end{aligned}$$

d'où :

$$\langle R_n, \psi \rangle = - \int_{\mathbb{R}^{3d}} \psi(n\tau, z) \cdot \left( \frac{x-y}{\tau} \right) d\tilde{\mu}^{n+1}(z, y, x)$$

pour finir, il suffit de remarquer que  $\tilde{\mu}(z, y, x) = \delta_{y=r^{n+1}(x)} \otimes \mu(z, x)$  (voir l'annexe A), on obtient finalement :

$$\langle R_n, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \psi(n\tau, z) \cdot \nabla \pi^{n+1}(x) d\mu^{n+1}(z, x).$$

□

En conclusion, l'utilisation des plans de transport pour reconstruire la trajectoire des particules possède plusieurs avantages par rapport à la manière du schéma 1 :

1. la trajectoire n'est pas forcément définie par une application qui est le gradient d'une fonction convexe, elle n'efface pas la composante à divergence nulle de la vitesse. Le schéma 2 est donc utilisable en toute dimension contrairement au schéma 1 qui est consistant avec les équations (1.6) qu'en dimension 1 ;
2. comme les plans de transport nous donnent l'emplacement exact des particules au cours de chacune des étapes, on reconstruit la bonne vitesse des particules. Cela se traduit dans les équations de conservation de la quantité de mouvement par la disparition des termes  $\epsilon_n$  qui représentaient cette correction.

Cependant, ce schéma ne prend pas en compte les collisions entre particules. Durant leurs déplacements, elles peuvent se croiser sans interférer l'une sur l'autre. L'une des premières conséquences est que la contrainte sur les densités n'est pas respectée par les suites d'interpolées. On peut s'en convaincre avec l'exemple suivant : soit le couple densité/vitesse  $(\rho^0, u^0)$  suivant :

$$\begin{cases} \rho^0(x) = \mathbb{1}_{]-1/2, 1/2[}(x), \\ u^0(x) = \frac{1}{4} \mathbb{1}_{]-1/2, 0[}(x) - \frac{1}{4} \mathbb{1}_{]0, 1/2[}(x). \end{cases}$$

En appliquant le schéma 2 avec  $\tau = 1$ , on obtient que  $\rho^1 = \rho^0$ . Dans le cas du schéma 1, le transport optimal entre les deux densités serait donc l'application nulle. Les particules restent immobiles et leurs nouvelles vitesses nulles. Ici, la trajectoire n'étant pas donnée par le transport optimal mais par les deux plans de transport représentant chacune des étapes, une particule située en  $x \in \text{spt}(\rho^0)$  se retrouve après la première étape en  $x + u^0(x)$  et après la seconde en  $(r^1)^{-1}(x + u^0(x))$  avec  $(r^1)^{-1}(x) = 2x$ . Au final, une particule partie de  $x \in \text{spt}(\rho^0)$  se retrouve en  $t(x) \in \text{spt}(\rho^1)$  avec :

$$t(x) = \begin{cases} 2x - \frac{1}{2} & \text{si } x \in ]0, \frac{1}{2}[, \\ 2x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in ]-\frac{1}{2}, 0[, \end{cases}$$

alors, pour tout  $t \in ]0, 1[$ , la suite interpolée  $\rho(t, x) = ((1-t)\text{Id} + tt)_{\#} \rho^0 = (\frac{1}{1+t})(\mathbb{1}_{]-\frac{1}{2}, \frac{t}{2}[} + \mathbb{1}_{] \frac{t}{2}, \frac{1}{2}[})$  n'est pas un élément de  $K$ .

La seconde conséquence est que la vitesse n'est pas corrigée correctement par le terme  $\nabla \pi$  car elle n'est pas appliquée aux bonnes particules (à cause des croisements de celles-ci). Dans notre exemple cela se traduit par le fait que la vitesse  $v^1(x) = \frac{x}{2}$  est non nulle. De manière gé-

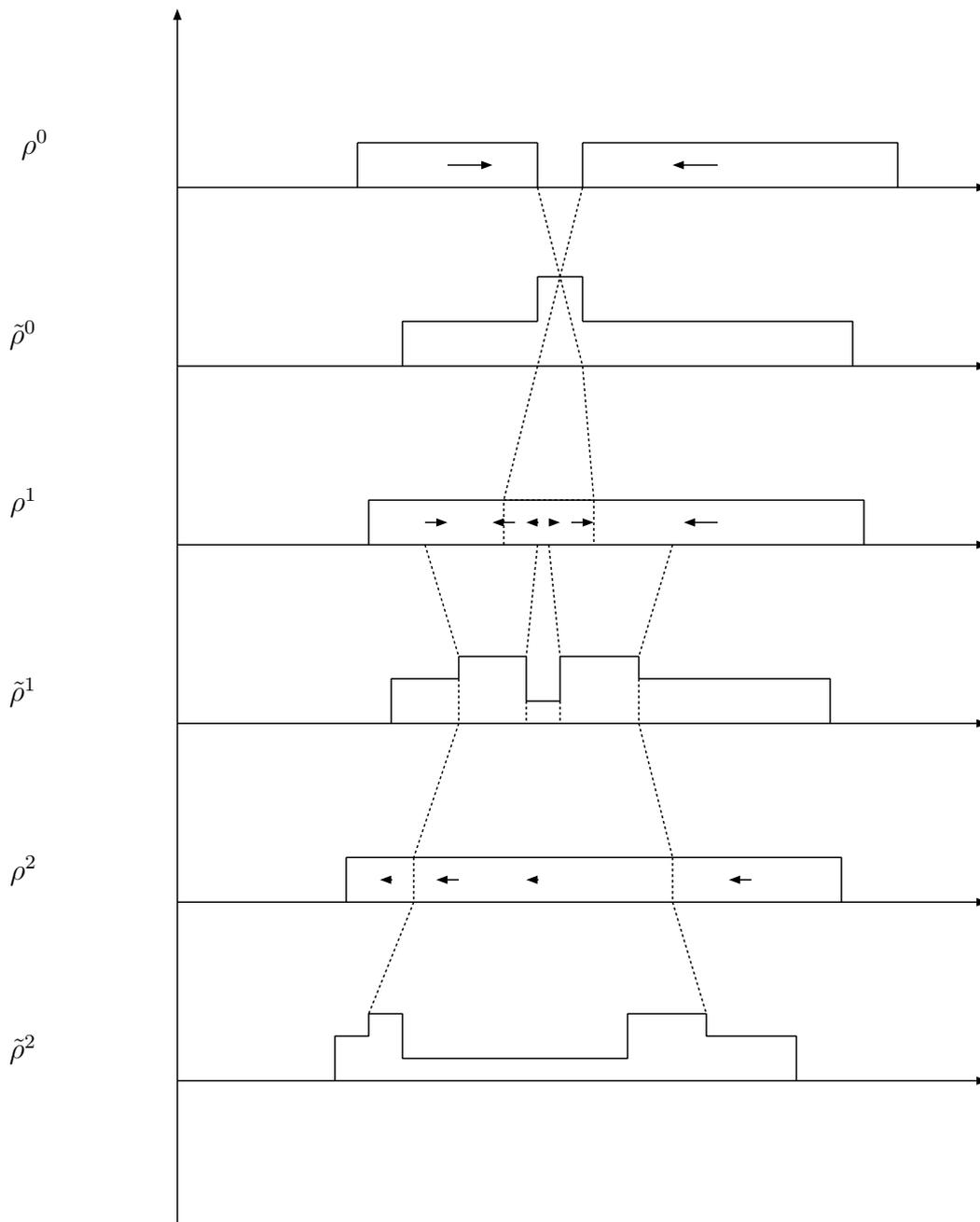


FIGURE 1.14 – Solution donnée par le second schéma dans le cas de deux blocs rentrant en collision.

nérale, les conditions initiales devant produire des sticky blocks sont mal gérées par le schéma 2 (voir figure 1.14).

Par conséquent, si l'on veut garder la même reconstruction de la vitesse, il va être nécessaire de modifier celle-ci avant la première étape pour qu'elle prenne en compte les chocs entre particules. Ceci nous amène au dernier schéma élaboré qui est décrit dans le chapitre suivant.

# Schéma de projection double

---

Dans ce chapitre, nous allons présenter puis étudier le schéma pour les gaz sans pression avec contrainte de congestion que nous avons adopté. Dans une première section, nous allons voir quels arguments nous ont amenés à rajouter une première étape de projection sur la vitesse des particules. Une seconde section présentera le schéma et fera le lien entre celui-ci et le schéma 2. Une dernière section servira à des éléments d'analyse du schéma en dimension quelconque, puis à une analyse plus complète dans le cas de la dimension 1.

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>La projection de la vitesse . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>2.2</b>	<b>Le schéma . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>2.3</b>	<b>Analyse partielle du schéma . . . . .</b>	<b>57</b>
2.3.1	En dimension quelconque . . . . .	59
2.3.2	Cas de la dimension 1 . . . . .	65

---

## 2.1 La projection de la vitesse

Nous commençons ce chapitre par des considérations sur le modèle microscopique (10) page 7 qui nous permettent de préciser les différents points de la stratégie de discrétisation. Nous supposons que le diamètre des particules est nul et qu'aucune force extérieure ne soit exercée. Supposons aussi qu'au moment initial, l'ordre des particules est le même que celui de leurs indices :

$$q_i(0) \leq q_j(0) \text{ for } 0 \leq i \leq j \leq N.$$

Comme les particules ne doivent pas se croiser, l'ensemble des configurations admissibles est donné par :

$$\tilde{K} = \{q \in \mathbb{R}^N, q_i \leq q_j \quad \forall i \leq j\},$$

et l'ensemble des vitesses admissibles est le suivant :

$$C_q = \{v \in \mathbb{R}^N, v_i \leq v_j \text{ si } q_i = q_j\}.$$

Le modèle de particules 1D avec collision inélastique peut alors se formaliser de la manière suivante :

$$\frac{dq}{dt} = u, \quad u^+ = \mathbb{P}_{C_q}(u^-).$$

Pour ce modèle, un schéma numérique a été proposé dans [10] et [47] et des résultats de convergence ont été obtenus. Soient  $\tau > 0$  le pas de temps et  $q^n, v^n \in \mathbb{R}^n$  les vecteurs positions et vitesses au temps  $n\tau$ . On définit l'ensemble des vitesses admissibles en imposant que les trajectoires discrètes ne se croisent pas :

$$C_{q^n}^\tau = \{u \in \mathbb{R}^N \mid \forall i \leq j, \quad q_i^n + \tau u_i^n \leq q_j^n + \tau u_j^n\}$$

le schéma consiste, pour chaque pas de temps, à projeter les vitesses sur l'ensemble des vitesses admissibles avant de l'utiliser pour déplacer les particules :

$$\begin{cases} u^{n+1} = \mathbb{P}_{C_{q^n}^\tau}(u^n), \\ q^{n+1} = q^n + \tau u^{n+1}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Notons qu'on peut réécrire la condition définissant  $C_{q^n}^\tau$  comme suit :

$$(u_i^n - u_j^n) \cdot (q_i^n - q_j^n) \geq \frac{-1}{\tau} |q_i^n - q_j^n|^2. \quad (2.2)$$

Le nouveau schéma adopte la même stratégie que pour le schéma 2 page 45 en rajoutant une étape de projection de la vitesse. Cette nouvelle étape est dans le même esprit que celle proposée par [26] et la projection proposée par le schéma microscopique précédent. À chaque pas de temps du schéma, on va commencer par projeter le vecteur vitesse sur l'ensemble des vitesses admissibles suivant

$$C_{\rho^n}^\tau = \left\{ v \in L_{\rho^n}^2, \quad (x - y)(v(x) - v(y)) \geq \frac{-1}{\tau} |x - y|^2 \text{ pour } \rho^n \otimes \rho^n - p.p.(x, y) \right\}.$$

Ainsi, nous nous assurons que les trajectoires des particules ne se croiseront pas durant le pas de temps  $\tau$ . Nous continuerons en transportant la densité avec la nouvelle vitesse obtenue, puis nous la projetons sur l'ensemble des densités admissibles. Enfin on met à jour la vitesse (de la même manière que le schéma 2).

L'inconvénient de la projection de la vitesse est que la densité intermédiaire risque de contenir des masses de Dirac pour tout point  $y$  qui peut s'écrire  $x + \tau \tilde{u}^n(x)$  pour  $x$  sur un ensemble pour la densité  $\rho^n$  non négligeable. En effet, comme nous avons pu le constater dans la partie précédente, pour avoir une chance d'être solution des équations de gaz sans pression, nous devons suivre le mouvement de chaque particule pour pouvoir reconstruire sa vitesse. Or, si toutes les trajectoires se concentrent en un unique point sur la densité intermédiaire, nous ne pouvons retrouver sa localisation initiale dans  $\rho^n$  et ainsi reconstruire sa trajectoire. En d'autres termes, on ne peut plus reconstruire de manière unique une application entre la densité précédente et la suivante qui respecte correctement le mouvement lagrangien des particules.

Pour cette raison, nous proposons de contraindre un peu plus l'espace des vitesses admissibles en imposant que 2 particules distinctes restent à une distance qui dépend de leur alignement initial. Plus précisément, considérons deux particules à  $x$  et  $y$ , avec les vitesses  $v_x$  et  $v_y$ , respectivement, les particules restent à distance supérieure ou égale à  $c$  fois leur distance initiale si

$$\begin{aligned} \langle x - y, (x + \tau v_x) - (y + \tau v_y) \rangle &\geq c |x - y|^2 \\ \iff \langle x - y, v_x - v_y \rangle &\geq \left( \frac{c - 1}{\tau} \right) |x - y|^2 \end{aligned}$$

avec  $c \in ]0, 1[$  un paramètre.

Cette contrainte va être intégrée à notre précédent schéma avec une définition de l'ensemble des vitesses admissibles qui sera donnée dans la prochaine section (équation (2.5)).

La positivité de  $c$  impose à la densité intermédiaire  $\tilde{\rho}^{n+1}$  de rester bornée (voir lemme 2.3) et au transport  $\text{Id} + \tau \tilde{v}^n$  d'être inversible et monotone. Ainsi, on peut reconstruire les trajectoires des particules de la densité  $\rho^{n+1}$  à la densité  $\rho^n$  avec la composition des deux transports lagrangiens.

La prochaine section détaillera le schéma discrétisé en temps issu des diverses considérations que nous avons expliquées ci-dessus. L'approche que nous proposons n'est pas à l'heure actuelle couverte par une analyse complète. Cependant, il existe très peu de méthodes pour construire des solutions des équations de gaz sans pression avec contrainte de congestion et l'approche est confortée par un certain nombre d'éléments théoriques :

1. le schéma est bien défini, dans le sens où à chaque pas de temps, le schéma définit une unique nouvelle densité vérifiant la contrainte de congestion, et un nouveau champ des vitesses associé ;
2. en dimension 1, dans le cas où la densité initiale est une collection de blocs saturés à vitesses constantes (somme de fonctions caractéristiques d'intervalle), notre schéma se comporte comme l'approche sticky blocks, dans le sens où, la solution numérique converge, dans ce cadre, vers les solutions continues du problème (comme prouvé dans [11], voir chapitre 6 pour une application numérique dans le cadre des sticky blocks) ;
3. en dimension quelconque, le schéma conserve la quantité de mouvement. Plus précisément, pour chaque composante connexe intervenant dans une collision, la quantité de mouvement est conservée ;
4. comme cette approche n'est pas basée sur une méthode de relaxation de la contrainte de densité, il traite sans difficulté les zones vides (sans densité), comme le confirment les tests numériques du chapitre 6.

## 2.2 Le schéma

Si l'on revient à la définition du schéma 2, dans le cas où  $s^{n+1}$  est strictement monotone, on a alors que le plan de transport  $\mu^{n+1}$  se simplifie (voir annexe A) :

$$\mu^{n+1} = ((s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1} \otimes \text{Id})_{\#} \rho^{n+1},$$

on obtient la proposition suivante :

**Proposition 2.1.** *Le schéma 2 se ramène au suivant : soit  $(\rho^0, u^0)$  un couple densité/vitesse donné,  $\tau > 0$  un pas de temps fixé. Si  $(\rho^i, u^i)$  ont déjà été calculés pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , l'algorithme calcule  $(\rho^{n+1}, u^{n+1})$  de la manière suivante :*

$$\begin{cases} \tilde{\rho}^{n+1} = (Id + \tau u^n)_{\#} \rho^n, \\ \rho^{n+1} = \mathbb{P}_K^{\mathcal{W}_2}(\tilde{\rho}^{n+1}), \\ u^{n+1} = \frac{Id - (s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1}}{\tau}. \end{cases} \quad (2.3)$$

*Démonstration.* Il suffit de prouver que  $E^{n+1}$  est continue par rapport à la mesure  $\rho^{n+1}$  et que  $dE^n/d\rho^{n+1} = u^{n+1}$  :

$$\begin{aligned} E^{n+1}(x) &= \int_{z \in \mathbb{R}^d} \left( \frac{x - z}{\tau} \right) d\mu^{n+1}(z, x) \\ &= \left( \frac{x - (s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1}(x)}{\tau} \right) \rho^{n+1}(x) dx. \end{aligned}$$

□

Le nouveau schéma prenant compte des considérations établies dans la section précédente peut se décrire comme suit :

1. la première étape consiste à projeter la vitesse sur  $\mathcal{M}_{\rho^n}^c$  pour éviter tout choc entre particules ;
2. la densité est déplacée selon cette nouvelle vitesse durant  $\tau$  ;
3. la densité intermédiaire obtenue peut ne pas être admissible, on la projette sur l'ensemble des densités admissibles (au sens Wasserstein quadratique) ;
4. la dernière étape consiste à définir la nouvelle vitesse de la même manière que dans le schéma 2 : en utilisant les plans de transport de chacune des étapes du schéma.

**Schéma 3.** Soit  $(\rho^n, u^n) \in K \times L^2_{\rho^n}$  donné, le schéma calcule  $(\rho^{n+1}, u^{n+1})$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tilde{u}^n = \mathbb{P}_{\mathcal{M}_{\rho^n}^c}(u^n), \\ \tilde{\rho}^{n+1} = (Id + \tau \tilde{u}^n)_{\#} \rho^n, \\ \rho^{n+1} = \mathbb{P}_K^{\mathcal{W}_2}(\tilde{\rho}^{n+1}), \\ u^{n+1} = \frac{Id - (s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1}}{\tau}, \end{cases} \quad (2.4)$$

avec

$$\mathcal{M}_{\rho^n}^c = \{v \in L^2_{\rho^n}(\bar{\mathbb{R}}^d), \langle v(x) - v(y), x - y \rangle \geq \frac{c-1}{\tau} |x - y|^2 \rho^n \otimes \rho^n - a.e.\}, \quad (2.5)$$

et  $c \in ]0, 1[$  un paramètre. On rappelle que  $K$  est l'ensemble des densités de probabilité de  $\mathbb{R}^d$  qui admet une densité inférieure ou égale à  $un$ ,

$$s^{n+1} = Id + \tau \tilde{u}^n$$

et  $r^{n+1}$  est le transport optimal entre  $\rho^{n+1}$  et  $\tilde{\rho}^{n+1}$ .

La figure 2.1 illustre comment le schéma traite les collisions entre deux blocs en dimension 1. Elle se lit de bas en haut. La première partie montre comment les particules sont déplacées après avoir projeté leur vitesse pour éviter tous les contacts. La densité intermédiaire viole la contrainte de congestion, elle est projetée dans l'ensemble des densités admissibles  $K$ . Les trois cercles sur la figure correspondent aux positions successives d'une particule durant les étapes du schéma : initialement en  $z$ , elle se déplace en  $y$ , puis en  $x$  après la projection. Cette particule aura comme nouvelle vitesse  $(x - z)/\tau$ .

Comme il est expliqué dans la preuve de la proposition 2.13 page 66, il se peut qu'un écart subsiste entre les deux blocs après un pas de temps. À ce moment, il est nécessaire d'effectuer encore deux pas de temps pour que le schéma traite totalement la collision.

## 2.3 Analyse partielle du schéma

Dans les deux sous-sections suivantes, nous allons effectuer l'analyse la plus approfondie possible de notre schéma. La première section traitera le cas de la dimension quelconque, nous montrerons que le schéma est bien défini, qu'il conserve la masse et la quantité de mouvement. Enfin, dans la dernière section, on montrera que les suites d'interpolées sont solutions d'un système d'équations proche de celui des gaz sans pression (15) page 9 en dimension 1 et que les solutions calculées par le schéma correspondent avec celles des sticky blocks.

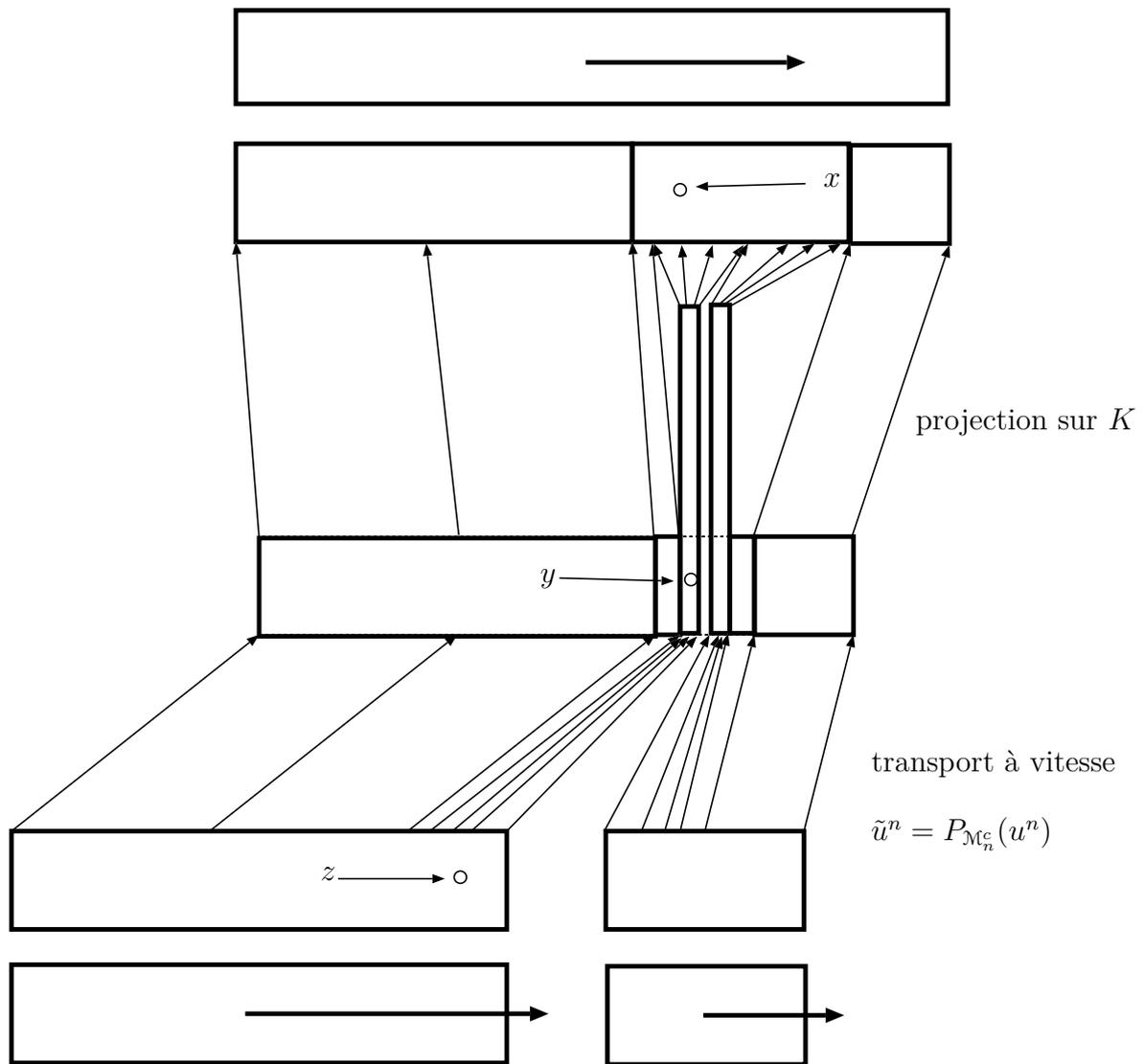


FIGURE 2.1 – Le schéma discrétisé en temps dans le cas d’une collision en dimension 1.

### 2.3.1 En dimension quelconque

Nous allons commencer par établir quelques propriétés basiques concernant le schéma. Le premier lemme affirme que l'étape de projection sur les champs monotones est bien définie et préserve la quantité de mouvement. Dans un second lemme, nous allons montrer que la densité intermédiaire  $\tilde{\rho}^{n+1}$  est bornée.

**Lemme 2.2.** *Soit  $\rho \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  et  $u \in L^2_\rho(\mathbb{R}^d)$ , alors il existe un unique  $\tilde{u} \in \mathcal{M}_\rho^c$  tel que :*

$$\|u - v\|_{L^2_\rho(\mathbb{R}^d)} \geq \|u - \tilde{u}\|_{L^2_\rho(\mathbb{R}^d)}, \forall v \in \mathcal{M}_\rho^c.$$

De plus, nous avons les propriétés suivantes :

- (i)  $\|\tilde{u}\|_{L^2_\rho(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^2_\rho(\mathbb{R}^d)}$  ;
- (ii)  $\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}(x) d\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) d\rho(x)$ .

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{M}_\rho^c$  est un ensemble fermé convexe, la projection  $\tilde{u} := \mathbb{P}_{\mathcal{M}_\rho^c}(u)$  est bien définie. L'inégalité (i) vient du fait que  $\mathcal{M}_\rho^c$  est aussi un cône de sommet 0.

Maintenant, prouvons que la première étape du schéma ne change pas la quantité de mouvement (l'égalité (ii)). Si  $u \in \mathcal{M}_\rho^c$ , alors  $u + k$  est aussi dans  $\mathcal{M}_\rho^c$  pour tout  $k \in \mathbb{R}^d$ . Si  $\tilde{u}$  est la projection de  $u$  sur  $\mathcal{M}_\rho^c$ , on a :

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^2_\rho(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|u - \tilde{u} - k\|_{L^2_\rho(\mathbb{R}^d)}^2$$

et ainsi

$$\left\langle u - \tilde{u}, \frac{k}{|k|} \right\rangle_{L^2_\rho(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{|k|}{2}.$$

Avec  $|k|$  tendant vers 0, on obtient  $\left\langle u - \tilde{u}, \frac{k}{|k|} \right\rangle_{L^2_\rho(\mathbb{R}^d)} \leq 0$ , pour tout  $k \in \mathbb{R}^d$  et par conséquent

$$\left\langle u - \tilde{u}, \frac{k}{|k|} \right\rangle_{L^2_\rho(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

On définit  $E_{tot}$  et  $\tilde{E}_{tot}$  comme étant la quantité de mouvement avant et après l'étape de projection respectivement :

$$E_{tot} = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) d\rho(x) \quad \text{et} \quad \tilde{E}_{tot} = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u}(x) d\rho(x).$$

Nous avons  $\langle E_{tot}, k \rangle = \langle \tilde{E}_{tot}, k \rangle$  pour tout  $k \in \mathbb{R}^d$  et finalement  $\tilde{E}_{tot} = E_{tot}$ . □

**Lemme 2.3.** *Soit  $\tilde{\rho} := s\#\rho = (Id + \tau\tilde{u})\#\rho$ , avec  $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ , et  $\tilde{u} \in \mathcal{M}_\rho^c$ , on a :*

$$\|\tilde{\rho}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{c^d} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

*Démonstration.* On considère ici que la vitesse  $\tilde{u}$  est régulière, nous renvoyons le lecteur à [2], Section 5.5, pour une démonstration du cas général ou encore au lemme 1.5 page 18 qui en

fait la démonstration. Comme  $\tilde{u}$  est dans  $\mathcal{M}_\rho^c$ , les valeurs propres  $\nabla s$  sont plus grandes que  $c$  et ainsi  $\det \nabla s$  est plus grand que  $c^d$ . Finalement, comme  $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{|\det \nabla s|} \circ s^{-1}$  on a

$$\|\tilde{\rho}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \left\| \frac{\rho}{|\det \nabla s|} \circ s^{-1} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{c^d} \|\rho \circ s^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{c^d} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},$$

ce qui finit la preuve.  $\square$

Nous allons maintenant prouver que le schéma est bien défini : pour un couple densité/vitesse donné dans un certain espace, le schéma calcule un unique couple densité/vitesse dans le même espace.

**Proposition 2.4.** *Soit  $(\rho^n, u^n) \in K \times L_{\rho^n}^2(\mathbb{R}^d)$ , le schéma (2.4) définit un unique couple  $(\rho^{n+1}, u^{n+1})$  avec  $\rho^{n+1} \in K$  et  $u^{n+1} \in L_{\rho^{n+1}}^2(\mathbb{R}^d)$ .*

*Démonstration.* Soit un couple densité/vitesse  $(\rho^n, u^n) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \times L_{\rho^n}^2$ , le lemme 2.2 nous permet d'affirmer l'unicité de la vitesse  $\tilde{u}^n$ , projeté de  $u^n$  sur  $\mathcal{M}_{\rho^n}^c$ . Du couple  $(\rho^n, \tilde{u}^n)$  le schéma définit un unique couple densité/vitesse  $(\rho^{n+1}, u^{n+1}) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \times L_{\rho^{n+1}}^2$  car les étapes restantes sont les mêmes que celles du schéma 2 et que  $\text{Id} + \tau \tilde{u}^n$  est inversible (voir les propositions 1.34 et 2.1 page 46 et 56 respectivement).  $\square$

**Proposition 2.5.** *La masse totale et la quantité de mouvement sont conservées par le schéma (2.4).*

*Démonstration.* La conservation de la masse est inhérente à l'approche, qui est une succession d'étape de transport et de projection au sens Wasserstein.

Pour la quantité de mouvement, on a déjà vu que  $\int_{\mathbb{R}^d} E^n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{E}^n(x) dx$ , où  $\tilde{E}^n = \rho^n \tilde{v}^n$ .

Les autres étapes sont les mêmes que celles du schéma 2 et elles préservent la quantité de mouvement (voir corollaire 1.36 page 47).  $\square$

**Remarque 2.6.** *Une conséquence directe de cette proposition est que le centre de gravité se déplace à vitesse constante :*

$$U = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} u^n(x) \rho^n(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^d} \rho^n(x) dx}.$$

Le lemme suivant montre que l'on peut décomposer la nouvelle vitesse obtenue au pas de temps  $n+1$  en deux termes dépendant de la vitesse au pas de temps précédent et du gradient de  $\pi^{n+1}$ .

**Lemme 2.7** (Décomposition).  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$u^{n+1} = \tilde{u}^n \circ \mathbf{t}^{n+1} - \nabla \pi^{n+1}$$

avec  $\mathbf{t}^{n+1} = (s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1}$ .

*Démonstration.*

$$u^{n+1}(x) = \frac{x - (s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1}(x)}{\tau} \quad (2.6)$$

$$= \frac{r^{n+1}(x) - (s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1}(x)}{\tau} + \frac{x - r^{n+1}(x)}{\tau} \quad (2.7)$$

$$= \left( \frac{s^{n+1} - \text{Id}}{\tau} \right) \circ \mathbf{t}^{n+1}(x) - \nabla \pi^{n+1}(x) \quad (2.8)$$

$$= \tilde{u}^{n+1} \circ \mathbf{t}^{n+1}(x) - \nabla \pi^{n+1}(x). \quad (2.9)$$

□

**Remarque 2.8.** On peut réécrire la décomposition de la vitesse de la manière suivante :

$$u^{n+1} = u^n \circ \mathbf{t}^{n+1} + (\tilde{u}^n \circ \mathbf{t}^{n+1} - u^n \circ \mathbf{t}^{n+1}) - \nabla \pi^{n+1} \quad (2.10)$$

et ainsi remarquer que la nouvelle vitesse  $u^{n+1}$  se décompose en trois termes :

- le premier terme représente la vitesse de la particule au pas de temps précédent ;
- le second terme représente la correction effectuée sur la vitesse pour éviter le croisement des particules ;
- le dernier corrige la vitesse pour que la densité finale ne dépasse pas la contrainte de congestion.

Nous allons calculer chacun de ces termes dans l'exemple suivant (voir figure 2.2) :

$$\begin{cases} \rho^0(x) = \mathbf{1}_{[-1/2, 1/2]}, \\ \rho^0(x)u^0(x) = \mathbf{1}_{[-1/2, 0]} + \mathbf{1}_{[0, 1/2]}, \end{cases} \quad (2.11)$$

avec  $c = \frac{1}{2}$  et  $\tau$  quelconque. L'ensemble des vitesses admissibles est alors le suivant :

$$\mathcal{M}_{\rho^0}^c = \{v \in L_{\rho^0}^2(\bar{\mathbb{R}}), \langle v(x) - v(y), x - y \rangle \geq \frac{-1}{2\tau} |x - y|^2 \rho^0 \otimes \rho^0 - a.e.\},$$

et on peut montrer que

$$\tilde{u}^0(x) = \mathbf{1}_{[-1/2, 2\tau]} - \frac{x}{2\tau} \mathbf{1}_{[-2\tau, 2\tau]} - \mathbf{1}_{[2\tau, 1/2]}$$

par conséquent

$$\tilde{u}^0(x) - u^0(x) = \left( -\frac{x}{2\tau} - 1 \right) \mathbf{1}_{[-2\tau, 0]} + \left( -\frac{x}{2\tau} + 1 \right) \mathbf{1}_{[0, 2\tau]}$$

et la densité intermédiaire  $\tilde{\rho}^1 = \mathbf{1}_{[-1/2+\tau, -\tau]} + 2\mathbf{1}_{[-\tau, \tau]} + \mathbf{1}_{[\tau, 1/2-\tau]}$ . La densité obtenue après projection  $\rho^1 = \rho^0 = \mathbf{1}_{[-1/2, 1/2]}$  et

$$\nabla \pi^1(x) = \mathbf{1}_{[-1/2, -2\tau]} - \frac{x}{2\tau} \mathbf{1}_{[-2\tau, 2\tau]} - \mathbf{1}_{[2\tau, 1/2]}.$$

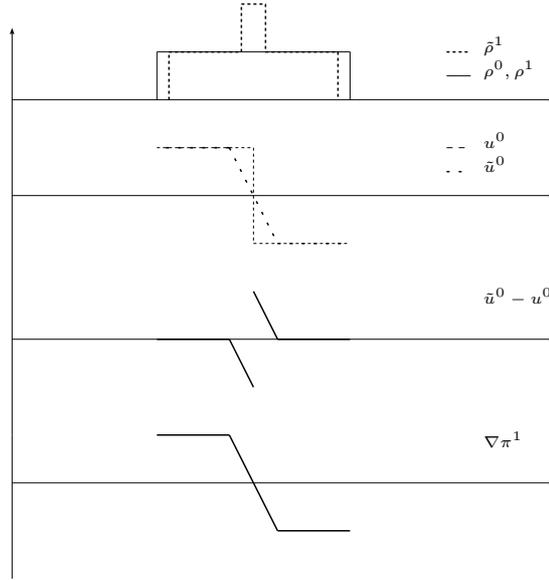


FIGURE 2.2 – Décomposition de chacun des termes composants la vitesse aux pas de temps suivant dans le cas de l'exemple (2.11).

De la même manière que pour les schémas précédents, on peut définir des suites d'interpolées en suivant de manière lagrangienne le parcours des particules. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on définit  $T_\tau^{n+1} \in \mathcal{C}([n\tau, (n+1)\tau] \times \mathbb{R}^d)$  l'application représentant la trajectoire d'une particule en mouvement rectiligne uniforme durant  $[n\tau, (n+1)\tau]$  et arrivant en  $x \in \text{spt}(\rho^{n+1})$  :

$$T_\tau^{n+1}(t, \cdot) = \left( \frac{t - n\tau}{\tau} \right) \text{Id} + \left( \frac{(n+1)\tau - t}{\tau} \right) (s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1}. \quad (2.12)$$

On définit les suites d'interpolées :  $\forall t \in [n\tau, (n+1)\tau]$  :

- $\rho_\tau := (T_\tau^{n+1})_\# \rho^{n+1}$  ;
- $E_\tau := (T_\tau^{n+1})_\# (\rho^{n+1} u^{n+1})$  ;
- $\mathcal{N}_\tau := (T_\tau^{n+1})_\# (\rho^{n+1} u^{n+1} \otimes u^{n+1})$  .

Nous allons voir que les suites d'interpolées vérifient un système semblable au système (1.6). Tout d'abord, le couple  $(\rho_\tau, u_\tau)$  vérifie l'équation de continuité.

**Proposition 2.9.**  $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)$  :

$$\langle \rho_\tau, \partial_t \phi \rangle + \langle E_\tau, \nabla_x \phi \rangle = -\langle \rho^0, \phi(0, \cdot) \rangle.$$

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $N\tau \leq T < (N+1)\tau$ ,

$$\begin{aligned}
 & \langle \rho_\tau, \partial_t \phi \rangle + \langle E_\tau, \nabla \phi \rangle \\
 = & \sum_{n=0}^N \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \partial_t \phi(t, T_\tau^{n+1}(t, x)) + u^{n+1}(x) \cdot \nabla \phi(t, T_\tau^{n+1}(t, x)) \right] \rho^{n+1}(x) dx \\
 = & \sum_{n=0}^N \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} \left[ \phi(t, T_\tau^{n+1}(t, x)) \right] \rho^{n+1}(x) dx \\
 = & \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \phi((n+1)\tau, x) - \phi(n\tau, (s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1}(x)) \right] \rho^{n+1}(x) dx \\
 = & \sum_{n=0}^N \left( \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \phi((n+1)\tau, x) \rho^{n+1}(x) dx \right] - \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \phi(n\tau, z) \rho^n(z) dz \right] \right) \\
 = & - \int_{\mathbb{R}^d} \phi(0, z) \rho^0(z) dz.
 \end{aligned}$$

□

Le couple  $(\rho_\tau, u_\tau)$  vérifie une version discrète des équations de conservation de la quantité de mouvement avec un terme de consistance.

**Proposition 2.10.**  $\forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  :

$$\langle E_\tau, \partial_t \psi \rangle + \langle \mathcal{N}_\tau, \nabla \psi \rangle - \langle \mathcal{P}_\tau, \psi \rangle + \langle E^0, \psi(0, \cdot) \rangle = \langle \epsilon_\tau, \psi \rangle,$$

avec

$$\langle \mathcal{P}_\tau, \psi \rangle = \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}^d} \psi(n\tau, (s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1}(x)) \cdot \nabla \pi^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) dx$$

et

$$\langle \epsilon_\tau, \psi \rangle = \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}^d} (u^n(x) - \tilde{u}^n(x)) \cdot \psi(n\tau, x) \rho^n(x) dx.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 & \langle E_\tau, \partial_t \psi \rangle + \langle \mathcal{N}_\tau, \nabla \psi \rangle \\
 = & \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}^d} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \left( \partial_t \phi(t, T_\tau^{n+1}) \cdot u^{n+1}(x) + \nabla \psi(t, T_\tau^{n+1}) : (u^{n+1}(x) \otimes u^{n+1}(x)) \right) \rho^{n+1}(x) dx \\
 = & \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}^d} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \left( \partial_t \phi(t, T_\tau^{n+1}(t, x)) + \nabla \psi(t, T_\tau^{n+1}(t, x)) \cdot u^{n+1}(x) \right) \cdot (u^{n+1}(x)) \rho^{n+1}(x) dx \\
 = & \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}^d} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \left( \frac{d}{dt} \left[ \phi(t, T_\tau^{n+1}(t, x)) \right] \right) \cdot u^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) dx \\
 = & \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \phi((n+1)\tau, x) - \phi(n\tau, (s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1}(x)) \right] \cdot u^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) dx \\
 = & - \langle E^0, \phi(0, \cdot) \rangle + \sum_{n=0}^N \langle R_n, \psi \rangle,
 \end{aligned}$$

avec  $R_n$  défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \langle R_n, \psi \rangle \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(n\tau, x) \cdot u^n(x) \rho^n(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \psi(n\tau, (s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1}(x)) \cdot u^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(n\tau, x) \cdot u^n(x) \rho^n(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} \psi(n\tau, x) \cdot \left( \frac{(r^{n+1})^{-1}(x) - (s^{n+1})^{-1}(x)}{\tau} \right) d\tilde{\rho}^{n+1}(x) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(n\tau, x) \cdot (u^n(x) - \tilde{u}^n(x)) \rho^n(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \psi(n\tau, x) \cdot \nabla \pi^{n+1}(x) \rho^{n+1}(x) dx.
 \end{aligned}$$

On obtient bien le résultat escompté.  $\square$

**Remarque 2.11.** Le terme  $\epsilon_\tau$  exprime la différence entre la vitesse réelle  $u^n$  et son projeté sur  $\mathcal{M}_{\rho^n}^c$  à chaque étape. Comme pour le schéma 1, rien ne nous permet d'affirmer que ce terme converge vers 0 lorsque  $\tau$  tend vers 0. Cependant, même dans le cas où la vitesse est discontinue, le coût de projection sur  $\mathcal{M}_{\rho^n}^c$  est de l'ordre de  $\tau$ .

Prenons l'exemple où  $v(x) = -a\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} + \frac{a}{2}$  avec  $a > 0$ , comme la densité  $\rho^n$  est dans  $K$ , on peut supposer  $\rho^n = \mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}$ , mais on peut tout aussi bien prendre  $\rho^n$  comme étant la mesure de Lebesgue, cette vitesse n'est dans aucun  $\mathcal{M}_{\rho^n}^c$  pour n'importe quel pas de temps  $\tau > 0$  car pour tout  $\epsilon$  strictement positif

$$\langle v(\epsilon) - v(-\epsilon), 2\epsilon \rangle = \frac{-a}{2\epsilon} (2\epsilon)^2 \quad (2.13)$$

et donc on cherche  $\tau$  tel que

$$\frac{c-1}{\tau} \leq \frac{-a}{2\epsilon} \quad (2.14)$$

ce qui est impossible lorsque  $\epsilon$  tend vers  $0^+$ , la vitesse étant discontinue à l'origine. Cependant,  $\bar{v}(x) = \frac{c-1}{\tau} x \mathbb{1}_{x \in [-a\tau/2(c-1), a\tau/2(c-1)]} + \frac{a}{2} \mathbb{1}_{x < -a\tau/2(c-1)} - \frac{a}{2} \mathbb{1}_{x > a\tau/2(c-1)}$  est un élément de  $\mathcal{M}_{\rho^n}^c$  et

$$\|v - \bar{v}\|_{L^2}^2 = \left( \frac{a^3}{3(1-c)} \right) \tau, \quad (2.15)$$

le coût de projection de cette vitesse est de l'ordre de  $\tau$ . On pourrait montrer que c'est le cas pour toute vitesse à variation totale bornée, mais cela serait tout de même insuffisant pour montrer la convergence de  $\epsilon_\tau$  vers 0. Il faudrait aussi pouvoir montrer d'une certaine manière que le nombre de projections est contrôlé et est d'ordre  $o(1/\tau)$ .

Le terme  $\mathcal{P}_\tau$  est très similaire au terme  $\nabla \pi$  des équations des gaz sans pression. Cependant, il est impossible de faire converger ce terme sans informations supplémentaires.

Il serait intéressant d'obtenir une estimation simple sur l'énergie de notre système, c'est-à-dire avoir un contrôle de

$$\int_{\mathbb{R}^d} (v_\tau^n(x))^2 \rho_\tau^n(x) dx \quad (2.16)$$

indépendamment de  $\tau$ . Cette estimation est obtenue dans le cadre de la dimension 1, en remarquant que  $\text{Id} + \tau \tilde{v}^n$  est le transport optimal entre  $\rho^n$  et  $\tilde{\rho}^{n+1}$ .

### 2.3.2 Cas de la dimension 1

Nous allons voir dans cette sous-section que le cas de la dimension 1 peut être traité théoriquement de manière plus aboutie. Tout d'abord, on peut montrer que l'énergie cinétique est décroissante. Le schéma redonne la solution exacte (sauf sur 3 pas de temps nécessaires au traitement de la collision) de l'approche sticky blocks dans le cas où la solution initiale est deux blocs rentrant en collision.

La première proposition va nous permettre de faire le lien entre le nouveau schéma et le schéma 1 page 25.

**Proposition 2.12.** *En dimension 1, le schéma peut être décrit de la manière suivante : Soit  $(\rho^0, u^0)$  un couple densité/vitesse initial donné,  $\tau > 0$  un pas de temps fixé. Si  $(\rho^i, u^i)$  ont déjà été calculés pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , le schéma calcule  $(\rho^{n+1}, u^{n+1})$  de la manière suivante*

$$\begin{cases} \tilde{u}^{n+1} = \mathbb{P}_{\mathcal{M}_{\rho^n}^c}(u^n), \\ \tilde{\rho}^{n+1} = (\text{Id} + \tau \tilde{u}^{n+1})_{\#} \rho^n, \\ \rho^{n+1} = \mathbb{P}_K^{\mathcal{W}_2}(\tilde{\rho}^{n+1}), \\ u^{n+1} = \frac{\text{Id} - \mathbf{t}^{n+1}}{\tau}, \end{cases} \quad (2.17)$$

où  $\mathbf{t}^{n+1}$  est le transport optimal entre  $\rho^{n+1}$  et  $\rho^n$ . De plus, on a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} \|u^{n+1}(x)\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|u^n(x)\|^2 \rho^n(x) dx, \\ \mathcal{W}_2(\rho^{n+1}, \rho^n) \leq \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n-1}). \end{cases} \quad (2.18)$$

*Démonstration.* Pour le schéma (2.17), il suffit de constater que  $(s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1}$  est le transport optimal entre  $\rho^{n+1}$  et  $\rho^n$  car la composée de deux applications monotones reste monotone en dimension 1.

Les égalités découlent de la preuve de la proposition 1.9 et du lemme 1.5,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \|u^{n+1}(x)\|^2 \rho^{n+1}(x) dx &:= \int_{\mathbb{R}^d} \left\| \frac{x - \mathbf{t}^{n+1}(x)}{\tau} \right\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \\ &= \mathcal{W}_2^2(\rho^n, \rho^{n+1}) \\ &\leq \mathcal{W}_2^2(\rho^n, \tilde{\rho}^{n+1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \|\tilde{u}^{n+1}(x)\|^2 \rho^n(x) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \|u^n(x)\|^2 \rho^n(x) dx \\ &= \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho^{n-1})^2. \end{aligned}$$

□

Les inégalités (2.18) sont celles qui nous avaient permis d'obtenir toutes les estimations

sur les suites construites à l'aide du schéma 1. Par conséquent, nous obtenons les mêmes ici, c'est-à-dire :

1. le moment d'ordre 2 des suites  $((\rho_\tau^n)_{n \in \mathbb{N}})_{\tau > 0}$  est contrôlé indépendamment de  $\tau$  (voir proposition 1.14) ;
2. les suites interpolées  $(\rho_\tau, u_\tau)$  définies à la manière de la définition 1.15 sont des fonctions de l'espace  $\mathcal{L}([0, T], \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$  des fonctions Lipschitz en temps à valeur dans  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . De plus, la suite  $(\rho_\tau(t))_{\tau > 0}$  est une famille  $\tau$ -uniformément bornée. On peut donc utiliser le théorème d'Arzelà-Ascoli pour en extraire une sous-suite qui converge faiblement vers une certaine limite  $\rho$ . De même, on peut extraire de  $E_\tau = \rho_\tau u_\tau$  une sous-suite qui converge faiblement vers une limite  $E$  au sens des mesures de  $[0, T] \times \mathbb{R}$  ;
3. on peut obtenir la même estimation sur  $\mathcal{P}_\tau$ , c'est-à-dire :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} \|\nabla \pi^{n+1}(x)\|^2 \rho^{n+1}(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} (v^0(x))^2 \rho^0(x) dx.$$

Une autre propriété du schéma 1 qui est retrouvée ici est la consistance du schéma vis-à-vis de l'approche sticky blocks. Plus précisément, considérons la solution exacte correspondant à la collision de deux blocs congestionnés. On établit que, à l'exception de quelques pas de temps (pas plus que 3) qui sont nécessaires pour le traitement de la collision. Le schéma de discrétisation redonne la solution exacte à chaque pas de temps.

**Proposition 2.13.** *Soit  $\rho_t$  la densité représentant la solution exacte de l'approche sticky blocks de deux blocs entrant en collision au temps  $t_0$  et  $\eta$  un réel positif. Si  $c \leq \sqrt{2} - 1$  alors il existe  $\tau_o > 0$  tel que pour n'importe quel pas de temps  $\tau \leq \tau_o$  la solution donnée par le schéma est exacte, pour tout pas  $n \in \{n \in \mathbb{N}, n\tau \notin [t_0 - \eta, t_0 + \eta]\}$ .*

*Démonstration.* Nous commençons par deux remarques importantes. Premièrement, d'après la remarque 2.6, le schéma calcule avec exactitude le déplacement du centre de masse. En second, le schéma préserve les blocs isolés se déplaçant avec une vitesse uniforme (un bloc reste un bloc). Par conséquent, nous avons juste à vérifier que le schéma colle les deux blocs en un nombre fini d'étapes (pas plus que 3 comme nous allons le voir).

Soit  $\Delta U^n \geq 0$  la différence des vitesses entre les deux blocs au temps  $n\tau$  et  $e^n$  leur distance. On peut vérifier que la nouvelle différence des vitesses  $\Delta U^{n+1}$  est égale à  $\frac{e^n - e^{n+1}}{\tau}$ . Le champ des vitesses  $u^n$  appartient à  $\mathcal{M}_{\rho^n}^c$  si et seulement si la contrainte est vérifiée au bout de chaque bloc, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Delta U^n(-e^n) &\geq \frac{c-1}{\tau}(e^n)^2 \\ \Leftrightarrow \tau \Delta U^n &\leq (1-c)e^n. \end{aligned}$$

Maintenant, si  $\tau \Delta U^n > (1-c)e^n$  et que la longueur du plus petit bloc  $L$  est suffisamment large (prenons  $\tau$  tel que  $L \geq 2\tau \|v\|_\infty$ ) la densité  $\tilde{\rho}^{n+1}$  dépasse la contrainte de congestion (voir figure 2.1) sur deux blocs dont la somme des longueurs est  $\frac{c\tau \Delta U^n}{1-c} - ce^n$ . Dans ce cas, la masse

$M$  projetée entre les deux blocs est plus grande que la moitié de la masse surcongestionnée,

$$M \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c} - 1 \right) \left( \frac{c\tau\Delta U^n}{1-c} - ce^n \right) \geq \frac{1}{2} (\tau\Delta U^n + (c-1)e^n).$$

Deux cas sont à considérer. Si  $\tau\Delta U^n \geq (1+c)e^n$ , la masse  $M$  est suffisamment grande et remplit le “trou” entre les deux blocs, ce qui implique que  $e^{n+1} = 0$  et  $\tau\Delta U^{n+1} = e^n$ . L’étape suivante donne aux blocs la même vitesse,  $e^{n+2} = 0$  et  $\Delta U^{n+2} = 0$ . Ainsi, le schéma traite la collision en deux pas.

Maintenant, si  $\tau\Delta U^n \in (1-c[e^n], 1+c[e^n])$ , la projection sur l’ensemble des champs des vitesses admissibles impose que  $\tilde{e}^{n+1} = ce^n$  (la distance entre chaque bloc est  $c$  fois la précédente), ainsi  $e^{n+1} \leq ce^n$  et par conséquent

$$\tau\Delta U^{n+1} = e^n - e^{n+1} \geq (1-c)e^n.$$

Donc,

$$(1+c)e^{n+1} \leq (1+c)ce^n \leq (1-c)e^n \leq \tau\Delta U^{n+1}$$

car  $c \leq \sqrt{2} - 1$ , les conditions du premier cas étant obtenues, le schéma traite la collision en trois étapes.

Finalement, en prenant  $\tau_o = \min\{\frac{L}{2\|v\|_\infty}, \frac{2\eta}{5}\}$  nous obtenons la preuve de la proposition.  $\square$

Dans le cadre des sticky blocks, comme le nombre de blocks est fini, le nombre de collision aussi. Ainsi, en utilisant la remarque 2.11, on peut contrôler le terme  $\epsilon_\tau$  et le faire converger au sens faible vers 0 (le terme  $\epsilon_n$  est nul si il n’y a pas de collision). De plus, dans le chapitre 6, nous verrons un exemple numérique dans le cadre des sticky blocks.



DEUXIÈME PARTIE

# Méthode du balayage transverse

---



---

Cette partie a pour but d'introduire une nouvelle méthode pour calculer le coût de transport Wasserstein quadratique d'une densité discrétisée en espace à une autre. Elle repose sur le calcul d'un coût sur les masses traversant les hyperplans définis par les interfaces des cellules. Cette nouvelle méthode sera analysée dans le cadre du schéma JKO ([42]). Le schéma JKO est un outil utile dans l'étude des flot-gradients, décrit par DeGiorgi [27] et Ambrosio [1]. Il permet de construire une suite de familles de densités constantes par morceaux qui converge vers une solution de l'équation de flot-gradient.

Nous allons d'abord présenter brièvement les équations flot-gradients, le schéma JKO et une discrétisation spatiale naturelle de celui-ci. Nous verrons que, avec cette discrétisation, le coût des déplacements de faible amplitude est surestimé ce qui a pour conséquence l'apparition d'effets de locking : pour des conditions CFL petites la masse reste immobile.

Dans un premier chapitre, nous expliquerons la méthode pour discrétiser le coût Wasserstein quadratique en dimension 1. Nous montrerons qu'elle estime correctement les translations de mesures et nous obtiendrons des résultats de convergence avec l'équation de continuité dans le cas où la vitesse est le gradient d'une fonction donnée et indépendante de la densité. Le principal résultat est que pour un pas de temps petit, le schéma redonne le schéma décentré amont (upwind). De plus, nous verrons que, numériquement, le schéma peut être plus précis si le pas de temps est assez grand (si la CFL est supérieure à 1). Nous étudierons aussi le schéma pour l'équation de diffusion et obtiendrons une convergence numérique dans le cas où la solution est le noyau de la chaleur entre un temps initial strictement plus grand que 0 et un temps final. Enfin, nous étudierons numériquement les solutions calculées par le schéma dans le cas de l'équation de continuité avec une contrainte de congestion.

Le second chapitre sera consacré à la méthode pour discrétiser le coût Wasserstein en dimension 2 d'espace. Comme dans le cadre de la dimension 1, nous verrons qu'il estime correctement les translations entre mesures. Nous pouvons obtenir une certaine consistance du schéma envers l'équation de continuité dans le cas où la vitesse est le gradient d'une fonction indépendante de la densité. Enfin, nous verrons comment simplifier l'algorithme sous certaines conditions et plusieurs résultats numériques pour différents problèmes : l'équation de diffusion ; le balayage d'une mesure ; l'équation de continuité avec contrainte de congestion qui intervient dans la modélisation des mouvements de foules.



# Equations flot-gradients et schéma

## JKO

---

### Introduction

On note  $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d), \mathcal{W}_2)$  l'espace des mesures de probabilité avec un moment d'ordre 2 fini muni de la distance de Wasserstein quadratique qui le rend complet (voir [63, 67]). Comme dans les parties précédentes, on confondra  $\rho$  avec sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

**Définition 2.14** (Sous-différentiel de Fréchet). *Soit  $\psi \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonctionnelle,  $\rho \in \mathcal{P}_2^a(\mathbb{R}^d)$  et  $u \in L^2_\rho(\mathbb{R}^d)$ . L'élément  $u$  appartient au sous-différentiel de Fréchet de  $\psi$  en  $\rho$  si pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  :*

$$\psi(\nu) - \psi(\rho) \geq \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathbf{t}'_\rho(x) - x, u(x) \rangle d\rho(x) + o(\mathcal{W}_2(\rho, \nu)) \quad (2.19)$$

où  $\mathbf{t}'_\rho$  représente le transport optimal de  $\rho$  à  $\nu$ , on note  $u \in \partial\phi(\rho)$ .

Cette définition généralise la notion de sous-différentiel de Fréchet à l'espace  $(\mathcal{P}_2^a(\mathbb{R}^d), \mathcal{W}_2)$ . On peut alors définir les équations flot-gradients dans l'espace de Wasserstein dans le cas simple où la densité est supposée absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette définition venant de [2] (page 280) est la suivante :

**Définition 2.15** (Flot-gradient). *Soit  $\Omega$  un domaine borné et  $(\rho_t)_{t \in ]0, T[}$  une famille de mesure de  $\mathcal{P}^a(\bar{\Omega})$  absolument continue en temps. On dit que  $\rho$  est une solution de l'équation flot-gradient associée à la fonctionnelle  $\psi : \mathcal{P}(\bar{\Omega}) \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  sur l'intervalle  $]0, T[$ , s'il existe une famille de champ des vitesses  $(u_t)_{t \in ]0, T[}$  telle que :*

$$\begin{cases} \partial_t \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t u_t) = 0, \\ u_t \in -\partial\psi(\rho_t) \text{ pour presque tout } t \in ]0, T[. \end{cases} \quad (2.20)$$

**Remarque 2.16.** *La première équation de (2.20) est à lire au sens des distributions sur  $\Omega$ , c'est-à-dire :  $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, T[ \times \Omega)$*

$$\int_0^T \int_\Omega u_t \partial_t \phi d\rho_t + \int_0^T \int_\Omega u_t \cdot \nabla \phi d\rho_t = 0.$$

Cette définition donne un cadre général pour étudier des équations d'évolution (voir [23, 24, 42, 58]). Nous donnons ici trois exemples qui seront utilisés par la suite : si  $\psi(\rho) =$

$\int_{\Omega} g(x)\rho(x) dx$  on retrouve l'équation de continuité :

$$\partial_t \rho_t - \nabla \cdot (\rho_t \nabla g) = 0. \quad (2.21)$$

Le second exemple qui sera traité est le cas où  $\psi(\rho) = \int_{\Omega} \rho(x) \ln(\rho(x)) dx$ , qui est la fonctionnelle associée à l'équation de la chaleur :

$$\partial_t \rho_t = \Delta \rho_t. \quad (2.22)$$

Enfin, si la fonctionnelle est de la forme  $\psi(\rho) = \int_{\Omega} g(x)\rho(x)dx + I_K(\rho)$ , où  $I_K$  représente la fonction caractéristique de  $K = \{\rho \in \mathcal{P}(\bar{\Omega}), \rho \leq 1\}$  :

$$I_K(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \in K, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

il a été montré dans [49] que, sous certaines conditions, l'équation flot-gradient associée pouvait se reformuler comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t u_t) = 0, \\ u_t = \mathbb{P}_{C_{\rho_t}}(-\nabla g), \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $\mathbb{P}_{C_{\rho_t}}$  représente la projection de la vitesse sur l'ensemble

$$C_{\rho_t} = \left\{ v \in L^2(\Omega)^d, \int_{\Omega} v \cdot \nabla q \leq 0 \forall q \in H_{\rho_t}^1(\Omega) \right\}$$

avec

$$H_{\rho_t}^1(\Omega) = \left\{ q \in H^1(\Omega), q \geq 0 \text{ p.p.}, q = 0 \text{ p.p. sur } [\rho_t < 1] \right\}.$$

Pour trouver une famille de solutions constantes par morceaux en temps convergeant vers la solution de l'équation des flot-gradients, DeGiorgi [27] et Ambrosio [1] ont utilisé un outil que nous allons décrire ci-dessous.

**Définition 2.17** (Schéma JKO). *Soit  $\tau > 0$  un pas de temps donné,  $\rho_{\tau}^0$  une densité initiale donnée,  $(\rho_{\tau}^1, \dots, \rho_{\tau}^n)$  des densités déjà calculées, le schéma calcule  $\rho_{\tau}^{n+1}$  comme suit :*

$$\rho_{\tau}^{n+1} \in \operatorname{argmin}_{\rho \in \mathcal{P}^a(\bar{\Omega})} \left\{ \psi(\rho) + \frac{1}{2\tau} \mathcal{W}_2(\rho_{\tau}^n, \rho)^2 \right\}. \quad (2.24)$$

**Remarque 2.18.** *On peut remarquer qu'il ne fait appel qu'à la distance associée à l'espace considéré et n'utilise pas le caractère différentiable d'un de ces éléments. Il s'inspire du schéma classique d'Euler implicite que l'on retrouve dans un cadre Euclidien : dans l'espace normé  $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$ , le schéma revient à*

$$x_{\tau}^{n+1} \in \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{R}^d} \left\{ \psi(y) + \frac{1}{2\tau} |x_{\tau}^n - y|^2 \right\}$$

dont la solution est

$$x_\tau^{n+1} = x_\tau^n - \tau \nabla \psi(x_\tau^{n+1})$$

le schéma d'Euler implicite pour l'équation :

$$\partial_t x(t) = -\nabla \psi(x(t)).$$

Pour des théorèmes de convergence, nous renvoyons le lecteur à [49] et [63].

Le problème de minimisation du schéma peut se réécrire en termes de plans de transport :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_\tau^{n+1} \in \operatorname{argmin}_{\mu \in \mathcal{P}(\bar{\Omega}^2) \mid \mathcal{X}_\#^1 \mu = \rho_\tau^n} \left\{ \psi(\mathcal{X}_\#^2 \mu) + \frac{1}{2\tau} \int_{X^2} \|x - y\|^2 d\mu(x, y) \right\}, \\ \rho_\tau^{n+1} := \mathcal{X}_\#^2 \mu_\tau^{n+1}, \end{array} \right. \quad (2.25)$$

où  $\mathcal{X}_\#^i \mu$  correspond à la projection sur la  $i^e$  marginal de  $\mu$  (voir annexe A page 179).

Par la suite, on omettra l'indice " $\tau$ " si il n'y a pas d'ambiguïté sur le pas de temps utilisé.

## Discrétisation naturelle du schéma et ces problèmes

### Description du schéma en dimension 1

Dans cette section, nous allons considérer le cas  $\bar{\Omega} = X = [0, L]$  avec  $L > 0$  et la fonctionnelle :

$$\psi : \rho \rightarrow \int_X g(x) \rho(x) dx$$

où  $g$  est une fonction suffisamment régulière et  $\rho \in \mathcal{P}^a(X)$ , l'équation flot-gradients associée à cette fonctionnelle est l'équation de continuité :

$$\partial_t \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t u) = 0 \quad (2.26)$$

où  $u = -\nabla g$ . Nous introduisons  $X^h$ , la discrétisation cartésienne de  $X$  en  $M$  cellules de taille  $h$ . On note  $C_i$  la cellule de  $X^h$  correspondant à l'intervalle  $[ih, (i+1)h]$  pour  $i \in I = \{0, \dots, M-1\}$ , avec  $Mh = L$ . On note  $\mathcal{P}^h$  l'espace des mesures de densité constante sur chaque cellule  $C_i$  de  $X^h$ , un élément de  $\mathcal{P}^h$  est alors identifié à un élément de  $\mathbb{R}^M$  :

$$\rho = (\rho_0, \dots, \rho_{M-1})$$

avec  $\rho_i = \frac{\rho(C_i)}{h} \geq 0$  représentant la densité moyenne de la cellule  $C_i$ . On peut définir de la même manière  $\mathcal{P}^{h \times h}$  les plans de transport de  $X^h$ , ils sont identifiés à des éléments de  $\mathbb{R}^{M^2}$  :

$$\mu = (\mu_{ij})_{i,j \in [0, M-1]^2}$$

avec  $\mu_{ij} = \mu(C_i, C_j) \geq 0$ . On note  $\mathbb{R}^h$  l'ensemble des fonctions de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  constante sur chaque cellule de  $X^h$ .

Une manière simple de discrétiser le coût Wasserstein lié au plan de transport  $\mu$  serait :

$$\int_{x,y \in X} \|x - y\|^2 d\mu(x, y) \approx \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \mu_{ij} \|x_i - x_j\|^2 \quad (2.27)$$

où  $x_i$  représente le centre de la cellule  $C_i$ . Par conséquent, une approximation du carré de la distance de Wasserstein est :

$$\min_{\mu \in \Pi^h(\rho, \nu)} \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \mu_{ij} \|x_i - x_j\|^2 \right\} \quad (2.28)$$

avec  $\Pi^h(\rho, \nu) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}^{h \times h} \mid \sum_{i=0}^{M-1} \mu_{ij} = h\nu_j, \sum_{j=0}^{M-1} \mu_{ij} = h\rho_i \right\}$ .

Une version discrétisée en espace du schéma (2.25) est le problème de minimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu^{n+1} \in \operatorname{argmin}_{\mu \in \Pi^h(\rho^n, \cdot)} \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} g_j \mu_{ij} + \frac{1}{2\tau} \mu_{ij} \|x_i - x_j\|^2 \right\}, \\ \rho_j^{n+1} := \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{M-1} \mu_{ij}^{n+1}, \end{array} \right. \quad (2.29)$$

avec

- $g_j = g(x_j)$  ;
- $\Pi^h(\rho^n, \cdot) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}^{h \times h} \mid \sum_{j=0}^{M-1} \mu_{ij} = h\rho_i^n \right\}$ .

**Remarque 2.19.** Dans le schéma (2.29), la minimisation des termes  $(\mu_{ij})_{j \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$  est indépendante de la minimisation des termes  $(\mu_{ij})_{j \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$ , on peut donc résoudre chacun des problèmes suivants séparément :

$\forall i = \llbracket 0, M-1 \rrbracket$ ,

$$(\mu_{ij})_{j \in \llbracket 1, M-1 \rrbracket} \in \operatorname{argmin}_{\mu_{ij} \geq 0 \mid \sum_{j=0}^{M-1} \mu_{ij} = h\rho_i^n} \left\{ \sum_{j=0}^{M-1} g_j \mu_{ij} + \frac{1}{2\tau} \mu_{ij} \|x_i - x_j\|^2 \right\} \quad (2.30)$$

c'est-à-dire qu'on peut calculer la destination de la masse se trouvant initialement dans la cellule  $C_i$  indépendamment du reste. En d'autres termes, la destination des particules se trouvant en  $C_i$  ne dépend pas des particules se trouvant dans une autre cellule. Par conséquent, l'étude du comportement du schéma peut se restreindre au cas où une seule cellule contient de la matière.

## Comportement du schéma

Considérons le cas simple où  $g : x \rightarrow -x$ , l'équation flot-gradient associée correspond alors à l'équation d'advection à vitesse constante 1. De plus, considérons que la densité initiale soit

supportée uniquement sur la première cellule  $C_0$  :

$$\rho^0 = (1/h, 0, \dots, 0),$$

le premier pas du schéma (2.29) mène au résultat suivant :

**Proposition 2.20.** *Soit  $\rho^1$  la densité calculée par le schéma (2.29), avec comme densité initiale  $\rho^0$  donnée ci-dessus, cette densité dépend de  $\tau$  de la manière suivante :*

- Si  $\tau < h/2$ , alors  $\rho^1 = \rho^0$  (aucun mouvement) ;
- Si  $\tau \in ](i - 1/2)h, (i + 1/2)h[$ , alors  $\rho^1 = \frac{1}{h}\mathbb{1}_{C_i}$  (toute la masse se déplace de  $i$  cellule vers la droite) ;
- Si  $\tau = (i - 1/2)h$ , alors  $\forall \theta \in [0, 1]$ ,  $\frac{(1-\theta)}{h}\mathbb{1}_{C_{i-1}} + \frac{\theta}{h}\mathbb{1}_{C_i}$  est solution du problème de minimisation.

Quelques remarques sur cette proposition :

1. le schéma ne donne pas une unique solution dans le cas où  $\tau = (i - 1/2)h$  ;
2. si  $\tau = h/2$ , une des solutions proposées par le schéma est la solution immobile  $\rho^i = \rho^0$ , inversement la solution qui est la plus mobile est celle correspondant à un transport à vitesse 2 ;
3. si  $\tau$  est trop petit, rien ne se passe et la nouvelle densité est exactement la même que la précédente ;
4. si  $\tau \in ](i - 1/2)h, (i + 1/2)h[$ , alors  $\rho^1 = \frac{1}{h}\mathbb{1}_{C_i}$ , le déplacement effectué par les particules est  $\Delta x = ih$  et leurs vitesses est  $\frac{\Delta x}{\tau} \in ]\frac{i}{i+1/2}, \frac{i}{i-1/2}[$ .

Cette dernière remarque montre une certaine consistance du schéma dans le cas où le rapport  $\frac{\tau}{h}$  est asymptotiquement infini (c'est-à-dire si  $i \rightarrow +\infty$ ). En effet, la vitesse des particules se rapprocherait asymptotiquement de 1.

La proposition suivante précise ce comportement.

**Proposition 2.21.** *Soit  $\rho^0 = \frac{1}{h}\mathbb{1}_{C_0}$  et  $T \in [0, \frac{1}{2}]$ , on note  $\rho(t) = \frac{1}{h}\mathbb{1}_{[t, t+h]}$  la solution de l'équation d'advection à vitesse constante égale à 1 avec  $\rho(0) = \rho^0$ . Soient  $N \in \mathbb{N}$  et  $\tau > 0$  le pas de temps tel que  $N\tau = T$  alors :*

$$W_2(\rho(T), \rho^N) \xrightarrow[\substack{h/\tau \rightarrow 0 \\ \tau \in ]0, T] \\ \tau/h \notin \mathbb{N} + 1/2}]{} 0. \quad (2.31)$$

*Démonstration.* D'après la proposition 2.20, on a  $\rho^1 = \frac{1}{h}\mathbb{1}_{C_i}$  avec  $i = \lfloor \frac{\tau}{h} + \frac{1}{2} \rfloor$  si  $\frac{\tau}{h} - \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ , par itération du procédé, on obtient que  $\rho^N = \frac{1}{h}\mathbb{1}_{C_{iN}}$ . Le déplacement des particules est alors de  $\Delta x = Ni h = Nh \lfloor \frac{\tau}{h} + \frac{1}{2} \rfloor \in ]N\tau - \frac{Nh}{2}, N\tau + \frac{Nh}{2}[$ . Comme  $\rho(T)$  est aussi l'indicatrice d'un intervalle, le transport optimal entre les deux densités est une translation d'amplitude

$|\Delta x - T|$ . Par conséquent, on obtient que

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2(\rho^N, \rho_T) &= |\Delta x - T| \\ &< \frac{T}{2} \times \frac{h}{\tau} \\ &\xrightarrow[h/\tau \rightarrow 0]{\substack{\tau \in ]0, T] \\ \tau/h \notin \mathbb{N} + 1/2}} 0. \end{aligned}$$

□

**Remarque 2.22.** *La contrainte sur le temps  $T$  permet à la solution de rester dans l'intervalle  $[0, 1]$ , la proposition est généralisable à un intervalle plus long (même à  $\mathbb{R}$ ). On peut aussi généraliser ce résultat à tout élément de  $\mathcal{P}^h$  en utilisant la remarque 2.19 .*

Cette propriété d'anti-CFL est due à la surestimation des coûts des déplacements de faible amplitude. Plus précisément, considérons une nouvelle fois  $\rho = \frac{1}{h} \mathbb{1}_{C_0}$ , on veut effectuer une translation d'amplitude  $\epsilon > 0$  ( $\epsilon \ll h$ ) à la densité  $\rho$ . Le représentant dans  $\mathcal{P}^h$  de ce translaté serait

$$\rho_{tr} = ((\text{Id} + \epsilon) \# \rho(C_i))_{i=0..M-1} = \left( \frac{1 - \epsilon}{h}, \frac{\epsilon}{h}, 0, \dots, 0 \right), \quad (2.32)$$

la solution donnée par le schéma upwind pour une advection à vitesse constante 1 durant un temps  $\epsilon$  (voir figure 2.3). Cependant, dans l'espace de Wasserstein, la densité  $\rho$  et son translaté sont séparés par une distance de  $\epsilon$ , alors que dans  $\mathcal{P}^h$  munit de la distance discrète donnée précédemment, les densités  $\rho$  et  $\rho_{tr}$  sont à distance  $\sqrt{\epsilon h}$ .

En voulant étaler la masse de manière uniforme dans la cellule suivante afin d'obtenir une densité constante par cellule, *on surestime le coût* associé à des déplacements de faible amplitude. Ceci se caractérise par l'inertie de la masse dans les cas où  $\tau$  est petit par rapport au pas d'espace  $h$ .

Des méthodes pour calculer le transport optimal entre deux densités ont été développées, notamment par Peyré [9, 61] en rajoutant une régularisation entropique au coût discret. D'autres méthodes de discrétisation existe comme [6–8, 21, 28, 29, 33–38, 46, 56, 57] en utilisant l'opérateur de Monge-Ampère ou [5, 59] en résolvant la formulation Bénéamou-Brenier du transport optimal. La méthode proposée ici consiste à calculer le coût de transport entre deux densités en regardant le flux de masse provenant d'une cellule et traversant les hyperplans définis par les interfaces des cellules. Cette méthode calcule avec exactitude le coût de translation d'une cellule comme défini ci-dessus. Dans les deux chapitres de cette partie, nous allons présenter cette nouvelle méthode dite de balayage transverse en dimension 1 et 2 de l'espace.

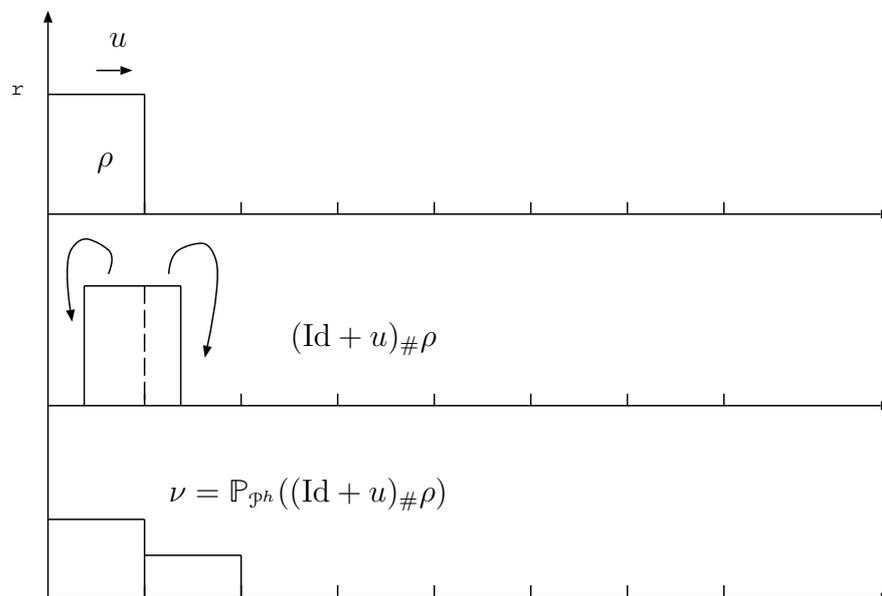


FIGURE 2.3 – Illustration de la méthode de projection sur  $\mathcal{P}^h$  dans le cas simple où une seule cellule a une densité non nulle (voir (3.1)).



# Méthode du balayage transverse en dimension 1

---

Ce chapitre a pour objet l'étude de la méthode de balayage transverse en dimension 1 de l'espace. Elle a pour principe de calculer le coût de déplacement d'une densité discrétisée en espace à une autre en utilisant les flux de masses traversant les hyperplans définis par les interfaces des cellules. Nous allons voir que cette méthode calcule avec exactitude le coût de déplacement d'une cellule dans l'espace discrétisé dans le sens où la distance entre la densité initiale et son translaté est la même dans l'espace de Wasserstein que la distance entre la même densité et le projeté  $L^2$  de son translaté dans l'espace discrétisé. De plus, nous verrons que sous certaines conditions, le schéma JKO muni de ce coût redonne l'algorithme upwind pour l'équation de continuité et qu'il approche numériquement le noyau de la chaleur pour l'équation de diffusion. Enfin, nous verrons qu'il s'adapte naturellement à des flots-gradients avec contrainte de congestion et nous proposerons une analyse numérique des schémas obtenus.

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Description et analyse de la méthode . . . . .</b>	<b>81</b>
3.1.1	Description de la méthode . . . . .	82
3.1.2	Etude du schéma pour l'équation de continuité . . . . .	86
3.1.3	Convergence numérique pour l'équation de la chaleur . . . . .	96
<b>3.2</b>	<b>Ajout de la contrainte de congestion . . . . .</b>	<b>98</b>
3.2.1	Equation de continuité avec contrainte de congestion . . . . .	100

---

## 3.1 Description et analyse de la méthode

Pour commencer, on note  $X = [0, L]$  l'espace utilisé avec  $L > 1$ . Notons  $I = \llbracket 0, M - 1 \rrbracket$  et  $X^h = \{C_i = [ih, (i + 1)h], i \in I\}$ , la discrétisation cartésienne de  $X$  en cellules de taille  $h$  avec  $Mh = L$ . On note  $\mathcal{P}^h$  l'espace des mesures de densité constante sur chaque cellule  $C_i$  de  $X^h$  et  $\mathcal{P}^{h \times h}$  les plans de transport de  $X^h$ . La première proposition nous permet de définir un représentant dans  $\mathcal{P}^h$  de tout élément de  $\mathcal{P}(X)$ .

**Proposition 3.1.** *Soit  $\rho \in \mathcal{P}(X)$ , on définit la fonctionnelle  $\mathbb{P}_{\mathcal{P}^h} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}^h$  de la manière*

suivante :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{P}^h}(\rho) := \left( \frac{\rho(C_0)}{h}, \dots, \frac{\rho(C_{M-1})}{h} \right), \quad (3.1)$$

la suite des densités moyennes<sup>1</sup> contenues dans  $C_i$  (voir figure 2.3). De plus, si  $\rho \in L^2(X)$ ,  $\mathbb{P}_{\mathcal{P}^h}$  est la projection au sens  $L^2(X)$  de  $\rho$  sur  $\mathcal{P}^h$  c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{P}^h}(\rho) = \operatorname{argmin}_{\nu \in \mathcal{P}^h} \left\{ \|\rho - \nu\|_{L^2(X)} \right\}.$$

**Remarque 3.2.** Le fait qu'on impose que  $L$  soit strictement plus grand que 1 est dû à la section 3.2 page 98 où l'on rajoute une contrainte  $L^\infty$  aux densités qu'on normalise par défaut à 1. Or, si  $L \leq 1$ , l'ensemble des densités plus petites que 1 est soit réduit à un singleton, soit vide. De manière générale, ce chapitre vaut pour tout ensemble de densités ayant la même masse, pour tout intervalle et pour l'ensemble des densités inférieures ou égale à une certaine constante, tant que cet ensemble est non vide.

### 3.1.1 Description de la méthode

Pour  $p \in P = \{1..M-1\}$ , on définit  $H_p$  l'hyperplan séparant la cellule  $C_{p-1}$  de  $C_p$  (en 1D le singleton  $\{hp\}$ ). On pose  $\sigma_{ip}$  la masse provenant de la cellule  $C_i$  qui a traversé l'hyperplan  $H_p$ . En terme de plan de transport, ce flux correspond à :

$$\sigma_{ip} = \begin{cases} \sum_{j=p}^{M-1} \mu_{ij} & \text{si } p > i, \\ \sum_{j=0}^{p-1} \mu_{ij} & \text{si } p \leq i, \end{cases}$$

où  $\mu_{ij}$  représente la masse passant de la cellule  $C_i$  à la cellule  $C_j$  ( $\mu_{ij} = \mu(C_i, C_j)$ ). Enfin, notons  $\sigma := (\sigma_{ip})_{(i,p) \in I \times P}$  la famille des flux de masse traversant les hyperplans sus-mentionnés. Nous allons étudier une fonction coût  $\tilde{W} : \mathcal{P}^h \rightarrow \mathbb{R}^+$  dépendant de  $\sigma$  qui estimera correctement les translations de cellule au sens où si  $\rho = \mathbb{1}_{C_i}$  est la fonction caractéristique d'une cellule et  $\rho_{tr} = (\operatorname{Id} + u)_\# \rho$  son translaté de  $u$ , on a :

$$\mathcal{W}_2(\rho, \rho_{tr})^2 = hu^2 = \tilde{W}(\rho, \mathbb{P}_{\mathcal{P}^h}(\rho_{tr}))^2, \quad (3.2)$$

le coût de transport d'une cellule à son translaté de  $u$  est le même dans  $\mathcal{P}(X) \cap L^2(X)$  avec la métrique de Wasserstein quadratique  $\mathcal{W}_2$  que dans  $\mathcal{P}^h$  avec la fonction coût modifiée  $\tilde{W}$  et cela quelque soit la cellule  $C_i$ . Il est important de noter que l'on considère qu'aucune masse ne peut sortir de l'intervalle  $[0, L]$ , cela se traduit par le fait que les nouvelles variables de notre coût ne prennent en compte que la masse traversant les hyperplans formées par les interfaces entre cellules. Il pourrait être possible de rajouter deux variables par cellule représentant la masse traversant l'hyperplan situé en 0 et l'hyperplan situé en  $L$  et de voir le coût attribué

---

1. Si  $\rho$  donne une masse non nulle à l'interface entre deux cellules, elle est répartie de manière égale sur les deux cellules.

à ces variables pour obtenir des solutions avec des conditions de bords différentes.

On note  $\mathbf{P} : \mathbb{R}^{I \times P} \times \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^I$  l'application qui à une famille de flux  $\sigma$  et une densité  $\rho$  de  $\mathcal{P}^h$  donne la nouvelle densité  $\nu$  de  $\mathcal{P}^h$  liée au déplacement de la masse par les flux de  $\sigma$  :

$$\forall j \in I, \mathbf{P}(\sigma, \rho)_j = \nu_j = \frac{1}{h} \left( h\rho_j - \sigma_{jj} - \sigma_{jj+1} + \sum_{\substack{i < j \\ i \in I}} (\sigma_{ij} - \sigma_{i,j+1}) + \sum_{\substack{i > j \\ i \in I}} (\sigma_{i,j+1} - \sigma_{ij}) \right)$$

avec, comme convention,  $\sigma_{ip} = 0$  si  $p \notin P$ .

**Remarque 3.3.** *Les différents termes de ces sommes doivent être interprétés comme suit (voir aussi figure 3.1) :*

- $(\sigma_{ii} + \sigma_{ii+1})$  représente la masse traversant les deux hyperplans formant la frontière de  $C_i$ , c'est la masse perdue par cette cellule, l'équivalent de  $\mu(C_i, \mathbb{R} \setminus C_i)$  ou  $\sum_{j \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket \setminus \{i\}} \mu_{ij}$ , elle est donc inférieure à  $h\rho_i$ , la masse contenue dans la cellule ;
- si  $i < j$ ,  $(\sigma_{ij} - \sigma_{i,j+1})$  représente la masse provenant de  $C_i$  qui a traversé l'hyperplan  $H_j$  mais qui n'a pas traversé  $H_{j+1}$ , c'est la masse provenant de  $C_i$  et à destination de  $C_j$ , c'est-à-dire l'équivalent de  $\mu(C_i, C_j)$  ou  $\mu_{ij}$  ;
- si  $i > j$ ,  $(\sigma_{i,j+1} - \sigma_{ij})$  représente la masse provenant de  $C_i$  et à destination de  $C_j$ , c'est-à-dire l'équivalent de  $\mu(C_i, C_j)$  ou  $\mu_{ij}$ .

**Remarque 3.4.** *Il serait possible de définir un coût naturel avec les flux de  $\sigma$  car, en dimension 1, il existe une bijection entre  $\sigma$  et  $\mu$ . Cependant, ce coût naturel aurait les mêmes problèmes que ceux évoqués page 78. Ici, nous allons définir un coût que nous avons élaboré et dont la raison de l'utilisation de ces valeurs pour les coefficients peut paraître obscur. Ils ont été trouvés en faisant une analyse sur le coût des translations des fonctions caractéristiques des cellules.*

Le coût modifié avec la méthode de balayage transverse est le suivant :

**Définition 3.5.** Soient  $\rho = \sum_{i=0}^{M-1} \rho_i \mathbb{1}_{C_i}$ ,  $\nu = \sum_{i=0}^{M-1} \nu_i \mathbb{1}_{C_i}$  et  $I(\rho) = \{i \in I, \rho_i > 0\}$ , on définit  $\tilde{W}$  la fonction coût comme suit :

$$\tilde{W}(\rho, \nu)^2 = \min_{\sigma \in \Sigma^h(\rho, \nu)} \sum_{i \in I(\rho)} \sum_{p \in P} \left( \frac{h}{\rho_i} \sigma_{ip}^2 + 2m_{ip} h \sigma_{ip} \right)$$

avec  $m_{ip} := \text{dist}(C_i, H_p) = \min(|x_p - x_i|, |x_p - x_i + h|)$  représentant la distance entre l'hyperplan  $H_p$  et la cellule  $C_i$ ,

$$\Sigma^h(\rho, \nu) = \{\sigma \in \text{Adm}(\rho) \mid \mathbf{P}(\sigma, \rho) = \nu\}$$

et

$$\text{Adm}(\rho) = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}_+^{I \times P} \mid \forall j \in I \begin{cases} \sigma_{ij} \geq \sigma_{i,j+1} & \text{si } i < j \\ \sigma_{i,j+1} \geq \sigma_{ij} & \text{si } i > j \\ \sigma_{ii} + \sigma_{i,i+1} \leq h\rho_i \end{cases} \right\}.$$

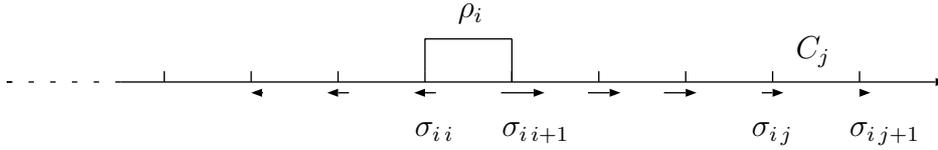


FIGURE 3.1 – Masse envoyée par la cellule  $C_i$ .

Nous allons voir que ce coût estime correctement le déplacement d'une cellule dans  $X^h$  via la proposition suivante :

**Proposition 3.6.** Soient  $\rho = \rho_i \mathbb{1}_{C_i}$  et  $u \in \mathbb{R}$  de sorte que  $(\text{Id} + u)(C_i) \subset [0, L]$ , alors

$$\tilde{W}(\rho, \mathbb{P}_{\mathcal{P}^h}((\text{Id} + u)_\# \rho)) = \mathcal{W}_2(\rho, (\text{Id} + u)_\# \rho).$$

*Démonstration.* Supposons  $u \geq 0$ , posons  $j \in I$  de telle sorte que :

$$ih + u - jh := l \in [0, h[$$

$j$  existe car  $(\text{Id} + u)_\#(C_i) \subset [0, L]$ , on note  $\nu = \mathbb{P}_{\mathcal{P}^h}((\text{Id} + u)_\# \rho) = \frac{h-l}{h} \mathbb{1}_{C_j} + \frac{l}{h} \mathbb{1}_{C_{j+1}}$ , l'unique famille  $\sigma$  telle que  $\mathbf{P}(\sigma, \rho) = \nu$  est la suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{ip} = \rho_i h^2 & \text{si } p \in \llbracket i+1, j \rrbracket, \\ \sigma_{i,j+1} = \rho_i h^2 \left( \frac{l}{h} \right), \\ \sigma_{i'p'} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Le coût associé à cette famille est alors :

$$\begin{aligned}
 \tilde{W}(\rho, \nu)^2 &:= \sum_{i' \in I} \sum_{p' \in P} \left( \frac{h\sigma_{i'p'}^2}{\rho_i} + 2m_{i'p'} h\sigma_{i'p'} \right) \\
 &= \sum_{p=i+1}^{j+1} \left( \frac{h\sigma_{ip}^2}{\rho_i} + 2(p-i-1)h^2\sigma_{ip} \right) \\
 &= \sum_{p=0}^{j-i} \left( \frac{h\sigma_{ip+i+1}^2}{\rho_i} + 2ph^2\sigma_{ip+i+1} \right) \\
 &= \rho_i h^3 \left( \sum_{p=0}^{j-i-1} (1+2p) \right) + \rho_i h^3 \left( \frac{l}{h} \right)^2 + 2(j-i)\rho_i h^3 \frac{l}{h} \\
 &= \rho_i h^3 \left( \sum_{p=0}^{j-i-1} ((p+1)^2 - p^2) \right) + \rho_i h^3 \left( \frac{l}{h} \right)^2 + 2(j-i)\rho_i h^3 \frac{l}{h} \\
 &= \rho_i h^3 (j-i)^2 + \rho_i h^3 \left( \frac{l}{h} \right)^2 + 2(j-i)\rho_i h^3 \frac{l}{h} \\
 &= \rho_i h (l + h(j-i))^2 \\
 &= \rho_i h u^2
 \end{aligned}$$

de même, si  $u < 0$  alors  $j < i$  et on a :

$$\begin{cases} \sigma_{ip} = \rho_i h^2 \text{ si } p \in \llbracket j+2, i \rrbracket, \\ \sigma_{ij+1} = \rho_i h^2 \left( \frac{h-l}{h} \right), \\ \sigma_{i'p'} = 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned}
 &\sum_{p'=j+1}^i \frac{h(\sigma_{ip'})^2}{\rho_i} + 2hm_{ip'}\sigma_{ip'} \\
 &= \sum_{p=0}^{i-j-1} \frac{h(\sigma_{ij+1+p})^2}{\rho_i} + 2h^2p\sigma_{ij+1+p} \\
 &= \rho_i h^3 \left( \sum_{p=0}^{i-j-2} (1+2p) \right) + \frac{h(\sigma_{ij+1})^2}{\rho_i} + 2(i-j-1)h^2\sigma_{ij+1} \\
 &= (hi - hj - h)^2 \rho_i h^3 + \left( \frac{h-l}{h} \right)^2 \rho_i h^3 + 2(hi - hj - h) \left( \frac{h-l}{h} \right) \rho_i h^2 \\
 &= \rho_i h^2 (hi - jh - h + (h-l))^2 \\
 &= \rho_i h^2 (h(i-j) - l)^2 \\
 &= \rho_i h^2 u^2.
 \end{aligned}$$

□

Le schéma JKO discrétisé en espace peut se voir comme une minimisation sur l'ensemble

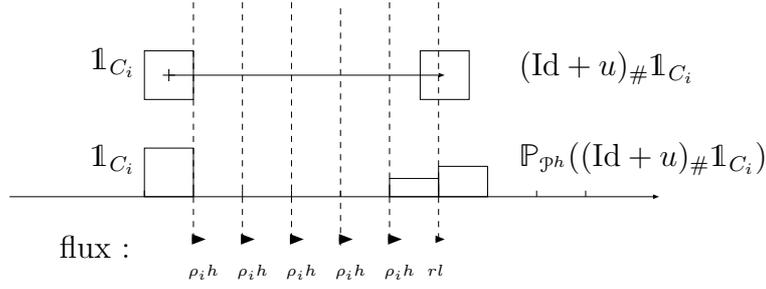


FIGURE 3.2 – Représentation de la translation par le vecteur  $u$ , de la cellule  $C_i$  de densité  $\rho_i$ , en haut, dans le cas de  $\mathcal{P}([0, 1])$ , en bas, dans  $\mathcal{P}^h$ .

des familles de flux admissibles :

**Schéma JKO 1. (Schéma 1D)**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^{n+1} \in \operatorname{argmin}_{\sigma \in \operatorname{Adm}(\rho^n)} \left\{ \psi \circ \mathbf{P}(\sigma, \rho^n) + \frac{1}{2\tau} \sum_{i \in I(\rho^n)} \sum_{p \in P} \left( \frac{h}{\rho_i^n} \sigma_{ip}^2 + 2m_{ip} h \sigma_{ip} \right) \right\} \\ \rho^{n+1} := \mathbf{P}(\sigma^{n+1}, \rho^n) \end{array} \right.$$

avec

$$\operatorname{Adm}(\rho^n) = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}_+^{I \times P} \mid \forall j \in I \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} \geq \sigma_{i,j+1} \text{ si } i < j \\ \sigma_{i,j+1} \geq \sigma_{ij} \text{ si } i > j \\ \sigma_{ii} + \sigma_{i,i+1} \leq h \rho_i^n \end{array} \right. \right\}.$$

Dans la section suivante, nous allons étudier le comportement des solutions données par le schéma JKO dans le cas où la fonctionnelle  $\psi$  est linéaire par rapport à  $\rho$ . L'équation flot-gradient associée à cette fonctionnelle est l'équation de continuité.

### 3.1.2 Etude du schéma pour l'équation de continuité

Cette sous-section sera séparée en trois points. Le premier traitera le cas de l'équation de continuité avec une vitesse constante  $u$ . Nous verrons que l'algorithme redonne pour n'importe quel pas de temps  $\tau$  le projeté  $L^2$  dans  $X^h$  du translaté d'amplitude  $\tau u$  de la densité initiale tant que celle-ci reste dans  $X = [0, L]$ . Ensuite, nous aborderons l'équation de continuité dans le cas d'une vitesse générale, nous verrons que pour  $\tau$  suffisamment petit, la matière se déplace uniquement dans les cellules voisines donnant le même résultat que dans le cas d'un schéma décentré amont (upwind). Nous terminerons cette sous-section par deux exemples numériques, l'un dont la vitesse varie peu en espace, un second où elle varie beaucoup plus.

### Cas de la vitesse constante

Pour commencer, considérons le cas où  $\psi(\rho) = \int_X g(x)\rho(x) dx$  avec  $g(x) = -ux$ ,  $u \geq 0$ . Cette fonctionnelle est associée à l'équation d'advection à vitesse  $u$  :

$$\partial_t \rho_t + u \partial_x \rho_t = 0. \quad (3.3)$$

La proposition suivante montre que le nouveau coût gère correctement les translations de densités via le schéma JKO. Si on applique le schéma JKO pour toute donnée initiale  $\rho$  durant un pas de temps  $\tau$  avec la fonctionnelle correspondant à l'équation d'advection à vitesse constante  $u$ , le schéma nous renvoie le projeté de la translation de  $\rho$  d'amplitude  $\tau u$ . Pour cela, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 3.7.** *Soient  $\tau > 0$ ,  $\rho = \rho_0 \mathbf{1}_{C_0}$  et  $g : x \rightarrow -ux$  avec  $0 \leq u \leq \frac{L-h}{\tau}$ . On pose  $g_i = g((i + \frac{1}{2})h)$ , alors*

$$\mathbb{P}_{\mathcal{P}^h}((Id + \tau u)_{\#} \rho) = \operatorname{argmin}_{\xi \in \mathcal{P}^h} \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} h g_i \xi_i + \frac{1}{2\tau} \tilde{W}(\rho, \xi)^2 \right\}.$$

*Démonstration.* Si on regarde le problème de minimisation avec comme variable la famille des flux  $\sigma$  :

$$\min_{\bar{\sigma} \in \operatorname{Adm}(\rho)} \left\{ \sum_{j \in I} h g_j \mathbf{P}(\bar{\sigma}, \rho)_j + \frac{1}{2\tau} \sum_{i \in I(\rho)} \sum_{p \in P} \frac{h}{\rho_i} \bar{\sigma}_{ip}^2 + 2m_{ip} h \bar{\sigma}_{ip} \right\}$$

la fonctionnelle à minimiser est convexe et sous contraintes linéaires, il existe donc un minimum global  $\sigma$ .

Comme seul  $\rho_0 > 0$  il est évident que

$$\sigma_{ij} = 0 \text{ si } i \neq 0$$

On pose

$$\tilde{J}(\rho, \nu) = \sum_{j=0}^{M-1} -(j + \frac{1}{2}) u h \mathbf{P}(\bar{\sigma}, \rho)_j + \frac{h^2}{2\tau} \left( \sum_{p=1}^{M-1} \frac{(\sigma_{0p})^2}{h \rho_0} + 2(p-1) \sigma_{0p} \right)$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \sigma_{0p}} &= -[(p+1/2)h - (p-1/2)h] u + \frac{h^2}{\tau} \left( \frac{\sigma_{0p}}{h \rho_0} + (p-1) \right) \\ &= \frac{h^2}{\tau} \left( -\frac{u\tau}{h} + \frac{\sigma_{0p}}{h \rho_0} + p - 1 \right) \\ &\in \left[ \frac{h^2}{\tau} \left( -\frac{u\tau}{h} + p - 1 \right), \frac{h^2}{\tau} \left( -\frac{u\tau}{h} + p \right) \right] \end{aligned}$$

et  $-\frac{u\tau}{h} + p \leq 0$  tant que  $p \leq p_m := \lfloor \frac{u\tau}{h} \rfloor$ , c'est-à-dire  $\tau u \in [hp_m, h(p_m + 1)]$ . En utilisant les

inéquations d'Euler, on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_{0p} = h\rho_0 \text{ si } p \leq p_m + 1, \\ \sigma_{0p_m+1} = h\rho_0 \left( \frac{u\tau}{h} - p_m \right), \\ \sigma_{0p} = 0 \text{ si } p > p_m + 1, \end{cases}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \nu &= \rho_0 \left( \frac{u\tau}{h} - p_m \right) \mathbb{1}_{C_{p_m+1}} + \rho_0 \left( p_m + 1 - \frac{u\tau}{h} \right) \mathbb{1}_{C_{p_m}} \\ &= \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \frac{(\text{Id} + \tau u)_{\#} \rho(C_i) \cap C_j}{h} \mathbb{1}_{C_j}. \end{aligned}$$

En conclusion, on retrouve que

$$\nu = \mathbb{P}_{\mathcal{P}h}((\text{Id} + \tau u)_{\#} \rho).$$

□

**Remarque 3.8.** La contrainte  $u \leq \frac{L-h}{\tau}$  est due au fait que la densité doit rester dans l'intervalle  $[0, L]$ , cela dit, on pourrait montrer que si  $u > \frac{L-h}{\tau}$  alors toute la masse est envoyée sur la dernière cellule  $C_{M-1}$ .

De ce lemme et de la remarque 2.19, il est possible de généraliser. En effet, la minimisation des  $(\sigma_{ip})_{p \in P}$  est indépendante de la minimisation des  $(\sigma_{i'p})_{p \in P}$  si  $i' \neq i$ , notons qu'il est important de remarquer que :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ip}} \left( \sum_{k=0}^{M-1} g_k \nu_k \right) = \begin{cases} \frac{g_p - g_{p-1}}{h} = u \text{ si } i < p, \\ \frac{g_{p-1} - g_p}{h} = -u \text{ si } i \geq p. \end{cases}$$

Le lemme précédent se généralise de la manière suivante :

**Proposition 3.9.** Soit la densité  $\rho = \sum_{i=0}^{M-1} \rho_i \mathbb{1}_{C_i}$  telle que pour tout  $i \in I$ ,  $\rho_i > 0 \Rightarrow (\text{Id} + \tau u)(C_i) \subset [0, 1]$  alors

$$\mathbb{P}_{\mathcal{P}h}((\text{Id} + \tau u)_{\#} \rho) = \operatorname{argmin}_{\xi \in \mathcal{P}h} \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} h g_i \xi_i + \frac{1}{2\tau} \tilde{W}(\rho, \xi)^2 \right\}.$$

*Démonstration.* Cette proposition se prouve en généralisant le lemme 3.7 à toute cellule  $i \in I$  et en remarquant que la minimisation des  $(\sigma_{ip})_{p \in P}$  ne dépend pas de celle des  $(\sigma_{i'p})_{p \in P}$  pour  $i'$  différent de  $i$ . □

**Remarque 3.10.** Dans le cas où il existe une cellule  $C_i$  telle que  $(\text{Id} + \tau u)(C_i) \not\subset [0, L]$ , mais, par exemple,  $(\text{Id} + \tau u)(C_i) \subset [0, +\infty[$ , alors toute la masse se trouvant dans cette cellule se

déplace dans celle la plus à droite, c'est-à-dire  $C_{M-1}$ . Inversement, si  $(Id + \tau u)(C_i) \not\subset [0, L]$  mais  $(Id + \tau u)(C_i) \subset ]-\infty, L]$  alors toute la masse de la cellule  $C_i$  se déplace sur la cellule la plus à gauche  $C_0$ .

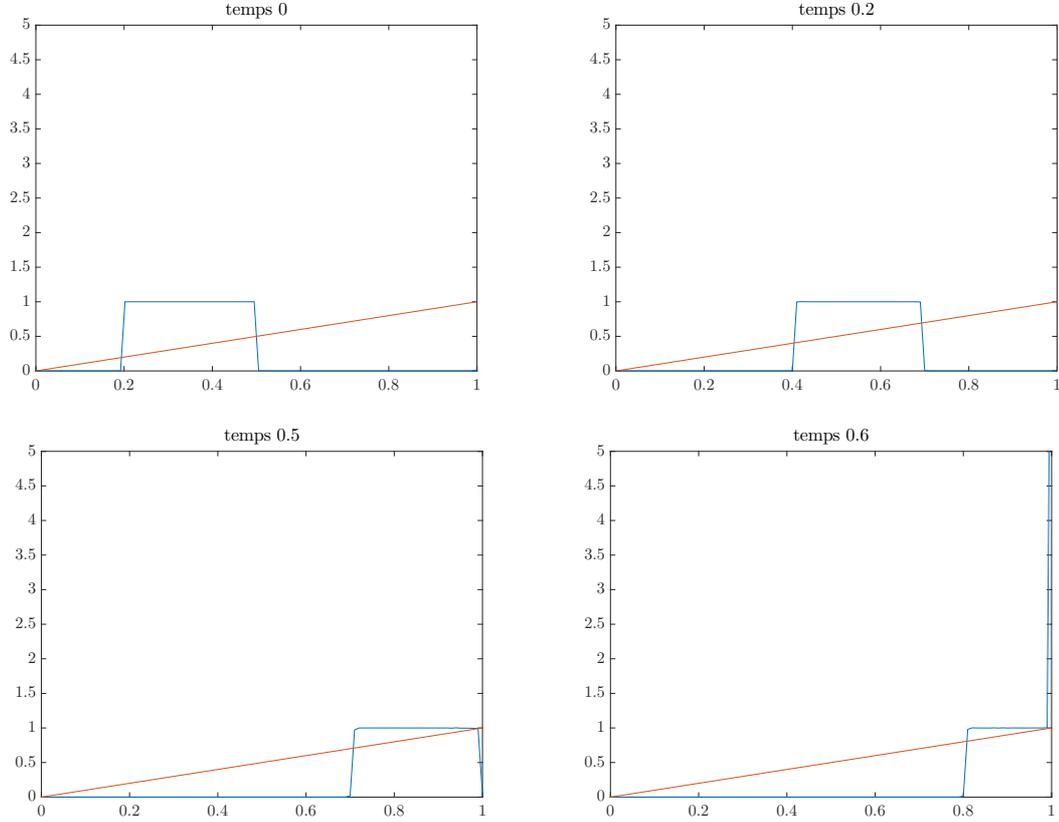


FIGURE 3.3 – Représentation du résultat calculé par le schéma JKO (voir la proposition 3.9) dans le cas où  $g(x) = -x$ ,  $M = 100$ ,  $\tau = 0.1$  et la densité initiale  $\rho^0 = \mathbb{1}_{[0.2,0.5]}$ . En bleu, la solution calculée par l'algorithme, en rouge,  $-g$ , rappelons que  $u = -\nabla g$ .

### Cas général

Nous allons maintenant nous intéresser au cas de l'équation de continuité :

$$\partial_t \rho_t - \partial_x (\rho_t \nabla g) = 0.$$

Le principal résultat obtenu est que, si le pas de temps est suffisamment petit, le schéma JKO nous redonne le schéma décentré amont (upwind). Comme expliqué dans la remarque 2.19, on peut considérer que la mesure de départ possède de la masse que dans une seule cellule  $C_i$ . On pose

$$\forall p \in P, u_p = \frac{g_p - g_{p-1}}{h}$$

on peut voir ce terme comme la vitesse des particules au niveau de l'hyperplan  $H_p$ .

**Proposition 3.11.** Soient  $\tau > 0$ ,  $i \in \{1, M - 2\}$ ,  $\rho = \rho_i \mathbb{1}_{C_i}$  et  $\|\partial_x g\|_\infty \leq \frac{h}{\tau}$ . On pose  $g_i = g((i + \frac{1}{2})h)$ , et

$$\nu = \operatorname{argmin}_{\xi \in \mathcal{P}^h} \left\{ \sum_{j=0}^{M-1} h g_j \xi_j + \frac{1}{2\tau} \tilde{W}^2(\rho, \xi) \right\}.$$

De plus,  $(u)^+ \in \mathbb{R}_+$  représente la partie positive de  $u$ ,  $(u)^- \in \mathbb{R}_+$  la partie négative, on obtient :

- si  $1 - \frac{\tau(u_i)^-}{h} - \frac{\tau(u_{i+1})^+}{h} \geq 0$  :

$$\nu = \rho_i \left( \frac{\tau(u_{i+1})^+}{h} \right) \mathbb{1}_{c_{i+1}} + \rho_i \left( \frac{\tau(u_i)^-}{h} \right) \mathbb{1}_{c_{i-1}} + \rho_i \left( 1 - \frac{\tau(u_i)^-}{h} - \frac{\tau(u_{i+1})^+}{h} \right) \mathbb{1}_{C_i};$$

- sinon :

$$\nu = \rho_i \left( \frac{1}{2} + \frac{\tau[(u_{i+1})^+ - (u_i)^-]}{2h} \right) \mathbb{1}_{c_{i+1}} + \rho_i \left( \frac{1}{2} + \frac{\tau[(u_i)^- - (u_{i+1})^+]}{2h} \right) \mathbb{1}_{c_{i-1}}.$$

**Remarque 3.12.** Si  $\|\partial_x f\|_\infty \leq \frac{h}{2\tau}$ , on obtient toujours

$$\nu = \rho_i \left( \frac{\tau(u_{i+1})^+}{h} \right) \mathbb{1}_{c_{i+1}} + \rho_i \left( \frac{\tau(u_i)^-}{h} \right) \mathbb{1}_{c_{i-1}} + \rho_i \left( 1 - \frac{\tau(u_i)^-}{h} - \frac{\tau(u_{i+1})^+}{h} \right) \mathbb{1}_{C_i}$$

ce qui revient à un schéma décentré amont (upwind).

*Démonstration.* Posons  $\nu := \mathbf{P}(\sigma, \rho)$  et :

$$\tilde{J}(\sigma) = \sum_{j \in I} h g_j \nu_j + \frac{1}{2\tau} \left( \sum_{i \in I(\rho)} \sum_{p \in P} \frac{(\sigma_{ip})^2}{\rho_i} h + 2m_{ip} h \sigma_{ip} \right)$$

qui est convexe sous contraintes linéaires, il existe donc un minimum  $\sigma$ , de plus :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{J}(\sigma)}{\partial \sigma_{ip}} &= (g_p - g_{p-1}) (-1)^{\mathbb{1}_{i \geq p}} + \frac{1}{\tau} \left( \frac{\sigma_{ip}}{\rho_i} h + m_{ip} h \right) \\ &= \frac{h^2}{\tau} \left( \frac{\sigma_{ip}}{h \rho_i} + \frac{m_{ip}}{h} + (-1)^{\mathbb{1}_{i \geq p}} \frac{\tau u_p}{h} \right). \end{aligned}$$

Comme  $\|\partial_x f\|_\infty \leq h/\tau$ , on a  $|u_p| \leq h/\tau$  et, par conséquent,

$$\frac{m_{ip}}{h} + (-1)^{\mathbb{1}_{i \geq p}} \frac{\tau u_p}{h} \geq 0,$$

si  $m_{ip} \geq h$  c'est-à-dire  $p \notin \{i, i + 1\}$ . En utilisant les inéquations d'Euler, on en conclut que :

$$\sigma_{ip} = 0 \text{ si } p \notin \{i, i + 1\}.$$

Enfin, le système résultant est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{J}(\sigma)}{\partial \sigma_{ii+1}} = \frac{h^2}{\tau} \left( \frac{\sigma_{ii+1}}{h\rho_i} - \frac{\tau u_{i+1}}{h} \right), \\ \frac{\partial \tilde{J}(\sigma)}{\partial \sigma_{ii}} = \frac{h^2}{\tau} \left( \frac{\sigma_{ii}}{h\rho_i} + \frac{\tau u_i}{h} \right), \end{cases} \quad (3.4)$$

et le minimum est obtenu lorsque

$$\begin{cases} \sigma_{ii+1} = h\rho_i \left( \frac{\tau(u_{i+1})^+}{h} \right), \\ \sigma_{ii} = h\rho_i \left( \frac{\tau(u_i)^-}{h} \right), \end{cases}$$

si la contrainte  $h\rho_i - \sigma_{ii} - \sigma_{ii+1} \geq 0$  n'est pas violée. Si c'est le cas, les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{J}(\sigma)}{\partial \sigma_{ii}} = \frac{\partial \tilde{J}(\sigma)}{\partial \sigma_{ii+1}}, \\ h\rho_i - \sigma_{ii} - \sigma_{ii+1} = 0, \end{cases}$$

sachant que dans ce cas on a  $(u_i)^- > 0$  et  $(u_{i+1})^+ > 0$ , on obtient

$$\begin{cases} \sigma_{ii+1} = h\rho_i \left( \frac{1}{2} + \frac{\tau[(u_{i+1})^+ - (u_i)^-]}{2h} \right) \geq 0, \\ \sigma_{ii} = h\rho_i \left( \frac{1}{2} + \frac{\tau[(u_i)^- - (u_{i+1})^+]}{2h} \right) \geq 0, \end{cases}$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

Même si les résultats théoriques nécessitent une condition type CFL inférieure à 1, nous verrons avec les exemples numériques que le schéma converge aussi au-delà d'une CFL de 1. Cependant on peut remarquer que si  $p > i$  :

$$\frac{\partial \tilde{J}(\rho, \nu)}{\partial \sigma_{ip}} = \frac{h^2}{\tau} \left( \frac{\sigma_{ip}}{h\rho_i} + \frac{x_p - x_i - h}{h} - \frac{\tau u_p}{h} \right). \quad (3.5)$$

Une condition suffisante pour envoyer toute la masse de  $C_i$  dans la cellule du bord de droite  $C_{M-1}$  est que tous les flux  $\sigma_{ip}$  pour  $p \geq i+1$  soient maximaux, c'est-à-dire  $\sigma_{ip} = h\rho_i$  pour  $p \geq i+1$ . Pour cela, il suffit que :

$$\begin{cases} \tau u_{i+1} \geq h, \\ u_{p+1} - u_p \geq \frac{h}{\tau}. \end{cases}$$

Ces conditions sont obtenues dans le cas suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) = -x^2; u(x) = 2x; \\ \tau = 0.5; \\ h < 0.1; \\ T = 0.5; \\ \rho^0 = \mathbb{1}_{[0.1,0.3]}; \\ L = 1. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

La solution de l'équation de continuité est donné par  $\rho_\tau = e^{-1} \mathbb{1}_{[0.1e,0.3e]}$ , mais le schéma nous donne dans ce cas  $\rho^1 = \frac{0.2}{h} \mathbb{1}_{C_{M-1}}$ .

Cependant, ce problème n'est pas lié à la discrétisation spatiale mais au schéma en lui-même. On rappelle que le schéma JKO associé aux données précédentes non discrétisé en espace est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_\tau^1 \in \operatorname{argmin}_{\mu \in \mathcal{P}(X^2) \mid \pi_{\#}^1 \mu = \rho^0} \left\{ \int_{X^2} \left( -y^2 + \frac{1}{2\tau} \|x - y\|^2 \right) d\mu(x, y) \right\}, \\ \rho_\tau^1 := \mathbb{K}_{\#}^2 \mu_\tau^1, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

et la solution est  $\rho_\tau^1 = 0.2\delta_1$  tant que les particules les plus à gauche minimiseront le coût de cette fonctionnelle en se déplaçant le plus à droite possible, ce qui est le cas si

$$-2y + \frac{y - 0, 1}{2\tau} \leq 0 \quad (3.8)$$

pour tout  $y \in [0.1, 1]$ , condition qui est vérifiée dans notre exemple.

## Convergence numérique

Nous allons étudier la convergence numérique de notre schéma avec certains exemples. On teste la convergence de notre algorithme en utilisant la norme  $L_h^2$  c'est-à-dire :

$$\sqrt{h} \|\rho^n - (\rho(T_{init} + n\tau, x_i))_{i \in I}\|_{l^2} \quad (3.9)$$

où  $(t, x) \rightarrow \rho(t, x)$  représente la solution théorique. Dans les exemples ci-après, cette norme est maximale au temps final c'est-à-dire au dernier pas de temps  $n = N$  tel que  $N\tau \approx T$ . Par conséquent, on représentera que la norme  $L_h^2$  au temps final.

**Premier exemple :** Les figures 3.4 représentent la solution de l'équation de continuité  $(t, x) \rightarrow \rho(t, x)$  avec la donnée initiale  $\rho^0$  (en jaune) et celle calculée par l'algorithme avec

les paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = [0, 1]; \\ \rho_0 = e^{-350(x-0.2)^2}; \\ g(x) = -x^2; \\ T \approx 0.45; \\ M = 400; \\ \tau = \frac{1}{M} = 0.0025; \\ \rho(t, x) = \frac{e^{-350(xe^{-2t}-0.2)^2}}{e^{2t}}; \\ \frac{\|u\|_\infty \tau}{h} = 2. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

La solution exacte est donnée par la fonction  $(t, x) \rightarrow \rho(t, x)$  définie ci-dessus. La vitesse est alors  $-\nabla g(x) = u(x) = 2x$  et varie assez faiblement sur  $[0, 1]$ .

Les figures 3.5 montrent la dépendance de la convergence par rapport aux paramètres  $\tau$  et  $h$ . On remarque qu'à  $\tau$  fixé, la convergence ne semble pas dépendre de  $h$ . Inversement, à  $h$  fixé, la convergence dépend de  $\tau$  mais ne peut être trop petit (de l'ordre de la CFL) sinon la diffusion entraîne des erreurs trop grandes. De plus on remarque que le schéma converge même si  $\frac{\|u\|_\infty \tau}{h} = 2$ .

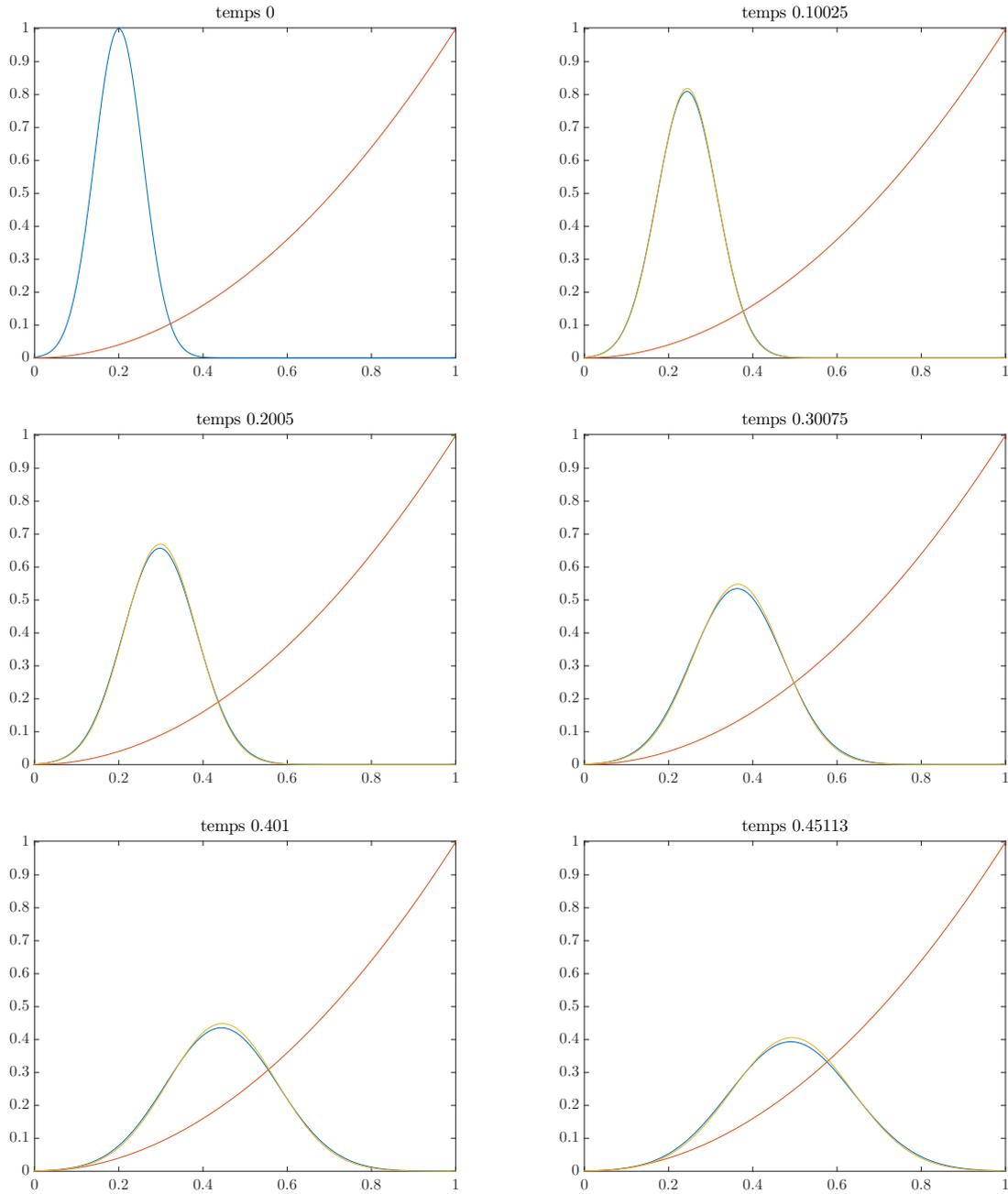


FIGURE 3.4 – Représentation de l'exemple 1 (voir (3.10)) : en jaune la solution  $\rho$ , en bleu la solution calculée par le schéma, en rouge  $-g$ .

**Second exemple :** Dans ce second exemple, la vitesse  $u(x) = -\nabla g(x) = \frac{1}{3x^2}$  varie de 1.33 à 8.33 sur le support de la densité initiale, il est intéressant de voir la convergence de la solution calculée selon le rapport  $\frac{\|u\|_{\infty} \tau}{h}$  variant entre 0.1 et 8. Les figures 3.6 montrent la solution calculée par l'algorithme et la solution à différents pas de temps pour les paramètres

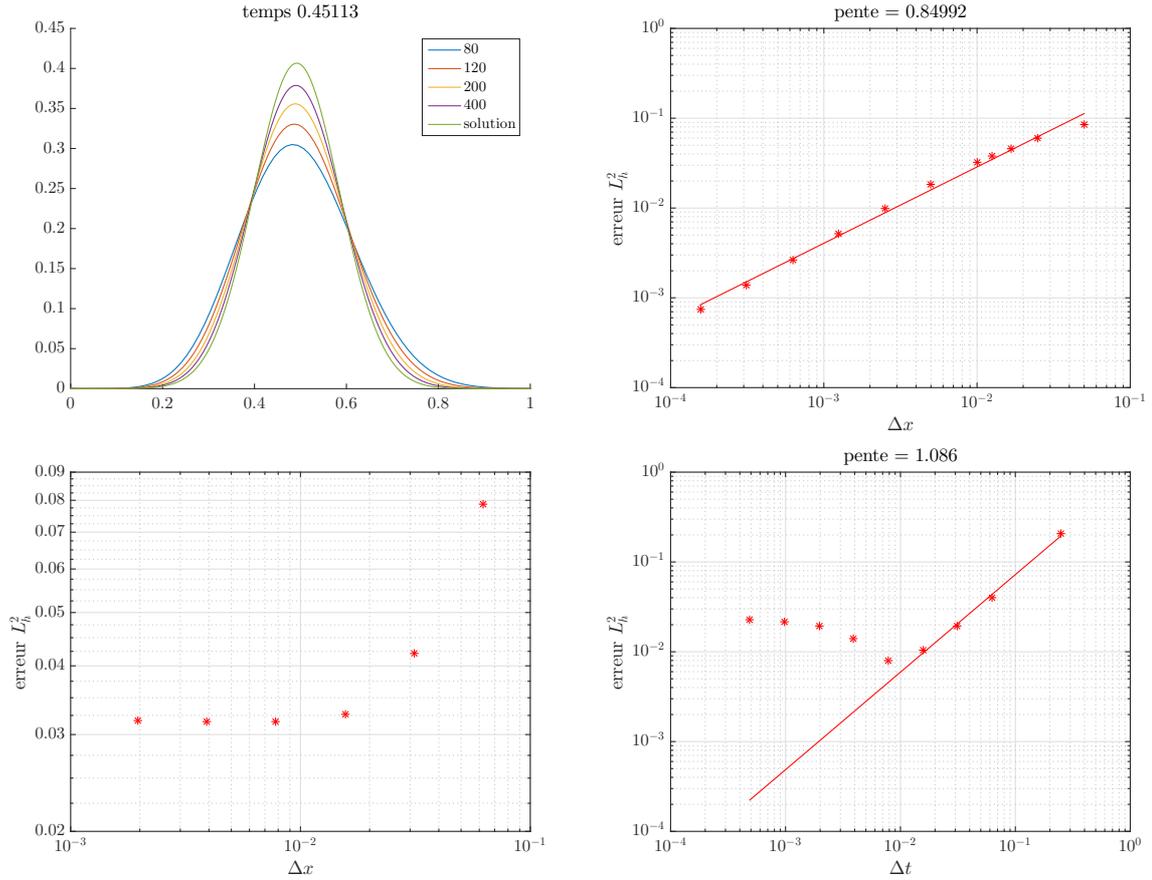


FIGURE 3.5 – De gauche à droite puis haut en bas : tracé des solutions calculées par l’algorithme dans le cas où  $\frac{h}{\tau}=1$  à comparer avec la solution tracée en vert, la légende représente  $M = \frac{1}{h}$  le nombre de points ; tracé de l’erreur à  $\frac{h}{\tau}$  constant ; tracé de l’erreur à  $\tau$  constant ; tracé de l’erreur à  $h$  constant.

suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = \mathbb{1}_{[0.2,0.5]}; \\ g(x) = \frac{1}{3x}; \\ T \approx 0.03; \\ M = 1000; \\ \rho(t, x) = \left( \frac{x}{\sqrt[3]{0.5^3 - t}} \right)^2 \mathbb{1}_{[\sqrt[3]{0.2^3+t}, \sqrt[3]{0.5^3+t}]}; \\ \tau = \frac{5}{8333} \approx 0.0006; \\ \frac{\|u\|_{\infty} \tau}{h} \approx 5. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

On remarque que, le nombre d’itérations étant plus faible que dans un schéma classique respectant une CFL de 1, il y a moins de diffusion. Les figures 3.7 montrent l’erreur commise par la solution calculée par le schéma selon le rapport  $\frac{\|u\|_{\infty} \tau}{h}$  (à gauche) et le tracé de certaines solutions obtenues selon ce même rapport. Dans ce cas précis, le schéma upwind est réobtenu si le rapport est de 1 (la courbe en bleu). Le schéma semble être plus précis lorsque le rapport

$\frac{\|u\|_{\infty}\tau}{h} \approx 5$  qui, dans ce cas précis, semble être un bon compromis entre convergence et diffusion numérique.

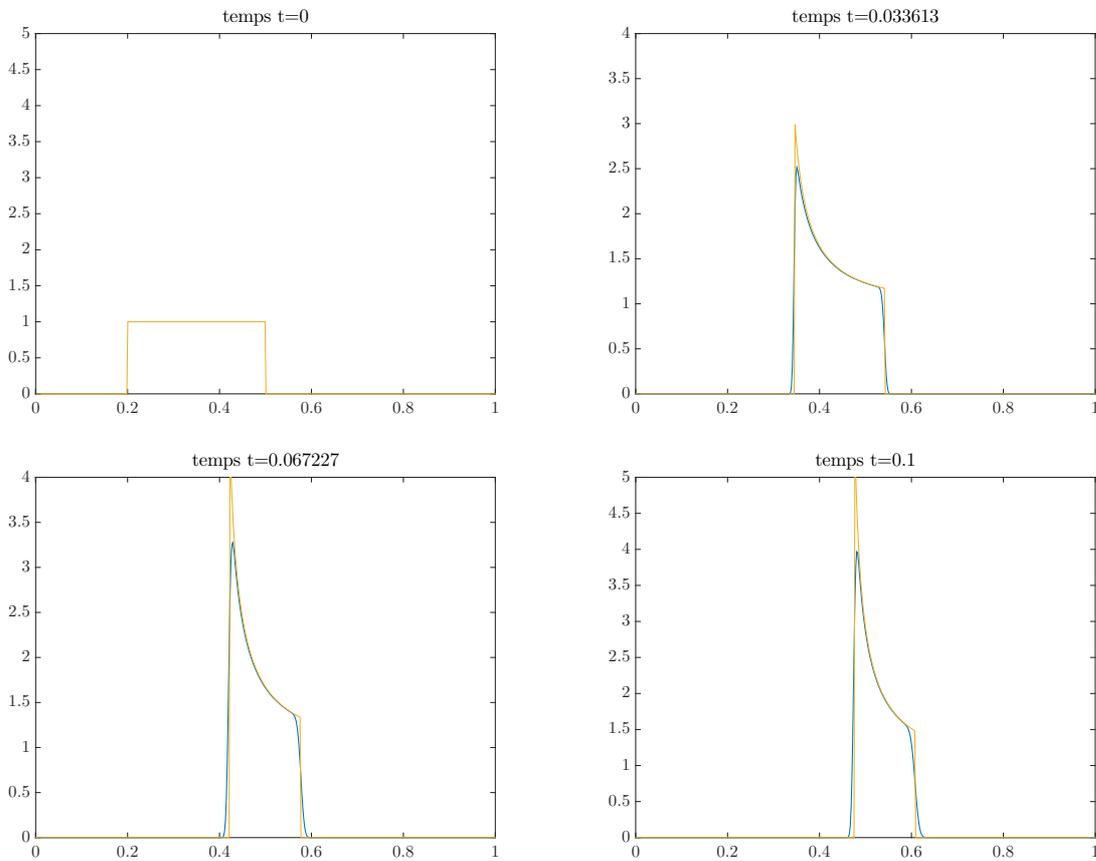


FIGURE 3.6 – Représentation de l'exemple 2 (voir (3.11)) : en jaune la solution  $\rho$ , en bleu la solution calculée par le schéma.

### 3.1.3 Convergence numérique pour l'équation de la chaleur

On s'intéresse au cas où  $\psi(\rho) = \int_X \rho(x) \ln(\rho(x)) dx$ , l'équation flot-gradient associée est l'équation de la chaleur :

$$\partial_t \rho_t = \Delta \rho_t$$

le schéma JKO associé à cette équation est le suivant :

$$\rho^{n+1} = \operatorname{argmin}_{\xi \in \mathcal{P}^a(X)} \left\{ \int_X \xi(x) \ln(\xi(x)) dx + \frac{1}{2\tau} \mathcal{W}_2(\xi, \rho^n)^2 \right\}$$

et la formule discrétisée en espace étudiée ici est

$$\rho^{n+1} = \operatorname{argmin}_{\xi \in \mathcal{P}^h} \left\{ h \sum_{i=0}^{M-1} \xi_i \ln(\xi_i) + \frac{1}{2\tau} \tilde{\mathcal{W}}(\xi, \rho^n)^2 \right\}$$

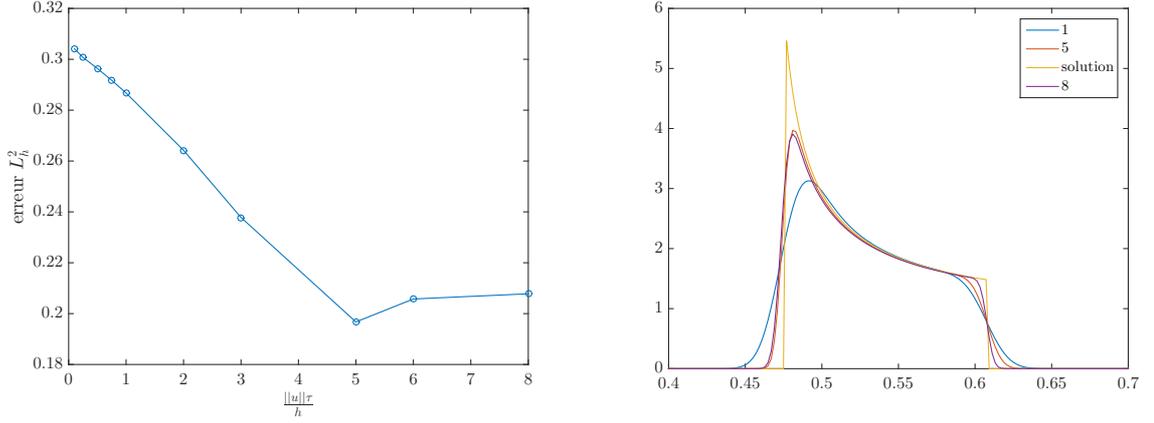


FIGURE 3.7 – Erreurs entre la solution initiale et celle calculée par l’algorithme selon le rapport  $\frac{\|u\|_{\infty}\tau}{h}$  ; comparaison des solutions finales avec différentes valeurs pour le rapport  $\frac{\|u\|_{\infty}\tau}{h}$ .

nous avons décidé de traiter la fonction  $x \rightarrow x \ln(x)$ , en utilisant la transformée de Legendre (méthode utilisée notamment dans [5] et très utile en transport optimal) :

$$x \ln(x) = \sup_{\beta \in \mathbb{R}} \left\{ \beta x - e^{\beta-1} \right\} \quad (3.12)$$

dont le supremum est obtenu en  $\beta = \ln(x) + 1$ . Le problème de minimisation se simplifie et devient quadratique par rapport aux variables  $\sigma_{ip}$  dont dépend  $\xi_i$ , linéaire par rapport aux variables  $\beta_i$  :

$$\rho^{n+1} = \operatorname{argmin}_{\xi \in \mathcal{P}^h} \sup_{\beta \in \mathbb{R}^M} \left\{ h \sum_{i=0}^{M-1} \left( \beta_i \xi_i - e^{\beta_i-1} \right) + \frac{1}{2\tau} \tilde{W}^2(\xi, \rho^n) \right\}. \quad (3.13)$$

Soit  $\nu$  la variable approchant  $\rho^{n+1}$ , l’algorithme utilisé à chaque pas de temps pour calculer  $\rho^{n+1}$  à partir de  $\rho^n$  est le suivant :

$$\begin{aligned} \text{Initialisation : } & \beta_i^{(0)} = \ln(\rho_i^n) + 1, \quad \forall i \in \{0, \dots, M-1\}, \\ \text{Récurrence : } & \nu^{(j)} = \operatorname{argmin}_{\xi \in \mathcal{P}^h} \left\{ h \sum_{i=0}^{M-1} \left( \xi_i \beta_i^{(j)} \right) + \frac{1}{2\tau} \tilde{W}(\xi, \rho^n)^2 \right\}, \\ & \beta_i^{(j+1)} = \ln(\nu_i^{(j+1)}) + 1, \quad \forall i \in \{0, \dots, M-1\}. \end{aligned}$$

Cet algorithme converge uniquement si  $\tau$  est très faible, empiriquement, il semblerait que la condition soit la même que celle du schéma aux différences finies explicite :  $\frac{\tau}{h^2} \leq 1$ . Le nombre d’itérations nécessaire pour chaque pas de temps est faible (une ou deux itérations suffisent). Si  $\tau$  est trop grand, la modification de  $\beta$  semble être trop brutale, on peut y remédier de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_i^{(j+1)} &= \ln(\nu_i^{(j+1)}) + 1, \quad \forall i \in \{0..M-1\}, \\ \beta_i^{(j+1)} &= (1 - \alpha)\beta_i^{(j)} + \alpha\tilde{\beta}_i^{(j+1)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec un paramètre  $\alpha \in [0, 1[$ . Cette méthode permet d'obtenir une convergence dans des cas avec  $\tau$  bien plus grand, mais nécessite bien plus d'itérations. En conclusion, l'utilisation de la transformée de Legendre ne semble pas être la solution la plus judicieuse pour cette équation. Cependant, elle permet d'obtenir des résultats de convergence pour  $\tau$  faible ce qui permet tout de même de valider l'approche.

Les figures 3.9 représentent la solution de l'équation de diffusion et la solution obtenue avec l'algorithme JKO discrétisé en espace avec la méthode du balayage transverse avec les paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 500; \\ \tau = \frac{1}{500^2} = 0.000004; \\ T_{init} = 2 \times 10^{-4}; \\ T_{end} = 2 \times 10^{-3}; \\ \rho(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-0.5)^2}{4t}}; \\ \rho^0 = (\rho(T_{init}, x_i))_{i \in I}. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Les figures 3.8 montrent l'erreur commise entre la solution du schéma JKO et la vraie solution de l'équation de diffusion. La figure de droite représente l'erreur  $L_h^2$  à chaque pas de temps  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$  c'est-à-dire :

$$\sqrt{h} \|\rho^n - (\rho(T_{init} + n\tau, x_i))_{i \in I}\|_{l^2}$$

avec  $N$  le plus petit entier tel que  $T_{init} + n\tau \geq T_{end}$ . Quant à la figure de gauche, elle représente le maximum obtenu pour  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$  de tous ces normes selon plusieurs discrétisations du pas d'espace  $h$  (qu'on note norme  $L_\tau^\infty L_h^2$ ). On remarque qu'on obtient numériquement la convergence de notre schéma pour l'équation de la chaleur.

## 3.2 Ajout de la contrainte de congestion

Dans cette section nous allons nous intéresser à des équations flot-gradients avec contrainte de congestion. La contrainte de congestion crée des interactions fortes entre les flux  $(\sigma_{ip})_{p \in P}$  et les flux  $(\sigma_{i'p})_{p \in P}$  pour  $i \neq i'$ , par conséquent, elle ne permet pas de faire une analyse du schéma cellule par cellule comme pour l'équation de continuité sans cette contrainte. La densité  $\rho$  est solution de l'équation flot-gradient associée à la fonctionnelle  $\psi_K : \mathcal{P}(X) \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  sur l'intervalle  $]0, T[$ , s'il existe une famille de champ des vitesses  $(u_t)_{t \in ]0, T[}$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t u_t) = 0, \\ u_t \in -\partial \psi_K(\rho_t), \end{array} \right. \quad (3.16)$$

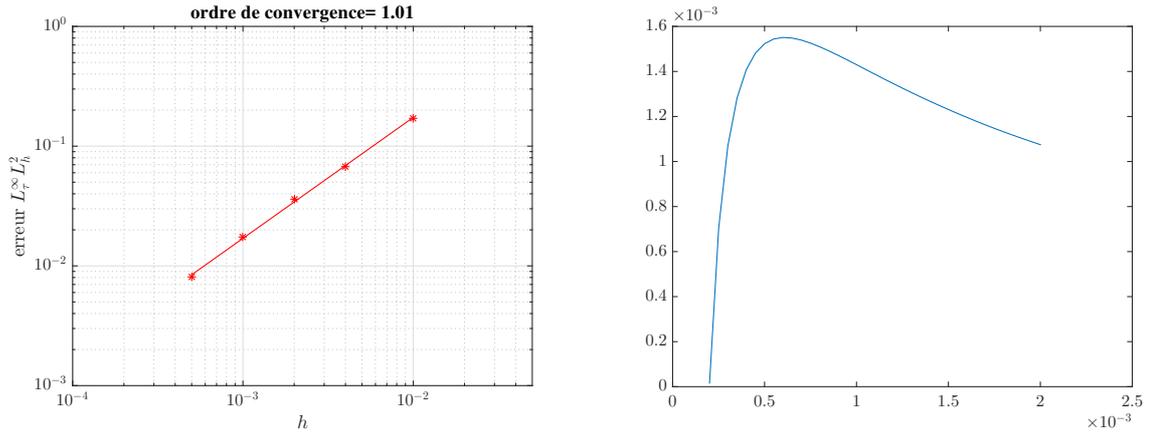


FIGURE 3.8 – La figure à gauche représente l’erreur  $L_\tau^\infty L_h^2$  entre la solution exacte et celle calculée par l’algorithme pour différents pas de d’espace  $h$ , celle de droite représente l’erreur  $L_h^2$  entre la solution exacte et celle calculée par le schéma au cours du temps.

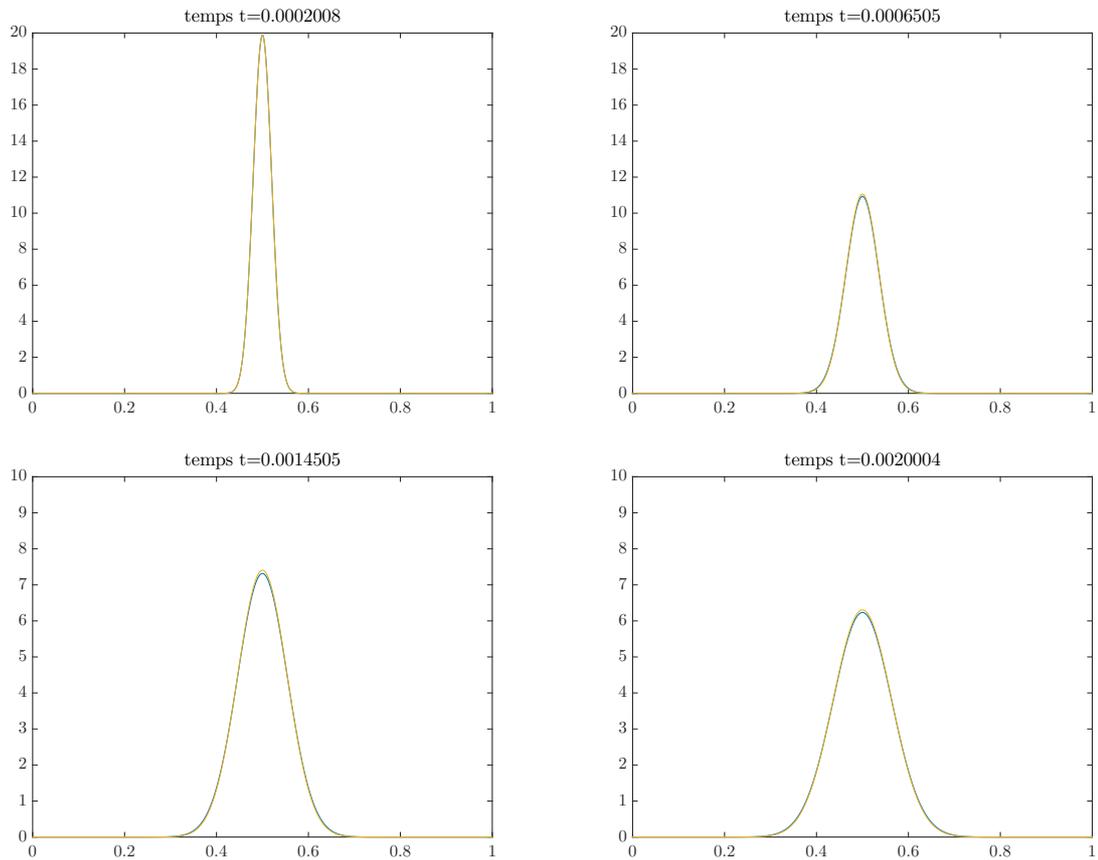


FIGURE 3.9 – Comparaison de la solution calculée par l’algorithme et du noyau de la chaleur à différents pas de temps.

avec  $\psi_K = \psi + I_K$  où  $\psi$  représente une fonctionnelle linéaire par rapport à  $\rho$  :

$$\psi(\rho) = \int_X g(x)\rho(x) dx$$

et  $I_K$  la fonctionnelle indicatrice associée à l'ensemble  $K = \{\rho \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \mid \rho \leq 1\}$ . Elle est définie comme suit :

$$I_K(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \in K, \\ +\infty & \text{si } \rho \notin K. \end{cases}$$

Dans cette sous-section, nous allons voir que la contrainte de congestion " $\rho \leq 1$ " s'incorpore de manière naturelle dans le schéma JKO discrétisé en temps en dimension 1. On rappelle qu'en dimension 1,

$$\begin{cases} \sigma^{n+1} \in \operatorname{argmin}_{\sigma \in \operatorname{Adm}(\rho^n)} \left\{ \psi \circ \mathbf{P}(\sigma, \rho^n) + \frac{1}{2\tau} \sum_{i \in I} \sum_{p \in P} \frac{h}{\rho^i} \sigma_{ip}^2 + 2m_{ip} h \sigma_{ip} \right\}, \\ \rho^{n+1} := \mathbf{P}(\sigma^{n+1}, \rho^n), \end{cases} \quad (3.17)$$

avec

$$\operatorname{Adm}(\rho^n) = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}_+^{I \times P} \mid \forall j \in I \begin{cases} \sigma_{ij} \geq \sigma_{i,j+1} & \text{si } i < j \\ \sigma_{i,j+1} \geq \sigma_{ij} & \text{si } i > j \\ \sigma_{ii} + \sigma_{i,i+1} \leq h\rho_i^n \end{cases} \right\}.$$

D'un point de vue discret, rajouter la fonctionnelle  $I_K$  revient à imposer que les flux  $\sigma$  doivent entraîner que la densité d'arrivée soit dans l'ensemble  $K$ . C'est-à-dire de remplacer  $\operatorname{Adm}(\rho^n)$  par  $\Sigma^h(\rho^n, K)$  l'ensemble contenant toutes les familles de flux telles que la densité d'arrivée soit dans l'ensemble des mesures bornées inférieures à 1 :

$$\Sigma^h(\rho, K) = \{\sigma \in \operatorname{Adm}(\rho) \mid \mathbf{P}(\sigma, \rho) \in K\}. \quad (3.18)$$

Ces contraintes sont linéaires en dimension 1.

### 3.2.1 Equation de continuité avec contrainte de congestion

Le schéma JKO discrétisé en espace pour  $\psi(\rho) = \int_X g(x)\rho(x)dx$  devient alors :

$$\begin{cases} \sigma^{n+1} \in \operatorname{argmin}_{\sigma \in \Sigma^h(\rho^n, K)} \left\{ \sum_{j \in I} h g_j \mathbf{P}(\sigma, \rho^n)_j + \frac{1}{2\tau} \sum_{i \in I} \sum_{p \in P} \frac{h}{\rho^i} \sigma_{ip}^2 + 2m_{ip} h \sigma_{ip} \right\}, \\ \rho^{n+1} := \mathbf{P}(\sigma^{n+1}, \rho^n). \end{cases} \quad (3.19)$$

Les contraintes liées à la congestion sont linéaires et il est donc facile de les incorporer à l'algorithme. Notons aussi que l'on peut modifier l'ensemble  $K$  par  $\{\rho \in \mathcal{P}([0, L]) \mid \rho \leq \nu\}$  avec  $\nu \in \mathbb{R}_+^h$  une fonction positive constante sur chaque cellule. Les figures 3.10 comparent la solution obtenue par l'algorithme et la solution analytique sans congestion dans le cas où les

paramètres sont les suivants :

$$\begin{cases} g = -x^2; \\ M = 500; \\ \tau = 0.5 \times h = 0.001; \\ \rho^0 = \mathbb{1}_{[0.2, 0.5]}; \\ T \approx 0.8; \\ L = 1. \end{cases} \quad (3.20)$$

Le centre de masse de la solution calculée est le même que celui de la solution analytique. Ce résultat est obtenu théoriquement car, à chaque instant, la vitesse rajoutée à la densité est un gradient non nul sur les zones congestionnés. Comme rajouter un gradient ne modifie pas le centre de masse de la zone congestionnée, le centre de masse de la solution avec congestion est le même que celle sans congestion. La figure de gauche de 3.10 montre la différence en norme  $L_h^2$  de deux solutions calculées par l'algorithme au pas de temps final  $T$ , mais pour des pas d'espace différents. Pour être plus précis nous avons calculé :

$$\sqrt{h} \left\| \left( \frac{1}{2}(\rho_{2i} + \rho_{2i+1}) \right)_{i \in I_{h/2}} - (\rho_i)_{i \in I_h} \right\|_{l^2}$$

avec  $I_h = \llbracket 0, M - 1 \rrbracket$  avec  $Mh = 1$ . On remarque que cette erreur est d'ordre environ  $1/2$  en  $h$  ce qui confirme la convergence du schéma vers une solution. La figure de droite de 3.11 montre la solution obtenue pour différente valeur de  $M = \frac{1}{h}$ .

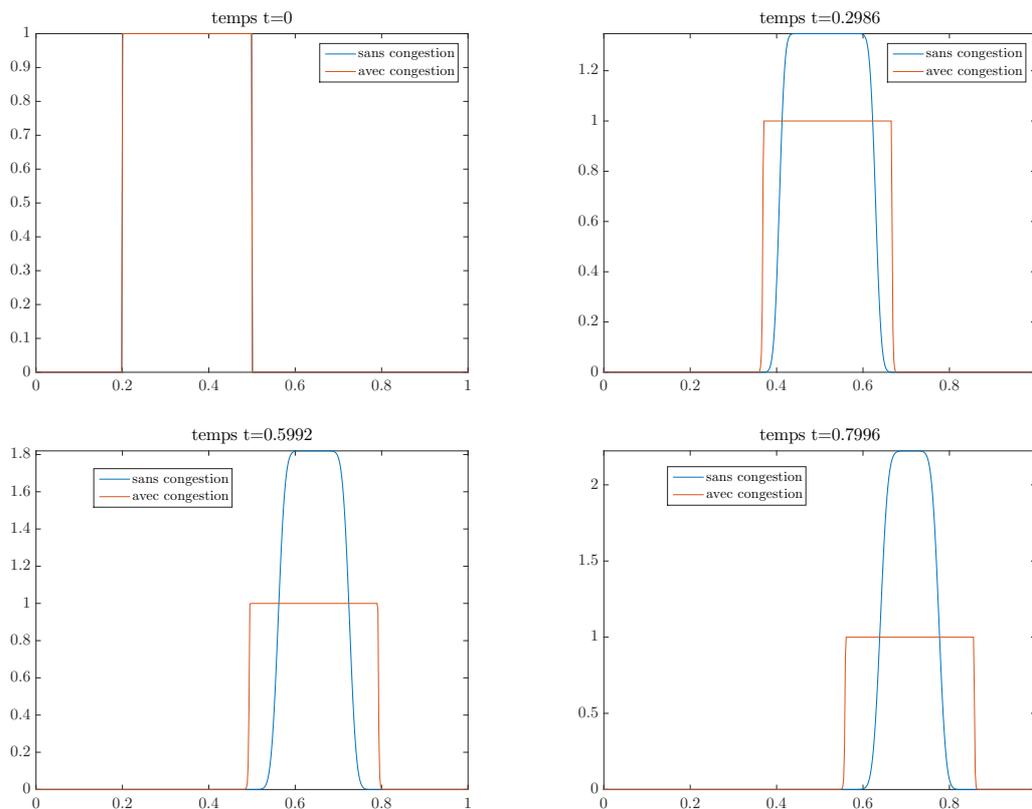


FIGURE 3.10 – Solutions calculées par le schéma dans les cas avec et sans congestion dont les paramètres sont donnés en (3.20).

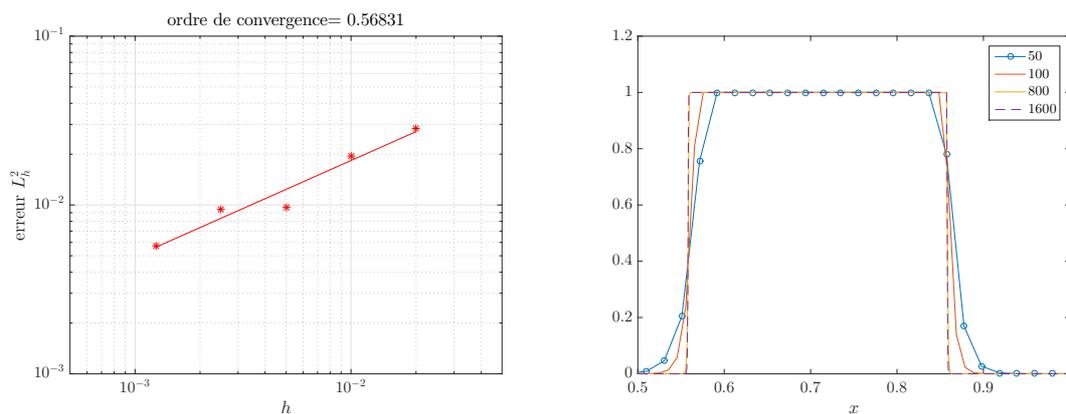


FIGURE 3.11 – À gauche, norme  $L_h^2$  au pas de temps final entre une solution calculée au pas d'espace  $h$  et celle calculée au pas  $h/2$ . À droite, la solution calculée par le schéma au pas de temps final pour différentes discrétisations avec, en légende, le nombre de cellules.

# Méthode du balayage transverse en dimension 2

---

Ce chapitre est consacré à la discrétisation du coût Wasserstein quadratique par la méthode du balayage transverse dans le cadre du schéma JKO et en dimension 2 de l'espace. Nous allons voir que la méthode diffère de la dimension 1 principalement car les masses traversant chaque hyperplan ne sont pas des données suffisantes pour décrire le transport des masses d'une cellule à une autre. Nous verrons tout de même que, sous certaines conditions, le schéma 2D conserve les propriétés du 1D : elle préserve le coût du déplacement d'une cellule dans le sens où le coût Wasserstein quadratique entre une densité non nulle sur une cellule et son translaté est le même que celui de la même densité et le projeté  $L^2$  de son translaté dans l'espace discrétisé. Le schéma JKO discrétisé en espace pour l'équation d'advection à vitesse constante  $u$  donne comme solution à chaque pas de temps le projeté du translaté d'amplitude  $\tau u$  de la densité initiale. Enfin, nous verrons que le schéma semble consistant dans le cas de l'équation de continuité au moins pour des pas de temps petits. Dans une autre partie, nous verrons quel est le schéma simplifié pour le numérique et nous le testerons sur l'équation de continuité et de diffusion. Nous terminerons par une analyse des résultats numériques donnés par le schéma dans certains exemples avec contrainte de congestion : le balayage d'une mesure ; équation de continuité avec contrainte de congestion et particulièrement le mouvement de foule.

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Description et analyse de la méthode . . . . .</b>	<b>104</b>
4.1.1	Description . . . . .	104
4.1.2	Schéma JKO et étude sur l'équation de continuité . . . . .	108
<b>4.2</b>	<b>Schéma numérique utilisé et simulations . . . . .</b>	<b>119</b>
4.2.1	Description de la méthode de simplification . . . . .	119
4.2.2	Algorithme pour l'équation de continuité . . . . .	123
4.2.3	Etude numérique dans le cas de l'équation de la chaleur . . .	127
<b>4.3</b>	<b>Equation flot-gradients avec contrainte de congestion . . .</b>	<b>131</b>
4.3.1	Le balayage d'une mesure . . . . .	134
4.3.2	Equation de continuité avec contrainte de congestion . . . . .	135
4.3.3	Mouvement de foule . . . . .	138

---

## 4.1 Description et analyse de la méthode

Cette section servira à présenter le coût Wasserstein quadratique discrétisé par la méthode du balayage transverse. Nous montrerons les résultats susmentionnés.

### 4.1.1 Description

Nous présentons le coût modifié dans le cas où le domaine est  $X = [0, L]^2$  avec  $L > 1$ . Nous posons

$$X^{h^2} = \left\{ C_i = [i_x h, (i_x + 1)h] \times [i_y h, (i_y + 1)h], i = (i_x, i_y) \in \llbracket 0, M - 1 \rrbracket^2 \right\}$$

la discrétisation cartésienne de  $X$  en cellule de taille  $h \times h$  avec  $Mh = L$ . On note  $\mathcal{P}^{h^2}$  l'espace des mesures de densité constante sur chaque  $C_i$  de  $X^{h^2}$ , un élément de  $\mathcal{P}^{h^2}$  est alors identifié à un élément de  $\mathbb{R}^{M \times M}$  :

$$\begin{pmatrix} \rho_{(0,0)} & \rho_{(0,1)} & \cdots & \rho_{(0,M-1)} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \rho_i & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \rho_{(M-1,0)} & \cdots & \rho_{(M-1,M-1)} \end{pmatrix}$$

avec  $\rho_i = \frac{\rho(C_i)}{h^2} > 0$  représentant la densité moyenne de la cellule  $C_i$ . Posons  $I = \llbracket 0, M - 1 \rrbracket^2$  l'ensemble des indices définissant les cellules de  $\mathcal{P}^{h^2}$ , on notera  $i = (i_x, i_y)$  et  $j = (j_x, j_y)$  les éléments de  $I$ .

**Proposition 4.1.** *Soit  $\rho \in \mathcal{P}(X)$ , on définit la fonctionnelle  $\mathbb{P}_{\mathcal{P}^{h^2}} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}^{h^2}$  de la manière suivante :*

$$\mathbb{P}_{\mathcal{P}^{h^2}}(\rho) := \begin{pmatrix} \frac{\rho(C_{(0,0)})}{h^2} & \frac{\rho(C_{(0,1)})}{h^2} & \cdots & \frac{\rho(C_{(0,M-1)})}{h^2} \\ \frac{\rho(C_{(1,0)})}{h^2} & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \frac{\rho(C_i)}{h^2} & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \frac{\rho(C_{(M-1,0)})}{h^2} & \cdots & \frac{\rho(C_{(M-1,M-1)})}{h^2} \end{pmatrix}$$

la matrice des densités moyennes<sup>1</sup> contenues dans  $C_i$  qui est bien un élément de  $\mathcal{P}^{h^2}$ . De plus, si  $\rho \in L^2(X)$ ,  $\mathbb{P}_{\mathcal{P}^{h^2}}$  est la projection au sens  $L^2(X)$  de  $\rho$  sur  $\mathcal{P}^{h^2}$  c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{P}^{h^2}}(\rho) = \operatorname{argmin}_{\nu \in \mathcal{P}^{h^2}} \left\{ \|\rho - \nu\|_{L^2(X)} \right\}.$$

1. Comme en dimension 1, si  $\rho$  donne une masse non nulle à une interface entre cellules, on répartit cette masse de manière égale entre chaque cellule.

**Remarque 4.2.** Le fait qu'on impose que  $L$  soit strictement plus grand que 1 est dû à la section 4.3 page 133 où l'on rajoute une contrainte  $L^\infty$  aux densités qu'on normalise par défaut à 1. Or, si  $L \leq 1$ , l'ensemble des densités plus petites que 1 est soit réduit à un singleton, soit vide. De manière générale, ce chapitre vaut pour tout ensemble de densités ayant la même masse, pour tout intervalle et pour l'ensemble des densités inférieures ou égale à une certaine constante, tant que, cet ensemble est non vide.

On note  $\sigma_{ip}^x$  la masse venant de  $C_i$  traversant l'hyperplan  $H_p^x$  d'équation  $x = ph$  et contenant l'interface entre les cellules  $C_{(p-1,q)}$  et les cellules  $C_{(p,q)}$  pour  $q$  appartenant à  $\{0, \dots, M-1\}$  (voir figure 4.1). De même, on note  $\sigma_{ip}^y$  la masse venant de  $C_i$  traversant l'hyperplan  $H_p^y$  d'équation  $y = ph$  et contenant l'interface entre les cellules  $C_{(q,p-1)}$  et les cellules  $C_{(q,p)}$  pour  $q$  appartenant à  $\{0, \dots, M-1\}$ . Enfin, l'ensemble  $P = \llbracket 1, M-1 \rrbracket$  désignera les indices des hyperplans dans une direction donnée et  $\sigma := (\sigma_{ip}^\alpha)_{\substack{(i,p) \in I \times P \\ \alpha \in \{x,y\}}}$  la famille des flux.

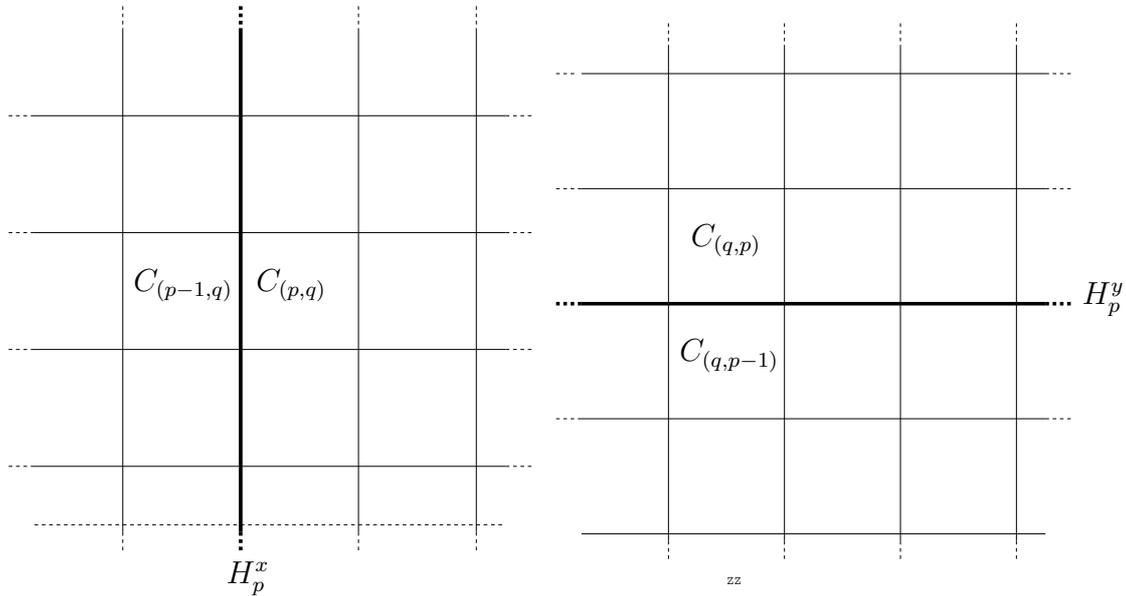


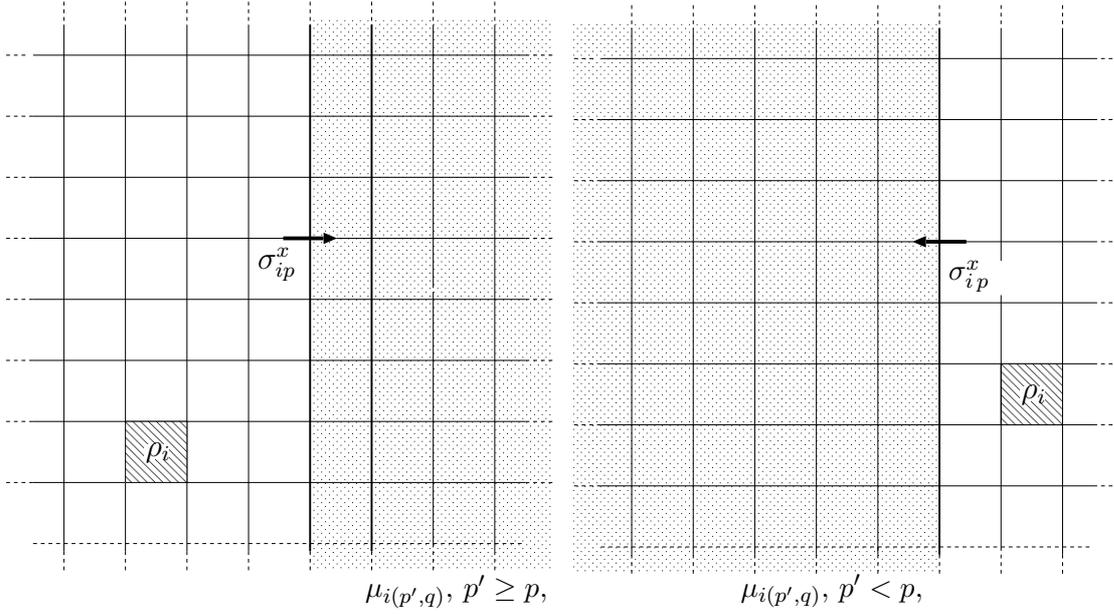
FIGURE 4.1 – Représentation des hyperplans  $H_p^x$  et  $H_p^y$  dans  $X^{h^2}$ .

Il est important de constater que les flux traversant les hyperplans susmentionnés ne sont pas des informations suffisantes pour décrire le déplacement des masses d'une cellule à une autre.

Concrètement, notons  $\mathcal{F} : \mathcal{P}^{h^2 \times h^2} \rightarrow \mathbb{R}_+^{I \times P}$  qui à un plan de transport  $\mu \in \mathcal{P}^{h^2 \times h^2}$  donne les flux de chaque cellule à travers les hyperplans (voir figure 4.2) :

$$\sigma_{ip}^\alpha = \sum_{j \in P_{ip}^\alpha} \mu_{ij} \quad (4.1)$$

avec  $P_{ip}^\alpha = \left\{ j \in I \mid \begin{array}{l} j_\alpha \geq p \text{ si } i_\alpha < p \\ j_\alpha < p \text{ si } i_\alpha \geq p \end{array} \right\}$  et  $\alpha \in \{x, y\}$ . Elle est linéaire d'un espace de dimension  $M^4$  dans un espace de dimension  $M^2 \times (2M-2)$ . Elle n'est donc pas injective ce qui implique qu'une infinité de plans de transport possède les mêmes flux.


 FIGURE 4.2 – Représentation des relations entre les flux  $\sigma$  et le plan de transport  $\mu$ .

La fonction coût  $\tilde{W} : \mathcal{P}^{h^2} \times \mathcal{P}^{h^2} \rightarrow \mathbb{R}_+$  approchant le coût Wasserstein quadratique en utilisant la méthode de balayage transverse est alors la suivante :

**Définition 4.3.** Soient  $\rho, \nu \in \mathcal{P}^{h^2}$ , on définit le coût Wasserstein quadratique discrétisé par la méthode du balayage transverse par :

$$\tilde{W}(\rho, \nu)^2 = \min_{\mu \in \Pi^h(\rho, \nu)} \left\{ \sum_{\alpha \in \{x, y\}} \sum_{p \in P} \sum_{i \in I(\rho)} \left( \frac{(\sigma_{ip}^\alpha)^2}{\rho_i} + 2hm_{ip}^\alpha \sigma_{ip}^\alpha \right) \right\} \quad (4.2)$$

avec

- $m_{ip}^\alpha = \text{dist}(C_i, H_p^\alpha)$  ;
- $\Pi^h(\rho, \nu) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}^{h^2 \times h^2} \mid h^2 \nu_j = \sum_{i \in I} \mu_{ij}, h^2 \rho_i = \sum_{j \in I} \mu_{ij} \right\}$  ;
- $\sigma := \mathcal{F}(\mu)$  avec  $\mathcal{F}$  défini en (4.1) ;
- $I(\rho) = \{i \in I, \rho_i > 0\}$ .

Nous allons voir que cette méthode conserve le coût de translation d'une cellule dans  $X^{h^2}$  au sens suivant :

**Proposition 4.4.** Soient  $\rho = \rho_i \mathbb{1}_{C_i}$  avec  $\rho_i > 0$  et  $u \in \mathbb{R}^2$  tel que  $(Id + u)(C_i) \subset [0, L]^2$ , posons  $\rho_{tr} = (Id + u)_\# \rho$  le translaté de  $\rho$  par  $u$ , alors :

$$\tilde{W}(\rho, \mathbb{P}_{\mathcal{P}^{h^2}}(\rho_{tr})) = \mathcal{W}_2(\rho, \rho_{tr}).$$

*Démonstration.* on pose  $j = (j_x, j_y)$  l'élément de  $I = \llbracket 0, M-1 \rrbracket^2$  tel que

$$\begin{cases} (i_x h + u_x) - j_x h := l_x \in [0, h[, \\ (i_y h + u_y) - j_y h := l_y \in [0, h[. \end{cases}$$

L'élément  $j$  appartient à  $I$  car  $(\text{Id} + u)(C_i) \subset [0, L]^2$ . On peut montrer que  $\mathbb{P}_{ph^2}(\rho_{tr})$  s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{ph^2}(\rho_{tr}) &= \left( \frac{(h-l_x)(h-l_y)}{h^2} \right) \rho_i \mathbb{1}_{C_{(j_x, j_y)}} + \left( \frac{l_x(h-l_y)}{h^2} \right) \rho_i \mathbb{1}_{C_{(j_x+1, j_y)}} \\ &\quad + \left( \frac{(h-l_x)l_y}{h^2} \right) \rho_i \mathbb{1}_{C_{(j_x, j_y+1)}} + \left( \frac{l_x l_y}{h^2} \right) \rho_i \mathbb{1}_{C_{(j_x+1, j_y+1)}}. \end{aligned}$$

Supposons  $j_x \geq i_x$ , comme la masse provient d'une seule cellule, la seule possibilité pour les flux horizontaux est la suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{ip}^x = \rho_i h^2 \text{ si } p \in \llbracket i_x + 1, j_x \rrbracket, \\ \sigma_{i j_x + 1}^x = \rho_i h^2 \frac{l_x}{h}, \\ \sigma_{i' p'}^x = 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{p=i_x+1}^{j_x+1} \frac{(\sigma_{ip}^x)^2}{\rho_i} + 2hm_{ip}^x \sigma_{ip}^x &= \sum_{p'=0}^{j_x-i_x} \frac{(\sigma_{i(i_x+1)+p'}^x)^2}{\rho_i} + 2h^2 p' \sigma_{i(i_x+1)+p'}^x \\ &= \left( \sum_{p'=0}^{j_x-i_x-1} \rho_i h^4 + 2(\rho_i h^2) p' h^2 \right) + \rho_i h^2 \left( \frac{l_x}{h} \right)^2 + 2(j_x - i_x) \rho_i h^2 \frac{l_x}{h} \\ &= \left( \sum_{p'=0}^{j_x-i_x-1} (p'+1)^2 \rho_i h^4 - p'^2 \rho_i h^4 \right) + \rho_i h^2 \left( \frac{l_x}{h} \right)^2 + 2(j_x - i_x) \rho_i h^2 \frac{l_x}{h} \\ &= (j_x - i_x)^2 \rho_i h^4 + \rho_i h^2 \left( \frac{l_x}{h} \right)^2 + 2(j_x - i_x) \rho_i h^2 \frac{l_x}{h} \\ &= \rho_i h^2 \left( j_x + \frac{l_x}{h} - i_x \right)^2 h^2 \\ &= \rho_i h^2 u_x^2 \end{aligned}$$

de même si  $j_x < i_x$  on a :

$$\begin{cases} \sigma_{ip}^x = \rho_i h^2 \text{ si } p \in \llbracket j_x + 2, i_x \rrbracket, \\ \sigma_{i j_x + 1}^x = \rho_i h^2 \left( \frac{h-l_x}{h} \right), \\ \sigma_{i' p'}^x = 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=j_x+1}^{i_x} \frac{(\sigma_{ip}^x)^2}{\rho_i} + 2hm_{ip}^x \sigma_{ip}^x \\
 = & \sum_{p'=0}^{i_x-j_x-1} \frac{(\sigma_{i_{j_x+1+p'}}^x)^2}{\rho_i} + 2h^2 p' \sigma_{i_{j_x+1+p'}}^x \\
 = & \left( \sum_{p'=0}^{i_x-j_x-2} \rho_i h^4 (1+2p') \right) + \frac{(\sigma_{i_{j_x+1}}^x)^2}{\rho_i} + 2(i_x - j_x - 1) h^2 \sigma_{i_{j_x+1}}^x \\
 = & (hi_x - hj_x - h)^2 \rho_i h^2 + \left( \frac{h-l_x}{h} \right)^2 \rho_i h^4 + 2(hi_x - hj_x - h) \left( \frac{h-l_x}{h} \right) \rho_i h^3 \\
 = & \rho_i h^2 (hi_x - j_x h - h + (h-l_x))^2 \\
 = & \rho_i h^2 (hi_x - j_x h - l_x)^2 \\
 = & \rho_i h^2 u_x^2.
 \end{aligned}$$

□

Dans tous les cas on obtient que le coût dû au déplacement horizontal de la masse est

$$\sum_{p \in P} \sum_{i \in I} \left( \frac{(\sigma_{ip}^x)^2}{\rho_i} + 2hm_{ip}^x \sigma_{ip}^x \right) = \rho_i h^2 u_x^2 \quad (4.3)$$

et par la même méthode on peut calculer que le coût dû au déplacement vertical de la masse :

$$\sum_{p \in P} \sum_{i \in I} \left( \frac{(\sigma_{ip}^y)^2}{\rho_i} + 2hm_{ip}^y \sigma_{ip}^y \right) = \rho_i h^2 u_y^2 \quad (4.4)$$

ce qui nous donne l'égalité escomptée.

### 4.1.2 Schéma JKO et étude sur l'équation de continuité

Dans cette sous-section, nous allons montrer que l'approche conserve de bonnes propriétés en dimension 2 d'espace. Tout d'abord, pour l'équation de continuité à vitesse constante  $u$ , pour un pas de temps  $\tau > 0$  et sous certaines conditions, le schéma JKO avec le coût discrétisé par la méthode du balayage transverse donne comme solution le projeté  $L^2$  du translaté de  $\tau u$  de la densité initiale. Dans le cadre d'une vitesse générale, les résultats obtenus avec les conditions de Karush–Kuhn–Tucker nous donne une certaine consistance du schéma avec l'équation.

#### Schéma JKO

Le schéma JKO avec le coût Wasserstein discrétisé utilisant la méthode du balayage transverse est alors :

De manière formelle, à partir de  $\rho^n \in \mathcal{P}^{h^2}$ , le schéma calcule  $\rho^{n+1}$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu^{n+1} = \operatorname{argmin}_{\mu \in \Pi^h(\rho^n, \cdot)} \left\{ \psi \left( \left( \frac{1}{h^2} \sum_{i \in I} \mu_{ij} \right)_{j \in I} \right) + \frac{1}{2\tau} \sum_{\substack{p \in P \\ \alpha \in \{x, y\} \\ i \in I(\rho^n)}} \left( \frac{(\sigma_{ip}^\alpha)^2}{\rho_i^n} + 2hm_{ip}^\alpha \sigma_{ip}^\alpha \right) \right\}, \\ \rho_j^{n+1} = \frac{\sum_{i \in I} \mu_{ij}}{h^2}, \end{array} \right. \quad (4.5)$$

avec

- $m_{ip}^\alpha = \operatorname{dist}(C_i, H_p^\alpha)$ ;
- $\Pi^h(\rho^n, \cdot) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}^{h^2 \times h^2} \mid \forall i \in I, h^2 \rho_i^n = \sum_{j \in I} \mu_{ij} \right\}$ ;
- $\sigma := \mathcal{F}(\mu)$  avec  $\mathcal{F}$  défini en (4.1) ;
- $I(\rho^n) = \{i \in I, \rho_i^n > 0\}$ .

Cependant, ce schéma n'est pas un algorithme dans le sens où il n'existe pas toujours une unique solution à la minimisation de la fonctionnelle suscitée. Prenons pour exemple le cas  $M = 2$ ,  $L = 2$  et  $\tau = 1$  et posons

$$\left\{ \begin{array}{l} i_0 = (0, 0); \\ i_1 = (1, 0); \\ i_2 = (0, 1); \\ i_3 = (1, 1). \end{array} \right.$$

De plus, supposons que  $\rho^0 = \rho_{i_0} \mathbb{1}_{i_0}$  avec  $\rho_{i_0} > 0$ . Nous allons utiliser le schéma ci-dessus dans le cas de l'équation d'advection à une vitesse constante  $u \in \mathbb{R}^2$ . La fonctionnelle associée à cette équation flot-gradient est  $\psi(\rho) = \int_X (u \cdot x) \rho(x) dx$ . Nous prenons  $u := (u_x, u_y)$  tel que  $u_x, u_y \geq 0$ . En utilisant la discrétisation :

$$\psi(\rho) \approx h^2 \sum_{j \in I} (u \cdot x_j) \rho_j,$$

le schéma JKO discrétisé pour l'équation d'advection à vitesse constante devient :

à partir de  $\rho^n \in \mathcal{P}^{h^2}$ , le schéma calcule  $\rho^{n+1}$  de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu^{n+1} = \operatorname{argmin}_{\mu \in \Pi^h(\rho^n, \cdot)} \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} (u \cdot x_j) \mu_{ij} + \frac{1}{2\tau} \sum_{\substack{p \in P \\ \alpha \in \{x, y\} \\ i \in I(\rho^n)}} \left( \frac{(\sigma_{ip}^\alpha)^2}{\rho_i^n} + 2hm_{ip}^\alpha \sigma_{ip}^\alpha \right) \right\}, \\ \rho_j^{n+1} = \frac{\sum_{i \in I} \mu_{ij}}{h^2}, \end{array} \right. \quad (4.6)$$

avec

- $m_{ip}^\alpha = \text{dist}(C_i, H_p^\alpha)$ ;
- $\Pi^h(\rho^n, \cdot) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}^{h^2 \times h^2} \mid \forall i \in I, h^2 \rho_i^n = \sum_{j \in I} \mu_{ij} \right\}$ ;
- $\sigma := \mathcal{F}(\mu)$  avec  $\mathcal{F}$  défini en (4.1) ;
- $I(\rho^n) = \{i \in I, \rho_i^n > 0\}$ .

et on peut montrer que si  $u_x, u_y \in [0, 1]$  alors l'ensemble des solutions est donné par :

$$\begin{pmatrix} \rho_{i_0} \\ \rho_{i_1} \\ \rho_{i_2} \\ \rho_{i_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-u_x)(1-u_y) \\ u_x(1-u_y) \\ u_y(1-u_x) \\ u_x u_y \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour  $s$  permettant à chaque densité de rester positive. Cependant, on peut remarquer que tous ces plans de transport ont le même flux  $(\sigma_{i_0 1}^x, \sigma_{i_0 1}^y) = (u_x, u_y)$ . En fait, dans ce cadre là, on peut montrer qu'il y a unicité des flux  $\sigma$  minimum de la fonctionnelle, mais, comme déterminer les flux ne suffit pas à déterminer le plan de transport des masses, il n'y a pas unicité pour le plan de transport ou pour la densité finale. Nous allons voir que pour récupérer le résultat obtenu en dimension 1, il va falloir choisir parmi les plans de transport minimisant la fonctionnelle JKO, celui qui a la plus petite entropie. Le schéma JKO devient alors :

### Schéma JKO 2. (général)

À partir de  $\rho^n \in \mathcal{P}^{h^2}$ , le schéma calcule  $\rho^{n+1}$  de la manière suivante :

$$\left| \begin{aligned} \Lambda(\rho^n, \psi) &= \operatorname{argmin}_{\mu \in \Pi^h(\rho^n, \cdot)} \left\{ \psi \left( \left( \sum_{i \in I} \frac{\mu_{ij}}{h^2} \right)_{j \in I} \right) + \frac{1}{2\tau} \sum_{\substack{p \in P \\ \alpha \in \{x, y\} \\ i \in I(\rho^n)}} \left( \frac{(\sigma_{ip}^\alpha)^2}{\rho_i^n} + 2hm_{ip}^\alpha \sigma_{ip}^\alpha \right) \right\}, \\ \mu^{n+1} &= \operatorname{argmin}_{\mu \in \Lambda(\rho^n, \psi)} \left\{ \sum_{i, j \in I} \mu_{ij} \ln(\mu_{ij}) \right\}, \\ \rho_j^{n+1} &= \sum_{i \in I} \frac{\mu_{ij}^{n+1}}{h^2} \end{aligned} \right.$$

avec :

- $m_{ip}^\alpha = \text{dist}(C_i, H_p^\alpha)$  ;
- $\Pi^h(\rho^n, \cdot) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}^{h^2 \times h^2} \mid \sum_{j \in I} \mu_{ij} = h^2 \rho_i^n \right\}$  ;
- $\sigma := \mathcal{F}(\mu)$  avec  $\mathcal{F}$  défini en (4.1) ;
- $I(\rho^n) = \{i \in I, \rho_i^n > 0\}$ .

Notons  $\tilde{\sigma}_{ip}^\alpha$  la masse restante entre l'hyperplan  $H_{ip}^\alpha$  et l'hyperplan  $H_{ip+1}^\alpha$ , cette quantité est calculable avec la famille des flux  $\sigma := (\sigma_{ip}^\alpha)_{\substack{(i,j) \in I \times P \\ \alpha \in \{x,y\}}}$  (voir figure 4.3) :

$$\tilde{\sigma}_{ip}^\alpha = \begin{cases} h^2 \rho_i - \sigma_{i i_\alpha}^\alpha - \sigma_{i i_\alpha + 1}^\alpha & \text{si } p = i_\alpha, \\ (-1)^{\mathbb{1}_{p > i_\alpha}} (\sigma_{i p+1}^\alpha - \sigma_{ip}^\alpha) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.7)$$

avec comme convention  $\sigma_{ip} = 0$  si  $p \notin P$ . Nous allons montrer que, pour des flux donnés  $\sigma$ , il existe un unique plan de transport minimisant l'entropie mathématique si la densité finale n'est pas sujet à une contrainte quelconque. Ce plan de transport est donné par la formule suivante :

$$\mu_{ij} = \frac{\tilde{\sigma}_{i j_x}^x \tilde{\sigma}_{i j_y}^y}{h^2 \rho_i}$$

pour cela nous allons utiliser le lemme suivant :

**Lemme 4.5.** Soient  $(\gamma_{pq})_{(p,q) \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket^2} \in \mathbb{R}_+^{M^2}$ ,  $(\tilde{\sigma}_p^x)_{p \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket} \in \mathbb{R}_+^M$  et  $(\tilde{\sigma}_q^y)_{q \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket} \in \mathbb{R}_+^M$  tels que

$$\sum_{p=0}^{M-1} \tilde{\sigma}_p^x = \sum_{q=0}^{M-1} \tilde{\sigma}_p^y = 1$$

alors le minimum de la fonctionnelle :

$$J(\gamma) = \sum_{(p,q) \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket^2} \gamma_{pq} \ln(\gamma_{pq})$$

sous les contraintes :

$$\sum_{p=0}^{M-1} \gamma_{pq} = \tilde{\sigma}_q^y \text{ et } \sum_{q=0}^{M-1} \gamma_{pq} = \tilde{\sigma}_p^x$$

est obtenu pour :

$$\gamma_{pq} = \tilde{\sigma}_p^x \tilde{\sigma}_q^y.$$

*Démonstration.* L'équation d'Euler-Lagrange pour cette fonctionnelle sous contraintes nous donne :

$$\forall p, q \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket, \ln(\gamma_{pq}) + 1 - \lambda_p^x - \lambda_q^y = 0$$

où  $\lambda_p^x$  et  $\lambda_q^y$  représente les multiplicateurs de Lagrange des deux contraintes liées à  $\gamma_{pq}$  et à  $\tilde{\sigma}_p^x$  et  $\tilde{\sigma}_q^y$  respectivement. On remarque que la constante 1 peut être intégrée dans les deux multiplicateurs de Lagrange en remplaçant

$$\lambda_p^x \rightarrow \lambda_p^x - 0.5,$$

$$\lambda_q^y \rightarrow \lambda_q^y - 0.5$$

et on obtient :

$$\gamma_{pq} = e^{\lambda_p^x} e^{\lambda_q^y}.$$

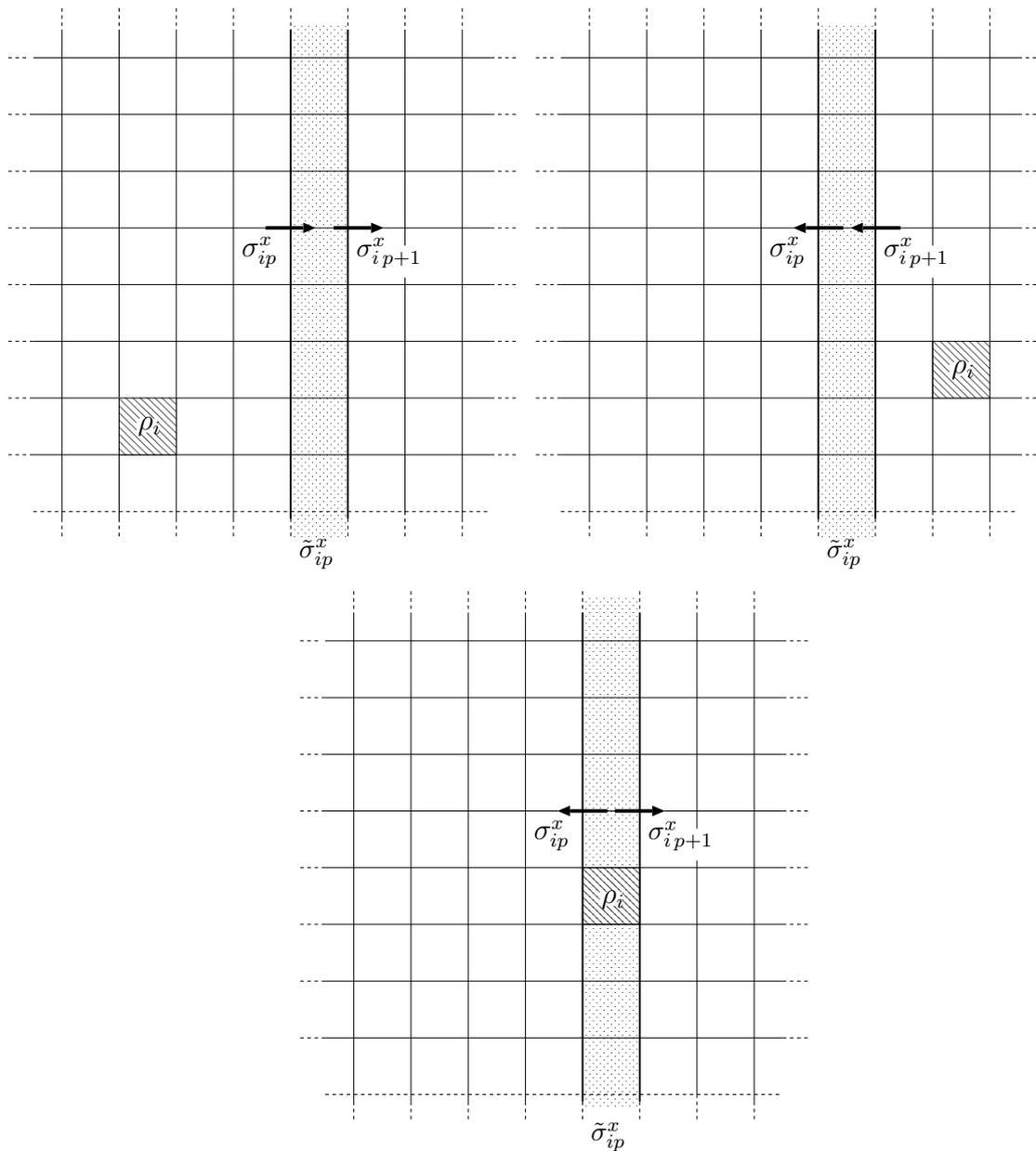


FIGURE 4.3 – Représentation de  $\tilde{\sigma}_{ip}^x$  par rapport à  $\sigma_{ip}^x$  et  $\sigma_{i,p+1}^x$ . Les cas représentés sont, de haut en bas et de gauche à droite, le cas où  $p > i_x$  puis  $p < i_x$  et  $p = i_x$ .

De plus, comme  $\sum_{q=0}^{M-1} \tilde{\sigma}_q^y = 1$  on a :

$$\sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} \gamma_{pq} = \left( \sum_{q=0}^{M-1} e^{\lambda_q^y} \right) \left( \sum_{p=0}^{M-1} e^{\lambda_p^x} \right) = 1$$

finalemt, comme

$$\sum_{q=0}^{M-1} \gamma_{pq} = \tilde{\sigma}_p^x = \left( \sum_{q=0}^{M-1} e^{\lambda_q^y} \right) e^{\lambda_p^x}$$

nous obtenons :

$$\gamma_{pq} = \frac{\tilde{\sigma}_p^x \tilde{\sigma}_q^y}{\left( \sum_{p=0}^{M-1} e^{\lambda_p^x} \right) \left( \sum_{q=0}^{M-1} e^{\lambda_q^y} \right)} = \tilde{\sigma}_p^x \tilde{\sigma}_q^y.$$

□

Ce lemme nous permet de prouver la proposition suivante :

**Proposition 4.6.** Soient  $(\tilde{\sigma}_{ip}^x)_{(i,p) \in I \times P}$  et  $(\tilde{\sigma}_{ip}^y)_{(i,p) \in I \times P}$  appartenant à  $\mathbb{R}_+^{I \times P}$  tels que :

$$\forall i \in I, \sum_{p \in P} \tilde{\sigma}_{ip}^x = \sum_{p \in P} \tilde{\sigma}_{ip}^y = h^2 \rho_i$$

alors le minimum de la fonctionnelle :

$$J(\mu) = \sum_{i,j \in I} \mu_{ij} \ln(\mu_{ij})$$

avec comme contraintes, pour tout  $i, j \in I$  :

$$\sum_{p=0}^{M-1} \mu_{i(p,j_y)} = \tilde{\sigma}_{i j_y}^y \quad \text{et} \quad \sum_{q=0}^{M-1} \mu_{i(j_x,q)} = \tilde{\sigma}_{i j_x}^x$$

est obtenu pour :

$$\mu_{ij} = \frac{\tilde{\sigma}_{i j_x}^x \tilde{\sigma}_{i j_y}^y}{h^2 \rho_i}.$$

*Démonstration.* La preuve s'obtient en constatant que les  $(\mu_{ij})_{j \in I}$  n'ont aucune contrainte qui dépend des  $(\mu_{i'j})_{j \in I}$  si  $i \neq i'$ . À  $i$  fixé, on utilise le lemme précédent avec :

$$\tilde{\sigma}_p^y = \tilde{\sigma}_{ip}^y; \quad \tilde{\sigma}_p^x = \tilde{\sigma}_{ip}^x; \quad \gamma_{pq} = \mu_{i(p,q)}.$$

□

Par conséquent, la masse allant de la cellule  $i$  à la cellule  $j$  est à la fois proportionnelle à la masse partant de la cellule  $i$  et restant entre  $H_j^x$  et  $H_{j+1}^x$  mais aussi à celle restant entre  $H_j^y$  et  $H_{j+1}^y$ . Notons  $\mathbf{P}$  l'application qui a une famille  $\sigma$  admissible et une densité  $\rho$  de  $\mathcal{P}^{h^2}$  donne la densité  $\nu$  de  $\mathcal{P}^{h^2}$  comme suit :

$$\mathbf{P}(\sigma, \rho)_j := \nu_j = \frac{1}{h^2} \sum_{i \in I} \frac{\tilde{\sigma}_{i j_x}^x \tilde{\sigma}_{i j_y}^y}{h^2 \rho_i}.$$

L'algorithme JKO sans discrétisation du terme  $\psi$  et sans contrainte sur la densité finale devient alors :

**Schéma JKO 3. (sans contrainte sur la densité finale)**

À partir de  $\rho^n \in \mathcal{P}^{h^2}$ , le schéma calcule  $\rho^{n+1}$  comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^{n+1} = \operatorname{argmin}_{\sigma \in \operatorname{Adm}(\rho^n)} \left\{ \psi((\mathbf{P}(\sigma, \rho^n))_{j \in I}) + \frac{1}{2\tau} \sum_{\substack{p \in P \\ \alpha \in \{x, y\} \\ i \in I(\rho^n)}} \left( \frac{(\sigma_{ip}^\alpha)^2}{\rho_i^n} + 2hm_{ip}^\alpha \sigma_{ip}^\alpha \right) \right\}, \\ \rho_j^{n+1} = \mathbf{P}(\sigma, \rho^n)_j \end{array} \right.$$

avec :

- $m_{ip}^\alpha = \operatorname{dist}(C_i, H_p^\alpha)$  ;
- $\operatorname{Adm}(\rho^n) = \{(\sigma_{ip}^\alpha)_{(i,p) \in I \times P} \geq 0 \mid \bar{\sigma}_{ip}^\alpha \geq 0\}$  ;
- $I(\rho^n) = \{i \in I, \rho_i^n > 0\}$ .

**Remarque 4.7.** Dans le cas où la densité finale n'est pas contrainte, imposer que la densité finale soit égale à  $\mathbf{P}(\sigma, \rho)$  revient à utiliser le minimum de la fonctionnelle :

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \mu_{ij} \ln(\mu_{ij})$$

sur l'ensemble des solutions du schéma JKO décrit en (4.6) page 109. Par contre, cette solution n'est plus valable si une contrainte est imposée à la densité finale comme nous le verrons dans 4.2.1 page 120.

### Cas d'une vitesse constante

Dans cette sous-section, nous allons étudier l'algorithme JKO discrétisé en espace avec le coût modifié proposé ci-dessus dans le cas de l'équation d'advection à vitesse constante. La fonctionnelle associée à l'équation d'advection à vitesse constante est

$$\psi(x) = - \int_X (u \cdot x) \rho(x) dx$$

où  $u := (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2$  est la vitesse. La fonctionnelle du schéma JKO devant être minimiser selon  $\sigma$  au  $(n+1)^e$  pas de temps est alors :

$$\sum_{j \in I} (j_x u_x + j_y u_y) h^2 \mathbf{P}(\sigma, \rho^n)_j + \frac{1}{2\tau} \sum_{\substack{p \in P \\ \alpha \in \{x, y\} \\ i \in I(\rho^n)}} \left( \frac{(\sigma_{ip}^\alpha)^2}{\rho_i^n} + 2hm_{ip}^\alpha \sigma_{ip}^\alpha \right). \quad (4.8)$$

Nous allons voir que, à chaque pas de temps, l'algorithme donne le projeté  $L^2$  du translaté d'amplitude  $\tau u$  de la densité initiale :

**Proposition 4.8.** *Soit  $\rho \in \mathcal{P}^{h^2}$  et  $u \in \mathbb{R}^2$  tel que pour tout  $i \in I(\rho) = \{i \in I \mid \rho_i > 0\}$ ,  $(Id + \tau u)_\#(C_i) \subset X$ , on pose :*

$$J(\bar{\sigma}) = \sum_{j \in I} (j_x u_x + j_y u_y) h^2 \mathbf{P}(\bar{\sigma}, \rho)_j + \frac{1}{2\tau} \sum_{\substack{p \in P \\ \alpha \in \{x, y\} \\ i \in I(\rho)}} \left( \frac{(\bar{\sigma}_{ip}^\alpha)^2}{\rho_i} + 2hm_{ip}^\alpha \bar{\sigma}_{ip}^\alpha \right),$$

alors si

$$\sigma = \underset{\bar{\sigma} \in \text{Adm}(\rho)}{\text{argmin}} J(\bar{\sigma})$$

avec  $\text{Adm}(\rho) = \{(\sigma_{ip}^\alpha)_{(i,p) \in I \times P} \geq 0 \mid \tilde{\sigma}_{ip}^\alpha \geq 0\}$ , on obtient :

$$\mathbf{P}(\sigma, \rho) = \mathbb{P}_{\mathcal{P}^{h^2}}((Id + \tau u)_\# \rho).$$

*Démonstration.* On remarque que pour la fonctionnelle  $J$ , la minimisation des  $(\sigma_{ip}^\alpha)_{p \in P}$  est indépendante de la minimisation des  $(\sigma_{i'p}^\beta)_{p \in P}$  si  $(i, \alpha) \neq (i', \beta)$ . De plus, pour simplifier, supposons que les composantes de la vitesse  $u_x$  et  $u_y$  sont positives, on remarque que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sum_{j \in I} g_j \nu_j)}{\partial \sigma_{ip}^x} &= \frac{\partial \left( \sum_{q=0}^{M-1} g_{(p-1,q)} \nu_{(p-1,q)} + g_{(p,q)} \nu_{(p,q)} \right)}{\partial \sigma_{ip}^x} \\ &= \frac{g_{(p-1,q)}}{\rho_i h^4} \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{ip-1}^x \tilde{\sigma}_{iq}^y)}{\partial \sigma_{ip}^x} + \frac{g_{(p,q)}}{\rho_i h^4} \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{ip}^x \tilde{\sigma}_{iq}^y)}{\partial \sigma_{ip}^x} \\ &= \sum_{q=0}^{M-1} (-1)^{\mathbb{1}_{ix \geq p}} \frac{(g_{(p,q)} - g_{(p-1,q)})}{h^4} \frac{\tilde{\sigma}_{iq}^y}{\rho_i} \\ &= \sum_{q=0}^{M-1} (-1)^{\mathbb{1}_{ix \geq p}} u_x \frac{\tilde{\sigma}_{iq}^y}{\rho_i h^3} \\ &= (-1)^{\mathbb{1}_{ix \geq p}} \frac{u_x}{h} \end{aligned}$$

en remarquant que  $\sum_{q=0}^{M-1} \tilde{\sigma}_{iq}^y = \rho_i h^2$ . De plus, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ip}^x} &= (-1)^{\mathbb{1}_{ix \geq p}} u_x h + \frac{h^2}{\tau} \left( \frac{\sigma_{ip}^x}{h^2 \rho_i} + \frac{m_{ip}^x}{h} \right) \\ \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ip}^y} &= (-1)^{\mathbb{1}_{iy \geq p}} u_y h + \frac{h^2}{\tau} \left( \frac{\sigma_{ip}^y}{h^2 \rho_i} + \frac{m_{ip}^y}{h} \right) \end{aligned}$$

comme  $u_x$  et  $u_y$  sont positives, nous obtenons que

$$\sigma_{ip}^\alpha = 0 \text{ si } p \leq i_\alpha, \alpha \in \{x, y\}$$

en effet, augmenter une de ces variables ne permet que d'augmenter le coût ou de relaxer les contraintes d'une variable augmentant le coût. Comme les variables  $\sigma_{ip}^x$  et  $\sigma_{ip}^y$  non-nulles n'interagissent pas entre elles ni dans la fonctionnelle, ni dans les contraintes, il suffit de minimiser les  $\sigma_{ip}^x$  comme dans le lemme 3.7 page 87 et de même pour les  $\sigma_{ip}^y$ .  $\square$

## Cas général

Dans cette sous-section, nous allons étudier l'algorithme JKO discrétisé en espace avec le coût proposé dans le cadre de l'équation de continuité. Rappelons que la fonctionnelle associée à l'équation de continuité est

$$\psi(\rho) = \int_X g(x)\rho(x)dx$$

et le schéma JKO associé à l'équation de continuité est alors le suivant :

$$\rho^{n+1} \in \operatorname{argmin}_{\rho \in \mathcal{P}^a(K)} \left\{ \int_X g(x)\rho(x) dx + \frac{1}{2\tau} \mathcal{W}_2(\rho^n, \rho)^2 \right\}.$$

On approche  $\int_X g(x)\rho(x)dx$  par  $\sum_{j \in I} h^2 g_j \rho_j$  avec  $g_j = g((j_x h + h/2, j_y h + h/2))$  et on utilise le schéma JKO 3 page 114. La fonctionnelle du schéma JKO à minimiser au  $(n+1)^e$  pas de temps devient alors :

$$J(\sigma) = h^2 \sum_{j \in I} g_j \mathbf{P}(\sigma, \rho^n)_j + \frac{1}{2\tau} \sum_{\alpha \in \{x,y\}} \sum_{p \in P} \sum_{i \in I(\rho^n)} \left( \frac{(\sigma_{ip}^\alpha)^2}{\rho_i^n} + 2hm_{ip}^\alpha \sigma_{ip}^\alpha \right). \quad (4.9)$$

Par la suite notons  $\mathring{I} = I \setminus \{(i_x, i_y) \in I \mid i_x = 0 \text{ ou } i_x = M-1 \text{ ou } i_y = 0 \text{ ou } i_y = M-1\}$  l'ensemble des indices des cellules de  $X^{h^2}$  sauf celles se trouvant au bord du domaine. De plus pour  $p \in P$  et  $i := (i_x, i_y) \in I$  on note :

$$\begin{cases} u_{p i_y}^x = -\frac{g_{(p, i_y)} - g_{(p-1, i_y)}}{h}, \\ u_{i_x p}^y = -\frac{g_{(i_x, p)} - g_{(i_x, p-1)}}{h}, \end{cases} \quad (4.10)$$

les dérivées discrètes de  $-g$  selon  $x$  et  $y$ .

Nous n'avons pas de preuve théorique de convergence du schéma JKO discrétisé pour l'équation de continuité. Cependant, la prochaine proposition démontre que, asymptotiquement, le schéma redonne un schéma connu pour sa consistance envers l'équation de continuité. De plus, des applications numériques confirmeront la consistance de ce schéma dans 4.2.2 page 123.

**Proposition 4.9.** *Soient  $i \in \mathring{I}$ ,  $c = \frac{\tau \max(\|u^x\|_\infty, \|u^y\|_\infty)}{h}$  et  $\rho = \rho_i \mathbf{1}_{C_i}$  alors si  $c < 1/4$  la fonctionnelle (4.9) admet un unique minimiseur  $\sigma$  tel que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{i_x}^x = h^2 \rho_i \left( \frac{\tau u_{i_x i_y}^x}{h} \right)^- + o(c), \\ \sigma_{i_x+1}^x = h^2 \rho_i \left( \frac{\tau u_{i_x+1 i_y}^x}{h} \right)^+ + o(c), \\ \sigma_{i_y}^y = h^2 \rho_i \left( \frac{\tau u_{i_x i_y}^y}{h} \right)^- + o(c), \\ \sigma_{i_y+1}^y = h^2 \rho_i \left( \frac{\tau u_{i_x i_y+1}^y}{h} \right)^+ + o(c). \end{array} \right.$$

*Démonstration.* On pose

$$J(\bar{\sigma}) = h^2 \sum_{j \in I} g_j \mathbf{P}(\bar{\sigma}, \rho)_j + \frac{1}{2\tau} \sum_{\alpha \in \{x,y\}} \sum_{p \in P} \sum_{i \in I(\rho)} \left( \frac{(\bar{\sigma}_{ip}^\alpha)^2}{\rho_i} + 2hm_{ip}^\alpha \bar{\sigma}_{ip}^\alpha \right).$$

Cette fonctionnelle est à minimiser pour  $\bar{\sigma}$  inclus dans  $[0, \|\rho\|_\infty h^2]^{I \times P}$ . Par conséquent il existe au moins un minimiseur  $\sigma$ , nous allons montrer que, sous les hypothèses de la proposition, il est unique. On remarque que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sum_{j \in I} g_j \nu_j)}{\partial \sigma_{ip}^x} &= \frac{\partial \left( \sum_{q=0}^{M-1} g_{(p-1,q)} \nu_{(p-1,q)} + g_{(p,q)} \nu_{(p,q)} \right)}{\partial \sigma_{ip}^x} \\ &= \frac{g_{(p-1,q)}}{\rho_i h^4} \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{ip-1}^x \tilde{\sigma}_{iq}^y)}{\partial \sigma_{ip}^x} + \frac{g_{(p,q)}}{\rho_i h^4} \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{ip}^x \tilde{\sigma}_{iq}^y)}{\partial \sigma_{ip}^x} \\ &= \sum_{q=0}^{M-1} (-1)^{\mathbb{1}_{i_x \geq p}} \frac{(g_{(p,q)} - g_{(p-1,q)}) \tilde{\sigma}_{iq}^y}{h^4 \rho_i} \\ &= - \sum_{q=0}^{M-1} (-1)^{\mathbb{1}_{i_x \geq p}} u_{pq}^x \frac{\tilde{\sigma}_{iq}^y}{\rho_i h^3} \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{ip}^x} = - \sum_{q=0}^{M-1} (-1)^{\mathbb{1}_{i_x \geq p}} u_{pq}^x \frac{\tilde{\sigma}_{iq}^y}{\rho_i h} + \frac{h^2}{\tau} \left( \frac{\sigma_{ip}^x}{h^2 \rho_i} + \frac{m_{ip}^x}{h} \right)$$

si  $\|u^x\|_\infty \leq \frac{h}{\tau}$  alors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{q=0}^{M-1} (-1)^{\mathbb{1}_{i_x \geq p}} u_{pq}^x \frac{\tilde{\sigma}_{iq}^y}{\rho_i h} \right| &\leq \frac{h^2}{\tau} \sum_{q=0}^{M-1} \frac{\sigma_{iq}^y}{\rho_i h^2} \\ &= \frac{h^2}{\tau} \end{aligned}$$

et donc si  $m_{ip}^x \geq h$  on a  $\frac{\partial J}{\partial \sigma_{ip}^x} \geq 0$ , on en conclut alors que

$$\sigma_{ip}^x = 0 \text{ si } p \notin \{i_x, i_x + 1\},$$

traverser les hyperplans situés à une distance non nulle de la cellule ne fait qu'augmenter le coût. Par symétrie, on a les mêmes résultats pour les hyperplans horizontaux  $(\sigma_{ip}^y)_{(i,p) \in I \times P}$ . En conclusion il nous reste :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial \sigma_{i i_x}^x} = u_{i_x i_y+1}^x \frac{\tilde{\sigma}_{i i_y+1}^y}{\rho_i h} + u_{i_x i_y}^x \frac{\tilde{\sigma}_{i i_y}^y}{\rho_i h} + u_{i_x i_y-1}^x \frac{\tilde{\sigma}_{i i_y-1}^y}{\rho_i h} + \frac{h^2}{\tau} \left( \frac{\sigma_{i i_x}^x}{h^2 \rho_i} \right), \\ \frac{\partial J}{\partial \sigma_{i i_x+1}^x} = -u_{i_x+1 i_y+1}^x \frac{\tilde{\sigma}_{i i_y+1}^y}{\rho_i h} - u_{i_x+1 i_y}^x \frac{\tilde{\sigma}_{i i_y}^y}{\rho_i h} - u_{i_x+1 i_y-1}^x \frac{\tilde{\sigma}_{i i_y-1}^y}{\rho_i h} + \frac{h^2}{\tau} \left( \frac{\sigma_{i i_x+1}^x}{h^2 \rho_i} \right), \\ \frac{\partial J}{\partial \sigma_{i i_y}^y} = u_{i_x+1 i_y}^y \frac{\tilde{\sigma}_{i i_x+1}^x}{\rho_i h} + u_{i_x i_y}^y \frac{\tilde{\sigma}_{i i_x}^x}{\rho_i h} + u_{i_x-1 i_y}^y \frac{\tilde{\sigma}_{i i_x-1}^x}{\rho_i h} + \frac{h^2}{\tau} \left( \frac{\sigma_{i i_y}^y}{h^2 \rho_i} \right), \\ \frac{\partial J}{\partial \sigma_{i i_y+1}^y} = -u_{i_x+1 i_y+1}^y \frac{\tilde{\sigma}_{i i_x+1}^x}{\rho_i h} - u_{i_x i_y+1}^y \frac{\tilde{\sigma}_{i i_x}^x}{\rho_i h} - u_{i_x-1 i_y+1}^y \frac{\tilde{\sigma}_{i i_x-1}^x}{\rho_i h} + \frac{h^2}{\tau} \left( \frac{\sigma_{i i_y+1}^y}{h^2 \rho_i} \right), \end{array} \right.$$

sous les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ip}^\alpha \geq 0, \\ rh^2 - \sigma_{i i_y}^y - \sigma_{i i_y+1}^y \geq 0, \\ rh^2 - \sigma_{i i_x}^x - \sigma_{i i_x+1}^x \geq 0. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Notons  $H$  la matrice Hessienne de  $J$  avec pour variable le vecteur  $(\sigma_{i i_x}^x, \sigma_{i i_x+1}^x, \sigma_{i i_y}^y, \sigma_{i i_y+1}^y)$ , elle est définie comme suit :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau \rho_i} & 0 & \frac{u_{i_x i_y-1}^x - u_{i_x i_y}^x}{\rho_i h} & \frac{u_{i_x i_y+1}^x - u_{i_x i_y}^x}{\rho_i h} \\ 0 & \frac{1}{\tau \rho_i} & \frac{u_{i_x+1 i_y}^x - u_{i_x+1 i_y-1}^x}{\rho_i h} & \frac{u_{i_x+1 i_y+1}^x - u_{i_x+1 i_y}^x}{\rho_i h} \\ \frac{u_{i_x-1 i_y}^y - u_{i_x i_y}^y}{\rho_i h} & \frac{u_{i_x+1 i_y}^y - u_{i_x i_y}^y}{\rho_i h} & \frac{1}{\tau \rho_i} & 0 \\ \frac{u_{i_x i_y+1}^y - u_{i_x-1 i_y+1}^y}{\rho_i h} & \frac{u_{i_x i_y+1}^y - u_{i_x+1 i_y+1}^y}{\rho_i h} & 0 & \frac{1}{\tau \rho_i} \end{pmatrix}.$$

Chacun des termes extradiagonaux non nuls peut être majoré par  $\frac{2\|u\|_\infty}{\rho_i h}$ . Par conséquent, elle est à diagonale strictement dominante si  $c < 1/4$ , ce qui implique l'unicité de  $\sigma$ . Si on suppose que seules les contraintes sur la positivité des  $\sigma_{ip}$  soient activées, les conditions de Karush–Kuhn–Tucker nous donne le système implicite suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{i i_x}^x = \left( (h^2 \rho_i - \sigma_{i i_y}^y - \sigma_{i i_y+1}^y) \frac{\tau u_{i_x i_y}^x}{h} + (\sigma_{i i_y}^y) \frac{\tau u_{i_x i_y-1}^x}{h} + (\sigma_{i i_y+1}^y) \frac{\tau u_{i_x i_y+1}^x}{h} \right)^-, \\ \sigma_{i i_x+1}^x = \left( (h^2 \rho_i - \sigma_{i i_y}^y - \sigma_{i i_y+1}^y) \frac{\tau u_{i_x+1 i_y}^x}{h} + (\sigma_{i i_y}^y) \frac{\tau u_{i_x+1 i_y-1}^x}{h} + (\sigma_{i i_y+1}^y) \frac{\tau u_{i_x+1 i_y+1}^x}{h} \right)^+, \\ \sigma_{i i_y}^y = \left( (h^2 \rho_i - \sigma_{i i_x}^x - \sigma_{i i_x+1}^x) \frac{\tau u_{i_x i_y}^y}{h} + (\sigma_{i i_x}^x) \frac{\tau u_{i_x-1 i_y}^y}{h} + (\sigma_{i i_x+1}^x) \frac{\tau u_{i_x+1 i_y}^y}{h} \right)^-, \\ \sigma_{i i_y+1}^y = \left( (h^2 \rho_i - \sigma_{i i_x}^x - \sigma_{i i_x+1}^x) \frac{\tau u_{i_x i_y+1}^y}{h} + (\sigma_{i i_y}^y) \frac{\tau u_{i_x-1 i_y+1}^y}{h} + (\sigma_{i i_y+1}^y) \frac{\tau u_{i_x+1 i_y+1}^y}{h} \right)^+, \end{array} \right. \quad (4.12)$$

et si  $\frac{\tau\|u\|_\infty}{h} \leq \frac{1}{4}$  on peut montrer que la seconde et la troisième contrainte de (4.11)

sont vérifiées, on obtient alors :

$$\begin{cases} \sigma_{i_x i_x}^x = h^2 \rho_i \frac{\tau(u_{i_x i_y}^x)^-}{h} + o(c), \\ \sigma_{i_x i_x+1}^x = h^2 \rho_i \frac{\tau(u_{i_x+1 i_y}^x)^+}{h} + o(c), \\ \sigma_{i_x i_y}^y = h^2 \rho_i \frac{\tau(u_{i_x i_y}^y)^-}{h} + o(c), \\ \sigma_{i_x i_y+1}^y = h^2 \rho_i \frac{\tau(u_{i_x i_y+1}^y)^+}{h} + o(c). \end{cases}$$

□

**Remarque 4.10.** Pour  $\frac{\tau \|u\|_\infty}{h} \leq \frac{1}{4}$ , le minimum doit vérifier le système implicite (4.12) qui est consistant avec l'équation de continuité.

## 4.2 Schéma numérique utilisé et simulations

Dans cette section, nous allons présenter le schéma numérique utilisé pour calculer des solutions des équations flot-gradients ainsi que des simulations sans contrainte de congestion.

### 4.2.1 Description de la méthode de simplification

Nous allons présenter comment nous approchons les solutions données par le schéma JKO 2 page 110. Nous commencerons par diminuer le nombre de variables en supposant que les mouvements effectués par les masses sont de faibles amplitudes. Ensuite, nous expliquerons la méthode utilisée pour approcher la solution ayant l'entropie la plus faible.

#### Simplification pour les petits mouvements

L'un des problèmes qui apparait rapidement est le temps de calcul d'une solution du schéma JKO en dimension 2 avec la méthode du balayage transverse. Pour un pas d'espace  $h \approx 0.01$  et  $L = 1$ , le nombre de cellules est alors de  $M^2 = 10^4$  qui ont elles-mêmes  $2(M - 1)$  variables pour chacun de leurs hyperplans. Chaque étape de l'algorithme JKO est donc une minimisation sur  $M^2 \times 2(M - 1) \approx 2M^3 = 2 \times 10^6$  variables. Une méthode utilisant les plans de transport nécessiterait  $M^4 = 10^8$  variables, c'est donc moins important mais reste toutefois assez long en temps de calcul. Cependant, dans certaines conditions, on peut considérer que la masse envoyée par une cellule au-delà de ces voisins est négligeable.

Si on suppose que la masse ne se déplace pas plus loin que les cellules voisines, on obtient alors :

$$\sigma_{ip}^\alpha = 0 \text{ si } p \notin \{i_\alpha, i_\alpha + 1\}.$$

Notons  $V^\alpha(i) = \{i_\alpha, i_\alpha + 1\}$ , la fonctionnelle à minimiser à chaque étape du schéma JKO dans le cas où  $\psi$  est non discrétisé est :

$$\sum_{j \in I} \psi(\mathbf{P}(\sigma, \rho)_j) + \frac{1}{2\tau} \left( \sum_{i \in I(\rho)} \frac{1}{\rho_i} \sum_{\alpha \in \{x, y\}} \sum_{p \in V^\alpha(i)} (\sigma_{ip}^\alpha)^2 \right)$$

à minimiser sous les contraintes :

- $\sigma_{ip}^\alpha \geq 0, \forall i \in I, \alpha \in \{x, y\}, p \in V^\alpha(i) = \{i_\alpha, i_\alpha + 1\}$ ;
- $\rho_i h^2 - (\sigma_{i i_\alpha}^\alpha + \sigma_{i i_\alpha + 1}^\alpha) \geq 0, \forall i \in I, \alpha \in \{x, y\}$ .

En utilisant ce schéma simplifié, à chaque étape on minimise sur  $M^2 \times 4$  variables au lieu de  $M^2 \times 2(M - 1)$ , on gagne donc une puissance de  $M$ .

### Schéma numérique général utilisé

La seconde difficulté de ce schéma est au niveau des contraintes. Le schéma JKO 3 décrit page 114 utilise le fait que, si la densité finale n'est pas sujette à une contrainte, la solution du schéma JKO qui minimise l'entropie mathématique est obtenue à partir des flux  $\sigma$  par l'application  $\mathbf{P}$ . Garder cette hypothèse dans le cas où la densité finale est elle aussi contrainte mène à des problèmes numériques :

1. En dimension 2, des contraintes quadratiques apparaissent pour imposer que la masse à l'intérieur d'une cellule ne dépasse pas une certaine valeur (contrainte de congestion). En effet, rappelons que la masse envoyée dans la cellule  $C_j$  est calculée via les flux de  $\sigma$  de la manière suivante :

$$h^2 \mathbf{P}(\sigma, \rho)_j = \sum_{i \in I} \frac{\tilde{\sigma}_{ij_x}^x \tilde{\sigma}_{ij_y}^y}{h^2 \rho_i},$$

avec

$$\tilde{\sigma}_{ip}^\alpha = \begin{cases} h^2 \rho_i - \sigma_{i i_\alpha}^\alpha - \sigma_{i i_\alpha + 1}^\alpha & \text{si } p = i_\alpha, \\ (-1)^{1_{p > i_\alpha}} (\sigma_{i p+1}^\alpha - \sigma_{ip}^\alpha) & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Le plan de transport minimisant l'entropie mathématique peut ne plus être un plan admissible. Dans la figure 4.4, les cellules adjacentes contiennent assez peu de masse et pourraient recevoir la masse surcongestionnée de la cellule centrale, mais si on garde l'hypothèse  $\mu = \mathbf{P}(\sigma, \rho)$  la masse ne peut être envoyée qu'à l'horizontale ou qu'à la verticale et non au deux à la fois car cela imposerait qu'elle en envoie à la diagonale, or, celle-ci est déjà surcongestionnée.

Pour éviter ce genre de blocage, nous revenons à la définition du schéma JKO 2 page 110 qui utilise les plans de transport. Pour les mouvements de faible amplitude, beaucoup de flux sont considérés nuls, la relation entre le plan de transport  $\mu$  et les flux  $\sigma$  est réduite à :

1	0.5	1
0.5	2	0.5
1	0.5	1

FIGURE 4.4 – Exemple de situation où le schéma peut poser des problèmes si on rajoute une contrainte de congestion. Le nombre au milieu de la cellule représente la valeur de la densité dans chaque cellule.

$$\mathcal{F}(\mu) = \sigma \Leftrightarrow \forall i \in I \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{i i_x}^x = \sum_{j=-1}^1 \mu_i(i_x-1, i_y+j), \\ \sigma_{i i_x+1}^x = \sum_{j=-1}^1 \mu_i(i_x+1, i_y+j), \\ \sigma_{i i_y}^y = \sum_{j=-1}^1 \mu_i(i_x+j, i_y-1), \\ \sigma_{i i_y+1}^y = \sum_{j=-1}^1 \mu_i(i_x+j, i_y+1). \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Le schéma JKO discrétisé en espace devient alors :

à partir de  $\rho^n \in \mathcal{P}^{h^2}$  le schéma calcule  $\rho^{n+1}$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_j^{n+1} = \frac{\sum_{i \in I} \mu_{ij}^{n+1}}{h^2}, \\ \mu^{n+1} = \operatorname{argmin}_{\bar{\mu} \in \Lambda(\rho^n, \psi)} \left\{ \sum_{i,j \in I} \bar{\mu}_{ij} \ln(\bar{\mu}_{ij}) \right\}, \\ \Lambda(\rho^n, \psi) = \operatorname{argmin}_{\mu \in \Pi^h(\rho^n, \cdot)} \left\{ \sum_{j \in I} \psi \left( \sum_{i \in V(j)} \frac{\mu_{ij}}{h^2} \right) + \frac{1}{2\tau} \left( \sum_{i \in I(\rho^n)} \frac{1}{\rho_i^n} \left( \sum_{\alpha \in \{x,y\}} \sum_{p \in V^\alpha(i)} (\sigma_{ip}^\alpha)^2 \right) \right) \right\} \end{array} \right.$$

avec :

- $V^\alpha(i) = \{i_\alpha, i_{\alpha+1}\}$ ;
- $V(i) = \{(i_x + \delta_x, i_y + \delta_y), \delta_x, \delta_y \in \{-1, 0, 1\}\}$  l'ensemble des voisins de  $i$ ;

- $\Pi^h(\rho^n, \cdot) = \left\{ (\mu_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in V(i)}} \geq 0 \mid \forall i \in I, \sum_{j \in V(i)} \mu_{ij} = h^2 \rho_i^n \right\}$ ;
- $\mathcal{F}(\mu) = \sigma$  avec la fonction  $\mathcal{F}$  donnée dans (4.13) ;
- $I(\rho) = \{i \in I, \rho_i > 0\}$ .

**Remarque 4.11.** On peut généraliser au cas où l'on considère tous les flux :

$$\sigma_{ip}^\alpha = \sum_{j \in P_{ip}^\alpha} \mu_{ij}$$

avec  $P_{ip}^\alpha = \left\{ j \in I \mid \begin{array}{l} j_\alpha \geq p \text{ si } i_\alpha < p \\ j_\alpha < p \text{ si } i_\alpha \geq p \end{array} \right\}$  et  $\alpha \in \{x, y\}$ .

**Remarque 4.12.** L'ensemble  $\Lambda(\rho^n, \psi)$  est rarement un singleton même dans le cas où la densité finale est sujette à des contraintes. En effet, il est possible de modifier les  $(\mu_{ij})_{j \in V(i)}$  sans modifier les  $(\sigma_{ip}^\alpha)_{\substack{p \in V^\alpha(i) \\ \alpha \in \{x, y\}}}$  pour chaque  $i$  dans 4 directions propres. En d'autres termes, pour chaque  $i \in I$ , l'application linéaire qui à un vecteur  $(\mu_{ij})_{j \in V(i)}$  donne les flux  $(\sigma_{ip}^\alpha)_{\substack{p \in V^\alpha(i) \\ \alpha \in \{x, y\}}}$  a un noyau de dimension 4 dont une base est représentée sur la figure 4.5.

+ε	-ε	
-ε	+ε	

	-ε	+ε
	+ε	-ε

-ε	+ε	
+ε	-ε	

	+ε	-ε
	-ε	+ε

FIGURE 4.5 – Les possibilités de modification du plan de transport  $\mu$  sans modifier  $\sigma$ . Un quadrillage représente le plan  $(\mu_{ij})_{j \in V(i)}$  avec la cellule  $C_i$  au centre. Les "+ε" et "-ε" représentent la modification qu'on peut apporter à  $(\mu_{ij})_{j \in V(i)}$  sans modifier  $(\sigma_{ip}^\alpha)_{\substack{p \in P \\ \alpha \in \{x, y\}}}$ .

Numériquement, nous décidons de traiter la seconde minimisation en rajoutant une régularisation entropique à  $J$ . Le schéma JKO utilisé dans le cas des petits mouvements est alors

le suivant :

**Schéma JKO 4. (numérique)** À partir de  $\rho^n \in \mathcal{P}^{h^2}$  le schéma calcule  $\rho^{n+1}$  comme suit :

$$\left| \begin{aligned} \mu^{n+1} \in \min_{\mu \in \Pi^h(\rho^n, \cdot)} & \left\{ \sum_{j \in I} \psi \left( \sum_{i \in V(j)} \frac{\mu_{ij}}{h^2} \right) + \frac{1}{2\tau} \sum_{i \in I(\rho^n)} \frac{1}{\rho_i^n} \left( \sum_{\substack{p \in V^\alpha(i) \\ \alpha \in \{x, y\}}} (\sigma_{ip}^\alpha)^2 \right) \right. \\ & \left. + \epsilon \sum_{i \in I(\rho^n)} \sum_{j \in V(i)} \mu_{ij} \ln(\mu_{ij}) \right\}, \\ \rho_j^{n+1} &= \frac{\sum_{i \in I} \mu_{ij}^{n+1}}{h^2} \end{aligned} \right.$$

avec :

- $I(\rho^n) = \{i \in I, \rho_i^n > 0\}$  ;
- $V^\alpha(i) = \{i_\alpha, i_{\alpha+1}\}$  ;
- $V(i) = \{(i_x + \delta_x, i_y + \delta_y), \delta_x, \delta_y \in \{-1, 0, 1\}\}$  l'ensemble des voisins de  $i$  ;
- $\Pi^h(\rho^n, \cdot) = \left\{ (\mu_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in V(i)}} \left| \forall i \in I, \sum_{j \in V(i)} \mu_{ij} = h^2 \rho_i^n \right. \right\}$  ;
- $\epsilon > 0$ , un petit paramètre ;
- $\mathcal{F}(\mu) = \sigma$  avec la fonction  $\mathcal{F}$  donnée dans (4.13).

## 4.2.2 Algorithme pour l'équation de continuité

Dans cette sous-section, nous allons tester le schéma numérique décrit dans la section précédente dans le cadre de l'équation de continuité. Pour cela, on pose  $\psi(\nu) = \int_X g(x) \nu(x) dx$ . L'équation flot-gradient associée à cette fonctionnelle est l'équation de continuité :

$$\partial_t \rho - \nabla \cdot (\rho \nabla g) = 0.$$

En discrétisant la fonctionnelle  $\psi$  par :

$$\psi(\nu) \approx h^2 \sum_{j \in J} g_j \nu_j$$

avec  $g_j = g(x_j)$ , le schéma JKO simplifié devient alors : à partir de  $\rho^n \in \mathcal{P}^{h^2}$  le schéma calcule  $\rho^{n+1}$  comme suit :

$$\left| \begin{array}{l} \mu^{n+1} \in \min_{\mu \in \Pi^h(\rho^n, \cdot)} \left\{ \sum_{j \in I} \sum_{i \in V(j)} \mu_{ij} g_j + \frac{1}{2\tau} \sum_{i \in I(\rho^n)} \frac{1}{\rho_i^n} \left( \sum_{\substack{p \in V^\alpha(i) \\ \alpha \in \{x, y\}}} (\sigma_{ip}^\alpha)^2 \right) \right. \\ \left. + \epsilon \sum_{i \in I(\rho^n)} \sum_{j \in V(i)} \mu_{ij} \ln(\mu_{ij}) \right\} \\ \rho_j^{n+1} = \frac{\sum_{i \in I} \mu_{ij}^{n+1}}{h^2}, \end{array} \right.$$

avec :

- $I(\rho^n) = \{i \in I, \rho_i^n > 0\}$  ;
- $V^\alpha(i) = \{i_\alpha, i_{\alpha+1}\}$  ;
- $V(i) = \{(i_x + \delta_x, i_y + \delta_y), \delta_x, \delta_y \in \{-1, 0, 1\}\}$  l'ensemble des voisins de  $i$  ;
- $\Pi^h(\rho^n, \cdot) = \left\{ (\mu_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in V(i)}} \mid \forall i \in I, \sum_{j \in V(i)} \mu_{ij} = h^2 \rho_i^n \right\}$  ;
- $\epsilon > 0$ , un petit paramètre ;
- $\mathcal{F}(\mu) = \sigma$  avec la fonction  $\mathcal{F}$  donnée dans (4.13).

On remarque encore une fois que la minimisation des  $(\mu_{ij})_{j \in V(i)}$  est totalement indépendante de la minimisation des  $(\mu_{i'j})_{j \in V(i')}$  si  $i$  et  $i'$  sont différents.

Il convient d'utiliser une autre méthode que l'utilisation de la transformée de Legendre pour la partie régularisation, en effet linéariser le terme de régularisation reviendrait à chercher le minimum d'une fonctionnelle linéaire sur un polygone convexe. Celui-ci serait atteint sur l'un des sommets, ce qui n'est pas le cas. Nous utiliserons la méthode suivante : supposons que  $(\mu_{ij})$  soit un minimum de l'algorithme JKO sans la régularisation entropique et  $(\gamma_{ij})$  le minimum avec la fonctionnelle d'entropie. On pose  $\epsilon_{ij} = \gamma_{ij} - \mu_{ij}$  et on suppose que  $|\epsilon_{ij}| \ll \mu_{ij}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in V(i)} \gamma_{ij} \ln(\gamma_{ij}) &= \sum_{j \in V(i)} (\gamma_{ij}) \ln(\mu_{ij} + \epsilon_{ij}) \\ &= \sum_{j \in V(i)} \gamma_{ij} \ln(\mu_{ij}) + \gamma_{ij} \ln \left( 1 + \frac{\epsilon_{ij}}{\mu_{ij}} \right) \\ &= \sum_{j \in V(i)} (\gamma_{ij}) \ln(\mu_{ij}) + \gamma_{ij} \left( \frac{\epsilon_{ij}}{\mu_{ij}} \right) + o \left( \frac{\epsilon_{ij}}{\mu_{ij}} \right) \\ &= \left( \sum_{j \in V(i)} \gamma_{ij} \ln(\mu_{ij}) + \frac{\gamma_{ij}^2}{\mu_{ij}} \right) - \rho_i + o \left( \frac{\epsilon_{ij}}{\mu_{ij}} \right). \end{aligned}$$

L'idée de l'algorithme est alors de trouver une première solution qui minimise la fonctionnelle

avec une régularisation utilisant la norme  $l^2$  du vecteur comprenant les variables et ainsi les garder strictement positives, une deuxième étape minimise la fonctionnelle avec la régularisation entropique en utilisant l'approximation précédente. L'algorithme utilisé est alors le suivant :

**Algorithme JKO 1. (Equation de continuité)**

À partir de  $\rho^n \in \mathcal{P}^{h^2}$ , l'algorithme calcule  $\rho^{n+1}$  de la manière suivante :

1ère étape :

$$\mu \in \operatorname{argmin}_{\bar{\mu} \in \Pi^h(\rho^n, \cdot)} \left\{ \sum_{j \in I} g_j \left( \sum_{i \in V(j)} \bar{\mu}_{ij} \right) + \frac{1}{2\tau} \left( \sum_{i \in I(\rho^n)} \frac{1}{\rho_i^n} \left( \sum_{\alpha \in \{x,y\}} \sum_{p \in V^\alpha(i)} (\bar{\sigma}_{ip})^2 \right) \right) + \epsilon \sum_{i \in I} \sum_{j \in V(i)} \bar{\mu}_{ij}^2 \right\};$$

2ème étape :

$$\mu^{n+1} \in \operatorname{argmin}_{\gamma \in \Pi^h(\rho^n, \cdot)} \left\{ \sum_{j \in I} g_j \left( \sum_{i \in V(j)} \gamma_{ij} \right) + \frac{1}{2\tau} \left( \sum_{i \in I(\rho^n)} \frac{1}{\rho_i^n} \left( \sum_{\alpha \in \{x,y\}} \sum_{p \in V^\alpha(i)} (\sigma_{ip})^2 \right) \right) + \epsilon \sum_{i \in I} \sum_{j \in V(i)} \left( \frac{\gamma_{ij}^2}{\mu_{ij} + \epsilon^2} + \bar{\gamma}_{ij} \ln(\mu_{ij} + \epsilon^2) \right) \right\};$$

$$\rho_j^{n+1} := \sum_{i \in V(j)} \frac{\mu_{ij}^{n+1}}{h^2}$$

avec

- $I(\rho^n) = \{i \in I, \rho_i^n > 0\}$ ;
- $V^\alpha(i) = \{i_\alpha, i_{\alpha+1}\}$ ;
- $V(i) = \{(i_x + \delta_x, i_y + \delta_y), \delta_x, \delta_y \in \{-1, 0, 1\}\}$  l'ensemble des voisins de  $i$ ;
- $\Pi^h(\rho^n, \cdot) = \left\{ (\mu_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in V(i)}} \mid \forall i \in I, \sum_{j \in V(j)} \mu_{ij} = h^2 \rho_i^n \right\}$ ;
- $\epsilon > 0$ , un petit paramètre;
- $\mathcal{F}(\bar{\mu}) = \bar{\sigma}$  et  $\mathcal{F}(\gamma) = \sigma$  avec la fonction  $\mathcal{F}$  donnée dans (4.13).

La seconde étape de l'algorithme pouvant être itérée pour améliorer la convergence. Nous n'avons pas de résultats théoriques démontrant la convergence de ce schéma pour un  $g$  donné,

cependant on peut montrer que si  $\gamma^0 > 0$  et que

$$\gamma^i = \operatorname{argmin}_{\xi \in [0,1]} \left\{ \frac{\xi^2}{\gamma^{i-1}} + \xi \ln(\gamma^{i-1}) - \xi \right\}$$

alors la suite  $(\gamma^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $e^{-1} = \min_{\xi \in [0,1]} \{\xi \ln(\xi)\}$ . De plus,

$$|\gamma^{n+1} - e^{-1}| \leq k\left(\frac{\gamma^n}{e^{-1}}\right) |\gamma^n - e^{-1}|$$

avec  $k(x) = \frac{|x-1-\frac{x}{2}\ln(x)|}{|x-1|}$  et  $k(x) < 1$  si  $x \neq 0$ .

Comme le déplacement de la masse de la cellule  $i$  ne dépend pas du déplacement de la masse de la cellule  $i'$ , nous testons cette algorithmme dans le cas simple suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 3; \\ \tau = 1; \\ u = (0.741, 0.65); \\ g(x) = -u \cdot x; \\ \rho = \mathbb{1}_{C_{i_0}}; \\ i_0 = (0, 0). \end{array} \right. \quad (4.14)$$

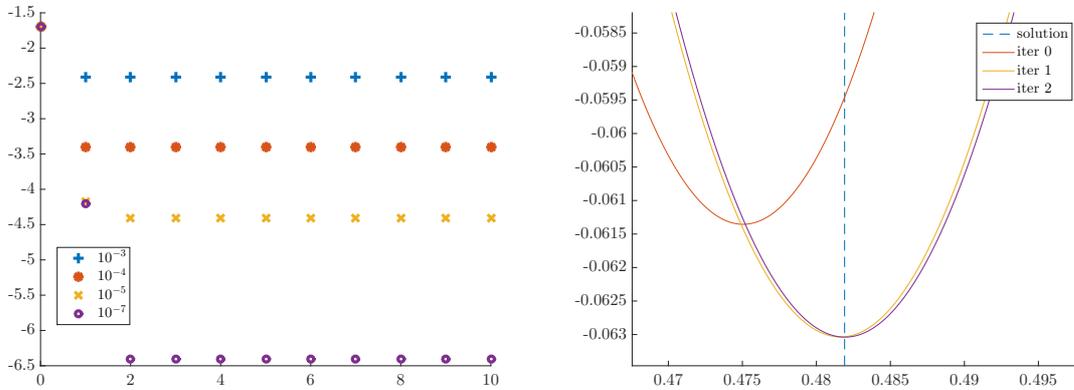


FIGURE 4.6 – À gauche, l’erreur commise entre l’algorithme simplifié et la solution théorique du schéma avec les données de (4.14) et en légende la valeur de  $\epsilon$ . À droite, les différentes fonctionnelles rajoutées comme terme de régularisation et selon les itérations, avec en bleu la solution exacte.

La figure 4.6 montre, à gauche, la dépendance en  $\epsilon$  de l’erreur commise par l’algorithme simplifié par rapport à la solution théorique du schéma avec en abscisse le nombre d’itération de la seconde étape sachant que l’itération "0" correspond à la première étape. On remarque qu’une seule itération de la seconde étape semble suffire pour obtenir la convergence vers la solution qui minimise l’entropie à  $10^{-4}$  près si  $\epsilon$  est assez petit. À droite, la fonctionnelle rajoutée comme régularisation selon la variable

$\mu_{i_0(1,1)}$  (la fonctionnelle dépend de 4 variables mais il y a 3 contraintes d'égalité, ce qui réduit le nombre de variables à 1). La solution exacte pour cette variable est alors  $\mu_{i_0(1,1)} = u_x u_y \approx 0.482$ . On remarque que cette fonctionnelle a un minimum proche de  $u_x u_y$  dès la première itération de l'algorithme.

### Exemple pour l'équation de continuité

Les figures de 4.7 montrent les solutions calculées à certains pas de temps de l'algorithme 1 avec comme paramètres :

$$\begin{cases} g(x) = -\|x\|^2; \\ M = 300; \\ \tau = \frac{0.5}{300} = 0.0017; \\ \rho^0 = e^{-300\|x-(0.2,0.2)\|^2}; \\ \rho(t, x) = e^{-300\|x-(0.2e^{-2t}, 0.2e^{-2t})\|^2} e^{-4t}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Les figures 4.8 représentent (de gauche à droite et de bas en haut) la différence entre la solution calculée et la solution exacte; l'erreur  $L_h^2$  au cours du temps et l'erreur  $L_\tau^\infty L_h^2$  pour différents pas d'espace  $h$ . On estime l'erreur entre la solution exacte et celle calculée par le schéma à chaque pas de temps  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$  de la manière suivante :

$$h \|\rho^n - (\rho(T_{init} + n\tau, x_i))_{i \in I}\|_{l^2}$$

appelée norme  $L_h^2$  au temps  $n\tau$ . La norme  $L_\tau^\infty L_h^2$  est le supremum sur tous les pas de temps de cette norme. Cet exemple permet de vérifier le bon comportement de l'algorithme pour des vitesses obliques. On remarque que l'ordre de convergence est proche de 1.

### 4.2.3 Etude numérique dans le cas de l'équation de la chaleur

Nous présentons dans cette sous-section un exemple utilisant l'algorithme JKO dans le cas de l'équation de diffusion en dimension 2 de l'espace. Dans ce cas, la fonctionnelle associée à l'équation flot-gradient est

$$\psi(\rho) = \rho \ln(\rho)$$

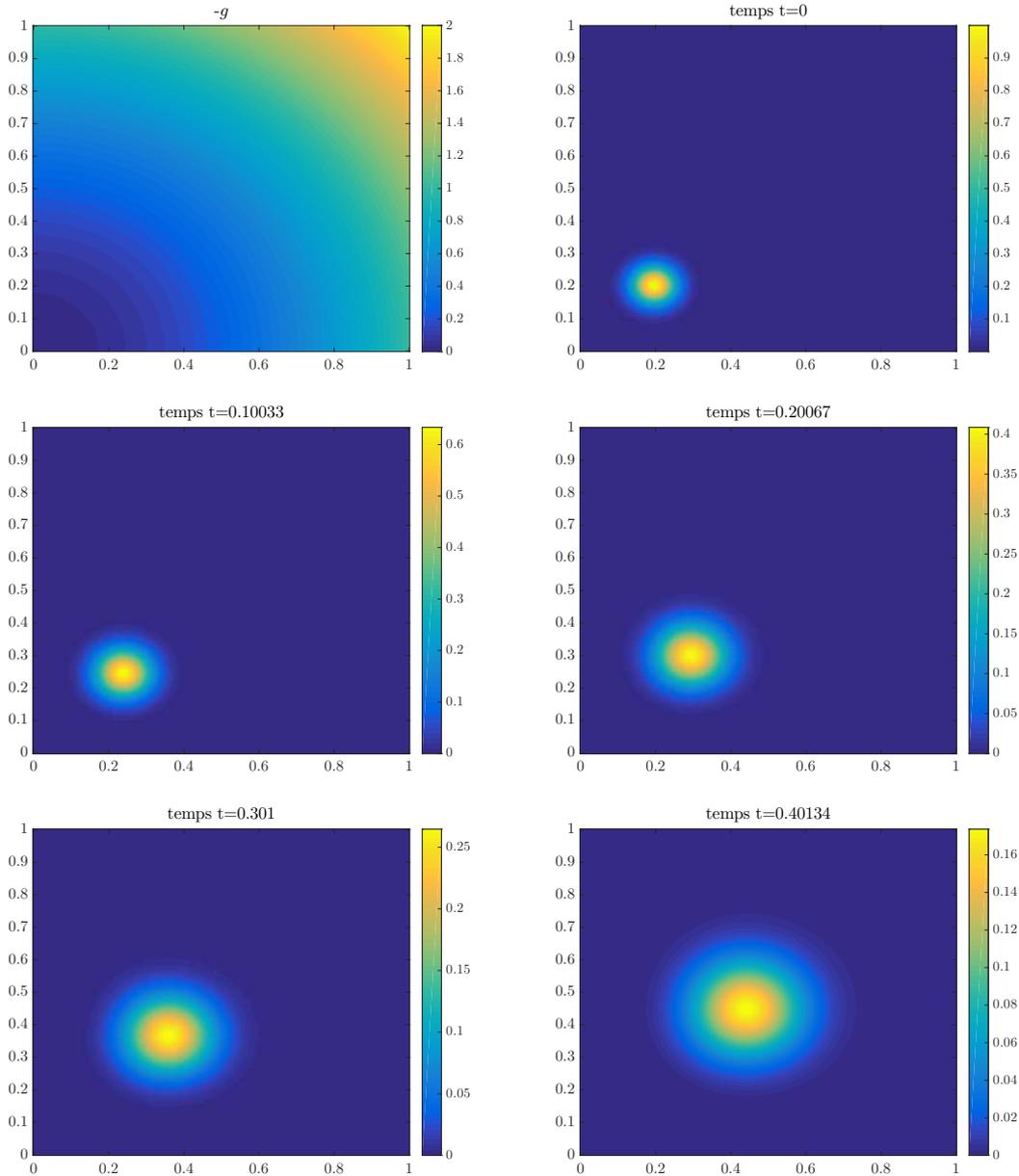


FIGURE 4.7 – En haut à gauche, représentation de la fonction  $-g$  de 4.15. Solution calculée par le schéma pour l'équation de continuité avec les paramètres donnés en 4.15.

et le schéma JKO non discrétisé en espace est alors :

à partir de  $\rho^n \in \mathcal{P}^{h^2}$ , le schéma calcule  $\rho^{n+1}$  de la manière suivante :

$$\rho^{n+1} = \operatorname{argmin}_{\xi \in \mathcal{P}^a(X)} \left\{ \int_X \xi(x) \ln(\xi(x)) dx + \frac{1}{2\tau} \mathcal{W}_2^2(\xi, \rho^n) \right\}$$

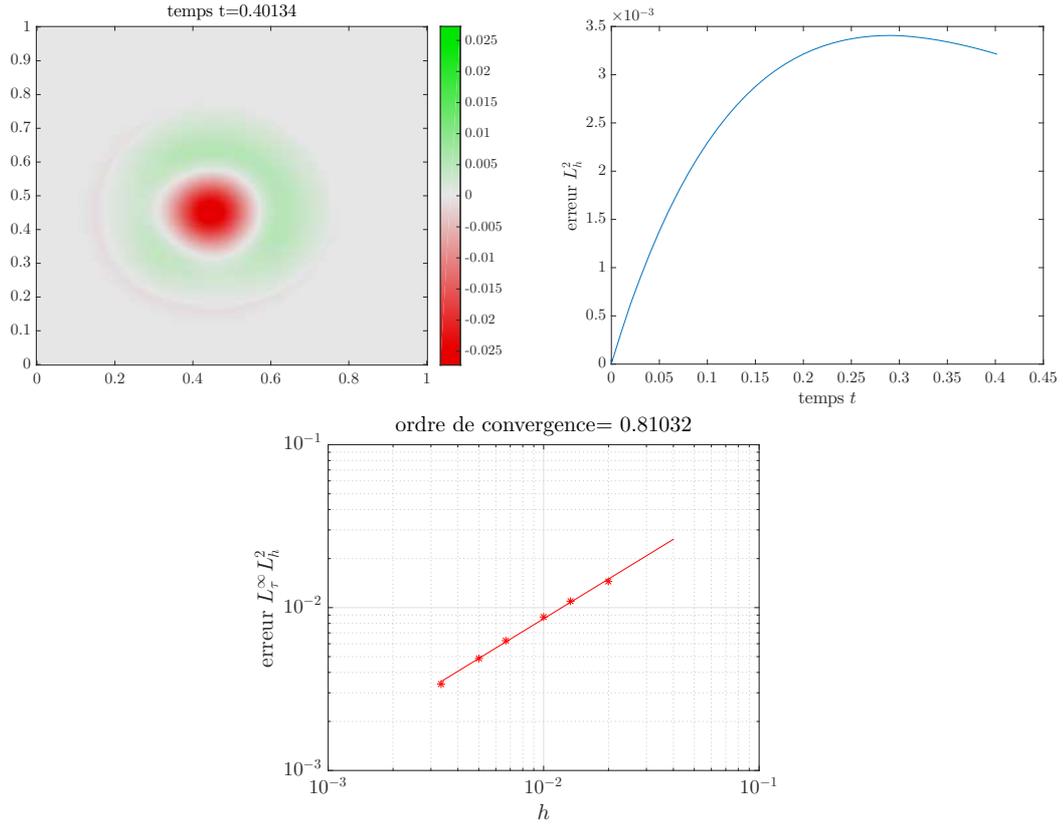


FIGURE 4.8 – De haut en bas et de gauche à droite : erreur au pas de temps final entre la solution exacte et celle calculée par le schéma ; erreur  $L_h^2$  au cours du temps ; erreur  $L_\tau^\infty L_h^2$  pour différents pas d'espace  $h$ .

et le schéma discrétisé en espace est : à partir de  $\rho^n \in \mathcal{P}^{h^2}$ , le schéma calcule  $\rho^{n+1}$  de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu^{n+1} \in \operatorname{argmin}_{\mu \in \Pi^h(\rho^n, \cdot)} \left\{ h^2 \sum_{j \in I} \nu_j \ln(\nu_j) + \frac{1}{2\tau} \sum_{i \in I(\rho^n)} \frac{1}{\rho_i^n} \left( \sum_{\alpha \in \{x,y\}} \sum_{p \in V^\alpha(i)} (\sigma_{ip})^2 \right) + \epsilon \sum_{i \in I} \sum_{j \in V(i)} \mu_{ij} \ln(\mu_{ij}) \right\}, \\ \rho^{n+1} := \frac{\mu_{ij}^{n+1}}{h^2}, \end{array} \right.$$

avec :

- $I(\rho^n) = \{i \in I, \rho_i^n > 0\}$  ;
- $\nu_j := \sum_{i \in V(j)} \frac{\mu_{ij}}{h^2}$  ;
- $V^\alpha(i) = \{i_\alpha, i_{\alpha+1}\}$  ;
- $V(i) = \{(i_x + \delta_x, i_y + \delta_y), \delta_x, \delta_y \in \{-1, 0, 1\}\}$  l'ensemble des voisins de  $i$  ;
- $\Pi^h(\rho^n, \cdot) = \left\{ (\mu_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in V(i)}} \mid \forall i \in I, \sum_{j \in V(j)} \mu_{ij} = \rho_i^n \right\}$  ;
- $\epsilon > 0$ , un petit paramètre ;

- $\mathcal{F}(\mu) = \sigma$  avec la fonction  $\mathcal{F}$  donnée dans (4.13).

L'algorithme utilisé est le même que dans la partie précédente pour la régularisation entropique, pour la fonctionnelle  $\rho \rightarrow \rho \ln \rho$  on utilise la transformée de Legendre comme pour la section 3.1.3 page 96. L'algorithme est alors le suivant :

**Algorithme JKO 2. (Equation de diffusion)**

À partir de  $\rho^n \in \mathcal{P}^{h^2}$ , l'algorithme calcule  $\rho^{n+1}$  de la manière suivante :

1ère étape :

$$\forall j \in I, \xi_j^{(1)} = \ln(\rho_j^n + \epsilon) + 1;$$

$$\gamma^{n+1} \in \operatorname{argmin}_{\gamma \in \Pi^h(\rho^n, \cdot)} \left\{ \sum_{j \in I} \xi_j^{(1)} \left( \sum_{i \in V(j)} \gamma_{ij} \right) + \frac{1}{2\tau} \left( \sum_{i \in I(\rho^n)} \frac{1}{\rho_i^n} \left( \sum_{\alpha \in \{x,y\}} \sum_{p \in V^\alpha(i)} (\sigma_{ip})^2 \right) \right) \right. \\ \left. + \epsilon \sum_{i \in I} \sum_{j \in V(i)} \gamma_{ij}^2 \right\};$$

2ème étape :

$$\forall j \in I, \xi_j^{(2)} = \ln \left( \left( \sum_{i \in V(j)} \frac{\gamma_{ij}^{n+1}}{h^2} \right) + \epsilon \right) + 1;$$

$$\mu^{n+1} \in \operatorname{argmin}_{\mu \in \Pi^h(\rho^n, \cdot)} \left\{ \sum_{j \in I} \xi_j^{(2)} \left( \sum_{i \in V(j)} \mu_{ij} \right) + \frac{1}{2\tau} \left( \sum_{i \in I(\rho^n)} \frac{1}{\rho_i^n} \left( \sum_{\alpha \in \{x,y\}} \sum_{p \in V^\alpha(i)} (\bar{\sigma}_{ip})^2 \right) \right) \right. \\ \left. + \epsilon \sum_{i \in I} \sum_{j \in V(i)} \left( \frac{\mu_{ij}^2}{\gamma_{ij}^{n+1} + \epsilon^2} + \mu_{ij} \ln(\gamma_{ij}^{n+1} + \epsilon^2) \right) \right\};$$

$$\rho_j^{n+1} := \sum_{i \in V(j)} \frac{\mu_{ij}^{n+1}}{h^2}.$$

avec

- $I(\rho^n) = \{i \in I, \rho_i^n > 0\}$ ;
- $V^\alpha(i) = \{i_\alpha, i_{\alpha+1}\}$ ;
- $V(i) = \{(i_x + \delta_x, i_y + \delta_y), \delta_x, \delta_y \in \{-1, 0, 1\}\}$  l'ensemble des voisins de  $i$ ;
- $\Pi^h(\rho^n, \cdot) = \left\{ (\mu_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in V(i)}} \mid \forall i \in I, \sum_{j \in V(i)} \mu_{ij} = h^2 \rho_i^n \right\}$ ;
- $\epsilon > 0$ , un petit paramètre;
- $\mathcal{F}(\mu) = \bar{\sigma}$  et  $\mathcal{F}(\gamma) = \sigma$  avec la fonction  $\mathcal{F}$  donnée dans (4.13).

Comme dans le cas 1D,  $\tau$  doit être suffisant petit pour obtenir des résultats convergents sinon la modification de  $\xi$  est trop brutale. Cependant, ceci est dû à la manière de traiter la fonctionnelle  $\rho \rightarrow \rho \ln(\rho)$ . Les figures 4.9 montrent la solution obtenue par l'algorithme avec les paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 80; \\ \tau = \frac{1}{80^2} = 1.60 \times 10^{-4}; \\ T_{init} = 2 \times 10^{-4}; \\ T_{end} = 2 \times 10^{-3}; \\ \rho(t, x) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{(x-0.5)^2}{4t}}; \\ \rho^0 = (\rho(T_{init}, x_i))_{i \in I}. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

La dernière des figures (en bas à droite) montre l'erreur commise entre la solution exacte discrétisée sur chaque cellule de  $X^{h^2}$  et la solution donnée par le schéma au temps final  $T_{end}$ . Enfin, les figures 4.10 montrent l'erreur commise entre la solution calculée par l'algorithme et la solution exacte discrétisée sur chaque cellule de  $X^{h^2}$ . À droite, l'erreur  $L_h^2$  au cours du temps, à gauche la figure montre l'erreur  $L_\tau^\infty L_h^2$  entre le vecteur  $\rho^n$  et  $\rho_{ex}^n := (\rho(T_{init} + n\tau, x_i))_{i \in I}$ , c'est-à-dire :

$$\sup_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} \{h \|\rho^n - \rho_{ex}^n\|_{l^2}\}.$$

### 4.3 Equation flot-gradients avec contrainte de congestion

Cette section servira à calculer des solutions d'équations flot-gradients avec une contrainte de congestion. Comme nous avons déjà vu dans le cas de la dimension 1

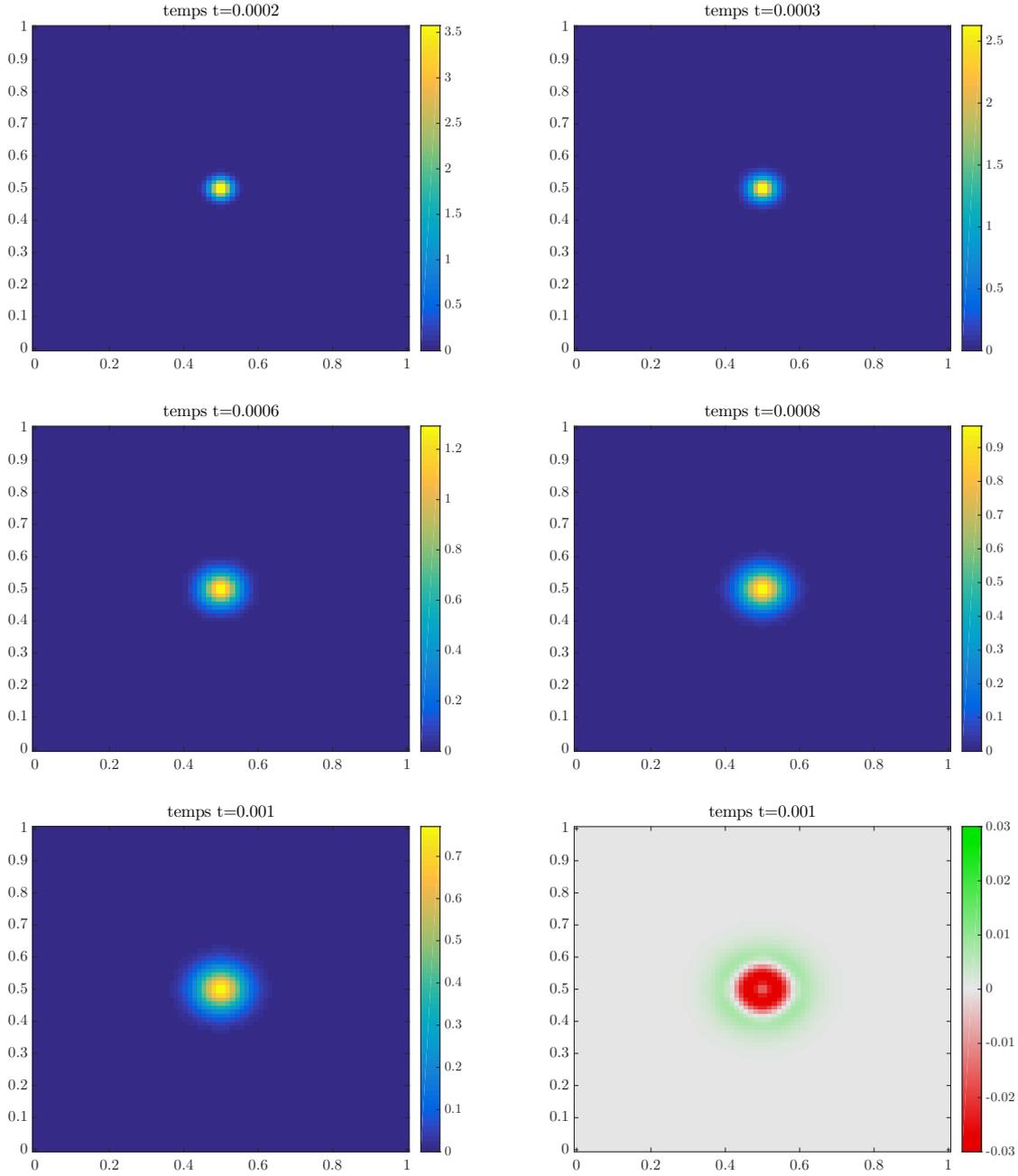


FIGURE 4.9 – Solutions calculées par le schéma pour l'équation de diffusion avec les paramètres (4.16). En bas à droite, erreur relative sur chaque cellule entre la solution calculée par le schéma et la solution exacte.

dans la section 3.2 page 98, ajouter la contrainte de congestion revient à remplacer  $\Pi^h(\rho^n, \cdot)$  par  $\Pi^h(\rho^n, K)$  l'ensemble des plans de transport permettant à la densité finale d'être dans  $K$  :

$$\Pi^h(\rho^n, K) = \left\{ (\mu_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in V(i)}} \mid \forall i, j \in I, \sum_{j \in V(j)} \mu_{ij} = h^2 \rho_i^n, \sum_{i \in V(j)} \mu_{ij} \leq h^2 \right\}.$$

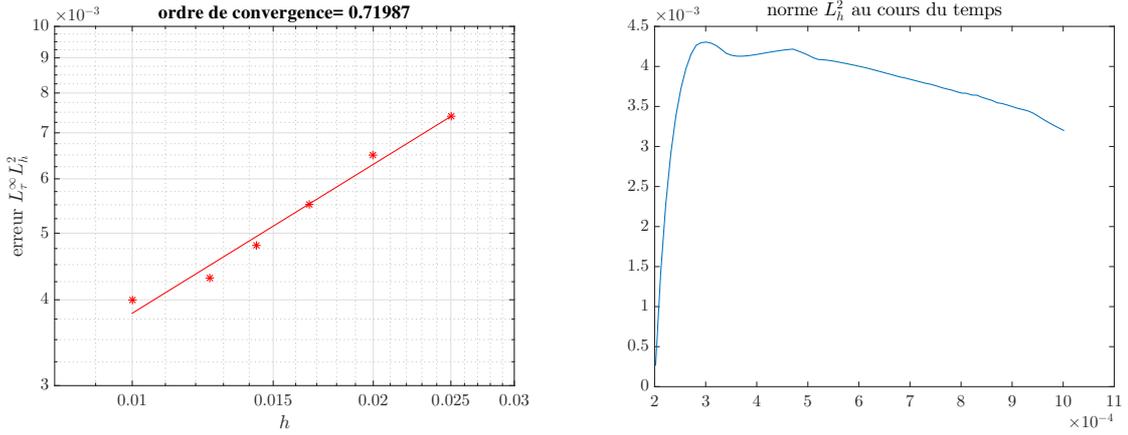


FIGURE 4.10 – Erreur entre la solution exacte et celle calculée par le schéma. À gauche, la figure représente l’erreur  $L_\tau^\infty L_h^2$  pour différents pas d’espace. À droite, nous trouvons l’erreur  $L_h^2$  à chaque pas de temps.

Le schéma JKO avec contrainte de congestion est alors le suivant :

**Schéma JKO 5. (numérique cas contrainte de congestion)**

À partir de  $\rho^n \in \mathcal{P}^{h^2}$  le schéma calcule  $\rho^{n+1}$  comme suit :

$$\left| \begin{aligned} \mu^{n+1} \in \min_{\mu \in \Pi^h(\rho^n, K)} & \left\{ \sum_{j \in I} \psi \left( \sum_{i \in V(j)} \frac{\mu_{ij}}{h^2} \right) + \frac{1}{2\tau} \sum_{i \in I(\rho^n)} \frac{1}{\rho_i^n} \left( \sum_{\substack{p \in V^\alpha(i) \\ \alpha \in \{x, y\}}} (\sigma_{ip}^\alpha)^2 \right) \right. \\ & \left. + \epsilon \sum_{i \in I(\rho^n)} \sum_{j \in V(i)} \mu_{ij} \ln(\mu_{ij}) \right\} \\ \rho_j^{n+1} &= \frac{\sum_{i \in I} \mu_{ij}^{n+1}}{h^2} \end{aligned} \right.$$

avec :

- $I(\rho^n) = \{i \in I, \rho_i^n > 0\}$  ;
- $V^\alpha(i) = \{i_\alpha, i_{\alpha+1}\}$  ;
- $V(i) = \{(i_x + \delta_x, i_y + \delta_y), \delta_x, \delta_y \in \{-1, 0, 1\}\}$  l’ensemble des voisins de  $i$  ;
- $\Pi^h(\rho^n, K) = \left\{ (\mu_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in V(i)}} \mid \forall i, j \in I, \sum_{j \in V(j)} \mu_{ij} = h^2 \rho_i^n, \sum_{i \in V(j)} \mu_{ij} \leq h^2 \right\}$  ;
- $\epsilon > 0$ , un petit paramètre ;
- $\mathcal{F}(\mu) = \sigma$  avec la fonction  $\mathcal{F}$  donnée dans (4.13).

### 4.3.1 Le balayage d'une mesure

Dans cette sous-section, nous comparons le résultat obtenu à l'aide de la discrétisation du coût Wasserstein quadratique et une solution connue du processus de balayage expliqué dans [40].

Soit  $\lambda$  une densité positive de référence et  $\rho$  une mesure positive, le problème de balayage partiel consiste à trouver la mesure  $\text{Bal}(\rho, \lambda)$  la plus proche de  $\rho$  pour la norme suivante :

$$\|\nu\|_e^2 = \int_{\mathbb{R}^d} U(x-y) d\nu(x) d\nu(y) \quad (4.17)$$

sous la contrainte  $\nu \leq \lambda$ . La fonction  $U$  représente le potentiel de Newton c'est-à-dire la solution de l'équation :

$$-\Delta U = \delta_0$$

qui est de la forme

$$\begin{cases} U(x) = c_2 \ln \left( \frac{1}{|x|} \right) & \text{si } d = 2, \\ U(x) = \frac{c_d}{|x|^{d-2}} & \text{si } d > 2. \end{cases}$$

Ici, on s'intéresse au cas où  $\rho_t = \frac{t}{2} (\delta_{(-1,0)} + \delta_{(1,0)})$  et  $\lambda = \mathcal{L}$ , la mesure de Lebesgue. Cette exemple est intéressant dans la mesure où une solution analytique est donné dans [40] pour ce problème :

$$\text{Bal}(\rho_t, \mathcal{L}) = \begin{cases} B \left( (1,0), \frac{t}{2\pi} \right) + B \left( (-1,0), \frac{t}{2\pi} \right) & \text{si } t \leq 2\pi, \\ \mathbb{1}_{\Omega(t)} & \text{si } t > 2\pi, \end{cases} \quad (4.18)$$

où  $\Omega(t) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 - \frac{t}{2\pi}(x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2) \leq 0 \right\}$ . Il a été démontré dans [62] que ce processus revenait au modèle :

$$\partial_t \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t u_t) = \frac{t}{2} (\delta_{(-1,0)} + \delta_{(1,0)}) \quad (4.19)$$

où, à chaque instant,  $u_t$  est le projeté  $L_{\rho_t}^2$  du champ des vitesses nulles sur l'ensemble des champs des vitesses qui conduisent à une préservation de la contrainte. La solution de l'équation (4.19) peut être approchée par le schéma décrit dans [49, 51] un peu remanié : soit  $\rho^0 = 0$ , nous supposons que les densités  $\rho^i$  ont été calculées pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Le schéma calcule  $\rho^{n+1}$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\rho}^{n+1} = \rho^n + \frac{\tau}{2} (\delta_{(-1,0)} + \delta_{(1,0)}), \\ \rho^{n+1} = \mathbb{P}_K^{\mathcal{W}_2}(\tilde{\rho}^{n+1}). \end{cases} \quad (4.20)$$

Nous décidons de tester ce schéma en projetant la densité avec le coût Wasserstein qua-

dratique discrétisé par la méthode du balayage transverse. L'algorithme est le même qu'utiliser dans la section suivante (l'algorithme 3 page 137) avec  $(g_j)_{j \in I} = 0$  et en remplaçant  $\rho^n$  par  $\tilde{\rho}^{n+1}$ . Pour illustrer cette exemple, les figures 4.12 montrent la solution donnée par notre schéma avec  $h = 1/256$  et  $\tau = 7h^2$  au temps  $T \approx 1, 5, 7$  et 10. La solution correspond exactement à celle donnée dans [40] sur tous les pixels ne composant pas la frontière. La figure 4.11 montre la différence entre la solution calculée et  $\mathbb{P}_{\mathcal{P}h^2}(Bal(\rho_1, \mathcal{L}))$ , l'image est zoomée sur une seule des composantes connexes pour distinguer la différence au niveau de la frontière du domaine composant la solution.

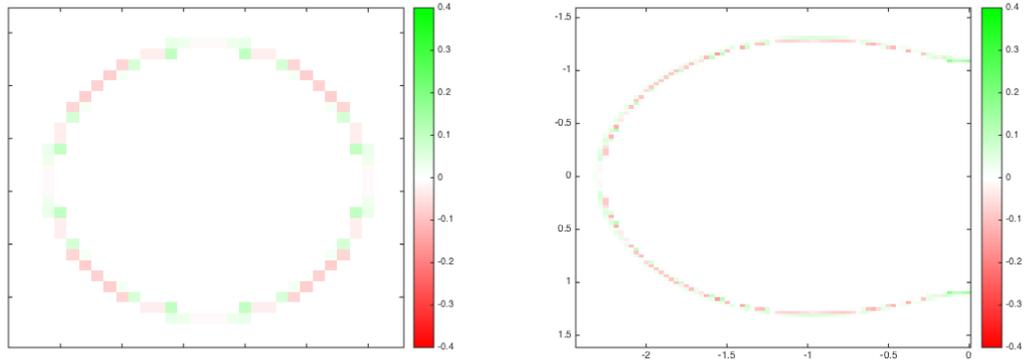


FIGURE 4.11 – La différence entre la solution calculée par le schéma et  $\mathbb{P}_{\mathcal{P}h^2}(Bal(\rho_1, \mathcal{L}))$  à  $T \approx 1$  et 10 pour  $h = 1/256$  et  $\tau = 7h^2$ , la norme infinie de la différence entre les deux mesures est de 0.10 pour  $T = 1$  et 0.18 pour  $T = 10$ .

### 4.3.2 Equation de continuité avec contrainte de congestion

Dans cette sous-section, nous allons tester le schéma simplifié décrit dans la section précédente dans le cadre de l'équation de continuité. Pour cela, on pose  $\psi(\nu) = \int_X g(x)\nu(x)dx$  avec  $u = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2$ . L'équation flot-gradient associée à cette fonctionnelle est l'équation de continuité :

$$\partial_t \rho - \nabla \cdot (\rho \nabla g) = 0$$

En discrétisant la fonctionnelle  $\psi$  par :

$$\sum_{j \in J} g_j \nu_j$$

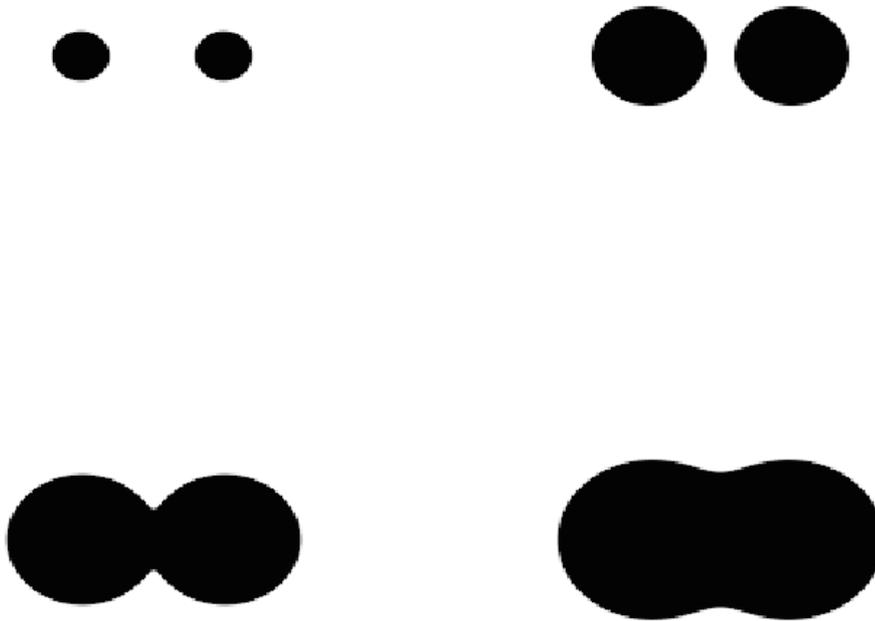


FIGURE 4.12 – Solutions calculées par le schéma (4.20) au temps  $T \approx 1, 5, 7, 10$  pour  $h = 1/256$  et  $\tau = 7h^2$ .

le schéma JKO simplifié devient alors :

**Algorithme JKO 3. (Equation de continuité avec contrainte de congestion)**

À partir de  $\rho^n \in \mathcal{P}^{h^2}$ , l'algorithme calcule  $\rho^{n+1}$  de la manière suivante :

1ère étape :

$$\mu \in \operatorname{argmin}_{\bar{\mu} \in \Pi^h(\rho^n, K)} \left\{ \sum_{j \in I} g_j \left( \sum_{i \in V(j)} \bar{\mu}_{ij} \right) + \frac{1}{2\tau} \left( \sum_{i \in I(\rho^n)} \frac{1}{\rho_i^n} \left( \sum_{\alpha \in \{x, y\}} \sum_{p \in V^\alpha(i)} (\bar{\sigma}_{ip})^2 \right) \right) + \epsilon \sum_{i \in I} \sum_{j \in V(i)} \bar{\mu}_{ij}^2 \right\};$$

2ème étape :

$$\mu^{n+1} \in \operatorname{argmin}_{\gamma \in \Pi^h(\rho^n, K)} \left\{ \sum_{j \in I} g_j \left( \sum_{i \in V(j)} \gamma_{ij} \right) + \frac{1}{2\tau} \left( \sum_{i \in I(\rho^n)} \frac{1}{\rho_i^n} \left( \sum_{\alpha \in \{x, y\}} \sum_{p \in V^\alpha(i)} (\sigma_{ip})^2 \right) \right) + \epsilon \sum_{i \in I} \sum_{j \in V(i)} \left( \frac{\gamma_{ij}^2}{\mu_{ij} + \epsilon^2} + \gamma_{ij} \ln(\mu_{ij} + \epsilon^2) \right) \right\};$$

$$\rho_j^{n+1} := \sum_{i \in V(j)} \frac{\mu_{ij}^{n+1}}{h^2}$$

avec

- $I(\rho^n) = \{i \in I, \rho_i^n > 0\}$ ;
- $V^\alpha(i) = \{i_\alpha, i_{\alpha+1}\}$ ;
- $V(i) = \{(i_x + \delta_x, i_y + \delta_y), \delta_x, \delta_y \in \{-1, 0, 1\}\}$  l'ensemble des voisins de  $i$ ;
- $\Pi^h(\rho^n, K) = \left\{ (\mu_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in V(i)}} \mid \forall i, j \in I, \sum_{j \in V(j)} \mu_{ij} = h^2 \rho_i^n, \sum_{i \in V(j)} \mu_{ij} \leq h^2 \right\}$ ;
- $\epsilon > 0$ , un petit paramètre;
- $\mathcal{F}(\bar{\mu}) = \bar{\sigma}$  et  $\mathcal{F}(\gamma) = \sigma$  avec la fonction  $\mathcal{F}$  donnée dans (4.13).

Les figures 4.13 représentent la solution calculée par l'algorithme 3 à différents mo-

ments pour les paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 150; \\ \tau =; \\ \rho^0 = \mathbb{1}_{[0.3,0.7] \times [0.65,0.8]}; \\ g(x) = (0, 1) \cdot x; \\ ob(x) = \mathbb{1}_{[0.3,0.7] \times [0.5,0.6]}; \\ T = 1.5. \end{array} \right. \quad (4.21)$$

La fonction  $ob$  est une fonction obstacle, là où elle vaut 1, la densité finale à chaque pas de temps doit être nulle. Cet exemple nous montre comment la densité est projetée à chaque pas de temps pour éviter l'obstacle.

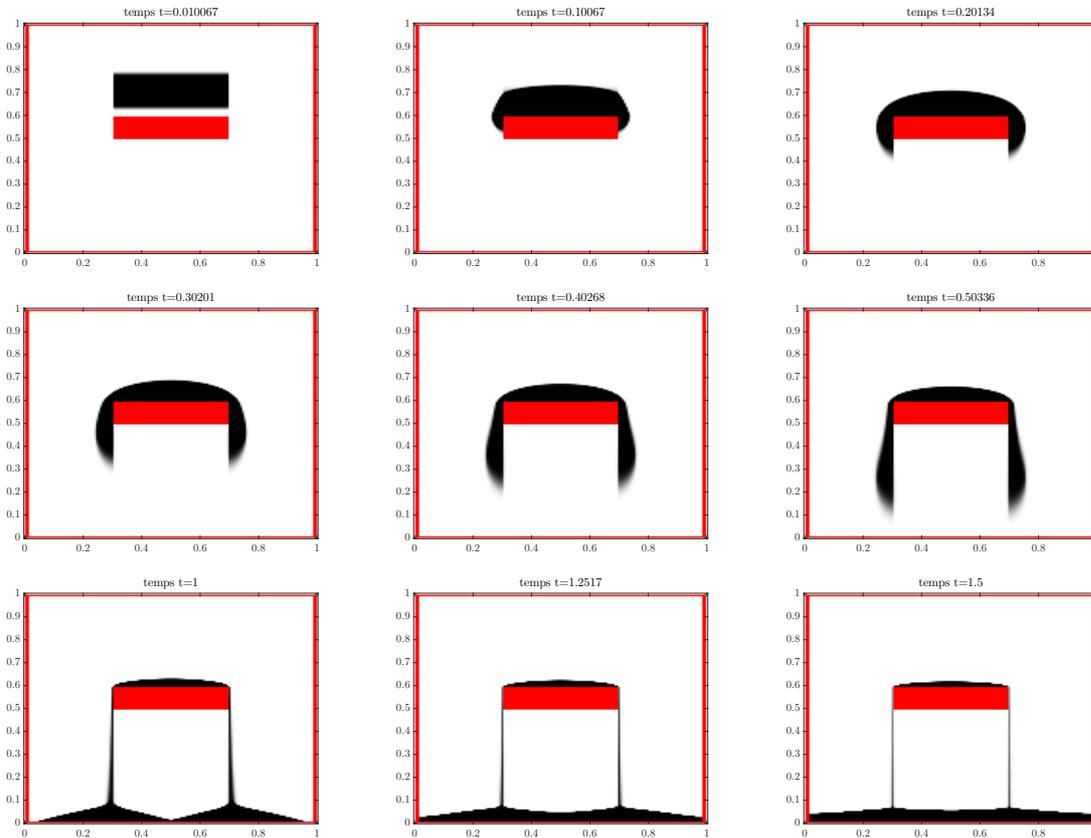


FIGURE 4.13 – Solutions calculées à différents moments par le schéma pour l'équation de continuité sous contrainte de congestion avec comme paramètres (4.21).

### 4.3.3 Mouvement de foule

Nous reprenons ici le modèle de mouvement de foule introduit page 9. Soit  $\rho$  la densité de population et  $U$  une vitesse désirée par la foule dépendant uniquement des

coordonnées spatiales, le modèle de mouvement de foule peut être décrit comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ u = \mathbb{P}_{C_K}(U), \end{cases} \quad (4.22)$$

avec  $C_K = \{v \in L^2, \int v \cdot \nabla q \leq 0, \forall q \in H^1, q \geq 0, q(1 - \rho) = 0\}$ . Une reformulation possible de ce modèle est donnée grâce aux flot-gradients (3.16) en utilisant la fonctionnelle :

$$\psi'(\rho) = I_K(\rho) + \int D(x)\rho(x)dx$$

où  $D$  est la distance géodésique d'un point à la sortie du domaine. Le schéma JKO discrétisé en espace pour ce modèle est alors le même que l'algorithme JKO 3 avec  $g_j = D(x_j)$ . La fonctionnelle  $D$  peut être calculée à l'aide de l'algorithme de Fast Marching (voir [43, 64]).

La figure 4.14 représente la fonction distance  $D$ . Les figures 4.15 représentent le déplacement de la foule au cours du temps dans le cas où il y a qu'une porte située sur le bord gauche de la salle contenant quelques obstacles. Les mouvements sont très similaires à ceux obtenu dans[51].

Le second cas (figure 4.17) représente un bâtiment contenant 12 salles avec deux sorties situées sur les côtés gauche et droite. La fonction distance à la porte est donnée par la figure 4.16.

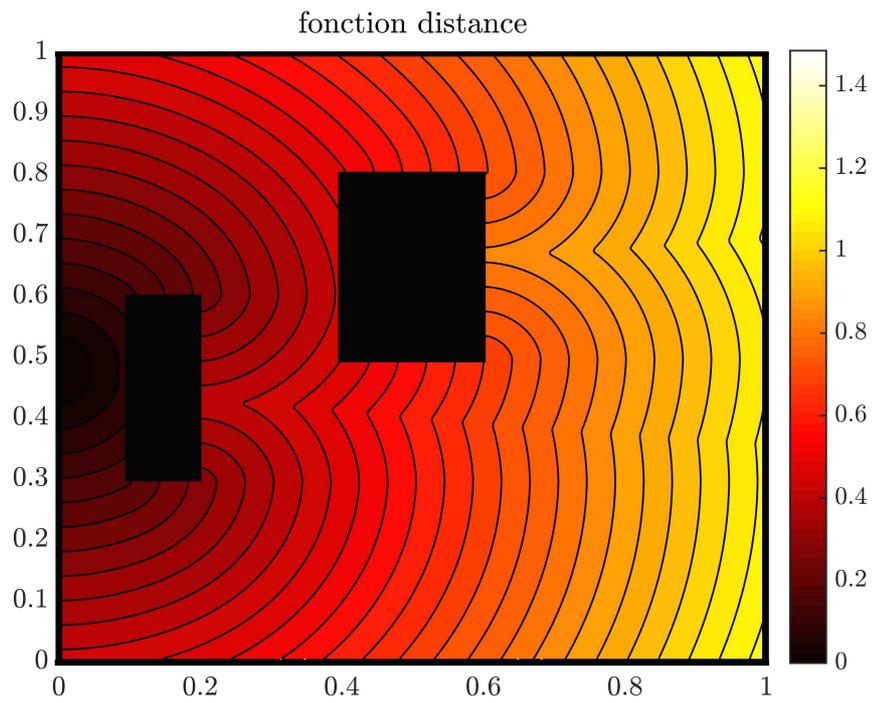


FIGURE 4.14 – Fonction distance à la porte dans le premier cas.

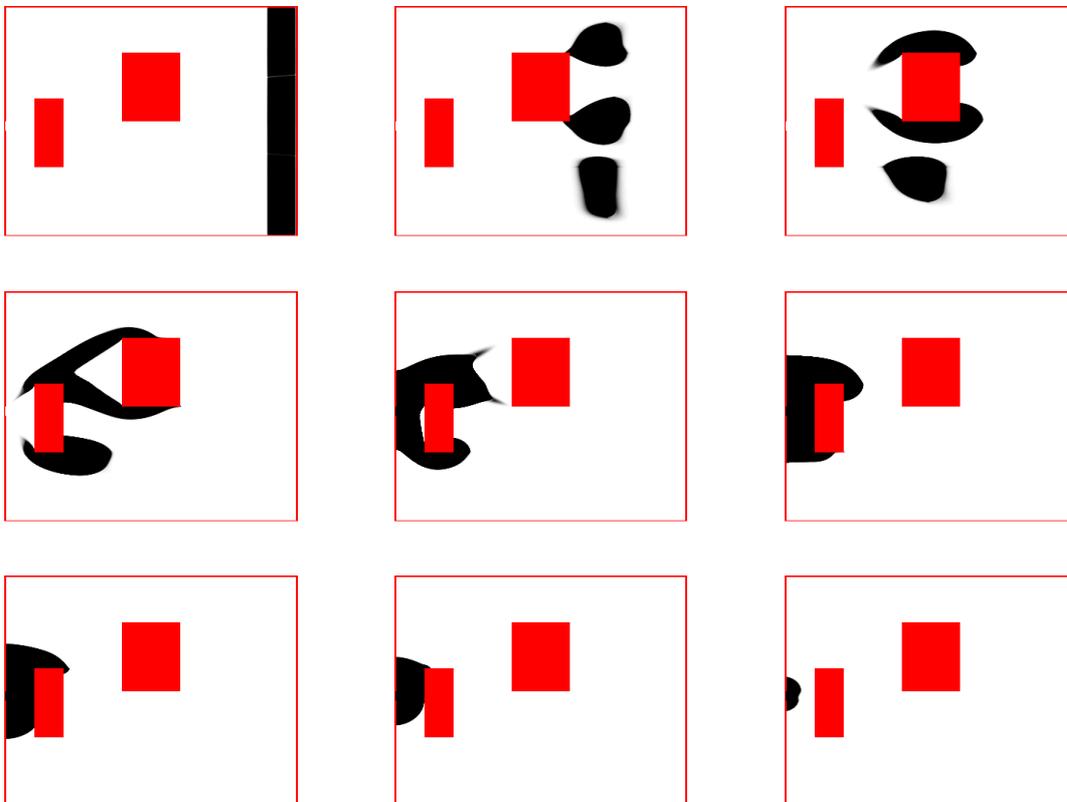


FIGURE 4.15 – Le mouvement de la foule au cours du temps.

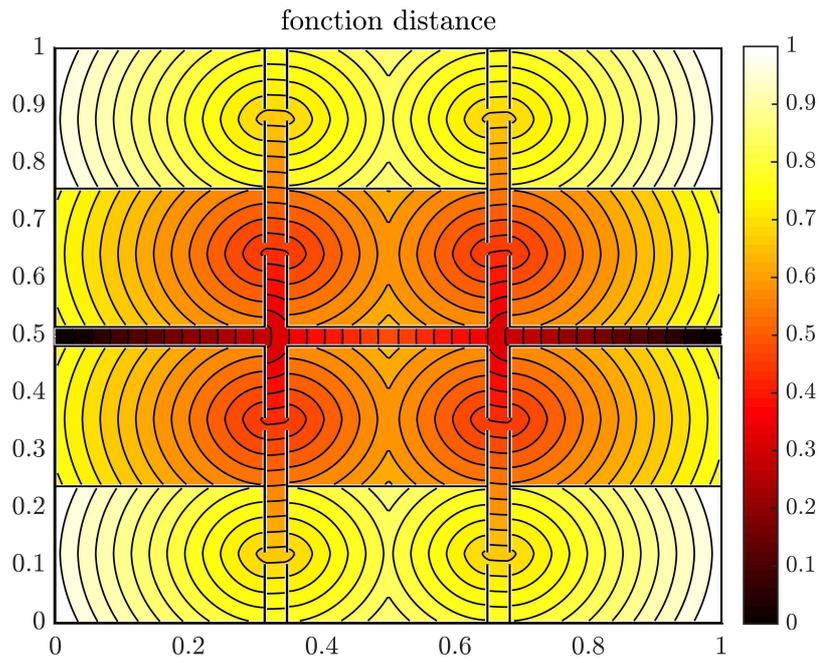


FIGURE 4.16 – Fonction distance à la porte dans le second cas.

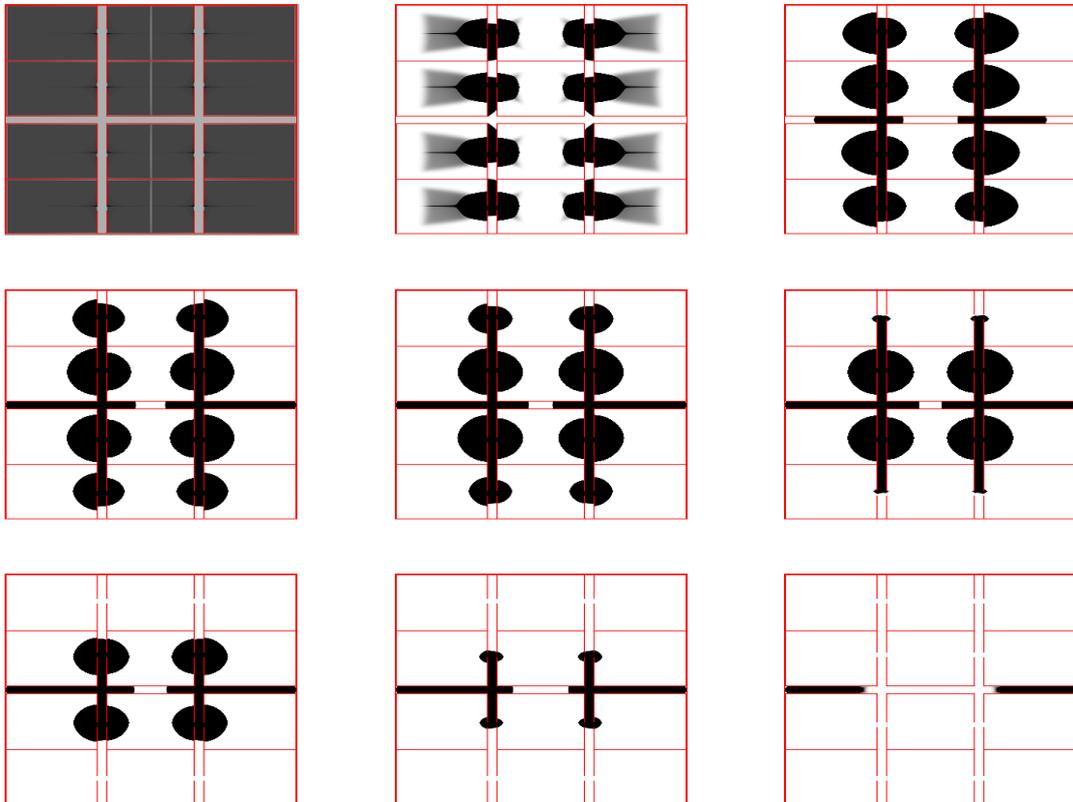


FIGURE 4.17 – Mouvement de la foule dans le second cas. Les portes se situent au milieu à gauche et à droite.



TROISIÈME PARTIE

# Programmation et tests numériques

---



# Programmation

Ce chapitre est consacré aux algorithmes utilisés pour effectuer des tests numériques sur les équations de gaz sans pression avec contrainte de congestion en dimension 2 d'espace :

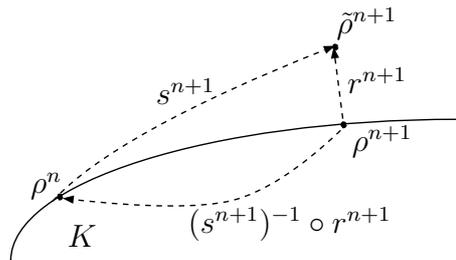
$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla \pi = 0, \\ \rho \leq 1, \\ (1 - \rho) \pi = 0, \\ \pi \geq 0, \\ u^+ = P_{C_K(\rho)}(u^-). \end{array} \right. \quad (5.1)$$

avec

$$C_K(\rho) = \left\{ v \in L^2, \int v \cdot \nabla q \leq 0, \forall q \in H^1, q \geq 0, q(1 - \rho) = 0 \right\}.$$

On rappelle que le schéma discuté dans le chapitre 2 et adopté pour les calculs est le suivant :

**Schéma.** Soit  $(\rho^n, u^n)$  donné, le schéma calcule  $(\rho^{n+1}, u^{n+1})$  de la façon suivante :



$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}^n = \mathbb{P}_{\mathcal{M}_{\rho^n}^c}(u^n), \\ \tilde{\rho}^{n+1} = (Id + \tau \tilde{u}^n)_{\#} \rho^n, \\ \rho^{n+1} = \mathbb{P}_K^{\mathcal{W}_2}(\tilde{\rho}^{n+1}), \\ u^{n+1} = \frac{Id - (s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1}}{\tau}, \end{array} \right.$$

avec

$$\mathcal{M}_{\rho^n}^c = \left\{ v \in L^2_{\rho^n}(\mathbb{R}^d), \langle v(x) - v(y), x - y \rangle \geq \frac{c-1}{\tau} |x - y|^2 \rho^n \otimes \rho^n - a.e. \right\}, \quad (5.2)$$

et  $c \in ]0, 1[$  un paramètre. On note que  $K$  est l'ensemble des mesures de probabilité de  $\mathbb{R}^d$  qui admet une densité inférieure ou égale à 1,

$$s^{n+1} = Id + \tau \tilde{u}^n$$

et  $r^{n+1}$  est le transport optimal entre  $\rho^{n+1}$  et  $\tilde{\rho}^{n+1}$ .

Une première section servira à décrire la discrétisation spatiale utilisée. Les sections suivantes décriront la mise en œuvre pratique de chaque étape du schéma à l'aide du logiciel **matlab**. Même si, ici, les algorithmes sont expliqués en dimension 2, ils sont facilement transposables en dimension 1.

## Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Dicrétisation spatiale utilisée</b>	<b>146</b>
<b>5.2</b>	<b>Projection des vitesses sur <math>\mathcal{M}_{\rho^n}^c</math></b>	<b>147</b>
<b>5.3</b>	<b>Etape de transport de la densité</b>	<b>148</b>
<b>5.4</b>	<b>Projection de la densité sur <math>K</math></b>	<b>149</b>
<b>5.5</b>	<b>Construction de la nouvelle vitesse</b>	<b>151</b>

## 5.1 Dicrétisation spatiale utilisée

Dans cette section, on détaille les notations utilisées pour la discrétisation spatiale de notre schéma. Nous utilisons comme domaine  $X = [0, L]^2$  avec  $L > 1$ . Nous posons

$$X^{h^2} = \left\{ C_i = [i_x h, (i_x + 1)h] \times [i_y h, (i_y + 1)h], i = (i_x, i_y) \in \llbracket 0, M - 1 \rrbracket^2 \right\}$$

la discrétisation cartésienne de  $X$  en cellule de taille  $h \times h$  avec  $Mh = L$  et  $x_i$  le centre de la cellule  $C_i$ . On note  $\mathcal{P}^{h^2}$  l'espace des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue de densité constante sur chaque  $C_i$  de  $X^{h^2}$ . Dans ce chapitre, il sera intéressant d'identifier les éléments de  $\mathcal{P}^{h^2}$  à un vecteur de  $\mathbb{R}^{M^2}$ . Si  $\rho \in \mathcal{P}^{h^2}$ , il peut s'identifier à :

$$\rho := (\rho_i)_{i \in I}$$

avec  $\rho_i = \frac{\rho(C_i)}{h^2} > 0$  représentant la valeur de la densité dans la cellule  $i$  et  $I = \llbracket 0, M - 1 \rrbracket^2$  l'ensemble des indices définissant les cellules de  $\mathcal{P}^{h^2}$ . De même, on note  $\mathbb{R}^{h^2}$  les fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  constantes sur chaque cellule  $C_i$  de  $X^{h^2}$  et on identifie  $f \in \mathbb{R}^{h^2}$  à  $(f_i)_{i \in I}$  où  $f_i = h^{-2} \int_{C_i} f(x) dx$ . Enfin, on notera  $i = (i_x, i_y)$  et  $j = (j_x, j_y)$  les éléments de  $I$ .

Par la suite, nous supposons avoir déjà calculés  $\rho^n = (\rho_i^n)_{i \in I} \in \mathcal{P}^{h^2}$  et  $u^n = ((u_x^n)_i, (u_y^n)_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{h^2} \times \mathbb{R}^{h^2}$  représentant respectivement la densité et le vecteur vitesse à l'instant  $n\tau$ . Nous allons expliquer comment calculer numériquement  $\rho^{n+1} = (\rho_i^{n+1})_{i \in I} \in \mathcal{P}^{h^2}$  et  $u^{n+1} = ((u_x^{n+1})_i, (u_y^{n+1})_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{h^2} \times \mathbb{R}^{h^2}$  représentant respectivement la densité et le vecteur vitesse à l'instant  $(n + 1)\tau$ .

## 5.2 Projection des vitesses sur $\mathcal{M}_{\rho^n}^c$

Cette section est dédiée à la méthode de discrétisation spatiale pour la première étape du schéma :

$$\tilde{u}^n = \mathbb{P}_{\mathcal{M}_{\rho^n}^c}(u^n)$$

avec

$$\mathcal{M}_{\rho^n}^c = \left\{ v \in L_{\rho^n}^2(\mathbb{R}^d), \langle v(x) - v(y), x - y \rangle \geq \frac{c-1}{\tau} |x - y|^2 \rho^n \otimes \rho^n - p.p. \right\}.$$

Une discrétisation naturelle de cette espace serait de considérer les éléments  $v \in \mathbb{R}^{h^2} \times \mathbb{R}^{h^2}$  tels que :

$$\forall i, j \in I(\rho^n), \langle v_i - v_j, x_i - x_j \rangle \geq \left( \frac{c-1}{\tau} \right) |x_i - x_j|^2 \quad (5.3)$$

avec  $I(\rho^n) = \{i \in I \mid \rho_i^n > 0\}$ . Soit la fonction

$$F_{ij}^c := v \rightarrow \langle v_i - v_j, x_i - x_j \rangle - \left( \frac{c-1}{\tau} \right) |x_i - x_j|^2,$$

on définit alors la vitesse  $\tilde{u}^n$  comme le projeté de  $u^n$  sur l'espace défini en (5.3) :

$$\tilde{u}^n = \operatorname{argmin}_{v \in \mathcal{M}_{\rho^n}^c} \left\{ \|v - u^n\|_{L_{\rho^n}^2} \right\}$$

avec  $\mathcal{M}_{\rho^n}^c = \left\{ v \in \mathbb{R}^{h^2} \times \mathbb{R}^{h^2} \mid \forall i, j \in I(\rho^n), F_{ij}^c(v) \geq 0 \right\}$ . Cette étape revient donc à minimiser une fonctionnelle quadratique de  $2 \times M^2$  variables avec  $\frac{M^2(M^2-1)}{2}$  contraintes linéaires si toutes les cellules sont à densité non nulle.

On peut remarquer que le nombre de contraintes est très important, cependant, il est possible d'en supprimer la plupart selon la valeur de  $C_{FL} = \frac{\tau \|\tilde{u}^n\|_{\infty}}{h}$ , en effet :

$$\left| \tau \frac{\langle \tilde{u}_i^n - \tilde{u}_j^n, x_i - x_j \rangle}{\|x_i - x_j\|^2} \right| \leq \frac{2\tau \|\tilde{u}^n\|}{\|x_i - x_j\|}.$$

Ainsi, on obtient :  $C_{FL} \leq \frac{(1-c)\|x_i - x_j\|}{2h} \implies F_{ij}^c(\tilde{u}^n) \geq 0$ . Par exemple, si on pose  $c < 1/2$  et que  $C_{FL} \leq 1$  la contrainte peut ne pas être respectée si  $\|x_i - x_j\| < 4h$ .

En pratique, nous utilisons la fonction *quadprog* de **matlab** pour résoudre ce problème de minimisation. Dans nos tests, nous adaptons  $\tau$  pour que  $\frac{\tau \|u^n\|_{\infty}}{h} \leq 1$ , dans la minimisation, nous n'incluons que les contraintes  $F_{ij}^c$  telles que  $\|x_i - x_j\| \leq 2\sqrt{2}h$  (les voisins et les voisins des voisins de chaque cellule) et on adapte  $c$  pour que cela soit suffisant

( $c < \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ).

Les figures 5.1 représentent la vitesse avant et après projection sur l'ensemble  $\mathcal{M}_\rho^c$  avec pour paramètres :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = [-40, 40]^2, \\ dx \approx 1.63, \\ dt = dx, \\ c = 0.9, \\ \rho = \mathbb{1}_{[-30, 30]^2}, \\ u = (\mathbb{1}_{[-30, 0] \times [-30, 30]} - \mathbb{1}_{[0, 30] \times [-30, 30]}, -\mathbb{1}_{[0, 30] \times [-30, 30]}) \end{array} \right. \quad (5.4)$$

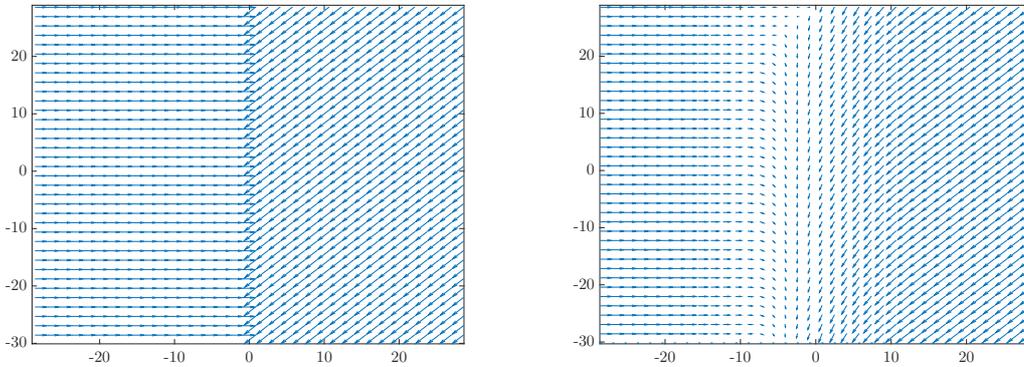


FIGURE 5.1 – À gauche, la vitesse avant projection sur  $\mathcal{M}_\rho^c$ , à droite la vitesse après projection. Les paramètres sont donnés en (5.4).

### 5.3 Etape de transport de la densité

La seconde étape de l'algorithme est l'étape de transport lagrangien de la densité  $\rho^n$  :

$$\tilde{\rho}^{n+1} = (\text{Id} + \tau \tilde{u}^n)_\# \rho^n.$$

Nous allons utiliser la méthode du *lagrangien projeté*. Elle consiste à translater la masse étalée de manière uniforme dans la cellule  $C_i$  de  $\tau \tilde{v}_i^n$  et de la distribuer dans chaque cellule d'arrivée. La masse provenant de la cellule  $C_i$  et arrivant dans la cellule  $C_j$  est alors :

$$\int_{C_j} \rho_i^n \mathbb{1}_{(\text{Id} + \tau \tilde{u}^n)(C_i)}(x) dx.$$

En pratique, ce schéma a plusieurs avantages. Tout d'abord, il est conservatif tant que  $(\text{Id} + \tau \tilde{u}_i^n)(C_i) \subset X$ . Ensuite, contrairement aux schémas utilisant la méthode

du splitting dimensionnel il prend en compte les cellules situées dans les directions obliques. Enfin, il n'a pas de condition CFL ce qui permet de limiter la diffusion.

L'algorithme utilisé est le suivant : pour chaque cellule  $C_i$  avec  $i \in I(\rho^n)$  nous cherchons l'élément  $\tilde{x} \in h(\mathbb{Z} + 1/2)^2$  tel que

$$\tilde{x} - (x_i + \tau u_i^n) = l := (l_x, l_y) \in [0, h]^2$$

on pose alors  $(j_1, j_2, j_3, j_4)$  les indices des cellules (si elles existent) dont les centres respectifs sont les suivants :

$$\begin{cases} x_{j_1} = \tilde{x}, \\ x_{j_2} = \tilde{x} + (h, 0), \\ x_{j_3} = \tilde{x} + (0, h), \\ x_{j_4} = \tilde{x} + (h, h). \end{cases}$$

On met à jour la densité  $\tilde{\rho}^{n+1}$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_{j_1}^{n+1} = \tilde{\rho}_{j_1}^{n+1} + \rho_i^n \frac{(h - l_x)(h - l_y)}{h^2}, \\ \tilde{\rho}_{j_2}^{n+1} = \tilde{\rho}_{j_2}^{n+1} + \rho_i^n \frac{l_x(h - l_y)}{h^2}, \\ \tilde{\rho}_{j_3}^{n+1} = \tilde{\rho}_{j_3}^{n+1} + \rho_i^n \frac{(h - l_x)l_y}{h^2}, \\ \tilde{\rho}_{j_4}^{n+1} = \tilde{\rho}_{j_4}^{n+1} + \rho_i^n \frac{l_x l_y}{h^2}. \end{cases}$$

**Remarque 5.1.** Si pour tout  $i \in I(\rho^n)$ ,  $(Id + \tau \tilde{u}_i^n)(C_i) \subset X$  alors cet algorithme revient à dire que :

$$\tilde{\rho}^{n+1} = \mathbb{P}_{\mathcal{P}^{h^2}}((Id + \tau \tilde{u}^n)_{\#} \rho^n)$$

où  $\mathbb{P}_{\mathcal{P}^{h^2}}$  est le projeté  $L^2$  sur  $\mathcal{P}^{h^2}$  défini à la page 104.

## 5.4 Projection de la densité sur $K$

L'étape de projection de la densité

$$\rho^{n+1} = \mathbb{P}_K^{\text{W}_2}(\tilde{\rho}^{n+1})$$

peut s'interpréter comme une étape du schéma JKO utilisé dans le cas où il y a une contrainte de congestion dont l'analyse numérique a été faite dans la section 4.3. On l'utilise avec comme densité initiale  $\tilde{\rho}^{n+1}$  et comme fonctionnelle  $\psi \equiv 0$  :

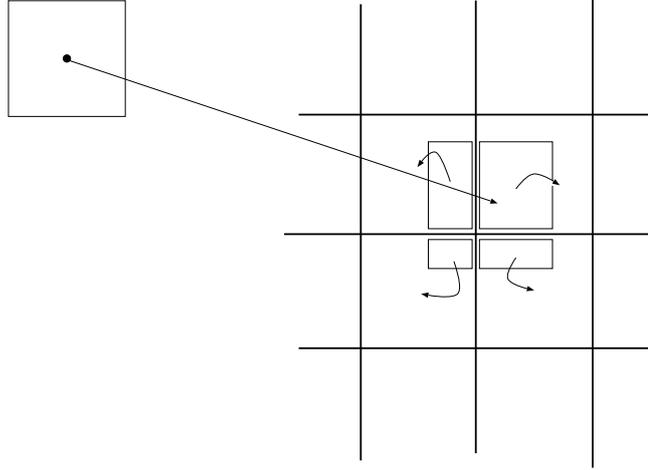


FIGURE 5.2 – Schéma de la méthode du transport lagrangien de la densité.

**Algorithme JKO 4. (Projection sur  $K$ )**

À partir de  $\tilde{\rho}^{n+1} \in \mathcal{P}^{h^2}$ , l'algorithme calcule  $\rho^{n+1}$  de la manière suivante :

1ère étape :

$$\mu \in \operatorname{argmin}_{\bar{\mu} \in \Pi^h(\tilde{\rho}^{n+1}, K)} \left\{ \sum_{i \in I(\tilde{\rho}^{n+1})} \frac{1}{\tilde{\rho}_i^{n+1}} \left( \sum_{\alpha \in \{x, y\}} \sum_{p \in V^\alpha(i)} (\bar{\sigma}_{ip})^2 \right) + \epsilon \sum_{i \in I} \sum_{j \in V(i)} \bar{\mu}_{ij}^2 \right\}$$

2ème étape :

$$\mu^{n+1} \in \operatorname{argmin}_{\gamma \in \Pi^h(\tilde{\rho}^{n+1}, K)} \left\{ \sum_{i \in I(\tilde{\rho}^{n+1})} \frac{1}{\tilde{\rho}_i^{n+1}} \left( \sum_{\alpha \in \{x, y\}} \sum_{p \in V^\alpha(i)} (\sigma_{ip})^2 \right) + \epsilon \sum_{i \in I} \sum_{j \in V(i)} \left( \frac{\gamma_{ij}^2}{\mu_{ij} + \epsilon^2} + \gamma_{ij} \ln(\mu_{ij} + \epsilon^2) \right) \right\}$$

$$\rho_j^{n+1} := \sum_{i \in V(j)} \frac{\mu_{ij}^{n+1}}{h^2}.$$

avec

- $I(\tilde{\rho}^{n+1}) = \{i \in I, \tilde{\rho}_i^{n+1} > 0\}$ ;
- $V^\alpha(i) = \{i_\alpha, i_{\alpha+1}\}$ ;
- $V(i) = \{(i_x + \delta_x, i_y + \delta_y), \delta_x, \delta_y \in \{-1, 0, 1\}\}$  l'ensemble des voisins de  $i$ ;
- $\Pi^h(\tilde{\rho}^{n+1}, K) = \left\{ (\mu_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in V(i)}} \mid \forall i, j \in I, \sum_{j \in V(j)} \mu_{ij} = h^2 \tilde{\rho}_i^{n+1}, \sum_{i \in V(j)} \mu_{ij} \leq h^2 \right\}$ ;
- $\epsilon > 0$ , un petit paramètre;
- $\mathcal{F}(\bar{\mu}) = \bar{\sigma}$  et  $\mathcal{F}(\gamma) = \sigma$  avec la fonction  $\mathcal{F}$  donnée dans (5.5).

On rappelle que la fonction  $\mathcal{F}$  est définie comme suit :

$$\mathcal{F}(\mu) = \sigma \Leftrightarrow \forall i \in I \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{i i_x}^x = \sum_{j=-1}^1 \mu_{i(i_x-1, i_y+j)}, \\ \sigma_{i i_x+1}^x = \sum_{j=-1}^1 \mu_{i(i_x+1, i_y+j)}, \\ \sigma_{i i_y}^y = \sum_{j=-1}^1 \mu_{i(i_x+j, i_y-1)}, \\ \sigma_{i i_y+1}^y = \sum_{j=-1}^1 \mu_{i(i_x+j, i_y+1)}, \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Ces minimisations sont quadratiques avec des contraintes linéaires et peuvent être résolues en utilisant la fonction *quadprog* de **matlab**.

## 5.5 Construction de la nouvelle vitesse

La construction de la nouvelle vitesse :

$$u^{n+1} = \frac{\text{Id} - (s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1}}{\tau}$$

repose sur le lemme 2.7 de décomposition des vitesses page 60. La nouvelle vitesse  $u^{n+1}$  peut se décomposer de la manière suivante :

$$u^{n+1} = \tilde{u}^n \circ \mathbf{t}^{n+1} - \nabla \pi^{n+1}$$

avec  $\mathbf{t}^{n+1} = (s^{n+1})^{-1} \circ r^{n+1}$ . Nous allons construire la nouvelle vitesse en calculant chacun des termes précédents.

$i_1$	$i_4$	$i_6$
$i_2$	$i$	$i_7$
$i_3$	$i_5$	$i_8$

FIGURE 5.3 – indices pour la section 5.5.

**Calcul de  $\tilde{u}^n \circ \mathbf{t}^{n+1}$** 

Ce terme représente l'inertie des particules : si une particule n'est pas perturbée par la congestion, elle conserve sa vitesse au pas de temps  $n\tau + \tau$ . Pour commencer, nous calculons une approximation de la vitesse  $\tilde{u}^{n+1} = \tilde{u}^n \circ (s^{n+1})^{-1}$ . Pour rester cohérent avec l'étape de transport de la densité (section 5.3) nous calculons le vecteur  $\tilde{q}^{n+1}$  en transportant  $q^n = u^n \rho^n$  par le transport  $\text{Id} + \tau u^n$  en utilisant la même méthode que pour  $\rho^n$ . Enfin, la nouvelle quantité de mouvement  $\bar{q}^{n+1} = \rho^{n+1} \tilde{u}^n \circ \mathbf{t}^{n+1}$  est calculée en utilisant le plan de transport  $\mu^{n+1}$  obtenu lors de l'étape de projection (définie dans l'algorithme 4 page 150) :

$$\bar{q}_j^{n+1} = \sum_{i \in V(j)} \left( \frac{\mu_{ij}^{n+1}}{h^2} \right) \frac{\tilde{q}_i^{n+1}}{\tilde{\rho}_i^{n+1}}.$$

**Calcul de  $-\nabla \pi^{n+1}$** 

Cette vitesse correspond à la correction à effectuer à la vitesse pour prendre en compte la projection sur  $K$ . Pour cela, nous allons calculer la contribution apportée par chaque cellule  $C_i$  à cette correction. Comme la projection s'effectue uniquement sur les voisins de  $i$ , posons  $(i_1, \dots, i_8)$  le noms des 8 cellules voisines de  $C_i$  comme illustré dans la

figure 5.3. On remarque que :

$$\begin{cases} \sigma_{i\ i+1}^x = \mu_{ii_6} + \mu_{ii_7} + \mu_{ii_8}, \\ \sigma_{i\ i}^x = \mu_{ii_1} + \mu_{ii_2} + \mu_{ii_3}, \\ \sigma_{i\ i+1}^y = \mu_{ii_1} + \mu_{ii_4} + \mu_{ii_6}, \\ \sigma_{i\ i}^y = \mu_{ii_3} + \mu_{ii_5} + \mu_{ii_8}, \end{cases}$$

et la contribution de la cellule  $C_i$  au coût Wasserstein quadratique discrétisé par la méthode du balayage transverse (voir chapitre 4) est :

$$\sum_{\alpha \in \{x,y\}} \sum_{p=i_\alpha}^{i_\alpha+1} \frac{(\sigma_{ip}^\alpha)^2}{\tilde{\rho}_i^{n+1}}.$$

Ce terme représente aussi l'énergie cinétique du terme de correction de la densité, empiriquement le produit  $\sigma_{ii}^\alpha \sigma_{i\ i+1}^\alpha \approx 0$  pour  $\alpha \in \{x,y\}$  d'où pourquoi nous décidons que la correction de la vitesse avant projection est :

$$\nabla \tilde{\pi}_i^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau h \tilde{\rho}_i^{n+1}} (\sigma_{i\ i+1}^x - \sigma_{i\ i}^x) \\ \frac{1}{\tau h \tilde{\rho}_i^{n+1}} (\sigma_{i\ i+1}^y - \sigma_{i\ i}^y) \end{pmatrix}.$$

Pour avoir la correction de la vitesse au temps  $(n+1)\tau$ , il suffit de la transporter avec le plan  $\mu^{n+1}$  :

$$-\rho_j^{n+1} \nabla \pi_j^{n+1} = \sum_{i \in V(j)} \mu_{ij}^{n+1} \nabla \tilde{\pi}_i^{n+1}.$$



# Tests numériques

Ce chapitre servira à la représentation des différents tests numériques effectués sur les équations des gaz sans pression sous contrainte de congestion :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla \pi = 0, \\ \rho \leq 1, \\ (1 - \rho)\pi = 0, \\ \pi \geq 0, \\ u^+ = P_{C_K(\rho)}(u^-), \end{array} \right. \quad (6.1)$$

avec

$$C_K(\rho) = \left\{ v \in L^2, \int v \cdot \nabla q \leq 0, \forall q \in H^1, q \geq 0, q(1 - \rho) = 0 \right\}.$$

Le schéma utilisé est le schéma discuté dans le chapitre 2 dont l'algorithme discrétisé en temps et espace a été discuté dans le chapitre précédent.

## Sommaire

<b>6.1</b>	<b>Sticky blocks</b>	<b>155</b>
<b>6.2</b>	<b>Tests d'un choc</b>	<b>158</b>
<b>6.3</b>	<b>Test du barrage</b>	<b>166</b>
<b>6.4</b>	<b>Test du sablier</b>	<b>170</b>

## 6.1 Sticky blocks

Le premier test que nous effectuons est en dimension 1. Nous allons comparer la solution donnée par notre algorithme avec la solution donnée par les sticky blocks. Trois blocs congestionnés se déplacent avec une vitesse constante par bloc. Ils vont entrer en collision

tous les trois à  $t = 0.1$ . Voici les paramètres utilisés pour ce test :

$$\begin{cases} \rho = \mathbb{1}_{[0.5,0.15]} + \mathbb{1}_{[0.25,0.35]} + \mathbb{1}_{[0.55,0.65]}; \\ \rho u = 2\mathbb{1}_{[0.5,0.15]} + \mathbb{1}_{[0.25,0.35]} - \mathbb{1}_{[0.55,0.65]}; \\ dx = 0.0013; \\ dt = 0.25 \times dx; \\ T_{end} = 0.2. \end{cases} \quad (6.2)$$

En dimension 1, on peut prendre  $c$  assez grand car la contrainte peut s'écrire en seulement  $M - 1$  inégalités où  $M$  représente le nombre de cellules. En fait, elle permet de garder stable la vitesse lors de la collision (si  $c$  est trop petit, des oscillations apparaissent et ne se résorbent pas).

Les figures 6.1 représentent la densité (en haut) et la quantité de mouvement (en bas). On compare les valeurs calculées par l'algorithme (en bleu) à la solution sticky blocks (en rouge). On remarque qu'à part pour quelques pas de temps au moment du choc, l'algorithme reconstitue correctement la densité et la quantité de mouvement de la solution.

Les figures 6.2 représentent l'erreur entre la solution calculée et la solution sticky blocks. À gauche, on représente l'erreur  $L_h^2$  (voir (4.2.2) page 127) au cours du temps, à droite, le max de cette erreur selon  $h$  à condition  $CFL$  fixée ( $dt = 0.25 \times h$ ). On remarque que l'algorithme accentue son erreur (l'erreur  $L_h^2$ ) avant le choc puis elle rechute. La figure de droite semble indiquer que l'algorithme converge vers la solution sticky blocks.

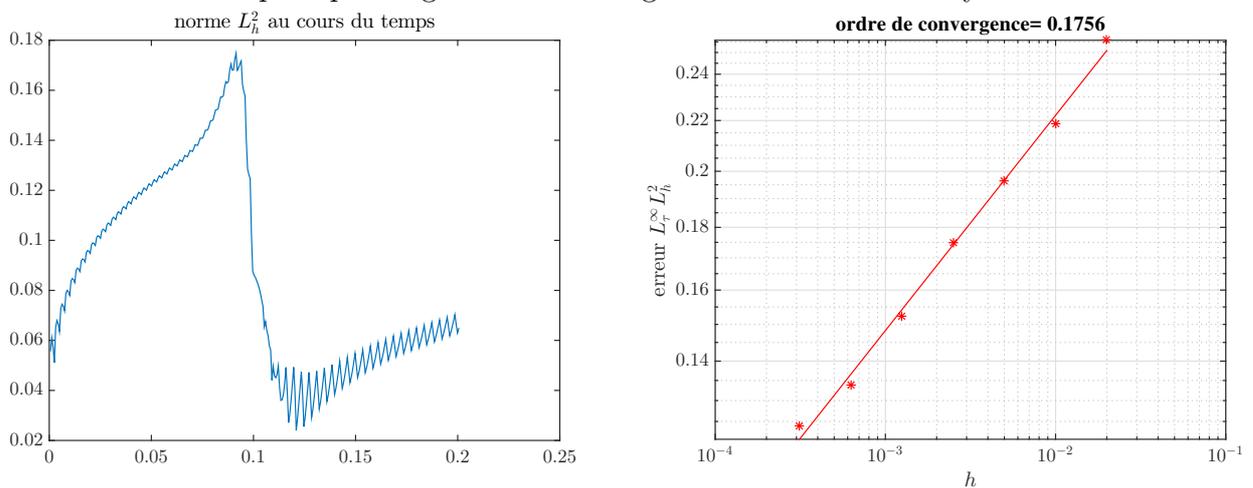


FIGURE 6.2 – Erreur au cours du temps et erreur selon  $h$  à condition  $CFL$  fixée pour l'exemple sticky blocks.

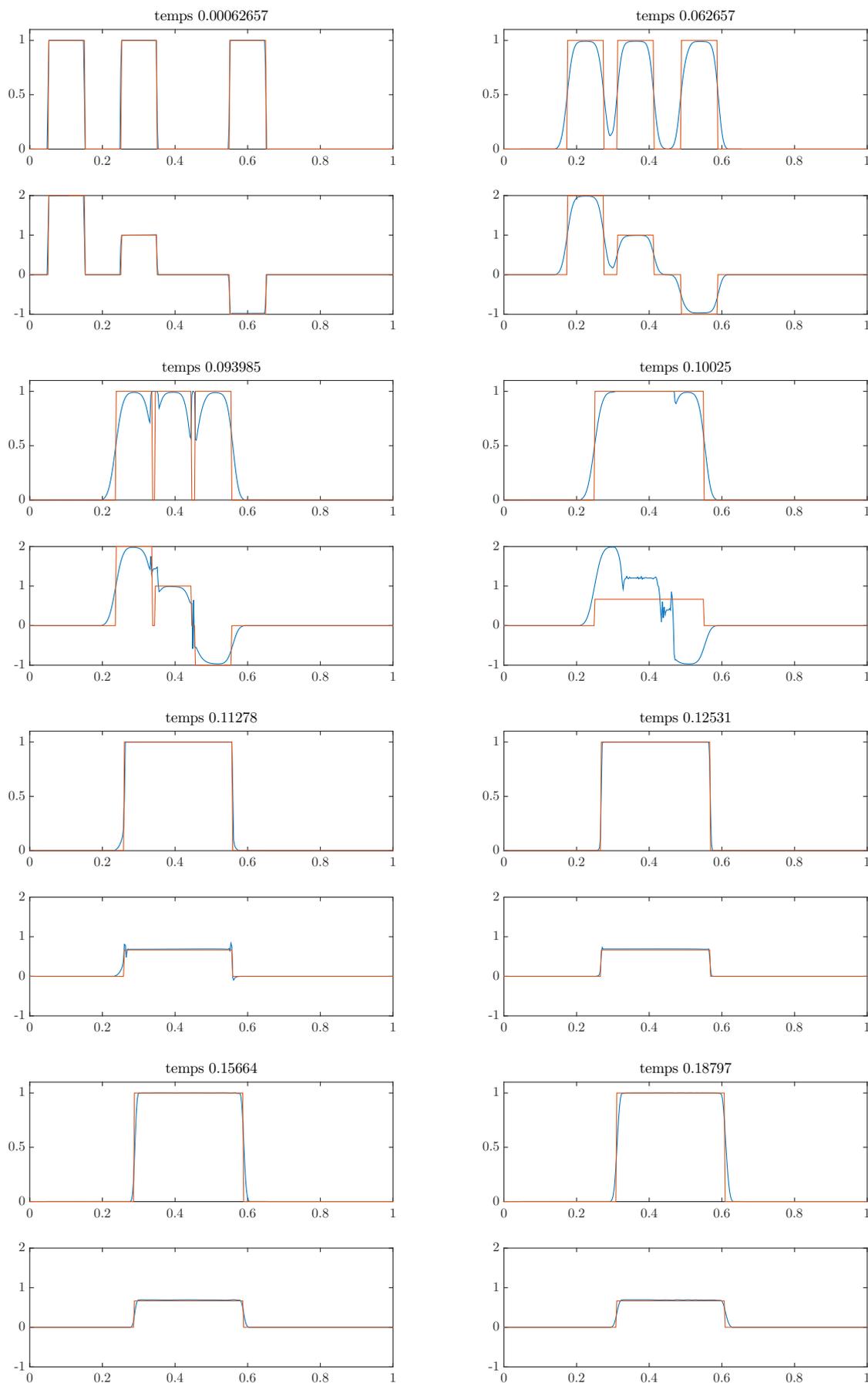


FIGURE 6.1 – La densité et la quantité de mouvement au cours du temps dans l'exemple sticky blocks.

## 6.2 Tests d'un choc

Cette section présentera deux tests réalisés dans [48] et effectués avec la nouvelle méthode de projection. Nous allons illustrer nos commentaires en comparant les solutions numériques avec ceux calculées par le logiciel SCoPI qui permet d'obtenir les solutions du modèle granulaire microscopique (voir [32, 44, 47] pour les détails de l'algorithme). Cette comparaison ne permet pas de valider rigoureusement notre approche, mais les solutions du système macroscopique ont certaines similarités avec celles du système granulaire microscopique. Dans le modèle microscopique, nous prenons le nombre de particules (avec le rayon  $r$  donné en dessous) qui correspond à la densité initiale du modèle macroscopique.

### Premier exemple :

Dans cette exemple, un nuage de particules (sur la gauche) avance à vitesse constante et va percuter le nuage inerte de droite.

Modèle macroscopique :

- $\bar{\Omega} = [-40, 40]^2$ ,  $h = 0.3$ ,  $\tau = 0.0150$  ;
- $\rho^0 = 0.2\mathbb{1}_{x^2+y^2 < 25^2} + 0.2\mathbb{1}_{(x+31)^2+y^2 < 5^2}$  ;
- $E^0 = 2\mathbb{1}_{(x+31)^2+y^2 < 5^2}$ .

Modèle microscopique :

- $\bar{\Omega} = [-40, 40]^2$ ,  $\tau = 0.03$ ,  $r = 0.1$  ;
- 500 particules situées dans  $\{(x + 31)^2 + y^2 < 5^2\}$  à la vitesse  $(10, 0)$  et 12500 particules situées dans  $\{x^2 + y^2 < 25^2\}$  à la vitesse  $(0, 0)$ .

### Second exemple :

Pour cette seconde situation, deux nuages de particules de forme carré se percutent.

Modèle macroscopique :

- $\bar{\Omega} = [-40, 40]^2$ ,  $h = 0.3$ ,  $\tau = 0.0075$  ;
- $\rho^0 = 0.5\mathbb{1}_{[0.5, 20.5] \times [-10, 10]} + 0.5\mathbb{1}_{[-20.5, -0.5] \times [-10, 10]}$  ;
- $E^0 = -5\mathbb{1}_{[0.5, 20.5] \times [-10, 10]} + 5\mathbb{1}_{[-20.5, -0.5] \times [-10, 10]}$ .

Modèle microscopique :

- $\bar{\Omega} = [-40, 40]^2$ ,  $\tau = 0.003$ ,  $r = 0.1$  ;
- 5220 particules situées en  $[0.5, 20.5] \times [-10, 10]$  à la vitesse  $(-10, 0)$  et 5220 particules situées en  $[-20.5, -0.5] \times [-10, 10]$  à la vitesse  $(10, 0)$ .

Les figures 6.3 et 6.4 présentent l'évolution de la densité macroscopique (gauche), et l'évolution des particules rigides (droite), pour le premier cas. Les figures 6.7 présentent

quant à elle l'évolution des composantes de la vitesse. Les figures 6.5, 6.6 et 6.8 correspondent au second cas. Dans les deux cas, les formes des zones saturées induites par la collision des nuages présentent des similarités. Il est important de constater que l'absence de symétries apparaissant dans le cas microscopique est due au choix aléatoire des positions des particules dans le support de chacun des nuages. En particulier, la donnée initiale n'est elle-même pas symétrique.

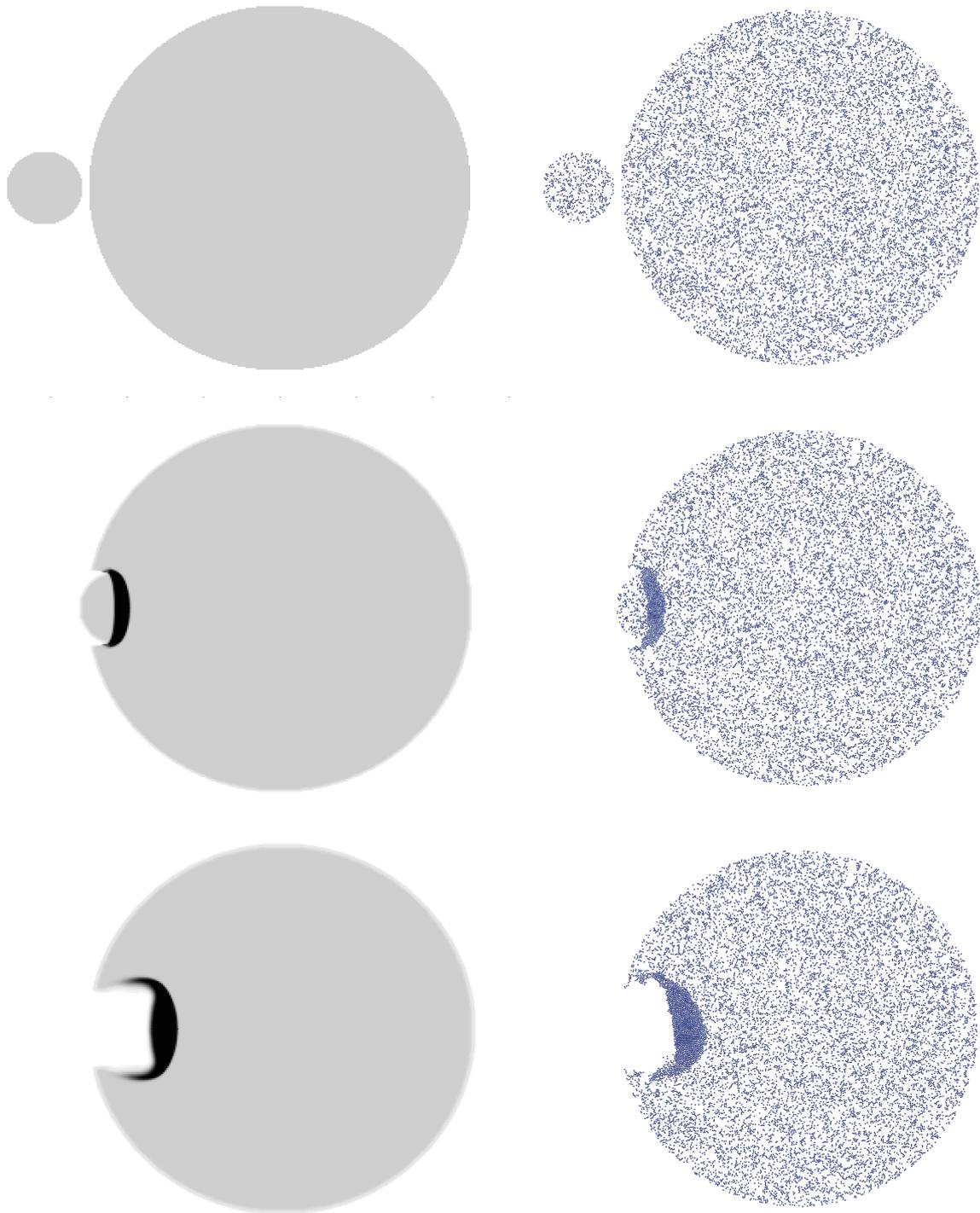


FIGURE 6.3 – Le premier exemple au temps 0, 1 et 2.

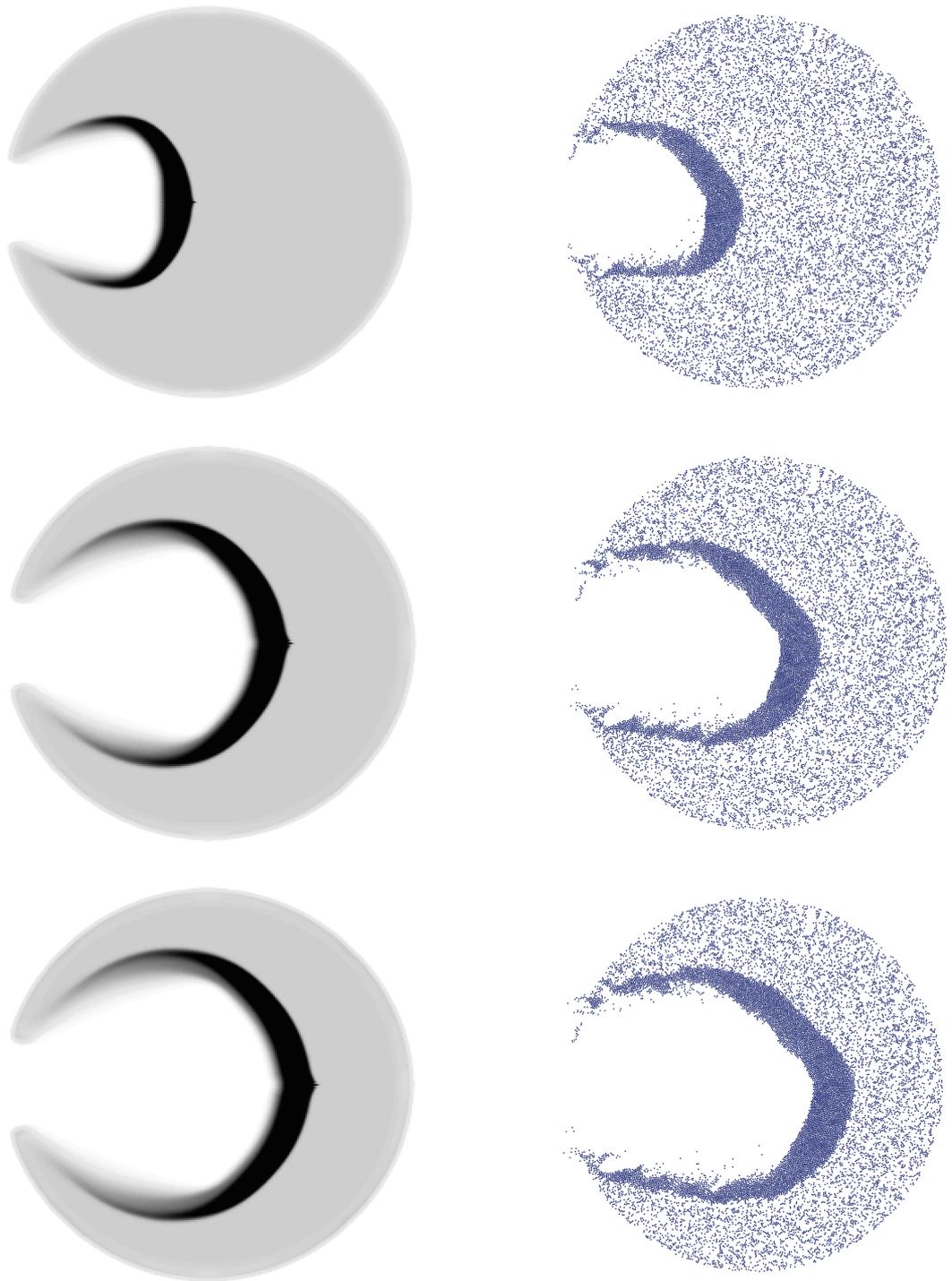


FIGURE 6.4 – Le premier exemple au temps 5, 10 et 12.

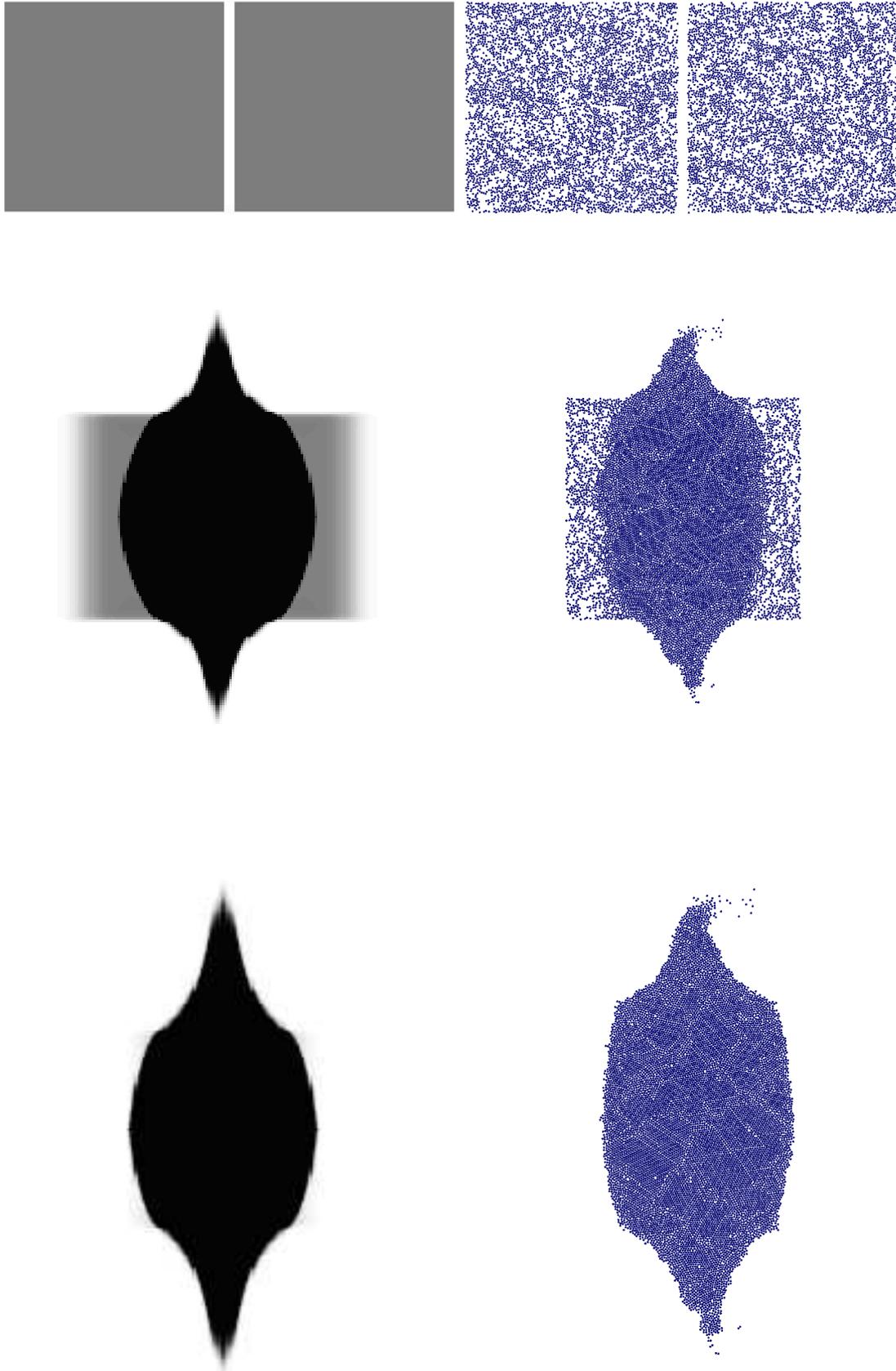


FIGURE 6.5 – Le second exemple aux temps 0 and 1 et 1.5.

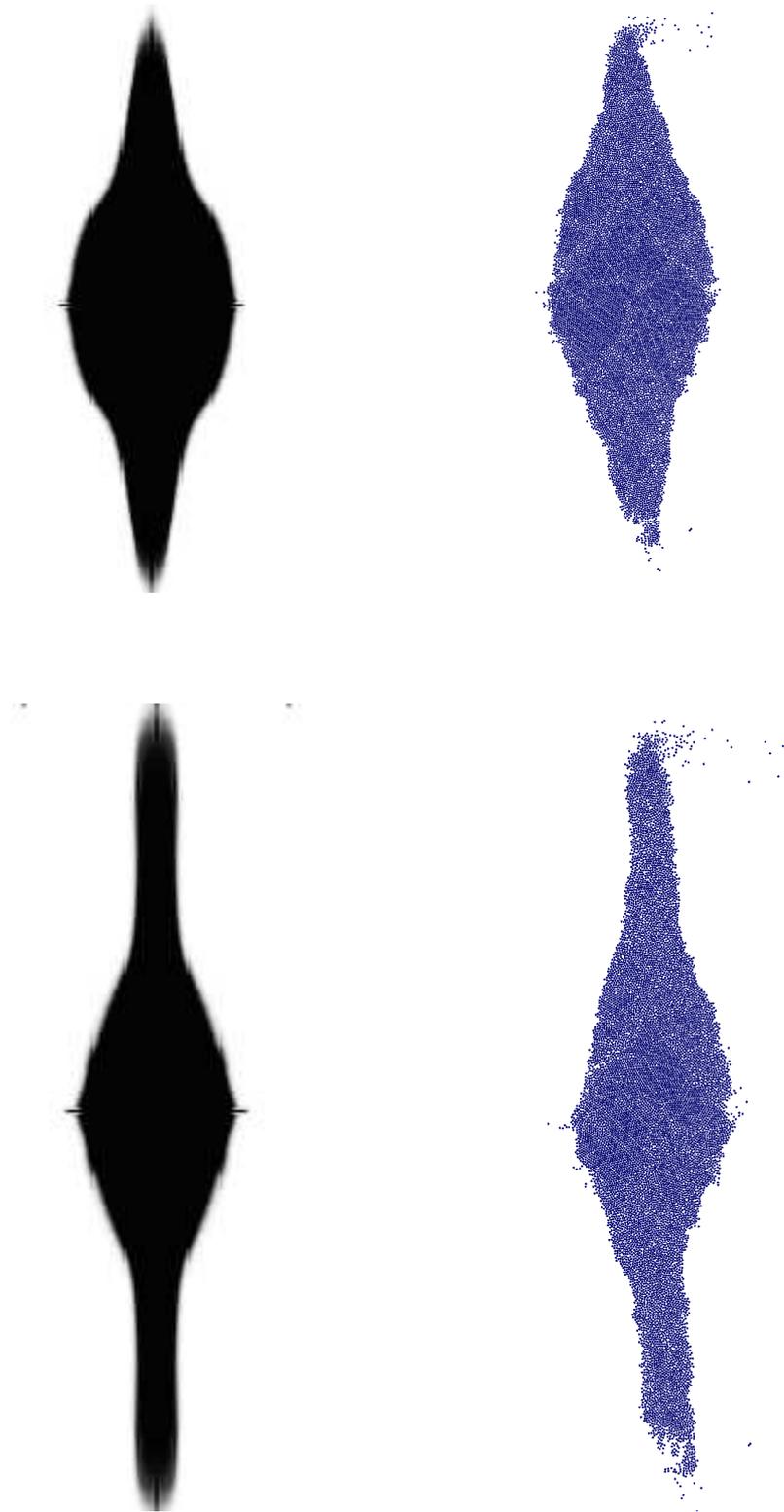


FIGURE 6.6 – Le second exemple aux temps 2 et 3.

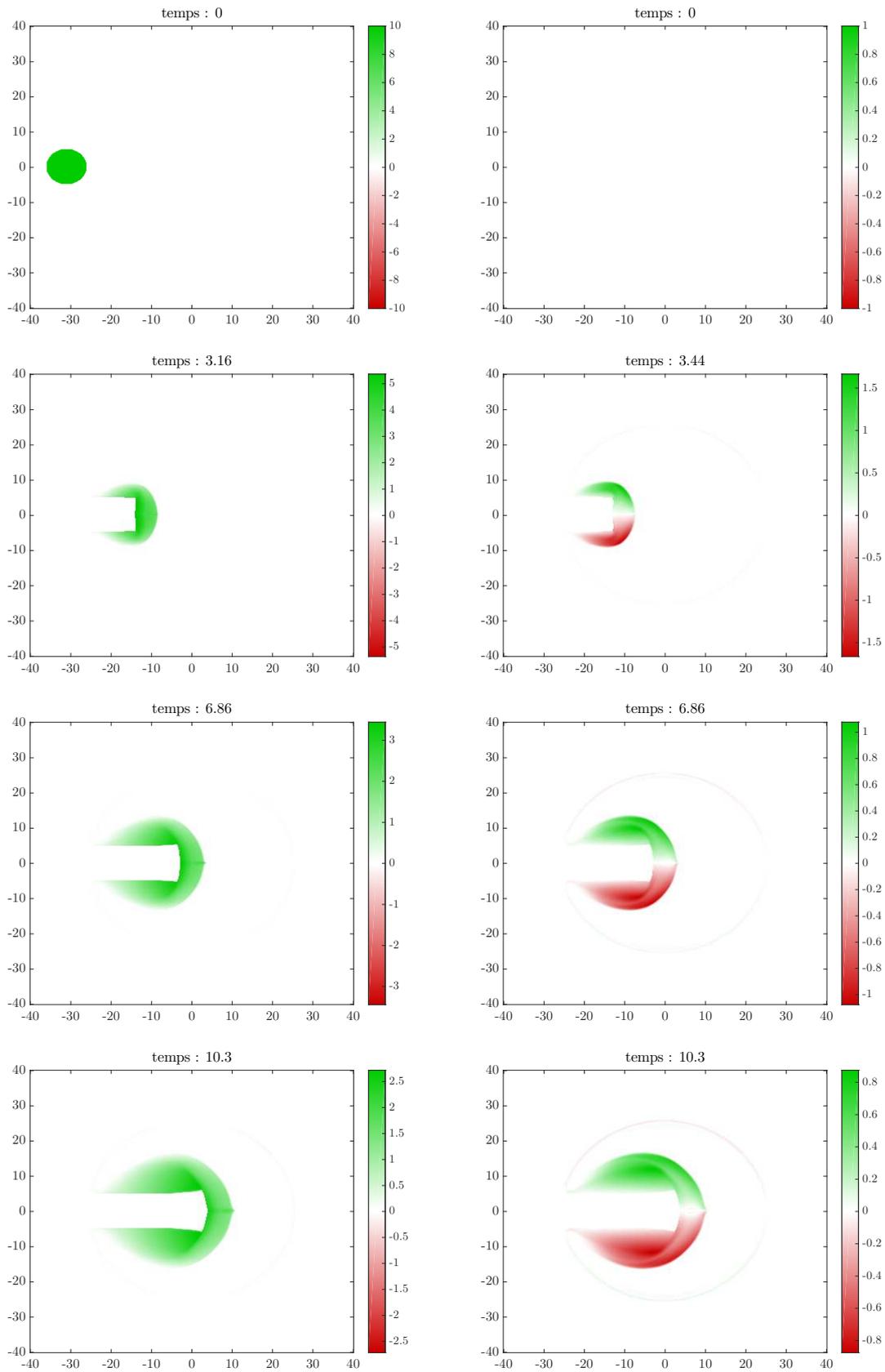


FIGURE 6.7 – Evolution de la vitesse horizontale (à gauche) et verticale (à droite) dans l'exemple 1.

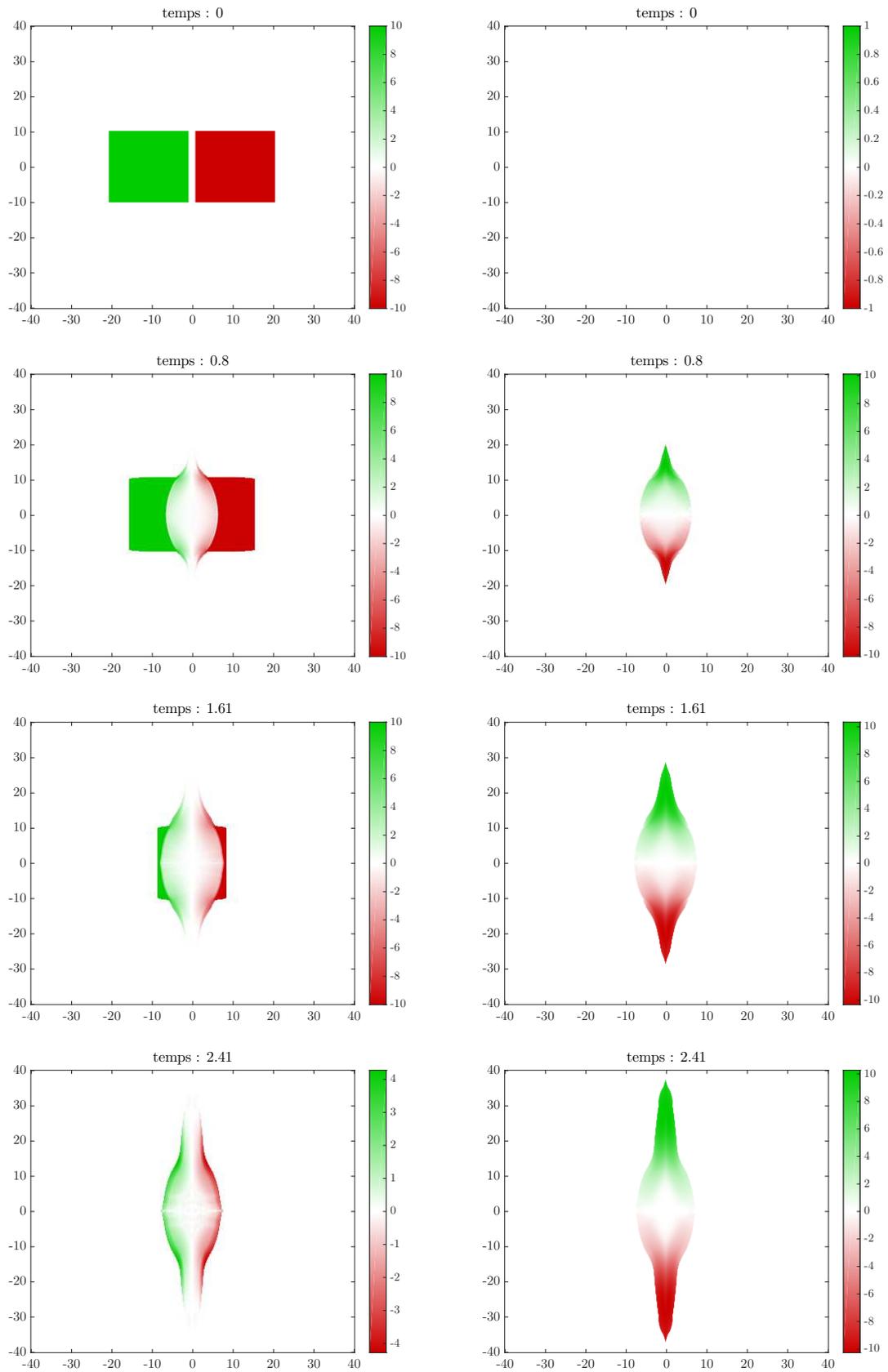


FIGURE 6.8 – Evolution de la vitesse horizontale (à gauche) et verticale (à droite) dans l'exemple 2.

### 6.3 Test du barrage

Cette section servira à illustrer un test appelé *test du barrage*. Un nuage de particules de forme rectangulaire est positionné à gauche d'une cuve (une zone en forme de "U" où la densité est contrainte :  $\rho \leq 0$ ) sans vitesse initiale. On place au milieu de la cuve un obstacle carré (zone où  $\rho \leq 0$ ). À l'instant initial, on soumet les particules à une force de pesanteur. Les particules chutent dans la cuve et forme une "cascade" qui est bloquée par l'obstacle au centre de la cuve. Les particules remontent grâce à la pression qu'elles exercent entre elles via la contrainte de congestion avant de retomber de l'autre coté de l'obstacle.

Voici quelques données liées à cet exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = [-40, 40]^2; \\ \rho^0 = \mathbf{1}_{[-40, -15] \times [-40, 40]}; \\ \text{obstacle} := [5, 10] \times [-40, -25]; \\ dx = 0.2; \\ cfl \approx 0.9; \\ c = 2/10. \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Les figures 6.9 et 6.10 représentent la densité de particules au cours du temps. Les figures 6.11 représentent les composantes de la vitesse à certains instants de l'algorithme. On remarque que les composantes de la vitesse varient fortement jusqu'au moment où la densité se stabilise (vers environ  $t = 30$ ). Elles sont créées par les contraintes (la cuve et l'obstacle) et la force de pesanteur. La densité crée un "tourbillon" à l'aide de l'obstacle se situant au centre de la cuve.

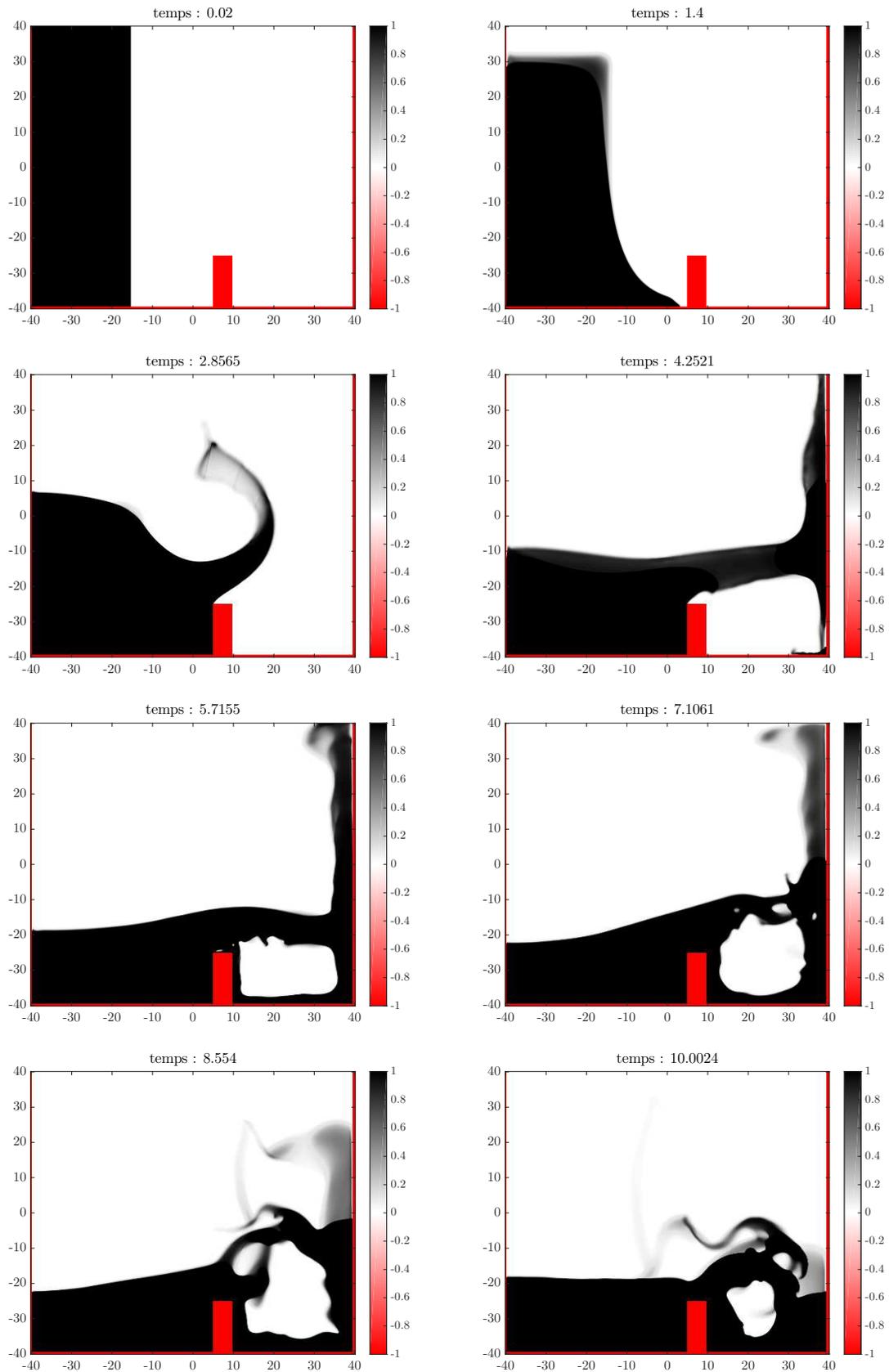


FIGURE 6.9 – Evolution de la densité pour le test du barrage.

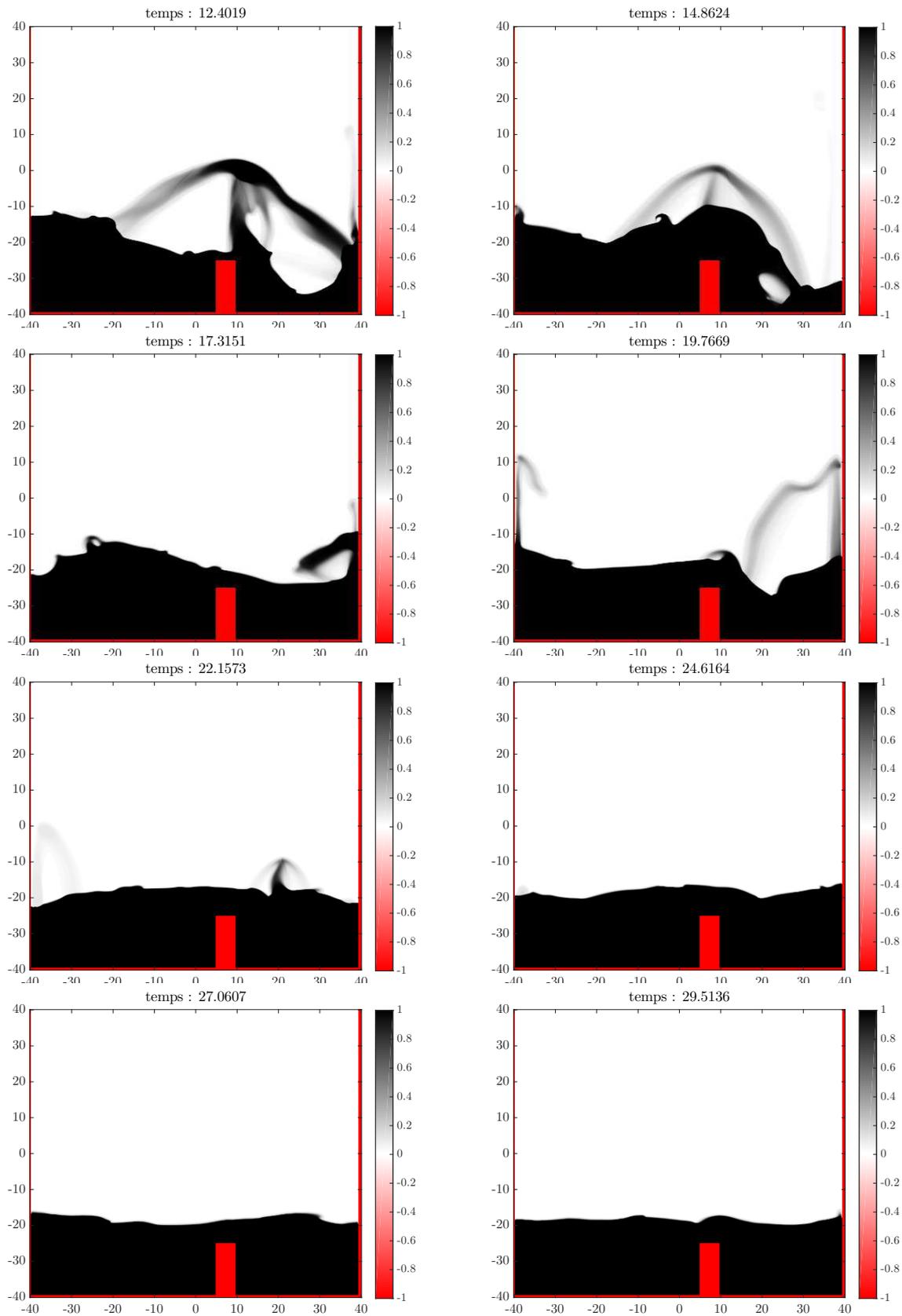


FIGURE 6.10 – Evolution de la densité pour le test du barrage.

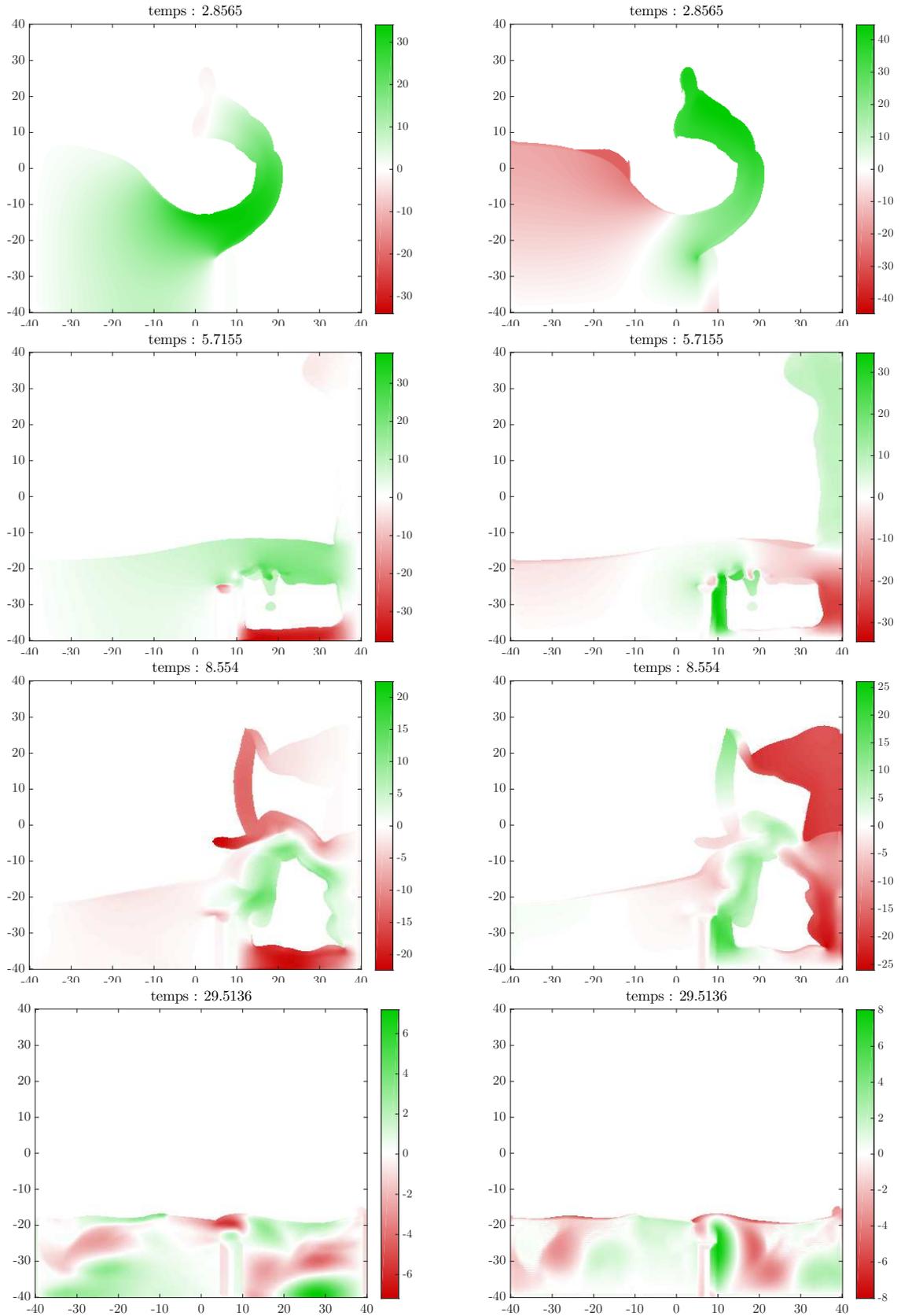


FIGURE 6.11 – Evolution de la vitesse horizontale (à gauche) et verticale (à droite) pour le test du barrage.

## 6.4 Test du sablier

Cette section servira à illustrer un test appelé *test du sablier*. Un nuage de particules de forme sphérique est positionné en hauteur dans un récipient avec des parois mobiles. À l’instant initial, on soumet cette sphère à la force de pesanteur. Les particules chutent dans le récipient en forme de *sablier*. Comme les parois du sablier sont mobiles, elles soumettent une pression aux particules qui sont éjectées en hauteur. Voici quelques données liées à ce test :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = [-40, 40]^2; \\ \rho^0 = \mathbb{1}_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-10)^2 < (18)^2\}}; \\ \text{paroi}_{\text{gauche}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > \tan(\theta_1(t))y - 20\}; \\ \text{paroi}_{\text{droite}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 20 - \tan(\theta_2(t))y\}; \\ \theta_1(t) = -0.3118 - 0.1518 \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right); \\ \theta_2(t) = -0.3118 - 0.1518 \cos\left(\frac{4\pi}{5}t\right); \\ \text{paroi}_{\text{bas}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -40\}; \\ dx = 0.2; \\ c = 2/10. \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Les figures 6.12 et 6.13 représentent la densité des particules au cours du temps, les parois sont indiquées en rouge (avec la valeur  $-1$ ). Les figures 6.14 représentent les composantes de la vitesse à certains instants. On peut remarquer l’apparition de zones grises (à faible densité) lorsque les particules sont projetées par une des parois du sablier. Ces zones ne sont pas dues à la diffusion que crée notre algorithme mais bien aux équations des gaz sans pression et au forçage imposé par la paroi. Le fonctionnement de la contrainte imposée par la paroi mobile peut se simplifier comme suit : un premier pas de temps permet d’annuler la vitesse qu’avaient les particules avant d’entrer en collision avec la paroi. Le second pas de temps permet de donner une nouvelle impulsion aux particules qui repartent avec une vitesse en norme proche de la norme de la vitesse de la paroi. Cette vitesse est alors donnée par le terme de pression du second pas temps qui, asymptotiquement, doit avoir une divergence nulle. Cependant, si la divergence de la vitesse est nulle au départ, elle ne le reste pas au cours du temps. Pour s’en convaincre, on peut revenir à l’exemple 1.15 page 42 où la vitesse initiale est à divergence nulle mais ne le reste pas au cours du temps : la sphère va s’étendre et la densité diminuer.

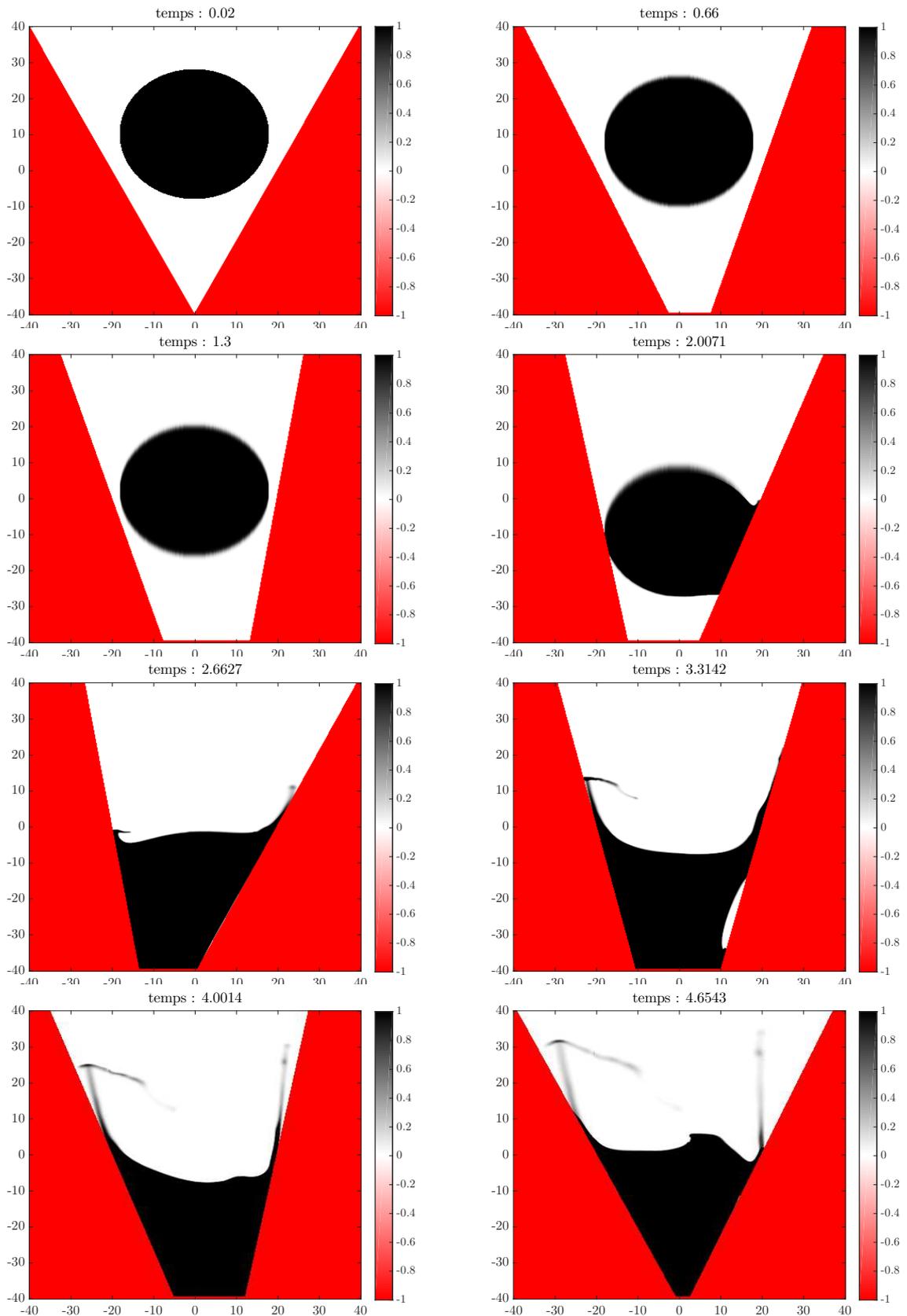


FIGURE 6.12 – Evolution de la densité pour le test du sablier.

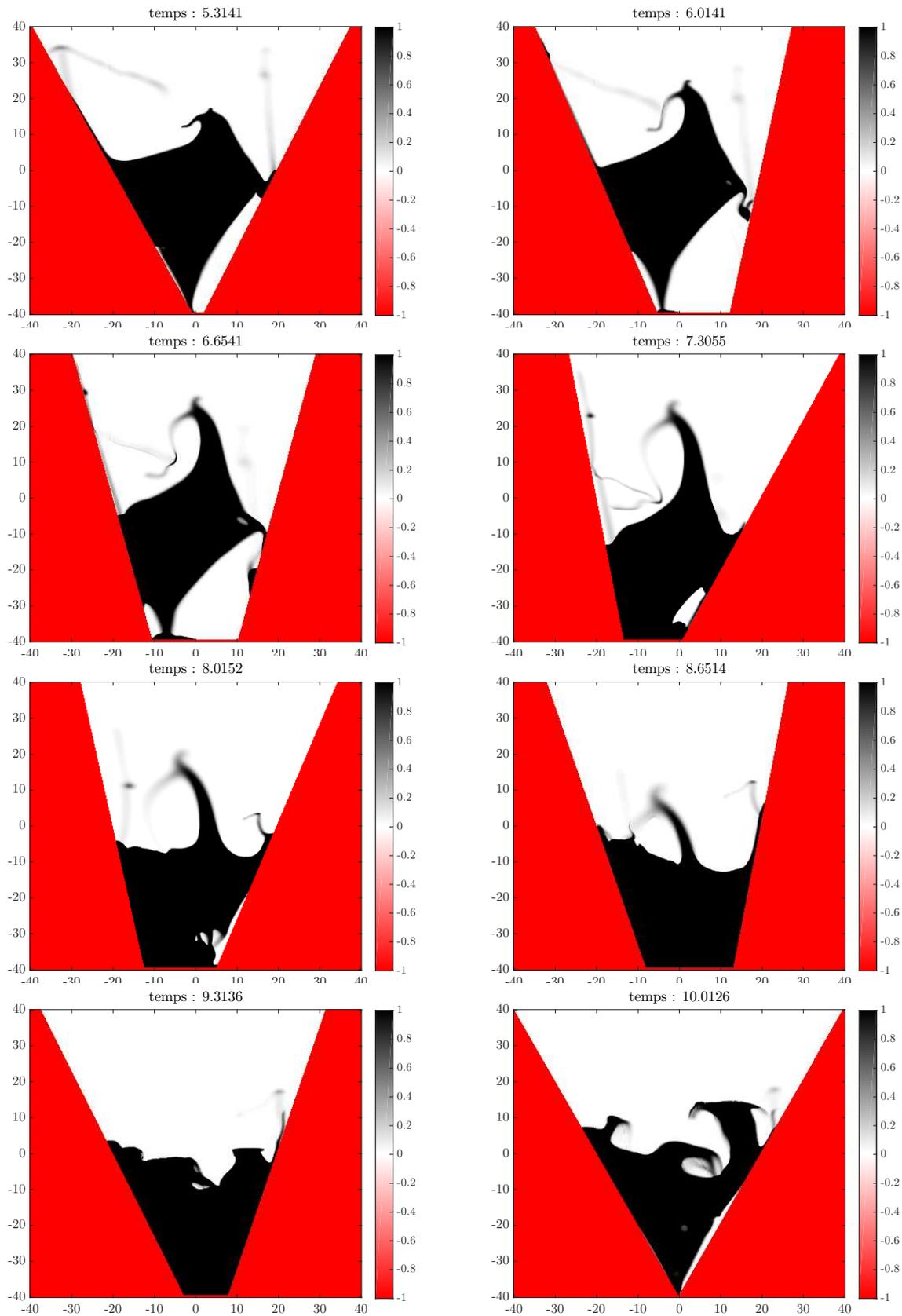


FIGURE 6.13 – Evolution de la densité pour le test du sablier.

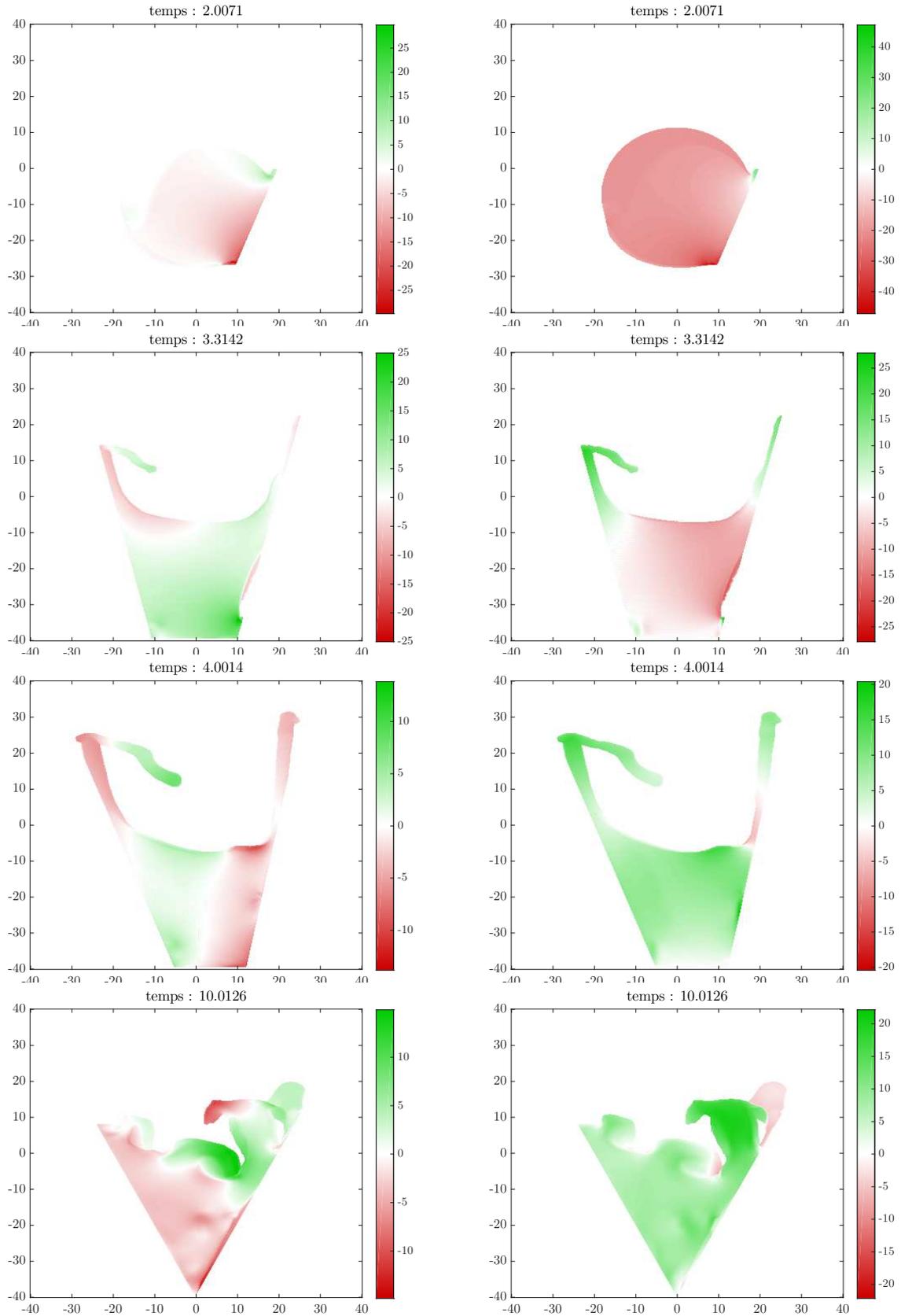


FIGURE 6.14 – Evolution de la vitesse horizontale (à gauche) et verticale (à droite) pour le test du sablier.



# Annexes

---



# Boîte à outils sur le transport Optimal

---

Nous proposons ici les principaux outils du transport optimal que nous utilisons dans cette thèse. Pour une théorie beaucoup plus complète et les preuves de ce que nous affirmons, nous invitons le lecteur à lire [3, 63, 66, 67].

## Présentation

Le transport optimal est un problème proposé par Gaspard Monge (voir [52]) il y a plus de deux siècles. Il s'est intéressé au problème suivant : trouver le moyen de déplacer du sable dans des trous à combler en fournissant le moins d'efforts possibles. Mathématiquement, soient  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques, on considère  $\rho$  et  $\nu$  deux mesures de probabilité sur  $X$  et  $Y$  respectivement. On cherche la manière d'envoyer la mesure  $\rho$  sur la mesure  $\nu$  en fournissant le "moins d'efforts possibles". Pour cela, nous allons commencer par définir ce qu'est une application de transport de  $\rho$  à  $\nu$  :

**Définition A.1.** Soit  $\mathbf{t} : X \rightarrow Y$  une fonction mesurable, on dit que  $\mathbf{t}$  transporte  $\rho$  sur  $\nu$  si pour tout ensemble mesurable  $B$  de  $Y$  on a :

$$\rho(\mathbf{t}^{-1}(B)) = \nu(B)$$

et on note  $\mathbf{t}_\# \rho = \nu$ .

La définition précédente revient à imposer que :

$$\int_X f(\mathbf{t}(x)) d\rho(x) := \int_Y f(x) d(\mathbf{t}_\# \rho(x)) = \int_Y f(x) d\nu(x)$$

pour toute fonction  $f$  mesurable sur  $Y$  et bornée.

**Proposition A.2.** Si  $X = Y = \mathbb{R}^d$ ,  $\rho$  une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et sous certaines hypothèses de régularité sur  $\mathbf{t}$  (voir [63]) on a alors la formule de changement de variables :

$$\nu = \mathbf{t}_\# \rho = \frac{\rho}{|\det \nabla \mathbf{t}|} \circ \mathbf{t}^{-1}.$$

Maintenant que nous disposons d'une application qui définit le transport d'une densité sur une autre, il faut définir le coût associé à cette application. C'est-à-dire combien on dépense si on utilise cette application pour transporter  $\rho$  sur  $\nu$ . Pour cela on définit une application de coût  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$  où  $c(x, y)$  définit la valeur à dépenser pour déplacer une particule de  $x$  à  $y$ . Le problème de transport optimal de Monge consiste à trouver l'application  $\bar{\mathbf{t}}$  qui transporte  $\rho$  sur  $\nu$  et qui minimise le coût du déplacement :

**Définition A.3** (Problème de Monge). *Soient  $\rho$  et  $\nu$  deux mesures de probabilité dans les espaces  $X$  et  $Y$  respectivement. On cherche le transport  $\bar{\mathbf{t}}$  qui vérifie :*

$$\bar{\mathbf{t}} \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{t} \# \rho = \nu} \left\{ \int_X \int_Y c(x, \mathbf{t}(x)) d\rho(x) \right\}. \quad (\text{A.1})$$

Ce problème n'est pas bien défini, par exemple si  $X = Y = \mathbb{R}$ ,  $\rho = \delta_{x=0}$  et  $\nu = \frac{1}{2}(\delta_{x=-1} + \delta_{x=1})$  alors aucune application transporte  $\rho$  sur  $\nu$ , en effet, si  $\rho$  est une masse de Dirac alors  $\mathbf{t} \# \rho$  est lui aussi une masse de Dirac. Les applications transportent toute la masse située en un point vers un unique autre point. Pour éviter ce problème, il va falloir utiliser un autre outil mathématique qui permet de décrire la répartition de la masse se trouvant en  $x \in \operatorname{spt}(\rho)$  sur  $Y$ . Pour cela on définit les plans de transport  $\mu \in \mathcal{P}(X \times Y)$ . Pour  $A \subset X$  et  $B \subset Y$  deux ensembles mesurables,  $\mu(A \times B)$  donne la quantité de masse allant de l'ensemble  $A$  à l'ensemble  $B$ . Pour que ce plan soit admissible il doit vérifier certaines contraintes :

**Définition A.4.** *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur l'espace  $X \times Y$ . On dit que  $\mu$  est plan de transport de  $\rho$  à  $\nu$  si et seulement si :*

$$\begin{cases} \mu(X \times B) = \nu(B), \\ \mu(A \times Y) = \rho(A), \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

pour tout  $A \subset X$  et  $B \subset Y$  mesurables.

On peut voir cette définition de la manière suivante :

- toute la masse provenant de  $X$  et arrivant en  $B$  doit être égale à la masse de  $\nu$  dans  $B$ , c'est-à-dire  $\nu(B)$  ;
- toute la masse provenant de  $Y$  et arrivant en  $A$  doit être égale à la masse de  $\rho$  dans  $A$  c'est-à-dire  $\rho(A)$ .

Contrairement aux applications de transport, les plans de transport ne donnent pas de sens au déplacement de la masse. La mesure  $\rho$  peut se voir comme celle de départ ou celle d'arrivée. On dit que  $\rho$  et  $\nu$  sont les *marginales* de  $\mu$ . De plus, si on note  $\mathbb{X}^1 : (x, y) \rightarrow x$  et  $\mathbb{X}^2 : (x, y) \rightarrow y$  les applications qui projette un élément  $(x, y) \in X \times Y$  dans  $X$  et  $Y$

respectivement, on obtient :

$$\begin{cases} \mathbb{K}_{\#}^1 \mu = \rho, \\ \mathbb{K}_{\#}^2 \mu = \nu. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

On remarque que les plans de transport généralisent les applications de transport précédemment définies, en effet, si  $\mathbf{t}$  transporte  $\rho$  sur  $\nu$ , alors le plan  $\mu = (\text{Id} \times \mathbf{t})_{\#} \rho$  est un plan de transport entre  $\rho$  et  $\nu$ . Le problème de Monge-Kantorovich généralisant le problème de Monge est alors le suivant :

**Définition A.5** (Monge-Kantorovich). *Soient  $\rho$  et  $\nu$  deux mesures de probabilité sur  $X$  et  $Y$  respectivement. On cherche le plan de transport  $\bar{\mu}$  solution du problème :*

$$\left| \begin{array}{l} \bar{\mu} \in \operatorname{argmin}_{\mu \in \Pi(\rho, \nu)} \left\{ \int_{x \in X} \int_{y \in Y} c(x, y) d\mu(x, y) \right\}, \\ \Pi(\rho, \nu) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X \times Y) \mid \mathbb{K}_{\#}^1 \mu = \rho, \mathbb{K}_{\#}^2 \mu = \nu \right\}. \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

On remarque qu'on a remplacé un problème de minimisation non linéaire par un autre linéaire et, de plus, bien posé car il existe toujours au moins un plan de transport transportant  $\rho$  sur  $\nu$ , par exemple  $\rho \otimes \nu$ .

## Espace de Wasserstein quadratique

Par la suite, nous nous plaçons dans le cas où  $X = Y = \mathbb{R}^d$ . Le coût de transport est donné par le carré de la norme euclidienne :

$$c(x, y) = \|x - y\|^2.$$

On se place dans  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  l'espace des mesures de probabilité ayant un moment d'ordre 2 fini, c'est-à-dire :

$$\forall \rho \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 d\rho(x) < +\infty.$$

On a alors :

**Théorème A.6** (Brenier). *Le problème de Monge-Kantorovich admet un unique minimiseur  $\bar{\mu}$  de plus, si  $\rho$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe une fonction  $\phi$  convexe telle que :*

$$\mu = (\text{Id} \times \nabla \phi)_{\#} \rho$$

*c'est-à-dire que le plan de transport peut se réduire à une application de transport  $\nabla \phi$*

transportant  $\rho$  sur  $\nu$  et minimisant le problème de Monge-Kantorovich.

On définit alors la fonction  $\mathcal{W}_2$  comme étant la fonction qui, à deux mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}^d$   $\rho$  et  $\nu$  donne la valeur du coût minimal lié au problème de Monge-Kantorovich :

$$\mathcal{W}_2(\rho, \nu)^2 := \min_{\mu \in \Pi(\rho, \nu)} \left\{ \int_{x \in X} \int_{y \in Y} \|x - y\|^2 d\mu(x, y) \right\}.$$

On peut montrer (voir [67]) que  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  munie de l'application  $\mathcal{W}_2$  est un espace métrique complet. Le point de la démonstration sur lequel on va s'attarder est la démonstration de l'inégalité triangulaire pour la distance  $\mathcal{W}_2$ . Cette propriété nécessite un lemme connu sous le nom de Gluing lemma :

**Lemme A.7** (Gluing lemma). *Soit  $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  et  $\mu_{12}, \mu_{23} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  deux plans de transport transportant  $\rho_1$  sur  $\rho_2$  et  $\rho_2$  sur  $\rho_3$  respectivement. On peut construire  $\mu_{123} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  tel que :*

- $(\mathbb{X}^{1,2})_{\#} \mu_{123} = \mu_{12}$ ;
- $(\mathbb{X}^{2,3})_{\#} \mu_{123} = \mu_{23}$ ;

où  $\mathbb{X}^{i,j} : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_i, x_j)$  pour  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .

**Remarque A.8.** *Dans cette thèse, les variables utilisées pour les plans de  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{3d})$  sont  $z$  (1<sup>ère</sup> variable),  $y$  (2<sup>e</sup>) et  $x$  (3<sup>e</sup>).*

La preuve de ce théorème (voir [67]) nécessite d'introduire la notion de désintégration de mesures. La désintégration de mesure nous permet d'écrire une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  ( $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ ) comme une certaine moyenne de mesures de probabilité sur  $\{x\} \times \mathbb{R}^d$  pour  $x \in \mathbb{R}^d$ .

**Proposition A.9** (désintégration de mesures). *Si  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  avec comme première marginale  $\rho$ , alors il existe une application  $x \rightarrow \mu_x$  de  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  définie de manière unique  $\rho$ -presque partout telle que :*

$$\mu = \int_{\mathbb{R}^d} (\delta_x \otimes \mu_x) d\rho(x)$$

ce qui veut dire que pour toute fonction  $f$  mesurable et bornée sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x, y) d\mu(x, y) = \int_{x \in \mathbb{R}^d} \left[ \int_{y \in \mathbb{R}^d} f(x, y) d\mu_x(y) \right] d\rho(x).$$

En utilisant cette proposition, on définit  $\mu_{12;2}$  et  $\mu_{23;2}$  les deux applications de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  telles que :

$$\begin{cases} \mu_{12} = \int_{\mathbb{R}^d} (\mu_{12;2} \otimes \delta_x) d\rho_2(x), \\ \mu_{23} = \int_{\mathbb{R}^d} (\delta_x \otimes \mu_{23;2}) d\rho_2(x). \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

---

On définit alors la mesure  $\mu_{123} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  de la manière suivante :

$$\mu_{123} = \int_{\mathbb{R}^d} (\mu_{12;2} \otimes \delta_x \otimes \mu_{23;2}) d\rho_2(x)$$

et il possède bien les deux propriétés du lemme A.7. On remarque que cette mesure existe toujours, cependant elle est unique si pour l'une des deux applications  $\mu_{12;2}$  ou  $\mu_{23;2}$ , il existe  $\mathbf{t}$  tel que l'application peut s'écrire  $x \rightarrow \delta_{\mathbf{t}(x)}$ , cela revient à dire que :

$$\begin{cases} \mu_{12} = (\mathbf{t} \times \text{Id})_{\#} \rho_2 \\ \text{ou} \\ \mu_{23} = (\text{Id} \times \mathbf{t})_{\#} \rho_2. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Une dernière propriété utile dans cette thèse est la suivante :

**Proposition A.10.** *Si il existe deux applications  $\mathbf{t}_{21}$  et  $\mathbf{t}_{32}$  telles que :*

$$\begin{cases} \mu_{12} = (\mathbf{t}_{12} \times \text{Id})_{\#} \rho_2, \\ \mu_{23} = (\mathbf{t}_{23} \times \text{Id})_{\#} \rho_3, \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

alors il existe une unique mesure  $\mu_{123}$  ayant les propriétés du *gluing lemma* et on a :

$$(\mathbb{X}^{1,3})_{\#}(\mu_{123}) = (\mathbf{t}_{12} \circ \mathbf{t}_{23} \times \text{Id})_{\#} \rho_3.$$

En d'autres termes, si on utilise le plan de transport pour déplacer les particules de  $\rho_1$  à  $\rho_3$ . On peut affirmer que les particules se trouvant en  $x \in \text{spt}(\rho_3)$  à l'arrivée se trouvaient au départ en  $\mathbf{t}_{12} \circ \mathbf{t}_{23}(x) \in \text{spt}(\rho_1)$ . En effet, la particule suit le déplacement dicté par le plan  $\mu_{23}$  entre  $\rho_2$  et  $\rho_3$ , si elle est en  $x$  à l'arrivée, elle est alors partie de  $t_{23}(x)$ . De même, une particule arrivée en  $t_{23}(x)$  est partie de  $\mathbf{t}_{12} \circ \mathbf{t}_{23}(x) \in \text{spt}(\rho_1)$  d'où la proposition précédente. On peut alors définir une trajectoire des particules de  $\rho_3$  à  $\rho_1$  et ainsi définir une certaine vitesse  $u$  aux particules sur le support de  $\rho_3$  :

$$u = \frac{\text{Id} - \mathbf{t}_{12} \circ \mathbf{t}_{23}}{\tau}$$

où  $\tau$  représente le temps mis par les particules pour se déplacer de  $\rho_1$  à  $\rho_3$ .

## Formulation Benamou-Brenier

Le problème de Monge-Kantorovich peut se reformuler en une version mécanique des fluides : on suppose que  $\rho$  et  $\nu$  représente la densité d'un ensemble de particules à des instants  $t = 0$  et  $t = \tau$ . De plus, supposons qu'à chaque instant  $t \in [0, \tau]$ , il existe un champ des vitesses  $u_t$  qui déplace les particules : si  $X(t)$  représente la position d'une

particule à un instant donné, l'équation différentielle que vérifie  $X$  est alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}(X(t)) = u_t(X(t)).$$

Sous quelques hypothèses de régularité (voir [67] page 238) la densité des particules au cours du temps est solution de l'équation de continuité :

$$\partial_t \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t u_t) = 0$$

où  $\rho_t$  représente la densité des particules à l'instant  $t$ . La formulation Bénéamou-Brenier du problème de transport optimal entre deux mesures est alors :

**Théorème A.11** (Formulation Bénéamou-Brenier). *Soit  $\Omega$  un ensemble compact et convexe, soient  $\rho$  et  $\nu$  deux mesures de probabilité dans cet ensemble alors :*

$$\mathcal{W}_2(\rho, \nu)^2 = \min \left\{ \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_\Omega \|v\|^2 d\rho_t(x), \partial_t \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t u_t) = 0, \rho_0 = \rho \text{ et } \rho_\tau = \nu \right\}$$

où  $\rho_t$  et  $E_t = \rho_t u_t$  sont des mesures sur  $\Omega \times [0, \tau]$ .

Le transport optimal entre deux mesures est alors la manière la moins coûteuse en énergie cinétique pour emmener  $\rho$  sur  $\nu$ . De plus, si le transport optimal est représenté par une application de transport  $\mathbf{t}$  telle que  $\mathbf{t}_\# \rho = \nu$  alors les particules se déplacent de  $\rho$  à  $\nu$  via un mouvement rectiligne uniforme et la vitesse est alors :

$$u_t = \frac{\mathbf{t} - \text{Id}}{T}.$$

# Une autre méthode de discrétisation du coût Wasserstein quadratique

---

Dans cette section nous allons présenter une autre méthode pour discrétiser le coût Wasserstein quadratique. Cette méthode utilise la discrétisation naturelle du coût décrit dans la partie 2 à partir de la page 76 à laquelle on rajoute un terme de pénalisation quadratique.

## Description

On note  $X = [0, L]$  le domaine utilisé avec  $L > 1$ . Notons  $I = \llbracket 0, M-1 \rrbracket$  et  $X^h = \{C_i = [ih, (i+1)h], i \in I\}$ , la discrétisation cartésienne de  $X$  en cellule de taille  $Mh = L$ . On note  $\mathcal{P}^h$  l'espace des mesures de densité constante sur chaque cellule  $C_i$  de  $X^h$  et  $\mathcal{P}^{h \times h}$  les plans de transport de  $X^h$ . Un élément de  $\mathcal{P}^h$  est identifié à un élément de  $\mathbb{R}^M$  :

$$\rho = (\rho_0, \dots, \rho_{M-1})$$

avec  $\rho_i = \frac{\rho(C_i)}{h} \geq 0$  représentant la densité moyenne de la cellule  $C_i$ . On peut définir de la même manière  $\mathcal{P}^{h \times h}$  les plans de transport de  $X^h$ , ils sont identifiés à des éléments de  $\mathbb{R}^{M^2}$  :

$$\mu = (\mu_{ij})_{i,j \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket^2}$$

avec  $\mu_{ij} = \mu(C_i, C_j) \geq 0$ . On note  $\mathbb{R}^h$  l'ensemble des fonctions de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  constante sur chaque cellule de  $X^h$ . La fonction coût qui approche le coût Wasserstein quadratique est définie comme suit.

**Définition B.1** (Coût Wasserstein quadratique discrétisé). *Soit  $\rho$  et  $\nu$  deux mesures de probabilité de  $\mathcal{P}^h$ , on définit alors la fonction  $\tilde{W}_2$  de la manière suivante :*

$$\tilde{W}_2(\rho, \nu)^2 = \min_{\mu \in \Pi(\rho, \nu)} \left\{ \sum_{i \in I(\rho)} \sum_{j=0}^{M-1} \left( \mu_{ij} \|x_i - x_j\|^2 + \frac{h^2 \mu_{ij}^2}{2 h \rho_i} \right) \right\}$$

avec  $\Pi(\rho, \nu) = \left\{ \mu_{ij} \geq 0 \mid \sum_{j=0}^{M-1} \mu_{ij} = h \rho_i, \sum_{i=0}^{M-1} \mu_{ij} = h \nu_j \right\}$  et  $I(\rho) = \{i \in I \mid \rho_i > 0\}$ .

Nous allons voir que cette fonction coût résorbe le problème de locking expliqué à partir

de la page 76.

Une version discrétisée en espace du schéma 2.25 page 75 est le problème de minimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu^{n+1} \in \operatorname{argmin}_{\mu \in \Pi^h(\rho^n, \cdot)} \left\{ \sum_{i \in I(\rho^n)} \sum_{j=0}^{M-1} g_j \mu_{ij} + \frac{1}{2\tau} \left( \sum_{i \in I(\rho^n)} \sum_{j=0}^{M-1} \mu_{ij} \|x_i - x_j\|^2 + \frac{h^2}{2} \frac{\mu_{ij}^2}{h\rho_i} \right) \right\} \\ \rho_j^{n+1} := \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{M-1} \mu_{ij}^{n+1} \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

avec

- $g_j = g(x_j)$  ;
- $\Pi^h(\rho^n, \cdot) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}^{h \times h} \mid \sum_{j=0}^{M-1} \mu_{ij} = h\rho_i^n \right\}$
- $I(\rho^n) = \{i \in I \mid \rho_i^n > 0\}$  .

**Remarque B.2.** Dans le schéma (B.1), la minimisation des termes  $(\mu_{ij})_{j \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$  est indépendante de la minimisation des termes  $(\mu_{i'j})_{j \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$ , on peut donc résoudre chacun des problèmes suivant séparément :

$\forall i \in I(\rho^n)$

$$(\mu_{ij})_{j \in \llbracket 1, M-1 \rrbracket} \in \operatorname{argmin}_{\mu_{ij} \geq 0 \mid \sum_{j=0}^{M-1} \mu_{ij} = h\rho_i^n} \left\{ \sum_{j=0}^{M-1} g_j \mu_{ij} + \frac{1}{2\tau} \left( \mu_{ij} \|x_i - x_j\|^2 + \frac{h^2}{2} \frac{\mu_{ij}^2}{h\rho_i} \right) \right\} \quad (\text{B.2})$$

c'est-à-dire qu'on peut calculer la destination de la masse se trouvant initialement dans la cellule  $C_i$  indépendamment du reste. En d'autres termes, la destination des particules se trouvant en  $C_i$  ne dépend pas des particules se trouvant dans une autre cellule. Par conséquent, l'étude du comportement du schéma peut se restreindre au cas où une seule cellule contient de la matière.

## Comportement du schéma dans un cas simple

Considérons le cas simple où  $g : x \rightarrow -x$ , l'équation flot-gradient associée correspond alors à l'équation d'advection à vitesse constante 1. De plus, considérons que la densité initiale soit supportée uniquement sur la première cellule  $C_0$  :

$$\rho^0 = (1/h, 0, \dots, 0),$$

le premier pas du schéma (B.1) mène au résultat suivant :

**Proposition B.3.** Soit  $j_0 = \lfloor \frac{\tau}{h} \rfloor$ , on suppose que le pas de temps  $\tau$  est tel que  $j_0 < M - 1$ , alors la densité  $\rho^1$  calculée par le schéma (B.1), avec comme densité initiale  $\rho^0$

---

donnée ci-dessus dépend de  $\tau$  de la manière suivante :

$$\rho^1 = \frac{1}{h} \left( j_0 + 1 - \frac{\tau}{h} \right) \mathbb{1}_{C_{j_0}} + \frac{1}{h} \left( \frac{\tau}{h} - j_0 \right) \mathbb{1}_{C_{j_0+1}}.$$

*Démonstration.* En utilisant l'égalité d'Euler-Lagrange on obtient que :

$$\mu_{0j} = \mathbb{P}_{[0,1]} \left( 2 \frac{\tau j}{h} - j^2 - \lambda \right)$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  de sorte que  $\sum_{j=0}^{M-1} \mu_{0j} = 1$  et cette condition est obtenue lorsque  $\lambda = \frac{\tau}{h} - j_0 + j_0^2 - \frac{2\tau j_0}{h}$ . On obtient alors le résultat escompté.  $\square$

**Remarque B.4.** *On peut généraliser ce résultat pour obtenir le même que la proposition (3.6) page 84.*

Les figures B.1 représente la densité (en bleu) et la fonction  $-g$  (en rouge) dans le cas où les paramètres sont les suivants :

$$\begin{cases} \rho = 0.2 \mathbb{1}_{[0,1]}, \\ g = -(x - 0.5)^2, \\ h = 1/200, \\ dt = 0.01. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

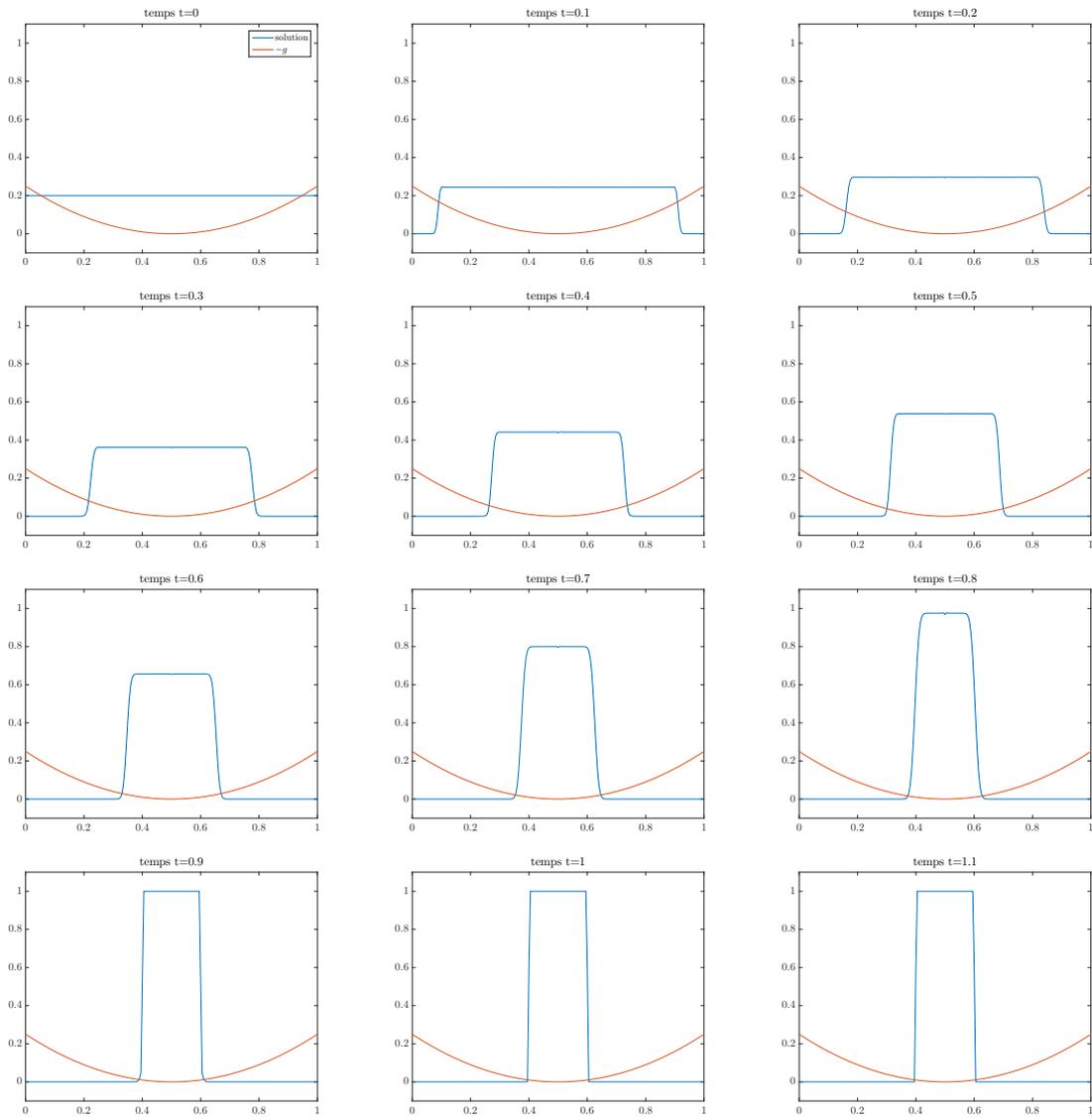


FIGURE B.1 – Evolution de la densité (en bleu) au cours du temps, en rouge, la fonction  $-g$ .

# Bibliographie

---

- [1] L. AMBROSIO, « Minimizing movements », *in* : *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.*(5) 19 (1995), p. 191–246 (cf. p. 71, 74).
- [2] L. AMBROSIO, N. GIGLI et G. SAVARÉ, *Gradient flows : in metric spaces and in the space of probability measures*, Springer Science & Business Media, 2008 (cf. p. 16, 18, 37, 59, 73).
- [3] L. AMBROSIO, N. GIGLI et G. SAVARÉ, *Gradient flows : in metric spaces and in the space of probability measures*, Springer Science & Business Media, 2006 (cf. p. 177).
- [4] P. BALLARD, « The Dynamics of Discrete Mechanical Systems with Perfect Unilateral Constraints », *in* : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 154.3 (2000), p. 199–274 (cf. p. 6–8).
- [5] J.-D. BENAMOU et Y. BRENIER, « A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem », *in* : *Numerische Mathematik* 84.3 (2000), p. 375–393 (cf. p. 78, 97).
- [6] J.-D. BENAMOU, F. COLLINO et J.-M. MIREBEAU, « Monotone and Consistent discretization of the Monge-Ampere operator », *in* : *arXiv preprint arXiv :1409.6694* (2014) (cf. p. 78).
- [7] J.-D. BENAMOU, B.D. FROESE et A.M. OBERMAN, « Numerical solution of the Optimal Transportation problem using the Monge–Ampère equation », *in* : *Journal of Computational Physics* 260 (2014), p. 107–126 (cf. p. 78).
- [8] J.-D. BENAMOU, B.D. FROESE et A.M. OBERMAN, « Two numerical methods for the elliptic Monge-Ampere equation », *in* : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 44.4 (2010), p. 737–758 (cf. p. 78).
- [9] J.-D. BENAMOU, G. CARLIER, M. CUTURI, L. NENNA et G. PEYRÉ, « Iterative Bregman projections for regularized transportation problems », *in* : *SIAM Journal on Scientific Computing* 37.2 (2015), A1111–A1138 (cf. p. 78).
- [10] F. BERNICOT et A. LEFEBVRE-LEPOT, « Existence results for non smooth second-order differential inclusions, convergence result for a numerical scheme and application to the modeling of inelastic collisions », *in* : *Confluentes Mathematici* 2.04 (2010), p. 445–471 (cf. p. 54).

- [11] F. BERTHELIN, « Existence and weak stability for a pressureless model with unilateral constraint », *in* : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 12.02 (2002), p. 249–272 (cf. p. 5, 9, 10, 21, 37, 42, 55).
- [12] F. BERTHELIN, « Theoretical study of a multi-dimensional pressureless model with unilateral constraint », *in* : (2016) (cf. p. 10).
- [13] F. BERTHELIN, P. DEGOND, M. DELITALA et M. RASCLE, « A model for the formation and evolution of traffic jams », *in* : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 187.2 (2008), p. 185–220 (cf. p. 6, 10).
- [14] F. BOUCHUT, « On zero pressure gas dynamics », *in* : *Advances in kinetic theory and computing* 22 (1994), p. 171–190 (cf. p. 5).
- [15] F. BOUCHUT et F. JAMES, « Duality solutions for pressureless gases, monotone scalar conservation laws, and uniqueness », *in* : *Communications in partial differential equations* 24.11-12 (1999), p. 2173–2189 (cf. p. 5).
- [16] F. BOUCHUT, Y. BRENIER, J. CORTES et J.-F. RIPOLL, « A Hierarchy of Models for Two-Phase Flows », *en*, *in* : *Journal of Nonlinear Science* 10.6 (déc. 2000), p. 639–660 (cf. p. 5, 10).
- [17] L. BOUDIN, « A solution with bounded expansion rate to the model of viscous pressureless gases », *in* : *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 32.1 (2000), p. 172–193 (cf. p. 5).
- [18] L. BOUDIN et J. MATHIAUD, « A numerical scheme for the one-dimensional pressureless gases system », *in* : *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 28.6 (2012), p. 1729–1746 (cf. p. 5).
- [19] Y. BRENIER, « Minimal geodesics on groups of volume preserving maps and generalized solutions of the Euler equations », *in* : *Communications on pure and applied mathematics* 52.4 (1999), p. 411–452 (cf. p. 5).
- [20] Y. BRENIER et E. GRENIER, « Sticky particles and scalar conservation laws », *in* : *SIAM journal on numerical analysis* 35.6 (1998), p. 2317–2328 (cf. p. 5).
- [21] S.C. BRENNER et M. NEILAN, « Finite element approximations of the three dimensional Monge-Ampère equation », *in* : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 46.5 (2012), p. 979–1001 (cf. p. 78).
- [22] D. BRESCH, C.PERRIN et E. ZATORSKA, « Singular limit of a Navier–Stokes system leading to a free/congested zones two-phase model », *in* : *Comptes Rendus Mathématique* 352.9 (2014), p. 685–690 (cf. p. 10).
- [23] J.A. CARRILLO, M.P. GUALDANI et G. TOSCANI, « Finite speed of propagation in porous media by mass transportation methods », *in* : *Comptes Rendus Mathématique* 338.10 (2004), p. 815–818 (cf. p. 73).

- 
- [24] J.A. CARRILLO, M. DI FRANCESCO, A. FIGALLI, T. LAURENT et D. SLEPČEV, « Confinement in nonlocal interaction equations », *in : Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications* 75.2 (2012), p. 550–558 (cf. p. 73).
- [25] F. CAVALLETTI, M. SEDJRO et M. WESTDICKENBERG, « A Simple Proof of Global Existence for the 1D Pressureless Gas Dynamics Equations », *in : SIAM Journal on Mathematical Analysis* 47.1 (2015), p. 66–79 (cf. p. 5).
- [26] F. CAVALLETTI, M. SEDJRO et M. WESTDICKENBERG, « A time discretization for the pressureless gas dynamics equations », *in : arXiv preprint arXiv :1411.1012* (2014) (cf. p. 5, 54).
- [27] E. DE GIORGI, « New problems on minimizing movements », *in : Boundary value problems for partial differential equations and applications* 29 (1993), p. 81–98 (cf. p. 71, 74).
- [28] E.J. DEAN et R. GLOWINSKI, « Numerical methods for fully nonlinear elliptic equations of the Monge–Ampère type », *in : Computer methods in applied mechanics and engineering* 195.13 (2006), p. 1344–1386 (cf. p. 78).
- [29] E.J. DEAN et R. GLOWINSKI, « On the Numerical Solution of the Elliptic Monge—Ampère Equation in Dimension Two : A Least-Squares Approach », *in : Partial differential equations*, Springer, 2008, p. 43–63 (cf. p. 78).
- [30] P. DEGOND, J.HUA et L. NAVORET, « Numerical simulations of the Euler system with congestion constraint », *in : Journal of Computational Physics* 230.22 (2011), p. 8057–8088 (cf. p. 10).
- [31] W. E, Y.G. RYKOV et Ya.G. SINAI, « Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics », *in : Communications in mathematical physics* 177.2 (1996), p. 349–380 (cf. p. 5).
- [32] S. FAURE et B. MAURY, « Crowd motion from the granular standpoint », *in : Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 25.3 (2015), p. 463–493 (cf. p. 158).
- [33] X. FENG, R. GLOWINSKI et M. NEILAN, « Recent developments in numerical methods for fully nonlinear second order partial differential equations », *in : SIAM Review* 55.2 (2013), p. 205–267 (cf. p. 78).
- [34] X. FENG et M. NEILAN, « Galerkin Methods for the Fully Nonlinear Monge–Ampère Equation », *in : arXiv preprint arXiv :0712.1240* (2007) (cf. p. 78).
- [35] X. FENG et M. NEILAN, « Mixed finite element methods for the fully nonlinear Monge–Ampère equation based on the vanishing moment method », *in : SIAM Journal on Numerical Analysis* 47.2 (2009), p. 1226–1250 (cf. p. 78).

- [36] X. FENG et M. NEILAN, « Vanishing moment method and moment solutions for fully nonlinear second order partial differential equations », *in* : *Journal of Scientific Computing* 38.1 (2009), p. 74–98 (cf. p. 78).
- [37] R. GLOWINSKI, « An augmented Lagrangian approach to the numerical solution of the Dirichlet problem for the elliptic Monge-Ampere equation in two dimensions », *in* : *Electronic Transactions on Numerical Analysis* 22 (2006), p. 71–96 (cf. p. 78).
- [38] R. GLOWINSKI, E.J. DEAN, G. GUIDOBONI, L.H. JUAREZ et T.-W. PAN, « Applications of operator-splitting methods to the direct numerical simulation of particulate and free-surface flows and to the numerical solution of the two-dimensional elliptic Monge-Ampere equation », *in* : *Japan journal of industrial and applied mathematics* 25.1 (2008), p. 1–63 (cf. p. 78).
- [39] E. GRENIER, « Existence globale pour le système des gaz sans pression », *in* : *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique* 321.2 (1995), p. 171–174 (cf. p. 5).
- [40] B. GUSTAFSSON, « Lectures on balayage », *in* : *Univ. Joensuu Dept. Rep. Ser.* (2004) (cf. p. 134, 135).
- [41] F. HUANG et Z. WANG, « Well Posedness for Pressureless Flow », *in* : *Communications in mathematical physics* 222 (2001), p. 117–146 (cf. p. 5).
- [42] R. JORDAN, D. KINDERLEHRER et F. OTTO, « The variational formulation of the Fokker–Planck equation », *in* : *SIAM journal on mathematical analysis* 29.1 (1998), p. 1–17 (cf. p. 71, 73).
- [43] R. KIMMEL et J.A. SETHIAN, « Fast marching methods for computing distance maps and shortest paths », *in* : *CPAM Report* 669 (1996) (cf. p. 139).
- [44] A. LEFEBVRE, « Numerical simulation of gluey particles », *in* : *M2AN* 43 (2009), p. 53–80 (cf. p. 158).
- [45] P.-L. LIONS et N. MASMOUDI, « On a free boundary barotropic model », *in* : *Annales de l'IHP Analyse non linéaire*, t. 16, 3, 1999, p. 373–410 (cf. p. 10).
- [46] G. LOEPER et F. RAPETTI, « Numerical solution of the Monge–Ampère equation by a Newton's algorithm », *in* : *Comptes Rendus Mathématique* 340.4 (2005), p. 319–324 (cf. p. 78).
- [47] B. MAURY, « A time-stepping scheme for inelastic collisions », *in* : *Numerische Mathematik* 102.4 (2006), p. 649–679 (cf. p. 6, 7, 54, 158).
- [48] B. MAURY et A. PREUX, « Pressureless Euler equations with maximal density constraint : a time-splitting scheme », *in* : (2015) (cf. p. 158).

- 
- [49] B. MAURY, A. ROUDNEFF-CHUPIN et F. SANTAMBROGIO, « A macroscopic crowd motion model of gradient flow type », *in : Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 20.10 (2010), p. 1787–1821 (cf. p. 6, 8, 16, 17, 74, 75, 134).
- [50] B. MAURY et J. VENEL, « A discrete contact model for crowd motion », *in : ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 45 (2011), p. 145–168 (cf. p. 9).
- [51] B. MAURY, A. ROUDNEFF-CHUPIN, F. SANTAMBROGIO et J. VENEL, « Handling congestion in crowd motion modeling », *in : arXiv preprint arXiv :1101.4102* (2011) (cf. p. 6, 8, 9, 134, 139).
- [52] G. MONGE, *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, De l’Imprimerie Royale, 1781 (cf. p. 177).
- [53] J.J. MOREAU, « Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space », *in : J. Differential Equations* 26 (1977), p. 346–374 (cf. p. 9).
- [54] L. NATILE et G. SAVARÉ, « A Wasserstein approach to the one-dimensional sticky particle system », *in : SIAM Journal on Mathematical Analysis* 41.4 (2009), p. 1340–1365 (cf. p. 5).
- [55] T. NGUYEN et A. TUDORASCU, « Pressureless Euler/Euler-Poisson systems via adhesion dynamics and scalar conservation laws », *in : SIAM Journal on Mathematical Analysis* 40.2 (2008), p. 754–775 (cf. p. 5).
- [56] A.M. OBERMAN, « Wide stencil finite difference schemes for the elliptic Monge-Ampere equation and functions of the eigenvalues of the Hessian », *in : Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 10.1 (2008), p. 221–238 (cf. p. 78).
- [57] VI OLIKER et L.D. PRUSSNER, « On the numerical solution of the equation  $(\partial^2 z / \partial x^2)(\partial^2 z / \partial y^2) - (\partial^2 z / \partial x \partial y)^2 = f$  and its discretizations, I », *in : Numerische Mathematik* 54.3 (1989), p. 271–293 (cf. p. 78).
- [58] F. OTTO, « The geometry of dissipative evolution equations : the porous medium equation », *in : (2001)* (cf. p. 73).
- [59] N. PAPADAKIS, G. PEYRÉ et E. OUDET, « Optimal transport with proximal splitting », *in : SIAM Journal on Imaging Sciences* 7.1 (2014), p. 212–238 (cf. p. 78).
- [60] C. PERRIN et E. ZATORSKA, « Free/Congested Two-Phase Model from Weak Solutions to Multi-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equations », *in : arXiv preprint arXiv :1410.0498* (2014) (cf. p. 10).
- [61] G. PEYRÉ, « Entropic approximation of Wasserstein gradient flows », *in : SIAM Journal on Imaging Sciences* 8.4 (2015), p. 2323–2351 (cf. p. 78).

- [62] A. ROUDNEFF, « Modelisation macroscopique de mouvements de foule », thèse de doct., Université Paris Sud-Paris XI, 2011 (cf. p. 18, 134).
- [63] F. SANTAMBROGIO, « Optimal transport for applied mathematicians », *in* : *Progress in Nonlinear Differential Equations and their applications* 87 (2015) (cf. p. 16, 29, 44, 73, 75, 177).
- [64] J.A. SETHIAN, *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*, t. 3, Cambridge university press, 1999 (cf. p. 139).
- [65] A.N. SOBOLEVSKII, « The small viscosity method for a one-dimensional system of equations of gas dynamic type without pressure », *in* : *Dokl. Akad. Nauk* 356 (1997), p. 310–312 (cf. p. 5).
- [66] C. VILLANI, *Optimal transport : old and new*, t. 338, Springer Science & Business Media, 2008 (cf. p. 177).
- [67] C. VILLANI, *Topics in optimal transportation*, 58, American Mathematical Soc., 2003 (cf. p. 16, 29, 73, 177, 180, 182).
- [68] G. WOLANSKY, « Dynamics of a system of sticky particles of finite size on the line », *in* : *Nonlinearity* 20 (2007), p. 2175–2189 (cf. p. 5).
- [69] Ya. B. ZELDOVICH, « Gravitational instability : An approximate theory for large density perturbations. », *in* : *Astronomy and astrophysics* 5 (1970), p. 84–89 (cf. p. 5).

---

## Résumé

---

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux équations des gaz sans pression avec contrainte de congestion qui soulèvent encore de nombreuses questions.

La stratégie que nous proposons repose sur des précédents travaux sur le mouvement de foule dans le cadre de l'espace de Wasserstein, et sur un modèle granulaire avec des collisions inélastiques. En dimension 1, les solutions calculées par le schéma coïncident avec les solutions connues pour ce système. En dimension 2, les solutions calculées respectent les propriétés connues des solutions des équations de gaz sans pression avec contrainte de congestion. De plus, on retrouve des similarités entre ces solutions et celles du modèle granulaire microscopique dans des cas où elles sont comparables.

Par la suite, la discrétisation en espace pose des problèmes et a nécessité l'élaboration d'un nouveau schéma de discrétisation du coût Wasserstein quadratique. Cette méthode que nous avons baptisée *méthode du balayage transverse* consiste à calculer le coût en utilisant les flux de masses provenant d'une certaine cellule et traversant les hyperplans définis par les interfaces entre les cellules.

**Mots clés :** Gaz sans pression, contrainte de congestion, Transport optimal.

---

## Abstract

---

In this thesis, we consider the pressureless Euler equations with a congestion constraint. This system still raises many open questions and aside from its one-dimensional version, very little is known.

The strategy that we propose relies on previous works of crowd motion models with congestion in the framework of the Wasserstein space, and on a microscopic granular model with inelastic collisions. It consists of the study of a time-splitting scheme. In the one-dimensional case, solutions computed by the algorithm match with the ones that we know for these equations. In the two-dimensional case, computed solutions respect some properties that can be expected to be verified by the solutions to these equations. In addition, we notice some similarities between solutions computed by the scheme and the ones of the granular model with inelastic collisions.

Later, this scheme is discretized with respect to the space variable in the purpose of numerical computations of solutions. The resulting algorithm uses a new method to discretize the Wasserstein cost. This method, called *Transverse Sweeping Method* consists in expressing the cost using the mass flow from any cell and crossing hyperplanes defined by interfaces between cells.

**Keywords :** Pressureless gas, unilateral constraint, optimal transportation