

Méthode des éléments finis augmentés pour la rupture quasi-fragile : application aux composites tissés à matrice céramique

Simon Essongue-Boussougou

► To cite this version:

Simon Essongue-Boussougou. Méthode des éléments finis augmentés pour la rupture quasi-fragile : application aux composites tissés à matrice céramique. Mécanique [physics]. Université de Bordeaux, 2017. Français. NNT : 2017BORD0018 . tel-01517076

HAL Id: tel-01517076 https://theses.hal.science/tel-01517076

Submitted on 2 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





THÈSE DE DOCTORAT DE l'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Spécialité **Mécanique**

École doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur

Présentée par Simon ESSONGUE

Ingénieur de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers Titulaire d'un master recherche délivré par l'École Polytechnique et l'École Normale Supérieure

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Sujet de la thèse

Méthode des éléments finis augmentés pour la rupture quasi-fragile : application aux composites tissés à matrice céramique

> soutenue le 8 Mars 2017 devant le jury composé de :

Mme. Delphine BRANCHERIE M. Julien YVONNET M. Guillaume COUÉGNAT M. Eric MARTIN M. Christian REY M. Philippe RENALIER	Maître de conférences HDR à l'UTC Professeur à l'Université Paris-Est Ingénieur de Recherche au CNRS Professeur à l'IPB Ingénieur à Safran Tech Ingénieur à la DGA	Rapporteur Rapporteur Examinateur Directeur de thèse Président Invité
M. Thomas VANDELLOS	Ingénieur à Safran Ceramics	Invité

Table des matières

Remerciements

Introduction					
1	Out 1.1 1.2	ils nur Éléme: 1.1.1 1.1.2 1.1.3 1.1.4 Éléme: 1.2.1	nériques nts n'intro Méthode Remailla Mécaniq 1.1.3.1 1.1.3.2 1.1.3.3 1.1.3.4 Approch nts induis Élément: 1.2.1.1	pour la représentation de fissures oduisant pas d'enrichissement de l'espace d'approximation e de dédoublement des noeuds age adaptatif ue de l'endommagement continu et régularisé La nécessité de régulariser les lois de comportement adoucissantes Mesh-adjusted softening modulus Modèles à comportement dépendant du temps Modèles d'endommagement non-locaux e variationnelle de la rupture - Phase field ant un enrichissement de l'espace d'approximation s d'interfaces munis d'une loi de comportement cohésive Modèle de zone cohésive intrinsèque	14 15 15 16 17 17 18 22 23 26 28 28 28 28
		1.2.2 1.2.3	1.2.1.2 1.2.1.3 La méth 1.2.2.1 Embedda 1.2.3.1 1.2.3.2	Modèle de zone cohésive extrinsèque	29 30 31 31 34 34 37
2	Form	mulatio	on détail	ée de la méthode des éléments finis augmentés	39
	2.1	Formu	lation var	iationnelle et équations d'équilibre discrétisées	40
	2.2	Éleme	nts à disc	ontinuités faibles	42
		2.2.1	Calcul d	es déplacements interfaciaux	42
	9 9	2.2.2 Élomo	Matrice	de raideur elementaire condensee	43
	2.5	231	Loi de co	ommentement de l'interface : linéaire par morceaux et faiblement couplée	43 43
		2.3.1	Schémas	d'intégration des contraintes cohésives	40
		2.0.2	2.3.2.1	Formules d'intégation de Newton-Cotes (N-Cis)	47
			2.3.2.2	Formules d'intégration de Gauss (Gis)	48
		2.3.3	Calcul d	es déplacements interfaciaux	48
		2.3.4	Le consis	stency-check	49
		2.3.5	Matrice	de raideur condensée	51
		2.3.6	Remarqu	les supplémentaires	51
			2.3.6.1	Différences d'implémentation	51
			2.3.6.2	Avantages et inconvenients de l'algorithme de consistency-check	52 52
			2.3.6.4	La méthode des éléments finis augmentés et pseudo-inversés	55 54
3	Vali	dation	de l'im	plémentation et estimation des performances d'AFEM	56
	3.1	Tests of	de vérifica	tion classiques	57
		3.1.1	Tests pro	pposés par le groupe de Yang	57
			3.1.1.1	Essai en mode I	57
			3.1.1.2	Essai en mode II	59
			3.1.1.3	Essai en mode mixte	60
		3.1.2	Tests dé	veloppés par Linder et Armero	61
			3.1.2.1	Essai de traction uniforme	62

			3.1.2.2 Essai de flexion	65
		3.1.3	Conclusions sur la validation de l'implémentation	68
	3.2	Une as	nalyse approfondie de la méthode des éléments finis augmentés	69
		3.2.1	Description cinématique des discontinuités fortes :	69
			3.2.1.1 avec XFEM et les EFEMs « classiques »	69
			3.2.1.2 avec AFEM	69
			3.2.1.3 Discussions	70
		3.2.2	Preuve de l'équivalence entre AFEM et la discrete crack approach (DCA)	73
			3.2.2.1 Équations d'équilibre discrétisées : invertible AFEM	73
			3.2.2.2 Équations d'équilibre discrétisées : discrete crack approach	73
			3.2.2.3 Un test additionnel de validation de l'implémentation des éléments aug-	
			mentés \ldots	74
	3.3	Conve	ergence en h d'AFEM en présence de discontinuités fortes ou faibles	80
		3.3.1	Définition des erreurs calculées	80
		3.3.2	Discontinuités faibles : cas d'une inclusion circulaire	81
			3.3.2.1 Description du problème	81
			3.3.2.2 Résultats numériques	82
			3.3.2.3 Discussions et conclusions	84
		3.3.3	Discontinuités fortes : le problème de Westergaard	85
			3.3.3.1 Description du problème	85
			3.3.3.2 Résultats numériques : mode I	87
			3.3.3.3 Résultats numériques : mode II	89
			3.3.3.4 Discussions et conclusions	90
	3.4	Simula	ations de propagation de fissures	93
		3.4.1	Évaluation de la dépendance à l'orientation du maillage	93
			3.4.1.1 Rupture stable	94
			3.4.1.2 Rupture instable	96
		3.4.2	Estimation de la dépendance à la taille des éléments	98
			3.4.2.1 Test Double Cantilever Beam (DCB)	99
			3.4.2.2 Test end notched flexure (ENF)	100
	3.5	Conclu	usions et discussions complémentaires	101
4	4	liastia	ana de la máthada das áláments finis augmentés aux CMCs tissás	109
4		Scános	bis de la methode des éléments finis augmentes aux CiviCs tisses	105
	4.1	Variat	rio d'endominagement et durée de vie des SiC/SiC $CV1$	100
	4.2	Drana	nons de fadeurs engendrees par un reseau de insures matricienes	119
	4.5	Conch	gation de insures à l'échene mésoscopique	115
	4.4	Conciu	usions et perspectives	110
Co	onclu	sion g	énérale	117
A	ppen	dices		119
				100
Α	Nur	nerota	ation des elements augmentes, vecteurs et matrices associés	120
	A.1	AQ4-1	L	120
	A.2	AQ4-2	2	122
	A.3	A13		124
B Matrice de raideur d'un élément pentagonal				
Bi	bliog	raphie	e	128

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du Laboratoire des Composites ThermoStructuraux (LCTS) sous la direction d'Eric MARTIN et de Guillaume COUEGNAT, en collaboration avec Safran Ceramics et a été financé par la Direction Générale de l'Armement (DGA).

Je n'aurais pu en venir à bout sans l'aide de nombreuses personnes que je tiens à remercier chaleureusement. Voici donc la liste des principaux coupables.

Les directeurs successifs du LCTS, Francis TEYSSANDIER et Gérard-Louis VIGNOLES m'ont accueilli dans leur laboratoire où j'ai pu réaliser mes travaux dans d'excellentes conditions matérielles. Outre les conférences et autres workshops, j'ai eu le privilège de participer à deux écoles d'été. J'ai ainsi pu rencontrer Milan JIRÁSEK à Prague puis Stéphane BORDAS et Pierre KERFRIEDEN à Udine. Leurs connaissances encyclopédiques et nos échanges durant ces deux semaines auront eu une influence considérable sur le déroulement de mes travaux. Je les en remercie et espère que nos chemins se croiseront à nouveau.

Celle et ceux qui m'ont fait docteur ainsi que l'honneur de participer au jury de cette thèse. Christian REY, président du jury, dont la rencontre antérieure m'aura permis d'achever ces travaux en temps et en heure (enfin, presque!). Delphine BRANCHERIE et Julien YVONNET, que je remercie d'avoir accepté de rapporter mon manuscrit et dont les travaux sur les méthodes numériques pour la fissuration m'ont notablement aidé à étoffer les miens. Thomas VANDELLOS, ingénieur Safran Ceramics, qui avec Florent BOUILLON, également ingénieur Safran Ceramics, m'ont constamment poussé à démontrer la viabilité industrielle de mon approche. Nos échanges réguliers, vifs et passionnés ce seront avérés –je le crois – très productifs et instructifs. Philippe RENALIER, ingénieur à la DGA, qui m'a permis de réaliser ces travaux avec une grande latitude tout en m'instruisant sur les applications des CMCs dans le secteur militaire. Eric MARTIN, mon directeur de thèse, qui a rendu possible mon travail sur ce sujet de recherche ô combien passionnant.

Exprimer ma reconnaissance envers mon encadrant, Guillaume COUEGNAT, serait une litote. La flexibilité qu'il m'a accordé quant à l'organisation de mon travail m'a permis de constamment donner le meilleur de moi-même. Bien qu'il encadre une flopée de doctorants sur des sujets aussi variés que l'estimation de l'anisotropie optique, l'ablation, le traitement d'images, l'oxydation, la génération de cellules de tissés, etc., etc., setc., sa disponibilité pour discuter solveurs non linéaires, admissibilité thermodynamique, méthodes multi-échelles, schémas d'intégration numérique, éléments finis enrichis, etc., etc., etc., s'est avérée infaillible. En parachevant notre passionnelle collaboration par un discours en italien lors de la soutenance tu m'auras convaincu que, comme on dit chez Dante, « A buon cavaliere non manca lancia e a buon cavallo non manca sella ».

Les membres du LCTS qu'ils soient stagiaires, ingénieurs, chercheurs, techniciens ou personnels administratifs rendent la vie au laboratoire très agréable. Une mention spéciale pour les doctorants qui sont le ciment du LCTS et les principaux responsables de la bonne ambiance qui y règne. Vous avez vaincu ma légendaire réticence quant à la pratique du ballon rond - après plus de quinze années d'abstinence c'est dire!

Mes amis, grâce à qui j'ai pu compenser de nombreuses périodes d'excès de travail par de fréquents excès de rire, que ce soit à Bordeaux, Toulouse, Nantes, Paris, Bristol, Londres, Bologne ou Cologne. Vous êtes une source inépuisable d'énergie. Je n'essaierai pas de dresser une liste de noms ou d'anecdotes, vous êtes trop nombreux et en avez généré assez pour remplir un document de la taille de celui-ci.

Enfin celle qui, depuis l'autre bout de la planète, a relu minutieusement ce manuscrit l'allégeant ainsi de quelques fautes de goût et d'orthographe. Tu m'as permis de découvrir le sommeil, l'Australie ses dump points, ses prisons et ses kangourou(te)s, Bernard Pivot et les dicos d'or, la vérité vraie sur le risotto, l'art des samoussas – et j'en passe - le tout avec un sourire radieux. Merci Clarinette. Introduction

Les matériaux composites

L'appellation *matériau composite* ou *composite* désigne l'assemblage de plusieurs matériaux non miscibles communément appelés *composants*, *constituants* ou *phases*. Cet assemblage permet d'obtenir un matériau dont les performances sont supérieures à celles de ses composants pris séparément. Il est ainsi possible, par le biais d'une ingénieuse association de constituants, de concevoir le matériau idéal pour une application donnée. De nombreux matériaux naturels sont des composites. L'os humain est un élégant exemple de composite naturel optimisé vis-à-vis de son application. Il est en effet principalement constitué de l'os compact, rigide mais fragile, qui assure la tenue de l'ossature, et de l'os spongieux, ductile mais mou, permettant d'absorber les chocs (voir Figure 1). Il est possible de concevoir un composite en cherchant l'assemblage optimal de matériaux pour une application visée, suivant ainsi une démarche biomimétique.



FIGURE 1 – Constitution de l'os humain

Un composite est généralement composé de phases discontinues réparties dans une phase continue (voir Figure 2). La phase continue est appelée *matrice*. La phase discontinue est appelée *renfort* ou *matériau renforçant* et se présente sous forme de *particules* ou de *fibres*. On peut classer les composites suivant la nature de leur matrice. On distingue ainsi les *composites à matrice organique*, les *composites à matrice inorganique* et les *composites à matrice métallique*.



FIGURE 2 – Représentation schématique d'un composite, d'après [Berthelot, 2012]

Les composites à matrice céramique

La présente étude est consacrée à une sous-famille de composites à matrice inorganique : celle des *composites à matrice céramique tissés* par des *fibres longues* (appelés CMC dans la suite de ce texte). Ces composites ont étés conçus pour des applications en conditions extrêmes : températures de fonctionnement allant de 400 ° C à plus de 2 000 ° C et contraintes de plusieurs centaines de MPa dans des conditions oxydantes, radiatives ou abrasives. On les surnomme ainsi *composites thermostructuraux*. Leurs domaines d'application sont essentiellement l'aéronautique, l'espace et le nucléaire. Quelques exemples de pièces conçues (ou en cours de conception) en CMC sont énoncés ci-dessous [Sauder, 2014, Spriet, 2014, Krenkel and Georges Thébault, 2014] :

- disques de freins (Formule 1, sportives haut de gamme, avions)
- embrayages (sportives haut de gamme)
- paliers lisses (pompes à eau de chaudière pour centrales électriques, turbopompes destinées à l'oxygène liquide des fusées spatiales)
- gainage du combustible nucléaire
- systèmes de protections thermiques des véhicules spatiaux
- pièces de tuyères de turboréacteurs (avion de combat Rafale de Dassault Aviation, avion régional Sukhoï SUPERJET 100)
- disques de turbines et aubes de turboréacteurs (turboréacteurs General Electric F414 et CFM International LEAP)

L'architecture des composites à matrices céramiques tissés

Les CMC sont constitués de fibres à base de SiC, d' Al_2O_3 , de C ou de ZrO_2 , d'un diamètre de l'ordre de 10 μm et enrobées d'une matrice céramique en SiC, Al_2O_3 , SiBC, SiO_2 - Al_2O_3 , SiC- ZrB_2 ou SiC- HfB_2 . Le couple fibre/matrice est généralement choisi en fonction des durées de vie à atteindre pour l'application considérée (voir Figure 3).



FIGURE 3 – Influence de la température sur la durée de vie de divers CMC, d'après [Fantozzi et al., 2013]

Une *interphase* à base de PyC et/ou de BN d'une épaisseur de l'ordre de 100 nm est généralement « insérée » entre les fibres et la matrice. Elle a un rôle fondamental sur le comportement des CMCs puisqu'elle leur confère un caractère *endommageable* (aussi appelé, *pseudo-ductile* ou *quasi-fragile*). Son rôle ainsi que les scénarios d'endommagement d'une famille de CMC sera élaboré plus en détail au Chapitre 4.

L'architecture des CMC tissés est complexe car multiéchelle. Nous la décrivons tout en détaillant brièvement les étapes nécessaires à leur élaboration. Les fibres sont tout d'abord regroupées par mèches d'environ 500 (voir Figure 4a) puis tissées (Figure 4b). L'entrelacement de fibres ainsi créé est souvent appelé *préforme sèche*, *préforme fibreuse* ou *armure*.



FIGURE 4 – a) Réseau de fibres [Vilfayeau, 2014] b) Représentation virtuelle de la préforme sèche [Durville, 2007]

On densifie ensuite la préforme (on parle aussi d'imprégnation ou d'infiltration) en y ajoutant l'interphase puis la matrice. Il existe de nombreux procédés permettant de mener à bien les phases de densification [Naslain, 2004]. Le choix du(des) procédé(s) d'infiltration est un sujet délicat car il impacte considérablement les performances mécaniques et le coût final du matériau. Les premières phases d'infiltration de la préforme engendrent l'« apparition » d'une nouvelle entité : le *fil* (aussi appelé *toron*), qui paraît être homogène sur la tomographie de la Figure 5a. Des micrographies plus fines montrent qu'il n'en est rien : on distingue clairement fibres et matrice au sein d'un fil comme illustré Figure 5b. Ce dernier est donc un « composite dans le composite ». La poursuite de l'imprégnation engendre le dépôt d'une phase de matrice homogène représentée schématiquement en bleu ciel Figure 7b.



FIGURE 5 – a) Tomographie d'un CMC tissé [Vilfayeau, 2014], b) Micrographie d'une coupe de CMC tissé [Grippon, 2013] (a) fibre, (b) porosité, (c) toron longitudinal, (d) torons transverses

L'intérêt fondamental du tissage est de proposer une solution au *délaminage* entre *plis unidirectionnels* dans les *composites stratifiés*. En effet, plutôt que d'empiler des plis unidirectionnels (cf. Figure 6), le tissage des fils engendre des structures renforcées dans toutes les directions. La résistance à l'impact ainsi que les modules d'élasticité hors plan sont considérablement accrus par rapport à une architecture stratifiée [Lomov and Verpoest, 2010, Herb et al., 2011].



FIGURE 6 – Modes d'endommagement des stratifiés [Berthelot, 2012]

Il convient maintenant de préciser les notions d'échelles abordées au cours de cette thèse. Ces dernières sont définies différemment suivant les communautés et/ou les auteurs. Nous adopterons une définition basée sur les constituants représentés explicitement dans les simulations numériques :

- si les fibres sont représentées nous parlerons de simulations à l'échelle microscopique (Figure 7a)
- si les fils sont représentés de façon homogène les simulations seront qualifiées de *mésoscopiques* (Figure 7b)
- si le CMC est représenté de façon homogène les simulations seront appelées macroscopiques (Figure 7c)



FIGURE 7 – Architecture multiéchelle des CMC a) Échelle microscopique [Chateau, 2011] b) Échelle mésoscopique [Drach et al., 2014] c) Échelle macroscopique

Les CMC et les turboréacteurs d'avions civils

Notre étude se focalise sur les applications turboréacteurs d'avions civils où les températures avoisinent les 1700°C (cf. Figure 8) en atmosphère oxydante. Le souci constant des motoristes est d'améliorer l'efficience de ces pièces : réduire leur consommation en carburant ainsi que les pollutions atmosphérique et acoustique qu'elles génèrent. À titre d'exemple, les objectifs fixés par l'ACARE (Advisory Council for Aviation Research in Europe) dans une monographie intitulée Vision 2020 (source : http://www. acare4europe.org/documents/vision-2020) sont les suivants : une réduction de 50% des émissions de dioxyde de carbone et du bruit perçu ainsi qu'une réduction de 80% des émissions d'oxydes d'azote par rapport à l'année 2000. Augmenter la température dans la chambre de combustion du moteur et diminuer la masse des pièces en rotation sont deux solutions permettant d'y parvenir. Les matériaux actuellement utilisés dans les turboréacteurs sont métalliques : superalliages à base de Nickel ou de Cobalt (densité $\simeq 9$ [Tin and Pollock, 2010]) ou alliages de titane TiAl (densité $\simeq 4$ [Appel, 2010]). Les CMC (densité $\simeq 2-3$ [Keller et al., 2005]) constituent une alternative alléchante à ces derniers. Ils sont en effet deux à quatre fois moins denses et permettent d'atteindre des températures de fonctionnement jusque 200° C plus élevées Morscher, 2014a. Les marges de progression induites par l'optimisation des matériaux métalliques semblent aujourd'hui limitées. Ces derniers sont en effet perfectionnés depuis plus d'une cinquantaine d'années et opèrent de nos jours à des températures remarquablement proches de leurs points de fusion [Marshall and Cox, 2010]. L'introduction des CMC dans les turboréacteurs est indéniablement un moyen prometteur pour satisfaire les exigences des futures normes anti-pollution du transport aérien civil.



FIGURE 8 – Le choix des matériaux dans un turboréacteur a) CFM56 [Thevenin, 2004] b) PW4000 [Locq and Caron, 2011]

La "céramisation" des turboréacteurs constituerait donc une véritable « rupture technologique ». Cette rupture est en cours dans l'aviation civile. À titre d'exemple, un cône d'éjection (aussi appelé plug) en CMC conçu par Safran a été certifié en avril 2015 par l'Agence Européenne de la Sécurité Aérienne (cf. Figure 9a). Boeing en développe également un (cf. Figure 9b).



FIGURE 9 – a) Plug Safran monté sur un A320 b) Plug Boeing monté sur un moteur Rolls Royce Trent1000

Des pièces tournantes de turboréacteurs en CMC telles que des disques ou des aubes de turbines sont actuellement à l'étude chez les industriels (voir Figure 10). General Electrics a testé des aubes de turbines basses pressions en février 2015. Safran annonce avoir testé ces mêmes pièces mi-2010 [Spriet, 2014]. Un résumé de la lutte entre industriels pour l'introduction des CMC dans les secteurs de l'aéronautique et du spatial est présenté dans [Spriet, 2014].



FIGURE 10 – Aubes de turbines en CMC a) DLR Institute of Structures and Design b) General Electric c) IHI Corporation

Calcul de l'endommagement et de la durée de vie des CMC

Les CMC ont été initialement introduits dans les secteurs militaires et spatiaux où la **durée de vie** (DDV) envisagée des pièces concernées est de l'ordre de l'heure. Dans ce cas, la DDV de ces pièces peut être évaluée exclusivement de manière expérimentale. La DDV des CMC présents dans les turboréacteurs d'avions civils doit atteindre plusieurs dizaines de milliers d'heures. Des campagnes de validations uniquement expérimentales ne sont donc plus envisageables. L'introduction des CMC dans l'aviation civile impose donc le développement et l'utilisation d'**outils prédictifs** pour le calcul et l'optimisation des DDV. Par outil prédictif nous désignons un outil alimenté par des données d'entrées exclusivement basées sur les propriétés matériaux des constituants ainsi que sur leur arrangement spatial. Cette approche est qualifiée d'approche déductive.

Une telle approche constitue un défi scientifique suffisament considérable pour avoir été qualifiée de « rêve (illusoire?) » dans [Hild, 1998]. C'est ainsi par des approches inductives, aussi appelées phénoménologiques, que l'endommagement et la DDV des CMC sont aujourd'hui calculés. On identifie expérimentalement des grandeurs macroscopiques sur des éprouvettes de « faibles » dimensions puis l'on extrapole les résultats obtenus à de véritables structures, de formes différentes, soumises à des chargements différents. La mécanique de l'endommagement continu constitue un cadre privilégié pour de telles approches phénoménologiques et celà pour tout type de matériaux et de sollicitations [Lemaître and Desmorat, 2005, Voyiadjis, 2015]. Les variables d'endommagement ne traduisent cependant pas toujours l'état d'endommagement réel du matériau mais reflètent « seulement » son effet sur les composantes du tenseur de rigidité ou de souplesse. Ainsi, elles ne permettent généralement pas d'établir de liens directs entre les dégradations des propriétés mécaniques et les phénomènes physiques à la source de ces modifications. Ce type de description englobe les effets de divers mécanismes sans permettre une description de l'état de dégradation à l'échelle microscopique et donc une compréhension physique satisfaisante. La tendance générale des modèles d'endommagement macroscopique est donc à l'inclusion de plus d'informations microscopiques pour une description plus physique de l'endommagement. On espère ainsi les faire passer du statut d'outils de conception à celui d'outils de compréhension [Allix and Hild, 2002].

À ce jour et à la connaissance de l'auteur, seuls deux modèles d'endommagement macroscopique permettent d'estimer la DDV de CMC tissés soumis à des chargements thermomécaniques complexes. Le premier, développé au Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT), est basé sur la théorie de l'*endommagement anisotrope et unilatéral* de Ladevèze [Allix and Hild, 2002, Genet et al., 2014] où la prise en compte de la DDV a été publiée dans [Cluzel et al., 2009, Genet et al., 2012, Ladevèze et al., 2014]. Le second a été développé à l'Onera [Maire and Chaboche, 1997, Marcin, 2010] sous le nom d'Onera Damage Model (ODM) avec une extension aux calculs de DDV dans [Hemon, 2013].

La durée de vie des CMC est principalement limitée par l'oxydation des fibres et des interfaces fibre/matrice [Rebillat et al., 1998, Naslain et al., 2004b, Morscher et al., 2011, Morscher, 2014b]. Cette oxydation est rendue possible par l'apparition de fissures matricielles qui facilitent l'accès de l'oxygène aux fibres (voir Figure 11). La construction d'un modèle prédictif de la durée de vie des CMC nécessite donc de connaître l'évolution des réseaux de fissures dans le matériau.



FIGURE 11 – a) Réseau de fissures matricielles [Morscher, 2014a] b) Consommation des fibres de C par l'O₂ [Camus et al., 2014]

Les deux modèles d'endommagement macroscopique précédemment évoqués renseignent sur l'état de fissuration dans les CMC via la définition d'un *indicateur d'ouverture de fissures*. La connaissance des états de contraintes et des variables d'endommagement à l'échelle macroscopique donne ainsi accès aux ouvertures et aux densités de fissures à l'échelle microscopique dans le matériau. On peut ainsi estimer sa DDV (cf. Figure 12).



FIGURE 12 – Chaîne de calcul de la DDV développée au LMT, d'après [Genet et al., 2012] a) Géométrie de l'éprouvette testée b) Champ d'endommagement matriciel c) Modèle d'oxydation des constituants d) Durée de vie de l'éprouvette en fonction du niveau de sollicitation

Cependant, certains des paramètres intervenant dans le calcul de cet indicateur d'ouverture de fissure nécessitent une étape de calibration expérimentale. De plus, de l'avis même de certains des utilisateurs de ces modèles, la représentation de l'état de fissuration obtenue n'est pas assez fine. Ainsi l'indicateur d'ouverture de fissures nécessite d'être réidentifié pour chaque nouvelle nuance du matériau et le modèle perd en grande partie son caractère prédictif [Tranquart, 2012, Tranquart et al., 2012]. L'important nombre

de paramètres nécessaires à l'alimentation de ces modèles (entre 100 et 300 suivant les versions d'ODM [Elias, 2015]) peut mettre en doute leurs réelles capacités prédictives.

Les modèles d'endommagement macroscopique éludent les détails de la mésostructure (schéma de tissage, porosité etc.) et ne semblent donc pas suffisants pour prédire l'évolution du réseau de fissures dans un CMC tissé et, par conséquent, sa durée de vie. Il est donc primordial de travailler à une échelle plus fine, l'échelle mésoscopique, afin de quantifier de façon plus précise l'état d'endommagement dans le matériau.

Objectifs et organisation de l'étude

Afin de prédire la durée de vie des CMC tissés, une description fine de l'état d'endommagement dans le matériau paraît incontournable. Ces travaux présenteront donc une méthodologie à même de simuler les processus de fissuration dans les CMC à l'échelle mésoscopique. Le couplage avec l'oxydation ne fait pas partie de la présente étude qui se concentre sur les endommagements d'origine mécanique. On s'attachera à travailler avec des méthodes implémentables dans des codes de calcul industriels pour un transfert vers la société Safran Ceramics. Le mémoire de thèse s'organise autour de quatre chapitres :

- Au Chapitre 1 on s'intéresse aux diverses « technologies » d'éléments finis permettant de simuler la propagation de fissures. L'utilisation d'une méthode de type *embedded finite element method* (*EFEM*) nommée augmented finite element method (*AFEM*) sera justifiée.
- Le Chapitre 2 expose en détail la formulation des éléments finis augmentés développés par le groupe du professeur Yang. Des corrections sont apportées aux quelques erreurs rencontrées dans les publications sur la méthode. Une extension de la formulation propoposée par les auteurs d'AFEM sera également présentée : la pseudo-inverted augmented finite element method (PIAFEM).
- L'implémentation d'AFEM dans un code prototype est validée au **Chapitre 3**. Nous y analysons également la formulation des éléments augmentés afin de démontrer l'équivalence d'*AFEM* avec une méthode de remaillage. On s'intéressera également à la vitesse de convergence de la méthode (dans la norme énergétique) pour des problèmes comprenant des singularités fortes (fissures) et faibles (interfaces). Des exemples académiques illustrant les performances et limitations de *PIAFEM* seront également présentés.
- Enfin, le **Chapitre 4** présentera des applications de PIAFEM aux CMC tissés SiC/SiC élaborés par infiltration chimique en phase vapeur.

Chapitre 1

Outils numériques pour la représentation de fissures

Simuler numériquement la propagation de fissures dans un solide est devenu une discipline à part entière appelée computational fracture mechanics. Cette dernière englobe de nombreuses méthodes mais nous nous restreindrons à celles de type éléments finis. Ce sont en effet les plus utilisées dans les domaines académiques et industriels, même si des approches telles que la méthode des éléments de frontières [Aliabadi, 1997] ou les méthodes sans maillage [Belytschko et al., 2004] ont un potentiel non négligeable. Ce chapitre présente un état de l'art des « technologies » d'éléments finis permettant de simuler explicitement les phases de nucléations et de propagations de fissures. Leur applicabilité à des maillages tridimensionnels de CMC à l'échelle mésoscopique (voir Figure 1.1a), pour représenter un endommagement semblable à celui observé expérimentalement (cf. Figure 1.1b), sera systématiquement discutée. Précisons que les densités de fissures dans un fil de CMC peuvent dépasser 10 mm^{-1} [Lissart and Lamon, 1997, Chateau et al., 2014]. La méthode choisie devra donc impérativement permettre la représentation de nombreuses fissures fissures à moindre coût.



FIGURE 1.1 - a) Maillage d'un tissé à l'échelle mésoscopique [Drach et al., 2014] b) Réseaux de fissures dans un CMC [Marshall, 2013]

Le champ de déplacement au sein d'éléments finis « classiques » (souvent appelés *standard displacement-based finite elements* ou *irreducible finite elements* [Bathe, 1996,Zienkiewicz and Taylor, 2005]) est continu. Une fissure est une discontinuité dans le champ de déplacement d'une structure. Nous avons scindé les « technologies » d'éléments finis à même de représenter une fissure en deux catégories : celles qui permettent de représenter explicitement cette discontinuité, induisant ainsi un enrichissement de l'espace d'approximation des éléments finis classiques, et celles qui ne l'autorisent font pas. Par « technologies » d'éléments on se réfère au processus de formation de leurs matrices de raideur.

On ne se focalise donc pas dans cette partie sur les critères ou stratégies de propagation utilisés (même si le choix de certaines technologies d'éléments les imposent parfois). La stratégie de calcul ainsi que les critères de propagation seront abordés plus en détail au Chapitre 4. Cette étude s'inspire en partie des états de l'art présentés dans [Ingraffea, 2007, Rabczuk, 2013, Jirásek, 2014].

1.1 Éléments n'introduisant pas d'enrichissement de l'espace d'approximation

1.1.1 Méthode de dédoublement des noeuds

Le dédoublement des noeuds (aussi appelé *déboutonnage*) ne constitue pas une technologie d'élément à proprement parler (des éléments finis « classiques » sont utilisés) mais une « stratégie ». Elle est néanmoins incourtounable dans un état de l'art sur les outils numériques traitant de propagations de fissures. C'est vraisemblablement la première à avoir été utilisée pour simuler la propagation de discontinuités fortes [Clough, 1962]. Une fissure est représentée en dédoublant des noeuds du maillage au fur et à mesure de sa propagation (cf. Figure 1.2).



FIGURE 1.2 – Propagation de fissures par dédoublement des noeuds [Krueger, 2004]

Les limitations de l'approche sont évidentes : le trajet de propagation des fissures est contraint par la topologie du maillage (les fissures ne peuvent se propager qu'entre les éléments). Malgré leurs limitations, elles sont implémentées dans de nombreux codes de calculs commerciaux pour l'étude de cas où les trajets potentiels de fissures sont connus par avance (comme la délamination dans les stratifiés ou la propagation de fissures aux joints de grains de polycristaux). Les trajets de fissurations dans les CMC tissés ne sont cependant pas prévisibles à priori. La méthode de dédoublement des noeuds n'est donc pas adaptée à notre problème. Elle a néanmoins déjà été utilisée pour simuler l'endommagement d'un CMC tissé à l'échelle mésoscopique (cf. Figure 1.3) dans [Guillaumat and Lamon, 1996, Lamon et al., 1998]. Malgré les limitations précédemment évoquées, des résultats très encourageants ont été obtenus : les courbes contraintes-déformations expérimentales et simulées sont en accord.



FIGURE 1.3 – Maillage mésoscopique 2D d'un CMC tissé [Guillaumat and Lamon, 1996]

Bilan et limitation pour notre étude

La méthode de dédoublement des noeuds engendre des trajets de propagation de fissures dépendants de la topologie du maillage. Elle n'est donc pas applicable aux CMC tissés 3D.

1.1.2 Remaillage adaptatif

Le remaillage adaptatif peut être vu comme une extension de la méthode de dédoublement des noeuds. Les défauts de cette dernière, c.-à-d. une propagation et un espacement des fissures conditionnés par la topologie du maillage, sont supprimés. Cette méthode est aujourd'hui implémentée dans de nombreux codes de calculs et massivement utilisée dans l'industrie. Si le remaillage est conceptuellement simple, sa mise en oeuvre est particulièrement complexe en 3D pour des composites tissés où plusieurs phases coexistent (cf. Figure 1.1). De plus, le nombre de degrés de liberté peut considérablement augmenter lors de la propagation des fissures. Un mailleur adaptatif efficace doit donc automatiquement raffiner le maillage aux fronts de fissures tout en le simplifiant dans les zones peu contraintes (voir Figure 1.4).



FIGURE 1.4 – Trajet de fissuration dans une éprouvette préfissurée [Bouchard et al., 2003]

FRANC3D [Wawrzynek et al., 2012] et Zébulon [Chiaruttini et al., 2013] font partis des mailleurs adaptatifs les plus avancés du commerce mais ne permettent pas de travailler avec des matériaux aussi hétérogènes et fissurés que les CMCs. Le remaillage de cellules tissés 3D afin d'y insérer des fissures a été abordé dans [Couégnat, 2008] et [Grail, 2013, Doitrand et al., 2015a]. Néanmoins il n'y est pas encore totalement adaptatif : les fissures se propagent instantanément de part en part des cellules considérées et les longueurs de décohésions aux interfaces fils/matrices sont décidées à priori (cf. Figure 1.5). Ces approches ne sont donc pas prédictives : la longueur à donner aux décohésions fil/matrice ainsi que la propagation instantanée de fissures sont empiriques. Ces limitations sont les conséquences de la difficulté associée au remaillage adaptatif d'un composite tissé. Les travaux précédemment cités présentent d'excellentes corrélations expérience/simulation des raideurs de cellules tissés et/ou des champs de déformations locaux. Ils permettent ainsi d'affirmer que si l'on représente les fissures au bon endroit et au « bon moment » (dans l'histoire du chargement) le comportement de la structure simulée est fidèle aux observations expérimentales.



FIGURE 1.5 – Insertion de fissures dans des cellules de composites tissés a) [Couégnat, 2008] b) [Grail, 2013]

Bilan et limitation pour notre étude

Les approches représentant les fissures par une modification de la topologie du maillage semblent trop complexes pour pouvoir être appliquées à une géométrie tissée. Elles nécessitent de plus l'utilisation d'un logiciel dédié et l'implémentation dans un code de calcul commercial pour l'utilisation par un partenaire industriel en est compromise.

1.1.3 Mécanique de l'endommagement continu et régularisé

Le phénomène d'endommagement représente la croissance de discontinuités surfaciques et/ou de cavités au sein d'un élément de volume. La *mécanique de l'endommagement continu*, dont la paternité est généralement attribuée à l'article russe de Kachanov écrit en 1958 [Kachanov, 1999], s'intéresse à la modélisation de cette détérioration progressive de la matière à travers des *lois de comportement adoucissantes* (voir Figure 1.6b). Une fissure y est donc décrite comme un volume endommagé n'ayant plus ou peu de rigidité.

1.1.3.1 La nécessité de régulariser les lois de comportement adoucissantes

L'utilisation de lois de comportement adoucissantes doit cependant se faire avec précaution : elles conduisent à une localisation de la déformation dans les éléments de plus faibles volumes qui, si elle n'est pas maîtrisée, entraîne une dépendance pathologique de la solution éléments finis au maillage. D'un point de vue mathématique les équations différentielle régissant le problème perdent leur caractère elliptique [Beckert, 1973, Marsden et al., 1984]. Ce dernier est alors qualifié de *mal posé* [Hadamard, 1907]. Cela se traduit concrètement par une énergie dissipée qui diminue à mesure que le maillage est raffiné. Ainsi, plus une structure est maillée finement plus elle devient fragile ce qui est innaceptable d'un point de vue mécanique. Il est donc nécessaire de *régulariser* les equations afin de pallier la *non objectivité* du modèle. Cette régularisation requiert l'introduction d'une longeur interne décrivant la taille de la bande de localisation. Nous illustrons les déficiences des lois de comportements adoucissantes par un exemple 1D, comme souvent fait dans la littérature [Bažant and Planas, 1998,Oliver et al., 2002,Jirásek, 2011,Dias et al., 2012].

Considérons le problème 1D d'une barre de longueur L, discrétisée par des éléments de taille h munis de la loi de comportement élasto-endommageable représentée Figure 1.6b (où E et H sont respectivement les modules de Young et d'adoucissement du matériau). Cette barre est soumise à un déplacement imposé croissant ΔL générant un effort de réaction F (cf. Figure 1.6a).



FIGURE 1.6 – Problème de barre 1D d'après [Dias et al., 2012] a) barre discrétisée b) loi de comportement adoucissante utilisée

L'équilibre de la structure impose que la contrainte σ soit identique le long de la barre. Tous les éléments atteignent donc la contrainte σ_u au même moment. À partir de cet instant plusieurs scénarios permettant de respecter l'équilibre de la structure et la loi de comportement sont possibles :

- Tous les éléments entrent dans le régime adoucissant et l'état de déformation est homogène dans la barre. La rupture de la barre se produit lorsque $\sigma = 0$, l'élongation à rupture est donc $\Delta L = \epsilon_f L = 0.5L$. Ce scénario engendre la réponse "Homogeneous Solution" représentée Figure 1.7b.
- Seul un des éléments de la barre voit sa déformation augmenter (nommons-la ϵ_1) pendant que celle des autres décroît (nommons-la ϵ_2) cf. Figure 1.7a. L'équilibre de la structure et la loi de comportement imposent les relations $\sigma = E\epsilon_2 = \sigma_u + H(\epsilon_1 \epsilon_e)$. La rupture (c.-à-d. $\sigma = 0$) se produit donc pour $\epsilon_2 = 0$ et $\epsilon_1 = \frac{-\sigma_u}{H} + \epsilon_e = \epsilon_f$. L'allongement à rupture est $\Delta L = \epsilon_1 h = \epsilon_f h$. C'est donc une fonction de la taille des éléments utilisés ; plus ils sont petits et plus la structure est fragile. Supposons, par exemple, que la barre est discrétisée avec 5 éléments de taille égale, $h = \frac{L}{5}$, il vient alors $\Delta L = 0.1L$. Ce scénario engendre la réponse "Localized Solution" représentée à la Figure 1.7b. Bien que surprenant au premier abord, c'est en pratique celui que l'on observe lors d'une simulation éléments finis car il minimise l'énergie potentielle de la structure.



FIGURE 1.7 – Problème de barre 1D d'après [Dias et al., 2012] a) loi de comportement b) réponse de la structure

Il existe en fait une infinité de solutions au problème décrit ci-dessus. Il est donc clair que les lois de comportement adoucissantes ne peuvent être utilisées en l'état pour simuler l'endommagement des structures jusqu'à rupture finale. Nous exposons dans la suite des méthodes permettant de pallier ces déficiences.

1.1.3.2 Mesh-adjusted softening modulus

Nous présentons une technique de régularisation, basée sur la taille des éléments utilisés, en l'appliquant à des modèles d'endommagement de type *smeared cracking* afin d'illustrer le propos. Les approches smeared cracking sont apparues dans les années 60 [Rashid, 1968]. Elles prennent en compte la présence de fissures dans la loi de comportement par l'ajout d'une déformation additionnelle. Une fois un critère satisfait (tel que celui de Rankine) on partitionne la déformation totale ϵ en une déformation élastique ϵ_e et une déformation de fissure ϵ_c . La partition s'écrit :

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_c \tag{1.1}$$

Le comportement du matériau est décrit par deux lois indépendantes qui s'écrivent (en 1D pour un chargement monotone) :

$$\begin{cases} \sigma = E\epsilon_e & \text{loi de Hooke (où E est le module de Young)} \\ \sigma = f_c(\epsilon_c) & \text{loi de comportement de la fissure} \end{cases}$$

La loi de comportement s'écrit donc :

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_c = \frac{\sigma}{E} + f_c^{-1}(\sigma)$$

 f_c représente une loi de comportement adoucissante et f_c^{-1} son inverse. Son utilisation engendre nécessairement la non objectivité de la solution évoquée au 1.1.3.1. Le point clef permettant de régulariser l'approche a été introduit dans [Bažant and Oh, 1983] sous le nom de *crack band method* (les termes *fracture energy regularization technique* ou *fracture energy trick* sont également rencontrés dans la littérature). Il consiste à introduire une autre loi de comportement de la fissure, f_w , écrite en contrainte-ouverture de fissure, w, plutôt qu'en contrainte-déformation de fissure (cf. Figure 1.8a) :

$$\sigma = f_w(w)$$

Le terme $\int_w f_w(w)dw$ a la dimension d'une énergie par unité de surface. On choisit donc la loi f(w) de façon à ce que $\int_w f_w(w)dw = G$ où G est une propriété caractéristique de la rupture d'un matériau appelée taux de restitution d'énergie critique. Ce n'est qu'ensuite qu'on introduit la déformation de la fissure, grâce à la largeur de la bande localisation, h_b , dont le choix revient à l'analyste.

$$\epsilon_c = \frac{w}{h_b} = \frac{f_w^{-1}(\sigma)}{h_b} \tag{1.2}$$

La loi de comportement s'écrit alors :

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_c = \frac{\sigma}{E} + \frac{f_w^{-1}(\sigma)}{h_b}$$

Le choix de la longueur h_b est cependant sujet à controverse. On peut fixer sa valeur avant le calcul élément fini en ne se basant que sur la taille des éléments, h, (les valeurs $h_b = h\sqrt{2}$ pour un quadrilatère bilinéaire et $h_b = h$ pour un triangle à déformation constante sont utilisées dans [Rots, 1988]) ou choisir sa valeur en cours de calcul, une fois la direction de fissuration connue, comme fait dans [Oliver, 1989] et préconisé dans [Jirásek and Bauer, 2012].

Illustrons l'apport de cette approche sur la barre 1D représentée Figure 1.6. La limite du domaine élastique est $\sigma = f_t$ et on choisit comme largeur de bande de localisation $h_b = h$. La loi contrainte-ouverture de fissure employée est (voir Figure 1.8a) :

$$\begin{cases} \sigma = f_t(\frac{w_f - w}{w_f}) & \text{pour } w \in \{0, w_f\} \\ \sigma = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
(1.3)

En remplaçant (1.2) et (1.3) dans l'équation de partition de la déformation (1.1) on obtient la loi de comportement représentée Figure 1.8d :



FIGURE 1.8 – Schéma d'obtention d'une loi de comportement régularisée d'après [Jirásek, 2011] a) Loi contrainte-ouverture de fissure b) Loi de Hooke c) Loi contrainte-déformation de fissure d) Loi de comportement régularisée

Comme au 1.1.3.1, on suppose que la déformation se localise dans un élément de la barre et qu'une décharge élastique a lieu dans les autres éléments. Les états de déformations correspondants sont nommés ϵ_1 et ϵ_2 respectivement. L'équilibre de la structure et la loi de comportement imposent les relations : $\sigma = E\epsilon_2 = \frac{Ef_t(\epsilon_1 + \frac{w}{h})}{f_t + E}$. La rupture (c.-à-d. $\sigma = 0$) se produit donc pour $\epsilon_2 = 0$ et $\epsilon_1 = \frac{w_f}{h}$ L'allongement à rupture est $\Delta L = \epsilon_1 h = w_f$. Il n'est donc plus fonction de la taille des éléments mais d'un paramètre matériau. Le modèle est régularisé.

Cette technique de régularisation a été étendue à de nombreux modèles d'endommagement plus récents [Comi and Perego, 2001, Cervera and Chiumenti, 2006b, Jirásek and Grassl, 2008, Jirásek, 2014]. Cependant, quelque soit le modèle d'endommagement utilisé, les fissures ont tendance à se propager parallèlement aux arêtes des éléments du maillage. On parle alors de *mesh-bias* [Rots, 1988, Cervera and Chiumenti, 2006b, Jirásek and Grassl, 2008, Cervera et al., 2010c]. Cette pathologie s'atténue parfois en maillant finement et en utilisant des modèles d'endommagement anisotropes mais il n'existe aucun « remède universel ». La cause n'est toujours pas parfaitement comprise. Il semblerait qu'une mauvaise description des contraintes en pointe de fissure, ne s'atténuant pas avec le raffinement du maillage lorsque des éléments finis classiques sont utilisés, soit à l'origine du phénomène [Cervera et al., 2010b].



FIGURE 1.9 – Influence du maillage sur le trajet de propagation de fissure pour un essai de cisaillement 4 points avec plusieurs modèles d'endommagement : (a) isotrope avec une enveloppe de type Rankine, (b) isotrope avec une enveloppe de type Von-Mises, (c) Rotating Crack with transition to Scalar Damage, et (d) MicroPlane Damage Model, d'après [Jirásek and Grassl, 2008]

Deux méthodes paraissent à même de supprimer le mesh bias des modèles décrits dans cette section : *i*) l'utilisation d'algorithmes de *crack tracking* et *ii*) l'utilisation d'éléments finis mixtes stabilisés.

Algorithmes de crack tracking

Dans un calcul d'endommagement "classique" les fissures apparaissent naturellement comme la conséquence des lois de comportement adoucissantes évaluées localement dans tous les éléments du maillage. L'utilisation d'algorithmes de crack tracking, que l'on détaillera au 3.4.1.1, consiste à n'autoriser l'endommagement qu'à évoluer dans certains des éléments du maillage. Les résultats s'en trouvent nettement améliorés (voir Figure 1.10) [Cervera and Chiumenti, 2006a, Cervera and Chiumenti, 2006b, Cervera et al., 2010c].

Éléments finis mixtes stabilisés

Les inconnues d'un problème de statique résolu à l'aide d'éléments finis classiques sont les déplacements. Les contraintes/déformations se calculent par post-traitement de ces derniers. Avec des éléments mixtes les contraintes/déformations peuvent devenir des inconnues du problème, au même titre que les déplacements. La localisation de la déformation obtenue avec ces éléments se fait apparemment sans mesh bias rédhibitoire [Steinmann and Willam, 1991, Cervera et al., 2010b, Cervera et al., 2010a, Dias et al., 2012, Oliver et al., 2014, Benedetti et al., 2016] et la propagation de fissures peut être simulée sans algorithme de tracking (voir Figure 1.11).



FIGURE 1.10 – Apport d'un algorithme de tracking pour la propagation de fissures pour un essai de cisaillement 4 points. Sans tracking les fissures se propagent parallèlement aux arêtes des éléments, d'après [Cervera and Chiumenti, 2006a]



FIGURE 1.11 – Apport de l'utilisation d'éléments mixtes pour la propagation de fissures a) éprouvette discrétisée b) éléments standards c) éléments mixtes et stabilisés, d'après [Cervera et al., 2010b]

L'utilisation d'un modèle d'endommagement a été entreprise en début de thèse. Un modèle de type smeared cracking régularisé (appelé *brittle cracking*) est en effet présent dans Abaqus. Afin de l'évaluer, nous nous sommes intéressés à la propagation de fissure dans une éprouvette 3D en céramique monolithique contenant une entaille en V (voir Figure 1.12). En plus du mesh bias précédemment évoqué, nous avons été confrontés à une pathologie supplémentaire : le *stress locking*. Les matrices de raideur élémentaires générées avec ce modèle d'endommagement ne découplent pas systématiquement les degrés de liberté de part et d'autre de la fissure. En conséquence l'élément transmet des efforts parasites à travers la fissure, même lorsque l'endommagement a atteint sa valeur maximale.



FIGURE 1.12 – Propagation d'une fissure dans une éprouvette entaillée en céramique monolithique. Les éléments colorés sont ceux au sein desquels une fissure est présente

Bilan et limitation pour notre étude

Simuler le processus de fissuration avec des modèles d'endommagement régularisés par la taille des éléments finis requiert l'utilisation d'algorithmes de crack tracking ou d'éléments mixtes. Le crack tracking couplé à l'endommagement n'a, à la connaissance de l'auteur, été reporté que par un nombre limité d'auteurs dans des cas 2D [Grassl and Jirásek, 2004, Cervera and Chiumenti, 2006a] et son implémentation dans un code de calcul industriel n'est pas triviale. L'utilisation d'éléments mixtes implique l'ajout d'un nombre considérable de degrés de liberté (3 et 6 par noeuds en 2D et 3D respectivement dans [Cervera et al., 2010b, Cervera et al., 2010a, Benedetti et al., 2016]). Certaines formulations permettent de condenser ces derniers [Dias et al., 2012, Oliver et al., 2014] mais elles ne s'appliquent qu'à des éléments quadrilatéraux bilinéaires. De plus, le phénomène de stress locking affecte potentiellement tous les modèles d'endommagement.

Nous avons donc choisi de ne pas utiliser de modèles d'endommagement régularisés par la taille des éléments. Ces approches méritent néanmoins d'être gardées à l'esprit de par leurs simplicités et ne peuvent être formellement écartées.

1.1.3.3 Modèles à comportement dépendant du temps

Needleman a montré que l'introduction d'une dépendance au temps (plus précisement aux taux de déformations) dans les lois de comportement adoucissantes préservait le caractère bien posé du problème mécanique en quasi-statique et en dynamique [Needleman, 1988]. Les solutions éléments finis ne présentent plus le mesh bias pathologique évoqué au 1.1.3.2 car la prise en compte de la dépendance au temps introduit implicitement une longueur caractéristique dans les équations du problème. Un modèle d'endommagement exploitant cette propriété a été développé dans [Allix and Deu, 1997]. On y limite le taux de croissance maximal de la variable d'endommagement (elle ne peut passer de 0 à 1 instantanément) par le biais d'un temps caractéristique, τ_c , d'où le nom d'endommagement à *taux limité* (*bounded rate*) ou à *effet retard* (*delay-damage*). Le principe physique sous-jacent est qu'une fissure ne peut apparaître et se propager instantanément dans une structure. Les équations régissant ce type de modèle prennent la forme (en 1D sous chargement monotone) :

$$\begin{cases} \sigma = E(1-d)\epsilon & \text{loi de Hooke (où E est le module de Young et d l'endommagement scalaire)} \\ d_{stat} = Max[1, \langle \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \rangle^+] & \text{la cinétique d'endommagement sans effet retard} \\ \dot{d} = \frac{1}{\tau_c}(1 - e^{-a(d_{stat} - d)}) & \text{la cinétique d'endommagement avec effet retard} \end{cases}$$

L'effet retard introduit deux paramètres supplémentaires à relier aux propriétés du matériau : a et τ_c (ϵ_0 et ϵ_1 sont des paramètres définissant des seuils d'endommagement et ne sont pas reliés à l'effet retard). La constante de temps τ_c peut être vue comme le temps minimal de rupture du matériau et a est un paramètere adimensionnel caractérisant la fragilité du matériau. Pour l'interface entre plis de composites à matrice organique stratifiés les valeurs a = 1 et $\tau_c = 6 \ \mu s$ ont par exemple été identifiées expérimentalement [Guimard et al., 2009]. Pour que l'évolution de l'endommagement soit suffisamment régulière le pas de temps adopté pour la simulation, Δt , doit être plus faible que le temps caractéristique τ_c (on propose $\Delta t = \tau_c/10$ dans [Genet, 2010]). Pour une simulation de plusieurs secondes cela imposerait environ 10000 pas de temps avec les valeurs précédement évoquées (et « quelques » ordres de grandeurs supplémentaires avec les CMC qui ne sont pas visqueux à température ambiante!). C'est difficilement envisageable en quasi-statique avec des maillages de plusieurs millions de degrés de libertés et seul un calcul en dynamique explicite permettrait de respecter ces conditions. La prise en compte de la valeur physique de τ_c est donc hors de portée d'une simulation de structure complexe en quasi-statiques, être davantage considéré comme une technique de régularisation que comme une modélisation physique [Genet, 2010, Abisset et al., 2011, Abisset, 2012, Le Mauff, 2013].



FIGURE 1.13 – Cartographie de l'endommagement avec effet retard pour différents maillages, d'après [Genet, 2010]

Bilan et limitation pour notre étude

Les lois de comportement adoucissantes peuvent être régularisées si l'on y intégre les effets de la vitesse de chargement. Cette méthode limite la localisation de l'endommagement et permet ainsi de supprimer le mesh bias (voir Figure 1.13). Nous cherchons au contraire à représenter un endommagement localisé, tel qu'observé dans les CMC à l'échelle mésoscopique (voir Figure 1.1b). En effet, un endommagement diffus permet difficilement de remonter aux ouvertures de fissures qui sont des grandeurs primordiales pour l'évaluation de l'oxydation des CMC. De plus, il semblerait que cette technique impose l'utilisation de schémas de résolutions explicites connus pour n'être que conditionnellement stables. Enfin, il a été observé que même si un solveur explicite est utilisé, lorsque les effets dynamiques ne sont pas suffisament prononcés le mesh bias persiste [Desmorat et al., 2010]. Nous n'avons donc pas opté pour cette technique de régularisation.

1.1.3.4 Modèles d'endommagement non-locaux

Les modèles d'endommagement non-locaux utilisent des lois de comportement où certaines des variables d'états locales, telles que les déformations, les variables d'endommagement ou les efforts thermodynamiques, sont remplacées par leurs valeurs pondérées au voisinage du point considéré. Les premiers travaux traitant de l'élasticité non-locale [Eringen, 1966] ont été étendus aux lois de comportement adoucissantes non-locales dans [Bažant, 1984, Pijaudier-Cabot and Bažant, 1987, Bažant and Pijaudier-Cabot, 1988]. Soit $f(\mathbf{x})$ une variable locale du modèle définie sur le domaine Ω , la variable non-locale qui lui est associée, $f_n(\mathbf{x})$, peut être calculée par :

$$f_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Psi(\mathbf{x})} \int_{\Omega} \psi(\mathbf{y}; \mathbf{x}) f(\mathbf{y}) d\Omega$$
(1.4)

où $\psi(\mathbf{y}; \mathbf{x})$ est une fonction de pondération et Ψ est telle que :

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \psi(\mathbf{y}; \mathbf{x}) d\Omega \tag{1.5}$$

Une fonction de pondération isotrope ne dépendant que de la distance par rapport au point matériel considéré, $\rho = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ est donnée à titre d'exemple :

$$\psi(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \psi(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} l^3} \exp(-\frac{\rho^2}{2l^2})$$
(1.6)

l est un paramètre homogène à une longueur définissant le volume contribuant de façon significative à la valeur de $f_n(\mathbf{x})$ (voir Figure 1.14).



FIGURE 1.14 – Fonction de pondération ψ [Peerlings, 1999]

L'équation (1.4) a un impact conséquent sur les temps de calculs et l'architecture d'un code lorsqu'utilisée dans un cadre éléments finis. En effet, il faut être en mesure de créer une table de connectivité comprenant tous les points d'intégration en fonction de leurs distances respectives et du paramètre l choisit (voir Figure 1.15). Pour des maillages comprenant plusieurs millions d'éléments en 3D cette opération est extrêmement fastidieuse.

Une approche alternative consiste à résoudre l'équation (1.4) de façon approximative. En réalisant un développement de Taylor du champ f et en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 4 on montre [Bažant et al., 1984, Peerlings et al., 1996] que l'équation (1.4) peut se mettre sous la forme :

$$f_n(\mathbf{x}) \simeq f(\mathbf{x}) + c\nabla^2 f(\mathbf{x}) \tag{1.7}$$

où ∇^2 est l'opérateur Laplacien définit par : $\nabla^2 = \sum_i \partial / \partial x_i^2$ et c a la dimension d'une longueur au carré que l'on peut calculer grâce à la fonction ψ .

Une autre formulation peut également être obtenue en appliquant l'opérateur Laplacien à (1.7), en multipliant le résultat par c puis en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 4 [Peerlings, 1999]

$$f_n(\mathbf{x}) - c\nabla^2 f_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \tag{1.8}$$

L'avantage des deux formulations différentielles (1.7) et (1.8) vis à vis de la relation intégrale (1.4) est qu'elles ont un caractère local. La construction de la table de connectivité des points d'intégration précédemment évoquée n'est donc plus nécessaire. Ces formulations impliquent cependant le calcul d'un champ supplémentaire pouvant nécessiter l'introduction d'inconnues nodales supplémentaires ($\nabla^2 f$ ou $\nabla^2 f_n$) sur l'ensemble du domaine. Les équations (1.7) et (1.8) font intervenir le gradient de la variable $f(\mathbf{x})$ et sont donc appelées modèles à gradients. Dans (1.7) la relation permettant d'obtenir la valeur non locale $f_n(\mathbf{x})$ à partir de $f(\mathbf{x})$ est explicite, le modèle est dit à gradient explicite. L'obtention de $f_n(\mathbf{x})$ dans (1.8) nécessite la résolution d'une équation différentielle, le modèle est dit à gradient implicite. L'utilisation d'une équation de la forme de (1.4) engendre un modèle dit non local intégral.

L'utilisation des modèles non locaux précédemment décrits doit se faire en prenant des précautions en présence de fissures ou près des bords du domaine considéré [Grassl et al., 2014]. En effet si aucun traitement particulier n'est réalisé, deux points de part et d'autre d'une fissure (représentée par des éléments totalement endommagés) sont encore couplés et un endommagement parasite peut apparaître [Peerlings, 1999]. Certains auteurs préconisent de retirer les éléments complètement endommagés du maillage [Peerlings, 1999], d'autres adaptent le domaine d'influence de la fonction de pondération à la topologie de la fissure (voir Figure 1.15) ou en se basant sur la vitesse de propagation des ondes au voisinage du point considéré (voir Figure 1.16).



FIGURE 1.15 – Volume d'influence de la fonction de pondération en présence d'une fissure Γ_c [Wang and Waisman, 2015]



FIGURE 1.16 – Propagation d'ondes à partir du point x_1 dans une plaque (a) carrée, (b) entaillée, (c) endommagée [Desmorat et al., 2015]

Une alternative économique à la résolution de (1.4) plus adaptée à la représentation de fissures que les formulations (1.7) et (1.8) a été développée sous le nom de *Thick Level Set* [Moës et al., 2011, Bernard et al., 2012, van der Meer and Sluys, 2015]. Des fonctions de niveau (*level set*), appelées ici ϕ , sont utilisées pour délimiter les zones partiellement et totalement endommagées des zones saines dans une structure (voir Figure 1.17). L'épaisseur de la zone partiellement endommagée est contrôlée par une distance l_c choisie par l'analyste. L'évolution du front d'endommagement, c.-à-d. de la surface définie par $\phi = 0$, est calculée par le biais d'une force thermodynamique non locale au sein de la zone partiellement endommagée. L'avantage considérable de cette approche par rapport à celles de types intégraux est que le traitement numérique non local n'est à effectuer que dans les zones effectivement endommagées et pas sur tous les éléments du maillage.



FIGURE 1.17 – Description du champ d'endommagement d à l'aide de la TLS par une fonction de niveau ϕ [van der Meer and Sluys, 2015]

Bilan et limitation pour notre étude

L'introduction explicite d'une longueur dans les modèles non locaux régularise le problème mécanique en présence de lois de comportement adoucissantes. Le choix de cette longueur caractéristique est cependant loin d'être aisé et aucune considération micromécanique ne nous permettrait de la choisir pour des CMC modélisés à l'échelle mésoscopique. D'autre part, l'implémentation numérique de tels modèles est délicate et nécessite des modifications importantes de l'architecture globale d'un code de calcul (degrés de libertés supplémentaires) et/ou des développements conséquents (table de connectivité des points d'intégrations, level set). Enfin, l'utilisation de modèles non locaux reportée dans la littérature est systématiquement faite avec des maillages fins. Pour ces diverses raisons ils ne nous semblent pas adaptés à la modélisation des CMC à l'échelle mésoscopique.

1.1.4 Approche variationnelle de la rupture - Phase field

La théorie de la mécanique de la rupture développée par [Griffith, 1921] postule l'existence d'une énergie de surface associée à la propagation de fissures. La fissuration y est vue comme la compétition entre l'énergie élastique restituée lors de l'avancée d'une fissure et l'énergie surfacique dissipée par la création de cette dernière. Les fissures se propagent de telle sorte à minimiser l'énergie potentielle de la structure. Cette théorie ne permet cependant pas de prévoir l'initiation d'une discontinuité dans un milieu sain.

L'approche variationnelle de la rupture initiée dans [Francfort and Marigo, 1998] est une extension de la théorie de Griffith permettant de remédier à ce défaut. Son ingrédient principal est l'introduction explicite d'un terme surfacique dans l'énergie potentielle de la structure, associé à la présence de fissures. Ce potentiel est ensuite simultanément minimisé vis à vis du champ de déplacement et de l'évolution de la fissuration. Les phases de nucléation, de propagation, de coalescence, de bifurcation ou encore de ramification des fissures deviennent alors des conséquences naturelles de la minimisation de ce potentiel. Les discontinuités ne sont pas explicitement représentées par un saut de déplacement mais de façon diffuse par un champ scalaire, $\phi(\mathbf{x})$, initialement introduit dans [Bourdin et al., 2008] et appelé plus tard *crack phase field.* Ce champ scalaire induit une diminution locale des propriétés du matériau d'une façon similaire à de l'endommagement. Son évolution n'est cependant pas dictée par une quelconque loi de comportement mais par la minimisation de l'énergie potentielle du système.

On reprend l'exemple de fonction ϕ utilisé dans [Msekh et al., 2015] afin d'illustrer un peu plus le propos. Considérons la barre 1D infiniment longue de section A contenant une fissure localisée en x = a et soumise à un déplacement U_0 à ses extrémités (voir Figure 1.18a). Le champ scalaire suivant est utilisé pour représenter la fissure :

$$\phi(\mathbf{x}) = \exp(\frac{-|x-a|}{l_0}) \tag{1.9}$$

où l_0 est un paramètre homogène à une longueur, choisit par l'utilisateur et contrôlant la « diffusion » de la fissure (plus l_0 est faible plus ϕ a un profil affiné (voir Figure 1.18b).



FIGURE 1.18 – a) Barre 1D fissurée b) Crack phase-field ϕ pour différentes valeurs du paramètre l_0 , d'après [Msekh et al., 2015]

Le champ ϕ représentant la position de la fissure prend des valeurs comprises entre 0 et 1 qui représentent respectivement les états sain et totalement endommagé du matériau. On remarque que la présence d'une discontinuité est « lissée » dans tout le domaine d'étude. Dans un contexte éléments finis, la description du champ ϕ se fait à l'aide de fonctions de forme. Le champ scalaire ϕ au sein d'un élément est représenté grâce à l'interpolation de valeurs discrètes ϕ_i calculées aux noeuds *i* (d'une façon similaire à ce qui est fait pour le champ de déplacement). Les éléments finis résultants ont donc un degré de liberté supplémentaire par noeud permettant d'interpoler le champ $\phi(\mathbf{x})$.

On ne détaillera pas la procédure de minimalisation de l'énergie potentielle vis à vis du champ de phase et du champ de déplacement ainsi que la formulation détaillée des éléments. Précisons simplement qu'ils s'insèrent aisément dans un code éléments finis non linéaire [Miehe et al., 2010, Msekh et al., 2015, Nguyen et al., 2015]. La description des fissures par le champ ϕ suffit néanmoins à tirer des remarques importantes sur la méthode. La fissure est par nature représentée de façon diffuse mais il est primordial de limiter cette diffusion (en limitant la valeur de l_0) afin que les champs de contraintes résultant ne soit pas erronés. Dans l'exemple Figure 1.19 on s'aperçoit qu'une valeur l_0 très faible devant les dimensions de la structure doit être choisie afin d'obtenir le trajet de fissuration représentée Figure 1.19e. Ce scénario, exempt de fissuration secondaire, est le seul à être conforme aux observations expérimentales.



FIGURE 1.19 – Influence de l_0 sur le scénario de fissuration obtenu lors d'un essai de flexion trois points d'une éprouvette entaillée, (a) $l_0 = 0.15mm$, (b) $l_0 = 0.05mm$, (c) $l_0 = 0.035mm$, (d) $l_0 = 0.025mm$, (e) $l_0 = 0.01mm$, d'après [Miehe et al., 2010]

Le paramètre l_0 doit donc être choisi aussi petit que possible. La taille des éléments du maillage notée h doit cependant respecter la relation $h < \frac{l}{2}$ afin d'obtenir une représentation topologique de convenable de la fissure [Miehe et al., 2010]. En conséquence les maillages couramment utilisés avec cette méthode sont particulièrement fins (voir Figure 1.20).



FIGURE 1.20 – Discrétisation employée lors de l'utilisation d'éléments phase field [Msekh et al., 2015, Nguyen et al., 2015]

Bilan et limitation pour notre étude

L'approche variationelle de la rupture permet de simuler les phases de nucléation, propagation, coalescence et ramification de fissures de façon naturelle. Elle ne nécessite en effet aucun algorithme de crack tracking ou l'évaluation de quantités non locales. Son implémentation ne présente pas de difficultés particulières en 3D et les temps de calculs semblent peu impactés par le nombre de fissures modélisées. Cependant, la finesse des maillages nécessaires à son bon fonctionnement la rend inapplicable à des maillages de CMC tissés en 3D.

1.2 Éléments induisant un enrichissement de l'espace d'approximation

1.2.1 Éléments d'interfaces munis d'une loi de comportement cohésive

Les modèles de zones cohésives (MZC) sont apparus suite aux travaux de Dugdale et Barenblatt [Dugdale, 1960, Barenblatt, 1962]. Leur but était de rendre compte de la présence d'efforts s'opposant à l'ouverture d'une fissure (voir Figure 1.21). L'objectif de Barenblatt était de représenter les efforts inter-atomiques de cohésion d'un matériau fragile alors que celui de Dugdale était la prise en compte de la zone plastique au voisinage de la fissure. Ces phénomènes ont conduit les deux auteurs à introduire des relations entre les tractions exercées sur les lèvres d'une fissure et son ouverture dans leurs calculs analytiques. L'utilisation de lois traction-ouverture (appelées dans ce qui suit TSL pour "traction-separation law") permet d'établir un lien direct entre les MZC et la mécanique de la rupture : l'aire sous la courbe d'une TSL s'apparente au taux de restitution d'énergie critique, G_c , d'un matériau (voir Figure 1.23). Les problèmes de régularisation de l'énergie dissipée évoqués au 1.1.3.1 sont ainsi intrinsèquement résolus.



FIGURE 1.21 – Efforts cohésifs exercés sur un solide au voisinage du front de fissure

La notion de contraintes cohésives fut adaptée aux simulations éléments finis par Hillerborg [Hillerborg et al., 1976]. L'élément de zone cohésive développé par la suite est un élément d'interface (d'épaisseur nulle) muni d'une TSL adoucissante. Ce dernier est inséré entre les éléments du maillage afin d'y modéliser les efforts cohésifs s'exerçant sur les lèvres d'une fissure ou au sein d'une interphase (voir Figure 1.22).



FIGURE 1.22 – Insertion d'un élément cohésif dans un maillage

Nous détaillons dans la suite les principales technologies d'éléments d'interfaces munis d'une TSL.

1.2.1.1 Modèle de zone cohésive intrinsèque

Les MZC intrinsèques sont aujourd'hui les plus utilisés dans les codes de calcul du commerce. Leur succès provient du fait qu'ils s'implémentent aisément dans un code éléments finis. Ils sont modélisés par des éléments d'interface, munis d'une TSL adoucissante (notée $\mathbf{t}(\delta)$) possédant une raideur initiale finie (voir Figure 1.23).



FIGURE 1.23 – Exemple de loi de comportement traction-ouverture intrinsèque

De nombreuses TSL peuvent être rencontrées dans la littérature. Parmi les plus populaires pour simuler des comportements élasto-endommageables on peut citer [Tvergaard, 1990, Allix and Ladevèze, 1992, Alfano and Crisfield, 2001, Turon et al., 2006, Park and Paulino, 2012]. Les zones cohésives intrinsèques sont insérées le long du trajet des fissures/décohésions qui doit donc être connu à priori. Lorsque l'on cherche à modéliser la décohésion d'une interphase cette approche est particulièrement séduisante. Si l'on cherche par contre à modéliser des fissures, deux sérieux inconvénients apparaissent : i) pour ne pas assouplir artificiellement la structure il faut utiliser des raideurs initiales élevées (appelées "*penalty*"), ce qui détériore le conditionnement numérique du système et le rend instable et ii) si l'on ne sait pas à priori où se situent les fissures, on ne sait pas où insérer l'élément. Pour pallier ce dernier point certains auteurs insèrent des zones cohésives entre tous les éléments du maillage. Cependant, en plus d'augmenter considérablement la taille de la matrice de raideur du système, les problèmes évoquées en i) s'en trouvent exacerbés. Une dépendance des trajets de fissuration à la discrétisation est de plus observée (voir Figure 1.24). Cette dernière est parfois considérée comme acceptable si des maillages raffinés sont utilisés [Xu and Needleman, 1994, Xu et al., 1997, Tijssens et al., 2000].



FIGURE 1.24 – Dépendance des trajets de fissuration à la discrétisation, d'après [Tijssens et al., 2000]

1.2.1.2 Modèle de zone cohésive extrinsèque

Les MZC extrinsèques, développés par Camacho et Ortiz [Camacho and Ortiz, 1996], emploient des TSL à raideur initiale infinie (cf. Figure 1.25). L'insertion de zones cohésives entre les éléments du maillage n'assouplit donc pas artificiellement le système. En pratique aucune raideur infinie n'est utilisée : une fois la contrainte maximale de la TSL atteinte à l'interface entre deux éléments (notée σ_{max} , voir Figure 1.25), un dédoublement des noeuds suivi de l'insertion d'une zone cohésive est effectué. Le nombre de degré de liberté augmente donc à mesure que les fissures se propagent.



FIGURE 1.25 – Exemple de loi de comportement traction-ouverture extrinsèque

Cette modification continuelle du maillage est particulièrement complexe à réaliser en 3D. Une structuration spécifique des données associées à la topologie des éléments (noeuds, faces, arêtes) doit être adoptée afin de conserver une architecture de calcul parallélisable [Pandolfi and Ortiz, 2002, Espinha et al., 2013]. Une certaine dépendance des chemins de fissuration à la discrétisation est encore observée.

1.2.1.3 Modèle de zone cohésive extrinsèque et méthode de Galerkin Discontinue

D'autres formulations d'éléments ont récemment été proposés afin de remédier aux défauts des MZC intrinsèques et extrinsèques. En utilisant une formulation de type Galerkin Discontinue on peut exploiter les avantages des deux approches. Le champ de déplacement entre les éléments finis volumiques résultant de cette formulation est naturellement incompatible. Sa compatibilité est assurée au sens faible grâce à des calculs de flux aux interfaces entre tous les éléments du maillage. La consistance et la stabilité de la méthode ont été démontrées [Mergheim et al., 2004, Noels and Radovitzky, 2006]. Les flux calculés sont similaires aux tractions dans une MZC. Une stratégie hybride a ainsi été proposée dans Mergheim et al., 2004]. On emploie une méthode de Galerkin Discontinue jusqu'à ce que les contraintes inter-éléments atteignent une valeur critique. Un élément fini d'interface muni d'une TSL est alors utilisé pour simuler la partie adoucissante du comportement. L'avantage de cette approche par rapport aux MZC intrinsèques est sa stabilité, le conditionnement du sytème n'est en effet pas détérioré par l'utilisation de raideurs penalty. L'avantage vis à vis des MZC extrinsèque est qu'il n'est pas nécessaire de mettre en place une structure complexe associée à la topologie du maillage (car ce dernier n'évolue pas au cours du temps). La parallélisation de la méthode s'en trouve grandement facilitée [Radovitzky et al., 2011, Nguyen, 2014]. Les temps de calcul restent néanmoins conséquents puisque toutes les faces inter-éléments du maillage initial doivent être dédoublées (voir Figure 1.26).



FIGURE 1.26 – Dédoublement de toutes les faces inter-éléments d'un maillage [Tijssens et al., 2000]

Bilan et limitation pour notre étude

Les trajets de fissuration dans les CMC tissés sont à priori inconnus car ils dépendent du chargement et des propriétés des constituants. Le recours aux éléments d'interfaces pour représenter des trajets de fissuration arbitraires imposerait l'utilisation de MZC extrinsèques ou d'une formulation de Galerkin Discontinue. L'application de ces méthodes aux CMC en 3D nécessite cependant une puissance de calcul considérable. Elles ne conviennent donc pas à nos travaux. En revanche les MCZ intrinsèques sont bien adaptées à la simulation de la décohésion des interphase fibres/matrice. La zone TSL intrinsèque développée dans [Chaboche et al., 1997], appelée "elastic decohesion" et prenant en compte le frottement a donc été implémentée dans le code prototype.

1.2.2 La méthode de partition de l'unité

La méthode de partition de l'unité (MPU) est issue des travaux de Melenk et Babuska [Melenk and Babuška, 1996, Babuška and Melenk, 1997]. Elle fournit une méthodologie pour enrichir l'espace d'approximation des éléments finis standards (continu et bien souvent polynomial) sans modification de la topologie du maillage. Les possibilités d'enrichissement sont nombreuses : utiliser des polynômes harmoniques pour résoudre efficacement l'équation de Laplace, utiliser la fonction distance signée pour représenter l'interface entre deux matériaux, utiliser la fonction d'Heaviside pour représenter une fissure, etc. On détaille la formulation des espaces d'approximation enrichis et non enrichis dans ce qui suit.

Le domaine Ω est discrétisé par des éléments finis de volumes Ω_e tels que $\Omega = \bigcup_{e=1}^{\mathcal{E}} \Omega_e$. On désigne par \mathcal{N} et \mathcal{E} l'ensemble des noeuds et des éléments du maillage respectivement. On introduit les domaines Ω_i , appelés *nuages*, constitués de tous les éléments contenant le noeud $i \in \mathcal{N}$ (voir Figure 1.27). Par construction $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{\mathcal{N}} \Omega_i$.



FIGURE 1.27 – Support d'une fonction de forme N_i , d'après [Tranquart, 2012]

Soit N_i les fonctions de forme d'un élément finis classique, ces dernières forment une partition de l'unité et leur support est contenu dans Ω_i (c.-à-d. qu'elles sont nulles sur le domaine $\Omega_{\backslash\Omega_i}$).

$$\sum_{i=1}^{N} N_i(\mathbf{x}) = 1 \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i$$
(1.10)

Soit $\bar{u_i}$ le vecteur des déplacements nodaux des éléments finis classiques, le champ de déplacement non enrichi s'écrit :

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} N_i(\mathbf{x}) \bar{u_i} \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$
(1.11)

Soit Ψ une fonction définie dans Ω que l'on souhaite utiliser pour enrichir l'espace d'approximation des éléments finis standards et soit \bar{N}_j un ensemble de fonctions formant une partition de l'unité et supportées sur Ω_j (dont on ne précise volontairement pas l'étendue). Comme les fonctions N_j forment une partition de l'unité on a :

$$\sum_{j \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}} \bar{N}_j(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$
(1.12)

La MPU consiste donc à chercher des champs de déplacement sous la forme :

$$u(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x})\bar{u}_i}_{\text{interpolation standard}} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}} \bar{N}_j(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x})\bar{a}_j}_{\text{interpolation enrichie}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$
(1.13)

Où $\bar{a_j}$ représente les degrés de liberté additionnels permettant d'interpoler la partie enrichie du champ de déplacement. Par construction le champ de déplacement total est conforme et la convergence de la méthode est démontrée [Babuška and Melenk, 1997].

1.2.2.1 XFEM-GFEM-PNM

La XFEM (eXtended Finite Element Method) est une MPU utilisée pour représenter des discontinuités faibles (interfaces), fortes (fissures) ou un front de fissure au sein d'un élément [Moës et al., 1999, Daux et al., 2000]. Elle permet également d'utiliser une zone cohésive au niveau de la discontinuité [Wells and Sluys, 2001a, Moës and Belytschko, 2002, Ferté et al., 2016].

La GFEM (Generalized Finite Element Method), issue des travaux de [Strouboulis et al., 2001], est également une MPU. Les premières applications de la GFEM utilisent des fonctions d'enrichissement

issues de calculs numériques (et pas analytiques comme cela est généralement fait avec la XFEM) ayant pour support tout le domaine d'étude afin de « superposer » des maillages (et, par exemple, réaliser une étude multiéchelle). Lorsqu'il est question de modéliser une fissure ou un front de fissure au sein d'un élément, GFEM et XFEM sont néanmoins considérées comme deux méthodes identiques [Belytschko et al., 2009, Fries and Belytschko, 2010, Sukumar et al., 2015].

La PNM (Phantom Node Method) [Hansbo and Hansbo, 2004,Mergheim et al., 2005,Song et al., 2006,Ling et al., 2009] ne dérive pas directement des travaux de Babuška sur la MPU. Il a cependant été démontré que la cinématique des éléments PNM était identique à celle des éléments XFEM. Les fonctions de forme utilisées avec la PNM sont en effet une combinaison linéaire de celles utilisées dans XFEM [Areias and Belytschko, 2006,Song et al., 2006,Sukumar et al., 2015]. Lorque l'on modélise un élément fissuré de part en part, cette méthode est donc considérée comme équivalente à la XFEM. C'est dans l'implémentation de ces deux méthodes que des différences notables apparaissent. Il est difficile d'écrire des éléments partiellement fissurés avec la PNM (une proposition est faite dans [Rabczuk et al., 2008] mais n'est pas extensible à des cas tridimensionnels). Pour représenter un élément fissuré de part en part la PNM est par contre plus simple à implémenter dans un code de calcul que la XFEM (elle est d'ailleurs présente dans Abaqus depuis la version 6.9).

XFEM, GFEM et PNM sont donc trois méthodes similaires lorsqu'utilisées pour décrire une fissure au sein d'un élément. Elles consistent à n'enrichir le champ de déplacement qu'en certaines zones d'intérêt et pas sur tout le domaine comme cela peut être fait dans le cadre général de la MPU. Le champ enrichi est donc porté par des fonctions de forme \bar{N}_j ayant un support compact. On peut ainsi représenter des fissures sans remailler, au prix de l'ajout de degrés de liberté supplémentaires situés aux noeuds des éléments.

Illustrons la formulation de la XFEM pour représenter un saut de déplacement au sein d'une structure 1D discrétisée à l'aide de 3 éléments de barres linéaires (voir Figure 1.28). Une fissure est présente en $x = \xi$.



FIGURE 1.28 – Barre fissurée et discrétisée grâce à trois éléments

Le saut de déplacement est représenté à l'aide de la fonction de Heaviside généralisée \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & x < \xi \\ 1 & x \ge \xi \end{cases}$$
(1.14)

Lorsque des éléments finis linéaires sont utilisés il est courant d'employer les mêmes fonctions de forme pour interpoler les parties standards et enrichies du champ de déplacement dans (1.13) :

$$\bar{N}_i = N_i \tag{1.15}$$

Le champ de déplacement dans la structure s'écrit :

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{i=1\\\text{interpolation standard}}}^{\mathcal{N}} N_i(\mathbf{x})\bar{u_i} + \sum_{\substack{j\in\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}\\\text{interpolation enrichie}}}^{\mathcal{N}} N_j(\mathbf{x})\mathcal{H}(\mathbf{x})\bar{a_j} \qquad \forall \mathbf{x}\in\Omega$$
(1.16)

Où $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{M} = \{2, 3\}$. Lorsqu'un enrichissement de type Heaviside est adopté, les parties « standards » et « enrichies » du déplacement sont appelées « continues » et « discontinues » respectivement. Le champ de déplacement (1.16) dans l'élément fissuré s'écrit explicitement :

$$u(\mathbf{x}) = N_2(\mathbf{x})\bar{u}_2 + \mathcal{H}(\mathbf{x})N_2(\mathbf{x})\bar{a}_2 + N_3(\mathbf{x})\bar{u}_3 + \mathcal{H}(\mathbf{x})N_3(\mathbf{x})\bar{a}_3$$
(1.17)

Les fonctions de forme utilisées pour représenter le champ de déplacement sont donc : N_1 , N_2 , $\mathcal{H}N_1$ et $\mathcal{H}N_2$ (cf. Figure 1.29)



FIGURE 1.29 – Fonctions de forme utilisées pour représenter une fissure au sein d'un élément XFEM

XFEM a été appliquée avec succès pour simuler la propagation de fissures dans des composites stratifiés (cf. Fig 1.30).



 $\label{eq:FIGURE 1.30-Réseau de fissures dans différents plis d'un composite à matrice organique stratifié, a) observations expérimentales par tomographie à rayons X, b) simulation XFEM, d'après [Vigueras et al., 2015]$

Bilan et limitation pour notre étude

Les méthodes éléments finis enrichies telles que PNM, XFEM ou GFEM permettent de représenter des fissures sans les mailler explicitement. La littérature les concernant est abondante et elles bénéficient d'une solide fondation mathématique. Moyennant des techniques d'enrichissement avancées et des degrés de liberté additionnels, elles permettent d'atteindre des taux de convergence optimaux en présence de singularités [Laborde et al., 2005, Béchet et al., 2005]. Par conséquent, malgré leur relative complexité, elles ont trouvé leur place dans le milieu industriel [Bordas and Moran, 2006, Duflot et al., 2008, Wyart et al., 2009 ainsi que dans de nombreux codes de calculs commerciaux (p.-ex. Radioss, Samcef, Abaqus, LS-Dyna, Ansys, Zébulon ou code Aster). Les problématiques industrielles généralement abordées nécessitent la représentation d'un nombre réduit de fissures. Le surcoût engendré par l'ajout de degrés de liberté à mesure que les fissures se propagent est donc, dans ces cas-là, modéré. La simulation de la fissuration dans les matériaux composites requiert la représentation d'un nombre considérable de fissures tridimensionnelles. Rien ne s'oppose, en théorie, à l'utilisation de méthodes telles que XFEM pour y arriver. En pratique, une implémentation performante de la méthode devient cependant indispensable. Une telle implémentation est difficilement réalisable dans un code de calcul industriel où peu de libertés sont laissées à l'utilisateur. Ainsi, les études comprenant un nombre important de fissures sont systématiquement réalisées avec des « codes maisons » optimisés.

Des exemples d'application de PNM/XFEM à l'échelle mésoscopique de composites stratifiés à matrice organique ont été publiés dans [Meer and Sluys, 2009, Ahmed and Sluys, 2015, Vigueras et al., 2015]. Des centaines de fissures sont par exemple représentées dans [Vigueras et al., 2015] (voir Figure 1.30). Les simulations y ont été réalisées à l'aide d'un cluster de 2000 coeurs. Au vu des maillages utilisés (comprenant environ 1 million d'éléments) elles semblent pourtant réalisables sur un simple ordinateur de bureau. L'ajout de degrés de liberté supplémentaires engendre un surcoût de calcul conséquent lorsque de nombreuses fissures sont représentées en 3D. C'est probablement une des raisons pour lesquelles, XFEM, GFEM ou PNM n'ont, à la connaissance de l'auteur, jamais été appliquées à l'échelle mésoscopique de composites tissés pour y simuler la propagation de nombreuses fissures en 3D. Nous nous sommes donc orientés vers une méthode moins gourmande en temps de calcul et préservant l'architecture d'un code élément fini classique.

1.2.3 Embedded finite element methods (EFEM)

1.2.3.1 Un rapide tour d'horizon

Les méthodes de type Embedded Finite Element (EFEM) permettent d'incorporer une discontinuité (faible ou forte) au sein d'éléments finis. Contrairement à celles présentées au 1.2.2.1, les degrés de liberté additionnels ne sont pas localisés aux noeuds de l'élément. On peut donc les condenser; la matrice de raideur élémentaire conserve alors sa dimension initiale après enrichissement. Les EFEM permettent de résoudre les mêmes problèmes que ceux abordés avec XFEM. Leur principale différence est qu'elles donnent lieu à un champ de déplacement non conforme au sein de la structure modélisée.

Ces méthodes sont apparues au début des années 90 [Dvorkin et al., 1990, Klisinski et al., 1991, Simo et al., 1993] et ont rapidement suscité l'engouement de la communauté scientifique. De nombreux éléments/théories ont ainsi été publiés sous diverses appellations : éléments à discontinuités, éléments condensés, embedded discontinuity approach, embedded finite element method, strong embedded discontinuities, strong discontinuity approach, etc. Contrairement aux approches issues de la MPU, les méthodes précédemment évoquées dérivent de cadres mathématiques très hétérogènes. Dans un souci d'harmonisation Jirasek analysa une vingtaine d'EFEM et en dégagea trois « catégories » de formulations : Kinematically Optimal Symmetric (KOS), Statically Optimal Symmetric (SOS) et Statically and Kinematically Optimal Nonsymmetric (SKON) [Jirásek, 2000]. Les formulations SOS satisfont la condition de continuité des tractions au niveau de la discontinuité, sous forme faible, mais la cinématique de l'élément est pauvre : il ne représente pas explicitement de fissure. Les formulations KOS satisfont la condition de continuité des tractions au niveau de la discontinuité d'une façon « étrange » [Jirásek, 2000]. La cinématique de la discontinuité est par contre mieux représentée qu'avec la SOS. La SKON combine de façon optimale les deux formulations précédentes et est généralement considérée comme supérieure.

Il est souvent reproché aux EFEM développées avant 2005 leur incapacité à représenter une fissure convenablement. Cette dernière est en effet « lissée » dans le volume de l'élément ou reconstruite à partir de déformations équivalentes; il n'y a généralement pas de véritable discontinuité discrète dans la formulation. De plus, les premières EFEM n'autorisaient qu'une cinématique de discontinuité limitée : une ouverture de fissure constante appelée mode de discontinuité constant [Jirásek, 2000, Linder and Armero, 2007, Wu, 2011]. Ainsi, certains auteurs vont jusqu'à dire que les EFEM sont similaires à des modèles d'endommagement classiques [de Borst et al., 2001, Mosler and Meschke, 2004, Borst and Crisfield, 2012, Wells, 2001]. Afin de pallier ces lacunes, les EFEM publiées après 2005 incluent généralement des modes de déformations additionnels, calculés à priori [Manzoli and Shing, 2006, Armero and Linder,
2007, Linder and Armero, 2007, Dias-da Costa et al., 2009a, Dias-da Costa et al., 2009b, Dujc et al., 2013, Wu et al., 2015]. Le saut de déplacement le long de la discontinuité n'est plus nécessairement constant (cf. Figure 1.31).



FIGURE 1.31 – Modes de déformations calculés à priori dans la formulation d'un élément EFEM [Linder and Armero, 2007]

Choisir une EFEM parmi celles publiées est délicat. Il n'existe en effet aucune étude comparant les plus récentes et leurs taux de convergence ne sont pas fournis par les auteurs. L'objectif de nos travaux est de représenter des réseaux de fissures tridimensionnels dans les CMC, à l'échelle mésoscopique, et d'estimer leurs ouvertures. La cinématique de l'élément ainsi que les temps de calcul qu'il engendre sont donc nos critères de choix prédominants.

Le groupe d'Oliver est incontestablement celui qui a le plus publié sur les EFEM (cf., entre autres, [Simo et al., 1993, Oliver, 1996a, Oliver, 1996b, Oliver and Huespe, 2004a, Oliver and Huespe, 2004b, Oliver et al., 2008, Dias et al., 2012, Dias et al., 2016, Lloberas-Valls et al., 2016]). Son approche, appelée continuum strong discontinuity approach, permet de rendre naturellement compte d'une transition endommagement volumique/surfacique. L'auteur a également développé de nombreuses stratégies pour faciliter les simulations en présence de fissures : algorithmes de crack tracking, algorithmes de résolution des itérations locales dans l'élément, etc. Il a montré que la propagation de fissures cohésives avec EFEM et XFEM donnait lieu à des trajets de fissuration identiques (voir Figure 1.32). Les temps de calculs avec EFEM sont par contre inférieurs à ceux obtenus avec XFEM et indépendants du nombre de fissures modélisées [Oliver et al., 2006].



FIGURE 1.32 – Propagation de fissure lors d'un essai de flexion 4 points en utilisant XFEM et EFEM [Oliver et al., 2006]

La cinématique des éléments utilisés n'a cependant pas de véritable caractère discontinu. La discontinuité du champ de déplacement est en effet « régularisée » c.-à-d. répartie dans l'élément. De plus, la transition naturelle entre endommagement volumique et surfacique, qui fait la force de cette approche, n'est pas adaptée aux CMC. Comme les constituants des CMC sont fragiles (leurs énergies de rupture sont de l'ordre de la dizaine de joules) il est préférable de ne considérer qu'un endommagement surfacique.

Les travaux de Brancherie et/ou d'Ibrahimbegogevic (voir, entre autres, [Brancherie, 2003, Dominguez et al., 2005, Brancherie and Ibrahimbegovic, 2009, Saksala et al., 2016]) se concentrent sur la présence simultanée d'un endommagement volumique et surfacique, au sein d'un même élément, afin de mieux rendre des comptes des phénomènes dissipatifs dans les structures massives. Là encore, cela présente peu d'intérêt pour des simulations à l'échelle mésoscopique de CMC.

Des travaux tels que ceux de Linder et/ou d'Armero (voir [Armero and Linder, 2007, Linder and Armero, 2007, Armero and Linder, 2008, Armero and Kim, 2012]), ceux de Dias-Da-Costa [Dias-da Costa et al., 2009a, Dias-da Costa et al., 2009b, Dias-da Costa et al., 2013] ou ceux de Bolzon [Bolzon and Corigliano, 2000, Bolzon, 2001] paraissent plus adaptés à notre problématique.

L'implémentation de l'élément développé par Bolzon, de formulation plus simple que ceux précédemment cités, a donc été entreprise en début de thèse. Des modifications furent cependant nécessaires. En effet, l'élément publié est condensé aux degrés de liberté interfaciaux. Un élément similaire mais condensé aux degrés de liberté classiques (c.-à-d. externes) a donc été développé [Essongue, 2014]. Des essais ont été réalisés afin de s'assurer que la cinématique des éléments enrichis était acceptable. Nous en décrivons un dans ce qui suit. Considérons l'éprouvette fissurée de part en part représentée à la Figure 1.33. On impose un champ de déplacement homogène à une extrémité de l'éprouvette et l'autre est encastrée. On doit donc assister à un mouvement de corps rigide d'une partie de l'éprouvette sans génération de contraintes.



FIGURE 1.33 – Utilisation d'éléments enrichis pour représenter une fissure curviligne dans une éprouvette

La discontinuité est introduite en enrichissant les éléments qu'elle intersecte. Une interface totalement endommagée est utilisée afin de représenter la fissure au sein de ces derniers. On veut s'assurer qu'ils ne transmettent pas d'efforts parasites. La condensation entraîne la non conformité du champ de déplacement dans la structure. Cet essai permet d'en évaluer l'impact sur les ouvertures de fissures calculées. Lorsque des éléments non condensés sont utilisés (voir Figure 1.34b) l'ouverture de fissure calculée est égale au déplacement imposé à l'extrémité de l'éprouvette. Lorsque des éléments condensés sont utilisés (voir Figure 1.34a) la non conformité du champ de déplacement engendre des erreurs atteignant 20% sur les ouvertures de fissures [Essongue, 2014]. Aucun stress locking n'est observé. Les résultats fournis par les éléments condensés sont considérés comme satisfaisant au vu de l'application envisagée.



FIGURE 1.34 – État de contrainte principale dans l'éprouvette fissurée avec : a) l'élément condensé développé par l'auteur, b) l'élément développé par Bolzon, d'après [Essongue, 2014]

Bilan

On peut représenter de nombreuses fissures frottantes à moindre coût en utilisant des méthodes de type EFEM. Elles ne modifient pas l'architecture d'un code de calcul classique car la matrice de raideur globale conserve sa taille initiale. Elles sont donc aisément parallélisables et implémentables dans un code industriel. Le champ de déplacement résultant est non conforme. Néanmoins, les ouvertures de fissures calculées sont suffisamment consistantes pour réaliser le couplage avec l'oxydation nécessaire à l'estimation de la durée de vie de CMC. De plus, les EFEM permettent d'utiliser des maillages 10 à 1000 fois moins raffinés que des méthodes telles que phase field ou l'endommagement non-local pour l'obtention de résultats similaires [Lloberas-Valls et al., 2016].

Des questions demeurent quant à leur convergence (dans la norme énergétique p.-ex.). Les nombreuses publications sur le sujet suggèrent quelles sont convergentes mais les vitesses associées sont inconnues. Les « stratégies » utilisées pour mener à bien un calcul (algorithmes de crack tracking, algorithmes de résolution des itérations locales, etc.) diffèrent considérablement selon les auteurs. Les cadres mathématiques dans lequel sont formulés les éléments sont également hétérogènes. Le choix d'une EFEM plutôt qu'une autre est donc difficile.

Malgré quelques questions en suspens, EFEM apparaît comme la technologie d'élément la plus adaptée pour simuler la fissuration dans les CMC à l'échelle mésoscopique.

1.2.3.2 The Augmented Finite Element Method (AFEM)

Le développement d'un élément inspiré de celui de Bolzon a été abandonné. La condensation d'une interface totalement endommagée a donné des résultats satisfaisants mais celle d'une interface cohésive n'a pas abouti. L'EFEM de Bolzon a donc été délaissée au profit de la méthode des éléments finis augmentés (AFEM).

Les premiers éléments intitulés AFEM ont été publiés en 2009 [Ling et al., 2009] par le groupe du professeur Yang. AFEM était alors une similaire à la PNM brièvement présentée au 1.2.2.1. La taille de la matrice de raideur globale augmente donc à mesure que les fissures se propagent. Les auteurs parvinrent à condenser la méthode en 2013 [Liu et al., 2013, Mohammadizadeh, 2013, Liu et al., 2014]. Plusieurs aspects la distingue des autres EFEM : *i*) elle autorise la représentation de plusieurs discontinuités au sein

d'un élément (voir Figure 1.35); à la connaissance de l'auteur seule l'EFEM présentée dans [Linder and Armero, 2009] le permet également, *ii*) elle ne nécessite pas le calcul, à priori, de modes de déformations et *iii*) elle ne requiert pas d'itérations locales (aussi appelées itérations élémentaires). Le point *iii*) est particulièrement attrayant. En effet, s'affranchir de plusieurs niveaux d'itérations imbriquées (itérations au niveau global, itérations au niveau élémentaire et itérations au niveau des points d'intégration) simplifie considérablement le schéma de résolution. La procédure permettant de s'affranchir des itérations locales, appelée « consistency check », a été publiée en Mars 2015 [Liu et al., 2015]. Les auteurs ont implémenté AFEM dans Abaqus et l'ont comparé à la PNM. Les calculs réalisés avec AFEM sont 100 à 1000 fois plus rapides que ceux menés avec la PNM [Liu et al., 2014].



FIGURE 1.35 – Quadrilatère bilinéaire traversé par plusieurs fissures cohésives [Mohammadizadeh, 2013]

Bien que cette méthode soit récente, elle semble déjà relativement mature et performante. Elle a en effet été étendue à la 3D [Naderi et al., 2016], aux calculs thermomécaniques [Do, 2014, Jung et al., 2016] ou à la dynamique [Gu et al., 2015]. Des calculs préliminaires à l'échelle mésoscopique de CMC (cf. Figure 1.36) ainsi que sur des barrières thermiques en zircone yttriée [Jung et al., 2016] ont également été réalisés.



FIGURE 1.36 – Réseau de fissures obtenu avec AFEM dans un CMC tissé (les fissures sont représentées par les éléments grisés) [Yang and Naderi, 2015]

Le transfert vers le partenaire industriel Safran Ceramics impose l'utilisation de codes de calcul industriels (en l'occurence Abaqus). Néanmoins, face à la difficulté d'avoir à tester différents concepts, le besoin de maîtriser complètement l'architecture du code s'est fait ressentir. C'est impossible dans un code de calcul industriel. De nombreuses librairies libres et performantes de calcul éléments finis existent (p.-ex. OpenFEM, GetFEM++, OOFEM, FEAP ou JEM-JIVE), mais l'aide fournie avec ces librairies est souvent limitée. De plus, le code source est en général difficile à manipuler pour celui qui n'en a pas suivi le développement. La mise en œuvre d'AFEM a donc fait l'objet de l'écriture d'un code prototype entièrement développé par l'auteur.

Chapitre 2

Formulation détailée de la méthode des éléments finis augmentés

Contents

1.1	Élén	nents n'i	ntroduisant pas d'enrichissement de l'espace d'approximation	15		
	1.1.1	Méthode de dédoublement des noeuds				
	1.1.2	Remaillage adaptatif				
	1.1.3	Mécanique de l'endommagement continu et régularisé				
		1.1.3.1	La nécessité de régulariser les lois de comportement adoucissantes	17		
		1.1.3.2	Mesh-adjusted softening modulus	18		
		1.1.3.3	Modèles à comportement dépendant du temps $\hfill \ldots \hfill \ldots \hfi$	22		
		1.1.3.4	Modèles d'endommagement non-locaux $\ \ldots \ $	23		
	1.1.4	Approch	e variationnelle de la rupture - Phase field	26		
1.2	Élén	ents ind	luisant un enrichissement de l'espace d'approximation \ldots	28		
	1.2.1	Éléments	s d'interfaces munis d'une loi de comportement cohésive $\ldots \ldots \ldots$	28		
		1.2.1.1	Modèle de zone cohésive intrinsèque	28		
		1.2.1.2	Modèle de zone cohésive extrinsèque	29		
		1.2.1.3	Modèle de zone cohésive extrinsèque et méthode de Galerkin Discontinue	30		
	1.2.2	La méth	ode de partition de l'unité	31		
		1.2.2.1	XFEM-GFEM-PNM	31		
	1.2.3	Embedded finite element methods (EFEM)				
		1.2.3.1	Un rapide tour d'horizon \ldots	34		
		1.2.3.2	The Augmented Finite Element Method (AFEM)	37		

Ce chapitre poursuit un triple objectif. En se basant sur les travaux publiés dans [Do et al., 2013, Liu et al., 2013, Liu et al., 2014, Liu et al., 2015] nous rappelons la formulation de la méthode des éléments finis augmentés (AFEM). Afin de mieux la comprendre et de faciliter son implémentation, le déroulement des calculs est intégralement détaillé. Nous profitons de cette opportunité pour corriger quelques erreurs rencontrées dans les publications précédemment mentionnées. Une variante d'AFEM, palliant des lacunes de la méthode originale, a ensuite été développée. Les éléments augmentés (AFES) emploient des noeuds internes pour prendre en compte les déplacements dus à la présence d'une ou plusieurs discontinuités faibles ou fortes. Seul le cas d'une discontinuité dans un élément 2D soumis à un chargement statique sera traité dans ces travaux. Les discontinuités fortes et faibles seront par contre abordées. Les discontinuités faibles (c.-à-d. les discontinuités du champ de déformation) autorisent la représentation d'interfaces au sein d'éléments. Elles permettent d'utiliser un maillage ne se conformant pas aux interfaces entre deux matériaux (voir Figure 2.1b). Bien que l'objectif principal de nos travaux soit la représentation de discontinuités fortes, l'étude des discontinuités faibles s'avère particulièrement utile. En effet, la génération de maillages tridimensionnels de CMC se conformant aux interfaces matériaux est une tâche fastidieuse.



FIGURE 2.1 – Inclusion circulaire représentée par un maillage a) conforme b) non conforme à l'interface

Les AFEs incorporant des discontinuités fortes ou faibles dérivent de la même formulation variationnelle. Nous détaillons dans un premier temps leurs équations d'équilibre discrétisées et non condensées à la Section 2.1. Le processus de condensation des degrés de liberté (DDL) internes est ensuite présenté à la Section 2.2 pour les discontinuités faibles et à la Section 2.3 pour les discontinuités fortes. Finalement, des complications inhérentes à l'utilisation d'AFEs incorporant des discontinuités fortes sont mises en lumière. Nous introduisons une nouvelle technique pour les résoudre appelée méthode des éléments finis augmentés et pseudo-inversés (PIAFEM) à la Section 2.3.6.4.

2.1 Formulation variationnelle et équations d'équilibre discrétisées

Soit Ω le domaine occupé par le solide représenté à la Figure 2.2 et Ω_f son pourtour. Une fois un critère mécanique atteint, une surface interne Γ_c est introduite et sépare Ω en deux sous-domaines Ω^- et Ω^+ . On définit également les surfaces Γ_c^+ et Γ_c^- telles que $\Gamma_c^{\pm} = \Omega^{\pm} \cap \Gamma_c$. Des déplacements, notés \bar{u} , sont imposés sur $\Gamma_u = \Gamma_u^+ \cup \Gamma_u^-$ et des tractions, notées \mathbf{f} , sont exercées sur $\Gamma_f = \Gamma_f^+ \cup \Gamma_f^-$. Les sous-domaines de part et d'autre de la discontinuité sont élastiques et homogènes. On se placera dans l'hypothèse des petites perturbations tout au long de ces travaux.



FIGURE 2.2 – Solide traversé par une discontinuité [Mohammadizadeh, 2013]

En l'absence de forces de volume les équations gouvernant le problème s'écrivent :

$$\nabla \sigma^{+}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{+} \qquad \nabla \sigma^{-}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{-} \qquad (2.1)$$

$$\sigma^{+}(\mathbf{x}).\mathbf{n}^{+}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{+}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{f}^{+} \qquad \sigma^{-}(\mathbf{x}).\mathbf{n}^{-}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{-}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{f}^{-} \qquad (2.2)$$

$$\mathbf{u}^{+}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}^{+}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{u}^{+} \qquad \mathbf{u}^{-}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}^{-}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{u}^{-} \qquad (2.3)$$

$$\mathbf{t}^{+}(\mathbf{x}) = \sigma^{+}(\mathbf{x})\mathbf{n}^{+}(\mathbf{x}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{c}^{+} \qquad \mathbf{t}^{-}(\mathbf{x}) = \sigma^{-}(\mathbf{x}).\mathbf{n}^{-}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{c}^{-}$$
(2.4)

 σ^+ et σ^- désignent les champs de contraintes dans Ω^+ et Ω^- respectivement, \mathbf{t}^{\pm} sont les tractions le long des surfaces de discontinuité Γ_c^{\pm} et \mathbf{n}^+ et \mathbf{n}^- sont les normales extérieures à Γ_c^+ et Γ_c^- . La traction \mathbf{t} est une fonction de l'ouverture $\Delta \mathbf{u}$ définie comme :

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^+(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^-(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c$$
(2.5)

La loi de comportement et l'équation de compatibilité des déformations des deux sous-domaines s'écrivent :

$$\sigma^{+}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^{+}: \epsilon^{+}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{+} \qquad \epsilon^{+}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\nabla^{T} \mathbf{u}^{+}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}^{+}(\mathbf{x})) \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{+}$$
(2.6)

$$\sigma^{-}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^{-} : \epsilon^{-}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{-} \qquad \epsilon^{-}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\nabla^{T} \mathbf{u}^{-}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}^{-}(\mathbf{x})) \qquad \mathbf{x} \in \Omega^{-}$$
(2.7)

où \mathbf{C}^+ et \mathbf{C}^- sont les tenseurs d'élasticité des sous-domaines Ω^+ et Ω^- . Les champs de déplacement \mathbf{u}^+ et \mathbf{u}^- doivent être des sous-ensembles du champ de déplacement cinématiquement admissible, \mathbf{U} :

$$\mathbf{u}^{+} \in \mathbf{U} = \{\mathbf{v}^{+} \in \mathbf{V} : \mathbf{v}^{+} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{u}^{+}\} \qquad \mathbf{u}^{-} \in \mathbf{U} = \{\mathbf{v}^{-} \in \mathbf{V} : \mathbf{v}^{-} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_{u}^{-}\}$$
(2.8)

La forme faible du problème décrit par les équations (2.1)-(2.8) s'obtient en appliquant le principe des travaux virtuels séparément aux 2 sous-domaines.

$$\int_{\Omega^+} \sigma^+ : \epsilon^+(\mathbf{v}^+) d\Omega = \int_{\Gamma_{f^+}} \mathbf{f}^+ \cdot \mathbf{v}^+ d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}(\Delta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}^+ d\Gamma \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}$$
(2.9)

$$\int_{\Omega^{-}} \sigma^{-} : \epsilon^{-}(\mathbf{v}^{-}) d\Omega = \int_{\Gamma_{f^{-}}} \mathbf{f}^{-} \cdot \mathbf{v}^{-} d\Gamma + \int_{\Gamma_{c}} \mathbf{t}(\Delta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}^{-} d\Gamma \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}$$
(2.10)

avec :

$$\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^+(\mathbf{x}) - \mathbf{v}^-(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c$$
(2.11)

Les membres de gauche de (2.9) et (2.10) sont les travaux des forces internes. Les membres de droite de ces équations sont les travaux des efforts extérieurs et des tractions. Le champ de déplacement dans chacun des sous-domaines est obtenu grâce aux mêmes fonctions de forme que celles utilisées avec des éléments finis standards.

$$\mathbf{u}^{\pm}(\mathbf{x}) = [N^{\pm}(\mathbf{x})]\{d^{\pm}\}$$
(2.12)

où $[N^{\pm}]$ sont les matrices d'interpolation du champ de déplacement au sein des deux sous-domaines et $\{d^{\pm}\}$ les déplacements des noeuds situés dans Ω^{\pm} . Les champs de déformation dans Ω^{\pm} s'écrivent :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\pm}(\mathbf{x}) = [B^{\pm}(\mathbf{x})]\{d^{\pm}\}$$
(2.13)

où $[B^{\pm}]$ sont les matrices déformation-déplacement souvent appelées « matrices B ». En substituant (2.12) et (2.13) dans (2.9) et (2.10) et en utilisant le principe des travaux virtuels, on obtient le système d'équations suivant :

$$[L^{\pm}]\{d^{\pm}\} = \begin{cases} fext^{\pm} \\ fint^{\pm} \end{cases}$$
(2.14)

$$\{fint^+\} = -\{fint^-\}$$
(2.15)

où

$$[L^{\pm}] = \int_{\Omega^{\pm}} [B^{\pm}]^T C^{\pm} [B^{\pm}] d\Omega \qquad \{fext^{\pm}\} = \int_{\Gamma_f^{\pm}} [N^{\pm}]^T \boldsymbol{f}^{\pm} d\Gamma \qquad (2.16)$$

On réécrit ensuite (2.14) en faisant apparaître les sous-matrices de raideur :

$$\begin{bmatrix} L_{11^+} & L_{12^+} \\ L_{21^+} & L_{22^+} \end{bmatrix} \begin{cases} dext^+ \\ dint^+ \end{cases} = \begin{cases} fext^+ \\ fint^+ \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} L_{11^-} & L_{12^-} \\ L_{21^-} & L_{22^-} \end{bmatrix} \begin{cases} dext^- \\ dint^- \end{cases} = \begin{cases} fext^- \\ fint^- \end{cases}$$
(2.17)

Nous introduisons le vecteur ouverture dans le repère global et dans le repère local ainsi que la matrice de rotation entre ces deux repères { $\Delta dint$ }, { $\delta dint$ } et [R] respectivement :

$$\{\Delta dint\} = \{dint^+\} - \{dint^-\} \qquad [R]\{\Delta dint\} = \{\delta dint\} \qquad [R]\{\delta dint\} = \{\Delta dint\} \qquad (2.18)$$

Les éléments amenés à être augmentés et dont nous étudierons la formulation sont le triangle à déformation constante appelé T3 et le quadrilatère bilinéaire dénommé Q4 (voir Figure 2.3). Quand une discontinuité est introduite au sein d'un T3 il est scindé en un Q4 et un T3 et renommé AT3. Lorsque le Q4 est augmenté deux situations peuvent se produire selon la position de la discontinuité : i) si elle sépare l'élément en deux Q4 il est nommé AQ4-1 ou ii) si elle le scinde en un Q4 et un pentagone (P5) il est appelé AQ4-2.



FIGURE 2.3 – Représentation des différents éléments augmentés (AFEs) en 2D, $\{\delta_s, \delta_n\}$: repère local de la zone cohésive, $\{x, y\}$: repère global

Dans un souci de clarté, les vecteurs forces, les DDL ainsi que les matrices de raideur et de rotation précédemment mentionnés sont explicitement détaillés en Annexe A.1 pour le AQ4-1, en Annexe A.2 pour le AQ4-2 et en Annexe A.3 pour le AT3. Les matrices B introduites à l'équation (2.13) sont celles des éléments finis standard. Nous avons donc choisi de ne pas les détailler ici et renvoyons le lecteur intéressé aux ouvrages classiques sur la méthode des éléments finis tels que [Bathe, 1996, Zienkiewicz and Taylor, 2005]. Les matrices B des sous-domaines pentagonaux sont par contre rarement rencontrées dans la littérature. La formulation adoptée par les auteurs d'AFEM est issue du travail du groupe de Sukumar sur les éléments finis polygonaux [Sukumar and Tabarraei, 2004, Tabarraei and Sukumar, 2006, Mousavi et al., 2009]. Elle est rappelée en Annexe B de [Liu et al., 2014] mais une erreur y est présente. Nous la corrigeons en Annexe B.

L'utilisation de méthodes de type EFEM conduit à des schémas de résolution en deux étapes. Le calcul des degrés de liberté « globaux » (aussi appelés externes) est effectué dans un premier temps. Le terme « globaux » signifie qu'ils apparaissent dans la matrice de raideur globale du système. Tous les DDL des éléments finis standards ainsi que ceux des vecteurs colonnes $\{dext^{\pm}\}$ (voir Eq. 2.17) des AFEs sont globaux. Les déplacements et les efforts interfaciaux des AFEs (vecteurs $\{dint^{\pm}\}$ et $\{fint^{\pm}\}$ de l'équation (2.17)) doivent ensuite être déterminés. Les matrices de raideur sont mises à jour en conséquence. Au cours de cette étape les calculs sont effectués indépendamment au sein de chacun des éléments augmentés. On l'appelle donc élémentaire ou locale.

2.2 Élements à discontinuités faibles

2.2.1 Calcul des déplacements interfaciaux

Les équations d'équilibre discrétisées et non condensées (2.14) sont réécrites sous une forme équivalente :

$$[L_{11^+}] \{ dext^+ \} + [L_{12^+}] \{ dint^+ \} = \{ fext^+ \}$$
(2.19)

$$[L_{11^{-}}] \{ dext^{-} \} + [L_{12^{-}}] \{ dint^{-} \} = \{ fext^{-} \}$$
(2.20)

$$[L_{21^+}] \{ dext^+ \} + [L_{22^+}] \{ dint^+ \} = \{ fint^+ \}$$
(2.21)

$$[L_{21^{-}}]{dext^{-}} + [L_{22^{-}}]{dint^{-}} = {fint^{-}}$$

$$(2.22)$$

Lorsque des discontinuités faibles sont considérées, l'interface entre les deux sous-domaines Ω^+ et Ω^- est parfaitement adhérente (c.-à-d. de raideur infinie). Cela se traduit par

$$\{dint^{-}\} = \{dint^{+}\}$$
(2.23)

En introduisant $[\Lambda] = [L_{22^+}] + [L_{22^-}]$ et en additionnant (2.21) et (2.22) on obtient

$$[L_{21^+}] \cdot \{dext^+\} + [L_{21^-}] \cdot \{dext^-\} + [\Lambda] \{dint^+\} = 0$$
(2.24)

Ce qui conduit à

$$\{dint^+\} = \{dint^-\} = -[\Lambda]^{-1}([L_{21^+}]\{dext^+\} + [L_{21^-}]\{dext^-\})$$
(2.25)

 $[\Lambda]$ est la somme de deux matrices symétriques et définies positives, $[L_{22^+}]$ et $[L_{22^-}]$; elle est donc inversible. Les propriétés de ces matrices seront discutées plus en détail à la Section 2.3.3.

2.2.2 Matrice de raideur élémentaire condensée

La substitution de (2.25) dans (2.19) et (2.20) donne

$$\{fext^{-}\} = [L_{11^{-}}]\{dext^{-}\} + [L_{12^{-}}]\left(-[\Lambda]^{-1}([L_{21^{+}}]\{dext^{+}\} + [L_{21^{-}}]\{dext^{-}\})\right)$$
(2.26)

$$\{fext^+\} = [L_{11^+}]\{dext^+\} + [L_{12^+}]\left(-[\Lambda]^{-1}([L_{21^+}]\{dext^+\} + [L_{21^-}]\{dext^-\})\right)$$
(2.27)

Conduisant à la matrice de raideur condensée

$$\{fext\} = \begin{bmatrix} L_{11}^{-} - L_{12} - \Lambda^{-1} L_{21} - & -L_{12} - \Lambda^{-1} L_{21} + \\ -L_{12} + \Lambda^{-1} L_{21} - & L_{11}^{+} - L_{12} + \Lambda^{-1} L_{21} + \end{bmatrix} \{dext\}$$
(2.28)

Une fois le calcul des degrés de liberté externes effectué, les déplacements interfaciaux ainsi que la matrice de raideur condensée sont immédiatement obtenus grâce à (2.25) et (2.28). La formulation de l'élément est simple, il n'y a en effet pas besoin d'introduire de raideur de pénalité pour appliquer (2.23) comme cela serait le cas avec la PNM par exemple.

2.3 Élements à discontinuités fortes

2.3.1 Loi de comportement de l'interface : linéaire par morceaux et faiblement couplée

Les vecteurs colonnes $\{fint^{\pm}\}$ apparaissant dans les équations d'équilibre discrétisées (2.21) et (2.22) sont reliés aux contraintes cohésives exercées entre les sous-domaines Ω^+ et Ω^- . Une loi traction-ouverture (appelée TSL pour Traction-Separation Law dans la suite de ce texte) doit être utilisée avec la méthode des éléments finis augmentés. Cela implique que la contrainte interfaciale normale (respectivement tangentielle) ne dépend que de l'ouverture de fissure normale (respectivement tangentielle). La rupture sous chargement mixte intervient lorsqu'un critère d'interaction entre les énergies de rupture en modes I, II et III est satisfait, d'où la terminologie « faiblement couplée ». En 2D l'énergie totale dissipée pendant le processus de rupture, G, peut être décomposée en énergies dissipées en modes I et II : G_I et G_{II} :

$$G = G_I + G_{II} \tag{2.29}$$

La rupture se produit dès que le critère d'interaction suivant est satisfait :

$$\frac{G_I}{G_{Ic}} + \frac{G_{II}}{G_{IIc}} \ge 1 \tag{2.30}$$

où G_{Ic} et G_{IIc} sont les énergies de rupture du matériau en modes I et II respectivement.

(



FIGURE 2.4 – exemple de TSL linéaire par morceaux et faiblement couplée

Nous considérons l'utilisation d'une TSL faiblement couplée comme un inconvénient car elle induit un comportement peu physique. En effet, si la zone cohésive est considérablement endommagée suite à un chargement en mode I pur (supposons par exemple que $G_I/G_{Ic} = 0.9$), sa raideur tangentielle ne subit aucune diminution. De plus, une chute de contrainte brutale peut avoir lieu lorsque le critère d'interaction est satisfait en mode mixte. Cette dernière peut entraîner la divergence du schéma numérique. L'utilisation couplée de ces TSL linéaires par morceaux et d'éléments augmentés permet néanmoins de s'affranchir d'itérations locales et simplifie donc considérablement l'implémentation des AFEs.

La TSL est indexée afin que chacun de ses segments soit associé à une raideur constante et à une plage d'ouverture de fissure. Soit A et B les deux points d'intégration des contraintes interfaciales et σ_n et τ_s les contraintes cohésives normale et tangentielle dans le repère de la zone cohésive. Les contraintes aux points d'intégration peuvent se mettre sous la forme :

$$\{\sigma_{coh}^{(i,j,k,l)}\} = \begin{cases} \sigma_{nA} \\ \tau_{sA} \\ \sigma_{nB} \\ \tau_{sB} \end{cases} = \{\sigma_0^{(i,j,k,l)}\} + \left[\alpha_0^{(i,j,k,l)}\right] \begin{cases} \Delta \delta_{nA} \\ \Delta \delta_{sA} \\ \Delta \delta_{nB} \\ \Delta \delta_{sB} \end{cases}$$
(2.31)

avec :

$$\{\sigma_{0}^{(i,j,k,l)}\} = \begin{cases} \sigma_{n0}^{(i)} \\ \tau_{s0}^{(j)} \\ \sigma_{n0}^{(k)} \\ \tau_{s0}^{(l)} \end{cases} \qquad \qquad \begin{bmatrix} \alpha_{0}^{(i,j,k,l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{n0}^{(i)} & & & \\ & \alpha_{s0}^{(j)} & & \\ & & \alpha_{n0}^{(k)} \\ & & & & \alpha_{s0}^{(l)} \end{bmatrix}$$
(2.32)

Les exposants (i,j,k,l) indexent indépendamment les deux modes de séparation (i.e., cisaillement et ouverture) aux points d'intégration A et B. Bien que la TSL soit non-linéaire, pour une combinaison donnée d'exposants (i,j,k,l) les tractions peuvent s'écrire comme une fonction affine des ouvertures (cf. Eq. 2.31). La forme de la loi cohésive est dictée par les valeurs $\alpha_{n0}, \alpha_{s0}, \sigma_{n0}$ et τ_{s0} choisies par l'utilisateur. Si l'on souhaite par exemple reproduire la TSL représentée à la Figure 2.4, les valeurs suivantes doivent être utilisées :

segment n^{o}	1	2	3	4	5
α_{n0}	10	-5	0	2.5	
σ_{n0}	0	150	0	0	
α_{s0}	10	-5	5	0	2.5
$ au_{s0}$	0	150	-150	0	0

Les segments verts et hachurés de la Figure 2.4 représentent le cas d'une décharge. Ils évoluent avec l'état d'endommagement et doivent être recalculés à chaque itération.

2.3.2 Schémas d'intégration des contraintes cohésives

Les équations d'équilibre discrétisées (2.14) ne font pas apparaître les contraintes interfaciales $\{\sigma_{coh}\}$ mais les efforts interfaciaux $\{fint^{\pm}\}$. Ils sont calculés grâce à l'intégration des contraintes cohésives le long de la discontinuité. Les performances de divers schémas d'intégration sont dans un premier temps rappelées. Deux d'entre eux sont ensuite explicitement détaillés.

Afin de comparer différents schémas d'intégration des contraintes cohésives, un test en mode I a été réalisé dans [Liu et al., 2013]. Les meilleurs résultats ont été obtenus lorsque la position des points d'intégration évoluait avec l'état d'endommagement de la zone cohésive. Ces nouvelles quadratures numériques, faisant usage de points d'intégration mobiles, ont été entièrement détaillées et comparées dans [Do et al., 2013]. Il apparaît de plus que les zones cohésives à trois points d'intégration sont plus performantes que celles comprenant deux points d'intégration. Ce résultat est particulièrement prononcé lorsque des schémas d'intégration de Newton-Cotes (N-Cis) sont utilisés. Quand des schémas d'intégration de Gauss (Gis) sont adoptés l'usage de deux ou de trois points d'intégration n'a qu'une légère influence sur les résultats. Les performances d'un N-Cis employé avec 2 et 20 points d'intégration ont été comparées dans [Alfano and Crisfield, 2001]. Les auteurs se sont aperçus que l'utilisation de 20 points d'intégration réduisait la stabilité du schéma de résolution. En se basant sur les travaux de [Rots, 1988, Schellekens and De Borst, 1993, Simone, 2004 de nombreux auteurs emploient un N-Cis à 2 points car les contraintes interfaciales oscillent lorsqu'un Gis à 2 points est adopté. Le test mettant à jour ces oscillations a été introduit dans [Rots, 1988]. Nous le rappelons brièvement ci-après. Une poutre horizontale comprenant une entaille verticale est soumise à une charge verticale comme illustrée à la Figure 2.5a. Des éléments d'interface totalement endommagés sont utilisés pour modéliser la fissure (représentée par le trait épais à la Figure 2.5b) et des éléments d'interface non endommagés sont positionnés le long du trajet de fissure potentiel (la ligne en pointillés de la Figure 2.5b).



FIGURE 2.5 – Test de la poutre entaillée (dimensions en mm) a) géométrie de la structure et efforts appliqués b) maillage utilisé avec des éléments d'interface totalement endommagés (trait épais) et non endommagés (ligne en pointillés), d'après [Simone, 2004]

Lorsque des éléments d'interface non endommagés sont adoptés pour représenter un trajet de fissure potentiel ils ne doivent pas assouplir notablement la structure. La raideur élastique de la zone cohésive doit donc être suffisamment élevée. Il a été constaté que pour un même maillage et une même valeur d de la raideur interfaciale, le profil de la traction le long du trajet de fissure potentiel présentait plus d'oscillations avec un Gis qu'avec un N-Cis (voir Figure 2.6).



FIGURE 2.6 – Influence de la raideur interfaciale d et du schéma d'intégration sur le profil de traction le long de la discontinuité : a) Gis b) N-Cis (la position est mesurée à partir du pied de la poutre), d'après [Simone, 2004]

L'état d'endommagement de la structure n'évolue pas lors du test que nous venons de décrire (les zones cohésives utilisées sont élastiques et linéaires). Lorsque des zones cohésives endommageables sont employées un Gis simule plus efficacement la réponse de la structure qu'un N-Cis [Do et al., 2013]. Des essais de délaminage en modes I et II corroborent ce surprenant résultat [Essongue, 2015]. Par souci de simplification nous n'implémenterons que des zones cohésives comprenant deux points d'intégration fixes (voir Figure 2.7). Nous avons choisi d'implémenter les N-Cis et les Gis au vu du manque de consensus observé dans la littérature sur le schéma d'intégration le plus performant.



FIGURE 2.7 – Zone cohésive incorporée dans un élément finis et intégrée avec 2 points de Gauss

Le cadre général des schémas d'intégration (à 2 points) des contraintes cohésives est maintenant détaillé. Les N-Cis et les Giss sont ensuite explicitement décrits. Le vecteur ouverture $\{\Delta\delta int(\xi)\}$ dans le repère de référence de la zone cohésive (ξ, η) peut être exprimé grâce aux ouvertures aux noeuds de l'interface $\{\Delta\delta int\}$:

$$\{\Delta\delta int(\xi)\} = \begin{cases} \Delta\delta_n(\xi)\\ \Delta\delta_s(\xi) \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 1+\xi & 0\\ 0 & 1-\xi & 0 & 1+\xi \end{bmatrix} \{\Delta\delta int\}$$
$$= \begin{bmatrix} N(\xi) \end{bmatrix} \{\Delta\delta int\}$$
$$= \begin{bmatrix} N(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix} \begin{cases} \delta int^+\\ \delta int^- \end{cases}$$
$$= \begin{bmatrix} B_{coh}(\xi) \end{bmatrix} \begin{cases} \delta int^+\\ \delta int^- \end{cases}$$
(2.33)

Ce qui conduit à l'expression suivante des ouvertures aux points d'intégration :

$$\begin{cases}
\Delta \delta_{nA} \\
\Delta \delta_{sA} \\
\Delta \delta_{nB} \\
\Delta \delta_{sB}
\end{cases} = \begin{cases}
\Delta \delta_n(\xi_A) \\
\Delta \delta_s(\xi_A) \\
\Delta \delta_n(\xi_B) \\
\Delta \delta_n(\xi_B) \\
\Delta \delta_s(\xi_B)
\end{cases} = \begin{bmatrix}
N(\xi_A) \\
N(\xi_B)
\end{bmatrix} \{\Delta \delta int\}$$
(2.34)

Substituer (2.34) dans (2.31) donne (les exposants dans (2.31) ont été omis) :

$$\begin{cases} \sigma(\xi_A) \\ \tau(\xi_A) \\ \sigma(\xi_B) \\ \tau(\xi_B) \end{cases} = \{\sigma_0\} + \begin{bmatrix} \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta \delta_{nA} \\ \Delta \delta_{sA} \\ \Delta \delta_{nB} \\ \Delta \delta_{nB} \\ \Delta \delta_{sB} \end{cases} = \{\sigma_0\} + \begin{bmatrix} \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(\xi_A) \\ N(\xi_B) \end{bmatrix} \{\Delta \delta int\}$$
(2.35)

Les efforts cohésifs sont obtenus par intégration des contraintes cohésives :

$$\begin{bmatrix} R \\ R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} fint^{-} \\ fint^{+} \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma_{c}} [B_{coh}]^{T} \mathbf{t} d\Gamma = \frac{l}{2} \int_{-1}^{1} [B_{coh}(\xi)]^{T} \begin{Bmatrix} \sigma(\xi) \\ \tau(\xi) \end{Bmatrix} d\xi = \frac{l}{2} \int_{-1}^{1} \begin{Bmatrix} N(\xi)^{T} \\ -N(\xi)^{T} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma(\xi) \\ \tau(\xi) \end{Bmatrix} d\xi$$
(2.36)

que l'on peut réécrire

$$\begin{bmatrix} R \\ R \end{bmatrix} \begin{cases} fint^{-} \\ fint^{+} \end{cases} = \frac{l}{4} \int_{-1}^{1} \begin{cases} \sigma(\xi)(1-\xi) \\ \tau(\xi)(1-\xi) \\ \sigma(\xi)(1+\xi) \\ -\sigma(\xi)(1-\xi) \\ -\sigma(\xi)(1-\xi) \\ -\sigma(\xi)(1-\xi) \\ -\sigma(\xi)(1+\xi) \\ -\tau(\xi)(1+\xi) \\ -\tau(\xi)(1+\xi) \end{cases} d\xi$$
(2.37)

où l est la longeur de la zone cohésive. On introduit ensuite les quadratures numériques :

$$[R]{fint^{-}} = \frac{l}{4} \int_{-1}^{1} \left\{ \begin{matrix} \sigma(\xi)(1-\xi) \\ \tau(\xi)(1-\xi) \\ \sigma(\xi)(1+\xi) \\ \tau(\xi)(1+\xi) \end{matrix} \right\} d\xi \simeq \frac{l}{4} \sum_{i} \left\{ \begin{matrix} w_{i}\sigma(\xi_{i})(1-\xi_{i}) \\ w_{i}\tau(\xi_{i})(1-\xi_{i}) \\ w_{i}\sigma(\xi_{i})(1+\xi_{i}) \\ w_{i}\tau(\xi_{i})(1+\xi_{i}) \end{matrix} \right\}$$
(2.38)

qui peuvent être mises sous la forme

$$[R]{fint^{-}} = \frac{l}{4} \begin{bmatrix} w_A(1-\xi_A) & 0 & w_B(1-\xi_B) & 0\\ 0 & w_A(1-\xi_A) & 0 & w_B(1-\xi_B) \\ w_A(1+\xi_A) & 0 & w_B(1+\xi_B) & 0 \\ 0 & w_A(1+\xi_A) & 0 & w_B(1+\xi_B) \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma(\xi_A) \\ \tau(\xi_A) \\ \sigma(\xi_B) \\ \tau(\xi_B) \\ \tau(\xi_B) \end{cases}$$
(2.39)

où w_A et w_B sont les poids des points d'intégration et ξ_A et ξ_B leurs coordonnées dans le repère de référence de la zone cohésive. La substitution de (2.35) dans (2.39) donne

$$[R]{fint^{-}} = \frac{l}{4} \begin{bmatrix} w_{A}(1-\xi_{A}) & 0 & w_{B}(1-\xi_{B}) & 0 \\ 0 & w_{A}(1-\xi_{A}) & 0 & w_{B}(1-\xi_{B}) \\ w_{A}(1+\xi_{A}) & 0 & w_{B}(1+\xi_{B}) \end{bmatrix} \times \\ \begin{pmatrix} w_{A}(1+\xi_{A}) & 0 & w_{B}(1+\xi_{B}) \\ 0 & w_{A}(1+\xi_{A}) & 0 & w_{B}(1+\xi_{B}) \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} \{\sigma_{0}\} + [\alpha_{0}] \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\xi_{A} & 0 & 1+\xi_{A} & 0 \\ 0 & 1-\xi_{A} & 0 & 1+\xi_{A} \\ 1-\xi_{B} & 0 & 1+\xi_{B} & 0 \\ 0 & 1-\xi_{B} & 0 & 1+\xi_{B} \end{bmatrix} \{\Delta\delta int\} \end{pmatrix}$$
(2.40)

L'équation précédente fournit une relation explicite entre les efforts et l'ouverture de fissure et sera régulièrement utilisée dans ce qui suit. Nous la réécrivons donc sous une forme plus compacte.

$$\{fint^{-}\} = l(\{S_0\} + [\alpha]\{\Delta dint\})$$
(2.41)

où l'on obtient par identification

$$\{S_0\} = \frac{1}{4}[R] \begin{bmatrix} w_A(1-\xi_A) & 0 & w_B(1-\xi_B) & 0\\ 0 & w_A(1-\xi_A) & 0 & w_B(1-\xi_B)\\ w_A(1+\xi_A) & 0 & w_B(1+\xi_B) & 0\\ 0 & w_A(1+\xi_A) & 0 & w_B(1+\xi_B) \end{bmatrix} \{\sigma_0\}$$
(2.42)

 et

$$[\alpha] = \frac{1}{8} [R] \begin{bmatrix} w_A (1-\xi_A) & 0 & w_B (1-\xi_B) & 0 \\ 0 & w_A (1-\xi_A) & 0 & w_B (1-\xi_B) \\ w_A (1+\xi_A) & 0 & w_B (1+\xi_B) & 0 \\ 0 & w_A (1+\xi_A) & 0 & w_B (1+\xi_B) \end{bmatrix} [\alpha_0] \begin{bmatrix} 1-\xi_A & 0 & 1+\xi_A & 0 \\ 0 & 1-\xi_A & 0 & 1+\xi_A \\ 1-\xi_B & 0 & 1+\xi_B & 0 \\ 0 & 1-\xi_B & 0 & 1+\xi_B \end{bmatrix} [R]$$

$$(2.43)$$

2.3.2.1 Formules d'intégation de Newton-Cotes (N-Cis)

Si un N-Cis à deux points est adopté, les points d'intégration sont situés aux noeuds de la zone cohésive.

$$\xi_A = -1$$
 $\xi_B = 1$ $w_A = w_B = 1$ (2.44)

La matrice d'interpolation s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N(\xi_A)\\ N(\xi_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(2.45)

Ce qui conduit à

$$\{S_0\} = \frac{1}{4}[R]\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix} \{\sigma_0\} = \frac{1}{2}[R]\{\sigma_0\}$$
(2.46)

 et

$$[\alpha] = \frac{1}{8}[R] \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix} [\alpha_0] \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix} [R] = \frac{1}{2}[R][\alpha_0][R]$$
(2.47)

L'expression suivante de $\{fint^-\}$ est donc obtenue

,

$$\{fint^{-}\} = \frac{l}{2} ([R] \{\sigma_{0}\} + [R][\alpha_{0}][R] \{\Delta dint\})$$

= $[R] \frac{l}{2} (\{\sigma_{0}\} + [\alpha_{0}] \{\Delta \delta int\}) = \frac{l}{2} [R] \{\sigma_{coh}\}$ (2.48)

Cette équation illustre le fait que les paires de noeuds coïncidants (p.-ex. 5-8 et 6-7 à la Figure 2.7) sont totalement découplées, comme cela a été démontré dans de nombreuses publications (cf., entres autres, [Rots, 1988,Schellekens and De Borst, 1993,Simone, 2004,Dias-da Costa et al., 2009a]). L'équation 2.48 permet de reformuler le N-Cis à 2 points : l'intégration peut être aisément réalisée en divisant les contraintes cohésives obtenues aux points d'intégration par la demi-longueur de la zone cohésive. Les modèles appelés zones cohésives discrètes (discrete cohesive zone models ou discrete damage zone models) [Xie and Waas, 2006, Liu et al., 2012, Jimenez et al., 2014] sont donc identiques aux modèles de zones cohésive « classiques » intégrés avec un N-Cis à 2 points. Cette équivalence a été mentionnée dans [Do et al., 2013] et les calculs menés ci-dessus en sont la preuve formelle.

Le schéma d'intégration publié en Annexe A.1 de [Liu et al., 2013] sous le nom N-Cis est différent de celui que nous venons d'expliciter. Il conduit en effet à une formulation où i) les paires de noeuds coïncidants sont couplés et ii) les contraintes aux points d'intégration de la zone cohésive sont identiques. Le schéma d'intégration publié dans [Liu et al., 2013] n'est donc pas le classique N-Cis.

2.3.2.2 Formules d'intégration de Gauss (Gis)

Si un schéma de Gauss est adopté on a :

$$\xi_A = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$
 $\xi_B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $w_A = w_B = 1$ (2.49)

La matrice d'interpolation s'écrit

$$\begin{bmatrix} N(\xi_A)\\ N(\xi_B) \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3+\sqrt{3} & 0 & 3-\sqrt{3} & 0\\ 0 & 3+\sqrt{3} & 0 & 3-\sqrt{3}\\ 3-\sqrt{3} & 0 & 3+\sqrt{3} & 0\\ 0 & 3-\sqrt{3} & 0 & 3+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$
(2.50)

Ce qui conduit à

$$\{S_0\} = \frac{1}{12} [R] \begin{bmatrix} 3 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} \\ 3 - \sqrt{3} & 3 + \sqrt{3} \\ 3 - \sqrt{3} & 3 + \sqrt{3} \end{bmatrix} \{\sigma_0\}$$
(2.51)

 et

$$[\alpha] = \frac{1}{72}[R] \begin{bmatrix} 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & \\ & 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ & 3-\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & \\ & 3-\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} \end{bmatrix} [\alpha_0] \begin{bmatrix} 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & \\ & 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ & 3-\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} \\ & 3-\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} \end{bmatrix} [R]$$

$$(2.52)$$

2.3.3 Calcul des déplacements interfaciaux

Une relation affine entre les efforts interfaciaux et l'ouverture de fissure a été obtenue à la section précédente (voir Eq. 2.41). C'est l'un des points clefs permettant de s'affranchir d'itérations élémentaires. La substitution de (2.41) dans (2.21) et (2.22) donne

$$[L_{21^+}]\{dext^+\} + [L_{22^+}]\{dint^+\} = \{fint^+\} = -l(\{S_0\} + [\alpha]\{\Delta d_{int}\})$$
(2.53)

$$[L_{21^{-}}]\{dext^{-}\} + [L_{22^{-}}]\{dint^{-}\} = \{fint^{-}\} = l(\{S_0\} + [\alpha]\{\Delta d_{int}\})$$

$$(2.54)$$

Substituer (2.18) dans (2.53) et (2.54) fourni la relation

$$[L_{21^+}] \{ dext^+ \} + ([L_{22^+}] + l[\alpha]) \{ dint^+ \} = -l \{ S_0 \} + l[\alpha] \{ dint^- \}$$

$$(2.55)$$

$$[L_{21^{-}}]\{dext^{-}\} + ([L_{22^{-}}] + l[\alpha])\{dint^{-}\} = l(\{S_0\} + [\alpha]\{dint^{+}\})$$

$$(2.56)$$

Ce qui conduit à

$$([L_{22^+}] + l[\alpha]) \{ dint^+ \} - l[\alpha] \{ dint^- \} = -l\{S_0\} - [L_{21^+}] \{ dext^+ \}$$

$$(2.57)$$

$$-l[\alpha]\{dint^+\} + ([L_{22^-}] + l[\alpha])\{dint^-\} = l\{S_0\} - [L_{21^-}]\{dext^-\}$$

$$(2.58)$$

En introduisant $[\Psi_{22^{\pm}}] = [L_{22^{\pm}}] + l[\alpha]$ on obtient

$$[\Psi_{22^+}]\{dint^+\} - l[\alpha]\{dint^-\} = -l\{S_0\} - [L_{21^+}]\{dext^+\}$$
(2.59)

$$-l[\alpha]\{dint^+\} + [\Psi_{22^-}]\{dint^-\} = l\{S_0\} - [L_{21^-}]\{dext^-\}$$
(2.60)

Afin de calculer $\{dint^-\}$ (et, par une procédure similaire, $\{dint^+\}$) il est possible :

i) d'exprimer $\{dint^+\}$ en fonction de $\{dint^-\}$ dans (2.59) et injecter le résultat dans (2.60)

ii) d'exprimer $\{dint^-\}$ en fonction de $\{dint^+\}$ dans (2.60) et substituer l'expression obtenue dans (2.59)

La possibilité *ii*) nécessite le calcul de $[\alpha]^{-1}$. $[\alpha]$ est une matrice diagonale dont les coefficients sont les raideurs de la TSL (voir Eq. 2.32). À mesure qu'un point d'intégration s'endommage une raideur de la TSL peut devenir nulle. $[\alpha]$ cesse alors d'être inversible.

C'est probablement la raison pour laquelle le choix i) a été fait par le groupe de Yang. Les matrices de raideur à inverser dans ce cas sont $[\Psi_{22}^{\pm}]$. Par conséquent, même lorsque $[\alpha]$ est singulière $[\psi_{22\pm}]^{-1}$ peut exister. Les conditions d'inversibilité ainsi que la nature de $[\psi_{22\pm}]$ sont étudiées à la Section 2.3.6.3. Le calcul des ouvertures de fissure est poursuivi en faisant le choix i) et en supposant que $[\psi_{22\pm}]^{-1}$ existe.

$$\{dint^+\} = [\Psi_{22^+}^{-1}] \left(l[\alpha] \{dint^-\} - l\{S_0\} - [L_{21^+}] \{dext^+\} \right)$$
(2.61)

$$\{dint^{-}\} = [\Psi_{22^{-}}^{-1}] \left(l[\alpha] \{dint^{+}\} + l\{S_0\} - [L_{21^{-}}] \{dext^{-}\} \right)$$

$$(2.62)$$

En substituant (2.61) et (2.62) dans (2.60) et (2.59) respectivement on obtient :

$$[\Psi_{22^+}]\{dint^+\} - l[\alpha][\Psi_{22^-}^{-1}](l[\alpha]\{dint^+\} + l\{S_0\} - [L_{21}^-]\{dext^-\}) = -l\{S_0\} - [L_{21}^+]\{dext^+\}$$
(2.63)

$$-l[\alpha][\Psi_{22^+}^{-1}](l[\alpha]\{dint^-\} - l\{S_0\} - [L_{21}^+]\{dext^+\}) + [\Psi_{22}^-]\{dint^-\} = l\{S_0\} - [L_{21}^-]\{dext^-\}$$
(2.64)

Pour une meilleure lisibilité, les crochets des matrices seront omis dans la suite des calculs. Les équations (2.63) et (2.64) peuvent être réécrites :

$$(\Psi_{22^+} - l^2 \alpha \Psi_{22^-}^{-1} \alpha) \{dint^+\} = l^2 \alpha \Psi_{22^-}^{-1} \{S_0\} - l \alpha \Psi_{22^-}^{-1} L_{21^-} \{dext^-\} - l\{S_0\} - L_{21^+} \{dext^+\}$$
(2.65)

$$(\Psi_{22^{-}} - l^2 \alpha \Psi_{22^{+}}^{-1} \alpha) \{ dint^{-} \} = -l^2 \alpha \Psi_{22^{+}}^{-1} \{ S_0 \} - l \alpha \Psi_{22^{+}}^{-1} L_{21^{+}} \{ dext^{+} \} + l \{ S_0 \} - L_{21^{-}} \{ dext^{-} \}$$
(2.66)

En introduisant $A = \Psi_{22^+} - l^2 \alpha \Psi_{22^-}^{-1} \alpha$, $B = \Psi_{22^-} - l^2 \alpha \Psi_{22^+}^{-1} \alpha$ et la matrice identité I_n on obtient

$$\{dint^{+}\} = A^{-1} \left((l^{2} \alpha \Psi_{22^{-}}^{-1} - lI_{n}) \{S_{0}\} - \{ l \alpha \Psi_{22^{-}}^{-1} L_{21^{-}} - L_{21^{+}} \} \{dext\} \right)$$
(2.67)

$$\{dint^{-}\} = B^{-1} \left(\left(-l^2 \alpha \Psi_{22^+}^{-1} + lI_n \{S_0\} - \{L_{21^-} \ l \alpha \Psi_{22^+}^{-1} L_{21^+} \} \{dext\} \right)$$
(2.68)

que l'on peut réécrire en format matriciel

$$\{dint\} = \begin{bmatrix} B^{-1}(-l^{2}\alpha\Psi_{22^{+}}^{-1} + lI_{n}) & 0\\ 0 & A^{-1}(l^{2}\alpha\Psi_{22^{-}}^{-1} - lI_{n}) \end{bmatrix} \begin{cases} S_{0}\\ S_{0} \end{cases} - \begin{bmatrix} B^{-1}L_{21^{-}} & lB^{-1}\alpha\Psi_{22^{+}}^{-1}L_{21^{+}}\\ lA^{-1}\alpha\Psi_{22^{-}}^{-1}L_{21^{-}} & A^{-1}L_{21^{+}} \end{bmatrix} \{dext\}$$
(2.69)

On peut ensuite aisément exprimer l'ouverture de fissure en fonction des déplacements interfaciaux (voir Eq. 2.18).

$$\{\Delta dint\} = \left(A^{-1} (l^2 \alpha \Psi_{22^-}^{-1} - lI_n) - B^{-1} (-l^2 \alpha \Psi_{22^+}^{-1} + lI_n) \right) \{S_0\}$$

+
$$\left[-A^{-1} l \alpha \Psi_{22^-}^{-1} L_{21^-} + B^{-1} L_{21^-} - A^{-1} L_{21^+} + B^{-1} l \alpha \Psi_{22^+}^{-1} L_{21^+} \right] \{dext\}$$
(2.70)

Cette équation comporte une erreur de frappe dans [Liu et al., 2014] (Eq. 18.a) et [Liu et al., 2015] (Eq. 15). Le terme $-B^{-1}(-l^2\alpha...)$ dans (2.70) a été remplacé par $+B^{-1}(-l^2\alpha...)$ dans les publications précédemment mentionnées.

À ce stade du calcul nous sommes intéressés par l'ouvertures de fissure aux points d'intégration, dans le repère de la zone cohésive, notée { $\Delta \delta int_{(A,B)}$ }. Elle est obtenue en substituant (2.34) et (2.18) dans (2.70).

$$\{\Delta\delta int_{(A,B)}\} = \begin{cases} \Delta\delta_{nA} \\ \Delta\delta_{sA} \\ \Delta\delta_{nB} \\ \Delta\delta_{sB} \end{cases} = \begin{bmatrix} N(\xi_A) \\ N(\xi_B) \end{bmatrix} R\{\Delta dint\}$$
(2.71)

2.3.4 Le consistency-check

Les équations (2.70) et (2.71) permettent de relier explicitement les déplacements internes et externes tout en garantissant l'équilibre de l'élément. Une fois les déplacements externes $\{dext\}$ connus, toutes les possibles ouvertures de fissure aux points d'intégration sont calculées. Par « toutes les possibles » nous sous-entendons que chache combinaison de segments de la TSL est essayée. Afin d'illustrer le propos (2.71) et (2.70) sont réécrites avec les exposants (i,j,k,l) introduits à la Section 2.3.1 :

$$\{\Delta dint\}^{(i,j,k,l)} = \left(A^{-1^{(i,j,k,l)}} (l^2 \alpha^{(i,j,k,l)} \Psi_{22^-}^{-1^{(i,j,k,l)}} - lI_n) - B^{-1^{(i,j,k,l)}} (-l^2 \alpha^{(i,j,k,l)} \Psi_{22^+}^{-1^{(i,j,k,l)}} + lI_n)\right) \{S_0\}^{(i,j,k,l)} + \\ \left[-A^{-1^{(i,j,k,l)}} l \alpha^{(i,j,k,l)} \Psi_{22^-}^{-1^{(i,j,k,l)}} L_{21^-} + B^{-1^{(i,j,k,l)}} L_{21^-} - A^{-1^{(i,j,k,l)}} L_{21^+} + B^{-1^{(i,j,k,l)}} l \alpha^{(i,j,k,l)} \Psi_{22^+}^{-1^{(i,j,k,l)}} L_{21^+}\right] \{dext\}$$

$$(2.72)$$

$$\{\Delta\delta int_{(A,B)}\}^{(i,j,k,l)} = \begin{bmatrix} N(\xi_A)\\ N(\xi_B) \end{bmatrix} R\{\Delta dint\}^{(i,j,k,l)}$$

$$(2.73)$$

Par conséquent $i \times j \times k \times l$ ouvertures de fissure doivent être calculées par élément. Si la TSL représentée à la Figure 2.4 était adoptée, 400 ouvertures de fissure devraient être calculées (i = k = 4 et j = l = 5). Le consistency-check est ensuite réalisé afin de déterminer celles en accord avec la TSL. Nous illustrons graphiquement la procédure en l'appliquant à une barre 1D augmentée. Sa zone cohésive ne possède qu'un point d'intégration, nommé A, et seules les contraintes normales sont considérées. L'équation (2.73) devient :

$$\{\Delta\delta int_{(A)}\}^{(i)} = [N(\xi_A)] R\{\Delta dint\}^{(i)}$$
(2.74)

On suppose que le précédent état convergé a donné lieu à l'état de contrainte représenté par le point vert à la Figure 2.8. Toutes les possibles solutions $\{\Delta dint\}^{(i)}$ sont ensuite calculées et leur « consistance » est analysée (voir Table 2.1).



FIGURE 2.8 – Ouvertures de fissure $\{\Delta \delta int\}^{(i)}$, point vert : dernier incrément convergé, point noir : ouverture de fissure calculée lorsque que le segment *i* est considéré

Dans l'exemple ci-dessus deux ouvertures de fissure sont en accord avec la TSL. Cette situation a régulièrement été rencontrée lors des simulations numériques. Occasionnellement, aucune des solutions calculées ne passent le consistency-check. En se basant sur le travail de [Cervera et al., 2010b] les auteurs d'AFEM garantissent l'existence et l'unicité de l'ouverture de fissure. La publication précédemment évoquée traite des éléments finis mixtes et stabilisés Du point de vue de l'auteur elle ne peut donc pas être utilisée comme une preuve d'existence ou d'unicité de l'ouverture de fissure au sein d'éléments augmentés. Quand plusieurs solutions satisfont le consistency-check nous choisirons celle qui minimise la norme de $\{\Delta \delta int\}$. Si aucune ouverture de fissure n'est en accord avec la TSL, celle engendrant des contraintes

$\{\Delta dint\}^{(i)}$	Consistency-Check					
i = 1	\checkmark					
i=2	✗ l'endommagement ne peut décroître					
i = 3	✓ <i>✓</i>					
i = 4	✗ cet état ne respecte pas la TSL					
	il ne peut être atteint qu'une fois l'interface totalement endommagée					
i = 5	\bigstar cet état ne respecte pas la TSL					

TABLE 2.1 – Résultats du consistency-check

interfaciales nulles sera adoptée (i = 4 dans l'exemple ci-dessus). Ces choix sont empiriques et des études supplémentaires seraient souhaitables afin de s'assurer de leurs bien-fondés.

2.3.5 Matrice de raideur condensée

La matrice de raideur condensée est formée une fois le consistency-check réalisé. Les valeurs des exposants (i,j,k,l) assurant l'équilibre de la zone cohésive et le respect de la TSL sont donc connues. Les équations d'équilibre discrétisées (2.19) et (2.20) peuvent s'écrire

$$\begin{bmatrix} L_{11}^{-} & \\ & L_{11}^{+} \end{bmatrix} \{ dext \} + \begin{bmatrix} L_{12}^{-} & \\ & L_{12}^{+} \end{bmatrix} \{ dint \} = \{ fext \}$$
(2.75)

On rappelle également que les déplacements internes sont calculés grâce à la relation

$$\{dint\} = \begin{bmatrix} B^{-1}(-l^{2}\alpha\Psi_{22^{+}}^{-1} + lI_{n}) & 0\\ 0 & A^{-1}(l^{2}\alpha\Psi_{22^{-}}^{-1} - lI_{n}) \end{bmatrix} \begin{cases} S_{0}\\ S_{0} \end{cases} - \begin{bmatrix} B^{-1}L_{21^{-}} & lB^{-1}\alpha\Psi_{22^{+}}^{-1}L_{21^{+}}\\ lA^{-1}\alpha\Psi_{22^{-}}^{-1}L_{21^{-}} & A^{-1}L_{21^{+}} \end{bmatrix} \{dext\}$$
(2.69)

La substitution de (2.69) dans (2.75) donne

$$\{fext\} = \begin{bmatrix} L_{11}^{-} & \\ & L_{11}^{+} \end{bmatrix} \{dext\} + \begin{bmatrix} L_{12}^{-} & \\ & L_{12}^{+} \end{bmatrix} \times \\ \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1}(-l^{2}\alpha\Psi_{22^{+}}^{-1} + lI_{n}) & 0 \\ 0 & A^{-1}(l^{2}\alpha\Psi_{22^{-}}^{-1} - lI_{n}) \end{bmatrix} \begin{cases} S_{0} \\ S_{0} \end{cases} - \begin{bmatrix} B^{-1}L_{21^{-}} & lB^{-1}\alpha\Psi_{22^{+}}^{-1}L_{21^{+}} \\ lA^{-1}\alpha\Psi_{22^{-}}^{-1}L_{21^{-}} & A^{-1}L_{21^{+}} \end{bmatrix} \{dext\} \end{pmatrix}$$

$$(2.76)$$

ce qui conduit à

$$\{fext\} = \begin{bmatrix} L_{11}^{-} - L_{12}^{-}B^{-1}L_{21^{-}} & -lL_{12}^{-}B^{-1}\alpha\Psi_{22^{+}}^{-1}L_{21^{+}} \\ -lL_{12}^{+}A^{-1}\alpha\Psi_{22^{-}}^{-1}L_{21^{-}} & L_{11}^{+} - L_{12}^{+}A^{-1}L_{21^{+}} \end{bmatrix} \{dext\} \\ + \begin{bmatrix} L_{12}^{-}B^{-1}(-l^{2}\alpha\Psi_{22^{+}}^{-1} + lI_{n}) & 0 \\ 0 & L_{12}^{+}A^{-1}(l^{2}\alpha\Psi_{22^{-}}^{-1} - lI_{n}) \end{bmatrix} \begin{cases} S_{0} \\ S_{0} \end{cases}$$
(2.77)

où $\Psi_{22}^{\pm}=L_{22}^{\pm}+l\alpha,\,A=\Psi_{22}^{+}-l^{2}\alpha\Psi_{22^{-}}^{-1}\alpha$ et $B=\Psi_{22^{-}}-l^{2}\alpha\Psi_{22^{+}}^{-1}\alpha$

2.3.6 Remarques supplémentaires

2.3.6.1 Différences d'implémentation

Le groupe de Yang modélise le processus de fissuration en deux étapes avec AFEM. Un élément est augmenté dès que la contrainte principale maximale en son sein atteint une valeur critique. Dans un premier temps une discontinuité faible est insérée dans l'élément. Elle devient forte lorqu'un critère impliquant les contraintes interfaciales est rempli (voir [Liu et al., 2014]). La transition discontinuité faible-forte n'apporte cependant pas de « réalisme » à la simulation. La discontinuité faible est en effet localisée dans une zone d'épaisseur nulle et est donc similaire à une fissure cohésive. Du point de vue de l'auteur, cette transition doit plutôt être considérée comme une commodité numérique puisqu'elle conduit à une transition plus progressive entre états sains et endommagés. Les bénéfices d'une telle transition n'ont cependant pas été mis en évidence par les auteurs d'AFEM. Par souci de simplicité nous n'avons donc employé que des discontinuités fortes dans les analyses de propagation de fissures.

Notre indexation de la TSL linéaire par morceaux diffère de celle adoptée par les auteurs d'AFEM. Ils n'indexent ni les segments correspondant à une interface totalement endommagée (segments n^o 4 et n^o 6 des Figures 2.9a et 2.10a respectivement) ni ceux associés à une contrainte négative en mode II (segments n^o 3 et n^o 5 cf. Figure 2.10a). Nous ne comprenons pas comment cela est possible sans assumer, à priori,

le signe des contraintes interfaciales tangentielles. Notre implémentation nécessite donc de soumettre plus de segments au consistency-check que celle du groupe de Yang.



FIGURE 2.9 – TSL sous chargement normal, segments cohésifs considérés par a) l'auteur de cette thèse b) le groupe de Yang



FIGURE 2.10 – TSL sous chargement tangentiel, segments cohésifs considérés par a) l'auteur de cette thèse b) le groupe de Yang

2.3.6.2 Avantages et inconvénients de l'algorithme de consistency-check

La procédure développée par le groupe de Yang pour calculer les déplacements interfaciaux de façon non-itérative a de nombreux avantages. Elle est particulièrement robuste. En effet, l'absence d'itérations au niveau élémentaire empêche toute possible divergence à cette échelle. Le calcul des $i \times j \times k \times l$ déplacements internes est aisément vectorisable/parallélisable car il n'est pas séquentiel. Dans un schéma de résolution itératif, les itérations sont nécessairement effectuées les unes après les autres. À l'inverse tous les déplacements interfaciaux peuvent être calculés « en même temps » avec AFEM. Contrairement à l'implémentation Abaqus d'AFEM décrite dans [Liu et al., 2015] nous avons pleinement exploité le caractère parallélisable du consistency-check. Notre implémentation est donc exempte de boucles imbriquées.

Le principal désavantage de l'algorithme proposé réside dans le nombre de calculs qu'il peut induire. En effet, toutes les combinaisons d'indices (i,j,k,l) doivent être calculées et soumises au consistency-check. La TSL tracée aux Figures 2.9 et 2.10 conduit à 1225 combinaisons différentes. Bien que cela semble considérable, l'implémentation vectorielle/parallélisée permet de réaliser cette étape en quelques millièmes de secondes. En 3D le nombre de combinaisons potentielles d'exposants devient cependant déraisonnable. Supposons que les contraintes cohésives soient intégrées avec 4 points et qu'une TSL similaire à celle tracée aux Figures 2.9 et 2.10 en modes I, II et III soit adoptée, 3,603,000,625 ($(5 \times 7 \times 7)^4$) ouvertures de fissure devraient être calculées par élément ! Le coût de l'opération serait alors prohibitif même avec une implémentation optimisée. Les auteurs d'AFEM ne discutent pas ce problème dans leur implémentation 3D de la méthode [Naderi et al., 2016]. Le recours à des schémas d'intégration réduits semble pourtant souhaitable dans ce cas.

2.3.6.3 Inversibilité des matrices de raideur des sous-domaines

Les calculs présentés à la Section 2.3 font apparaître les inverses des matrices $[\Psi_{22}^{\pm}]$, [A] et [B]. Leur inversibilité est brièvement discutée dans [Liu et al., 2013] mais certains aspects n'y sont pas abordés. La formulation d'un élément triangulaire augmenté (AT3) est par exemple impossible avec l'approche détaillée dans cette publication. Nous proposons dans cette section une interprétation mécanique des matrices à inverser afin de faciliter l'étude de leur inversibilité. Considérons l'élément AT3 représenté à la Figure 2.11.



FIGURE 2.11 – Numérotation des noeuds internes et externes d'un AT3

La nature de $[\Psi_{22^{\pm}}]$ est examinée dans un premier temps. On rappelle que $[\Psi_{22^{\pm}}] = [L_{22^{\pm}}] + l[\alpha]$. $[L^{\pm}]$ sont les matrices de raideur des sous-domaines Ω^{\pm} . $[L_{22^{\pm}}]$ sont des sous-matrices de $[L^{\pm}]$ apparaissant dans les équations d'équilibre de Ω^{\pm} :

$$\begin{bmatrix} L_{11^+} & L_{12^+} \\ L_{21^+} & L_{22^+} \end{bmatrix} \begin{cases} dext^+ \\ dint^+ \end{cases} = \begin{cases} fext^+ \\ fint^+ \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} L_{11^-} & L_{12^-} \\ L_{21^-} & L_{22^-} \end{bmatrix} \begin{cases} dext^- \\ dint^- \end{cases} = \begin{cases} fext^- \\ fint^- \end{cases}$$
(2.17)

La non-inversibilité de $[L^{\pm}]$ est bien connue : les mouvements de corps rigide (MCR) de Ω^{\pm} (1 rotation et 2 translations) entraînent la singularité des matrices évoquées (3 de leurs valeurs propres sont nulles). $[L_{22^{\pm}}]$ peuvent être considérées comme les matrices de raideur de Ω^{\pm} avec des conditions aux limites (CL) imposées. En effet, un moyen d'imposer des CL est d'éliminer explicitement les degrés de liberté connus d'un système d'équations. Supposons par exemple que l'on veuille prescrire la condition $\{dext^{\pm}\} = \{0\}$ au système d'équations (2.17). On peut le réécrire :

$$\begin{bmatrix} L_{11^+} & L_{12^+} \\ L_{21^+} & L_{22^+} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ dint^+ \end{pmatrix} = \begin{cases} fext^+ \\ fint^+ \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} L_{11^-} & L_{12^-} \\ L_{21^-} & L_{22^-} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ dint^- \end{pmatrix} = \begin{cases} fext^- \\ fint^- \end{pmatrix}$$
(2.78)

Sa résolution, c.-à-d. le calcul de $\{dint^{\pm}\}$, fait seulement intervenir $[L_{22^{\pm}}]$

$$[L_{22^+}] \{ dint^+ \} = \{ fint^+ \} \qquad [L_{22^-}] \{ dint^- \} = \{ fint^- \}$$
(2.79)

La Figure 2.12 montre une « représentation visuelle » de $[L_{22^{\pm}}]$. Les conditions aux limites prescrites empêchent tout MCR du sous-domaine quadrilatéral. Le sous-domaine triangulaire peut par contre tourner autour du noeud $n^o 3$. $[L_{22^{-}}]$ est donc inversible et $[L_{22^{+}}]$ est singulière (1 de ses valeurs propres est nulle).



FIGURE 2.12 – Interprétation mécanique des sous-matrices $[L_{22^{\pm}}]$

La matrice $[\alpha]$ est associée aux efforts cohésifs exercés entre les sous-domaines Ω^+ et Ω^- . Elle peut être interprétée comme des ressorts additionnels stabilisant les sous-domaines (voir Figure 2.13). Tant que les deux ressorts ne sont pas totalement endommagés, les MCR du domaine triangulaire sont bloqués et $[\Psi_{22^+}]$ est inversibile. L'inversibilité de $[\Psi_{22^+}]$ est également garantie si les ressorts sont totalement endommagés mais qu'un (au moins) est dans un état de compression.



FIGURE 2.13 – Interprétation mécanique des sous-matrices $[\Psi_{22\pm}]$

Dans [Liu et al., 2013] les auteurs affirment que tant que $[\alpha] \neq [0]$ il est possible de calculer $[\psi_{22^{\pm}}]^{-1}$. Ce n'est cependant plus valable en 3D. Considérons par exemple le tétraèdre augmenté de la Figure 2.14. Si les ressorts aux noeuds 5 et 6 sont totalement endommagés et que celui au noeud 7 est intact on a bien $[\alpha] \neq [0]$ mais un MCR est possible : une rotation autour de l'axe formé par les noeuds 4 et 7. $[\psi_{22^{\pm}}]$ sera donc singulière.



FIGURE 2.14 – Représentation de $[\Psi_{22^+}]$ dans un élément augmenté en 3D

Les matrices $[A] = [\Psi_{22^+}] - l^2[\alpha] [\Psi_{22^-}][\alpha]$ et $[B] = [\Psi_{22^-}] - l^2[\alpha] [\Psi_{22^+}][\alpha]$ doivent également être inversées. Aucune interprétation mécanique aisée de ces matrices n'a été trouvée. Nous avons cependant observé que $Rank(A) \ge Rank(\Psi_{22^+})$ et que $Rank(B) = Rank(\Psi_{22^-})$. La déficience de rang de $[\Psi_{22^+}]$ peut donc engendrer la singularité de [A]. [B] est par contre systématiquement inversible (en 2D). La prévision du rang de ces matrices nécessiterait une étude mathématique plus poussée. La présente étude permet néanmoins de mieux comprendre l'apparition des singularités. Les auteurs d'AFEM sont restés silencieux quant aux moyens de les traiter.

2.3.6.4 La méthode des éléments finis augmentés et pseudo-inversés

Des matrices de raideur non-inversibles sont souvent rencontrées dans les formulations EFEM. Les solutions employées pour traiter les singularités reposent sur l'utilisation d'un paramètre stabilisant à calibrer [Linder and Armero, 2007,Dujc et al., 2013] ou le recours à une ouvertures de fissure constante [Manzoli and Shing, 2006]. La formulation d'AFEM ne se prête cependant pas à ces démarches. Les inverses généralisés permettent d'étendre la notion d'inverse aux matrices singulières. Un inverse généralisé appelé pseudo-inverse ou inverse de Moore-Penrose et noté † sera donc employé. Son existence ainsi que son unicité ont été prouvées et il satisfait les quatre conditions suivantes :

$$MM^{\dagger}M = M \tag{2.80}$$

$$M^{\dagger}MM^{\dagger} = M^{\dagger} \tag{2.81}$$

$$(MM^{\dagger})^T = MM^{\dagger} \tag{2.82}$$

$$(M^{\dagger}M)^{T} = M^{\dagger}M \tag{2.83}$$

Il permet de trouver la solution de norme euclidienne minimale d'un système d'équations linéaires. Une propriété pratique du pseudo-inverse est que si $Det(M) \neq 0$ alors $M^{-1} = M^{\dagger}$. Son utilisation n'a donc pas

d'influence sur le calcul des déplacements interfaciaux tant que les matrices sont inversibles (durant les premiers stades du processus de fissuration). Aucun paramètre additionnel à calibrer n'est nécessaire et la cinématique d'ouverture des fissures est inaltérée. Les modifications à apporter à une implémentation d'AFEM classique sont mineures : il suffit de remplacer les matrices Ψ_{22}^{-1} et A^{-1} par Ψ_{22}^{\dagger} et A^{\dagger} . Les déplacements interfaciaux se réécrivent par exemple

$$\{\Delta dint\} = \left(A^{\dagger}(l^{2}\alpha\Psi_{22^{-}}^{-1} - lI_{n}) - B^{-1}(-l^{2}\alpha\Psi_{22^{+}}^{\dagger} + lI_{n})\right)\{S_{0}\} + \left\{-A^{\dagger}l\alpha\Psi_{22^{-}}^{-1}L_{21^{-}} + B^{-1}L_{21^{-}} - A^{\dagger}L_{21^{+}} + B^{-1}l\alpha\Psi_{22^{+}}^{\dagger}L_{21^{+}}\right\}\{dext\}$$
(2.84)

Comme évoqué à la Section 2.3.6.2, plusieurs centaines d'ouvertures de fissure, et donc d'inverses et de pseudo-inverses, doivent être calculés par élément à chaque itération. Des formules analytiques sont employées pour inverser rapidement les matrices régulières mais elles ne sont pas applicables aux matrices singulières. Le pseudo-inverse d'une matrice est généralement obtenu grâce à sa décomposition en valeurs singulières (SVD). Pour accroître les performances de l'approche il serait néanmoins préférable d'éviter le recours à la SVD. En remarquant que [α] est diagonale et grâce aux formules de Sherman-Morrison-Woodbury pour les pseudo-inverses [Kovanic, 1979, Henderson and Searle, 1981] une formulation analytique de Ψ_{22+}^{\dagger} et A^{\dagger} peut certainement être obtenue. Par manque de temps cette approche n'a cependant pas pu être menée à bout.

Chapter 3

Validation de l'implémentation et estimation des performances d'AFEM

Contents

2.1	Formulation variationnelle et équations d'équilibre discrétisées						
2.2	.2 Élements à discontinuités faibles						
	2.2.1	Calcul des déplacements interfaciaux	2				
	2.2.2	Matrice de raideur élémentaire condensée	3				
2.3	2.3 Élements à discontinuités fortes						
	2.3.1	Loi de comportement de l'interface: linéaire par morceaux et faiblement couplée 4	3				
	2.3.2	Schémas d'intégration des contraintes cohésives	4				
		2.3.2.1 Formules d'intégation de Newton-Cotes (N-Cis) 4	17				
		2.3.2.2 Formules d'intégration de Gauss (Gis)	8				
	2.3.3	Calcul des déplacements interfaciaux					
	2.3.4	3.4 Le consistency-check					
	2.3.5 Matrice de raideur condensée $\ldots \ldots \ldots$						
	2.3.6 Remarques supplémentaires		51				
		2.3.6.1 Différences d'implémentation	51				
		2.3.6.2 Avantages et inconvénients de l'algorithme de consistency-check 5	52				
		2.3.6.3 Inversibilité des matrices de raideur des sous-domaines 5	63				
		2.3.6.4 La méthode des éléments finis augmentés et pseudo-inversés $\ldots \ldots 5$	64				

La méthode des éléments finis augmentés est sujette à de nombreuses erreurs d'implémentation. L'auteur de cette thèse a cherché à s'assurer, autant que possible, que l'implémentation réalisée était exempte d'erreurs. Une attention particulière a été portée à la vérification du code prototype développé, l'intégration des matrices de raideur, l'intégration des contraintes cohésives, l'algorithme de consistency-check ou la TSL linéaire par morceaux. Des tests de validation tirés de la littérature ont donc été réalisés. Nous en présentons deux à la Section 3.1. Grâce à une analyse détaillée des matrices de raideur employées dans AFEM et dans la discrete crack approach (DCA) nous sommes parvenus à démontrer l'équivalence de ces deux méthodes à la Section 3.2. Cette équivalence nous a permis de concevoir un test de vérification de l'implémentation plus exhaustif que ceux rencontrés dans la littérature. La précision d'AFEM est ensuite évaluée à l'aide d'indicateurs objectifs à la Section 3.3. Enfin, des simulations de propagation de fissures sont réalisées afin d'estimer le degré de dépendance au maillage de la méthode à la Section 3.4.

3.1 Tests de vérification classiques

3.1.1 Tests proposés par le groupe de Yang

Les auteurs d'AFEM ont présenté des tests de vérification de l'implémentation dans [Liu et al., 2013]. Ces derniers permettent de se focaliser sur la validation de la TSL. Pour ce faire, des modules élastiques importants sont assignés aux éléments utilisés. De cette manière, la réponse du système mécanique provient principalement de la zone cohésive insérée dans les éléments finis augmentés (AFE). Le Q4 représenté à la Figure 3.1 est adopté pour chacun des cas de charge. La structure sera successivement sollicitée en modes I, II et I+II. Nous avons choisi d'augmenter l'élément à priori: une discontinuité forte est présente dès le début de la simulation.



Figure 3.1 - AQ4-1 considéré pour la validation de l'implémentation d'AFEM (coordonnées en mm)

3.1.1.1 Essai en mode I

Pour générer une sollicitation en mode I, un déplacement vertical, v, est imposé aux noeuds 3 et 4 alors que les noeuds 1 et 2 sont encastrés. Les conditions aux limites s'écrivent:

$$\begin{cases} u_x(x=0.1; y=0.15) = u_y(x=0.1; y=0.15) = 0\\ u_x(x=0.5; y=0) = u_y(x=0.5; y=0) = 0\\ u_y(x=0.2; y=0.35) = u_y(x=0.4; y=0.42) = v \end{cases}$$

La structure est soumise à un chargement de traction/compression alterné. Comme prévu, l'ouverture de fissure est constante le long de l'interface et aucun déplacement horizontal n'est observé (cf. Figure 3.2). Par conséquent, les contraintes cohésives aux deux points d'intégration de la TSL sont identiques (voir Figures 3.3 et 3.4).



Figure 3.2 – État de contrainte principale maximale lors d'un chargement en mode I (déplacements amplifiés x10)

Le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau sont $E = 4 \times 10^8 MPa$ et $\nu = 0$ respectivement. Le comportement normal de la TSL est représenté à la Figure 3.3. Son comportement tangentiel n'a pas d'impact sur les résultats et ne sera donc pas explicité. La raideur de la zone cohésive est de l'ordre de $10^5 N/mm$ alors que celle des matrices de raideur des sous-domaines ($[L^+]$ et $[L^-]$ voir Eq. 2.14) est de $10^8 N/mm$. Le bulk est donc approximativement 100 fois plus raide que l'interface. Pour déceler une éventuelle erreur dans l'algorithme de consistency-check nous vérifions que les contraintes cohésives calculées sont en accord avec la TSL. C'est effectivement le cas (voir Figure 3.3) quel que soit le schéma d'intégration utilisé (N-Cis ou Gis).



Figure 3.3 – Contrainte normale aux deux points d'intégration de la TSL au cours du chargement en mode I

Comme les contraintes cohésives sont uniformes le long de l'interface une autre vérification peut être envisagée. La somme des efforts de réaction verticaux aux noeuds 3 et 4 divisée par l'aire de la fissure, S, doit être égale à la contrainte interfaciale normale. La Figure 3.4 le confirme.



Figure 3.4 – Comparaison entre la contrainte normale interfaciale et les contraintes induites par les efforts de réaction aux noeuds 3 et 4

3.1.1.2 Essai en mode II

Pour solliciter la structure en mode II, nous imposons un déplacement horizontal, u, aux noeuds 3 et 4 alors que les noeuds 1 et 2 sont encastrés. Les conditions limites suivantes sont employées:

$$\begin{cases} u_x(x=0.1; y=0.15) = u_y(x=0.1; y=0.15) = 0\\ u_x(x=0.5; y=0) = u_y(x=0.5; y=0) = 0\\ u_x(x=0.2; y=0.35) = u_x(x=0.4; y=0.42) = u \end{cases}$$

La zone cohésive est soumise à des contraintes tangentielles alternées avant la rupture finale. Comme prévu, l'ouverture tangentielle est constante le long de l'interface et aucun déplacement vertical n'est observé (voir Figure 3.5). Une fois encore, les contraintes cohésives aux deux points d'intégration sont identiques (voir Figures 3.6 et 3.7).



Figure 3.5 – État de contrainte principale maximale lors d'un chargement en mode II (déplacements amplifiés x100)

Le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau sont $E = 4 \times 10^{10} MPa$ et $\nu = 0$. Le comportement tangentiel de la TSL employée est tracé à la Figure 3.6. Son comportement normal n'a pas d'impact sur les résultats et ne sera donc pas explicité. L'ordre de grandeur de la raideur interfaciale de la zone cohésive est $10^5 N/mm$ alors que celui des matrices de raideur des sous-domaines est $10^{10} N/mm$. Le bulk est approximativement 10^5 fois plus raide que l'interface. Il peut donc être assimilé à un solide indéformable. Pour déceler une éventuelle erreur dans l'algorithme de consistency-check on s'assure que les contraintes cohésives calculées sont en accord avec la TSL (cf. Figure 3.6). Les résultats obtenus se sont avérés insensibles aux schémas d'intégration utilisés.



Figure 3.6 – Contrainte tangentielle aux deux points d'intégration de la TSL au cours du chargement en mode II

Les contraintes cohésives sont uniformes le long de l'interface. On vérifie que la somme des efforts de réaction horizontaux aux noeuds 3 et 4 divisée par l'aire de la discontinuité, S, est égale à la contrainte interfaciale tangentielle. La Figure 3.7 le confirme.



Figure 3.7 – Comparaison entre la contrainte tangentielle interfaciale et les contraintes induites par les efforts de réaction aux noeuds 3 et 4

3.1.1.3 Essai en mode mixte

Pour générer une sollicitation en mode mixte on impose des conditions aux limites paramétrées par la valeur de w:

$$\begin{cases} u_x(x=0.1; y=0.15) = u_y(x=0.1; y=0.15) = 0\\ u_x(x=0.5; y=0) = u_y(x=0.5; y=0) = 0\\ u_x(x=0.2; y=0.35) = u_x(x=0.4; y=0.42) = w\\ u_y(x=0.2; y=0.35) = u_y(x=0.4; y=0.42) = w \end{cases}$$

Le test en mode mixte permet de vérifier que le couplage faible entre les modes I et II est correctement implémenté. On rappelle que la ruine de la zone cohésive a lieu lorsque que le critère d'interaction suivant est satisfait:

$$\frac{G_I}{G_{Ic}} + \frac{G_{II}}{G_{IIc}} \ge 1 \tag{2.30}$$

où G_{Ic} et G_{IIc} sont les énergies de rupture du matériau en mode I et II respectivement. Les propriétés assignées à l'interface et au bulk font que ce dernier est assimilable à un solide indéformable (voir Figure 3.8). Le module de Young et le coefficient de Poisson utilisés sont $E = 4 \times 10^8 MPa$ et $\nu = 0$. Les comportements normaux et tangentiels de la TSL sont tracés à la Figure 3.9.



Figure 3.8 – État de contrainte principale maximale lors d'un chargement en mode mixte (déplacements amplifiés x50)

Les taux de restitution d'énergie critique du matériau en modes purs sont $G_{Ic} = 2kJ/m^2$ et $G_{IIc} = 1.2kJ/m^2$. La rupture survient lorsque $G_I = 1.19kJ/m^2$ et $G_{II} = 0.53kJ/m^2$ (cf. Figure 3.9). Le critère d'interaction s'écrit alors $\frac{G_I}{G_{Ic}} + \frac{G_{II}}{G_{IIc}} \simeq 1.04$. Son implémentation est donc correcte.



Figure 3.9 – Contraintes interfaciales aux points d'intégration de la TSL en fonction de l'ouverture a) contrainte normale vs ouverture normale b) contrainte tangentielle vs ouverture tangentielle

3.1.2 Tests développés par Linder et Armero

Des solutions analytiques à des essais simples mais instructifs ont été présentées dans [Linder and Armero, 2007]. De nombreux chercheurs les ont par la suite employées pour tester leurs éléments à discontinuité (voir, par exemple, [Dujc et al., 2013, Oliver et al., 2014, Wu et al., 2015]). L'objectif premier de ces tests n'est pas la validation d'une implémentation mais l'évaluation des performances d'éléments à discontinuité (vis à vis de la stabilité et du stress-locking). On peut donc considérer ces essais comme des benchmarks. Ils permettent néanmoins de repérer des erreurs d'implémentation. Contrairement aux simulations de la section précédente, les éléments ne sont pas initialement enrichis.

La structure considérée est le bloc isotrope de $200 \times 200 \times 1 \ mm^3$ représenté à la Figure 3.10. Une fois la limite élastique du matériau atteinte, une discontinuité (représentée par la ligne rouge de la Figure 3.10) est insérée dans la structure et la sépare en deux parties de tailles égales.



Figure 3.10 - Structure considérée lors des tests de vérification de Linder et Armero

On fait l'hypothèse d'un état de contraintes planes, le module de Young du matériau est E = 30 GPa et son coefficient de Poisson $\nu = 0.2$. La limite d'élasticité en traction est $ft_I = 3 MPa$ et l'énergie de rupture en mode I est $G_{Ic} = 0.1 N/mm$. Aucune dissipation d'énergie en mode II n'a lieu durant ces tests. Les propriétés associées ($ft_{II} = 1 MPa$ et $G_{IIc} = 0.035 N/mm$) n'ont donc pas d'influence sur le comportement de la structure. La TSL adoptée est tracée à la Figure 3.11.



Figure 3.11 – Loi de comportement de l'interface en modes I et II

Afin de tester les éléments AT3, AQ4-1 et AQ4-2, six discrétisations sont employées (cf. Figure 3.12). Les maillages 1 et 2 permettent de vérifier l'implémentation du AQ4-1 alors que les maillages 3 et 4-6 sont utilisés pour valider l'AQ4-2 et l'AT3 respectivement. Les solutions analytiques fournies en Appendice A de [Linder and Armero, 2007] ne peuvent être utilisées qu'avec des maillages comprenant deux noeuds sur les arêtes "x = 0" et "x = 200". Par conséquent seules les discrétisations 1 et 3 ont été considérées dans cette publication (le maillage 4 aurait également pu y être testé). Il n'est pas systématiquement possible d'obtenir de solutions exactes avec les autres maillages. Ils apportent néanmoins un éclairage supplémentaire sur le comportement des AFE.



Figure 3.12 – Discrétisations considérées lors des tests de Linder et Armero

3.1.2.1 Essai de traction uniforme

Le premier test de validation de l'implémentation est un essai de traction uniforme (voir Figure 3.13). Les conditions aux limites suivantes sont imposées:

$$\begin{cases} u_x(x = 200; y) = \delta \\ u_x(x = 0; y) = -\delta \\ u_y(x = 0; y = 0) = 0 \\ u_y(x = 200; y = 0) = 0 \end{cases}$$

La fissure doit s'ouvrir en mode I et de manière uniforme. Linder et Armero ont fourni l'expression analytique des efforts de réaction (ER) horizontaux aux noeuds situés aux quatre sommets de la structure (p.-ex. les noeuds 3 à 6 du maillage 3) en fonction du déplacement imposé δ . Les quatre ER ont la même norme au cours de ce test. Une solution exacte et valable pour tous les maillages considérés peut aisément être obtenue. Plutôt que de se focaliser sur les ER aux sommets de la structure, on les calcule sur l'arête "x = 200" et on appelle **F** le résultat (voir Figure 3.13). La solution analytique du problème s'obtient simplement: l'expression fournie dans [Linder and Armero, 2007] doit être multipliée par 2. La solution élément fini s'obtient en additionant les ER aux noeuds de l'arête "x = 200" (p.-ex. les noeuds 9,14,13 et 8 du maillage 6).



Figure 3.13 – Test de traction uniforme: conditions aux limites

Les valeurs imposées à δ sont telles que la structure est d'abord endommagée en traction puis soumise à un état de compression avant la rupture finale en traction (cf. Figure 3.14).



Figure 3.14 – Test de traction uniforme: déplacement imposé δ au cours du test

AQ4-1

Les résultats obtenus avec l'élément AQ4-1 sont en accord avec la solution analytique (cf. Figure 3.15). Le schéma d'intégration employé (Gauss ou Newton-Cotes) n'a pas d'influence notable sur les résultats obtenus.



Figure 3.15 – AQ4-1: effort de réaction sur l'arête "x = 200", **F**, en fonction du déplacement imposé, δ

AQ4-2

Les ER obtenus avec l'élément AQ4-2 dévient notablement de la solution analytique (cf. Figure 3.16). L'examen du champ de déplacement dans la structure permet d'en comprendre la cause: un point d'intégration de la TSL s'endommage pendant que l'autre est dans un état de compression (voir Figure 3.18a). Le schéma d'intégration choisi a peu d'impact sur ce comportement indésirable.



Figure 3.16 – AQ4-2: effort de réaction sur l'arête "x = 200" en fonction du déplacement imposé δ avec un schéma d'intégration de Gauss et de Newton-Cotes

AT3

Le comportement observé avec les maillages 4 et 5 est similaire à celui obtenu avec le maillage 3. Dans chacun des éléments augmentés un des points d'intégration de la TSL est en compression pendant que l'autre s'endommage en traction (cf. Figure 3.18b et 3.18c). Le raffinement du maillage n'améliore pas notablement ces résultats (voir Figure 3.17).

uniform tensile test: AT3



Figure 3.17 – AT3: effort de réaction sur l'arête "x = 200", **F**, en fonction du déplacement imposé δ , a) maillage 4, b) maillage 5



Figure 3.18 – État de contrainte dans la structure au cours de l'essai (déplacements amplifiés x1000) a) maillage 3, b) maillage 4, c) maillage 5

Les résultats inattendus obtenus avec les éléments AT3 et AQ4-2 ne proviennent pas d'une erreur d'implémentation mais reflètent la mauvaise performance des éléments. L'analyse approfondie de la cinématique des discontinuités fortes au sein des AFE réalisée à la Section 3.2 est nécessaire à la compréhension de ces comportements. Il est en effet difficile, à ce stade de l'étude, de comprendre pourquoi la réponse obtenue avec le maillage 6 est en excellent accord avec la solution analytique (cf. Figure 3.19) alors que des différences notables sont observées avec les discrétisations 3,4 et 5.



Figure 3.19 – AT3 maillage 6: a) effort de réaction sur l'arête, b) état de contrainte au cours de l'essai (déplacements amplifiés x1000)

3.1.2.2 Essai de flexion

L'essai de flexion est initialement identique à celui de traction: le bloc est soumis à un déplacement uniforme à ses extrémités jusqu'à ce que la limite d'élasticité en traction du matériau soit atteinte. Une discontinuité verticale est alors insérée dans la structure. Le déplacement imposé aux extrémités cesse alors d'être uniforme. Une distribution linéaire de l'incrément de déplacement est prescrite (cf. Figure 3.20). L'incrément de déplacement au bas du bloc est deux fois plus important qu'en haut du bloc. Les conditions limites sont paramétrées par la valeur donnée à δ_{top} :

$$\begin{cases} u_x(x = 200; y) = (2 - \frac{y}{200})\delta_{top} \\ u_x(x = 0; y) = -(2 - \frac{y}{200})\delta_{top} \\ u_y(x = 0; y = 0) = 0 \\ u_y(x = 200; y = 0) = 0 \end{cases}$$



Figure 3.20 – Test de flexion: conditions aux limites imposés

Comme pour le test précédent, les solutions analytiques des ER aux quatre sommets de la structure sont données dans [Linder and Armero, 2007]. Aucune expression exacte des ER n'est disponible dans le cas où plus de deux noeuds sont situés sur les arêtes latérales (maillages 2, 4 et 6). Les résultats obtenus avec ces discrétisations seront donc discutés qualitativement. La structure est d'abord endommagée en flexion puis soumise à un état de compression avant la rupture finale en flexion (cf. Figure 3.21). Les schémas d'intégration de Newton-Cotes et de Gauss fournissent des résultats similaires.



Figure 3.21 – Test de flexion: déplacements imposés δ_{bot} et δ_{top} en fonction du pseudo-temps

AQ4-1

Les résultats obtenus avec le maillage 1 sont en accord avec la solution analytique (cf. Figure 3.22). Il peut sembler surprenant de voir l'effort de réaction F_{top} devenir négatif alors que δ_{top} est encore positif. Cela est dû au chargement non-proportionnel imposé (cf. Figure 3.21): δ_{bot} devient négatif avant δ_{top} . Par conséquent, le point d'intégration d'ordonnée la plus faible entre dans un état de compression avant celui situé plus haut (cf. Figure 3.23).



Figure 3.22 – AQ4-1: efforts de réaction en fonction des déplacements imposés



Figure 3.23 – Déformée de la structure avant l'apparition de contraintes interfaciales de compression (déplacements amplifiés x100)

On ne dispose pas de solutions exactes pour des maillages tel que le $n^{o}2$. Une ouverture de fissure linéaire similaire à celle observée avec le maillage 1 est néanmoins observée (cf. Figures 3.26-1 et 3.26-2). Le comportement du AQ4-1 est donc pleinement satisfaisant.

AQ4-2

Les ER obtenus avec l'élément AQ4-2 dévient notablement de la solution analytique (cf. Figure 3.24). La raison est la même que lors de l'essai de traction uniforme: un point d'intégration de la TSL s'endommage pendant que l'autre est dans un état de compression (cf. Figure 3.26-3).



Figure 3.24 - AQ4-2: efforts de réactions en fonction du déplacement imposé

AT3

Les remarques faites avec l'AQ4-2 s'appliquent également à l'AT3: *i*) l'énergie dissipée a le bon ordre de grandeur mais les ER ne sont pas en accord avec la solution analytique (cf. Figure 3.25), *ii*) l'ouverture de fissure n'est pas linéaire (voir Figure 3.26-4), *iii*) raffiner le maillage n'améliore pas significativement les résultats (cf. Figure 3.26-5). Une fois encore les résultats obtenus avec le maillage 6 sont nettement meilleurs qu'avec le 4 ou le 5 (voir Figure 3.26-6).



Figure 3.25 – AT3: efforts de réaction en fonction du déplacement imposé



Figure 3.26 – État de contrainte durant l'essai de flexion (déplacements amplifiés x100)

3.1.3 Conclusions sur la validation de l'implémentation

Les résultats des tests de la Section 3.1.1 suggèrent que l'implémentation de la TSL et des schémas d'intégration des contraintes cohésives est correcte. Les essais menés à la Section 3.1.2 renforcent cette impression. En effet, l'ordre de grandeur des énergies dissipées est systématiquement bon. L'introduction des discontinuités ainsi que la raideur des structures sont consistantes avec les solutions analytiques. Cela laisse à penser que l'écriture des matrices de raideur sécante et leurs assemblages sont exempts d'erreurs. La convergence des calculs nécessite peu d'itérations (deux tout au plus) même en présence de contact entre les lèvres de la fissure. L'implémentation de la matrice de raideur tangente est donc correcte (des essais spécifiques ont été réalisés pour s'en assurer mais ils ne seront pas détaillés).

Les résultats obtenus avec l'élément AQ4-1 sont en parfait accord avec les solutions analytiques pour l'ensemble des cas de charge considérés. Des différences notables avec les solutions exactes sont constatés lorsque les éléments AQ4-2 et AT3 sont employés. Elles ne sont cependant pas liées à des erreurs d'implémentation. Leur cause sera déterminée grâce à l'étude approfondie d'AFEM réalisée à la section suivante. Cette analyse permettra de mieux comprendre pourquoi l'utilisation du maillage 6 a donné de meilleurs résultats que celle du maillage 5.

3.2 Une analyse approfondie de la méthode des éléments finis augmentés

3.2.1 Description cinématique des discontinuités fortes :

Dans cette section nous nous intéressons à la description cinématique des discontinuités fortes au sein des éléments augmentés. Nous mettons en lumière ses différences vis à vis de XFEM et d'autres EFEMs. Les similitudes entre la discrete crack approach (DCA) [Lotfi and Shing, 1995] et AFEM sont soulignées à la Section 3.2.1.2 et l'équivalence entre ces deux méthodes est démontrée à la Section 3.2.2.

3.2.1.1 avec XFEM et les EFEMs « classiques »

Les fonctions de forme utilisées pour décrire une discontinuité forte au sein d'éléments finis augmentés (AFEs) diffèrent considérablement de celles employées avec XFEM ou d'autres EFEM. Dans les deux méthodes précédemment mentionnées, le déplacement, u, au sein d'un élément enrichi occupant le volume Ω , est décrit grâce à deux champs superposés (voir, entre autres, [Belytschko and Black, 1999, Wells and Sluys, 2001a, Remmers et al., 2003] pour XFEM et [Simo et al., 1993, Oliver, 1996a, Bolzon, 2001, Jirasek and Belytschko, 2002, Dias-da Costa et al., 2009a] pour EFEM). Il s'écrit en effet comme la somme d'un champ continu, \bar{u} , et d'un champ discontinu, \hat{u} :

$$\underbrace{u(\mathbf{x})}_{\text{champ de déplacement}} = \underbrace{\bar{u}(\mathbf{x})}_{\text{partie continue}} + \underbrace{\hat{u}(\mathbf{x})}_{\text{partie discontinue}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$
(3.1)

Le champ de déplacement continu est systématiquement représenté grâce aux fonctions de forme des éléments finis standards, N_i :

$$\bar{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) \bar{u}_i \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$
(3.2)

où ${\mathcal N}$ est l'ensemble des noeuds externes de l'élément enrichi

L'interpolation du champ discontinu diffère selon les variantes de XFEM et d'EFEM considérées. La plus communément employée des XFEM utilise la fonction de Heaviside généralisée \mathcal{H} et des fonctions de forme identiques pour interpoler les parties continues et discontinues du champ de déplacement [Sukumar et al., 2015]. Des degrés de liberté additionnels, \bar{a}_i , localisés aux noeuds externes de l'élément sont également introduits.

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(\mathbf{x}) \mathcal{H}(\mathbf{x}) \bar{a_i} \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{H}(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & x \in \Omega^- \\ 1 & x \in \Omega^+ \end{cases}$$
(3.3)

où Ω^+ et Ω^- sont les sous-domaines de Ω situés de part et d'autre de la fissure.

Les premières formulations EFEM (nommées « classiques » dans la suite de ces travaux) n'autorisaient qu'une cinématique de fissure limitée : une ouverture de fissure constante appelée mode de discontinuité constant [Jirásek, 2000, Linder and Armero, 2007, Wu, 2011]. Certaines EFEM semblent néanmoins décrire les aspects cinématiques d'une fissure de façon satisfaisante. Elles ont donc été appelées *kinematically optimal symmetric* (KOS) dans [Jirásek, 2000]. L'élément présenté dans [Lotfi and Shing, 1995] est vraisemblablement le premier EFE-KOS [Jirásek, 2000, Wu, 2011, Zhang et al., 2015]. La partie discontinue du champ de déplacement s'y écrit :

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \left(\mathcal{H}_{\omega}(\mathbf{x}) - \sum_{i \in \mathcal{N}^+} \mathcal{H}_{\omega}(\mathbf{x}_i) N_i(\mathbf{x})\right) e \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{H}_{\omega}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & x \in \Omega^-\\ 1 & x \in \Omega^+ \end{cases}$$
(3.4)

où \mathcal{N}^+ représente l'ensemble des noeuds extérieurs appartenant à Ω^+ et e le vecteur des degrés de liberté situés sur la discontinuité et représentant l'ouverture de fissure homogène.

Le développement d'EFEMs incorporant des sauts de déplacement non-homogènes a débuté dans les années 2000. (voir, entre autres, [Bolzon, 2001, Alfaiate et al., 2003, Manzoli and Shing, 2006, Linder and Armero, 2007, Dias-da Costa et al., 2009a, Dujc et al., 2013, Wu et al., 2015]).

3.2.1.2 avec AFEM

Le champ de déplacement au sein d'un AFE s'écrit :

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u^+(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ u^-(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases}$$
(3.5)

L'interpolation des champs u^+ et u^- est réalisée grâce aux fonctions de forme des éléments finis (FEs) standards. Ces dernières ont pour support Ω^+ ou Ω^- :

$$u^{\pm}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{M}^{\pm}} N_i^{\pm}(\mathbf{x}) d_i^{\pm} \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega^{\pm}$$
(3.6)

où \mathcal{M}^{\pm} est l'ensemble des noeuds internes et externes appartenant à Ω^{\pm} et d_i^{\pm} sont les vecteurs des degrés de liberté situés aux extrémités de la discontinuité.

3.2.1.3 Discussions

La description cinématique d'une discontinuité forte au sein d'un élément augmenté ne fait appel à aucun champ continu sur Ω . Les équations (3.1) et (3.5) illustrent une différence fondamentale entre AFEM et d'autres EFEMs « classiques » ou XFEM : avec ces dernières l'élément fissuré est modélisé grâce à deux solides superposés alors que deux sous-domaines non-superposés sont employés avec AFEM. Comme stipulé dans [Linder and Armero, 2007, Wu et al., 2015], Eq.(3.1) peut être considérée comme une décomposition hiérarchique du champ de déplacement, similaire à celle de la variational multiscale method [Hughes et al., 1998]. \bar{u} y est interprété comme le champ de déplacement à l'« échelle grossière », continu sur Ω , et \hat{u} comme celui à l'« échelle fine » et discontinu sur Ω (Hugues utilisent les termes « coarse scale » et « fine scale »). La décomposition du déplacement (3.5) est identique à celle obtenue lors du maillage explicite de la fissure avec des éléments standards. Du point de vue de l'auteur, le remaillage est conceptuellement le moyen le plus simple pour représenter une fissure. Cette décomposition a donc été appelée décomposition naturelle du champ de déplacement dans la suite de ces travaux.

Pour comparer les méthodes susmentionnées nous traçons les fonctions de forme qu'elles emploient (Eq. 3.2-3.4 et 3.6) dans un cas unidimensionnel. Considérons la barre 1D discrétisée avec trois éléments finis linéaires et supposons que la structure est fissurée en $x = \xi$ (cf. Figure 3.27). L'élément fissuré occupe un domaine nommé Ω . Soit *i* l'indice attribué aux noeuds externes situés en $x = x_i$ et soit ξ^{\pm} les noeuds internes localisés sur la fissure et appartenant à Ω^{\pm} . On s'intéresse au champ de déplacement dans l'élément enrichi. Seules les fonctions de forme dont le support inclut $\Omega = x \in [x_2, x_3]$ seront donc étudiées.



FIGURE 3.27 – Géométrie de la barre 1D et position des degrés de liberté de l'élément fissuré avec XFEM, EFEM et AFEM

Le champ de déplacement total dans l'élément fissuré s'écrit avec XFEM (Eq. 3.2 et 3.3) :

$$u_{XFEM}(\mathbf{x}) = N_2(\mathbf{x})\bar{u}_2 + \mathcal{H}(\mathbf{x})N_2(\mathbf{x})\bar{a}_2 + N_3(\mathbf{x})\bar{u}_3 + \mathcal{H}(\mathbf{x})N_3(\mathbf{x})\bar{a}_3$$
(3.7)

Avec EFEM, le champ de déplacement dans l'élément enrichi prend la forme (Eq. 3.2 et 3.4) :

$$u_{EFEM}(\mathbf{x}) = N_{2}(\mathbf{x})\bar{u}_{2} + N_{3}(\mathbf{x})\bar{u}_{3} + (\mathcal{H}_{w}(\mathbf{x}) - \mathcal{H}_{w}(x_{3})N_{3}(\mathbf{x}))e = N_{2}(\mathbf{x})\bar{u}_{2} + N_{3}(\mathbf{x})\bar{u}_{3} + (\mathcal{H}_{w}(\mathbf{x}) - N_{3}(\mathbf{x}))e = N_{2}(\mathbf{x})\bar{u}_{2} + N_{3}(\mathbf{x})\bar{u}_{3} + \mathcal{G}(\mathbf{x})e$$
(3.8)

Le champ de déplacement au sein d'un AFE est (Eq. 3.6) :

$$u_{AFEM}(\mathbf{x}) = \begin{cases} N_{\xi^+}(\mathbf{x})u_{\xi^+} + N_3(\mathbf{x})u_3 & \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ N_{\xi^-}(\mathbf{x})u_{\xi^-} + N_2(\mathbf{x})u_2 & \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases}$$
(3.9)

Les fonctions de base utilisées avec AFEM, XFEM et EFEM sont tracées à la Figure 3.28. Les différences entre ces méthodes ainsi que les particularités d'AFEM sont discutées ci-après.


FIGURE 3.28 – Fonctions de base utilisées pour représenter une discontinuité en 1D. (a)-(d) XFEM, (e)-(h) AFEM, (i)-(k) EFEM

Champs de déformations dans les éléments enrichis

On s'intéresse ici à l'interpolation du champ de déformation de part et d'autre de la discontinuité en s'inspirant d'un raisonnement proposé dans [Jirásek, 2014]. Si la discontinuité au point $x = \xi$ est exclue, la dérivée de la fonction \mathcal{G} (introduite à l'équation 3.8) s'écrit :

$$G_{,x} = -N_{3,x}(\mathbf{x}) \tag{3.10}$$

Par conséquent, l'utilisation d'une EFEM donne lieu au champ de déformation (en $x \neq \xi$) suivant :

$$\epsilon_{EFEM}(\mathbf{x}) = u_{,x}(\mathbf{x}) = N_{2,x}(\mathbf{x})\bar{u_2} + N_{3,x}(\mathbf{x})(\bar{u_3} - e)$$
(3.11)

Comme l'élément est linéaire, les dérivées de ses fonctions de forme, et par conséquent $\epsilon_{EFEM}(\mathbf{x})$, sont constants. Ainsi, EFEM peut reproduire un saut de déplacement arbitraire au niveau de la discontinuité mais les déformations de part et d'autre de la fissure doivent être égales. Les déformations dans Ω^+ et Ω^- ne sont donc pas indépendantes. Ces deux sous-domaines sont cinématiquement couplés, même une fois l'interface totalement endommagée. Ce n'est pas le cas avec XFEM ou AFEM. En effet, les fonctions de la discontinuité ne sont pas cinématiquement couplés. Ce découplage cinématique est également une propriété de XFEM. Le champ de déformation au sein d'un élément étendu s'écrit, en $x \neq \xi$:

$$\epsilon_{XFEM}^{+}(\mathbf{x}) = N_{2,x}(\mathbf{x})\bar{u_2} + N_{3,x}(\mathbf{x})\bar{u_3} + \mathcal{H}N_{2,x^{+}}(\mathbf{x})\bar{a_2} + \mathcal{H}N_{3,x^{+}}(\mathbf{x})\bar{a_3}$$
(3.12)

$$\bar{\epsilon_{XFEM}}(\mathbf{x}) = N_{2,x}(\mathbf{x})\bar{u_2} + N_{3,x}(\mathbf{x})\bar{u_3} + \mathcal{H}N_{2,x^-}(\mathbf{x})\bar{a_2} + \mathcal{H}N_{3,x^-}(\mathbf{x})\bar{a_3}$$
(3.13)

où $\mathcal{H}N_{i,x^{\pm}}$ sont les dérivées des fonctions de base, $\mathcal{H}N_i$, sur Ω^{\pm} .

Comme des fonctions de forme linéaires sont adoptées, les champs de déformation ϵ^+ and ϵ^- sont constants dans les deux sous-domaines mais ils n'ont pas nécessairement les mêmes valeurs. Il est stipulé dans [de Borst et al., 2001, Wells, 2001] que certaines EFEMs ([Oliver, 1996b, Wells and Sluys, 2001b]) sont cinématiquement identiques à des modèles d'endommagement et ne représentent donc pas convenablement une discontinuité. Cette affirmation ne s'applique pas à la méthode des éléments finis augmentés puisqu'elle est équivalente à du remaillage.

Intégration numérique des matrices de raideur

Une attention particulière doit être portée à l'intégration numérique d'une fonction discontinue au sein d'un élément. Une subdivision de l'élément en sous-cellules alignées avec la discontinuité est communément réalisée (cf. Figure 3.29). Cette étape peut s'avérer particulièrement fastidieuse en 3D car de nombreuses sous-cellules doivent être utilisées pour intégrer les fonctions discontinues. Bien que des simplifications de la procédure d'intégration puissent être trouvées dans [Ventura, 2006, Natarajan et al., 2010, Mousavi and Sukumar, 2010] cet aspect est, aujourd'hui encore, un domaine de recherche actif.



FIGURE 3.29 – a) Éléments quadrilatéraux traversés par une fissure b) Sous-cellules générées pour l'intégration numérique, d'après [Moës et al., 1999]

Avec certaines EFEMs la subdivision des éléments n'est pas nécessaire (comme dans [Linder and Armero, 2007] par exemple) et la procédure d'intégration numérique ne nécessite pas d'efforts de codage additionnels. Avec d'autres éléments à discontinuité, la subdivision ne peut être évitée (voir, par exemple, [Dias-da Costa et al., 2009b]). Une procédure d'intégration adaptée à la géométrie des sous-domaines est nécessaire avec AFEM. Toutefois, les fonctions à intégrer sont celles employées dans la FEM standard. On peut donc utiliser les schémas d'intégration classiques de la FEM et ainsi s'affranchir de la génération de sous-cellules (voir Fig. 3.30).



FIGURE 3.30 – Points d'intégration de la matrice de raideur du bulk au sein d'éléments finis augmentés : a) AQ4-1, b) AQ4-2, c) AT3

Nature de la méthode des éléments finis augmentés

Dans un compte rendu des différentes EFEMs publiées avant les années 2000, il a été montré qu'il existait trois classes de formulations EFEM : la *Statically Optimal Symmetric* EFEM (SOS), la *Kinematically Optimal Symmetric* EFEM (KOS) et la *Kinematically and Statically Optimal Non-symmetric* EFEM (KSON) [Jirásek, 2000]. Une comparaison méthodique de ces approches a été faite en assumant une décomposition hiérarchique du champ de déplacement (cf. Eq. 3.1). AFEM est cependant issue d'une décomposition naturelle du champ de déplacement (voir Eq. 3.6). Ainsi, elle s'écarte du cadre de travail développé dans [Jirásek, 2000]. La comparaison des fonctions de forme employées avec EFEM et AFEM renforce cette affirmation. Toutefois, AFEM partage des similitudes avec l'EFEM-KOS. En effet, on peut montrer que *i*) la matrice de raideur des AFEs est symétrique, *ii*) la description cinématique des fissures est satisfaisante (car similaire à du remaillage), *iii*) les champs de déformations sont compatibles avec les champs de déplacement dans les deux sous-domaines, et *iv*) la continuité des tractions entre les sous-domaines est assurée sous forme faible (cf. Eq. 2.15) La méthode des éléments finis augmentés peut donc être considérée comme une EFEM-KOS améliorée.

AFEM partage également de nombreuses similitudes avec la discrete interface approach [Alfaiate et al., 2003, Dias-da Costa et al., 2009a, Dias-da Costa et al., 2009b, Dias-da Costa et al., 2010] aussi appelée Discrete Crack Approach (DCA) dans [Lotfi and Shing, 1995] où le maillage est conforme à la fissure grâce à un élément d'interface inséré entre deux éléments solides. Une correspondance exacte entre les résultats d'essais numériques réalisés avec EFEM et la DCA a été observée dans [Alfaiate et al., 2003]. Il a cependant été reconnu ultérieurement que des différences entre les deux méthodes apparaissaient à mesure que la raideur élastique de la discontinuité augmentait [Dias-da Costa et al., 2009a, Dias-da Costa

et al., 2009b, Dias-da Costa et al., 2010]. Nous montrons dans la section suivante qu'AFEM n'est pas seulement similaire - mais identique - à la DCA, quelles que soient les propriétés matériaux employées.

3.2.2 Preuve de l'équivalence entre AFEM et la discrete crack approach (DCA)

Pour prouver qu'AFEM et la DCA sont deux approches équivalentes on montre qu'elles induisent les mêmes équations d'équilibre discrétisées. Celles d'AFEM ont été présentées au Chapitre 2 (cf. Eq. 2.77). Pour mettre en lumière l'équivalence évoquée, il est cependant nécessaire de les réécrire sous une forme alternative (mais totalement équivalente). Cela sera fait à la Section 3.2.2.1. Les équations d'équilibre discrétisées de la DCA sont ensuite détaillées et l'on montre leur égalité avec celles d'AFEM. Cette égalité permet de mettre au point une nouvelle série de tests afin de valider exhaustivement l'implémentation d'AFEM (voir Section 3.2.2.3).

3.2.2.1 Équations d'équilibre discrétisées : invertible AFEM

La forme alternative des équations d'équilibre condensées d'AFEM provient des travaux de [Liu et al., 2013] (Section 3.1.1). Elle n'est applicable qu'aux éléments augmentés utilisant des matrices de raideur L_{22}^{\pm} inversibles, tel que le AQ4-1 (cf. la discussion sur l'inversibilité des matrices de raideur des sousdomaines au Chapitre 2.3.6.3), et sera donc nommée *invertible augmented finite element method*. Son périmètre d'application limité (le AQ4-1 en 2D) est probablement la raison pour laquelle les auteurs d'AFEM semblent l'avoir aujourd'hui abandonnée.

Les équations d'équilibre discrétisées et non-condensées d'un élément augmenté sont dans un premier temps rappelées :

$$[L_{11^+}] \{ dext^+ \} + [L_{12^+}] \{ dint^+ \} = \{ fext^+ \}$$
(2.19)

$$[L_{11^{-}}]{dext^{-}} + [L_{12^{-}}]{dint^{-}} = {fext^{-}}$$
(2.20)

$$[L_{21^+}] \{ dext^+ \} + [L_{22^+}] \{ dint^+ \} = \{ fint^+ \}$$
(2.21)

$$[L_{21^{-}}] \{ dext^{-} \} + [L_{22^{-}}] \{ dint^{-} \} = \{ fint^{-} \}$$

$$(2.22)$$

(2.19) et (2.20) peuvent être réécrites :

$$\begin{bmatrix} L_{11}^{-} & \\ & L_{11}^{+} \end{bmatrix} \{ dext \} + \begin{bmatrix} L_{12}^{-} & \\ & L_{12}^{+} \end{bmatrix} \{ dint \} = \{ fext \}$$
(3.14)

En exprimant $\{dint^{\pm}\}$ à l'aide de (2.21) et de (2.22) on obtient :

$$\{d_{int}\} = \begin{cases} d_{int}^{-} \\ d_{int}^{+} \end{cases} = \begin{bmatrix} L_{22^{-}}^{-1} \\ -L_{22^{+}}^{-1} \end{bmatrix} \{f_{int}^{-}\} + \begin{bmatrix} -L_{22^{-}}^{-1}L_{21^{-}} \\ & -L_{22^{+}}^{-1}L_{21^{+}} \end{bmatrix} \{d_{ext}\}$$
(3.15)

L'ouverture s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \{\Delta dint\} &= \{dint^+\} - \{dint^-\} \\ &= -[L_{22^+}^{-1}][L_{21^+}]\{dext^+\} + [L_{22^-}^{-1}][L_{21^-}]\{dext^-\} - ([L_{22^+}^{-1}] + [L_{22^-}^{-1}])\{fint^-\} \\ &= [L_{22^-}^{-1}L_{21^-} - L_{22^+}^{-1}L_{21^+}]\{dext\} - ([L_{22^+}^{-1}] + [L_{22^-}^{-1}])\{fint^-\} \end{aligned}$$
(3.16)

En substituant (3.15) dans (3.14) il vient :

$$\begin{bmatrix} L_{11}^{-} & \\ & L_{11}^{+} \end{bmatrix} \{ dext \} + \begin{bmatrix} L_{12}^{-} & \\ & L_{12}^{+} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} L_{22}^{-} \\ -L_{22}^{-+} \end{bmatrix} \{ f_{int}^{-} \} + \begin{bmatrix} -L_{22}^{-1} & L_{21}^{-} \\ & -L_{22}^{-+} L_{21}^{-+} \end{bmatrix} \{ d_{ext} \} = \{ fext \} \quad (3.17)$$

ce qui conduit à :

$$\begin{bmatrix} L_{11}^{-} - L_{12}^{-} L_{22^{-}}^{-1} L_{21^{-}} \\ L_{11}^{+} - L_{12}^{+} L_{22^{+}}^{-1} L_{21^{+}} \end{bmatrix} \{ dext \} + \begin{bmatrix} L_{12}^{-} L_{22^{-}}^{-1} \\ -L_{12}^{+} L_{22^{+}}^{-1} \end{bmatrix} \{ f_{int}^{-} \} = \{ fext \} \quad (3.18)$$

3.2.2.2 Équations d'équilibre discrétisées : discrete crack approach

Avec la DCA (c.-à-d. la FEM classique agrémentée d'éléments d'interface), l'équilibre discrétisé d'un solide fissuré s'écrit :

$$\{f\} = \begin{cases} fext^{-}\\ \lambda int^{-}\\ fext^{+}\\ \lambda int^{+} \end{cases} = \begin{bmatrix} L_{11^{-}} & L_{12^{-}}\\ L_{21^{-}} & L_{22^{-}}\\ & & L_{11^{+}} & L_{12^{+}}\\ & & & L_{21^{+}} & L_{22^{+}} \end{bmatrix} \begin{cases} dext^{-}\\ dint^{-}\\ dext^{+}\\ dint^{+} \end{cases}$$
(3.19)

où $\{f\}$ est le vecteur des efforts extérieurs et $\{\lambda int^{\pm}\}$ sont les efforts extérieurs exercés aux noeuds situés sur la discontinuité. Les efforts cohésifs exercés entre les deux sous-domaines Ω^+ et Ω^- sont modélisés par un élément d'interface dont l'équilibre prend la forme (voir, par exemple, [Rots, 1988, Schellekens and De Borst, 1993]) :

$$\begin{cases} \lambda int^{-} \\ \lambda int^{+} \end{cases} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{cases} dint^{-} \\ dint^{+} \end{cases} = - \begin{cases} fint^{-} \\ fint^{+} \end{cases}$$
(3.20)

L'assemblage de (3.19) et (3.20) donne :

$$\begin{cases} fext^{-}\\ \lambda int^{-}\\ fext^{+}\\ \lambda int^{+} \end{cases} = \begin{bmatrix} L_{11^{-}} & L_{12^{-}} & & \\ L_{21^{-}} & L_{22^{-}} + K & & -K \\ & & L_{11^{+}} & L_{12^{+}} \\ & & -K & L_{21^{+}} & L_{22^{+}} + K \end{bmatrix} \begin{cases} dext^{-}\\ dint^{-}\\ dext^{+}\\ dint^{+} \end{cases}$$
(3.21)

Supposons qu'aucun effort ne soit exercé sur les noeuds de la discontinuité. Eq. (3.21) peut alors être réécrite :

$$\begin{cases} fext^{-} \\ 0 \\ fext^{+} \\ 0 \end{cases} = \begin{bmatrix} L_{11^{-}} & L_{12^{-}} \\ L_{21^{-}} & L_{22^{-}} + K & -K \\ & & L_{11^{+}} & L_{12^{+}} \\ & & -K & L_{21^{+}} & L_{22^{+}} + K \end{bmatrix} \begin{cases} dext^{-} \\ dint^{-} \\ dext^{+} \\ dint^{+} \end{cases}$$
(3.22)

ce qui fournit les relations :

$$[L_{21^+}]\{dext^+\} + [L_{22^+}]\{dint^+\} + [K]\{\Delta dint\} = \{0\}$$
(3.23)

$$[L_{21^{-}}]\{dext^{-}\} + [L_{22^{-}}]\{dint^{-}\} - [K]\{\Delta dint\} = \{0\}$$
(3.24)

conduisant à :

$$\{dint^+\} = -[L_{22^+}^{-1}] \left([L_{21^+}] \{dext^+\} + [K] \{\Delta dint\} \right)$$
(3.25)

$$\{dint^{-}\} = [L_{22^{-}}^{-1}] \left(-[L_{21^{-}}] \{dext^{-}\} + [K] \{\Delta dint\} \right)$$
(3.26)

Les deux équations précédentes permettent de condenser (3.22):

$$\begin{cases} fext^{-} \\ fext^{+} \end{cases} = \begin{bmatrix} L_{11}^{-} - L_{12}^{-} L_{22^{-}}^{-1} L_{21^{-}} \\ L_{11}^{+} - L_{12}^{+} L_{22^{+}}^{-1} L_{21^{+}} \end{bmatrix} \{ dext \} + \begin{bmatrix} L_{12}^{-} L_{22^{-}}^{-1} K \\ - L_{12}^{+} L_{22^{+}}^{-1} K \end{bmatrix} \{ \Delta dint \} \quad (3.27)$$

En substituant (3.20) dans (3.27) il vient :

$$\begin{cases} fext^{-} \\ fext^{+} \end{cases} = \begin{bmatrix} L_{11}^{-} - L_{12}^{-} L_{22^{-}}^{-1} L_{21^{-}} \\ L_{11}^{+} - L_{12}^{+} L_{22^{+}}^{-1} L_{21^{+}} \end{bmatrix} \{ dext \} + \begin{bmatrix} L_{12}^{-} L_{22^{-}}^{-1} \\ -L_{12}^{+} L_{22^{+}}^{-1} \end{bmatrix} \{ fint^{-} \} \quad (3.28)$$

qui est la même équation que celle obtenue avec l'invertible AFEM (Eq. 3.18).

La démonstration ci-dessus prouve donc qu'AFEM et la DCA sont identiques lorsqu'aucun effort n'est exercé sur les noeuds situés sur la discontinuité. Si cette hypothèse est respectée les deux méthodes fournissent les mêmes résultats malgré le fait que moins de degrés de liberté soient nécessaires avec AFEM. Il est intéressant de noter que l'hypothèse susmentionnée est également utilisée dans les EFEMs SOS, KOS et SKON (voir, par exemple, [Jirásek, 2000, Alfaiate et al., 2003, Dias-da Costa et al., 2009a]). À la connaissance de l'auteur, son impact sur la qualité des résultats n'a jamais été analysé dans la littérature. Nous verrons à la Section 3.3 qu'elle a des effets indésirables sur la convergence en h d'AFEM dans la norme énergétique.

3.2.2.3 Un test additionnel de validation de l'implémentation des éléments augmentés

L'équivalence entre AFEM et la DCA permet de proposer un nouveau test de validation de l'implémentation des AFEs, plus exhaustif que ceux rencontrés dans la littérature. En effet, les tests de validation classiques reposent sur des solutions analytiques qui ne peuvent être obtenues que pour des structures de géométries élémentaires soumises à des chargements simples (c.-à-d. des chargements uniaxiaux appliqués sur des éléments comprenant plusieurs plans de symétrie). De plus, certains de ces tests renseignent sur les performances de l'élément plutôt que sur la validité de son implémentation : cette dernière peut être exempte d'erreurs malgré le fait que les résultats numériques et analytiques ne soient pas en accord. À titre d'exemple, les résultats obtenus à la Section 3.1 avec les éléments AT3 et AQ4-2 ne concordent pas parfaitement avec les solutions analytiques. La nouvelle série de test permet de garantir que leur implémentation est néanmoins correcte.

La procédure développée s'affranchit de toute notion de performance. Comme démontré à la Section 3.2.2.2 AFEM et la DCA doivent fournir des résultats identiques si aucun effort extérieur n'est exercé sur les noeuds situés au niveau de la discontinuité. Nous appliquons donc le même chargement arbitraire sur une structure fissurée où la discontinuité est modélisée avec AFEM puis avec la DCA. La validation consiste simplement à vérifier que les résultats (efforts de réaction, contraintes ou déplacements) sont identiques.

La DCA est devenue un outil standard pour représenter des fissures cohésives. Elle est donc disponible dans de nombreux codes industriels. Abaqus a été utilisé pour réaliser les simulations avec la DCA. Cependant, les Q4 disponibles dans ce logiciel utilisent une méthode d'intégration sélective (voir [ABAQUS, 2011]) alors que le Q4 du code prototype est intégré avec un schéma de Gauss à 2×2 points. Cet élément a donc été implémenté dans Abaqus grâce à une routine User ELment (UEL) afin de ne pas fausser l'essai de validation. Pour valider l'implémentation du AQ4-2 un élément pentagonal (P5) a également été rajouté dans Abaqus. Nous ne présenterons que les résultats obtenus avec les éléments AT3 et AQ4-2 dans les exemples qui suivent.

AT3

L'élément AT3 représenté à la Figure 3.31 est utilisé pour le test de validation. La taille de sa matrice de raideur est 6×6 . Lorsque la structure est modélisée avec la DCA, 8 degrés de libertés additionnels sont nécessaires pour représenter la discontinuité ce qui porte la taille de la matrice de raideur à 14×14 .



FIGURE 3.31 – Géométrie de l'AT3 utilisé pour l'essai de vérification (dimensions en mm), (1)-(2) points d'intégration des contraintes cohésives

Le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau sont E = 400000 MPa et $\nu = 0.2$ et on fait l'hypothèse d'un état plan de contraintes. Les efforts cohésifs exercés entre les deux sous-domaines sont calculés grâce à la TSL tracée à la Figure 3.32. La raideur de pénalité assurant que l'ouverture de la zone cohésive est négligeable, jusqu'à ce qu'une contrainte interfaciale critique soit atteinte, a été fixée à 10^8 MPa/mm en modes I et II.



FIGURE 3.32 – TSL employée en modes I et II pour la validation de l'élément AT3

Les noeuds 1 et 2 sont encastrés et des déplacements arbitraires sont imposés au noeud 3 (voir Fig. 3.33).



FIGURE 3.33 – Scénario de chargement non-proportionnel

Les valeurs des efforts de réaction aux noeuds 1, 2 et 3 ainsi que les contraintes aux points d'intégration de la zone cohésive sont relevés tout au long du test (cf. Figures 3.34 et 3.35).



FIGURE 3.34 – Comparaison des efforts de réaction, dans le repère global, obtenus avec la DCA et AFEM



FIGURE 3.35 – Comparaison des contraintes cohésives, dans le repère de la fissure, obtenues avec la DCA et AFEM

Les courbes tracées à la Figure 3.34 illustre la parfaite correspondance entre les résultats obtenus avec AFEM et DCA. On observe néanmoins de légères différences à la Figure 3.35. Jusqu'au 15^{ème} incrément les contraintes interfaciales fournies par Abaqus sont strictement égales. Ce résultat est très surprenant au vu du chargement arbitraire imposé et de la géométrie (quelconque) de la structure. La documentation d'Abaqus stipule que les points d'intégration des contraintes cohésives sont situés aux extrémités de l'élément d'interface [ABAQUS, 2011]. Nous avons donc supposé qu'un N-Cis à deux points était employé pour intégrer les contraintes cohésives. Au vu des résultats obtenus, il semblerait pourtant qu'un schéma différent soit adopté dans ce code de calcul (les contraintes interfaciales tangentielles d'Abaqus semblent être la moyenne de celles d'AFEM). L'écriture d'une UEL permettrait de maîtriser le schéma d'intégration des contraintes cohésives d'Abaqus afin de lever tout doute. Cela n'a pu être réalisé par manque de temps. La bonne concordance entre AFEM et DCA permet néanmoins d'être confiant quant à la correcte implémentation de l'élément AT3 dans le code prototype.

AQ4-2

L'élément AQ4-2 représenté à la Figure 3.36 est employé lors de l'essai de validation. La taille de sa matrice de raideur est 8×8 . Si la structure est modélisée avec la DCA, la taille de sa matrice de raideur double.



FIGURE 3.36 – Géométrie de l'AQ-2 utilisé pour l'essai de vérification (dimensions en mm), (1)-(2) points d'intégration des contraintes cohésives

Le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau sont E = 200000 MPa et $\nu = 0.2$ et on fait l'hypothèse d'un état plan de contraintes. Les efforts cohésifs sont calculés grâce à la TSL de la Figure

3.37. La raideur de pénalité assurant que l'ouverture de la zone cohésive est négligeable, jusqu'à ce qu'une contrainte interfaciale critique soit atteinte, a été fixée à 10^8 MPa/mm en modes I et II.



FIGURE 3.37 – TSL employée en modes I et II pour la validation de l'élément AQ4-2

Les noeuds 1 et 2 sont encastrés et des déplacements arbitraires sont imposés au noeud 3 (voir Fig. 3.38).



FIGURE 3.38 – Scénario de chargement non-proportionnel

Les valeurs des efforts de réaction aux noeuds 1, 2 et 3 ainsi que les contraintes aux points d'intégration de la zone cohésive sont relevées tout au long du test (cf. Figures 3.39 et 3.40).



FIGURE 3.39 – Comparaison des efforts de réaction, dans le repère global, obtenus avec la DCA et AFEM



FIGURE 3.40 – Comparaison des contraintes cohésives, dans le repère de la fissure, obtenues avec la DCA et AFEM

Comme avec l'AT3, une bonne correspondance est observée entre les valeurs d'efforts et de contraintes fournies par AFEM et DCA. On note de légères différences au niveau des contraintes interfaciales tangentielles (cf. Figures 3.39 et 3.40). Ces contraintes sont, une fois de plus, identiques aux deux points d'intégration de l'élément d'interface d'Abaqus. Néanmoins, les résultats obtenus permettent d'être confiant quant à la correcte implémentation de l'élément AQ4-2 dans le code prototype.

3.3 Convergence en h d'AFEM en présence de discontinuités fortes ou faibles

La mise en équation d'un phénomène physique donne lieu à ce que l'on appelle le modèle mathématique. Afin de résoudre les équations du modèle une méthode numérique doit parfois être employée. L'utilisation de cette dernière induit une erreur qu'il est essentiel de maîtriser pour corréler objectivement les résultats expérimentaux et numériques. On peut ainsi garantir que toute différence entre ces résultats est exclusivement imputable au modèle mathématique. S'assurer qu'une méthode numérique est convergente et connaître ses propriétés de convergence (vitesse, stabilité) revêt donc un caractère primordial. C'est un sujet de recherche très présent dans la littérature sur XFEM et, par conséquent, la convergence de ses principales variantes a été démontrée [Babuška and Melenk, 1997,Hansbo and Hansbo, 2004,Nicaise et al., 2011,Burman et al., 2015]. Améliorer leurs précisions ainsi que leurs taux de convergence fait également l'objet de nombreuses études [Chessa et al., 2003,Béchet et al., 2005,Laborde et al., 2005,Fries, 2008].

À la connaissance de l'auteur, il n'existe aucune preuve formelle de la convergence des EFEMs. Ces méthodes sont systématiquement utilisées avec des fissures cohésives qui rendent les problèmes mécaniques non-linéaires et complexifient les preuves de convergence (dans les références susmentionnées les démonstrations sont établies dans le cadre de l'élasticité linéaire). Néanmoins, il a été observé que la convergence des courbes force-déplacement avec EFEM était plus rapide qu'avec XFEM [Oliver et al., 2006]. Comme stipulé dans [Rabczuk, 2013] cela pourrait être dû à l'exemple sélectionné et n'est donc pas une conclusion irrévocable.

Nous avons restreint notre attention aux problèmes linéaires mais nous sommes focalisés sur l'erreur dans la norme énergétique plutôt que sur des quantités localisées. On obtient ainsi un indicateur objectif de la convergence de la méthode, à la fois local et global. Le but de cette étude est d'évaluer la capacité d'AFEM à représenter une discontinuité faible ou une fissure non cohésive. On compare AFEM à la méthode des éléments finis classiques (FEM) dont on sait qu'elle est suffisamment précise pour représenter les pertes de raideur engendrées par la présence de fissures dans les composites tissés [Couégnat, 2008, Doitrand et al., 2015a]. Pour ce faire, on simule des problèmes possédant une solution analytique. Des calculs d'erreurs a posteriori permettent d'étudier la convergence de la méthode à mesure que le maillage est raffiné. À la connaissance de l'auteur la seule étude similaire est celle de [Cazes et al., 2016]. Les EFEMs « classiques » (SOS, KOS et SKON) y sont analysées. Comme souligné à la Section 3.2.1.3, elles diffèrent considérablement d'AFEM. Le taux de convergence et la précision de cette dernière sont donc inconnus.

3.3.1 Définition des erreurs calculées

Soit \mathbf{u} la solution exacte du problème mécanique et $\hat{\mathbf{u}}$ une solution approchée, l'erreur \mathbf{e} est définie par :

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} \tag{3.29}$$

Soit Ω le volume occupé par le solide étudié, la norme en énergie de l'erreur se calcule :

$$||\mathbf{e}||_{\Omega} = \left(\int_{\Omega} (\epsilon - \hat{\epsilon}) : C : (\epsilon - \hat{\epsilon}) \ d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}$$
(3.30)

où ϵ est le champ de déformation exact, $\hat{\epsilon}$ un champ de déformation approché et C le tenseur d'élasticité.

L'erreur relative en énergie est définie comme :

$$||\eta|| = \left(\frac{\int_{\Omega} (\epsilon - \hat{\epsilon}) : C : (\epsilon - \hat{\epsilon}) \, d\Omega}{\int_{\Omega} \epsilon : C : \epsilon \, d\Omega}\right)^{\frac{1}{2}}$$
(3.31)

En outre, on peut calculer l'erreur dans un élément occupant le volume Ω_i :

$$||\mathbf{e}||_{\Omega_i} = \left(\int_{\Omega_i} (\epsilon - \hat{\epsilon}) : C : (\epsilon - \hat{\epsilon}) \ d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}$$
(3.32)

où l'indice i se réfère à l'élément occupant le volume Ω_i et tel que $\cup \Omega_i = \Omega$.

L'erreur totale dans la norme énergétique est calculée grâce à la relation suivante :

$$||\mathbf{e}||_{\Omega} = \sqrt{\sum_{i} ||\mathbf{e}||_{\Omega_{i}}^{2}} \tag{3.33}$$

Les intégrales ci-dessus sont évaluées grâce à des quadratures numériques. Les schémas d'intégration adoptés pour former les matrices de raideur des éléments finis ont été réutilisés. En présence de domaines ou sous-domaines triangulaires, un schéma d'intégration de Hammer à six points a cependant été choisi pour une meilleure précision (cf. Figure 3.41).



FIGURE 3.41 – Position des points d'intégration (points rouges) utilisés pour calculer l'erreur, a) T3, b) Q4, c) AT3, d) AQ4-1, e) AQ4-2

3.3.2 Discontinuités faibles : cas d'une inclusion circulaire

3.3.2.1 Description du problème

Pour évaluer la capacité d'AFEM à représenter une discontinuité faible nous traitons un problème régulièrement rencontré dans la littérature sur XFEM [Sukumar et al., 2001, Moës et al., 2003, Chessa et al., 2003, Hansbo and Hansbo, 2004, Dolbow and Harari, 2009]. Considérons la structure composée de deux matériaux représentée à la Figure 3.42. Les propriétés assignées à Ω_1 sont : E = 1, $\nu_1 = 0.25$, et celles dans Ω_2 sont : $E_2 = 10$, $\nu_2 = 0.3$. Les coefficients de Lamé correspondant sont : $\lambda_1 = \mu_1 = 0.4$ et $\lambda_2 = 5.7692$, $\mu_2 = 3.8461$. Les deux matériaux sont parfaitement liés.



FIGURE 3.42 – Problème de l'inclusion circulaire, d'après [Sukumar et al., 2001]

Le champ de déplacement suivant est imposé sur les bords du domaine :

$$\begin{cases} u_r(r=b,\theta)=b\\ u_\theta(r=b,\theta)=0 \end{cases}$$

La solution analytique donnée dans [Sukumar et al., 2001] est rappelée :

$$u_r(r,\theta) = \begin{cases} \left(\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\alpha + \frac{b^2}{a^2} \right)r & 0 \le r \le a\\ (r - \frac{b^2}{r})\alpha + \frac{b^2}{r} & a \le r \le b \end{cases}$$
$$u_\theta(r,\theta) = 0$$

où :

$$\alpha = \frac{(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)b^2}{(\lambda_2 + \mu_2)a^2 + (\lambda_1 + \mu_1)(b^2 - a^2) + \mu_2 b^2}$$

Ainsi, le champ de déformation exact s'écrit :

$$\epsilon_{rr}(r,\theta) = \begin{cases} (1 - \frac{b^2}{a^2})\alpha + \frac{b^2}{a^2} & 0 \le r \le a\\ (1 + \frac{b^2}{r^2})\alpha - \frac{b^2}{r^2} & a \le r \le b \end{cases}$$
$$\epsilon_{\theta\theta}(r,\theta) = \begin{cases} (1 - \frac{b^2}{a^2})\alpha + \frac{b^2}{a^2} & 0 \le r \le a\\ (1 - \frac{b^2}{r^2})\alpha + \frac{b^2}{r^2} & a \le r \le b \end{cases}$$
$$\epsilon_{r\theta}(r,\theta) = 0$$

Dans le modèle numérique on représente une plaque carrée de côté L = 2 comprenant une inclusion circulaire. Le champ de déplacement analytique est imposé sur les bords de la plaque (cf. Fig. 3.43). Les calculs menés avec la FEM, où le maillage est conforme à la géométrie de l'interface (voir Fig. 3.43b), sont réalisés avec des triangles à déformation constante (nommés T3) et des quadrilatères bilinéaires (appelés Q4). Dans les simulations réalisées avec AFEM on utilise des maillages réguliers composés d'éléments triangulaires ou quadrilatéraux ne se conformant pas à la géométrie de l'interface (voir Fig. 3.43a). Une discontinuité faible est incorporée dans les éléments intersectés par l'interface, comme décrit au Chapitre 2.2. Les autres éléments sont des T3 ou des Q4 classiques.



FIGURE 3.43 – Champ de déplacement imposé sur le pourtour du domaine : a) AT3, b) Q4

3.3.2.2 Résultats numériques

La diminution de l'erreur relative en énergie, η , avec la taille des éléments, h (ou la taille moyenne des éléments lorsqu'un maillage conforme à l'interface est utilisé), est tracée à la Figure 3.44).



FIGURE 3.44 – Variation de l'erreur relative en énergie en fonction de la taille des éléments pour le problème de l'inclusion circulaire

Le taux de convergence optimal des éléments finis linéaires dans la norme énergétique est $\mathcal{O}(h)$ [De Arantes E Oliveira, 1968, Cabay, 1975]. Cela signifie que l'erreur est réduite de moitié lorsque la taille des mailles est divisée par deux. Ce taux de convergence théorique est atteint par les éléments finis standards (cf. Figure 3.44). Les AFEs sont systématiquement moins précis que les FEs et leur taux de convergence est faible : $\simeq \mathcal{O}(h^{0.5})$. Les performances des éléments AT3 et AQ4 sont similaires et leur convergence est stable. Pour mieux interpréter ces résultats, la contribution individuelle des éléments à l'erreur totale est représentée à la Figure 3.45 (respectivement 3.46) pour le maillage le moins raffiné (respectivement le plus fin) de cette étude.



FIGURE 3.45 – Erreur dans la norme énergétique avec les maillages les moins raffinés (h = 0.1), a) Q4, b) AQ4

La zone où l'erreur est la plus importante est localisée au voisinage de l'interface où les gradients de contraintes sont maximaux. Dans cette zone l'erreur engendrée par l'utilisation d'AFEs est plus importante que celle générée par les FEs. Dans le reste de la structure l'erreur induite par les deux méthodes est similaire. Les champs de contraintes/déformations obtenus avec AFEM et FEM sont globalement similaires (voir Figure 3.47).



FIGURE 3.46 – Erreur en énergie, dans une portion du domaine, obtenue avec les maillages les plus raffinés de l'étude (h = 0.01), a) Q4, b) AQ4



FIGURE 3.47 – État de déformation obtenu avec la taille de maille h = 0.05 a) T3, b) AT3 (déplacements amplifiés x0.25)

Nous avons également comparé les performances d'AFEM avec une méthode appelée non-conforming FEM [Moës et al., 2003]. Avec cette dernière, des éléments finis classiques sont utilisés mais ils ne se conforment pas à l'interface. Sa présence est prise en compte en modifiant la loi de comportement aux points d'intégration, en fonction de leur position vis à vis de l'interface (voir Figure 3.48). Cette approche a par exemple été utilisée pour représenter l'interface fil-matrice dans un composite tissé [Doitrand et al., 2015b].



FIGURE 3.48 – Représentation schématique de la non-conforming FEM, points noirs : noeuds externes, points rouges : points d'intégration

Sa convergence en h dans la norme énergétique a été étudiée dans [Moës et al., 2003] pour le même problème mécanique d'inclusion circulaire. Les performances de cette méthode peuvent donc être comparées à celles d'AFEM comme fait à la Figure 3.49. Il apparaît que les taux de convergence des deux méthodes sont identiques mais AFEM est plus précise.



FIGURE 3.49 – Comparaison de la convergence en h dans la norme énergétique d'AFEM et de la nonconforming FEM (résultats tirés de [Moës et al., 2003])

3.3.2.3 Discussions et conclusions

La modélisation de composites à microstructure complexe nécessite de représenter un nombre conséquent d'interfaces. Si la méthode des éléments finis standard est employée, le maillage doit être conforme à ces dernières, ce qui rend sa génération complexe. Les méthodes numériques telles que XFEM simplifient ces analyses puisque que le maillage peut être réalisé indépendamment de la position de l'interface. Il a été montré que XFEM pouvait atteindre la précision et les taux de convergence optimaux de FEM pour représenter des discontinuités faibles [Moës et al., 2003]. Les approches telles qu'AFEM ou la nonconforming FEM permettent également d'incorporer des discontinuités faibles au sein d'un élément mais leur implémentation est considérablement plus simple. Néanmoins, leurs taux de convergence vis à vis de FEM ou de XFEM sont faibles. Ainsi, le choix d'une méthode numérique doit être dicté par les objectifs envisagés. Si le comportement global d'une structure ou les propriétés effectives d'un composite sont recherchés, la non-conforming FEM fournit des résultats satisfaisants [Moës et al., 2003]. Cette affirmation s'applique également à AFEM puisqu'elle est plus efficace que la non-conforming FEM pour représenter des discontinuités faibles. Cependant, si une estimation précise des contraintes interfaciales est requise, aucune de ces deux méthodes n'est adaptée. En effet, des observations supplémentaires suggèrent que les contraintes interfaciales obtenues avec AFEM ne convergent pas vers des valeurs correctes (c'est par contre le cas avec FEM et XFEM). AFEM a cependant été utilisée avec succès pour simuler le délaminage fibre-matrice couplé à la propagation de fissures matricielles [Liu et al., 2014]. Ces résultats suggèrent que la méthode pourrait être utilisée pour représenter l'interface fil/matrice à l'échelle mésoscopique d'un CMC tissé.

3.3.3 Discontinuités fortes : le problème de Westergaard

3.3.3.1 Description du problème

Pour évaluer la capacité d'AFEM à représenter des discontinuités fortes nous étudions une structure fissurée. La solution analytique du champ de déplacement a été obtenue grâce à la méthode de Westergaard [Westergaard, 1939] d'où le nom donnée à cette étude. Considérons une plaque infinie contenant une fissure de longueur 2a et soumise à une contrainte uniforme à l'infini appelée σ_I en mode I et σ_{II} en mode II (voir Figure 3.50). Le matériau est homogène et sa loi de comportement est élastique linéaire. La solution analytique du champ de déplacement est connue à proximité du front de fissure. Si l'on fait l'hypothèse d'un état plan de déformations et que l'on introduit un repère (r, θ) ayant pour origine le front de fissure, la solution analytique en mode I s'écrit :

$$u_{Ix} = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1+\nu) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (3-4\nu-\cos(\theta))$$
(3.34)

$$u_{Iy} = \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1+\nu) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (3-4\nu-\cos(\theta)) \tag{3.35}$$

avec $K_I = \sigma_I \sqrt{\pi a}$

Si la structure est sollicitée en mode II la solution exacte s'écrit :

$$u_{IIx} = \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1+\nu) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (\kappa + 2 + \cos(\theta))$$
(3.36)

$$u_{IIy} = \frac{K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1+\nu) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (2-\kappa-\cos(\theta))$$
(3.37)

avec $K_{II} = \sigma_{II} \sqrt{\pi a}$ et $\kappa = 3 - 4\nu$



FIGURE 3.50 – Problème de Westergaard : plaque infinie soumise à un sollicitation : a) en mode I b) en mode II (d'après [Cazes et al., 2016])

Ce problème est souvent rencontré dans la littérature sur XFEM pour évaluer les performances de la méthode et de ses variantes [Stazi et al., 2003,Laborde et al., 2005,Béchet et al., 2005,Ródenas et al., 2010]. Dans la simulation numérique nous considérons un domaine carré $\Omega = [0, 5] \times [-2.5, 2.5]$ comprenant une fissure située en $\Gamma_c = [0, 2.5] \times \{0\}$. Le champ de déplacement exact est imposé sur les bords du domaine (voir Fig. 3.51). Les calculs menés avec la FEM standard, où le maillage est conforme à la fissure, sont réalisés avec des T3 ou des Q4. Dans les simulations réalisées avec AFEM on utilise des maillages réguliers, composés d'éléments triangulaires ou quadrilatéraux, ne se conformant pas à la géométrie de la fissure. On incorpore une discontinuité forte au sein des éléments intersectés par la fissure. Les autres éléments du maillage sont des FEs classiques (T3 ou Q4).



FIGURE 3.51 – Champ de déplacement imposé sur le pourtour du domaine Ω ($\Omega = [0, 5] \times [-2.5, 2.5]$) : a) mode I, b) mode II

Deux « types » d'éléments augmentés peuvent être utilisés en pointe de fissure : les AFEs « classiques » où le front de fissure est libre de s'ouvrir (voir Fig. 3.52a) et les « éléments crack-tip » où la fermeture du front de fissure est imposée (voir Fig. 3.52b). L'utilisation de ces derniers garantit la continuité du champ de déplacement à travers l'arête partagée par l'élément crack-tip et l'élément voisin, qui est un FE standard. En effet, comme montré dans [Liu et al., 2014] et rappelé ci-dessous, en imposant la valeur des déplacement s aux noeuds internes situés sur l'arête susmentionnée, un interpolation continue du déplacement est obtenue tout en conservant le « caractère local » de l'élément (en d'autres termes, aucune information des élément voisins n'est nécessaire). Les vecteurs des déplacements internes de l'élément crack-tip représenté à la Figure 3.52b sont :

Soit l_{72} et l_{23} les longueurs des segments joignant les noeuds 2-7 et 2-3 respectivement, la continuité du déplacement à travers le segment joignant les noeuds 2 et 3 est garantie si l'on impose :

$$\begin{cases} u6\\v6 \end{cases} = \begin{cases} u7\\v7 \end{cases} = (1 - \frac{l_{72}}{l_{23}}) \begin{cases} u2\\v2 \end{cases} + \frac{l_{72}}{l_{23}} \begin{cases} u3\\v3 \end{cases}$$
(3.38)



FIGURE 3.52 – AFEM utilisée avec : a) des déplacements incompatibles en pointe de fissure (formulation « classique »), b) des déplacements compatibles en pointe de fissure (formulation « crack-tip »)

Ces éléments crack-tip sont systématiquement utilisés par les auteurs d'AFEM. Il est donc intéressant d'évaluer précisément leur apport. L'utilisation de l'algorithme de consistency-check complexifie la prise en compte de la fermeture du front de fissure (Eq. 3.38). Les auteurs d'AFEM n'ont pas détaillé la méthode utilisée pour y parvenir. Un rapport interne précise l'approche que nous avons adoptée pour le faire (issue d'une réécriture des équations (2.53) à (2.70)) [Essongue, 2014].

La baisse de l'erreur en énergie en fonction de la taille des éléments est étudiée avec plusieurs méthodes : Les AFEs « classiques » sont comparés aux FEs standards et aux crack-tip AFEs. Les propriétés matériaux adoptées sont E = 200000 et $\nu = 0.3$. La longueur de fissure est 2a = 2.5 et les contraintes imposées à l'infini sont $\sigma_I = \sigma_{II} = 1000$.

3.3.3.2 Résultats numériques : mode I

Les résultats obtenus lors d'une sollicitation en mode I sont tracés à la Figure 3.53.



FIGURE 3.53 – Comparaison des taux de convergence dans la norme énergétique en mode I de FEM, AFEM et crack-tip AFEM

Pour les problèmes comprenant des fissures (engendrant une singularité des contraintes « en $r^{-0.5}$ », où r est la distance au front de fissure), le taux de convergence de la FEM standard est $\mathcal{O}(h^{0.5})$, indépendamment de l'ordre des éléments utilisés [Johnson and McLay, 1968, Pin and Pian, 1973]. On l'observe effectivement en mode I à la Figure 3.53 (ainsi qu'en mode II, voir Fig. 3.56). Le taux de convergence d'AFEM est légèrement plus faible que celui de FEM en mode I ($\simeq 0.45 - 0.48$). Néanmoins, les AFEs classiques sont systématiquement plus précis que les FEs en mode I. Les éléments crack-tip donnent des résultats similaires aux éléments finis standards sauf quand les AQ4 sont employés. La raison n'en est pas comprise. La Figure 3.54 renseigne sur la répartition de l'erreur dans les maillages les plus fins de cette étude.



FIGURE 3.54 – Erreur dans la norme énergétique, dans une portion du domaine $([-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5])$, avec les maillages les plus fins de l'étude : a) FEs standards, b) crack-tip AFEs, c) AFEs classiques

La majeure partie de l'erreur est concentrée au voisinage du front de fissure. Les champs d'erreur obtenus avec les trois méthodes sont comparables (à l'exception des résultats donnés par l'élément AQ4-Tip). Contrairement aux observations réalisées avec les discontinuités faibles, lorsque que des discontinuités fortes sont considérées l'erreur provient principalement des éléments finis classiques (et pas des éléments enrichis). En effet, la majorité des AFEs sont situés dans les zones où l'énergie de déformation est faible (en comparaison de celle au voisinage du front de fissure). Cela explique les performances similaires de FEM et d'AFEM. L'utilisation d'éléments crack-tip semble détériorer la précision d'AFEM en mode I. Les champs de contraintes obtenus avec les trois méthodes sont néanmoins similaires (voir Figure 3.55).



FIGURE 3.55 – Contrainte principale maximale lors d'une sollicitation en mode I (déplacements amplifiés x10) : a) T3, b) AT3, c) AT3-Tip

3.3.3.3Résultats numériques : mode II

Les résultats obtenus lors d'une sollicitation en mode II sont tracés à la Figure 3.56. Le taux de convergence d'AFEM est faible ($\approx \mathcal{O}(h^{0.35})$) et la méthode est moins efficace que la FEM. Contrairement aux observations faites en mode I, les crack-tip AFEs sont (légèrement) plus performants que les AFEs classiques en mode II.



Mode II convergence – triangular elements

FIGURE 3.56 – Comparaison des taux de convergence de FEM, AFEM et crack-tip AFEM en mode II

L'examen du champ d'erreur permet de comprendre les différences significatives entre les taux de convergence de la FEM et d'AFEM. Avec FEM, l'erreur est majoritairement localisée au voisinage du front de fissure alors qu'une partie non négligeable de l'erreur peut être observée tout le long de la fissure avec AFEM (voir Figure 3.57). Une fois encore, les champs de contraintes obtenus avec les trois méthodes sont similaires (voir Figure 3.58).



FIGURE 3.57 – Erreur dans la norme énergétique, dans une portion du domaine $([-2.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5])$, avec des éléments quadrilatéraux, a) FEs classiques, b) crack-tip AFEs, c) AFEs classiques



FIGURE 3.58 – Contraintes de cisaillement lors d'une sollicitation en mode II (déplacements amplifiés x10) a) Q4, b) AQ4, c) AQ4-Tip

3.3.3.4 Discussions et conclusions

AFEM est légèrement plus efficace que la méthode des éléments finis classique pour représenter des discontinuités fortes sollicitées en mode I. Pour des chargements en mode II, FEM est néanmoins plus performante qu'AFEM. Nous pensons que cela provient de l'hypothèse utilisée pour prouver l'équivalence entre FEM et AFEM. Ces deux méthodes sont identiques si aucun effort extérieur n'est exercé sur les noeuds situés sur la discontinuité (voir Eq. 3.20-3.22). Lors d'un chargement en mode I, la zone à proximité de la discontinuité, mais éloignée du front de fissure, est soumise à de faibles contraintes par rapport à la valeur de σ_I (voir Figure 3.59). Par conséquent, l'hypothèse - incorporée dans la formulation AFEM - qu'aucun effort n'est exercé sur la discontinuité reproduit exactement la solution analytique du problème.



FIGURE 3.59 – Champs de contraintes « exacts » au voisinage de la discontinuité (domaine : $[-2.5, -0.5] \times [0, 0.2]$) en mode I

En mode II, le champ de contrainte σ_{xx} le long de la fissure est comparable à la valeur de σ_{II} (voir Fig. 3.60). Les noeuds situés sur la discontinuité sont donc soumis à des efforts qui ne peuvent être pris en compte avec AFEM. Cela explique les performances réduites de la méthode en mode II (voir Fig. 3.61).



FIGURE 3.60 – Champs de contraintes « exacts » au voisinage de la discontinuité (domaine : $[-2.5, -0.5] \times [0, 0.2]$) en mode II



FIGURE 3.61 – Efforts extérieurs exercés en mode II sur a) un FE standard b) un AFE

Nous avons également observé que l'utilisation d'éléments crack-tip détériorait la précision d'AFEM en mode I et ne l'améliorait que légèrement en mode II. Nous ne recommandons donc pas l'implémentation - relativement complexe - de ces éléments. On rappelle cependant que les auteurs d'AFEM n'ont pas

publié la formulation de leurs crack-tip AFEs. Ses performances diffèrent peut-être de celles de l'élément que nous utilisons.

Dans [Cazes et al., 2016] il a également été conclu que la FEM standard était plus précise que les EFEMs (SOS, KOS et SKON) en mode II. Contrairement à nos observations, les auteurs ont relevé des taux de convergence similaires en modes I et II des EFEMs. Ils ont cependant adopté une norme d'erreur qui néglige le déplacement à l'« échelle fine » des éléments enrichis (appelé partie discontinue du déplacement dans Eq. 3.1). Le champ de déplacement total a été considéré dans nos calculs, induisant ainsi une source supplémentaire d'erreur en énergie. Nous pensons que les taux de convergence des EFEMs classiques et d'AFEM seraient égaux si une norme identique était employée. En effet, les performances de ces méthodes semblent dictées par le fait qu'aucun effort extérieur ne puisse être exercé sur les noeuds situés sur la discontinuité.

La FEM classique a déjà été utilisée avec succès pour évaluer les pertes de raideur induites par la présence de fissures dans des composites tissés [Couégnat, 2008, Doitrand et al., 2015a]. Comme les performances de FEM et d'AFEM sont proches, les mêmes études peuvent être réalisées avec AFEM. Cette méthode s'affranchit des nécessités de remailler et d'augmenter le nombre de degrés de liberté à mesure que des discontinuités apparaissent dans une structure. Elle est donc particulièrement attractive pour simuler la propagation de fissures en 3D dans des CMC tissés.

3.4 Simulations de propagation de fissures

Les simulations réalisées jusqu'ici visaient à évaluer les performances d'AFEM. Les aspects liés à la croissance des fissures n'ont donc pas été étudiés. Nous les abordons dans cette section. Deux phénomènes peuvent rendre les simulations de propagation de fissures fortement dépendances à la taille et à l'orientation des éléments. Une dépendance à la taille des éléments (appelée *mesh size dependence* dans la littérature) apparaît lorsque des lois de comportement locales et adoucissantes sont utilisées. Avec ces lois, l'énergie dissipée au cours du processus d'endommagement est proportionnelle au volume des éléments. Ainsi, à mesure que l'on raffine le maillage, l'énergie dissipée diminue et la structure devient de plus en plus fragile. Une des fonctions de la zone cohésive incorporée dans les AFEs est d'empêcher ce comportement non physique. La dépendance du trajet de propagation des fissures au maillage est appelée *mesh bias*. Les fissures tendent à se propager parallèlement aux arêtes des éléments et tout changement de l'orientation du maillage entraîne une modification du scénario d'endommagement. La sensibilité d'AFEM au mesh bias et à la taille des éléments est étudiée dans les sections suivantes.

3.4.1 Évaluation de la dépendance à l'orientation du maillage

L'essai proposé dans [Dias et al., 2012] a été choisi pour évaluer la dépendance au mesh bias d'AFEM. Une structure homogène est soumise à un chargement de traction (cf. Fig. 3.62). La contrainte principale maximale à partir de laquelle les éléments sont enrichis est légèrement diminuée dans une partie l'éprouvette afin de briser l'homogénéité du problème. La croissance d'une fissure verticale initiée dans la zone affaiblie doit donc être observée.



FIGURE 3.62 – Géométrie de la structure étudiée et conditions aux limites appliquées

Pour mettre en évidence le mesh bias, la structure est discrétisée avec des maillages inclinés à 65° . En effet, cet angle complexifie considérablement la propagation d'une fissure verticale (voir Figure 3.63).



FIGURE 3.63 – Champ d'endommagement obtenu avec un modèle d'endommagement isotrope et différentes formulations d'éléments finis : a) FEM standard, b) FEM mixtes et stabilisés, [Dias et al., 2012]

On emploie les maillages représentés à la Figure 3.64. L'algorithme de Newton-Rhapson (en déplacements imposés) permet de déterminer la succession des états d'équilibre. Le critère de convergence suivant a été utilisé :

$$\|f_{ext}^j - f_{int}^j\| < 10^{-3} \times \|f_{ext}^j\|$$
(3.39)

où f_{ext} est le vecteur des efforts externes appliqués sur la structure, f_{int} est le vecteur des efforts internes et j le numéro de l'itération.

Des Q4 classiques sont employés au début des simulations. Ils sont augmentés une fois que leur contrainte principale maximale σ_I atteint la valeur critique σ_c . La normale à la fissure est déterminée par la direction de σ_I et sa position par le centroïde du Q4. La propagation de fissures (c.-à-d. l'enrichissement des éléments) n'est permise qu'à la première itération d'un incrément. Un seul élément est enrichi par incrément (celui soumis à la contrainte principale la plus importante). Pour permettre une propagation instable de fissure on adopte la procédure suivante : si une discontinuité est introduite au cours d'un incrément, le déplacement imposé est maintenu constant à l'incrément suivant.



 $\label{eq:FIGURE 3.64-Maillages employés pour étudier la sensibilité d'AFEM au mesh bias, zone rouge : éléments affaiblis$

3.4.1.1 Rupture stable

Les propriétés matériaux adoptées dans [Dias et al., 2012] sont $E = 100 \ kPa$, $\nu = 0$, $\sigma_c = 2 \ kPa$ et l'énergie de rupture en mode I du matériau est $G_{Ic} = 0.1 \ kN/m$. La taille de la structure est donnée par $a = 0.5 \ m$ et $b = 1 \ m$. La longueur de la zone dans laquelle les phénomènes dissipatifs opèrent, appelée process zone, peut être estimée grâce à la relation suivante [Hillerborg et al., 1976, Cox and Marshall, 1994] :

$$l_{coh} = \frac{EG_{Ic}}{\sigma_c^2} = 2.5m\tag{3.40}$$

Comme le champ de contraintes est homogène et vu que $l_{coh} > a$, la propagation de la fissure est instantanée. En s'appuyant sur le raisonnement développé dans [Liu et al., 2015, Gu et al., 2015] nous pouvons cependant prédire que le processus de rupture sera stable car

$$\Lambda = \frac{0.5 \times ab\sigma_c^2/E}{aG_{Ic}} = 0.2 < 1 \tag{3.41}$$

 Λ est le rapport entre l'énergie de déformation stockée dans la structure au moment où la fissure apparaît et l'énergie dissipable par la rupture cohésive des éléments enrichis (en supposant la croissance d'une fissure verticale). Ainsi $\Lambda < 1$ conduit à une rupture stable.

Comme mis en lumière à la Figure 3.65, les fissures empruntent des trajets qui dépendent de la discrétisation employée : elles suivent pathologiquement l'inclinaison du maillage. La présence de rangées de fissures parallèles, un phénomène appelé fissuration secondaire, est également relevée. Cependant, comme les normales aux fissures sont orientées dans la même direction, les courbes force-déplacement obtenues avec les différents maillages sont pratiquement identiques (voir Figure 3.66).



FIGURE 3.65 – Trajets de propagation de fissure obtenus avec AFEM



FIGURE 3.66 – Courbes force-déplacement obtenues avec les maillages de l'étude

AFEM est donc fortement sensible à l'orientation du maillage. Ce défaut a également été observé avec d'autres EFEMs [Mosler and Meschke, 2004, Gálvez et al., 2013]. Par conséquent, elles sont couramment supplémentées par des algorithmes de crack-tracking. Ces derniers consistent à n'autoriser l'enrichissement que dans un sous-ensemble des éléments ayant atteints la contrainte critique σ_c . Ce sous-ensemble est déterminé grâce à des critères topologiques et/ou mécaniques additionnels qui différencient les algorithmes de tracking existants. Pour de plus amples détails nous invitons le lecteur à se référer à une publication comparant les différents algorithmes de tracking [Jäger et al., 2008]. Selon cet article, il existe trois familles d'algorithmes de tracking, dont les noms sont liés à la nature du critère déterminant le sous-ensemble d'éléments à enrichir : local, non-local et global. Il semblerait que le tracking global [Samaniego Alvarado et al., 2002, Oliver et al., 2004, Oliver and Huespe, 2004a] soit le plus performant. Cependant il n'a pu être implémenté par manque de temps. Un simple algorithme de tracking local a été utilisé à la place. Son fonctionnement est le suivant : lorsqu'un élément est sur le point d'être enrichi on inspecte son voisinage. S'il a un voisin enrichi, la continuité inter-élément de la fissure est imposé (voir Figure 3.67b) quand cela est possible. Si ce n'est pas le cas la fissure est insérée au centroïde de l'élément.



FIGURE 3.67 – Propagation de fissure a) sans algorithme de tracking, b) avec un algorithme de tracking local

L'utilisation de l'algorithme de tracking ne modifie pas les trajets de fissure précédemment obtenus avec les maillages à 0°. Avec les maillages inclinés une quantité importante de fissuration secondaire est observée (voir Figure 3.68). Les simulations ne convergent plus et les courbes forces-déplacement s'écartent fortement de la solution attendue (voir Fig. 3.69).



FIGURE 3.68 – Trajets de fissure observés avec les maillages inclinés et un algorithme de tracking local



FIGURE 3.69 – Courbes force-déplacement obtenues quand un algorithme de tracking local est utilisé

3.4.1.2 Rupture instable

Les CMCs sont constitués de matériaux fragiles. Par conséquent, la propagation de fissures aux échelles microscopique et mésoscopique est instable et quasi-spontanée. Pour s'assurer qu'un tel phénomène peut être simulé avec AFEM, les propriétés matériaux et la taille de la structure précédente ont été modifiées.

Les propriétés matériaux d'une matrice en SiC isotrope, générée par infiltration en phase vapeur (un procédé nommé CVI pour Chemical Vapor Infiltration) sont adoptées : E = 400000 MPa, $\nu = 0.2$, $\sigma_c = 400 MPa$ and $G_{Ic} = 0.02N/mm$ [Camus, 1996, Dorvaux, 2007, Mei, 2008, Chateau et al., 2015]. La taille de la structure est maintenant définie par a = 1 mm et b = 0.5 mm et correspond approximativement à la section transverse d'un fil de CMC. On emploie des maillages composés d'éléments quadrilatéraux et triangulaires conjointement avec l'algorithme de tracking local décrit précédemment. Les trajets de fissures obtenus sont tracés à la Figure 3.70. Les simulations avec les éléments triangulaires paraissent relativement insensibles à l'orientation des éléments. La fissure croît verticalement mais on observe de la fissuration secondaire. Cela complexifie grandement la convergence du schéma incrémental-itératif. En effet, la simulation avec le maillage raffiné triangulaire diverge une fois la charge maximale atteinte. Celles opérées avec les éléments quadrilatéraux ont du être stoppées dès l'apparence des premières fissures secondaires. Comme prévu, la rupture est instable et les courbes force-déplacement présentent une chute d'effort brutale (voir Fig. 3.71).



FIGURE 3.70 – Trajets de propagation de fissures obtenus avec des maillages inclinés à 65° et un algorithme de tracking local



FIGURE 3.71 – Courbes force-déplacement avec des maillages inclinés et un algorithme de crack-tracking local

Les résultats représentés à la Figure 3.70 sont encourageants mais notre algorithme de tracking manque de robustesse. Les auteurs d'AFEM emploient un algorithme de tracking local plus sophistiqué [Liu et al., 2014] et l'ont appliqué avec succès à des structures homogènes en 3D [Jung et al., 2016, Naderi et al., 2016]. Néanmoins, au vu de la complexité de l'endommagement dans les composites tissés, l'utilisation d'un algorithme de tracking global paraît incontournable pour simuler de manière robuste la propagation de fissures dans les CMCs.

3.4.2 Estimation de la dépendance à la taille des éléments

Bien que l'on se soit focalisé sur le mesh bias d'AFEM à la section précédente, l'indépendance de la méthode à la taille des éléments a également pu être appréciée (voir, Fig. 3.66). Il est cependant souhaitable d'effectuer des essais supplémentaires, induisant des états de contraintes plus complexes, pour s'en assurer. Les tests « double cantilever beam » (DCB) et « end notched flexure » (ENF) ont donc été choisis. Le DCB permet de plus de faire ressortir l'impact de l'hypothèse - incorporée dans AFEM - qu'aucun effort n'est exercé sur les noeuds situés sur la discontinuité (voir Eq. 3.20-3.22). Les deux tests sont réalisés avec la même structure : la poutre pré-fissurée représentée à la Figure 3.72. L'expression analytique de la réponse force-déplacement de la structure peut être trouvée dans [Allix et al., 1995, Mi et al., 1998].



FIGURE 3.72 – Géométrie et propriétés matériaux de la poutre en porte-à-faux

Pour évaluer la possible dépendance d'AFEM à la taille des éléments du maillage indépendamment de l'algorithme de tracking, le trajet de fissuration est imposé à priori. Ce n'est plus une inconnue du problème : les éléments potentiellement traversés par la fissure, ainsi que sa position en leur sein, sont définis au début de l'analyse. Ainsi, seuls certains éléments prédéfinis seront potentiellement enrichis au cours du chargement. Des maillages uniformes composés d'éléments triangulaires et quadrilatéraux ont été utilisés (voir Figure 3.73). On adopte la procédure incrémentale-itérative présentée à la Section 3.4.1.1. La fissure initiale est représentée grâce à des éléments augmentés incorporant une zone cohésive totalement endommagée (cf. « initially enriched elements » Figure 3.73).



FIGURE 3.73 – Maillages uniformes considérés, représentés dans une portion de la structure ($[25, 35] \times [0, 3]$ (en mm))

3.4.2.1 Test Double Cantilever Beam (DCB)

Lors de l'essai DCB l'arête droite de la structure est encastrée. Une propagation de fissure en mode I est induite par le déplacement U imposé à l'extrémité gauche de l'éprouvette (voir Fig. 3.74) :

$$\begin{cases} u(x = L, y) = 0 \\ v(x = L, y) = 0 \\ u(x = 0, y = 0) = -U \\ u(x = 0, y = H) = U \end{cases}$$

Les couples de valeurs force-ouverture, $F-\Delta$, sont relevés au cours de la simulation (voir Fig. 3.75).



FIGURE 3.74 – Test double cantilever beam (DCB), d'après [Allix et al., 1995]



FIGURE 3.75 - DCB test : courbes force-ouverture obtenues avec des éléments triangulaires et quadrilatéraux

Les courbes force-déplacement issues des simulations sont globalement en accord avec la solution analytique et les résultats ne présentent pas de dépendance pathologique à la taille des éléments. Les différences majeures entre les résultats proviennent de la raideur élastique des modèles numériques (représentée par les traits en pointillés à la Figure 3.75). La raideur du maillage « T3-coarse » est trop importante. Le T3 est connu pour être excessivement raide dans les problèmes à flexion dominante car il ne peut pas représenter de gradients de contraintes (voir, entre autres, [Batoz and Dhatt, 1990] et Fig. 3.76). Ce défaut était donc prévisible au vu du faible nombre d'éléments présents dans l'épaisseur de la poutre. Les autres modèles sont moins raides que la structure « réelle ». Cela peut paraître surprenant à première vue car les formulations FEM classiques (utilisant des éléments compatibles et une intégration complète) surestiment systématiquement la raideur des structures (voir, par exemple, [Bathe, 1996]). Néanmoins, comme aucun effort ne peut être exercé sur les noeuds situés au niveau de la discontinuité avec AFEM (cf. Eq. 3.20-3.22) la structure manque de raideur.



FIGURE 3.76 – test DCB : Contrainte principale maximale au voisinage de la pointe de fissure avec les maillages triangulaires a) coarse-T3 b) refined-T3 c) fine-T3

Les structures modélisées avec AFEM sont donc plus souples que si elles l'étaient avec FEM (pour un même nombre d'élément). Nous ne considérons pas ce point comme un défaut rédhibitoire pour la simulation de l'endommagement dans les CMCs mais il mérite d'être souligné. Nous pensons que cet excès de souplesse est également présent avec les autres EFEMs puisque Eq. 3.20-3.22 sont incluses dans leurs formulations (voir [Jirásek, 2000, Alfaiate et al., 2003, Dias-da Costa et al., 2009a]).

3.4.2.2 Test end notched flexure (ENF)

Lors du test ENF la poutre pré-fissurée est chargée à sa mi-portée pour générer une propagation de fissure en mode II (cf. Fig. 3.77). Les conditions limites suivantes lui sont appliquées :

$$\begin{cases} v(x = 0, y = 0) = 0\\ v(x = 0, y = L) = 0\\ v(x = L/2, y = H) = V\\ u(x = L/2, y = H) = 0 \end{cases}$$



FIGURE 3.77 – Test end notched flexure (ENF), d'après [Allix et al., 1995]

La comparaison entre les courbes force-déplacement et la solution analytique est tracée à la Figure 3.78. Le comportement - trop souple - induit par l'utilisation d'AFEs à un impact moins marqué sur la raideur élastique de la structure que lors du test DCB. En effet, cette dernière provient en partie du contact entre les lèvres de la fissure, qui est convenablement simulé avec les AFEs (cf. Fig. 3.79).



FIGURE 3.78 - test ENF: courbes force-déplacement obtenues avec les éléments triangulaires et quadri-latéraux



FIGURE 3.79 – Contraintes générées par le contact entre les lèvres de la fissure, au voisinage de l'appui gauche de la structure (domaine : $[0, 2] \times [0, 3]$), avec le maillage « fine-Q4 » et pour un déplacement imposé V= 4mm

Les solutions obtenues avec les AT3 présentent un comportement trop fragile. En identifier les raisons nécessiterait des études approfondies comme l'inspection des contraintes interfaciales au cours du test. Néanmoins les résultats convergent globalement vers une solution unique à mesure que le maillage est raffiné. On peut donc affirmer qu'AFEM ne présente pas de dépendance pathologique à la taille des éléments.

3.5 Conclusions et discussions complémentaires

L'implémentation d'AFEM a été validée et analysée en profondeur à travers ce chapitre. Les principales conclusions qui ont été tirées sont rappelées.

Technologie de l'élément

Nous avons dans un premier temps étudié l'influence du schéma d'intégration des contraintes cohésives. L'utilisation d'une quadrature de Newton-Cotes ou de Gauss à 2 points (nommés N-Cis ou Gis) conduit à des résultats similaires. Quand les éléments AT3 ou AQ4-2 sont employés, ces résultats ne sont pas pleinement satisfaisants : lors d'une sollicitation en mode I, un des points d'intégration de l'interface peut subir un état de compression pendant que l'autre s'endommage en traction. L'emploi de schémas d'intégration différents (réduits ou sélectifs) devrait permettre d'éliminer ce comportement indésirable.

Un test simple mais exhaustif permettant de valider l'implémentation d'AFEM a été proposé. L'implémentation d'un élément de géométrie arbitraire peut ainsi être rapidement validée en utilisant un code équipé de zones cohésives. La convergence en h d'AFEM a été comparée à celle des éléments finis standards pour représenter des discontinuités faibles et fortes. La FEM est, en général, plus performante qu'AFEM mais les états de contraintes engendrés par l'utilisation de ces méthodes sont similaires. Les discontinuités fortes sont représentées de façon plus efficace avec AFEM qu'avec FEM lors de sollicitations en mode I qui est le mode de rupture dominant dans les matériaux fragiles [Carpinteri et al., 1993, Dyskin et al., 2002]. AFEM est donc une excellente technologie d'élément pour modéliser les fissures et leur croissance dans les CMCs tissés. Elle permet de représenter les discontinuités plus précisément que les modèles de type smeared crack pour un coup de calcul similaire. De plus, l'interface incorporée dans les AFEs permet de prendre en compte le contact entre les lèvres d'une fissure de façon consistante.

Stratégies pour simuler la propagation de fissures

Les stratégies numériques pour simuler la propagation de fissures n'ont été que brièvement abordées par manque de temps. Nous avons montré que l'utilisation d'un algorithme de crack-tracking était indispensable pour rendre AFEM entièrement indépendante au maillage. Un simple algorithme de tracking local a été implémenté mais il manque de robustesse. Les difficultés topologiques posées par l'emploi du crack-tracking local en 3D et avec des structures composites suggèrent d'évoluer vers du tracking global. Un schéma de Newton-Rhapson a été adopté pour déterminer les états d'équilibre de la structure. Il est connu pour sa propension à diverger en présence de comportements adoucissants et de points de bifurcation (voir, par exemple, van der Veen et al., 2000). Pour faciliter sa convergence nous n'avons enrichi qu'un élément par incrément. Par conséquent, à mesure que l'on raffine le maillage, plus d'incréments sont nécessaires pour simuler la même extension de fissure. Cette stratégie n'est donc pas optimale. Les auteurs d'AFEM ont proposé une méthode de stabilisation inertielle afin de surmonter les problèmes de divergence dans les simulations de propagation de fissures [Gu et al., 2015]. Il est stipulé que cette méthode garantit - inconditionnellement - la convergence de l'algorithme de Newton-Rhapson. Du point de vue de l'auteur c'est une voie intéressante à explorer car cette approche ne fait appel à aucun paramètre numérique additionnel. Une alternative aux procédures incrémentale-itérative mériterait également d'être examinée. L'utilisation d'algorithmes non itératifs, tels que celui nommé « sequentially linear approach » [Rots and Invernizzi, 2004, Rots et al., 2008, Graça-e Costa et al., 2012], semblent adaptés aux CMCs. Bien que le concept d'équilibre soit abandonné avec cette technique, les résultats sont semblables à ceux obtenus avec des schémas incrémentaux classiques. D'autres stratégies ne faisant pas usage de fissures cohésives devraient également être explorées. Celles liées à la mécanique de la rupture incrémentale (finite fracture mechanics) [Hashin, 1996, Leguillon, 2002, Weißgraeber et al., 2016], qui supposent la croissance instantanée de fissures de tailles finies, sont prometteuses mais leur adaptation aux éléments finis ainsi que leur extension à la 3D sont encore des domaines de recherche actifs.

Chapitre 4

Applications de la méthode des éléments finis augmentés aux CMCs tissés

Contents

Test	s de vér	ification classiques	57
3.1.1	Tests pr	oposés par le groupe de Yang	57
	3.1.1.1	Essai en mode I	57
	3.1.1.2	Essai en mode II	59
	3.1.1.3	Essai en mode mixte	60
3.1.2	Tests développés par Linder et Armero		61
	3.1.2.1	Essai de traction uniforme	62
	3.1.2.2	Essai de flexion	65
3.1.3	Conclus	ions sur la validation de l'implémentation	68
Une	analyse	approfondie de la méthode des éléments finis augmentés	69
3.2.1	Descript	tion cinématique des discontinuités fortes :	69
	3.2.1.1	avec XFEM et les EFEMs « classiques »	69
	3.2.1.2	avec AFEM	69
	3.2.1.3	Discussions	70
3.2.2	Preuve	de l'équivalence entre AFEM et la discrete crack approach (DCA)	73
	3.2.2.1	Équations d'équilibre discrétisées : invertible AFEM	73
	3.2.2.2	Équations d'équilibre discrétisées : discrete crack approach	73
	3.2.2.3	Un test additionnel de validation de l'implémentation des éléments	
		augmentés	74
Con	vergence	e en h d'AFEM en présence de discontinuités fortes ou faibles	80
3.3.1	Définitio	on des erreurs calculées	80
3.3.2	Disconti	nuités faibles : cas d'une inclusion circulaire	81
	3.3.2.1	Description du problème	81
	3.3.2.2	Résultats numériques	82
	3.3.2.3	Discussions et conclusions	84
3.3.3	Disconti	nuités fortes : le problème de Westergaard	85
	3.3.3.1	Description du problème	85
	3.3.3.2	Résultats numériques : mode I \ldots	87
	3.3.3.3	Résultats numériques : mode II	89
	3.3.3.4	Discussions et conclusions	90
Sim	ılations	de propagation de fissures	93
3.4.1	Évaluati	ion de la dépendance à l'orientation du maillage	93
	0 4 1 1	Bunture stable	94
	3.4.1.1		
	3.4.1.1 3.4.1.2	Rupture instable	96
3.4.2	3.4.1.1 3.4.1.2 Estimat	Rupture instable	96 98
3.4.2	3.4.1.1 3.4.1.2 Estimat 3.4.2.1	Rupture instable	96 98 99
	Test 3.1.1 3.1.2 3.1.3 Une 3.2.1 3.2.2 Conv 3.3.1 3.3.2 3.3.3 Simu 3.4.1	Tests de vér $3.1.1$ Tests pr $3.1.1$ $3.1.1.1$ $3.1.1.2$ $3.1.1.3$ $3.1.2$ Tests dé $3.1.2.1$ $3.1.2.1$ $3.1.2.1$ $3.1.2.1$ $3.1.2.2$ $3.1.2.1$ $3.2.1.3$ Conclus Une analyse $3.2.1.1$ $3.2.1.2$ $3.2.1.2$ $3.2.1.2$ $3.2.2.1.3$ $3.2.2$ $3.2.2.3$ Convergence $3.3.2.1$ $3.3.2.1$ $3.3.2.1$ $3.3.2.1$ $3.3.2.1$ $3.3.2.1$ $3.3.2.1$ $3.3.2.3$ $3.3.3.1$ $3.3.3.1$ $3.3.3.1$ $3.3.3.3$ $3.3.3.1$ $3.3.3.3$ $3.3.3.4$ Simulations $3.4.1$	Tests de vérification classiques 3.1.1 Tests proposés par le groupe de Yang 3.1.11 Essai en mode I 3.1.12 Essai en mode I 3.1.13 Essai en mode II 3.1.14 Essai en mode II 3.1.15 Essai en mode II 3.1.16 Essai en mode II 3.1.17 Tests développés par Linder et Armero 3.1.21 Essai de traction uniforme 3.1.22 Essai de flexion 3.1.21 Essai de flexion 3.1.22 Essai de flexion 3.1.21 Essai de flexion 3.1.22 Essai de flexion 3.1.3 Conclusions sur la validation de l'implémentation Une analyse approfondie de la méthode des éléments finis augmentés 3.2.1 Description cinématique des discontinuités fortes : 3.2.11 avec XFEM et les EFEMs « classiques » 3.2.12 avec AFEM 3.2.13 Discussions . 3.2.2 Équations d'équilibre discrétisées : invertible AFEM 3.2.2.1 Équations d'équilibre discrétisées : discrete crack approach 3.2.2.2 Équations d'equilibre discrétisées : discrete crack approach

Dans ce chapitre on se propose d'illustrer les possibles applications de la méthode des éléments finis augmentés aux CMCs. On commence par décrire l'architecture et le scénario d'endommagement de CMCs tissés, composés de fibres en SiC, d'une interphase fibre/matrice en PyC ainsi que d'une matrice en SiC élaborée par infiltration de vapeur chimique (Chemical Vapor Infiltration). Notre choix s'est porté sur ce matériau car son comportement thermo-chimico-mécanique est étudié depuis plus d'une vingtaine d'années et de nombreux résultats ont été publiés sur le sujet. On désignera cette famille de CMCs par SiC/SiC CVI dans la suite de ce texte. On évalue ensuite la capacité d'AFEM à représenter les variations de raideurs induites par la présence de discontinuités dans un tissé. Enfin, des simulations de propagation de fissures à l'échelle mésoscopique sont entreprises.

4.1 Scénario d'endommagement et durée de vie des SiC/SiC CVI

Le scénario d'endommagement sous chargement uniaxial détaillé ci-après est issu des travaux de [Reynaud, 1992, Aubard, 1992, Guillaumat, 1994, Guillaumat and Lamon, 1996, Pluvinage et al., 1996, Morscher and Gyekenyesi, 1998, Fantozzi et al., 2001, Morscher, 2014b, Lamon, 2014a, Fantozzi and Reynaud, 2014]. Le processus d'élaboration des SiC/SiC CVI induit la présence de deux échelles de porosité résiduelle (cf. Figure 4.1) : la porosité *intrafil*, aussi appelée *microporosité*, de l'ordre de 5% et la porosité *interfil*, appelée *macroporosité*, de 10 à 20% [Gélébart et al., 2010, Herb et al., 2010, Chateau, 2011, Herb et al., 2012].



FIGURE 4.1 – Les différentes échelles de porosité dans les SiC/SiC CVI, a) [Chateau, 2011], b) [Pineau et al., 2011]

Les porosités jouent un rôle important dans le début de la fissuration puisqu'elles constituent des sites préférentiels d'amorçage. La déformation à rupture des fibres est plus importante que celle de la matrice et les porosités induisent des concentrations de contraintes en son sein. Elle s'endommage donc la première. Dans un premier temps c'est la matrice interfil qui se fissure. Les fissures sont initiées aux macropores, se développent orthogonalement au chargement, et ne pénètrent pas les fils : lorsqu'elles arrivent sur les premières fibres, elles sont déviées et forment des fissures de décohésion fil/matrice (cf. Figure 4.2b).



FIGURE 4.2 – Scénario d'endommagement des SiC/SiC CVI sous chargement longitudinal, d'après [Genet, 2010]

La déviation des fissures est due à la présence de l'interphase de PyC (dont l'épaisseur est de quelques dizaine de nm) à l'interphase fibre/matrice. Elle joue le rôle de fusible en désolidarisant ces deux constituants et empêche ainsi les fissures matricielles de se propager aux fibres. C'est un élément essentiel du comportement des SiC/SiC CVI puisqu'elle permet d'obtenir un matériau quasi-fragile à partir de constituants fragiles. L'élaboration du matériau d'interphase ainsi que son impact sur le comportement du matériau font donc l'objet de nombreuses études thermo-chimico-mécaniques (voir, par exemple, [Filipuzzi et al., 1994,Martin et al., 1998,Morscher and Cawley, 2002,Lamon, 1993,Naslain et al., 2004a,Martin and Leguillon, 2004, Pompidou and Lamon, 2007,Lamon, 2014b]). Si l'interphase engendre une liaison fibre/matrice trop forte, les fissures se propagent d'un constituant à l'autre et le composite est fragile (cf. Figure 4.3).



FIGURE 4.3 – Influence de l'interphase fibre/matrice sur la propagation de fissures, d'après [Genet, 2010]

Si la liaison est au contraire trop faible, le transfert de charge fibres/matrice est limité et la surcharge sur la fibre au droit d'une fissure matricielle diminue considérablement la résistance à rupture du composite (cf. Fig. 4.4).



FIGURE 4.4 – Courbe de comportement expérimentale d'un SiC/SiC CVI tissé, sous chargement longitudinal, en présence d'une interphase fibre/matrice : a) forte, b) faible, [Lamon, 2005]

Ce transfert de charge, assuré par le frottement au niveau de la zone interfaciale, est modélisé par une contrainte de cisaillement interfacial τ (cf. Figure 4.5). Son intensité dépend de l'effet Poisson (les coefficients de Poisson de la matrice et de la fibre peuvent être différents) et du frettage de la fibre par la matrice, généré par le refroidissement opéré au cours du processus d'élaboration (les coefficients d'expansion thermique de la matrice et de la fibre diffèrent également).



FIGURE 4.5 – Décohésion fibre/matrice et contrainte de cisaillement interfacial associée, [Evans et al., 1995
Dans un second temps, c'est la matrice dans les fils transverses qui se fissure. Ces fissures sont initiées à des micropores, se développent dans des plans orthogonaux à la direction de chargement et contournent les fibres en engendrant des décohésions fibres/matrice (cf. Figure 4.2c).

Dans un troisième temps, la matrice dans les fils longitudinaux se fissure. Ces fissures sont également initiées à des micropores et se développent orthogonalement aux fibres (cf. Figure 4.2d). Là encore, lorsque le comportement de l'interphase est optimisé, les fissures matricielles contournent les fibres. Elles supportent la surcharge générée grâce au transfert d'efforts fibre/matrice (cf. Figure 4.6). Le processus se poursuit jusqu'à ce que seules les fibres supportent la charge (la fissuration matricielle est dite *saturée*). La densité de fissuration matricielle à ce stade peut atteindre 10 μm^{-1} (cf. Figure 4.7).



FIGURE 4.6 – Représentation schématique d'une fissure matricielle en train de se propager, [Evans et al., 1995]

Finalement, c'est la rupture des fibres longitudinales qui mène à la ruine du matériau.



FIGURE 4.7 – Réseau de fissures dans un CMC tissé, [Forio, 2000]

La courbe contrainte/déformation typique d'un SiC/SiC CVI est représentée Figure 4.8. Elle présente un domaine linéaire jusqu'à $\epsilon \simeq 0.025\%$. La fissuration de la matrice interfil engendre ensuite un comportement non linéaire jusqu'à $\epsilon \simeq 0.15\%$. Le domaine 2 est celui de la fissuration des fils transverses, caractérisé par une faible évolution du module d'élasticité tangent du composite. Enfin le domaine 3 est celui de la multi-fissuration de la matrice des torons longitudinaux qui précède la rupture ultime du composite à $\epsilon \simeq 0.5\%$. Le comportement au cours des cycles de déchargement et de rechargement est marqué par des boucles d'hystérésis. Elles traduisent la présence de décohésions à l'interface entre la fibre et la matrice ainsi que leurs frottements. L'amplitude des boucles dépend directement des longueurs de décohésion et de l'intensité du frottement interfacial. On observe également la présence de déformations résiduelles.



FIGURE 4.8 – Courbe de comportement typique d'un SiC/SiC CVI tissé soumis à un chargement cyclique et longitudinal [De Melo Loseille, 2010]

Le scénario précédemment établi se complexifie avec les effets conjugués de la température et de l'oxydation. En effet, une fois le composite fissuré, l'oxygène peut pénétrer le réseau de fissures et vient oxyder l'interphase de PyC, puis les fibres, qui voient leur contrainte à rupture chuter. Ces phénomènes diminuent considérablement la durée de vie des CMCs, majoritairement pilotée par la tenue des fibres. Par conséquent, les travaux actuels visent à protéger ces dernières de l'oxydation. Parmi les voies envisagées, on peut noter l'utilisation d'autres matériaux d'interphase tel que le BN (plus résistant à l'oxydation que le PyC) ou l'utilisation de matrices dites *autocicatrisantes* qui, lorsqu'elles sont fissurées, réagissent avec l'oxygène pour former un verre pâteux qui bouche les fissures et ralentit l'oxydation des fibres (cf Fig. 4.9). Ces matrices résultent de l'empilement de couches de carbure de bore B_4C , de carbure de silicium SiC et d'une couche ternaire de SiBC.



FIGURE 4.9 – Principe de l'autocicatrisation des CMC par formation d'oxyde de bore liquide colmatant les fissures de la matrice par capillarité, [Camus et al., 2014]

D'autres phénomènes viennent également se coupler aux précédents et impactent la durée de vie du matériau. Citons par exemple, l'abrasion/usure des interfaces fibres/matrices lors des chargements cycliques. Elle entraîne une augmentation des longueurs de décohésions fibres/matrice qui induit une surcharge sur les fibres au droit des fissures matricielles. Un autre phénomène, appelé propagation sous-critique de fissures, affecte également les fibres. Des défauts, tels que des pontages de silice entre fibres, sont présents à la surface des fibres (cf. Fig. 4.10). Ils génèrent des entailles dans la fibre qui propagent de façon stable par un mécanisme d'oxydation des grains de SiC et/ou du carbone libre aux joints de grains. Les lois utilisées pour décrire la croissance de ces défauts sont similaires à celles utilisées en fatigue. Le terme fatigue statique est donc souvent employé [Gauthier, 2006, Laforet, 2009, Ladevèze and Genet, 2010]. Une fois que les défauts atteignent une taille critique, la fibre rompt de manière instable alors que la contrainte macroscopique qu'elle subit est nettement inférieure à sa contrainte à rupture.



FIGURE 4.10 – Défauts présents à la surface d'une fibre SiC, d'après [Ladevèze and Genet, 2010]

4.2 Variations de raideurs engendrées par un réseau de fissures matricielles

Les pertes de raideur engendrées par le réseau de fissures dans un composite tissé peuvent être convenablement modélisées par la méthode des éléments finis classique (appelée FEM dans la suite de ce texte) [Couégnat, 2008, Doitrand et al., 2015a]. Cette dernière nécessite cependant de mailler explicitement les discontinuités, tâche particulièrement complexe en 3D. La méthode des éléments finis augmentés permet de représenter les fissures sans les mailler et il a été démontré au 3.3 que son niveau de précision était semblable à celui de la FEM. L'application de ces deux méthodes à l'échelle mésoscopique de CMCs engendre donc des résultats similaires, comme on le verra dans cette section. Une possibilité supplémentaire permise par AFEM, la prise en compte du contact entre les lèvres d'une fissure, sera également évaluée.

On considère le SiC/SiC CVI représenté Figure 4.11. Le maillage comprend 76827 T3 et 78502 degrés de liberté. Les éléments rouges, bleus et blancs représentent respectivement les fils longitudinaux, les fils transverses et la matrice. Des propriétés similaires à celles adoptées dans [Mital et al., 2014] ont été utilisées : $E_{\rm fil\ transverse} = E_{\rm fil\ longitudinal} = 250GPa$, $\nu_{\rm fil\ transverse} = \nu_{\rm fil\ longitudinal} = \nu_{\rm matrice} = 0.2$ et $E_{matrix} = 400GPa$. Par souci de simplicité les constituants ont été considérés comme étant isotropes. On suppose également un état de déformation plane. Un réseau de fissures, similaire à celui observé expérimentalement sous chargement longitudinal, est également considéré (voir Fig. 4.11).



FIGURE 4.11 – Représentation d'un SiC/SiC CVI, sain et fissuré, à l'échelle mésoscopique (densité de fissuration : $\simeq 2mm^{-1}$)

On rend compte de la présence des discontinuités en augmentant les éléments traversés par une fissure (cf. Fig 4.12a) ou en utilisant des éléments standards et une technique de remaillage (cf. Fig 4.12b).



FIGURE 4.12 – Représentation des fissures à l'aide de : a) la méthode des éléments finis augmentés, b) une méthode de remaillage

Trois maillages seront considérés au cours de cette étude : le maillage sain appelé **FEM sane**, le maillage fissuré avec les éléments augmentés, **AFEM cracked**, et celui où les fissures sont explicitement maillées, **FEM cracked**. Trois chargements leur sont appliqués : traction, compression et flexion.

Essai de traction

La déformation longitudinale $\epsilon_{xx} = 0.1\%$ est imposée à la structure. Pour ce faire on utilise les conditions limites suivantes :

$$\begin{cases} u_x(x=0) = 0\\ u_x(x=10.018mm) = 10\mu m\\ u_y(y=0) = 0 \end{cases}$$

Les états de contraintes obtenus avec les trois maillages sont représentés Figure 4.13. Le maillage FEM sane permet d'observer les concentrations de contraintes induites par les macroporosités. Les résultats obtenus avec les maillages AFEM cracked et FEM cracked sont similaires. Ils illustrent les redistributions de contraintes engendrées par la fissuration matricielle.



FIGURE 4.13 – État de contrainte σ_{xx} dans le composite lors de l'essai de traction

Les raideurs longitudinales équivalentes des trois maillages sont reportées Figure 4.14. Comme souligné au chapitre précédent, les structures modélisées avec AFEM sont plus souples que celles modélisées avec la

méthode des éléments finis classique (pour un nombre d'éléments voisin). Les différences sont néanmoins légères ($\simeq 5\%$ pour l'essai de traction) et l'on peut donc considérer que les deux méthodes fournissent des résultats similaires.





Les ouvertures de fissures obtenues avec AFEM et FEM sont également du même ordre de grandeur (cf. Fig. 4.15).



FIGURE 4.15 – État de contrainte dans une portion de la structure (déplacements amplifiés x100)

Essai de compression

La déformation longitudinale $\epsilon_{xx} = -0.1\%$ est imposée à la cellule. Pour ce faire on utilise les conditions limites suivantes :

$$\begin{cases} u_x(x=0) = 0\\ u_x(x=10.018mm) = -10\mu m\\ u_y(y=0) = 0 \end{cases}$$

Aucun algorithme de contact n'a été implémenté dans le logiciel prototype. En conséquence, les résultats obtenus avec le maillage FEM cracked ne sont pas pertinents car les lèvres des fissures s'interpénètrent. Ils ne seront donc pas présentés. L'état de contrainte et les raideurs obtenus avec AFEM sont proches de ceux obtenus avec le maillage non fissuré (cf. Fig. 4.16 et 4.17). Les contraintes dans les éléments augmentés soumis à un état de compression ne semblent cependant pas exploitables.



FIGURE 4.16 – État de contrainte σ_{xx} dans le composite lors de l'essai de compression



FIGURE 4.17 – Module de Young équivalent en compression

Essai de flexion

Afin de générer un chargement de flexion on impose les conditions limites suivantes :

$$\begin{cases} u_x(x=0) = u_y(x=0) = 0\\ u_y(x=10.018mm) = 10\mu m \end{cases}$$

La Figure 4.18 permet d'apprécier les redistributions de contraintes engendrées par la présence des discontinuités. L'état de contrainte dans la partie supérieure de l'éprouvette n'est que légèrement impacté par les fissures car ces dernières se referment. Dans la partie inférieure de l'éprouvette les discontinuités modifient la localisation des zones les plus contraintes. La matrice à proximité des macropores se décharge alors que les fils sont plus chargés au voisinage des fissures.



FIGURE 4.18 – État de contrainte longitudinal dans une portion du composite lors du chargement de flexion

La méthode des éléments finis augmentés permet donc de modéliser de façon satisfaisante les variations de raideurs engendrées par la présence de discontinuités au sein de CMCs tissés. Elle donne également accès à l'ouverture des fissures, nécessaire pour prendre en compte les phénomènes d'oxydation dans le matériau.

4.3 Propagation de fissures à l'échelle mésoscopique

Comme observé à la Section 3.4 la méthode des éléments finis augmentés doit être utilisée avec un algorithme de crack-tracking afin de garantir l'indépendance du trajet de fissuration à la discrétisation. L'algorithme de tracking actuellement implémenté dans le code prototype ne garantit pas pleinement cette indépendance au maillage. Les résultats présentés ci-après sont donc préliminaires.

On considère la structure non fissurée représentée Figure 4.11, maillée avec 38405 Q4, et soumise au champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u_x(x=0) = 0\\ u_x(x=10.018mm) = u\\ u_y(y=0) = 0 \end{cases}$$

Les propriétés des fils et de la matrice sont celles utilisées au 4.2. Les éléments modélisant la matrice sont augmentés lorsque leur contrainte principale maximale σ_I dépasse $\sigma_c = 400 MPa$. Les énergies de rupture de la matrice en mode I et II sont $G_{Ic} = 0.02N/mm$ et $G_{IIc} = 0.01N/mm$ (des valeurs similaires sont utilisées dans [Mei, 2008]). La stratégie de calcul (critère de convergence, ordre d'enrichissement des éléments) détaillée à la Section 3.4.1 est adoptée. La courbe contrainte-déformation obtenue est en accord avec celle observée expérimentalement sans qu'aucun effort de « calibrage » n'ait été fourni (cf. Figure 4.19). La corrélation expérience/simulation est bonne jusqu'à $\epsilon \simeq 0.06\%$. La fissuration des fils n'est pas permise au cours de la simulation. Des différences expérience/simulation notables apparaissent donc à partir de ce niveau de déformation : comme les fils ne peuvent pas fissurer, la raideur du modèle ne diminue pas suffisamment. L'algorithme de Newton-Rhapson diverge lorsque la déformation longitudinale atteint 0.08%.



FIGURE 4.19 – Courbe de comportement d'un SiC/SiC CVI tissé soumis à un chargement longitudinal (¹ : [Lamon, 2014a])

Le scénario d'endommagement obtenu numériquement est réaliste : des fissures s'amorcent aux macropores et se propagent jusqu'aux fils (cf. Figure 4.20). Des décohésions fils/matrice apparaissent ensuite et les fils longitudinaux sont localement surchargés (cf. Figure 4.21).



FIGURE 4.20 – Évolution du réseau de fissures dans une portion du domaine



FIGURE 4.21 – État de contrainte principale maximale dans le matériau pour $\epsilon_{xx} = 0.08\%$

4.4 Conclusions et perspectives

La présence d'un réseau de fissures à l'échelle mésoscopique d'un CMC tissé a été modélisée grâce à la méthode des éléments finis augmentés. Les résultats obtenus sont pleinement satisfaisants. En effet, les ouvertures de fissures, les raideurs et les champs de contraintes sont similaires à ceux fournis par la méthode des éléments finis classique. AFEM permet également de prendre en compte le contact entre les lèvres d'une fissure de façon consistante et sans coût de calcul additionnel. La méthode peut donc être utilisée comme un outil pour insérer aisément des fissures dans un maillage et visualiser leurs effets sur les champs de contraintes et/ou la raideur d'une structure. La prise en compte du frottement au sein des éléments augmentés fait partie des développements à apporter. Ce phénomène est en effet indispensable pour reproduire fidèlement le comportement de CMCs.

La simulation de la propagation de fissures matricielles a également été entreprise. Malgré le manque de robustesse de la stratégie de calcul employée (cf. Chapitre 3.5) les premiers stades de l'endommagement en traction d'un SiC/SiC CVI sont convenablement simulés avec AFEM. Pour aller plus loin il est nécessaire de simuler le comportement des éléments appartenant au fil de façon adéquate. En effet, des chargements tel que l'impact ou l'indentation génèrent immédiatement des fissures dans les fils [Herb et al., 2010,Herb et al., 2012]. Des fissures dans les fils sont également détectées sous chargement longitudinal, dès $\epsilon = 0.05\%$, pour d'autres familles de CMCs telles que les SiC/SiC MI (Melt Infiltration) [Morscher, 2004]. Des critères phénoménologiques tels que celui d'Hashin ou de Puck [Hashin, 1980,Puck, 1998] permettent de modéliser le comportement de microstructures composées de fibres longues et d'une matrice mais ils paraissent peu adaptés aux fils des CMCs. Ces derniers ont en effet un comportement complexe lorsqu'ils sont sollicités dans le sens des fibres (cf. Fig. 4.22a). Des fissures matricielles peuvent traverser la structure de part en part bien avant sa rupture ultime (cf Fig. 4.22b) et rendent ainsi inappropriées les tentatives d'homogénéisation de son comportement.



FIGURE 4.22 – Essai de traction réalisé sur un minicomposite en SiC/SiC CVI a) courbes forcedéplacement (la courbe rouge a été décalée de 70 μm pour une meilleure de lisibilité) b) microtomographies de la structure au cours du chargement, d'après [Bale et al., 2012]

Des calculs à l'échelle microscopique des CMCs sont donc à envisager. Des essais préliminaires montrent qu'AFEM peut également être utilisée à cette échelle (cf. Fig 4.23).



FIGURE 4.23 – Propagation de fissures matricielles dans un fil de CMC soumis à un chargement de traction transverse

Afin de réaliser des simulations à l'échelle mésoscopique prenant en compte l'endommagement des fils, une stratégie de type « discontinuous semi-concurrent » devraient être employée [Verhoosel et al., 2010,

Cid Alfaro et al., 2010, Nguyen et al., 2011, Nguyen et al., 2012, Bosco et al., 2015]. Sans rentrer dans les détails, une fois qu'un élément appartenant au fil est augmenté, la loi traction-ouverture de sa zone cohésive est calculée à partir d'essais à l'échelle microscopique. Les itérations à l'échelle mésoscopique sont donc systématiquement suivies de simulations sur des cellules élémentaires représentatives de la microstructure. Cette approche est similaire à une stratégie de type FE^2 [Feyel and Chaboche, 2000] mais plus adaptée à la modélisation de discontinuités puisqu'elles sont explicitement représentées (cf. Fig. 4.24).



FIGURE 4.24 – Illustration de la procédure de calcul à deux échelles, d'après [Verhoosel et al., 2010]

Ce processus multiéchelle ne pourrait cependant donner des temps de calculs admissibles et doit être simplifié. Ainsi, certains auteurs proposent d'effectuer, avant le calcul à l'échelle mésoscopique, une réduction du modèle microscopique pour accélérer les échanges micro/méso (voir, par exemple, [Yvonnet and He, 2007, Oliver et al., 2017]). Dans un premier temps il serait même souhaitable d'éviter tout dialogue micro/méso. La courbe force-déplacement obtenue avec la microstructure représentée Figure 4.23 est élastique-fragile. Une zone cohésive totalement endommagée peut donc être insérée dans les éléments augmentés à l'échelle mésoscopique et aucun calcul supplémentaire à l'échelle microscopique ne devrait être effectué. Lorsque l'endommagement à l'échelle microscopique est similaire à celui observé Figure 4.22b il serait intéressant de n'utiliser la zone cohésive que pour représenter la raideur des fibres non fissurées.

Conclusion générale

L'objectif de cette thèse était de mettre en place une méthodologie permettant de simuler l'endommagement dans les composites tissés à matrice céramique et qui soit implémentable dans un code de calcul industriel tel qu'Abaqus. Ces composites concentrent un grand nombre de difficultés telles qu'une microstructure complexe, un comportement non-linéaire, la non-séparation des différentes échelles du matériau ou des densités de fissures élevées. Les approches majoritairement entreprises jusqu'ici font usage de modèles d'endommagement macroscopiques et phénoménologiques. Elles sont adaptées au calcul de structures industrielles mais souffrent d'un manque de représentativité. À titre d'exemple, l'ouverture des fissures calculée avec ces méthodes -une donnée clef pour estimer la durée de vie du matériau- est imprécise et/ou doit être calibrée à l'aide de résultats expérimentaux.

L'approche envisagée dans ces travaux est différente. On se propose de simuler le processus d'endommagement de manière explicite, à l'échelle mésoscopique, en n'utilisant que des paramètres matériaux afin d'accroître le caractère prédictif des simulations. L'intérêt d'une telle démarche est double : elle permet d'alimenter les nombreux paramètres des modèles d'endommagement précédemment évoqués mais aussi de simuler, de manière réaliste, le comportement dans les zones critiques des pièces (au voisinage d'un impact, d'un trou ou d'une singularité par exemple).

Modéliser un nombre conséquent de fissures à l'échelle mésoscopique a nécessité une importante réflexion sur la technologie d'éléments finis à adopter. En effet, la mésostructure du matériau impose l'utilisation de maillages comprenant un nombre considérable d'éléments. Les méthodes de type embedded finite element (EFEM) nous ont paru être les plus adaptées au problème. Elles sont aisément implémentables dans un code éléments finis, permettent une représentation discrète des fissures et n'introduisent pas de degrés de liberté additionnels pour modéliser ces dernières. Afin de réduire le plus possible les temps de calcul, notre choix s'est porté sur une EFEM s'affranchissant d'itérations locales : la méthode des éléments finis augmentés (AFEM). Son implémentation a donc été réalisée dans un code prototype développé pour l'occasion.

Afin de faciliter la compréhension et l'implémentation d'AFEM, sa formulation a été intégralement rappelée et sensiblement plus détaillée que dans la littérature. Certaines lacunes de la méthode ont alors été découvertes. Une variante d'AFEM a donc été développée afin de les corriger. Nous avons également démontré que, sous certaines conditions, AFEM et la méthode des éléments finis classique (FEM) étaient totalement équivalentes. Les différences et les ressemblances dans la description cinématique des fissures entre AFEM et d'autres EFEM ou XFEM ont de plus été mises en lumière.

La validation de l'implémentation a fait l'objet d'une attention particulière. L'équivalence démontrée entre FEM et AFEM nous a permis de mettre au point un test de validation de l'implémentation plus exhaustif que ceux rencontrés dans la littérature. Les résultats obtenus ont confirmé que notre implémentation était exempte d'erreurs.

Divers aspects relatifs aux performances d'AFEM ont également été abordés.

- L'étude de la convergence en h de la méthode nous a permis de statuer objectivement sur sa capacité à représenter des discontinuités faibles ou fortes. Au vu de l'objectif de la thèse, le résultat principal de cette étude de convergence est qu'AFEM est (légèrement) plus performante que FEM pour représenter des fissures sollicitées en mode I.
- Les deux schémas d'intégration des contraintes cohésives que nous avons implémentés (Newton-Cotes à 2 points et Gauss à 2 points) ne se sont pas montrés pleinement satisfaisants. D'autres schémas d'intégration mériteraient donc d'être testés.
- Nous avons démontré qu'une stratégie de crack-tracking devait être employée conjointement avec AFEM pour garantir l'indépendance des trajets de fissures au maillage. Un algorithme de local cracktracking a ainsi été implémenté mais s'est avéré peu robuste. Bien que ce dernier puisse être considérablement amélioré, l'utilisation d'un algorithme de global crack-tracking serait préférable pour le passage à la 3D.

— Une stratégie incrémentale-itérative de type Newton-Rhapson a été adoptée tout au long de ces travaux pour obtenir les chemins d'équilibre. D'autres stratégies méritent d'être évaluées afin de faciliter la convergence des calculs éléments finis.

Malgré les problèmes évoqués, l'application d'AFEM à l'échelle mésoscopique de CMC a donné lieu à des résultats très encourageants. La méthode a été employée avec succès pour simuler les pertes de raideurs et les états de contraintes induits par la présence d'un réseau de fissures matricielles. Elle permet de prendre naturellement en compte la dissymétrie du comportement en traction/compression engendrée par la refermeture des fissures. AFEM fournit des résultats équivalents à FEM mais permet de s'affranchir du remaillage et/ou de l'utilisation de degrés de liberté additionnels. La simulation de la propagation de fissures matricielles a également été entreprise et les premiers stades de l'endommagement en traction d'un SiC/SiC CVI ont été convenablement simulés. L'ébauche d'une stratégie permettant de modéliser la fissuration dans les fils de façon consistante a finalement été proposée.

Appendices

Annexe A

Numérotation des éléments augmentés, vecteurs et matrices associés

A.1 AQ4-1

La numérotation de l'élément est réalisée de façon à ce que les deux premiers noeuds soient dans le sous-domaine Ω^- .



FIGURE A.1 – Numérotation de l'élément AQ4-1

$$\{dext^{+}\}^{T} = \{u_{3} \ v_{3} \ u_{4} \ v_{4}\} \qquad \{dint^{+}\}^{T} = \{u_{5} \ v_{5} \ u_{6} \ v_{6}\} \qquad \{dext\}^{T} = \{dext^{-T} \ dext^{+T}\}$$

$$\{fext^{+}\}^{T} = \{f_{x3} \ f_{y3} \ f_{x4} \ f_{y4}\} \qquad \{fint^{+}\}^{T} = \{f_{x5} \ f_{y5} \ f_{x6} \ f_{y6}\} \qquad \{fext\}^{T} = \{fext^{-T} \ fext^{+T}\}$$

$$\{dext^{-}\}^{T} = \{u_{1} \ v_{1} \ u_{2} \ v_{2}\} \qquad \{dint^{-}\}^{T} = \{u_{8} \ v_{8} \ u_{7} \ v_{7}\} \qquad \{dint\}^{T} = \{dint^{-T} \ dint^{+T}\}$$

$$\{fext^{-}\}^{T} = \{f_{x1} \ f_{y1} \ f_{x2} \ f_{y2}\} \qquad \{fint^{-}\}^{T} = \{f_{x8} \ f_{y8} \ f_{x7} \ f_{y7}\} \qquad \{fint\}^{T} = \{fint^{-T} \ fint^{+T}\}$$

$$\{\Delta dint\} = \{dint^{+}\} - \{dint^{-}\} \qquad \{\delta int^{+}\}^{T} = \{\delta_{n5} \ \delta_{s5} \ \delta_{n6} \ \delta_{s6}\} \qquad \{\delta int^{-}\}^{T} = \{\delta_{n8} \ \delta_{s8} \ \delta_{n7} \ \delta_{s7}\}$$

$$\{cos\theta \ sin\theta\}^{T} = \frac{56}{\|56\|} \qquad [r] = \begin{bmatrix} -sin\theta \ cos\theta \ sin\theta \end{bmatrix} = [r]^{T} \qquad [R_{(4*4)}] = \begin{bmatrix} r \ 0(2*2) \ r \end{bmatrix} = [R]^{T}$$

$$\{\Delta \delta int\} = \{\delta int^{+}\} - \{\delta int^{-}\} = \{\Delta \delta_{n58} \ \Delta \delta_{s58} \ \Delta \delta_{n67} \ \Delta \delta_{s67} \}$$

 $\{dint^{\pm}\}, \{dext^{\pm}\}$ et $\{\Delta dint\}$ sont exprimés dans la base globale (x,y) alors que $\{\delta int^{\pm}\}$ et $\{\Delta \delta int\}$ sont exprimés dans la base locale (δ_n, δ_s) de la zone cohésive.

L'équilibre des deux sous-domaines Ω^+ et Ω^- s'écrit :

$$\begin{bmatrix} L_{11_{(4*4)}^+} & L_{12_{(4*4)}^+} \\ L_{21_{(4*4)}^+} & L_{22_{(4*4)}^+} \end{bmatrix} \begin{cases} dext_{(4*1)}^+ \\ dint_{(4*1)}^+ \end{cases} = \begin{cases} fext_{(4*1)}^+ \\ fint_{(4*1)}^+ \end{cases} \\ \begin{bmatrix} L_{11_{(4*4)}^-} & L_{12_{(4*4)}^-} \\ L_{21_{(4*4)}^-} & L_{22_{(4*4)}^-} \end{bmatrix} \begin{cases} dext_{(4*1)}^- \\ dint_{(4*1)}^- \end{cases} = \begin{cases} fext_{(4*1)}^- \\ fint_{(4*1)}^- \end{cases} \\ fint_{(4*1)}^- \end{cases}$$

Le vecteur des degrés de liberté (DOF) du sous-domaine Ω^- est : $\begin{cases} dext^-\\ dint^- \end{cases} = \{u1 \quad v1 \quad u2 \quad v2 \quad u8 \quad v8 \quad u7 \quad v7\}.$ La numérotation des noeuds associée, " $\{1,2,8,7\}$ ", n'est pas dans l'ordre trigonométrique. Cet ordonnancement sera cependant conservé pour des raisons de commodité. Pour former la matrice de raideur

cement sera cependant conservé pour des raisons de commodité. Pour former la matrice de raideur élémentaire nous avons donc choisi de la calculer dans l'ordre antihoraire "{1,2,7,8}" et de la transformer par la suite. Soit $[L^-_{(8*8)}]$ la matrice de raideur élémentaire dans l'ordre trigonométrique, on peut écrire

A.2 AQ4-2

La numérotation de l'élément est réalisée de façon à ce que les trois premiers noeuds soient dans le sous-domaine Ω^- .



FIGURE A.2 – Numérotation de l'élément AQ4-2

 $\{dext^{+}\}^{T} = \{u_{4} \quad v_{4}\}$ $\{dint^{+}\}^{T} = \{u_{5} \quad v_{5} \quad u_{6} \quad v_{6}\}$ $\{dext\}^{T} = \{dext^{-T} \quad dext^{+T}\}$ $\{fext^{+}\}^{T} = \{f_{x4} \quad f_{y4}\}$ $\{fint^{+}\}^{T} = \{f_{x5} \quad f_{y5} \quad f_{x6} \quad f_{y6}\}$ $\{fext\}^{T} = \{fext^{-T} \quad fext^{+T}\}$ $\{dext^{-}\}^{T} = \{u_{1} \quad v_{1} \quad u_{2} \quad v_{2} \quad u_{3} \quad v_{3}\}$ $\{dint^{-}\}^{T} = \{u_{8} \quad v_{8} \quad u_{7} \quad v_{7}\}$ $\{dint\}^{T} = \{dint^{-T} \quad dint^{+T}\}$ $\{fext^{-}\}^{T} = \{f_{x1} \quad f_{y1} \quad f_{x2} \quad f_{y2} \quad f_{x3} \quad f_{y3}\}$ $\{fint^{-}\}^{T} = \{f_{x8} \quad f_{y8} \quad f_{x7} \quad f_{y7}\}$ $\{fint\}^{T} = \{fint^{-T} \quad fint^{+T}\}$ $\{\Delta dint\} = \{dint^{+}\} - \{dint^{-}\}$ $\{\delta int^{+}\}^{T} = \{\delta_{n5} \quad \delta_{s5} \quad \delta_{n6} \quad \delta_{s6}\}$ $\{\delta int^{-}\}^{T} = \{\delta_{n8} \quad \delta_{s8} \quad \delta_{n7} \quad \delta_{s7}\}$

$$\{ \cos\theta \quad \sin\theta \}^T = \frac{\vec{56}}{\|\vec{56}\|} \qquad [r] = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} = [r]^T \qquad [R_{(4*4)}] = \begin{bmatrix} r & 0_{(2*2)}\\ 0_{(2*2)} & r \end{bmatrix} = [R]^T$$

$$\{ \Delta\delta int \} = \{\delta int^+\} - \{\delta int^-\} = \{ \Delta\delta_{n58} \quad \Delta\delta_{s58} \quad \Delta\delta_{n67} \quad \Delta\delta_{s67} \}$$

$$\{ \Delta dint \} = [R] \{ \Delta\delta int \} \qquad \{ \Delta\delta int \} = [R] \{ \Delta dint \}$$

 $\{dint^{\pm}\}, \{dext^{\pm}\}$ et $\{\Delta dint\}$ sont exprimés dans la base globale (x,y) alors que $\{\delta int^{\pm}\}$ et $\{\Delta \delta int\}$ sont exprimés dans la base locale (δ_n, δ_s) de la zone cohésive.

L'équilibre des sous-domaines Ω^+ et Ω^- s'écrit :

$$\begin{bmatrix} L_{11_{(2*2)}^{+}} & L_{12_{(2*4)}^{+}} \\ L_{21_{(4*2)}^{+}} & L_{22_{(4*4)}^{+}} \end{bmatrix} \begin{cases} dext_{(2*1)}^{+} \\ dint_{(4*1)}^{+} \end{cases} = \begin{cases} fext_{(4*1)}^{+} \\ fint_{(4*1)}^{+} \end{cases} \\ \begin{bmatrix} L_{11_{(6*6)}^{-}} & L_{12_{(6*4)}^{-}} \\ L_{21_{(4*6)}^{-}} & L_{22_{(4*4)}^{-}} \end{bmatrix} \begin{cases} dext_{(6*1)}^{-} \\ dint_{(4*1)}^{-} \end{cases} \\ = \begin{cases} fext_{(6*1)}^{-} \\ fint_{(4*1)}^{-} \end{cases} \end{cases}$$

Le vecteur des degrés de liberté (DOF) du sous-domaine Ω^- est :

 $\begin{cases} dext^-\\ dint^- \end{cases} = \{u1 \quad v1 \quad u2 \quad v2 \quad u3 \quad v3 \quad u8 \quad v8 \quad u7 \quad v7\}. \text{ La numérotation des noeuds associée : "{1,2,3,8,7}", n'est pas dans l'ordre trigonométrique. Cet ordonnancement sera cependant conservé pour des raisons de commodité. Pour former la matrice de raideur élémentaire nous la calculons dans l'ordre antihoraire "{1,2,3,7,8}" et la transformons ensuite. Soit <math>[L_{(10*10)}^-]$ la matrice de raideur élémentaire dans l'ordre antihoraire antihoraire, on peut écrire



gonométrique. Il n'y a donc pas besoin de réaliser des opérations supplémentaires sur la matrice de raideur associée.

A.3 AT3

La numérotation de l'élément est réalisée de façon à ce que le premier noeud soit dans le domaine Ω^- .



FIGURE A.3 – Numérotation de l'élément AT3

$$\{dext^+\}^T = \{u_3 \ v_3\} \qquad \{dint^+\}^T = \{u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5\} \qquad \{dext\} = \{dext^- \ dext^+\}^T$$

$$\{fext^+\}^T = \{f_{x3} \ f_{y3}\} \qquad \{fint^+\}^T = \{f_{x4} \ f_{y4} \ f_{x5} \ f_{y5}\} \qquad \{fext\} = \{fext^- \ fext^+\}^T$$

$$\{dext^-\}^T = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2\} \qquad \{dint^-\}^T = \{u_7 \ v_7 \ u_6 \ v_6\} \qquad \{dint\} = \{dint^- \ dint^+\}^T$$

$$\{fext^-\}^T = \{f_{x1} \ f_{y1} \ f_{x2} \ f_{y2}\} \qquad \{fint^-\}^T = \{f_{x7} \ f_{y7} \ f_{x6} \ f_{y6}\} \qquad \{fint\} = \{fint^- \ fint^+\}^T$$

$$\{\Delta dint\} = \{dint^+\} - \{dint^-\} \qquad \{\delta int^+\}^T = \{\delta_{n4} \ \delta_{s4} \ \delta_{n5} \ \delta_{s5}\} \qquad \{\delta int^-\}^T = \{\delta_{n7} \ \delta_{s7} \ \delta_{n6} \ \delta_{s6}\}$$

$$\left\{ \cos\theta \quad \sin\theta \right\}^T = \frac{4\vec{5}}{\|\vec{45}\|} \qquad [r] = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} = [r]^T \qquad [R_{(4*4)}] = \begin{bmatrix} r & 0_{(2*2)}\\ 0_{(2*2)} & r \end{bmatrix} = [R]^T$$

$$\{\Delta\delta int\} = \{\delta int^+\} - \{\delta int^-\} = \{\Delta\delta_{n58} \quad \Delta\delta_{s58} \quad \Delta\delta_{n67} \quad \Delta\delta_{s67}\}$$
$$\{\Delta dint\} = [R]\{\Delta\delta int\} \quad \{\Delta\delta int\} = [R]\{\Delta dint\}$$

 $\{dint^{\pm}\}, \{dext^{\pm}\}$ et $\{\Delta dint\}$ sont exprimés dans la base globale (x,y) alors que $\{\delta int^{\pm}\}$ et $\{\Delta \delta int\}$ sont exprimés dans la base locale (δ_n, δ_s) de la zone cohésive.

L'équilibre des deux sous-domaines Ω^+ and Ω^- s'écrit

$$\begin{bmatrix} L_{11^{+}_{(2*2)}} & L_{12^{+}_{(2*4)}} \\ L_{21^{+}_{(4*2)}} & L_{22^{+}_{(4*4)}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dext^{+}_{(2*1)} \\ dint^{+}_{(4*1)} \end{pmatrix} = \begin{cases} fext^{+}_{(2*1)} \\ fint^{+}_{(4*1)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} L_{11^{-}_{(4*4)}} & L_{12^{-}_{(4*4)}} \\ L_{21^{-}_{(4*4)}} & L_{22^{-}_{(4*4)}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dext^{-}_{(4*1)} \\ dint^{-}_{(4*1)} \end{pmatrix} = \begin{cases} fext^{-}_{(4*1)} \\ fint^{-}_{(4*1)} \end{pmatrix}$$

Le vecteur des degrés de liberté (DOF) du sous-domaine Ω^- est : $\begin{cases} dext^-\\ dint^- \end{cases} = \{u1 \quad v1 \quad u2 \quad v2 \quad u7 \quad v7 \quad u6 \quad v6\}. La numérotation des noeuds associée : "{1,2,7,6}", n'est pas dans l'ordre trigonométrique. Cet ordonnancement sera cependant conservé pour des raisons de commodité. Pour former la matrice de raideur élémentaire nous la calculons dans l'ordre antihoraire "{1,2,6,7}" et la transformons ensuite. Soit <math>[L_{(8*8)}^-]$ la matrice de raideur élémentaire dans l'ordre trigonométrique, on peut écrire

$$[L^{-}] \begin{cases} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \end{cases} = \begin{cases} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{y2} \\ f_{x6} \\ f_{y6} \\ f_{x7} \\ f_{y7} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{ainsi} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 1 & & \\ & 1 & & \\ & 1 & & \\ & 1 & & \\ & 1 & & \\ & 1 & & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} [L^-] \begin{cases} u_1 \\ v_2 \\ v_2 \\ v_2 \\ v_3 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ v_7$$

Le vecteur des degrés de liberté du sous-domaine Ω^+ : $\begin{cases} dext^+\\ dint^+ \end{cases} = \{u3 \ v3 \ u4 \ v4 \ u5 \ v5\}$ est dans l'ordre trigonométrique. Il n'y a donc pas besoin de réaliser des opérations supplémentaires sur la matrice de raideur associée.

Annexe B

Matrice de raideur d'un élément pentagonal

L'élément fini polygonal développé par le groupe de Sukumar [Sukumar and Tabarraei, 2004, Tabarraei and Sukumar, 2006, Mousavi et al., 2009] est employé pour former la matrice de raideur du sous-domaines pentagonal du AQ4-2 (voir Figure A.2). Sa formulation est brièvement présentée ci-dessous.

Les coordonnées naturelles des noeuds de l'élément dans le repère de référence sont

$$\xi_i = \cos(2\Pi i/5)$$
 $\eta_i = \sin(2\Pi i/5)$ $i \in \{1, 2, ..., 5\}$

Les fonctions de forme de l'élément de référence sont

$$N_i(\xi) = a_i(\xi, \eta)/b(\xi, \eta)$$

 $i \in \{1, 2, .., 5\}$

où

$$b(\xi,\eta) = 87.05 - 12.7004\xi^2 - 12.7004\eta^2 \tag{B.1}$$

$$a_1(\xi,\eta) = -0.092937(3.23607 + 4.0\xi) (-3.80423 + 3.80423\xi - 2.76393\eta)(15.2169 + 5.81234\xi + 17.8885\eta)$$
(B.2)

$$a_2(\xi,\eta) = -0.0790569(3.80423 - 3.80423\xi - 2.76393\eta) (-3.80423 + 3.80423\xi - 2.76393\eta)(15.2169 + 5.81234\xi + 17.8885\eta)$$
(B.3)

$$a_{3}(\xi,\eta) = -0.0790569(15.2169 + 5.81234\xi - 17.8885\eta) (3.80423 - 3.80423\xi - 2.76393\eta)(-3.80423 + 3.80423\xi - 2.76393\eta)$$
(B.4)

$$a_4(\xi,\eta) = 0.092937(3.23607 + 4.0\xi) (15.2169 + 5.81234\xi - 17.8885\eta)(3.80423 - 3.80423\xi - 2.76393\eta)$$
(B.5)

$$a_5(\xi,\eta) = 0.0232343(3.23607 + 4.0\xi) (15.2169 + 5.81234\xi - 17.8885\eta)(15.2169 + 5.81234\xi + 17.8885\eta)$$
(B.6)

Ces coefficients ont été fournis dans [Tabarraei and Sukumar, 2006]. Ils ont été rappelés dans [Liu et al., 2014] (Eq. (B.3) de l'annexe B) mais une faute de frappe est présente dans cette publication : les fonctions de forme résultantes ne forment pas une partition de l'unité L'équation corrigée est (B.1).



 $\label{eq:FIGURE B.1-Noeuds} \ (en\ rouge)\ et\ points\ d'intégration\ (en\ bleu)\ de\ l'élément\ pentagonal\ dans\ son\ repère\ de\ référence$

Les poids des points d'intégration ainsi que leurs positions sont détaillés dans le tableau ci-dessous

_

Point d'intégration	w_j	ξ_j	η_j
1	0.388891	-0.638467	0.275554
2	0.388891	0.381135	-0.585754
3	0.422991	-0.437363	-0.519392
4	0.676403	0.123993	0.136334
5	0.25103	0.0600584	0.794056
6	0.243641	0.779135	0.193675

TABLE B.1 – Position des points d'intégration de l'élément pentagonal et poids associés

Bibliographie

[ABAQUS, 2011] ABAQUS (2011). Analysis user's manual, volume iv : Elements, dassault systèmes.

- [Abisset, 2012] Abisset, E. (2012). A damage mesomodel of laminated composites for the virtual testing : identification and validation. Theses, École normale supérieure de Cachan ENS Cachan.
- [Abisset et al., 2011] Abisset, E., Daghia, F., and Ladevèze, P. (2011). On the validation of a damage mesomodel for laminated composites by means of open-hole tensile tests on quasi-isotropic laminates. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 42(10) :1515–1524.
- [Ahmed and Sluys, 2015] Ahmed, A. and Sluys, L. (2015). A computational model for the simulation of dynamic fracture in laminated composite plates. *Journal of Composite Materials*, 49(14):1717–1738.
- [Alfaiate et al., 2003] Alfaiate, J., Simone, A., and Sluys, L. (2003). Non-homogeneous displacement jumps in strong embedded discontinuities. *International Journal of Solids and Structures*, 40(21):5799– 5817.
- [Alfano and Crisfield, 2001] Alfano, G. and Crisfield, M. A. (2001). Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites : mechanical and computational issues. *International journal for numerical methods in engineering*, 50(7) :1701–1736.
- [Aliabadi, 1997] Aliabadi, M. (1997). A new generation of boundary element methods in fracture mechanics. International Journal of Fracture, 86(1):91–125.
- [Allix and Deu, 1997] Allix, O. and Deu, J.-F. (1997). Delayed-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions/Rozprawy Inzynierskie*, 45(1):29–46.
- [Allix and Hild, 2002] Allix, O. and Hild, F., editors (2002). Continuum damage mechanics of materials and structures. Elsevier, Amsterdam; New York.
- [Allix and Ladevèze, 1992] Allix, O. and Ladevèze, P. (1992). Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. *Composite structures*, 22(4) :235–242.
- [Allix et al., 1995] Allix, O., Ladevéze, P., and Corigliano, A. (1995). Damage analysis of interlaminar fracture specimens. *Composite Structures*, 31(1):61–74.
- [Appel, 2010] Appel, F. (2010). TiAl Intermetallics. In Blockley, R. and Shyy, W., editors, *Encyclopedia of Aerospace Engineering*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK.
- [Areias and Belytschko, 2006] Areias, P. M. and Belytschko, T. (2006). A comment on the article "A finite element method for simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics" by A. Hansbo and P. Hansbo [Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 193 (2004) 3523–3540]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(9-12) :1275–1276.
- [Armero and Kim, 2012] Armero, F. and Kim, J. (2012). Three-dimensional finite elements with embedded strong discontinuities to model material failure in the infinitesimal range : 3d finite elements with embedded strong discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91(12) :1291–1330.
- [Armero and Linder, 2007] Armero, F. and Linder, C. (2007). Recent Developments in the Formulation of Finite Elements with Embedded Strong Discontinuities. In Combescure, A., De Borst, R., and Belytschko, T., editors, *IUTAM Symposium on Discretization Methods for Evolving Discontinuities*, volume 5, pages 105–122. Springer Netherlands, Dordrecht.
- [Armero and Linder, 2008] Armero, F. and Linder, C. (2008). New finite elements with embedded strong discontinuities in the finite deformation range. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197(33-40) :3138–3170.
- [Aubard, 1992] Aubard, X. (1992). Modelisation et identification du comportement des materiaux composites 2d sic-sic. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Ladevèze, Pierre Sciences appliquées Paris 6 1992.
- [Babuška and Melenk, 1997] Babuška, I. and Melenk, J. M. (1997). The partition of unity method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40(4):727–758.

- [Bale et al., 2012] Bale, H. A., Haboub, A., MacDowell, A. A., Nasiatka, J. R., Parkinson, D. Y., Cox, B. N., Marshall, D. B., and Ritchie, R. O. (2012). Real-time quantitative imaging of failure events in materials under load at temperatures above 1,600 °C. *Nature Materials*, 12(1):40–46.
- [Barenblatt, 1962] Barenblatt, G. (1962). The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. In Advances in Applied Mechanics, volume 7, pages 55–129. Elsevier.
- [Bathe, 1996] Bathe, K.-J. (1996). Finite element procedures. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [Batoz and Dhatt, 1990] Batoz, J.-L. and Dhatt, G. (1990). Modélisation des structures par éléments finis. Vol 1, Vol 2, Vol 1, Vol 2,. L'Hermès, Paris. OCLC : 60082091.
- [Bažant, 1984] Bažant, Z. P. (1984). Imbricate Continuum and its Variational Derivation. Journal of Engineering Mechanics, 110(12) :1693–1712.
- [Bažant et al., 1984] Bažant, Z. P., Belytschko, T. B., and Chang, T.-P. (1984). Continuum Theory for Strain-Softening. Journal of Engineering Mechanics, 110(12) :1666–1692.
- [Bažant and Oh, 1983] Bažant, Z. P. and Oh, B. H. (1983). Crack band theory for fracture of concrete. Matériaux et Constructions, 16(3):155–177.
- [Bažant and Pijaudier-Cabot, 1988] Bažant, Z. P. and Pijaudier-Cabot, G. (1988). Nonlocal Continuum Damage, Localization Instability and Convergence. *Journal of Applied Mechanics*, 55(2):287.
- [Bažant and Planas, 1998] Bažant, Z. P. and Planas, J. (1998). Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials. New directions in civil engineering. CRC Press, Boca Raton.
- [Beckert, 1973] Beckert, H. (1973). R. J. Knops and L. E. Payne, Uniqueness Theorems in Linear Elasticity. (Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 19). IX + 130 S. Berlin/Heidelberg/New York 1971. Springer-Verlag. Preis geb. DM 36,—. ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 53(3) :209–210.
- [Belytschko and Black, 1999] Belytschko, T. and Black, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. International journal for numerical methods in engineering, 45(5):601–620.
- [Belytschko et al., 2009] Belytschko, T., Gracie, R., and Ventura, G. (2009). A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17(4):043001.
- [Belytschko et al., 2004] Belytschko, T., Rabczuk, T., Huerta, A., and Fernández-Méndez, S. (2004). Meshfree Methods. In Stein, E., De Borst, R., and Hughes, T. J. R., editors, *Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK.
- [Benedetti et al., 2016] Benedetti, L., Cervera, M., and Chiumenti, M. (2016). High-fidelity prediction of crack formation in 2d and 3d pullout tests. *Computers & Structures*, 172 :93–109.
- [Bernard et al., 2012] Bernard, P., Moës, N., and Chevaugeon, N. (2012). Damage growth modeling using the Thick Level Set (TLS) approach : Efficient discretization for quasi-static loadings. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 233-236 :11–27.
- [Berthelot, 2012] Berthelot, J.-M. (2012). Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures. Éd. Tec & doc, Paris, 5e éd edition.
- [Bolzon, 2001] Bolzon, G. (2001). Formulation of a triangular finite element with an embedded interface via isoparametric mapping. *Computational Mechanics*, 27(6):463–473.
- [Bolzon and Corigliano, 2000] Bolzon, G. and Corigliano, A. (2000). Finite elements with embedded displacement discontinuity : a generalized variable formulation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 49(10) :1227–1266.
- [Bordas and Moran, 2006] Bordas, S. and Moran, B. (2006). Enriched finite elements and level sets for damage tolerance assessment of complex structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(9):1176–1201.
- [Borst and Crisfield, 2012] Borst, R. d. and Crisfield, M. A., editors (2012). Nonlinear finite element analysis of solids and structures. Wiley, Hoboken, NJ, 2nd ed edition.
- [Bosco et al., 2015] Bosco, E., Kouznetsova, V. G., and Geers, M. G. D. (2015). Multi-scale computational homogenization-localization for propagating discontinuities using X-FEM : multi-scale computational homogenization-localization based on X-FEM. *International Journal for Numerical Methods* in Engineering, 102(3-4) :496-527.
- [Bouchard et al., 2003] Bouchard, P., Bay, F., and Chastel, Y. (2003). Numerical modelling of crack propagation : automatic remeshing and comparison of different criteria. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(35-36) :3887–3908.
- [Bourdin et al., 2008] Bourdin, B., Francfort, G. A., and Marigo, J.-J. (2008). The variational approach to fracture. *Journal of Elasticity*, 91(1):5–148.
- [Brancherie, 2003] Brancherie, D. (2003). Continuous and discrete models for localisation and fragile/ductile rupture problems. Theses, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan.

- [Brancherie and Ibrahimbegovic, 2009] Brancherie, D. and Ibrahimbegovic, A. (2009). Novel anisotropic continuum/discrete damage model capable of representing localized failure of massive structures : Part I : theoretical formulation and numerical implementation. *Engineering Computations*, 26(1/2) :100– 127.
- [Burman et al., 2015] Burman, E., Claus, S., Hansbo, P., Larson, M. G., and Massing, A. (2015). Cut-FEM : Discretizing geometry and partial differential equations : discretizing geometry and partial differential equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 104(7) :472–501.
- [Béchet et al., 2005] Béchet, E., Minnebo, H., Moës, N., and Burgardt, B. (2005). Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(8) :1033–1056.
- [Cabay, 1975] Cabay, S. (1975). An Analysis of the Finite Element Method (Gilbert Strang and George J. Fix). SIAM Review, 17(3):577–578.
- [Camacho and Ortiz, 1996] Camacho, G. and Ortiz, M. (1996). Computational modelling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22):2899–2938.
- [Camus, 1996] Camus, G. (1996). Development of damage in a 2d woven C/SiC composite under mechanical loading : I. Mechanical characterization. *Composites Science and Technology*, 56(12) :1363–1372.
- [Camus et al., 2014] Camus, G., Lorette, C., Pailler, R., Rebillat, F., Reignier, B., and Teyssandier, F. (2014). Matériaux composites à matrice céramique et à renfort par fibres longues. *Techniques de l'ingénieur Céramiques*, base documentaire : TIB578DUO.(ref. article : n4803). fre.
- [Carpinteri et al., 1993] Carpinteri, A., Valente, S., Ferrara, G., and Melchiorrl, G. (1993). Is mode II fracture energy a real material property? *Computers & Structures*, 48(3):397–413.
- [Cazes et al., 2016] Cazes, F., Meschke, G., and Zhou, M.-M. (2016). Strong discontinuity approaches : An algorithm for robust performance and comparative assessment of accuracy. *International Journal* of Solids and Structures, 96 :355–379.
- [Cervera and Chiumenti, 2006a] Cervera, M. and Chiumenti, M. (2006a). Mesh objective tensile cracking via a local continuum damage model and a crack tracking technique. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196(1-3):304–320.
- [Cervera and Chiumenti, 2006b] Cervera, M. and Chiumenti, M. (2006b). Smeared crack approach : back to the original track. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 30(12) :1173–1199.
- [Cervera et al., 2010a] Cervera, M., Chiumenti, M., and Codina, R. (2010a). Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics : Part I : Formulation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(37-40) :2559–2570.
- [Cervera et al., 2010b] Cervera, M., Chiumenti, M., and Codina, R. (2010b). Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics : Part II : Strain localization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(37-40) :2571–2589.
- [Cervera et al., 2010c] Cervera, M., Pelà, L., Clemente, R., and Roca, P. (2010c). A crack-tracking technique for localized damage in quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(13):2431– 2450.
- [Chaboche et al., 1997] Chaboche, J. L., Girard, R., and Schaff, A. (1997). Numerical analysis of composite systems by using interphase/interface models. *Computational Mechanics*, 20(1-2) :3–11.
- [Chateau, 2011] Chateau, C. (2011). Analyse expérimentale et modélisation micromécaniques du comportement élastique et de l'endommagement de composites SiC/SiC unidirectionnels. PhD thesis, Ecole Polytechnique X.
- [Chateau et al., 2015] Chateau, C., Gélébart, L., Bornert, M., and Crépin, J. (2015). Micromechanical modeling of the elastic behavior of unidirectional CVI SiC/SiC composites. *International Journal of Solids and Structures*, 58 :322–334.
- [Chateau et al., 2014] Chateau, C., Gélébart, L., Bornert, M., Crépin, J., Caldemaison, D., and Sauder, C. (2014). Modeling of damage in unidirectional ceramic matrix composites and multi-scale experimental validation on third generation SiC/SiC minicomposites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 63 :298–319.
- [Chessa et al., 2003] Chessa, J., Wang, H., and Belytschko, T. (2003). On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(7):1015–1038.
- [Chiaruttini et al., 2013] Chiaruttini, V., Riolo, V., and Feyel, F. (2013). Advanced remeshing techniques for complex 3d crack propagation. In *ICF13*.
- [Cid Alfaro et al., 2010] Cid Alfaro, M., Suiker, A., Verhoosel, C., and de Borst, R. (2010). Numerical homogenization of cracking processes in thin fibre-epoxy layers. *European Journal of Mechanics -*A/Solids, 29(2):119–131.

- [Clough, 1962] Clough, R. W. (1962). The stress distribution of Norfork Dam. Technical report, DTIC Document.
- [Cluzel et al., 2009] Cluzel, C., Baranger, E., Ladevèze, P., and Mouret, A. (2009). Mechanical behaviour and lifetime modelling of self-healing ceramic-matrix composites subjected to thermomechanical loading in air. Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, 40(8) :976–984.
- [Comi and Perego, 2001] Comi, C. and Perego, U. (2001). Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. International Journal of Solids and Structures, 38(36-37) :6427–6454.
- [Couégnat, 2008] Couégnat, G. (2008). Approche multiéchelle du comportement mécanique de matériaux composites à renfort tissé. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Lamon, Jacques et Martin, Eric Sciences physiques. Mécanique et ingénierie Bordeaux 1 2008.
- [Cox and Marshall, 1994] Cox, B. and Marshall, D. (1994). Concepts for bridged cracks in fracture and fatigue. Acta Metallurgica et Materialia, 42(2):341–363.
- [Daux et al., 2000] Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumar, N., and Belytschko, T. (2000). Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(12) :1741–1760.
- [De Arantes E Oliveira, 1968] De Arantes E Oliveira, E. R. (1968). Theoretical foundations of the finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 4(10):929–952.
- [de Borst et al., 2001] de Borst, R., Wells, G., and Sluys, L. (2001). Some observations on embedded discontinuity models. *Engineering Computations*, 18(1/2):241–254.
- [De Melo Loseille, 2010] De Melo Loseille, O. (2010). Prévision de la durée de vie des composites à matrice céramique auto cicatrisante, en fatigue statique, à haute température (= 800°C). PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Lamon, Jacques Mécanique et Ingénierie Bordeaux 1 2010.
- [Desmorat et al., 2010] Desmorat, R., Chambart, M., Gatuingt, F., and Guilbaud, D. (2010). Delay-active damage versus non-local enhancement for anisotropic damage dynamics computations with alternated loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(12) :2294–2315.
- [Desmorat et al., 2015] Desmorat, R., Gatuingt, F., and Jirásek, M. (2015). Nonlocal models with damage-dependent interactions motivated by internal time. *Engineering Fracture Mechanics*, 142:255– 275.
- [Dias et al., 2016] Dias, I., Oliver, J., Lemos, J., and Lloberas-Valls, O. (2016). Modeling tensile crack propagation in concrete gravity dams via crack-path-field and strain injection techniques. *Engineering Fracture Mechanics*, 154 :288–310.
- [Dias et al., 2012] Dias, I. F., Oliver, J., and Huespe, A. E. (2012). Strain injection techniques in numerical modeling of propagating material failure. International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona. OCLC: 864131493.
- [Dias-da Costa et al., 2013] Dias-da Costa, D., Alfaiate, J., Sluys, L., Areias, P., and Júlio, E. (2013). An embedded formulation with conforming finite elements to capture strong discontinuities : Conforming embedded approach to capture strong discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(2) :224–244.
- [Dias-da Costa et al., 2009a] Dias-da Costa, D., Alfaiate, J., Sluys, L., and Júlio, E. (2009a). A discrete strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(9) :1176–1201.
- [Dias-da Costa et al., 2009b] Dias-da Costa, D., Alfaiate, J., Sluys, L., and Júlio, E. (2009b). Towards a generalization of a discrete strong discontinuity approach. *Computer Methods in Applied Mechanics* and Engineering, 198(47-48) :3670–3681.
- [Dias-da Costa et al., 2010] Dias-da Costa, D., Alfaiate, J., Sluys, L. J., and Júlio, E. (2010). A comparative study on the modelling of discontinuous fracture by means of enriched nodal and element techniques and interface elements. *International Journal of Fracture*, 161(1):97–119.
- [Do et al., 2013] Do, B., Liu, W., Yang, Q., and Su, X. (2013). Improved cohesive stress integration schemes for cohesive zone elements. *Engineering Fracture Mechanics*, 107 :14–28.
- [Do, 2014] Do, B.-C. (2014). Extending the Novel A-FEM to Model Arbitrary Cracking in Thermo-elastic Solids. Open Access Dissertations.
- [Doitrand et al., 2015a] Doitrand, A., Fagiano, C., Chiaruttini, V., Leroy, F., Mavel, A., and Hirsekorn, M. (2015a). Experimental characterization and numerical modeling of damage at the mesoscopic scale of woven polymer matrix composites under quasi-static tensile loading. *Composites Science and Technology*, 119 :1–11.
- [Doitrand et al., 2015b] Doitrand, A., Fagiano, C., Irisarri, F.-X., and Hirsekorn, M. (2015b). Comparison between voxel and consistent meso-scale models of woven composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 73 :143–154.

- [Dolbow and Harari, 2009] Dolbow, J. and Harari, I. (2009). An efficient finite element method for embedded interface problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(2):229– 252.
- [Dominguez et al., 2005] Dominguez, N., Brancherie, D., Davenne, L., and Ibrahimbegović, A. (2005). Prediction of crack pattern distribution in reinforced concrete by coupling a strong discontinuity model of concrete cracking and a bond slip of reinforcement model. *Engineering Computations*, 22(5/6):558– 582.
- [Dorvaux, 2007] Dorvaux, M. M. (2007). Mécanismes d'endommagement, émission acoustique et durées de vie en fatigue statique du composite SiCf/ aux températures intermédiaires (<800 °C). Thèse doctorat, MATEIS - Matériaux : Ingénierie et Science, France.
- [Drach et al., 2014] Drach, A., Drach, B., and Tsukrov, I. (2014). Processing of fiber architecture data for finite element modeling of 3d woven composites. *Advances in Engineering Software*, 72 :18–27.
- [Duflot et al., 2008] Duflot, M., Wyart, E., Lani, F., Martiny, P., and Sagnier, S. (2008). Application of XFEM to multi-site crack propagation. *Engng Fract Mech, submitted for publication*.
- [Dugdale, 1960] Dugdale, D. (1960). Yielding of steel sheets containing slits. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 8(2):100–104.
- [Dujc et al., 2013] Dujc, J., Brank, B., and Ibrahimbegovic, A. (2013). Stress-hybrid quadrilateral finite element with embedded strong discontinuity for failure analysis of plane stress solids : stress-hybrid quadrilateral with embedded discontinuity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 94(12) :1075–1098.
- [Durville, 2007] Durville, D. (2007). Finite element simulation of textile materials at mesoscopic scale. In *Finite element modelling of textiles ans textile composites*, page CDROM.
- [Dvorkin et al., 1990] Dvorkin, E. N., Cuitiño, A. M., and Gioia, G. (1990). Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *International journal for numerical methods in engineering*, 30(3):541–564.
- [Dyskin et al., 2002] Dyskin, A. V., Hu, X., and Sahouryeh, E., editors (2002). Structural integrity and fracture : proceedings of the International Conference on Structural Integrity and Fracture, SIF 2002, Perth, Australia, 25-27 September 2002. Balkema, Lisse; Exton, PA. OCLC : ocm51178990.
- [Elias, 2015] Elias, A. (2015). Influence of impact damage in three dimensional woven composites with polymer matrix. Theses, Ecole Centrale de Nantes.
- [Eringen, 1966] Eringen, A. (1966). A unified theory of thermomechanical materials. International Journal of Engineering Science, 4(2):179–202.
- [Espinha et al., 2013] Espinha, R., Park, K., Paulino, G. H., and Celes, W. (2013). Scalable parallel dynamic fracture simulation using an extrinsic cohesive zone model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 266 :144–161.
- [Essongue, 2014] Essongue, S. (2014). Dimensionnement d'une pièce en cmc tissé 3d en présence de défauts, rapport interne : Rt14-0025a. Technical report, LCTS.
- [Essongue, 2015] Essongue, S. (2015). Dimensionnement d'une pièce en cmc tissé 3d en présence de défauts, présentation interne : Rd15-0025. Technical report, LCTS.
- [Evans et al., 1995] Evans, A., Zok, F., and McMeeking, R. (1995). Fatigue of ceramic matrix composites. Acta Metallurgica et Materialia, 43(3):859–875.
- [Fantozzi et al., 2013] Fantozzi, G., Niepce, J.-C., Bonnefont, G., and Baumard, J.-F. (2013). Les céramiques industrielles propriétés, mise en forme et applications. Dunod : l'Usine nouvelle, Paris. OCLC : 836148860.
- [Fantozzi and Reynaud, 2014] Fantozzi, G. and Reynaud, P. (2014). Mechanical Behavior of SiC Fiber-Reinforced Ceramic Matrix Composites. In Comprehensive Hard Materials, pages 345–366. Elsevier.
- [Fantozzi et al., 2001] Fantozzi, G., Reynaud, P., and Rouby, D. (2001). Thermomechanical behaviour of long fibres ceramic-ceramic composites. *Silicates Industriels*, page 1.
- [Ferté et al., 2016] Ferté, G., Massin, P., and Moës, N. (2016). 3d crack propagation with cohesive elements in the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 300:347–374.
- [Feyel and Chaboche, 2000] Feyel, F. and Chaboche, J.-L. (2000). FE 2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 183(3) :309–330.
- [Filipuzzi et al., 1994] Filipuzzi, L., Camus, G., Naslain, R., and Thebault, J. (1994). Oxidation Mechanisms and Kinetics of 1d-SiC/C/SiC Composite Materials : I, An Experimental Approach. Journal of the American Ceramic Society, 77(2) :459–466.

- [Forio, 2000] Forio, P. (2000). Comportement thermomécanique et durée de vie d'un composite SiC/SiC à matrice séquencée et autocicatrisante. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Lamon, Jacques Sciences physiques et de l'ingénieur. Mécanique Bordeaux 1 2000.
- [Francfort and Marigo, 1998] Francfort, G. and Marigo, J.-J. (1998). Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 46(8):1319–1342.
- [Fries, 2008] Fries, T. (2008). A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 75(5):503–532.
- [Fries and Belytschko, 2010] Fries, T.-P. and Belytschko, T. (2010). The extended/generalized finite element method : An overview of the method and its applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pages n/a–n/a.
- [Gauthier, 2006] Gauthier, W. (2006). Rupture différée en fatigue statique, aux températures intermédiaires (<800°C), de fils et de fibres à base de carbure de silicium. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Lamon, Jacques et Pailler, René Sciences chimiques. Physicochimie de la matière condensée Bordeaux 1 2006.
- [Genet, 2010] Genet, M. (2010). Toward a virtual material for ceramic composites. Theses, École normale supérieure de Cachan ENS Cachan.
- [Genet et al., 2012] Genet, M., Marcin, L., Baranger, E., Cluzel, C., Ladevèze, P., and Mouret, A. (2012). Computational prediction of the lifetime of self-healing CMC structures. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 43(2) :294–303.
- [Genet et al., 2014] Genet, M., Marcin, L., and Ladeveze, P. (2014). On structural computations until fracture based on an anisotropic and unilateral damage theory. *International Journal of Damage Mechanics*, 23(4):483–506.
- [Grail, 2013] Grail, G. (2013). Approche multimodèle pour la conception de structures composites à renfort tissé. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Hambli, Ridha Génie mécanique. Mécanique des matériaux Orléans 2013.
- [Grassl and Jirásek, 2004] Grassl, P. and Jirásek, M. (2004). On mesh bias of local damage models for concrete. Proceedings of FraMCoS-5, Vail, USA, pages 252–262.
- [Grassl et al., 2014] Grassl, P., Xenos, D., Jirásek, M., and Horák, M. (2014). Evaluation of nonlocal approaches for modelling fracture near nonconvex boundaries. *International Journal of Solids and Structures*, 51(18):3239–3251.
- [Graça-e Costa et al., 2012] Graça-e Costa, R., Alfaiate, J., Dias-da Costa, D., and Sluys, L. J. (2012). A non-iterative approach for the modelling of quasi-brittle materials. *International Journal of Fracture*, 178(1-2):281–298.
- [Griffith, 1921] Griffith, A. A. (1921). The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 221(582-593) :163–198.
- [Grippon, 2013] Grippon, E. (2013). Endommagement et microfissuration d'un composite à matrice céramique tissé 3D : approchemulti-échelle et évaluation ultrasonore. PhD thesis, Bordeaux 1.
- [Gu et al., 2015] Gu, Y. C., Jung, J., Yang, Q. D., and Chen, W. Q. (2015). An Inertia-Based Stabilizing Method for Quasi-Static Simulation of Unstable Crack Initiation and Propagation. *Journal of Applied Mechanics*, 82(10) :101010.
- [Guillaumat, 1994] Guillaumat, L. (1994). Microfissuration des CMC : relation avec la microstructure et le comportement mécanique. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Lamon, Jacques Sciences des matériaux Bordeaux 1 1994.
- [Guillaumat and Lamon, 1996] Guillaumat, L. and Lamon, J. (1996). Probabilistic-statistical simulation of the non-linear mechanical behavior of a woven SiC/SiC composite. Composites Science and Technology, 56(7) :803–808.
- [Guimard et al., 2009] Guimard, J.-M., Allix, O., Pechnik, N., and Thévenet, P. (2009). Characterization and modeling of rate effects in the dynamic propagation of mode-II delamination in composite laminates. *International Journal of Fracture*, 160(1):55–71.
- [Gálvez et al., 2013] Gálvez, J., Planas, J., Sancho, J., Reyes, E., Cendón, D., and Casati, M. (2013). An embedded cohesive crack model for finite element analysis of quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 109:369–386.
- [Gélébart et al., 2010] Gélébart, L., Chateau, C., Bornert, M., Crépin, J., and Boller, E. (2010). X-Ray Tomographic Characterization of the Macroscopic Porosity of Chemical Vapor Infiltration SIC/SIC Composites : Effects on the Elastic Behavior : X-Ray Tomographic Characterization of CVI SIC/SIC Composites. International Journal of Applied Ceramic Technology, 7(3) :348–360.

- [Hadamard, 1907] Hadamard, M. (1907). Les problèmes aux limites dans la théorie des équations aux dérivées partielles. *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 6(1) :202–241.
- [Hansbo and Hansbo, 2004] Hansbo, A. and Hansbo, P. (2004). A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193(33-35) :3523–3540.
- [Hashin, 1980] Hashin, Z. (1980). Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. Journal of Applied Mechanics, 47(2):329.
- [Hashin, 1996] Hashin, Z. (1996). Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 44(7) :1129–1145.
- [Hemon, 2013] Hemon, E. (2013). Modèles multi-niveaux de prévision des durées de vie en fatigue des structures composites à matrice céramique pour usage en turbomachines aéronautiques. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Martin, Eric Mécanique Bordeaux 1 2013.
- [Henderson and Searle, 1981] Henderson, H. V. and Searle, S. R. (1981). On Deriving the Inverse of a Sum of Matrices. *SIAM Review*, 23(1):53–60.
- [Herb et al., 2010] Herb, V., Couégnat, G., and Martin, E. (2010). Damage assessment of thin SiC/SiC composite plates subjected to quasi-static indentation loading. Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, 41(11) :1677–1685.
- [Herb et al., 2011] Herb, V., Martin, É., and Couégnat, G. (2011). Mécanismes d'endommagement de différents composites à matrice céramique lors d'un impact à basse vitesse. In AMAC, editor, 17èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC17), page 43, Poitiers-Futuroscope, France.
- [Herb et al., 2012] Herb, V., Martin, E., and Couégnat, G. (2012). Damage analysis of thin 3d-woven SiC/SiC composite under low velocity impact loading. Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, 43(2) :247–253.
- [Hild, 1998] Hild, F. (1998). Damage, failure and scale changes for heterogeneous materials. Accreditation to supervise research, Université Pierre et Marie Curie Paris VI.
- [Hillerborg et al., 1976] Hillerborg, A., Modéer, M., and Petersson, P.-E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6):773–781.
- [Hughes et al., 1998] Hughes, T. J., Feijóo, G. R., Mazzei, L., and Quincy, J.-B. (1998). The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics* and Engineering, 166(1-2) :3–24.
- [Ingraffea, 2007] Ingraffea, A. R. (2007). Computational Fracture Mechanics. In Stein, E., De Borst, R., and Hughes, T. J. R., editors, *Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK.
- [Jimenez et al., 2014] Jimenez, S., Liu, X., Duddu, R., and Waisman, H. (2014). A discrete damage zone model for mixed-mode delamination of composites under high-cycle fatigue. *International Journal of Fracture*, 190(1-2) :53–74.
- [Jirásek, 2011] Jirásek, M. (2011). Damage and Smeared Crack Models, pages 1–49. Springer Vienna, Vienna.
- [Jirasek and Belytschko, 2002] Jirasek, M. and Belytschko, T. (2002). Computational resolution of strong discontinuities.
- [Jirásek, 2000] Jirásek, M. (2000). Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. Computer methods in applied mechanics and engineering, 188(1):307–330.
- [Jirásek, 2014] Jirásek, M. (2014). Modeling of localized inelastic deformation, lecture notes.
- [Jirásek and Bauer, 2012] Jirásek, M. and Bauer, M. (2012). Numerical aspects of the crack band approach. Computers & Structures, 110-111 :60–78.
- [Jirásek and Grassl, 2008] Jirásek, M. and Grassl, P. (2008). Evaluation of directional mesh bias in concrete fracture simulations using continuum damage models. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(8) :1921–1943.
- [Johnson and McLay, 1968] Johnson, M. W. and McLay, R. W. (1968). Convergence of the Finite Element Method in the Theory of Elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2):274.
- [Jung et al., 2016] Jung, J., Do, B. C., and Yang, Q. D. (2016). Augmented finite-element method for arbitrary cracking and crack interaction in solids under thermo-mechanical loadings. *Philosophical Transac*tions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 374(2071) :20150282.
- [Jäger et al., 2008] Jäger, P., Steinmann, P., and Kuhl, E. (2008). Modeling three-dimensional crack propagation-A comparison of crack path tracking strategies. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76(9) :1328–1352.

- [Kachanov, 1999] Kachanov, L. M. (1999). Rupture time under creep conditions. International Journal of Fracture, 97(1):11–18.
- [Keller et al., 2005] Keller, K. A., Jefferson, G., and Kerans, R. J. (2005). Oxide-Oxide composites. In Bansal, N. P., editor, *Handbook of Ceramic Composites*, pages 377–421. Springer US. DOI: 10.1007/0-387-23986-3_16.
- [Klisinski et al., 1991] Klisinski, M., Runesson, K., and Sture, S. (1991). Finite Element with Inner Softening Band. Journal of Engineering Mechanics, 117(3):575–587.
- [Kovanic, 1979] Kovanic, P. (1979). On the pseudoinverse of a sum of symmetric matrices with applications to estimation. *Kybernetika*, 15(5):(341)-348.
- [Krenkel and Georges Thébault, 2014] Krenkel, W. and Georges Thébault, J. (2014). Ceramic Matrix Composites for Friction Applications. In Bansal, N. P. and Lamon, J., editors, *Ceramic Matrix Composites*, pages 647–671. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA.
- [Krueger, 2004] Krueger, R. (2004). Virtual crack closure technique : History, approach, and applications. Applied Mechanics Reviews, 57(2) :109.
- [Laborde et al., 2005] Laborde, P., Pommier, J., Renard, Y., and Salaün, M. (2005). High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(3):354–381.
- [Ladevèze et al., 2014] Ladevèze, P., Baranger, E., Genet, M., and Cluzel, C. (2014). Damage and Lifetime Modeling for Structure Computations. In Bansal, N. P. and Lamon, J., editors, *Ceramic Matrix Composites*, pages 465–519. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA.
- [Ladevèze and Genet, 2010] Ladevèze, P. and Genet, M. (2010). A new approach to the subcritical cracking of ceramic fibers. Composites Science and Technology, 70(11) :1575–1583.
- [Laforet, 2009] Laforet, A. (2009). Rupture différée en fatigue statique aux très hautes températures (800° - 1300°) des fils Hi-Nicalon, des composites Hi-Nicalon/Type PyC/SiC et des composites Hi-Nicalon/Type PyC/B4C. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Lamon, Jacques et Longchamp, Sylvie Mécanique Bordeaux 1 2009.
- [Lamon, 1993] Lamon, J. (1993). Interfaces and interfacial mechanics : influence on the mechanical behavior of ceramic matrix composites (CMC). Le Journal de Physique IV, 03(C7) :C7-1607-C7-1616.
- [Lamon, 2005] Lamon, J. (2005). Chemical Vapor Infiltrated SiC/SiC Composites (CVI SiC/SiC), pages 55–76. Springer US, Boston, MA.
- [Lamon, 2014a] Lamon, J. (2014a). Approach to Microstructure-Behavior Relationships for Ceramic Matrix Composites Reinforced by Continuous Fibers. In Bansal, N. P. and Lamon, J., editors, *Ceramic Matrix Composites*, pages 520–547. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA.
- [Lamon, 2014b] Lamon, J. (2014b). Influence of Interfaces and Interphases on the Mechanical Behavior of Fiber-Reinforced Ceramic Matrix Composites. In Bansal, N. P. and Lamon, J., editors, *Ceramic Matrix Composites*, pages 40–64. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA.
- [Lamon et al., 1998] Lamon, J., Thommeret, B., and Percevault, C. (1998). Probabilistic-statistical approach to matrix damage and stress–Strain behavior of 2-D woven SiC/SiC ceramic matrix composites. Journal of the European Ceramic Society, 18(13) :1797–1808.
- [Le Mauff, 2013] Le Mauff, C. (2013). Sur la gestion des bandes de localisations dans les composites stratifiés avec un modèle d'endommagement à taux limité. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Ladevèze, Pierre Mécanique, génie mécanique, génie civil Cachan, Ecole normale supérieure 2013.
- [Leguillon, 2002] Leguillon, D. (2002). Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. European Journal of Mechanics - A/Solids, 21(1):61–72.
- [Lemaître and Desmorat, 2005] Lemaître, J. and Desmorat, R. (2005). Engineering damage mechanics : ductile, creep, fatigue and brittle failures. Springer, Berlin; New York.
- [Linder and Armero, 2007] Linder, C. and Armero, F. (2007). Finite elements with embedded strong discontinuities for the modeling of failure in solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(12):1391–1433.
- [Linder and Armero, 2009] Linder, C. and Armero, F. (2009). Finite elements with embedded branching. Finite Elements in Analysis and Design, 45(4):280–293.
- [Ling et al., 2009] Ling, D., Yang, Q., and Cox, B. (2009). An augmented finite element method for modeling arbitrary discontinuities in composite materials. *International Journal of Fracture*, 156(1):53–73.
- [Lissart and Lamon, 1997] Lissart, N. and Lamon, J. (1997). Damage and failure in ceramic matrix minicomposites : Experimental study and model. Acta Materialia, 45(3) :1025–1044.

- [Liu et al., 2015] Liu, W., Schesser, D., Yang, Q., and Ling, D. (2015). A consistency-check based algorithm for element condensation in augmented finite element methods for fracture analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 139:78–97.
- [Liu et al., 2014] Liu, W., Yang, Q., Mohammadizadeh, S., and Su, X. (2014). An efficient augmented finite element method for arbitrary cracking and crack interaction in solids : efficient A-FEM for arbitrary cracking and crack interaction in solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 99(6) :438–468.
- [Liu et al., 2013] Liu, W., Yang, Q. D., Mohammadizadeh, S., Su, X. Y., and Ling, D. S. (2013). An Accurate and Efficient Augmented Finite Element Method for Arbitrary Crack Interactions. *Journal* of Applied Mechanics, 80(4) :041033.
- [Liu et al., 2012] Liu, X., Duddu, R., and Waisman, H. (2012). Discrete damage zone model for fracture initiation and propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, 92 :1–18.
- [Lloberas-Valls et al., 2016] Lloberas-Valls, O., Huespe, A., Oliver, J., and Dias, I. (2016). Strain injection techniques in dynamic fracture modeling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 308 :499–534.
- [Locq and Caron, 2011] Locq, D. and Caron, P. (2011). On some advanced nickel-based superalloys for disk applications. AerospaceLab, (3) :p. 1–9.
- [Lomov and Verpoest, 2010] Lomov, S. V. and Verpoest, I. (2010). Textile Composite Materials : Polymer Matrix Composites. In Blockley, R. and Shyy, W., editors, *Encyclopedia of Aerospace Engineering*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK.
- [Lotfi and Shing, 1995] Lotfi, H. R. and Shing, P. B. (1995). Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. *International journal for numerical methods in engineering*, 38(8):1307–1325.
- [Maire and Chaboche, 1997] Maire, J. and Chaboche, J. (1997). A new formulation of continuum damage mechanics (CDM) for composite materials. Aerospace Science and Technology, 1(4):247–257.
- [Manzoli and Shing, 2006] Manzoli, O. and Shing, P. (2006). A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements. *Computers & Structures*, 84(10-11):742–757.
- [Marcin, 2010] Marcin, L. (2010). Behaviour modelling up to rupture of woven fabric composite for a reliable design of structures. Theses, Université Bordeaux 1.
- [Marsden et al., 1984] Marsden, J. E., Hughes, T. J. R., and Carlson, D. E. (1984). Mathematical Foundations of Elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 51(4) :946.
- [Marshall, 2013] Marshall, D. (2013). Nhsc-materials and structures overview. Technical report.
- [Marshall and Cox, 2010] Marshall, D. and Cox, B. (2010). Textile Composite Materials : Ceramic Matrix Composites. In Blockley, R. and Shyy, W., editors, *Encyclopedia of Aerospace Engineering*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK.
- [Martin and Leguillon, 2004] Martin, E. and Leguillon, D. (2004). Energetic conditions for interfacial failure in the vicinity of a matrix crack in brittle matrix composites. *International Journal of Solids and Structures*, 41(24-25) :6937–6948.
- [Martin et al., 1998] Martin, E., Peters, P. W. M., Leguillon, D., and Quenisset, J. M. (1998). Conditions for matrix crack deflection at an interface in ceramic matrix composites. *Materials Science and Engineering*: A, 250(2):291–302.
- [Meer and Sluys, 2009] Meer, F. P. and Sluys, L. J. (2009). A phantom node formulation with mixed mode cohesive law for splitting in laminates. *International Journal of Fracture*, 158(2):107–124.
- [Mei, 2008] Mei, H. (2008). Measurement and calculation of thermal residual stress in fiber reinforced ceramic matrix composites. *Composites Science and Technology*, 68(15-16) :3285–3292.
- [Melenk and Babuška, 1996] Melenk, J. and Babuška, I. (1996). The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139(1-4) :289–314.
- [Mergheim et al., 2004] Mergheim, J., Kuhl, E., and Steinmann, P. (2004). A hybrid discontinuous Galerkin/interface method for the computational modelling of failure. *Communications in numerical methods in engineering*, 20(7):511–519.
- [Mergheim et al., 2005] Mergheim, J., Kuhl, E., and Steinmann, P. (2005). A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(2) :276–289.
- [Mi et al., 1998] Mi, Y., Crisfield, M. A., Davies, G. A. O., and Hellweg, H. B. (1998). Progressive Delamination Using Interface Elements. *Journal of Composite Materials*, 32(14) :1246–1272.

- [Miehe et al., 2010] Miehe, C., Welschinger, F., and Hofacker, M. (2010). Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field FE implementations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(10) :1273–1311.
- [Mital et al., 2014] Mital, S. K., Goldberg, R. K., and Bonacuse, P. J. (2014). Two-dimensional non-linear finite element analysis of CMC microstructures. *Composites Part B* : *Engineering*, 57 :144–154.
- [Mohammadizadeh, 2013] Mohammadizadeh, S. (2013). A Novel Augmented Finite Element Method for Modeling Arbitrary Cracking in Solids. *Open Access Dissertations*.
- [Morscher, 2014a] Morscher, G. (2014a). Fiber-Reinforced Ceramic Matrix Composites for Aero Engines. In Blockley, R. and Shyy, W., editors, *Encyclopedia of Aerospace Engineering*, pages 1–10. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK.
- [Morscher and Cawley, 2002] Morscher, G. and Cawley, J. (2002). Intermediate temperature strength degradationin SiC/SiC composites. *Journal of the European Ceramic Society*, 22(14-15) :2777–2787.
- [Morscher, 2004] Morscher, G. N. (2004). Stress-dependent matrix cracking in 2d woven SiC-fiber reinforced melt-infiltrated SiC matrix composites. Composites Science and Technology, 64(9):1311–1319.
- [Morscher, 2014b] Morscher, G. N. (2014b). Stress-Environmental Effects on Fiber-Reinforced SiC-Based Composites. In Bansal, N. P. and Lamon, J., editors, *Ceramic Matrix Composites*, pages 334–352. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA.
- [Morscher and Gyekenyesi, 1998] Morscher, G. N. and Gyekenyesi, J. Z. (1998). Room Temperature Tensile Behavior and Damage Accumulation of Hi-Nicalon Reinforced Sic Matrix Composites. In Bray, D., editor, *Ceramic Engineering and Science Proceedings*, volume 19, pages 241–249. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA.
- [Morscher et al., 2011] Morscher, G. N., John, R., Zawada, L., Brewer, D., Ojard, G., and Calomino, A. (2011). Creep in vacuum of woven Sylramic-iBN melt-infiltrated composites. *Composites Science and Technology*, 71(1):52–59.
- [Mosler and Meschke, 2004] Mosler, J. and Meschke, G. (2004). Embedded crack vs. smeared crack models : a comparison of elementwise discontinuous crack path approaches with emphasis on mesh bias. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(30-32) :3351–3375.
- [Mousavi and Sukumar, 2010] Mousavi, S. and Sukumar, N. (2010). Generalized Gaussian quadrature rules for discontinuities and crack singularities in the extended finite element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(49-52) :3237–3249.
- [Mousavi et al., 2009] Mousavi, S. E., Xiao, H., and Sukumar, N. (2009). Generalized Gaussian quadrature rules on arbitrary polygons. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 82 :99–113.
- [Moës and Belytschko, 2002] Moës, N. and Belytschko, T. (2002). Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering fracture mechanics*, 69(7) :813–833.
- [Moës et al., 2003] Moës, N., Cloirec, M., Cartraud, P., and Remacle, J.-F. (2003). A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30) :3163–3177.
- [Moës et al., 1999] Moës, N., Dolbow, J., and Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131–150.
- [Moës et al., 2011] Moës, N., Stolz, C., Bernard, P.-E., and Chevaugeon, N. (2011). A level set based model for damage growth : The thick level set approach. *International Journal for Numerical Methods* in Engineering, 86(3):358–380.
- [Msekh et al., 2015] Msekh, M. A., Sargado, J. M., Jamshidian, M., Areias, P. M., and Rabczuk, T. (2015). Abaque implementation of phase-field model for brittle fracture. *Computational Materials Science*, 96 :472–484.
- [Naderi et al., 2016] Naderi, M., Jung, J., and Yang, Q. D. (2016). A three dimensional augmented finite element for modeling arbitrary cracking in solids. *International Journal of Fracture*, 197(2):147–168.
- [Naslain, 2004] Naslain, R. (2004). Design, preparation and properties of non-oxide CMCs for application in engines and nuclear reactors : an overview. *Composites Science and Technology*, 64(2) :155–170.
- [Naslain et al., 2004a] Naslain, R., Guette, A., Rebillat, F., Le Gallet, S., Lamouroux, F., Filipuzzi, L., and Louchet, C. (2004a). Oxidation mechanisms and kinetics of SiC-matrix composites and their constituents. *Journal of Materials Science*, 39(24):7303–7316.
- [Naslain et al., 2004b] Naslain, R., Guette, A., Rebillat, F., Pailler, R., Langlais, F., and Bourrat, X. (2004b). Boron-bearing species in ceramic matrix composites for long-term aerospace applications. *Journal of Solid State Chemistry*, 177(2):449–456.

- [Natarajan et al., 2010] Natarajan, S., Mahapatra, D. R., and Bordas, S. P. A. (2010). Integrating strong and weak discontinuities without integration subcells and example applications in an XFEM/GFEM framework. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pages n/a-n/a.
- [Needleman, 1988] Needleman, A. (1988). Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 67(1):69–85.
- [Nguyen et al., 2015] Nguyen, T., Yvonnet, J., Zhu, Q.-Z., Bornert, M., and Chateau, C. (2015). A phase field method to simulate crack nucleation and propagation in strongly heterogeneous materials from direct imaging of their microstructure. *Engineering Fracture Mechanics*, 139:18–39.
- [Nguyen, 2014] Nguyen, V. P. (2014). Discontinuous Galerkin/extrinsic cohesive zone modeling : Implementation caveats and applications in computational fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 128 :37–68.
- [Nguyen et al., 2011] Nguyen, V. P., Lloberas-Valls, O., Stroeven, M., and Sluys, L. J. (2011). Homogenization-based multiscale crack modelling : From micro-diffusive damage to macro-cracks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9-12) :1220–1236.
- [Nguyen et al., 2012] Nguyen, V. P., Lloberas-Valls, O., Stroeven, M., and Sluys, L. J. (2012). Computational homogenization for multiscale crack modeling. Implementational and computational aspects : Computational homogenization for cracks in quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89(2) :192–226.
- [Nicaise et al., 2011] Nicaise, S., Renard, Y., and Chahine, E. (2011). Optimal convergence analysis for the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(4-5):528–548.
- [Noels and Radovitzky, 2006] Noels, L. and Radovitzky, R. (2006). A general discontinuous Galerkin method for finite hyperelasticity. Formulation and numerical applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68(1):64–97.
- [Oliver, 1989] Oliver, J. (1989). A consistent characteristic length for smeared cracking models. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28(2):461–474.
- [Oliver, 1996a] Oliver, J. (1996a). Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1 : Fundamentals. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39(21) :3575–3600.
- [Oliver, 1996b] Oliver, J. (1996b). Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2 : Numerical simulation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39(21) :3601–3623.
- [Oliver et al., 2017] Oliver, J., Caicedo, M., Huespe, A., Hernández, J., and Roubin, E. (2017). Reduced order modeling strategies for computational multiscale fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 313 :560–595.
- [Oliver et al., 2014] Oliver, J., Dias, I., and Huespe, A. (2014). Crack-path field and strain-injection techniques in computational modeling of propagating material failure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 274 :289–348.
- [Oliver and Huespe, 2004a] Oliver, J. and Huespe, A. (2004a). Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(30-32):3195–3220.
- [Oliver and Huespe, 2004b] Oliver, J. and Huespe, A. (2004b). Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios. *Computer Methods in Applied Mechanics* and Engineering, 193(27-29) :2987–3014.
- [Oliver et al., 2008] Oliver, J., Huespe, A., and Cante, J. (2008). An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(21-24) :1865–1889.
- [Oliver et al., 2006] Oliver, J., Huespe, A., and Sánchez, P. (2006). A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities : E-FEM vs X-FEM. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(37-40) :4732–4752.
- [Oliver et al., 2002] Oliver, J., Huespe, A. E., Pulido, M. D. G., and Chaves, E. (2002). From continuum mechanics to fracture mechanics : the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(2) :113–136.
- [Oliver et al., 2004] Oliver, J., Huespe, A. E., Samaniego, E., and Chaves, E. W. V. (2004). Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(7-8) :609–632.
- [Pandolfi and Ortiz, 2002] Pandolfi, A. and Ortiz, M. (2002). An efficient adaptive procedure for threedimensional fragmentation simulations. *Engineering with Computers*, 18(2):148–159.

- [Park and Paulino, 2012] Park, K. and Paulino, G. H. (2012). Computational implementation of the PPR potential-based cohesive model in ABAQUS : Educational perspective. *Engineering Fracture Mechanics*, 93 :239–262.
- [Peerlings, 1999] Peerlings, R. H. J. (1999). Enhanced damage modelling for fracture and fatigue. OCLC : 246278406.
- [Peerlings et al., 1996] Peerlings, R. H. J., De Borst, R., Brekelmans, W. A. M., and De Vree, J. H. P. (1996). Gradient enhanced damaged for quai-brittle-materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(19):3391–3403.
- [Pijaudier-Cabot and Bažant, 1987] Pijaudier-Cabot, G. and Bažant, Z. P. (1987). Nonlocal Damage Theory. Journal of Engineering Mechanics, 113(10) :1512–1533.
- [Pin and Pian, 1973] Pin, T. and Pian, T. H. (1973). On the convergence of the finite element method for problems with singularity. *International Journal of Solids and Structures*, 9(3):313–321.
- [Pineau et al., 2011] Pineau, P., Couégnat, G., and Lamon, J. (2011). Virtual testing applied to transverse multiple cracking of tows in woven ceramic composites. *Mechanics Research Communications*, 38(8) :579–585.
- [Pluvinage et al., 1996] Pluvinage, P., Parvizi-Majidi, A., and Chou, T. W. (1996). Damage characterization of two-dimensional woven and three-dimensional braided SiC-SiC composites. *Journal of Materials Science*, 31(1):232–241.
- [Pompidou and Lamon, 2007] Pompidou, S. and Lamon, J. (2007). Analysis of crack deviation in ceramic matrix composites and multilayers based on the Cook and Gordon mechanism. *Composites Science* and Technology, 67(10) :2052–2060.
- [Puck, 1998] Puck, A. (1998). Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, 58(7):1045–1067.
- [Rabczuk, 2013] Rabczuk, T. (2013). Computational Methods for Fracture in Brittle and Quasi-Brittle Solids : State-of-the-Art Review and Future Perspectives. ISRN Applied Mathematics, 2013 :1–38.
- [Rabczuk et al., 2008] Rabczuk, T., Zi, G., Gerstenberger, A., and Wall, W. A. (2008). A new crack tip element for the phantom-node method with arbitrary cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(5):577–599.
- [Radovitzky et al., 2011] Radovitzky, R., Seagraves, A., Tupek, M., and Noels, L. (2011). A scalable 3d fracture and fragmentation algorithm based on a hybrid, discontinuous Galerkin, cohesive element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(1-4) :326–344.
- [Rashid, 1968] Rashid, Y. (1968). Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. Nuclear Engineering and Design, 7(4):334–344.
- [Rebillat et al., 1998] Rebillat, F., Guette, A., Espitalier, L., Debieuvre, C., and Naslain, R. (1998). Oxidation resistance of SiC/SiC micro and minicomposites with a highly crystallised BN interphase. Journal of the European Ceramic Society, 18(13) :1809–1819.
- [Remmers et al., 2003] Remmers, J. J. C., Borst, R. d., and Needleman, A. (2003). A cohesive segments method for the simulation of crack growth. *Computational Mechanics*, 31(1-2):69–77.
- [Reynaud, 1992] Reynaud, P. (1992). Etude du comportement en fatigue des matériaux composites a matrice céramique suivi par émission acoustique. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Fantozzi, Gilbert Physique Villeurbanne, INSA 1992.
- [Rots, 1988] Rots, J. G. (1988). Computational modeling of concrete fracture. PhD thesis, Technische Hogeschool Delft.
- [Rots et al., 2008] Rots, J. G., Belletti, B., and Invernizzi, S. (2008). Robust modeling of RC structures with an "event-by-event" strategy. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(3-4):590–614.
- [Rots and Invernizzi, 2004] Rots, J. G. and Invernizzi, S. (2004). Regularized sequentially linear sawtooth softening model. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 28(7-8) :821–856.
- [Ródenas et al., 2010] Ródenas, J., González-Estrada, O., Díez, P., and Fuenmayor, F. (2010). Accurate recovery-based upper error bounds for the extended finite element framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(37-40) :2607–2621.
- [Saksala et al., 2016] Saksala, T., Brancherie, D., and Ibrahimbegovic, A. (2016). Numerical modeling of dynamic rock fracture with a combined 3d continuum viscodamage-embedded discontinuity model : Numerical Modeling of Dynamic Rock Fracture. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 40(9) :1339–1357.
- [Samaniego Alvarado et al., 2002] Samaniego Alvarado, E., Oliver, J., Huespe, A., and Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, C. i. P. d. B. (2002). Contributions to the continuum modelling of strong discontinuities in two-dimensional solids. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona. OCLC: 806418517.

- [Sauder, 2014] Sauder, C. (2014). Ceramic Matrix Composites : Nuclear Applications. In Bansal, N. P. and Lamon, J., editors, *Ceramic Matrix Composites*, pages 609–646. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA.
- [Schellekens and De Borst, 1993] Schellekens, J. C. J. and De Borst, R. (1993). On the numerical integration of interface elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(1):43–66.
- [Simo et al., 1993] Simo, J. C., Oliver, J., and Armero, F. (1993). An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational mechanics*, 12(5):277– 296.
- [Simone, 2004] Simone, A. (2004). Partition of unity-based discontinuous elements for interface phenomena: computational issues. Communications in Numerical Methods in Engineering, 20(6):465–478.
- [Song et al., 2006] Song, J.-H., Areias, P. M. A., and Belytschko, T. (2006). A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(6) :868–893.
- [Spriet, 2014] Spriet, P. (2014). CMC Applications to Gas Turbines. In Bansal, N. P. and Lamon, J., editors, *Ceramic Matrix Composites*, pages 591–608. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA.
- [Stazi et al., 2003] Stazi, F. L., Budyn, E., Chessa, J., and Belytschko, T. (2003). An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks. *Computational Mechanics*, 31(1-2):38– 48.
- [Steinmann and Willam, 1991] Steinmann, P. and Willam, K. (1991). Performance of enhanced finite element formulations in localized failure computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 90(1-3) :845–867.
- [Strouboulis et al., 2001] Strouboulis, T., Copps, K., and Babuška, I. (2001). The generalized finite element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(32-33) :4081–4193.
- [Sukumar et al., 2001] Sukumar, N., Chopp, D. L., Moës, N., and Belytschko, T. (2001). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(46) :6183–6200.
- [Sukumar et al., 2015] Sukumar, N., Dolbow, J. E., and Moës, N. (2015). Extended finite element method in computational fracture mechanics : a retrospective examination. *International Journal of Fracture*, 196(1-2) :189–206.
- [Sukumar and Tabarraei, 2004] Sukumar, N. and Tabarraei, A. (2004). Conforming polygonal finite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 61(12):2045–2066.
- [Tabarraei and Sukumar, 2006] Tabarraei, A. and Sukumar, N. (2006). Application of polygonal finite elements in linear elasticity. *International Journal of Computational Methods*, 03(04) :503–520.
- [Thevenin, 2004] Thevenin, J.-C. (2004). Le turboréacteur, moteur des avions à réaction. Technical report.
- [Tijssens et al., 2000] Tijssens, M. G., Sluys, B. L., and van der Giessen, E. (2000). Numerical simulation of quasi-brittle fracture using damaging cohesive surfaces. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 19(5):761–779.
- [Tin and Pollock, 2010] Tin, S. and Pollock, T. M. (2010). Nickel-Based Superalloys for Blade Application : Production, Performance and Application. In Blockley, R. and Shyy, W., editors, *Encyclopedia* of Aerospace Engineering. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK.
- [Tranquart, 2012] Tranquart, B. (2012). Toward a virtual material for the optimisation of a new ceramicmatrix composite family. Theses, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan.
- [Tranquart et al., 2012] Tranquart, B., Ladevèze, P., Baranger, E., and Mouret, A. (2012). A computational approach for handling complex composite microstructures. *Composite Structures*, 94(6):2097–2109.
- [Turon et al., 2006] Turon, A., Camanho, P., Costa, J., and Dávila, C. (2006). A damage model for the simulation of delamination in advanced composites under variable-mode loading. *Mechanics of Materials*, 38(11) :1072–1089.
- [Tvergaard, 1990] Tvergaard, V. (1990). Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal. *Materials science and engineering* : A, 125(2) :203–213.
- [van der Meer and Sluys, 2015] van der Meer, F. and Sluys, L. (2015). The Thick Level Set method : Sliding deformations and damage initiation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 285 :64–82.
- [van der Veen et al., 2000] van der Veen, H., Vuik, K., and de Borst, R. (2000). Branch switching techniques for bifurcation in soil deformation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(5-7) :707-719.

- [Ventura, 2006] Ventura, G. (2006). On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite-Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 66(5):761–795.
- [Verhoosel et al., 2010] Verhoosel, C. V., Remmers, J. J. C., Gutiérrez, M. A., and de Borst, R. (2010). Computational homogenization for adhesive and cohesive failure in quasi-brittle solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(8-9) :1155–1179.
- [Vigueras et al., 2015] Vigueras, G., Sket, F., Samaniego, C., Wu, L., Noels, L., Tjahjanto, D., Casoni, E., Houzeaux, G., Makradi, A., Molina-Aldareguia, J. M., Vázquez, M., and Jérusalem, A. (2015). An XFEM/CZM implementation for massively parallel simulations of composites fracture. *Composite Structures*, 125 :542–557.
- [Vilfayeau, 2014] Vilfayeau, J. (2014). Modélisation numérique du procédé de tissage des renforts fibreux pour matériaux composites. phdthesis, INSA de Lyon.
- [Voyiadjis, 2015] Voyiadjis, G. Z., editor (2015). Handbook of Damage Mechanics. Springer New York, New York, NY.
- [Wang and Waisman, 2015] Wang, Y. and Waisman, H. (2015). Progressive delamination analysis of composite materials using XFEM and a discrete damage zone model. *Computational Mechanics*, 55(1):1–26.
- [Wawrzynek et al., 2012] Wawrzynek, P. A., Carter, B. J., and Ingraffea, A. R. (2012). Advances in Simulation of Arbitrary 3d Crack Growth using FRANC3d NG. In *ICF12*, Ottawa 2009.
- [Weißgraeber et al., 2016] Weißgraeber, P., Leguillon, D., and Becker, W. (2016). A review of Finite Fracture Mechanics : crack initiation at singular and non-singular stress raisers. Archive of Applied Mechanics, 86(1-2) :375-401.
- [Wells, 2001] Wells, G. (2001). Discontinuous Modelling for Strain Localisation and Failure. Theses, Delft University.
- [Wells and Sluys, 2001a] Wells, G. N. and Sluys, L. J. (2001a). A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(12):2667–2682.
- [Wells and Sluys, 2001b] Wells, G. N. and Sluys, L. J. (2001b). Three-dimensional embedded discontinuity model for brittle fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 38(5):897–913.
- [Westergaard, 1939] Westergaard, H. M. (1939). Bearing pressures and cracks. J. App. Mechanics, 6(1):49–53.
- [Wu, 2011] Wu, J.-Y. (2011). Unified analysis of enriched finite elements for modeling cohesive cracks. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 200(45-46) :3031–3050.
- [Wu et al., 2015] Wu, J.-Y., Li, F.-B., and Xu, S.-L. (2015). Extended embedded finite elements with continuous displacement jumps for the modeling of localized failure in solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 285 :346–378.
- [Wyart et al., 2009] Wyart, E., Coulon, D., Pardoen, T., Remacle, J., and Lani, F. (2009). Application of the substructured finite element/extended finite element method (S-FE/XFE) to the analysis of cracks in aircraft thin walled structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(1):44–58.
- [Xie and Waas, 2006] Xie, D. and Waas, A. M. (2006). Discrete cohesive zone model for mixed-mode fracture using finite element analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(13):1783–1796.
- [Xu and Needleman, 1994] Xu, X.-P. and Needleman, A. (1994). Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42(9) :1397–1434.
- [Xu et al., 1997] Xu, X.-P., Needleman, A., and Abraham, F. F. (1997). Effect of inhomogeneities on dynamic crack growth in an elastic solid. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 5(5):489–516.
- [Yang and Naderi, 2015] Yang, Q. and Naderi, M. (2015). A new augmented finite element method (A-FEM) for progressive failure analysis of advanced composite materials. In Numerical Modelling of Failure in Advanced Composite Materials, pages 265–308. Elsevier.
- [Yvonnet and He, 2007] Yvonnet, J. and He, Q.-C. (2007). The reduced model multiscale method (R3m) for the non-linear homogenization of hyperelastic media at finite strains. *Journal of Computational Physics*, 223(1):341–368.
- [Zhang et al., 2015] Zhang, Y., Lackner, R., Zeiml, M., and Mang, H. A. (2015). Strong discontinuity embedded approach with standard SOS formulation : Element formulation, energy-based crack-tracking strategy, and validations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 287 :335–366.
- [Zienkiewicz and Taylor, 2005] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (2005). The finite element method for solid and structural mechanics. Elsevier Butterworth-Heinemann, Amsterdam; Boston, 6th ed edition.

Méthode des éléments finis augmentés pour la rupture quasi-fragile: application aux composites tissés à matrice céramique

Le calcul de la durée de vie des Composites tissés à Matrice Céramique (CMC) nécessite de déterminer l'évolution de la densité de fissures dans le matériau (pouvant atteindre 10 mm⁻¹). Afin de les représenter finement on se propose de travailler à l'échelle mésoscopique. Les méthodes de type Embedded Finite Element (EFEM) nous ont paru être les plus adaptées au problème. Elles permettent une représentation discrète des fissures sans introduire de degrés de liberté additionnels. Notre choix s'est porté sur une EFEM s'affranchissant d'itérations élémentaires et appelée Augmented Finite Element Method (AFEM). Une variante d'AFEM, palliant des lacunes de la méthode originale, a été développée. Nous avons démontré que, sous certaines conditions, AFEM et la méthode des éléments finis classique (FEM) étaient équivalentes. Nous avons ensuite comparé la précision d'AFEM et de FEM pour représenter des discontinuités fortes et faibles. Les travaux de thèse se concluent par des exemples d'application de la méthode aux CMC.

Mots clés : composites tissés à matrice céramique; endommagement ; rupture ; éléments finis enrichis ; méthodes des éléments finis augmentés ; estimation d'erreur a posteriori; échelle mésoscopique

Augmented Finite Element Method for quasi-brittle fracture: application to woven ceramic matrix composites

Computing the lifetime of woven Ceramic Matrix Composites (CMC) requires evaluating the crack density in the material (which can reach 10 mm⁻¹). Numerical simulations at the mesoscopic scale are needed to precisely estimate it. Embedded Finite Element Methods (EFEM) seem to be the most appropriate to do so. They allow for a discrete representation of cracks with no additional degrees of freedom. We chose to work with an EFEM free from local iterations named the Augmented Finite Element Method (AFEM). Improvements over the original AFEM have been proposed. We also demonstrated that, under one hypothesis, the AFEM and the classical Finite Element Method (FEM) are fully equivalent. We then compare the accuracy of the AFEM and the classical FEM to represent weak and strong discontinuities. Finally, some examples of application of AFEM to CMC are given.

Keywords : woven ceramic matrix composites ; damage ; fracture ; enriched finite elements ; augmented finite elements ; a posteriori error estimation; mesoscopic scale

Unité de recherche

Laboratoire des composites ThermoStructuraux,

UMR5801, 3 Allée de la Boétie 33600 Pessac