HAL
open science

Études d'effets relativistes au Centre Galactique à l'aide de simulations d'observations d'orbites d'étoiles par l'instrument GRAVITY

Marion Grould

▶ **To cite this version:**

Marion Grould. Études d'effets relativistes au Centre Galactique à l'aide de simulations d'observations d'orbites d'étoiles par l'instrument GRAVITY. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris sciences et lettres, 2016. Français. NNT : 2016PSLEO013 . tel-01514942

HAL Id: tel-01514942

https://theses.hal.science/tel-01514942v1

Submitted on 5 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres
PSL Research University

Préparée à l'Observatoire de Paris

Études d'effets relativistes au Centre Galactique à l'aide de simulations d'observations d'orbites d'étoiles par l'instrument GRAVITY

Ecole doctorale n°127

ÉCOLE DOCTORALE ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D'ÎLE-DE-FRANCE

Spécialité ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE

COMPOSITION DU JURY :

M. BLANCHET Luc
Institut d'Astrophysique de Paris, Rapporteur

M. WILL Clifford M.
Department of Physics University of Florida, Rapporteur

M. GILLESSEN Stefan
Max Planck Institute für Extraterrestrische Physik, Examinateur

M. LASKAR Jacques
Institut d'Astrophysique de Paris, Examinateur

M. GOURGOULHON Éric
Laboratoire Univers et Théories, Observatoire de Paris, Examinateur

M. MOURARD Denis
Laboratoire Lagrange, Observatoire de la Côte d'Azur, Examinateur

Soutenue par Marion **GROULD**
le 14 octobre 2016

Dirigée par **Guy PERRIN**
et **Thibaut PAUMARD**

l'Observatoire de Paris

PSL RESEARCH UNIVERSITY PARIS

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse Guy Perrin et Thibaut Paumard pour m'avoir acceptée en stage puis en thèse. Je les remercie en particulier pour avoir eu confiance en moi et m'avoir permis de faire mes premiers pas dans la recherche en astrophysique. Grâce à leur expertise scientifique et technique, j'ai pu m'enrichir tout au long de ces trois années de thèse ce qui m'a permis d'entreprendre divers travaux de recherche.

Je souhaite également remercier Frédéric Vincent avec qui j'ai été amenée à travailler durant ma dernière année de thèse. J'ai beaucoup apprécié nos divers échanges et souhaite à présent le remercier à la fois pour le temps qu'il m'a accordé, pour sa patience et pour son écoute toujours attentive quel que soit le sujet abordé.

Je remercie naturellement l'ensemble des membres de mon jury de thèse, Clifford M. Will, Luc Blanchet, Stefan Gillessen, Éric Gourgoulhon, Denis Mourard et Jacques Laskar pour être venus assister à ma soutenance et avoir lu mon manuscrit. Je les remercie également et surtout d'avoir validé la présente thèse !

Je tiens à remercier l'École Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Île-de-France sans qui cette thèse n'aurait pas pu avoir lieu.

Suite à une collaboration menée au sein du SYRTE, je souhaite remercier Christophe Le Poncin-Lafitte et Aurélien Hees avec qui j'ai pu élargir mon domaine de compétence.

Au cours de cette thèse, j'ai également été amenée à enseigner aux côtés de plusieurs personnes et je souhaiterais en particulier remercier Jean-Marie Malherbe, Christian Balança et Régis Le Cocguen pour avoir su m'aiguiller et me conseiller en matière d'enseignement.

Je remercie également les ITA de l'Observatoire de Paris pour m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions. Je remercie en particulier Sudagar Vassin, Aurélia Marchand, Jacqueline Plancy, Géraldine Gaillant et Christine Dupont pour le temps qu'ils ont pu me consacrer au cours de ces trois années.

Je remercie grandement l'ensemble des membres du bâtiment 5 de l'Observatoire de Paris avec qui j'ai passé la majeure partie de ma thèse. J'ai beaucoup apprécié l'ensemble des moments passés avec chacun d'eux. Je tiens en particulier à remercier Lucas Grosset, Guillaume Schworer, Anna Ciurlo et Miguel Montargès qui ont été souvent à l'écoute et qui m'ont aidé à progresser.

Je tiens également à remercier l'ensemble des autres personnes que j'ai pu rencontrer au cours de ma thèse. Je pense notamment à Claire Somé et Ingrid Jean-Baptiste avec qui j'ai pu beaucoup échanger sur des sujets à la fois professionnels et personnels.

Je remercie mes amis de longue date, Caroline, Alexis, la famille Bib's et Olivier pour tous les moments de joie que nous avons partagés.

Je remercie chaleureusement mes parents et ma soeur pour avoir toujours accepté les choix que j'ai pu entreprendre jusqu'ici. Je les remercie pour m'avoir encouragée dans cette voie et d'avoir eu confiance en moi.

Enfin, je remercie Arthur pour son grand cœur et sa grande patience.

Au petit oiseau...

Résumé

Le Centre Galactique abrite en son cœur un objet compact de plusieurs millions de masses solaires. L'hypothèse faite à l'heure actuelle est que cet objet serait un trou noir supermassif décrit par la relativité générale. L'instrument de seconde génération du *Very Large Telescope Interferometer*, *GRAVITY*, va permettre d'apporter des réponses quant à la réelle nature de cet objet. Grâce à sa précision astrométrique de 10 microsecondes d'angle, il va pouvoir sonder l'espace-temps en champ fort via l'observation des étoiles et du gaz situés à proximité de l'objet central.

Au cours de ma thèse j'ai mis au point un modèle permettant de simuler les observations d'orbites d'étoiles de *GRAVITY*, l'objectif étant d'extraire à l'aide de celui-ci les paramètres fondamentaux du candidat trou noir central ainsi que les effets relativistes. Pour cela, j'ai utilisé le code de tracé de rayons `GYOTO` développé à l'Observatoire de Paris. Ce code permet de calculer des trajectoires d'étoiles et de photons obtenues en présence d'un objet compact. Il est alors possible de simuler les positions apparentes d'étoiles en orbite autour du Centre Galactique en calculant leur image relativiste.

J'ai d'abord validé le calcul des trajectoires des photons effectué dans `GYOTO`. Grâce à des tests effectués en déflexion faible et forte, j'ai pu démontrer que `GYOTO` était hautement satisfaisant pour simuler les observations de *GRAVITY*. En effet, j'ai montré que l'erreur sur le calcul des géodésiques de genre lumière était inférieure à environ 10^{-2} microseconde d'angle, et cela même pour de grandes distances d'intégration.

Je me suis ensuite intéressée à l'étude d'une étoile appelée S2 qui a contribué à fortement contraindre la masse de l'objet central. Sa proximité au Centre Galactique fait d'elle une cible idéale pour sonder l'espace-temps en champ fort. En particulier, j'ai estimé quels étaient les temps minimaux d'observation nécessaires pour détecter des effets relativistes à l'aide de mesures astrométriques et spectroscopiques obtenues sur l'étoile S2. Pour cela, j'ai mis en place plusieurs modèles d'orbites prenant en compte chacun un certain nombre d'effets relativistes. Le modèle le plus précis est obtenu en relativité générale complète avec le code `GYOTO`. Néanmoins, puisque l'étoile S2 est suffisamment éloignée de l'objet compact, ce modèle néglige certains effets de lentilles gravitationnelles tels que les images secondaires et l'amplification des images primaires. Par ailleurs, je me suis également intéressée à la contrainte du moment cinétique du candidat trou noir central avec cette étoile. En particulier, j'ai déterminé, grâce au modèle le plus précis mis en place ici, qu'il était possible de contraindre la norme et la direction du moment cinétique avec une incertitude d'environ 0,1 et 20 degrés, respectivement, et cela en considérant des observations obtenues sur trois périodes de S2 et des précisions de 10 microsecondes d'angle et 10 km/s.

En vue de la possible détection d'étoiles plus proches du Centre Galactique par *GRAVITY*, j'ai développé un modèle prenant en compte les effets de lentilles négligés dans le modèle précédent. Néanmoins, afin de minimiser le temps de calcul demandé par celui-ci, j'ai déterminé une zone de l'espace dans laquelle il est tout de même possible d'utiliser ce dernier.

Enfin, j'ai étudié l'influence de corps du Système Solaire sur les mesures astrométriques de *GRAVITY*, c'est-à-dire sur la séparation angulaire entre deux sources du Centre Galactique. Cette étude a montré que ces mesures différentielles n'étaient déviées que de quelques microsecondes d'angle par la perturbation gravitationnelle engendrée par le Soleil. Cependant, celles-ci sont modifiées de plusieurs centaines de microsecondes d'angle par l'effet d'aberration induit par le mouvement de la Terre par rapport aux sources du Centre Galactique. Il sera donc nécessaire de prendre en compte cet effet lors de l'interprétation des données obtenues par *GRAVITY*.

Abstract

Decades of studies have demonstrated the presence of a compact object of several million solar masses at the center of the Galaxy. Nowadays, the assumption is that this compact object is probably a supermassive black hole described by general relativity. The second generation instrument at the Very Large Telescope Interferometer, GRAVITY, is expected to better constrain the nature of this central object. By using its astrometric accuracy of about 10 microarcseconds, it will probe spacetime in strong gravitational fields by observing stars and gas located near the compact object.

During my PhD I have developed a stellar-orbit model in order to interpret the future GRAVITY observations. By using this model it will be possible to extract the central black hole candidate parameters and relativistic effects. To implement the model, I used the ray-tracing code `GYOTO` developed at Observatoire de Paris. This code allows computing star and photon trajectories obtained in the vicinity of a compact object. It is thus possible to simulate apparent positions of stars orbiting the Galactic Center by computing relativistic images.

My work started by validating the photon trajectories computed in `GYOTO`. By doing tests in both weak- and strong-deflection limits, I have shown that the `GYOTO` code is highly qualified to simulate GRAVITY observations. Indeed, the error made on the photon trajectories is inferior to 10^{-2} microarcsecond, even when integrating over large distances.

Then, I was interested in studying a star called S2 that contributed to importantly constrain the mass of the central object. This star is the closest star to the Galactic Center and has an orbital period of about 16 years. Nowadays, we do not know whether closer-in stars will be discovered by GRAVITY. It is thus important to extract as much information as possible from this star. In particular, I have estimated the minimal observation times needed to detect relativistic effects by using astrometric and spectroscopic measurements of S2. To do so, I have developed different stellar-orbit models taking into account a certain number of relativistic effects. The more accurate model is obtained by using the ray-tracing code `GYOTO` and considering all relativistic effects. However, as the S2 star is sufficiently far from the compact object, this model neglects certain gravitational lensing effects such as the secondary images and the primary images amplification. Besides, I was also interested in the possibility of constraining the angular momentum of the central black hole candidate with the S2 star. In particular, I have shown that with a model which does not use ray-tracing, the norm and the direction of the angular momentum can be constrained with an uncertainty of about 0.1 and 20 degrees, respectively, by using observations obtained during three periods of S2 and with accuracies reaching 10 microarseconds and 10 km/s.

Since closer-in stars could be detected by GRAVITY, I have developed a more accurate stellar-orbit model taking into account the lensing effects neglected in the previous model. However, in order to minimize the computing time required by this model, I determined a volume in which it is possible to neglect both the secondary images and the primary images amplification.

Finally, I studied the impact of different components of the Solar System on astrometric positions measured by GRAVITY. This study has shown that those measurements are deviated by an amount of a few microarcseconds by the gravitational perturbation generated by the Sun. However, those apparent positions are shifted by several hundred microarcseconds by the aberration effect due to the movement of the Earth with respect to the Galactic Center. It is thus necessary to take into account this effect in future interpretations of GRAVITY observations.

Table des matières

I Contexte scientifique de la thèse **17**

1 Notions de relativité générale **21**
1.1 L'équation d'Einstein 21
1.2 Les trous noirs en relativité générale 22
1.2.1 Métrique de Schwarzschild 22
1.2.2 Métrique de Kerr 24
1.2.3 Théorème d'absence de chevelure 26
1.3 Effets observationnels et tests de la relativité générale 27
1.3.1 Trajectoire des corps 27
1.3.2 Tests en champ faible 28
1.3.3 Tests en champ fort 32
1.4 Théories alternatives aux trous noirs 37
1.4.1 Théories tenseur-scalaire 38
1.4.2 Théories de gravité quadratique 40

2 Sagittarius A*, un trou noir au centre de notre galaxie ? **43**
2.1 Les 10 parsecs centraux 43
2.1.1 Principales structures du complexe Sagittarius A 44
2.1.2 Population stellaire de Sagittarius A : l'amas nucléaire 44
2.2 Zoom sur la source Sagittarius A* 47
2.2.1 Découverte d'un objet compact au Centre Galactique 47
2.2.2 Spectre d'émission et disque d'accrétion de SgrA* 48
2.3 Tests d'aujourd'hui et de demain 51
2.3.1 Un trou noir au centre de notre galaxie 51
2.3.2 Objets alternatifs aux trous noirs de Kerr 54

3 L'instrument *GRAVITY* **65**
3.1 Les bases de l'interférométrie à deux télescopes 65
3.1.1 Fonctions de cohérence spatiale et de visibilité 65
3.1.2 Une question de résolution angulaire et de précision astrométrique . 68
3.2 Présentation de l'instrument 70
3.2.1 Les dessous de *GRAVITY* 71
3.2.2 *GRAVITY* en quelques chiffres 75

3.2.3 Objectifs scientifiques de *GRAVITY* 75

II Première validation du code de tracé de rayons GYOTO 77

4 Présentation du code GYOTO en métrique de Kerr 81
4.1 Introduction du code GYOTO 81
4.2 Notions de tracé de rayons et de transfert radiatif 82
4.3 Intégration des géodésiques 83
4.3.1 Equations des géodésiques 84
4.3.2 Méthodes d'intégration 85
4.4 Quelques notions utiles 92
4.4.1 La scène 92
4.4.2 Définition de quelques fonctions et quantités du code GYOTO 96

5 Performance du calcul des géodésiques de genre lumière dans GYOTO 101
5.1 Test en déflexion faible 102
5.1.1 Définition de l'anneau d'Einstein 102
5.1.2 Comparaisons des intégrateurs GYOTO 109
5.1.3 Méthodes numériques 115
5.1.4 Résultats 119
5.2 Test en déflexion forte 122
5.2.1 Méthode 122
5.2.2 Résultats 123

III Observation d'effets relativistes sur l'orbite de l'étoile S2 avec *GRAVITY* 127

6 Simulations d'observations de l'étoile S2 131
6.1 Développement de plusieurs modèles d'orbites 132
6.1.1 Modèles képlériens 132
6.1.2 Modèles relativistes 141
6.1.3 Résumé 146
6.2 Amplitudes des différents effets affectant les observations de l'étoile S2 . . 148
6.2.1 Effets affectant l'astrométrie 149
6.2.2 Effets affectant la spectroscopie 154
6.3 Comparaison des modèles A à F au modèle G 157
6.4 Conclusion du chapitre 159

7 Contraindre des effets relativistes avec l'étoile S2 et *GRAVITY* 161
7.1 Quelques rappels d'études menées au Centre Galactique 161
7.2 Vers des contraintes d'effets relativistes 163
7.2.1 Méthodes 163

7.2.2 Résultats 173
7.3 Contrainte du moment cinétique du candidat trou noir central avec S2 . . . 179
7.3.1 Impact du moment cinétique sur l'astrométrie et la spectroscopie . 180
7.3.2 Méthode et résultats 186
7.4 Conclusions du chapitre 193

IV Vers une interprétation complète des données *GRAVITY* 195

8 Modèle d'orbites relativistes en relativité générale complète 199
8.1 Introduction au nouveau modèle d'orbites 199
8.2 Zone 1 : prise en compte des images primaire et secondaire 201
8.2.1 Calcul de l'image primaire 202
8.2.2 Calcul de l'image secondaire 207
8.2.3 Résolutions des images primaire et secondaire 210
8.2.4 Limites de la Zone 1 213
8.3 Zone 2 : la zone dangereuse 214
8.4 Zone 3 : le modèle G 215

9 Application du nouveau modèle d'orbites : études des effets de lentilles gravitationnelles au Centre Galactique 221
9.1 Observation d'une bosse sur l'orbite apparente d'étoiles fortement inclinées 222
9.1.1 Orbites circulaires 222
9.1.2 Orbites elliptiques 227
9.2 Effets des constituants du Centre Galactique sur l'orbite apparente d'étoiles proches 229
9.2.1 Prise en compte de la source Sgr A* 229
9.2.2 Prise en compte des images secondaires des étoiles S 231

10 Influence du Système Solaire sur les mesures astrométriques de *GRAVITY* 235
10.1 Cadre du problème 235
10.1.1 Cadre théorique 235
10.1.2 Cadre géométrique 237
10.2 Résultats préliminaires 240
10.2.1 Impact astrométrique lié à la déviation des photons 240
10.2.2 Impact astrométrique lié à l'effet d'aberration 242

Conclusions et perspectives 243

Première partie

Contexte scientifique de la thèse

Présentation de la partie

La première partie du manuscrit est consacrée à l'introduction succincte de diverses notions utilisées au cours de la thèse.

Dans le premier chapitre, nous introduirons la théorie de la relativité générale. Plus précisément, nous discuterons des trous noirs décrits par celle-ci ainsi que d'effets relativistes pouvant être observés. Nous verrons également que ces derniers ont permis et permettent encore aujourd'hui d'effectuer des tests de la relativité générale. Enfin, nous discuterons brièvement d'autres théories permettant, elles aussi, de décrire des trous noirs.

Dans le second chapitre, nous présenterons les 10 parsecs centraux du Centre Galactique. Nous introduirons les principales structures le composant ainsi que les amas stellaires les plus proches de l'objet central. Ensuite, nous nous focaliserons sur la description de la source située au centre de notre Galaxie, Sagittarius A*. Nous verrons que les observations tendent fortement vers l'hypothèse que celle-ci est constituée d'un objet compact entouré d'un disque d'accrétion. Nous verrons également tous les principaux tests actuels et futurs mis en place afin de démontrer l'existence d'un trou noir au Centre Galactique, mais aussi ceux permettant de tester la validité de la théorie de la relativité générale.

Enfin, dans le dernier chapitre de cette partie, nous nous intéresserons à l'instrument de seconde génération du *Very Large Telescope Interferometer* (*VLTI*) *GRAVITY*. Dans un premier temps, nous rappellerons quelques notions d'interférométrie, puis nous présenterons brièvement cet instrument. Nous verrons également quels sont ses principaux objectifs scientifiques.

Chapitre 1

Notions de relativité générale

Sommaire

1.1 L'équation d'Einstein 21
1.2 Les trous noirs en relativité générale 22
1.2.1 Métrique de Schwarzschild 22
1.2.2 Métrique de Kerr 24
1.2.3 Théorème d'absence de chevelure 26
1.3 Effets observationnels et tests de la relativité générale 27
1.3.1 Trajectoire des corps 27
1.3.2 Tests en champ faible 28
1.3.3 Tests en champ fort 32
1.4 Théories alternatives aux trous noirs 37
1.4.1 Théories tenseur-scalaire 38
1.4.2 Théories de gravité quadratique 40

1.1 L'équation d'Einstein

Tout commence en novembre 1915 lorsque Albert Einstein publie une nouvelle théorie appelée la relativité générale. Celle-ci propose de décrire la gravitation d'une tout autre façon que celle proposée par Newton. Tandis que ce dernier imagine la gravitation comme une force subie par un corps, Albert Einstein, lui, voit la gravitation comme une perturbation de la géométrie de l'espace-temps. C'est le contenu en énergie-impulsion qui impose la géométrie de cet espace à quatre dimensions. Sa géométrie est décrite par ce qu'on appelle le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ [1] qui est une solution de l'équation d'Einstein, cette dernière

1. Il s'agit d'un tenseur de rang 2. Précisons par ailleurs que les quantités utilisées dans ce manuscrit ayant pour indice (ou exposant) une ou plusieurs lettres latines sont obtenues dans un espace à trois dimensions, tandis que celles avec une ou plusieurs lettres grecques sont obtenues en espace à quatre dimensions.

découlant du principe de moindre action [2]. Dans le cas de la relativité générale, l'action totale est la somme de l'action dite d'Einstein-Hilbert, liée à la géométrie de l'espace-temps, et d'une action S_{mat} liée à la distribution de matière considérée dans l'espace-temps. Elle est donnée par :

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int R\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x + S_{\text{mat}} \tag{1.1}$$

où c est la vitesse de la lumière et G la constante de gravitation, R correspond au scalaire de courbure et est une combinaison de la métrique $g_{\mu\nu}$ et d'un tenseur appelé tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$. Ce dernier est une contraction du tenseur de Riemann aussi appelé tenseur de courbure, c'est lui qui contient toute l'information sur la courbure de l'espace-temps. En rendant extrémale l'action totale S, il est possible de remonter à l'équation d'Einstein. Une démonstration exhaustive est donnée dans Wald (1984). Celle-ci s'exprime, en l'absence de constante cosmologique, comme :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.2}$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion de la matière, c'est lui qui représente le contenu en matière de l'espace-temps et qui est directement relié à l'action S_{mat}.

Mathématiquement, le tenseur métrique permet de calculer la distance au carré entre deux points P et P' infiniment proches, notée $\mathrm{d}s^2$. Si on appelle **dP** le vecteur définissant la séparation entre les points P et P', et (x^α) un système de coordonnées au voisinage de P, on peut définir les coordonnées $\mathrm{d}x^\alpha$ comme étant les coordonnées du vecteur **dP**. La distance $\mathrm{d}s^2$ peut alors s'écrire :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta. \tag{1.3}$$

1.2 Les trous noirs en relativité générale

1.2.1 Métrique de Schwarzschild

La première solution exacte de l'équation d'Einstein fut établie en décembre 1915 par Karl Schwarzschild. Celle-ci correspond à la métrique de Schwarzschild et comporte une solution du vide où l'espace-temps est supposé statique (sans rotation) et à symétrie sphérique. En considérant les coordonnées de Schwarzschild $(x^\alpha) = (ct,r,\theta,\phi)$ et la signature $(-,+,+,+)$, la métrique est donnée par :

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right) \tag{1.4}$$

où R_S est le rayon de Schwarzschild défini comme :

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \tag{1.5}$$

2. Le principe de moindre action affirme qu'un corps se déplace d'un point A à un point B en rendant toujours extrémale l'action S.

avec M la masse du corps étudié (par exemple celle du trou noir). Ajoutons que d'après un théorème appelé théorème de Birkhoff, cette métrique comporte l'unique solution de l'équation d'Einstein à l'extérieur de tou corps à symétrie sphérique. La métrique de Schwarzschild est donc applicable aussi bien à l'extérieur des planètes que des trous noirs de moment cinétique nul.

Si l'on s'intéresse de plus près à cette métrique, on remarque que les composantes $g_{\alpha\beta}$ sont singulières en $r = 0$ et $r = R_S$. La seconde singularité est dépendante du système de coordonnées dans lequel on se place pour exprimer la métrique. En effet, si l'on utilise le système de coordonnées dit d'Eddington-Finkelstein entrantes (v,r,θ,ϕ), on remarque que la singularité $r = R_S$ n'existe plus, il s'agit d'une singularité de coordonnées. Pour effectuer ce changement de coordonnées il suffit de poser :

$$v = ct + R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right) + r \tag{1.6}$$

d'où la nouvelle métrique :

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)\mathrm{d}v^2 + 2\mathrm{d}v\mathrm{d}r + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right). \tag{1.7}$$

Par ailleurs, on constate que la singularité $r = 0$ est toujours présente dans ce nouveau système de coordonnées, il s'agit d'une singularité centrale. Cette singularité est toujours présente quel que soit le système de coordonnées choisi. Une façon de confirmer que $r = 0$ est une singularité centrale est de calculer le scalaire de Kretschmann $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ où $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\sigma}R^{\sigma}_{\beta\mu\nu}$ et $R^{\alpha\beta\mu\nu} = g^{\beta\gamma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}R^{\alpha}_{\gamma\rho\sigma}$. En effet, la valeur d'un champ scalaire en un point donné est indépendante du système de coordonnées. Dans le cas de la métrique de Schwarzschild, ce scalaire s'exprime comme :

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = 12\frac{R_S^2}{r^6} \tag{1.8}$$

et on remarque bien que celui-ci est singulier en $r = 0$.

L'hypersurface $r = R_S$ n'est pas sans intérêt puisqu'elle caractérise les trous noirs sans rotation en relativité générale. En effet, celle-ci représente l'hypersurface délimitant deux régions de l'espace-temps de Schwarzschild. En particulier, on démontre (en utilisant les coordonnées d'Eddington-Finkelstein, voir cours de Gourgoulhon 2014) que si la coordonnée r d'un photon vérifie $r > R_S$, alors celui-ci peut atteindre l'infini. En revanche, si elle vérifie $r < R_S$, le photon est piégé quelle que soit sa direction d'émission. Cette dernière région ne peut donc pas avoir d'influence sur le monde extérieur. L'hypersurface $r = R_S$ est appelée horizon des événements dans le cas de la métrique de Schwarzschild.

La présence d'une singularité n'est pas suffisante pour définir les trous noirs. C'est la présence de cet horizon des événements qui les définit. Une singularité sans horizon des événements est appelée singularité nue. D'après la conjecture de censure cosmique, l'effondrement gravitationnel d'étoiles réalistes conduit uniquement à un trou noir et non à une singularité nue. Cependant, cette conjecture n'a aujourd'hui pas encore été

rigoureusement démontrée.

Comme mentionné plus haut, la métrique de Schwarzschild est une solution applicable dans le cas où l'espace-temps est supposé statique et à symétrie sphérique. Or tout objet astrophysique réaliste est doté d'un moment cinétique non nul, ce qui n'est pas compatible avec la symétrie sphérique. Cette solution doit donc être généralisée.

1.2.2 Métrique de Kerr

Contrairement à la métrique de Schwarzschild, la métrique de Kerr est une solution de l'équation d'Einstein permettant de ne décrire que les trous noirs stationnaires[3] et axisymétriques en rotation. Il n'existe pas d'analogue au théorème de Birkhoff pour décrire l'espace-temps à l'extérieur de tout corps axisymétrique en rotation.

Cette solution a été découverte par le mathématicien Roy Kerr en 1963. Elle s'exprime, dans le système de coordonnées de *Boyer-Lindquist* $(x^\alpha) = (ct,r,\theta,\phi)$ avec la signature $(-,+,+,+)$, comme :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &-\left(1-\frac{R_S r}{\rho^2}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{2R_S a r\sin^2\theta}{\rho^2}c\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi + \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 \\ &+\rho^2\mathrm{d}\theta^2 + \left(r^2+a^2+\frac{R_S a^2 r\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \end{aligned} \tag{1.9}$$

où $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$ et $\Delta = r^2 - R_S r + a^2$. La constante a est directement reliée au moment cinétique J du trou noir par :

$$a = \frac{J}{cM} \tag{1.10}$$

avec M la masse du trou noir. En général, pour caractériser le moment cinétique du trou noir on utilise un paramètre sans dimension compris entre 0 (trou noir de Schwarzschild) et ± 1[4] (trou noir de Kerr extrême). Ce paramètre est défini par :

$$\bar{a} = \frac{2}{R_S}a = \frac{cJ}{GM^2}. \tag{1.11}$$

Dans la suite de ce manuscrit, nous appellerons ce paramètre moment cinétique adimensionné (*spin* en Anglais).

Dans cette métrique, les singularités apparaissent pour $\rho^2 = 0$, soit pour $r = 0$ et $\theta = \pi/2$, ainsi que pour $\Delta = 0$. La première singularité est similaire à une singularité centrale puisqu'elle est observée quel que soit le système de coordonnées dans lequel on se place. Cependant, dans le cas de la métrique de Kerr, celle-ci porte le nom de singularité

3. On pourra voir le cours de Gourgoulhon (2014) pour une définition de la stationnarité en relativité générale.

4. Cette valeur est imposée par la singularité $\Delta = 0$ intervenant dans l'équation (1.9).

annulaire car elle se présente sous la forme d'un anneau. Pour le voir il suffit d'exprimer la métrique de Kerr dans un autre système de coordonnées appelé coordonnées de *Kerr-Schild cartésiennes* et que nous notons ici $(\widetilde{x}^\alpha) = (c\widetilde{t},\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$. Celle-ci est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widetilde{s}^2 = &- c^2\mathrm{d}\widetilde{t}^2 + \mathrm{d}\widetilde{x}^2 + \mathrm{d}\widetilde{y}^2 + \mathrm{d}\widetilde{z}^2 \\ &+ \frac{R_S\widetilde{r}^3}{\widetilde{r}^4 + a^2\widetilde{z}^2}\left[\mathrm{d}\widetilde{t} + \frac{\widetilde{r}(\widetilde{x}\mathrm{d}\widetilde{x} + \widetilde{y}\mathrm{d}\widetilde{y})}{a^2 + \widetilde{r}^2} + \frac{a(\widetilde{y}\mathrm{d}\widetilde{x} - \widetilde{x}\mathrm{d}\widetilde{y})}{a^2 + \widetilde{r}^2} + \frac{\widetilde{z}}{\widetilde{r}}\mathrm{d}\widetilde{z}\right]^2 \end{aligned} \tag{1.12}$$

où

$$\widetilde{r} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 + \widetilde{z}^2 - a^2 + \sqrt{(\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 + \widetilde{z}^2 - a^2)^2 + 4a^2\widetilde{z}^2}\right)}. \tag{1.13}$$

Notons que si $a = 0$ nous retrouvons la formule classique en espace plat entre la coordonnée sphérique $\widetilde{r}$ et les coordonnées cartésiennes.

Les coordonnées de Kerr-Schild cartésiennes peuvent s'exprimer en fonction des coordonnées de *Kerr-Schild sphériques*, notées $(\widetilde{r},\widetilde{\theta},\widetilde{\phi})$, comme :

$$\begin{aligned} \widetilde{x} &= \sqrt{\widetilde{r}^2 + a^2}\sin\widetilde{\theta}\cos\left[\widetilde{\phi} - \arctan\left(\frac{a}{\widetilde{r}}\right)\right], \\ \widetilde{y} &= \sqrt{\widetilde{r}^2 + a^2}\sin\widetilde{\theta}\sin\left[\widetilde{\phi} - \arctan\left(\frac{a}{\widetilde{r}}\right)\right], \\ \widetilde{z} &= \widetilde{r}\cos\widetilde{\theta}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Les coordonnées de Kerr-Schild sphériques sont reliées aux coordonnées de Boyer-Lindquist par :

$$\begin{aligned} c\mathrm{d}\widetilde{t} &= c\mathrm{d}t + \frac{2r}{\Delta}\mathrm{d}r, \\ \mathrm{d}\widetilde{r} &= \mathrm{d}r, \\ \mathrm{d}\widetilde{\theta} &= \mathrm{d}\theta, \\ \mathrm{d}\widetilde{\phi} &= \mathrm{d}\phi + \frac{a}{\Delta}\mathrm{d}r \end{aligned} \tag{1.15}$$

et on constate que les coordonnées r et θ sont respectivement égales aux coordonnées de Kerr-Schild sphériques $\widetilde{r}$ et $\widetilde{\theta}$.

Étant donné que la singularité a lieu en $r = 0$ et $\theta = \pi/2$, on a $\widetilde{z} = 0$ et $\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 = a^2$, ce qui correspond bien à un anneau, dont le rayon est a. On comprend donc ici l'appellation donnée à cette singularité.

Dans la suite de ce manuscrit nous appellerons coordonnées de Kerr-Schild les coordonnées de Kerr-Schild cartésiennes. Afin d'alléger leur notation, nous les noterons $(x^i) = (x,y,z)$. En revanche, nous conserverons la notation $(x^i) = (r,\theta,\phi)$ pour désigner les coordonnées de Boyer-Lindquist. On précise par ailleurs que les coefficients métriques en coordonnées de Kerr-Schild cartésiennes sont donnés dans Visser (2007).

La seconde singularité en $\Delta = 0$ est semblable à la singularité de coordonnées en métrique de Schwarzschild au sens où elle permet de caractériser l'horizon des événements.

En effet, la condition $\Delta = 0$ est vérifiée en considérant l'hypersurface $r = R_H$ avec

$$R_H = \frac{R_S}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \bar{a}^2}\right). \tag{1.16}$$

On remarque que si l'on considère un trou noir de Schwarzschild ($\bar{a} = 0$), on retrouve bien l'hypersurface $r = R_S$.

En métrique de Kerr, une autre hypersurface intéressante, située à l'extérieur de l'horizon des événements, est appelée ergosphère. Elle est définie par :

$$R_{\text{ergo}}(\theta) = \frac{R_S}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \bar{a}^2 \cos^2\theta}\right). \tag{1.17}$$

La région comprise entre l'horizon des événements et l'ergosphère est appelée ergorégion. La caractéristique de cette région est qu'il ne peut pas y exister d'observateur statique par rapport à l'infini (r, θ et ϕ fixés) car celui-ci est entraîné par la rotation du trou noir. En revanche, si le trou noir est sans rotation cette région n'existe pas car l'ergosphère est confondue avec l'horizon des événements.

1.2.3 Théorème d'absence de chevelure

Le théorème d'absence de chevelure, aussi appelé théorème de calvitie des trous noirs, affirme qu'un trou noir stationnaire en rotation, solution du vide de l'équation d'Einstein ne présentant pas de singularités à l'extérieur de l'horizon des événements, est décrit par seulement trois paramètres : sa masse M, son moment cinétique a et sa charge électrique Q. Ces trous noirs sont décrits par la métrique de Kerr-Newman, il s'agit d'une solution généralisant celle de Kerr au cas chargé. Cependant, on s'attend à ce que les trous noirs astrophysiques soient neutres car ceux-ci sont entourés d'un plasma constitué de charges, mais surtout parce qu'ils baignent dans un milieu interstellaire chargé. Ils seraient donc dans ce cas définis par seulement deux paramètres M et a, et seraient décrits par la métrique de Kerr.

On comprend que le nom de ce théorème fait référence au faible nombre de paramètres permettant de décrire les trous noirs en relativité générale. En effet, ceux-ci sont décrits par seulement trois paramètres et ne possèdent donc que trois « cheveux ».

Ce théorème a vu le jour grâce à la combinaison de plusieurs théorèmes établis par Hawking (1972a), Israel (1982) et Carter (1971).

Afin de le vérifier, une formule analytique a été développée faisant intervenir le moment quadrupolaire du trou noir, que l'on note Q_2, ainsi que les deux paramètres M et a (Gürsel 1983). Cette formule est donnée par :

$$Q_2 = -Ma^2. \tag{1.18}$$

Si cette égalité est vérifiée, cela constituera un test fort en faveur de la présence d'un trou noir. Cela signifiera également que la relativité générale n'aura pas été mise à défaut

puisque cette formule découle de cette théorie de la gravitation.

La présence de matière, de champ électromagnétique ou encore de poussière aux alentours des trous noirs que l'on observe, enfreint les conditions de stationnarité et de vide de l'espace-temps. On peut donc penser que ces objets violent le théorème d'absence de chevelure. Néanmoins, on suppose que ces perturbations sont suffisamment faibles pour ne pas être observées. C'est pour cela que l'on considère que les trous noirs astrophysiques obéissent tout de même au théorème d'absence de chevelure.

1.3 Effets observationnels et tests de la relativité générale

La relativité générale a permis de prédire de nouveaux effets qui n'avaient encore jamais été observés. Ces prédictions s'appliquent aussi bien au comportement des photons qu'à celui des particules matérielles. Celles-ci ont permis et permettent encore aujourd'hui de faire des tests de la relativité générale, dont on cite plusieurs exemples dans la suite. Pour une liste détaillée des tests effectués on pourra par exemple voir les revues de Psaltis (2008), Will (2014) et Bambi (2015).

Avant de s'intéresser à certains de ces effets relativistes, rappelons comment est régie l'évolution d'une particule test dans un champ gravitationnel relativiste.

1.3.1 Trajectoire des corps

D'après la relativité générale, la gravitation se manifeste par la courbure induite par la distribution d'énergie-impulsion, décrite mathématiquement par le tenseur métrique. Ainsi, les particules tests uniquement soumises à l'interaction gravitationnelle se déplacent sur ce qu'on appelle des géodésiques de l'espace-temps imposées par le tenseur métrique. Ces géodésiques correspondent à des courbes qui rendent extrémale la distance entre deux points. En mécanique classique, le principe d'équivalence stipule que les particules soumises à l'interaction gravitationnelle tombent avec la même accélération. En relativité générale, ce principe est également pris en compte et se traduit par le fait que le mouvement des particules est régi par la courbure de l'espace-temps et que celles-ci suivent des géodésiques.

Il existe trois types de géodésiques : les géodésiques de genre espace qui sont obtenues pour une distance $\mathrm{d}s^2$ négative, les géodésiques de genre temps qui sont obtenues pour une distance $\mathrm{d}s^2$ positive, et enfin les géodésiques de genre lumière qui sont obtenues pour une distance $\mathrm{d}s^2$ nulle [5]. Le mouvement des photons, soumis uniquement à la gravitation,

5. On précise toutefois qu'une distance nulle ne mène pas forcément à une géodésique de genre lumière, cela est d'ailleurs discuté dans le cours de Gourgoulhon (2014).

est régi par ces dernières tandis que les particules matérielles ont pour trajectoire les géodésiques de genre temps.

L'équation des géodésiques donnant l'évolution d'un photon ou d'une particule matérielle est :

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0 \tag{1.19}$$

où $\dot{}$ et $\ddot{}$ sont obtenus par rapport au temps propre τ dans le cas d'une particule matérielle et par rapport au paramètre affine λ dans le cas d'un photon (voir le cours de Gourgoulhon (2014) pour avoir une définition rigoureuse du temps propre et du paramètre affine). Le terme $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ dans l'équation correspond aux symboles de Christoffel fonction de la métrique $\mathbf{g}$, donnés par :

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right). \tag{1.20}$$

L'équation (1.19) est un système de plusieurs équations. Pour le résoudre simplement il est possible de faire intervenir quatre constantes. Trois d'entre elle sont présentes à la fois en métrique de Schwarzschild et en métrique de Kerr. Il s'agit de la masse m de la particule, de son énergie E mesurée par un observateur à l'infini, et de la composante axiale L de son moment cinétique. Ces deux dernières quantités conservées le long de la géodésique découlent respectivement de la stationnarité de l'espace-temps et de la symétrie azimutale. Dans le cas de la métrique de Kerr, on dispose d'une quatrième constante pour résoudre les équations des géodésiques, il s'agit de la constante de Carter et est donnée par (Carter 1968) :

$$\mathrm{Q} = p_\theta^2 + \cos^2\theta\left[a^2(m^2 - p_t^2) + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\right] \tag{1.21}$$

où p_θ, p_t et p_ϕ sont les composantes de la quadri-impulsion de la particule.

Une fois les équations des géodésiques intégrées, il est possible d'avoir accès aux trajectoires des particules dans la métrique de son choix. Dans les sections qui suivent nous verrons que ces trajectoires sont affectées par des effets relativistes utilisés aujourd'hui pour effectuer des tests de relativité générale. En effet, la science ne se limite pas aux développement de nouvelles théories, elle se doit de les vérifier via les observations.

1.3.2 Tests en champ faible

La grande majorité des tests de relativité générale effectués à l'heure actuelle sont faits dans le régime des champs faibles. L'espace-temps y est donc supposé quasi-stationnaire et quasi-linéaire. En d'autres termes, le champ gravitationnel y est faible, peu variable, et la vitesse de l'objet étudié n'est pas relativiste. Ce régime peut être caractérisé par les deux propriétés suivantes :

- $C \ll 1$ où $C = GM/R_{\mathrm{obj}}c^2$ est la compacité de l'objet et R_{obj} son rayon,

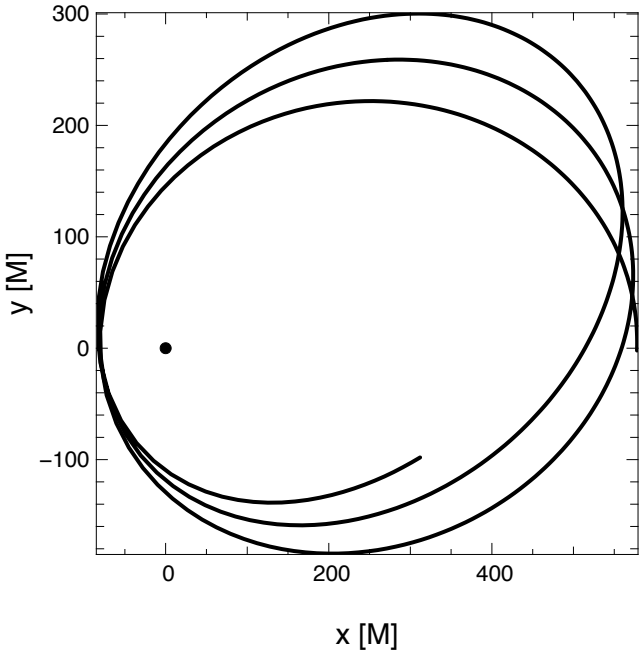

FIGURE 1.1 – Illustration de l'avancée du périastre dans le cas de la métrique de Schwarzschild. Le point noir représente la position du corps central. Les axes sont exprimés en unités géométriques.

- $v \ll c$ avec v la vitesse caractéristique de l'objet.

Des exemples de tests effectués dans ce régime sont cités ci-dessous, et nous verrons que la plupart d'entre eux sont effectués dans le Système Solaire.

Avancée du périastre

Le premier effet décrit ici s'applique seulement aux particules matérielles et s'appelle avancée du périastre. Contrairement au cas newtonien, les orbites relativistes ne sont plus des ellipses fermées et dépendent de la géométrie de l'espace-temps. Cela a pour effet d'induire une variation selon la coordonnée ϕ de Boyer-Lindquist, visible Fig. 1.1. Sur cette première figure les axes sont exprimés en unités géométriques (ou unité de masse M), cela correspond à la moitié du rayon de Schwarzschild $R_S = 2M$ où G et c ont été pris égaux à 1. On tient à préciser que la plupart des graphiques de ce manuscrit seront exprimés dans cette unité.

En supposant un champ gravitationnel faible, il est possible d'évaluer l'amplitude $\delta\phi$ de l'avancée du périastre grâce à la formule suivante :

$$\delta\phi = 3\pi \frac{R_S}{a_{\text{dga}}(1-e^2)} \tag{1.22}$$

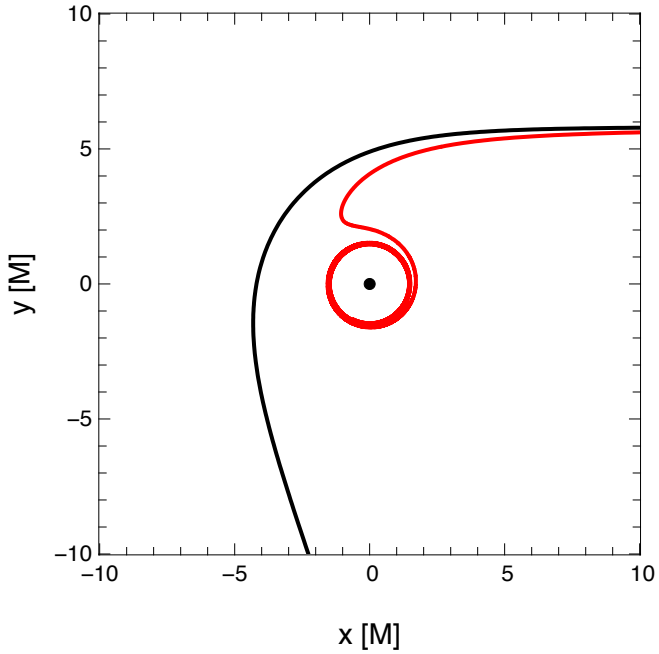

Figure 1.2 – Effet Lense-Thirring : la géodésique lumière représentée en noir est obtenue en métrique de Schwarzschild. La géodésique rouge est quant à elle obtenue en métrique de Kerr avec un moment cinétique adimensionné $\bar{a}$ de 0,998.

où a_{dga} [6] correspond au demi-grand axe de l'ellipse et e est l'excentricité de l'ellipse. C'est cette formule qui a permis d'effectuer le premier test de la relativité générale en champ faible par Albert Einstein en 1915. En particulier, il a confronté l'équation (1.22) à des mesures de l'avancée du périastre de Mercure autour du Soleil. On constate que pour une période orbitale de Mercure ($\approx$ 88 jours), l'effet observé est d'environ 3×10^{-5} degré. En un siècle, l'effet cumulé serait donc d'environ 43 secondes d'angle.

Aujourd'hui, les tests faits sur l'avancée du périastre sont toujours de plus en plus précis et s'étendent, dans le cas des champs faibles, de Mercure à Saturne. En effet, les précessions orbitales de Mercure, Venus, Mars, Jupiter et Saturne ont été obtenues avec un résidu inférieur à 5% (Fienga et al. 2011; Konopliv et al. 2011; Verma et al. 2014). Un satellite en orbite autour de la Terre, nommé LAGEOS-2, a également permis de mesurer sa propre précession. Cela a conduit à un résultat en accord à 2% près avec la relativité générale (Lucchesi & Peron 2010, 2014).

Effet Lense-Thirring

L'effet Lense-Thirring se manifeste lorsque le corps central est en rotation. Par exemple, si une particule (massive ou non) s'approche d'un trou noir en rotation avec une direction

6. Dans la littérature le demi-grand axe est le plus souvent noté a, pour ne pas confondre ce paramètre avec le moment cinétique dimensionné nous le noterons a_{dga}.

purement radiale, celle-ci acquiert un mouvement selon l'axe ϕ tel que :

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{2GJ}{c^2 r^3} \tag{1.23}$$

avec J le moment cinétique du trou noir et r la coordonnée radiale de la particule. Cette équation est valide pour tout corps en rotation, cependant, il est nécessaire que la particule reste suffisamment éloignée de celui-ci pour pouvoir l'utiliser. Une illustration de cet effet, dans le cas d'un photon, est présentée Fig. 1.2. Les deux photons utilisés pour obtenir cette dernière possèdent les mêmes conditions initiales (vitesse et position), mais leur trajectoire n'est pas obtenue dans la même métrique. On remarque qu'en métrique de Kerr le photon est entraîné par le trou noir ce qui n'est pas le cas en métrique de Schwarzschild. Cet effet d'entraînement correspond à l'effet Lense-Thirring.

Les satellites LAGEOS (Ciufolini et al. 2016) et *Gravity Probe B* (Everitt et al. 2011) ont permis d'estimer l'effet Lense-Thirring engendré par la rotation de la Terre en mesurant la précession d'un gyroscope en orbite autour de la planète. *Gravity Probe B*, lancé en 2004, a notamment permis de montrer que l'effet mesuré était en adéquation avec celui prédit par la formule (1.23) à 20% près.

Retard Shapiro

Le retard Shapiro, ou encore retard de la lumière, a été prédit par l'américain Irwin Shapiro en 1964. Il est dû au ralentissement du temps propre du photon par rapport au temps propre de l'observateur lorsque le photon traverse un potentiel gravitationnel.

Dans l'approximation des champs faibles, le retard Shapiro peut être estimé grâce à la formule suivante :

$$\delta t \simeq \frac{2R_S}{c}\left[\ln\left(\frac{4r_{\mathrm{obs}}r_{\mathrm{em}}}{r_0^2}\right)+1\right] \tag{1.24}$$

où r_{obs} et r_{em} sont les distances par rapport au corps perturbateur de l'observateur et de l'étoile, respectivement. Le paramètre r_0 correspond à la distance minimale entre le photon et le corps perturbateur.

C'est l'utilisation des signaux émis depuis la sonde Cassini et affectés par le champ gravitationnel du Soleil qui a permis en 2003 de tester avec succès cet effet relativiste en utilisant la formule (1.24) (Bertotti et al. 2003; Will 2014). Il a été démontré que le retard mesuré est en accord avec la relativité générale à 10^{-3}% près.

Déviation de la lumière

Comme nous l'avons mentionné précédemment, lorsqu'un photon passe à proximité d'un corps massif la relativité générale prédit que celui-ci sera dévié. En champ faible, cette déviation peut s'écrire :

$$\hat{\alpha} = \frac{2R_S}{\xi} \tag{1.25}$$

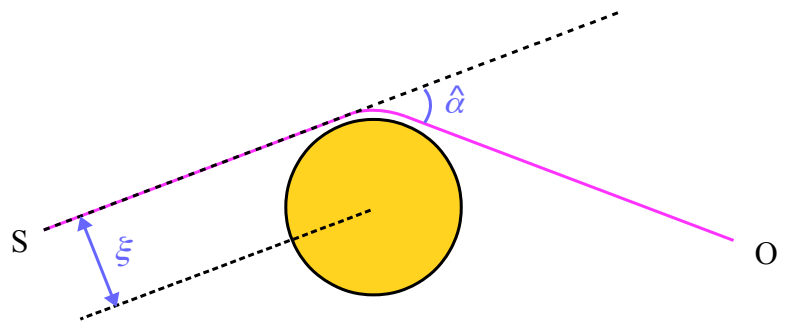

Figure 1.3 – Déviation d'un rayon lumineux rasant le Soleil.

avec ξ le paramètre d'impact correspondant à la distance perpendiculaire entre la trajectoire du photon et le centre du corps massif. La déviation d'un photon par le Soleil est illustrée Fig. 1.3. La déviation des photons est à l'origine de ce qu'on appelle l'effet de lentille gravitationnelle (ou mirage gravitationnel). Ce phénomène sera davantage étudié dans la suite de ce manuscrit.

Pour un rayon rasant le Soleil ($\xi = R_\odot$), on estime que cette déviation vaut environ 1,75 secondes d'angle. Cet effet a été mis en évidence pour la première fois en 1919 par Arthur Eddington et son équipe lors d'une éclipse solaire. Il s'agit là du deuxième test de la relativité générale après l'avancée du périastre de Mercure. Néanmoins, le test effectué à l'époque n'était précis qu'à 30% près. Des mesures plus précises ont été obtenues en utilisant l'interférométrie[7] à très longue base. Cela a permis de valider la prédiction de la relativité générale à 10^{-2}% près en mesurant le signal émis par des sources radios passant très près du Soleil (Lebach et al. 1995; Shapiro et al. 2004; Fomalont et al. 2009; Lambert & Le Poncin-Lafitte 2009, 2011; Will 2014).

Les tests en champ faible sont nombreux et davantage en seront effectués avec l'arrivée de données obtenues avec le nouvel instrument nommé Gaia (Lindegren et al. 2008). Ce satellite travaille dans le visible et permet d'effectuer des mesures astrométriques dans le Système Solaire, avec une précision variant d'une centaine de microsecondes d'angle pour des étoiles de magnitude 20 à quelques microsecondes d'angle ($\approx$ 7 μas) pour des étoiles de magnitude 10.

1.3.3 Tests en champ fort

Avec les moyens technologiques déployés aujourd'hui, des observations de divers objets générateurs de champ gravitationnel intense nous ont offert et nous offrent encore aujourd'hui la possibilité de tester la relativité générale en champ fort. Certains de ces objets sont cités dans les sections suivantes. Le Chapitre 2 étant consacré au Centre

7. La notion d'interférométrie sera expliquée au début du Chapitre 3, consacrée à l'instrument *GRAVITY*.

Galactique nous ne parlerons que peu ici des tests futurs qui y sont envisagés.

Les pulsars binaires

Les pulsars binaires sont des systèmes composés de deux étoiles dont l'une au moins est une étoile à neutrons. La seconde, appelée compagnon, est une étoile pouvant être à n'importe quel stade de son évolution : cela peut être une étoile de la séquence principale, une naine blanche, une étoile à neutrons ou bien un trou noir.

Le premier pulsar binaire qui a permis de faire un test de la relativité générale se nomme PSR B1913+16 et a été découvert par Joseph Taylor et Russell Hulse en 1974 (Hulse & Taylor 1975). La nature du compagnon est encore mal contrainte, cependant, toutes les études menées tendent à prouver que ce serait un objet compact.

Ce système est idéal pour effectuer des tests car les effets relativistes sont 10 fois plus importants que ceux présents dans le Système Solaire. De plus, la période orbitale est très courte ce qui permet un suivi plus long de l'évolution du système. Ce pulsar binaire est également stable, car âgé, ce qui lui permet d'être sensible aux effets de faibles amplitudes.

Un grand nombre de paramètres, tels que les paramètres képlériens et post-képlériens [8], a pu être contraint et a montré que la relativité générale était en accord avec les observations. Des effets tels que l'avancée du périastre et l'effet Shapiro ont été observés (Weisberg et al. 2010).

Il existe un grand nombre de pulsars binaires avec lesquels des tests semblables ont été faits. Certains d'entre eux ont pour compagnon une étoile à neutrons (par exemple, PSR J0737-3039 A, B qui constitue l'une des meilleures sources pour tester la relativité générale) ou encore une naine blanche (par exemple, PSR J1141-6545 ou PSR J1738+0333). Un système idéal pour tester la relativité serait néanmoins celui possédant un trou noir pour compagnon. Cependant, une étoile à neutrons en orbite autour d'un trou noir stellaire ou du candidat trou noir supermassif se trouvant au centre de notre Galaxie n'a pas encore été découvert.

Pour davantage de détails sur les pulsars binaires, on pourra consulter les revues de Will (2014) et Kaspi & Kramer (2016).

Les objets compacts accrétants

Les objets compacts accrétants permettent de tester la relativité de façon plus large au sens où ceux-ci sont à l'origine de divers phénomènes physiques.

<u>Preuve de l'existence d'un horizon des événements</u>

8. Il s'agit de paramètres permettant de décrire des déviations de bas ordres par rapport à une orbite képlérienne.

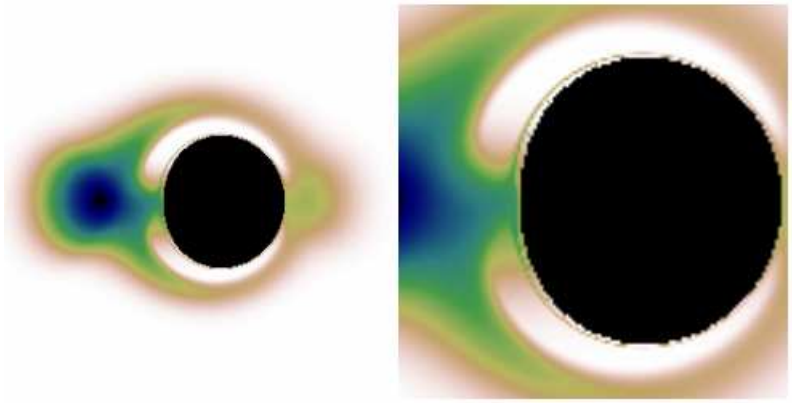

Figure 1.4 – Image d'un tore d'accrétion autour d'un trou noir (l'image de droite est un zoom de l'image de gauche). La silhouette du trou noir est la zone sombre au centre des deux images, qui correspond à la région depuis laquelle aucun photon ne peut parvenir à un observateur lointain du fait que les photons qui seraient contenus dans celle-ci finissent leur propagation sous l'horizon des événements et ne peuvent rejoindre l'infini. Sur ces deux images est également visible la sphère de photons correspondant au cercle fin situé autour de la silhouette. Source : Vincent et al. (2016).

Une première approche pour sonder l'espace-temps en champ fort est d'avoir une preuve directe ou non de la présence des trous noirs c'est-à-dire d'un horizon des événements.

Pour cela, plusieurs façons de procéder ont été proposées. Une preuve directe mais qui est, comme nous le verrons au prochain chapitre, assez débattue, est de faire une image de l'environnement immédiat d'un trou noir et en particulier sa silhouette (voir Fig. 1.4 pour une illustration de cette dernière). Pour avoir accès à la silhouette d'un tel objet, il faut que sa taille angulaire sur le ciel soit suffisamment grande pour dépasser la résolution angulaire des instruments. Si on considère par exemple un trou noir stellaire de masse égale à 10 masses solaires et distant de 1 kiloparsec de nous, la taille angulaire apparente de sa silhouette serait d'environ 2×10^{-4} microseconde d'angle. Dans le cas d'un trou noir supermassif de 10^8 masses solaires, distant de 1 mégaparsec, sa taille angulaire sur le ciel serait, elle, autour de 2 microsecondes d'angle. Les instruments d'aujourd'hui ne permettent pas d'observer de tels trous noirs. Néanmoins, avec l'arrivée sur le ciel d'un nouvel instrument nommé *Event Horizon Telescope*[9] (*EHT*, voir Sec. 2.3.1), dont la résolution angulaire attendue est de 20 microsecondes d'angles, il sera possible d'imager le candidat trou noir situé au Centre Galactique (voir Sec. 2.2). En effet, la taille angulaire apparente de sa silhouette est d'environ 50 microsecondes d'angle. Par ailleurs, il existe également la source M87 située à 16,8 mégaparsecs et dont la taille angulaire apparente est d'environ 20 microsecondes d'angle.

L'approche indirecte est quant à elle plus variée car il existe plusieurs phénomènes physiques permettant de prouver indirectement la présence d'un horizon des événements.

9. `http://www.eventhorizontelescope.org/`.

Une première méthode consiste à observer la luminosité des binaires X à faibles masses dans leur état quiescent. Ces systèmes sont composés d'un objet compact (étoile à neutrons ou trou noir) et d'une étoile. Du fait de l'échange de matière entre le compagnon et l'objet compact, ces sources sont les plus brillantes dans le domaine des rayons X. Dans le cas où l'objet compact est un trou noir, la mise en évidence de l'horizon des événements se manifeste grâce à cet échange de matière. En effet, si l'on considère un système stable composé d'une étoile à neutrons et d'une étoile, l'énergie potentielle accumulée associée au champ gravitationnel est libérée sous forme de rayonnement ce qui n'est pas le cas avec un trou noir. Dans ce dernier, l'énergie potentielle gravitationnelle est accrétée sous l'horizon des événements et devient invisible pour un observateur distant. On s'attend donc à ce que ces systèmes soient moins lumineux que ceux composés d'une étoile à neutrons. Plusieurs travaux ont été réalisés sur le sujet et ont démontré que les binaires X, que l'on pense être composées d'un trou noir, ont une luminosité bien inférieure à celle émise par les systèmes ayant une étoile à neutrons pour objet compact (Narayan et al. 1997; Garcia et al. 2001; McClintock et al. 2004). Néanmoins, comme la plupart des modèles astrophysiques les processus physiques rencontrés dans ces systèmes restent encore aujourd'hui débattus.

La présence de l'horizon des événements peut également être mise en évidence grâce aux spectres de trous noirs galactiques. En effet, lorsqu'ils sont dans leur état de luminosité maximale (états dits *very high* ou *steep power law* en Anglais), les spectres de tels objets sont caractérisés par la présence d'un spectre en loi de puissance dans le domaine des rayons X mous (faibles énergies) qui s'étend jusqu'au domaine des rayons gamma mous. Cette particularité serait expliquée par la diffusion Compton inverse[10] de photons du domaine des rayons X mous par des électrons relativistes tombant dans l'horizon des événements (Titarchuk & Zannias 1998).

Contrainte du moment cinétique des trous noirs supermassifs

D'autres phénomènes physiques générés en présence de champs gravitationnels intenses peuvent nous aider à tester la relativité générale. Dans le cas des trous noirs, il est possible de contraindre l'espace-temps en essayant, par exemple, de mesurer le moment cinétique de ces objets. Une méthode est notamment d'utiliser ce que l'on appelle le rayon de la dernière orbite circulaire stable (*ISCO* pour *Innermost Stable Circular Orbit*). L'*ISCO* correspond au rayon en deçà duquel il n'existe plus d'orbite stable. Les particules qui y pénètrent sont donc vouées à tomber rapidement sur le trou noir ou à être éjectées. La particularité de l'*ISCO* est qu'il dépend du moment cinétique adimensionné du trou noir comme (Bardeen

10. Dans le cas de la diffusion Compton inverse, un électron énergétique entre en collision avec un photon et lui transfère de l'énergie, ce qui est effectivement l'inverse de la diffusion Compton dans laquelle il s'agit du photon qui transfère de l'énergie à électron.

et al. 1972) :

$$R_{ISCO} = \frac{R_S}{2}\left[3 + Z_2 \mp \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)}\right], \tag{1.26}$$

$$Z_1 = 1 + (1 - \bar{a}^2)^{1/3}\left[(1 + \bar{a})^{1/3} + (1 - \bar{a})^{1/3}\right], \tag{1.27}$$

$$Z_2 = \sqrt{3\bar{a}^2 + Z_1^2} \tag{1.28}$$

où le signe $-$ est choisi si la rotation du trou noir est effectuée dans le sens prograde (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) et le signe $+$ est pris dans le sens rétrograde (dans le sens des aiguilles d'une montre). Pour $\bar{a} = 0$ on a $R_{ISCO} = 3R_S$ et pour $\bar{a} = 1$ on a $R_{ISCO} = 1/2R_S$ (sens prograde) ou $R_{ISCO} = 9/2R_S$ (sens rétrograde).

Une mesure de l'*ISCO* peut être obtenue grâce au spectre thermique des trous noirs, considéré dans leur état de luminosité maximale. Cette dernière est générée par le disque d'accrétion en rotation autour du trou noir. Étant donné qu'à l'intérieur de l'*ISCO* les particules ont des orbites instables et finissent par tomber dans le trou noir, la densité y est moins importante ce qui engendre une diminution accrue de la température. Seule la matière à l'extérieur de l'*ISCO* contribue fortement à l'émission thermique. Le flux de radiation à proximité de l'*ISCO* est directement proportionnel au carré du rayon de celui-ci. Plus précisément, comme cela est expliqué dans McClintock et al. (2011), ce rayon est obtenu en considérant que l'essentiel de la luminosité du disque d'accrétion provient d'un anneau de matière situé au voisinage de l'*ISCO* et est donnée par $L = A_{\text{eff}}\sigma T^4$ où $A_{\text{eff}} \propto R_{ISCO}^2$. Précisons que le rayon extérieur de cette région très émettrice proche de l'*ISCO* est évaluée à environ $2 - 3R_{ISCO}$ (McClintock et al. 2014).

Des mesures de moments cinétiques adimensionnés ont pu être obtenues sur plusieurs candidats trous noirs, en ajustant les modèles de spectres aux données. Notamment, l'objet GRS 1915+105 dont le moment cinétique adimensionné a été contraint à plus de 0,7 (Middleton et al. 2006) ou encore celui de 4U 1543-47 où $\bar{a}$ est compris entre 0,75 et 0,85 (Shafee et al. 2006). Ces mesures permettent d'appuyer la validité de la relativité générale car l'ensemble des valeurs de moment cinétique adimensionné déterminées sont en accord avec celles autorisées pour un trou noir de Kerr : $-1 \leqslant \bar{a} \leqslant 1$.

D'autres objets sont utilisés pour contraindre le moment cinétique adimensionné des trous noirs, comme par exemple les trous noirs accrétants à oscillations quasi-périodiques à haute fréquence (*QPO*[11] pour *Quasi Periodic Oscillations*). Comme leur nom l'indique, ils présentent une variation rapide en luminosité dont la fréquence peut atteindre 1 kilohertz. L'origine de ce phénomène est très compliquée et est, à l'heure actuelle, toujours débattue. Cependant, de nombreux modèles expliquent ces *QPO* par des oscillations de la structure d'accrétion dans les zones proches du trou noir. Ces oscillations permettraient ainsi de sonder la gravitation en champ fort. Une expérience a notamment été menée sur l'objet GRO J1655-40 ce qui a permis de contraindre le moment cinétique adimensionné à environ 0,9 (Wagoner et al. 2001).

11. Les *QPO* ne sont pas spécifiques aux trous noirs, en effet, on peut également en détecter à proximité d'étoiles à neutrons.

Ondes gravitationnelles et trous noirs binaires

Un autre outil dont nous disposons pour sonder l'espace-temps en champ gravitationnel intense est la radiation gravitationnelle, aussi appelée onde gravitationnelle. Celle-ci est une conséquence directe de la relativité générale et a été prédite par Albert Einstein en 1916. Ces ondes ont été observées pour la première fois aux célébrations des 100 ans de la relativité générale fin 2015 grâce à l'instrument *LIGO* (*Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory*, Abbott et al. 2016). Elles correspondent à des perturbations dans la courbure de l'espace-temps se propageant à la vitesse de la lumière. Pour une revue détaillée des tests possibles pour mettre en évidence ces ondes, on pourra se référer à Yunes & Siemens (2013). Précisons que la preuve de leur existence a été obtenue bien plus tôt, en 1975, à l'aide du pulsar binaire PSR B1913+16, puisque l'évolution de sa période orbitale était en accord avec celle prédite lorsque l'on supposait que ce système perdait son énergie par émission d'onde gravitationnelle. L'incertitude de mesure obtenue sur ce test est à l'heure actuelle d'environ 0,2% (Weisberg et al. 2010).

Ces ondes font l'objet de nombreuses études car elles donnent directement accès aux environnements gravitationnels extrêmes. De plus, elles ont l'avantage d'être très peu affectées durant leur parcours jusqu'à la Terre et ne sont donc pas sensibles aux effets d'obscurcissement. Leur second avantage est qu'elles existent même en l'absence de matière lumineuse et peuvent donc nous permettre d'observer des objets sombres tels que des trous noirs spiralants. Ces derniers ont la particularité d'être des objets très propres car l'évolution des trous noirs, lorsque ceux-ci sont sur le point de fusionner, n'est essentiellement pas affectée par la matière et le champ électromagnétique présents dans le système. Nous ne sommes donc pas confronté aux incertitudes de mesures introduites par la matière astrophysique. Tester la relativité générale avec de tels objets constituerait donc une preuve forte de la validité de cette théorie de la gravitation (Blanchet & Sathyaprakash 1994, 1995; Yunes et al. 2016).

Comme nous venons de le voir, l'Univers nous offre un vaste panel d'objets astrophysiques à l'origine d'un grand nombre de phénomènes physiques nous permettant de mettre en confrontation les observations et la relativité générale. L'ensemble des tests faits à l'heure actuelle tendent à prouver que la relativité générale est hautement satisfaisante pour décrire l'interaction gravitationnelle. Néanmoins, il existe aujourd'hui un nombre important de théories permettant de décrire la gravitation, c'est ce que nous allons brièvement évoquer dans la section suivante.

1.4 Théories alternatives aux trous noirs

Il existe aujourd'hui un très grand nombre de théories alternatives à la relativité générale. On pourra d'ailleurs se référer aux revues de Yunes & Siemens (2013), Will (2014) et Berti et al. (2015) pour une description plus détaillée des différentes théories

existantes ainsi que des futurs tests envisagés pour les différencier de la relativité générale.

Dans cette section, nous discuterons seulement de deux grandes familles de théories alternatives : les théories tenseur-scalaire et celles de gravité quadratique modifiée. Ces théories possèdent le même formalisme mathématique que celui de la relativité générale. Ce sont des théories métriques c'est-à-dire que le mouvement d'une particule test est décrit par une géodésique. La différence avec la relativité générale vient de l'action considérée en amont pour déterminer l'équation du mouvement des particules. Dans le cas général, l'action se décompose en deux termes : l'action gravitationnelle liée à la métrique de l'espace-temps, S_{grav}, qui correspond dans le cas de la relativité générale à l'action d'Einstein-Hilbert, et celle liée à la matière, S_{mat}.

1.4.1 Théories tenseur-scalaire

Considérons tout d'abord les théories tenseur-scalaire. Comme leur nom l'indique, celles-ci font intervenir un champ scalaire en plus de la métrique. L'interaction gravitationnelle est donc régie à la fois par un champ tensoriel $g_{\mu\nu}$ et par un ou plusieurs champs scalaires [12] φ. Initialement ces théories furent considérées par Jordan, Fierz, Brans et Dicke, elles peuvent donc être appelées théories de Jordan-Fierz-Brans-Dicke. L'action de telles théories est définie, dans la représentation que l'on appelle de Jordan, par :

$$S = \frac{c^4}{16\pi G_*} \int \left[F(\varphi)R - g^{\mu\nu} Z(\varphi)\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - 2U(\varphi)\right] \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x + S_{\text{mat}}[\psi_m, g_{\mu\nu}] \tag{1.29}$$

où G_* est une constante que l'on nomme constante de gravitation « nue », g est le déterminant de la métrique $g_{\mu\nu}$, et F et Z sont des fonctions sans dimension avec $F > 0$, qui dans le cas de la paramétrisation de Brans-Dicke sont données par :

$$F(\varphi) = \varphi, \qquad Z(\varphi) = \frac{\omega(\varphi)}{\varphi} \tag{1.30}$$

où ω est un champ de couplage dépendant du champ scalaire φ. La fonction U dans la formule (1.29) correspond au potentiel du champ scalaire φ, et ψ_m correspond aux champs de matière permettant d'inclure l'ensemble du modèle standard de la physique des particules. L'action S_{mat} associée à la matière ne dépend pas du champ scalaire φ ce qui permet à ces théories de vérifier, tout comme en relativité générale, le principe d'équivalence d'Einstein (principe d'équivalence faible). Cependant, celles-ci violent le principe d'équivalence fort [13] qui est une généralisation de ce dernier. Ajoutons également

12. Le champ scalaire permet d'attribuer en chaque point de l'espace un scalaire tel que la température ou la densité.

13. Le principe d'équivalence fort requiert l'universalité de la chute libre des corps quelle que soit leur énergie de liaison gravitationnelle interne, ainsi que l'indépendance des résultats d'expériences locales non-gravitationnelles ou gravitationnelles vis-à-vis de la position dans l'espace-temps et de la vitesse de chute libre du laboratoire dans lequel elles sont réalisées.

que dans ces théories tenseur-scalaire, les objets astrophysiques dont nous avons discuté plus haut existent également. Néanmoins, cette formulation de l'action induit des déviations à la relativité générale ce qui permet de confronter ces deux types de théories.

Dans le cas où l'on considère un champ de couplage ω constant et un espace vide ($S_{\mathrm{mat}} = 0$), on se ramène à la théorie communément appelée théorie de Brans-Dicke (Brans & Dicke 1961). Dans celle-ci le champ de couplage est noté ω_{BD}. Cette théorie de la gravitation prédit également les effets rencontrés en relativité générale tels que les ondes gravitationnelles, l'avancée du périastre, la déflexion de la lumière ou encore l'effet Shapiro. Le terme de couplage ω_{BD} permet de quantifier la déviation à la relativité générale puisque lorsque l'on a $\omega_{BD} \to \infty$, on se ramène à la relativité générale. Le retard Shapiro a notamment permis de contraindre la limite inférieure du paramètre ω_{BD} à 4×10^4 (Bertotti et al. 2003). D'autre part, Stephen Hawking a démontré que les trous noirs décrits par cette théorie sont identiques à ceux de Kerr (Hawking 1972b). Le théorème d'absence de chevelure n'est donc pas violé étant donné qu'il n'y a pas de « cheveux » en plus. Afin de contraindre cette théorie, il est néanmoins possible de considérer les systèmes binaires par exemple composés d'un trou noir et d'une étoile à neutrons. En effet, ces systèmes ont la particularité d'avoir une émission d'onde gravitationnelle dipolaire dans les théories tenseur-scalaire alors que celle-ci est quadrupolaire en relativité générale (Eardley 1975; Barausse et al. 2013).

L'action donnée par la formule (1.29) peut également s'écrire en considérant la représentation dite d'Einstein définie à partir de celle de Jordan par une transformation conforme dépendant du champ scalaire φ. En particulier, la nouvelle métrique, que l'on note $g^*_{\mu\nu}$, est donnée par :

$$g^*_{\mu\nu} = F(\varphi) g_{\mu\nu}. \tag{1.31}$$

En utilisant les nouvelles variables et fonctions définies par :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi_*}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{3}{4}\left[\frac{\mathrm{d}\ln F(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\right]^2 + \frac{Z(\varphi)}{2F(\varphi)}, \tag{1.32}$$

$$A(\varphi_*) = F^{-1/2}(\varphi), \tag{1.33}$$

$$2V(\varphi) = U(\varphi)F^{-2}(\varphi), \tag{1.34}$$

l'action, en représentation d'Einstein, s'exprime comme :

$$S = \frac{c^4}{16\pi G_*}\int \left[R_* - 2g_*^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi_*\partial_\nu\varphi_* - 4V(\varphi_*)\right]\sqrt{-g_*}\mathrm{d}^4x + S_{\mathrm{mat}}[\psi_m, A^2(\varphi_*)g^*_{\mu\nu}] \tag{1.35}$$

où g_* est le déterminant de la métrique $g^*_{\mu\nu}$ et R_* son scalaire de courbure. Précisons que la fonction A correspond à une fonction de couplage dépendant du champ scalaire φ.

Une seconde théorie tenseur-scalaire a été développée par Damour et Esposito-Farèse (Damour & Esposito-Farese 1992) dans laquelle l'action liée à la matière est, contrairement à la théorie de Brans-Dicke, non nulle. La fonction de couplage dans celle-ci est donnée par :

$$A(\varphi_*) = e^{\alpha\varphi_* + \beta\varphi_*^2/2} \tag{1.36}$$

où α et β sont définies comme :

$$\alpha(\varphi_*) = \frac{\mathrm{d}\ln A}{\mathrm{d}\varphi_*}, \qquad \beta(\varphi_*) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\varphi_*}. \tag{1.37}$$

Grâce à l'observation des pulsars binaires, les paramètres β et α ont pu être contraints : $\beta > -4$ et $\alpha < 10^{-2}$ (Damour & Esposito-Farèse 1996). Notons que si ces paramètres sont nuls, nous retrouvons la théorie de la relativité générale.

1.4.2 Théories de gravité quadratique

À présent intéressons-nous aux théories de gravité quadratique modifiée. L'action dans de telles théories fait intervenir, en plus de l'action d'Einstein-Hilbert, des termes quadratiques dans le tenseur de Riemann et donc dans le scalaire de courbure. L'action générale s'exprime comme :

$$\begin{aligned} S = \int \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\Big(&\frac{c^4}{16\pi G}R + \alpha_1 f_1(\vartheta)R^2 + \alpha_2 f_2(\vartheta)R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \alpha_3 f_3(\vartheta)R_{\mu\nu\delta\sigma}R^{\mu\nu\delta\sigma} \\ &+ \alpha_4 f_4(\vartheta)R_{\mu\nu\delta\sigma}{}^*R^{\mu\nu\delta\sigma} - \frac{\beta}{2}[\nabla_\mu\vartheta\nabla^\mu\vartheta + 2V(\vartheta)]\Big) + S_{\mathrm{mat}} \end{aligned} \tag{1.38}$$

où ϑ est un champ scalaire, ${}^*R^{\mu\nu\delta\sigma}$ est le dual[14] du tenseur de Riemann et les fonctions f_i correspondent à des fonctions de couplage. Les paramètres α_i et β sont des fonctions de couplage, c'est en changeant ces paramètres que l'on a accès à diverses théories de gravitation modifiée. On remarque que ces théories se ramènent à la relativité générale lorsque les α_i tendent vers zéro.

La théorie de Chern-Simons (Jackiw & Pi 2003) découle directement de la gravitation modifiée en posant $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Si l'on considère $\beta = 0$ on a ce qu'on appelle la théorie de Chern-Simons non dynamique, à l'inverse de la théorie de Chern-Simons dynamique (β non nul). Cependant, il a été démontré que la théorie non-dynamique était instable (Dyda et al. 2012). À l'heure actuelle, la théorie de Chern-Simons dynamique n'a été contrainte qu'en champ faible grâce à l'effet Lense-Thirring observé dans le Système Solaire (Ali-Haïmoud & Chen 2011). Dans cette théorie, les solutions du vide dans lequel l'espace-temps est supposé statique et à symétrie sphérique sont également données par la métrique de Schwarzschild. En revanche, les solutions non statiques et axisymétriques ne sont pas décrites par la relativité générale et leur stabilité reste encore non démontrée.

Une autre théorie de gravité quadratique a été développée et s'appelle la théorie d'Einstein-Dilaton-Gauss-Bonnet. Contrairement à la théorie de Chern-Simons, elle est obtenue en posant uniquement $\alpha_4 = 0$. Celle-ci a été testée via l'observation de l'effet Shapiro dans le Système Solaire avec la sonde Cassini ou encore via l'observation de la variation de la période orbitale d'une binaire X à faible masse (Yagi 2012). Les solutions statiques et à symétries sphériques ainsi que les solutions non statiques et axisymétriques

14. Le dual ici correspond au dual de Hodge et est donné par ${}^*R^{\mu\nu\delta\sigma} = 1/2\epsilon^{\delta\sigma\rho\lambda}R^{\mu\nu}_{\rho\lambda}$ où $\epsilon^{\delta\sigma\rho\lambda}$ est le tenseur de Levi-Civita.

sont différentes de celles obtenues en relativité générale. Tout comme dans le cas de la théorie de Chern-Simons dynamique la stabilité des trous noirs en rotation décrits par cette théorie n'a pas encore été démontrée.

Comme nous venons de le voir il existe plusieurs théories de la gravitation permettant de décrire les trous noirs. Cependant, celles-ci ont chacune leurs propres paramètres ce qui rend laborieux l'étude de la déviation de ces théories à la relativité générale. Il serait donc plus avantageux de définir des métriques génériques approchant le comportement de cette dernière. Une première méthode proposée est de partir de la métrique de Kerr et de la perturber en y ajoutant des termes supplémentaires via le développement en série. Des solutions stationnaires et axisymétriques ont été obtenues avec de telles métriques (Johannsen & Psaltis 2011). Une seconde méthode est de paramétriser la métrique de Schwarzschild ou de Kerr (Rezzolla & Zhidenko 2014; Konoplya et al. 2016). Cette méthode est directement inspirée de la paramétrisation post-newtonienne (PPN). Cependant, cette approche est encore aujourd'hui limitée à des trous noirs à faible rotation.

Les déviations de l'ensemble de ces théories de la gravitation à la relativité générale restent difficiles à mesurer. Nous avons vu ici qu'il est notamment possible, pour certaines de ces théories, de mettre en évidence ces déviations grâce à l'observation d'ondes gravitationnelles dans des systèmes complexes tels que les pulsars binaires. Cependant, nous verrons à la fin du chapitre suivant que le Centre Galactique est le lieu de divers phénomènes physiques pouvant eux aussi nous aider à contraindre la théorie régissant l'interaction gravitationnelle.

Chapitre 2

Sagittarius A*, un trou noir au centre de notre galaxie ?

Sommaire

2.1 Les 10 parsecs centraux 43
2.1.1 Principales structures du complexe Sagittarius A 44
2.1.2 Population stellaire de Sagittarius A : l'amas nucléaire 44
2.2 Zoom sur la source Sagittarius A* 47
2.2.1 Découverte d'un objet compact au Centre Galactique 47
2.2.2 Spectre d'émission et disque d'accrétion de SgrA* 48
2.3 Tests d'aujourd'hui et de demain 51
2.3.1 Un trou noir au centre de notre galaxie 51
2.3.2 Objets alternatifs aux trous noirs de Kerr 54

Ce chapitre est consacré à la présentation succincte des différentes parties occupant les 10 parsecs centraux du Centre Galactique. Dans un premier temps, nous présenterons certaines structures de ce complexe ainsi que sa population stellaire. Nous finirons ensuite par décrire plus précisément la source située au centre de notre galaxie que l'on appelle Sagittarius A* (Sgr A*). La rédaction de ce chapitre s'inspire en partie des thèses de doctorat de Paumard (2003) et Vincent (2011) ainsi que de la revue de Genzel et al. (2010).

2.1 Les 10 parsecs centraux

La Voie Lactée est, selon la séquence de Hubble, une galaxie spirale barrée de même classe que la galaxie d'Andromède située à environ 700 kiloparsecs. L'intérêt de l'étude du Centre Galactique réside principalement dans notre proximité au noyau qui, lui, est situé à environ 8 kiloparsecs. L'étude du centre de notre galaxie va donc permettre de

mieux caractériser les galaxies de même type. Des galaxies plus près que celle d'Andromède existent mais font partie de la classe dite irrégulière et ne sont donc pas du même type que la Voie Lactée.

Grâce aux divers instruments de plus en plus performants, le Centre Galactique nous est révélé et nous montre ainsi comment celui-ci est organisé et peuplé. Comme précisé ci-dessus, nous ne nous intéresserons ici qu'aux 10 parsecs centraux de la Galaxie.

2.1.1 Principales structures du complexe Sagittarius A

Les 10 parsecs de la région centrale de notre galaxie sont composés du complexe Sagittarius A (Sgr A) dont les principales structures sont visibles Fig. 2.1.

Le complexe Sgr A est constitué de plusieurs structures dont Sgr A Est, le disque circumnucléaire, Sgr A Ouest et Sgr A*.

Sgr A Est est une bulle en expansion de 7×9 parsecs et s'agirait d'un reste de supernova. Il est possible que les trois autres sous-structures soient à l'intérieur de cette bulle.

Le disque circumnucléaire serait quant à lui composé de dix à vingt nuages moléculaires de taille caractéristique 0,5 parsec. Chaque nuage contiendrait environ 1000 masses solaires. Ce disque étant très asymétrique il ne peut s'agir d'une structure stable. Cela pourrait s'expliquer par son interaction avec Sgr A Est visible en bas à droite Fig. 2.1.

Sgr A Ouest, aussi appelée la Minispirale, occupe les deux parsecs centraux et est dominée par les émissions du gaz ionisé et de la poussière. Comme son second nom l'indique, elle offre l'apparence d'une spirale (à trois bras). Cependant, cette apparence n'est que fortuite, en effet, Sgr A Ouest a une structure tridimensionnelle complexe qui n'est en rien similaire aux structures spirales caractéristiques des galaxies spirales.

La dernière des quatre sous-structures est Sgr A*, il s'agit de la source compacte se situant au centre de notre propre galaxie. Les diverses études menées au Centre Galactique nous laissent penser qu'il s'agirait d'un trou noir supermassif. La section 2.2 sera exclusivement consacrée à cette source.

2.1.2 Population stellaire de Sagittarius A : l'amas nucléaire

Dans le parsec central de la Galaxie se trouve un amas d'étoiles très dense mis en évidence pour la première fois au début des années 1970 par Rieke & Low (1973), grâce à des observations obtenues en infrarouge. Cet amas a été appelé l'amas nucléaire. Becklin & Neugebauer (1975) ont également contribué à l'étude de celui-ci.

Parmi les étoiles actuellement observées, 96% sont des étoiles chaudes et vieilles ($>$ 1 Ga) : géantes et supergéantes rouges, étoiles AGB (Branche Asymptotique des Géantes). Les observations obtenues au Centre Galactique ont permis de recenser environ 6000 étoiles âgées (Trippe et al. 2008; Schödel et al. 2009) dont on connaît le mouvement sur le ciel. Les conclusions sont que le mouvement ainsi que la distribution de ces étoiles sont isotropes. De plus, cet amas stellaire serait en rotation lente dans le sens de rotation du Centre Galactique (Trippe et al. 2008).

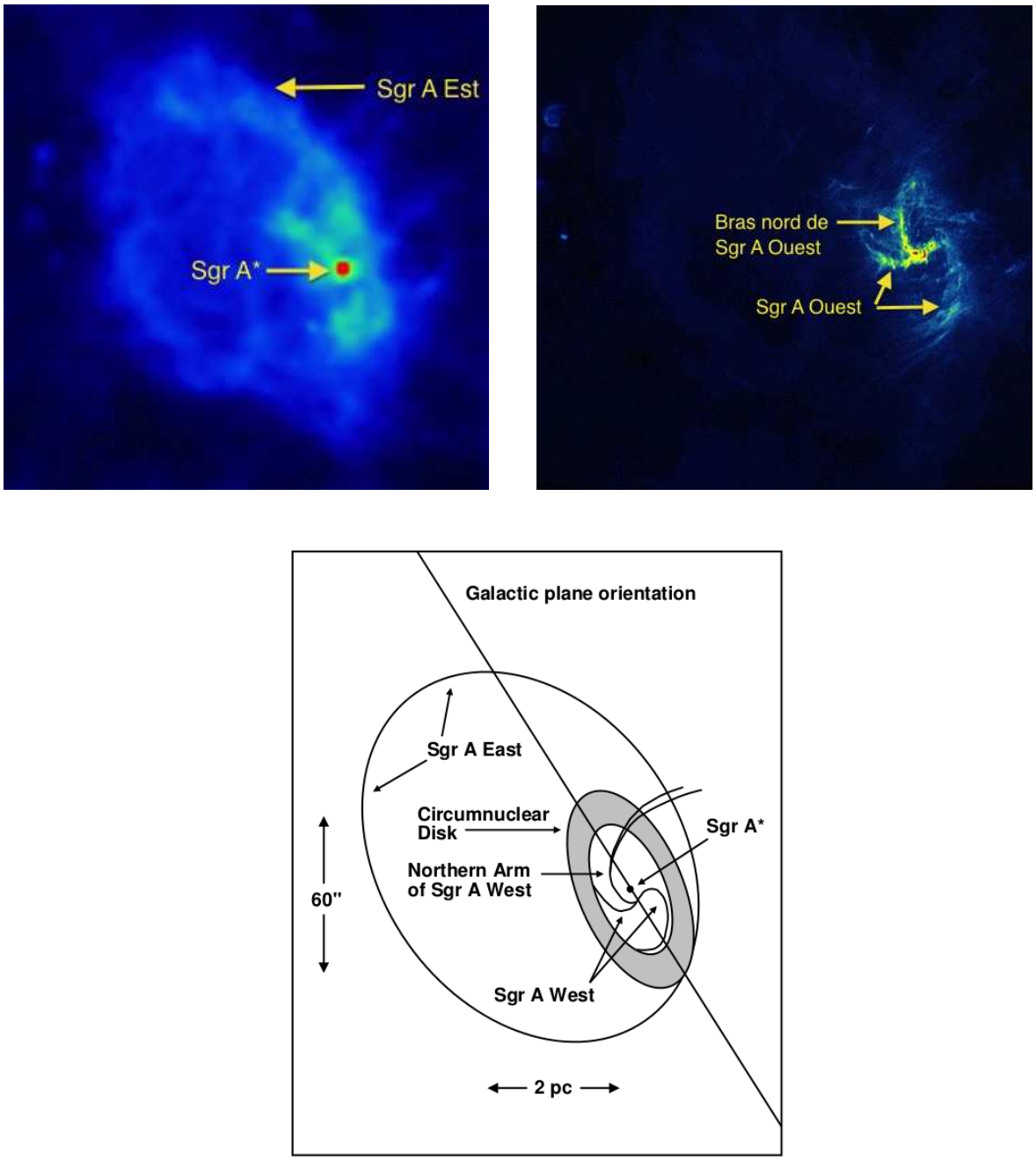

FIGURE 2.1 – *En haut à gauche* : image de Sgr A Est obtenue à 20 centimètres, la source radio Sgr A* est également visible en rouge. *En haut à droite* : image de Sgr A Ouest obtenue à 6 centimètres. Ces deux images ont été obtenues avec le *VLA* (*Very Large Array*). *En bas* : schéma du complexe Sgr A avec ses principales structures. Sources : `http://archive.ncsa.illinois.edu/Cyberia/Bima/GalCntr.html`, Baganoff et al. (2003).

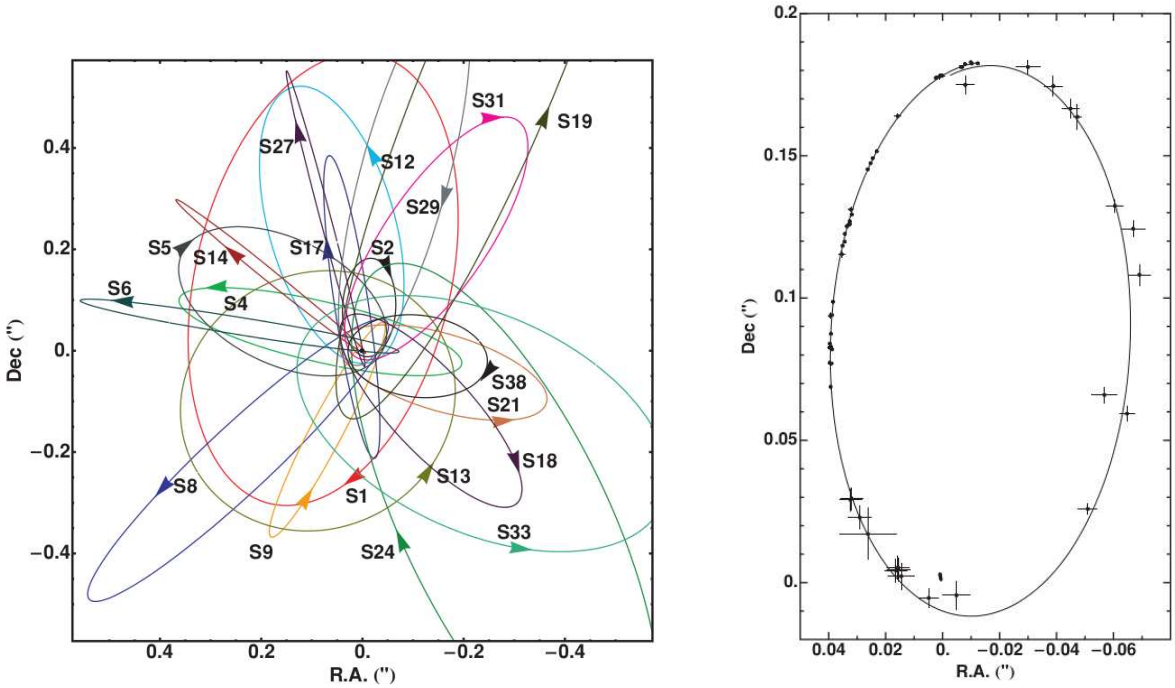

Figure 2.2 – Orbites d'étoiles S obtenues par Gillessen et al. (2009b), avec un plan rapproché à droite de l'orbite de l'étoile S2.

Des observations plus récentes ont montré l'existence d'étoiles jeunes, chaudes et massives de types O, B ou encore Wolf-Rayet (WR) [1] probablement distribuées sur deux disques en rotation opposée (Forrest et al. 1987; Allen et al. 1990; Paumard et al. 2006). À l'heure actuelle, on connaît une centaine de ces étoiles qui sont distribuées entre environ 0,8 et 12 secondes d'angle de Sgr A* (Bartko et al. 2010).

Le paradoxe de la jeunesse est le nom qui a été donné à la présence inattendue de l'ensemble de ces étoiles jeunes. En effet, la formation d'étoiles jeunes à proximité d'un objet compact serait perturbée par les forces de marée créées par l'intense champ de gravité. Plusieurs scénarios ont donc été développés et permettent d'expliquer ce paradoxe : selon Paczynski (1978) ces étoiles pourraient s'être formées directement sur place par fragmentation d'un disque d'accrétion ; selon Gerhard (2001) elles se seraient formées dans un amas d'étoiles plus éloigné qui aurait spiralé vers l'objet central et se serait fragmenté via les forces de marée.

Une remarquable concentration d'étoiles jeunes, faibles ($m_K \approx 15$) et principalement de type B a également été mise en évidence par Eckart et al. (1995). Cet amas a été nommé l'amas S et est situé dans un rayon d'environ 0,5 seconde d'angle autour de la position de Sgr A*, soit environ 20 milliparsecs. À la différence des autres étoiles jeunes réparties

1. Les étoiles Wolf-Rayet sont des étoiles chaudes, massives et évoluées présentant un taux de perte de masse très élevé.

sur deux disques, les étoiles de l'amas S ont une distribution isotrope (Ghez et al. 2005). Grâce à des observations obtenues pendant une dizaine d'années, les orbites de certaines de ces étoiles ont été obtenues (voir Fig. 2.2). En particulier, il y a l'étoile S2 qui possède un périastre situé à environ 1400 rayons de Schwarzschild et un demi-grand axe d'environ 0,123 seconde d'angle. Étant donné la valeur de ce dernier, on dit que S2 constitue l'étoile la plus proche de la source centrale. On discutera plus en détail de cette étoile dans la section suivante. Il existe également l'étoile S14 qui possède, elle, un périastre plus faible d'environ 300 rayons de Schwarzschild mais un demi-grand axe plus important d'environ 0,256 seconde d'angle (Ghez et al. 2005).

L'étude de l'orbite des étoiles S a permis de contraindre la distance entre le Centre Galactique et le Système Solaire notée R_0, la masse de l'objet central notée $M_{\rm TN}$ [2], ainsi que le mouvement propre dans le plan du ciel de cet objet noté v_0 (Ghez et al. 2008; Gillessen et al. 2009b). Les meilleurs contraintes obtenues sont $R_0 = 8{,}33 \pm 0{,}35$ kpc, $M_{\rm TN} = 4{,}31 \pm 0{,}36 \times 10^6 M_\odot$ et $v_0 = 0 \pm 30$ km/s.

Étant donné que ces étoiles ne se trouvent pas sur l'un des deux disques discutés ci-dessus, il est nécessaire d'introduire un autre mécanisme pour expliquer leur présence très près de Sgr A*. Différents scénarios ont également été proposés dont celui du mécanisme de capture de Hills (1988) où l'interaction d'une étoile binaire massive avec un trou noir massif mènerait à la perturber, l'une des étoiles serait capturée tandis que l'autre serait éjectée à grande vitesse. C'est ce phénomène d'éjection qui pourrait expliquer le peuplement de l'amas S. Une seconde proposition serait la migration d'étoiles massives se trouvant initialement dans le disque situé entre 0,1 et 1 parsec au centre de notre galaxie. Celles-ci se seraient déplacées grâce à l'interaction gravitationnelle générée par des trous noirs de masses intermédiaires (Levin 2007).

2.2 Zoom sur la source Sagittarius A*

2.2.1 Découverte d'un objet compact au Centre Galactique

L'hypothèse que Sgr A* soit un trou noir a été évoquée pour la première fois par Lynden-Bell & Rees (1971) afin d'expliquer l'émission radio détectée au Centre Galactique dans les années 1950. Trois ans plus tard, Balick & Brown (1974) découvrent une émission ponctuelle dans le complexe Sgr A, cette source fut nommée Sagittarius A* par Brown (1982).

Un second argument en faveur de la présence d'un objet compact au centre de la Galaxie est l'étude des mesures de vitesses radiales du gaz ionisé situé à proximité du noyau. Ces mesures ont été obtenues par Wollman et al. (1977) et ont permis d'estimer la masse de Sgr A* entre 2 et 4 millions de masses solaires. Cependant, la mise en évidence d'une masse ponctuelle au centre de la Galaxie par cette méthode n'est pas très convaincante car le gaz est très sensible aux forces non-gravitationnelles.

2. L'unité géométrique dans ce manuscrit correspond à l'unité de masse du trou noir central $M_{\rm TN}$. Afin d'alléger le texte nous garderons la notation M lorsque nous parlerons d'unités géométriques.

L'étude de la population stellaire au Centre Galactique a permis de renforcer l'hypothèse de la présence de cette masse compacte, d'une part, grâce à la découverte des premières supergéantes bleues dans les 10 secondes d'angle centrales (Forrest et al. 1987; Allen et al. 1990; Krabbe et al. 1991). Krabbe et al. (1995) ont pu confirmer la présence d'une masse ponctuelle de quelques millions de masses solaires en étudiant les mouvements d'une douzaine de ces étoiles. D'autre part, Genzel et al. (1996) et Haller et al. (1996) ont estimé la masse de Sgr A* en étudiant la distribution de masse d'une centaine d'étoiles de l'amas nucléaire (voir Sect. 2.1.2) détectées à l'époque dans celui-ci. Genzel et al. (1996) en ont conclu que la masse centrale faisait environ 3×10^6 masses solaires et que celle de l'amas nucléaire faisait environ 10^6 masses solaires.

Les arguments les plus convaincants en faveur de la présence d'une source compacte au centre de notre galaxie ont été obtenus à l'aide du suivi d'étoiles encore plus proches de l'objet central, et se trouvant dans l'amas S (voir Sect. 2.1.2). Plus précisément cette hypothèse a été corroborée grâce à l'étude des mouvements propres de ces étoiles (Eckart & Genzel 1997; Ghez et al. 1998) puis grâce aux premières mesures d'accélération des étoiles S1, S2 et S8 (Ghez et al. 2000). Mais c'est la mesure sur plusieurs années de vitesses radiales et positions apparentes d'étoiles de l'amas S qui a permis d'avoir une contrainte forte sur la nature de la source Sgr A* (voir Sect. 2.1.2). En particulier, les données obtenues sur l'étoile S2 ont permis de reconstituer complètement l'orbite ainsi que la courbe de vitesse de celle-ci.

Dans le cas du suivi fait par Gillessen et al. (2009a), les précisions astrométriques atteintes s'étendent de 300 microsecondes d'angle à environ 12 millisecondes d'angle, quant aux précisions des vitesses radiales elles varient entre 24 km/s et 70 km/s. On sait aujourd'hui que l'étoile S2 possède une période orbitale d'environ 15,8 ans et un périastre situé à seulement 1400 rayons de Schwarzschild de l'objet central. En utilisant l'ensemble des observations obtenues sur l'étoile S2, on arrive déjà à fortement contraindre la masse de Sgr A* ainsi que sa distance au Système Solaire : $M_{\rm TN} = 4{,}29 \pm 0{,}41 \times 10^6 M_\odot$, $R_0 = 8{,}31 \pm 0{,}33$ kpc (Gillessen et al. 2009a). Cependant, il est important de mentionner qu'il existe deux sources d'erreur sur ces mesures. La première est due à une incertitude liée au fait que S2 était plus brillante lors de son passage au périastre en 2002, cela peut peut-être s'expliquer par la présence d'une source plus faible proche ou en projection. Celle-ci aurait donc pour effet d'introduire un biais dans les données astrométriques obtenues à cette date, ce qui est problématique étant donné que c'est au périastre que le champ gravitationnel peut être davantage contraint. Afin de contourner ce problème Gillessen et al. (2009a,b) ont assigné une erreur plus grande à ces points de données. Pour ce qui est de la deuxième source d'erreur, elle correspond au manque de précision que l'on a sur le mouvement propre de Sgr A*.

2.2.2 Spectre d'émission et disque d'accrétion de SgrA*

On souhaite ici présenter brièvement le spectre d'émission de la source Sgr A* ainsi que le disque d'accrétion entourant l'objet central.

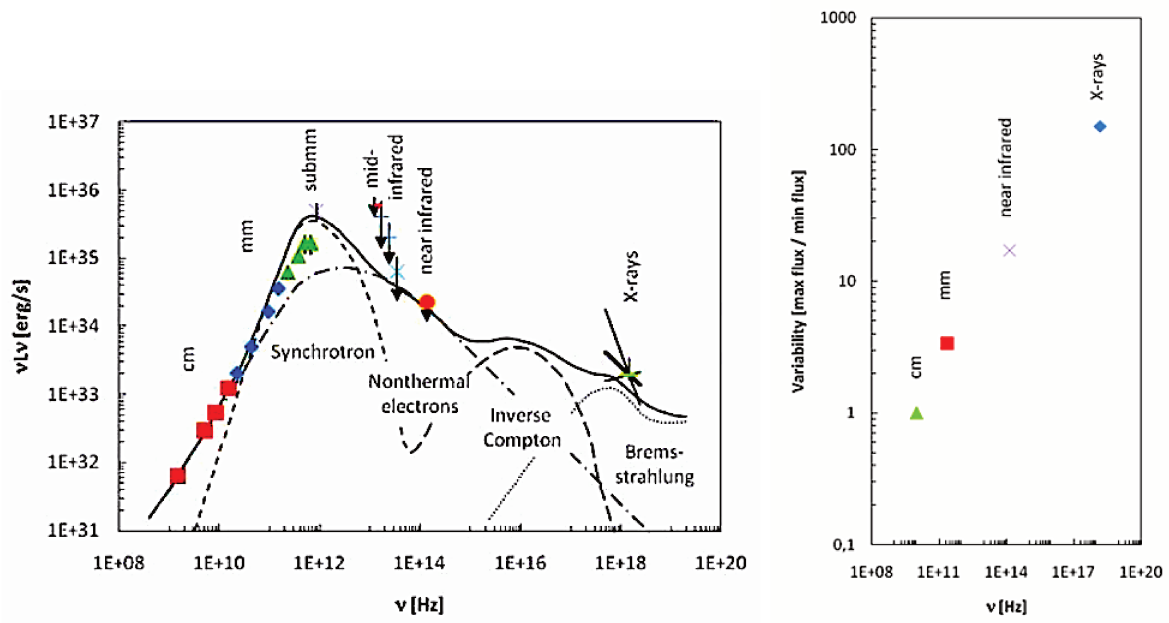

FIGURE 2.3 – *À gauche* : spectre dans l'état quiescent de Sgr A*. Les symboles colorés correspondent à des données observées provenant de différents articles (voir Genzel et al. 2010 pour les références à ces articles). Les spectres modélisés sont quant à eux obtenus à l'aide du modèle développé par Yuan et al. (2003) : en tirets courts il s'agit de l'émission synchrotron d'électrons thermiques, en tirets longs il s'agit de la diffusion Compton inverse, en tiret-points il s'agit de l'émission synchrotron d'électrons non-thermiques et enfin en pointillés, il s'agit de l'émission Bremsstrahlung provenant des régions externes du disque d'accrétion. *À droite* : variations du flux de Sgr A* obtenues dans son état actif et en considérant différentes fréquences. Source : Genzel et al. (2010).

Spectre d'émission

La luminosité bolométrique de la source Sgr A* est d'environ 10^{36} erg s^{-1} soit environ $10^{-8,5} L_{\text{Eddington}}$. On parle alors de luminosité sub-Eddington [3].

Le spectre d'émission du Centre Galactique, dans son état quiescent, est visible à gauche Fig. 2.3 [4]. On remarque que le flux de Sgr A* augmente rapidement avec la fréquence jusqu'à atteindre son maximum dans les longueurs d'onde sub-millimétriques à environ 5×10^{35} erg s^{-1} : on parle de *submillimetric bump*. Puis, le flux diminue jusqu'au domaine de l'infrarouge moyen. Dans l'infrarouge, seules des limites supérieures sont obtenues, dans le cas de l'infrarouge proche celle-ci vaut environ 3×10^{34} erg s^{-1}. Ensuite, la source

3. La luminosité d'Eddington est la luminosité limite au delà de laquelle la pression de radiation domine la gravitation et la matière composant l'objet est éjectée.

4. Voici quelques définitions associées à la Fig. 2.3 : l'émission synchrotron correspond au rayonnement émis par une charge évoluant dans un champ magnétique. L'émission Bremsstrahlung ou rayonnement de freinage est le rayonnement émis lors de la décélération d'une charge électrique dans le champ électrique créé par une autre charge.

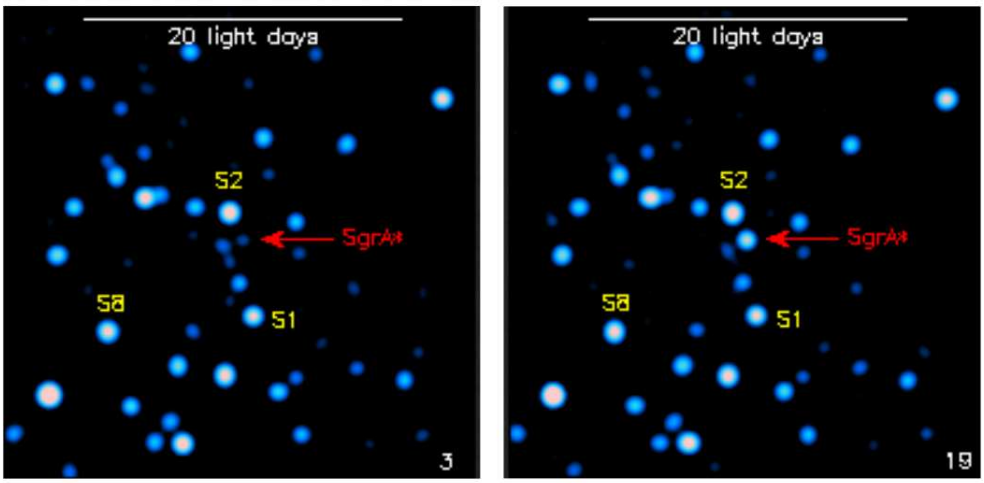

Figure 2.4 – Observation d'un sursaut lumineux au centre de notre galaxie et survenant à quelques minutes d'intervalle. Source : Genzel et al. (2003a).

Sgr A* est de nouveau détectée dans le domaine des rayons X à environ 2×10^{33} erg s^{-1}. À plus haute fréquence, les observations souffrent de la résolution angulaire qui est trop faible pour permettre de distinguer la source Sgr A* de son environnement.

Dans l'état actif de Sgr A*, des sursauts de flux lumineux sont observés (voir Fig. 2.4) (Genzel et al. 2003a; Ghez et al. 2004). À droite Fig. 2.3, on constate que plus la fréquence augmente plus la variation en flux est grande. Dans le domaine du proche infrarouge, le flux peut augmenter d'un facteur environ 40. Ces événements durent une à deux heures et peuvent présenter un signal quasi-périodique d'environ 20 minutes. Un premier modèle permettant d'expliquer ces sursauts est le modèle du point chaud dans lequel ceux-ci seraient une boule d'électrons chauffés par reconnexion magnétique dans un disque d'accrétion entourant le trou noir (Trippe et al. 2007). D'autres modèles de sursauts existent, par exemple le modèle de bruit rouge ou du jet. Dans le premier, les sursauts correspondraient à des fluctuations aléatoires d'intensité dans le disque d'accrétion. Celui-ci a été développé par Press (1978) et a été utilisé dans le cas de la source Sgr A* par Do et al. (2009). Ces derniers ont montré que ce modèle permettait d'expliquer les courbes de lumière obtenues au Centre Galactique. Dans le second modèle, les sursauts seraient des points chauds au sein d'un jet de matière expulsé par la structure d'accrétion entourant le trou noir. Un modèle de jet a d'abord été développé pour expliquer l'état passif de la source Sgr A* par Falcke (1996) et Falcke & Markoff (2000). C'est Markoff et al. (2001) qui a généralisé ce modèle pour également prendre en compte les sursauts observés dans l'état actif de la source centrale.

Nous verrons que ces événements présenteront un atout majeur puisqu'ils permettront de sonder l'espace-temps en champ fort.

Disque d'accrétion

Il n'existe aujourd'hui aucune observation directe de l'hypothétique disque d'accrétion entourant l'objet central, mais il est assez naturel de supposer que le spectre quiescent de Sgr A* est dû à l'existence de ce disque.

Le modèle d'accrétion permettant le mieux d'expliquer le spectre d'émission dans l'état quiescent de Sgr A* est le modèle *ADAF* (*Advection Dominated Accretion Flow*) développé par Narayan & Yi (1994). Dans ce modèle le disque d'accrétion est géométriquement épais et possède un rayonnement non efficace.

Plus récemment, Yuan et al. (2003) ont développé le modèle *RIAF* (*Radiatively Inefficient Accretion Flow*) qui est une sous classe du modèle *ADAF* et a été créé spécialement pour le Centre Galactique. Comme on le voit Fig. 2.3, celui-ci reproduit très bien le spectre observé. D'après ce modèle, l'émission allant du domaine radio à l'infrarouge aurait lieu près du trou noir entre environ 1 et 100 rayons de Schwarzschild. En revanche, l'émission dans le domaine des rayons X naîtrait dans des régions plus éloignées à environ 10^5 rayons de Schwarzschild.

Le modèle d'accrétion classique est celui développé par Shakura & Sunyaev (1973) où le disque est géométriquement mince et rayonne de manière efficace. Ce modèle n'est pas adapté dans le cas de Sgr A* puisque la luminosité bolométrique prédite par ce modèle est de l'ordre de 10^{41} erg s^{-1}, ce qui correspond à 10^5 fois celle observée.

Précisons par ailleurs que le modèle *RIAF* n'est pas l'unique modèle reproduisant correctement les observations. En effet, d'autres modèles existent notamment celui du jet développé par Falcke & Markoff (2000).

2.3 Tests d'aujourd'hui et de demain

Dans cette nouvelle section nous allons nous intéresser aux principaux tests actuels et futurs mis en place en vue de vérifier qu'il y a bien un trou noir supermassif décrit par la relativité générale (trou noir de Kerr) au Centre Galactique. On pourra se référer aux articles de Johannsen (2015) et de Bambi (2015) pour une revue des tests prévus sur la source Sgr A*.

2.3.1 Un trou noir au centre de notre galaxie

Les études citées en amont prouvent de façon convaincante l'existence d'une source compacte au centre de notre galaxie. Cependant, celles-ci ne prouvent pas que Sgr A* est un trou noir.

Les travaux menés par Broderick & Narayan (2006) et Broderick et al. (2009) ont toutefois mis en avant un argument en faveur de la présence d'un horizon des événements en confrontant les densités de flux observées sur Sgr A* et celles obtenues en supposant que Sgr A* possède une surface émettant un rayonnement de corps noir. En effet, dans le cas de la présence d'une surface, la matière s'accrétant autour de Sgr A* va atteindre cette surface et réémettre toute l'énergie restante sous forme de rayonnement de corps

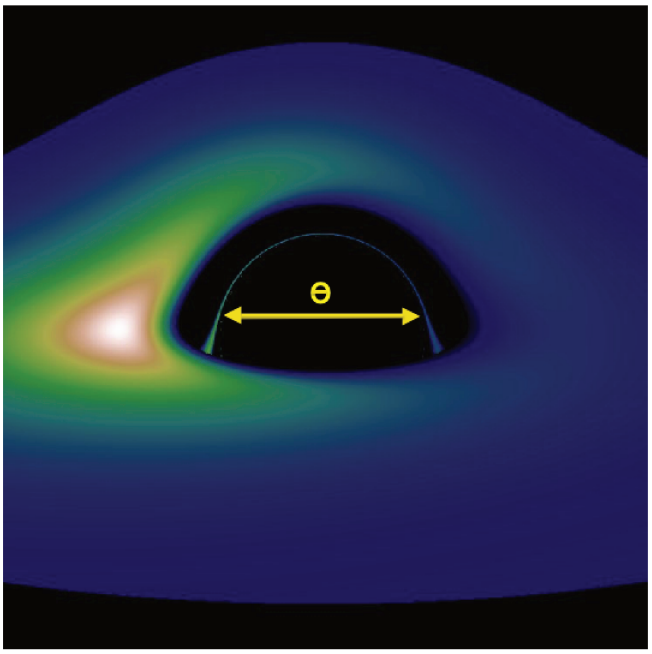

Figure 2.5 – Simulation d'un disque d'accrétion autour d'un trou noir de Schwarzschild. L'angle θ représente la taille angulaire apparente de la silhouette du trou noir.

noir. Cependant, cette composante n'est pas observée dans les densités de flux obtenues sur Sgr A* et laisse donc supposer que cette source ne possède pas de surface. Il existe néanmoins des objets alternatifs aux trous noirs ne présentant, eux non plus, pas de surface émettrice. Par ailleurs, Abramowicz et al. (2002) défendent le fait qu'il n'est pas possible de distinguer les signatures électromagnétiques d'objets compacts possédant une surface de ceux n'en ayant pas.

Plus récemment, Broderick et al. (2011) ont contraint le moment cinétique adimensionné de Sgr A* en ajustant un modèle d'accrétion de type *RIAF*, lui-même contraint via des mesures spectrales et de polarisations déjà existantes sur Sgr A*, à des données interférométriques obtenues par *VLBI* millimétrique (*Millimeter Very Long Baseline Interferometry*). Le réseau utilisé est à un sous ensemble de réseaux de radiotélescopes constituant l'*EHT*. Dans le cas de l'étude citée ici, ils ont observé la source centrale en combinant les réseaux de radiotélescopes d'Arizona (*SMT*), de Californie (*CARMA*) et d'Hawaï (*JCMT*). Ils ont alors pu contraindre le moment cinétique adimensionné de Sgr A* à $\bar{a} = 0^{+0,64(1\sigma)+0,86(2\sigma)}$ et ainsi montrer que ces valeurs étaient en accord avec celles permises par les trous noirs de Kerr. Mentionnons toutefois que les valeurs obtenues ici dépendent du modèle choisi pour l'ajustement.

Dans le futur proche, de nombreux tests permettant de conforter ou non l'hypothèse de l'existence d'un trou noir seront mis en place. Notamment avec l'arrivée sur le ciel de

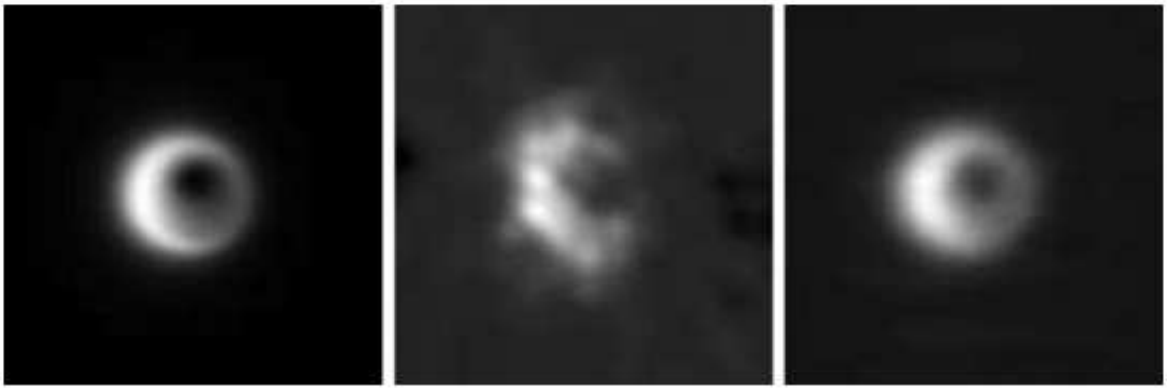

FIGURE 2.6 – Simulations de la source radio Sgr A*. *À droite* : image obtenue avec un modèle d'accrétion de type *RIAF* en considérant un trou noir de Schwarzschild et une inclinaison de 30° (angle entre la ligne de visée et l'axe de rotation du trou noir). *Au milieu* : même image que celle de droite mais reconstituée à l'aide de 7 stations de radiotélescopes. *À gauche* : image reconstituée avec les 13 stations de l'*EHT*. Source : Fish & Doeleman (2010).

deux instruments, l'*EHT* que nous avons déjà cité et l'instrument *GRAVITY*[5] qui sera davantage détaillé dans le chapitre suivant.

Dans le cas de l'*EHT*, ont prévoit d'atteindre une résolution angulaire de 20 microsecondes d'angle grâce à la combinaison de 13 stations de radiotélescopes réparties sur le globe terrestre (Fish & Doeleman 2010). On sait, grâce à la relativité générale, que la taille angulaire apparente de la silhouette d'un trou noir (voir Fig. 1.4 et 2.5) de masse égale à environ $4{,}3 \times 10^6$ masses solaires situé à environ 8 kiloparsecs et vu depuis la Terre, varie entre 50 microsecondes d'angle pour un trou noir de Schwarzschild à 45 microsecondes d'angle pour un trou noir de Kerr extrême ($|\bar{a}| = 1$). Nous serons donc à même de résoudre le candidat trou noir au centre de notre galaxie avec l'*EHT* puisque sa résolution angulaire sera plus petite que la taille apparente de la silhouette de Sgr A*. Afin de rendre compte des résultats pouvant être obtenus avec un tel instrument, des simulations ont été effectuées en considérant 7 stations puis la totalité des 13 stations. Celles-ci sont visibles Fig. 2.6 : à droite est représentée l'image théorique simulée de Sgr A* à l'aide d'un modèle d'accrétion de type *RIAF*, les deux autres images sont celles que l'on obtiendrait grâce à l'*EHT*. On remarque tout de suite l'apparition plus fine de la silhouette du trou noir avec les 13 stations.

Grâce aux futures mesures plus précises obtenues avec l'*EHT* on pourra avoir une meilleure estimation de l'émission quiescente de Sgr A* et donc mieux contraindre les modèles d'accrétion. Cela aura pour conséquence d'améliorer l'estimation du moment cinétique adimensionné de l'objet central. L'autre méthode pour remonter à ce paramètre est de sonder l'espace-temps à proximité de l'*ISCO* à l'aide des sursauts survenant très

5. `http://www.lesia.obspm.fr/-GRAVITY-.html`

près du trou noir (voir Sect. 2.2.2). Doeleman et al. (2009) ont démontré qu'il sera possible de détecter et de contraindre, via les observations obtenues avec l'*EHT*, la structure périodique de ces événements et donc de remonter à la période orbitale de l'*ISCO*, elle-même dépendante du moment cinétique adimensionné du trou noir. En effet, la période à l'*ISCO* diminue lorsque le moment cinétique augmente. Dans leur étude, les auteurs ont considéré le modèle du point chaud pour simuler le sursaut, cependant, il sera nécessaire d'appliquer leur étude à d'autres modèles afin de déterminer si leurs conclusions restent valables.

L'instrument *GRAVITY* est également un interféromètre et utilise quant à lui quatre télescopes. Contrairement à l'*EHT* cet instrument observe dans le domaine du proche infrarouge. L'un des principaux objectifs de cet instrument est également de vérifier si l'objet central est bien un trou noir. Tout comme l'*EHT*, *GRAVITY* utilisera les sursauts pour sonder l'espace-temps proche de Sgr A*. Grâce à son suivi du Centre Galactique on pourra reconstituer l'orbite du sursaut et ainsi potentiellement contraindre le moment cinétique adimensionné du candidat trou noir à l'aide d'un modèle d'orbites relativistes. Hamaus et al. (2009) ont notamment démontré qu'il sera possible de détecter de telles orbites avec *GRAVITY*. Néanmoins, ces auteurs ont eux aussi uniquement considéré le modèle du point chaud pour simuler les sursauts, les conclusions pourraient donc être différentes avec un autre modèle.

L'autre méthode prévue pour contraindre le moment cinétique adimensionné de l'objet central avec l'instrument *GRAVITY* est d'observer les étoiles en orbite autour de Sgr A* et plus particulièrement l'étoile S2 ainsi que de nouvelles étoiles plus proches du Centre Galactique.

Les futurs tests envisagés vont probablement renforcer l'hypothèse actuelle selon laquelle un trou noir supermassif peuple le centre de notre galaxie. Cependant, nous verrons que vérifier la présence d'un trou noir, et qui plus est décrit par la relativité générale, est une tâche difficile puisque les observations obtenues avec d'autres objets compacts, décrits ou non par cette théorie de la gravitation, sont très proches de celles obtenues avec un trou noir de Kerr.

2.3.2 Objets alternatifs aux trous noirs de Kerr

Dans cette nouvelle section nous souhaitons mettre en avant qu'il existe un grand nombre d'objets alternatifs permettant d'expliquer les observations obtenues au Centre Galactique. Plus précisément, on entend par objets alternatifs aux trous noirs de Kerr, deux catégories d'objets. La première correspond à des objets décrits par la relativité générale qui ne sont pas des trous noirs de Kerr, et qui permettent également d'expliquer la masse de la source Sgr A*. Nous verrons ci-dessous deux de ces objets. La seconde classe correspond aux trous noirs décrits par les théories de la gravitation autres que la relativité générale. Il s'agit des théories alternatives ainsi que des théories obtenues en perturbant la métrique de Kerr (voir Chapitre 1).

À l'heure actuelle, nous n'avons pas encore réussi à discriminer l'ensemble de ces objets

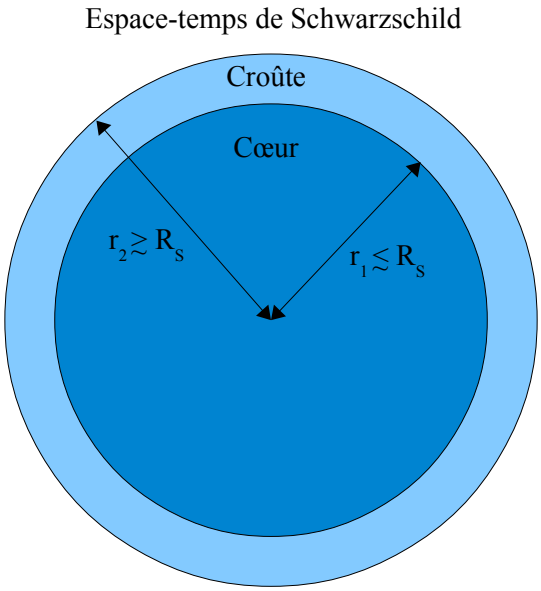

FIGURE 2.7 – Schéma d'un *GRAVASTAR* dans le modèle de Mazur & Mottola (2001).

alternatifs car les observations simulées avec ceux-ci sont très proches de celles obtenues avec un trou noir de Kerr. Nous verrons cependant dans la suite certains efforts déployés en vue d'arriver à dissocier ce dernier des objets alternatifs.

Objets alternatifs décrits par la relativité générale

On considère $M = G = c = 1$ pour les équations présentées ci-dessous.

Le *GRAVASTAR* (*GRAvitational VAcuum STAR*)

Le modèle du *GRAVASTAR* a été développé en particulier pour proposer un objet ayant une compacité comparable à celle d'un trou noir mais ne possédant ni horizon des événements ni singularité centrale (Mazur & Mottola 2001). Cet objet est à symétrie sphérique et est composé de deux couches : le cœur et la croûte (voir Fig. 2.7). Il existe également deux zones de transition infiniment minces situées entre le cœur et la croûte et entre la croûte et l'extérieur.

Le cœur du *GRAVASTAR* est constitué de vide possédant une énergie correspondant à celle de l'énergie noire et dont l'équation d'état est $p = -\rho c^2 = cst$. L'espace-temps utilisé pour le décrire est celui de de Sitter[6] et s'écrit en coordonnées statiques (t,r,θ,ϕ) :

6. On pourra se référer au cours de Gourgoulhon (2014) pour une définition plus détaillée de l'espace de de Sitter.

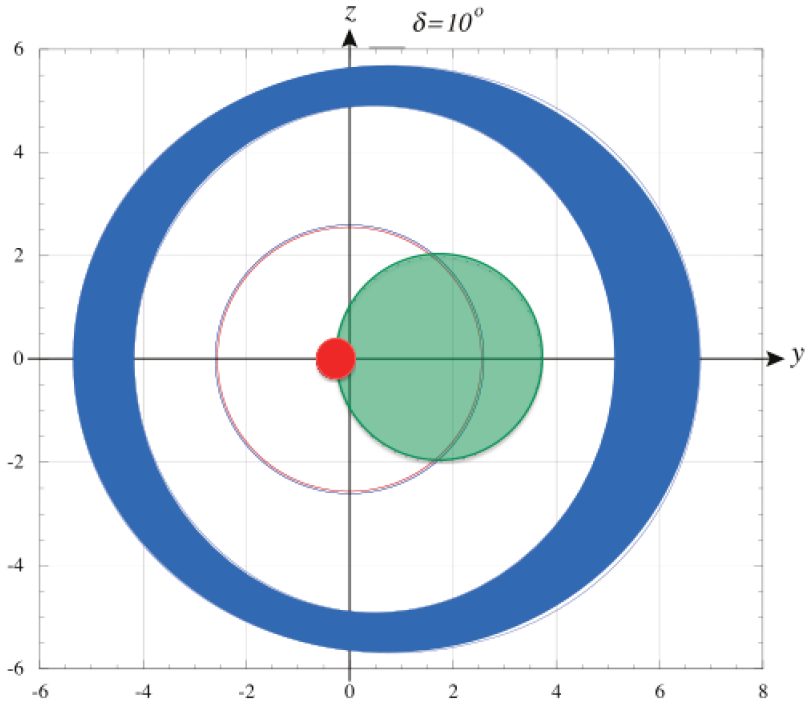

Figure 2.8 – Images d'une étoile lentillées par un trou noir de Schwarzschild ou un *GRAVASTAR* et telles que vues par observateur distant de 1000 rayons de Schwarzschild de l'objet compact. L'étoile est représentée en vert sur l'image et est située dans le plan (x,y). Plus précisément, elle est positionnée à 10 degrés de l'axe $-x$ (l'axe x pointe vers l'observateur) dans la région $y > 0$, et est distante de 10 rayons de Schwarzschild du corps déflecteur. Le rayon de l'étoile est de 2 rayons de Schwarzschild. Les images en bleu (cercle épais et cercle fin situé à l'intérieur de l'épais) sont celles obtenues en considérant un trou noir de Schwarzschild pour corps déflecteur. On reconnaît bien ici la formation presque parfaite de l'anneau d'Einstein. Le second cercle plus fin est un anneau d'Einstein d'ordre supérieur. En rouge sont représentées les images de cette même étoile avec pour corps déflecteur un *GRAVASTAR* de rayon 1 R_S. On remarque que l'image primaire (le petit disque rouge près du centre du repère (y,z)) est très différente de celle obtenue avec le trou noir. Les axes de la figure sont exprimés en unité de R_S. Source : Sakai et al. (2014).

$$\mathrm{d}s^2 = -(1 - b^2 r^2)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - b^2 r^2} + r^2 \mathrm{d}\Omega^2 \tag{2.1}$$

avec $b^2 = 8\pi\rho/3$ et $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2$. La croûte du *GRAVASTAR* est composée d'un fluide parfait d'équation d'état extrême $p = \rho c^2$. La compacité du *GRAVASTAR* tend vers celle d'un trou noir, égale à 0,5, lorsque l'épaisseur de la croûte tend vers zéro (Chirenti & Rezzolla 2007). Afin de se rapprocher de cette limite, il faut que le rayon du cœur que l'on note r_1 et le rayon externe de la croûte que l'on note r_2 soient tous deux proches du rayon de Schwarzschild R_S et vérifier $r_1 \lesssim R_S$ et $r_2 \gtrsim R_S$ (voir Fig. 2.7).

À l'extérieur l'espace-temps est décrit par celui de Schwarzschild, l'équation d'état se

réduit donc à $p = c^2 \rho = 0$ puisque cette métrique est une solution du vide de l'équation d'Einstein. Quant aux deux zones de transition, elles relient les différents environnements de manière discontinue : discontinuité dans les coefficients métriques et dans les grandeurs hydrodynamiques.

Cet objet est des plus exotiques mais constitue tout de même une alternative au trou noir. Une étude récente a été effectuée afin de comparer les images lentillées d'une étoile située à l'arrière d'un trou noir de Schwarzschild ou d'un *GRAVASTAR* (Sakai et al. 2014). Cependant, une hypothèse forte a été faite dans ces travaux puisque le *GRAVASTAR* est supposé optiquement mince. L'image primaire de l'étoile obtenue avec ce dernier est donc très différente de celle obtenue avec un trou noir de Schwarzschild (voir Fig. 2.8). Plus précisément, l'image formée avec le *GRAVASTAR* se trouve, en projection, à l'intérieur de celui-ci car les photons passent au travers de l'objet possédant un rayon de l'ordre de 1 rayon de Schwarzschild.

Sous l'hypothèse choisie par les auteurs, il est possible de discriminer un *GRAVASTAR* d'un trou noir décrit par la relativité générale. Néanmoins, supposer que le *GRAVASTAR* possède une surface optiquement mince est un hypothèse très simplificatrice. Par ailleurs, on note que la configuration considérée de l'étoile par rapport au corps déflecteur reste un cas très rare puisqu'il suggère que ces deux objets soient quasiment alignés.

L'étoile bosonique

L'étoile bosonique est un modèle qui a été développé par Feinblum & McKinley (1968), Kaup (1968) et Ruffini & Bonazzola (1969). Pour davantage de détail sur cet objet on pourra consulter la revue de Liebling & Palenzuela (2012). Comme son nom l'indique, l'étoile bosonique est composée de bosons. Ces bosons sont des bosons scalaires et présentent donc un moment cinétique intrinsèque nul. Tout comme les trous noirs, les étoiles bosoniques ne possèdent pas de surface. Cependant, elle ne possèdent, comme pour les *GRAVASTAR*, ni horizon des événements ni singularité centrale. Ces objets sont décrits par la relativité générale et constituent des objets exotiques de cette théorie de la gravitation. L'évolution d'une particule test dans l'espace-temps d'une étoile bosonique est donc régie par l'équation d'Einstein (1.2). Néanmoins, contrairement aux trous noirs de Schwarzschild ou de Kerr, le tenseur énergie-impulsion de la matière est non nul puisque cette étoile est composée de bosons. Ce tenseur est défini comme :

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\nabla_\mu \bar{\Phi} \nabla_\nu \Phi + \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \bar{\Phi}\right] - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\left[g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \bar{\Phi} \nabla_\sigma \Phi + V(|\Phi|^2)\right] \tag{2.2}$$

où Φ est le champ scalaire associé aux bosons, $\bar{\Phi}$ est le champ scalaire complexe et $V(|\Phi|^2)$ est le potentiel d'auto-interaction du champ. L'évolution de ce champ scalaire est régi par l'équation de Klein-Gordon exprimée comme :

$$(\Box + m^2)\bar{\Phi} = 0 \tag{2.3}$$

avec $\Box$ l'opérateur d'Alembertien associé à la métrique $g_{\mu\nu}$, et m la masse d'un boson.

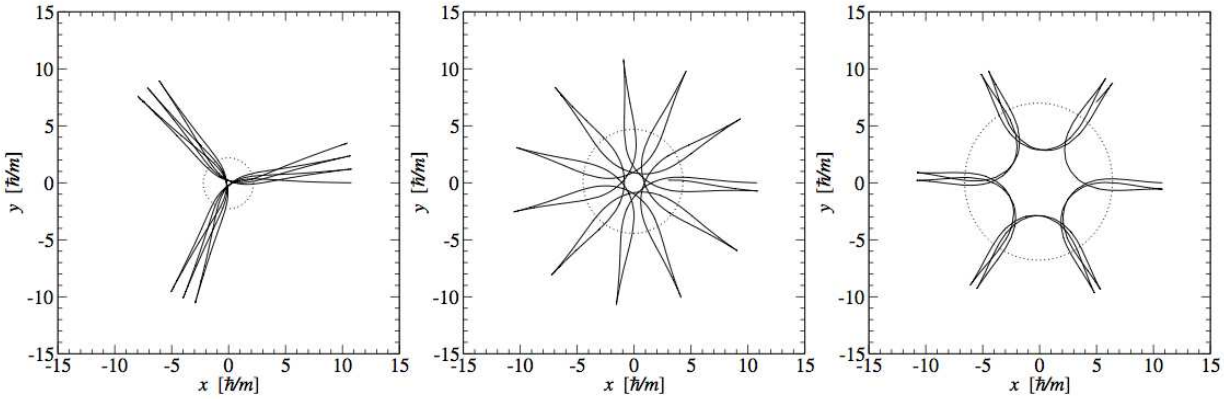

Figure 2.9 – Exemples d'orbites de particules tests obtenues dans le plan équatorial d'une mini-étoile bosonique de moment cinétique adimensionné égal à 0,8 (à droite), 1,05 (au milieu) et 1,18 (à gauche). Les cercles en pointillés représentent le lieu du maximum du champ scalaire. Source : Grandclément et al. (2014).

La résolution de ces équations demande donc d'avoir une connaissance du potentiel du boson ainsi que sa masse.

À l'heure actuelle, le seul boson élémentaire de moment cinétique intrinsèque 0 que nous connaissons est le boson de Higgs dont la masse est estimée à $m_H = 125{,}3 \pm 0{,}6$ GeV (Aad et al. 2012). Pour ce qui est du potentiel, celui-ci existe sous plusieurs formes. Il y a notamment celui des mini-étoiles bosoniques (Schunck & Mielke 2003) où $V(|\Phi|^2) = m^2 \ / \ \hbar^2 \ |\Phi|^2$ avec $\hbar$ la constante de Planck réduite, mais aussi les étoiles bosoniques solitoniques (Friedberg et al. 1987) où $V(|\Phi|^2) = m^2/\hbar^2|\Phi|^2(1 - |\Phi|^2/m^2)^2$. Seulement, si l'on considère le boson de Higgs comme composant de l'étoile bosonique on aboutit à une masse critique trop faible pour expliquer la masse de la source Sgr A* avec le potentiel des mini-étoiles bosoniques : $M_{\text{crit}} \approx 10^9$ kg $\ll M_{\text{TN}} \approx 10^{36}$ kg. Néanmoins, dans le cas de l'étoile bosonique solitonique on trouve une masse critique plus proche de celle du Centre Galactique : $M_{\text{crit}} \approx 10^{41}$ kg.

L'imposante masse de la source Sgr A* peut donc tout à fait être expliquée par la présence d'une étoile bosonique au cœur de notre galaxie. C'est pour cela que la communauté déploie des efforts afin de déterminer comment celle-ci pourra être distinguée d'un trou noir supermassif. Une étude récente sur les orbites stellaires pouvant être obtenues dans le cas d'une étoile bosonique a notamment été menée par Grandclément et al. (2014). Quelques cas d'orbites de particules tests à moment cinétique nul et lancées initialement dans le plan équatorial (x,y) de l'étoile bosonique sont présentés Fig. 2.9. On constate que les orbites ainsi obtenues sont très différentes de celles observées avec un trou noir de Kerr ou de Schwarzschild car celles-ci présentent des points de rebroussement donnant lieu à des orbites en forme de pétales très piquées. D'autre part, puisque les bosons n'interagissent pas avec la matière, la particule à moment cinétique nul peut traverser l'étoile. Or, ce phénomène n'est pas observé dans le cas d'un trou noir puisque de telles particules sont

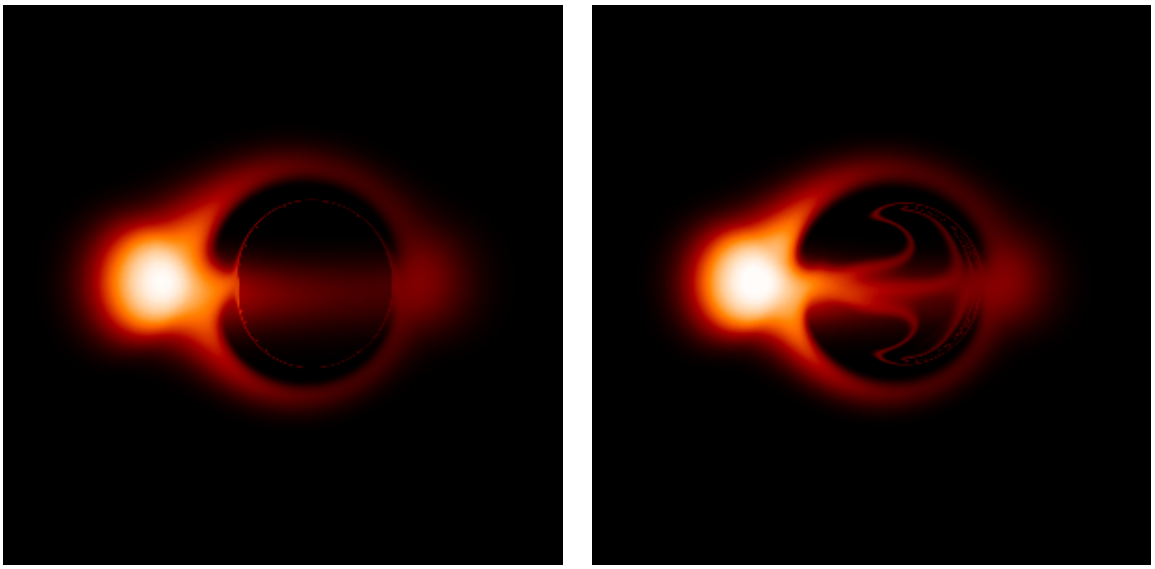

FIGURE 2.10 – Image simulée en longueur d'onde sub-millimétrique, correspondant à la bande spectrale d'observation de l'*EHT*, d'un disque d'accrétion autour d'un trou noir de Kerr (à gauche) et d'une mini-étoile bosonique (à droite). Le moment cinétique adimensionné dans les deux cas est de 0,9. Source : Vincent et al. (2016).

amenées à tomber dans celui-ci. Si l'instrument *GRAVITY* parvient à observer de telles orbites on pourra alors faire l'hypothèse forte que la source au centre de notre galaxie est une étoile bosonique. Néanmoins, il faudra s'assurer que ce type d'orbites ne se retrouve pas avec d'autres objets alternatifs : objets exotiques décrits par la relativité générale ou objets décrits par d'autres théories de la gravitation.

Une seconde étude plus récente encore a mis en évidence le fait qu'il sera très difficile de différencier l'image d'une structure d'accrétion entourant un trou noir de Kerr de celle entourant une étoile bosonique (Vincent et al. 2016). En effet, cette dernière ne possède pas de surface solide et donc de surface émettrice, tout comme les trous noirs. On remarque d'ailleurs Fig. 2.10 que la structure globale de l'émission ressemble à celle obtenue avec un trou noir. Les seules différences visibles sont les structures situées au centre de l'image formée avec l'étoile bosonique et qui ne sont pas présentes dans celle formée avec le trou noir de Kerr. Cependant, ces structures ne font que quelques microsecondes d'angle d'épaisseur ($\approx 3\ \mu$as) ce qui est bien en dessous de la limite de résolution prévue pour l'*EHT* ($\approx 20\ \mu$as). Ajoutons néanmoins qu'il est tout à fait possible qu'un modèle avec étoile bosonique permette de mieux expliquer les observations obtenues au Centre Galactique notamment grâce à la présence de ces structures internes.

Objets alternatifs non décrits par la relativité générale

À présent nous nous intéressons aux trous noirs décrits par des théories autres que la relativité générale. Nous allons présenter les principales méthodes envisagées afin de

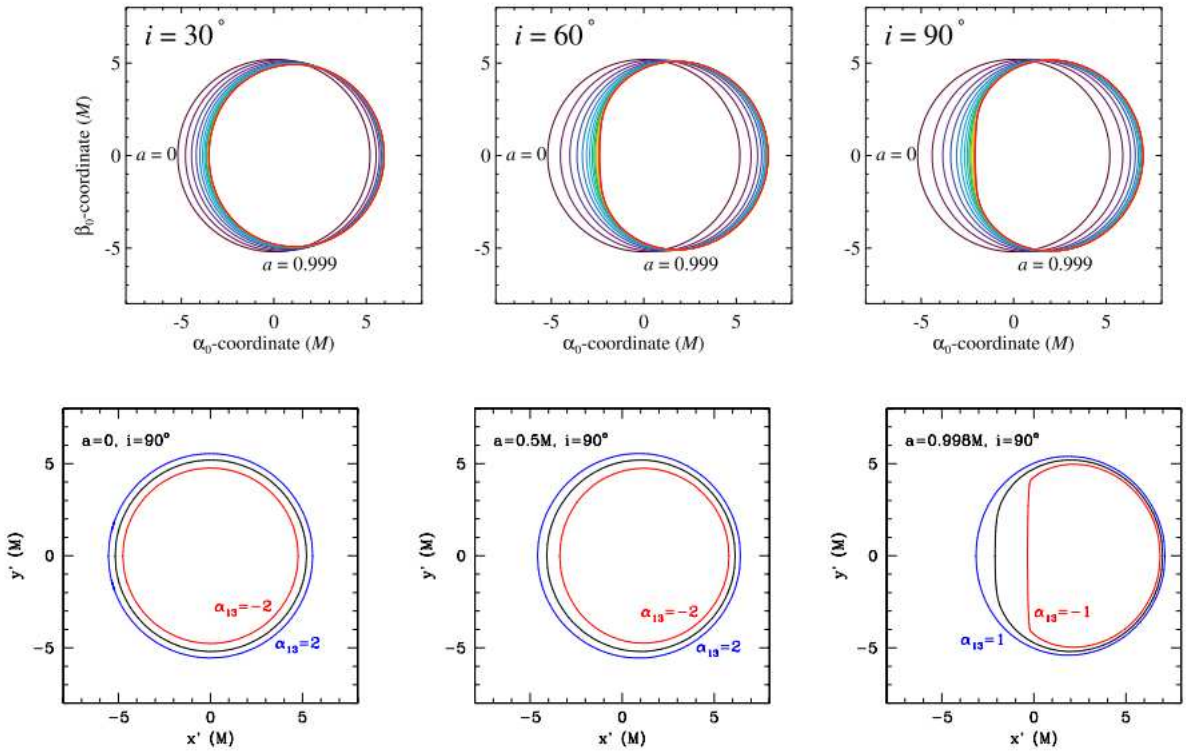

FIGURE 2.11 – Sphères de photons obtenues en métrique de Kerr (rangée du haut) et en métrique de Kerr perturbée (rangée du bas) pour différents moments cinétiques adimensionnés, inclinaisons et déviations à Kerr quantifiées par le paramètre α_{13} (si $\alpha_{13} = 0$ alors on se ramène à la métrique de Kerr). Dans les images du haut, les couleurs représentent différentes valeurs de moment cinétique adimensionné : de $\bar{a} = 0$ en noir à $\bar{a} = 0{,}999$ en rouge. Dans les images du bas, la sphère de photons en noir est obtenue dans le cas où $\alpha_{13} = 0$. Les autres couleurs dénotent différentes valeurs du paramètre α_{13}. Les moments cinétiques adimensionnés notés sur les différents graphiques sont notés a au lieu de $\bar{a}$. Source : Johannsen (2013).

discriminer ces trous noirs des trous noirs de Kerr. Précisons que les méthodes discutées ici sont également celles utilisées pour différencier ces derniers des objets exotiques obtenus en relativité générale.

Sphère de photons d'un trou noir

Comme nous l'avons vu précédemment, l'*EHT* nous fournira dans un futur proche une image de l'environnement immédiat du candidat trou noir dans laquelle apparaîtra la silhouette de l'objet central. La limite interne de cette silhouette correspond à la sphère de photons vue Fig. 1.4. Cette sphère se forme proche de l'horizon des événements et constitue donc une sonde intéressante des propriétés de l'espace-temps en champ fort.

Les observations à très hautes résolutions angulaires pourraient notamment permettre de l'observer et ainsi tester l'hypothèse de trou noir de Kerr, puisque les sphères de photons obtenues en métrique de Kerr ont des formes différentes de celles obtenues avec des trous noirs décrits par d'autres théories de la gravitation.

Enormément de travaux ont été effectués dans ce domaine car beaucoup de ces théories existent et n'ont pas encore été mises en défaut (voir la revue de Johannsen 2015). Un exemple d'étude de ce type a été mené par Johannsen (2013) où l'auteur compare les sphères de photons obtenues en métrique de Kerr à celles obtenues en métrique de Kerr perturbée. Cette dernière est déterminée en ajoutant des termes supplémentaires à la métrique de Kerr (Johannsen & Psaltis 2011), comme nous l'avons brièvement discuté à la fin du premier chapitre.

Fig. 2.11 sont visibles les sphères de photons prédites par les métriques de Kerr et de Kerr perturbé, et cela pour différents moments cinétiques adimensionnés, inclinaisons et déviations à Kerr. On remarque que les différences entre les deux métriques sont très faibles lorsque le moment cinétique adimensionné ainsi que l'inclinaison sont faibles. Néanmoins, lorsque l'inclinaison augmente et que le moment cinétique du trou noir est élevé, les sphères de photons perdent leur symétrie et des différences plus importantes entre les métriques émergent. On le voit particulièrement bien dans le cas où l'on a un moment cinétique adimensionné de 0,998 et une inclinaison de 90 degrés.

On comprend cependant ici la nécessité d'avoir une très bonne résolution angulaire. Si on considère le cas optimal présenté Fig. 2.11, la différence maximale obtenue entre les deux métriques n'est que de quelques microsecondes d'angle (≈ 2 μas). Tout comme pour les structures internes visibles pour l'étoile bosonique Fig. 2.10, il semble difficile avec l'*EHT* de faire émerger ces différences. Toutefois, il faut garder en tête qu'il est possible qu'un modèle obtenu avec une certaine métrique, par exemple celle de Kerr, puisse mieux expliquer les observations de la source Sgr A* grâce à la présence de ces faibles différences.

Flot d'accrétion d'un trou noir

Comme nous l'avons rapidement vu dans la rubrique sur les étoiles bosoniques, le flux engendré par un disque d'accrétion autour de l'objet central est également un outil pouvant être utilisé pour sonder l'espace-temps en champ fort. Dans le cas d'une étoile bosonique cet outil ne s'avère pas très concluant puisque la structure globale de l'émission autour d'un trou noir de Kerr est identique à celle obtenue avec cet objet exotique. Cependant, il est possible que la signature du flux soit différente si l'on considère des trous noirs décrits par d'autres théories.

Une étude semblable a notamment été menée par Broderick et al. (2014) où ils décrivent les trous noirs avec la métrique dite quasi-Kerr, développée par Glampedakis & Babak (2006) et qui est similaire à celle de Johannsen & Psaltis (2011). Le moment quadrupolaire, dans cet espace-temps, s'exprime comme $Q_{2,\mathrm{Quasi-Kerr}} = -M[a^2 + \epsilon(GM/c)^2]$ avec ϵ un paramètre sans dimension permettant de caractériser là encore la déviation à la métrique

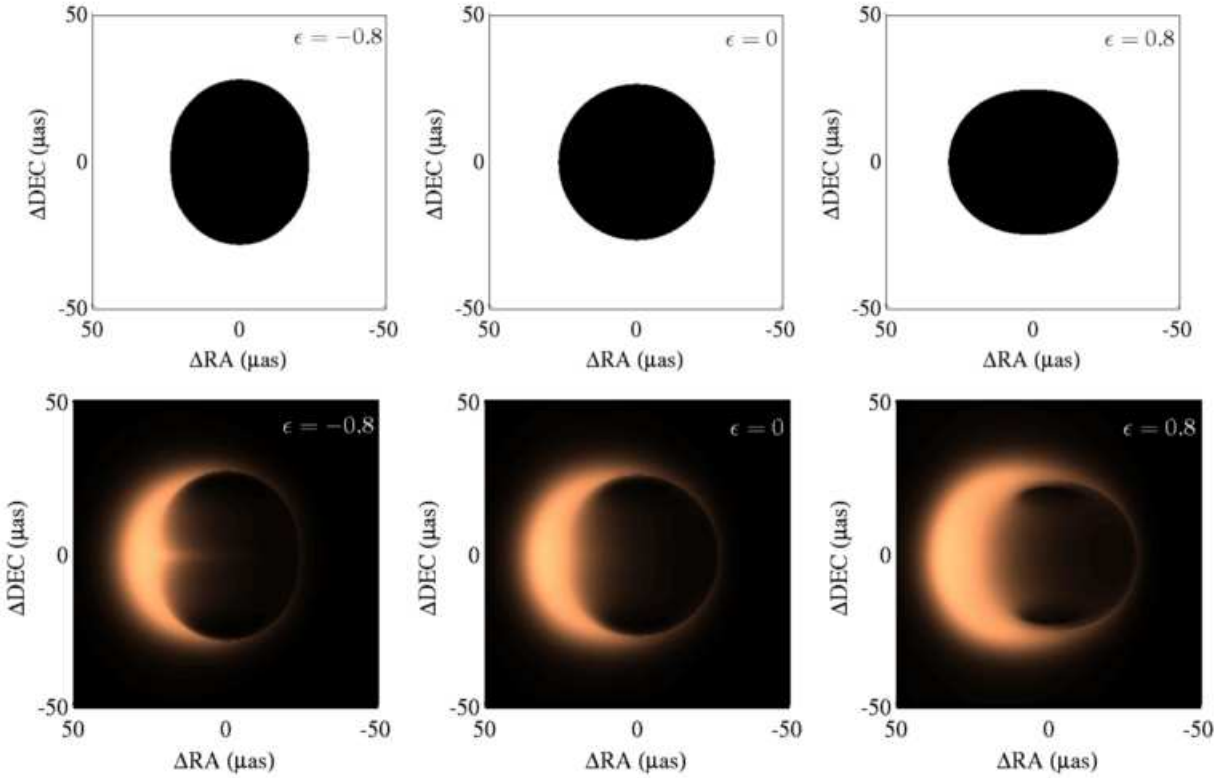

Figure 2.12 – *En haut* : représentations de l'horizon des événements de trous noirs sans rotation vus sous une inclinaison de 90 degrés et pour différents moments quadrupolaires. *En bas* : images des trois différents trous noirs obtenues avec un modèle *RIAF* (voir Sect. 2.2.2). Les trous noirs de gauche et droite violent le théorème d'absence de chevelure, tandis que celui du milieu correspond au trou noir de Schwarzschild. Source : Broderick et al. (2014).

de Kerr. Broderick et al. (2014) ont généré trois types de trous noirs en considérant trois valeurs de ϵ et en prenant $a = 0$. Les différents moments quadrupolaires en résultant sont positif, négatif et nul. Ce dernier correspondant au trou noir de Schwarzschild c'est-à-dire qu'il est le seul des trois à vérifier l'équation $Q_2 = -Ma^2$ induite par le théorème d'absence de chevelure (voir Sect. 1.2.3). Fig. 2.12, on peut voir les images d'un disque d'accrétion obtenues pour les trois trous noirs. Les différences visibles entre l'image obtenue avec un trou noir de Schwarzschild et celles obtenues avec un trou noir violant le théorème d'absence de chevelure sont la morphologie ainsi que l'intensité du flot d'accrétion.

Les propriétés de ce dernier pourront donc nous apporter des réponses quant à la violation du théorème d'absence de chevelure, c'est-à-dire si le flot d'accrétion observé peut être expliqué par un trou noir de Kerr ou non. Précisons là encore que pour différencier ces différents trous noirs il est nécessaire d'avoir une très bonne résolution angulaire. D'autre part, il est important de déterminer si les déviations à la métrique de Kerr

mises en évidence ici sont également observables en considérant d'autres théories de la gravitation et/ou modèles d'accrétion. En effet, il est possible qu'en utilisant un autre modèle d'accrétion tout en gardant la métrique utilisée par ces auteurs, nous aboutissions à des conclusions différentes.

Orbites stellaires

Les orbites des étoiles en rotation autour d'un objet compact constituent également un outil permettant de tester la présence d'un trou noir décrit par la relativité générale au centre de notre galaxie. C'est d'ailleurs ce que nous avons pu remarquer avec les étoiles bosoniques puisqu'il est possible d'obtenir des orbites très différentes de celles rencontrées en métrique de Kerr. En particulier, un test du théorème d'absence de chevelure a été proposé par Will (2008), et exploré plus en détail dans les articles de Angélil et al. (2010), Merritt et al. (2010) et Sadeghian & Will (2011).

En particulier, Will (2008) démontre qu'il est possible de tester ce théorème en utilisant au moins deux étoiles ayant une période orbitale d'au moins 0,1 an et une grande excentricité d'environ 0,9. Grâce aux différentes précessions existant dans de tels systèmes, il serait possible de remonter à une mesure de la masse, du moment cinétique ainsi que du moment quadrupolaire du trou noir. Il serait alors possible de vérifier la formule : $Q_2 = -Ma^2$. L'avancée du périastre de ces étoiles est dominée par le terme de masse de l'objet central, tandis que les contributions du moment cinétique ainsi que du moment quadrupolaire sont très faibles et donc difficiles à estimer. Néanmoins, la précession du plan orbital de ces étoiles est déterminée par le moment cinétique du trou noir au travers de l'effet Lense-Thirring (voir Sect. 1.3.2) et par son moment quadrupolaire. La contribution majeure à cette précession est certes celle du moment cinétique mais dans le cas d'orbites à forte excentricité et courte période, le moment quadrupolaire peut être mesuré. Par exemple, si on se place dans le cas où l'on a $\bar{a} = 0{,}7$ et une excentricité $e = 0{,}9$, les taux de précession induits par l'effet Lense-Thirring et le moment quadrupolaire peuvent atteindre 10 microsecondes d'angle par an si on considère des étoiles de période 0,8 an et 0,08 an, respectivement.

Tester l'hypothèse de trou noir de Kerr avec les orbites d'étoiles constitue donc une autre voie à considérer en plus des images de la source de Sgr A*. Cependant, il est nécessaire d'approfondir notre savoir sur les différentes orbites d'étoiles pouvant être obtenues avec divers objets alternatifs puisqu'il est possible que celles-ci soient quasi identiques à celles observées en relativité générale, et cela même en champ gravitationnel fort.

Ajoutons qu'afin d'effectuer un test fort de la présence d'un trou noir de Kerr au Centre Galactique, il serait intéressant d'appliquer l'idée proposée par Psaltis et al. (2015) qui consiste à combiner les différentes mesures de moment cinétique et moment quadrupolaire du trou noir obtenues avec par exemple l'instrument *GRAVITY* et l'*EHT*. Cela permettra d'avoir une estimation plus précise de ces paramètres et donc d'effectuer un test du

théorème d'absence de chevelure plus robuste.

Chapitre 3

L'instrument *GRAVITY*

Sommaire

3.1 Les bases de l'interférométrie à deux télescopes 65

3.1.1 Fonctions de cohérence spatiale et de visibilité 65

3.1.2 Une question de résolution angulaire et de précision astrométrique 68

3.2 Présentation de l'instrument 70

3.2.1 Les dessous de *GRAVITY* 71

3.2.2 *GRAVITY* en quelques chiffres 75

3.2.3 Objectifs scientifiques de *GRAVITY* 75

3.1 Les bases de l'interférométrie à deux télescopes

Dans cette section, nous allons présenter quelques bases de l'interférométrie à deux télescopes. Les informations qui suivent sont tirées principalement de Haniff (2007) et de Léna (1996).

3.1.1 Fonctions de cohérence spatiale et de visibilité

Pour une bonne compréhension de la situation décrite ci-dessous, on pourra se référer à la Fig. 3.1.

Considérons une source astrophysique émettant un rayonnement électromagnétique et deux télescopes de diamètre D distants de $\mathbf{B} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, avec $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ les vecteurs positions des deux télescopes et $||\mathbf{B}||$ la ligne de base. Les surfaces d'onde issues de la source sont recueillies par les deux télescopes et sont ensuite recombinées. Les interférences obtenues sont précieuses pour étudier des rayonnements partiellement ou totalement cohérents entre eux.

La fonction de cohérence spatiale $\mathcal{V}$ des deux ondes de champs électromagnétiques est mesurée par le produit de corrélation qui permet de déterminer de façon quantitative la ressemblance de deux fonctions. Celle-ci est mesurée grâce aux interférences.

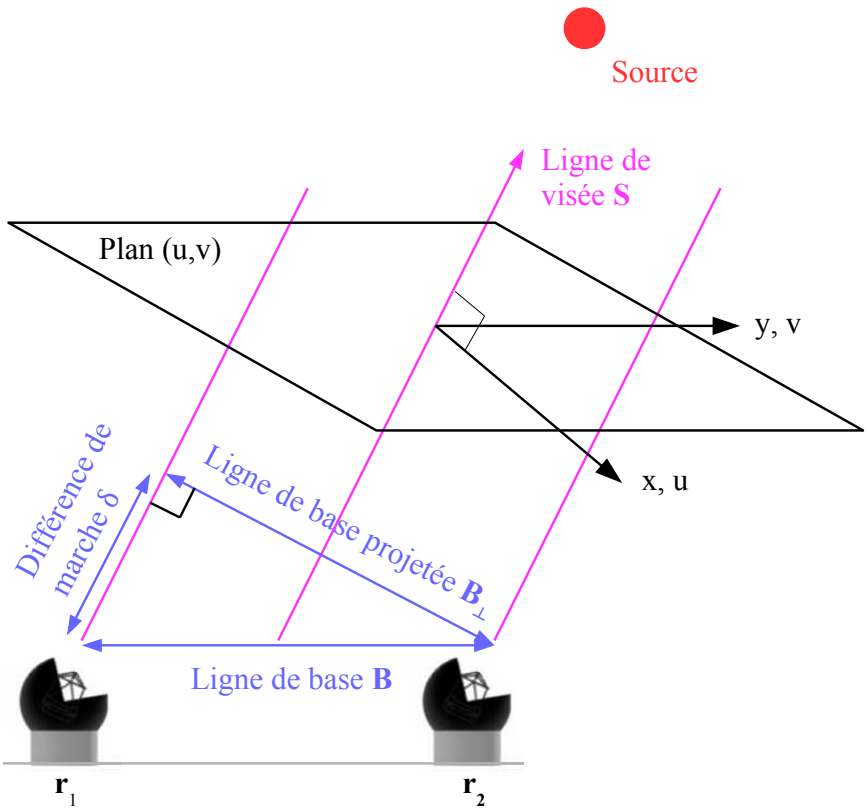

FIGURE 3.1 – Schéma d'un interféromètre à deux télescopes. Ces derniers sont séparés par la ligne de base **B**. La différence entre les deux rayons lumineux qui atteignent les deux télescopes est égale à la différence de marche δ. Celle-ci est obtenue en calculant le produit scalaire : **B**.**S** où **S** représente le vecteur directeur de la ligne de visée. Cette différence de marche est corrigée par des lignes à retard lors de la recombinaison des deux rayons et permet ainsi d'avoir accès à la figure d'interférences. La ligne de base notée $\mathbf{B}_\perp$ correspond à la ligne de base projetée orthogonalement à la ligne de visée **S**. Le plan (u,v) représenté en noir est également perpendiculaire à cette dernière. Les quantités u et v sont les fréquences spatiales reliées aux coordonnées (x,y) par $(u,v) = (x/\lambda, y/\lambda)$, avec λ la longueur d'onde du signal.

Dans notre cas, il s'agit d'étudier la ressemblance de deux échantillons du champ électrique observés par les deux télescopes situés en deux points distincts $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$. Ces deux échantillons proviennent d'un même plan d'onde et sont observés à un même instant t correspondant à la date d'observation.

La fonction de cohérence spatiale est directement reliée à la différence de chemin optique parcouru par les deux rayons lumineux issus de la source qui atteignent les deux télescopes. Si ces rayons parcourent des distances exactement égales en arrivant sur les deux télescopes, la fonction de corrélation sera maximale. Au contraire, si la différence de chemin optique est trop grande, le terme de corrélation tendra vers zéro. La distance r_c à partir de laquelle

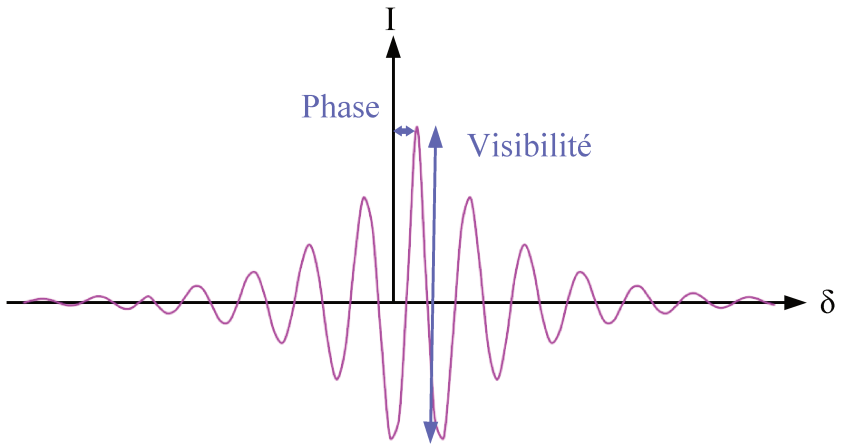

FIGURE 3.2 – Schéma d'une interférence en lumière monochromatique représentant la variation de l'intensité en fonction de la différence de marche entre les deux rayons. La visibilité mesure le contraste des franges et la phase mesure l'écart entre la position du maximum d'intensité et la position du zéro de différence de marche.

la fonction de cohérence spatiale est négligeable s'exprime comme (Labeyrie et al. 2006) :

$$r_c = \frac{\lambda}{\Delta\theta} \tag{3.1}$$

avec λ la longueur d'onde du rayonnement observé et $\Delta\theta$ la taille angulaire de la source. La quantité r_c s'appelle la largeur de cohérence. Pour observer des franges d'interférences suffisamment contrastées, il faut que la différence de chemin optique entre les deux rayons qui atteignent les deux télescopes soit inférieure à cette distance.

La fonction de cohérence spatiale est reliée à deux quantités $||\mathcal{V}(u,v)||$ et $\phi(u,v)$ dépendant des fréquences spatiales u et v, et correspondent respectivement aux visibilité et phase des interférences. Cette fonction est également appelée visibilité complexe et se note :

$$\mathcal{V}(u,v) = ||\mathcal{V}(u,v)||e^{i\phi(u,v)}. \tag{3.2}$$

Les quantités $||\mathcal{V}||$ et ϕ sont les observables interférométriques déduites de la figure d'interférences. La visibilité correspond au contraste des franges et la phase à l'écart entre la position de la frange blanche (la frange maximale) et la position du zéro de différence de marche (voir Fig. 3.2). Cette définition de la phase suppose néanmoins que les sources observées soient non résolues.

Afin de remonter à l'image de la source étudiée, il est nécessaire d'utiliser le théorème de Zernike-van Cittert. Celui-ci permet de relier la visibilité, la phase et la distribution d'intensité de l'objet observé $I(\theta_x,\theta_y)$, avec (θ_x,θ_y) les coordonnées angulaires de la source

sur le ciel, comme :

$$\mathcal{V}(u,v) = \frac{\widetilde{I}(u,v)}{\widetilde{I}(0,0)} \tag{3.3}$$

où $\widetilde{I}(u,v)$ est la transformée de Fourier de la distribution de l'intensité observée de la source $I(\theta_x,\theta_y)$. Ce théorème peut également se mettre sous la forme suivante :

$$||\mathcal{V}(u,v)||e^{i\phi(u,v)} = \frac{\int\int I(\theta_x,\theta_y)e^{-2\pi i(u\theta_x+v\theta_y)}\mathrm{d}\theta_x\mathrm{d}\theta_y}{\int\int I(\theta_x,\theta_y)\mathrm{d}\theta_x\mathrm{d}\theta_y}. \tag{3.4}$$

La fonction de cohérence spatiale est donc égale à la transformée de Fourier normalisée de la distribution spatiale d'intensité de la source. Pour avoir accès à l'image de l'objet, il faudra donc déterminer les quantités interférométriques (visibilité et phase) pour un maximum de couples de fréquences spatiales (u,v), puis calculer la transformée de Fourier inverse pour avoir la distribution d'intensité $I(\theta_x,\theta_y)$ de la source en chacun de ces points. De plus, une connaissance précise de la phase est nécessaire car celle-ci a un impact plus important sur le calcul de la transformée de Fourier inverse que la visibilité.

L'obtention d'un grand nombre de visibilités complexes $\mathcal{V}(u,v)$ se fait en utilisant le principe de synthèse d'ouverture qui permet la reconstruction d'une pupille de grande taille à partir de couples de pupilles de plus petites tailles : par exemple deux pupilles de deux télescopes comme présenté ici. Si on considère dans un premier temps une paire de télescopes, on constate qu'il sera possible de sonder une partie du plan (u,v) grâce à la rotation de la Terre (effet d'hypersynthèse). En effet, la ligne de base projetée $\mathbf{B}_\perp$ se verra modifiée au cours d'une observation, les valeurs de (u,v) seront donc modifiées.

En pratique, il est rare que la configuration géométrique de l'interféromètre à deux télescopes autorise un remplissage complet de l'espace des fréquences spatiales. Pour l'améliorer on utilise donc davantage de paires de télescopes, comme par exemple l'instrument *GRAVITY* qui utilisera les quatre télescopes du *Very Large Telescope* (*VLT*). Cela permet d'avoir six lignes de base différentes et donc un remplissage plus important du plan (u,v) (voir Fig. 3.3).

3.1.2 Une question de résolution angulaire et de précision astrométrique

La construction de télescopes gigantesques au sol ainsi que la satellisation de télescopes de grand diamètre sont des techniques d'imagerie à haute résolution angulaire difficiles. L'interférométrie est une méthode alternative à la réalisation de telles images, elle utilise pour cela le principe de synthèse d'ouverture que nous venons de voir brièvement ci-dessus.

Grâce à la synthèse d'ouverture, il est non seulement possible de sonder l'espace des fréquences spatiales mais aussi d'avoir un gain considérable sur la résolution angulaire. Cette dernière est aussi appelée pouvoir de résolution et correspond à la distance minimale

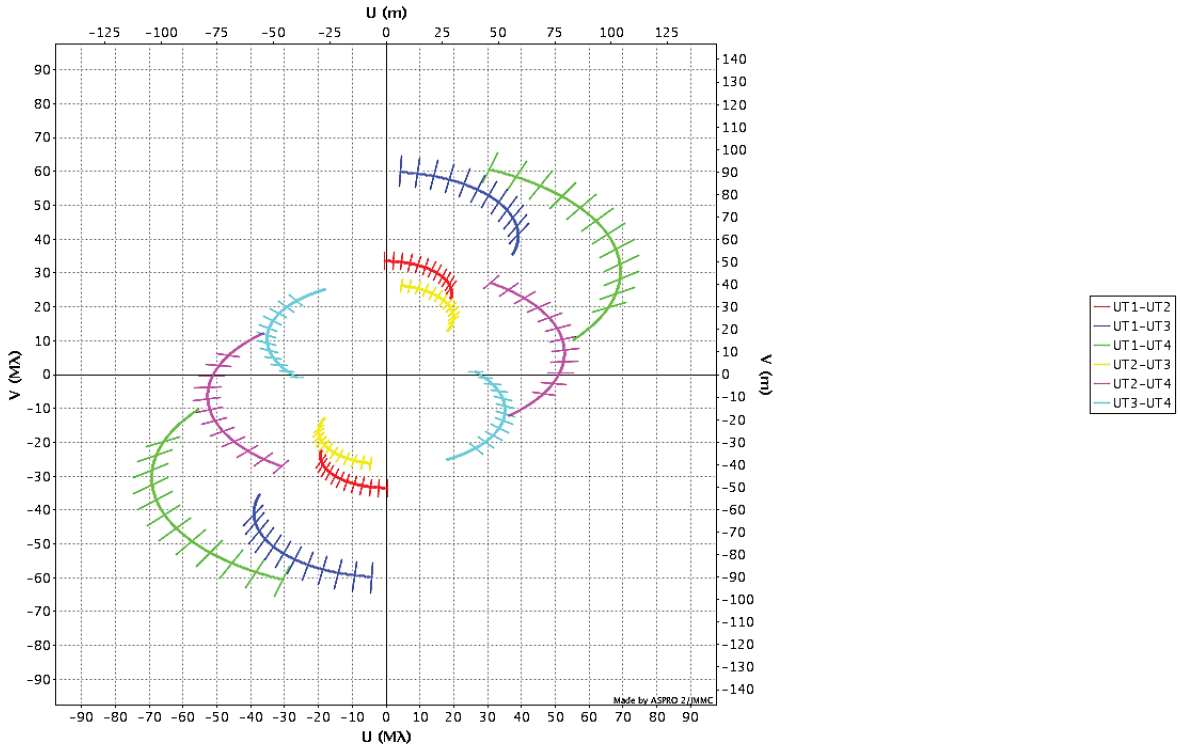

FIGURE 3.3 – Simulation d'une observation de la source Sgr A* par *GRAVITY*. Celui-ci combine la lumière des quatre *UT* (*Unit Telescope*) ce qui lui permet de sonder une partie du plan (u,v). Chaque couleur représente les points de mesures obtenus avec une base : on a six bases donc six couleurs.

qu'il doit y avoir entre deux sources pour qu'elles puissent être correctement discernées par un télescope ou un interféromètre.

La résolution angulaire d'un unique télescope est fonction de son diamètre D et de la longueur d'onde λ à laquelle on observe le rayonnement de la source. Elle est donnée par les lois de la diffraction d'une pupille circulaire et est égale à λ/D. Dans le cas de deux télescopes, la résolution angulaire est déterminée non pas par le diamètre des télescopes mais par la ligne de base projetée $\mathbf{B}_\perp$, on a alors une résolution angulaire donnée par $\lambda/||\mathbf{B}_\perp||$. Lorsque la ligne de base projetée augmente, la résolution de l'interféromètre augmente. On peut donc atteindre une résolution angulaire bien meilleure que celle obtenue avec un unique télescope.

En plus de la reconstruction d'image, l'interférométrie permet également de réaliser des mesures astrométriques de haute précision. En effet, si on considère deux sources sur le ciel séparées d'un écart angulaire θ, chacune d'elle va générer des franges d'interférences. Les franges blanches de ces dernières seront alors séparées d'une différence de marche δ_θ donnée par :

$$\delta_\theta = ||\mathbf{B}_\perp|| \times \theta. \tag{3.5}$$

En supposant que la ligne de base projetée est parfaitement connue, l'incertitude associée est déterminée par $\sigma(\delta_\theta) = ||\mathbf{B}_\perp|| \times \sigma(\theta)$. On a alors la précision astrométrique de l'interféromètre :

$$\sigma(\theta_\theta) = \frac{\sigma(\delta_\theta)}{||\mathbf{B}_\perp||}, \tag{3.6}$$

plus la ligne de base projetée est grande, plus la précision astrométrique est bonne.

Comme on l'a vu précédemment, la phase correspond à la différence entre le zéro de différence de marche et la frange blanche du paquet de franges. Ainsi, on comprend bien que la précision astrométrique est directement dépendante de la précision sur la mesure de la phase. Nous verrons dans la section suivante, consacrée à l'instrument *GRAVITY*, les difficultés rencontrées pour mesurer cette phase et les méthodes mises en place pour tenter d'y pallier.

3.2 Présentation de l'instrument

Le *VLT* est situé au sommet du mont Paranal, au Chili, et est composé d'un ensemble de huit télescopes : quatre télescopes dont le miroir principal est de 8,2 mètres de diamètre (les *UT* pour *Unit Telescope*) et quatre télescopes de 1,8 mètres de diamètre (les *AT* pour *Auxiliary Telescope*). Comme mentionné dans la section précédente, il est possible de combiner de manière cohérente la lumière en provenance de plusieurs télescopes. Cela permet d'obtenir une résolution spatiale équivalente à celle qu'aurait un unique télescope pourvu d'un très grand miroir, son diamètre étant déterminé par la distance maximale séparant les télescopes individuels. Dans le cas du *VLT*, il est possible de recombiner les quatre faisceaux provenant soit des quatre *UT* soit des quatre *AT* : on parle alors de *VLTI* pour *Very Large Telescope Interferometry*. La distance maximale pouvant être atteinte dans le cas du *VLTI* est d'environ 130 mètres.

Plusieurs projets ont déjà vu le jour au *VLTI*, notamment :

- *AMBER* (*Astronomical Multi BEam Recombiner*) qui travaillait dans les bandes J, H et K[1], cet instrument permettait de combiner la lumière provenant de trois des télescopes du *VLTI*.
- *MIDI* (*MID-infrared Interferometric*) qui travaille dans la bande N et combine la lumière provenant de deux des télescopes.
- *PIONIER* (*Precision Integrated-Optics Near-infrared Imaging ExpeRiment*) qui combine la lumière, obtenue en bande H, provenant de quatre des télescopes.

1. Les bandes spectrales JHKLMNQ font partie du système photométrique de Johnson, chacune de ces bandes couvre un domaine de longueur d'onde de l'infrarouge. Elles sont définies de sorte que la transparence de l'atmosphère terrestre soit maximale : J = 1 μm à 1,4 μm, H = 1,45 μm à 1,8 μm, K = 2 μm à 2,5 μm, L = 3,5μm à 4,1 μm, M = 4,6 μm à 5,5 μm (on a une absorption totale entre 4,2 μm et 4,4 μm), N = 10 μm et 13 μm (l'atmosphère est très opaque entre 5,5 μm et 8 μm), Q = 17 μm et 23 μm (on a une absorption importante entre 13,5 μm et 17 μm).

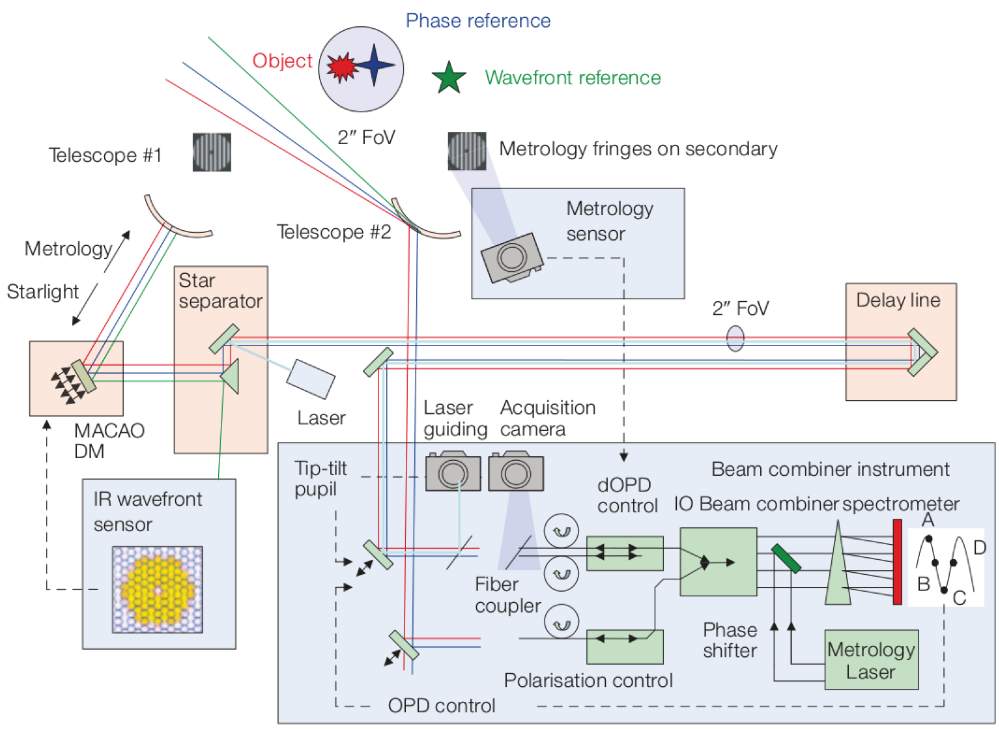

FIGURE 3.4 – Illustration des différents sous-systèmes composant l'instrument *GRAVITY*. Ici, seulement deux télescopes sont représentés (#1 et #2). Source : Eisenhauer et al. (2011).

Deux nouveaux projets ont été mis en place pour renouveler les instruments du *VLTI* et sont tous deux des recombinateurs à quatre télescopes :

— *MATISSE* (*Multi-AperTune mid-Infrared SpectroScopic Experiment*) qui fonctionne en bande L, M et N de l'infrarouge, et est le successeur de *MIDI*.

— *GRAVITY* qui travaille en bande K, il a été installé avec succès à l'été 2015.

L'instrument *GRAVITY* est un instrument de deuxième génération du *VLTI* et permet de faire de l'imagerie ainsi que de l'astrométrie avec des sources plus faibles que celles étudiées par la génération précédente.

Dans la section qui suit, nous parlerons, sans entrer dans les détails, de différents systèmes composant l'instrument *GRAVITY*. Pour davantage de détails sur celui-ci, on pourra consulter les articles de Eisenhauer et al. (2008), Gillessen et al. (2010), Eisenhauer et al. (2011) ainsi que la thèse de doctorat de Choquet (2013).

3.2.1 Les dessous de *GRAVITY*

L'instrument *GRAVITY* est constitué d'un ensemble de sous-systèmes très complexes (voir Fig. 3.4). Ses principales parties sont le recombinateur de faisceaux, les systèmes

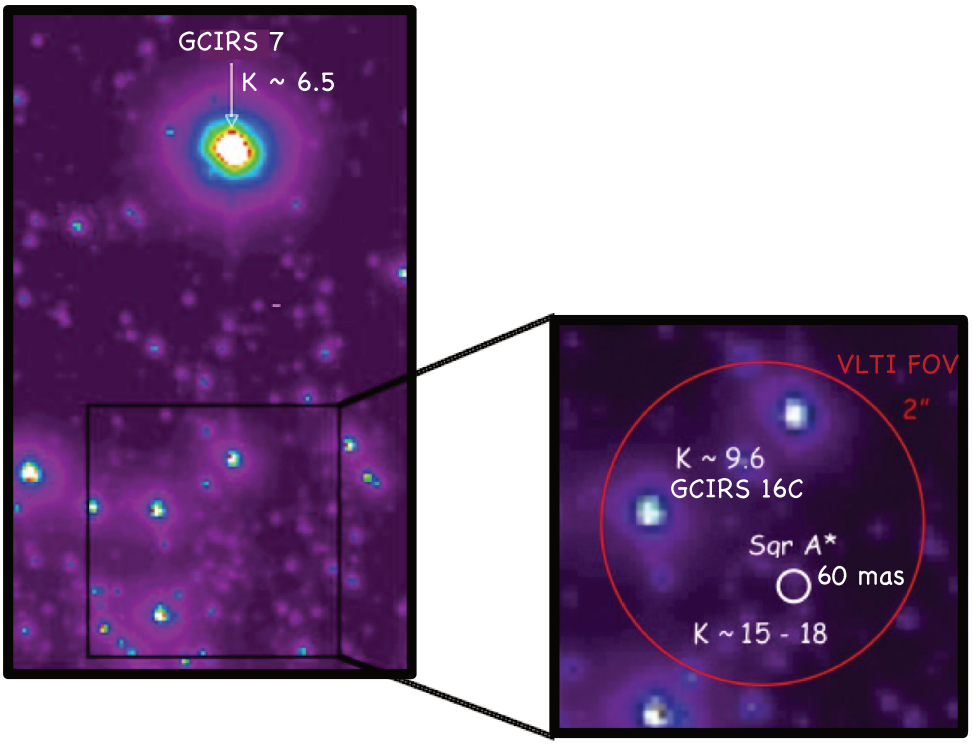

Figure 3.5 – Image du Centre Galactique : la source la plus brillante GCIRS 7 est l'étoile de référence du front d'onde, la source GCIRS 16C est l'étoile de référence de phase et le cercle blanc représente le champ de vue de la voie scientifique contenant la source Sgr A*. Le cercle rouge correspond au champ de vue du *VLTI* obtenu avec les *UT*. Il contient à la fois la source scientifique et la source de référence de phase.

d'optique adaptative infrarouge installés pour chaque télescope de Paranal, le suiveur de franges, la caméra d'acquisition, les spectrographes, et enfin le système de métrologie laser permettant d'estimer les différences de marche entre les différentes voies de l'interféromètre.

Dans la présentation qui suit nous nous placerons dans le cas d'une observation faite sur le Centre Galactique.

L'instrument va observer simultanément trois sources : la source scientifique (représentée en rouge Fig. 3.4), la source de référence de phase (représentée en bleu) et la source de référence du front d'onde (représentée en vert).

L'étoile de référence du front d'onde utilisée est GCIRS 7 (voir Fig. 3.5), de magnitude en bande K égale à environ 6,5. Son utilité est d'augmenter la cohérence des rayons lumineux qui atteignent les différents télescopes. En effet, après leur entrée dans l'atmosphère les faisceaux sont perturbés par la turbulence atmosphérique. Cette dernière fixe la résolution angulaire de l'instrument définie par une quantité que l'on appelle paramètre de Fried r_0. Cette distance correspond à la taille caractéristique d'une cellule de turbulence atmosphérique (voir Fig. 3.6). La résolution en résultant est donnée par

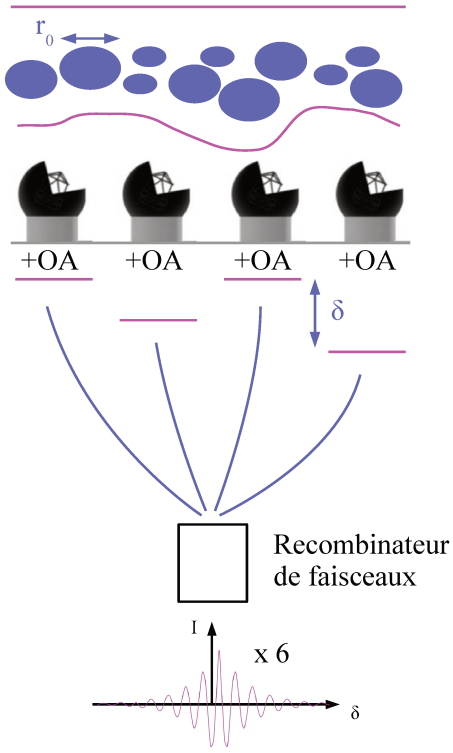

FIGURE 3.6 – Principe du piston atmosphérique introduit par la turbulence atmosphérique. Le trait magenta du haut représente un front d'onde issue d'une source, après pénétration dans l'atmosphère celui-ci est perturbé. Cette perturbation est générée par des cellules de turbulence atmosphérique de taille caractéristique égale au paramètre de Fried r_0. Ensuite viennent les quatre télescopes auxquels sont associés quatre systèmes d'optique adaptative (OA). Les quatre traits magenta qui suivent représentent les fronts d'onde corrigés par les systèmes d'optique adaptative. On remarque bien ici l'introduction de la différence de chemin optique δ causée par le piston atmosphérique. Après correction de ce dernier au niveau de chaque télescope, il est possible de recombiner les faisceaux des différentes paires de télescopes, nous avons donc accès à six figures d'interférences.

ce qu'on appelle le *seeing* et vaut λ/r_0. Grâce à l'obtention du front d'onde de l'étoile GCIRS 7, à l'aide des systèmes d'optique adaptative composés d'analyseurs de front d'onde et de miroirs déformables MACAO (voir MACAO *DM, Deformable Mirror* Fig. 3.4) situés au niveau de chaque télescope, il est possible de corriger les fronts d'onde des sources scientifique et de référence de phase. Pour que cela soit possible, il faut néanmoins que l'étoile de référence du front d'onde soit choisie assez près de ces deux dernières pour considérer que les perturbations atmosphériques qu'elle subit soit les mêmes que celles des sources scientifique et de référence de phase. Cette condition est remplie si l'étoile GCIRS 7 se trouve dans l'angle d'isoplanétisme de ces dernières, qui est de l'ordre de 10 secondes d'angle.

L'étoile de référence de phase est l'étoile GCIRS 16C avec une magnitude en bande K d'environ 9,6 (voir Fig. 3.5). Les plans d'onde corrigés par optique adaptative au niveau de chaque télescope sont séparés par une différence de marche également due à la turbulence atmosphérique (voir Fig. 3.6). Cette différence de marche est appelée piston atmosphérique et est de l'ordre de plusieurs microns. Ce piston induit des mouvements aléatoires sur les franges d'interférences. Cela a pour effet de diminuer le contraste des franges au cours d'une pose et d'induire un bruit sur les mesures astrométriques. Si la pose est plus longue que le temps de cohérence de la turbulence atmosphérique, qui est d'environ 3 millisecondes en infrarouge à Paranal, ce phénomène peut aller jusqu'à annuler le contraste des franges. Afin d'éliminer ce piston atmosphérique, on utilise l'étoile de référence de phase GCIRS 16C puisque celle-ci est suffisamment brillante pour obtenir des franges d'interférences en un temps d'intégration inférieur au temps de cohérence de la turbulence atmosphérique. Il est donc possible de déterminer la différence de marche introduite par le piston sur la voie de référence de phase et de la corriger en temps réel. L'estimation des différences de marche entre les quatre fronts d'onde se fait près du zéro de différence marche. Celles-ci sont maintenues quasi-nulles à l'aide d'un système appelé suiveur de frange (Menu et al. 2012; Choquet 2013; Choquet et al. 2014). La correction des écarts aux différences de marche nulles est réalisée par des miroirs montés sur des actions piezo-électriques pour les composantes rapides et par les lignes à retard du *VLTI* pour les composantes lentes. Des lignes à retard fibrées (voir *Delay line* Fig. 3.4) permettent de synchroniser les réseaux de franges dans les voies scientifique et de référence de phase. L'ensemble de ces corrections permet d'intégrer pendant de longs temps de pose ($\approx$ 100 s) et d'obtenir des figures d'interférences sur des objets faibles présents au Centre Galactique.

De plus, la position de la figure d'interférences de la voie scientifique est décalée par rapport à celle de la voie de référence de phase, car ces deux sources sont éloignées l'une de l'autre du fait de leur distance angulaire sur le ciel. Il est donc possible de remonter à une mesure de la distance angulaire entre ces deux sources. Néanmoins, les chemins optiques parcourus dans les deux voies ne sont pas strictement égaux. C'est grâce au système de métrologie (voir *Metrology Sensor* Fig. 3.4) que l'on mesure précisément ces différences de marche résiduelles entre les quatre télescopes. Afin d'obtenir la précision astrométrique attendue pour l'instrument de 10 microsecondes d'angle, il faut que les différences de chemin optique soient obtenues à 5 nanomètres près si l'on considère une ligne de base d'environ 100 mètres (Lacour et al. 2014a,b).

On comprend donc bien ici toutes les difficultés liées à la mesure de la phase dont on parlait à la fin de la Sect. 3.1.2. Grâce à toutes ces étapes, il résulte néanmoins une figure d'interférences de la voie scientifique qui est stabilisée (par le suiveur de frange) et dont on connaît précisément l'écart à la figure d'interférences générée par la voie de référence de phase (grâce à la métrologie). Il est alors possible de reconstituer de manière précise les six systèmes de franges correspondant aux six lignes de base.

3.2.2 *GRAVITY* en quelques chiffres

Afin d'atteindre ses objectifs scientifiques (que nous verrons dans la section suivante), *GRAVITY* doit atteindre une précision astrométrique de 10 microsecondes d'angle correspondant à environ un cinquième de la taille angulaire apparente de la silhouette de la source Sgr A*. Cela représente la taille apparente d'une pièce de 1€ placée sur la Lune et observée depuis la Terre, ou encore l'épaisseur apparente d'un cheveu (≈ 40 μm) placé à Barcelone et observé depuis Paris. Une telle précision est attendue sur des sources de magnitudes en bande K faibles ($m_K \approx 15 - 18$), pour un temps d'intégration de 5 minutes.

L'imagerie à référence de phase est également possible, et cela sur des sources de magnitude $m_K \approx 16$ par poses de 100 secondes. La résolution angulaire est de 4 millisecondes d'angle soit l'équivalent de la taille angulaire de deux sources séparées d'environ 7 mètres sur la surface de la Lune et vues depuis la Terre. Une précision de 10% sur les mesures de visibilité est attendue ainsi qu'une précision de 6 degrés sur la phase.

La résolution spectrale de l'instrument est d'environ 4000, au maximum.

Le champ de vue total offert par le *VLTI* est de 2 secondes d'angle si l'on utilise les quatre *UT* et de 6 secondes d'angle avec les quatre *AT*. Le champ de vue de la voie scientifique de *GRAVITY* est de $\lambda/||\mathbf{B}_\perp||$ soit environ 60 millisecondes d'angle pour les *UT* et environ 250 millisecondes d'angle pour les *AT*. C'est en considérant l'ensemble du flux contenu dans ce champ que sont obtenues les mesures astrométriques de l'instrument *GRAVITY*. Cette mesure astrométrique est plus difficile en présence de sources multiples dans le champ de vue de la voie scientifique. Dans le cas des observations de l'étoile S2, ce champ de vue est susceptible de contenir également du flux en provenance de Sgr A* et d'autres étoiles S, détectées ou non à ce jour.

3.2.3 Objectifs scientifiques de *GRAVITY*

On pourra consulter les articles de Gillessen et al. (2010) et Eisenhauer et al. (2011) pour davantage de précision quant aux objectifs scientifiques de l'instrument.

Le principal objectif de l'instrument *GRAVITY* est d'observer le centre de notre galaxie, la Voie Lactée. Le Centre Galactique étant situé à environ 8 kiloparsecs du Système Solaire, on imagine bien la présence de quantité de poussière sur la ligne de visée. À l'heure actuelle, on sait que l'extinction dans la bande spectrale du visible y est très importante et atteint une valeur d'environ 32 magnitudes. Il est donc impossible d'observer le centre de notre galaxie à ces longueurs d'onde. Cependant, comme on l'a vu Sect. 2.2.2, ces poussières sont plus transparentes aux grandes longueurs d'onde (infrarouge, sub-millimétrique et radio) et aux hautes énergies (rayons X). La bande spectrale de *GRAVITY* a été choisie dans l'infrarouge proche pour éviter cet obscurcissement, l'extinction dans cette bande y est faible (environ 3 magnitudes).

Grâce aux capacités de cet instrument, il devient possible de sonder le cœur de la Galaxie. *GRAVITY* permettra d'observer en détail le mouvement de la matière et des

astres à proximité de Sgr A*. Les principales études que l'on souhaite mener au Centre Galactique on déjà été citées Sect. 2.3. On rappelle cependant que l'objectif majeur de l'instrument est de contraindre la nature de l'objet central grâce à l'observation des sursauts survenant proches de l'objet compact mais aussi grâce à l'observation d'orbites d'étoiles. On sera alors normalement capable d'appuyer ou non l'hypothèse d'existence d'un trou noir au centre de notre galaxie ainsi que de tester la validité de la théorie de la relativité générale en champ gravitationnel fort.

L'autre aspect de l'étude du Centre Galactique est d'apporter des réponses quant au paradoxe de la jeunesse discuté Sect. 2.1.2. Il est également envisagé de contraindre la nature des sursauts utilisés pour sonder l'espace-temps. Vincent et al. (2014) ont notamment simulé des observations *GRAVITY* à l'aide de trois modèles de sursauts dont le modèle du bruit rouge et le modèle du jet cités à la fin de la Sect. 2.2.2. Ils en ont déduit que l'instrument sera capable de distinguer le modèle du jet des deux autres.

GRAVITY permet également d'observer d'autres types d'objets. En effet, grâce à ses capacités il est tout à fait possible d'étudier les NAGs (Noyaux Actifs de Galaxie) présentant en leur centre un trou noir entouré d'un disque d'accrétion. Cela permettra de sonder les régions les plus internes des galaxies proches.

Les disques des systèmes stellaires en formation, appelés disques protostellaires et protoplanétaires, ainsi que les étoiles jeunes seront également observés grâce à la grande sensibilité de l'instrument.

D'autre part, *GRAVITY* sera capable d'obtenir les orbites d'étoiles autour de candidats trous noirs de masse intermédiaire présents au sein des amas. L'étude de ces orbites pourra nous informer sur la réelle présence de ces trous noirs.

Cet instrument sera également en mesure d'étudier les binaires X. Celles-ci nous apporteront notamment des réponses quant à l'origine des jets émis par ces objets.

Enfin, *GRAVITY* sera également un instrument utilisé pour la recherche d'exoplanètes. En effet, il sera possible de détecter la fluctuation de la position du centroïde d'une étoile induit par le passage d'une planète devant la ligne de visée.

Deuxième partie

Première validation du code de tracé de rayons GYOTO

Présentation de la partie

La seconde partie du manuscrit est consacrée à la présentation ainsi qu'aux tests de performance du code de tracé de rayons `GYOTO` permettant de simuler des observations en champ gravitationnel faible et fort. En particulier, ce code sera utilisé pour interpréter les futures données de l'instrument *GRAVITY* obtenues au Centre Galactique.

Dans un premier temps, nous introduirons le code `GYOTO` en métrique de Kerr et exposerons le détail de l'intégration des géodésiques effectuée dans celui-ci. Nous introduirons également quelques notions utiles pour faciliter l'utilisation de ce code, ainsi que les principales fonctions et quantités utilisées pour mener à bien cette thèse.

Dans un second chapitre, nous discuterons des performances du calcul des trajectoires des photons effectué dans `GYOTO`. Des tests en déflexion faible et forte seront menés. L'objectif étant de montrer que l'intégration des géodésiques de genre lumière dans `GYOTO` est suffisamment précise pour que ce code soit utilisé lors de l'interprétation physique des futures données de l'instrument *GRAVITY*. Le code de tracé de rayons devra donc intégrer la trajectoire des photons avec une précision telle que les positions astrométriques simulées avec `GYOTO` possèdent une erreur numérique inférieure à la précision astrométrique nominale de *GRAVITY* de 10 microsecondes d'angle.

Ce chapitre constitue une première validation du code `GYOTO` à l'échelle d'une telle précision. Compte tenu des observations qui seront faites avec *GRAVITY*, les tests seront effectués en se plaçant dans le cas du Centre Galactique c'est-à-dire dans une configuration qui n'a encore jamais été utilisée avec ce code. Précisons par ailleurs que ce travail ne constitue pas une validation complète du code : il conviendrait en outre de vérifier le calcul des géodésiques de genre temps ainsi que le calcul de grandeurs physiques telles que l'intensité spécifique mesurée par l'observateur.

Chapitre 4

Présentation du code GYOTO en métrique de Kerr

Sommaire

4.1 Introduction du code GYOTO 81
4.2 Notions de tracé de rayons et de transfert radiatif 82
4.3 Intégration des géodésiques 83
4.3.1 Equations des géodésiques 84
4.3.2 Méthodes d'intégration 85
4.4 Quelques notions utiles 92
4.4.1 La scène 92
4.4.2 Définition de quelques fonctions et quantités du code GYOTO . . . 96

Dans toute la suite de ce manuscrit nous ferons l'hypothèse qu'un trou noir supermassif décrit par la métrique de Kerr est présent au Centre Galactique. Nous présenterons donc uniquement le code de tracé de rayons GYOTO dans cette métrique, exprimée en coordonnées de Kerr-Schild (voir Sect. 1.2.2). Plus précisément, nous nous concentrerons sur la partie intégration des géodésiques de genre temps et lumière. Nous citerons également quelques exemples d'utilisation de ce code. Pour davantage de détails sur GYOTO, on pourra se référer à la thèse de doctorat de Vincent (2011) ainsi qu'au guide d'utilisation du code.

4.1 Introduction du code GYOTO

Le code de tracé de rayons GYOTO (*General relativitY Orbit Tracer of* Observatoire de Paris) a été développé par Frédéric Vincent et Thibaut Paumard (Vincent et al. 2011a) en langage C++. Afin de faciliter son utilisation, des greffons pour les langages Yorick et Python ont été mis en place par Thibaut Paumard. Ces greffons exposent une interface programmatique en fonctionnalité de GYOTO et permettent d'utiliser le code depuis ces

langages interprétés. Le code est public et est librement accessible à l'adresse suivante : `http://gyoto.obspm.fr/`.

Ce code permet de calculer des géodésiques de genre temps et lumière notamment en métrique de Kerr. Différents objets astrophysiques ont été implémentés dans le code comme le disque mince d'accrétion, le tore d'accrétion, ou encore l'étoile. Il est possible de reconstituer l'image ainsi que le spectre observé émanant de tels objets puisque l'intégration du transfert radiatif est effectué dans le code `GYOTO`.

La particularité de ce code est qu'il permet également de calculer des géodésiques dans des métriques non analytiques, celles-ci étant préalablement calculées numériquement dans le formalisme 3+1 de la relativité générale (Gourgoulhon 2007). Il est donc possible d'étudier le mouvement des astres à proximité d'objets exotiques, ou d'analyser les spectres et images de disque d'accrétion autour de ceux-ci. `GYOTO` a notamment permis d'effectuer les études avec la métrique numérique décrivant les étoiles bosoniques discutées Sect. 2.3.2.

Comme mentionné précédemment, nous travaillerons uniquement en métrique de Kerr dans ce manuscrit. L'objet astrophysique observé sera l'étoile, elle correspond, dans le code, à une boule géométrique dans les coordonnées, définie par la norme euclidienne en trois dimensions induite par les coordonnées elles-mêmes, dont le centre suit une géodésique de genre temps, d'opacité et d'émissivité uniforme (mais fonction de la longueur d'onde).

Le but scientifique de `GYOTO` est de permettre l'interprétation des futures données de l'instrument *GRAVITY*, décrit au chapitre précédent. Plus précisément, il sera utilisé pour comprendre les phénomènes de sursauts survenant à proximité du Centre Galactique (Vincent et al. 2014), mais aussi pour mettre en évidence les divers effets relativistes pouvant affecter les orbites stellaires proches de l'objet compact central (voir Partie III). Il permettra donc de contraindre la nature de ce dernier grâce à la simulation d'orbites d'étoiles ainsi que de sursauts avec `GYOTO`. En vue de tester le théorème d'absence de chevelure, une contrainte du moment quadrupolaire du candidat trou noir avec ce code sera également attendue.

4.2 Notions de tracé de rayons et de transfert radiatif

Avant d'expliquer comment est effectuée l'intégration des géodésiques dans le code `GYOTO`, nous souhaitons définir le concept de tracé de rayons (*ray-tracing* en Anglais).

L'image d'une source telle que vue par un observateur est formée grâce à des rayons lumineux qui ont été émis depuis cette source et qui sont arrivés jusqu'à son œil. L'ensemble des photons émis depuis la source n'ont cependant pas tous atteint l'observateur, seule une petite portion y est parvenue.

Dans le cas du tracé de rayons, on tente d'obtenir l'image d'une source en reconstituant le parcours inverse de la lumière, depuis l'observateur jusqu'à la source. Pour cela, on part d'un fond de ciel noir, et depuis chaque pixel de ce fond de ciel, un photon est lancé. Si le photon atteint la source, le pixel correspondant s'illumine. L'intensité du pixel est déterminée en suivant le cheminement parcourus par le photon depuis l'écran de l'observateur jusqu'à la source.

L'objectif du tracé de rayons est de ne calculer que les photons qui seraient vus par l'observateur, ce qui permet d'obtenir une image plus rapidement que si l'on considérait le processus naturel (de la source à l'observateur). En effet, dans ce dernier il faudrait calculer une multitude de photons pour déterminer la faible portion atteignant l'observateur.

En termes relativistes, on dit que l'intégration des géodésiques de genre lumière se fait en remontant le temps coordonnée du photon (première coordonnée de la quadri-position de la particule).

Le calcul de l'intensité des pixels est obtenue à une fréquence ν donnée en intégrant l'équation du transfert radiatif relativiste (Mihalas & Mihalas 1984) :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{I}}{\mathrm{d}\lambda} = \mathcal{E} - \mathcal{A}\mathcal{I} \tag{4.1}$$

où λ est le paramètre affine le long de la géodésique lumière considérée, $\mathcal{I}$ est l'intensité spécifique invariante, $\mathcal{E}$ est le coefficient d'émission invariant, et $\mathcal{A}$ est le coefficient d'absorption invariant. Le terme invariant signifie que ces quantités ne dépendent pas du référentiel dans lequel elles sont évaluées. Celles-ci sont exprimées comme :

$$\mathcal{I} = \frac{I_\nu}{\nu^3},\ \mathcal{E} = \frac{j_\nu}{\nu^2},\ \mathcal{A} = \nu\alpha_\nu \tag{4.2}$$

où I_ν est l'intensité spécifique mesurée à la fréquence ν, j_ν est le coefficient d'émission et α_ν est le coefficient d'absorption. L'intensité I_ν peut être calculée en considérant que la source est soit optiquement épaisse soit optiquement mince. Dans le premier cas, cela signifie que le photon ne peut pas pénétrer à l'intérieur de la source, l'intensité est donc calculée à sa surface. Mathématiquement, on dit qu'une source est optiquement épaisse si la profondeur optique τ_ν définie, le long de l'axe de visée z_{obs}, par :

$$\tau_\nu = \int \alpha_\nu \mathrm{d}z_{\mathrm{obs}} \tag{4.3}$$

est supérieure à 1 aux abords de la surface de la source. Dans le cas optiquement mince, le photon pénètre dans la source et l'intensité est obtenue en sommant les éléments d'intensité estimés à chaque pas d'intégration à l'intérieur de la source. La profondeur optique doit quant à elle toujours vérifier $\tau_\nu \ll 1$, même dans cette dernière.

Pour davantage de précision sur le calcul de l'intensité spécifique dans le code `GYOTO`, on pourra se reporter à la thèse de doctorat de Vincent (2011).

4.3 Intégration des géodésiques

Intéressons-nous à présent à l'intégration des géodésiques en métrique de Kerr. Dans l'ensemble du manuscrit nous travaillerons en coordonnées de Kerr-Schild. Ce choix est fait car les coordonnées de Boyer-Lindquist présentent deux inconvénients : elles divergent à proximité de l'horizon des événements, et certains termes de la métrique divergent près de

l'axe de rotation du trou noir ($\theta = 0[\pi]$). Ces divergences ne sont pas physiques, elles sont uniquement dues au choix de coordonnées. Des méthodes ont été créées dans GYOTO pour contourner ces divergences mais entraînent une augmentation du temps d'intégration de la géodésique ainsi qu'une perte de précision. C'est pour ces raisons que nous utiliserons les coordonnées de Kerr-Schild tout au long de ce manuscrit.

4.3.1 Equations des géodésiques

La résolution du système d'équations différentielles du second ordre, donné par l'équation des géodésiques (1.19), est effectuée en intégrant numériquement ces équations dans le code GYOTO. Étant donné les quadri-position et quadri-vitesse initiales en coordonnées de Kerr-Schild $\mathbf{w}_0 = (t_0,x_0,y_0,z_0)$ et $\mathbf{u}_0 = (\dot{t}_0,\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0)$ de la particule test (où $\dot{}$ signifie une dérivation par rapport au temps propre τ dans le cas d'une particule matérielle et au paramètre affine λ dans le cas d'un photon), il est en effet possible d'intégrer ce système d'équations. Dans le cas d'une géodésique de genre lumière, celui-ci est donné en métrique de Kerr-Schild par (Hameury et al. 1994) :

$$\begin{aligned}
\dot{t} =& \frac{R_S K r}{\Sigma(P - \Sigma\dot{r})} + E, \\
\ddot{x} =& -\frac{2R_S a r S}{\Delta\Sigma^2}\dot{y} \\
&+ \frac{R_S(\Sigma - 4r^2)}{2\Sigma^3}\frac{xr + ay}{r^2 + a^2}\left[K - \left(\frac{aS}{\Delta}\right)^2\right] \\
&- \frac{R_S a r S}{2\Delta\Sigma^3}\frac{ry - ax}{r^2 + a^2}\left[4(E\Sigma - S) + (4a^2 - \Sigma)\frac{S}{\Delta}\right], \\
\ddot{y} =& \frac{2R_S a r S}{\Delta\Sigma^2}\dot{x} \\
&+ \frac{R_S(\Sigma - 4r^2)}{2\Sigma^3}\frac{ry - ax}{r^2 + a^2}\left[K - \left(\frac{aS}{\Delta}\right)^2\right] \\
&+ \frac{R_S a r S}{2\Delta\Sigma^3}\frac{xr + ay}{r^2 + a^2}\left[4(E\Sigma - S) + (4a^2 - \Sigma)\frac{S}{\Delta}\right], \\
\ddot{z} =& -\frac{R_S K}{2\Sigma^3}\frac{z}{r}\left(3r^2 - a^2\left(\frac{z}{r}\right)^2\right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Sigma &= r^2 + a^2\left(\frac{z}{r}\right)^2, \\
P &= E(r^2 + a^2) - aL, \\
S &= \Sigma\dot{r} + P
\end{aligned} \tag{4.5}$$

où E est l'énergie de la particule mesurée par un observateur à l'infini, L est le moment cinétique de la particule le long de l'axe z et $K = \mathrm{Q} + (L - aE)^2$ avec Q la constante de Carter.

4.3.2 Méthodes d'intégration

Le code GYOTO dispose de plusieurs méthodes numériques permettant d'intégrer le système d'équations des géodésiques de genre temps et lumière. Dans la section qui suit, nous présenterons trois des intégrateurs pouvant être utilisés.

Présentation des intégrateurs

Tous les intégrateurs codés dans GYOTO peuvent être utilisés soit avec un pas adaptatif soit avec un pas fixe. L'intérêt du pas adaptatif est qu'il permet de réduire le temps de calcul tout en maintenant un haut niveau de précision de l'intégration.

Legacy

Le premier intégrateur implémenté dans GYOTO se nomme désormais Legacy. Ce dernier utilise la méthode Runge Kutta d'ordre 4 (RK4) pour intégrer l'équation des géodésiques.

Rappelons rapidement en quoi consiste cette méthode. Pour cela, considérons le système simple suivant :

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.6}$$

où t_0 et y_0 sont des conditions initiales connues. La méthode RK4 résout le système (4.6) en utilisant la formule :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{4.7}$$

avec h le pas d'intégration. Les fonctions k_i, avec i allant de 1 à 4, sont exprimées comme :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n,y_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2},y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2},y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t_n + h,y_n + hk_3). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Dans le cas du système (4.4), cela revient à intégrer le système d'équations suivant, en

posant $(T,X,Y,Z) = (\dot{t},\dot{x},\dot{y},\dot{z})$:

$$\begin{cases} T = f_T\left(\lambda,x,y,z,X,Y,Z\right), \\ \dot{X} = f_{\dot{X}}\left(\lambda,x,y,z,X,Y,Z\right), \\ \dot{x} = X, \\ \dot{Y} = f_{\dot{Y}}\left(\lambda,x,y,z,X,Y,Z\right), \\ \dot{y} = Y, \\ \dot{Z} = f_{\dot{Z}}(\lambda,x,y,z), \\ \dot{z} = Z, \\ (t(\lambda_0),x(\lambda_0),y(\lambda_0),z(\lambda_0)) = (t_0,x_0,y_0,z_0), \\ (T(\lambda_0),X(\lambda_0),Y(\lambda_0),Z(\lambda_0)) = (T_0,X_0,Y_0,Z_0) \end{cases} \tag{4.9}$$

avec f_T la dérivée première de la coordonnée t de la particule, et $f_{\dot{X}}$, $f_{\dot{Y}}$ et $f_{\dot{Z}}$ les dérivées secondes des coordonnées x, y et z, respectivement. Si l'on considère le cas de la vitesse du photon exprimée selon la coordonnée x, la formule de la méthode RK4 s'écrit :

$$X_{n+1} = X_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{4.10}$$

avec

$$\begin{aligned} k_1 &= f_{\dot{X}}\left(\lambda_n, \{x,y,z,X,Y,Z\}_n\right), \\ k_2 &= f_{\dot{X}}\left(\lambda_n + \frac{h}{2}, \{x,y,z,X,Y,Z\}_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f_{\dot{X}}\left(\lambda_n + \frac{h}{2}, \{x,y,z,X,Y,Z\}_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f_{\dot{X}}\left(\lambda_n + h, \{x,y,z,X,Y,Z\}_n + hk_3\right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

où $\{...\}$ désigne l'ensemble des coordonnées dont la fonction $f_{\dot{X}}$ dépend, en plus de λ. Précisons que dans l'expression $\{...\} + Chk_i$, où C est une constante, le second terme est ajouté à chacune des coordonnées de l'ensemble $\{...\}$. Les équations (4.10) et (4.11) sont également calculées pour chaque coordonnée du photon. Connaissant les conditions du photon à l'instant paramétré par λ_n, nous en déduisons sa position dans l'espace des phases (quadri-position et quadri-vitesse) à l'instant paramétré par $\lambda_{n+1} = \lambda_n + h$.

Le contrôle du pas h effectué lors de l'intégration de la géodésique par l'intégrateur historique a été codée dans `GYOTO` de la façon suivante :

— Étape 1 : on intègre le système d'équations (4.9) en considérant un pas h initial.

— Étape 2 : on intègre une première fois le système d'équations (4.9) en considérant cette fois-ci un pas initial $h/2$. Puis, on part de la solution trouvée à ce dernier pour intégrer une seconde fois le système d'équations (4.9), en considérant là encore un pas $h/2$. Le but est d'avoir un pas total identique à celui de l'étape 1, c'est-à-dire égal à h.
— Étape 3 : on compare les solutions trouvées aux étapes 1 et 2 en utilisant une certaine quantité notée $\mathcal{R}_{\max}$ qui sera définie ci-après. Si cette quantité est supérieure à 1 alors on diminue le pas h et on recommence les étapes 1, 2 et 3, et ainsi de suite jusqu'à ce que $\mathcal{R}_{\max}$ soit plus petit ou égal à 1. Néanmoins, même si l'on se trouve dans ce dernier cas, le pas h est raffiné une dernière fois.

Attardons-nous davantage sur cette dernière étape en considérant encore une fois la coordonnée $\dot{X}$. Précisions tout d'abord que l'ensemble des formules données ci-dessous proviennent de Press et al. (2002).

Lors de l'intégration de l'équation différentielle de la coordonnée $\dot{X}$, la quantité suivante est calculée :

$$\Delta_0 = \epsilon_{\min} + \epsilon h |\dot{X}_n| \tag{4.12}$$

avec $\epsilon_{\min} = 10^{-15}$ et $\epsilon = 10^{-4}$. Si on note Δ_1 la différence entre les solutions trouvées aux étapes 1 et 2, le pas h est accepté si la condition $|\Delta_0| \geqslant |\Delta_1|$ est vérifiée. Si cette condition n'est pas satisfaite, l'estimation du nouveau pas est donnée par :

$$h_a = Sh \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0,25} \tag{4.13}$$

avec $S = 0{,}9$ ce qui permet de garder une marge d'erreur. En revanche, si le pas vérifie la condition $|\Delta_0| \geqslant |\Delta_1|$, un nouveau pas est tout de même calculé et vaut :

$$h_b = Sh \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0,2} . \tag{4.14}$$

Comme nous n'avons pas une coordonnée mais huit, les paramètres Δ_0 et Δ_1 ainsi que le rapport Δ_1/Δ_0 sont évalués huit fois. Afin d'estimer le nouveau pas utilisé pour intégrer l'ensemble des équations du système (4.9), on considère le rapport Δ_1/Δ_0 maximal obtenu, noté $\mathcal{R}_{\max}$. Ainsi on a :

$$\begin{cases} \text{si } \mathcal{R}_{\max} > 1 \text{ alors } h_a = Sh\mathcal{R}_{\max}^{-0,25}, \\ \text{si } \mathcal{R}_{\max} \leqslant 1 \text{ alors } h_b = Sh\mathcal{R}_{\max}^{-0,2}. \end{cases}$$

Des conditions supplémentaires ont été ajoutées lorsque la condition $\mathcal{R}_{\max} \leqslant 1$ est vérifiée. En effet, trois paramètres ont été intégrés dans le code `GYOTO` et sont nommés `DeltaMin`, `DeltaMax` et `DeltaMaxOverR`. Le premier permet de fixer un pas d'intégration minimal tandis que les deux autres permettent de fixer un pas maximal. Plus précisément, ce dernier est obtenu en considérant l'égalité suivante :

$$h_{\max} = \max[\texttt{DeltaMax}, \max(\texttt{DeltaMaxOverR} \times \{x,y,z\})]. \tag{4.15}$$

La notation max(`DeltaMaxOverR` $\times$ $\{x,y,z\}$) signifie que l'on prend le maximum des trois quantités `DeltaMaxOverR` $\times x$, `DeltaMaxOverR` $\times y$ et `DeltaMaxOverR` $\times z$. La quantité choisie est donc dépendante de la position du photon par rapport au trou noir. Lorsque le photon est loin du trou noir le pas maximal pouvant être autorisé est grand, ce qui n'est pas le cas lorsque celui-ci est proche du trou noir. On comprend donc les avantages de cette quantité qui sont à la fois de réduire le temps d'intégration mais aussi d'améliorer l'échantillonnage de la géodésique lorsque la particule est en champ gravitationnel intense.

Ajoutons que les trois paramètres `DeltaMin`, `DeltaMax` et `DeltaMaxOverR` peuvent être fixés par l'utilisateur de `GYOTO`. On pourra alors choisir ces paramètres de sorte à trouver un compromis entre la précision et le temps de calcul, lors de nos différentes études.

`Runge-Kutta-Fehlberg78` et `Runge-Kutta-Cash-Karp54`

`GYOTO` utilise également deux autres intégrateurs provenant de la bibliothèque Odeint appartenant elle-même à la collection `Boost` de la bibliothèque C++ [1]. Ces intégrateurs sont basés sur la méthode RK4 vue précédemment. La différence entre un simple intégrateur Runge Kutta et un intégrateur tel que `Runge-Kutta-Cash-Karp54` vient du fait que l'on n'estime plus une solution à l'aide d'un seul ordre mais deux solutions à l'aide de deux ordres successifs, par exemple les ordres 4 et 5 pour l'intégrateur `Runge-Kutta-Cash-Karp54`. Si on considère des méthodes d'intégration d'ordres $4-5$, cela signifie que le pas est estimé à l'ordre 4 mais que le contrôle de celui-ci est réalisé à l'aide des solutions trouvées aux deux ordres 4 et 5.

Pour des raisons de simplicité nous ne définirons ici que les méthodes Fehlberg et Cash-Karp d'ordres $4-5$.

La résolution du système simple (4.6) est réalisée en estimant dans un premier temps la solution à l'ordre 5. La forme générale de cette solution s'exprime, pour les deux méthodes d'intégration, comme :

$$y_{n+1}^{(5)} = y_n^{(5)} + c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4 + c_5k_5 + c_6k_6 \tag{4.16}$$

où c_i, avec i allant de 1 à 6, sont des coefficients propres à chaque méthode d'intégration. Ceux-ci sont donnés Table 4.1. Les différentes fonctions k_i sont, elles, données par :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n,y_n), \\ k_2 &= hf(t_n + a_2h,y_n + b_{21}k_1), \\ &... \\ k_6 &= hf(t_n + a_6h,y_n + b_{61}k_1 + ... + b_{65}k_5) \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\tag{4.18}$$

où a_i et b_{ij}, avec i allant de 2 à 6 et j allant de 1 à 5, sont également des coefficients dont les valeurs dépendent de la méthode utilisée (voir Table 4.1).

1. `http://www.boost.org/`.

Runge Kutta Fehlberg								
i	a_i	b_{ij}					c_i	c_i^*
1							$\frac{16}{135}$	$\frac{25}{216}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					0	0
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				$\frac{6656}{12825}$	$\frac{1408}{2565}$
4	$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			$\frac{28561}{56430}$	$\frac{2197}{4104}$
5	1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$		$-\frac{9}{50}$	$-\frac{1}{5}$
6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	$\frac{2}{55}$	0
$j =$		1	2	3	4	5		

Runge Kutta Cash Karp								
i	a_i	b_{ij}					c_i	c_i^*
1							$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					0	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		0	$\frac{277}{14336}$
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$
$j =$		1	2	3	4	5		

TABLE 4.1 – Valeurs des différents coefficients utilisés par les méthodes Fehlberg et Cash Karp d'ordre $4-5$.

Une fois que la solution à l'ordre 5 est estimée, nous pouvons remonter à celle obtenue à l'ordre 4 par :

$$y_{n+1}^{(4)} = y_n^{(5)} + c_1^* k_1 + c_2^* k_2 + c_3^* k_3 + c_4^* k_4 + c_5^* k_5 + c_6^* k_6 \tag{4.19}$$

où c_i^*, avec i allant de 1 à 6, sont les coefficients dépendant encore une fois de la méthode utilisée (voir Table 4.1). On remarque ici qu'il n'est pas nécessaire de calculer des fonctions k_i supplémentaires pour estimer la solution à l'ordre 4.

Le contrôle du pas h avec ces deux intégrateurs est très proche de la méthode utilisée pour RK4. En effet, les paramètres Δ_0, Δ_1 ainsi que $\mathcal{R}_{\max}$ sont également estimés.

Cependant, contrairement à cette dernière, l'évaluation du paramètre Δ_1 est effectuée en prenant en compte les solutions estimées aux ordres 4 et 5 obtenues avec les formules (4.19) et (4.16), respectivement. Par exemple, si on considère la coordonnée X, Δ_1 s'exprime comme :

$$\Delta_1 = |X_{n+1}^{(5)} - X_{n+1}^{(4)}|. \tag{4.20}$$

Le paramètre Δ_0 dépend toujours de la dévirée et s'écrit :

$$\Delta_0 = \texttt{AbsTol} + \texttt{RelTol} \times |X_n + h\dot{X}_n| \tag{4.21}$$

où `AbsTol` est la tolérance absolue et `RelTol` est la tolérance relative. Le paramètre `AbsTol` est nécessaire dans les cas où la quantité $\texttt{RelTol} \times |X_n + h\dot{X}_n|$ est proche de zéro. En effet, il permet d'éviter les cas où on serait amené à avoir une division par zéro dans le calcul de $\mathcal{R}_{\max}$ (où d'avoir $\mathcal{R}_{\max}^{-1} = 0$). C'est également à cela que sert le paramètre $\epsilon_{\min}$ dans la formule (4.12) utilisée par l'intégrateur `Legacy`.

Les différents nouveaux pas sont estimés comme suit :

$$\begin{cases} \text{si } \mathcal{R}_{\max} > 1 \text{ alors } h_a = Sh \max\left(\mathcal{R}_{\max}^{-\frac{1}{O_E-1}}; 0{,}2\right), \\ \text{si } \mathcal{R}_{\max} < 0{,}5 \text{ alors } h_b = Sh \min\left(\mathcal{R}_{\max}^{-\frac{1}{O_S}}; 5\right), \\ \text{sinon } h_c = h \end{cases}$$

où S est encore égal à 0,9 et O_S et O_E sont les ordres utilisés pour estimer le pas et l'erreur sur le pas, respectivement. Dans le cas de méthodes d'intégration utilisant les ordres $4-5$ on a $O_S = 4$ et $O_E = 5$.

Lorsque l'utilisateur de `GYOTO` choisit les méthodes d'intégration de la collection `Boost C++`, il est possible de spécifier les paramètres `AbsTol` et `RelTol`. De plus, afin de garantir la robustesse de l'intégration nous avons choisi d'inclure à ces méthodes les paramètres supplémentaires utilisés dans `Legacy` : `DeltaMin`, `DeltaMax` et `DeltaMaxOverR`. Il est donc également possible de spécifier ces paramètres dans ces intégrateurs. Néanmoins, lorsque nous parlerons d'intégrateurs provenant de la collection `Boost C++`, cela signifiera que ces conditions supplémentaires ne seront pas utilisées (c'est-à-dire qu'on considèrera des paramètres tels que `DeltaMin` $\to 0$, `DeltaMax` $\to \infty$ et `DeltaMaxOverR` $\to \infty$), ce qui ne sera en revanche pas le cas pour l'intégrateur `Legacy`.

Les différentes méthodes d'intégration citées ici sont celles utilisées pour obtenir à la fois les géodésiques de genre temps et lumière. À présent nous allons voir quelles sont les différentes conditions d'arrêt nécessaires pour stopper l'intégration de ces géodésiques dans `GYOTO`.

Conditions d'arrêt des intégrations

L'intégration des géodésiques de particules matérielles se fait simplement entre les temps coordonnées initial et final imposés par l'utilisateur. Elle peut donc se faire aussi bien vers le passé que vers le futur par rapport à la coordonnée initiale.

En revanche, comme mentionné en début de chapitre, l'intégration des géodésiques lumière est effectuée en remontant le temps coordonnée depuis l'écran de l'observateur. Celle-ci est stoppée une fois que le photon rencontre une des différentes conditions d'arrêt citées ci-dessous :

— 1 : le photon a atteint l'étoile (cas optiquement épais) ou lorsqu'il a atteint une transmission $T_\nu = e^{-\tau_\nu}$ inférieure ou égale à une certaine valeur (cas optiquement mince),
— 2 : le photon a atteint un temps coordonnée inférieur ou égal à un temps minimal spécifié par l'utilisateur, elle se note `MinimumTime` dans `GYOTO`,
— 3 : le photon a atteint une coordonnée radiale r inférieure à une certaine limite,
— 4 : le photon est loin de l'objet astrophysique et/ou s'éloigne de celui-ci,
— 5 : le nombre de pas d'intégration dans la géodésique du photon a atteint une valeur maximale spécifiée par l'utilisateur, et qui se note `MaxIter`. Le plus grand nombre de pas est obtenu en choisissant `MaxIter` $= -1$,
— 6 : le temps coordonnée n'évolue plus ce qui signifie très probablement que le photon approche de l'horizon des événements.

Les seconde, cinquième et sixième conditions évitent les intégrations infinies notamment dans le cas de photons provenant de l'infini, ou s'enroulant indéfiniment autour de la sphère des photons, mais aussi les photons qui s'approchent asymptotiquement de l'horizon des événements.

Intégration des géodésiques pour le calcul d'images d'étoiles en mouvement

Dans cette nouvelle section nous souhaitons expliquer comment est obtenue l'image d'une étoile en mouvement dans `GYOTO`.

Comme dit précédemment, l'intégration des photons se fait en remontant le temps coordonnée, chaque pixel de l'écran de l'observateur correspond donc à la direction finale de chaque photon c'est-à-dire, du point de vue de l'observateur, la direction d'où semble provenir la lumière. Dans le cas du calcul de l'image d'une étoile en mouvement, il faut intégrer à la fois les géodésiques de genre lumière et de genre temps, afin de déterminer les quadri-positions communes aux deux trajectoires : si le photon est suffisamment proche de la surface de l'étoile alors le pixel à partir duquel le photon a été lancé vers le passé est illuminé. La détermination du point d'impact entre le photon et l'étoile (c'est-à-dire le lieu de l'émission du photon par l'objet) est obtenue de manière précise en ajoutant une condition sur le pas d'intégration de la géodésique lumière. Celle-ci intervient dans l'estimation du pas maximal autorisé lors de l'intégration de cette dernière. Elle est introduite à l'aide de deux paramètres fixés par l'utilisateur appelés `DeltaMaxOverDistance` et `DeltaMaxOverRadius`, ainsi que par deux quantités que sont la distance entre le photon et le centre de l'étoile $\mathrm{d}r$, et le rayon de l'étoile R_* :

$$h_{\max} = \max(\texttt{DeltaMaxOverDistance} \times \mathrm{d}r, \texttt{DeltaMaxOverRadius} \times R_*). \tag{4.22}$$

Il faut savoir que `DeltaMaxOverDistance` et `DeltaMaxOverRadius` sont ajoutés aux paramètres `DeltaMax`, `DeltaMin` et `DeltaMaxOverR` utilisés par chaque intégrateur.

Cette nouvelle condition ne se déclenche qu'à partir du moment où le photon entre dans une sphère de rayon $R_{\max}$ centrée sur le trou noir, dont la valeur est elle aussi fixée par l'utilisateur. Le fait de ne faire appel à cette condition seulement lorsque $r < R_{\max}$ permet de gagner en temps de calcul puisque celle-ci a pour effet de réduire le pas h dans l'intégration de la géodésique du photon.

Une fois que les coordonnées du photon sont obtenues à un pas h donné, nous déterminons les quadri-position et quadri-vitesse de l'étoile au temps coordonnée du photon. Si le photon n'a pas atteint l'étoile nous estimons les coordonnées de l'étoile au temps coordonnée du photon suivant, c'est-à-dire au pas h suivant. Lorsque le photon rencontre l'étoile, le pixel associé à ce photon est illuminé. C'est en lançant plusieurs photons vers le passé, situés à des directions finales sur le ciel différentes, que nous sommes capables de reconstituer l'image de l'étoile en mouvement.

Le principe du calcul d'images relativistes énoncé ici est également valable si l'on souhaite calculer l'image d'une étoile fixe. Néanmoins, dans ce cas il ne sera pas nécessaire d'intégrer la géodésique de genre temps puisque l'étoile est fixe dans le temps.

4.4 Quelques notions utiles

Dans cette nouvelle section, nous allons voir les principaux outils du code `GYOTO` utilisés au cours de cette thèse. Dans un premier temps, nous verrons comment est organisé le fichier d'entrée dans lequel sont précisées diverses informations telles que le type d'objet observé, la position de l'observateur ou encore la méthode d'intégration que l'on souhaite utiliser. On pourra d'ailleurs lire le manuel du code `GYOTO` pour avoir davantage d'informations quant à l'utilisation de ce fichier d'entrée. Puis, nous verrons les principales fonctions et quantités pouvant être utilisées sous `Yorick` et `Python` pour par exemple calculer l'image ou l'orbite d'une étoile.

Dans les exemples que nous présenterons dans la suite nous nous placerons dans le cas du Centre Galactique. Nous prendrons une masse de l'objet central égale à $M_{\mathrm{TN}} = 4{,}31 \times 10^6 M_\odot$ et une distance à l'observateur égale à $R_0 = 8$ kpc.

4.4.1 La scène

La scène ou `Scenery` est le nom que l'on donne à la structure globale du fichier d'entrée utilisant le métalangage `XML`. Dans celle-ci sont précisées plusieurs informations structurées en trois sous parties : la métrique, l'écran et l'objet astrophysique notés respectivement, dans le fichier `XML`, `Metric`, `Screen` et `Astrobj`.

La métrique est composée de plusieurs informations présentées ci-dessous :

```
<Metric kind="KerrKS">
  <Spin> 0.99 </Spin>
  <Mass unit="sunmass"> 4.31e6 </Mass>
```

```
  <HorizonSecurity> 0.01 </HorizonSecurity>
</Metric>
```

La première ligne sert à spécifier le type de coordonnées que l'on souhaite, ici il s'agit de `KerrKS` pour les coordonnées de Kerr-Schild. Pour celles de Boyer-Lindquist on mettra `KerrBL`. La seconde ligne correspond à la valeur du taux de rotation du trou noir et la troisième à sa masse en unité de masse solaire. La quatrième ligne est un paramètre de sécurité, donné en unités géométriques : l'intégration est stoppée à cette distance de l'horizon des événements. Ce paramètre est utile pour deux raisons. D'une part, on évite les erreurs de calcul qui font tomber le photon dans l'horizon. D'autre part, on évite de perdre du temps de calcul lorsque les photons approchent asymptotiquement de ce dernier.

L'écran de l'observateur est quant à lui défini par :

```
<Screen>
  <Time unit="geometrical_time"> 3.8e10 </Time>
  <Distance unit="geometrical"> 3.8e10 </Distance>
  <FieldOfView unit="uas"> 100 </FieldOfView>
  <Inclination unit="°"> 90 </Inclination>
  <Argument unit="°"> -135 </Argument>
  <PALN unit="°"> 180 </PALN>
  <Resolution> 51 </Resolution>
  <Spectrometer kind="wave" nsamples="1" unit="um"> 1.9 2.3 </Spectrometer>
</Screen>
```

On pourra se reporter à la Fig. 4.1 pour une représentation de certains des paramètres définissant l'écran de l'observateur. Le paramètre `Time` correspond au temps coordonnée de l'écran exprimé en unités géométriques [2]. On définit `Time` tel que $R_0 = \texttt{Time} \times c$ (avec $c = 1$), de telle façon que le temps coordonnée du photon soit proche de zéro quand celui-ci s'approche du trou noir. Le paramètre `Distance` correspond à la distance de l'observateur par rapport au trou noir, donnée en unités géométriques. Le paramètre `FieldOfView` correspond au champ de vue de l'écran de l'observateur. Ici, il est exprimé en microsecondes d'angle. Les trois paramètres qui suivent permettent de positionner l'écran par rapport au trou noir. Les deux premiers paramètres sont reliés aux coordonnées de Boyer-Lindquist par :

$$\texttt{Inclination} = \pi - \theta, \qquad \texttt{Argument} = -\frac{\pi}{2} - \phi. \tag{4.23}$$

Le troisième paramètre permet d'effectuer une rotation de l'écran dans le plan orthogonal à la ligne de visée. Enfin, les quantités `Resolution` et `Spectrometer` correspondent respectivement à la résolution de l'écran et à la bande spectrale dans laquelle on souhaite

2. Pour passer d'une distance exprimée en mètres à des unités géométriques on doit multiplier la distance par c^2/GM. En revanche, pour passer d'un temps exprimé en secondes à des unités géométriques on multiplie le temps par c^3/GM. Pour faire la différence entre ces deux changements d'unités on parle, dans la scène, d'unités `geometrical` pour les distances et d'unités `geometrical_time` pour le temps.

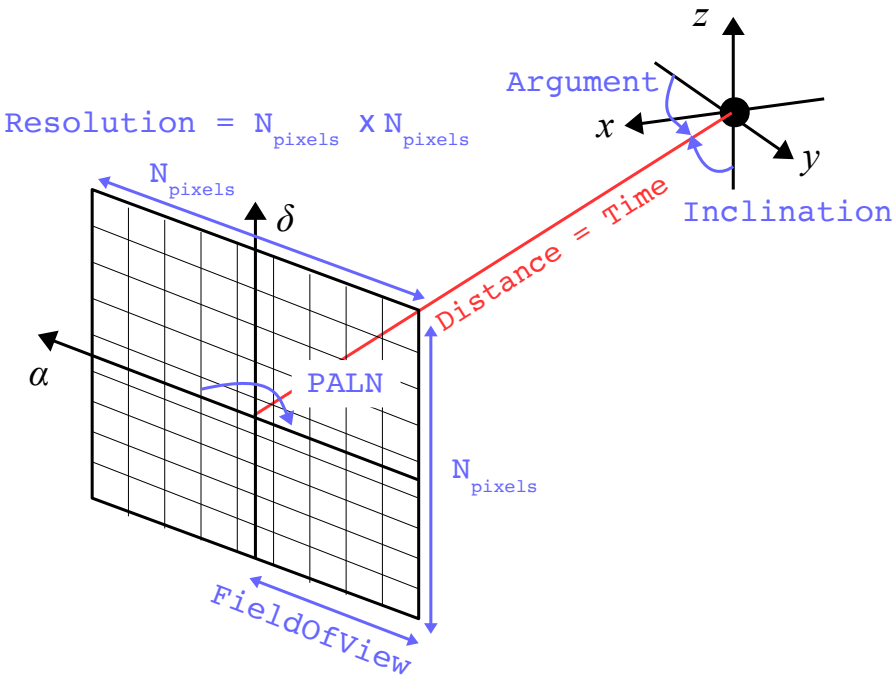

FIGURE 4.1 – Illustration de quelques paramètres composant la structure `Screen` de la `Scenery`, dans le cas où `Inclination` = 90°, `Argument` = −135° et `PALN` = 180°. Le nombre $\mathtt{N}_{\mathtt{pixels}}$ représente le nombre de pixels le long des axes α et δ de l'écran. Précisons que les axes (α,δ) sont choisis de sorte que l'axe $z_{\rm obs}$ de l'observateur pointe en direction du trou noir.

observer. On considère ici une bande comprise entre 1,9 et 2,3 micromètres en vue des observations de l'instrument *GRAVITY* qui seront faites dans la bande K du proche infrarouge aux environs de 2,2 micromètres. On précise pour finir qu'il est possible de spécifier les paramètres `Time`, `Distance`, `Inclination` et `Argument` en une seule commande donnée par :

`<Position>` $t_{\rm obs}$, $x_{\rm obs}$, $y_{\rm obs}$, $z_{\rm obs}$ `</Position>`

où ($t_{\rm obs}$,$x_{\rm obs}$,$y_{\rm obs}$,$z_{\rm obs}$) est la quadri-position de l'observateur en coordonnées de Kerr-Schild.

Pour ce qui est de l'objet astrophysique observé, celui-ci est représenté, dans le cas d'une étoile en mouvement, par :

```
<Astrobj kind = "Star">
  <Radius> 1 </Radius>
  <Spectrum kind="BlackBody">
  <Temperature> 19000 </Temperature>
  <Position> 0 2 0 1.57079632679 </Position>
  <Velocity> -0.233360 0.00101120 0 </Velocity>
```

```
  <OpticallyThick/>
  <DeltaMaxOverDistance> 0.1 </DeltaMaxOverDistance>
  <DeltaMaxOverRadius> 0.1 </DeltaMaxOverRadius>
  <RMax> 1000 </RMax>
</Astrobj>
```

La première ligne permet de spécifier le type d'objet que l'on souhaite étudier. Si on souhaite observer une étoile fixe on mettra `FixedStar` à la place de `Star`. Ensuite vient le rayon de l'étoile exprimé en unités géométriques et le type de spectre d'émission de l'objet. Dans notre cas, nous avons choisi un spectre de corps noir. La température de l'objet est également présente et s'exprime en kelvin. Les paramètres `Position` et `Velocity` correspondent aux coordonnées initiales de l'étoile, exprimées en coordonnées de Kerr-Schild et en unités géométriques. Précisons que les vitesses sont données en $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ et non pas en $\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$. Il est également possible de spécifier si l'on souhaite avoir un objet optiquement épais par `OpticallyThick` ou optiquement mince par `OpticallyThin`. Les trois derniers paramètres sont ceux présentés précédemment.

En plus de ces trois structures, la scène est composée d'autres paramètres tels que :

```
<NThreads> 1 </NThreads>
<NProcesses> 0 </NProcesses>
<Integrator>runge_kutta_fehlberg78</Integrator>
<RelTol> 1e-18 </RelTol>
<AbsTol> 1e-18 </AbsTol>
<DeltaMin> 2.225073858507201e-308 </DeltaMin>
<DeltaMax> 1.797693134862316e+308 </DeltaMax>
<DeltaMaxOverR> 0.1 </DeltaMaxOverR>
<MaxIter> -1 </MaxIter>
<Adaptive/>
<MinimumTime> -403991985541669.1 </MinimumTime>
<Delta> 100 </Delta>
```

`NThreads` et `NProcesses` sont respectivement les nombres de nœuds et cœurs que l'on souhaite utiliser lors du calcul d'images. Comme son nom l'indique le paramètre `Integrator` permet de spécifier l'intégrateur que l'on choisit pour intégrer les géodésiques des photons, ici il s'agit de `Runge-Kutta-Felberg78`. Il y a également les paramètres de tolérances `AbsTol` et `RelTol` discutés précédemment, nécessaires aux intégrateurs de la collection `Boost C++`. Les trois autres paramètres `DeltaMin`, `DeltaMax` et `DeltaMaxOverR` utilisés pour l'ensemble des intégrateurs sont également présents. Ici, les valeurs assignées à `DeltaMin` et `DeltaMax` sont respectivement les valeurs minimale et maximale pouvant être obtenues avec une double précision. Les paramètres `MaxIter` et `MinimumTime` sont ceux décrits Sect. 4.3.2. Enfin, le paramètre `Delta` correspond au premier pas h utilisé lors de l'intégration des géodésiques.

Une fois le fichier `XML` complété, il existe plusieurs façons de le lire :

— en tapant directement dans le terminal la ligne de commande suivante : `gyoto input.xml output.fits`,
— en utilisant les greffons `Yorick` ou `Python`,
— en utilisant l'interface graphique `GYOTOY`,[3] ce qui ne permet en revanche pas de calculer une image.

4.4.2 Définition de quelques fonctions et quantités du code GYOTO

Dans cette section nous définissons les principales fonctions et quantités de `GYOTO` utilisées pour mener à bien les divers travaux effectués au cours de cette thèse. Nous donnons également quelques exemples d'application du code dans le cas de l'utilisation du greffon `Yorick`.

Tracer des géodésiques

Pour permettre la visualisation des géodésiques de genre temps et lumière, il est possible d'utiliser plusieurs fonctions. La première se note `get_txyz` et permet d'obtenir les coordonnées cartésiennes (t,x,y,z) de l'étoile ou du photon. La seconde est `get_coord` et donne les coordonnées $(t,x,y,z,\dot{t},\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ avec les dérivées exprimées soit en $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ pour le photon soit en $\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$ pour l'étoile. Une troisième fonction s'appelle `get_cartesian` et fournit les coordonnées (x,y,z,x',y',z') avec cette fois-ci les dérivées exprimées en $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Dans le cas de la coordonnée x' de l'étoile, celle-ci est calculée par $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau \times (\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau)^{-1}$. Pour utiliser cette dernière fonction il est nécessaire de préciser les temps coordonnées auxquels on souhaite avoir les positions et vitesses de la particule test. La fonction `get_coord` peut également être utilisée ainsi.

Voici un exemple d'application dans le cas de l'étoile, utilisant ces trois fonctions :

```
> // On stocke la scène du XML dans scenery:
> chemin = "/chemin/vers/fichier.xml"
> scenery = gyoto_Scenery(chemin);
> // On stocke l'objet astrophysique du XML dans astrobj
> astrobj = scenery(astrobj=);


> // Coordonnées obtenues à des dates déjà prédéfinies dans GYOTO:
> txyz = astrobj(get_txyz=);
> coord_1 = astrobj(get_coord=);

> // Coordonnées obtenues à des dates spécifiées pas l'utilisateur:
> dates = span(3e10,0,100); // en unités géométriques
> coord_2 = astrobj(get_coord=dates);
> cartesian = astrobj(get_cartesian=dates);
```

3. On trouvera une image de cette interface sur le site de `GYOTO` : `http://gyoto.obspm.fr/`. Pour utiliser `GYOTOY`, il suffit de taper `gyotoy` dans le terminal.

Impact entre le photon et l'étoile

Une autre fonction utile, mais qui ne concerne cette fois-ci que le photon, s'appelle `is_hit`. Elle permet de savoir si le photon, lancé depuis une certaine direction sur l'écran de l'observateur, rencontre l'étoile de rayon R_*. Rappelons que dans le contexte du tracé de rayons, les géodésiques de genre lumière sont intégrées en remontant le temps coordonnée du photon. Celle-ci s'utilise comme suit :

```
> // On stocke la métrique dans metric:
> metric = scenery(metric=);
> // On stocke l'écran dans screen:
> screen = scenery(screen);
> // On stocke le photon dans photon:
> photon  = gyoto_Photon(metric=metric, astrobj=astrobj);
> // On spécifie le temps coordonnée minimal du photon que l'on choisit,
> // en unités géométriques:
> photon(MinimumTime=-1e6);
> // On initialise le photon:
> photon(reset=);
> // On donne la position initiale du photon sur l'écran:
> photon(initcoord=screen,alpha,delta);
> // On intègre le photon entre ses temps coordonnées initial et final:
> photon(xfill=-1e6);
> // On détermine si le photon a touché l'étoile:
> photon(is_hit=);
> // si photon(is_hit=) = 1 alors le photon touche l'étoile,
> // si photon(is_hit=) = 0 alors il n'a pas touché l'étoile.
```

Visualiser des cartes avec `GYOTO`

Les quantités que nous allons présenter ici sont celles permettant d'obtenir différents types d'informations concernant l'objet astrophysique observé. La première s'appelle `Intensity` et donne l'intensité spécifique apparente de l'objet à une fréquence de 1 hertz (voir image de gauche Fig. 4.2).

La seconde se nomme `Spectrum` et permet d'avoir l'intensité spécifique de la source observée à une fréquence donnée. Le flux total en résultant peut être obtenu grâce à la formule suivante :

$$F_{\nu_{\rm obs}} = \sum_{\rm pixels} I_{\nu_{\rm obs},{\rm pixel}} \cos(\theta_{\rm pixel}) \delta\Omega_{\rm pixel} \tag{4.24}$$

avec, au pixel considéré, $I_{\nu_{\rm obs},{\rm pixel}}$ l'intensité spécifique, $\theta_{\rm pixel}$ l'angle entre la normale à l'écran et la direction d'incidence du photon, et $\delta\Omega_{\rm pixel}$ l'élément d'angle solide couvert par le pixel. Ce dernier est défini comme :

$$\delta\Omega_{\rm pixel} = \frac{2\pi\left[1-\cos(f)\right]}{N_{\rm pixels}} \tag{4.25}$$

où f = `FieldOfView`/2. Rappelons que l'intensité spécifique est obtenue en intégrant l'équation (4.1) du transfert radiatif relativiste.

Une troisième quantité s'appelle `Redshift` et permet de remonter à une quantité notée g dépendant du décalage spectral $\mathcal{Z}$ de l'étoile tel que vu par l'observateur :

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{g} - 1. \tag{4.26}$$

Le paramètre g est obtenu en calculant la formule :

$$\begin{aligned} g &= \frac{\nu_{\text{obs}}}{\nu_{\text{em}}}, \\ &= \frac{\mathbf{u}_{\text{obs}} \cdot \mathbf{p}_{\text{obs}}}{\mathbf{u}_{\text{em}} \cdot \mathbf{p}_{\text{em}}} \end{aligned} \tag{4.27}$$

où ν_{em} et ν_{obs} sont les fréquences telles que mesurées dans le référentiel comobile avec l'émetteur et avec l'observateur, respectivement. Les quantités $\mathbf{u}_{\text{em(obs)}}$ et $\mathbf{p}_{\text{em(obs)}}$ correspondent aux quadri-vecteur de l'étoile (observateur) et quadri-impulsion du photon mesurée dans le référentiel comobile avec l'étoile (observateur), respectivement.

Ces trois quantités sont obtenues lorsque le rayon de l'étoile ainsi que la résolution de l'écran sont suffisamment grands pour que des photons lancés depuis l'écran puissent atteindre l'étoile. En effet, lorsque le photon atteint la surface de l'étoile les différentes quantités peuvent alors être calculées, celles-ci étant égales à zéro sinon (voir illustration de ces trois quantités à l'image du haut Fig. 4.3).

Une dernière quantité est appelée `MinDistance`, elle correspond au minimum du carré de la distance euclidienne entre le photon et la surface de l'étoile (voir image de droite Fig. 4.2). Une valeur de cette quantité proche de zéro signifie donc que le photon a atteint l'étoile. Pour estimer le plus précisément possible cette quantité une interpolation est effectuée entre deux points successifs de la géodésique lumière, les plus proches de l'étoile (voir image du bas Fig. 4.3).

Pour obtenir les différentes cartes, notamment celles visibles Fig. 4.2, il suffit d'utiliser la commande suivante :

```
> image = scene(,,"Quantité");
```

où `Quantité` doit être remplacée par l'une des quatre quantités présentées dans cette section. La résolution de la carte obtenue sera celle précisée dans le fichier `XML`.

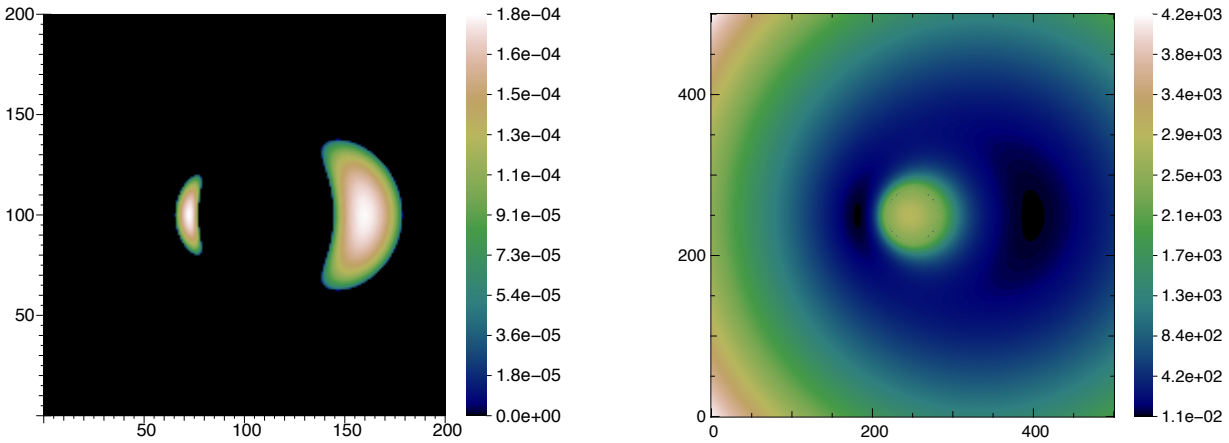

FIGURE 4.2 – Cartes `Intensity` (à gauche) et `MinDistance` (à droite) d'une étoile fixe située à l'arrière d'un trou noir de masse $4{,}31 \times 10^6$ masses solaires et distant de 8 kiloparsecs de l'observateur. On note ici la présence des images primaire et secondaire de l'étoile. L'image `Intensity` a été obtenue avec une étoile de rayon 10 unités géométriques, tandis que celui-ci est nul pour la carte `MinDistance`. Les axes des deux figures sont exprimés en pixels. La palette de couleurs est exprimée en $\mathrm{J.m^{-2}.s^{-1}.sr^{-1}.Hz^{-1}}$ pour l'image `Intensity` et en unités géométriques carrées pour la carte `MinDistance`.

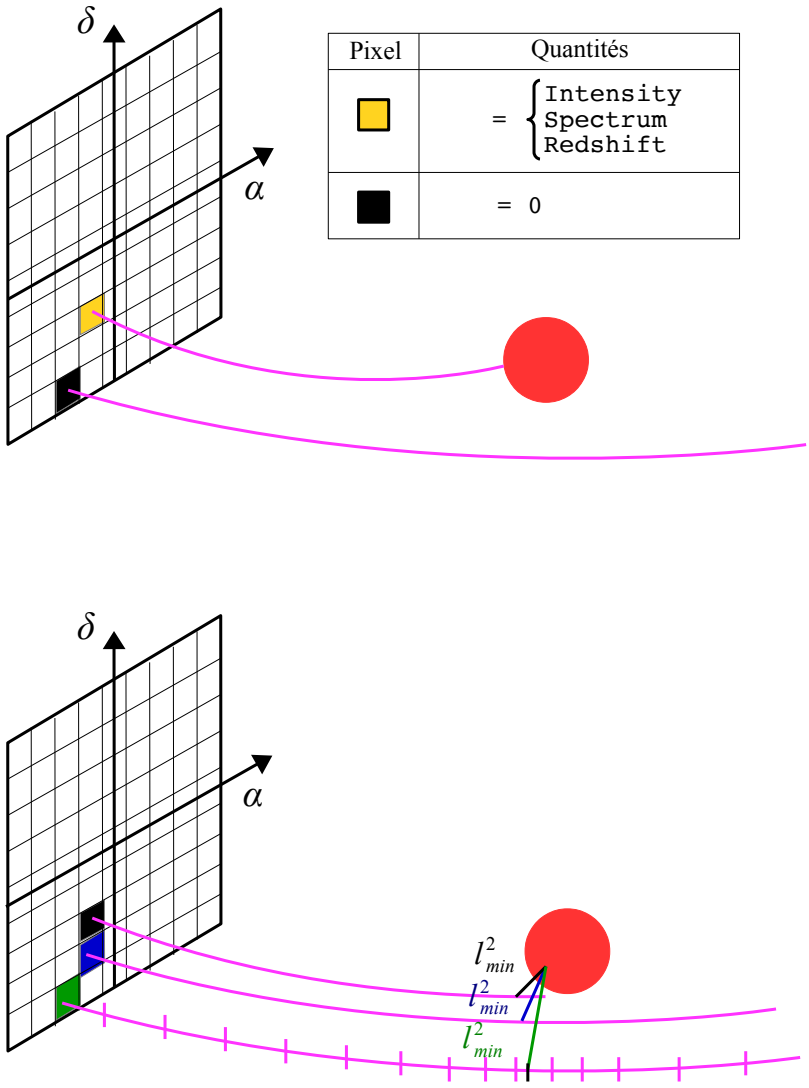

FIGURE 4.3 – *En haut :* illustration de l'illumination des pixels de l'écran pour les quantités `Intensity`, `Spectrum` et `Redshift`. L'étoile est représentée en rouge et les photons en magenta. Lorsque le photon atteint l'étoile les différentes quantités peuvent être calculées. *En bas* : illustration de la quantité `MinDistance`. Les différents $l^2_{\min}$ correspondent aux distances minimales au carré entre chaque géodésique de genre lumière et la surface de l'étoile. Plus le photon est proche de l'étoile plus la quantité `MinDistance` tend vers zéro et donc plus le pixel est sombre. Les tirets magenta schématisent les points auxquels ont été estimées les coordonnées du photon. Le tiret noir représente le point obtenu grâce à l'interpolation faite entre les deux tirets magenta les plus proches de l'étoile. C'est à ce point qu'est estimée la quantité `MinDistance`.

Chapitre 5

Performance du calcul des géodésiques de genre lumière dans GYOTO

Sommaire

5.1 Test en déflexion faible 102

5.1.1 Définition de l'anneau d'Einstein 102

5.1.2 Comparaisons des intégrateurs GYOTO 109

5.1.3 Méthodes numériques 115

5.1.4 Résultats 119

5.2 Test en déflexion forte 122

5.2.1 Méthode 122

5.2.2 Résultats 123

Dans ce nouveau chapitre, nous allons voir les différents tests effectués sur les géodésiques de genre lumière calculées par le code de tracé de rayons GYOTO. L'objectif est de montrer que l'intégration des photons est suffisamment précise pour utiliser ce code lors de l'interprétation physique des futures données de l'instrument *GRAVITY*. On rappelle que la précision astrométrique de ce dernier est de 10 microsecondes d'angle. Les différents calculs effectués dans le code devront donc être suffisamment précis pour que les erreurs commises sur les positions astrométriques simulées avec GYOTO soient plus petites que cette précision. Nous ferons donc des tests en déflexion faible et forte. Afin de s'en assurer, tous les tests effectués ici seront faits en considérant une étoile fixe et en se plaçant dans le cas du Centre Galactique, on aura donc $R_0 = 8$ kpc et $M_{\mathrm{TN}} = 4{,}31 \times 10^6 M_\odot$.

On précise que cette partie de la thèse constitue une première validation des performances du code GYOTO. Il reste évidemment encore divers tests à effectuer pour valider complètement le code, tels que le calcul des géodésiques de genre temps et l'estimation de l'intensité spécifique lors du calcul d'images.

5.1 Test en déflexion faible

Dans cette section, nous allons effectuer un premier test en déflexion faible en comparant le code GYOTO à des approximations analytiques définies ci-après.

5.1.1 Définition de l'anneau d'Einstein

Afin de tester GYOTO en déflexion faible, nous avons choisi de le comparer à trois approximations analytiques obtenues en métrique de Kerr et définissant ce que l'on appelle l'anneau d'Einstein. Ce dernier sera présenté en métrique de Schwarzschild et de Kerr ci-dessous. Précisons que nous nous placerons dans la configuration illustrée Fig. 5.1 tout au long de ce chapitre.

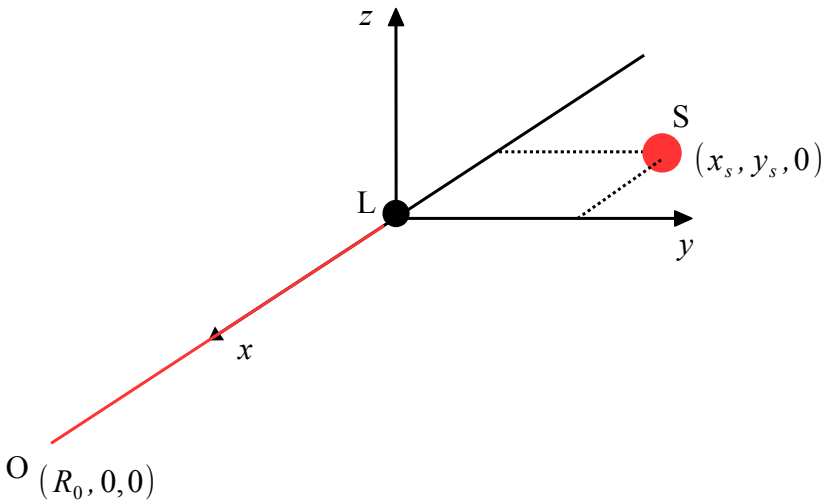

FIGURE 5.1 – Configuration spatiale entre l'observateur O, la lentille L et la source S.

Formation de l'anneau d'Einstein en métrique de Schwarzschild

En métrique de Schwarzschild, lorsque l'étoile est située directement à l'arrière du trou noir (sur l'axe $x < 0$ Fig. 5.1), un anneau se forme dans le plan du ciel et est appelé anneau d'Einstein. Celui-ci est visible Fig. 5.2 où l'on a considéré une étoile de rayon 1 unité géométrique située à $(x_s,y_s,z_s) = (-10\ M,0,0)$ [1]. L'existence de cet anneau est due au fait que les photons partant de l'étoile sont déviés par le champ gravitationnel généré par le trou noir. De plus, tous les photons atteignant le trou noir sont piégés par celui-ci, ils ne peuvent donc pas le traverser.

1. Les coordonnées ayant pour indice la lettre s seront associées à la source étudiée dans toute la suite du manuscrit.

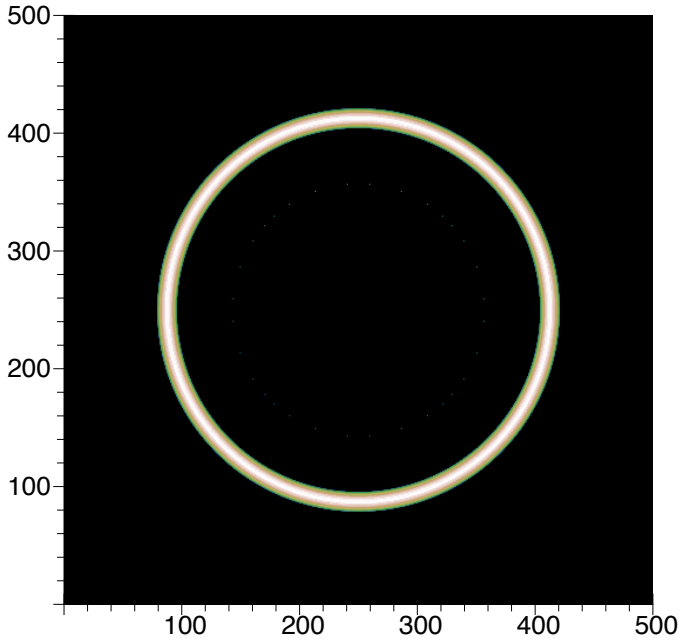

FIGURE 5.2 – Image de l'anneau d'Einstein obtenue avec un trou noir sans rotation, dont les axes sont exprimés en pixels.

Pour mieux comprendre l'origine de la formation de cet anneau nous devons d'abord définir l'équation des lentilles gravitationnelles donnée par (Schneider et al. 1992) :

$$\beta = \theta - \frac{r_s}{(r_s + R_0)}\hat{\alpha}(\xi) \tag{5.1}$$

où β et θ sont les positions angulaires sur le ciel non lentillée et lentillée de l'étoile, respectivement. La coordonnée r_s correspond à la coordonnée radiale de l'étoile et le paramètre $\hat{\alpha}(\xi)$ est l'angle de déflexion dépendant du paramètre d'impact ξ (voir équation (1.25)). L'angle θ est également relié au paramètre d'impact par $\theta = \xi/R_0$. Une illustration de ces différents paramètres est donnée Fig. 5.3.

Cette équation des lentilles peut également se mettre sous la forme suivante :

$$\theta^2 - \beta\theta - \theta_E^2 = 0 \tag{5.2}$$

avec

$$\theta_E = \sqrt{2R_S \frac{r_s}{R_0(r_s + R_0)}}. \tag{5.3}$$

L'angle θ_E défini ici correspond au rayon de l'anneau d'Einstein et dépend de trois paramètres : la masse de la lentille et les distances de l'étoile et de l'observateur à la lentille.

En plus d'observer un effet de courbure dans la trajectoire des photons, l'image de la source est amplifiée. Cette amplification, que l'on note A, dépend des positions angulaires

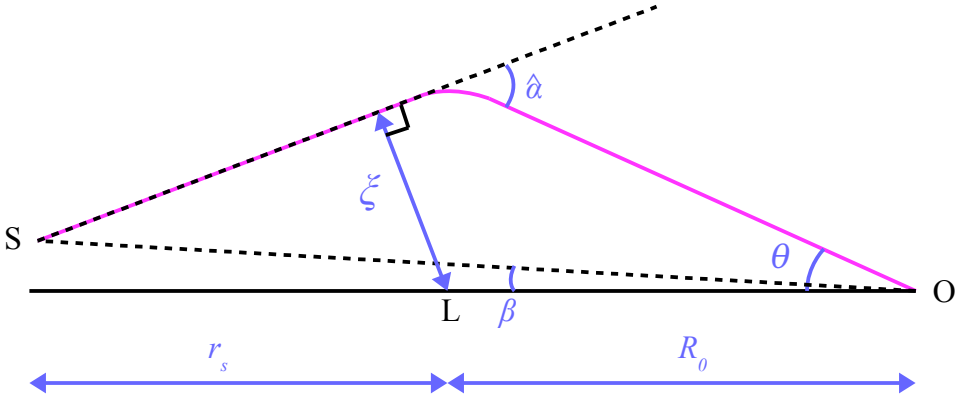

FIGURE 5.3 – Configuration spatiale d'un effet de lentille en métrique de Schwarzschild.

lentillée et non lentillée de l'étoile comme :

$$A = J^{-1} = \left|\det\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\right|^{-1}. \tag{5.4}$$

Celle-ci est infinie lorsque la quantité J est nulle. Les positions de la source S telles que l'amplification observée est infinie sont appelées des points caustiques. C'est lorsque la source se situe à ces positions qu'un anneau d'Einstein se forme sur l'écran de l'observateur. Dans le cas de la métrique de Schwarzschild, la caustique est une droite située à l'arrière du trou noir s'étendant de celui-ci jusqu'à l'infini : il s'agit de l'axe $x < 0$ Fig. 5.1. Si la source est située sur cette droite, l'angle non lentillé β est égal à zéro, la solution de l'équation des lentilles (5.2) est alors $\theta = \theta_E$. Cette solution s'appelle courbe critique et correspond à un cercle de rayon θ_E. Les courbes critiques sont donc les figures se formant dans le plan du ciel lorsque la source est située sur un point caustique. Si la source en question est une étoile, on observera alors un anneau d'Einstein de rayon angulaire θ_E. En revanche, si l'étoile est décalée du point caustique, on observera deux images correspondant aux images primaire et secondaire visibles Fig. 4.2.

Plusieurs travaux ont été menés sur les caustiques et courbes critiques obtenues en métrique de Schwarzschild. Rauch & Blandford (1994) ont notamment démontré l'existence de plusieurs ordres de caustiques et courbes critiques. Celles introduites ci-dessus sont obtenues au premier ordre, on parle alors d'anneau d'Einstein primaire. Ces caustiques et courbes critiques sont générées par des photons ne tournant pas autour du trou noir. Aux ordres plus élevés, les caustiques et courbes critiques sont dues à des photons tournant une ou plusieurs fois autour du trou noir avant de rejoindre l'observateur. Bozza (2008) a d'ailleurs montré que les caustiques d'ordres supérieurs à un étaient également des droites, les caustiques d'ordres pairs s'étendant du trou noir à l'observateur et celles d'ordres impairs étant similaires à celle du premier ordre, c'est-à-dire qu'elles se forment à l'arrière du trou noir. Néanmoins, les anneaux d'Einstein résultant de caustiques d'ordres supérieurs ou égaux à deux sont très difficiles à visualiser puisque tout le flux est concentré dans l'image

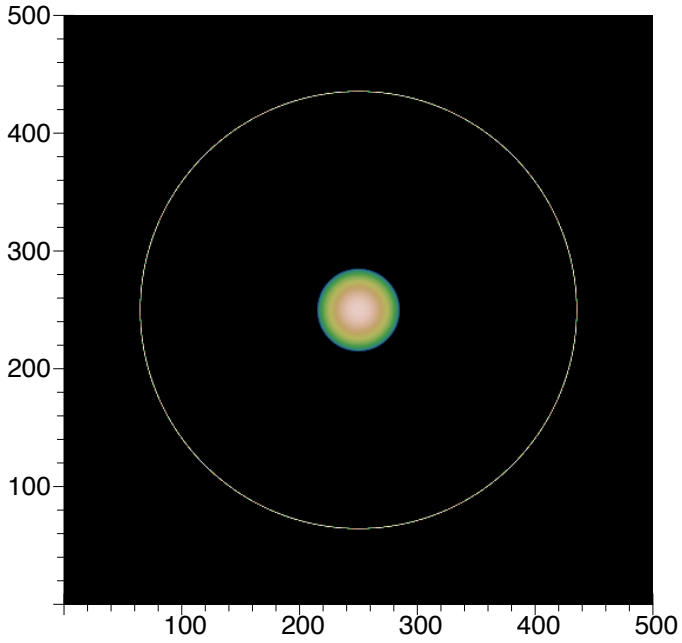

FIGURE 5.4 – Image de l'anneau d'Einstein obtenue avec une étoile située sur la caustique d'ordre deux et pour un trou noir sans rotation. L'étoile possède un rayon de 1 unité géométrique et est située à 6 unités géométriques à l'avant du trou noir. Les axes sont exprimés en pixels.

primaire ou l'anneau d'Einstein primaire. On pourra d'ailleurs le constater Fig. 5.4 où est représenté l'anneau d'Einstein obtenu avec une étoile située sur la caustique d'ordre deux.

Formation de l'anneau d'Einstein en métrique de Kerr

Dans le cas d'un trou noir en rotation, il existe également une caustique primaire ainsi que des caustiques d'ordre supérieur. Cependant, celles-ci ne sont plus des droites. Rauch & Blandford (1994) ont été les premiers à découvrir que la caustique primaire en métrique de Kerr était un tube en forme d'astroïde (voir Fig. 5.5). À grande distance du trou noir, l'astroïde est symétrique mais il se distord près de l'horizon des événements. En plus de sa forme particulière, le tube est décalé par rapport à la ligne de caustique primaire rencontrée dans le cas de la métrique de Schwarzschild (voir Fig. 5.5). Près de l'horizon, le tube s'enroule autour du trou noir dans le sens opposé au sens de rotation de celui-ci. Une variation de la taille de l'astroïde est également observée : celle-ci décroît en s'éloignant de l'objet compact et finit par se réduire en une ligne, tout comme en métrique de Schwarzschild.

Pour former la courbe critique[2] et donc l'anneau d'Einstein dans le plan de

2. Afin d'alléger le texte, nous choisissons d'omettre le terme primaire lorsque nous parlerons de caustique primaire, courbe critique primaire et anneau d'Einstein primaire.

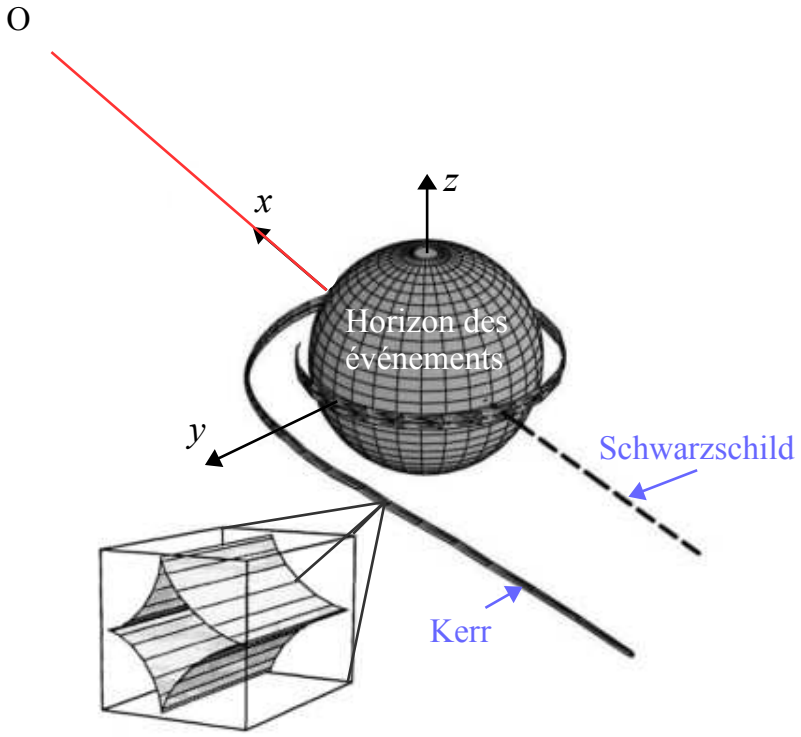

FIGURE 5.5 – Schéma des caustiques primaires rencontrées en métrique de Schwarzschild (tirets) et en métrique de Kerr (tube en forme d'astroïde). Sources : Rauch & Blandford (1994), Bozza (2008).

l'observateur, il est nécessaire que l'étoile couvre la totalité de l'astroïde à un point x donné. Si on considère un point source (étoile de rayon nul) situé à l'intérieur de la caustique, quatre images apparaîtront dans le plan du ciel (voir ronds bleus, croix vertes et losanges jaunes Fig. 5.6). En revanche, si celui-ci est situé sur la surface ou à l'extérieur de la caustique, seulement deux images se formeront (voir carrés magenta et triangles rouges Fig. 5.6). On remarque que lorsque la source est placée sur le point de rebroussement droit (respectivement gauche) de la caustique, une des deux images se forme sur la partie gauche (respectivement droite) de la courbe critique (voir triangles rouges et carrés magenta Fig. 5.6). Mentionnons également que les courbes critiques obtenues en métrique de Kerr ne sont pas circulaires mais elliptiques (Sereno & de Luca 2008).

Des études analytiques des caustiques et courbes critiques obtenues en métrique de Kerr ont été menées dans les articles de Sereno & de Luca (2006) et Sereno & de Luca (2008). Des approximations analytiques ont notamment été obtenues en déflexion faible ainsi qu'en champ faible. Ce premier régime signifie que les photons ne tournent pas autour du trou noir, pour cela leur distance minimale au trou noir, notée $r_{\gamma,\min}$, doit vérifier $r_{\gamma,\min} \gg R_S$. Pour être dans le second régime on doit cette fois-ci satisfaire la condition $r \gg R_S$ avec r la coordonnée radiale en un point de l'espace.

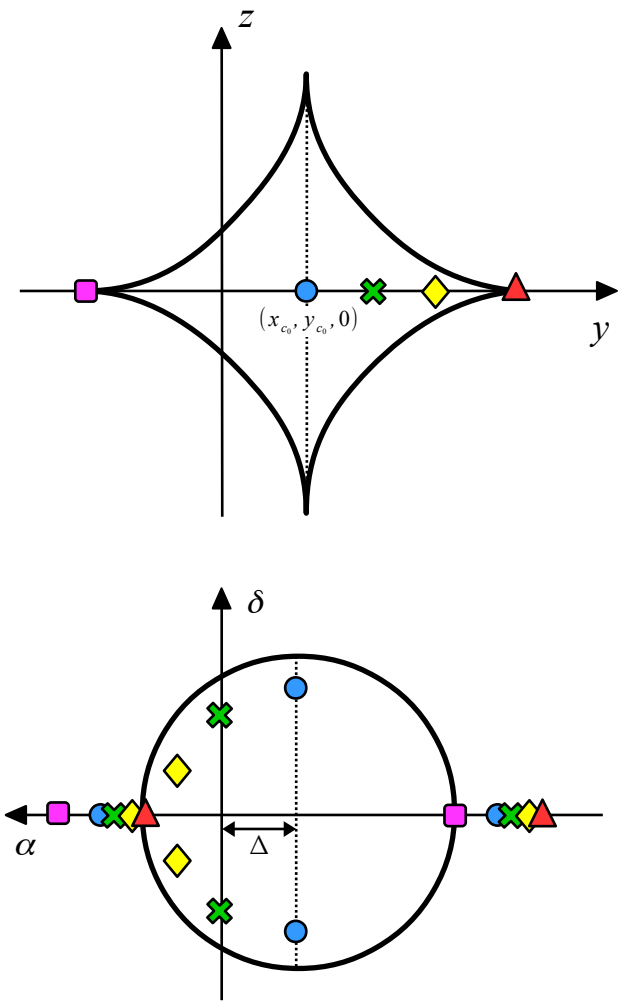

FIGURE 5.6 – Lien entre le déplacement d'un point source par rapport à la caustique obtenue en métrique de Kerr (image du haut) et les images observées dans le plan du ciel (image du bas). Le cercle noir dans l'image du bas correspond à la courbe critique. On considère ici un point source de coordonnée $x_s < 0$ se déplaçant dans le plan équatorial du trou noir. La caustique est centrée en un point noté (x_{c_0},y_{c_0},0) et les axes (α,δ) sont centrés sur le trou noir. La courbe critique est décalée d'une certaine quantité Δ par rapport au centre du repère (α,δ) car la caustique est décalée de l'axe x à cause de la rotation du trou noir.

Dans ces deux régimes, l'astroïde reste symétrique mais le tube est décalé par rapport à la ligne de caustique obtenue en présence d'un trou noir sans rotation. La courbe critique en résultant n'est donc pas centrée sur le trou noir mais est également décalée d'une certaine distance angulaire notée Δ, le long de l'axe α (voir Fig. 5.6).

Dans Sereno & de Luca (2008), trois approximations analytiques ont été obtenues à

l'aide d'un développement de Taylor en :

$$\varepsilon = \frac{\theta_E}{4D} \tag{5.5}$$

avec $D = r_s/(r_s + R_0)$. L'une de ces trois formules donne une estimation des rayons angulaires gauche et droit de l'anneau d'Einstein évalués le long de l'axe α de l'écran de l'observateur. Plus précisément, elle correspond au demi-petit axe de la courbe critique :

$$\Theta_E \approx \theta_E \left\{ 1 + \frac{15\pi}{32}\varepsilon + \left[4\left(1 + D^2\right) - \frac{675\pi^2}{2048} \right] \varepsilon^2 + \frac{15\pi}{8}\varepsilon^3 \left[D + 4D^2 - \frac{9(272 - 25\pi^2)}{1024} - \frac{\bar{a}^2}{8} \right] \right\}. \tag{5.6}$$

On comprend qu'ici l'angle θ_E introduit précédemment correspond au rayon de l'anneau d'Einstein à l'ordre zéro en ε. Notons par ailleurs que l'angle Θ_E dépend du moment cinétique adimensionné du trou noir à l'ordre ε^3. La seconde approximation correspond au décalage Δ du centre de la courbe critique (et donc de l'anneau d'Einstein) le long de l'axe α, dû à la rotation du trou noir :

$$\Delta \approx \frac{a\theta_E^2}{4D} \left\{ 1 + \frac{15\pi}{32}\varepsilon + \left[4(2 - D + 4D^2) - \frac{225\pi^2}{256} \right] \varepsilon^2 \right\}. \tag{5.7}$$

Si la rotation du trou noir s'effectue, telle que vue depuis l'observateur, de la gauche vers la droite, alors le décalage Δ de la courbe critique se fera vers les axes $\alpha < 0$ comme cela est schématisé Fig. 5.6. La dernière approximation donne la position le long de l'axe y d'un point de la surface de l'astroïde, noté y_c, en un point x donné :

$$y_c = \frac{\bar{a}}{1 - D} \left[1 + \frac{5\pi}{16}\varepsilon + \left(4 - \frac{225\pi^2}{512} \right) \varepsilon^2 \right] + \Delta_c \cos^3(\eta) \tag{5.8}$$

avec

$$\Delta_c = \frac{15\pi}{256} \frac{a^2}{D(1 - D)R_0} \tag{5.9}$$

la distance entre le centre de l'astroïde et les quatre points de rebroussement. L'angle η varie entre 0 et 2π et permet de se positionner le long de la surface de la caustique : à $\eta = 0$ on est au point de rebroussement droit et à $\eta = \pm\pi$ on est au point de rebroussement gauche. Si on considère la position angulaire du point de rebroussement droit telle que vue depuis la Terre, celle-ci est donnée, dans le plan équatorial du trou noir, par :

$$B_c = \arctan\left(\frac{y_c}{R_0 + |x|} \right) \tag{5.10}$$

où on a pris $z = 0$. Dans la suite du chapitre, les positions x et y seront celles considérées au point source et seront donc notées x_s et y_s, respectivement.

Parmi ces approximations, certaines ont déjà été testées et comparées à un code numérique développé par Bozza (2008). Dans son étude, l'auteur teste les formules

donnant la taille de la caustique (5.9) ainsi que la position du point de rebroussement gauche de l'astroïde. Il en a déduit que ces formules concordaient avec ses résultats numériques, mais échouaient très près de l'horizon des événements.

Les trois approximations analytiques que nous choisissons d'utiliser afin de tester le code `GYOTO` sont le rayon Θ_E et le décalage Δ de l'anneau d'Einstein, ainsi que la position angulaire du point de rebroussement droit B_c, tels que vus par un observateur terrestre.

Avant de se lancer directement dans la comparaison de ces formules aux paramètres Θ_E, Δ et B_c évalués avec `GYOTO`, nous choisissons de faire une étude préliminaire permettant de tester la robustesse des trois intégrateurs présentés dans le chapitre précédent. Le but est de déterminer lequel est le plus performant pour tester de manière plus poussée le code `GYOTO`.

5.1.2 Comparaisons des intégrateurs `GYOTO`

Pour effectuer cette étude comparative, nous choisissons d'évaluer le paramètre Δ dans le cas de la métrique de Schwarzschild, pour plusieurs valeurs de la distance entre la source et le trou noir. Étant donné que le trou noir n'est pas en rotation, le décalage Δ de la courbe critique doit toujours être égal à zéro.

Afin d'évaluer ce paramètre avec `GYOTO`, nous utilisons un point source placé sur l'axe $x < 0$ correspondant à la ligne caustique. La courbe critique de ce point source est obtenue en utilisant la quantité `MinDistance` décrite Sect. 4.4.2. Pour estimer le décalage Δ à une distance x_s donnée du point source, nous déterminons les rayons gauche et droit de la courbe critique le long de l'axe α (voir Fig. 5.7). Une mesure précise de ces derniers est obtenue en utilisant la méthode du nombre d'or. Celle-ci est similaire à la méthode de dichotomie et permet de converger vers l'extremum d'une fonction. La seule différence entre ces deux méthodes vient du fait que les intervalles successifs calculés par la première méthode sont obtenus à l'aide d'une division par le nombre d'or et non pas par deux.

Dans notre cas, la méthode du nombre d'or permet d'évaluer les deux minima de la quantité `MinDistance` présents le long de l'axe α (voir à droite Fig. 5.7). Si on appelle r_g et r_d les rayons gauche et droit de l'anneau, respectivement, le décalage de la courbe critique est alors donné par :

$$\Delta = \left| \frac{r_g + r_d}{2} - r_d \right| . \tag{5.11}$$

Cette formule est obtenue en considérant un trou noir en rotation qui, tel que vu depuis l'observateur, tourne de la gauche vers la droite, le décalage de la courbe critique s'effectue alors vers la droite (vers les $\alpha < 0$), on a donc toujours $r_g < r_d$. En présence d'un trou noir sans rotation, on doit avoir $r_g = r_d$ et donc $\Delta = 0$.

Afin de comparer les trois intégrateurs nous choisissons de faire varier le paramètre `DeltaMaxOverR` pour `Legacy`, et les paramètres de tolérance `AbsTol` et `RelTol` pour les intégrateurs de la collection `Boost C++` (voir Sect. 4.3.2 pour la définition de ces paramètres). Nous choisissons de prendre `AbsTol` = `RelTol` car nous ne cherchons pas

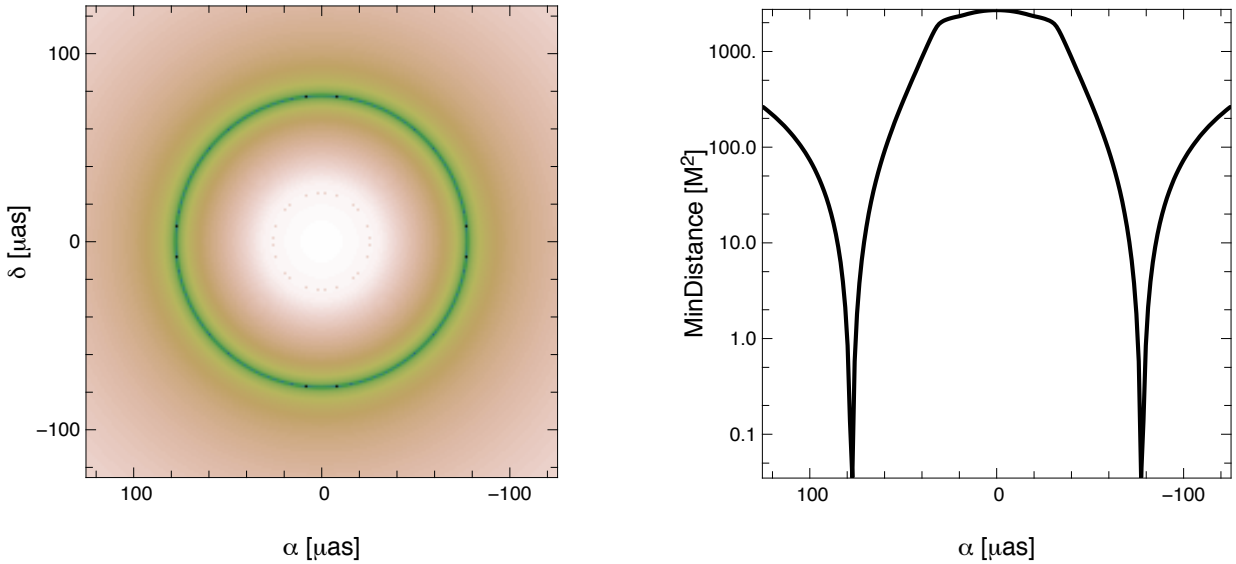

FIGURE 5.7 – Visualisation de la courbe critique obtenue en métrique de Schwarzschild à l'aide de la quantité `MinDistance`. *À gauche* : courbe critique représentée par le cercle vert sur la carte `MinDistance`. Le point source est placé à $x_s = -50\ M$ derrière le trou noir. *À droite* : courbe obtenue en effectuant une coupe dans le plan (α,$\delta = 0$) de l'image de gauche. On y voit les deux minima de la quantité `MinDistance` permettant d'évaluer les rayons gauche et droit de la courbe critique.

ici à faire une étude poussée des différents paramètres d'intégration. Nous parlerons donc uniquement de variation du paramètre `AbsTol` dans toute la suite de ce chapitre. Comme nous l'avons mentionné à la fin de la Sect. 4.3.2, le paramètre `DeltaMaxOverR` a également été introduit dans les intégrateurs de la collection `Boost C++` par l'intermédiaire du code `GYOTO`. Néanmoins, afin d'uniquement tester la validité de ces intégrateurs nous choisissons de ne pas prendre en compte ce paramètre. Pour cela, nous le fixons à 10^{308}. D'autre part, pour permettre la comparaison de `Legacy` aux deux autres intégrateurs, nous considérons le paramètre ρ = `DeltaMaxOverR`$^3/10^8$ au lieu de `DeltaMaxOverR`. Ce réajustement a été obtenu empiriquement de sorte que l'évolution du décalage Δ en fonction de ρ obtenue avec `Legacy` soit similaire à celle obtenue en fonction de `AbsTol` avec les intégrateurs de la collection `Boost C++`. Ajoutons également que les paramètres `DeltaMax` et `DeltaMin`, introduits Sect. 4.3.2, sont respectivement fixés à 10^{308} et 0 pour l'ensemble des intégrateurs. Ainsi seul le paramètre `DeltaMaxOverR` régit l'intégration de la géodésique pour l'intégrateur `Legacy` et seul le paramètre `AbsTol` régit l'intégration de la géodésique pour les deux autres intégrateurs.

En plus de faire varier ces paramètres de réglage, nous faisons varier la distance x_s de la source entre environ 200 et 10^9 unités géométriques afin de voir comment se comportent les différents intégrateurs dans des régions proches et éloignées du trou noir.

Les différentes estimations du décalage Δ sont représentées Fig. 5.8. Tout d'abord, on

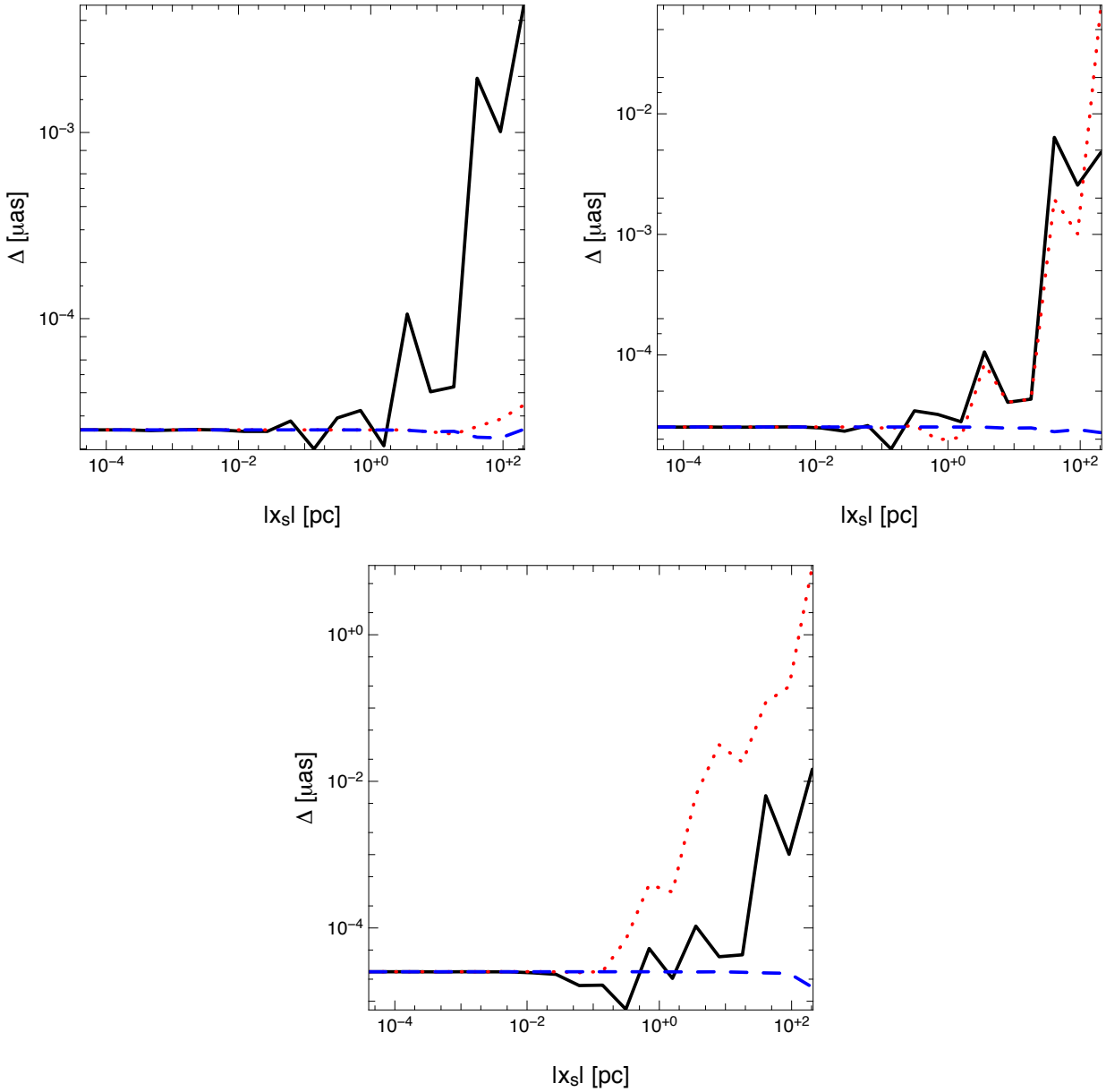

FIGURE 5.8 – Décalages Δ estimés avec `GYOTO` en microsecondes d'angle en fonction de la distance $|x_s|$ du point source en parsecs, dans le cas de la métrique de Schwarzschild. Chaque graphique représente différentes valeurs du paramètre de réglage des trois intégrateurs (ρ = `DeltaMaxOverR`$^3/10^8$ ou `AbsTol`) : 10^{-18} (en haut à gauche), 10^{-16} (en haut à droite) et 10^{-14} (en bas). Les types de courbes dénotent les différents intégrateurs : `Legacy` en trait plein noir, `Runge-Kutta-Cash-Karp54` en tirets bleus et `Runge-Kutta-Fehlberg78` en pointillés rouges.

constate que le décalage mesuré avec l'intégrateur `Legacy` est inférieur à 10^{-2} microseconde d'angle pour chaque valeur de `DeltaMaxOverR` et chaque distance de la source au trou

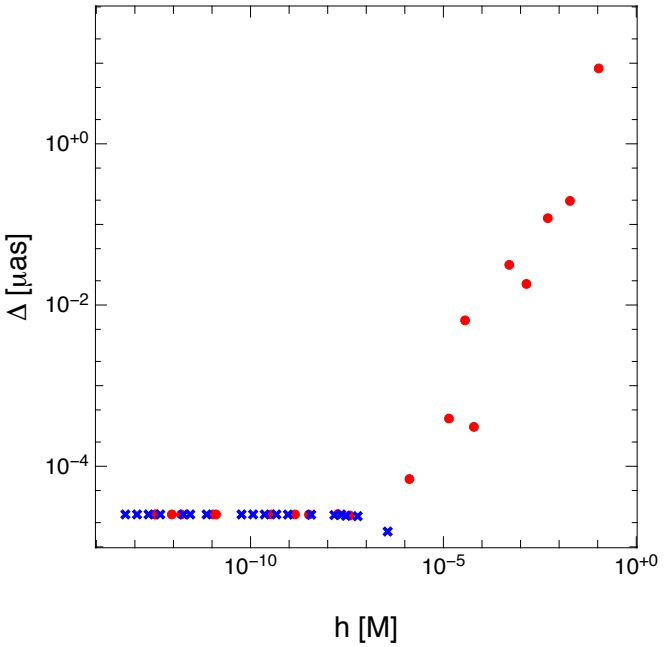

FIGURE 5.9 – Décalage Δ en fonction du pas h séparant les deux points de la géodésique lumière entre lesquels est faite l'interpolation pour estimer la valeur de la quantité `MinDistance`. Chaque paire (Δ, h) est obtenue à une distance $|x_s|$ donnée de l'étoile au trou noir. Les décalages ont été évalués pour `AbsTol` $= 10^{-14}$. Les ronds rouges sont obtenus avec l'intégrateur `Runge-Kutta-Fehlberg78` et les croix bleues avec l'intégrateur `Runge-Kutta-Cash-Karp54`.

noir. On remarque toutefois que le décalage augmente lorsque cette dernière augmente. Pour ce qui concerne l'intégrateur `Runge-Kutta-Cash-Karp54`, on voit que celui-ci est très précis pour les trois valeurs de `AbsTol`, avec un décalage Δ de l'ordre de 10^{-5} microseconde d'angle. Concernant l'intégrateur `Runge-Kutta-Fehlberg78`, celui-ci est également très précis lorsque le paramètre `AbsTol` est à 10^{-18}. Néanmoins, quand ce dernier augmente on constate que le décalage augmente avec la distance $|x_s|$, jusqu'à atteindre des valeurs supérieures à 1 microseconde d'angle pour `AbsTol` $= 10^{-14}$ et $|x_s| > 10^2$ pc. En revanche, si on fait intervenir le paramètre `DeltaMaxOverR` en plus et qu'on le prend égal à 1, on constate que les décalages supérieurs à 1 microseconde d'angle diminuent d'un facteur 10. Il est possible de réduire davantage ce décalage jusqu'à 10^{-5} microseconde d'angle en prenant `DeltaMaxOverR` $= 0{,}01$. On voit ici l'utilité d'avoir introduit en plus dans `GYOTO` ce paramètre pour les intégrateurs de la collection `Boost C++`. Cependant, il faut prendre garde au temps de calcul qui peut croître énormément si l'on prend un `DeltaMaxOverR` faible. C'est d'ailleurs le cas lorsque l'on passe de `DeltaMaxOverR` $= 1$ à `DeltaMaxOverR` $= 0{,}01$, où le temps de calcul obtenu pour estimer un point de la courbe passe de 2 à 40 secondes.

Dans les trois graphiques présentés ici, il existe deux sources de limitation dans

l'estimation du décalage Δ de la courbe critique.

La première est celle impliquant que Δ soit limité en valeur inférieure à environ 10^{-5} microseconde d'angle. Elle est due à un décalage dans la position de l'écran de l'observateur introduit par la précision machine. En effet, au lieu de se trouver exactement en $(x_{\rm obs},y_{\rm obs},z_{\rm obs}) = (R_0,0,0)$, celui-ci est décalé d'environ 10^{-6} unité géométrique ($\approx 10^{-5}$ μas) selon les axes y et z. On peut donc qualifier cette erreur de biais systématique. Étant donné que celle-ci est très faible comparée à la précision astrométrique de l'instrument *GRAVITY*, nous n'avons pas cherché à la diminuer.

La seconde limitation est de nature aléatoire puisqu'elle est introduite par l'interpolation effectuée dans l'estimation de la quantité `MinDistance` donnant la distance euclidienne minimale au carré entre le photon et la surface de l'étoile. En effet, pour l'évaluer le plus précisément possible, une interpolation est effectuée entre les deux points de la géodésique lumière, les plus proches de la surface de l'étoile. Dans notre cas, la quantité `MinDistance` est utilisée pour estimer les rayons gauche et droit de la courbe critique. Afin de démontrer que cette seconde limitation provient bien de l'interpolation, nous considérons une géodésique lumière intégrée depuis la position, sur le plan du ciel, du rayon gauche (les résultats obtenus avec le rayon droit étant équivalents) de cette dernière et évaluons le décalage Δ (pour `AbsTol` $= 10^{-14}$) en fonction du pas h séparant les deux points de la géodésique entre lesquels est faite l'interpolation (voir Fig. 5.9). Précisons que les valeurs du décalage Δ et du pas h sont celles estimées pour les différentes distances $|x_s|$ de la source considérées Fig. 5.8. On pourra d'ailleurs s'aider de l'image du bas de cette figure pour repérer les distances $|x_s|$ associées aux différents Δ.

On remarque que dans le cas de l'intégrateur `Runge-Kutta-Fehlberg78`, ce pas augmente énormément lorsque la distance $|x_s|$ augmente, alors qu'il reste toujours inférieur à 10^{-6} unité géométrique pour l'intégrateur `Runge-Kutta-Cash-Karp54`. On peut donc dire que les erreurs élevées ne sont pas dues à une mauvaise estimation des coordonnées du photon par l'intégrateur `Runge-Kutta-Fehlberg78`, mais sont liées à l'augmentation de la taille du pas h lors de l'intégration de la géodésique lumière : plus on s'éloigne du trou noir moins bien est échantillonnée la géodésique. Cela est confirmé par le fait que lorsque l'on prend en compte le paramètre `DeltaMaxOverR` pour cet intégrateur et qu'on le fixe à une valeur faible de 0,01, le décalage Δ diminue drastiquement puisque le pas h maximal alors autorisé est plus petit que celui utilisé par l'intégrateur `Runge-Kutta-Fehlberg78`. Ajoutons par ailleurs que l'erreur maximale commise sur le décalage Δ par ce dernier, et qui atteint environ 10 microsecondes d'angle, est obtenue dans le cas d'étoiles situées à environ 100 parsecs ce qui est très grand comparé aux étoiles que l'on souhaitera étudier avec l'instrument *GRAVITY*.

Les mesures effectuées ici montrent que ces trois intégrateurs semblent adaptés pour effectuer une étude plus poussée du code `GYOTO` en métrique de Kerr. En effet, dans le cas d'études d'étoiles proches du Centre Galactique, les erreurs générées par ces intégrateurs sont inférieures à la précision astrométrique de l'instrument *GRAVITY*. Cependant, en plus de la précision que l'on souhaite atteindre, il existe un second facteur à prendre en compte correspondant au temps de calcul. Plus précisément, nous cherchons un compromis

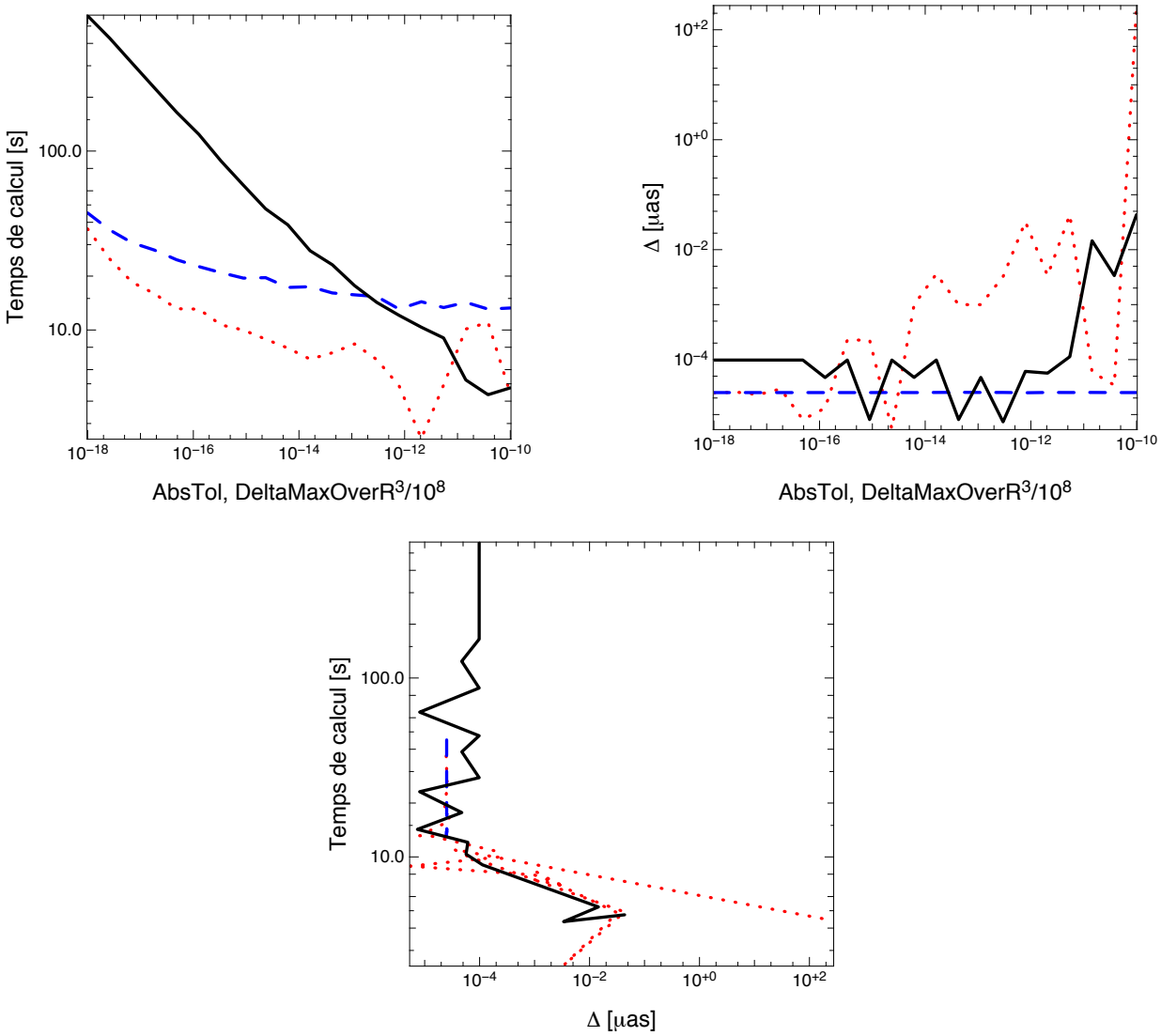

FIGURE 5.10 – *En haut à gauche* : temps de calcul en fonction des paramètres de réglage. *En haut à droite* : décalage Δ en fonction des paramètres de réglage. *En bas* : temps de calcul en fonction du décalage Δ. Les types de courbes dénotent les différents intégrateurs : `Legacy` en trait plein noir, `Runge-Kutta-Cash-Karp54` en tirets bleus et `Runge-Kutta-Fehlberg78` en pointillés rouges. La source est située à $x_s = -2$ parsecs.

convenable entre la précision et le temps de calcul.

L'objectif maintenant est donc d'évaluer, pour chaque intégrateur, le décalage Δ pour différentes valeurs de paramètre de réglage à une position donnée de la source. Nous choisissons de fixer cette dernière à $x_s = -2$ pc. Les différents résultats sont présentés Fig. 5.10. On constate que l'intégrateur `Runge-Kutta-Fehlberg78` est quasiment toujours plus rapide que les deux autres intégrateurs dans l'estimation du décalage Δ. Sa meilleur précision ($\approx 10^{-5}$ μas) est atteinte pour une valeur de `AbsTol` comprise entre 10^{-18}

et 10^{-17}, ce qui correspond à un temps de calcul variant d'environ 35 à 15 secondes, respectivement. L'intégrateur `Runge-Kutta-Cash-Karp54` est toujours précis ($\approx 10^{-5}$ μas) quelles que soient les valeurs de `AbsTol`, avec un temps de calcul variant de 10 secondes (`AbsTol` $= 10^{-10}$) à 45 secondes (`AbsTol` $= 10^{-18}$). La meilleur précision atteinte par l'intégrateur `Legacy` ($10^{-4} - 10^{-5}$ μas) est obtenue pour des valeurs de `DeltaMaxOverR` comprises entre 5×10^{-3} et 5×10^{-2}, ce qui correspond à des temps de calcul allant de 10 secondes à 10 minutes, respectivement.

L'importante différence en temps de calcul entre les intégrateurs `Boost C++` et `Legacy`, observée pour des paramètres de réglage faibles, s'explique par le nombre de pas utilisé lors de l'intégration des géodésiques lumière. En considérant le cas `AbsTol` $= 10^{-18}$, environ 90 000 pas sont nécessaires à l'intégrateur `Legacy` pour atteindre sa meilleure précision, tandis qu'un ordre de grandeur de moins est nécessaire pour les deux autres.

Les limitations dans l'estimation du décalage de l'anneau sont les mêmes que celles décrites précédemment. La première vient de la précision machine, et la seconde vient de l'interpolation faite lors de l'évaluation de la quantité `MinDistance`. Cette dernière limitation est confirmée par le fait que lorsque l'on augmente les paramètres de réglage, la taille du pas h augmente : le décalage Δ y est donc moins bien estimé.

Le meilleur compromis entre précision et temps de calcul est donc obtenu pour `AbsTol` $= 10^{-17}$ avec `Runge-Kutta-Fehlberg78`, `AbsTol` $= 10^{-10}$ avec `Runge-Kutta-Cash- Karp54` et `DeltaMaxOverR` $= 10^{-2}$ avec `Legacy`, où l'on a un temps de calcul inférieur à la minute et une précision de l'ordre de $10^{-5} - 10^{-4}$ microseconde d'angle. Toutefois, il existe d'autres cas tout aussi satisfaisants comme par exemple `AbsTol` $= 10^{-18}$ avec les intégrateurs `Runge-Kutta-Fehlberg78` et `Runge-Kutta-Cash-Karp54`, où l'on a également un temps de calcul inférieur à la minute et une précision de l'ordre de 10^{-5} microseconde d'angle. Pour notre étude en métrique de Kerr, nous faisons le choix d'utiliser l'intégrateur `Runge-Kutta-Fehlberg78` et `AbsTol` $= 10^{-18}$.

Le choix fait ici n'est en aucun cas un choix unique et dépend des préférences de l'utilisateur ainsi que de la situation astrophysique considérée. Dans le cas où les distances de l'observateur et de la source sont importantes, il est cependant préférable de faire des choix appropriés quant aux intégrateurs et paramètres de réglage. Pour cela, on pourra par exemple se référer à l'étude menée ci-dessus.

5.1.3 Méthodes numériques

On rappelle que le but de ce chapitre est de comparer les trois paramètres Θ_E, Δ et B_c estimés via les approximations analytiques de Sereno & de Luca (2008), avec ceux obtenus à l'aide du code `GYOTO`, en considérant un trou noir en rotation. Dans cette nouvelle section, nous allons voir les méthodes numériques mises en place afin d'évaluer ces trois paramètres avec `GYOTO`, que l'on notera dans la suite $\Theta_{E,\texttt{GYOTO}}$ $\Delta_{\texttt{GYOTO}}$ et $B_{c,\texttt{GYOTO}}$.

De manière générale, ces paramètres seront évalués en cherchant numériquement les caustiques et courbes critiques à l'aide des cartes `MinDistance` produites avec le code, et en faisant varier les coordonnées (x_s,y_s) d'un point source situé dans le plan équatorial

du trou noir. En effet, les images formées sur les cartes `MinDistance` sont directement dépendantes de la position de la source par rapport à la caustique. Par exemple, si la source est située sur un point de rebroussement de la caustique obtenue en métrique de Kerr, il se forme deux images sur l'écran de l'observateur et donc deux minima sur la carte `MinDistance` (voir Fig. 5.6).

Position angulaire de la caustique, $B_{c,\texttt{GYOTO}}$

Comme déjà mentionné, la caustique en métrique de Kerr est un tube en forme d'astroïde (voir Fig. 5.5). Néanmoins, lorsque l'on est suffisamment loin du trou noir, le tube se réduit en une ligne similaire au cas rencontré en métrique de Schwarzschild, mais reste décalé par rapport à l'axe x. Étant donné la variation de la taille de l'astroïde, la position angulaire de la caustique, telle que vue depuis la Terre, est estimée de deux façons différentes. La première est utilisée dans le cas d'un point caustique, c'est-à-dire lorsque la taille de l'astroïde est réduite en un point. À une position $x_s < 0$ donnée de la source, on estime la position angulaire du point caustique par rapport au centre de l'écran de l'observateur. La seconde est utilisée lorsque l'astroïde est formé. Dans ce cas, nous estimons la position angulaire du point de rebroussement droit du tube caustique à une position $x_s < 0$ donnée. Afin de faire la distinction entre ces deux types de positions angulaires, nous notons $B_{pc,\texttt{GYOTO}}$ et $B_{prd,\texttt{GYOTO}}$ celles estimées dans les premier et second cas, respectivement. L'indice *pc* fait référence au *p*oint *c*austique, tandis que l'indice *prd* fait référence au *p*oint de *r*ebroussement *d*roit.

Position angulaire du point caustique, $B_{pc,\texttt{GYOTO}}$

Pour obtenir la position angulaire du point caustique à une position $x_s < 0$ du trou noir, nous avons besoin d'estimer la position y_{pc} de la caustique puisque celle-ci est décalée de l'axe x. Les coordonnées cartésiennes du point caustique sont donc (x_s,y_{pc},0). Lorsque la source est située à cette position, une courbe critique se forme dans le plan du ciel. Ainsi, pour remonter à la position y_{pc} de la caustique nous devons trouver une coordonnée y_s de la source menant à la formation de la courbe critique soit $y_s = y_{pc}$. Pour cela, nous utilisons la quantité `MinDistance` de `GYOTO` : si la source n'est pas sur le point caustique, les minima de cette quantité sont localisés sur l'axe α et correspondent aux positions des images primaire et secondaire (voir image de droite Fig. 4.2). En revanche, si la source est sur le point caustique, les minima sont distribués le long de la courbe critique et forment un cercle (voir image de gauche Fig. 5.7). Afin de converger vers la coordonnée de la caustique y_{pc}, nous utilisons le demi axe ($\alpha = 0$,$\delta > 0$) de l'écran de l'observateur et faisons varier la position y_s de la source de sorte à atteindre le minimum de la quantité `MinDistance` le long de ce demi axe. En effet, le minimum de cette quantité, le long de ce dernier, est toujours atteint lorsque l'on forme la courbe critique dans le plan du ciel.

La recherche de la coordonnée y_{pc} est effectuée en utilisant la méthode du nombre d'or. Cette dernière est stoppée lorsque la précision machine est atteinte c'est-à-dire lorsque l'on rencontre du bruit numérique dans l'évaluation de la quantité `MinDistance`. L'erreur sur

la position y_{pc}, notée $\delta_{y_{pc}}$, est alors donnée par le dernier intervalle utilisé pour estimer le y_s final. Grâce à la formule (5.10) et la propagation des incertitudes, on a accès à l'erreur commise sur le paramètre $B_{pc,\texttt{GYOTO}}$:

$$\delta_{B_{pc,\texttt{GYOTO}}} = \delta_{y_{pc}} \left| \frac{1}{R_0 + |x_s| + y_{pc}} \right| . \tag{5.12}$$

Nous avons donc ici une estimation de l'erreur $\delta_{B_{pc,\texttt{GYOTO}}}$ pour chaque distance x_s de la source. Néanmoins, dans la section consacrée aux résultats (Sect. 5.1.4), nous ne donnerons que l'erreur maximale obtenue sur l'ensemble des erreurs estimées pour les différents x_s, puisque ce résultat est suffisant pour conclure quant à la précision du calcul des géodésiques de genre lumière dans `GYOTO`.

Position angulaire du point de rebroussement droit de l'astroïde, $B_{prd,\texttt{GYOTO}}$

Comme précédemment, pour mesurer la position angulaire du point de rebroussement droit de l'astroïde à une position $x_s < 0$ donnée, il faut estimer la position, notée y_{prd}, de celui-ci. Pour cela nous nous aidons du lien existant entre la position de la source par rapport à l'astroïde et les images formées dans le plan du ciel. Fig. 5.6 on voit notamment qu'une source située sur un point de rebroussement de l'astroïde mène à la formation de deux images : une sur la courbe critique et une autre à l'extérieur. Tandis que lorsque la source est située à l'intérieur de l'astroïde, quatre images se forment : deux à l'intérieur de la courbe critique et deux autres à l'extérieur. Ainsi, si on considère une source placée en (x_s,y_{prd},0), on observe deux images sur l'écran de l'observateur dont une est située sur la partie gauche de la courbe critique (car la source est placée sur le point de rebroussement droit).

Le but ici est d'utiliser la méthode de dichotomie afin de converger vers la position du point de rebroussement droit c'est-à-dire d'obtenir la formation d'une image sur la partie gauche de la courbe critique. Pour cela, on considère initialement deux positions de la source :

— une à l'intérieur de la caustique notée $y_{prd_{\text{in}}}$. Pour prédire cette position, on utilise le même procédé que pour le point caustique c'est-à-dire qu'on fait varier la position y_s de la source de sorte à obtenir le minimum de la quantité `MinDistance` le long du demi axe ($\alpha = 0$,$\delta > 0$). Le minimum obtenu correspond alors à la position de la croix verte située sur le demi axe ($\alpha = 0$,$\delta > 0$) Fig. 5.6. On a donc bien ici une source située à l'intérieur de la caustique.

— une à l'extérieur de la caustique notée $y_{prd_{\text{out}}}$. Elle est donnée par $y_{prd_{\text{out}}} = y_{prd_{\text{in}}} + \zeta$ avec ζ supérieur à Δ_c (voir équation (5.9) pour l'expression de Δ_c). Dans le cas où l'on cherche à estimer le point de rebroussement gauche on prendra $y_{prd_{\text{out}}} = y_{prd_{\text{in}}} - \zeta$.

La position y_s suivante de la source est donnée par la méthode de dichotomie : $y_{prd_{\text{next}}} = (y_{prd_{\text{in}}} + y_{prd_{\text{out}}})/2$. Et à chaque itération, on conserve toujours deux positions de la source : une à l'intérieur de l'astroïde (deux images sur l'écran) et une à l'extérieur (quatre images sur l'écran).

Comme pour le point caustique, la méthode de convergence s'arrête lorsque la précision machine est atteinte. L'erreur sur la coordonnée y_{prd} obtenue, notée $\delta_{y_{prd}}$, correspond au dernier intervalle utilisé pour estimer cette position. L'erreur sur l'angle $B_{prd,\texttt{GYOTO}}$ est également fournie par la formule (5.12).

Rayon $\Theta_{E,\texttt{GYOTO}}$ et décalage $\Delta_{\texttt{GYOTO}}$ de la courbe critique

Le rayon $\Theta_{E,\texttt{GYOTO}}$ est obtenu en mesurant les rayons gauche et droit de la courbe critique dans le plan équatorial du trou noir (voir Fig. 5.7). On a donc la relation :

$$\Theta_{E,\texttt{GYOTO}} = \frac{r_g + r_d}{2}. \tag{5.13}$$

Le décalage de l'anneau est donné, comme déjà vu précédemment, par :

$$\Delta_{\texttt{GYOTO}} = \left|\Theta_{E,\texttt{GYOTO}} - r_d\right|. \tag{5.14}$$

L'estimation des rayons gauche et droit de l'anneau est plus complexe dans le cas d'un trou noir en rotation que dans le cas de la métrique de Schwarzschild. En effet, pour former la courbe critique avec cette dernière, il suffit juste de placer l'étoile directement à l'arrière du trou noir. Ce n'est pas aussi simple dans le cas de la métrique de Kerr puisque la caustique est un tube de section en forme d'astroïde décalé de l'axe x. Comme mentionné Sect. 5.1.1, les parties gauche et droite de la courbe critique se forment lorsque le point source est situé respectivement aux points de rebroussement droit et gauche de l'astroïde (voir carrés magenta pour la partie droite et triangles rouges pour la partie gauche, Fig. 5.6). Nous devons donc dans un premier temps déterminer les positions des points de rebroussement gauche et droit de l'astroïde à une position $x_s < 0$ donnée. Pour cela nous utilisons le même procédé que celui expliqué dans le cas de la mesure du paramètre $B_{pc,\texttt{GYOTO}}$.

Ensuite, nous plaçons le point source au point de rebroussement droit de la caustique obtenu, ce qui nous permet de remonter à la position du rayon gauche de la courbe critique en cherchant le minimum de la quantité `MinDistance` formé le long de l'axe α. Cette minimisation est également effectuée à l'aide de la méthode du nombre d'or. Nous procédons de façon similaire pour remonter au rayon droit de l'anneau mais plaçons la source au point de rebroussement gauche.

L'erreur de mesure sur les paramètres $\Theta_{E,\texttt{GYOTO}}$ et $\Delta_{\texttt{GYOTO}}$ est donnée par :

$$\delta_{\Theta_{E,\texttt{GYOTO}}} = \delta_{\Delta_{\texttt{GYOTO}}} = \frac{1}{2}(\delta_{r_g} + \delta_{r_d}) \tag{5.15}$$

où $\delta_{r_g} = \delta_{r_{g1}} + \delta_{r_{g2}}$ et $\delta_{r_d} = \delta_{r_{d1}} + \delta_{r_{d2}}$ sont les erreurs faites sur les rayons gauche et droit, respectivement. Les erreurs $\delta_{r_{g1}}$ et $\delta_{r_{d1}}$ sont celles survenant lors de l'estimation des rayons gauche et droit avec la méthode du nombre d'or, respectivement. Ces erreurs sont données par l'intervalle final dans lequel est estimé le rayon. Les erreurs $\delta_{r_{g2}}$ et $\delta_{r_{d2}}$ correspondent à celles faites sur les rayons lors de l'évaluation des positions des points de rebroussement. En effet, les positions des points de rebroussement gauche et droit de la caustique sont

entachées d'une erreur notée $\delta_{y_{prg}}$ et $\delta_{y_{prd}}$, respectivement. Pour obtenir $\delta_{r_{g2}}$ ($\delta_{r_{d2}}$), nous estimons les rayons gauches (droits) obtenus en considérant la source positionnée aux points $y_{prd} + \delta_{y_{prd}}$ ($y_{prg} + \delta_{y_{prg}}$) et $y_{prd} - \delta_{y_{prd}}$ ($y_{prg} - \delta_{y_{prg}}$). Nous notons le premier rayon gauche (droit) ainsi obtenu r_{g2_+} (r_{d2_+}) et le second rayon r_{g2_-} (r_{d2_-}). Nous avons donc des erreurs $\delta_{r_{g2}}$ et $\delta_{r_{d2}}$ données par :

$$\begin{aligned} \delta_{r_{g2}} &= |r_{g2_+} - r_{g2_-}|, \\ \delta_{r_{d2}} &= |r_{d2_+} - r_{d2_-}|. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Lorsque la source est suffisamment loin du trou noir, le tube caustique se réduit en une ligne. Dans ce cas, nous estimons les rayons gauche et droit de l'anneau en plaçant la source au point caustique y_{pc} et en cherchant les deux minima de la quantité `MinDistance` formés le long de l'axe α (voir image de droite Fig. 5.7). Nous utilisons là encore la méthode du nombre d'or pour effectuer ces deux minimisations. Afin d'estimer les erreurs sur ces deux derniers, nous utilisons le même procédé que dans le cas de l'astroïde, mais les erreurs $\delta_{r_{g2}}$ et $\delta_{r_{d2}}$ sont obtenues en estimant deux rayons gauches et deux rayons droits en positionnant la source en $y_{pc} + \delta_{y_{pc}}$ puis en $y_{pc} - \delta_{y_{pc}}$.

5.1.4 Résultats

La comparaison entre les trois approximations analytiques et les paramètres estimés à l'aide de `GYOTO` est faite en considérant cinquante valeurs de la coordonnée x_s du point source entre -200 et -10^9 unités géométriques. Nous considérons également trois valeurs de moment cinétique adimensionné du trou noir égales à 0,2, 0,5 et 0,9. Précisons que les tests effectués ici ne sont pas uniquement restreints au plan équatorial du trou noir : les mesures obtenues sont effectivement faites dans ce dernier mais nous utilisons des photons lancés en dehors de ce plan pour parvenir à faire ces mesures avec `GYOTO`.

Les résultats obtenus sont présentés Fig. 5.11. On constate que, pour chaque moment cinétique adimensionné et chaque distance de la source, la différence entre les approximations analytiques et les valeurs estimées avec `GYOTO` est toujours inférieure à 10^{-1} microseconde d'angle. On remarque également qu'il existe deux régimes pour chacune des courbes. Pour des sources proches du trou noir, les courbes se comportent en loi de puissance décroissante, tandis que pour des distances plus grandes, les courbes deviennent de plus en plus bruitées. Ces comportements laissent penser que la première partie des courbes, en loi de puissance, est dominée par les erreurs dues aux approximations analytiques : celles-ci deviennent de moins en moins correctes au fur et à mesure que l'on s'approche de l'horizon des événements. Le code `GYOTO` est donc plus précis que les formules dans ce premier régime. En revanche, lorsque l'on s'éloigne du trou noir, les courbes sont dominées par l'erreur faite lors de l'estimation des divers paramètres avec le code `GYOTO`.

Afin de confirmer cette interprétation, nous choisissons de considérer le paramètre Θ_E pour un moment cinétique adimensionné de 0,5, et de tracer la différence entre les Θ_E obtenus à différents ordres en ε et le rayon de l'anneau estimé avec `GYOTO`. En effet, l'équation (5.6) donne un développement limité de Θ_E au troisième ordre en ε. Nous

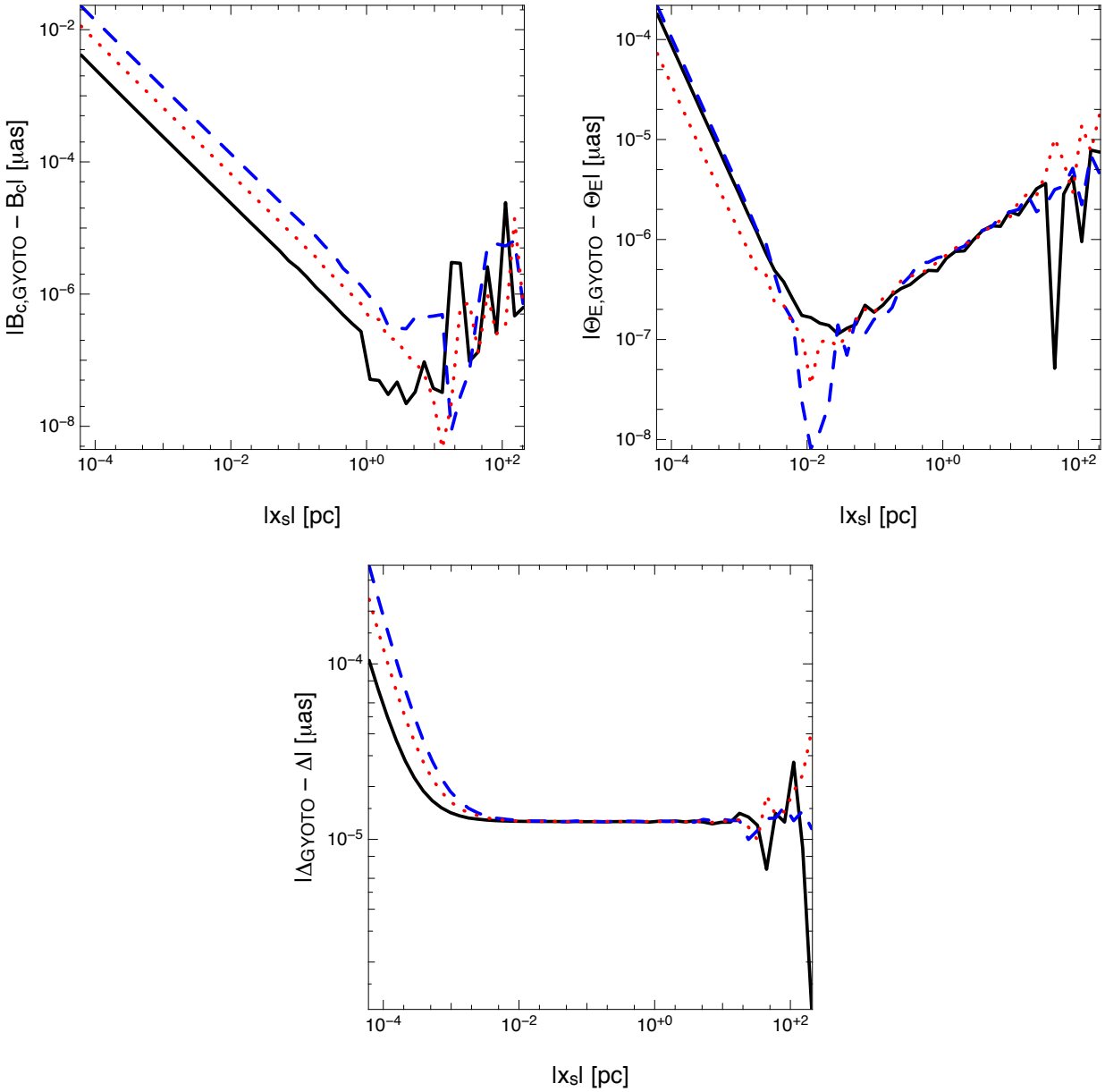

FIGURE 5.11 – Différences absolues entre les paramètres Θ_E, Δ et B_c obtenus avec les approximations analytiques et ceux estimés avec l'intégrateur `Runge-Kutta-Fehlberg78`. Les types de courbes dénotent les trois valeurs de moment cinétique adimensionné considérés : $\bar{a} = 0{,}2$ en trait plein noir, $\bar{a} = 0{,}5$ en tirets bleus et $\bar{a} = 0{,}9$ en pointillés rouges. La distance de la source est exprimée en parsecs.

choisissons donc de considérer trois différentes équations pour Θ_E : une avec les ordres ε^0 et ε^1, une autre avec les ordres ε^0 à ε^2, et une dernière avec les ordres ε^0 à ε^3 (équation (5.6) complète, les résultats obtenus avec celle-ci sont déjà présentés Fig. 5.11). Les courbes obtenues sont visibles Fig. 5.12. On voit clairement ici la dépendance des débuts de

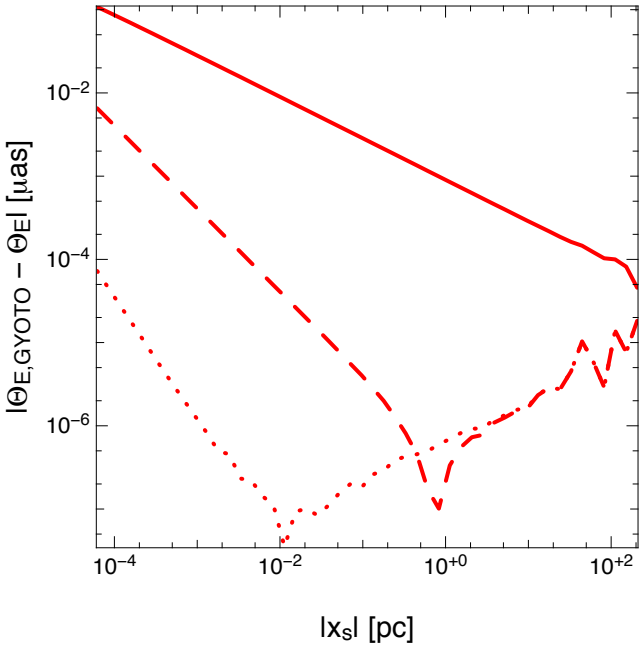

FIGURE 5.12 – Différences absolues entre les approximations analytiques du paramètre Θ_E obtenu à différents ordres en ε et le rayon de l'anneau estimé avec le code `GYOTO`. La courbe en trait plein est obtenue en considérant les ordres ε^0 et ε^1 dans l'équation (5.6) de Θ_E, la courbe en tirets est obtenue en considérant les ordres ε^0, ε^1 et ε^2, enfin la courbe en pointillés est obtenue en considérant les ordres ε^0, ε^1, ε^2 et ε^3. Le moment cinétique adimensionné du trou noir est de 0,5.

$\bar{a}$	$\delta_{B_{c,\mathrm{GYOTO}}}$	$\delta_{\Theta_{E,\mathrm{GYOTO}}}$, $\delta_{\Delta_{\mathrm{GYOTO}}}$
0,2	$5{,}6 \times 10^{-5}$	$8{,}2 \times 10^{-5}$
0,5	$1{,}6 \times 10^{-4}$	$1{,}1 \times 10^{-4}$
0,9	$2{,}1 \times 10^{-5}$	$3{,}9 \times 10^{-5}$

TABLE 5.1 – Erreurs maximales, en microsecondes d'angle, faites lors de l'évaluation des différents paramètres Θ_E, Δ et B_c.

courbes aux ordres de l'approximation analytique utilisés. Plus on a d'ordres, meilleure est l'estimation du rayon de la courbe critique, et plus on voit apparaître tôt le bruit numérique de `GYOTO`. Ces trois courbes confirment donc bien notre interprétation de départ.

Les erreurs maximales commises lors de l'estimation des différents paramètres avec le code `GYOTO` sont estimées à l'aide des formules données Sect. 5.1.3. On rappelle qu'on ne considère ici que l'erreur maximale obtenue sur l'ensemble des distances x_s considérées (voir Table 5.1). On remarque que chaque erreur maximale estimée est toujours inférieure à 10^{-3} microseconde d'angle, et cela aussi bien pour des sources proches qu'éloignées du trou noir. Ces erreurs correspondent au biais systématique introduit par le décalage de

l'écran de l'observateur discuté Sect. 5.1.2.

Étant donné les différences obtenues entre les approximations analytiques et `GYOTO`, ainsi que les erreurs maximales commises, on peut affirmer que le calcul des géodésiques de genre lumière en déflexion faible dans ce code est extrêmement précis. En effet, les erreurs sont largement en-dessous de la précision astrométrique de l'instrument *GRAVITY* de 10 microsecondes d'angle.

5.2 Test en déflexion forte

Afin de valider complètement le calcul des géodésiques de genre lumière dans le code `GYOTO`, nous faisons également un test en déflexion forte. Cela signifie que nous considérons cette fois-ci des photons effectuant un ou plusieurs tours autour du trou noir avant de rejoindre l'observateur.

5.2.1 Méthode

Des approximations analytiques en déflexion forte ont également été développées (Bozza et al. 2005; Bozza & Scarpetta 2007), mais ne concernent pas la caustique primaire puisque celle-ci est uniquement obtenue pour des photons qui ne tournent pas autour du trou noir. Ces formules ne concernent donc que les caustiques et courbes critiques d'ordres supérieurs. Ces différents ordres sont directement liés au nombre de tours effectués par le photon autour du trou noir : un tour correspondant à la caustique d'ordre deux, deux tours à la caustique d'ordre trois et ainsi de suite. Cependant, les courbes critiques de telles caustiques sont difficiles à observer avec un code de tracé de rayons puisque celles-ci ont une épaisseur angulaire très fine sur le ciel comparativement à la courbe critique primaire. De plus, les courbes critiques obtenues à différents ordres sont très proches les unes des autres ce qui rend là aussi laborieux l'obtention de l'ordre que l'on souhaiterait étudier. Pour ce faire, il faudrait sélectionner les photons tracés et déterminer le nombre de tours effectués par chacun.

Pour ces diverses raisons nous ne choisissons pas d'utiliser ces formules pour faire le test en déflexion forte et décidons plutôt de comparer `GYOTO` à un autre code de tracé de rayons nommé `GeoKerr`[3]. Ce code a été développé en `Fortran` par Dexter & Agol (2009). Contrairement au code `GYOTO`, `GeoKerr` calcul les géodésiques lumière de manière semi-analytique en réduisant les équations hamiltoniennes[4] du mouvement du photon en intégrales elliptiques de Carlson (Carlson & Gustafson 1993).

Les deux codes de tracé de rayons calculent les coordonnées de points de la géodésique lumière à certaines dates en temps propre. Afin de tester `GYOTO`, nous choisissons de comparer le calcul des géodésiques lumière effectué dans ces deux codes. Plus précisément,

3. `http://www.astro.washington.edu/users/agol/geokerr/index.html`.

4. On pourra trouver l'équation des géodésiques exprimée en coordonnées de Boyer-Lindquist et utilisant la formulation hamiltonienne dans la thèse de doctorat de Vincent (2011).

(α,δ) [μas]	$\bar{a}$	$\delta_{\max}$ [μas]
(0,0)	0,2	$1{,}7 \times 10^{-3}$
	0,5	$2{,}6 \times 10^{-3}$
	0,998	$5{,}2 \times 10^{-3}$
$(-5,-5)$	0,998	$4{,}0 \times 10^{-3}$

TABLE 5.2 – Différences maximales entre les coordonnées cartésiennes du photon obtenues avec les codes `GYOTO` et `GeoKerr`.

nous interpolons la géodésique telle que calculée par `GYOTO` aux dates employées par `GeoKerr`.

De plus, compte tenu de l'étude menée Sect. 5.1.2 sur les différents intégrateurs pouvant être utilisés dans `GYOTO`, nous choisissons de conserver notre premier choix, c'est-à-dire l'intégrateur `Runge-Kutta-Fehlberg78` et `AbsTol` $= 10^{-18}$, pour effectuer le test en déflexion forte.

5.2.2 Résultats

Pour effectuer ce test nous choisissons des photons lancés depuis le centre de l'écran $(\alpha,\delta) = (0{,}0)$ et trois valeurs de moments cinétiques adimensionnés du trou noir : 0,2, 0,5 et 0,998. Nous choisissons également d'effectuer un test en dehors du plan équatorial du trou noir en prenant $(\alpha,\delta) = (-5\ \mu\text{as}, -5\ \mu\text{as})$ et en ne considérant que $\bar{a} = 0{,}998$. La comparaison entre les deux codes est obtenue en calculant la différence entre les coordonnées cartésiennes calculées avec `GYOTO` et celles obtenues avec `GeoKerr` : nous avons donc trois quantités notées δ_x, δ_y et δ_z pour chaque temps coordonnée. Néanmoins, nous ne présentons ici que la différence maximale $\delta_{\max}$ obtenue entre les deux codes pour l'ensemble des dates considérées et les trois coordonnées x, y et z du photon. Précisons que la configuration observateur - trou noir est la même que celle schématisée Fig. 5.1. Les différents résultats sont présentés Table 5.2. On pourra également se reporter à la Fig. 5.13 pour voir des géodésiques lumière obtenues avec les deux codes. On remarque que les différences entre les deux codes sont dans tous les cas très faibles et sont toujours de l'ordre de 10^{-3} microseconde d'angle.

L'origine de cette limitation vient de l'interpolation faite dans le code `GYOTO` pour obtenir les coordonnées du photon aux temps coordonnées de `GeoKerr`. Pour le confirmer, nous avons tracé Fig. 5.14 les différences δ_x et δ_y en fonction des intervalles h_x et h_y dans lesquels sont faites les interpolations, respectivement. Précisons que h_x et h_y sont les intervalles déduits du pas h utilisé pendant l'intégration, c'est-à-dire qu'à un pas h correspond un intervalle en x et en y (et en z). On constate Fig. 5.14 que les différences δ_x et δ_y sont corrélées à l'intervalle dans lequel est faite l'interpolation. En effet, plus cet intervalle est grand et plus l'erreur commise par l'interpolation est grande. Si on considère les premiers points de la géodésique, c'est-à-dire les plus près de l'écran de l'observateur

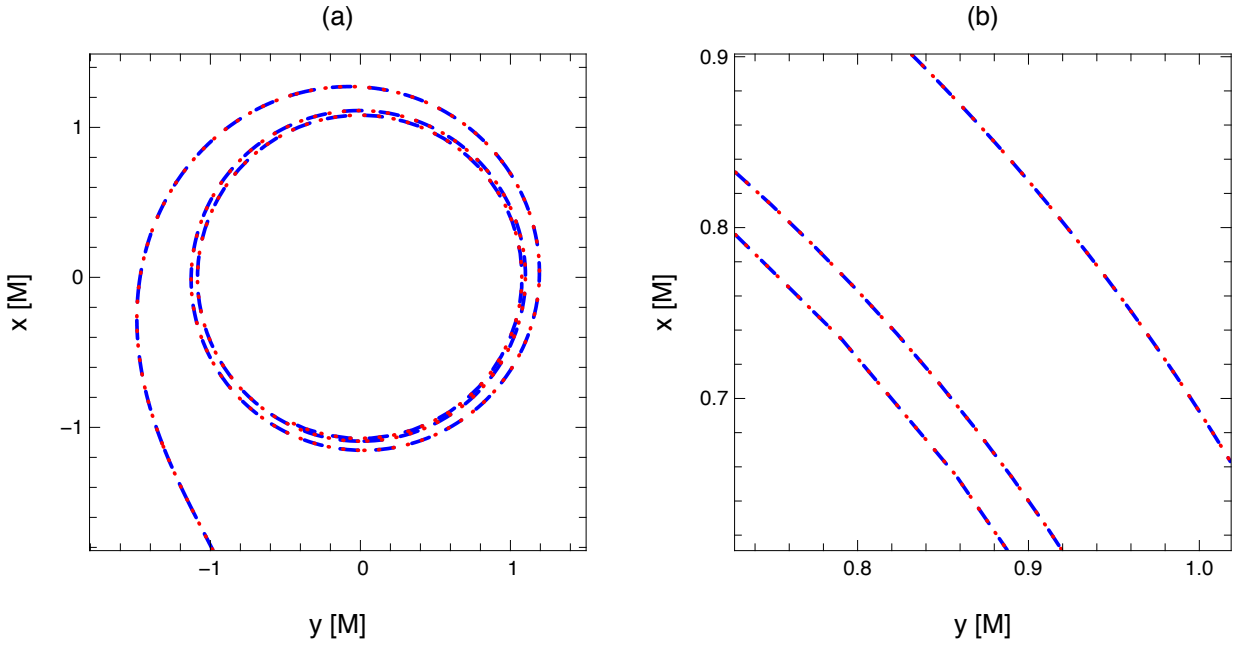

FIGURE 5.13 – Géodésiques lumière calculées avec les codes de tracé de rayons GYOTO (en tirets bleus) et GeoKerr (en pointillés rouges). On considère ici un moment cinétique adimensionné de 0,998 et des photons lancés depuis le centre de l'écran. L'image (b) est un agrandissement de l'image (a).

(cercles noirs pour la coordonnée x et carrés rouges pour la coordonnée y), les coordonnées x du photon sont aux environs de R_0 et les coordonnées y sont proches de zéro. À un pas h donné, on a donc un intervalle h_x qui est bien plus grand que l'intervalle h_y puisque l'on a $x \gg y$: plus le photon est proche du trou noir plus le pas est petit. Ainsi, l'erreur commise lors de l'interpolation est plus grande dans l'intervalle h_x que dans h_y (voir Fig. 5.14).

La différence maximale obtenue entre les codes de tracé de rayons est également de l'ordre de 10^{-3} microseconde d'angle si l'on considère l'intégrateur `Runge-Kutta-Cash-Karp54`, et des valeurs de `AbsTol` variant entre 10^{-18} et 10^{-10}. En revanche, lorsque nous augmentons la valeur de `AbsTol` dans le cas de l'intégrateur `Runge-Kutta-Fehlberg78` considéré pour nos études, l'erreur maximale commise atteint 100 microsecondes d'angle. Ce comportement est similaire au cas rencontré Sect. 5.1.2 où le décalage Δ dépassait 1 microseconde d'angle lorsque `AbsTol` valait 10^{-14}. Les 100 microsecondes d'angle atteintes ici sont donc encore une fois dues à la taille des intervalles dans lesquels sont faites les interpolations, et ne signifient donc pas que cet intégrateur soit moins performant. Comme déjà mentionné Sect. 5.1.2, une diminution de cette erreur peut être obtenue en incluant le paramètre `DeltaMaxOverR`.

En conclusion nous pouvons dire que, comme en déflexion faible, les géodésiques de genre lumière calculées en déflexion forte sont extrêmement précises et cela même en

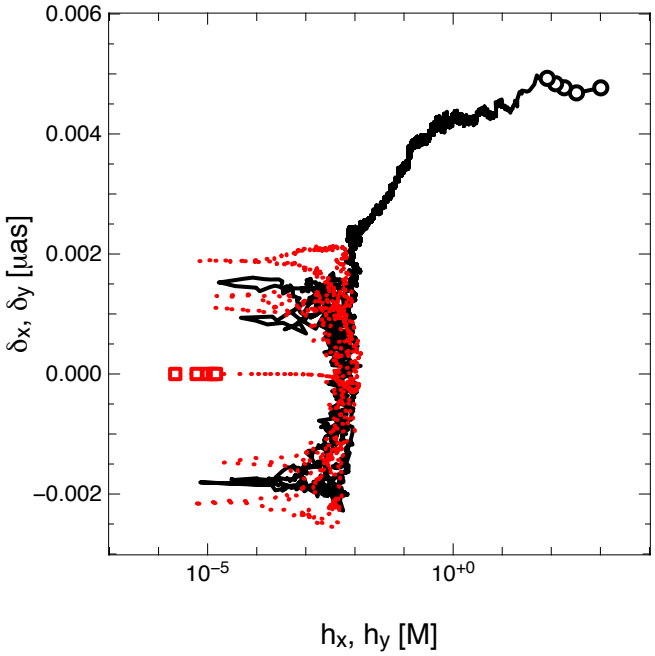

FIGURE 5.14 – Différences δ_x (en trait plein noir) et δ_y (en pointillés rouges) en fonction des intervalles h_x et h_y dans lesquels sont faites les interpolations dans `GYOTO` pour obtenir les coordonnées x et y du photon aux temps coordonnées de `GeoKerr`, respectivement. Les cercles noirs et carrés rouges sont obtenus en considérant les premiers points de la géodésique situés proches de l'écran de l'observateur. On a considéré ici le cas où le photon est lancé depuis la position $(\alpha,\delta) = (-5\ \mu\text{as}, -5\ \mu\text{as})$ et où le moment cinétique adimensionné est pris égal à 0,998.

considérant de grandes distances d'intégration. Les précisions obtenues dépassent là encore largement la précision astrométrique de l'instrument *GRAVITY*. Le code de tracé de rayons `GYOTO` semble donc parfaitement adapté pour la modélisation et l'interprétation des futures données de cet instrument. Néanmoins, nous rappelons qu'il sera nécessaire de compléter les études menées ici en validant cette fois-ci les calculs de géodésiques de genre temps ainsi que les calculs d'intensités spécifiques effectués dans ce code. On pourra pour cela comparer notre code à `GeoKerr` puisque celui-ci calcule également des trajectoires d'étoiles ainsi que des images d'objets astrophysiques.

Ajoutons par ailleurs que l'étude effectuée dans ce chapitre nous a permis de valider simultanément `GYOTO` et `GeoKerr` puisque les différences obtenues entre ces deux codes sont très faibles ($< 10^{-2}\ \mu$as).

Troisième partie

Observation d'effets relativistes sur l'orbite de l'étoile S2 avec *GRAVITY*

Présentation de la partie

Dans cette troisième partie, nous souhaitons étudier les effets relativistes au Centre Galactique et déterminer les contraintes pouvant être apportées sur l'objet compact central, grâce aux futures observations de l'étoile S2 obtenues avec l'instrument *GRAVITY*. Nous choisissons d'étudier cette étoile car nous ne savons pas à l'heure actuelle s'il existe des étoiles détectables qui soient plus près du Centre Galactique, et qui constitueraient donc des cibles idéales pour tester la relativité générale en champ fort.

Le premier chapitre de cette partie est consacré à la définition de plusieurs modèles mis en place au cours de cette thèse afin de simuler les positions astrométriques ainsi que les vitesses radiales de l'étoile S2. On discute également des différents effets induits par la présence d'un trou noir supermassif au centre de la Galaxie, et pouvant affecter les mesures astrométriques et spectroscopiques (vitesses radiales) de cette étoile.

Le second chapitre porte sur la capacité de l'instrument *GRAVITY* à contraindre les différents effets discutés au chapitre précédent. Une section est en particulier consacrée à la contrainte du moment cinétique (norme et direction) du trou noir avec l'étoile S2 et cet instrument.

Chapitre 6

Simulations d'observations de l'étoile S2

Sommaire

6.1 Développement de plusieurs modèles d'orbites 132

6.1.1 Modèles képlériens 132

6.1.2 Modèles relativistes 141

6.1.3 Résumé 146

6.2 Amplitudes des différents effets affectant les observations de l'étoile S2 148

6.2.1 Effets affectant l'astrométrie 149

6.2.2 Effets affectant la spectroscopie 154

6.3 Comparaison des modèles A à F au modèle G 157

6.4 Conclusion du chapitre 159

Ce nouveau chapitre est consacré à la description de plusieurs modèles mis en place afin de simuler les observations astrométriques et spectroscopiques de l'étoile S2. Chaque modèle possède un certain degré de raffinement dans la simulation des observations de cette étoile. En d'autres termes, cela signifie que certains modèles prennent par exemple en compte des effets relativistes tels que l'avancée du périastre ou la déflexion de la lumière, tandis que d'autres les négligent. Le but est d'étudier s'il est possible de détecter différents effets affectant des mesures obtenues sur cette étoile, à des précisions astrométriques et spectroscopiques données. Nous pourrons ainsi déterminer si l'instrument *GRAVITY* sera capable de mettre en évidence des effets relativistes avec S2, et si oui au bout de combien de temps d'observation. La présentation de ces différents résultats sera donnée dans le second chapitre de cette partie.

Les positions simulées dans le plan du ciel seront des données pouvant être obtenues avec l'instrument *GRAVITY*. En revanche, puisque ce dernier ne permettra pas d'effectuer des mesures de vitesses radiales à haute résolution de l'étoile S2, celles-ci seront par exemple

obtenues avec les instruments *SINFONI*, installé au *VLT* (Eisenhauer et al. 2003), et *MICADO* qui sera, lui, installé sur le futur instrument nommé *E-ELT*[1] (pour *European Extremely Large Telescope*, Davies et al. 2010), dont la première lumière est prévue pour 2024.

6.1 Développement de plusieurs modèles d'orbites

Les différents modèles mis en place sont au nombre de sept. Trois d'entre eux sont obtenus avec des orbites képlériennes, ils seront notés A, B et C, et nous les appellerons modèles képlériens. Les quatre restants, notés D, E, F et G, sont obtenus avec des orbites relativistes, nous les appellerons modèles relativistes.

6.1.1 Modèles képlériens

Avant de présenter les modèles A, B et C, nous souhaitons rappeler quelques notions portant sur les orbites képlériennes. Dans un premier temps, nous rappelons quels sont les différents paramètres permettant de décrire les orbites en physique newtonienne. Puis, nous expliquons comment obtenir, à une date t donnée, les positions ($x_{\rm orb}$,$y_{\rm orb}$) et vitesses ($v_{x_{s,\rm orb}}$,$v_{y_{s,\rm orb}}$) de l'étoile dans son plan orbital. Enfin, nous montrons comment les quantités observables telles que les positions astrométriques et vitesses radiales peuvent être obtenues à partir de ces coordonnées.

La section suivante a été rédigée en s'inspirant de l'article de Catanzarite (2010).

Éléments orbitaux et coordonnées cartésiennes d'une étoile exprimées dans son plan orbital

L'orbite képlérienne est une ellipse fermée, elle est paramétrée par sept quantités : la période T, le demi-grand axe $a_{\rm dga}$, l'excentricité e, la date du passage au périastre t_p, l'inclinaison de l'orbite i, la longitude du nœud ascendant Ω et l'argument du périastre ω (voir Fig. 6.1 pour une illustration de ces trois angles).

Connaissant les différents paramètres orbitaux de l'étoile, il est possible de déterminer les coordonnées ($x_{s,\rm orb}$,$y_{s,\rm orb}$) et ($v_{x_{s,\rm orb}}$,$v_{y_{s,\rm orb}}$) de l'étoile à une date t donnée. Pour cela, nous utilisons une formule obtenue à l'aide de l'équation du mouvement d'un système à deux corps et permettant d'estimer la coordonnée radiale de l'étoile par rapport au trou noir :

$$r(\nu) = \frac{a_{\rm dga}(1-e^2)}{1+e\cos\nu} \tag{6.1}$$

où ν est l'anomalie vraie correspondant à l'angle entre la position du périastre et celle de l'étoile (voir Fig. 6.2). L'anomalie vraie est obtenue grâce à la formule suivante :

$$\tan\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{\mathcal{E}}{2}\right) \tag{6.2}$$

1. `http://www.eso.org/public/france/teles-instr/e-elt/`.

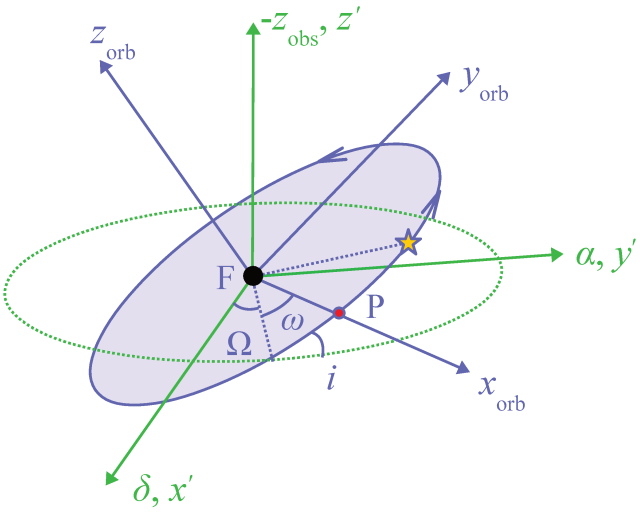

FIGURE 6.1 – Illustration de l'inclinaison i, de la longitude du nœud ascendant Ω et de l'argument du périastre ω. Le repère bleu correspond au repère de l'étoile. Le repère vert (α,δ, $-z_{\text{obs}}$) représente celui de l'observateur. On associe à ce dernier un second repère que l'on note (x',y',z') et qui est relié à celui de l'observateur par : $x' = \delta$, $y' = \alpha$, $z' = -z_{\text{obs}}$. Le point P sur l'orbite représente la position du périastre de l'étoile. Le rond noir au centre des deux repères schématise le trou noir, il est situé au foyer F de l'orbite. L'observateur est quant à lui situé à une grande distance le long de l'axe z'.

avec $\mathcal{E}$ l'anomalie excentrique illustrée également Fig. 6.2. Pour obtenir cet angle il est nécessaire de résoudre l'équation de Képler exprimée comme :

$$\mathcal{E} - e \sin \mathcal{E} - \mathcal{M} = 0 \tag{6.3}$$

où $\mathcal{M}$ correspond à l'anomalie moyenne dépendant de la période T, de la date du passage au périastre t_p et de la date t :

$$\mathcal{M} = \frac{2\pi}{T}(t - t_p). \tag{6.4}$$

Afin de remonter aux coordonnées cartésiennes de l'étoile exprimées dans le plan orbital (x_{orb},y_{orb}), il est nécessaire de résoudre l'équation (6.3). Après quoi nous avons accès au paramètre $\mathcal{E}$ et donc à l'anomalie vraie ν. On peut ainsi estimer la coordonnée radiale $r(\nu)$ de l'étoile à la date t. Les coordonnées ($x_{s,\text{orb}}$,$y_{s,\text{orb}}$) et ($v_{x_{s,\text{orb}}}$,$v_{y_{s,\text{orb}}}$) résultantes sont alors

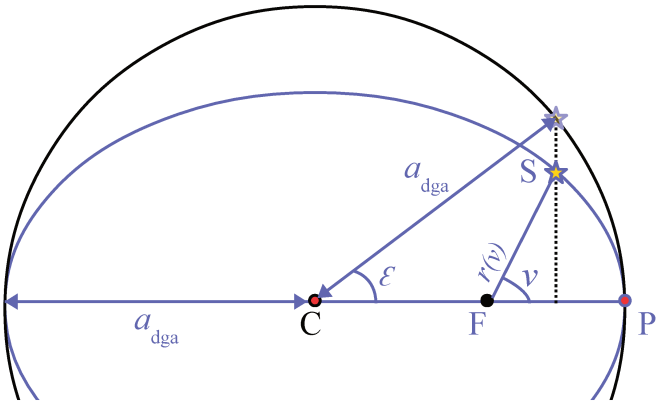

Figure 6.2 – Illustration des anomalies vraie ν et excentrique $\mathcal{E}$ obtenues à une position r de l'étoile. Le grand cercle noir possède un rayon égal au demi-grand axe a_{dga}. Le point noté C correspond au centre de ce cercle. Le point F est le foyer de l'orbite de l'étoile représenté en bleu, il correspond à la position du trou noir dans notre cas. Le point P dénote le périastre.

données par :

$$\begin{aligned}(x_{s,\text{orb}},y_{s,\text{orb}}) &= (r\cos\nu,r\sin\nu)\,,\\ &= \left(a_{\text{dga}}\left(\cos\mathcal{E}-e\right),a_{\text{dga}}\sqrt{1-e^2}\sin\mathcal{E}\right),\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$(v_{x_{s,\text{orb}}},v_{y_{s,\text{orb}}}) = \left(-\frac{2\pi}{T}\frac{a_{\text{dga}}^2}{r}\sin\mathcal{E},\frac{2\pi}{T}\frac{a_{\text{dga}}^2}{r}\sqrt{1-e^2}\cos\mathcal{E}\right). \tag{6.6}$$

Paramétrage de Thiele-Innes

Maintenant que nous connaissons les positions et vitesses de l'étoile exprimées dans son plan orbital, à une date t donnée, il ne nous reste plus qu'à les projeter dans le plan du ciel pour remonter aux observables. Pour cela, nous utilisons le paramétrage de Thiele-Innes (Catanzarite 2010) permettant d'obtenir les coordonnées de l'étoile dans le repère que nous avons noté (x',y',z') dans la légende de la Fig. 6.1. Celui-ci est relié au repère de l'observateur et nous permet donc de remonter aux positions astrométriques et vitesses radiales de l'étoile.

Les coordonnées de l'étoile exprimées dans le repère (x',y',z') sont obtenues par :

$$\begin{aligned} x'_s &= Ax_{s,\text{orb}} + Fy_{s,\text{orb}}, & v'_{x_s} &= Av_{x_{s,\text{orb}}} + Fv_{y_{s,\text{orb}}},\\ y'_s &= Bx_{s,\text{orb}} + Gy_{s,\text{orb}}, & v'_{y_s} &= Bv_{x_{s,\text{orb}}} + Gv_{y_{s,\text{orb}}},\\ z'_s &= Cx_{s,\text{orb}} + Hy_{s,\text{orb}}, & v'_{z_s} &= Cv_{x_{s,\text{orb}}} + Hv_{y_{s,\text{orb}}} \end{aligned} \tag{6.7}$$

où A, B, C, F, G et H sont définis par :

$$\begin{aligned}
A &= \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i,\\
B &= \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i,\\
C &= -\sin\omega\sin i,\\
F &= -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i,\\
G &= -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i\\
H &= -\cos\omega\sin i.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Les coordonnées de l'étoile dans le référentiel de l'observateur sont donc :

$$\begin{aligned}
\alpha_s &= y'_s, \qquad v_{\alpha_s} = v'_{y_s},\\
\delta_s &= x'_s, \qquad v_{\delta_s} = v'_{x_s},\\
z_{s,\mathrm{obs}} &= -z'_s, \qquad v_{z_{s,\mathrm{obs}}} = -v'_{z_s}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

On en déduit ainsi la position astrométrique (α_s,δ_s) et la vitesse radiale[2] $v_{z_{s,\mathrm{obs}}}$ de l'étoile à la date t considérée.

Les systèmes de coordonnées décrits ici sont utilisés pour l'ensemble des modèles képlériens A, B et C. Ces trois modèles sont décrits par un ensemble de huit paramètres : les sept paramètres orbitaux définis précédemment et la distance entre l'observateur et le trou noir, notée R_0.

Le modèle A constitue le modèle le plus simple c'est-à-dire qu'aucun effet n'est ajouté. Dans les modèles B et C, un effet appelé effet Roemer est pris en compte, il est défini dans le section suivante.

L'effet Roemer

L'effet Roemer est un phénomène entièrement dû à la vitesse de propagation finie de la lumière. C'est un simple effet de variation du temps de parcours des photons qui se manifeste lorsque la distance entre l'émetteur et le récepteur varie. Il a été découvert pour la première fois en 1675 par le savant danois Ole Roemer, en faisant une série d'observations des éclipses de Io, satellite de Jupiter. Cela lui a permis d'observer une variation apparente de la période de révolution de Io et ainsi de mettre en évidence le caractère fini de la vitesse de la lumière.

Pour mieux comprendre ce phénomène détaillons ce qui se passe Fig. 6.3. Sur le schéma de gauche, l'émetteur s'éloigne par rapport au récepteur fixe. Le temps T_{rec} est dans ce cas supérieur au temps T_{em}. En revanche, lorsque l'émetteur se rapproche du récepteur, le

2. On appelle cette vitesse « vitesse radiale » parce qu'on définit souvent la coordonnée radiale à partir d'un observateur et d'une source comme la coordonnée le long de l'axe les joignant. Ici nous appelons cet axe « z » donc l'appellation « vitesse radiale » n'est plus justifiée, mais est conservée étant donné que cette appellation est consacrée par l'usage.

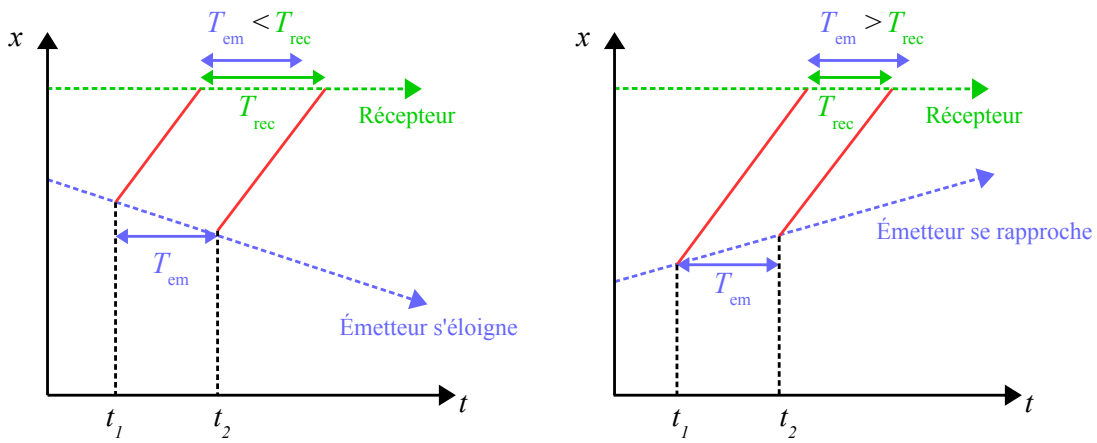

FIGURE 6.3 – Illustration de l'effet Roemer : $T_{\rm em}$ est le temps séparant l'émission de deux signaux lumineux émis aux dates t_1 et t_2, $T_{\rm rec}$ correspond au temps séparant la réception de ces deux signaux. Le temps $T_{\rm em}$ considéré lorsque l'émetteur s'éloigne du récepteur est identique à celui considéré lorsque l'émetteur se rapproche du récepteur.

temps $T_{\rm rec}$ est plus faible que $T_{\rm em}$. On constate donc que le temps de réception dans ce dernier cas est inférieur à celui obtenu lorsque l'émetteur s'éloigne, puisque dans les deux cas nous avons considéré les mêmes $T_{\rm em}$. Le phénomène observé ici correspond à l'effet Roemer et est dû à la vitesse finie de la lumière.

Afin de prendre en compte cet effet dans les modèles B et C, on résout l'équation suivante :

$$t_{\rm obs} - t_{\rm em} + \frac{z_{s,{\rm obs}}(t_{\rm em})}{c} = 0 \tag{6.10}$$

où $t_{\rm obs}$ est la date d'observation, $t_{\rm em}$ est la date à laquelle le photon a été émis depuis l'étoile, et $z_{s,{\rm obs}}(t_{\rm em})$ correspond à la coordonnée de l'étoile le long de la ligne de visée, estimée à $t_{\rm em}$. Précisons qu'un signe positif dans la coordonnée $z_{s,{\rm obs}}(t_{\rm em})$ signifie que l'étoile est située à l'arrière du trou noir.

L'effet Roemer est introduit en prenant en compte le temps de parcours du photon : le photon parcourt davantage de chemin lorsque l'étoile est placée à l'arrière du trou noir, tandis qu'il en parcourt moins lorsque celle-ci est située à l'avant du trou noir. Pour cela, on considère des dates d'observation telles que :

$$\begin{cases} t_{\rm obs} = t_{\rm em} + \frac{|z_{s,{\rm obs}}(t_{\rm em})|}{c} & \text{lorsque l'étoile est l'arrière du trou noir,} \\ t_{\rm obs} = t_{\rm em} - \frac{|z_{s,{\rm obs}}(t_{\rm em})|}{c} & \text{lorsque l'étoile est l'avant du trou noir.} \end{cases}$$

Dans le premier cas nous avons donc une date d'observation plus grande que celle obtenue dans le second cas. Ajoutons que contrairement aux modèles B et C, nous considérons toujours $t_{\rm obs} = t_{\rm em}$ dans le modèle A, ce qui revient à supposer que la vitesse de la lumière est infinie.

L'équation (6.10) permet d'évaluer la date d'émission $t_{\rm em}$ connaissant la date d'observation $t_{\rm obs}$. En d'autres termes, elle permet de remonter aux coordonnées

$(x_{s,\mathrm{orb}},y_{s,\mathrm{orb}})$ auxquelles doit être l'étoile pour prendre en compte le temps de parcours du photon dans les observables $(\alpha_s,\delta_s,z_{s,\mathrm{obs}})$. Pour obtenir ces coordonnées nous utilisons les formules définies précédemment mais posons $t = t_{\mathrm{em}}$ dans l'équation (6.4). Après quoi nous pouvons donc dire que nous avons accès aux observables telles que vues par un observateur situé dans un espace-temps de Minkowski [3].

Afin de résoudre l'équation (6.10), nous utilisons la méthode de dichotomie. La précision atteinte sur la date d'émission obtenue est d'environ 10^{-4} seconde ce qui correspond à une erreur négligeable sur l'astrométrie ($\approx 10^{-6}$ μas) et les vitesses radiales ($\approx 10^{-7}$ km/s).

Précisons que l'effet Roemer agit à la fois sur les mesures astrométriques et spectroscopiques de l'étoile. L'impact de cet effet sur ces deux observables, et dans le cas de l'étoile S2, sera présenté Sect. 6.2. En plus de l'effet Roemer, le modèle C prend en compte deux autres effets qui n'agissent que sur les mesures de vitesses radiales. Il s'agit des décalages Doppler transverse et gravitationnel. Les définitions ainsi que l'explication de l'implémentation de ces deux décalages spectraux dans le modèle C sont données dans la section suivante.

Décalages Doppler transverse et gravitationnel

Les décalages Doppler transverse et gravitationnel sont les noms donnés à des phénomènes de décalages de raies observés sur le spectre d'une source. Le décalage spectral total est noté $\mathcal{Z}$ et est appelé *redshift* en Anglais. Le décalage Doppler transverse correspond au décalage spectral induit par le fait qu'une source soit en mouvement par rapport à un observateur. Le décalage gravitationnel est uniquement observé en relativité générale et correspond à l'écart spectral introduit par le fait que les photons se déplacent dans un champ gravitationnel non homogène. Le décalage de raies mesuré sur le spectre de la source et engendré par ces deux effets, permet d'effectuer des mesures de vitesses radiales notées V via la formule :

$$V = c\mathcal{Z}. \tag{6.11}$$

À présent explicitons comment est estimé le décalage spectral $\mathcal{Z}$ dans le modèle C. Pour cela, considérons une source émettrice en rotation autour du candidat trou noir central, possédant une quadri-vitesse $\mathbf{u}_{\mathrm{em}}$, ainsi que des photons émis depuis celle-ci possédant une quadri-impulsion $\mathbf{p}_{\mathrm{em}}$. Ces photons sont reçus par un observateur statique situé à 8 kiloparsecs du trou noir et ayant pour quadri-vitesse $\mathbf{u}_{\mathrm{obs}}$. La quadri-impulsion des photons à la réception est notée $\mathbf{p}_{\mathrm{obs}}$. L'expression complète du décalage spectral est donnée, comme déjà vu Partie II, par :

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{g} - 1 \tag{6.12}$$

3. Dans cet espace-temps les photons se propagent en ligne droite ce qui n'est pas le cas dans les espace-temps de Schwarzschild et Kerr où les géodésiques de genre lumière sont courbes.

avec

$$g = \frac{\mathbf{u}_{\text{obs}} \cdot \mathbf{p}_{\text{obs}}}{\mathbf{u}_{\text{em}} \cdot \mathbf{p}_{\text{em}}}. \tag{6.13}$$

Comme l'observateur est statique les composantes de sa quadri-vitesse sont :

$$u^{\alpha}_{\text{obs}} = (u^{t}_{\text{obs}},0,0,0). \tag{6.14}$$

De plus, étant donné que $\mathbf{u}_{\text{obs}}$ est un vecteur unitaire et que l'observateur est situé loin du trou noir nous avons [4] :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{obs}} \cdot \mathbf{u}_{\text{obs}} &= g_{tt}|_{\text{obs}} \left(u^{t}_{\text{obs}}\right)^2, \\ -1 &\approx -\left(u^{t}_{\text{obs}}\right)^2 \end{aligned} \tag{6.15}$$

et donc

$$u^{\alpha}_{\text{obs}} \approx (1,0,0,0). \tag{6.16}$$

On précise que l'on pourra se reporter à Visser (2007) pour avoir l'expression de la composante g_{tt} de la métrique dans le cas des coordonnées de Kerr-Schild. L'énergie du photon telle que mesurée par cet observateur est donnée par :

$$E_{\text{obs}} = -\mathbf{u}_{\text{obs}} \cdot \mathbf{p}_{\text{obs}}. \tag{6.17}$$

Étant donné les approximations de u^{α}_{obs} et de $g_{tt}|_{\text{obs}}$ on a donc :

$$E_{\text{obs}} \approx -(\boldsymbol{\partial}_t \cdot \mathbf{p})_{\text{obs}} \tag{6.18}$$

où la notation $(.)_{\text{obs}}$ signifie que l'on effectue le calcul entre parenthèses à la réception.

On décide à présent de décomposer la quadri-vitesse $\mathbf{u}_{\text{em}}$ et la quadri-impulsion $\mathbf{p}_{\text{em}}$ dans le référentiel d'une classe d'observateur particulier appelé *ZAMO* (pour *Zero Angular Momentum Observer*), qui coïncide à chaque instant avec l'émetteur. Le *ZAMO* va nous permettre de décomposer les deux quadri-vecteurs dans le formalisme 3+1 de la relativité générale. En effet, on aura une composante temporelle parallèle à la quadri-vitesse du *ZAMO*, notée $\mathbf{u}_{ZAMO}$, et une composante spatiale qui lui sera orthogonale. La particularité du *ZAMO* est qu'il tourne à la même vitesse que l'espace-temps. Sa quadri-vitesse est donnée, dans les coordonnées de Kerr-Schild, par :

$$\mathbf{u}_{ZAMO} = \beta(\boldsymbol{\xi}_t + \omega \boldsymbol{\xi}_a) \tag{6.19}$$

où $\boldsymbol{\xi}_t = (1,0,0,0)$ et $\boldsymbol{\xi}_a = (0,-y,x,0)$ sont les vecteurs de Killing [5] associés respectivement au fait que l'espace-temps est statique et à symétrie sphérique. La quantité w représente la

4. La notation $g_{tt}|_{\text{obs}}$ signifie que l'on évalue la composante métrique g_{tt} à la réception.
5. Voir le cours de Gourgoulhon (2014) pour une définition précise des vecteurs de Killing.

vitesse angulaire du *ZAMO* et est donnée en fonction des coefficients métriques exprimés en coordonnées de Kerr-Schild (voir Visser 2007) par :

$$\begin{aligned} w &= -\frac{\boldsymbol{\xi}_t \cdot \boldsymbol{\xi}_a}{\boldsymbol{\xi}_a \cdot \boldsymbol{\xi}_a}, \\ &= -\frac{g_{ty}x - g_{tx}y}{g_{yy}x^2 + g_{xx}y^2 - 2g_{xy}xy}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Enfin, la quantité β est obtenue en considérant l'égalité $\mathbf{u}_{ZAMO} \cdot \mathbf{u}_{ZAMO} = -1$ et s'exprime comme :

$$\beta = \sqrt{\frac{-1}{g_{tt} + g_{xx}\omega^2 y^2 + g_{yy}\omega^2 x^2 - 2g_{tx}\omega y + 2g_{ty}\omega x - 2g_{xy}\omega^2 xy}}. \tag{6.21}$$

La décomposition en une partie parallèle et perpendiculaire à $\mathbf{u}_{ZAMO}$ des quadri-vitesse de l'émetteur et quadri-impulsion du photon, à l'émission, est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\mathrm{em}} &= \Gamma_{ZAMO}(\mathbf{u}_{ZAMO} + \mathbf{V}_{ZAMO}), \\ \mathbf{p}_{\mathrm{em}} &= E_{ZAMO}(\mathbf{u}_{ZAMO} + \mathbf{n}_{ZAMO}) \end{aligned} \tag{6.22}$$

avec

$$\Gamma_{ZAMO} = -\mathbf{u}_{ZAMO} \cdot \mathbf{u}_{\mathrm{em}} \tag{6.23}$$

le facteur de Lorentz de l'émetteur tel que mesuré par le *ZAMO*. La quantité $\mathbf{V}_{ZAMO}$ est la quadri-vitesse de l'émetteur telle que vue par le *ZAMO*, et $\mathbf{n}_{ZAMO}$ est un quadri-vecteur unitaire tangent à la direction d'émission du photon mesuré par le *ZAMO*. Enfin, la quantité E_{ZAMO} est l'énergie du photon à l'émission telle que mesurée par le *ZAMO*.

Puisque le *ZAMO* est loin de la source Sgr A* dans le cas de l'étoile S2, nous négligeons l'effet du moment cinétique du trou noir. De fait, la vitesse angulaire ω devient négligeable. La quadri-vitesse du *ZAMO* peut ainsi être approchée par $\mathbf{u}_{ZAMO} \approx \boldsymbol{\partial}_t/\sqrt{-g_{tt}|_{\mathrm{em}}}$. L'énergie E_{ZAMO} résultante est alors donnée par :

$$\begin{aligned} E_{ZAMO} &= -\mathbf{u}_{ZAMO} \cdot \mathbf{p}_{\mathrm{em}}, \\ &\approx -\frac{1}{\sqrt{-g_{tt}|_{\mathrm{em}}}}(\boldsymbol{\partial}_t \cdot \mathbf{p})_{\mathrm{em}}. \end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\tag{6.25}$$

En utilisant les différentes équations définies précédemment, et sachant que la quantité $\boldsymbol{\partial}_t \cdot \mathbf{p}$ est conservée le long d'une géodésique lumière, induisant ainsi l'égalité $(\boldsymbol{\partial}_t \cdot \mathbf{p})_{\mathrm{obs}} = (\boldsymbol{\partial}_t \cdot \mathbf{p})_{\mathrm{em}}$, le facteur g introduit à la formule (6.13) peut s'écrire :

$$g = \frac{\sqrt{-g_{tt}|_{\mathrm{em}}}}{\Gamma_{ZAMO}(1 - \mathbf{V}_{ZAMO} \cdot \mathbf{n}_{ZAMO})}. \tag{6.26}$$

À présent nous souhaitons avoir une expression de la quadri-vitesse $\mathbf{V}_{ZAMO}$ de l'émetteur telle que vue par le *ZAMO*, afin de développer davantage l'équation (6.26). Pour cela, nous utilisons l'expression de $\mathbf{u}_{\mathrm{em}}$ donnée équation (6.22) ainsi que l'approximation de la quadri-vitesse du *ZAMO*. On a donc :

$$\mathbf{V}_{ZAMO} \approx \frac{\mathbf{u}_{\mathrm{em}}}{\Gamma_{ZAMO}} - \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}|_{\mathrm{em}}}}\boldsymbol{\partial}_t \tag{6.27}$$

où le facteur de Lorentz peut être simplifié par :

$$\begin{aligned}\Gamma_{ZAMO} &\approx -\frac{1}{\sqrt{-g_{tt}|_{\mathrm{em}}}}(\boldsymbol{\partial}_t \cdot \mathbf{u})_{\mathrm{em}},\\ &\approx -\frac{g_{tt}|_{\mathrm{em}}}{\sqrt{-g_{tt}|_{\mathrm{em}}}}u^t_{\mathrm{em}},\\ &\approx \sqrt{-g_{tt}|_{\mathrm{em}}}u^t_{\mathrm{em}}.\end{aligned} \tag{6.28}$$

Les nouvelles composantes de la quadri-vitesse sont alors données par :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ZAMO} &\approx \left(0, \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}|_{\mathrm{em}}}}\frac{u^i_{\mathrm{em}}}{u^t_{\mathrm{em}}}\right),\\ &\approx \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}|_{\mathrm{em}}}}\boldsymbol{\mathcal{V}}\end{aligned} \tag{6.29}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ peut-être confondu avec la trois-vitesse $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t$ obtenue en coordonnées de Kerr-Schild de l'émetteur, puisque sa composante temporelle est nulle. On l'appellera dans la suite, abusivement et par simplification, « la vitesse de l'émetteur ».

Étant donné que la source est loin du trou noir nous pouvons écrire la composante $g_{tt}|_{\mathrm{em}}$ associée au *ZAMO* comme :

$$g_{tt}|_{\mathrm{em}} = -(1-\epsilon) \tag{6.30}$$

où $\epsilon \approx 2/r_{\mathrm{em}}$ est petit devant 1, la coordonnée r_{em} étant la position radiale de l'émetteur dans le référentiel du trou noir. Précisons que cette expression de ϵ est une approximation puisque l'on considère que le terme faisant intervenir le moment cinétique du trou noir est négligeable.

Enfin, le décalage spectral obtenu en relativité générale, faisant intervenir les décalages Doppler transverse et gravitationnel, peut être approché par :

$$\mathcal{Z} \approx \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \times \frac{1 + \mathcal{V}_{\mathrm{proj}}/c \times (1-\epsilon)^{-1/2}}{\sqrt{1-(\mathcal{V}/c)^2 \times (1-\epsilon)^{-1}}} - 1 \tag{6.31}$$

où $\mathcal{V}_{\mathrm{proj}}$ correspond à la norme de la trois-vitesse $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ de l'émetteur projetée sur la ligne de visée. On précise que l'on a considéré ici une projection de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ en régime newtonien,

c'est-à-dire le long d'une ligne de visée non courbée.

Dans le modèle C, nous utilisons la formule (6.31) pour estimer les mesures de vitesses radiales de l'étoile. La composante spatiale de la trois-vitesse $\mathcal{V}$ est donnée par la vitesse orbitale képlérienne de l'étoile égale à :

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{2}{r_{\mathrm{em}}} - \frac{1}{a_{\mathrm{dga}}}}. \tag{6.32}$$

La vitesse $\mathcal{V}_{\mathrm{proj}}$ est, elle, donnée par la projection du vecteur vitesse newtonien de l'étoile le long de l'axe de visée de l'observateur. Pour ce qui est des modèles A et B, nous ne considérons pas l'équation (6.31) mais uniquement la composante newtonienne du décalage Doppler. En effet, ce décalage possède deux composantes, une transversale et une longitudinale. Ces deux dernières sont prises en compte dans l'équation (6.31). Afin de n'avoir que le décalage Doppler longitudinal dans les modèles A et B, nous utilisons la formule obtenue en régime newtonien :

$$\mathcal{Z}_N = \frac{\mathcal{V}_{\mathrm{proj}}}{c} \tag{6.33}$$

où $\mathcal{V}_{\mathrm{proj}} = v_{z_{s,\mathrm{obs}}}$. Notons que l'équation (6.33) apparaît lorsque l'on approche davantage l'équation (6.31). En effet, si l'on fait un développement en $\mathcal{V}/c$ et ϵ, puisque $\mathcal{V} \ll c$ et $\epsilon \ll 1$, la formule obtenue correspond à celle donnée dans l'article de Zucker et al. (2006) qui fait intervenir l'équation (6.33).

6.1.2 Modèles relativistes

En plus des trois modèles képlériens, nous choisissons de mettre en place quatre modèles relativistes notés D, E, F et G.

Contrairement aux modèles képlériens, les paramètres dont nous avons besoin pour générer une orbite dans ces quatre modèles sont les quadri-position et quadri-vitesse initiales de l'étoile. Néanmoins, afin de les obtenir nous considérons les paramètres orbitaux définis Sect. 6.1.1. Les différentes étapes nécessaires pour y parvenir sont décrites dans la section suivante.

Générer des orbites relativistes à partir des éléments orbitaux képlériens

Dans la Sect. 6.1.1 nous avons défini deux référentiels, un premier lié à l'observateur et un second lié à l'étoile. Ici, nous allons définir un autre référentiel lié au trou noir que nous noterons (x_{TN},y_{TN},z_{TN}). Celui-ci est caractérisé par les coordonnées de Kerr-Schild dont l'axe z_{TN} est pris aligné avec l'axe de rotation du trou noir. Une illustration de ces différents référentiels est visible Fig. 6.4. Sur cette dernière sont également visibles les angles permettant d'orienter l'axe de rotation du trou noir par rapport à l'observateur. Ils sont notés i' et Ω' : i' est l'angle entre l'axe de rotation du trou noir et l'axe $-z_{\mathrm{obs}}$, l'angle

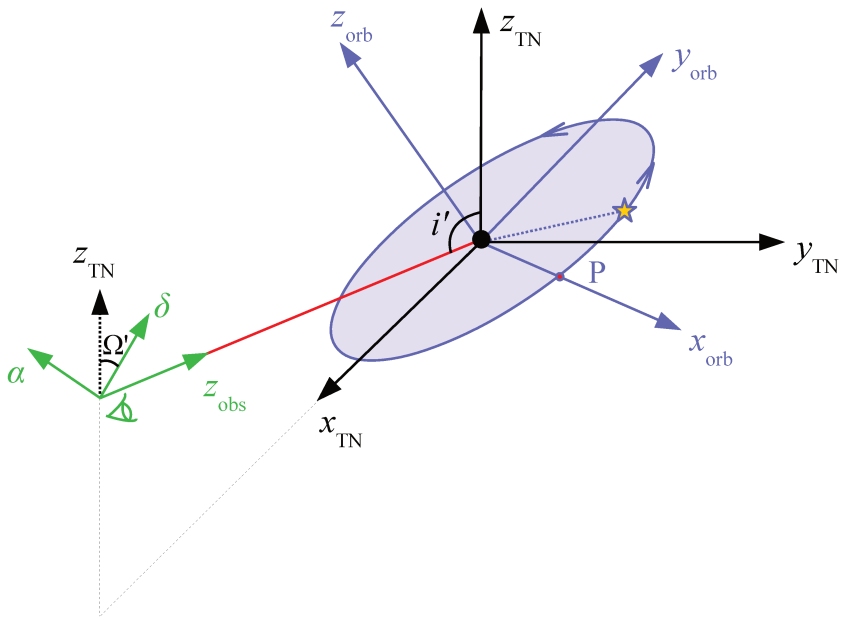

FIGURE 6.4 – Illustration des référentiels liés à l'observateur en vert, à l'étoile en bleu et au trou noir en noir. Dans ce dernier, l'axe z_{TN} est aligné avec l'axe de rotation du trou noir. Les angles i' et Ω' permettent de définir la direction du vecteur du moment cinétique du trou noir par rapport au référentiel de l'observateur. Le point P sur l'orbite de l'étoile représente le périastre.

Ω' correspond à l'angle entre l'axe δ et l'axe z_{TN} projeté dans le plan du ciel (α,δ). Ces angles sont liés aux angles `Inclination` et `PALN` définis Sect. 4.4.1, comme :

$$\begin{aligned} i' &= \pi - \texttt{Inclination}, \\ \Omega' &= \pi - \texttt{PALN}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Comme mentionné précédemment, nous avons besoin de fournir au code `GYOTO` les quadri-position et quadri-vitesse initiales de l'étoile. Celles-ci doivent être exprimées dans le référentiel du trou noir. Les composantes temporelles de ces deux quadri-vecteurs sont prises égales à zéro, et les composantes spatiales sont obtenues en utilisant la procédure décrite ci-dessous :

— Étape 1 : on détermine les trois-position $(\alpha_s,\delta_s,z_{s,\mathrm{obs}})$ et trois-vitesse $(v_{\alpha_s},v_{\delta_s},v_{z_{s,\mathrm{obs}}})$ de l'étoile dans le référentiel de l'observateur (voir Sect. 6.1.1).

— Étape 2 : on détermine les coordonnées initiales de l'étoile dans le référentiel du trou noir et dans les coordonnées de Kerr-Schild. Pour cela, nous appliquons une rotation matricielle d'angles i' et Ω' aux trois-position et trois-vitesse déterminées à l'étape 1. Cette matrice est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \sin i'' \sin \Omega' & \sin i'' \cos \Omega' & -\cos i'' \\ -\cos \Omega' & \sin \Omega' & 0 \\ \cos i'' \sin \Omega' & \cos i'' \cos \Omega' & \sin i'' \end{pmatrix} \tag{6.35}$$

où $i'' = 3\pi/2 + i'$.

Les conditions initiales ainsi obtenues sont transmises au code GYOTO ce qui nous permet ensuite d'avoir les coordonnées de l'étoile à une date donnée, à l'aide des fonctions définies Sect. 4.4.2. Mentionnons que le protocole défini ici est utilisé pour l'ensemble des modèles D, E, F et G.

Chacun des modèles relativistes prend en compte un certain nombre d'effets. Nous allons voir dans la section suivante quels sont-ils et comment ceux-ci sont implémentés dans les différents modèles.

Description des différents modèles relativistes

Modèle D

Le modèle D est une amélioration du modèle képlérien C dans le sens où celui-ci prend en compte, en plus des effets présents dans le C, l'effet d'avancée du périastre. Pour cela, nous utilisons le code GYOTO qui nous permet de générer une trajectoire relativiste de l'étoile.

Notons que l'effet Roemer ainsi que les décalages Doppler transverse et gravitationnel sont obtenus de manière plus précise dans ce modèle D que dans les modèles képlériens, puisque les positions et vitesses de l'étoile considérées dans les formules (6.10) et (6.31) permettant de les simuler sont celles obtenues en relativité générale. Par exemple, pour résoudre l'équation (6.10), c'est-à-dire pour déterminer la date d'émission $t_{\rm em}$, nous estimons la coordonnée $z_{s,\rm obs}$ en projetant dans le plan du ciel les coordonnées par rapport au trou noir de l'étoile, obtenues à l'aide de GYOTO à une date t donnée. La date $t_{\rm em}$ ainsi obtenue permet de simuler les positions astrométriques dans le modèle D. Pour cela, il suffit de projeter les coordonnées de l'étoile estimées à l'aide de GYOTO à la date $t_{\rm em}$. Pour ce qui est de l'équation (6.31), nous utilisons la norme de la trois-vitesse $\mathcal{V}$ donnée par :

$$\mathcal{V} = \sqrt{g_{\alpha\beta}\mathcal{V}^\alpha \mathcal{V}^\beta} \tag{6.36}$$

où $g_{\alpha\beta}$ sont les coefficients métriques en coordonnées de Kerr-Schild (voir Visser 2007). Les composantes $\mathcal{V}^\alpha$ de la quadri-vitesse sont également fournies par GYOTO et évaluées à la date $t_{\rm em}$ estimée à l'aide de l'équation (6.10).

Tout comme les modèles képlériens, le modèle D est décrit par huit paramètres correspondant aux paramètres orbitaux utilisés afin de générer les quadri-position et quadri-vitesse initiales de l'étoile, ainsi que la distance R_0 entre l'observateur et le trou noir. Les angles permettant de définir la direction du moment cinétique de ce dernier interviennent également dans les formules nécessaires pour générer ces conditions initiales

(voir matrice (6.35)). Néanmoins, étant donné que nous négligeons l'effet Lense-Thirring (voir Sect. 1.3.2) dans ce modèle (c'est-à-dire que l'on prend $\bar{a} = 0$), ces angles n'ont pas d'effet sur l'astrométrie et la spectroscopie de S2. Nous choisissons donc de les fixer à zéro.

Modèles E et F

Le modèle relativiste E est similaire au modèle D mais prend en compte, en plus des effets présents dans ce modèle, l'effet Lense-Thirring affectant la trajectoire de l'étoile. Ce nouveau modèle est donc décrit cette fois-ci non pas par huit paramètres mais onze. En effet, la norme $\bar{a}$ ainsi que les deux angles i' et Ω' qui définissent le moment cinétique du trou noir interviennent également dans le modèle. Notons que si l'on prend $\bar{a} = 0$, nous retrouvons le modèle D. Les modèles F et G seront également décrits par ces onze paramètres.

Le modèle F est obtenu en ajoutant au modèle E un effet de lentille gravitationnelle correspondant au décalage astrométrique induit par la déviation d'un photon émis depuis le centre de l'étoile (c'est-à-dire que nous simulons les positions apparentes de l'étoile en ne considérant qu'un photon de l'image primaire, dont la trajectoire a été affectée par la courbure d'espace-temps). Pour cela, nous utilisons des approximations analytiques des lentilles développées par Sereno & de Luca (2006). Ces formules permettent de simuler de manière approchée les positions apparentes d'étoiles affectées par la déviation de la lumière, en métrique de Kerr. Celles-ci sont développées en déflexion faible c'est-à-dire que la distance minimale du photon au trou noir doit être grande devant le rayon de Schwarzschild. D'autre part, l'observateur ainsi que l'émetteur sont considérés dans un espace-temps plat, les approximations sont donc également obtenues en champ faible.

Contrairement aux modèles D et E, les positions astrométriques simulées dans le modèle F ne sont pas obtenues en projetant les coordonnées de l'étoile dans le plan du ciel mais en utilisant les formules fournies par Sereno & de Luca (2006). Pour cela, il suffit d'avoir les coordonnées spatiales de l'observateur en fonction du trou noir ainsi que celles de l'étoile, obtenues par `GYOTO` à la date trouvée à l'aide de l'équation (6.10).

Notons que les mesures spectroscopiques simulées dans ce modèle sont similaires à celles obtenues dans le modèle E. En effet, seule l'astrométrie est affectée par l'effet de lentille gravitationnelle.

Modèle G

Enfin, le dernier modèle constitue le modèle le plus complet puisque celui-ci prend en compte l'ensemble des effets pouvant affecter la trajectoire de l'étoile ainsi que celle du photon. Pour cela nous utilisons le code de tracé de rayons `GYOTO`. En plus des effets présents dans le modèle F, celui-ci prend donc en compte le retard Shapiro (voir Sect. 1.3.2) et l'effet Lense-Thirring affectant la trajectoire du photon. Cependant, comme l'étoile que nous étudions ici est loin du Centre Galactique, des effets de lentilles gravitationnelles affectant l'astrométrie tels que l'amplification lumineuse de l'image

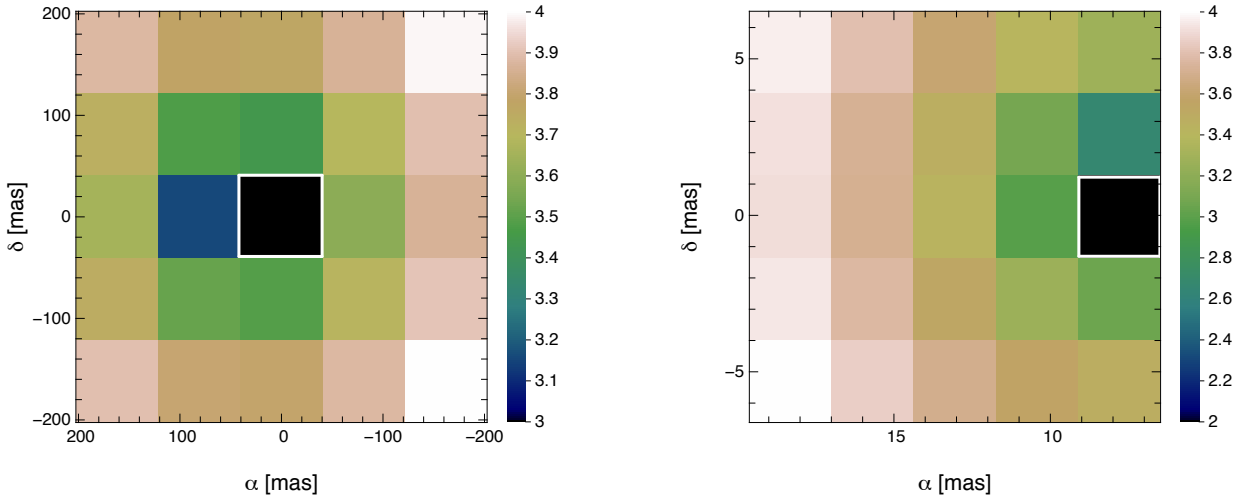

FIGURE 6.5 – Cartes `MinDistance` en échelle logarithmique d'une étoile de rayon nul. *À gauche* : carte obtenue avec un champ de vue de 200 millisecondes d'angle. Plus le pixel est sombre plus la distance minimale entre le photon associé à ce pixel et l'étoile est faible. Le pixel correspondant au photon passant le plus près de l'étoile est encadré en blanc. *À droite* : carte obtenue avec un champ de vue égal à la taille du pixel encadré en blanc dans la carte de gauche. Les barres de couleurs sont exprimées en unités géométriques.

primaire ainsi que la contribution de l'image secondaire, sont négligés dans ce modèle. Mentionnons toutefois que l'erreur sur les mesures astrométriques de l'étoile S2 demeure inférieure à 1 microseconde d'angle. Notons par ailleurs que ces effets de lentilles sont également négligés dans le modèle F. Dans toute la suite de cette partie nous dénommerons par « effet de lentille gravitationnelle », la déviation d'un photon émis depuis le centre d'une étoile.

La simulation des observations dans le modèle G nécessite de mettre en place un protocole plus complexe car nous devons calculer l'image relativiste d'une étoile en orbite autour du trou noir. Cependant, comme nous ne prenons pas en compte les images secondaires ainsi que l'effet d'amplification de l'image primaire, nous simulons les positions astrométriques de l'étoile en ne considérant qu'un seul photon constituant l'image primaire de celle-ci. Le photon en question est choisi de telle sorte que sa distance minimale au centre de l'étoile vérifie : $r_{\gamma,\min} \lesssim 10^{-2}M$. Cela correspond à une erreur d'environ 0,05 microseconde d'angle sur l'astrométrie et d'environ 10^{-4} km/s sur les vitesses radiales.

Par ailleurs, étant donné que l'étoile est en mouvement, à une date d'observation donnée, nous ne pouvons pas prédire où sera l'étoile par rapport au trou noir, et donc où sera son image primaire dans le plan du ciel. Il est donc nécessaire de développer un script permettant de localiser, à une date d'observation donnée, la position de l'image primaire (c'est-à-dire permettant de remonter au photon passant à $r_{\gamma,\min} \lesssim 10^{-2}M$ du centre de l'étoile). Pour cela, nous utilisons la quantité `MinDistance` présentée Sect. 4.4.2. On rappelle que celle-ci donne la distance minimale au carré entre le photon et l'étoile. Si

on considère une étoile de rayon nul, cette quantité vaut zéro lorsque le photon a atteint l'étoile. La procédure que nous appliquons afin de converger vers le photon de l'image primaire est la suivante :

— Étape 1 : nous calculons une carte `MinDistance` en considérant un champ de vue suffisamment grand pour contenir l'étoile S2. Cette carte est obtenue avec une résolution de 5×5 pixels, elle est visible Fig. 6.5.

— Étape 2 : nous localisons le pixel correspondant au minimum de cette carte (voir le pixel encadré en blanc sur la carte de gauche Fig. 6.5). Ce pixel correspond au photon passant le plus près de l'étoile.

— Étape 3 : nous calculons une seconde carte `MinDistance` en considérant également une résolution de 5×5 pixels et un champ de vue égal à la taille du pixel minimal déterminé précédemment. Nous avons donc ici un agrandissement de ce dernier, visible Fig. 6.5. Une fois encore, nous localisons le pixel correspondant au minimum de cette nouvelle carte (voir le pixel encadré en blanc sur la carte de droite Fig. 6.5).

— Étape 4 : on réitère les étapes 2 à 3 jusqu'à ce qu'un photon de la carte `MinDistance` vérifie la condition $r_{\gamma,\min} \lesssim 10^{-2}M$. Lorsque celle-ci est satisfaite, nous avons accès à la position astrométrique (α_s,δ_s) de l'étoile correspondant à la position dans le plan du ciel de ce photon.

Précisons que le choix des résolutions des cartes `MinDistance` fait ici n'est en aucun cas unique. Ajoutons que le temps de calcul nécessaire pour satisfaire la condition sur $r_{\gamma,\min}$ est de l'ordre de 3 secondes en considérant un seul cœur (2,9 GHz intel Core i7).

Pour ce qui est de la simulation des vitesses radiales dans le modèle G, nous calculons la quantité `Redshift` de `GYOTO` au point (α_s,δ_s) déterminé à l'étape 3 (voir Sect. 4.4.2).

6.1.3 Résumé

On souhaite ici récapituler l'ensemble des modèles créés, on pourra pour cela se référer à la Fig. 6.6 ainsi qu'à la Table 6.1.

Tout d'abord, nous avons le modèle le plus simple, le modèle A, qui permet de simuler les positions astrométriques et vitesses radiales de S2 en considérant que cette étoile se déplace sur une orbite képlérienne. Le photon se déplace, lui, en ligne droite et à vitesse infinie.

Ensuite, nous avons le modèle B qui prend en compte l'effet Roemer c'est-à-dire que la vitesse du photon est cette fois-ci supposée finie. Les positions astrométriques et les vitesses radiales simulées dans ce modèle sont donc différentes de celles obtenues avec le modèle A.

Le modèle C prend en compte l'effet Roemer mais également d'autres effets qui n'affectent que les mesures spectroscopiques de l'étoile. Il s'agit des décalages Doppler transverse et gravitationnel. Les positions astrométriques obtenues dans ce modèle sont donc similaires à celles calculées dans le modèle B, ce qui n'est pas le cas des vitesses radiales.

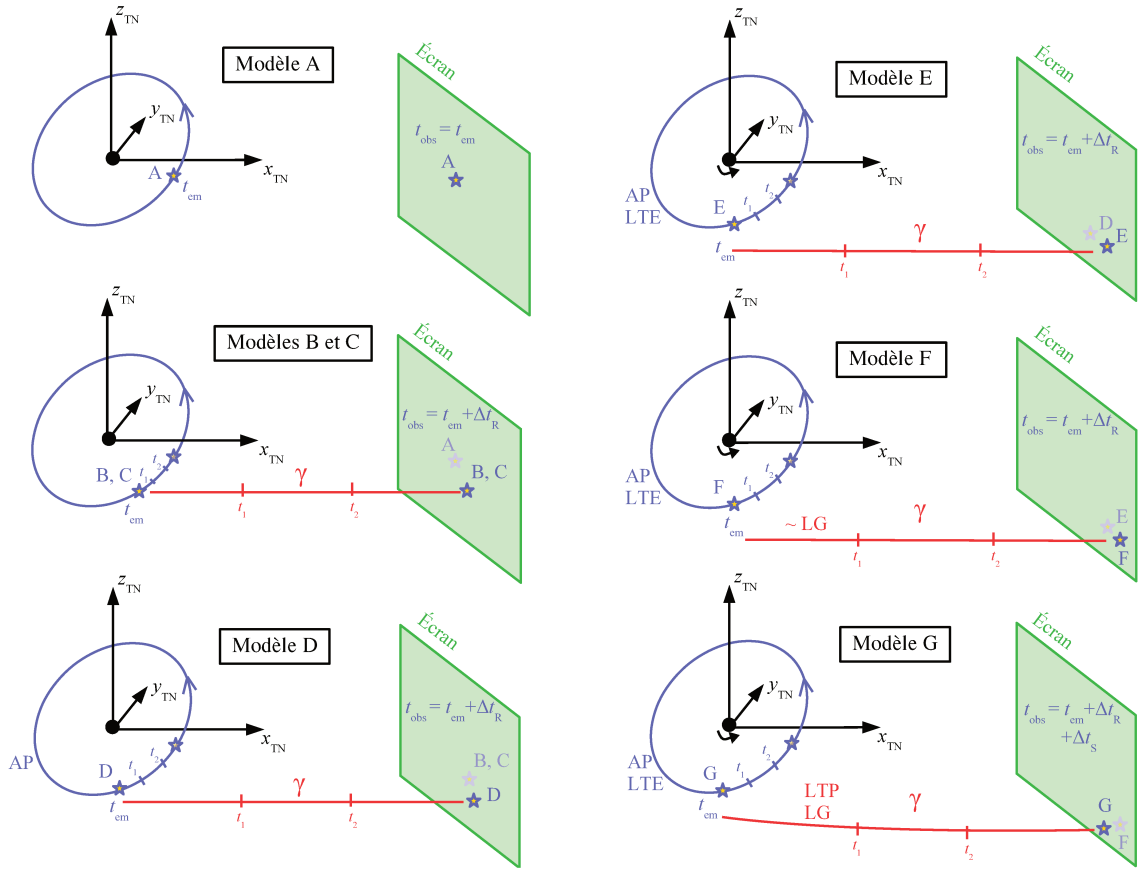

FIGURE 6.6 – Illustration des différents modèles en termes astrométriques. Les positions de l'étoile ainsi que celles du photon obtenues à des dates t_1 et t_2 sont représentées pour les modèles B à G. Les positions astrométriques simulées par chaque modèle sont marquées par les lettres A à G sur l'écran de l'observateur. Les positions d'émission correspondantes sont également annotées par des lettres sur l'orbite de l'étoile. Dans le modèle A, la différence $\Delta t = t_{\rm obs} - t_{\rm em}$ est égale à zéro car on considère que le photon possède une vitesse infinie. Dans les modèles B à G, l'effet Roemer est inclus, la quantité Δt prend donc en compte le délai temporel induit par la vitesse finie du photon, noté $\Delta t_{\rm R}$. Dans le modèle D, la trajectoire de l'étoile est décrite par la relativité générale. Néanmoins, celle-ci n'est sensible qu'à l'avancée du périastre (AP) puisqu'elle néglige l'effet Lense-Thirring. Le modèle E est similaire au modèle D mais prend en compte l'effet du moment cinétique sur la trajectoire de l'étoile (LTE pour Lense-Thirring sur l'étoile). Le modèle F est analogue au modèle E mais simule de manière approchée l'effet de lentille gravitationnelle à l'aide des approximations de Sereno & de Luca (2006). Enfin, le modèle G est obtenu en relativité générale complète c'est-à-dire que l'ensemble des effets relativistes sont pris en compte dans celui-ci. La quantité Δt est donc dépendante, en plus de l'effet Roemer, du retard Shapiro noté $\Delta t_{\rm S}$. L'effet Lense-Thirring affectant la trajectoire du photon (LTP) est également inclus dans ce modèle.

Effects	A	B	C	D	E	F	G
Roemer	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Décalage Doppler transverse	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✓
Décalage gravitationnel	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✓
Avancée du périastre	✗	✗	✗	✓	✓	✓	✓
Lense-Thirring sur l'étoile	✗	✗	✗	✗	✓	✓	✓
Lentille gravitationnelle	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✓
Lense-Thirring sur le photon	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓
Retard Shapiro	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓

Table 6.1 – Tableau récapitulatif des différents effets pris en compte dans les modèles A à G.

Le modèle relativiste D prend en compte les mêmes effets que le modèle C mais fait intervenir en plus l'avancée du périastre. Ajoutons que l'effet Roemer et les décalages spectraux sont mieux estimés dans ce modèle que dans le C puisque les coordonnées de l'étoile utilisées pour simuler ces effets sont obtenues en relativité générale.

Le modèle E est une amélioration du modèle D et prend en compte en plus l'effet dû à la rotation du trou noir sur la trajectoire de l'étoile.

Le modèle F est similaire au modèle E mais considère des positions astrométriques affectées de manière approximative par l'effet de lentille gravitationnelle.

Enfin, le modèle G est le plus précis des modèles puisqu'il prend en compte l'ensemble des effets relativistes pouvant affecter les trajectoires de l'étoile et du photon.

6.2 Amplitudes des différents effets affectant les observations de l'étoile S2

Maintenant que nous avons mis en place ces différents modèles, nous nous intéressons à l'impact des différents effets cités précédemment sur l'orbite apparente de l'étoile S2. Afin de générer les observations astrométriques et spectroscopiques de cette dernière, nous considérons pour paramètres orbitaux ceux déterminés par Gillessen et al. (2009b). On a donc : $T = 15{,}8 \pm 0{,}11$ ans, $a_{\rm dga} = 0{,}123 \pm 0{,}001''$, $e = 0{,}88 \pm 0{,}003$, $t_p = 2002{,}32 \pm 0{,}01$ ans, $\Omega = 225{,}39 \pm 0{,}84°$, $\omega = 63{,}56 \pm 0{,}84°$ et $i = 135{,}25 \pm 0{,}47°$.

Par ailleurs, nous choisissons de fixer la distance R_0 entre le Centre Galactique et l'observateur à celle estimée par Gillessen et al. (2009b) et correspondant à $8{,}33 \pm 0{,}35$ kiloparsecs. La masse du trou noir est, elle, obtenue via la troisième loi de Képler donnée par : $M_{\rm TN} = 4\pi^2 a_{\rm dga}^3/(GT^2)$ où $a_{\rm dga}$ doit être exprimé en unité de longueur.

Dans le cas des modèles relativistes E, F et G, trois autres paramètres interviennent :

la norme et les deux angles du moment cinétique du trou noir. Ces trois paramètres sont pris égaux à : $\bar{a} = 0{,}99$, $i' = 45°$ et $\Omega' = 160°$, de sorte que l'effet Lense-Thirring observé sur l'orbite apparente de l'étoile S2 soit optimum pour être potentiellement détecté par l'instrument *GRAVITY*.

Les observations que nous simulons sont obtenues en considérant 192 dates et un temps total d'observation égal à 3 périodes de rotation de l'étoile S2, cela correspond à environ 47 ans. Nous choisissons de débuter les observations aux environs de 2018 et d'utiliser l'échantillonnage suivant pour chacune des trois périodes :

— deux points par nuit pendant une semaine au passage au périastre (observations commencent en 2018,11 pour la première période, voir points bleus Fig. 6.7),
— un point par mois pendant six mois autour du passage au périastre (observations effectuées entre 2017,78 et 2018,29 pour la première période, voir points rouges Fig. 6.7),
— un point tous les quatre mois pour le reste de l'orbite (observations effectuées entre 2018,63 et 2033,2 pour la première période, voir points noirs Fig. 6.7).

On suppose ici que les observations astrométriques et spectroscopiques sont obtenues aux mêmes dates d'observation, cela sera certainement plus difficile à accomplir en réalité puisque ces deux observables ne seront pas obtenues avec le même instrument. Ajoutons également que le suivi considéré ici est effectué sur 47 ans, or il est très probable que l'instrument *GRAVITY* ne soit pas en service pendant une aussi longue période. Cependant, il n'est pas à exclure que de futurs instruments tout autant ou plus performants puissent voir le jour dans quelques années.

Comme nous pouvons le voir, nous choisissons d'échantillonner davantage lors du passage au périastre de l'étoile S2. Cela s'explique par le fait que la majorité des effets relativistes sont maximaux près de celui-ci, c'est ce que nous verrons dans les sections suivantes. Différents travaux ont notamment montré que le décalage spectral obtenu lors du passage au périastre était une observable importante pour contraindre les futurs modèles d'orbites (Zucker et al. 2006; Angélil & Saha 2010; Angélil et al. 2010; Angélil & Saha 2011). Par exemple, Zucker et al. (2006) ont montré que les décalages Doppler transverse et gravitationnel induisent des modifications dans les mesures de vitesses radiales de S2 d'environ 200 km/s. Cette valeur est donc bien au-dessus des précisions spectroscopiques actuelles qui peuvent atteindre une dizaine de km/s pour l'instrument *SINFONI*.

6.2.1 Effets affectant l'astrométrie

Dans cette section, nous allons voir quel est l'impact de différents effets introduits précédemment sur les mesures astrométriques de l'étoile S2. En particulier, nous discuterons de l'avancée du périaste, des effets Roemer et Shapiro, ainsi que des effets Lense-Thirring et de lentille gravitationnelle. L'impact de certains de ces effets sur les mesures spectroscopiques sera discuté Sect. 6.2.2.

L'avancée du périastre est un effet cumulatif c'est-à-dire que son impact sur les mesures astrométriques augmente avec le nombre de tours effectués par l'étoile autour du trou noir.

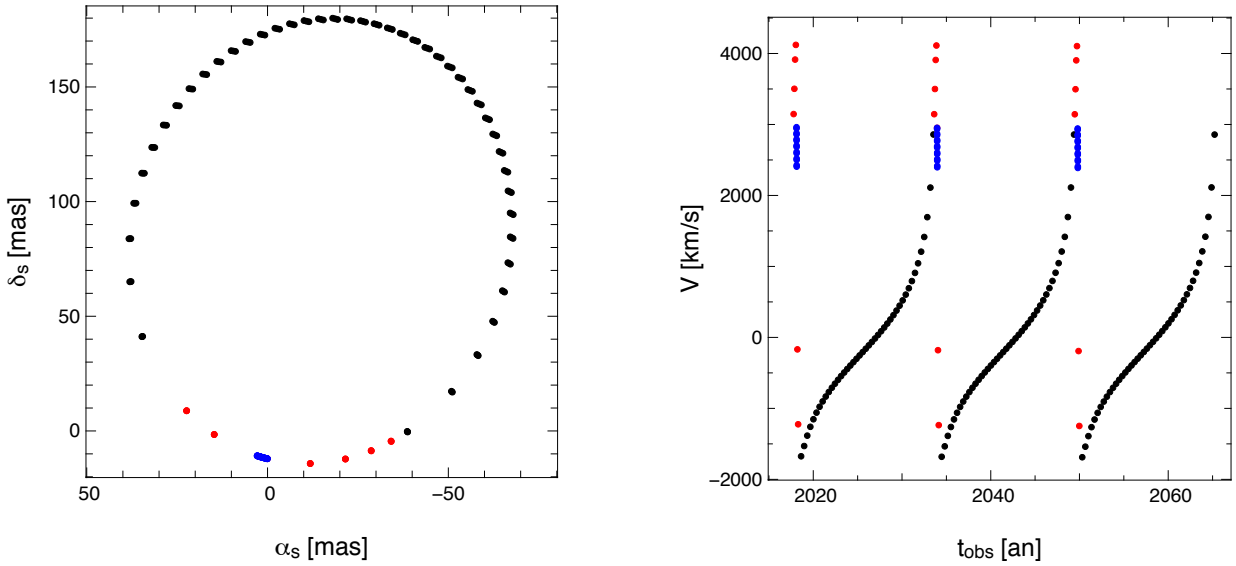

FIGURE 6.7 – Simulations des positions astrométriques et vitesses radiales de l'étoile S2 avec le modèle G et pour une durée d'observation d'environ 47 ans. À chaque période orbitale on effectue une semaine d'observation lors du passage au périastre de S2 (points bleus), 6 mois d'observation autour du passage au périastre (points rouges), et 14 ans d'observation sur le reste de l'orbite (points noirs).

Cet effet se mesure en comparant les positions apparentes des apoastre et périastre de l'étoile obtenues à la première période orbitale, aux positions obtenues à la période suivante. Dans le cas de S2, le décalage de la position apparente de l'apoastre de la première période à la seconde est d'environ 0,8 milliseconde d'angle, et celui de la première période à la troisième est d'environ 2 millisecondes d'angle. Concernant le périastre, celui-ci est décalé astrométriquement d'environ 50 microsecondes d'angle de la première période à la seconde, et d'environ 100 microsecondes d'angle de la première période à la troisième. L'effet d'avancée du périastre engendre donc un décalage astrométrique maximal à l'apoastre.

Dans le cadre de notre étude, nous estimons l'impact astrométrique de cet effet en comparant les observations obtenues avec les modèles C et D. En effet, la différence entre ces deux modèles correspond à l'avancée du périastre puisque celui-ci est présent dans le modèle D mais est négligé dans le modèle C (voir Table 6.1). Plus précisément, nous utilisons la formule $\Delta A_{\rm AP} = \sqrt{\Delta A_\alpha^2 + \Delta A_\delta^2}$ où $\Delta A_\alpha = \alpha_{\rm C} - \alpha_{\rm D}$ et $\Delta A_\delta = \delta_{\rm C} - \delta_{\rm D}$, avec ($\alpha_{\rm C}$,$\delta_{\rm C}$) et ($\alpha_{\rm D}$,$\delta_{\rm D}$) les positions apparentes simulées par les modèles C et D, respectivement.

L'impact astrométrique de l'avancée du périastre sur l'orbite apparente de S2 est visible Fig. 6.8. On constate que la différence entre les modèles C et D est maximale près du périastre de S2. Au premier passage au périastre, la différence entre ces deux modèles est faible car il s'agit des premiers points d'observations : les positions apparentes des deux modèles commencent à diverger une fois que les deux orbites ont évolué. Au cours de la première période de S2, l'amplitude maximale de l'avancée du périastre est donc atteinte près du second passage au périastre (dernier point magenta Fig. 6.8) et vaut

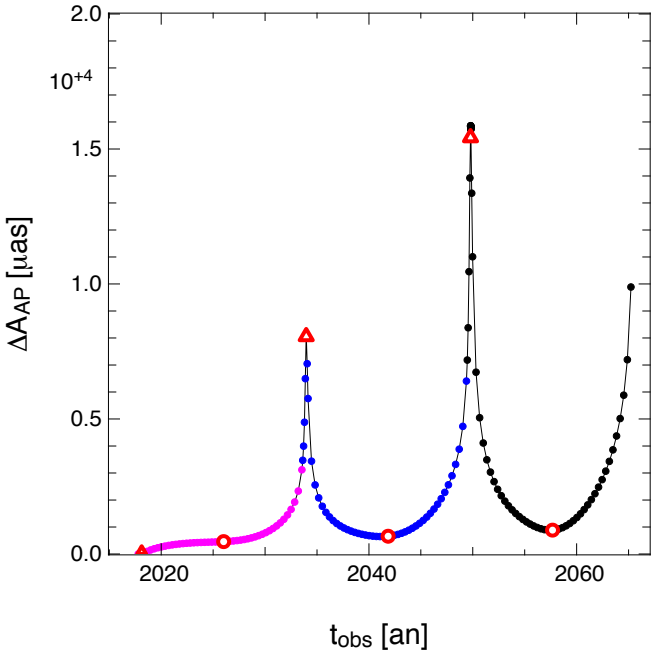

FIGURE 6.8 – Impact astrométrique de l'avancée du périastre sur l'étoile S2 observé sur 3 périodes orbitales. Les couleurs magenta, bleue et noire correspondent à la première, seconde et troisième période de S2, respectivement. Les cercles et triangles ouverts rouges représentent respectivement les passages à l'apoastre et au périastre.

environ 3 millisecondes d'angle. Aux seconde et troisième périodes, l'effet maximal est d'environ 8 millisecondes d'angle et 16 millisecondes d'angle, respectivement.

L'impact des autres effets sur les positions astrométriques de l'étoile S2 est présenté Fig. 6.9. On peut y voir les effets Roemer et Shapiro, ainsi que les effets de lentille gravitationnelle et Lense-Thirring. La formule utilisée pour évaluer l'influence de l'avancée du périastre est également appliquée pour estimer l'amplitude des autres effets, c'est-à-dire qu'on a $\Delta A_{\text{effets}} = \sqrt{\Delta A_\alpha^2 + \Delta A_\delta^2}$ où ΔA_α et ΔA_δ sont obtenus en utilisant d'autres combinaisons.

L'effet Roemer est évalué en calculant la différence entre les modèles A et B. On voit que cet effet a un impact important sur l'astrométrie qui peut atteindre environ 450 microsecondes d'angle. Précisons que cet effet n'est pas relativiste mais il est évidemment important de l'inclure dans les modèles d'orbites. C'est d'ailleurs ce qui a été fait pour traiter les données obtenues sur les étoiles S par Gillessen et al. (2009b).

À présent intéressons-nous au retard Shapiro. Pour isoler cet effet nous allons nous aider des modèles E et G. Si on se réfère à la Table 6.1, on constate que les différences entre ces deux modèles sont : le retard Shapiro, l'effet Lense-Thirring sur le photon et l'effet de lentille gravitationnelle. Comme nous le verrons ci-après, l'effet Lense-Thirring

sur le photon est très faible et peut être négligé. En revanche, afin de n'avoir que l'effet Shapiro il est nécessaire de supprimer des positions astrométriques simulées avec le modèle G, la contribution due à l'effet de lentille gravitationnelle. Précisons que nous ne comparons pas ici le modèle G au modèle F car les approximations analytiques de Sereno & de Luca (2006) considérées pour simuler l'effet de lentille dans le modèle F ne sont pas suffisamment précises pour mettre en évidence le retard Shapiro.

Afin d'éliminer l'effet de lentille présent dans le modèle G, nous choisissons simplement de considérer des photons émis depuis l'étoile qui évoluent jusqu'à l'observateur en ligne droite, tout en conservant un écart temporel $\Delta t = t_{\rm obs} - t_{\rm em}$ prenant en compte le retard Shapiro. Pour cela, il suffit de projeter dans le plan du ciel les coordonnées de l'étoile estimées à la date d'émission $t_{\rm em}$ obtenues grâce au protocole mis en place pour simuler les observations dans le modèle G (voir Sect. 6.1.2). En effet, ce procédé permet de converger vers un photon de l'image primaire et ainsi de remonter aux coordonnées de l'étoile à une date d'émission prenant en compte le délai temporel induit par la courbure d'espace-temps.

Les nouvelles positions astrométriques ainsi obtenues sont donc affectées de l'ensemble des effets excepté l'effet de lentille gravitationnelle. On peut alors remonter à l'impact astrométrique du retard Shapiro en comparant les observations obtenues avec le modèle E et le modèle G modifié. On a donc : $\Delta A_{\alpha(\delta)} = \alpha(\delta)_{\rm E} - \alpha(\delta)_{\rm G,LG=0}$ où LG = 0 signifie que l'on a retiré l'effet de lentille du modèle G.

Si on revient à la Fig. 6.9, on constate que le retard Shapiro a un impact toujours inférieur à la précision astrométrique de l'instrument *GRAVITY*. Cependant, son amplitude maximale est atteinte aux environs de 8 microsecondes d'angle près du périastre, ce qui est de l'ordre de cette dernière. À l'apoastre celle-ci est en dessous de 2 microsecondes d'angle.

L'effet de lentille gravitationnelle est évalué en considérant uniquement le modèle G et en comparant les positions astrométriques obtenues avec et sans cet effet. Ces dernières sont obtenues en utilisant la même méthode que précédemment, on a donc : $\Delta A_{\alpha(\delta)} = \alpha(\delta)_{\rm G} - \alpha(\delta)_{\rm G,LG=0}$.

L'amplitude maximale de ces effets est atteinte encore une fois près du périastre et vaut environ 20 microsecondes d'angle, c'est donc supérieur à la précision astrométrique de *GRAVITY*. En revanche, ces effets restent très faibles la plupart du temps et sont presque toujours aux environs de 2 microsecondes d'angle.

Enfin, l'effet Lense-Thirring est estimé en utilisant le modèle G et en comparant les positions astrométriques obtenues avec des moments cinétiques adimensionnés de 0,99 et de 0. Rappelons que la direction du moment cinétique considérée ici est $i' = 45°$ et $\Omega' = 160°$. Nous la ferons varier au prochain chapitre dans une étude dédiée à l'effet Lense-Thirring.

Le graphique visible en bas à droite Fig. 6.9 prend en compte à la fois les effets du moment cinétique adimensionné sur les trajectoires de l'étoile et du photon. Néanmoins, comme mentionné précédemment ce dernier effet est négligeable. Pour le prouver, nous avons évalué son impact sur le retard Shapiro ainsi que sur l'effet de lentille. Nous trouvons que le moment cinétique adimensionné modifie l'impact de ces deux effets sur l'astrométrie

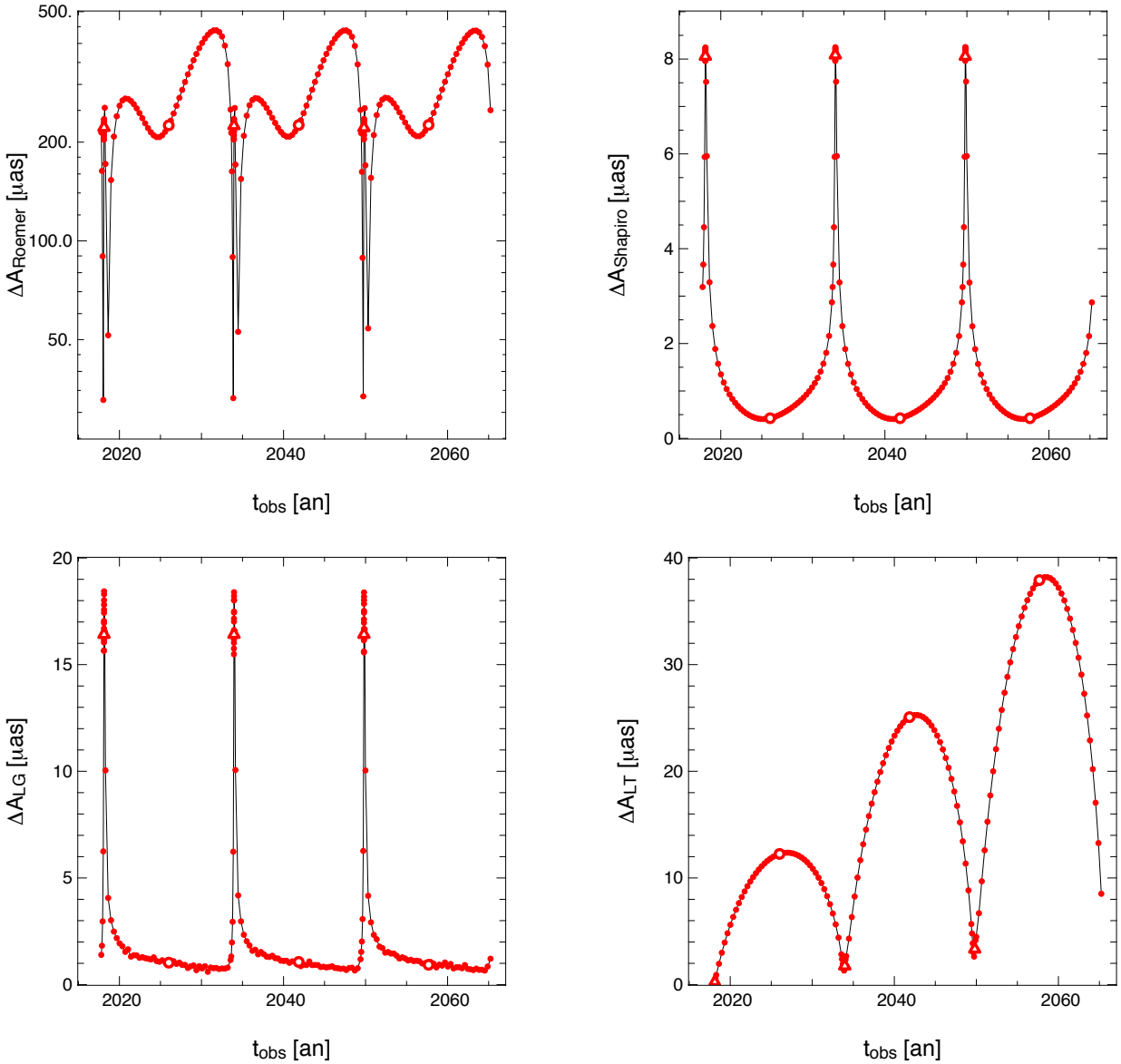

FIGURE 6.9 – Impacts de différents effets sur les mesures de positions astrométriques de l'étoile S2, observés sur 3 périodes orbitales. Les cercles et triangles ouverts rouges représentent respectivement les passages à l'apoastre et au périastre. Les acronymes LG et LT correspondent aux effets de Lentille Gravitationnelle et Lense-Thirring, respectivement.

de S2 avec un maximum de l'ordre de 0,1 microseconde d'angle. On peut alors affirmer que l'effet Lense-Thirring sur le photon est négligeable. La courbe associée à cet effet Fig. 6.9 est donc essentiellement due à l'effet Lense-Thirring sur l'étoile.

Contrairement aux autres effets présentés sur cette figure, l'impact du moment cinétique adimensionné augmente avec le nombre de tours effectués par S2, tout comme pour l'avancée du périastre. Les amplitudes maximales atteintes à la première, seconde et

Effets	$1^{\text{ère}}$ période	$2^{\text{ème}}$ période	$3^{\text{ème}}$ période
Avancée du périastre	3000 (Pe)	8000 (Pe)	16000 (Pe)
Retard Shapiro	8 (Pe)	8 (Pe)	8 (Pe)
Lentille gravivationnelle	20 (Pe)	20 (Pe)	20 (Pe)
Lense-Thirring sur l'étoile	12 (Ap)	25 (Ap)	40 (Ap)
Lense-Thirring sur le photon	$\ll 1$	$\ll 1$	$\ll 1$

Table 6.2 – Impacts astrométriques maximaux, en microsecondes d'angle, des différents effets affectant l'orbite de l'étoile S2. On donne ici les amplitudes maximales atteintes au bout de la première, seconde et troisième période de S2. On rappelle que les paramètres utilisés pour obtenir ces valeurs sont donnés au début de la section. On a notamment considéré pour le moment cinétique du trou noir : $\bar{a} = 0{,}99$, $i' = 45°$ et $\Omega' = 160°$. Lorsque les impacts maximaux sont observés à proximité du périastre ou de l'apoastre, nous le mentionnons respectivement par (Pe) ou (Ap). Si ce n'est pas précisé cela signifie que l'amplitude de l'effet en question est la même pour l'ensemble des dates d'observation.

troisième période sont d'environ 12, 25 et 40 microsecondes d'angle, respectivement. De plus, on remarque que celles-ci sont atteintes non pas à proximité du périastre de S2 mais près de son apoastre, les amplitudes aux périastres étant toutes inférieures à 5 microsecondes d'angle. Ainsi, si l'on souhaite contraindre le moment cinétique adimensionné du candidat trou noir situé au centre de notre galaxie, nous devrons également observer S2 à son apoastre.

Une étude plus détaillée sur l'effet Lense-Thirring sera menée au chapitre suivant, où nous considérerons différentes directions pour l'axe de rotation du trou noir. Cela permettra de confirmer ou non le fait que l'effet Lense-Thirring est maximal uniquement à l'apoastre de S2, mais aussi s'il existe des directions pour lesquelles cet effet est plus faible que ce qui est obtenu ici. Nous souhaitons également préciser que la courbe obtenue Fig. 6.9 est similaire à celle présentée dans l'article de Zhang et al. (2015), où les auteurs considèrent, à quelques chiffres significatifs près, les mêmes paramètres du modèle que nous.

Afin de résumer cette section, nous avons reporté Table 6.2 l'ensemble des amplitudes maximales des différents effets affectant les observations astrométriques de l'étoile S2.

6.2.2 Effets affectant la spectroscopie

À présent intéressons-nous à l'impact des différents effets affectant les mesures de vitesses radiales de l'étoile S2. Les effets discutés dans cette nouvelle section seront à nouveau l'avancée du périastre, les effets Roemer et Lense-Thirring, mais aussi les décalages Doppler transverse et gravitationnel. L'impact cumulé des différents effets de courbure d'ordre élevé affectant la trajectoire du photon sera également discuté. Ceux-ci

correspondent notamment à l'effet Lense-Thirring sur le photon ou encore le retard Shapiro.

Tout comme l'astrométrie, les mesures de vitesses radiales sont également modifiées par l'avancée du périastre de S2. Pour estimer cet effet on peut comparer les vitesses radiales des apoastre et périastre obtenues à la première période, avec celles estimées aux périodes suivantes. On trouve que le décalage spectroscopique à l'apoastre est d'environ 1 km/s de la première à la seconde période et d'environ 2 km/s de la première à la troisième période. Au périastre, celui-ci atteint environ 17 km/s de la première à la seconde période et environ 35 km/s de la première à la troisième période. Contrairement à l'astrométrie, le décalage spectroscopique induit par cet effet est maximal près des passages aux périastres.

Comme effectué pour l'astrométrie, nous choisissons également d'évaluer l'impact de l'avancée du périastre en comparant les observations obtenues avec les modèles C et D. En particulier, nous utilisons la formule $\Delta V_{\mathrm{AP}} = V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{D}}$ où V_{C} et V_{D} sont les vitesses radiales de S2 simulées par les modèles C et D, respectivement.

L'impact obtenu est visible Fig. 6.10. On constate que celui-ci est maximal près du périastre de S2. De manière similaire à l'astrométrie, l'impact spectroscopique à la première période a lieu à proximité du second passage au périastre (dernier point magenta Fig. 6.10) et vaut approximativement 140 km/s. Aux seconde et troisième périodes, la différence maximale entre les deux modèles est d'environ 1520 km/s et 2800 km/s, respectivement.

L'amplitude des autres effets affectant les mesures de vitesses radiales de l'étoile S2 est présentée Fig. 6.11.

La courbe située en haut à gauche correspond à l'effet Roemer. Elle est obtenue en calculant la différence en vitesses radiales entre les modèles A et B. On voit que cet effet atteint une amplitude maximale de l'ordre de 50 km/s à proximité du périastre de S2.

La courbe située en haut à droite correspond à l'impact des effets de courbure d'ordre élevé affectant la trajectoire du photon. Pour obtenir cette courbe nous calculons la différence entre les modèles E et G.

L'amplitude maximale obtenue est située à proximité du périastre de S2 et vaut environ 5 km/s. Nous verrons ci-après que l'impact de l'effet Lense-Thirring sur le photon peut encore une fois être négligé. La courbe obtenue Fig. 6.11 est donc principalement liée à l'effet Shapiro et au fait que l'on considère une formule approchée pour estimer la vitesse radiale (voir Eq. (6.31)).

L'impact cumulé des effets de décalages Doppler transverse et gravitationnel est présenté en bas à gauche Fig. 6.11. Celui-ci est obtenu en calculant la différence entre les vitesses radiales mesurées avec le modèle E et celles évaluées en considérant des décalages Doppler transverse et gravitationnel nuls dans ce même modèle.

L'amplitude maximale obtenue est d'environ 200 km/s et a lieu près du périastre. Les deux décalages spectraux considérés ici ont chacun un effet maximal de 100 km/s. À

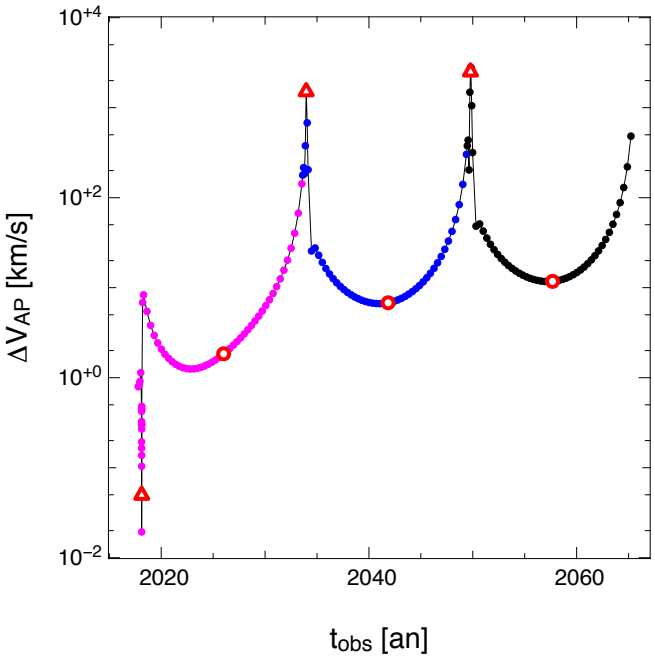

Figure 6.10 – Légende similaire à la Fig. 6.8 mais pour les mesures spectroscopiques.

l'apoastre, l'amplitude maximale cumulée vaut environ 10 km/s.

Enfin, la dernière courbe présentée Fig. 6.11 correspond à l'effet Lense-Thirring sur l'étoile. Cette courbe prend également en compte l'effet dû à la rotation du trou noir sur la trajectoire du photon mais est négligeable. En effet, son amplitude maximale est d'environ 10^{-2} km/s. Pour l'estimer nous avons déterminé l'influence du moment cinétique adimensionné du trou noir sur les effets de courbure d'ordre élevé affectant la trajectoire du photon.

L'obtention de cette courbe est effectuée en considérant le modèle E et en calculant les différences entre les vitesses radiales obtenues pour $\bar{a} = 0{,}99$ et $\bar{a} = 0$. On remarque que l'effet est très faible et est toujours plus petit que 1 km/s. Contrairement à l'astrométrie, cet effet est maximal à proximité du périastre de S2. On rappelle qu'une étude plus détaillée sur cet effet sera menée dans le chapitre suivant.

Étant donné le faible impact de cet effet sur la spectroscopie, il est primordial de disposer de données astrométriques si l'on souhaite contraindre le moment cinétique adimensionné au moyen de l'orbite de l'étoile S2.

Mentionnons que les résultats obtenus sur l'effet Lense-Thirring affectant les trajectoires de l'étoile et du photon sont en accord avec ceux de Angélil & Saha (2010) et Zhang et al. (2015).

Comme pour l'astrométrie, nous avons choisi de regrouper Table 6.3 l'ensemble des décalages spectroscopiques maximaux engendrés par chaque effet sur l'orbite de l'étoile S2.

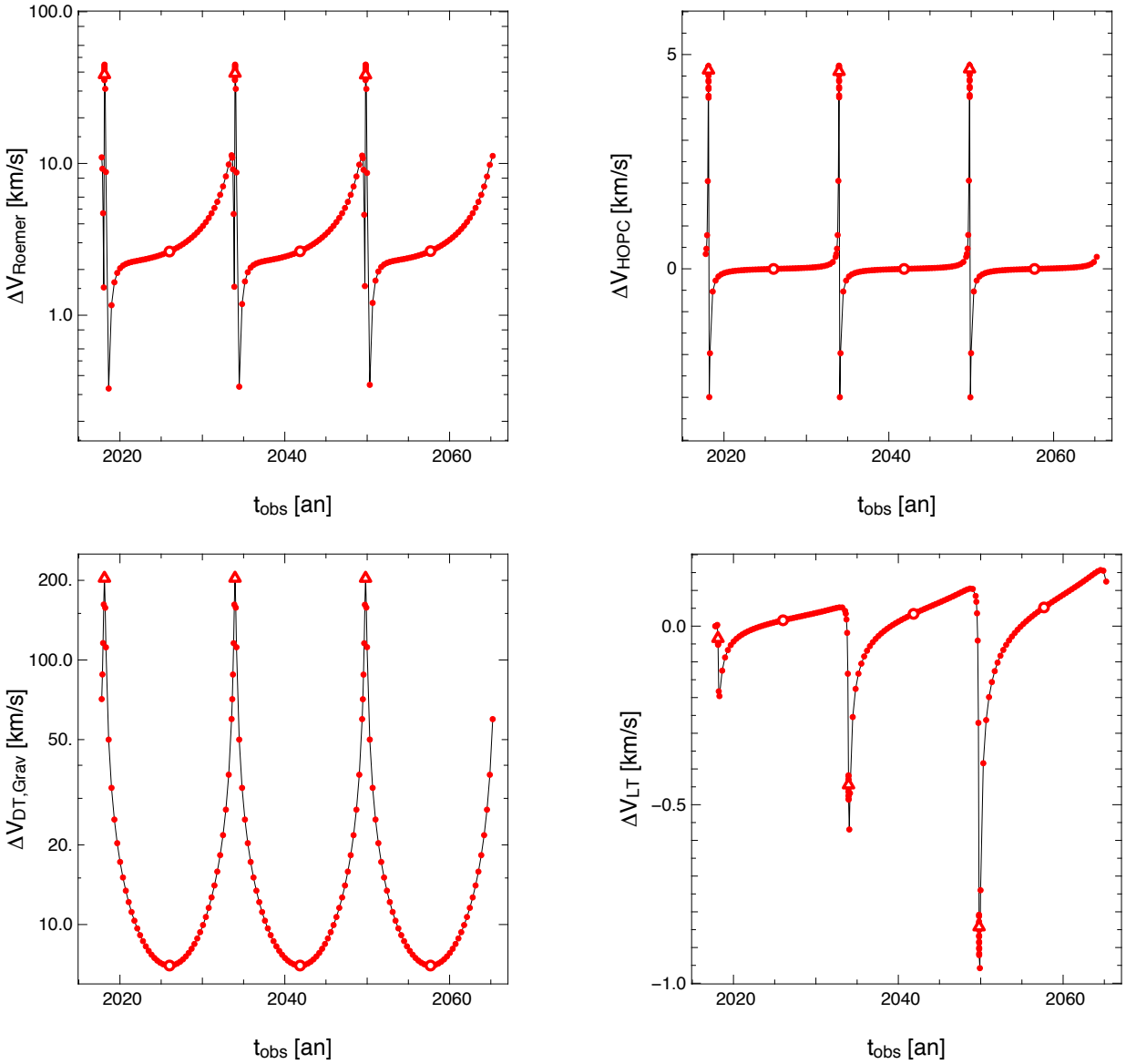

FIGURE 6.11 – Impacts des différents effets sur les mesures de vitesses radiales de l'étoile S2, observés sur 3 périodes orbitales. Les cercles et triangles ouverts rouges représentent respectivement les passages à l'apoastre et au périastre. L'acronyme *HOPC* (pour *High Order Photon Curvature*) fait référence aux erreurs induites sur les mesures de vitesses radiales lorsque l'on néglige les effets de courbure sur le photon d'ordre élevé. L'acronyme DT correspond au décalage Doppler transverse, et l'abréviation Grav fait référence au décalage gravitationnel.

6.3 Comparaison des modèles A à F au modèle G

Nous souhaitons ici reporter les différences astrométriques et spectroscopiques maximales entre les modèles A à F et le modèle G, obtenues en considérant les première,

Effets	1ère période	2ème période	3ème période
Avancée du périastre	140 (Pe)	1520 (Pe)	2800 (Pe)
HOPC	5 (Pe)	5 (Pe)	5 (Pe)
Décalages DT et Grav	200 (Pe)	200 (Pe)	200 (Pe)
Lense-Thirring sur l'étoile	0,2 (Pe)	0,5 (Pe)	0,9 (Pe)
Lense-Thirring sur le photon	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}

Table 6.3 – Impacts spectroscopiques maximaux, en km/s, des différents effets affectant l'orbite de l'étoile S2. On donne ici les amplitudes maximales atteintes au bout de la première, seconde et troisième période de S2. Les acronymes et abréviations utilisés sont les mêmes que Table 6.2 et Fig. 6.11.

Modèles	1ère période	2ème période	3ème période
A	3 mas 250 km/s	8 mas 1760 km/s	16 mas 3010 km/s
B	3 mas 210 km/s	8 mas 1700 km/s	16 mas 2980 km/s
C	3 mas 140 km/s	8 mas 1520 km/s	16 mas 2800 km/s
D	20 μas 5 km/s	25 μas 5 km/s	40 μas 5 km/s
E	20 μas 5 km/s	20 μas 5 km/s	20 μas 5 km/s
F	7 μas 5 km/s	7 μas 5 km/s	7 μas 5 km/s

Table 6.4 – Différences maximales entre les modèles A à F et le modèle G, dans le cas de l'étoile S2 et pour plusieurs périodes orbitales.

seconde et troisième périodes de l'étoile S2. Les différents résultats sont reportés Table 6.4.

Les différences astrométriques entre les modèles képlériens A, B, et C, et le modèle G sont toutes dominées par l'absence de l'avancée du périastre et atteignent plusieurs millisecondes d'angle pour les trois périodes considérées.

Les différences en vitesses radiales sont également principalement dominées par l'absence de l'avancée du périastre. Cependant, on remarque des variations non

négligeables entre chaque modèle, qui sont expliquées par le fait que les modèles A, B et C prennent en compte chacun un nombre différent d'effets.

La différence astrométrique entre les modèles D et G est dominée, à la première période de S2, par l'absence de l'effet de lentille gravitationnelle. Aux seconde et troisième périodes, celle-ci est dominée par l'absence de l'effet Lense-Thirring sur l'étoile. Pour ce qui est du modèle E, la différence astrométrique maximale est uniquement due au fait que l'on y néglige l'effet de lentille. Enfin, pour le modèle F le décalage astrométrique est induit par le fait que l'effet de lentille n'est pas complètement reproduit par les approximations analytiques de Sereno & de Luca (2006).

Les vitesses radiales des modèles D à F sont décalées de celles obtenues avec le modèle G d'environ 5 km/s. Ce décalage est dû aux effets de courbure d'ordre élevé affectant la trajectoire du photon.

6.4 Conclusion du chapitre

En conclusion de ce chapitre, nous souhaitons simplement reporter Table 6.5 l'ensemble des impacts astrométriques et spectroscopiques induits par les différents effets observés aux trois différents passages aux périastre et apoastre de l'étoile S2.

Étant donné la précision astrométrique de *GRAVITY* de 10 microsecondes d'angle, on s'attend à ce que cet instrument soit en mesure de détecter la plupart de ces effets grâce à l'observation d'orbites d'étoiles situées à proximité de la source compacte Sgr A*, telle que S2. Ces détections permettront d'effectuer des tests plus fins de la relativité générale en champ gravitationnel fort et donc de potentiellement arriver à une contrainte des caractéristiques de l'objet compact central.

	Périastre		Apoastre	
Effets	Astro. [μas]	Spectro. [km/s]	Astro. [μas]	Spectro. [km/s]
Roemer	220	40	220	3
Décalages DT et Grav	/	200	/	7
Avancée du périastre	7 (P1) 8000 (P2) 15000 (P3)	0,05 (P1) 1510 (P2) 2510 (P3)	500 (P1) 700 (P2) 880 (P3)	2 (P1) 7 (P2) 12 (P3)
LG	16	/	1	/
LT	0,2 (P1) 1,5 (P2) 2,7 (P3)	0,05 (P1) 0,4 (P2) 0,7 (P3)	15 (P1) 25 (P2) 40 (P3)	0,02 (P1) 0,03 (P2) 0,05 (P3)
HOPC	/	5	/	0,003

Table 6.5 – Impacts astrométriques et spectroscopiques des différents effets, évalués au périastre et à l'apoastre de S2, et pour chacune des trois périodes orbitales considérées : entre 2018 et 2034 (P1), entre 2034 et 2050 (P2), et entre 2050 et 2066 (P3). Lorsque (P1), (P2) et (P3) ne sont pas mentionnés cela signifie que l'effet en question est identique pour les trois périodes. Les acronymes et abréviation utilisés sont les mêmes que ceux Figs. 6.9 et 6.11.

Chapitre 7

Contraindre des effets relativistes avec l'étoile S2 et *GRAVITY*

Sommaire

7.1 Quelques rappels d'études menées au Centre Galactique . . . 161
7.2 Vers des contraintes d'effets relativistes 163
7.2.1 Méthodes 163
7.2.2 Résultats 173
7.3 Contrainte du moment cinétique du candidat trou noir central avec S2 179
7.3.1 Impact du moment cinétique sur l'astrométrie et la spectroscopie 180
7.3.2 Méthode et résultats 186
7.4 Conclusions du chapitre 193

7.1 Quelques rappels d'études menées au Centre Galactique

Ce chapitre s'intéresse à la possibilité de contraindre les différents effets discutés précédemment, à l'aide d'observations de l'étoile S2. Plus précisément, notre objectif est de donner une estimation des temps minimaux d'observation nécessaires pour détecter ces effets à des précisions astrométriques et spectroscopiques données. Nous nous intéresserons également à la possibilité de contraindre le moment cinétique (norme et direction) du candidat trou noir situé au centre de notre galaxie, en considérant des mesures de l'étoile S2 obtenues avec l'instrument *GRAVITY*.

Divers travaux théoriques ont déjà été effectués afin de déterminer s'il sera possible de détecter des effets relativistes grâce à l'étude du mouvement des étoiles situées aux environs de la source Sgr A*. Plusieurs auteurs ont notamment montré qu'il sera possible

de mettre en évidence des effets relativistes de bas ordres, tels que l'avancée du périastre ou les décalages Doppler transverse et gravitationnel, en utilisant des mesures astrométriques et/ou spectroscopiques (Jaroszynski 1998; Fragile & Mathews 2000; Weinberg et al. 2005; Zucker et al. 2006).

En particulier, Jaroszynski (1998) a montré qu'il sera facile de rejeter un modèle négligeant l'effet d'avancée du périastre si on considère des mesures astrométriques obtenues sur des étoiles dont le demi-grand axe peut aller jusqu'à environ 2 milliparsecs (celui de l'étoile S2 est de 5 milliparsecs), et si l'incertitude sur les données est inférieure ou égale à environ 0,1 milliseconde d'angle. Dans le cas où l'on considère une précision d'environ 20 microsecondes d'angle, il sera possible de détecter cet effet en considérant cette fois-ci des étoiles dont le demi-grand axe peut aller jusqu'à 5 milliparsecs.

Par ailleurs, Zucker et al. (2006) ont montré que l'on pouvait détecter le décalage Doppler transverse ainsi que le décalage gravitationnel au bout de 10 ans d'observation. Ce résultat a été estimé en considérant des observations astrométriques et spectroscopiques obtenues sur onze étoiles S, dont l'étoile S2, et des précisions de 1,5 millisecondes d'angle et 25 km/s.

D'autres études ont également été effectuées en vue de contraindre des effets relativistes de haut ordre tels que l'effet Lense-Thirring ou le moment quadrupolaire du trou noir (Will 2008; Kannan & Saha 2009; Angélil et al. 2010; Angélil & Saha 2010).

Plus précisément, Will (2008) a démontré qu'il sera possible d'arriver à une contrainte du moment quadrupolaire du candidat trou noir central si l'on observe les positions astrométriques d'au moins deux étoiles d'excentricité élevée ($\sim$ 0,9) et de courte période de rotation ($\sim$ 0,1 an).

Angélil et al. (2010) ont estimé quant à eux les précisions spectroscopiques nécessaires pour mettre en avant divers effets relativistes avec des mesures de vitesses radiales obtenues pendant une période de l'étoile S2. Par exemple, ces auteurs montrent qu'il sera nécessaire d'avoir une précision d'environ 10 m/s si l'on souhaite contraindre l'effet Lense-Thirring en une seule période, ou encore une précision de 50 cm/s si l'on souhaite contraindre le moment quadrupolaire. Les observations de l'étoile S2 ont été obtenues dans cet article en considérant 200 points répartis en grande majorité au passage au périastre de l'étoile.

Des études plus récentes ont également montré qu'il sera possible de contraindre le moment cinétique adimensionné du candidat trou noir central en considérant des mesures astrométriques et spectroscopiques obtenues sur l'étoile S2 ou d'autres étoiles plus proches (Zhang et al. 2015; Yu et al. 2016). Nous discuterons plus en détail de ces travaux dans la section consacrée à la contrainte du moment cinétique (norme et direction) avec l'étoile S2. Nous verrons notamment en quoi notre étude est différente de celles menées par ces auteurs.

Enfin, des travaux sur les effets de lentilles gravitationnelles ont également été effectués par Bozza & Mancini (2012) et ont montré que ceux-ci auront un impact suffisamment important sur les étoiles S pour être détectés par l'instrument *GRAVITY*, notamment avec l'étoile S17 pour laquelle les effets de lentilles induisent un décalage astrométrique d'environ 30 microsecondes d'angle en 2018. D'autres part, les études menées par Bozza

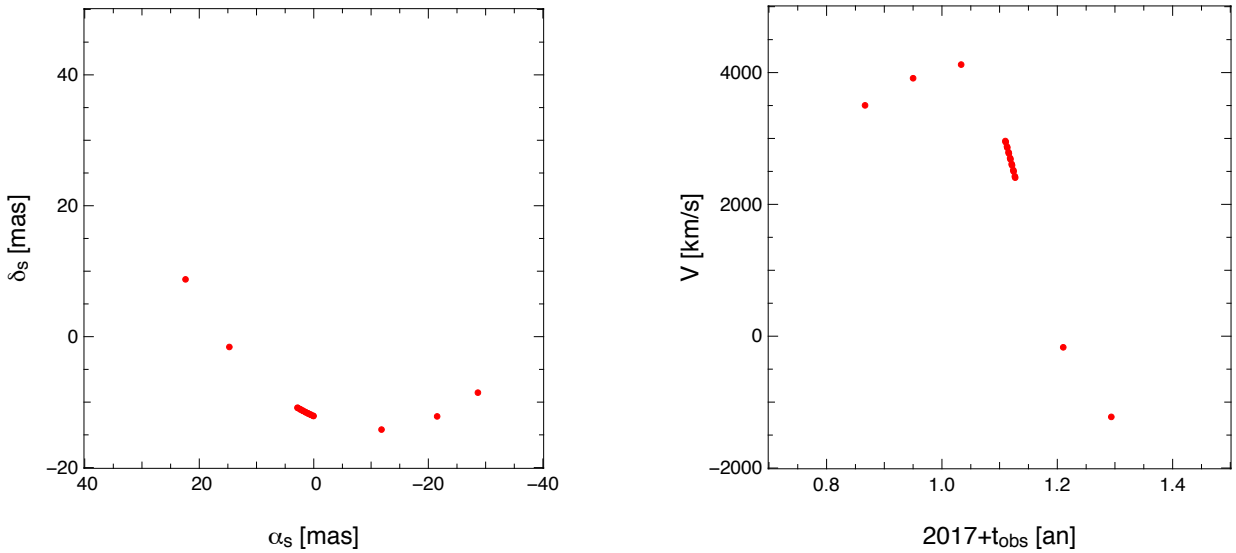

FIGURE 7.1 – Simulations des positions astrométriques et vitesses radiales de l'étoiles S2 avec le modèle G, et pour une durée d'observation d'environ 6 mois. Ces mesures sont extraites de la série d'observations obtenue sur 47 ans.

& Mancini (2004, 2005, 2012) et Jørgensen et al. (2016) ont mis en évidence le fait que le moment cinétique adimensionné du candidat trou noir central pourra être contraint à l'aide des effets de lentilles observés sur certaines étoiles S, et cela grâce à l'amplification lumineuse et à la position astrométrique de l'image secondaire. Néanmoins, ces déviations restent très faibles et nécessitent de mettre au point des instruments très précis : le décalage astrométrique obtenu n'atteint que quelques microsecondes d'angle et la magnitude en bande K des images secondaires des étoiles S est inférieure à 20.

L'objectif de ce chapitre est d'approfondir les études déjà effectuées sur la détection d'effets relativistes au Centre Galactique, en considérant des observations astrométriques et spectroscopiques obtenues sur l'étoile S2, ainsi que plusieurs couples de précisions (σ_a,σ_V), où σ_a et σ_V correspondent aux précisions astrométrique et spectroscopique, respectivement.

7.2 Vers des contraintes d'effets relativistes

7.2.1 Méthodes

Nous souhaitons expliquer ici quelles sont les méthodes mises en place afin d'estimer les temps minimaux d'observation au bout desquels il sera possible de détecter un effet qui affecte les mesures de l'étoile S2.

Tout d'abord, nous choisissons de définir plusieurs séries d'observations possédant chacune une durée différente. Pour cela, nous faisons des sous-échantillons des observations

Astrométrie	Spectroscopie
NACO au *VLT* : ~ 300 μas	*NIRSPEC* au Keck : ~ 10 km/s
GRAVITY au *VLT* : ~ 10 μas	*GRAVITY* au *VLT* : $\gtrsim 100$ km/s
MICADO à l'*E-ELT* : $50 - 100$ μas	*MICADO* à l'*E-ELT* : ~ 1 km/s
TMT : ~ 100 μas	*SINFONI* au *VLT* : ~ 10 km/s
GMT : ~ 100 μas	

Table 7.1 – Précisions astrométriques et spectroscopiques de quelques instruments actuels et futurs, capables d'observer dans le proche infrarouge. Les instruments *NACO*, *GRAVITY*, *NIRSPEC* et *SINFONI* sont déjà en service. Les autres instruments sont prévus pour $2020 - 2025$. Les acronymes *TMT* et *GMT* correspondent aux *Thirty Meter Telescope* et *Giant Magellan Telescope*, respectivement. Sources : Weinberg et al. (2005), Gillessen et al. (2009a), Genzel et al. (2010), Eisenhauer et al. (2011).

astrométriques et spectroscopiques simulées Sect. 6.2 (voir Fig. 6.7). On rappelle que celles-ci ont été obtenues à la fois en utilisant le modèle G tenant compte des trajectoires relativistes du photon et de l'étoile, et en considérant un temps total d'observation égal à trois périodes de S2, soit environ 47 ans. Chaque série commence aux environs de 2018 et leur durée d'observation s'étend d'environ un mois à 47 ans. On pourra d'ailleurs voir par exemple Fig. 7.1 où est représentée la série de 6 mois.

Ces différentes observations astrométriques et spectroscopiques sont ensuite entachées d'une erreur aléatoire de distribution gaussienne et dont l'écart-type est pris égal à 10, 30, 50 ou 100 microsecondes d'angle pour les mesures de positions apparentes de l'étoile, et à 1, 10 ou 100 km/s pour les vitesses radiales. Notons que les précisions considérées ici pourront être atteintes par divers instruments (voir Table 7.1).

Afin de déterminer les temps minimaux d'observation nécessaires pour détecter les différents effets à des précisions astrométriques et spectroscopiques données, nous utilisons également les autres modèles définis au chapitre précédent (voir Sect. 6.1). Le but est d'ajuster ces modèles aux données simulées avec le modèle G, et de déterminer au bout de combien de temps chaque modèle échoue à décrire les observations.

Dans les sections qui suivent nous allons décrire les méthodes utilisées afin d'estimer ces temps minimaux d'observation avec les différents modèles. Précisons toutefois que les méthodes d'ajustement employées pour les modèles képlériens et relativistes seront différentes. Nous verrons plus en détail pourquoi ci-dessous.

Modèles A, B et C

La procédure utilisée pour ajuster les modèles képlériens aux données simulées est celle de Levenberg-Marquardt basée sur la méthode des moindres carrés (Levenberg 1944). Cette dernière permet de comparer des observations bruitées à des données générées via un modèle mathématique censé les décrire. L'objectif de cette méthode est de déterminer les

paramètres optimaux, dont le modèle mathématique dépend, permettant de reproduire au mieux les données observées. Pour cela, on utilise la quantité χ^2 (que l'on prononce « chi 2 ») qui dépend à la fois des observations bruitées et du modèle.

Si on considère N points d'observations notés y_i, avec i variant de 1 à N, entachés d'une erreur de distribution gaussienne dont l'écart-type est σ_i, et un modèle théorique décrit par une fonction $f(x_i,\mathbf{P})$ dépendant d'une variable x_i (correspondant aux dates d'observation dans notre cas) et d'un vecteur constitué de plusieurs paramètres noté $\mathbf{P}$, la quantité χ^2 est donnée par :

$$\chi^2(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - f(x_i,\mathbf{P})}{\sigma_i} \right)^2 . \tag{7.1}$$

La méthode des moindres carrés consiste à minimiser cette quantité et donc à déterminer les paramètres $\mathbf{P}$ les plus appropriés pour reproduire les N points d'observations y_i.

L'algorithme permettant de minimiser le χ^2 est, comme nous l'avons déjà mentionné, celui de Levenberg-Marquardt. Ce dernier utilise une approche itérative pour résoudre des problèmes à la fois linéaires et non-linéaires, c'est-à-dire dépendant linéairement ou non des paramètres constituant le vecteur $\mathbf{P}$. Plus précisément, cette méthode est la combinaison de deux autres méthodes de minimisation correspondant à celle du gradient et à celle de Gauss-Newton. On pourra d'ailleurs trouver une définition de ces dernières dans Björck (1996).

Expliquons à présent brièvement en quoi consiste la méthode de Levenberg-Marquardt. Dans un premier temps, nous fournissons un vecteur $\mathbf{P}$ initial composé des divers paramètres du problème. Puis, à chaque itération le vecteur $\mathbf{P}$ est remplacé par un autre vecteur égal à $\mathbf{P} = \mathbf{P} + \mathbf{h}$ où $\mathbf{h}$ correspond à une faible variation. Le pas $\mathbf{h}$ est déterminé en approchant la fonction $f(x_i,\mathbf{P}+\mathbf{h})$ par un développement de Taylor au premier ordre :

$$f(x_i,\mathbf{P}+\mathbf{h}) \approx f(x_i,\mathbf{P}) + J_i\mathbf{h} \tag{7.2}$$

où J_i est le gradient de la fonction f par rapport à $\mathbf{P}$ et s'écrit :

$$J_i = \frac{\partial f(x_i,\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}}. \tag{7.3}$$

Aux paramètres $\mathbf{P}+\mathbf{h}$, on a l'équation (7.1) qui devient :

$$\chi^2(\mathbf{P}+\mathbf{h}) \approx \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - f(x_i,\mathbf{P}) - J_i\mathbf{h}}{\sigma_i} \right)^2 . \tag{7.4}$$

En notation vectorielle, cela donne :

$$\chi^2(\mathbf{P}+\mathbf{h}) \approx \mathbf{W}||\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{P}) - \mathbf{J}\mathbf{h}||^2 \tag{7.5}$$

où $\mathbf{J}$ est la matrice Jacobienne et $\mathbf{W}$ est la matrice de pondération diagonale dont les composantes sont données par $W_{ii} = 1/\sigma_i^2$, en supposant les observations indépendantes.

À présent il est possible de remonter au pas $\mathbf{h}$ en minimisant la quantité $\chi^2(\mathbf{P}+\mathbf{h})$. Pour cela, il suffit de résoudre l'équation :

$$\frac{\partial \chi^2(\mathbf{P}+\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = 0, \tag{7.6}$$

qui après développement donne :

$$(\mathbf{J^T W J})\mathbf{h} = \mathbf{J^T W}[\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{P})]. \tag{7.7}$$

Cette équation correspond en fait à celle utilisée par la méthode de Gauss-Newton. La contribution de Levenberg a été d'ajouter un terme d'amortissement noté λ dans cette équation, tel que :

$$(\mathbf{J^T W J} + \lambda \mathbf{I})\mathbf{h} = \mathbf{J^T W}[\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{P})], \tag{7.8}$$

avec I la matrice identité. Ce facteur d'amortissement est ajusté à chaque itération. En effet, dans le cas où la quantité $\chi^2(\mathbf{P}+\mathbf{h})$ diminue rapidement, une plus petite valeur est attribuée à λ, on se rapproche alors de la méthode de Gauss-Newton. Si en revanche celle-ci diminue trop lentement, le facteur λ est pris plus grand et on se rapproche dans ce cas de la méthode du gradient. Le pas, dans cette dernière, est évalué par $\mathbf{h} = \alpha_g \mathbf{J^T W}[\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{P})]$ où α_g est un scalaire positif.

Néanmoins, il est possible d'avoir des temps de convergence qui restent importants même si l'on ajuste la valeur du paramètre λ. Pour pallier ce problème Marquardt a introduit une modification dans l'équation (7.8) donnée par :

$$\left[\mathbf{J^T W J} + \lambda \operatorname{diag}(\mathbf{J^T W J})\right]\mathbf{h} = \mathbf{J^T W}[\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{P})]. \tag{7.9}$$

Il a donc remplacé la matrice identité par une matrice diagonale dont les composantes sont les éléments diagonaux de $\mathbf{J^T W J}$, ce qui permet de modifier le paramètre d'amortissement selon le gradient J_i obtenu.

Revenons maintenant à notre problème, les paramètres composant le vecteur $\mathbf{P}$ initial utilisé dans la méthode de Levenberg-Marquardt correspondent aux paramètres définissant les modèles A, B et C. Ceux-ci sont pris égaux aux paramètres estimés par Gillessen et al. (2009b), augmentés de leur erreur à 1σ également obtenue par ces auteurs. On a donc : $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{Gillessen}} + 1\boldsymbol{\sigma}_{\text{Gillessen}}$, les valeurs composant le vecteur $\mathbf{P}_{\text{Gillessen}}$ sont données au début Sect. 6.2, le vecteur $1\boldsymbol{\sigma}_{\text{Gillessen}}$ est, lui, composé des valeurs suivantes : $\sigma_T = 0{,}11$ an, $\sigma_{a_{\text{dga}}} = 0{,}001''$, $\sigma_e = 0{,}003$, $\sigma_{t_p} = 0{,}01$ an, $\sigma_\Omega = 0{,}84°$, $\sigma_\omega = 0{,}84°$, $\sigma_i = 0{,}47°$ et $\sigma_{R_0} = 0{,}48$ kpc.

D'autre part, la quantité χ^2 à minimiser dans notre cas est donnée par :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(\alpha_{\text{obs},i} - \alpha_{\text{m},i})^2 + (\delta_{\text{obs},i} - \delta_{\text{m},i})^2}{\sigma_{a,i}^2} + \frac{(V_{\text{obs},i} - V_{\text{m},i})^2}{\sigma_{V,i}^2} \right] \tag{7.10}$$

où ($\alpha_{\text{obs},i}$,$\delta_{\text{obs},i}$) et $V_{\text{obs},i}$ sont les observations astrométriques et spectroscopiques obtenues sur l'étoile S2, respectivement. Les quantités $\alpha_{\text{m},i}$, $\delta_{\text{m},i}$ et $V_{\text{m},i}$ sont évaluées par l'un des modèles képlériens A, B ou C.

Si le modèle considéré décrit correctement les observations, alors la distribution de χ^2 obtenue en évaluant plusieurs fois cette quantité doit suivre une loi du χ^2 à k degrés de liberté [1], comme cela est illustré par la courbe rouge Fig. 7.2. On précise que cette courbe est centrée sur 1 car nous considérons ici le χ^2 réduit que l'on notera χ^2_r. Celui-ci est donné par :

$$\chi^2_r = \frac{\chi^2}{k} \tag{7.11}$$

où k est égal à $k = 3N - n$ avec n le nombre de paramètres à ajuster. Le facteur 3 vient du fait que l'on ait trois observables correspondant à $\alpha_{\text{obs},i}$, $\delta_{\text{obs},i}$ et $V_{\text{obs},i}$.

Afin de différencier un bon ajustement d'un mauvais, il est possible d'utiliser le test du χ^2. Ce test permet de savoir si pour une évaluation de χ^2 donnée, le modèle utilisé est satisfaisant ou non pour décrire les observations. Concrètement, ce test permet de tester une hypothèse que l'on appelle hypothèse nulle et qui est définie comme :

$$H_0 = \text{le modèle décrit bien les observations.} \tag{7.12}$$

Pour la tester il suffit de comparer le χ^2 estimé à une valeur limite χ^2_{lim} obtenue en résolvant l'équation suivante :

$$P(\chi^2 > \chi^2_{lim}) = 1 - F_{\chi^2}(\chi^2_{lim}) = p, \tag{7.13}$$

avec $F_{\chi^2}(\chi^2_{lim})$ la fonction de répartition de la loi du χ^2 à k degrés de liberté donnée par :

$$F_{\chi^2}(u) = \frac{1}{2\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^u \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{d}t \tag{7.14}$$

où

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \tag{7.15}$$

est la fonction eulérienne de deuxième espèce. Le paramètre p dans l'équation (7.13) correspond à la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse H_0, que nous fixons à 5%. Une illustration du χ^2_{lim} réduit, noté $\chi^2_{r,lim}$, ainsi que de la probabilité p est représentée Fig. 7.2. On pourra également trouver les valeurs de $\chi^2_{r,lim}$ obtenues pour les différents modèles A, B et C, et différentes séries d'observations Table 7.2.

Ainsi, si la condition $\chi^2_r > \chi^2_{r,lim}$ (ou $\chi^2 > \chi^2_{lim}$) est vérifiée, alors, sous l'hypothèse nulle H_0, on est amené à rejeter à tort le modèle dans 5% des cas. Cela signifie que si nous effectuons par exemple 1000 ajustements d'un modèle à des observations générées avec ce même modèle, nous devons avoir 5% des 1000 estimations de χ^2_r qui soient supérieures au $\chi^2_{r,lim}$, puisque ces χ^2_r sont censés suivre une loi du χ^2. Précisons que ces 1000 ajustements sont naturellement obtenus en ajustant le modèle considéré à 1000 séries d'observations de durée identique mais dont le bruit, provenant d'un tirage aléatoire suivant une loi normale, diffère.

1. On pourra se référer à l'article de Andrae et al. (2010) pour avoir des détails sur l'estimation du nombre de degrés de liberté d'un modèle.

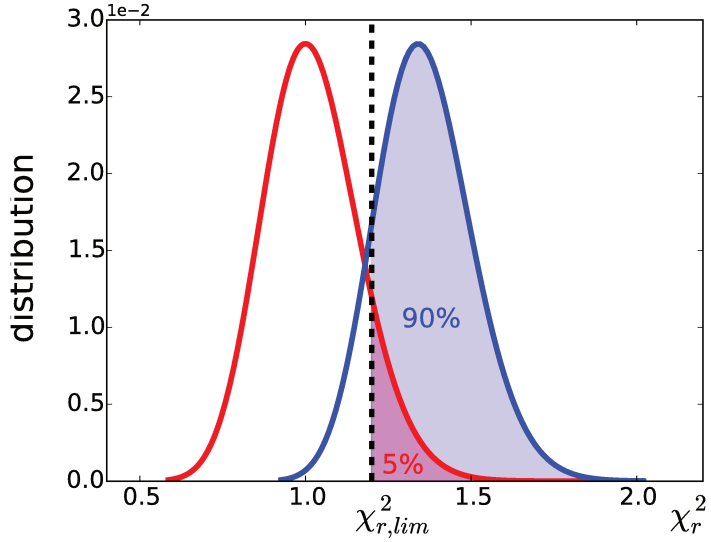

Figure 7.2 – *Courbe rouge :* illustration de la distribution de χ^2_r obtenue dans le cas où le modèle décrit correctement les observations. Cette distribution suit une loi du χ^2 à 100 degrés de liberté. La valeur du $\chi^2_{r,lim}$ (on trouvera dans le texte une explication de l'utilité de cette quantité ainsi que de comment celle-ci est estimée) correspond à la ligne noire en pointillés et est obtenue en considérant $p = 5\%$ dans l'équation (7.13). *Courbe bleue :* exemple de distribution de χ^2_r obtenue dans le cas où le modèle ne décrit pas correctement les observations. Il y a 90% des χ^2_r qui sont supérieurs au $\chi^2_{r,lim}$.

Le test du χ^2 décrit ici ne nécessite que d'estimer une seule fois la quantité χ^2_r et de la comparer ensuite au $\chi^2_{r,lim}$. Cependant, nous choisissons dans notre étude d'utiliser une méthode permettant de rejeter de manière plus significative l'hypothèse H_0. Plus précisément, nous choisissons d'effectuer 100 ajustements des modèles képlériens aux observations générées avec le modèle G, et nous décidons de rejeter les modèles si 90% des χ^2_r obtenus sont supérieurs au $\chi^2_{r,lim}$ (voir courbe bleue Fig. 7.2). Le temps minimal d'observation au bout duquel on considère que le modèle échoue à décrire les données est donc égal à la durée de la série d'observations pour laquelle 90% des χ^2_r sont supérieurs au $\chi^2_{r,lim}$.

Mentionnons qu'en toute rigueur, si nous considérons un nombre infini de réalisations de χ^2_r, et que nous obtenons plus de 5% des χ^2_r qui sont supérieurs au $\chi^2_{r,lim}$, alors le modèle peut être rejeté. Néanmoins, étant donné que nous considérons un nombre limité d'ajustements, nous choisissons d'être prudent et d'affirmer qu'un modèle échoue lorsque 90% des 100 χ^2_r sont supérieurs au $\chi^2_{r,lim}$. Nous choisissons également de reporter les temps minimaux d'observation obtenus pour 60%, puisque le modèle peut déjà être rejeté avec une assez grande confiance quand ce pourcentage est atteint. Cependant, le niveau de confiance de rejet est évidemment moins élevé qu'à 90%.

		A, B, C, D ($n = 8$)		E, F ($n = 11$)	
	N	k	$\chi^2_{r,lim}$	k	$\chi^2_{r,lim}$
1 mois	15	37	1,4106	34	1,4295
2 mois	16	40	1,3940	37	1,4106
4 mois	18	46	1,3659	43	1,3791
6 mois	20	52	1,3429	49	1,3538
10 mois	21	55	1,3329	52	1,3429
1 an	22	58	1,3238	55	1,3329
4 ans	30	82	1,2700	79	1,2753
6 ans	36	100	1,2434	97	1,2473
12 ans	53	151	1,1965	148	1,1986
16 ans	67	193	1,1731	190	1,1745
18 ans	89	259	1,1488	256	1,1497
20 ans	95	277	1,1437	274	1,1446

TABLE 7.2 – $\chi^2_{r,lim}$ estimé pour différents modèles et différentes séries d'observations. Les valeurs ont été obtenues en considérant $p = 5\%$ dans l'équation (7.13). On rappelle que les paramètres n, N et k correspondent respectivement aux nombre de paramètres décrivant le modèle, nombre de dates d'observation et nombre de degrés de liberté. Le modèle relativiste D est décrit par le même nombre de paramètres que les modèles képlériens car nous ne prenons pas en compte les paramètres du moment cinétique du trou noir dans celui-ci.

Afin de valider la procédure mise en place ici nous avons effectué 100 ajustements du modèle C à des observations générées avec ce même modèle. Le but est de déterminer si nous trouvons bien 5% des χ^2_r vérifiant la condition $\chi^2_r > \chi^2_{r,lim}$. Pour effectuer ce test nous avons choisi de considérer deux séries d'observations différentes : une de 32 ans (environ 2 périodes de S2) dont les écart-types utilisés pour simuler le bruit sur ces observations sont $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 1\ \text{km/s})$, et une autre de 4 mois à $(\sigma_a,\sigma_V) = (100\ \mu\text{as}, 100\ \text{km/s})$. Dans les deux cas, nous trouvons un pourcentage d'environ 6% ce qui est très proche de la valeur attendue. Les résultats obtenus sont amplement satisfaisants, faire 100 ajustements est donc justifié.

Nous avons également appliqué ce test au modèle relativiste E, c'est-à-dire que nous avons ajusté 100 fois ce modèle à des observations générées avec celui-ci, en appliquant la méthode de Levenberg-Marquardt. Nous avons constaté que cette dernière n'était pas satisfaisante pour contraindre les paramètres du modèle relativiste. En effet, si l'on considère par exemple la série d'observations obtenue sur 32 ans et le couple de précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 1\ \text{km/s})$, on trouve qu'environ 35% des χ^2_r vérifient $\chi^2_r > \chi^2_{r,lim}$. Ce comportement s'explique par le fait que l'espace des paramètres est plus difficile à sonder avec de tels modèles. Si l'on répète l'opération mais en considérant cette fois-ci des paramètres initiaux égaux à ceux utilisés pour générer les observations ($\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{Gillessen}}$),

nous trouvons un pourcentage d'environ 6%. On rappelle que l'on avait considéré des paramètres initiaux $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{Gillessen}} + 1\boldsymbol{\sigma}_{\text{Gillessen}}$ dans les précédents ajustements. La méthode de Levenberg-Marquardt n'est donc pas appropriée pour des modèles hautement non-linéaires tels que ceux obtenus en relativité générale, puisque les paramètres initiaux doivent être pris très proche de la solution. C'est pour cette raison que nous avons choisi d'utiliser une autre procédure d'ajustement pour les modèles D, E et F.

Modèles D, E et F

Afin de déterminer les temps minimaux d'observation au bout desquels les modèles D, E et F échouent à décrire les observations, nous utilisons le même procédé décrit précédemment c'est-à-dire que nous évaluons 100 χ^2_r et considérons les temps obtenus lorsque 90% et 60% des χ^2_r sont supérieurs au $\chi^2_{r,lim}$. On pourra trouver différentes valeurs de ce dernier, obtenues avec les modèle D, E et F, Table 7.2. Cependant, contrairement aux modèles képlériens nous utilisons la méthode *Monte Carlo Markov Chain* pour effectuer les ajustements (*MCMC*) (Binder 2002).

Plus particulièrement, nous utilisons le logiciel `emcee` [2] codé sous `Python` et permettant d'effectuer des simulations *MCMC* en utilisant la méthode *Affine-Invariant Ensemble Sampler* proposée par Goodman & Weare (2010) (notée ci-après *AIES*).

Dans les paragraphes qui suivent nous allons expliquer le fonctionnement global de la méthode *AIES*. Pour avoir des informations plus précises sur cette dernière et des discussions sur la comparaison de celle-ci à la méthode plus connue de Métropolis-Hasting (Hastings 1970), on pourra se référer aux articles de Goodman & Weare (2010) et Foreman-Mackey et al. (2013) ou encore de Huijser et al. (2015).

La méthode *AIES* fonctionne en faisant évoluer un ensemble $\mathcal{E}$ de L échantillons appelés *walkers* (marcheurs) et composés chacun de n paramètres. Un *walker* peut donc être considéré comme un vecteur à n dimensions que l'on notera $\mathbf{P}_i$ avec i allant de 1 à L. À chaque itération, l'ensemble $\mathcal{E}$ de L *walkers* évolue en proposant une nouvelle position à chacun des *walkers* le composant. Si on considère N_{iter} itérations, alors les L *walkers* de l'ensemble verront leur position modifiée N_{iter} fois. Précisons toutefois que l'évolution de chaque *walker* de l'ensemble est effectuée de manière itérative c'est-à-dire que la nouvelle position du *walker* $\mathbf{P}_i$ est obtenue seulement une fois que la position des *walkers* $\mathbf{P}_1$ à $\mathbf{P}_{i-1}$ a été modifiée.

La nouvelle position d'un *walker* est déterminée en utilisant ce qu'on appelle le *stretch move* (« mouvement d'étirement »). Ce dernier permet de faire évoluer un *walker* de l'ensemble $\mathcal{E}$ en considérant la position actuelle du *walker* que l'on souhaite modifier ainsi que celle d'un autre *walker* pris aléatoirement dans ce même ensemble. Si on note $\mathbf{P}_k(t)$ le *walker* dont on souhaite modifier la position à l'itération t, et $\mathbf{P}_j(t)$ celui pris aléatoirement, où $j \neq k$, alors la nouvelle position $\mathbf{P}_k(t+1)$ du *walker* est obtenue grâce à l'équation

2. `http://dan.iel.fm/emcee/current/`.

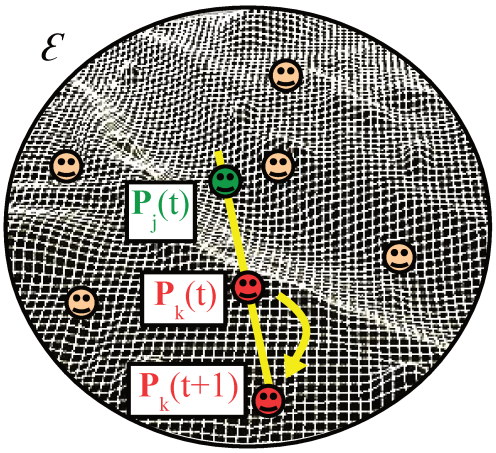

FIGURE 7.3 – Illustration du *stretch move*. La nouvelle position du *walker* $\mathbf{P}_k(t)$ est obtenue à l'aide d'une combinaison linéaire entre la position de ce *walker* et celle d'un autre *walker* $\mathbf{P}_j(t)$ pris aléatoirement dans l'ensemble $\mathcal{E}$. La nouvelle position est notée $\mathbf{P}_k(t+1)$.

suivante :

$$\mathbf{P}_k(t+1) = \mathbf{P}_j(t) + Z\left[\mathbf{P}_k(t) - \mathbf{P}_j(t)\right] \tag{7.16}$$

où Z est une variable de redimensionnement qui permet de moduler l'éloignement de la nouvelle position à l'ancienne (si $Z = 1$ le *walker* reste à la même position). La densité de cette variable est définie par :

$$g(Z = z) \propto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{z}} \text{ si z} \in \left[\frac{1}{A}, A\right] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{7.17}$$

avec $A > 1$ un paramètre ajustable. La nouvelle position du *walker* est donc déterminée le long de la ligne liant les deux *walkers* $\mathbf{P}_k(t)$ et $\mathbf{P}_j(t)$, dans l'espace des paramètres. On pourra voir une illustration du *stretch move* Fig. 7.3.

Afin de valider la nouvelle position du *walker* $\mathbf{P}_k(t)$, on calcule la probabilité d'acceptation définie par :

$$p_{\mathbf{P}_k(t+1)} = \min\left\{1, Z^{n-1}\frac{\pi(\mathbf{P}_k(t+1)|\mathbf{O})}{\pi(\mathbf{P}_k(t)|\mathbf{O})}\right\} \tag{7.18}$$

où $\mathbf{O}$ correspond aux observations et $\pi(\mathbf{P}|\mathbf{O})$ est la densité de probabilité a posteriori de $\mathbf{P}$. Si $p_{\mathbf{P}_k(t+1)} \geqslant u$ avec u un nombre aléatoire issu d'une loi uniforme entre 0 et 1, alors la nouvelle position est acceptée, sinon l'ancienne position est conservée.

La densité de probabilité a posteriori est obtenue, d'après le théorème de Bayes, par :

$$\ln \pi(\mathbf{P}|\mathbf{O}) \propto \ln f(\mathbf{O}|\mathbf{P}) + \ln \pi(\mathbf{P}) \tag{7.19}$$

avec $f(\mathbf{O}|\mathbf{P})$ la fonction de vraisemblance donnée dans notre cas par :

$$\ln f(\mathbf{O}|\mathbf{P}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{(\alpha_{\mathrm{obs},i}-\alpha_{\mathrm{m},i})^2+(\delta_{\mathrm{obs},i}-\delta_{\mathrm{m},i})^2}{\sigma_{a,i}^2}+\frac{(\mathrm{V}_{\mathrm{obs},i}-V_{\mathrm{m},i})^2}{\sigma_{V,i}^2}\right] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[2\ln\left(2\pi\,\sigma_{a,i}^2\right)+\ln\left(2\pi\,\sigma_{V,i}^2\right)\right], \tag{7.20}$$

et $\pi(\mathbf{P})$ la densité de probabilité a priori des paramètres $\mathbf{P}$. Nous avons choisi cette dernière distribuée selon une loi uniforme entre $\mathbf{P}_{\mathrm{Gillessen}} - 6\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{Gillessen}}$ et $\mathbf{P}_{\mathrm{Gillessen}} + 6\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{Gillessen}}$, pour les paramètres orbitaux et la distance R_0. Pour ce qui est des paramètres du moment cinétique du trou noir, ceux-ci sont également distribués selon une loi uniforme mais varient dans leur domaine de variation respectif : $\bar{a} \in [0,1]$ [3], $i' \in [0°,180°]$ et $\Omega' \in [0°,360°]$.

Dans la suite de ce chapitre, chaque ajustement effectué avec la méthode *AIES* obtenu en considérant un nombre L de *walkers* égal à 600 et un nombre N_{iter} d'itérations égal à 100. Précisons que nous avons effectué plusieurs tests, notamment diminuer le nombre de *walkers* à 100. Cependant, les ajustements obtenus n'étaient pas satisfaisants car il est nécessaire dans notre cas d'avoir un nombre de *walkers* plus important pour sonder correctement l'espace des paramètres. De plus, nous avons également augmenté le nombre d'itérations à 600, mais les contraintes obtenues sur les paramètres sont similaires à celles obtenues à 100. Nous avons donc choisi des nombres L et N_{iter} nous permettant de converger de manière efficace vers la solution tout en ayant un temps de calcul raisonnable.

Mentionnons également qu'afin d'optimiser les ajustements nous faisons ce qu'on appelle le *burn-in*. Cette étape est effectuée avant l'ajustement et consiste à sonder l'espace des paramètres dans un domaine assez large en vue de repérer les régions susceptibles de contenir la solution. Le *burn-in* permet donc d'optimiser la recherche de la solution en considérant des *walkers* initialisés à des positions proches de ces régions à forte densité de probabilité. Ces positions sont obtenues en effectuant un premier ajustement à l'aide de la méthode *AIES*. Le *burn-in* est donc ni plus ni moins un ajustement de modèle.

Afin de valider la procédure d'ajustement décrite ici, nous avons considéré le modèle C et comparé les pourcentages, de $\chi_r^2 > \chi_{r,lim}^2$, obtenus avec les méthodes de Levenberg-Marquardt et *AIES*. Pour cela, nous avons utilisé la série d'observations d'environ 15,8 ans (une période de S2) et des écart-types de $(\sigma_a,\sigma_V) = (30\ \mu\mathrm{as},\ 10\ \mathrm{km/s})$. Pour les deux méthodes nous avons trouvé qu'il y avait 45% des χ_r^2 vérifiant $\chi_r^2 > \chi_{r,lim}^2$. Ce résultat montre donc que les ajustements obtenus avec `emcee` sont en accord avec ceux trouvés par la méthode de Levenberg-Marquardt.

D'autre part, nous avons appliqué le même test que celui effectué dans la section précédente à savoir ajusté 100 fois le modèle E à des observations générées avec ce même modèle. En revanche, nous considérons ici la méthode *AIES* pour effectuer les

3. Le paramètre $\bar{a}$ ne varie pas entre -1 et 1 ici, car la direction du moment cinétique du trou noir est définie grâce aux angles i' et Ω'.

ajustements. On rappelle que dans le cas de la méthode de Levenberg-Marquardt nous trouvions un pourcentage d'environ 35% pour des observations obtenues pendant deux périodes de S2 à des précisions (σ_a,σ_V) = (10 μas, 1 km/s). Néanmoins, dans le cas de la méthode *AIES*, nous obtenons un pourcentage d'environ 6% c'est-à-dire proche des 5% censés être atteints dans le cas où le modèle décrit correctement les données (voir courbe rouge Fig. 7.2). Nous pouvons donc dire que la méthode *AIES* est plus appropriée que la méthode de Levenberg-Marquardt pour ajuster des modèles relativistes.

Maintenant que les différentes méthodes d'ajustements sont introduites, nous allons estimer à partir de combien de temps d'observation les différents modèles échouent à décrire les observations obtenues avec le modèle G. On rappelle que le but de cette étude est de donner une estimation de la durée minimale d'une série d'observations nécessaire pour permettre la détection d'effets relativistes à des précisions astrométriques et spectroscopiques données. On pourra ainsi déterminer les temps minimaux d'observation nécessaires à l'instrument *GRAVITY* pour détecter ces différents effets.

7.2.2 Résultats

Les différents temps minimaux d'observation obtenus pour chaque modèle et différents couples de précisions astrométriques et spectroscopiques sont présentés Table 7.3. On rappelle que ces temps sont obtenus lorsque 90% des 100 χ^2_r calculés sont supérieurs au $\chi^2_{r,lim}$. Cela nous permet donc de dire avec une très grande confiance que le modèle en question ne décrit pas correctement les observations. Les temps obtenus pour 60% sont également mentionnés Table 7.3. De plus, pour des raisons de pertinence des résultats, nous ne considérons, dans le cas des modèles relativistes, que certains des couples de précisions astrométriques et spectroscopiques considérés.

Par la suite nous considérerons qu'un effet est dit détectable lorsqu'un modèle X, ne prenant pas en compte l'effet en question, échoue au bout d'un temps significativement plus court qu'un modèle Y plus évolué, prenant en compte cet effet. La détection d'un effet est donc obtenue par comparaison de deux modèles distincts. La colonne de gauche Table 7.3 mentionne certains effets non pris en compte par chacun des modèles, et qui sont la cause de leur échec, à plus ou moins long terme, à rendre compte des données simulées.

Si l'on compare dans un premier temps les résultats obtenus avec les modèles A et B pour 90%, on remarque que pour l'ensemble des couples de précisions différents de (σ_a,σ_V) = (10 − 50 μas, 100 km/s), les temps obtenus sont tous similaires. Cela signifie que ces deux modèles échouent à décrire les observations pour les mêmes raisons c'est-à-dire parce qu'ils négligent tous deux certains effets relativistes. En revanche, si on considère le cas (σ_a,σ_V) = (10 − 50 μas, 100 km/s) toujours pour 90%, les temps obtenus sont tous très différents. À la précision astrométrique de 30 microsecondes d'angle on trouve notamment une différence entre les deux modèles d'environ 17 ans. Ces décalages en temps traduisent le fait que le modèle B arrive à mieux ajuster les observations que le modèle A. Cela est directement dû au fait que l'effet Roemer est pris en compte dans le modèle B mais est

Effets détectés					
	Modèle A	10 μas	30 μas	50 μas	100 μas
Roemer	1 km/s	1 mois	1 mois	2 mois	4(2) mois
DT	10 km/s	2 mois	4 mois	6(4) mois	1 an (10 mois)
Grav	100 km/s	4 mois	10(6) mois	4(1) ans	16(4) ans
	Modèle B	10 μas	30 μas	50 μas	100 μas
DT	1 km/s	1 mois	1 mois	2 mois	4 mois
Grav	10 km/s	2 mois	4 mois	6(4) mois	10 mois
	100 km/s	4 ans (10 mois)	18(10) ans	18 ans	18 ans
	Modèle C	10 μas	30 μas	50 μas	100 μas
AP	1 km/s	10(6) mois	14(12) ans	18(14) ans	18 ans
LG	10 km/s	6 ans	18 ans	18 ans	20 ans
HOPC	100 km/s	6 ans	18 ans	18 ans	20 ans
	Modèle D	10 μas	30 μas	50 μas	100 μas
LG	1 km/s	6 mois	$>$ 30 ans	/	/
HOPC	10 km/s	18(4) ans	$>$ 30 ans	/	/
	100 km/s	/	/	/	/
	Modèle E	10 μas	30 μas	50 μas	100 μas
LG	1 km/s	6 mois	$>$ 30 ans	/	/
HOPC	10 km/s	18(6) ans	$>$ 30 ans	/	/
	100 km/s	/	/	/	/
	Modèle F	10 μas	30 μas	50 μas	100 μas
LG	1 km/s	18 ans (10 mois)	$>$ 30 ans	/	/
HOPC	10 km/s	$>$ 30 ans	$>$ 30 ans	/	/
	100 km/s	/	/	/	/

Table 7.3 – Estimations des temps minimaux d'observation nécessaires pour détecter différents effets avec l'étoile S2, et en considérant plusieurs précisions astrométriques et spectroscopiques. Les principaux effets qui engendrent l'échec de chaque modèle à reproduire les observations sont donnés dans la colonne de gauche. Les acronymes et abréviation sont les mêmes que ceux utilisés Figs. 6.9 et 6.11. Les temps obtenus pour 60% sont également reportés dans le tableau et sont écrits entre parenthèses. Lorsque celles-ci sont absentes cela signifie que le temps trouvé est identique à celui obtenu pour 90%. On rappelle que la(les) différence(s), en terme d'effets, entre les modèles A et B est l'effet Roemer, entre les modèles B et C ce sont les décalages spectraux relativistes, entre les modèles C et D c'est l'avancée du périastre, entre les modèles D et E c'est l'effet Lense-Thirring, entre les modèles E et F c'est l'effet de lentille, et entre les modèles F et G ce sont les effets *HOPC* mais également l'effet de lentille puisque celui-ci n'est pas complètement reproduit dans le modèle F.

négligé dans ce dernier. On peut ainsi affirmer qu'il est possible de mettre en évidence cet effet si l'on compare les ajustements des modèles A et B à des données obtenues pendant quelques mois d'observation aux précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10-30\ \mu\text{as}, 100\ \text{km/s})$: on s'attend à ce que l'ajustement soit meilleur avec le modèle B qu'avec le modèle A. Mentionnons cependant que les pourcentages évalués avec le modèle B aux séries d'observations au bout desquelles le modèle A échoue sont d'environ 40%. Cela montre que les 90% atteints par le modèle A ne sont pas uniquement dus à l'effet Roemer. En effet, celui-ci ne parvient pas à décrire les observations également parce que d'autres effets sont négligés dans ce modèle. Nous avons donc ici une détection marginale de l'effet Roemer.

Si on considère maintenant les temps obtenus pour 60% avec les modèles A et B, on constate que les résultats sont très proches voire identiques à ceux obtenus pour 90%. Néanmoins, il existe quelques cas à $\sigma_V = 100$ km/s où les temps minimaux d'observation sont très différents, c'est-à-dire que le modèle échoue à décrire les données bien plus tôt. Ces différences s'expliquent par le fait que le modèle commence plus ou moins rapidement à être sensible à des effets manquant dans celui-ci. Il est donc possible de commencer à détecter ces effets plus tôt, mais cette détection ne sera totalement confirmée que si l'on atteint les 90%. Précisons que même s'il existe des écarts importants observés entre 60% et 90%, la conclusion faite précédemment reste inchangée puisque les modèles A et B diffèrent toujours pour $(\sigma_a,\sigma_V) = (10-30\ \mu\text{as}, 100\ \text{km/s})$.

Les temps obtenus avec les modèles B et C sont quasiment tous très différents, sauf pour $\sigma_V = 100$ km/s. Si on considère le cas à $\sigma_a = 30\ \mu$as on remarque que les temps passent de 1 mois à 14 ans pour $\sigma_V = 1$ km/s, et de 4 mois à 18 ans pour $\sigma_V = 10$ km/s. Ces décalages importants se traduisent encore une fois par le fait que l'on a négligé des effets dans le modèle B, mais qui sont présents dans le C. Ces effets correspondent aux décalages Doppler transverse et gravitationnel. On constate que ces derniers sont détectables en quelques mois grâce à la comparaison de ces modèles B et C, aux précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10-100\ \mu\text{as}, 1-10\ \text{km/s})$. De plus, étant donné qu'à ces dernières nous obtenons des temps minimaux d'observation similaires pour les modèles A et B, nous pouvons dire que ces effets de décalages spectraux sont également détectables grâce à la comparaison des modèles A et C. Ajoutons que les pourcentages estimés avec le modèle C aux temps minimaux d'observation au bout desquels échouent les modèles A et B aux précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10-100\ \mu\text{as}, 1-10\ \text{km/s})$ sont tous inférieurs à 20%. Cela montre qu'il y a bien une différence entre le modèle C et les modèles A et B.

Afin de comprendre l'origine de certains des temps obtenus avec le modèle C, nous allons d'abord nous intéresser à la comparaison de ceux obtenus avec les modèles E et F. On rappelle que la différence entre ces deux modèles vient de l'effet de lentille gravitationnelle puisque celui-ci est simulé analytiquement dans le modèle F mais est négligé dans le E.

On constate que les temps obtenus avec ces modèles sont différents excepté à $\sigma_a = 30\ \mu$as. Aux précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 1\ \text{km/s})$, on remarque notamment que le temps passe de 6 mois à 18 ans pour 90%. Cependant, le modèle F commence à échouer dès 10 mois puisque l'on atteint dès cette série d'observations 60% des χ^2_r vérifiant $\chi^2_r > \chi^2_{r,lim}$.

Nous pouvons donc dire que les modèles E et F ne rendent pas compte des données en des temps d'observation similaires. Les effets négligés dans le modèle F sont les effets *HOPC*, ainsi qu'une partie de l'effet de lentille puisque celui-ci n'est pas complètement reproduit par les approximations analytiques de Sereno & de Luca (2006). Cela signifie que le modèle F échoue à décrire les observations à cause de ces deux contributions. Néanmoins, comme nous obtenons des temps similaires avec les modèles E et F pour 60%, cela montre que les deux modèles échouent dès $6-10$ mois principalement à cause des effets *HOPC* manquant dans ceux-ci. Par ailleurs, étant donné que nous obtenons des temps d'observation proches de 6 mois également pour les modèles C et D aux précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 1\ \text{km/s})$, il est également possible de détecter les effets *HOPC* à l'aide de ces deux autres modèles.

Aux précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 10\ \text{km/s})$, on constate que les temps obtenus avec les modèles E et F sont différents quel que soit le pourcentage considéré. En particulier, nous trouvons avec le modèle E des temps d'environ 6 ans pour 60% et 18 ans pour 90%, tandis que nous obtenons un temps d'observation supérieur à 30 ans avec le modèle F aux deux pourcentages. Cela signifie que nous arrivons à commencer à détecter l'effet de lentille dès 6 ans d'observation aux précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 10\ \text{km/s})$. Le temps obtenu pour 90% est lié au fait que l'effet de lentille domine lors des passages au périastre de S2 (voir image en bas à gauche Fig. 6.9). Le modèle E échoue alors de manière plus significative lorsque l'étoile a passé son second passage au périastre. Ajoutons par ailleurs que le pourcentage estimé avec le modèle F au temps minimal d'observation au bout duquel échoue le modèle E aux précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 10\ \text{km/s})$, c'est-à-dire 6 ans, est inférieur à 20%. Cela confirme donc bien la détection de l'effet de lentille gravitationnelle.

Si l'on compare à présent les modèles E et D, on remarque que les temps obtenus sont similaires. On rappelle que la différence entre ces deux modèles est l'effet Lense-Thirring. Ces résultats montrent donc que l'on ne parvient pas à détecter cet effet pour des temps d'observation inférieurs ou égaux à 30 ans, soit environ deux périodes de S2, et cela pour l'ensemble des précisions astrométriques et spectroscopiques considérées. En d'autres termes, cela signifie que l'on n'aura pas de contrainte forte sur les paramètres du moment cinétique du trou noir avec de telles observations. Afin d'y remédier, il faudra soit augmenter le temps d'observation de l'étoile S2 soit avoir de meilleures précisions astrométriques et/ou spectroscopiques. Cela sera discuté dans la section suivante.

Ajoutons que puisque que les résultats des modèles E et D sont similaires, les conclusions faites lors de la comparaison des modèles E et F sont également valables pour la comparaison des modèles D et F. Nous pouvons donc par exemple dire que le modèle D échoue dès 4 ans à $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 10\ \text{km/s})$ à cause de l'effet de lentille gravitationnelle manquant dans celui-ci et présent en partie dans F.

Intéressons-nous maintenant à la comparaison des modèles C et D. Pour le couple de précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 10\ \text{km/s})$, le temps d'observation obtenu avec le modèle C est de 6 ans pour 60% et 90%, c'est-à-dire proche de celui estimé avec le modèle D pour 60%. Cela signifie qu'un effet supplémentaire à l'effet de lentille fait échouer le modèle C directement dès 6 ans. Cet effet correspond à l'avancée du périastre puisque celui-ci

n'est pas pris en compte dans le modèle C mais est présent dans le D. Cependant, la détection de l'avancée du périastre à ces précisions est marginale puisque l'on obtient avec le modèle D un temps similaire au modèle C pour 60%. Il est donc plus prudent de dire que le modèle C échoue dès 6 ans majoritairement pour les mêmes raisons que le modèle D à savoir l'absence de l'effet de lentille.

Si l'on souhaite détecter l'effet d'avancée du périastre de S2 sans être perturbé par l'effet de lentille, il est nécessaire de considérer une précision astrométrique de 30 microsecondes d'angle. En effet, les temps obtenus à $(\sigma_a,\sigma_V) = (30\ \mu\text{as}, 1-10\ \text{km/s})$, et pour 60% et 90%, sont différents pour les modèles C et D. L'avancée du périastre peut donc être détectée au bout de plusieurs années correspondant typiquement à une période de S2 (voir Table 7.3). Précisons que le pourcentage obtenu avec le modèle D pour la série d'observations au bout de laquelle le modèle C échoue à $(\sigma_a,\sigma_V) = (30\ \mu\text{as}, 1\ \text{km/s})$, c'est-à-dire la série de 12 ans, est d'environ 35%. Ce pourcentage est assez élevé et montre que le modèle C échoue à décrire les observations car d'autres effets y sont négligés. Nous avons donc à ces précisions une détection marginale de l'avancée du périastre de S2. Cependant, le pourcentage estimé avec le modèle D pour la série d'observations d'environ 32 ans à $(\sigma_a,\sigma_V) = (30\ \mu\text{as}, 10\ \text{km/s})$ est de 15%. Ce dernier tend donc à confirmer la détection de l'avancée du périastre par comparaison des modèles C et D.

Si l'on souhaite par contre conclure quant à la détection de cet effet aux précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 1-10\ \text{km/s})$, il est nécessaire de comparer des modèles C et D prenant en compte le tracé de rayons. En effet, la seule différence entre ces deux modèles serait dans ce cas uniquement l'effet d'avancée du périastre.

Afin de déterminer si les temps obtenus avec les modèles A, B et C dépendent fortement des paramètres initiaux utilisés dans la méthode de Levenberg-Marquardt, nous avons considéré des paramètres dont les valeurs ont été choisies plus loin de la solution : $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{Gillessen}} + 5\boldsymbol{\sigma}_{\text{Gillessen}}$. Nous avons effectué ce test avec le modèle C et aux précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 1-100\ \text{km/s})$. Nous avons constaté que les résultats étaient similaires à ceux obtenus en prenant des paramètres initiaux égaux à $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{Gillessen}} + 1\boldsymbol{\sigma}_{\text{Gillessen}}$: 10 mois pour $\sigma_V = 1$ km/s et 6 ans pour $\sigma_V = 10-100$ km/s. Ce test tend donc à démontrer que les ajustements des modèles A, B et C convergent bien vers la bonne solution. Ajoutons par ailleurs que nous avons démontré précédemment que le pourcentage trouvé avec le modèle C et la méthode de Lenvenberg-Marquardt, à $(\sigma_a,\sigma_V) = (30\ \mu\text{as}, 10\ \text{km/s})$ et pour la série d'observations d'environ 16 ans, était similaire à celui estimé avec la méthode *MCMC* ($\approx 45\%$).

D'autre part, nous nous sommes également intéressés à déterminer quelle était l'influence de l'échantillonnage aux passages au périastre de S2 sur les différents seuils temporels obtenus Table 7.3. Pour cela, nous avons utilisé une nouvelle fois le modèle C et des précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 1-100\ \text{km/s})$. Le nouvel échantillonnage considéré est similaire à celui décrit au début de la Sect. 6.2, néanmoins, à la place d'avoir deux points par nuit pendant les trois semaines d'observation au périastre, nous ne considérons qu'un

seul point par nuit. Nous avons donc 7 points au lieu de 14 lors d'un passage au périastre de S2. Les temps minimaux obtenus sont similaires à ceux estimés avec l'échantillonnage initial. En effet, nous trouvons des seuils égaux à 6 mois à la précision de 1 km/s et à 8 ans à 10 km/s et 100 km/s. Avec l'échantillonnage initial nous avions respectivement 10 mois et 6 ans. Cela montre donc que l'échantillonnage au périastre joue peu sur la détection des effets. Cependant, il reste primordial d'échantillonner correctement au périastre si l'on souhaite mettre en avant les divers effets relativistes. En effet, comme on l'a vu au chapitre précédent la grande majorité des effets relativistes sont maximaux près du périastre de S2.

En conclusion de cette section nous pouvons dire que si nous considérons des observations de l'étoile S2 commençant en 2018, nous pourrons détecter marginalement l'effet Roemer dès 4 mois grâce aux modèles A et B, et aux précisions (σ_a,σ_V) = (10 μas, 100 km/s). Les décalages spectraux relativistes pourront être détectés au bout de 2 mois à l'aide des modèles B (ou A) et C, aux précisions (σ_a,σ_V) = (10 μas, 10 km/s). L'effet de lentille gravitationnelle sera détectable grâce aux modèles D (ou C,ou E) et F au bout de 6 ans d'observation et à (σ_a,σ_V) = (10 μas, 10 km/s). L'avancée du périastre de S2 pourra être détectée au bout d'une dizaine d'années à (σ_a,σ_V) = (30 μas, $1-10$ km/s) grâce aux modèles C et D. Les effets *HOPC* pourront être mis en évidence dès $6-10$ mois d'observation à (σ_a,σ_V) = (10 μas, 1 km/s) à l'aide des modèles C (ou D, ou E, ou F). Pour ce qui est de l'effet Lense-Thirring, celui-ci n'est visiblement pas détectable si l'on considère des observations obtenues pendant deux périodes de S2 ($\approx$ 30 ans). Néanmoins, ce résultat ne veut pas forcément exclure le fait que l'on ne puisse contraindre, ne serait-ce légèrement, les paramètres du moment cinétique. C'est ce dont nous discuterons dans la section suivante.

Nous souhaitons ajouter que les résultats présentés ici consistent en une étude préliminaire sur la détection des effets relativistes avec l'étoile S2. En effet, celle-ci néglige plusieurs contributions notamment la masse étendue susceptible d'être présente au centre de notre galaxie et qui serait composée d'étoiles, de résidus stellaires, ou encore de matière noire. Il est possible que cette masse modifie la trajectoire de l'étoile et induise un effet newtonien opposé à celui de l'avancée du périastre. L'amplitude de ce dernier serait donc diminuée. Plusieurs travaux ont été effectués sur le sujet afin de déterminer si cette masse pourra être contrainte et si oui quelle sera l'amplitude de son effet sur les orbites d'étoiles que l'on pourrait observer au Centre Galactique.

En particulier, Rubilar & Eckart (2001) ont mis en évidence que cet effet newtonien pouvait partiellement ou complètement compenser l'effet relativiste induit par l'avancée du périastre. Ces auteurs ont notamment montré que dans le cas d'une étoile de type S2, il suffisait que la masse étendue soit égale à 0,1% de la masse totale du trou noir pour dominer l'effet d'avancée du périastre.

Weinberg et al. (2005) ont démontré qu'il sera possible d'apporter une contrainte sur cette masse étendue si l'on étudie pendant 10 ans le mouvement de cent étoiles situées dans la 0,4 seconde d'angle centrale. Ces auteurs supposent dans leur étude que la masse étendue est supérieure à 10^3 masses solaires, et que les incertitudes de mesures sont de

0,5 milliseconde d'angle et 10 km/s. Précisons que les cent étoiles étudiées ici sont toutes hypothétiques, mais les étoiles S pourront être considérées lors d'un vrai traitement. Par ailleurs, les auteurs ont montré qu'il sera possible de détecter des effets relativistes, tels que l'avancée du périastre, malgré l'effet newtonien induit par cette masse. Il faudra pour cela se placer dans les mêmes conditions que précédemment (observer 100 étoiles sur 10 ans) et avoir une précision astrométrique inférieure ou égale à 0,5 milliseconde d'angle. Si l'on souhaite détecter des effets relativistes plus faibles tels que l'effet Lense-Thirring, il faudra cette fois-ci considérer une précision astrométrique inférieure ou égale à 0,05 milliseconde d'angle.

Des études plus poussées sur la détection de l'effet Lense-Thirring ainsi que de celle du moment quadrupolaire du trou noir, en présence de perturbations gravitationnelles générées par des étoiles et des résidus stellaires, ont également été menées par Merritt et al. (2010) et Sadeghian & Will (2011). Merritt et al. (2010) ont notamment montré que pour arriver à détecter l'effet Lense-Thirring sans être perturbé par ces effets newtoniens, et sachant la précision astrométrique de l'instrument *GRAVITY* de 10 microsecondes d'angle, il faudra que le demi-grand axe de l'étoile soit inférieur à environ 0,5 milliparsec (celui de l'étoile S2 est de 5 milliparsecs). Pour ce qui est du moment quadrupolaire du trou noir, il faudra que l'étoile possède cette fois-ci un demi-grand axe inférieur ou égal à 0,2 milliparsec.

L'ensemble des travaux menés ici montrent qu'il est important de prendre en compte cette masse étendue dans les futurs modèles utilisés pour interpréter les observations obtenues sur l'étoile S2. Si nous ne découvrons pas d'étoiles plus proches avec l'instrument *GRAVITY*, la détection des différents effets relativistes avec cette dernière ne sera possible que si l'on arrive à contraindre la masse étendue à l'aide de l'observation de plusieurs étoiles du Centre Galactique, et si cette masse est suffisamment faible pour ne pas dominer les effets relativistes. Par ailleurs, comme mentionné dans divers articles, on s'attend à ce que l'effet newtonien puisse être dissocié des effets relativistes si l'on observe sur plusieurs périodes orbitales, car ceux-ci possèdent des évolutions temporelles différentes.

7.3 Contrainte du moment cinétique du candidat trou noir central avec S2

Comme le nom de la section le précise, nous allons tenter ici de contraindre les paramètres du moment cinétique (norme et direction) du candidat trou noir central et cela grâce à l'effet Lense-Thirring. En effet, comme nous l'avons déjà vu, ce dernier est engendré par la rotation du trou noir et agit sur les trajectoires du photon et de l'étoile.

Dans un premier temps, nous allons étudier plus en détail l'impact du moment cinétique du trou noir sur les mesures astrométriques et spectroscopiques de l'étoile S2. Pour cela, nous allons considérer plusieurs normes et directions du moment cinétique. Puis, nous présenterons les diverses contraintes obtenues.

7.3.1 Impact du moment cinétique sur l'astrométrie et la spectroscopie

Comme nous l'avons vu Tables 6.2 et 6.3, l'effet Lense-Thirring agit très peu sur la trajectoire du photon. Néanmoins, ces résultats ont été obtenus en ne considérant qu'une direction pour le moment cinétique du trou noir, égale à $i' = 45°$ et $\Omega' = 160°$. Afin de valider complètement le fait que le photon ne soit affecté que très faiblement par cet effet, nous avons considéré plusieurs couples (i',Ω') en faisant en sorte que chacun de ces angles balaient son domaine de variation respectif : $i' \in [0°,180°]$ et $\Omega' \in [0°,360°]$. Nous en avons conclu que l'effet Lense-Thirring sur la trajectoire du photon était dans tous les cas négligeable (< 1 μas et < 1 km/s). Cela montre que le photon n'est pas déterminant pour contraindre les paramètres du moment cinétique du trou noir avec l'étoile S2. Ce résultat est en accord avec Zhang et al. (2015) et Yu et al. (2016).

À présent intéressons-nous à l'impact astrométrique du moment cinétique lorsque celui-ci agit sur la trajectoire de l'étoile. L'amplitude de cet effet est maximale à proximité de l'apoastre de S2 et cela pour chacune des trois périodes (voir Fig. 6.9). Cependant, nous n'avons là encore considéré qu'une seule direction pour le moment cinétique du trou noir. Les différents décalages astrométriques induits par l'effet Lense-Thirring et obtenus pour plusieurs normes et directions du moment cinétique sont présentés Figs. 7.4 et 7.5. On remarque que, dans tous les cas, l'amplitude maximale de cet effet a lieu, à chaque période de révolution de S2, près de l'apoastre. Cela signifie qu'il est primordial d'observer aux passages à l'apoastre de S2 si l'on souhaite contraindre les paramètres $\bar{a}$, i' et Ω' avec cette étoile. Néanmoins, comme mentionné au chapitre précédent la majorité des effets relativistes ont lieu à proximité du périastre. Il est donc également nécessaire d'observer au périastre si l'on souhaite contraindre l'effet Lense-Thirring. Plus précisément, nous devons obtenir une contrainte suffisamment forte sur les paramètres orbitaux ainsi que sur les masse et distance à l'observateur du trou noir, et cela à l'aide des effets relativistes observés près du périastre, si l'on souhaite contraindre ceux du moment cinétique près de l'apoastre.

Aux Figs. 7.4 et 7.5, on note que l'effet Lense-Thirring peut atteindre entre 10 et 40 microsecondes d'angle pour certains couples (i',Ω'). De plus, si on se place dans le cas où $i' = 45°$ et $\Omega' = 135°$ (les courbes en tiret-point-points), la différence entre les courbes obtenues pour $\bar{a} = 0{,}99$ et $\bar{a} = 0{,}7$ est d'environ 4, 8 et 12 microsecondes d'angle à proximité du premier, second et troisième passage à l'apoastre, respectivement. En revanche, on remarque qu'il existe certaines directions du moment cinétique où l'effet Lense-Thirring est inférieur à 10 microcesondes d'angle pendant les trois périodes de S2, et cela quelle que soit la norme $\bar{a}$. Cela montre donc que la détection de cet effet ne sera possible que pour certains triplets ($\bar{a}$,i',Ω'). On pourra se reporter à la Fig. 2 de Yu et al. (2016) pour avoir les couples (i',Ω') qui semblent favorables à la détection de celui-ci dans le cas de S2, lorsque $\bar{a} = 0{,}99$.

Si on se rapporte aux résultats trouvés dans Broderick et al. (2011), les paramètres du

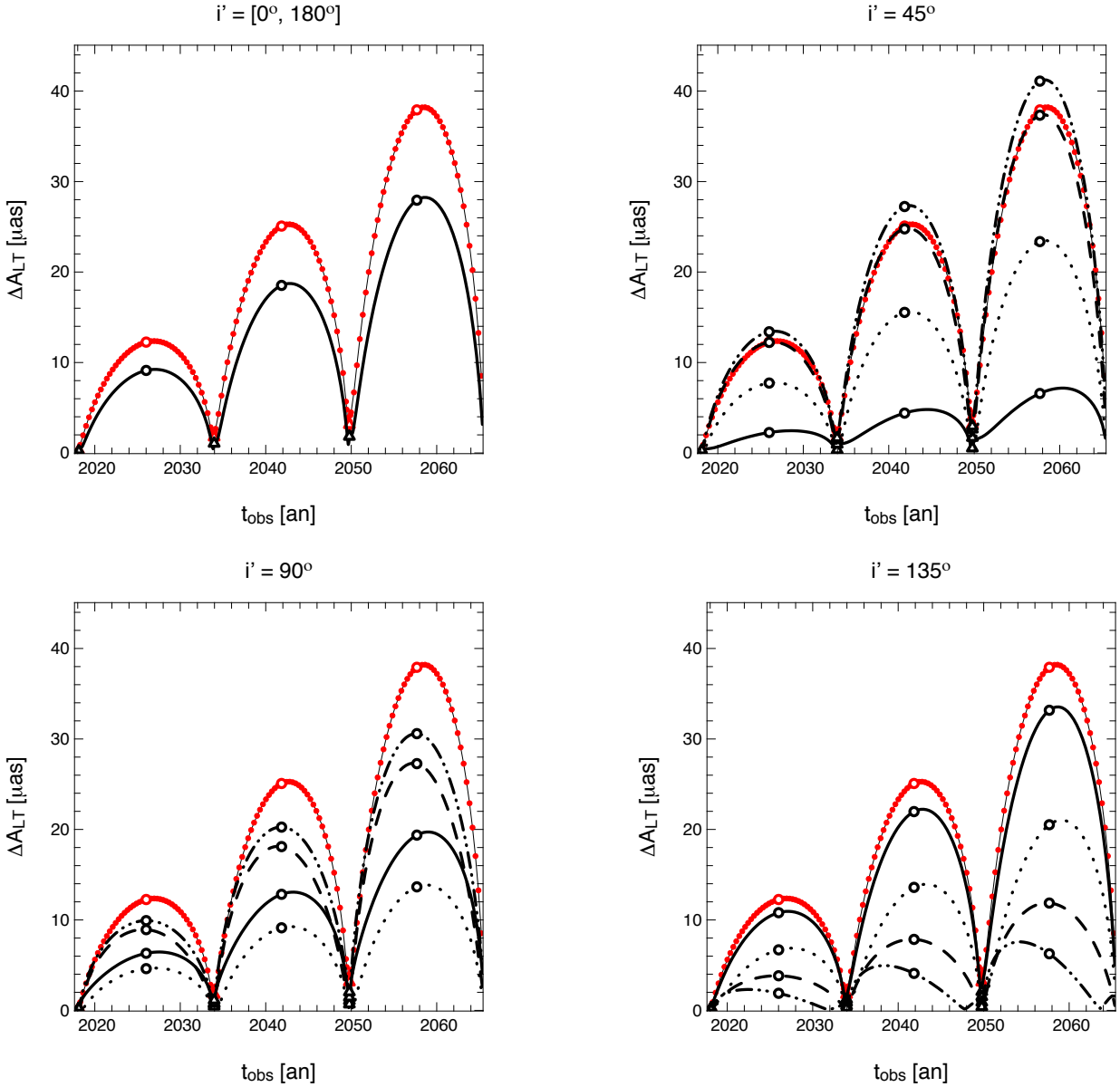

FIGURE 7.4 – Impact de l'effet Lense-Thirring sur les mesures astrométriques de l'étoile S2 pour $\bar{a} = 0{,}99$ et plusieurs directions du moment cinétique du trou noir. Les observations considérées pour cette étoile sont également représentées sur chaque sous-figure (cercles rouges pleins). On rappelle que celles-ci ont été obtenues pour : $(\bar{a}, i', \Omega') = (0{,}99; 45°; 160°)$. Chaque sous-figure correspond à une valeur de l'angle i' et les types de courbes dénotent différentes valeurs de Ω' : les lignes en trait plein, pointillés, tirets et tiret-point-points correspondent à 0°, 45°, 90° et 135°, respectivement. Pour $i' = [0°, 180°]$, les courbes sont les mêmes quel que soit l'angle Ω'. Les cercles et triangles ouverts rouges et noirs représentent les positions à l'apoastre et au périastre, respectivement.

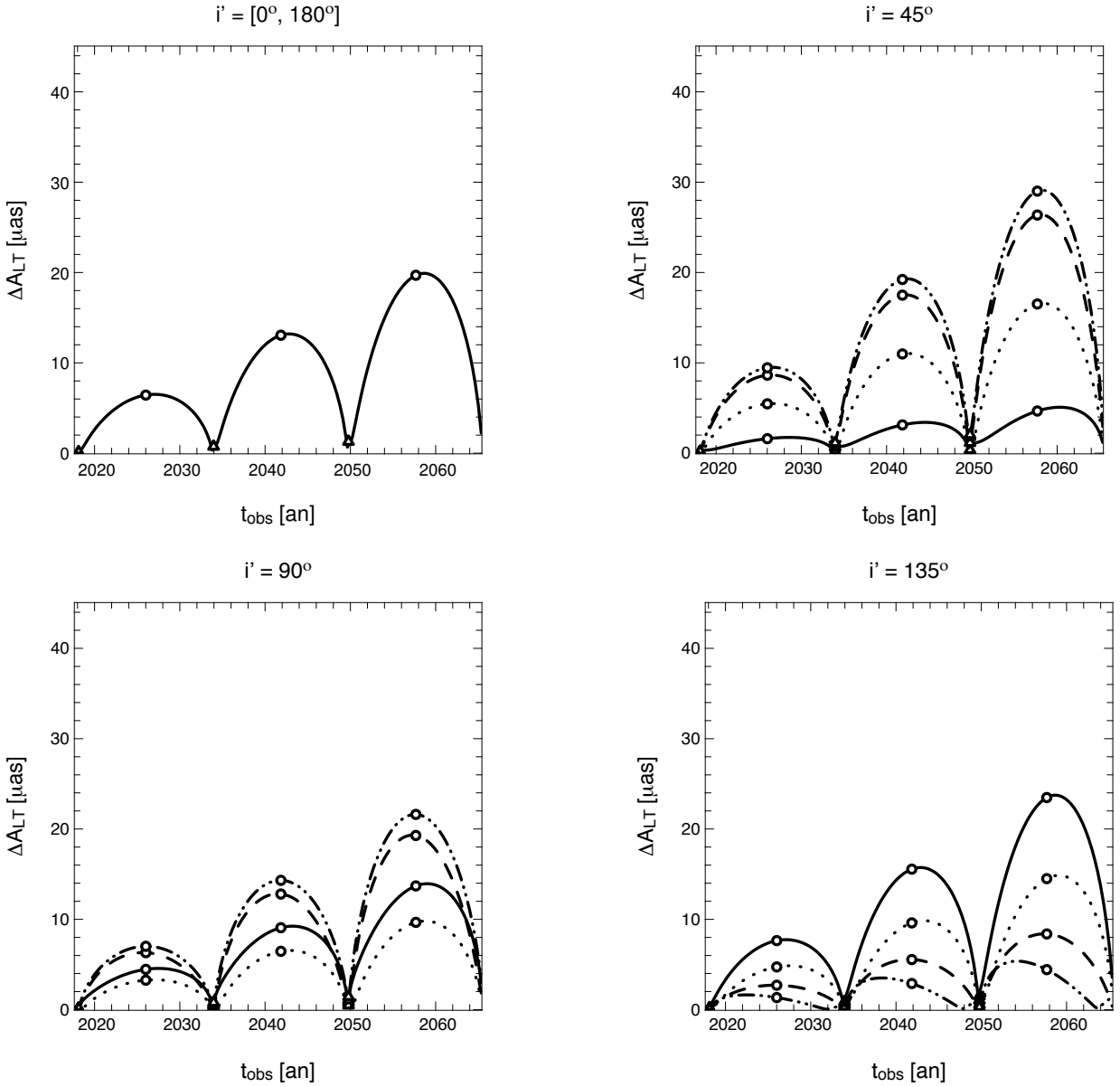

Figure 7.5 – Légende similaire à la Fig. 7.4 mais en considérant une norme $\bar{a} = 0{,}7$. Les observations astrométriques de l'étoile S2 ne sont pas représentées ici.

moment cinétique du candidat trou noir central sont $\bar{a} = 0{,}0^{+0{,}64+0{,}86}$, $i' = 68^{\circ+5^\circ+9^\circ}_{-20^\circ-28^\circ}$ et $\Omega' = -52^{\circ+17^\circ+33^\circ}_{-15^\circ-24^\circ}$, où les erreurs sont celles obtenues à 1σ et 2σ. Sachant cela, nous avons cherché à déterminer quel était l'impact astrométrique maximal de l'effet Lense-Thirring obtenu avec les valeurs de $(\bar{a},i',\Omega')$ autorisées par Broderick et al. (2011). Si on considère dans un premier temps l'ensemble des valeurs des trois paramètres possibles, contenues dans l'intervalle à $\pm 1\sigma$, l'effet Lense-Thirring maximal est atteint pour le triplet $(\bar{a},i',\Omega') = (0{,}64; 68^\circ + 5^\circ; -52^\circ - 15^\circ)$: les décalages astrométriques sont d'environ 5, 10 et 15 microsecondes d'angle au premier, second et troisième passage à l'apoastre,

respectivement. Si on considère cette fois-ci l'ensemble des valeurs des paramètres possibles, contenues dans l'intervalle à $\pm 2\sigma$, l'impact astrométrique maximal est atteint pour le triplet $(\bar{a},i',\Omega') = (0{,}86; 68° + 9°; -52° - 24°)$: les décalages sont d'environ 5, 12 et 18 microsecondes d'angle à la première, seconde et troisième période, respectivement. Tout cela montre qu'il sera difficile de contraindre fortement les paramètres du moment cinétique avec l'instrument *GRAVITY*, si on considère à la fois des observations astrométriques obtenues seulement sur trois périodes de S2 et des triplets $(\bar{a},i',\Omega')$ prédits par Broderick et al. (2011).

D'autre part, nous avons observé qu'il existait des dégénérescences de l'effet Lense-Thirring associées aux angles i' et Ω'. La plupart d'entre elles ne sont pas représentées Figs. 7.4 et 7.5 pour des raisons de visibilité. Tout d'abord, si on observe l'axe de rotation du trou noir par le haut ($i' = 0°$) ou par le bas ($i' = 180°$), on constate que l'amplitude de l'effet Lense-Thirring est la même quel que soit l'angle Ω' (voir courbes solides Figs. 7.4 et 7.5, pour $i' = [0°,180°]$). Si on observe cette fois-ci l'axe de rotation tel que $i' = 90°$, on constate qu'il existe dans ce cas une symétrie centrale par rapport au centre de l'écran de l'observateur. En effet, les amplitudes obtenues à $(i' = 90°,\Omega')$ et $(i' = 90°,180° + \Omega')$ sont identiques. Enfin, si on se place dans le cas où $(i',\Omega') = (45°,135°)$, l'amplitude obtenue est la même que celle observée à $(i',\Omega') = (135°,315°)$. On a donc également une dégénérescence entre $(i',\Omega') = (45°,\Omega')$ et $(i',\Omega') = (135°,180° + \Omega')$.

En résumé, il existe trois groupes de dégénérescences présents quelle que soit la norme du moment cinétique du trou noir $\bar{a}$ (sauf bien sûr pour $\bar{a} = 0$) :

— $(i' = 0°,\forall\Omega')$ et $(i' = 180°,\forall\Omega')$,
— $(i' = 90°,\Omega')$ et $(i' = 90°,180° + \Omega')$,
— (i',Ω') et $(180° - i',180° + \Omega')$ si $0° < i' < 90°$ ou $90° < i' < 180°$.

Ces dégénérescences ont également été mises en évidence, indépendamment, par Yu et al. (2016). En plus de ces dégénérescences, il existe des triplets $(\bar{a},i',\Omega')$ très similaires en terme d'amplitude de l'effet Lense-Thirring, et cela même lorsque la norme du moment cinétique diffère. Par exemple, pour les cas à $(\bar{a},i',\Omega') = (0{,}99; 135°; 45°)$ (courbe en pointillés Fig. 7.4) et $(\bar{a},i',\Omega') = (0{,}7; 90°; 135°)$ (courbe en tiret-point-points Fig. 7.5), nous trouvons des amplitudes qui atteignent environ 6, 15, 20 microsecondes d'angle à la première, seconde et troisième période de S2, respectivement.

À présent regardons les impacts spectroscopiques de l'effet Lense-Thirring. Ceux-ci sont visibles Figs. 7.6 et 7.7 pour plusieurs normes et directions du moment cinétique du trou noir. On remarque tout d'abord que l'effet est cette fois-ci maximal à proximité du périastre de S2. De plus, on constate que quels que soient les angles i' et Ω', l'effet du moment cinétique sur les mesures de vitesses radiales de l'étoile S2 est faible et inférieur à 1 km/s. Il est donc nécessaire d'avoir une précision meilleure ou proche de 1 km/s si l'on souhaite arriver à contraindre les paramètres du moment cinétique du trou noir avec la spectroscopie. Néanmoins, une telle précision n'est pas atteinte par les instruments actuellement en service. Précisons toutefois que celle envisagée pour l'*E-ELT* est de l'ordre de 1 km/s.

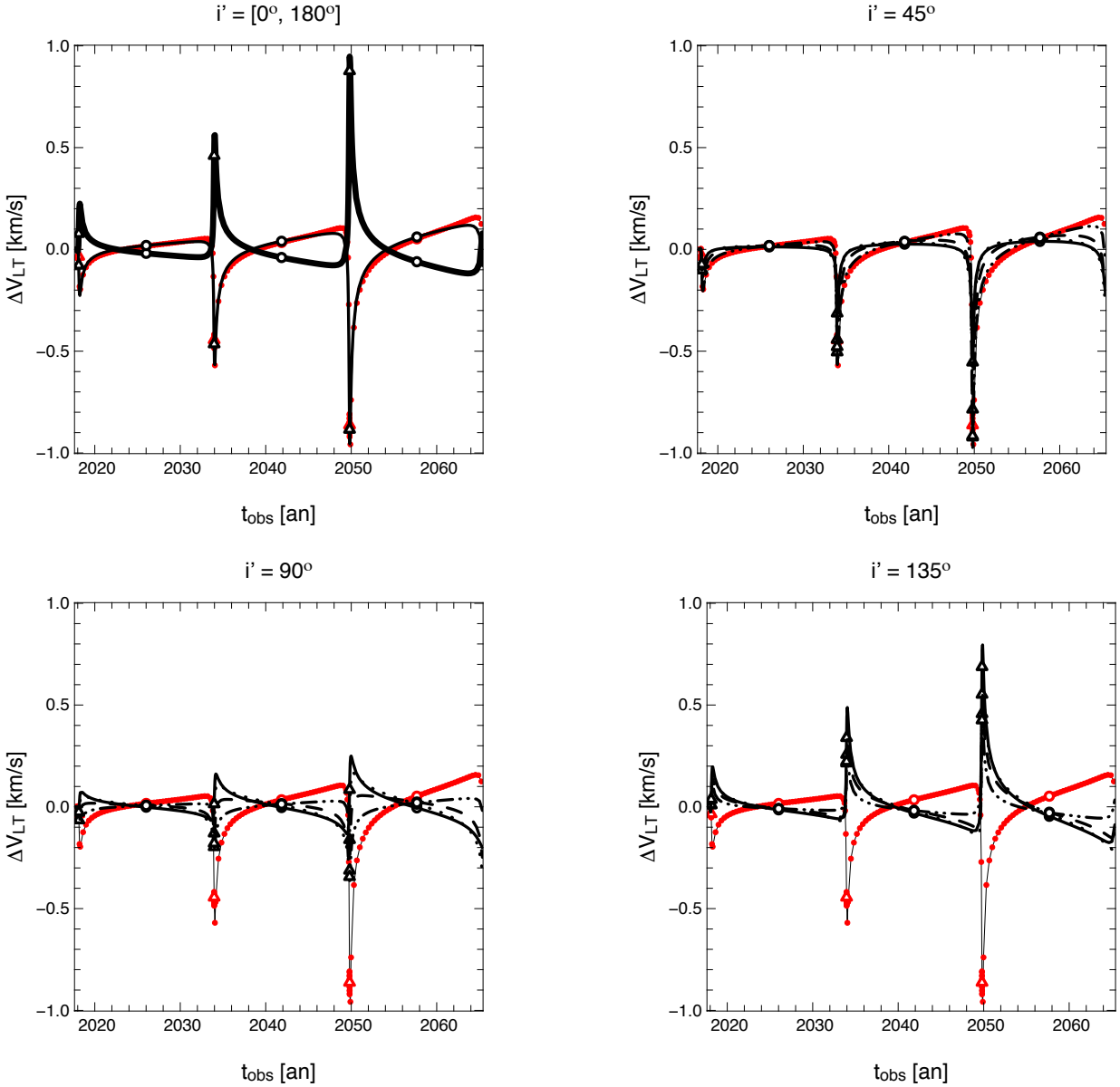

FIGURE 7.6 – Même légende que Fig. 7.4 mais en considérant cette fois-ci des mesures spectroscopiques. Contrairement à l'astrométrie, les courbes sont différentes pour $i' = 0°$ (trait plein épais) et $i' = 180°$ (trait plein fin). Néanmoins, l'effet Lense-Thirring est toujours identique quel que soit l'angle Ω' pour ces deux inclinaisons.

Les dégénérescences listées précédemment sont presque toutes brisées si l'on considère des mesures spectroscopiques. Par exemple, les impacts observés dans les cas à $(\bar{a},i',\Omega') = (0{,}99; 45°; 135°)$ et $(\bar{a},i',\Omega') = (0{,}99; 180° - 45°; 135°)$ sont différents, ce qui n'est pas le cas pour l'astrométrie : la différence maximale obtenue atteint environ 2 km/s à la troisième période. Les seules dégénérescences observées sont obtenues pour $i' = 0°$ ou $i' = 180°$. En effet, si $i' = 0°$ on obtient toujours la même amplitude de l'effet

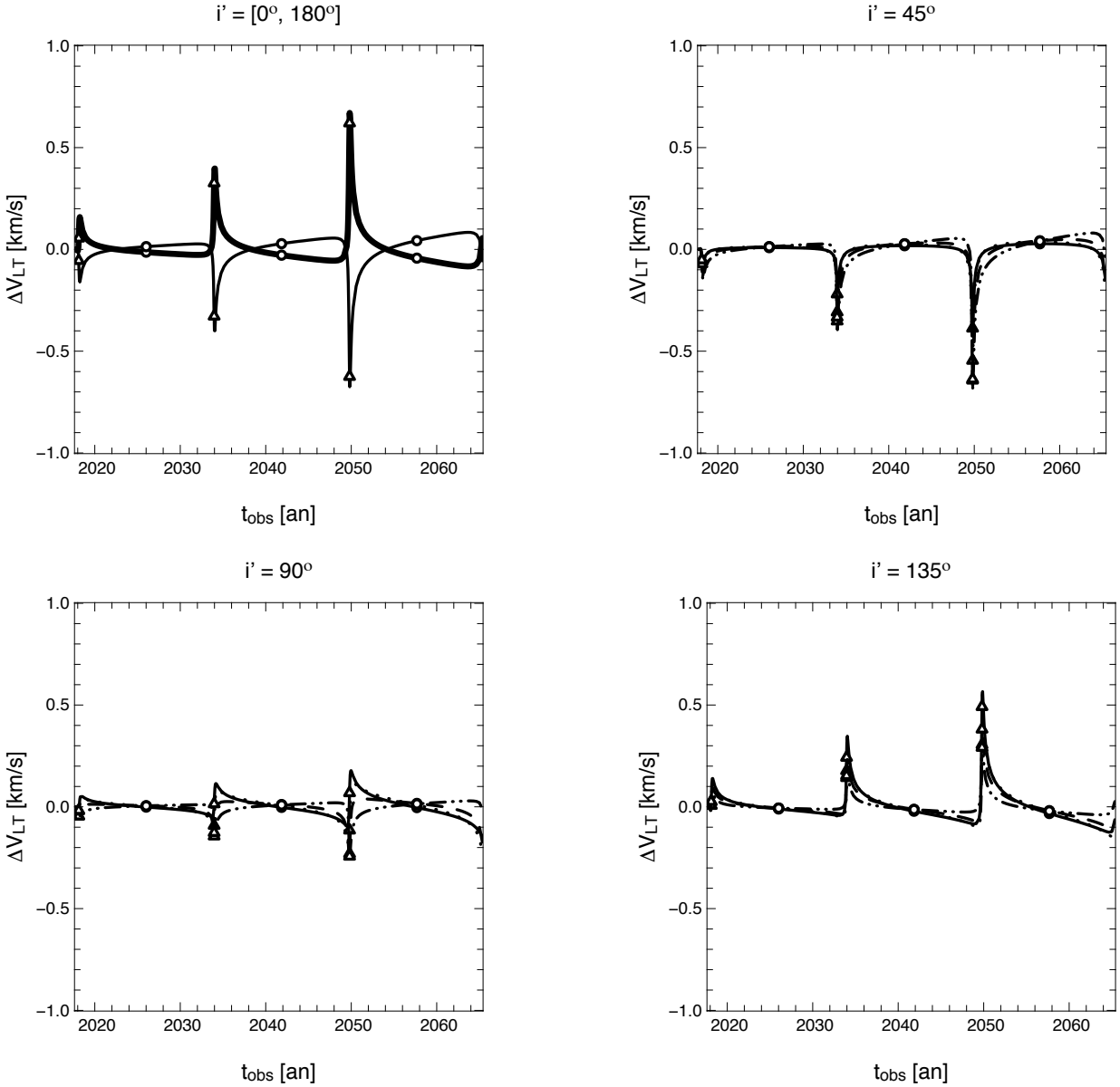

FIGURE 7.7 – Légende similaire à la Fig. 7.6 mais en considérant une norme $\bar{a} = 0{,}7$. Les observations spectroscopiques de l'étoile S2 ne sont pas représentées ici.

Lense-Thirring quel que soit l'angle Ω', de même pour $i' = 180°$ (voir courbes en trait plein épais et fin en haut à gauche sur les Figs. 7.6 et 7.7).

En conclusion de cette section, nous pouvons dire que si l'on souhaite contraindre les paramètres du moment cinétique du trou noir, il est préférable de considérer à la fois les mesures astrométriques et spectroscopiques obtenues aux périastre et apoastre de S2. D'une part, ces deux observables mesurées au périastre permettront d'optimiser la contrainte des paramètres orbitaux de l'étoile et des masse et distance à l'observateur

du trou noir. D'autre part, les observations astrométriques obtenues à l'apoastre de S2 permettront de contraindre les paramètres du moment cinétique. Néanmoins, précisons que la contrainte de l'effet Lense-Thirring ne sera possible que si le candidat trou noir central possède des paramètres ($\bar{a}$,i',Ω') privilégiés comme par exemple ceux utilisés pour simuler les observations de l'étoile S2 : ($\bar{a}$,i',Ω') = (0,99; 45°; 160°). Grâce à Yu et al. (2016), on peut notamment estimer que si l'on considère un taux de rotation élevé, il existe environ 40% de couples (i',Ω') qui semblent favorables à la détection du moment cinétique.

7.3.2 Méthode et résultats

Dans cette nouvelle section, nous souhaitons déterminer si il est possible de contraindre les paramètres du moment cinétique du trou noir avec des observations obtenues sur l'étoile S2, dont les précisions astrométrique et spectroscopique sont réalistes : 10 − 30 microsecondes d'angle et 10 km/s. Contrairement à Zhang et al. (2015) et Yu et al. (2016), nous cherchons ici à estimer ces paramètres en considérant un modèle qui n'utilise pas de tracé de rayons, et donc qui ne nécessite pas un temps de calcul trop important (trois jours environ). Plus précisément, nous choisissons d'utiliser le modèle F qui est celui permettant de reproduire au mieux les observations obtenues avec le modèle G. On rappelle que ce dernier utilise le tracé de rayons et que les différences maximales entre ces deux modèles sont d'environ 7 microsecondes d'angle et 5 km/s aux passages au périastre. Malgré ces différences, le pourcentage de χ^2_r supérieurs au $\chi^2_{r,lim}$, dans le cas où l'on considère la série d'observations obtenue sur trois périodes de S2, est seulement d'environ 10%. Cela montre que le modèle F semble adapté pour décrire les observations obtenues avec le modèle G, puisque ce pourcentage est proche des 5% que l'on atteindrait dans le cas où le modèle arrive à reproduire correctement les observations (voir Fig. 7.2).

La procédure d'ajustement choisie pour contraindre l'ensemble des paramètres du modèle (12 paramètres dont 3 du moment cinétique du trou noir) est la méthode *AIES*. Étant donné les contraintes déjà connues sur les paramètres orbitaux de l'étoile S2 ainsi que celles sur les masse et distance au Système Solaire du trou noir, nous choisissons de faire varier ces paramètres dans un domaine dont les bornes sont définies par $\mathbf{P}_{\text{Gillessen}} \pm 1\boldsymbol{\sigma}_{\text{Gillessen}}$. Quant aux paramètres du moment cinétique du trou noir, ceux-ci varient dans leur domaine de variation respectif : $\bar{a} \in [0,1]$, $i' \in [0°,180°]$ et $\Omega' \in [0°,360°]$.

Les résultats de différents ajustements du modèle F sont donnés Table 7.4, où l'on a considéré quatre séries d'observations de l'étoile S2. Notons que la contrainte sur la masse du trou noir y est également reportée. Celle-ci est obtenue en utilisant la troisième loi de Képler avec les paramètres ajustés R_0, a_{dga} et T.

Les distributions de probabilité à une et deux dimensions des différents paramètres sont présentées Figs. 7.8 et 7.9 pour, respectivement, $\bar{a} = 0{,}99$ et $\bar{a} = 0{,}7$, et pour des observations obtenues sur trois périodes de S2 avec des précisions (σ_a,σ_V) = (10 μas, 10 km/s). Les résidus de ces deux ajustements sont visibles Fig. 7.10.

On constate que les résultats obtenus avec les deux séries d'observations de l'étoile S2

$(\bar{a}; N_P; \sigma_a; \sigma_V)$	$(0{,}99; 3; 10; 10)$	$(0{,}7; 3; 10; 10)$	$(0{,}99; 3; 30; 10)$	$(0{,}99; 2; 10; 10)$
δT [hr]	$-0{,}205^{+0{,}316}_{-0{,}318}$	$-0{,}375^{+0{,}313}_{-0{,}361}$	$-0{,}535^{+0{,}355}_{-0{,}389}$	$-1{,}007^{+0{,}357}_{-0{,}384}$
δa_{dga} [μas]	$-2{,}082^{+3{,}006}_{-3{,}164}$	$0{,}617^{+3{,}327}_{-3{,}394}$	$9{,}968^{+9{,}038}_{-9{,}309}$	$4{,}660^{+3{,}950}_{-4{,}284}$
$\delta e \times 10^{-6}$	$-1{,}069^{+6{,}021}_{-6{,}265}$	$7{,}716^{+7{,}323}_{-6{,}599}$	$25{,}093^{+18{,}953}_{-18{,}545}$	$18{,}203^{+8{,}296}_{-9{,}440}$
δt_p [hr]	$0{,}339^{+0{,}344}_{-0{,}353}$	$0{,}622^{+0{,}387}_{-0{,}334}$	$1{,}034^{+0{,}487}_{-0{,}503}$	$1{,}376^{+0{,}405}_{-0{,}407}$
$\delta\Omega \times 10^{-2}$ [°]	$0{,}156^{+0{,}286}_{-0{,}290}$	$0{,}336^{+0{,}303}_{-0{,}310}$	$0{,}645^{+0{,}867}_{-0{,}844}$	$0{,}393^{+0{,}401}_{-0{,}414}$
$\delta\omega \times 10^{-2}$ [°]	$0{,}098^{+0{,}264}_{-0{,}261}$	$0{,}186^{+0{,}307}_{-0{,}308}$	$1{,}025^{+0{,}761}_{-0{,}842}$	$0{,}570^{+0{,}364}_{-0{,}400}$
$\delta i \times 10^{-2}$ [°]	$0{,}145^{+0{,}196}_{-0{,}196}$	$-0{,}023^{+0{,}206}_{-0{,}207}$	$-0{,}755^{+0{,}522}_{-0{,}513}$	$-0{,}355^{+0{,}240}_{-0{,}237}$
δR_0 [pc]	$3{,}094^{+3{,}416}_{-3{,}280}$	$4{,}100^{+3{,}765}_{-3{,}509}$	$6{,}134^{+3{,}873}_{-3{,}712}$	$9{,}301^{+3{,}957}_{-3{,}805}$
$\delta M_{\rm TN} \times 10^4$ [$M_\odot$]	$0{,}458^{+0{,}529}_{-0{,}508}$	$0{,}565^{+0{,}585}_{-0{,}548}$	$1{,}068^{+0{,}572}_{-0{,}566}$	$1{,}494^{+0{,}618}_{-0{,}576}$
$\bar{a}$	$0{,}931_{-0{,}113}$	$0{,}770^{+0{,}111}_{-0{,}139}$	$0{,}986_{-0{,}255}$	$0{,}980_{-0{,}212}$
$\delta\Omega'$ [°]	$35{,}182^{+26{,}249}_{-21{,}530}$	$51{,}049^{+27{,}432}_{-28{,}105}$	$82{,}122^{+41{,}169}_{-40{,}054}$	$96{,}461^{+45{,}497}_{-32{,}060}$
$\delta i'$ [°]	$-0{,}334^{+14{,}990}_{-13{,}335}$	$7{,}623^{+15{,}189}_{-14{,}763}$	$-1{,}981^{+21{,}828}_{-37{,}070}$	$-3{,}166^{+27{,}761}_{-24{,}978}$

TABLE 7.4 – Contraintes obtenues après ajustement du modèle F aux observations astrométriques et spectroscopiques de l'étoile S2 générées avec le modèle G. Les valeurs données dans la table (excepté pour $\bar{a}$) sont obtenues en calculant la différence entre les paramètres trouvés après ajustement et ceux utilisés pour générer les observations de l'étoile S2 avec le modèle G. Les erreurs associées à chaque paramètre sont celles estimées à 1σ par la méthode *AIES*. Le paramètre N_P correspond au nombre de périodes de S2 considéré pour effectuer l'ajustement. Quatre séries d'observations de l'étoile sont considérées, chacune d'elle étant obtenue en prenant une direction du moment cinétique du trou noir égale à $(i',\Omega') = (45°,160°)$.

considérées Figs. 7.8 et 7.9 sont satisfaisants puisque l'on arrive à ajuster correctement la totalité des paramètres du modèle. L'ensemble des paramètres ajustés sont notamment situés à au plus 2σ des paramètres utilisés pour générer les observations. Pour ce qui est du moment cinétique du trou noir, nous trouvons dans les deux cas ($\bar{a} = 0{,}99$ et $\bar{a} = 0{,}7$) des normes $\bar{a}$ dont l'erreur à 1σ est de l'ordre de 0,1. Les erreurs évaluées à 1σ sur les angles i' et Ω' sont, elles, d'environ 15 et 30 degrés, respectivement. Les autres paramètres du trou noir, à savoir sa masse et sa distance au Système Solaire, sont également correctement contraints à l'aide du modèle F. En particulier, l'incertitude à 1σ est de l'ordre de 3,5 parsecs et $0{,}5 \times 10^4$ masses solaires. Si on note respectivement ces dernières σ_{R_0} et $\sigma_{M_{\rm TN}}$, le rapport σ_{R_0}/R_0 est égal à environ 4×10^{-4} et le rapport $\sigma_{M_{\rm TN}}/M_{\rm TN}$ est égal à environ 10^{-3}. Si l'on compare ces résultats à ceux obtenus par Gillessen et al. (2009b), nous gagnons un

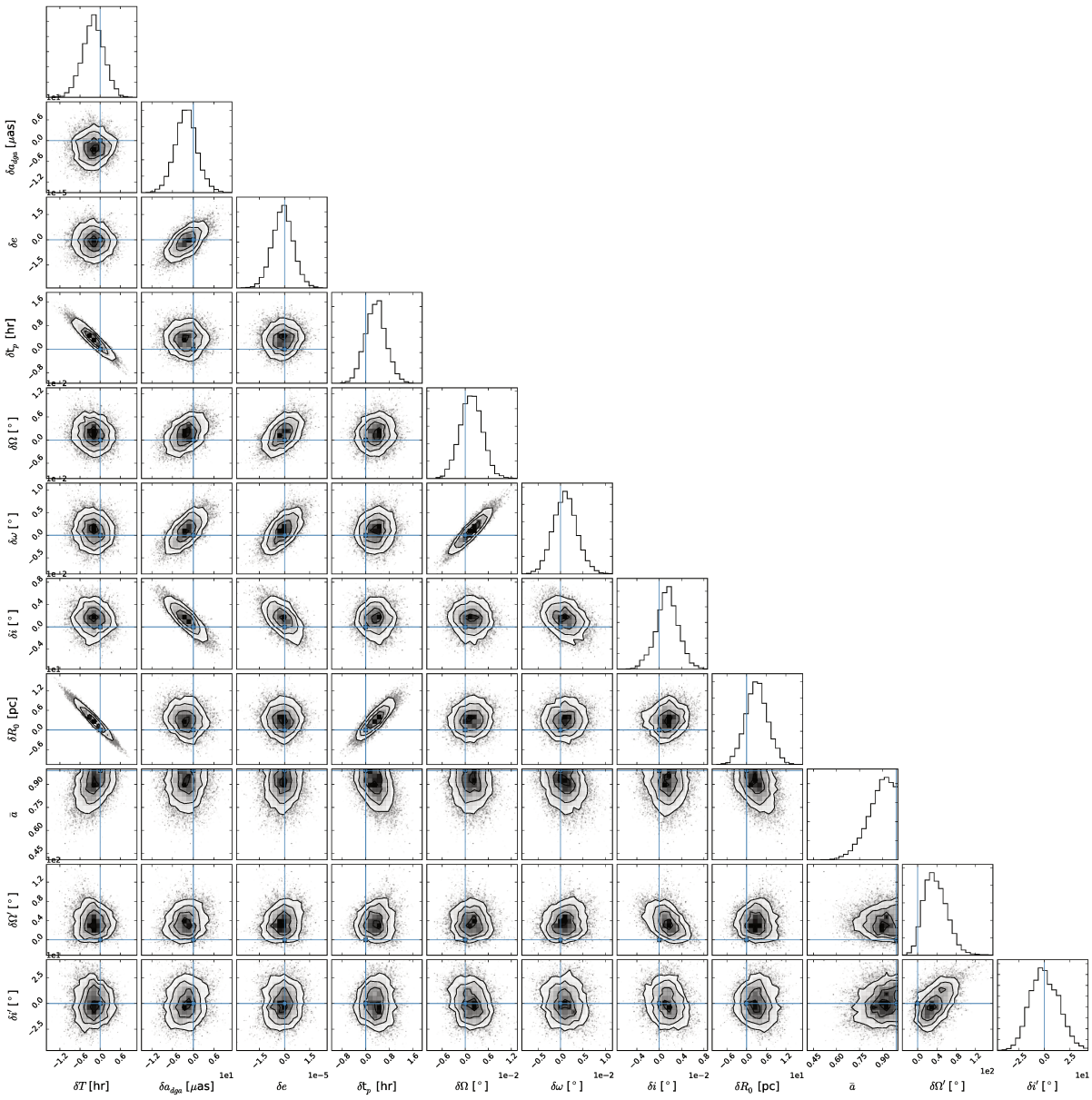

Figure 7.8 – Distributions de probabilité à une et deux dimensions des paramètres obtenus après ajustement du modèle F aux 47 ans d'observation de l'étoile S2 générées avec le modèle G à des précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as},\ 10\ \text{km/s})$. Les paramètres du moment cinétique du trou noir considérés ici sont $(\bar{a},i',\Omega') = (0{,}99; 45°; 160°)$. Les points et lignes bleus sur chaque sous-figure correspondent aux paramètres utilisés pour générer les observations astrométriques et spectroscopiques de l'étoile avec le modèle G. Les contours sur les distributions à deux dimensions représentent les régions les plus denses. Précisons que les distributions de probabilité obtenues constituent les distributions de la position, dans l'espace des paramètres, des différents *walkers* utilisés lors de la simulation *MCMC*.

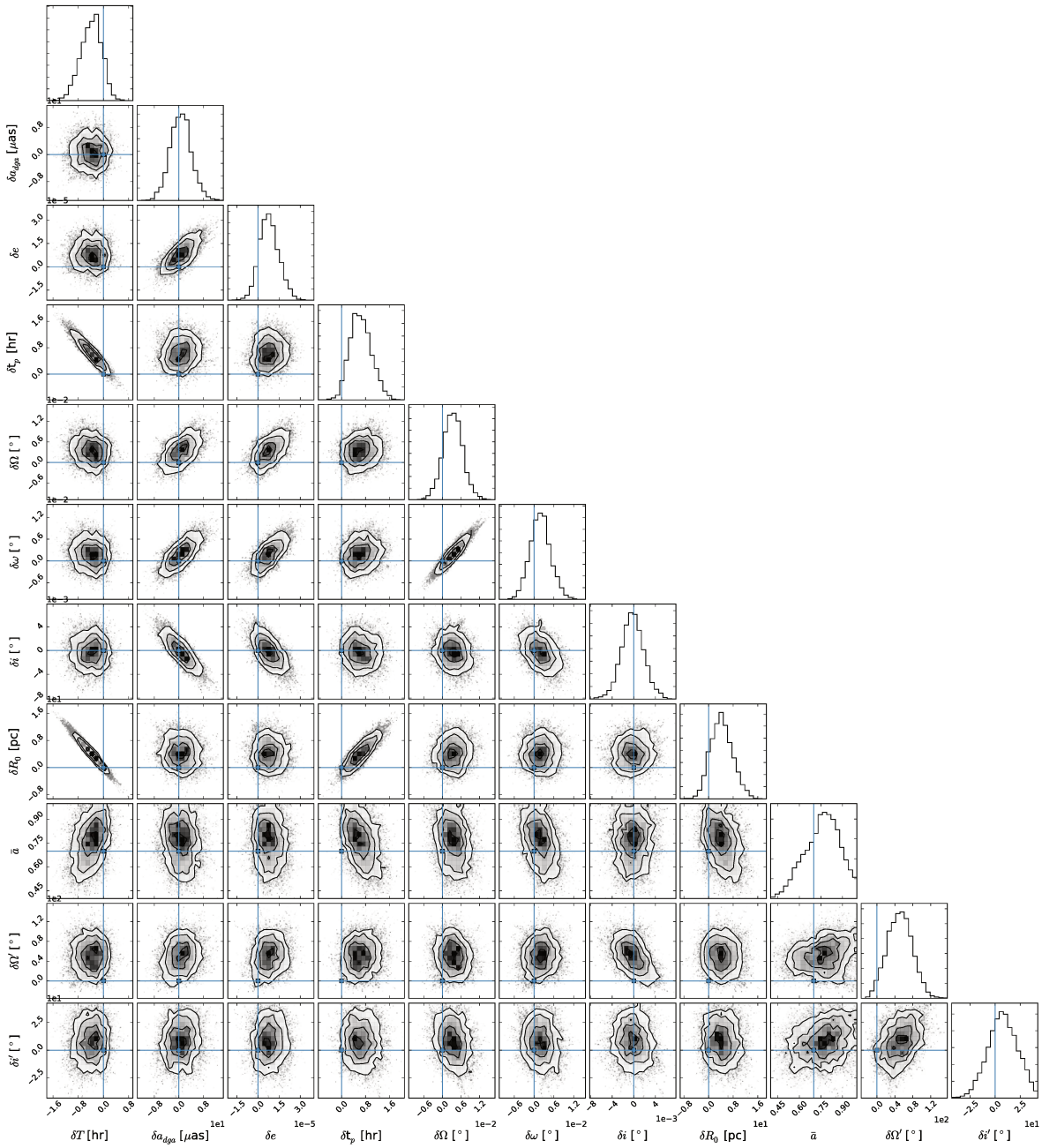

FIGURE 7.9 – Légende similaire à la Fig. 7.8 mais pour $\bar{a} = 0{,}7$.

facteur d'environ 100 sur l'incertitude de mesure des distance et masse du trou noir.

Yu et al. (2016) considèrent des ajustements effectués sur des observations astrométriques et spectroscopiques de l'étoile S2 obtenues également sur trois périodes et générées avec un modèle similaire à celui du modèle G (leur nombre de dates d'observation est de 120, contre 192 dans notre étude). Les contraintes sur les paramètres sont estimées,

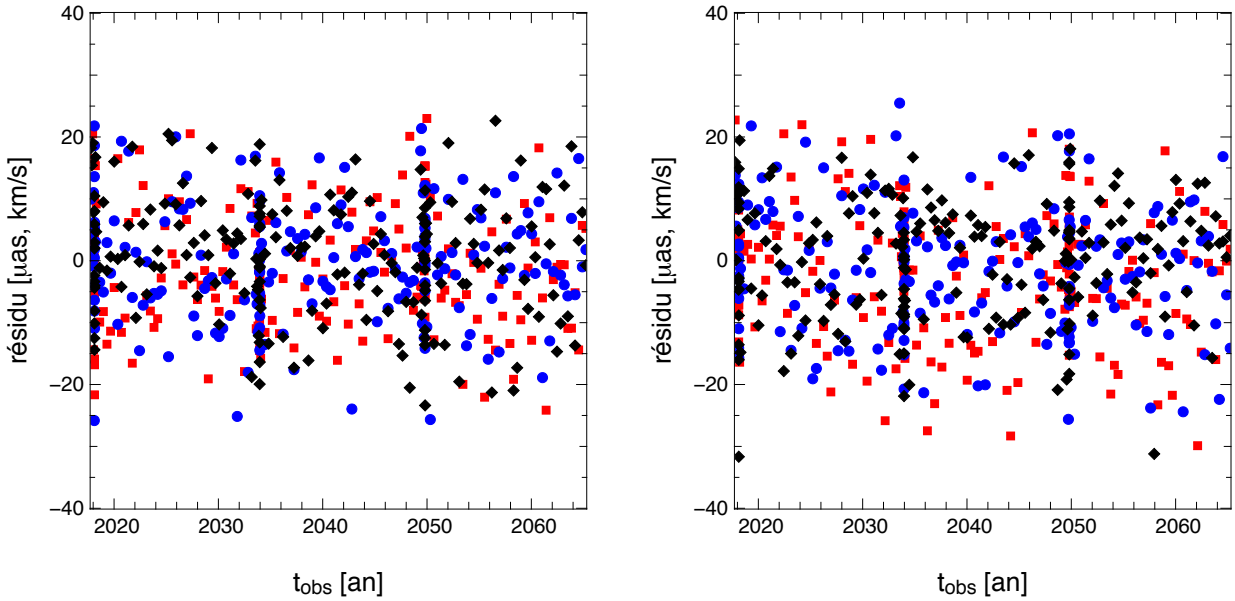

Figure 7.10 – Résidus astrométriques et spectroscopiques des ajustements obtenus aux Fig. 7.8 (à gauche) et 7.9 (à droite). Les carrés rouges et les ronds bleus représentent les résidus estimés pour les coordonnées astrométriques α_s et δ_s, respectivement. Les résidus obtenus pour la vitesse radiale sont ceux représentés par les losanges noirs.

dans leur cas, en ajustant le modèle utilisant le tracé de rayons, c'est-à-dire celui considéré pour générer leurs observations. Par ailleurs, les paramètres du moment cinétique du trou noir choisis dans leur étude sont proches de ceux utilisés Fig. 7.8 : $(\bar{a},i',\Omega') = (0{,}99; 49°; 125°)$. Étant donné une précision de $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 10\ \text{km/s})$, on constate que nos résultats sont très similaires à ceux obtenus par Yu et al. (2016). En particulier, à ces précisions, ces derniers trouvent une erreur à 1σ d'environ 0,1 pour le paramètre $\bar{a}$. De plus, les rapports σ_{R_0}/R_0 et $\sigma_{M_{\text{TN}}}/M_{\text{TN}}$ que ces auteurs déterminent sont respectivement d'environ 3×10^{-4} et 10^{-3}.

L'étude que nous avons menée ici montre donc qu'il est possible de contraindre fortement le moment cinétique adimensionné ainsi que les masse et distance du trou noir, même en utilisant un modèle alternatif ne calculant pas les géodésiques de genre lumière, c'est-à-dire qui ne nécessite pas de temps de calcul important. Les ajustements d'un tel modèle permettent en particulier de trouver des contraintes sur les paramètres similaires à celles obtenues avec un modèle utilisant le tracé de rayons. Néanmoins, étant donné les écarts astrométriques et spectroscopiques du modèle F au modèle G, il ne sera pas possible de l'utiliser si l'on souhaite contraindre des observations obtenues à des précisions meilleures que celles considérées dans notre étude ($\sigma_a < 10\ \mu$as et/ou $\sigma_V < 10$ km/s). On sait notamment que pour $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 1\ \text{km/s})$, le modèle F échoue à décrire les observations au bout de 18 ans (si on considère le cas à 90%, Table 7.3).

Comme mentionné précédemment, nous avons également considéré des observations

obtenues avec une précision astrométrique de 30 microsecondes d'angle (voir Table 7.4). Dans ce cas nous avons des contraintes sur la norme du moment cinétique du trou noir d'environ 0,26. Les angles i' et Ω' sont contraints avec une incertitude d'environ 30 et 40 degrés, respectivement. Notons par ailleurs que nous obtenons des incertitudes de mesures similaires pour les masse et distance du trou noir qu'avec celles évaluées pour une précision de 10 microsecondes d'angle.

Les études menées par Zhang et al. (2015) et Yu et al. (2016) sont similaires excepté que les premiers auteurs ajustent seulement cinq paramètres, à savoir les paramètres du trou noir, et fixent les paramètres orbitaux de l'étoile. Dans ces deux articles, des précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 1\ \text{km/s})$ sont considérées et on constate que tous deux trouvent des erreurs à 1σ de l'ordre de 0,1 pour le moment cinétique adimensionné, d'environ 0,6 parsec pour la distance du trou noir à l'observateur et d'environ 10^3 masses solaires pour sa masse. Comme mentionné dans Yu et al. (2016), on remarque qu'une meilleure précision spectroscopique n'a pas permis d'augmenter la contrainte sur le paramètre $\bar{a}$ puisqu'une incertitude de 0,1 est également obtenue avec $\sigma_V = 10$ km/s. En revanche, les auteurs ont gagné un facteur d'environ 5 sur l'estimation des incertitudes des paramètres R_0 et M_{TN}.

Si maintenant on considère les résultats obtenus pour $(\sigma_a,\sigma_V) = (1\ \mu\text{as}, 10\ \text{km/s})$ par Yu et al. (2016), on constate que l'erreur estimée à 1σ pour la norme du moment cinétique est diminuée et vaut environ 10^{-2}. Cependant, les incertitudes évaluées pour les distance et masse du trou noir sont proches de celles obtenues aux précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 10\ \text{km/s})$: environ 2 parsecs et $0{,}3 \times 10^4$ masses solaires, respectivement.

Yu et al. (2016) ont donc mis en avant le fait qu'améliorer la précision spectroscopique, dans le cas d'observations obtenues sur l'étoile S2, permet de mieux contraindre les paramètres de distance et de masse du trou noir, tandis qu'améliorer la précision astrométrique permet d'améliorer fortement l'estimation du moment cinétique adimensionné. Rappelons, cependant, que ce dernier ne peut être contraint que pour des directions du moment cinétique privilégiées (voir Sect. 7.3).

Les contraintes des paramètres estimées en considérant des observations générées sur deux périodes de l'étoile S2, et pour $\bar{a} = 0{,}99$ et $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 10\ \text{km/s})$, sont également présentées Table 7.4. On constate que l'incertitude de mesure obtenue sur la norme du moment cinétique du trou noir est d'environ 0,2. La direction est quant à elle contrainte à environ 25 et 40 degrés pour les angles i' et Ω', respectivement. Si l'on souhaite contraindre le taux de rotation du trou noir en seulement une période de S2, il faudrait dans ce cas avoir des précisions astrométriques et spectroscopiques meilleures que celles autorisées par la génération d'instruments à venir. En particulier, Zhang et al. (2015) suggèrent qu'il serait nécessaire d'avoir des précisions telles que $\sigma_a \lesssim 3\ \mu$as et/ou $\sigma_V \lesssim 0{,}3$ km/s pour arriver à contraindre ce paramètre.

Afin de détecter l'effet Lense-Thirring sur les orbites des étoiles du Centre Galactique en un temps d'observation convenable, il est donc primordial de détecter de nouvelles étoiles avec l'instrument *GRAVITY* qui soient plus près de la source centrale que l'étoile S2. Des études sur le sujet ont notamment également été effectuées par Zhang et al. (2015)

et Yu et al. (2016) qui ont considéré des observations d'étoiles hypothétiques. Ces auteurs montrent qu'il est possible d'atteindre des incertitudes $\sigma_{\bar{a}} \lesssim 0{,}02$ si l'on observe des étoiles sur $\lesssim 10$ ans avec des précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as},\ 1-10\ \text{km/s})$, et dont les demi-grand axe et excentricité vérifient $a_{\text{dga}} \lesssim 40$ mas et $e \gtrsim 0{,}95$, respectivement.

Ajoutons que les travaux effectués par ces auteurs ainsi que ceux effectués ici négligent les effets dus à la masse étendue dont nous avions discuté à la fin de la Sect. 7.2.2. Néanmoins, on ne dispose pas à l'heure actuelle d'estimation de cette masse. Si celle-ci s'avère faible, il est possible que ces travaux restent valables. En revanche, si l'on souhaite détecter l'effet Lense-Thirring en présence d'effets newtoniens importants, il sera nécessaire de découvrir des étoiles remplissant les conditions données par Merritt et al. (2010) et Sadeghian & Will (2011), ou, par exemple, de contraindre les divers paramètres du modèle, y compris ceux de la distribution de la masse étendue, en considérant des observations obtenues sur plusieurs étoiles du Centre Galactique (Weinberg et al. 2005).

En conclusion des résultats qui ont été obtenus dans cette section, nous pouvons donc dire que nous avons montré qu'il était possible, grâce à un modèle ne nécessitant pas de tracé de rayons, de contraindre $\bar{a}$, i' et Ω' avec une incertitude d'environ 0,1, 15 degrés et 30 degrés, respectivement, et cela pour des observations obtenues sur trois périodes de S2 et des précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as},\ 10\ \text{km/s})$. D'autre part, nous avons également montré que nos résultats étaient similaires à ceux obtenus avec un modèle utilisant le tracé de rayons. Cela signifie que l'on pourra considérer le modèle F pour contraindre les différents paramètres aux observations acquises sur l'étoile S2 avec l'instrument *GRAVITY*. Cependant, on note que certains paramètres ajustés Table 7.2.2 sont situés à plus de 2σ de la solution à trouver. Il faudra donc rester prudent quant à l'utilisation du modèle F puisque celui-ci ne permet pas de reproduire complètement les observations de l'étoile S2 obtenues avec le modèle G. Le modèle F pourra par exemple être utilisé comme premier estimateur des divers paramètres, si l'on souhaite ensuite les contraindre avec le modèle le plus complet, à savoir le modèle G. En effet, la réduction de l'espace des paramètres par le modèle F permettra de minimiser le temps de calcul lors de l'ajustement du modèle G aux données.

De plus, nous avons démontré qu'il était également possible de contraindre le moment cinétique adimensionné du trou noir même si celui-ci est proche de 0,7. Les paramètres de distance et masse du trou noir sont également très bien contraints avec une incertitude de 0,04% et 0,1%, respectivement.

Les contraintes du moment cinétique obtenues à l'aide des observations générées sur trois périodes de S2 pour $(\sigma_a,\sigma_V) = (30\ \mu\text{as},\ 10\ \text{km/s})$, ainsi que celles générées sur deux périodes de S2 pour $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as},\ 10\ \text{km/s})$ sont similaires et atteignent environ $0{,}2-0{,}26$ pour la norme du moment cinétique, environ 30 degrés pour l'angle i' et environ 40 degrés pour l'angle Ω'.

Ajoutons également que si l'on souhaite contraindre le moment cinétique du trou noir à l'aide d'observations obtenues pour des couples de précisions vérifiant $(\sigma_a,\sigma_V) = (\leqslant 10\ \mu\text{as},\ \leqslant 10\ \text{km/s})$, il est nécessaire d'utiliser cette fois-ci le modèle avec tracé de rayons (le modèle

G) puisque les erreurs commises par le modèle F sont trop élevées pour décrire de telles observations.

7.4 Conclusions du chapitre

En conclusion de ce chapitre, nous souhaitons récapituler quels effets relativistes pourront être détectés grâce à l'observation de l'étoile S2 par les instruments actuels et futurs (voir Table 7.1).

Tout d'abord, les décalages spectraux relativistes correspondant aux décalages Doppler transverse et gravitationnel pourront être détectés dès quelques mois d'observation avec des précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10 - 100\ \mu\text{as},\ 1 - 10\ \text{km/s})$. Si l'on considère le couple de précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as},\ 10\ \text{km/s})$, ces effets pourront être mis en évidence grâce à la combinaison des observations obtenues par les instruments *GRAVITY* et *SINFONI* au *VLT*. Notons que les mesures spectroscopiques pourront également être obtenues à l'aide de l'instrument *NIRSPEC* au Keck.

Les effets de lentilles gravitationnelles seront détectables au bout de quelques années aux précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as},\ 10\ \text{km/s})$. Les instruments *GRAVITY* et *SINFONI* pourront également être utilisés pour détecter ces effets.

Les effets *HOPC* pourront être mis en évidence au bout de quelques mois d'observation pour des précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as},\ 1\ \text{km/s})$. Ces effets seront donc observables dans quelques années grâce à la combinaison des instruments *GRAVITY* et *MICADO*.

L'avancée du périastre pourra être détectée au bout d'une dizaine d'années si l'on considère les précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (30\ \mu\text{as},\ 1 - 100\ \text{km/s})$. Mentionnons, cependant, que cet effet pourra naturellement être mis en évidence à l'aide de meilleures précisions astrométriques, il faudra pour cela considérer d'autres modèles que ceux utilisés dans ce chapitre qui ne négligent pas les effets de courbure sur le photon (voir Sect. 7.2.2). L'avancée du périastre pourra ainsi être détecté plus tôt aux précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as},\ 1 - 100\ \text{km/s})$. Cette détection pourra être effectuée à l'aide des instruments *GRAVITY* et *SINFONI*.

Enfin, l'effet Lense-Thirring pourra être contraint au bout d'une quarantaine d'années aux précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as},\ 10\ \text{km/s})$. Des incertitudes de 0,1 sur la norme du moment cinétique du trou noir et d'environ 15 et 30 degrés respectivement sur les deux angles i' et Ω' donnant la direction de celui-ci pourront être atteintes. Les instruments *GRAVITY* et *SINFONI* pourront encore une fois être utilisés pour effectuer de telles mesures. Si l'on souhaite en revanche détecter cet effet au bout d'une période de S2, à savoir une dizaine d'années, il faudra pour cela utiliser des précisions vérifiant $\sigma_a \lesssim 3\ \mu\text{as}$ et/ou $\sigma_V \lesssim 0{,}3\ \text{km/s}$. Cependant, de telles précisions ne sont à l'heure actuelle pas envisagées.

Quatrième partie

Vers une interprétation complète des données *GRAVITY*

Présentation de la partie

Dans cette dernière partie de la thèse nous allons tout d'abord présenter un nouveau modèle d'orbites relativistes. On rappelle que le modèle G introduit dans la partie précédente néglige des effets de lentilles gravitationnelles tels que les images secondaires et l'amplification lumineuse de l'image primaire. Cependant, nous verrons que pour des étoiles autres que S2, ces effets ne peuvent pas être négligés. C'est pour cette raison que nous mettons en place ici un nouveau modèle d'orbites.

Dans un second temps, nous allons utiliser ce modèle pour étudier les effets de lentilles gravitationnelles au Centre Galactique. Ensuite, nous discutons de la possibilité de contraindre certains paramètres de l'orbite de l'étoile ou de l'objet compact central à l'aide de ces effets. Pour finir, nous parlons de ce qu'il faudra apporter à ce nouveau modèle, si l'on souhaite reproduire au mieux les observations de l'instrument *GRAVITY*.

Dans une dernière section, nous étudions si les positions astrométriques obtenues avec *GRAVITY* pourront être affectées par les constituants du Système Solaire. En effet, il est possible que les effets induits par ce dernier, tels que la perturbation de la trajectoire des photons par le Soleil, puissent affecter les observations obtenues avec l'instrument. Il serait dans ce cas nécessaire de tenir compte de ces effets lors de futurs traitements de données.

Chapitre 8

Modèle d'orbites relativistes en relativité générale complète

Sommaire

8.1 Introduction au nouveau modèle d'orbites 199
8.2 Zone 1 : prise en compte des images primaire et secondaire . 201
8.2.1 Calcul de l'image primaire 202
8.2.2 Calcul de l'image secondaire 207
8.2.3 Résolutions des images primaire et secondaire 210
8.2.4 Limites de la Zone 1 213
8.3 Zone 2 : la zone dangereuse 214
8.4 Zone 3 : le modèle G 215

8.1 Introduction au nouveau modèle d'orbites

Contrairement au modèle G utilisé dans la partie précédente pour simuler les observations de l'étoile S2 (voir Sect. 6.1.2), le nouveau modèle développé ici prend en compte des effets de lentilles gravitationnelles supplémentaires correspondant aux images secondaires et à l'amplification de l'image primaire. Ces deux derniers sont négligeables dans le cas de S2 mais nous verrons que ce n'est plus le cas lorsqu'une étoile est située très près du trou noir ou en arrière plan de celui-ci. En vue de la possible détection par l'instrument *GRAVITY* de nouvelles étoiles, il est important de développer un modèle plus robuste que le modèle G.

Étant donné l'erreur astrométrique nominale de *GRAVITY* de 10 microsecondes d'angle, nous fixons l'erreur maximale pouvant être commise par ce modèle à environ 1 microseconde d'angle. Le choix de cette dernière est fait pour éviter d'éventuelles erreurs systématiques dans les ajustements des modèles d'orbites. D'autre part, nous choisissons

de ne considérer dans ce modèle que des étoiles situées entre 10^2 et 10^7 unités géométriques du trou noir. La limite inférieure vient du fait que la distance minimale d'une étoile au trou noir pouvant être atteinte sans que celle-ci ne soit détruite par les forces de marées générées par le trou noir est d'environ 100 unités géométriques. Pour évaluer cette distance nous avons calculé la limite de Roche donnée par $d = R_S\,(16\rho_{\rm TN}/\rho_\star)^{\frac{1}{3}}$ où le rayon de Schwarzschild R_S correspond au rayon du trou noir, $\rho_{\rm TN}$ est la masse volumique du trou noir égale à $M_{\rm TN}/(4/3\pi R_s^3)$, et $\rho_\star$ la masse volumique de l'étoile. Dans notre exemple, nous calculons la quantité $\rho_\star = M_\star/(4/3\pi R_\star^3)$ en utilisant les propriétés physiques obtenues sur l'étoile S2 par Martins et al. (2008) : $M_\star \approx 14 M_\odot$ et $R_\star \approx 7 R_\odot$, pour une température effective de l'étoile de 30000 K. La limite supérieure est, elle, fixée de telle sorte que l'ensemble des orbites des étoiles S ayant pu être contraintes par Gillessen et al. (2009b) soient comprises dans le modèle.

L'enjeu du modèle mis en place dans ce chapitre est d'arriver à simuler des observations astrométriques avec une précision inférieure ou proche de 1 microseconde d'angle, tout en optimisant le temps de calcul. Précisons que l'optimisation faite ici ne considère que des calculs effectués avec un seul cœur (2,9 GHz intel Core i7). La seconde étape que nous envisageons de faire est évidemment de paralléliser le calcul de l'ensemble des cartes/images effectué dans le modèle pour simuler les positions astrométriques.

Comme nous le verrons ci-après, nous disposons de plusieurs méthodes, plus ou moins précises et plus ou moins intensives en ressource, permettant de simuler les observations de l'instrument *GRAVITY*. Néanmoins, aucune d'entre elles n'offre un rapport précision/rapidité qui soit satisfaisant dans l'ensemble de l'espace couvert par les étoiles distantes de 10^2 à 10^7 unités géométriques du trou noir. Afin de minimiser le temps nécessaire au calcul du modèle (sur un seul cœur) tout en conservant une précision inférieure ou de l'ordre de 1 microseconde d'angle, nous découpons l'espace en trois zones et utilisons dans chacune d'elle une méthode de simulation d'observations particulière, qui satisfasse aux objectifs. Dans la première zone, les images secondaires ne sont pas négligeables, nous y simulons donc les positions apparentes de l'étoile en considérant à la fois les images primaire et secondaire. Dans la deuxième zone, nous ne simulons pas les observations de l'étoile pour des raisons de temps de calcul. En effet, pour atteindre la précision que nous nous sommes fixée, il est nécessaire de considérer des images de taille supérieure ou de l'ordre de 1000×1000 pixels, ce qui nécessite des temps de calculs très longs. Enfin, dans la troisième zone les positions astrométriques sont obtenues en ne considérant qu'un seul photon composant l'image primaire, c'est-à-dire que nous utilisons le modèle G qui néglige les images secondaires et l'effet d'amplification de l'image primaire (voir Sect. 6.1.2). Nous noterons dans la suite les trois différentes zones décrites ici Zone 1, Zone 2 et Zone 3.

Dans les sections qui suivent sont présentées en détail chacune des zones considérées. Étant donné que le modèle introduit ici sera utilisé pour contraindre les paramètres de masse, de distance et de moment cinétique adimensionné du candidat trou noir central, il est nécessaire de fixer des valeurs extrêmes à ces trois paramètres pour définir correctement les limites des trois zones. Pour cela, il faut considérer des valeurs maximales pour les

moment cinétique adimensionné et masse du trou noir, et une valeur minimale pour sa distance à l'observateur. Nous choisissons donc de fixer le moment cinétique adimensionné à 1, et les masse et distance aux valeurs obtenues à 3σ par Gillessen et al. (2009b) : $M_{\rm TN} = 5{,}57 \times 10^6\ M_\odot$ et $R_0 = 6{,}89$ kpc.

8.2 Zone 1 : prise en compte des images primaire et secondaire

Comme mentionné précédemment, la Zone 1 correspond à celle où il n'est pas possible de négliger les images secondaires des étoiles. Nous simulons donc les positions astrométriques de ces dernières en considérant le centroïde composé des images primaire et secondaire. Celui-ci est donné par :

$$(\alpha_s,\delta_s) = \left(\frac{\alpha_1 \times F_1 + \alpha_2 \times F_2}{F_1 + F_2}, \frac{\delta_1 \times F_1 + \delta_2 \times F_2}{F_1 + F_2}\right) \tag{8.1}$$

où les indices 1 et 2 font référence aux images primaire et secondaire, respectivement. La quantité $F_{1(2)}$ représente le flux de l'image considérée et est donnée par l'équation (4.24). Les positions astrométriques $\alpha_{1(2)}$ et $\delta_{1(2)}$ sont obtenues en calculant le centroïde de l'image primaire (secondaire), à une fréquence d'observation donnée, exprimé comme :

$$\begin{aligned}
\alpha_{1(2)} &= \frac{1}{F_{1(2)}} \sum_{\rm pixels} \alpha_{1(2),\rm pixel} I_{1(2),\rm pixel} \cos(\theta_{1(2),\rm pixel}) \delta\Omega_{1(2),\rm pixel}, \\
\delta_{1(2)} &= \frac{1}{F_{1(2)}} \sum_{\rm pixels} \delta_{1(2),\rm pixel} I_{1(2),\rm pixel} \cos(\theta_{1(2),\rm pixel}) \delta\Omega_{1(2),\rm pixel}
\end{aligned} \tag{8.2}$$

où $\alpha_{1(2),\rm pixel}$ et $\delta_{1(2),\rm pixel}$ correspondent aux positions des pixels de l'image considérée sur l'écran de l'observateur `GYOTO` (voir Fig. 4.1). Les autres quantités intervenant dans ces formules sont similaires à celles de l'équation (4.24).

Les positions astrométriques simulées dans ce modèle sont obtenues en considérant une étoile de type S2 c'est-à-dire possédant un rayon d'environ 7 rayons solaires ($\approx 1M$, Martins et al. 2008).

Nous souhaitons ajouter qu'ici nous ne considérons pas les images d'ordres supérieurs telles que les images tertiaire et quaternaire. Comme cela est mentionné dans Bozza & Mancini (2005) et Bozza & Mancini (2012), celles-ci ont des magnitudes en bande K très faibles (autour de $30 - 40$ dans le cas des étoiles S). Ces auteurs montrent notamment que pour des étoiles situées à des distances supérieures à une centaine d'unités géométriques du trou noir, l'impact astrométrique de ces images est inférieur ou égal à environ 1 microseconde d'angle. De plus, ce décalage n'est obtenu que dans le cas d'un alignement presque parfait de l'étoile à l'arrière du trou noir. Il est donc justifié de ne pas prendre en compte ces images dans le modèle.

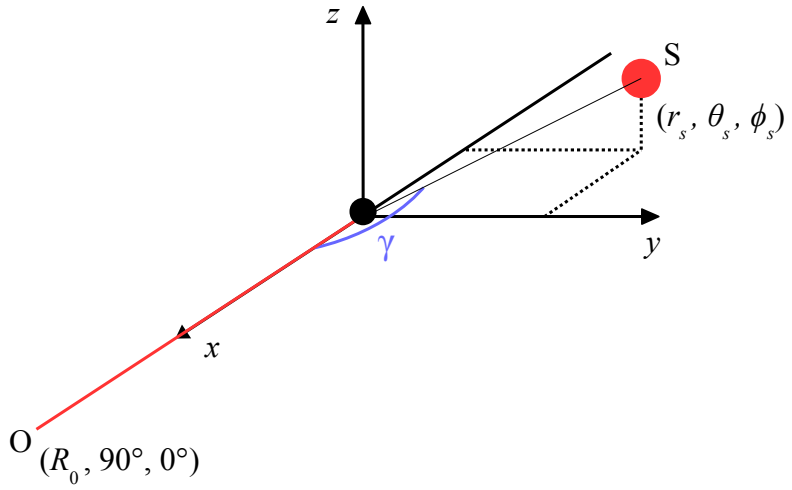

Figure 8.1 – Illustration de l'angle γ.

À présent expliquons en détail comment nous parvenons à obtenir les centroïdes des images primaire et secondaire dans ce nouveau modèle. Nous déterminons notamment les résolutions des images primaire et secondaire nécessaires pour obtenir des centroïdes finaux avec une erreur $\lesssim 1$ microseconde d'angle. Puis, nous définissons les limites de la Zone 1 c'est-à-dire les portions de l'espace dans lesquelles nous sommes contraints de considérer les images secondaires si l'on ne souhaite pas dépasser l'erreur astrométrique que nous nous sommes fixée.

8.2.1 Calcul de l'image primaire

Comme nous l'avons expliqué Sect. 6.1.2, nous ne pouvons pas prédire où se formera l'image d'une étoile en mouvement à une date d'observation donnée. Il est donc nécessaire d'utiliser le script développé dans le modèle G, permettant de déterminer la direction finale dans le plan du ciel d'un photon composant l'image primaire. Plus précisément, le procédé utilisé permet de converger vers un photon dont la distance minimale à l'étoile (de rayon nul) est d'environ $10^{-2}M$, et cela en minimisant une carte `MinDistance` centrée sur le trou noir et de champ de vue suffisamment grand pour contenir l'étoile étudiée à une date d'observation donnée. Afin de réduire le temps de calcul nécessaire pour localiser l'image primaire, nous avons centré ce champ de vue sur la position apparente de l'étoile obtenue en régime newtonien, et nous avons diminué la taille du champ de vue. Néanmoins, après divers tests nous avons conclu que le temps de convergence obtenu était similaire à celui de la première méthode. Nous décidons donc de garder le même script que celui utilisé pour le modèle G. Rappelons que dans le cas de l'étoile S2, le temps nécessaire pour converger vers un photon de l'image primaire est d'environ 3 secondes. Ce temps pourra davantage être réduit grâce à la parallélisation.

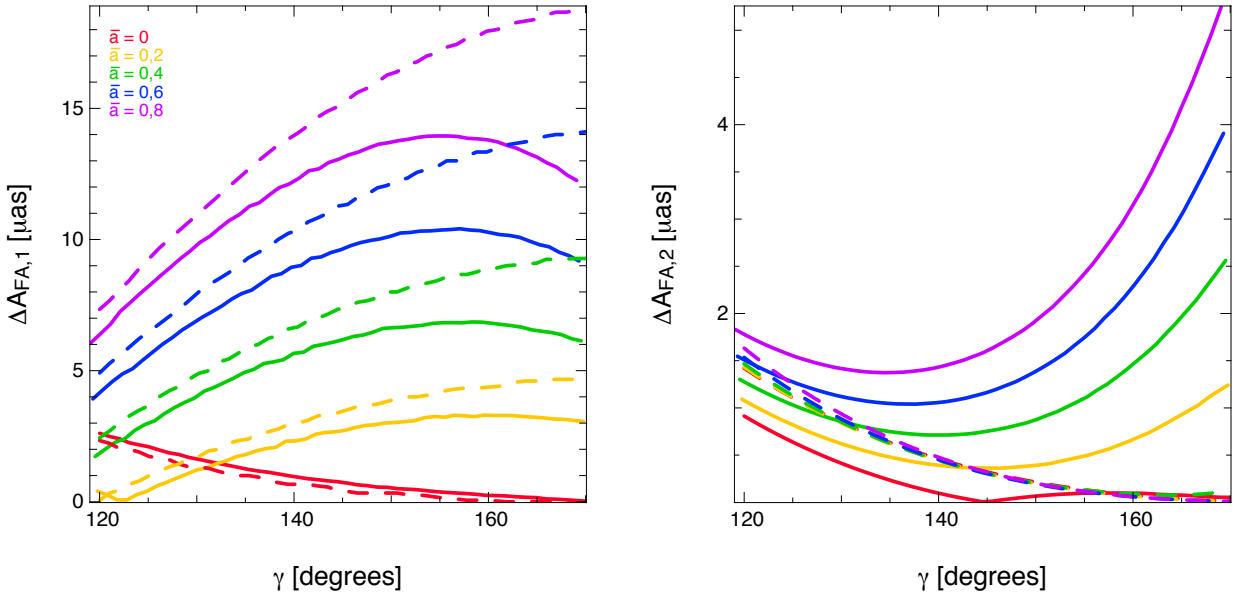

FIGURE 8.2 – Différences entre les positions astrométriques des images primaire (à gauche) et secondaire (à droite) estimées avec le code GYOTO et celles obtenues à l'aide des approximations analytiques de Sereno & de Luca (2006), en fonction de l'angle γ (voir Fig. 8.1). L'étoile est située dans le plan équatorial du trou noir contenant également l'observateur. Deux distances de l'étoile au trou noir sont considérées : $r_s = 10^2 M$ (en trait plein) et $r_s = 10^6 M$ (en tirets). Ces différences sont évaluées en considérant un trou noir de masse $M_{\rm TN} = 5{,}57 \times 10^6\ M_\odot$ et de distance au Système Solaire $R_0 = 6{,}89$ kpc.

Contrairement au modèle G, la position astrométrique finale est obtenue en considérant l'ensemble des photons constituant l'image primaire. Afin d'optimiser le temps de calcul du modèle, en évitant d'intégrer l'ensemble des photons de l'image, nous avons cherché à évaluer la position apparente de l'étoile à l'aide des approximations analytiques de Sereno & de Luca (2006). En effet, celles-ci permettent également de simuler l'amplification lumineuse en chaque point de l'image primaire. Pour utiliser correctement ces formules, il est nécessaire de leur fournir la bonne position (r_s,θ_s,ϕ_s) de l'étoile c'est-à-dire celle obtenue à la date d'émission du photon composant l'image primaire et déterminée à l'aide du script précédent. Nous noterons cette date t_1. Cependant, deux arguments vont à l'encontre de cette méthode. D'une part, comme nous le verrons Sect. 8.4, les effets de lentilles sont également présents lorsque l'étoile est située à l'avant du plan contenant le trou noir ($\gamma < 90°$ où γ est l'angle entre l'observateur, le trou noir et l'étoile, voir Fig. 8.1). Or, les approximations analytiques de Sereno & de Luca (2006) ne sont utilisables que pour des étoiles situées à l'arrière du plan contenant le trou noir ($\gamma \geqslant 90°$). D'autre part, comme cela est visible à gauche Fig. 8.2, celles-ci ne sont pas suffisamment précises pour avoir une erreur astrométrique ne dépassant pas la microseconde d'angle que nous nous sommes fixée, et cela est d'autant plus vrai lorsque le trou noir possède un moment cinétique adimensionné

important. Nous sommes donc contraints de calculer l'image primaire de l'étoile avec le code `GYOTO`. Afin de minimiser ce temps de calcul, nous utilisons deux méthodes distinctes permettant d'optimiser la taille de l'écran de l'observateur contenant l'image. Le but est d'intégrer le moins possible de photons n'atteignant pas la surface de l'étoile, c'est-à-dire ceux donnant lieu à des pixels noirs dans l'écran de l'observateur.

La première méthode optimise la taille de l'écran en s'aidant des approximations analytiques de Sereno & de Luca (2006), et n'est utilisée que dans le cas où l'étoile est située à l'arrière du plan contenant le trou noir ($\gamma \geqslant 90°$). Ces formules permettent d'estimer la taille de l'image primaire de l'étoile, comme cela est illustré par le contour rouge, que nous appellerons contour analytique par la suite, sur l'image a) Fig. 8.3. Voyons à présent les différentes étapes effectuées dans cette première méthode, on suivra pour cela la Fig. 8.3. Pour la bonne compréhension de la méthode, nous nous placerons dans un cas simple c'est-à-dire que nous considérerons une étoile et un observateur situés dans le plan équatorial du trou noir. Ajoutons que dans les explications qui suivent, nous repérerons un point de l'écran de l'observateur en utilisant deux systèmes de coordonnées (α',δ') et (r,θ) définis Fig. 8.3 :

— Étape 1 : nous déterminons quatre points stratégiques correspondant aux quatre extrémités du contour analytique, notés n_b, n_h, n_g, n_d en rouge sur l'image a) Fig. 8.3. Ceux-ci sont ensuite translatés d'une quantité Δ égale à l'écart entre le centre du contour analytique et le centre de l'image primaire `GYOTO`. Ce dernier correspond à la direction finale sur le ciel du photon que l'on a précédemment obtenue par minimisation de la carte `MinDistance`. Notons que dans l'exemple considéré ici, il n'y a besoin que d'une translation le long de l'axe α', néanmoins, il est possible que dans d'autres configurations il soit nécessaire de faire également une translation le long de l'axe δ'.

— Étape 2 : l'objectif de la seconde étape est d'estimer des limites haute et basse de l'écran respectivement à partir des points n_h et n_b. Par exemple, si le flux au point n_h est nul alors la limite haute est donnée par ce point. En revanche, si le flux est non nul nous cherchons à déterminer un second point situé, lui, à $+\Delta\theta/4$ du point n_h (voir image b Fig. 8.3), où $\Delta\theta$ correspond à l'angle entre les points n_h et n_b (voir image b). À présent nous avons donc accès à la coordonnée θ du nouveau point. Ensuite, nous cherchons à évaluer la coordonnée polaire r de ce dernier correspondant à sa distance angulaire au trou noir. Pour cela, nous déterminons la position du minimum de la quantité `MinDistance` le long d'un segment illustré par un trait orange épais sur l'image b). Rappelons que chaque point de ce segment correspond à un pixel de l'écran de l'observateur et donc à une direction finale d'un photon. On cherche donc, le long de cet axe, la géodésique lumière s'approchant au plus près de l'étoile. La minimisation de la quantité `MinDistance` est effectuée à l'aide de la méthode du nombre d'or. La nouvelle position ainsi obtenue est notée o_h sur l'image b). Après quoi, nous estimons le flux en ce nouveau point et si celui-ci est non nul nous répétons le procédé en considérant un axe situé à $+\Delta\theta/4$ du point o_h. La limite basse de l'écran est obtenue de manière similaire, celle-ci est notée o_b Fig. 8.3.

— Étape 3 : nous cherchons cette fois-ci à estimer des limites gauche et droite de

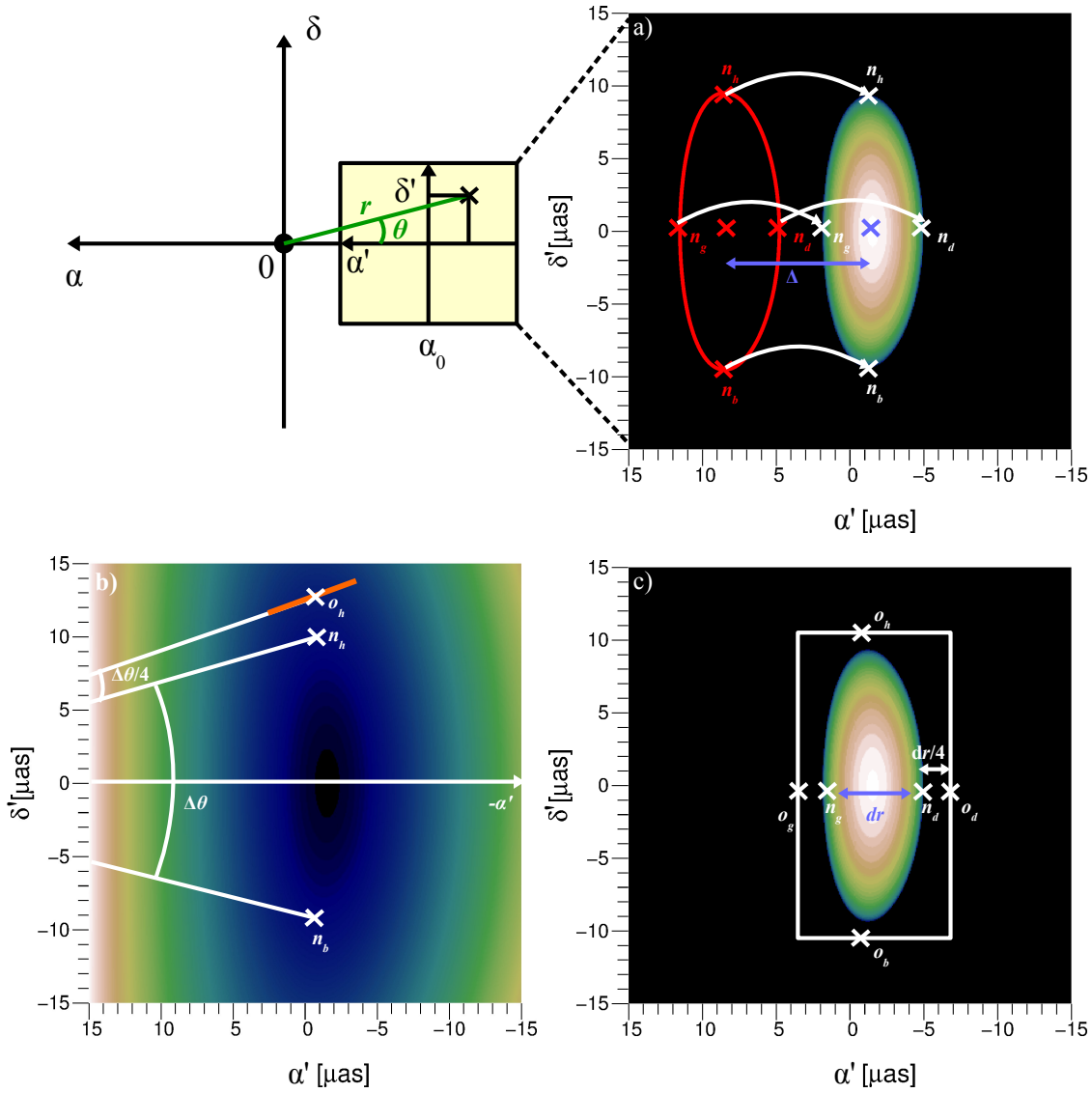

FIGURE 8.3 – Illustration de l'optimisation de la taille de l'écran de l'observateur contenant l'image primaire, à l'aide des approximations analytiques de Sereno & de Luca (2006). L'étoile considérée est située à $(r_s,\theta_s,\phi_s) = (100\ M,90°,170°)$. Chaque image a), b) et c) est obtenue en considérant un écran défini par un système de coordonnées (α',δ') centré en α_0. Les pixels de cet écran peuvent également être repérés par un système de coordonnées polaires (r,θ) centré sur le trou noir. Le contour rouge représenté sur l'image a) correspond au contour de l'image primaire obtenu avec les approximations analytiques. Pour une description détaillée des différents images a), b) et c), on se référera au texte.

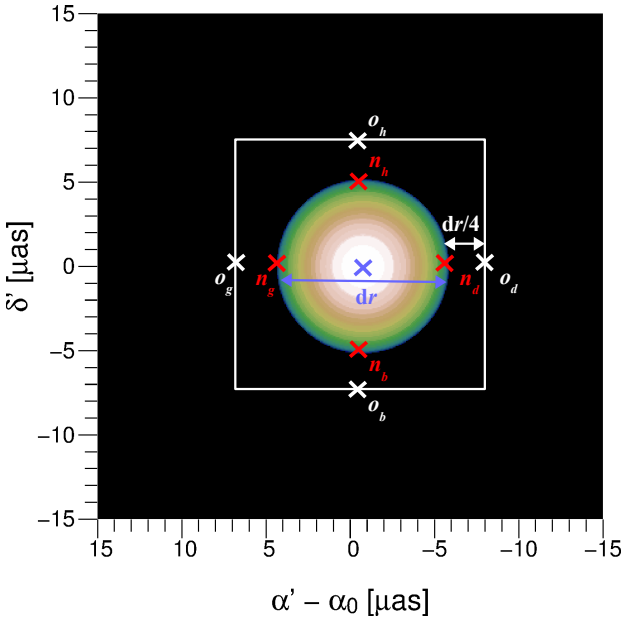

Figure 8.4 – Illustration de l'optimisation de la taille de l'écran à l'aide de la seconde méthode. L'étoile est située à $(r_s,\theta_s,\phi_s) = (100\ M,90°,90°)$.

l'écran respectivement à partir des points n_g et n_d. Par exemple, si nous avons du flux au point n_d, nous définissons un second point noté o_d sur l'image c) et obtenu en augmentant sa coordonnée polaire r de d$r/4$, avec dr la largeur maximale du contour rouge (voir l'image c). Si le flux est nul au point o_d, la limite droite de l'écran est fixée par ce point. En revanche, s'il y a du flux nous répétons l'opération. Nous utilisons le même procédé pour obtenir la limite gauche de l'écran, elle est notée o_g Fig. 8.3.

— Étape 4 : il est maintenant possible de calculer l'image primaire en considérant un écran dont la taille a été optimisée grâce aux différentes limites obtenues (voir encadré blanc sur l'image c Fig. 8.3). Après quoi un dernier test est effectué et consiste à vérifier que tous les pixels situés en bordure de cet écran ont un flux nul. Le but est de s'assurer que l'image primaire n'a pas été tronquée. Dans le cas où l'on trouve que l'une des quatre bordures de l'écran possède un flux non nul, celle-ci est élargie.

La seconde méthode est utilisée dans le cas où l'étoile est située à l'avant du plan contenant le trou noir ($\gamma < 90°$) et n'utilise pas les approximations analytiques de Sereno & de Luca (2006). Cependant, l'image primaire est également calculée en s'aidant du centre de l'image primaire obtenu grâce au script mis en place dans le modèle G (voir croix bleue Fig. 8.4). Une illustration de cette méthode est donnée Fig. 8.4. Plus précisément, quatre points sont répartis autour du centre de l'image à l'aide du paramètre

dr représentant la taille angulaire, telle que vue depuis la Terre, d'une étoile de type S2, c'est-à-dire de 1 unité géométrique de rayon. Ces différents points sont notés n_b, n_h, n_g, n_d en rouge Fig. 8.4. Après quoi nous estimons le flux en ces quatre points. Si certains de ces points présentent un flux non nul ceux-ci sont décalés de d$r/4$ (voir points notés o_b, o_h, o_g, o_d Fig. 8.4). Si le flux estimé aux nouveaux points est encore non nul, le procédé est répété. De même que pour la première méthode, une fois que l'image est calculée à partir des différentes limites de l'écran obtenues, nous effectuons un dernier test aux bords de l'écran afin de s'assurer que l'image primaire n'a pas été tronquée.

Le temps de calcul nécessaire sur un cœur pour estimer les limites de l'écran, sans que l'image ne soit tronquée, est en moyenne inférieur à 0,5 seconde pour chacune des deux méthodes. Néanmoins, si l'image est tronquée, le temps de calcul demandé par l'étape supplémentaire pour estimer les nouvelles limites de l'écran dépend de la qualité des premières limites obtenues.

Maintenant que l'image primaire peut être calculée, nous en déduisons son centroïde à l'aide de la formule (8.2). La résolution utilisée pour calculer cette image est fixée en faisant en sorte que l'erreur astrométrique sur le centroïde composé des images primaire et secondaire soit inférieure ou de l'ordre de 1 microseconde d'angle. Nous verrons plus en détail Sect. 8.2.3 quelle est la résolution considérée et comment celle-ci a été fixée.

8.2.2 Calcul de l'image secondaire

À présent intéressons-nous à l'image secondaire. Celle-ci est calculée uniquement lorsque l'étoile est située à l'arrière du plan contenant le trou noir ($\gamma \geqslant 90°$). Nous verrons plus en détail Sect. 8.2.4 les régions de l'espace où ces images doivent être prises en compte pour que les positions astrométriques simulées aient une erreur $\lesssim 1$ μas.

Le protocole utilisé pour obtenir cette image est similaire à celui de l'image primaire. Néanmoins, il est plus difficile de déterminer une direction finale dans le plan du ciel d'un photon composant l'image secondaire. Afin de converger vers un tel photon, il faut chercher un second minimum dans la carte `MinDistance` utilisée pour déterminer le photon de l'image primaire. Cependant, pour éviter de converger vers un photon de cette dernière, nous décidons d'exclure celle-ci du champ de vue en le centrant sur une position proche de l'image secondaire et en réduisant par exemple sa taille à 20 microsecondes d'angle. Précisons que dans le cas où l'étoile est quasiment alignée à l'arrière du trou noir, l'image secondaire est presque aussi importante que l'image primaire. Il est donc tout à fait possible de converger vers un photon de l'image secondaire lorsqu'on en recherche un de l'image primaire. Un test est donc effectué afin de déterminer quelle image a été trouvée. Nous utilisons pour cela les formules de Sereno & de Luca (2006) qui nous permettent de localiser en première approximation les images primaire et secondaire.

Afin de centrer le champ de vue utilisé pour converger vers un photon de l'image secondaire, nous nous aidons également des approximations analytiques de Sereno & de Luca (2006), mais estimées à la date d'émission t_1 du photon composant l'image primaire.

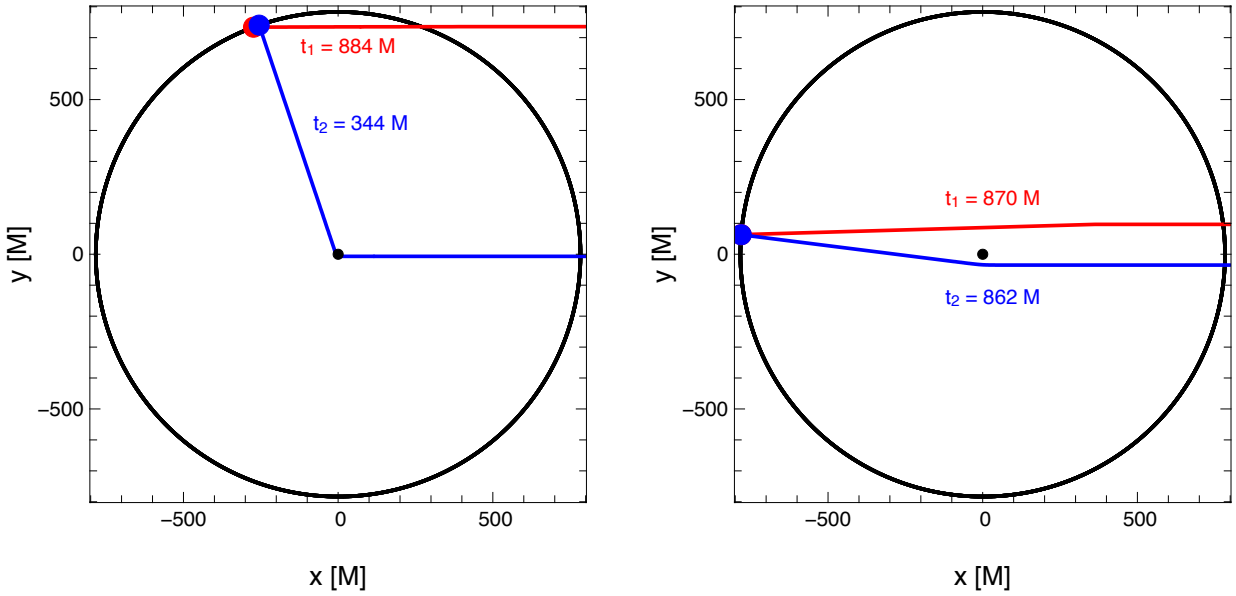

Figure 8.5 – Visualisation des dates d'émission des photons donnant lieu aux images primaire (en rouge) et secondaire (en bleu) observées à une même date d'observation, pour une étoile en orbite circulaire située à environ 800 unités géométriques d'un trou noir de Schwarzschild. L'étoile et l'observateur sont tous deux situés dans le plan équatorial du trou noir et l'axe $x > 0$ pointe en direction de l'observateur. Les ronds rouges et bleus représentent les positions de l'étoile donnant lieu aux images primaire et secondaire, respectivement. Les dates d'émission des photons associées à ces deux images sont également notées. Les traits rouges et bleus représentent les trajectoires des photons émis aux dates d'émission t_1 et t_2, et composant les images primaire et secondaire, respectivement.

Mentionnons néanmoins que la date t_1 est différente de la date d'émission des photons donnant lieu à l'image secondaire, que l'on notera t_2. En effet, comme cela est illustré à l'image de gauche Fig. 8.5, les géodésiques des photons composant l'image secondaire (en bleu) sont davantage courbées que celles des photons composant l'image primaire (en rouge). Le temps de parcours des photons de l'image secondaire est donc plus long que celui des photons composant l'image primaire. En d'autres termes, les photons détectés simultanément dans les images primaire et secondaire n'ont pas été émis à la même date : l'image secondaire est obtenue pour une position de l'étoile antérieure à celle formant l'image primaire ($t_2 < t_1$). Lorsque l'étoile est quasiment alignée dernière le trou noir, les temps de parcours des photons composant les images primaire et secondaire sont presque identiques (voir image de droite Fig. 8.5).

Si l'on souhaite positionner le champ de vue de 20 microsecondes d'angle à l'aide des approximations analytiques estimées en considérant la position de l'étoile obtenue à la date d'émission t_1, il faut que les erreurs astrométriques engendrées à la fois par les formules de Sereno & de Luca (2006) et par le fait que nous considérions la position de l'étoile obtenue

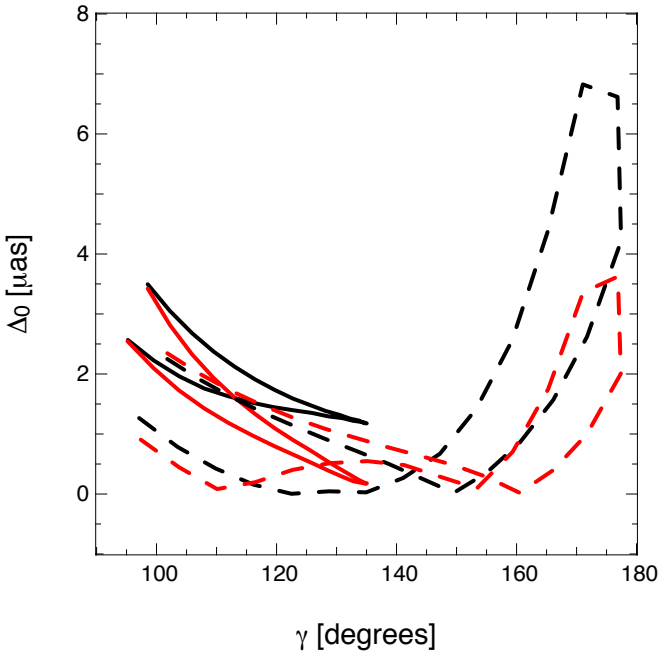

FIGURE 8.6 – Distances astrométriques entre la vraie position de l'image secondaire déterminée avec GYOTO et celle estimée à l'aide des formules de Sereno & de Luca (2006) à la date d'émission t_1, en fonction de l'angle γ. L'étoile considérée évolue sur une orbite circulaire distante de 100 unités géométriques du trou noir. Les courbes noires et rouges sont obtenues pour un moment cinétique adimensionné de 0,9 et 0,5, respectivement. Les courbes en trait plein correspondent à des inclinaisons du plan orbital de 90° (l'étoile et l'observateur sont dans le même plan), et les courbes en tirets sont obtenues pour une inclinaison de 45°.

à la date t_1 au lieu de la date t_2, soient inférieures à 10 microsecondes d'angle. En effet, étant donné la taille du champ de vue il faut faire attention de ne pas exclure l'image secondaire de celui-ci. Afin de vérifier que ce ne soit pas le cas, nous avons tracé Fig. 8.6 la distance astrométrique entre le centre de l'écran estimé par notre méthode et la vraie position du centre de l'image secondaire obtenue avec GYOTO. Cette distance, que l'on note Δ_0, est obtenue pour plusieurs configurations décrites dans la légende. Nous constatons que l'ensemble des configurations étudiées ici vérifient la condition $\Delta_0 < 10$ μas. Cependant, lorsque l'étoile est presque alignée derrière le trou noir, l'erreur Δ_0 augmente. Cela est dû aux approximations analytiques qui ne permettent pas de reproduire correctement les effets de lentilles, et cela est d'autant plus vrai quand le moment cinétique adimensionné est grand (voir graphique de droite Fig. 8.2). Néanmoins, cette configuration de l'étoile sera évitée car la région à l'arrière du trou noir ne sera pas prise en compte dans le modèle (voir Sect. 8.3).

Le temps de calcul nécessaire pour converger vers un photon de l'image secondaire est similaire à celui mis pour converger vers un photon de l'image primaire. Dans le cas de l'étoile S2, le temps de convergence est de l'ordre de 3 secondes. De même que pour l'image

primaire, nous envisageons ici de paralléliser le calcul des cartes `MinDistance`.

Une fois que la minimisation de la carte `MinDistance` de 20 microsecondes d'angle est effectuée, il est possible de passer à l'étape suivante à savoir calculer l'ensemble des photons de l'image secondaire. Afin d'optimiser la taille de l'écran de l'observateur nécessaire pour calculer cette dernière, nous choisissons la première méthode considérée pour les images primaires mais utilisons le contour analytique de l'image secondaire donné par Sereno & de Luca (2006).

Une fois que les images primaire et secondaire sont obtenues, il est possible de remonter à la position astrométrique de l'étoile en utilisant la formule du centroïde (8.1). Néanmoins, nous verrons dans la section suivante que l'erreur commise sur ce centroïde dépend des résolutions utilisées pour calculer ces deux images. Nous allons donc voir quelles résolutions sont nécessaires afin de minimiser cette erreur à $\lesssim 1$ μas.

8.2.3 Résolutions des images primaire et secondaire

L'écran final obtenu pour calculer les images primaires ou secondaires est le plus souvent rectangulaire. Si l'on souhaite avoir des pixels carrés, cela signifie donc que le nombre de pixels utilisé le long de l'axe α doit être différent de celui utilisé le long de l'axe δ. On notera ces deux nombres N_α et N_δ. Ceux-ci sont fixés à l'aide d'un nombre minimum $\mathrm{N}_{\mathrm{min}}$. Plus précisément, si la largueur Δ_α de l'écran est inférieure à sa hauteur Δ_δ, alors N_α est pris égal à $\mathrm{N}_{\mathrm{min}}$. Le nombre N_δ est alors obtenu en calculant le rapport $E(\Delta_\delta/\Delta_{\mathrm{pixel}})$ où E correspond à la partie entière et Δ_{pixel} est la taille angulaire d'un pixel égale à $\Delta_\alpha/\mathrm{N}_{\mathrm{min}}$.

Précisons que nous faisons le choix ici de considérer un nombre $\mathrm{N}_{\mathrm{min}}$ identique pour les images primaire et secondaire. Cela implique que les tailles angulaires des pixels considérées pour les deux écrans de ces deux images sont différentes puisque ceux-ci ont des tailles Δ_α et Δ_δ différentes. Ce choix est justifié car l'image secondaire est toujours plus petite que l'image primaire. Dans la plupart des cas, celle-ci est très petite et peu atteindre une taille angulaire 100 à 1000 fois inférieure à celle de l'image primaire. Si on souhaite imposer une même taille de pixel pour les deux images, cela veut donc dire que l'on doit augmenter considérablement le nombre de pixels dans l'image primaire. Par exemple, si on considère une étoile telle que $r_s = 1000\ M$ et $\gamma = 120°$, les tailles approximatives des images primaire et secondaire sont de 30 et 0,07 microsecondes d'angle, respectivement. Si on fixe un nombre minimum $\mathrm{N}_{\mathrm{min}}$ de pixels à 10 pour l'image secondaire, nous obtenons une taille de pixel égale à $0{,}07/10 = 0{,}007$ μas. Le nombre de pixels dans l'image primaire nécessaire pour satisfaire $\Delta_{\mathrm{pixel}} = 0{,}007$ μas est donc de $30/0{,}007 \approx 4000$ pixels. On comprend donc ici l'intérêt de ne pas choisir les mêmes tailles angulaires de pixel pour les deux images. Mentionnons par ailleurs que nous choisissons de ne pas considérer une taille angulaire de pixel égale à l'erreur maximale que l'on se fixe pour le modèle (≈ 1 μas), car il arrive souvent que l'image secondaire soit de taille inférieure à celle-ci (voir exemple précédent), mais aussi parce que dans certains cas il est possible d'utiliser une taille de pixel pour l'image primaire qui soit supérieure à 1 microseconde d'angle, pour satisfaire la précision astrométrique souhaitée. Imposer une taille égale à 1 microseconde d'angle ne

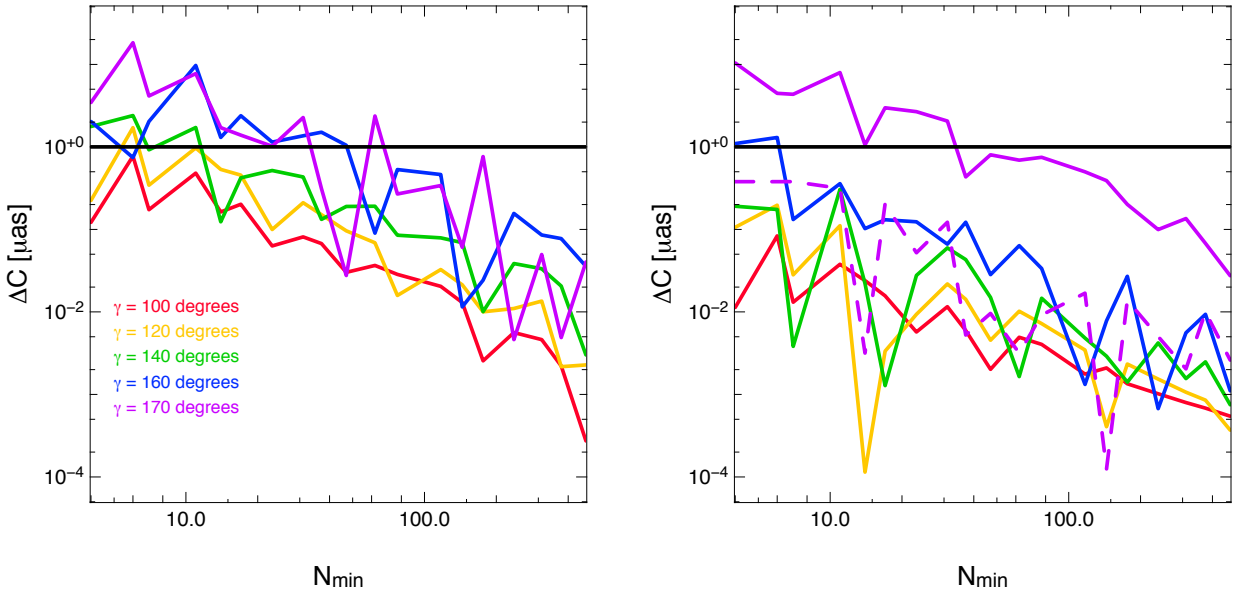

FIGURE 8.7 – Erreurs astrométriques commises sur le centroïde composé des images primaire et secondaire en fonction du nombre N_{min} utilisé pour calculer les deux images. Cette erreur est estimée pour une étoile et un observateur situés dans le plan équatorial du trou noir. Plusieurs angles γ sont considérés et sont représentés par différentes couleurs. Trois distances de l'étoile au trou noir sont également considérées et sont prises égales à 10^2 (à gauche), 10^3 (à droite en trait plein) et 10^4 (à droite en pointillés) unités géométriques. Le trait noir sur chacun des graphiques correspond à une erreur astrométrique de 1 microseconde d'angle.

ferait donc qu'augmenter inutilement le temps de calcul.

Nous choisissons donc ici de fixer des nombres N_{min} égaux pour les deux images. Afin que le centroïde final composé des images primaire et secondaire possède une erreur astrométrique inférieure à 1 microseconde d'angle, il est nécessaire de choisir correctement ce nombre. C'est d'ailleurs ce que l'on peut voir Fig. 8.7 où l'on a tracé l'erreur astrométrique en fonction de N_{min}. Cette erreur est estimée en calculant la quantité $\Delta C = \sqrt{(\alpha_s - \alpha_{s,N_{min}=400})^2 + (\delta_s - \delta_{s,N_{min}=400})^2}$ où les coordonnées (α_s,δ_s) correspondent au centroïde calculé à l'aide de la formule (8.1) à un nombre N_{min} donné, et les coordonnées $(\alpha_{s,N_{min}=400},\delta_{s,N_{min}=400})$ sont, elles, évaluées pour $N_{min} = 400$ pixels. Ce dernier est donc utilisé comme référence pour estimer l'erreur astrométrique. Précisons que même en prenant un nombre N_{min} de référence à 1000, nous obtenons des résultats similaires.

Une des tendances que l'on observe sur les courbes Fig. 8.7 est que plus γ augmente plus il est nécessaire d'avoir un nombre N_{min} grand, pour ne pas dépasser la microseconde d'angle. De plus, on constate que plus r_s est grand plus le nombre minimum nécessaire pour ne pas dépasser cette dernière diminue. Ces deux tendances sont expliquées par la

r_s $[M]$	$[10^2,10^3[$		$[10^3,10^4[$			$\geqslant 10^4 M$
γ [°]	$\leqslant 140$	]140,170]	$\leqslant 140$	]140,160]	]160,170]	$\leqslant 170$
$\mathrm{N_{min}}$	20	80	5	10	80	5

Table 8.1 – Nombres minimaux $\mathrm{N_{min}}$ utilisés pour calculer les images primaire et secondaire, en fonction des paramètres r_s et γ de l'étoile.

qualité du rapport de flux entre les images secondaire et primaire. Pour le comprendre, calculons la différence entre la position α_s du centroïde composé des deux images et le centroïde composé uniquement de l'image primaire :

$$\begin{aligned} |\alpha_s - \alpha_1| &= \left| \frac{\alpha_1 \times F_1 + \alpha_2 \times F_2}{F_1 + F_2} - \frac{\alpha_1 (F_1 + F_2)}{F_1 + F_2} \right|, \\ &= \frac{F_2}{F_1 + F_2} \left| \alpha_1 - \alpha_2 \right| . \end{aligned} \tag{8.3}$$

Si on se place dans le cas où $r_s = 100\ M$ et $\gamma = 170°$, le rapport de flux $F_2/(F_1 + F_2)$ est égal à environ 0,156 pour $\mathrm{N_{min}} = 5$ et 0,164 pour $\mathrm{N_{min}} = 400$. La distance $|\alpha_1 - \alpha_2|$ est similaire pour les deux nombres $\mathrm{N_{min}}$ et vaut 370 microsecondes d'angle. Si on calcule la distance $|\alpha_s - \alpha_1|$ nous arrivons alors à environ 58 et 61 microsecondes d'angle pour $\mathrm{N_{min}} = 5$ et $\mathrm{N_{min}} = 400$, respectivement. Nous avons donc une différence d'environ 3 microsecondes d'angle entre les deux $\mathrm{N_{min}}$ choisis.

Si on considère maintenant $r_s = 100\ M$ et $\gamma = 120°$, le rapport de flux $F_2/(F_1+F_2)$ obtenu diminue d'un facteur d'environ 100 car l'image secondaire est beaucoup plus petite que l'image primaire. Plus précisément, nous atteignons $1{,}94 \times 10^{-3}$ et $2{,}23 \times 10^{-3}$ pour $\mathrm{N_{min}} = 5$ et $\mathrm{N_{min}} = 400$, respectivement. La distance $|\alpha_1 - \alpha_2|$ est égale à 763 microsecondes d'angle pour les deux nombres $\mathrm{N_{min}}$. Les différences $|\alpha_s - \alpha_1|$ obtenues sont de 1,5 microsecondes d'angle pour $\mathrm{N_{min}} = 5$ et 1,7 microsecondes d'angle pour $\mathrm{N_{min}} = 400$. L'erreur commise dans ce cas est donc plus faible et inférieure à 1 microseconde d'angle.

On comprend ici que l'erreur sur le centroïde vient du nombre de pixels allumés dans les deux images c'est-à-dire de la qualité du calcul du flux total de celles-ci. Cela montre qu'il est nécessaire d'augmenter le nombre minimum $\mathrm{N_{min}}$ des images primaire et secondaire lorsque celles-ci présentent un flux plus important, c'est-à-dire lorsqu'elles couvrent un angle important sur le ciel, ce qui est le cas lorsque l'étoile s'approche de l'arrière du trou noir.

Étant donné les résultats Fig. 8.7, nous choisissons de considérer des nombres minimaux $\mathrm{N_{min}}$ tels que ceux donnés Table 8.1. Nous nous limitons ici à des valeurs de γ inférieures ou égales à 170° pour une raison qui sera expliquée Sect. 8.3. Mentionnons par ailleurs que les bornes définies ici sont obtenues dans le plan équatorial du trou noir, cependant, elles sont également valables en dehors de celui-ci. Ajoutons pour finir que le temps de calcul

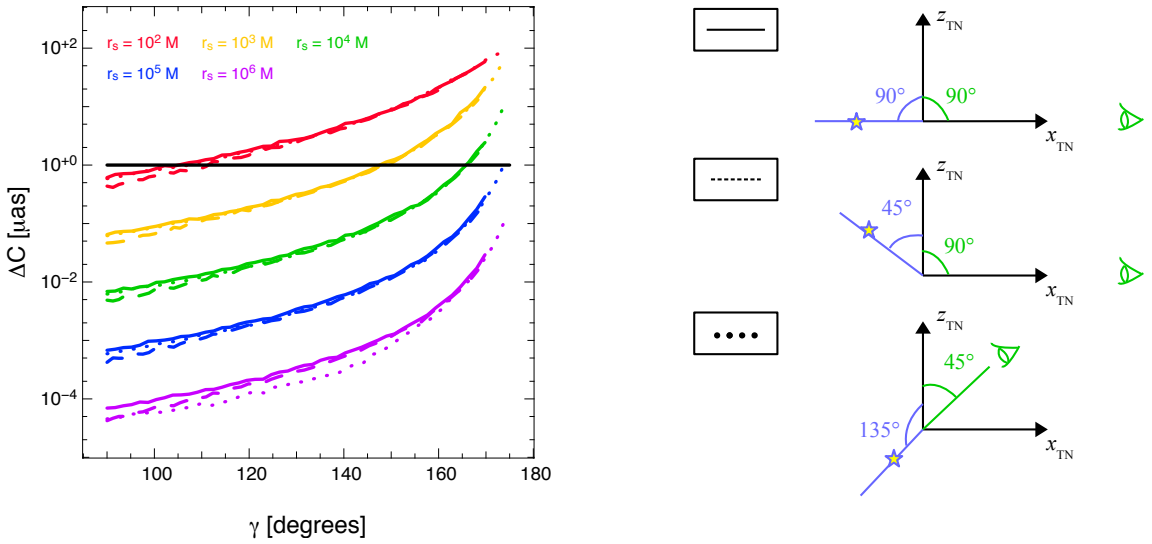

FIGURE 8.8 – Erreurs astrométriques commises sur la position apparente de l'étoile lorsque l'on néglige l'image secondaire, en fonction de l'angle γ. Cette erreur est obtenue pour plusieurs distances de l'étoile au trou noir et pour plusieurs configurations présentées à droite du graphique. Les configurations du haut, milieu et bas sont représentées sur le graphique en trait plein, tirets et pointillés, respectivement. La ligne horizontale sur la courbe représente la limite à 1 microseconde d'angle que nous nous sommes fixée.

demandé pour simuler une position astrométrique dans la Zone 1 dépendra du nombre N_{min} considéré.

8.2.4 Limites de la Zone 1

Comme mentionné en début de chapitre, les positions astrométriques d'une étoile située dans la Zone 1 sont simulées en prenant en compte les images primaire et secondaire. Afin d'optimiser le temps de calcul du modèle, nous avons défini uniquement quelques régions de l'espace dans lesquelles sont calculées les images primaire et secondaire de l'étoile. En effet, il existe, comme nous allons tout de suite le voir, des portions de l'espace où il est possible de négliger les images secondaires. Ces régions seront définies par la suite à l'aide de l'angle γ.

Les valeurs de γ délimitant la Zone 1 sont obtenues en considérant une étoile fixe de 1 unité géométrique de rayon (similaire à celui de l'étoile S2) dont nous faisons varier la position (r_s,θ_s,ϕ_s) par rapport au trou noir. Par simplicité, nous choisissons de découper l'espace en cinq portions correspondant à différents domaines de variation de la distance de l'étoile au trou noir : $r_{s_1} = [10^2,10^3[\ M$, $r_{s_2} = [10^3,10^4[\ M$, $r_{s_3} = [10^4,10^5[\ M$, $r_{s_4} = [10^5,10^6[\ M$, et $r_{s_5} = [10^6,10^7[\ M$.

À gauche Fig. 8.8 est visible l'erreur astrométrique commise lorsque l'on ne prend pas en compte l'image secondaire dans le calcul du centroïde. Cette erreur est évaluée en

calculant la relation $\Delta\mathrm{C} = \sqrt{(\alpha_s - \alpha_1)^2 + (\delta_s - \delta_1)^2}$ où les coordonnées (α_s,δ_s) sont celles du centroïde calculé à l'aide de la formule (8.1), et les coordonnées (α_1,δ_1) sont celles du centroïde de l'image primaire uniquement, données par les formules (8.2). Cette erreur est évaluée pour trois configurations différentes présentées à droite Fig. 8.8, et pour cinq valeurs de r_s. On constate que les erreurs obtenues pour chaque configuration sont similaires, il est donc possible d'estimer les angles γ délimitant la Zone 1 en se plaçant uniquement dans le plan équatorial du trou noir. Afin de s'assurer que l'on n'ait pas une erreur sur les positions astrométriques simulées qui dépasse 1 microseconde d'angle, nous choisissons de fixer les angles γ en considérant une erreur ΔC égale à 0,5 microseconde d'angle. Les limites ainsi obtenues sont : $\gamma_1 = 95°$ pour $r_s = 10^2\ M$, $\gamma_2 = 135°$ pour $r_s = 10^3\ M$, $\gamma_3 = 160°$ pour $r_s = 10^4\ M$, $\gamma_4 = 170°$ pour $r_s = 10^5\ M$, et $\gamma_5 = 175°$ pour $r_s = 10^6\ M$. La Zone 1 est donc définie de telle sorte que si l'étoile se trouve dans le domaine r_{s_i}, avec i allant de 1 à 5, et que son angle γ vérifie $\gamma \geqslant \gamma_i$, alors l'image secondaire est prise en compte dans le modèle. Une illustration de la Zone 1, dans le plan équatorial du trou noir, est représentée Fig. 8.11.

Pour évaluer correctement l'angle γ de l'étoile, nous déterminons dans un premier temps la position de l'étoile à la date d'émission t_1 du photon composant l'image primaire, et évaluons ensuite cet angle à cette position. L'angle ainsi obtenu permet de savoir s'il est utile ou non de prendre en compte l'image secondaire. Cet angle est également utilisé pour définir le nombre minimum $\mathrm{N_{min}}$ considéré dans le cas où l'on doit calculer les images primaire et secondaire (voir Table 8.1).

L'erreur maximale commise sur les positions astrométriques dans la Zone 1 peut être estimée en additionnant quadratiquement l'erreur due au fait que l'on néglige l'image secondaire (on majore cette erreur à $\approx 0{,}5\ \mu$as), et celle due au nombre $\mathrm{N_{min}}$ considéré (que l'on majore à $\approx 1\ \mu$as). L'erreur totale ainsi obtenue est donc $\lesssim 1{,}1\ \mu$as ce qui répond bien aux attentes.

8.3 Zone 2 : la zone dangereuse

Cette seconde zone que nous appelons zone dangereuse est la région de l'espace dans laquelle l'étoile est alignée, ou presque, à l'arrière du trou noir. C'est dans celle-ci que se forme l'anneau d'Einstein introduit Sect. 5.1.1, ainsi que des images primaire et secondaire de grandes tailles car proches de fusionner pour former cet anneau.

Le temps de calcul nécessaire pour obtenir des images de grande taille peut facilement devenir important. Si on considère par exemple une étoile à 100 unités géométriques du trou noir située très près de l'arrière de celui-ci, les images primaire et secondaire peuvent atteindre une taille d'environ 200 microsecondes d'angle. Or, nous avons vu Sect. 8.2.3 que lorsqu'une image présente une importante taille angulaire sur le ciel, il est nécessaire d'augmenter le nombre $\mathrm{N_{min}}$. Si on compare les tailles des images primaire et secondaire obtenues pour le cas considéré ici ($\approx 200\ \mu$as) à celle obtenues lorsque $r_s = 100\ M$ et

$\gamma = 170°$ (courbe violette Fig. 8.7), on observe une augmentation d'un facteur 10 et 20 pour les images primaire et secondaire, respectivement.

Afin d'estimer l'ordre de grandeur du nombre minimum N_{min} pouvant être utilisé pour calculer ces images, nous choisissons de nous référer au cas $r_s = 100M$ et $\gamma = 170°$. On a vu que le nombre N_{min} nécessaire pour calculer les deux images était d'environ 80 pixels. Si nous considérons uniquement l'image primaire, la taille du pixel utilisée est d'environ 0,4 microseconde d'angle. En prenant cette taille de pixel comme référence pour calculer la nouvelle image primaire de taille 200 microsecondes d'angle, nous arrivons à $N_{min} = 200/0{,}4 \approx 500$ pixels. Celui-ci est donc augmenté d'un facteur d'environ 5 par rapport aux 80 pixels que l'on avait précédemment. Si maintenant nous considérons une étoile à 1000 unités géométriques et également située près de l'arrière du trou noir, l'image primaire peut atteindre cette fois-ci une taille angulaire d'environ 1000 microsecondes d'angle. En considérant encore une fois une taille de pixel de 0,4 microseconde d'angle, on constate que le nouveau nombre N_{min} atteint environ 2500 pixels.

Afin de ne pas être ralenti par de tels événements nous choisissons de les exclure du modèle. Pour cela, nous évaluons l'angle γ de l'étoile et si celui-ci est supérieur à une certaine valeur limite alors nous ne calculons pas la position apparente de l'étoile. Pour déterminer cet angle sans perdre de temps de calcul, c'est-à-dire sans passer par la minimisation de la carte `MinDistance` nécessaire pour remonter à la position de l'étoile à la date d'émission t_1, nous utilisons une position approximative de l'étoile à l'aide du modèle E (voir Sect. 6.1.2). Ce dernier permet d'avoir une estimation de la position, par rapport au trou noir, à laquelle doit être l'étoile pour obtenir des positions astrométriques prenant en compte le temps de parcours du photon. Cela est obtenu en résolvant l'équation de Roemer (voir Sect. 6.1.1). Nous avons ainsi accès à un angle γ approché et obtenu en un minimum de temps ($\approx 0{,}07s$). Précisons néanmoins que l'approximation sur la position de l'étoile engendre une erreur sur cet angle qui est de l'ordre de 5°.

La limite de la Zone 2 est définie en considérant un angle γ à partir duquel l'image primaire d'une étoile située à $r_s = 100\ M$ atteint une taille angulaire d'environ 50 microsecondes d'angle. L'angle vérifiant cette condition est $\gamma \approx 175°$. En vue de l'erreur commise par le modèle E sur l'estimation de cet angle, nous fixons la limite à $\gamma = 170°$. Celle-ci sera appliquée pour toutes les distances de l'étoile au trou noir (voir Fig. 8.11). Précisons que l'estimation de la limite obtenue ici est applicable pour n'importe quelle configuration observateur - trou noir - étoile.

Dans la pratique, lorsque nous ajusterons le modèle d'orbites relativistes aux données, nous assignerons à la fois une valeur nulle aux observables simulées de l'étoile, et un bruit sur celles-ci suffisamment grand pour ne pas tenir compte de ses points au cours de l'ajustement.

8.4 Zone 3 : le modèle G

Dans cette dernière zone nous simulons les observations *GRAVITY* à l'aide du modèle G introduit Sect. 6.1.2. Celui-ci permet de simuler les positions astrométriques de l'étoile

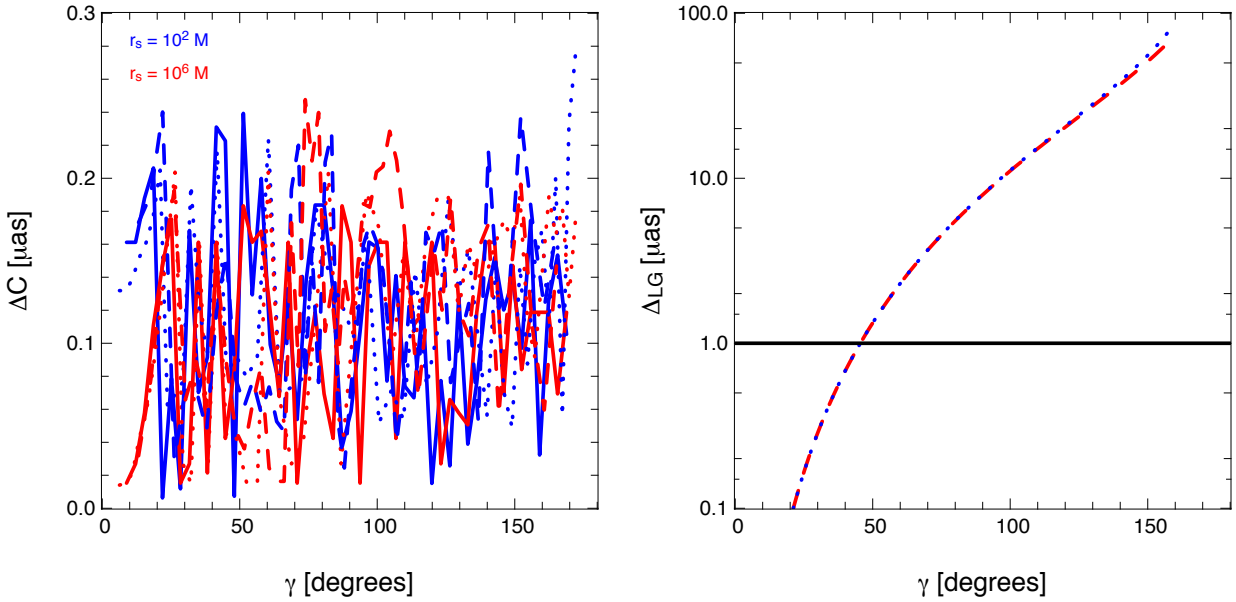

FIGURE 8.9 – *À gauche* : erreurs astrométriques commises sur la position apparente de l'étoile lorsque l'on ne prend pas en compte l'effet d'amplification de l'image primaire, en fonction de l'angle γ. Cette erreur est estimée pour deux distances de l'étoile au trou noir et pour trois configurations correspondant à celles représentées à droite Fig. 8.8. Les configurations du haut, milieu et bas sur cette dernière sont représentées ici en trait plein, tirets et pointillés, respectivement. Afin d'estimer cette erreur nous avons considéré un nombre minimum $N_{\min}$ pour l'image primaire égal à 100 pixels. *À droite* : déplacement de la direction finale sur le ciel d'un photon composant l'image primaire et engendré par la courbure d'espace-temps. On a considéré ici une étoile et un observateur situés dans le plan équatorial du trou noir. Les courbes en pointillés bleus et tirets rouges sont obtenues pour $r_s = 10^2 M$ et $r_s = 10^6 M$, respectivement. La ligne horizontale sur la courbe représente la limite à 1 microseconde d'angle.

en négligeant l'image secondaire et en ne considérant qu'un point de l'image primaire. Cette première approximation est valable car la Zone 3 constitue la région de l'espace non prise en compte par la Zone 1 (et 2). Cependant, il est nécessaire de valider la seconde approximation correspondant à la non prise en compte de l'amplification lumineuse de l'image primaire. Afin de démonter que celle-ci peut être effectuée, nous avons fait divers tests que nous allons tout de suite présenter.

À gauche Fig. 8.9 est visible l'erreur astrométrique commise sur le calcul de la position apparente de l'étoile lorsque l'on ne prend en compte qu'un photon de l'image primaire, et cela pour plusieurs distances de l'étoile au trou noir et plusieurs configurations observateur - trou noir - étoile. Rappelons que nous fixons un rayon de l'étoile à 1 unité géométrique, sa taille angulaire sur le ciel, lorsque celle-ci n'est pas affectée par les effets de lentilles, est donc d'environ 16 microsecondes d'angle si l'on considère les paramètres de masse et distance du trou noir donnés en début de Sect. 8.1. On remarque que l'erreur obtenue

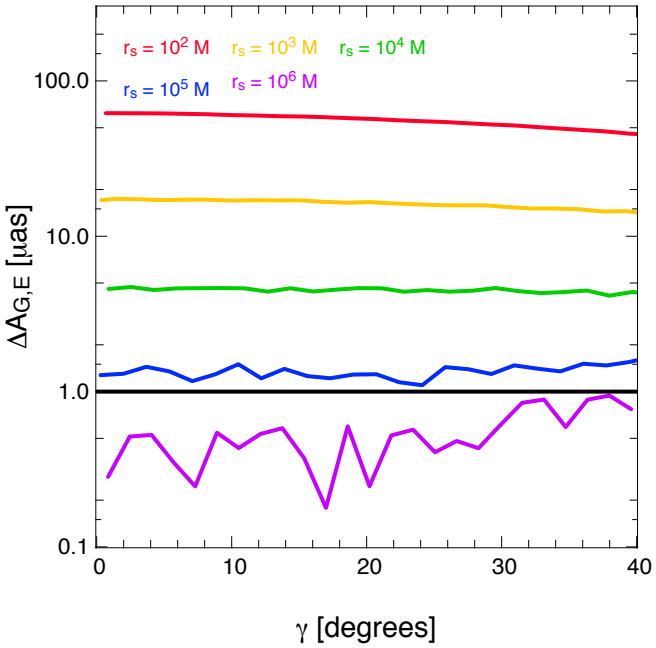

FIGURE 8.10 – Différences entre les positions apparentes de l'étoile estimées avec les modèles E et G, en fonction de l'angle γ. On considère ici une étoile se déplaçant circulairement autour du trou noir, et située dans le plan équatorial de celui-ci, contenant également l'observation. La différence entre les deux modèles est estimée pour différentes valeurs de r_s et γ

est toujours inférieure à 0,3 microseconde d'angle. Le modèle G est donc convenable pour simuler les positions astrométriques d'une étoile située en dehors des zones 1 et 2.

Afin d'optimiser le temps de calcul du modèle, nous nous sommes demandé s'il existait une portion de l'espace où l'effet de déviation du photon de l'image primaire pouvait être négligé. La réponse à cette question est fournie à droite Fig. 8.9 où l'on peut voir le déplacement de la direction finale sur le ciel d'un photon de l'image primaire engendré par la courbure d'espace-temps. On constate d'une part que ce déplacement se comporte de façon similaire pour les deux distances de l'étoile considérées, et croît continûment jusqu'à atteindre un décalage d'environ 100 microsecondes d'angle à $\gamma \approx 160°$. Même lorsque l'étoile est située à l'avant du trou noir ($\gamma < 90°$), nous avons un effet de lentille supérieur à 1 microseconde d'angle. Précisons que ces résultats sont également présentés dans Bozza & Mancini (2012). Cependant, dans notre étude nous avons considéré un domaine de variation de l'angle γ plus grand, nous avons ainsi pu montrer que l'effet de lentille doit également être pris en compte lorsque l'étoile est située à $\gamma < 90°$.

D'autre part, on remarque sur cette même courbe que le décalage astrométrique est inférieur à 1 microseconde d'angle lorsque l'angle γ est inférieur à environ 45°, et cela pour chaque distance r_s. Il semble donc que nous puissions d'une part utiliser le modèle G quand l'étoile est située à $\gamma > 45°$ et d'autre part utiliser le modèle E lorsque $\gamma \leqslant 45°$. Néanmoins, étant donné que ce dernier modèle néglige l'ensemble des effets de courbure sur

le photon, il est nécessaire de s'assurer que celui-ci puisse correctement simuler les positions apparentes de l'étoile. C'est ce que l'on peut voir Fig. 8.10 où l'on a tracé la différence entre les positions simulées par le modèle G et celles obtenues avec le modèle E. On remarque que pour $r_s \geqslant 10^5\ M$, le modèle E ne permet pas de reproduire correctement les observations obtenues avec le modèle G. Nous choisissons donc d'uniquement appliquer le modèle G dans la Zone 3. Un schéma récapitulatif des différentes zones est donné Fig. 8.11.

L'erreur maximale pouvant être commise dans la Zone 3 peut être estimée en faisant la somme quadratique de l'erreur maximale commise à la limite de la Zone 1, correspondant à 0,5 microseconde d'angle, et celle commise par le fait que l'on ne considère qu'un point de l'image primaire dans la Zone 3, que l'on majore à 0,3 microseconde d'angle. L'erreur ainsi obtenue est donc d'environ 0,6 microseconde d'angle, les positions astrométriques simulées dans cette zone respectent bien la limitation que nous nous sommes fixée.

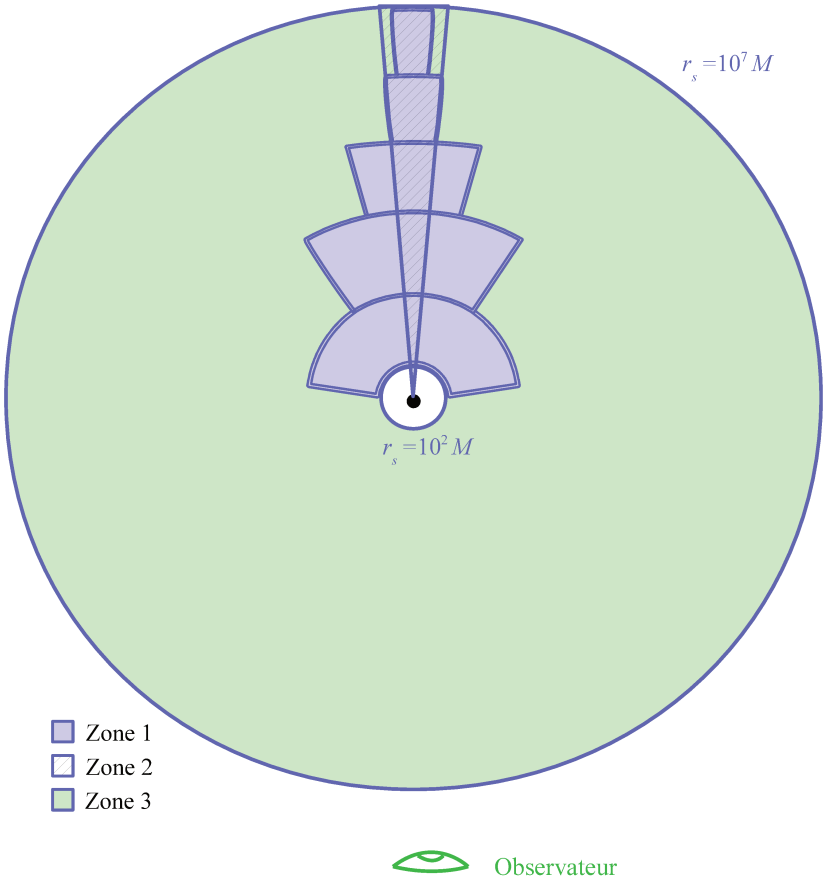

FIGURE 8.11 – Illustration des différentes zones dans lesquelles les positions astrométriques de l'étoile sont simulées en considérant différentes méthodes. On considère ici un observateur, un trou noir et une étoile pris dans un même plan. Cependant, les différentes zones définies ici sont valables quelle que soit la position de l'observation. Dans la Zone 1, les positions apparentes de l'étoile sont obtenues en calculant le centroïde composé des images primaire et secondaire. Dans la Zone 2, nous ne calculons pas la position astrométrique de l'étoile pour des raisons de temps de calcul. Enfin, dans la Zone 3 nous utilisons le modèle G pour simuler les observations, c'est-à-dire que nous considérons uniquement un photon de l'image primaire. Nous négligeons donc les images secondaires et l'effet d'amplification de l'image primaire induites par les effets de lentilles.

Chapitre 9

Application du nouveau modèle d'orbites : études des effets de lentilles gravitationnelles au Centre Galactique

Sommaire

9.1 Observation d'une bosse sur l'orbite apparente d'étoiles fortement inclinées 222

9.1.1 Orbites circulaires 222

9.1.2 Orbites elliptiques 227

9.2 Effets des constituants du Centre Galactique sur l'orbite apparente d'étoiles proches 229

9.2.1 Prise en compte de la source Sgr A* 229

9.2.2 Prise en compte des images secondaires des étoiles S 231

Dans ce nouveau chapitre nous allons appliquer le modèle développé dans le chapitre précédent en vue d'étudier les effets de lentilles au Centre Galactique. D'une part, nous mettrons en évidence l'apparition d'une bosse sur l'orbite apparente d'étoiles observées sous une certaine inclinaison. Nous discuterons également de ce que ce type d'observations pourrait apporter comme contrainte. Dans un second temps, nous déterminerons l'impact astrométrique de certains constituants du Centre Galactique sur l'orbite apparente d'étoiles contenues dans le champ de vue scientifique de l'instrument *GRAVITY*, centré sur la source Sgr A* et égal à 60 millisecondes d'angle. En effet, comme cela a été mentionné Sect. 3.2.2, l'astrométrie de cet instrument est obtenue en considérant l'ensemble du flux contenu dans ce champ de vue. Il est donc important de déterminer si les objets présents dans celui-ci biaiseront les futures observations de *GRAVITY*.

9.1 Observation d'une bosse sur l'orbite apparente d'étoiles fortement inclinées

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les effets de lentilles ont un impact important sur les mesures astrométriques d'étoiles situées au centre de notre galaxie. Dans les deux sections suivantes nous allons voir quelles contraintes éventuelles pourraient apporter l'observation de ces effets sur la source compacte située au Centre Galactique ou sur la trajectoire d'étoiles pouvant être détectées par *GRAVITY*.

9.1.1 Orbites circulaires

Tout d'abord, nous choisissons de nous placer dans un cas simple c'est-à-dire de considérer une étoile en orbite circulaire autour du trou noir et évoluant dans le plan équatorial de celui-ci. Si un observateur terrestre observe cette étoile sous une certaine inclinaison i (voir Fig. 6.1 pour la définition de cet angle), alors on voit apparaître une bosse sur l'orbite apparente de cette étoile, comme cela est visible à gauche Fig. 9.1. Sur cette dernière sont visibles différentes positions apparentes d'une étoile située à 100 unités géométriques du trou noir et vues à des inclinaisons de 80°, 70° et 60°.

D'une part, on remarque que la position apparente obtenue en ne considérant que l'image primaire présente une bosse plus marquée que celle obtenue avec le centroïde composé des images primaire et secondaire. La différence maximale obtenue entre ces deux types de positions est notamment d'environ 40 microsecondes d'angle pour une inclinaison de 80°. Cette différence est due au fait que l'image secondaire, située à l'opposé de l'image primaire, décale le centroïde dans sa direction, ce qui engendre une diminution de l'amplitude de la bosse.

D'autre part, on constate que les différentes bosses obtenues diminuent en amplitude lorsque l'inclinaison diminue. Cette décroissance s'explique simplement par le fait que les effets de lentilles sont moins importants lorsque l'étoile est située à des angles γ faibles : à une position donnée de l'étoile, cet angle diminue lorsque l'inclinaison diminue.

Le décalage astrométrique induit par l'ensemble des effets de lentilles (images primaire et secondaire) pour les différentes inclinaisons et pour les différentes distances de l'étoile au trou noir est représenté à droite Fig. 9.1. Comme précédemment on constate que ce décalage astrométrique diminue lorsque l'inclinaison diminue. On remarque également que celui-ci est de plus en plus important quand l'étoile s'éloigne du trou noir. Cette augmentation du décalage s'explique par deux raisons. D'une part par le fait que l'effet de lentille sur l'image primaire est plus important lorsque la distance de l'étoile augmente. Pour le comprendre, on peut par exemple s'intéresser à la taille de l'anneau d'Einstein. En effet, on sait que lorsque la distance de l'étoile augmente le rayon de cet anneau augmente. On comprend donc ici que si les images primaire et secondaire n'ont pas fusionné, mais en sont proches, l'image primaire (ainsi que la secondaire) est située près du rayon de l'anneau et est donc davantage décalée lorsque la distance de l'étoile augmente (puisque le rayon de l'anneau

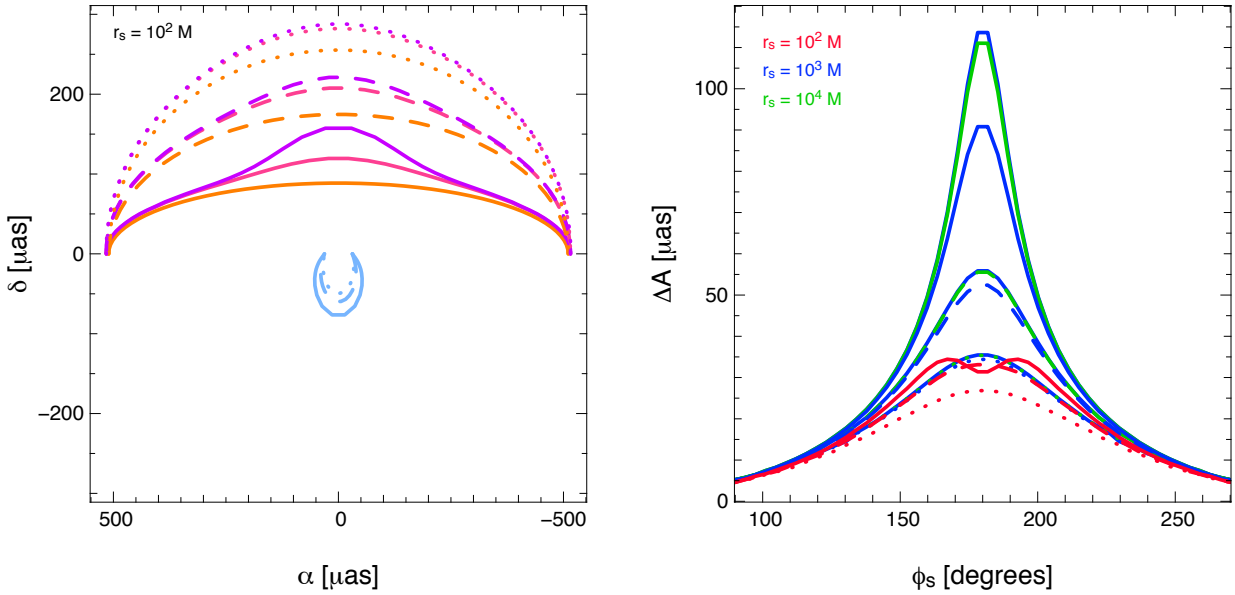

FIGURE 9.1 – Effets des lentilles gravitationnelles sur l'astrométrie d'étoiles situées au Centre Galactique, pour un trou noir de Schwarzschild de masse $M_{\rm TN} = 4{,}31 \times 10^6\ M_\odot$ et situé à $R_0 = 8{,}33$ kpc du Système Solaire. *À gauche :* positions apparentes d'une étoile située à 100 unités géométriques du trou noir, obtenues en considérant le centroïde de l'image primaire (en violet), le centroïde de l'image secondaire (en bleu clair), et le centroïde composé des images primaire et secondaire (en rose). Les positions astrométriques en orange sont celles obtenues en ne considérant pas les effets de lentilles, il s'agit simplement d'une projection en espace plat des coordonnées spatiales de l'étoile dans le plan du ciel. Les courbes en trait plein, tirets et pointillés sont obtenues pour des inclinaisons de 80°, 70° et 60°, respectivement. *À droite :* décalages astrométriques induits par l'ensemble des effets de lentilles en fonction de l'angle ϕ_s de l'étoile. Les types de courbes sont similaires à ceux de l'image de gauche.

d'Einstein augmente). D'autre part, l'augmentation du décalage est également due au fait que plus l'étoile est loin moins l'image secondaire a un impact sur le centroïde, car celle-ci diminue en taille sur le ciel et donc en flux. Les positions apparentes obtenues sont donc essentiellement celles de l'image primaire. Par ailleurs, la décroissance observée au centre de la courbe rouge en trait plein à droite Fig. 9.1 vient du fait que l'image secondaire possède un poids important dans le calcul du centroïde. Ce dernier est donc plus proche de la position apparente non affectée par les effets de lentilles.

Mentionnons que dans le cas de l'instrument *GRAVITY*, la bosse qui sera potentiellement observée sera celle composée des images primaire et secondaire, puisque celles-ci seront contenues dans le champ de vue de l'instrument. Nous observerons donc un décalage astrométrique, dû aux effets de lentilles, plus faible que celui obtenu uniquement avec l'image primaire. Néanmoins, le centroïde observé par *GRAVITY* sera affecté d'un décalage qui dépassera largement la précision astrométrique de celui-ci. Cet instrument

sera donc en mesure de détecter les effets de lentilles gravitationnelles et de mettre en évidence une bosse sur l'orbite apparente de l'étoile, si évidemment la configuration de celle-ci le permet.

L'observation de cette bosse pourrait apporter des contraintes sur l'inclinaison i entre le plan orbital et l'écran de l'observateur. Et cela est d'autant plus vrai que l'étoile possède une grande distance au trou noir, puisque les décalages astrométriques obtenus avec les trois inclinaisons diffèrent davantage pour de grands r_s. On obtient par exemple à $r_s = 10^3\ M$ un écart maximal d'environ 40 microsecondes d'angle entre les inclinaisons 80° et 70°.

Une autre contrainte éventuelle serait la distance de l'étoile lorsque celle-ci passe à proximité de l'arrière du trou noir (i proche de 80°). En effet, comme nous en avons déjà discuté l'impact des effets de lentilles gravitationnelles est plus important quand l'étoile est loin du trou noir. Dans le cas où $i = 80°$, nous obtenons des décalages maximaux d'environ 33, 91 et 111 microsecondes d'angle pour $r_s = 10^2\ M$, $r_s = 10^3\ M$ et $r_s = 10^4\ M$, respectivement. Néanmoins, l'impact des effets de lentilles devient de plus en plus similaire lorsque r_s augmente : pour $i = 80°$, l'écart maximal entre les décalages astrométriques obtenu pour $r_s = 10^2\ M$ et $r_s = 10^3\ M$ est d'environ 60 microsecondes d'angle, alors qu'il est d'environ 20 microsecondes d'angle pour $r_s = 10^3\ M$ et $r_s = 10^4\ M$. Enfin, si l'on compare les distances $r_s = 10^4\ M$ et $r_s = 10^5\ M$, nous obtenons un écart maximal de 3 microsecondes d'angle. Par conséquent, plus r_s est grand et plus il sera difficile de contraindre ce paramètre. Cependant, les décalages astrométriques évalués pour chaque distance r_s sont obtenus en différentes positions (α,δ) sur le plan du ciel. Par exemple, le décalage maximal estimé pour $r_s = 10^3\ M$ est obtenu à (α,δ) = (0 μas, 980 μas) et celui pour $r_s = 10^4\ M$ à (α,δ) = (0 μas, 10^4 μas). La bosse observée à cette dernière position dans le ciel ne peut donc être obtenue que pour des r_s de l'ordre de 10^4 unités géométriques. Il semble donc possible d'arriver à une contrainte de ce paramètre à l'aide des effets de lentilles.

De plus, nous nous sommes également demandé s'il était possible de contraindre les paramètres du trou noir tels que sa masse M_{TN}, sa distance R_0 au Système Solaire ainsi que son moment angulaire $\bar{a}$.

Les décalages astrométriques induits par l'ensemble des effets de lentilles (c'est-à-dire prenant en compte les images primaire et secondaire) pour différentes valeurs de M_{TN} et R_0, ainsi que pour plusieurs distances et inclinaisons de l'étoile, sont présentés Fig. 9.2. Les courbes vertes sur trois des images correspondent à celles de l'image de droite Fig. 9.1. Tout d'abord, on peut voir grâce aux courbes présentées en bas à droite Fig. 9.2, que la variation de la masse ainsi que de la distance du trou noir modifie davantage les effets de lentilles lorsque l'inclinaison i et la distance r_s sont grandes.

D'autre part, on constate qu'augmenter la masse du trou noir ou diminuer sa distance au Système Solaire, augmente les effets de lentilles. Si on se place dans le cas $r_s = 10^4\ M$ et $i = 80°$, la différence maximale entre les décalages obtenus pour $M_{\mathrm{TN}} = 4{,}31 \times 10^6\ M_\odot$ (en trait plein vert) et $M_{\mathrm{TN}} = 5{,}57 \times 10^6\ M_\odot$ (en trait plein bleu) est d'environ 32 microsecondes d'angle. Celle obtenue pour $R_0 = 8{,}33$ kpc (en trait plein vert) et $R_0 = 6{,}89$

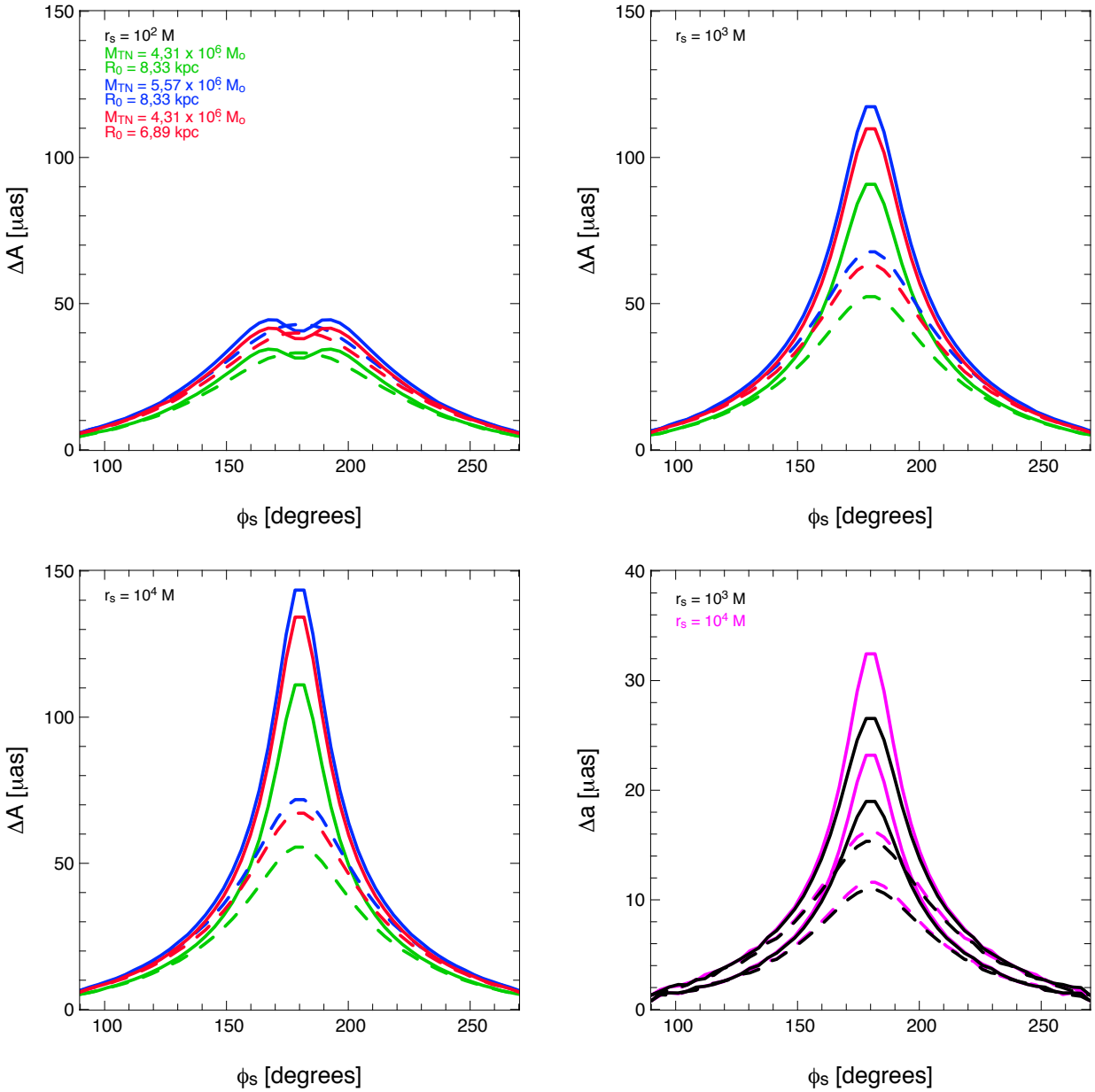

FIGURE 9.2 – *En haut, et en bas à gauche :* décalages astrométriques induits par l'ensemble des effets de lentilles pour différentes valeurs de masse et distance du trou noir. *En bas à droite :* différence entre les décalages astrométriques évalués pour $M_{\rm TN} = 4{,}31 \times 10^6\ M_\odot$ et $R_0 = 8{,}33$ kpc, et ceux évalués avec les deux autres configurations ($M_{\rm TN}$,R_0) du trou noir. Les courbes en trait plein et tirets, sur chaque image, sont obtenues pour une inclinaison de 80° et 70°, respectivement.

kpc (en trait plein rouge) est d'environ 23 microsecondes d'angle. Pour $r_s = 10^3\ M$, nous avons des écarts maximaux, pour ces deux mêmes comparaisons, d'environ 27 et 19 microsecondes d'angle, respectivement.

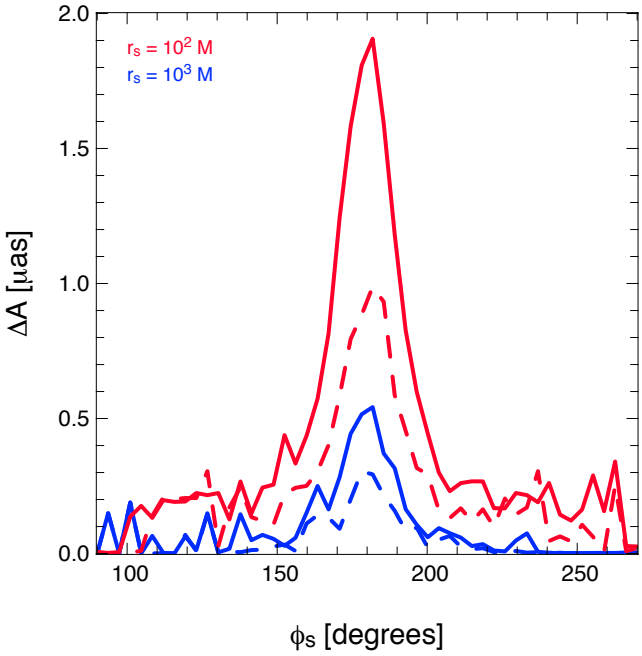

Figure 9.3 – Décalages astrométriques induits par le moment cinétique adimensionné du trou noir. Les courbes en trait plein sont obtenues pour $\bar{a} = 1$ et celles en tirets pour $\bar{a} = 0{,}5$. Toutes ces courbes sont évaluées avec une inclinaison $i = 80°$. La masse du trou noir est fixée à $M_{\mathrm{TN}} = 4{,}31 \times 10^6\ M_\odot$ et sa distance au Système Solaire est fixée à $R_0 = 8{,}33$ kpc.

Néanmoins, même pour une configuration optimale de l'étoile, la variation de la masse modifie l'impact des effets de lentilles de manière similaire à celui obtenu lorsque l'on fait varier sa distance. Par exemple, pour $r_s = 10^4\ M$ et $i = 80°$, la différence maximale entre les courbes rouge et bleue est d'environ 10 microsecondes d'angle. Il semble donc difficile d'apporter une contrainte forte sur la masse et la distance du trou noir à partir des effets de lentilles gravitationnelles, en raison de la dégénérescence entre ces deux paramètres.

Enfin, nous avons tracé Fig. 9.3 l'impact du moment cinétique adimensionné du trou noir sur les effets de lentilles, et cela pour différentes inclinaisons et distances de l'étoile au trou noir. On remarque que même pour une distance faible et une inclinaison élevée, l'effet du moment cinétique adimensionné est très faible et ne dépasse pas 2 microsecondes d'angle. Si l'on souhaite atteindre un décalage astrométrique plus important, il est nécessaire de considérer des inclinaisons plus grandes c'est-à-dire lorsque l'étoile est presque alignée à l'arrière du trou noir. Cependant, l'effet induit par le moment cinétique du trou noir reste faible et ne dépasse pas la précision astrométrique de l'instrument *GRAVITY*.

Cela montre que la contrainte du paramètre $\bar{a}$ par les effets de lentilles gravitationnelles semble difficile avec cet instrument. Il faudra plutôt s'attendre à contraindre ce paramètre à l'aide de la trajectoire de l'étoile et non celle du photon. C'est d'ailleurs ce que nous avions

remarqué lors de l'étude de l'étoile S2 Partie III. Néanmoins, comme cela est discuté dans Bozza & Mancini (2012), une contrainte du moment cinétique à l'aide des effets de lentilles pourrait potentiellement être possible si l'on étudie un échantillon important d'étoiles dont les orbites sont déjà bien connues.

Rappelons que des études théoriques plus approfondies sur la contrainte du moment cinétique adimensionné du candidat trou noir central par les effets de lentilles sont effectuées dans les articles de Bozza & Mancini (2004, 2005, 2012) et Jørgensen et al. (2016).

9.1.2 Orbites elliptiques

Afin d'avoir une vision plus réaliste de ce que pourrait apporter l'observation d'une étoile au Centre Galactique, nous avons considéré une orbite elliptique d'excentricité égale à 0,8. La distance de l'étoile varie entre environ 100 et 1000 unités géométriques, et celle-ci évolue dans un plan orbital vu sous différentes inclinaisons. Les résultats obtenus sont présentés Fig. 9.4. On peut y voir les positions apparentes de l'étoile (à gauche) ainsi que le décalage astrométrique induit par l'ensemble des effets de lentilles (à droite). Les trois portions d'orbite considérées sur chaque image de gauche font partie d'une même orbite que l'on a découpée en trois pour des raisons de temps de calcul. La période de l'étoile est d'environ 0,1 an, nous avons donc besoin d'environ 4 ans pour obtenir ces trois portions d'orbite.

Étant donné que l'orbite est elliptique, le décalage astrométrique observé est différent à chaque période de rotation. Si on considère la portion d'orbite rouge comme première observation, on remarque que le décalage maximal obtenu à chaque période augmente au cours du temps et passe d'environ 60 à 150 microsecondes d'angle pour $i = 80°$, et d'environ 55 à 80 microsecondes d'angle pour $i = 70°$.

L'observation continue d'orbites possédant une inclinaison élevée va donc probablement permettre d'apporter une meilleure contrainte de certains éléments orbitaux de l'étoile. En effet, si on considère par exemple une excentricité plus faible que 0,8, la portion d'orbite orange sera décalée vers des δ négatifs c'est-à-dire que l'étoile sera plus proche du trou noir lorsque celle-ci sera en arrière plan du trou noir ($\gamma < 90°$). Les positions astrométriques seront donc moins fortement affectées par les effets de lentilles puisqu'on a vu précédemment que ceux-ci étaient plus importants lorsque l'étoile était loin du trou noir (à cause de l'image secondaire qui possède un poids moins important que l'image primaire dans le calcul du centroïde). D'autre part, l'étoile sera moins fréquemment située à l'arrière du trou noir ($\gamma > 90°$), il y aura donc moins de points affectés par ces effets. Si on considère cette fois-ci la portion rouge, celle-ci sera décalée vers des δ positifs, l'étoile sera plus éloignée du trou noir et sera donc davantage affectée par les effets de lentilles. De plus, contrairement à la portion orange, elle aura un nombre de points plus important situés à $\gamma > 90°$.

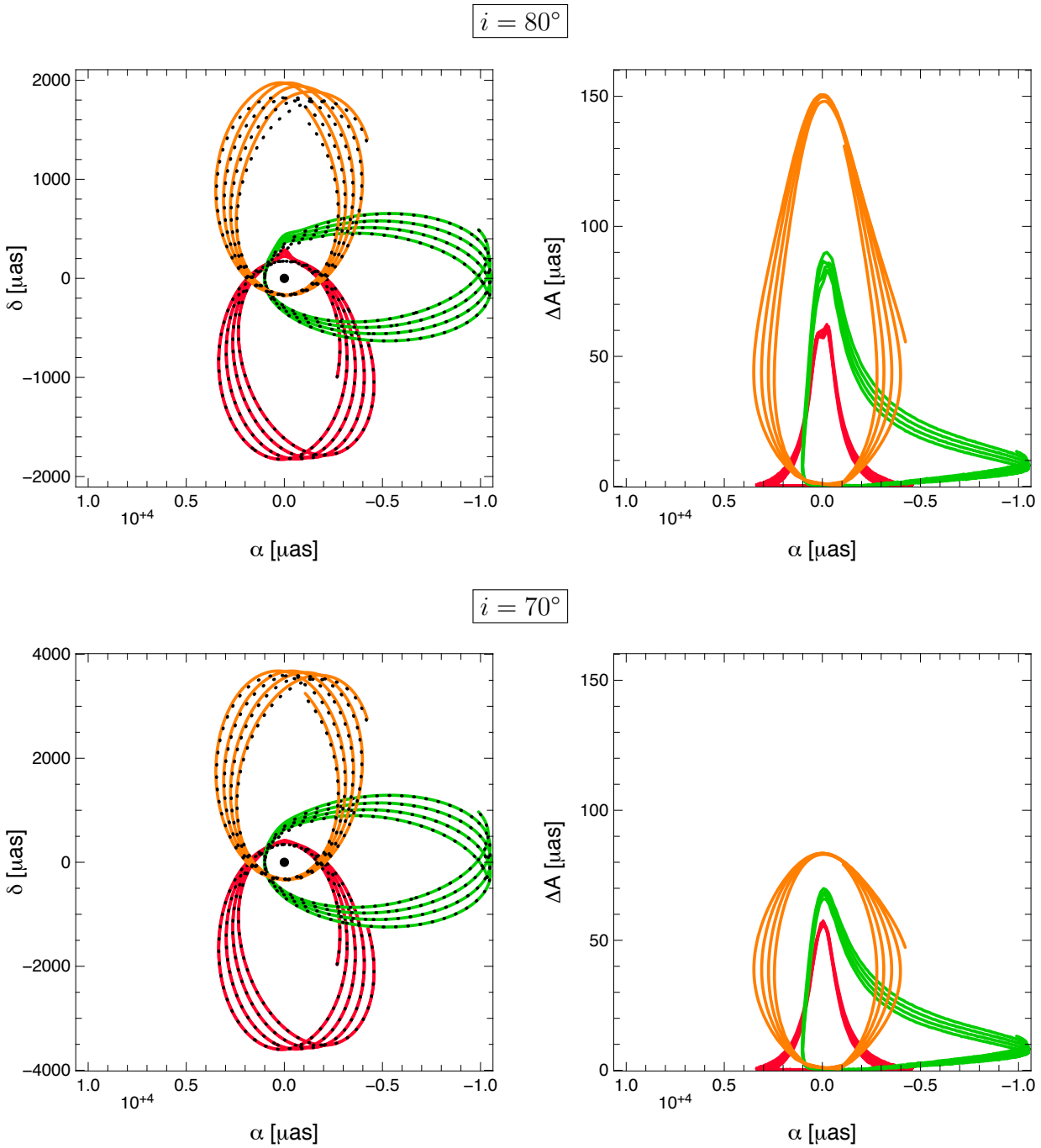

Figure 9.4 – *À gauche :* orbites apparentes affectées (en trait plein coloré) et non affectées (en pointillés noirs) par l'ensemble des effets de lentilles gravitationnelles. Le rond noir au centre représente la position du trou noir. *À droite :* décalages astrométriques dus aux effets de lentilles, associés à chaque portion d'orbite considérée.

9.2 Effets des constituants du Centre Galactique sur l'orbite apparente d'étoiles proches

Dans cette nouvelle section nous souhaitons mener une étude préliminaire sur la contribution astrométrique de certains objets composant le Centre Galactique, aux futures observations de l'instrument *GRAVITY*. Plus précisément, nous nous intéressons ici à l'effet induit par la source Sgr A* ainsi qu'aux images secondaires des étoiles S (voir Sect. 2.1.2). Ces deux contributions sont contenues dans les 60 millisecondes d'angle de l'instrument, centrées sur la source centrale, il est donc naturel de se demander si leur prise en compte modifie ou non les positions apparentes d'étoiles contenues elles aussi dans ce champ de vue.

9.2.1 Prise en compte de la source Sgr A*

Une estimation récente sur l'incertitude de la position du centroïde de la source Sgr A* a été effectuée dans le proche infrarouge par Plewa et al. (2015), et serait d'environ 170 microsecondes d'angle. Nous avons donc cherché à estimer le décalage astrométrique induit par cette incertitude sur l'observation d'étoiles du Centre Galactique. Pour cela, nous devons tenir compte des magnitudes $m_{\mathrm{K}_{\mathrm{SgrA}^*}}$ de Sgr A* et m_{K_s} de l'étoile. La magnitude de la source centrale est d'environ 16,5 mais celle de l'étoile est incertaine puisqu'on ne sait pas encore ce que l'instrument *GRAVITY* découvrira. Néanmoins, ce dernier pourra observer des étoiles faibles de magnitudes allant jusqu'à 18 (voir Sect. 3.2.2).

Afin de calculer le centroïde composé des images primaire et secondaire de l'étoile ainsi que de la source Sgr A*, nous devons prendre en compte la différence en magnitude de ces deux objets. Il suffit pour cela d'estimer le flux F_{SgrA^*} de la source centrale nécessaire pour que l'on puisse atteindre une magnitude $m_{\mathrm{K}_{\mathrm{SgrA}^*}} = 16{,}5$, sachant la magnitude m_{K_s} et le flux F_s de l'étoile. Précisons que le flux de l'étoile utilisé ici est celui obtenu grâce au calcul de son image par le code `GYOTO`. Dans ce dernier, on suppose que l'étoile émet un rayonnement de type de corps noir.

La formule utilisée pour remonter au flux de Sgr A* est donnée par :

$$F_{\mathrm{SgrA}^*} = F_s \times 10^{\frac{m_{\mathrm{K}_s} - m_{\mathrm{K}_{\mathrm{SgrA}^*}}}{2{,}5}}. \tag{9.1}$$

On peut alors estimer le centroïde final donné, lui, par :

$$(\alpha_s,\delta_s) = \left(\frac{\alpha_1 \times F_1 + \alpha_2 \times F_2 + \alpha_{\mathrm{SgrA}^*} \times F_{\mathrm{SgrA}^*}}{F_1 + F_2 + F_{\mathrm{SgrA}^*}}, \frac{\delta_1 \times F_1 + \delta_2 \times F_2 + \delta_{\mathrm{SgrA}^*} \times F_{\mathrm{SgrA}^*}}{F_1 + F_2 + F_{\mathrm{SgrA}^*}} \right) \tag{9.2}$$

où les coordonnées $(\alpha_{\mathrm{SgrA}^*},\delta_{\mathrm{SgrA}^*})$ correspondent à la position astrométrique de Sgr A* dans le proche infrarouge. Étant donné l'incertitude sur celle-ci nous choisissons de la fixer à $(\alpha_{\mathrm{SgrA}^*},\delta_{\mathrm{SgrA}^*}) = (120\ \mu\mathrm{as}, 120\ \mu\mathrm{as})$ de sorte que sa distance angulaire au centre de l'écran, donnée par $\sqrt{\alpha^2_{\mathrm{SgrA}^*} + \delta^2_{\mathrm{SgrA}^*}}$, soit de 170 microsecondes d'angle.

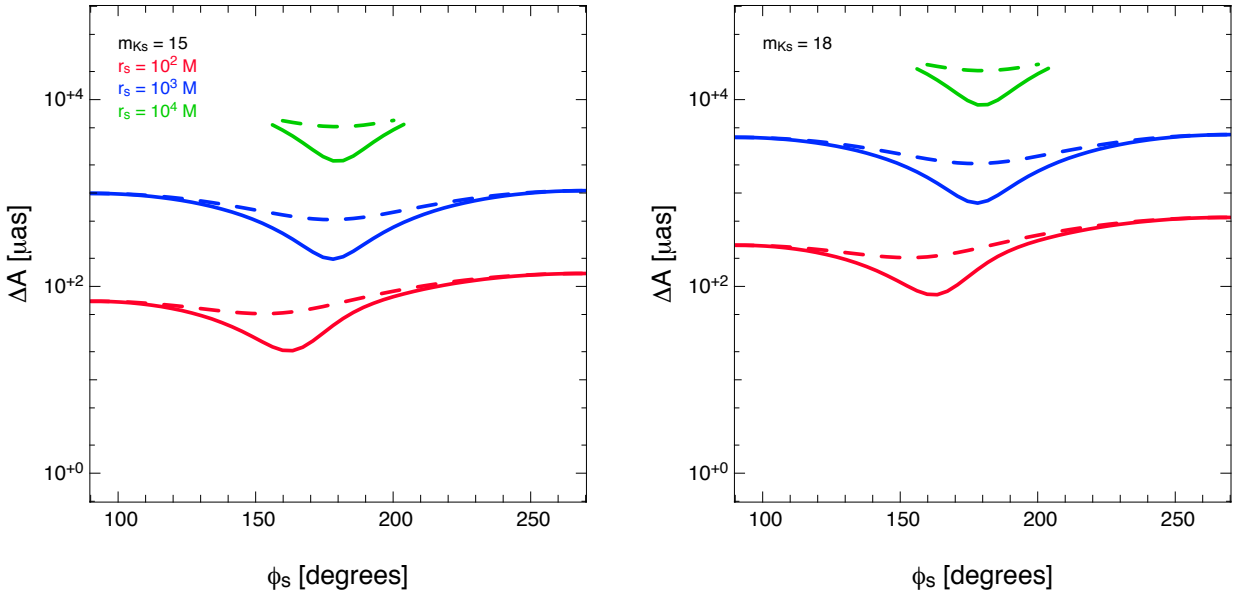

FIGURE 9.5 – Décalages astrométriques de la position apparente d'étoiles contenues dans les 60 millisecondes d'angle de l'instrument *GRAVITY* et engendrés par la prise en compte de la source Sgr A*. Les courbes en trait plein et en pointillés sont obtenues pour des inclinaisons de 80° et 60°, respectivement.

L'estimation des décalages astrométriques induits par Sgr A* sont obtenus en considérant les orbites circulaires utilisées Sect. 9.1.1. Les différents résultats sont présentés Fig. 9.5 où l'on a considéré des magnitudes de 15 (à gauche) et de 18 (à droite) pour l'étoile. Seules les positions astrométriques de l'étoile se trouvant dans le champ de vue de l'instrument sont représentées, c'est pour cela que les parties gauche et droite des courbes vertes estimées pour $r_s = 10^4\ M$ sont tronquées.

Tout d'abord, on remarque que la contribution de Sgr A* modifie énormément les positions apparentes de l'étoile, quelle que soit sa magnitude. Par exemple, l'effet maximal pour $m_{\mathrm{K}_s} = 15$ atteint environ 10^2 et 10^4 microsecondes d'angle pour $r_s = 10^2\ M$ et $r_s = 10^4\ M$, respectivement. On a donc un décalage plus important lorsque l'étoile est située loin du trou noir. Pour le comprendre calculons la différence entre la position du centroïde α_s, où on le suppose uniquement composé de l'image primaire et de la source centrale ($F_2 = 0$), et la position α_1 de l'étoile non affectée par Sgr A* :

$$\begin{aligned} |\alpha_s - \alpha_1| &= \left| \frac{\alpha_1 \times F_1 + \alpha_{\mathrm{SgrA^*}} \times F_{\mathrm{SgrA^*}}}{F_1 + F_{\mathrm{SgrA^*}}} - \frac{\alpha_1 (F_1 + F_{\mathrm{SgrA^*}})}{F_1 + F_{\mathrm{SgrA^*}}} \right|, \\ &= \frac{F_{\mathrm{SgrA^*}}}{F_1 + F_{\mathrm{SgrA^*}}} \left| \alpha_1 - \alpha_{\mathrm{SgrA^*}} \right| . \end{aligned} \tag{9.3}$$

Si on considère le cas $m_{\mathrm{K}_s} = 15$, le rapport $F_{\mathrm{SgrA^*}}/(F_1 + F_{\mathrm{SgrA^*}})$ est environ égal à 0,2 pour chaque distance r_s et inclinaison i considérées. La coordonnée α_1 maximale atteinte dans le cas où l'étoile est située à $r_s = 10^3\ M$ et $i = 80°$ est d'environ 5×10^3

microsecondes d'angle. Nous arrivons donc à une différence $|\alpha_1 - \alpha_{\mathrm{SgrA}^*}|$ de l'ordre de $(5 \times 10^3 - 120) \times 0{,}2 \approx 1$ mas. Cela signifie que plus le centroïde de l'étoile sera loin de la position sur le ciel du trou noir plus le décalage astrométrique induit par la source centrale sera grand. C'est d'ailleurs ce que l'on peut voir Fig. 9.5 puisque les décroissances observées sur chaque courbe autour de $\phi_s = 180°$ ont lieu lorsque la distance du centroïde de l'étoile au trou noir apparent diminue.

Le calcul effectué ici montre également que le centroïde composé de l'étoile et de la source centrale est principalement modifié à cause du flux de cette dernière, et non de sa position. En effet, si l'on prend par exemple $\alpha_{\mathrm{SgrA}^*} = 1$ μas nous avons tout de même un décalage astrométrique de l'ordre de 1 milliseconde d'angle. Néanmoins, la différence entre les décalages astrométriques obtenus à $\alpha_{\mathrm{SgrA}^*} = 120$ μas et $\alpha_{\mathrm{SgrA}^*} = 1$ μas est d'environ 20 microsecondes d'angle et dépasse donc la précision astrométrique de *GRAVITY*.

Étant donné l'effet non négligeable de la source Sgr A* sur les mesures astrométriques d'étoiles du Centre Galactique, il faudra tenir compte de cette source dans le modèle d'orbites utilisé pour interpréter les futures données de l'instrument. Plus précisément, il sera nécessaire d'ajuster trois paramètres supplémentaires dans ce modèle correspondant à la position (α_{SgrA^*},δ_{SgrA^*}) de Sgr A* ainsi qu'à son flux. Par ailleurs, puisque le spectre de cette source est différent de celui d'une étoile, il sera certainement possible de distinguer les contributions de ces deux objets et donc d'isoler les positions astrométriques de l'étoile. Pour cela, il sera nécessaire d'introduire un paramètre supplémentaire au modèle correspondant à l'indice spectral de Sgr A*.

9.2.2 Prise en compte des images secondaires des étoiles S

Dans cette nouvelle section nous nous intéressons à une autre contribution correspondant aux images secondaires des étoiles S. On sait qu'à une distance r_s donnée de l'étoile et tout angle ϕ_s et θ_s, les images secondaires se forment uniquement à l'intérieur de l'anneau d'Einstein qui serait obtenu à ce r_s. Par exemple, si on considère un trou noir de Schwarzschild et une étoile située à 10^3 unités géométriques de celui-ci, son image secondaire se trouvera toujours à l'intérieur d'un cercle de rayon $\Theta_E \approx 100$ μas (voir équation (5.6)) centré sur le trou noir.

D'autre part, l'image secondaire d'une étoile située à une distance inférieure ou égale à environ 10^7 unités géométriques sera toujours contenue dans les 60 millisecondes d'angle de *GRAVITY*, puisque que le rayon de l'anneau obtenu pour $r_s = 10^7$ M vaut environ 30 millisecondes d'angle. Si la distance de l'étoile dépasse ces 10^7 unités géométriques, l'image secondaire sera située dans le champ de vue de l'instrument seulement pour des valeurs faibles de l'angle γ. En effet, plus γ sera grand et plus l'image secondaire sera proche de fusionner avec l'image primaire pour former l'anneau d'Einstein, son rayon étant dans ce cas supérieur à 30 millisecondes d'angle.

Étant donné que l'ensemble des étoiles S observées par Gillessen et al. (2009b) ont des distances au trou noir inférieures ou égales à 10^7 unités géométriques, nous avons cherché à estimer l'influence de leur image secondaire sur la position apparente d'étoiles contenues

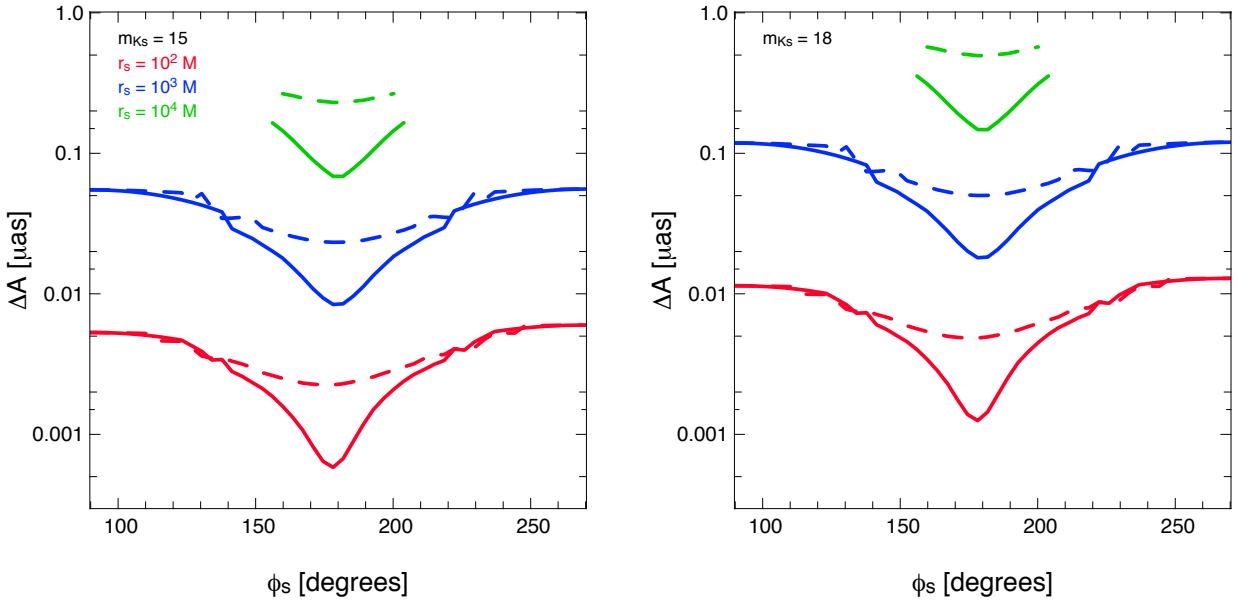

Figure 9.6 – Décalages astrométriques de la position apparente d'étoiles contenues dans les 60 millisecondes d'angle de l'instrument *GRAVITY*, engendrés par la prise en compte des images secondaires des étoiles S, obtenues à la date 2018,16. Les courbes en trait plein et en pointillés sont obtenues pour des inclinaisons de 80° et 60°, respectivement.

elles aussi dans le champ de vue de *GRAVITY*. Pour cela, nous avons une nouvelle fois considéré les orbites circulaires Sect. 9.1.1 et pris en compte les magnitudes en bande K de chaque étoile S données dans Gillessen et al. (2009b). Par simplicité, nous avons fixé le rayon de chacune de ces étoiles à 1 unité géométrique. Précisons que cette valeur constitue une limite supérieure.

Puisqu'on ne sait pas ce qu'observera *GRAVITY*, nous décidons d'évaluer dans un premier temps les flux et positions des images secondaires des étoiles S à une date d'observation donnée, et déterminons ensuite les orbites apparentes de l'étoile affectées par ses images. Nous ne faisons donc pas ici évoluer les positions des étoiles S contrairement à celle de l'étoile hypothétique.

Les différents résultats sont présentés Fig. 9.6 où l'on a considéré une nouvelle fois des magnitudes de 15 (à gauche) et 18 (à droite) pour l'étoile. Les flux et positions des images secondaires des étoiles S sont estimés en 2018,16, cette date correspond à l'instant où l'image secondaire de l'étoile S2 est la plus brillante. Fig. 9.6, on remarque que les décalages obtenus sont très faibles et inférieurs à 1 microseconde d'angle. Ceux-ci sont dominés par l'image secondaire de l'étoile S2, puisque son flux est environ 10^2 à 10^4 fois plus grand que celui des autres étoiles. Cela s'explique simplement par le fait qu'en 2018,16, l'étoile S2 est la plus proche du trou noir ($\approx$ 3000 M) et possède un angle γ suffisamment grand ($\approx$ 135°) pour avoir une image secondaire importante. En particulier, l'image secondaire de cette étoile possède une magnitude en bande K proche de 27, alors que celle des autres étoiles est inférieure à 30. Si on considère une autre date, par exemple en 2018,4, l'étoile

S2 reste proche du trou noir mais contribue au centroïde aussi faiblement que les autres étoiles car celle-ci s'éloigne de l'arrière du trou noir ($\gamma \approx 100°$). Le décalage obtenu est, à cette date, inférieur à 0,1 microseconde d'angle.

À présent nous cherchons à estimer les décalages astrométriques évalués aux dates auxquelles des étoiles S sont situées à leur angle γ maximal. Par exemple, des angles $\gamma \approx 174°$ pour l'étoile S17 et $\gamma \approx 145°$ pour l'étoile S21 sont respectivement atteints aux dates 2025,33 et 2027. Les décalages maximaux obtenus pour $r_s = 10^4\ M$, $i = 60°$ et $m_{\mathrm{K}_s} = 18$ sont environs égaux à 0,8 et 0,5 microseconde d'angle en 2025,33 et 2027, respectivement. Cela montre que l'influence des images secondaires dépend principalement de l'angle γ des étoiles S et non de leur distance au trou noir, puisque les décalages obtenus sont similaires à celui de 2018,16, et que les étoiles S17 et S21 sont situées à $r_s = 8 \times 10^4\ M$ en 2025,33 et $r_s = 2 \times 10^4\ M$ en 2027, respectivement (c'est-à-dire environ 10 fois plus loin que l'étoile S2).

Pour résumer, cette étude démontre que les images secondaires des étoiles S ne biaisent que très faiblement le centroïde d'une étoile observée dans le champ de vue de l'instrument *GRAVITY*. Néanmoins, nous n'avons considéré ici que les étoiles S, une étude plus complète serait de prendre en compte la totalité des images secondaires produites par l'ensemble des constituants de la Galaxie.

D'autre part, ce qui n'est pas mentionné ici c'est que l'étoile S2 est, entre environ 2018 et 2018,4, contenue dans les 60 millisecondes d'angle. Cela signifie que le centroïde de l'étoile hypothétique est également affecté par l'image primaire de l'étoile S2. Les décalages maximaux obtenus aux dates 2018,16 et 2018,4 (pour $r_s = 10^2\ M$ et $r_s = 10^4\ M$, et pour les deux inclinaisons et magnitudes considérées) atteignent environ 10^2 et 10^4 microsecondes d'angle, respectivement. Il sera donc nécessaire de prendre en compte la contribution de l'étoile S2 dans l'interprétation des futures observations de l'instrument obtenues sur des étoiles proches du Centre Galactique. Inversement, si l'on souhaite étudier l'étoile S2 aux dates où celle-ci est contenue dans les 60 millisecondes d'angle, il faudra vérifier que les positions astrométriques obtenues ne soient pas affectées par d'éventuelles étoiles présentent elles aussi dans le champ de vue de l'instrument. Plus précisément, il sera nécessaire de déterminer le nombre d'étoiles présent dans ce dernier. Pour cela, il faudra ajuster un modèle interférométrique à plusieurs sources, aux visibilités et phases mesurées par *GRAVITY* (Paumard et al. 2008; Vincent et al. 2011b). Précisons toutefois que la probabilité d'avoir plusieurs orbites apparentes entièrement contenues dans les 60 millisecondes d'angle centrées sur la source compacte, reste faible. En effet, si on se réfère à l'étude de la population stellaire du Centre Galactique menée par Genzel et al. (2003b), on constate que pour des étoiles de magnitudes en bande K comprises entre 10 et 17, et situées dans un champ de vue de 60 millisecondes d'angle, nous avons une densité surfacique d'environ 80 étoiles par seconde d'angle au carré. Nous avons donc $80 \times \pi \times (0{,}06/2)^2 \approx 0{,}2$ étoile dans le champ de vue de *GRAVITY*, c'est-à-dire moins d'une étoile continûment détectable.

Chapitre 10

Influence du Système Solaire sur les mesures astrométriques de *GRAVITY*

Sommaire

10.1 Cadre du problème 235
10.1.1 Cadre théorique 235
10.1.2 Cadre géométrique 237
10.2 Résultats préliminaires 240
10.2.1 Impact astrométrique lié à la déviation des photons 240
10.2.2 Impact astrométrique lié à l'effet d'aberration 242

Comme cela est dit clairement dans le titre de ce nouveau chapitre, nous cherchons ici à déterminer quel est l'impact des constituants du Système Solaire sur les positions apparentes d'étoiles observées par l'instrument *GRAVITY*. Nous pensons par exemple à l'effet astrométrique induit par les perturbations gravitationnelles générées par les corps du Système Solaire.

Dans un premier temps, nous poserons le problème et définirons les différentes équations utilisées pour mener à bien cette étude. Puis, nous présenterons les premiers résultats obtenus.

10.1 Cadre du problème

10.1.1 Cadre théorique

Les observations effectuées par *GRAVITY* seront obtenues par astrométrie différentielle c'est-à-dire que les positions apparentes de l'étoile seront mesurées par rapport à une étoile de référence, située elle aussi au Centre Galactique et appelée GCIRS 16C (voir

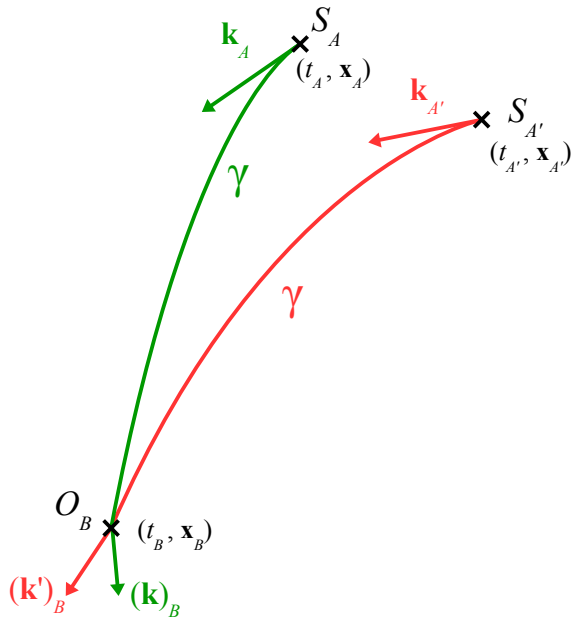

FIGURE 10.1 – Illustration de la situation. Pour une description des divers paramètres de la figure on se référera au texte.

Sect. 3.2.1). L'objectif ici est de déterminer si la séparation angulaire entre l'étoile étudiée et GCIRS 16C sera affectée par les corps du Système Solaire, y compris la Terre.

Pour une meilleure compréhension de la situation décrite ci-après, on pourra se référer à la Fig. 10.1.

Tout d'abord, définissons trois points notés S_A, $S_{A'}$ et O_B correspondant respectivement à l'étoile observée, GCIRS 16C et la Terre. Un photon est émis depuis la source S_A située en $(t_A,\mathbf{x}_A)$, et un autre depuis la source $S_{A'}$ située en $(t_{A'},\mathbf{x}_{A'})$. Ces deux photons sont ensuite reçus simultanément par l'observateur O_B situé en $(t_B,\mathbf{x}_B)$. Dans notre exemple, nous considérons les sources S_A et $S_{A'}$ fixes tandis que l'observateur O_B est en mouvement.

Les photons émis depuis les sources S_A et $S_{A'}$ possèdent des quadri-vecteurs d'onde $\mathbf{k}_A$ et $\mathbf{k}_{A'}$, respectivement. Une fois que ces photons atteignent l'observateur O_B à l'instant t_B, les photons émis en S_A possèdent un quadri-vecteur d'onde $(\mathbf{k})_B$, tandis que ceux émis en $S_{A'}$ possèdent des quadri-vecteurs d'onde $(\mathbf{k}')_B$.

La séparation angulaire théorique entre les deux sources S_A et $S_{A'}$, notée ϕ, telle que vue par l'observateur en mouvement O_B a été calculée par Teyssandier & Le Poncin-Lafitte (2006). Elle est donnée par :

$$\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = -\frac{1}{4}\left[\left(g_{00} + 2g_{0a}\beta^a + g_{ab}\beta^a\beta^b\right)\frac{g^{lp}(\hat{k}'_l - \hat{k}_l)(\hat{k}'_p - \hat{k}_p)}{(1+\beta^m\hat{k}'_m)(1+\beta^r\hat{k}_r)}\right]_B \tag{10.1}$$

où $\beta^i = \mathrm{d}x^i/(c\mathrm{d}t)$ sont les composantes de la trois-vitesse de l'observateur O_B, et $\hat{k}_i = k_i/k_0$ ($\hat{k}'_i = k'_i/k'_0$), avec k_μ (k'_μ) les composantes du quadri-vecteur d'onde du photon émis en S_A ($S_{A'}$) et évaluées en O_B. Les coefficients métriques $g_{\mu\nu}$ sont également estimés en O_B et sont donnés en champ faible, avec la signature $(+, - , - ,-)$, par :

$$\begin{aligned} g_{00} &= \left(1 - 2\frac{Gm}{c^2 r_B}\right), \\ g_{0a} &= 0, \\ g_{ab} &= -\left(1 + 2\frac{Gm}{c^2 r_B}\right) \end{aligned} \tag{10.2}$$

où m correspond à la masse du corps venant perturber à la fois la trajectoire du photon voyageant de la source S_A à l'observateur O_B et celle du photon voyageant de la source $S_{A'}$ à O_B. La coordonnée r_B est égale à la distance $|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C|$, avec $\mathbf{x}_C$ les coordonnées du corps perturbateur.

Si on considère la source S_A, l'expression de la quantité $\hat{k}_i$ évaluée en O_B et obtenue en champ gravitationnel faible est donnée par (Teyssandier & Le Poncin-Lafitte 2006; Hees et al. 2014) :

$$(\hat{k}_i)_B = -\left(N^i_{AB} - \frac{4Gm}{(r_A + r_B)^2 - R^2_{AB}}\left[\frac{R_{AB}}{r_B}(x^i_B - x^i_C) - N^i_{AB}(r_A + r_B)\right]\right) \tag{10.3}$$

où $r_A = |\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_C|$, $R_{AB} = |\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A|$ et $N^i_{AB} = R^i_{AB}/R_{AB}$ avec $R^i_{AB} = x^i_B - x^i_A$.

L'équation (10.1) permet d'évaluer la séparation angulaire prenant en compte la perturbation gravitationnelle générée par un corps de masse m sur la trajectoire des photons voyageant des sources S_A et $S_{A'}$ à l'observateur O_B. De plus, celle-ci nous permet également de prendre en compte un second effet appelé aberration de la lumière. Ce dernier est observé lorsque des photons émis depuis une source fixe sont reçus par un observateur en mouvement. Cela a pour effet de modifier la position apparente de la source. L'aberration est prise en compte ici grâce aux termes β^i intervenant dans l'équation (10.1), et est donc due au fait que l'observateur O_B soit en mouvement par rapport aux sources S_A et $S_{A'}$.

Dans la suite, nous évaluons indépendamment les décalages astrométriques induits par la perturbation gravitationnelle des photons et l'aberration de la lumière. Pour cela, il suffira de considérer des vitesses β^i nulles dans le premier cas, et une masse m nulle dans le second cas.

10.1.2 Cadre géométrique

Nous choisissons d'exprimer chaque coordonnée $\mathbf{x}_A$, $\mathbf{x}_{A'}$, $\mathbf{x}_B$ et $\mathbf{x}_C$ dans un unique repère correspondant à celui centré sur le barycentre du Système Solaire.

Dans notre exemple, l'étoile observée par l'instrument *GRAVITY* est située proche de la source Sgr A*, on peut donc associer les coordonnées de l'étoile observée à celles

de cette source, estimées à $(\alpha_{\mathrm{SgrA}^*},\delta_{\mathrm{SgrA}^*}) = (17^h45^m40{,}03599^s, -29°00'28{,}1699'')$ [1] à l'époque J2000 [2]. Puisque ces coordonnées sont obtenues dans le système de référence céleste international (SRCI, *ICRS* en Anglais), leur origine correspond bien au barycentre du Système Solaire. Les coordonnées cartésiennes de l'étoile étudiée exprimées par rapport à ce dernier sont donc :

$$\begin{aligned} x_A^1 &= R_0 \cos(\delta_{\mathrm{SgrA}^*}) \cos(\alpha_{\mathrm{SgrA}^*}), \\ x_A^2 &= R_0 \cos(\delta_{\mathrm{SgrA}^*}) \sin(\alpha_{\mathrm{SgrA}^*}), \\ x_A^3 &= R_0 \sin(\delta_{\mathrm{SgrA}^*}) \end{aligned} \tag{10.4}$$

où R_0 est toujours la distance entre le Centre Galactique et le Système Solaire égale à environ 8,33 kpc.

D'autre part, l'instrument *GRAVITY* va observer l'étoile de référence GCIRS 16C située aux coordonnées $(\alpha_{16\mathrm{C}},\delta_{16\mathrm{C}}) = (17^h45^m40{,}12^s, -29°00'27{,}6'')$ [3] à l'époque J2000. Ses coordonnées cartésiennes sont donc données par :

$$\begin{aligned} x_{A'}^1 &= R_0 \cos(\delta_{16\mathrm{C}}) \cos(\alpha_{16\mathrm{C}}), \\ x_{A'}^2 &= R_0 \cos(\delta_{16\mathrm{C}}) \sin(\alpha_{16\mathrm{C}}), \\ x_{A'}^3 &= R_0 \sin(\delta_{16\mathrm{C}}) \end{aligned} \tag{10.5}$$

où l'on considère ici la source GCIRS 16C également située à une distance R_0 du barycentre du Système Solaire.

Comme mentionné précédemment, nous choisissons d'estimer la séparation angulaire ϕ en considérant l'étoile observée et GCIRS 16C fixes, c'est-à-dire que leurs coordonnées $\mathbf{x}_A$ et $\mathbf{x}_{A'}$ seront les mêmes à chaque instant t donné.

Contrairement aux deux étoiles du Centre Galactique, nous prenons en compte le mouvement de la Terre et du corps perturbateur, au cours du temps. Afin d'obtenir leurs coordonnées estimées à l'époque J2000 à un instant t donné, nous utilisons la librairie `Calceph` [4] développée à l'Observatoire de Paris par Gastineau et al. (2015). Celle-ci permet entre autres d'obtenir les éphémérides des corps composant le Système Solaire par rapport au barycentre du Système Solaire.

Les composantes de la vitesse β^i de l'observateur O_B, c'est-à-dire de la Terre, sont également exprimées dans le repère centré sur le barycentre du Système Solaire. Cette vitesse correspond à la vitesse relative entre la Terre et le Centre Galactique. Elle est donc composée d'une part de la vitesse de translation de la Terre autour du Soleil ($\approx$ 30 km/s),

1. `http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/sim-basic?Ident=sagittarius+A`.
2. Cette date correspond, dans le temps terrestre, au midi du 1er janvier 2000 et est utilisée comme date de référence pour estimer des variables dépendantes du temps, telles que les coordonnées célestes équatoriales.
3. `http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/sim-id?Ident=NAME+GAL+CENTER+IRS+16C`.
4. `http://www.imcce.fr/fr/presentation/equipes/ASD/inpop/`.

et d'autre part de la vitesse de translation du Système Solaire lui-même autour du Centre Galactique ($\approx$ 239 km/s).

Si on cherche à estimer l'effet d'aberration uniquement dû à la vitesse de translation de la Terre autour du Soleil, il suffit simplement de considérer les composantes β^i de l'observateur O_B égales aux composantes de la vitesse de révolution de la Terre, exprimées dans le repère centré sur le barycentre du Système Solaire et obtenues à l'aide de la librairie `Calceph`.

Dans le cas où l'on souhaite estimer l'effet d'aberration induit par la vitesse de translation du Système Solaire autour du Centre Galactique, il faut considérer cette fois-ci des composantes β^i données par :

$$\begin{aligned} \beta^1 &= \frac{v^1_{SS}}{c}, \\ \beta^2 &= \frac{v^2_{SS}}{c}, \\ \beta^3 &= \frac{v^3_{SS}}{c} \end{aligned} \tag{10.6}$$

où $v^1_{\rm SS}$, $v^2_{\rm SS}$ et $v^3_{\rm SS}$ sont les composantes de la vitesse de révolution du Système Solaire. Pour les obtenir il est nécessaire de considérer la direction dans laquelle se déplace ce dernier, et correspondant à ce qu'on appelle l'Apex Solaire. Ce point est situé aux coordonnées équatoriales ($\alpha_{\rm AS}$,$\delta_{\rm AS}$) = ($18^h03^m50{,}2^s$, + $30°00'16{,}8''$). Les composantes de la vitesse du Système Solaire exprimées dans le repère centré sur le barycentre du Système Solaire sont ainsi données par :

$$\begin{aligned} v^1_{SS} &= v_{SS}\cos(\delta_{\rm AS})\cos(\alpha_{\rm AS}), \\ v^2_{SS} &= v_{SS}\cos(\delta_{\rm AS})\sin(\alpha_{\rm AS}), \\ v^3_{SS} &= v_{SS}\sin(\delta_{\rm AS}) \end{aligned} \tag{10.7}$$

où v_{SS} est la norme de la vitesse de translation du Système Solaire autour du Centre Galactique égale à environ 239 km/s. D'autre part, afin de correctement prendre en compte cet effet d'aberration, il est nécessaire de modifier les coordonnées de l'observateur O_B puisque celui-ci se déplace par rapport aux deux étoiles du Centre Galactique d'une quantité proportionnelle à la vitesse du Système Solaire. Les nouvelles coordonnées de l'observateur O_B sont donc données par :

$$\begin{aligned} x'^1_B &= x^1_B + v^1_{\rm SS}t, \\ x'^2_B &= x^2_B + v^2_{\rm SS}t, \\ x'^3_B &= x^3_B + v^3_{\rm SS}t \end{aligned} \tag{10.8}$$

où (x^1_B,x^2_B,x^3_B) sont les coordonnées de la Terre centrées sur le barycentre du Système Solaire, seulement affectées par la rotation de cet astre autour du Soleil. Notons que nous utilisons uniquement ces coordonnées dans le cas où l'on souhaite estimer l'effet d'aberration dû à la rotation de la Terre autour du Soleil. Afin d'avoir une meilleure

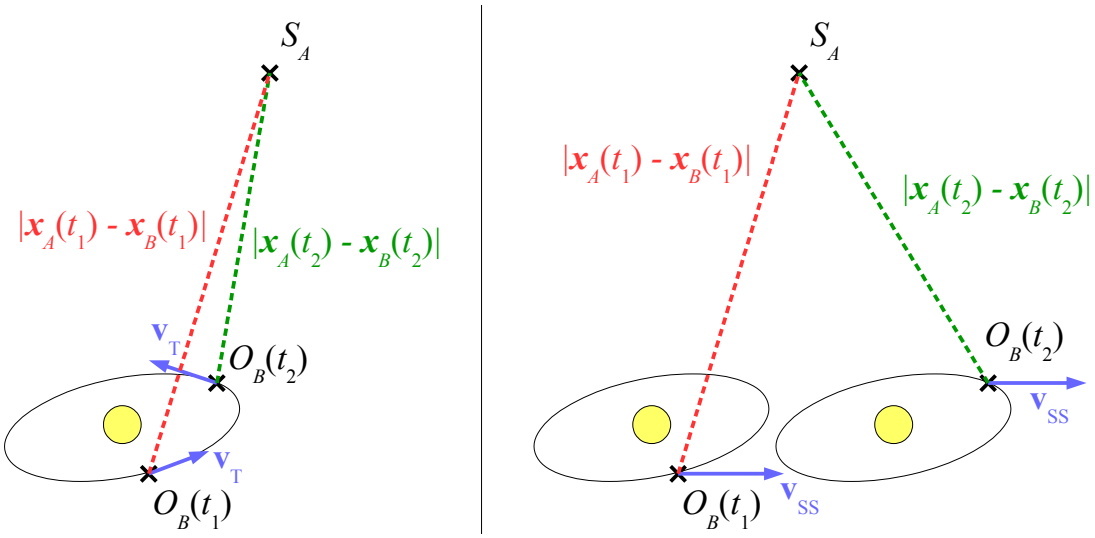

FIGURE 10.2 – Illustrations des positions de l'observateur O_B par rapport à la source S_A du Centre Galactique, considérées à deux instants t_1 et t_2 et dans le cas où l'on souhaite ne prendre en compte que l'effet d'aberration induit par la rotation de la Terre autour du Soleil (à gauche, où on note $\mathbf{v}_\mathrm{T}$ le vecteur vitesse de la Terre) et celui induit par la rotation du Système Solaire autour du Centre Galactique (à droite). Dans ce dernier cas les vecteurs vitesses de l'observateur sont dirigés en direction de l'Apex Solaire. Les ronds jaunes représentent le Soleil et les orbites noires représentent l'orbite de la Terre.

visibilité de la situation on pourra se reporter à la Fig. 10.2.

À présent nous avons donc tout le nécessaire pour évaluer au cours du temps la séparation angulaire ϕ entre l'étoile étudiée et GCIRS 16C, affectée soit par l'effet de perturbation gravitationnelle engendré par un des corps du Système Solaire ($m \neq 0$ et $\beta^i = 0$) soit par les effets d'aberration dus au mouvement de la Terre par rapport aux deux étoiles du Centre Galactique ($m = 0$ et $\beta^i \neq 0$).

10.2 Résultats préliminaires

10.2.1 Impact astrométrique lié à la déviation des photons

Dans cette section nous nous intéressons au décalage astrométrique, c'est-à-dire à la variation de la séparation angulaire ϕ entre GCIRS 16C et l'étoile observée, induit par les corps du Système Solaire.

Le décalage obtenu dans le cas où le corps déflecteur est soit le Soleil soit la planète Jupiter est présenté Fig. 10.3. On remarque que dans le cas du Soleil, le décalage astrométrique est majoritairement proche de zéro mais atteint des maxima périodiques

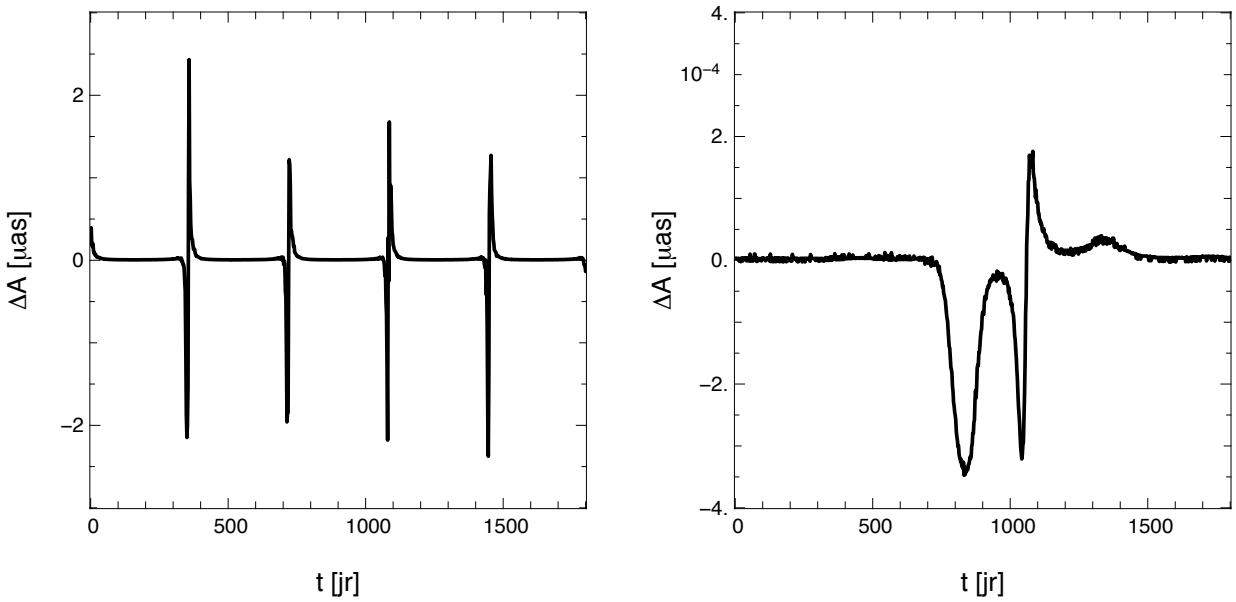

FIGURE 10.3 – Décalages de la séparation angulaire ϕ induits par la présence du Soleil (à gauche) ou de Jupiter (à droite), en fonction du temps. Le temps $t = 0$ jour correspond à la date d'observation 2017, tandis que le temps $t \approx 1500$ jours correspond à la date d'observation 2022.

de l'ordre de 2 microsecondes d'angle, en valeur absolue.

Dans le cas de Jupiter, le décalage obtenu est toujours très faible et est inférieur à 10^{-3} microseconde d'angle, en valeur absolue. De même, pour les autres astres du Système Solaire nous obtenons des décalages astrométriques négligeables ($< 10^{-3}$ μas).

De manière générale, le champ gravitationnel généré par les astres du Système Solaire est faible et n'impacte que très peu les mesures astrométriques de *GRAVITY*. Néanmoins, dans l'étude menée ici nous ne prenons en compte que les perturbations générées par le Système Solaire. Or, il serait intéressant d'avoir une estimation du décalage astrométrique global, c'est-à-dire induit par l'ensemble des corps composant notre galaxie. Pour cela, il faudrait faire une étude bien plus poussée que celle effectuée ici puisqu'il faudrait utiliser un modèle de galaxie. D'autre part, cette étude nous permettrait de déterminer si les perturbations gravitationnelles induites par la Galaxie modifieront la trajectoire des photons émis depuis l'étoile étudiée de sorte à annihiler la signature astrométrique d'effets relativistes tels que l'effet Lense-Thirring. En effet, dans le cas de l'étoile S2 l'effet du moment cinétique du trou noir est faible et est de l'ordre de la précision astrométrique de *GRAVITY*, il ne serait donc pas exclu que celui-ci soit encore plus difficile à contraindre qu'il ne l'est déjà (voir Partie III). Mentionnons toutefois que l'influence astrométrique de cet effet peut certainement être plus importante si l'on observe, sur plusieurs périodes orbitales, une étoile plus proche du Centre Galactique que l'étoile S2.

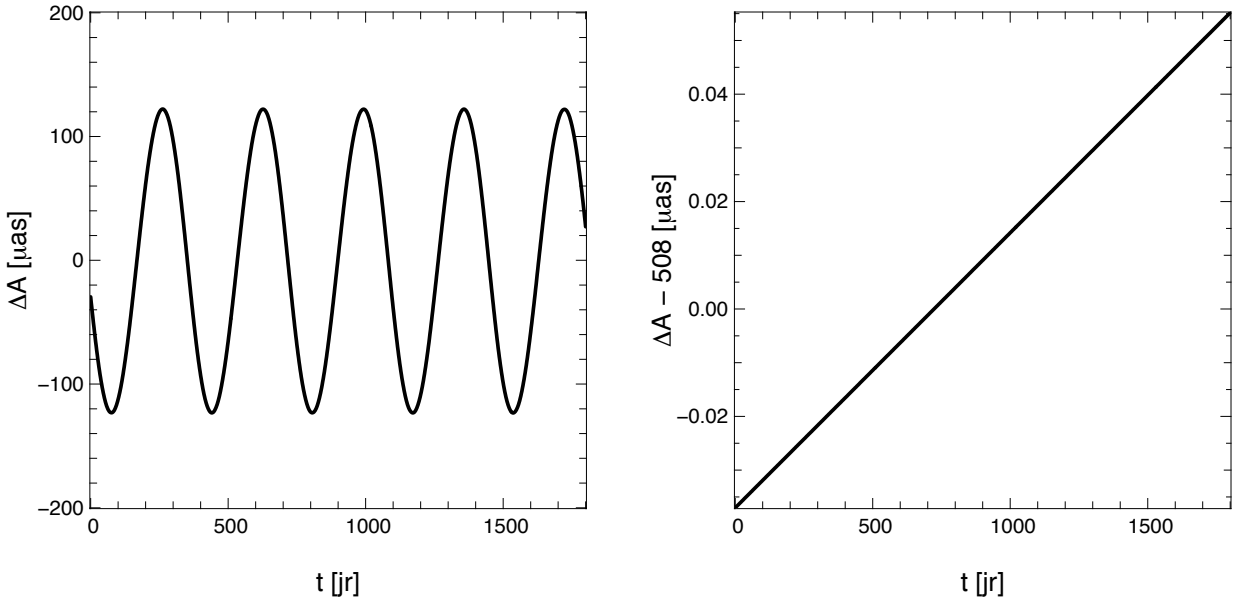

Figure 10.4 – Décalages de la séparation angulaire ϕ induits par l'effet d'aberration dû à la rotation de la Terre autour du Soleil (à gauche) et à la rotation du Système Solaire autour du Centre Galactique (à droite).

10.2.2 Impact astrométrique lié à l'effet d'aberration

L'impact de l'effet d'aberration sur les mesures astrométriques différentielles de *GRAVITY* est bien plus important que celui lié à la perturbation gravitationnelle. En effet, si on regarde Fig. 10.4, on constate que le décalage obtenu dans le cas où l'on considère seulement la vitesse de révolution de la Terre autour du Soleil, atteint environ 120 microsecondes d'angle. Si on considère cette fois-ci uniquement la vitesse de translation du Système Solaire autour du Centre Galactique, le décalage est égal à environ 508 microsecondes d'angle. L'aberration est donc un effet dont il faudra tenir compte dans l'interprétation des futures données astrométriques obtenues avec l'instrument *GRAVITY*.

Comme pour les perturbations gravitationnelles, l'étude menée ici reste préliminaire puisque plusieurs approximations ont été faites. Par exemple, nous avons considéré que l'étoile de référence était fixe. Il serait intéressant de voir si les décalages astrométriques obtenus à cause de l'effet d'aberration sont modifiés si cette étoile est en mouvement par rapport à l'observateur terrestre. Dans le cas où l'impact astrométrique induit par le mouvement de GCIRS 16C est important, il sera nécessaire de corriger les positions astrométriques simulées par le modèle d'orbites relativistes. Mentionnons que l'effet d'aberration engendré par le mouvement de l'étoile étudiée au Centre Galactique sera automatiquement pris en compte si l'on considère le modèle G mis en place Sect. 6.1.2 ou celui développé dans le premier chapitre de cette partie.

Conclusions et perspectives

Au cours de ma thèse, j'ai mis au point un modèle d'orbites relativistes en vue d'interpréter les observations obtenues par l'instrument de seconde génération du *Very Large Telescope Interferometer*, *GRAVITY*, dont la précision astrométrique est attendue à 10 microsecondes d'angle. Plus précisément, ce modèle sera utilisé pour contraindre la nature de l'objet compact situé au centre de notre galaxie, à l'aide de la trajectoire d'étoiles en orbite autour de cet objet. En effet, grâce à sa précision astrométrique, l'instrument *GRAVITY* sera en mesure de détecter des effets relativistes de plus ou moins faibles amplitudes en champ gravitationnel intense.

Afin de mettre au point le modèle d'orbites, j'ai utilisé le code de tracé de rayons `GYOTO` permettant de simuler des observations au voisinage d'objets compacts. Une première étude a consisté à valider le calcul des géodésiques de genre lumière dans ce code. Plus précisément, le but était de déterminer si les erreurs commises sur les positions astrométriques simulées avec `GYOTO` étaient inférieures à la précision de l'instrument *GRAVITY*. Pour cela, j'ai effectué des tests en déflexion faible et forte. Dans le premier cas, j'ai évalué trois paramètres avec le code `GYOTO` correspondant à la position angulaire de la caustique primaire, au rayon de l'anneau d'Einstein et au décalage de cet anneau induit par le moment cinétique du trou noir. Puis j'ai comparé ces trois paramètres à ceux évalués à l'aide d'approximations analytiques développées à la fois en déflexion faible et en champ faible. J'ai ainsi pu démontrer que l'erreur astrométrique commise par le code `GYOTO` était inférieure à 10^{-3} microseconde d'angle. Dans le cas de la limite en déflexion forte, j'ai comparé l'intégration des géodésiques de genre lumière effectuée dans le code `GYOTO` avec celle effectuée dans un autre code de tracé de rayons nommé `GeoKerr`. La différence astrométrique maximale obtenue entre ces deux codes est inférieure à 10^{-2} microseconde d'angle. Grâce à cette étude, j'ai donc démontré que le calcul des géodésiques de genre lumière dans `GYOTO` était très précis. Ce code pourra donc être utilisé pour simuler les positions apparentes d'étoiles observées avec l'instrument *GRAVITY*.

En vue d'effectuer un test complet de ce code, il serait également intéressant de valider l'intégration des géodésiques de genre temps ainsi que celle de l'équation du transfert de rayonnement relativiste. En effet, il n'est pas impossible que les erreurs numériques commises lors de l'évaluation des coordonnées de l'étoile et de l'intensité spécifique soient suffisamment élevées pour générer une erreur sur le calcul du centroïde de l'étoile, de l'ordre de la précision astrométrique de *GRAVITY*. Pour cela, je propose par exemple de comparer `GYOTO` avec le code `GeoKerr`. En effet, ce dernier permet également de calculer des orbites et des images relativistes d'étoiles.

Dans la perspective où l'instrument *GRAVITY* ne détecterait pas d'autres étoiles que celles déjà observées, j'ai étudié quelles seraient les contraintes pouvant être apportées grâce aux futures observations astrométriques et spectroscopiques obtenues sur l'étoile la

plus proche du Centre Galactique, S2. En particulier, j'ai estimé quels étaient les temps minimaux d'observation nécessaires pour détecter des effets relativistes avec cette étoile. Pour cela, j'ai mis en place sept modèles d'orbites dont trois képlériens et quatre relativistes. Six des sept modèles négligent chacun un certain nombre d'effets ce qui permet d'estimer les temps d'observation nécessaires pour détecter chaque effet. Le septième modèle (modèle G) simule l'ensemble des effets relativistes à l'aide du code `GYOTO`, c'est avec celui-ci que sont générées les observations de l'étoile S2 auxquelles sont ajustées les six autres modèles. Néanmoins, étant donné que l'étoile S2 est suffisamment éloignée de l'objet compact central, ce septième modèle néglige des effets de lentilles gravitationnelles tels que les images secondaires et l'amplification de l'image primaire. L'erreur commise sur les mesures astrométriques de l'étoile S2 demeure cependant inférieure à 1 microseconde d'angle. Grâce à l'ensemble de ces modèles, j'ai pu démontrer que pour des observations obtenues à partir d'environ 2018, il sera possible de commencer à détecter l'effet Roemer dès 4 mois à des précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 100\ \text{km/s})$. Les décalages spectraux relativistes pourront être détectés au bout de 2 mois à $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 10\ \text{km/s})$. L'effet de déflexion de la lumière est également détectable au bout de 6 ans d'observation et à des précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 10\ \text{km/s})$. L'avancée du périastre de S2 pourra être détectée au bout d'un dizaine d'années à des précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (30\ \mu\text{as}, 1-100\ \text{km/s})$. Enfin, les effets de courbure sur le photon de haut ordre (dont l'effet Shapiro) pourront être détectés au bout d'environ 6 mois à $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 1\ \text{km/s})$.

D'autre part, je me suis intéressée à la contrainte des paramètres du moment cinétique du candidat trou noir central à l'aide de l'étoile S2 et d'un modèle relativiste n'utilisant pas le concept de tracé de rayons. En particulier, j'ai démontré qu'il était possible de contraindre la norme et les angles i' et Ω' du moment cinétique du trou noir à environ 0,1, 15 degrés et 30 degrés, respectivement, si l'on considère trois périodes d'observation de l'étoile S2 obtenues à une précision astrométrique de 10 microsecondes d'angle et une précision spectroscopique de 10 km/s. Néanmoins, ces contraintes ne peuvent être obtenues que pour des moments cinétiques adimensionnés élevés et des directions du moment cinétique particulières. Par ailleurs, j'ai également mis en évidence le fait que l'effet Lense-Thirring avait davantage d'influence sur les mesures astrométriques de S2 que sur ses mesures spectroscopiques, mais aussi que l'impact maximal engendré par cet effet était observé à proximité de l'apoastre de l'orbite de l'étoile. Les contraintes sur la masse du trou noir et sa distance au Système Solaire ont également été obtenues à l'aide du modèle sans tracé de rayons et atteignent respectivement des incertitudes faibles d'environ 0,1% et 0,04%. Ces études nous montrent qu'il est possible de contraindre les paramètres du trou noir malgré le fait que l'on ne tienne pas compte des géodésiques de genre lumière dans notre modèle d'orbites. Cependant, il faut rester prudent quant à l'utilisation du modèle sans tracé de rayons car celui-ci ne reproduit pas totalement les observations obtenues avec le modèle G. Des écarts de 7 microsecondes d'angle et de 5 km/s sont notamment présents aux passages au périastre de S2. Ce modèle alternatif pourra toutefois être utilisé pour sonder dans un premier temps l'espace des paramètres et ainsi permettre de minimiser le temps de calcul lors de l'ajustement du modèle avec tracé de rayons.

Afin d'améliorer les études effectuées sur l'étoile S2, il sera nécessaire d'inclure l'effet

induit par la masse étendue présente au Centre Galactique. Même si celle-ci n'est pas encore contrainte à l'heure actuelle, il est important de la prendre en compte puisqu'il est possible que l'effet newtonien engendré par cette masse compense les effets relativistes observés sur l'orbite de l'étoile S2. On pourra dans un premier temps déterminer si les effets relativistes obtenus en métrique de Schwarzschild tels que les décalages spectraux relativistes et l'avancée du périastre pourront être détectés par *GRAVITY* malgré la présence de cette masse, et si oui au bout de combien de temps. Ajoutons par ailleurs qu'il serait intéressant de déterminer si les conclusions faites sur l'étude de l'étoile S2 seraient améliorées dans le cas où l'on prendrait en compte les observations obtenues par Ghez et al. (2008) et Gillessen et al. (2009b), en plus de celles générées dans cette thèse, ou si l'on considèrerait des observations *GRAVITY* obtenues dès l'année 2016 puisque des données sur l'étoile S2 seront acquises en fin d'année. Pour finir, on pourra également mettre en place d'autres modèles d'orbites en vue de déterminer les temps minimaux d'observation nécessaires pour détecter l'avancée du périastre de S2 à des précisions $(\sigma_a,\sigma_V) = (10\ \mu\text{as}, 1-10\ \text{km/s})$. Cela nous permettra très probablement de détecter cet effet plus tôt.

Dans le cas où l'instrument *GRAVITY* découvrirait de nouvelles étoiles plus proches du Centre Galactique, il est nécessaire de mettre en place un modèle d'orbites relativistes plus précis que celui utilisé pour simuler les observations de l'étoile S2. En effet, les images secondaires ainsi que l'effet d'amplification de l'image primaire devront alors être pris en compte. Dans cette perspective, j'ai développé un nouveau modèle dont l'erreur maximale commise sur les positions astrométriques est d'environ 1 microseconde d'angle, quelle que soit l'étoile considérée. Afin de minimiser le temps de calcul demandé par ce modèle, j'ai défini deux zones de l'espace dans lesquelles sont utilisées deux méthodes distinctes pour simuler les positions astrométriques de l'étoile. Dans la première zone, aucune approximation ne peut être faite c'est-à-dire que les observations sont générées, à l'aide du code `GYOTO`, en considérant le centroïde composé des images primaire et secondaire de l'étoile. Dans la seconde zone, les positions apparentes de l'étoile sont générées à l'aide du modèle utilisé pour simuler les observations de l'étoile S2. En effet, cette zone est définie de sorte que l'on puisse y négliger les images secondaires ainsi que l'effet d'amplification de l'image primaire.

Une troisième zone est également définie et se situe à l'arrière du trou noir. Celle-ci permet d'éviter de calculer des images demandant d'importants temps de calcul. Cependant, les positions astrométriques de l'étoile obtenues dans cette zone sont les plus affectées par les effets de lentilles gravitationnelles. Une amélioration du modèle est donc à envisager afin de tenir compte de ses points d'observations lors de nos futurs traitements.

Pour minimiser davantage le temps de calcul demandé par le modèle déjà mis en place, il faudra paralléliser le calcul des différentes cartes utilisées dans celui-ci, à l'aide des fonctions prévues à cet effet dans le code `GYOTO`. On pourra alors envisager d'ajuster ce nouveau modèle à des observations d'étoiles plus proches du Centre Galactique que l'étoile S2. Le but sera d'améliorer les études menées par Zhang et al. (2015) et Yu et al. (2016) sur la contrainte des paramètres du trou noir à l'aide d'étoiles hypothétiques.

Ajoutons pour finir que la détermination des différentes zones est effectuée en considérant uniquement les observations astrométriques des étoiles. Néanmoins, il serait intéressant de voir si les limites de celles-ci sont également valables si l'on considère des mesures spectroscopiques. En effet, pour calculer la vitesse radiale de l'étoile nous considérons uniquement un photon de l'image primaire (voir Sect. 6.1.2). Or, il est possible qu'il faille par exemple considérer la moyenne des vitesses radiales obtenues en chaque point de l'image primaire, et cela dans les deux zones où sont simulées les positions astrométriques de l'étoile. Il sera dans ce cas nécessaire de considérer l'ensemble des pixels de l'image primaire pour obtenir les observations spectroscopiques de cette dernière.

Grâce au nouveau modèle mis en place, j'ai pu mettre en évidence la présence d'une bosse sur l'orbite apparente d'étoiles vues sous des inclinaisons élevées (proche de 90°). Cette particularité est due aux effets de lentilles gravitationnelles et permettra potentiellement de mieux contraindre certains paramètres de l'orbite de l'étoile tels que l'inclinaison ou encore l'excentricité. D'autre part, l'effet du moment cinétique du trou noir sur les effets de lentilles est toujours très faible, sauf quelques cas rares lorsque l'étoile est quasiment alignée à l'arrière du trou noir. Contraindre le moment cinétique adimensionné semble donc difficile avec les effets de lentilles gravitationnelles.

J'ai également démontré que la contribution de la source Sgr A* dans le calcul du centroïde d'une étoile contenue dans le champ de vue de l'instrument *GRAVITY* était importante et pouvait décaler son centroïde de plusieurs millisecondes d'angle. De plus, j'ai démontré que la contribution des images secondaires des étoiles S n'impacte que très peu le centroïde de l'étoile (< 1 μas).

Le modèle utilisé pour interpréter les futures observations de l'instrument *GRAVITY* devra tenir compte des effets induits par la source centrale. Même si les images secondaires des étoiles S n'affectent que très peu les observations, il est important de déterminer si la contribution de l'ensemble des images secondaires de la Galaxie est susceptible de modifier la position astrométrique de l'étoile observée de plusieurs microsecondes d'angle. Il faudra pour cela utiliser un modèle de galaxie.

Enfin, dans le cadre d'une collaboration menée avec le SYRTE, j'ai étudié l'influence de corps du Système Solaire sur les observations de l'instrument *GRAVITY*. En particulier, j'ai démontré que la perturbation gravitationnelle engendrée par le Soleil n'affectait la mesure de séparation angulaire entre la source de référence de phase et l'étoile étudiée située au Centre Galactique, que de quelques microsecondes d'angle. Cependant, j'ai démontré que l'effet d'aberration lié au mouvement de la Terre par rapport au Centre Galactique affectait les positions astrométriques différentielles de plusieurs centaines de microsecondes d'angle, de façon variable au cours de l'année.

En vue d'améliorer l'étude menée ici, il serait intéressant de considérer les perturbations gravitationnelles générées par l'ensemble des constituants de la Galaxie, mais aussi de déterminer si le mouvement de la source de référence de phase induit un effet d'aberration mesurable sur les positions astrométriques de *GRAVITY*. Mentionnons que l'effet d'aberration engendré par le mouvement de l'étoile étudiée au Centre Galactique sera

automatiquement pris en compte dans le modèle d'orbites relativistes obtenu avec le code `GYOTO`. Quelles que soient les conclusions de ces études supplémentaires, il sera nécessaire de prendre en compte l'effet d'aberration annuelle différentielle engendré par le mouvement de la Terre lors de l'interprétation de l'ensemble des observations astrométriques obtenues avec l'instrument *GRAVITY*.

Mentionnons pour finir qu'en vue d'effectuer des tests de relativité générale en champ fort avec *GRAVITY*, on pourra également comparer les trajectoires des étoiles ainsi que celles des photons, obtenues dans des métriques alternatives telles que celle décrivant les étoiles bosoniques où celles obtenues en perturbant la métrique de Kerr. L'objectif serait de déterminer si les déviations à la métrique de Kerr pourront être détectées par cet instrument.

Bibliographie

Aad, G., Abbott, B., Abdallah, J., et al. 2012, Search for the Standard Model Higgs boson in the H $\rightarrow$ WW $\rightarrow$ ℓ νjj decay channel at $\sqrt{s}$ = 7 TeV with the ATLAS detector, Phys. Lett. B, 716, 62, http://adsabs.harvard.edu/abs/2012PhLB..716...62A

Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., et al. 2016, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, Phys. Rev. Lett., 116, 061102, http://adsabs.harvard.edu/abs/2016PhRvL.116f1102A

Abramowicz, M. A., Kluźniak, W., & Lasota, J.-P. 2002, No observational proof of the black-hole event-horizon, A&A, 396, L31, http://adsabs.harvard.edu/abs/2002A%26A...396L..31A

Ali-Haïmoud, Y. & Chen, Y. 2011, Slowly rotating stars and black holes in dynamical Chern-Simons gravity, Phys. Rev. D, 84, 124033, http://adsabs.harvard.edu/abs/2011PhRvD..84l4033A

Allen, D. A., Hyland, A. R., & Hillier, D. J. 1990, The source of luminosity at the Galactic Centre, MNRAS, 244, 706, http://adsabs.harvard.edu/abs/1990MNRAS.244..706A

Andrae, R., Schulze-Hartung, T., & Melchior, P. 2010, Dos and don'ts of reduced chi-squared, ArXiv e-prints, http://adsabs.harvard.edu/abs/2010arXiv1012.3754A

Angélil, R. & Saha, P. 2010, Relativistic Redshift Effects and the Galactic-Center Stars, ApJ, 711, 157, http://adsabs.harvard.edu/abs/2010ApJ...711..157A

Angélil, R. & Saha, P. 2011, Galactic-center S Stars as a Prospective Test of the Einstein Equivalence Principle, ApJ, 734, L19, http://adsabs.harvard.edu/abs/2011ApJ...734L..19A

Angélil, R., Saha, P., & Merritt, D. 2010, Toward Relativistic Orbit Fitting of Galactic Center Stars and Pulsars, ApJ, 720, 1303, http://adsabs.harvard.edu/abs/2010ApJ...720.1303A

Baganoff, F. K., Maeda, Y., Morris, M., et al. 2003, Chandra X-Ray Spectroscopic Imaging of Sagittarius A* and the Central Parsec of the Galaxy, ApJ, 591, 891, http://adsabs.harvard.edu/abs/2003ApJ...591..891B

Balick, B. & Brown, R. L. 1974, Intense sub-arcsecond structure in the galactic center, ApJ, 194, 265, http://adsabs.harvard.edu/abs/1974ApJ...194..265B

Bambi, C. 2015, Testing black hole candidates with electromagnetic radiation, ArXiv e-prints, http://adsabs.harvard.edu/abs/2015arXiv150903884B

Barausse, E., Palenzuela, C., Ponce, M., & Lehner, L. 2013, Neutron-star mergers in scalar-tensor theories of gravity, Phys. Rev. D, 87, 081506, http://adsabs.harvard.edu/abs/2013PhRvD..87h1506B

Bardeen, J. M., Press, W. H., & Teukolsky, S. A. 1972, Rotating Black Holes : Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation, ApJ, 178, 347, http://adsabs.harvard.edu/abs/1972ApJ...178..347B

Bartko, H., Martins, F., Trippe, S., et al. 2010, An Extremely Top-Heavy Initial Mass Function in the Galactic Center Stellar Disks, ApJ, 708, 834, http://adsabs.harvard.edu/abs/2010ApJ...708..834B

Becklin, E. E. & Neugebauer, G. 1975, High-resolution maps of the galactic center at 2.2 and 10 microns, ApJ, 200, L71, http://adsabs.harvard.edu/abs/1975ApJ...200L..71B

Berti, E., Barausse, E., Cardoso, V., et al. 2015, Testing general relativity with present and future astrophysical observations, Class. Quant. Grav., 32, 243001, http://adsabs.harvard.edu/abs/2015CQGra..32x3001B

Bertotti, B., Iess, L., & Tortora, P. 2003, A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft, Nature, 425, 374, http://adsabs.harvard.edu/abs/2003Natur.425..374B

Binder, Heermann, D. W. K. 2002, Monte Carlo simulation in statistical physics : an introduction, http://adsabs.harvard.edu/abs/2002mcss.book.....B

Björck, Å. 1996, Numerical Methods for Least Squares Problems, Siam Philadelphia

Blanchet, L. & Sathyaprakash, B. S. 1994, Signal analysis of gravitational wave tails, Class. Quant. Grav., 11, 2807, http://adsabs.harvard.edu/abs/1994CQGra..11.2807B

Blanchet, L. & Sathyaprakash, B. S. 1995, Detecting a Tail Effect in Gravitational-Wave Experiments, Phys. Rev. Lett., 74, 1067, http://adsabs.harvard.edu/abs/1995PhRvL..74.1067B

Bozza, V. 2008, Optical caustics of Kerr spacetime : The full structure, Phys. Rev. D, 78, 063014, http://adsabs.harvard.edu/abs/2008PhRvD..78f3014B

Bozza, V., de Luca, F., Scarpetta, G., & Sereno, M. 2005, Analytic Kerr black hole lensing for equatorial observers in the strong deflection limit, Phys. Rev. D, 72, 083003, http://adsabs.harvard.edu/abs/2005PhRvD..72h3003B

Bozza, V. & Mancini, L. 2004, Gravitational Lensing by Black Holes : A Comprehensive Treatment and the Case of the Star S2, ApJ, 611, 1045, http://adsabs.harvard.edu/abs/2004ApJ...611.1045B

Bozza, V. & Mancini, L. 2005, Gravitational Lensing of Stars in the Central Arcsecond of Our Galaxy, ApJ, 627, 790, http://adsabs.harvard.edu/abs/2005ApJ...627..790B

Bozza, V. & Mancini, L. 2012, Observing Gravitational Lensing Effects by Sgr A* with GRAVITY, ApJ, 753, 56, http://adsabs.harvard.edu/abs/2012ApJ...753...56B

Bozza, V. & Scarpetta, G. 2007, Strong deflection limit of black hole gravitational lensing with arbitrary source distances, Phys. Rev. D, 76, 083008, http://adsabs.harvard.edu/abs/2007PhRvD..76h3008B

Brans, C. & Dicke, R. H. 1961, Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation, Phys. Rev., 124, 925, http://adsabs.harvard.edu/abs/1961PhRv..124..925B

Broderick, A. E., Fish, V. L., Doeleman, S. S., & Loeb, A. 2011, Evidence for Low Black Hole Spin and Physically Motivated Accretion Models from Millimeter-VLBI Observations of Sagittarius A*, ApJ, 735, 110, http://adsabs.harvard.edu/abs/2011ApJ...735..110B

Broderick, A. E., Johannsen, T., Loeb, A., & Psaltis, D. 2014, Testing the No-hair Theorem with Event Horizon Telescope Observations of Sagittarius A*, ApJ, 784, 7, http://adsabs.harvard.edu/abs/2014ApJ...784....7B

Broderick, A. E., Loeb, A., & Narayan, R. 2009, The Event Horizon of Sagittarius A*, ApJ, 701, 1357, http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...701.1357B

Broderick, A. E. & Narayan, R. 2006, On the Nature of the Compact Dark Mass at the Galactic Center, ApJ, 638, L21, http://adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...638L..21B

Brown, R. L. 1982, Precessing jets in Sagittarius A - Gas dynamics in the central parsec of the galaxy, ApJ, 262, 110, http://adsabs.harvard.edu/abs/1982ApJ...262..110B

Carlson, B. C. & Gustafson, J. L. 1993, Asymptotic approximations for symmetric elliptic integrals, ArXiv Mathematics e-prints, http://adsabs.harvard.edu/abs/1993math.....10223C

Carter, B. 1968, Hamilton-Jacobi and Schrödinger separable solutions of Einstein's equations., Comm. Math. Phys.

Carter, B. 1971, Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom, Phys. Rev. Lett., 26, 331, http://adsabs.harvard.edu/abs/1971PhRvL..26..331C

Catanzarite, J. H. 2010, A new algorithm for fitting orbits of multiple-planet systems to combined RV and astrometric data, ArXiv e-prints, http://adsabs.harvard.edu/abs/2010arXiv1008.3416C

Chirenti, C. B. M. H. & Rezzolla, L. 2007, How to tell a gravastar from a black hole, Classical and Quantum Gravity, 24, 4191, http://adsabs.harvard.edu/abs/2007CQGra..24.4191C

Choquet, E. 2013, Suivi de franges à quatre télescopes pour *GRAVITY* et astrométrie de précision, https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/772392/filename/Manuscrit_these_choquet.pdf

Choquet, É., Menu, J., Perrin, G., et al. 2014, Comparison of fringe-tracking algorithms for single-mode near-infrared long-baseline interferometers, A&A, 569, A2, http://adsabs.harvard.edu/abs/2014A%26A...569A...2C

Ciufolini, I., Paolozzi, A., Pavlis, E. C., et al. 2016, A test of general relativity using the LARES and LAGEOS satellites and a GRACE Earth gravity model. Measurement of Earth's dragging of inertial frames, European Physical Journal C, 76, 120, http://adsabs.harvard.edu/abs/2016EPJC...76..120C

Damour, T. & Esposito-Farese, G. 1992, Tensor-multi-scalar theories of gravitation, Class. Quant. Grav., 9, 2093, http://adsabs.harvard.edu/abs/1992CQGra...9.2093D

Damour, T. & Esposito-Farèse, G. 1996, Tensor-scalar gravity and binary-pulsar experiments, Phys. Rev. D, 54, 1474, http://adsabs.harvard.edu/abs/1996PhRvD..54.1474D

Davies, R., Ageorges, N., Barl, L., et al. 2010, MICADO : the E-ELT adaptive optics imaging camera, Proc. SPIE, 7735, 77352A, http://adsabs.harvard.edu/abs/2010SPIE.7735E..2AD

Dexter, J. & Agol, E. 2009, A Fast New Public Code for Computing Photon Orbits in a Kerr Spacetime, ApJ, 696, 1616, http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...696.1616D

Do, T., Ghez, A. M., Morris, M. R., et al. 2009, A Near-Infrared Variability Study of the Galactic Black Hole : A Red Noise Source with NO Detected Periodicity, ApJ, 691, 1021, http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...691.1021D

Doeleman, S. S., Fish, V. L., Broderick, A. E., Loeb, A., & Rogers, A. E. E. 2009, Detecting Flaring Structures in Sagittarius A* with High-Frequency VLBI, ApJ, 695, 59, http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...695...59D

Dyda, S., Flanagan, É. É., & Kamionkowski, M. 2012, Vacuum instability in Chern-Simons gravity, Phys. Rev. D, 86, 124031, http://adsabs.harvard.edu/abs/2012PhRvD..8614031D

Eardley, D. M. 1975, Observable effects of a scalar gravitational field in a binary pulsar, ApJ, 196, L59, http://adsabs.harvard.edu/abs/1975ApJ...196L..59E

Eckart, A. & Genzel, R. 1997, Stellar proper motions in the central 0.1 PC of the Galaxy, MNRAS, 284, 576, http://adsabs.harvard.edu/abs/1997MNRAS.284..576E

Eckart, A., Genzel, R., Hofmann, R., Sams, B. J., & Tacconi-Garman, L. E. 1995, High angular resolution spectroscopic and polarimetric imaging of the galactic center in the near-infrared, ApJ, 445, L23, http://adsabs.harvard.edu/abs/1995ApJ...445L..23E

Eisenhauer, F., Abuter, R., Bickert, K., et al. 2003, SINFONI - Integral field spectroscopy at 50 milli-arcsecond resolution with the ESO VLT, Proc. SPIE, 4841, 1548, http://esoads.eso.org/abs/2003SPIE.4841.1548E

Eisenhauer, F., Perrin, G., Brandner, W., et al. 2011, GRAVITY : Observing the Universe in Motion, The Messenger, 143, 16, http://adsabs.harvard.edu/abs/2011Msngr.143...16E

Eisenhauer, F., Perrin, G., Brandner, W., et al. 2008, GRAVITY : getting to the event horizon of Sgr A*, Proc. SPIE, 7013, 70132A, http://adsabs.harvard.edu/abs/2008SPIE.7013E..2AE

Everitt, C. W. F., Debra, D. B., Parkinson, B. W., et al. 2011, Gravity Probe B : Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity, Phys. Rev. Lett., 106, 221101, http://adsabs.harvard.edu/abs/2011PhRvL.106v1101E

Falcke, H. 1996, The Nuclear Jet in M81, ApJ, 464, L67, http://adsabs.harvard.edu/abs/1996ApJ...464L..67F

Falcke, H. & Markoff, S. 2000, The jet model for Sgr A* : Radio and X-ray spectrum, A&A, 362, 113, http://adsabs.harvard.edu/abs/2000A%26A...362..113F

Feinblum, D. A. & McKinley, W. A. 1968, Stable States of a Scalar Particle in Its Own Gravational Field, Phys. Rev., 168, 1445, http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.168.1445

Fienga, A., Laskar, J., Kuchynka, P., et al. 2011, The INPOP10a planetary ephemeris and its applications in fundamental physics, Celes. Mecha. Dyn. Astro., 111, 363, http://adsabs.harvard.edu/abs/2011CeMDA.111..363F

Fish, V. L. & Doeleman, S. S. 2010, Observing a black hole event horizon : (sub)millimeter VLBI of Sgr A*, IAU Symposium, 261, 271, http://adsabs.harvard.edu/abs/2010IAUS..261..271F

Fomalont, E., Kopeikin, S., Lanyi, G., & Benson, J. 2009, Progress in Measurements of the Gravitational Bending of Radio Waves Using the VLBA, ApJ, 699, 1395, http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...699.1395F

Foreman-Mackey, D., Hogg, D. W., Lang, D., & Goodman, J. 2013, emcee : The MCMC Hammer, PASP, 125, 306, http://adsabs.harvard.edu/abs/2013PASP..125..306F

Forrest, W. J., Shure, M. A., Pipher, J. L., & Woodward, C. E. 1987, Brackett alpha images of the Galactic center, Am. Inst. Phys. Conf. Ser., 155, 153, http://adsabs.harvard.edu/abs/1987AIPC..155..153F

Fragile, P. C. & Mathews, G. J. 2000, Reconstruction of Stellar Orbits Close to Sagittarius A* : Possibilities for Testing General Relativity, ApJ, 542, 328, http://adsabs.harvard.edu/abs/2000ApJ...542..328F

Friedberg, R., Lee, T. D., & Pang, Y. 1987, Scalar soliton stars and black holes, Phys. Rev. D, 35, 3658, http://adsabs.harvard.edu/abs/1987PhRvD..35.3658F

Garcia, M. R., McClintock, J. E., Narayan, R., et al. 2001, New Evidence for Black Hole Event Horizons from Chandra, ApJ, 553, L47, http://adsabs.harvard.edu/abs/2001ApJ...553L..47G

Gastineau, M., Laskar, J., Manche, H., & Fienga, A. 2015, CALCEPH : Planetary ephemeris files access code, Astrophysics Source Code Library, http://adsabs.harvard.edu/abs/2015ascl.soft05001G

Genzel, R., Eisenhauer, F., & Gillessen, S. 2010, The Galactic Center massive black hole and nuclear star cluster, Rev. Mod. Phys., 82, 3121, http://adsabs.harvard.edu/abs/2010RvMP...82.3121G

Genzel, R., Schödel, R., Ott, T., et al. 2003a, Near-infrared flares from accreting gas around the supermassive black hole at the Galactic Centre, Nature, 425, 934, http://adsabs.harvard.edu/abs/2003Natur.425..934G

Genzel, R., Schödel, R., Ott, T., et al. 2003b, The Stellar Cusp around the Supermassive Black Hole in the Galactic Center, ApJ, 594, 812, http://adsabs.harvard.edu/abs/2003ApJ...594..812G

Genzel, R., Thatte, N., Krabbe, A., Kroker, H., & Tacconi-Garman, L. E. 1996, The Dark Mass Concentration in the Central Parsec of the Milky Way, ApJ, 472, 153, http://adsabs.harvard.edu/abs/1996ApJ...472..153G

Gerhard, O. 2001, The Galactic Center HE I Stars : Remains of a Dissolved Young Cluster ?, ApJ, 546, L39, http://adsabs.harvard.edu/abs/2001ApJ...546L..39G

Ghez, A. M., Klein, B. L., Morris, M., & Becklin, E. E. 1998, High Proper-Motion Stars in the Vicinity of Sagittarius A* : Evidence for a Supermassive Black Hole at the Center of Our Galaxy, ApJ, 509, 678, http://adsabs.harvard.edu/abs/1998ApJ...509..678G

Ghez, A. M., Morris, M., Becklin, E. E., Tanner, A., & Kremenek, T. 2000, The accelerations of stars orbiting the Milky Way's central black hole, Nature, 407, 349, http://adsabs.harvard.edu/abs/2000Natur.407..349G

Ghez, A. M., Salim, S., Hornstein, S. D., et al. 2005, Stellar Orbits around the Galactic Center Black Hole, ApJ, 620, 744, http://adsabs.harvard.edu/abs/2005ApJ...620..744G

Ghez, A. M., Salim, S., Weinberg, N. N., et al. 2008, Measuring Distance and Properties of the Milky Way's Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits, ApJ, 689, 1044, http://adsabs.harvard.edu/abs/2008ApJ...689.1044G

Ghez, A. M., Wright, S. A., Matthews, K., et al. 2004, Variable Infrared Emission from the Supermassive Black Hole at the Center of the Milky Way, ApJ, 601, L159, http://adsabs.harvard.edu/abs/2004ApJ...601L.159G

Gillessen, S., Eisenhauer, F., Fritz, T. K., et al. 2009a, The Orbit of the Star S2 Around SGR A* from Very Large Telescope and Keck Data, ApJ, 707, L114, http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...707L.114G

Gillessen, S., Eisenhauer, F., Perrin, G., et al. 2010, GRAVITY : a four-telescope beam combiner instrument for the VLTI, Proc. SPIE, 7734, 77340Y, http://adsabs.harvard.edu/abs/2010SPIE.7734E..0YG

Gillessen, S., Eisenhauer, F., Trippe, S., et al. 2009b, Monitoring Stellar Orbits Around the Massive Black Hole in the Galactic Center, ApJ, 692, 1075, http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...692.1075G

Glampedakis, K. & Babak, S. 2006, Mapping spacetimes with LISA : inspiral of a test body in a 'quasi-Kerr' field, Class. Quant. Grav., 23, 4167, http://adsabs.harvard.edu/abs/2006CQGra..23.4167G

Goodman, J. & Weare, J. 2010, Ensemble samplers with affine invariance, http://msp.org/camcos/2010/5-1/camcos-v5-n1-p04-s.pdf

Gourgoulhon, E. 2007, 3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity, ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints, http://adsabs.harvard.edu/abs/2007gr.qc.....3035G

Gourgoulhon, E. 2014, Relativité Générale, Cours de M2 d'Astronomie et d'Astrophysique, http://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relatM2.pdf

Grandclément, P., Somé, C., & Gourgoulhon, E. 2014, Models of rotating boson stars and geodesics around them : New type of orbits, Phys. Rev. D, 90, 024068, http://adsabs.harvard.edu/abs/2014PhRvD..90b4068G

Gürsel, Y. 1983, Multipole moments for stationary systems : The equivalence of the Geroch-Hansen formulation and the Thorne formulation, Gen. Relat. Grav., 15, 737, http://adsabs.harvard.edu/abs/1983GReGr..15..737G

Haller, J. W., Rieke, M. J., Rieke, G. H., et al. 1996, Stellar Kinematics and the Black Hole in the Galactic Center, ApJ, 456, 194, http://adsabs.harvard.edu/abs/1996ApJ...456..194H

Hamaus, N., Paumard, T., Müller, T., et al. 2009, Prospects for Testing the Nature of Sgr A*'s Near-Infrared Flares on the Basis of Current Very Large Telescope and Future Very Large Telescope Interferometer Observations, ApJ, 692, 902, http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...692..902H

Hameury, J.-M., Marck, J.-A., & Pelat, D. 1994, e^+ - e^- annihilation lines from accretion discs around Kerr black holes, A&A, 287, 795, http://adsabs.harvard.edu/abs/1994A%26A...287..795H

Haniff, C. 2007, An introduction to the theory of interferometry, New A Rev., 51, 565, http://adsabs.harvard.edu/abs/2007NewAR..51..565H

Hastings, W. K. 1970, Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications, http://www.stat.cmu.edu/~acthomas/724/Hastings.pdf

Hawking, S. W. 1972a, Black holes in general relativity, Comm. Math. Phys., 25, 152, http://adsabs.harvard.edu/abs/1972CMaPh..25..152H

Hawking, S. W. 1972b, Black holes in the Brans-Dicke : Theory of gravitation, Comm. Math. Phys., 25, 167, http://adsabs.harvard.edu/abs/1972CMaPh..25..167H

Hees, A., Bertone, S., & Le Poncin-Lafitte, C. 2014, Relativistic formulation of coordinate light time, Doppler, and astrometric observables up to the second post-Minkowskian order, Phys. Rev. D, 89, 064045, http://adsabs.harvard.edu/abs/2014PhRvD..89f4045H

Hills, J. G. 1988, Hyper-velocity and tidal stars from binaries disrupted by a massive Galactic black hole, Nature, 331, 687, http://adsabs.harvard.edu/abs/1988Natur.331..687H

Huijser, D., Goodman, J., & Brewer, B. J. 2015, Properties of the Affine Invariant Ensemble Sampler in high dimensions, ArXiv e-prints, http://adsabs.harvard.edu/abs/2015arXiv150902230H

Hulse, R. A. & Taylor, J. H. 1975, Discovery of a pulsar in a binary system, ApJ, 195, L51, http://adsabs.harvard.edu/abs/1975ApJ...195L..51H

Israel, W. 1982, Event Horizons in Static Vacuum Space-Times, Am. Ass. Phys. Teach., 106, http://adsabs.harvard.edu/abs/1982blho.book..106I

Jackiw, R. & Pi, S.-Y. 2003, Chern-Simons modification of general relativity, Phys. Rev. D, 68, 104012, http://adsabs.harvard.edu/abs/2003PhRvD..68j4012J

Jaroszynski, M. 1998, Relativistic Effects in Proper Motions of Stars Surrounding the Galactic Center, Acta Astron., 48, 653, http://adsabs.harvard.edu/abs/1998AcA....48..653J

Johannsen, T. 2013, Photon Rings around Kerr and Kerr-like Black Holes, ApJ, 777, 170, http://adsabs.harvard.edu/abs/2013ApJ...777..170J

Johannsen, T. 2015, Sgr A* and General Relativity, ArXiv e-prints, http://adsabs.harvard.edu/abs/2015arXiv151203818J

Johannsen, T. & Psaltis, D. 2011, Metric for rapidly spinning black holes suitable for strong-field tests of the no-hair theorem, Phys. Rev. D, 83, 124015, http://adsabs.harvard.edu/abs/2011PhRvD..83l4015J

Jørgensen, J. H., Bjælde, O. E., & Hannestad, S. 2016, Probing the spin of the central black hole in the Galactic Centre with secondary images, MNRAS, 458, 3614, http://adsabs.harvard.edu/abs/2016MNRAS.458.3614J

Kannan, R. & Saha, P. 2009, Frame Dragging and the Kinematics of Galactic-Center Stars, ApJ, 690, 1553, http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...690.1553K

Kaspi, V. M. & Kramer, M. 2016, Radio Pulsars : The Neutron Star Population & Fundamental Physics, ArXiv e-prints, http://adsabs.harvard.edu/abs/2016arXiv160207738K

Kaup, D. J. 1968, Klein-Gordon Geon, Phys. Rev., 172, 1331, http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.172.1331

Konopliv, A. S., Asmar, S. W., Folkner, W. M., et al. 2011, Mars high resolution gravity fields from MRO, Mars seasonal gravity, and other dynamical parameters, Icarus, 211, 401, http://adsabs.harvard.edu/abs/2011Icar..211..401K

Konoplya, R., Rezzolla, L., & Zhidenko, A. 2016, General parametrization of axisymmetric black holes in metric theories of gravity, Phys. Rev. D, 93, 064015, http://adsabs.harvard.edu/abs/2016PhRvD..93f4015K

Krabbe, A., Genzel, R., Drapatz, S., & Rotaciuc, V. 1991, A cluster of He I emission-line stars in the Galactic center, ApJ, 382, L19, http://adsabs.harvard.edu/abs/1991ApJ...382L..19K

Krabbe, A., Genzel, R., Eckart, A., et al. 1995, The Nuclear Cluster of the Milky Way : Star Formation and Velocity Dispersion in the Central 0.5 Parsec, ApJ, 447, L95, http://adsabs.harvard.edu/abs/1995ApJ...447L..95K

Labeyrie, A., Lipson, S. G., & Nisenson, P. 2006, An Introduction to Optical Stellar Interferometry, http://adsabs.harvard.edu/abs/2006iosi.book.....L

Lacour, S., Eisenhauer, F., Gillessen, S., et al. 2014a, The interferometric baselines and GRAVITY astrometric error budget, 9146, 91462E, http://cdsads.u-strasbg.fr/abs/2014SPIE.9146E..2EL

Lacour, S., Eisenhauer, F., Gillessen, S., et al. 2014b, Reaching micro-arcsecond astrometry with long baseline optical interferometry. Application to the GRAVITY instrument, A&A, 567, A75, http://adsabs.harvard.edu/abs/2014A%26A...567A..75L

Lambert, S. B. & Le Poncin-Lafitte, C. 2009, Determining the relativistic parameter γ using very long baseline interferometry, A&A, 499, 331, http://adsabs.harvard.edu/abs/2009A%26A...499..331L

Lambert, S. B. & Le Poncin-Lafitte, C. 2011, Improved determination of γ by VLBI, A&A, 529, A70, http://adsabs.harvard.edu/abs/2011A%26A...529A..70L

Lebach, D. E., Corey, B. E., Shapiro, I. I., et al. 1995, Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves Using Very-Long-Baseline Interferometry, Phys. Rev. Lett., 75, 1439, http://adsabs.harvard.edu/abs/1995PhRvL..75.1439L

Levenberg, K. 1944, A method for the solution of certain problems in least squares, Quart. Applied Math., 164

Levin, Y. 2007, Starbursts near supermassive black holes : young stars in the Galactic Centre, and gravitational waves in LISA band, MNRAS, 374, 515, http://adsabs.harvard.edu/abs/2007MNRAS.374..515L

Liebling, S. L. & Palenzuela, C. 2012, Dynamical Boson Stars, Liv. Rev. Relat., 15, http://adsabs.harvard.edu/abs/2012LRR....15....6L

Lindegren, L., Babusiaux, C., Bailer-Jones, C., et al. 2008, The Gaia mission : science, organization and present status, IAU Symposium, 248, 217, http://adsabs.harvard.edu/abs/2008IAUS..248..217L

Lucchesi, D. M. & Peron, R. 2010, Accurate Measurement in the Field of the Earth of the General-Relativistic Precession of the LAGEOS II Pericenter and New Constraints on Non-Newtonian Gravity, Phys. Rev. Lett., 105, 231103, http://adsabs.harvard.edu/abs/2010PhRvL.105w1103L

Lucchesi, D. M. & Peron, R. 2014, LAGEOS II pericenter general relativistic precession (1993-2005) : Error budget and constraints in gravitational physics, Phys. Rev. D, 89, 082002, http://adsabs.harvard.edu/abs/2014PhRvD..89h2002L

Lynden-Bell, D. & Rees, M. J. 1971, On quasars, dust and the galactic centre, MNRAS, 152, 461, http://adsabs.harvard.edu/abs/1971MNRAS.152..461L

Léna, P. 1996, L'observation en astrophysique, https://perso.lesia.obspm.fr/pierre-lena/page-d-exemple/

Markoff, S., Falcke, H., Yuan, F., & Biermann, P. L. 2001, The Nature of the 10 kilosecond X-ray flare in Sgr A*, A&A, 379, L13, http://adsabs.harvard.edu/abs/2001A%26A...379L..13M

Martins, F., Gillessen, S., Eisenhauer, F., et al. 2008, On the Nature of the Fast-Moving Star S2 in the Galactic Center, ApJ, 672, L119, http://adsabs.harvard.edu/abs/2008ApJ...672L.119M

Mazur, P. O. & Mottola, E. 2001, Gravitational Condensate Stars : An Alternative to Black Holes, Gen. Relat Quant. Cosmo., http://adsabs.harvard.edu/abs/2001gr.qc.....9035M

McClintock, J. E., Narayan, R., Davis, S. W., et al. 2011, Measuring the spins of accreting black holes, Class. Quant. Grav., 28, 114009, http://adsabs.harvard.edu/abs/2011CQGra..28k4009M

McClintock, J. E., Narayan, R., & Rybicki, G. B. 2004, On the Lack of Thermal Emission from the Quiescent Black Hole XTE J1118+480 : Evidence for the Event Horizon, ApJ, 615, 402, http://adsabs.harvard.edu/abs/2004ApJ...615..402M

McClintock, J. E., Narayan, R., & Steiner, J. F. 2014, Black Hole Spin via Continuum Fitting and the Role of Spin in Powering Transient Jets, Space Sci. Rev., 183, 295, http://adsabs.harvard.edu/abs/2014SSRv..183..295M

Menu, J., Perrin, G., Choquet, E., & Lacour, S. 2012, Kalman-filter control schemes for fringe tracking. Development and application to VLTI/GRAVITY, A&A, 541, A81, http://adsabs.harvard.edu/abs/2012A%26A...541A..81M

Merritt, D., Alexander, T., Mikkola, S., & Will, C. M. 2010, Testing properties of the Galactic center black hole using stellar orbits, Phys. Rev. D, 81, 062002, http://adsabs.harvard.edu/abs/2010PhRvD..81f2002M

Middleton, M., Done, C., Gierliński, M., & Davis, S. W. 2006, Black hole spin in GRS 1915+105, MNRAS, 373, 1004, http://adsabs.harvard.edu/abs/2006MNRAS.373.1004M

Mihalas, D. & Mihalas, B. W. 1984, Foundations of radiation hydrodynamics, http://adsabs.harvard.edu/abs/1984oup..book.....M

Narayan, R., Garcia, M. R., & McClintock, J. E. 1997, Advection-dominated Accretion and Black Hole Event Horizons, ApJ, 478, L79, http://adsabs.harvard.edu/abs/1997ApJ...478L..79N

Narayan, R. & Yi, I. 1994, Advection-dominated accretion : A self-similar solution, ApJ, 428, L13, http://adsabs.harvard.edu/abs/1994ApJ...428L..13N

Paczynski, B. 1978, A model of selfgravitating accretion disk with a hot corona, Acta Astron., 28, 241, http://adsabs.harvard.edu/abs/1978AcA....28..241P

Paumard, T. 2003, Étude de la cinématique et de la population stellaire du Centre Galactique, http://thibaut.paumard.free.fr/These/ThesePaumard.pdf

Paumard, T., Genzel, R., Martins, F., et al. 2006, The Two Young Star Disks in the Central Parsec of the Galaxy : Properties, Dynamics, and Formation, ApJ, 643, 1011, http://adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...643.1011P

Paumard, T., Perrin, G., Eckart, A., et al. 2008, Scientific Prospects for VLTI in the Galactic Centre : Getting to the Schwarzschild Radius, http://adsabs.harvard.edu/abs/2008poii.conf..313P

Plewa, P. M., Gillessen, S., Eisenhauer, F., et al. 2015, Pinpointing the near-infrared location of Sgr A* by correcting optical distortion in the NACO imager, MNRAS, 453, 3234, http://adsabs.harvard.edu/abs/2015MNRAS.453.3234P

Press, W. H. 1978, Flicker noises in astronomy and elsewhere, Comments on Astrophysics, 7, 103, http://adsabs.harvard.edu/abs/1978ComAp...7..103P

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 2002, Numerical recipes in C++ : the art of scientific computing, http://adsabs.harvard.edu/abs/2002nrca.book.....P

Psaltis, D. 2008, Probes and Tests of Strong-Field Gravity with Observations in the Electromagnetic Spectrum, Liv. Rev. Relat., 11, 9, http://adsabs.harvard.edu/abs/2008LRR....11....9P

Psaltis, D., Wex, N., & Kramer, M. 2015, A Quantitative Test of the No-Hair Theorem with Sgr A* using stars, pulsars, and the Event Horizon Telescope, ArXiv e-prints, http://adsabs.harvard.edu/abs/2015arXiv151000394P

Rauch, K. P. & Blandford, R. D. 1994, Optical caustics in a kerr spacetime and the origin of rapid X-ray variability in active galactic nuclei, ApJ, 421, 46, http://adsabs.harvard.edu/abs/1994ApJ...421...46R

Rezzolla, L. & Zhidenko, A. 2014, New parametrization for spherically symmetric black holes in metric theories of gravity, Phys. Rev. D, 90, 084009, http://adsabs.harvard.edu/abs/2014PhRvD..90h4009R

Rieke, G. H. & Low, F. J. 1973, Infrared maps of the galactic nucleus., ApJ, 184, 415, http://adsabs.harvard.edu/abs/1973ApJ...184..415R

Rubilar, G. F. & Eckart, A. 2001, Periastron shifts of stellar orbits near the Galactic Center, A&A, 374, 95, http://adsabs.harvard.edu/abs/2001A%26A...374...95R

Ruffini, R. & Bonazzola, S. 1969, Systems of Self-Gravitating Particles in General Relativity and the Concept of an Equation of State, Phys. Rev., 187, 1767, http://adsabs.harvard.edu/abs/1969PhRv..187.1767R

Sadeghian, L. & Will, C. M. 2011, Testing the black hole no-hair theorem at the galactic center : perturbing effects of stars in the surrounding cluster, Class. Quant. Grav., 28, 225029, http://adsabs.harvard.edu/abs/2011CQGra..28v5029S

Sakai, N., Saida, H., & Tamaki, T. 2014, Gravastar shadows, Phys. Rev. D, 90, 104013, http://adsabs.harvard.edu/abs/2014PhRvD..90j4013S

Schneider, P., Ehlers, J., & Falco, E. E. 1992, Gravitational Lenses, http://adsabs.harvard.edu/abs/1992grle.book.....S

Schödel, R., Merritt, D., & Eckart, A. 2009, The nuclear star cluster of the Milky Way : proper motions and mass, A&A, 502, 91, http://adsabs.harvard.edu/abs/2009A%26A...502...91S

Schunck, F. E. & Mielke, E. W. 2003, TOPICAL REVIEW : General relativistic boson stars, Class. Quant. Grav., 20, R301, http://adsabs.harvard.edu/abs/2003CQGra..20R.301S

Sereno, M. & de Luca, F. 2006, Analytical Kerr black hole lensing in the weak deflection limit, Phys. Rev. D, 74, 123009, http://adsabs.harvard.edu/abs/2006PhRvD..74l3009S

Sereno, M. & de Luca, F. 2008, Primary caustics and critical points behind a Kerr black hole, Phys. Rev. D, 78, 023008, http://adsabs.harvard.edu/abs/2008PhRvD..78b3008S

Shafee, R., McClintock, J. E., Narayan, R., et al. 2006, Estimating the Spin of Stellar-Mass Black Holes by Spectral Fitting of the X-Ray Continuum, ApJ, 636, L113, http://adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...636L.113S

Shakura, N. I. & Sunyaev, R. A. 1973, Black holes in binary systems. Observational appearance., A&A, 24, 337, http://adsabs.harvard.edu/abs/1973A%26A....24..337S

Shapiro, S. S., Davis, J. L., Lebach, D. E., & Gregory, J. S. 2004, Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves using Geodetic Very-Long-Baseline Interferometry Data, 1979 1999, Phys. Rev. Lett., 92, 121101, http://adsabs.harvard.edu/abs/2004PhRvL..92l1101S

Teyssandier, P. & Le Poncin-Lafitte, C. 2006, Angular distances in metric theories, ArXiv e-prints, http://adsabs.harvard.edu/abs/2006gr.qc....11078T

Titarchuk, L. & Zannias, T. 1998, The Extended Power Law as an Intrinsic Signature for a Black Hole, ApJ, 493, 863, http://adsabs.harvard.edu/abs/1998ApJ...493..863T

Trippe, S., Gillessen, S., Gerhard, O. E., et al. 2008, Kinematics of the old stellar population at the Galactic centre, A&A, 492, 419, http://adsabs.harvard.edu/abs/2008A%26A...492..419T

Trippe, S., Paumard, T., Ott, T., et al. 2007, A polarized infrared flare from Sagittarius A* and the signatures of orbiting plasma hotspots, MNRAS, 375, 764, http://adsabs.harvard.edu/abs/2007MNRAS.375..764T

Verma, A. K., Fienga, A., Laskar, J., Manche, H., & Gastineau, M. 2014, Use of MESSENGER radioscience data to improve planetary ephemeris and to test general relativity, A&A, 561, A115, http://adsabs.harvard.edu/abs/2014A%26A...561A.115V

Vincent, F. 2011, Étude d'effets relativistes en champ gravitationnel fort, https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00624816/document

Vincent, F. H., Meliani, Z., Grandclement, P., Gourgoulhon, E., & Straub, O. 2016, Imaging a boson star at the Galactic center, Class. Quant. Grav., 33, 105015, http://adsabs.harvard.edu/abs/2016CQGra..33j5015V

Vincent, F. H., Paumard, T., Gourgoulhon, E., & Perrin, G. 2011a, GYOTO : a new general relativistic ray-tracing code, Class. Quant. Grav., 28, 225011, http://adsabs.harvard.edu/abs/2011CQGra..28v5011V

Vincent, F. H., Paumard, T., Perrin, G., et al. 2011b, Performance of astrometric detection of a hotspot orbiting on the innermost stable circular orbit of the Galactic Centre black hole, MNRAS, 412, 2653, http://adsabs.harvard.edu/abs/2011MNRAS.412.2653V

Vincent, F. H., Paumard, T., Perrin, G., et al. 2014, Distinguishing an ejected blob from alternative flare models at the Galactic Centre with GRAVITY, MNRAS, 441, 3477, http://adsabs.harvard.edu/abs/2014MNRAS.441.3477V

Visser, M. 2007, The Kerr spacetime : A brief introduction, ArXiv e-prints, http://adsabs.harvard.edu/abs/2007arXiv0706.0622V

Wagoner, R. V., Silbergleit, A. S., & Ortega-Rodríguez, M. 2001, "Stable" Quasi-periodic Oscillations and Black Hole Properties from Diskoseismology, ApJ, 559, L25, http://adsabs.harvard.edu/abs/2001ApJ...559L..25W

Wald, R. M. 1984, General relativity, http://adsabs.harvard.edu/abs/1984ucp..book.....W

Weinberg, N. N., Milosavljević, M., & Ghez, A. M. 2005, Stellar Dynamics at the Galactic Center with an Extremely Large Telescope, ApJ, 622, 878, http://adsabs.harvard.edu/abs/2005ApJ...622..878W

Weisberg, J. M., Nice, D. J., & Taylor, J. H. 2010, Timing Measurements of the Relativistic Binary Pulsar PSR B1913+16, ApJ, 722, 1030, http://adsabs.harvard.edu/abs/2010ApJ...722.1030W

Will, C. M. 2008, Testing the General Relativistic "No-Hair" Theorems Using the Galactic Center Black Hole Sagittarius A*, ApJ, 674, L25, http://adsabs.harvard.edu/abs/2008ApJ...674L..25W

Will, C. M. 2014, The Confrontation between General Relativity and Experiment, Liv. Rev. Relat., 17, 4, http://adsabs.harvard.edu/abs/2014LRR....17....4W

Wollman, E. R., Geballe, T. R., Lacy, J. H., Townes, C. H., & Rank, D. M. 1977, NE II 12.8 micron emission from the galactic center. II, ApJ, 218, L103, http://adsabs.harvard.edu/abs/1977ApJ...218L.103W

Yagi, K. 2012, New constraint on scalar Gauss-Bonnet gravity and a possible explanation for the excess of the orbital decay rate in a low-mass x-ray binary, Phys. Rev. D, 86, 081504, http://adsabs.harvard.edu/abs/2012PhRvD..86h1504Y

Yu, Q., Zhang, F., & Lu, Y. 2016, Prospects for constraining the spin of the massive black hole at the Galactic center via the relativistic motion of a surrounding star, ApJ, 827, 114, http://adsabs.harvard.edu/abs/2016ApJ...827..114Y

Yuan, F., Quataert, E., & Narayan, R. 2003, Nonthermal Electrons in Radiatively Inefficient Accretion Flow Models of Sagittarius A*, ApJ, 598, 301, http://adsabs.harvard.edu/abs/2003ApJ...598..301Y

Yunes, N. & Siemens, X. 2013, Gravitational-Wave Tests of General Relativity with Ground-Based Detectors and Pulsar-Timing Arrays, Liv. Rev. Relat., 16, http://adsabs.harvard.edu/abs/2013LRR....16....9Y

Yunes, N., Yagi, K., & Pretorius, F. 2016, Theoretical Physics Implications of the Binary Black-Hole Mergers GW150914 and GW151226, ArXiv e-prints, http://adsabs.harvard.edu/abs/2016arXiv160308955Y

Zhang, F., Lu, Y., & Yu, Q. 2015, On Testing the Kerr Metric of the Massive Black Hole in the Galactic Center via Stellar Orbital Motion : Full General Relativistic Treatment, ApJ, 639, L21, http://adsabs.harvard.edu/abs/2015ApJ...809..127Z

Zucker, S., Alexander, T., Gillessen, S., Eisenhauer, F., & Genzel, R. 2006, Probing Post-Newtonian Physics near the Galactic Black Hole with Stellar Redshift Measurements, ApJ, 639, L21, http://adsabs.harvard.edu/abs/2006ApJ...639L..21Z

Résumé

Le Centre Galactique abrite en son cœur un objet compact de plusieurs millions de masses solaires. L'hypothèse faite à l'heure actuelle est que cet objet serait un trou noir supermassif décrit par la relativité générale. L'instrument de seconde génération du Very Large Telescope Interferometer, GRAVITY, va permettre d'apporter des réponses quant à la réelle nature de cet objet. Grâce à sa précision astrométrique de 10 microsecondes d'angle, il va pouvoir sonder l'espace-temps en champ fort via l'observation des étoiles et du gaz situés à proximité de l'objet central.

Au cours de ma thèse j'ai mis au point un modèle permettant de simuler les observations d'orbites d'étoiles de GRAVITY, l'objectif étant d'extraire à l'aide de celui-ci les paramètres fondamentaux du candidat trou noir central ainsi que les effets relativistes. Pour cela, j'ai utilisé le code de tracé de rayons GYOTO développé à l'Observatoire de Paris. Ce code permet de calculer des trajectoires d'étoiles et de photons obtenues en présence d'un objet compact. Il est alors possible de simuler les positions apparentes d'étoiles en orbite autour du Centre Galactique en calculant leur image relativiste.

J'ai d'abord validé le calcul des trajectoires des photons effectué dans GYOTO. Grâce à des tests effectués en déflexion faible et forte, j'ai pu démontrer que GYOTO était hautement satisfaisant pour simuler les observations de GRAVITY. En effet, j'ai montré que l'erreur sur le calcul des géodésiques de genre lumière était inférieure à environ 10^{-2} microseconde d'angle, et cela même pour de grandes distances d'intégration.

Je me suis ensuite intéressée à l'étude d'une étoile appelée S2 qui a contribué à fortement contraindre la masse de l'objet central. Sa proximité au Centre Galactique fait d'elle une cible idéale pour sonder l'espace-temps en champ fort. En particulier, j'ai estimé quels étaient les temps minimaux d'observation nécessaires pour détecter des effets relativistes à l'aide de mesures astrométriques et spectroscopiques obtenues sur l'étoile S2. Pour cela, j'ai mis en place plusieurs modèles d'orbites prenant en compte chacun un certain nombre d'effets relativistes. Le modèle le plus précis est obtenu en relativité générale complète avec le code GYOTO. Néanmoins, puisque l'étoile S2 est suffisamment éloignée de l'objet compact, ce modèle néglige certains effets de lentilles gravitationnelles tels que les images secondaires et l'amplification des images primaires. Par ailleurs, je me suis également intéressée à la contrainte du moment cinétique du candidat trou noir central avec cette étoile. En particulier, j'ai déterminé, grâce au modèle le plus précis mis en place ici, qu'il était possible de contraindre la norme et la direction du moment cinétique avec une incertitude d'environ 0,1 et 20 degrés, respectivement, et cela en considérant des observations obtenues sur trois périodes de S2 et des précisions de 10 microsecondes d'angle et 10 km/s.

En vue de la possible détection d'étoiles plus proches du Centre Galactique par GRAVITY, j'ai développé un modèle prenant en compte les effets de lentilles négligés dans le modèle précédent. Néanmoins, afin de minimiser le temps de calcul demandé par celui-ci, j'ai déterminé une zone de l'espace dans laquelle il est tout de même possible d'utiliser ce dernier.

Enfin, j'ai étudié l'influence de corps du Système Solaire sur les mesures astrométriques de GRAVITY, c'est-à-dire sur la séparation angulaire entre deux sources du Centre Galactique. Cette étude a montré que ces mesures différentielles n'étaient déviées que de quelques microsecondes d'angle par la perturbation gravitationnelle engendrée par le Soleil. Cependant, celles-ci sont modifiées de plusieurs centaines de microsecondes d'angle par l'effet d'aberration induit par le mouvement de la Terre par rapport aux sources du Centre Galactique. Il sera donc nécessaire de prendre en compte cet effet lors de l'interprétation des données obtenues par GRAVITY.

Mots Clés

Centre Galactique, trou noir, relativité générale, orbites stellaires

Abstract

Decades of studies have demonstrated the presence of a compact object of several million solar masses at the center of the Galaxy. Nowadays, the assumption is that this compact object is probably a supermassive black hole described by general relativity. The second generation instrument at the Very Large Telescope Interferometer, GRAVITY, is expected to better constrain the nature of this central object. By using its astrometric accuracy of about 10 microarcseconds, it will probe spacetime in strong gravitational fields by observing stars and gas located near the compact object.

During my PhD I have developed a stellar-orbit model in order to interpret the future GRAVITY observations. By using this model it will be possible to extract the central black hole candidate parameters and relativistic effects. To implement the model, I used the ray-tracing code GYOTO developed at Observatoire de Paris. This code allows computing star and photon trajectories obtained in the vicinity of a compact object. It is thus possible to simulate apparent positions of stars orbiting the Galactic Center by computing relativistic images.

My work started by validating the photon trajectories computed in GYOTO. By doing tests in both weak- and strong-deflection limits, I have shown that the GYOTO code is highly qualified to simulate GRAVITY observations. Indeed, the error made on the photon trajectories is inferior to 10^{-2} microarcsecond, even when integrating over large distances.

Then, I was interested in studying a star called S2 that contributed to importantly constrain the mass of the central object. This star is the closest star to the Galactic Center and has an orbital period of about 16 years. Nowadays, we do not know whether closer-in stars will be discovered by GRAVITY. It is thus important to extract as much information as possible from this star. In particular, I have estimated the minimal observation times needed to detect relativistic effects by using astrometric and spectroscopic measurements of S2. To do so, I have developed different stellar-orbit models taking into account a certain number of relativistic effects. The more accurate model is obtained by using the ray-tracing code GYOTO and considering all relativistic effects. However, as the S2 star is sufficiently far from the compact object, this model neglects certain gravitational lensing effects such as the secondary images and the primary images amplification. Besides, I was also interested in the possibility of constraining the angular momentum of the central black hole candidate with the S2 star. In particular, I have shown that with a model which does not use ray-tracing, the norm and the direction of the angular momentum can be constrained with an uncertainty of about 0.1 and 20 degrees, respectively, by using observations obtained during three periods of S2 and with accuracies reaching 10 microarseconds and 10 km/s.

Since closer-in stars could be detected by GRAVITY, I have developed a more accurate stellar-orbit model taking into account the lensing effects neglected in the previous model. However, in order to minimize the computing time required by this model, I determined a volume in which it is possible to neglect both the secondary images and the primary images amplification.

Finally, I studied the impact of different components of the Solar System on astrometric positions measured by GRAVITY. This study has shown that those measurements are deviated by an amount of a few microarcseconds by the gravitational perturbation generated by the Sun. However, those apparent positions are shifted by several hundred microarcseconds by the aberration effect due to the movement of the Earth with respect to the Galactic Center. It is thus necessary to take into account this effect in future interpretations of GRAVITY observations.

Keywords

Galactic Center, black hole, general relativity, stellar orbits