



**HAL**  
open science

# Identification de systèmes multivariables par modèle non entier en utilisant la méthode des sous-espaces

Elena Ivanova

► **To cite this version:**

Elena Ivanova. Identification de systèmes multivariables par modèle non entier en utilisant la méthode des sous-espaces. Autre [cond-mat.other]. Université de Bordeaux, 2017. Français. NNT : 2017BORD0561 . tel-01522642

**HAL Id: tel-01522642**

**<https://theses.hal.science/tel-01522642>**

Submitted on 15 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE  
POUR OBTENIR LE GRADE DE  
**DOCTEUR DE**  
**L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR  
SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE, PRODUCTIQUE, SIGNAL ET IMAGE

Par **Elena IVANOVA**

**IDENTIFICATION DE SYSTÈMES MULTIVARIABLES  
PAR MODÈLE NON ENTIER  
EN UTILISANT LA MÉTHODE DES SOUS-ESPACES**

Soutenue le 6 avril 2017

Devant la commission d'examen formée de :

Président	Luc DUGARD, Directeur de Recherche, CNRS
Rapporteurs	Mohammed M'SAAD, Professeur, ENSICAEN Thierry POINOT, Professeur, ENSIP, Université de Poitiers
Examineurs	Alain OUSTALOUP, Professeur, Bordeaux INP Luc DUGARD, Directeur de Recherche, CNRS
Directeurs de thèse	Rachid MALTI, Professeur, Université de Bordeaux Xavier MOREAU, Professeur, Université de Bordeaux



**Titre :** Identification de systèmes multivariables par modèle non entier en utilisant la méthode des sous-espaces.

**Résumé :** L'identification des systèmes par modèle non entier a été initiée dans les années 1990 et de nombreux résultats ont été obtenus depuis. Néanmoins, la plupart de ces résultats utilise les méthodes de la famille des méthodes à erreur de prédiction, basées sur la minimisation de la norme  $\ell_2$  de l'erreur d'estimation. Apparues en 1996, les méthodes des sous-espaces sont relativement nouvelles dans la théorie de l'identification de systèmes linéaires. Basées sur des projections géométriques et l'algèbre linéaire, elles présentent une alternative intéressante aux méthodes classiques basées sur la régression linéaire ou non linéaire. Elles permettent d'estimer les matrices d'un modèle à base d'une représentation d'état. Dans le contexte des systèmes non entiers, la notion de pseudo-représentation d'état généralise la notion de représentation d'état en introduisant un paramètre supplémentaire qui est l'ordre commensurable.

Actuellement, la méthode des sous-espaces pour des systèmes non entiers n'a cependant été appliquée que dans le domaine temporel. Elle est alors développée dans cette thèse pour une telle classe de systèmes dans le domaine fréquentiel. De plus, comme les systèmes non entiers sont des systèmes à temps continu, un filtrage des données est nécessaire pour respecter la causalité des signaux et pour pouvoir réaliser l'identification. Une étude comparative des différentes méthodes de filtrage dans le contexte de l'identification pour déduire leurs avantages et inconvénients est réalisée dans le domaine temporel. Enfin, les méthodes développées ont été appliquées à un système réel en diffusion thermique. Les modèles obtenus sont généralisés à des matériaux soumis à plusieurs flux de chaleur en entrée tout en considérant leur température en plusieurs points de mesures.

**Mots clés :** Identification, Méthode des sous-espaces, Systèmes non entiers

**Title :** Subspace system identification with fractional differentiation models.

**Abstract :** The identification of systems by fractional models was initiated in the 1990s and various results have been obtained since. Nevertheless, most of these results are based on prediction error methods (PEM) of identification, based on the minimization of the norm of the estimation error. Apparent in 1996, the subspace methods are relatively new in the theory of the identification of linear systems. Based on geometric projections and linear algebra, they present an alternative to classical methods based on linear or nonlinear regression. They allow estimating the matrices of the state-space representation of a system. In the context of fractional systems, a pseudo-state-space representation generalizes the notion of state-space representation by introducing an additional parameter which is the commensurable order.

Currently, the subspace method for non-integer systems has only been applied in the time domain. It is then developed in this thesis for such a class of systems in the frequency domain. Moreover, since non-integer systems are continuous time systems, data pre-filtering is necessary to respect the causality of the signals and to be able to realize the identification. A study of the different filtering methods in the context of subspace identification is then carried out in order to deduce their advantages and disadvantages in the time domain. Finally, the method has been applied to a thermal diffusion system. The obtained models are generalized for several input heat flows, considering their temperature available at several measurement points.

**Keywords :** Identification, Subspace methods, Fractional systems



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Systèmes à dérivées non entières : un tour d’horizon</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Définitions . . . . .	7
1.2.1 Dérivation non entière . . . . .	7
1.2.2 Intégration non entière . . . . .	8
1.2.3 Interprétation géométrique . . . . .	10
1.3 Représentation et stabilité des systèmes non entiers . . . . .	11
1.3.1 Pseudo-représentation d’état . . . . .	11
1.3.1.1 Commensurable . . . . .	11
1.3.1.2 Non commensurable . . . . .	11
1.3.1.3 Transformation de similarité différentielle . . . . .	12
1.3.1.4 Observabilité et contrôlabilité des pseudos-états . . . . .	13
1.3.2 Fonctions de transfert élémentaires . . . . .	13
1.3.2.1 Fonctions de transfert de première espèce . . . . .	14
1.3.2.2 Fonctions de transfert de deuxième espèce . . . . .	14
1.3.2.3 Fonctions de transfert de troisième espèce . . . . .	15
1.3.3 Condition de stabilité . . . . .	15
1.4 Fonction de transfert non entière du deuxième ordre . . . . .	16
1.4.1 Motivations et origines . . . . .	17
1.4.1.1 Systèmes visco-élastiques . . . . .	17
1.4.1.2 Systèmes visco-inertiels . . . . .	19
1.4.2 Condition de stabilité . . . . .	21
1.4.3 Condition de résonance . . . . .	23

1.4.4	Lieux des pôles . . . . .	25
1.4.5	Exemples numériques . . . . .	30
1.4.5.1	Exemple 1 . . . . .	30
1.4.5.2	Exemple 2 . . . . .	32
1.5	Conclusion . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Simulation des systèmes multi variables non entiers dans le domaine temporel</b>	<b>37</b>
2.1	Introduction : état de l'art . . . . .	39
2.2	Approximation d'Oustaloup d'un intégrateur non entier sous la forme d'une fonction de transfert . . . . .	41
2.2.1	Avec un gain constant en dehors de la bande de fréquence . . . . .	41
2.2.2	Avec un intégrateur en dehors de la bande de fréquence (variante de Trigeassou) . . . . .	42
2.3	Approximation d'Oustaloup d'un intégrateur non entier sous la forme d'une représentation d'état . . . . .	44
2.3.1	Avec un gain constant en dehors de la bande de fréquence, pour $0 < \nu < 1$ . . . . .	44
2.3.2	Avec un intégrateur en dehors de la bande de fréquence, pour $0 < \nu < 1$ . . . . .	45
2.3.3	Avec un gain constant en dehors de la bande de fréquence, pour $\nu > 1$ . . . . .	46
2.3.4	Avec un intégrateur en dehors de la bande de fréquence, pour $\nu > 1$ . . . . .	48
2.4	Représentation d'état de l'approximation d'un système non entier . . . . .	49
2.4.1	Cas commensurable . . . . .	49
2.4.2	Cas non commensurable . . . . .	50
2.4.3	Exemple 2 - Exemple d'application à la diffusion thermique . . . . .	53
2.5	Conclusion . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Identification de systèmes par modèle non entier en utilisant la méthode des sous-espaces</b>	<b>61</b>
3.1	Introduction : état de l'art . . . . .	62
3.2	Méthodes des sous-espaces dans le domaine temporel . . . . .	65
3.2.1	Contexte déterministe (MOESP) . . . . .	65
3.2.2	Contexte stochastique (PO-MOESP) . . . . .	68



3.2.3	Etude de différents types de filtres . . . . .	69
3.2.3.1	Méthode algébrique . . . . .	69
3.2.3.2	Filtre GPMF entier . . . . .	70
3.2.3.3	Filtre LIF entier . . . . .	71
3.2.4	Tentative de généralisation de l'algorithme MOESP aux systèmes non entiers incommensurables . . . . .	73
3.2.5	Exemple d'illustration dans le contexte stochastique . . . . .	76
3.2.6	Estimation de l'ordre non entier . . . . .	78
3.2.7	Conclusion . . . . .	78
3.3	Méthodes des sous-espaces dans le domaine fréquentiel . . . . .	81
3.3.1	Contexte déterministe (algorithme MOESP) . . . . .	82
3.3.2	Contexte stochastique (algorithme MOESP combiné aux filtres pas- se-bas) . . . . .	83
3.3.3	Exemple d'illustration dans un contexte déterministe . . . . .	85
3.3.4	Exemple d'illustration dans le contexte stochastique . . . . .	87
3.3.5	Lorsque $n$ et $\nu$ sont inconnus . . . . .	89
3.3.6	Conclusion . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Application à la diffusion thermique dans deux barreaux métalliques</b>	<b>93</b>
4.1	Introduction . . . . .	94
4.2	Modélisation théorique du transfert thermique dans un milieu fini . . . . .	95
4.2.1	Schématisation, paramétrage et mise en équation . . . . .	95
4.2.2	Résolution du système d'équations de la chaleur . . . . .	96
4.2.3	Analyse en $x = 0$ . . . . .	98
4.2.4	Analyse en $0 \leq x \leq L$ . . . . .	102
4.2.5	Résumé . . . . .	106
4.3	Étude du modèle numérique du banc d'essai thermique . . . . .	107
4.3.1	Description et modélisation numérique du banc d'essai . . . . .	107
4.3.2	Estimation paramétrique par la méthode des sous-espaces appliquée aux données de simulation . . . . .	109
4.3.2.1	A partir des entrées non intégrées . . . . .	109
4.3.2.2	A partir des entrées intégrées . . . . .	110
4.3.3	Conclusions . . . . .	116

4.4	Étude du banc d'essais physique . . . . .	119
4.4.1	Description et modélisation du banc expérimental . . . . .	119
4.4.2	Étude du couplage entre les deux barreaux . . . . .	119
4.4.3	Analyse de pertes par comparaison avec le modèle numérique . . . . .	121
4.4.4	Estimation paramétrique par la méthode des sous-espaces appliquée aux données réelles . . . . .	123
4.4.4.1	A partir des entrées non intégrées . . . . .	123
4.4.4.2	A partir des entrées intégrées . . . . .	127
4.4.5	Conclusions . . . . .	131
4.5	Conclusions . . . . .	131
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>135</b>
	<b>Annexes</b>	<b>137</b>
	<b>A COMSOL : simulation numérique basée sur la méthode des éléments finis</b>	<b>139</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>140</b>

# Table des figures

1.1	Diagrammes de Bode d'un intégrateur généralisé pour des ordres compris entre 0 et 2 . . . . .	9
1.2	Réponse impulsionnelle d'un intégrateur généralisé pour des ordres compris entre 0 et 2 . . . . .	9
1.3	Courbes représentatives des variations du facteur d'oubli $h_\nu(t - \tau)$ dans le cas d'une intégrale d'ordre réel $\nu$ tel que $0.1 < \nu < 1$ . . . . .	10
1.4	Régions de stabilité et de résonance du système non entier du deuxième espèce (1.21) en fonction de $\zeta$ et $\nu$ . . . . .	15
1.5	Régions de stabilité et de résonance du système non entier du troisième espèce (1.23) en fonction de $\zeta$ et $\nu$ . . . . .	16
1.6	Fractor ou intégrateur non entier . . . . .	18
1.7	Diagramme électrique d'un système non entier du deuxième ordre avec $\nu \in [0, 1]$ . . . . .	18
1.8	Diagramme mécanique d'un système non entier du deuxième ordre avec $\nu \in [0, 1]$ . . . . .	18
1.9	Diagramme causal d'un système non entier du deuxième ordre avec $\nu \in [0, 1]$ . . . . .	19
1.10	Diagramme électrique d'un système non entier du deuxième ordre avec $\nu \in [1, 2]$ . . . . .	20
1.11	Diagramme mécanique d'un système non entier du deuxième ordre avec $\nu \in [1, 2]$ . . . . .	20
1.12	Diagramme causal d'un système non entier du deuxième ordre avec $\nu \in [1, 2]$ . . . . .	21
1.13	Interprétation de $G(s)$ (1.48) comme étant un système bouclé . . . . .	22

1.14	Lieux de Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte (1.49) avec $\nu = 0.2$ et différentes valeurs de $\zeta$ . Quand $\zeta = -0.25$ , les lieux de Nichols se trouvent à gauche du point critique : le système en boucle fermée $G(s)$ (1.48) est alors instable. Pour toutes les autres valeurs de $\zeta > 0$ , les lieux de Nichols se trouvent à droite et le système en boucle fermée $G(s)$ est stable	24
1.15	Lieux de Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte (1.49) avec $\nu = 1.5$ et différentes valeurs de $\zeta$ . Quand $\zeta = -0.25$ , le lieu de Nichols se trouve à gauche du point critique : le système en boucle fermée $G(s)$ (1.48) est alors instable. Pour toutes les autres valeurs de $\zeta > 0$ , les lieux de Nichols se trouvent à droite et le système en boucle fermée $G(s)$ est stable	25
1.16	Diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée $G(j\omega)$ (1.48) avec $\nu = 0.2$ et différentes valeurs de $\zeta$ . . . . .	26
1.17	Diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée $G(j\omega)$ (1.48) avec $\nu = 1.5$ et différentes valeurs de $\zeta$ . . . . .	26
1.18	Amplitude de résonance normalisée en dB : $\Omega_{res} \in [10^{-1}, 10^1]$ identifiées délimitées par des trois zones rouges : 0 - aucune résonance, 1 - une résonance ayant une amplitude positive en dB et 2 - une résonance ayant une amplitude négative en dB . . . . .	27
1.19	Abaque : pulsation de résonance normalisée de (1.26) en fonction de $\zeta$ pour différentes valeurs de $\nu$ . . . . .	27
1.20	Abaque : amplitude de résonance de (1.26) en fonction de $\zeta$ pour différentes valeurs de $\nu$ sur une échelle logarithmique . . . . .	28
1.21	Abaque : phase de (1.26) à la pulsation de résonance en fonction de $\zeta$ pour différentes valeurs de $\nu$ . . . . .	28
1.22	Lieux des racines du système (1.26) pour l'ordre de dérivation $\nu = 0.25$ (bleu), 0.5 (vert), 0.75 (rouge), 1 (cyan) et $\zeta \in [0, \infty]$ . . . . .	30
1.23	Lieux de racines en fonction de l'ordre de dérivation $\nu \in [0.8, 1]$ (avec un pas de $10^{-3}$ ) et pour $\zeta = 1$ . . . . .	31
1.24	Lieux des pôles du système (1.26) pour $\nu = 0.99$ , $\nu = 1$ , et $\nu = 1.01$ et $\zeta \in [0, \infty]$ . . . . .	31
1.25	Lieux des pôles du système (1.26) pour $\nu = 1$ et $\zeta > 1$ . . . . .	32
1.26	Diagrammes de Bode de $G(j\omega)$ avec $\zeta = 0.48$ et $\nu = 0.2$ . . . . .	33
1.27	Réponse indicielle de $G(s)$ avec $\zeta = 0.48$ et $\nu = 0.2$ , pour des intervalles de temps différents . . . . .	33
1.28	Diagrammes de Bode de $G(j\omega)$ avec $\zeta = 0.31$ et $\nu = 1.5$ . . . . .	34

1.29	Réponse indicielle de $G(s)$ avec $\zeta = 0.31$ et $\nu = 1.5$ . . . . .	35
2.1	Diagrammes de Bode d'un intégrateur idéal et d'un intégrateur non entier $\frac{1}{10}\mathcal{I}_{[10^{-3} \ 10^3]}^{0.75}(s)$ (2.3), avec un gain constant en dehors de la bande de fréquence (approximation d'Oustaloup), et d'un intégrateur non entier $\frac{2}{10}\mathcal{I}_{[10^{-3} \ 10^3]}^{0.75}(s)$ (2.9), avec un intégrateur en dehors de la bande de fréquence (variante de Trigeassou), où $\nu = 0.75$ , $N = 10$ et $[\omega_A \ \omega_B] = [10^{-3} \ 10^3]$ . . .	43
2.2	Schéma d'état de l'intégrateur (2.6) avec $0 < \nu < 1$ sous la forme d'une décomposition en cascade . . . . .	44
2.3	Schéma d'un intégrateur idéal $\mathcal{I}^\nu(s)$ . . . . .	45
2.4	Schéma de l'opérateur de Trigeassou $\frac{2}{N}\mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu(s)$ pour $\forall \nu > 0$ . . . . .	45
2.5	Schéma de l'opérateur d'Oustaloup $\frac{1}{N}\mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu(s)$ avec $\forall \nu > 0$ . . . . .	47
2.6	Schéma d'un intégrateur idéal $\mathcal{I}^\nu(s)$ . . . . .	49
2.7	Schéma d'un intégrateur $\frac{1}{N}\mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu(s)$ . . . . .	50
2.8	Exemple d'illustration d'un système MIMO non entier . . . . .	52
2.9	Résultats de simulation du système (2.36) avec un ordre de dérivation commensurable, obtenus en utilisant l'approximation d'Oustaloup et la variante de Trigeassou, comparés aux réponses analytiques exactes . . . . .	54
2.10	Résultats de simulation du système (2.35) avec un ordre de dérivation non commensurable, obtenus en utilisant l'approximation d'Oustaloup et la variante de Trigeassou, comparés aux réponses analytiques exactes . . . . .	54
2.11	Erreurs de sortie du système (2.36) avec un ordre de dérivation commensurable, obtenues en utilisant l'approximation d'Oustaloup et la variante de Trigeassou . . . . .	55
2.12	Erreurs de sortie du système (2.35) avec un ordre de dérivation non commensurable, obtenues en utilisant l'approximation d'Oustaloup et la variante de Trigeassou . . . . .	55
2.13	Barreau métallique fini sous l'influence de deux flux thermiques, un de chaque coté . . . . .	56
2.14	Résultats de simulation du système (2.43), avec un ordre de dérivation commensurable, obtenus en utilisant l'approximation d'Oustaloup et la variante de Trigeassou . . . . .	58
2.15	Erreur de sortie du système (2.43) obtenue en utilisant l'approximation d'Oustaloup et la variante de Trigeassou . . . . .	59

3.1	Diagrammes de Bode du filtre $\Lambda(s)$ (3.23) avec $\nu = 0.9$ , $\omega_f = 6$ rad/s . . .	71
3.2	Diagrammes de Bode du filtre GMPF (3.33) combiné au dérivateur non entier d'ordre $\nu = 0.9$ avec $\beta = \lambda = 1$ . . . . .	72
3.3	Diagrammes de Bode du filtre LIF (3.35) combiné au dérivateur non entier d'ordre $\nu = 0.9$ avec $\ell = 100$ et $T = 0.05$ . . . . .	72
3.4	Étude de l'effet des paramètres des filtres et du nombre des block-lignes $i$ sur la méthode MOESP : critère d'erreur $J$ en fonction de nombre des block-lignes $i$ et de paramètres des filtres $\omega_f$ (méthode algébrique), $l$ (LIF) et $\lambda$ (GPMF), avec RSB=10 dB . . . . .	77
3.5	Valeurs propres de la matrice $A$ estimées avec les méthodes MOESP et PO-MOESP en utilisant la méthode algébrique, le LIF et le GPMF pour les simulations de Monte Carlo avec 30 réalisations et RSBs différents . . .	80
3.6	Critère d'erreur $J$ en fonction de l'ordre commensurable $\nu$ pour différentes dimensions de la matrice d'état dans les cas déterministe et stochastique .	81
3.7	Diagrammes de Bode du filtre $L_i(s)$ (3.65) avec $a = 8$ et $\nu = 1.5$ . . . . .	85
3.8	Critère d'erreur $J$ en fonction de l'ordre commensurable $\nu$ pour des dimensions différentes de la matrice de transition, $\dim(A) = n$ , dans le contexte déterministe . . . . .	87
3.9	Critère d'erreur $J$ (3.42) en dB en fonction de l'ordre de dérivation du système $\nu$ et du paramètre $a$ du filtre (3.65) avec RSB=30 dB . . . . .	88
3.10	Critère d'erreur $J$ en fonction de l'ordre commensurable $\nu$ pour des dimensions différentes de la matrice de transition, $\dim(A) = n$ , dans le contexte stochastique avec RSB=30 dB . . . . .	89
3.11	Valeurs propres estimées de la matrice $A$ pour 50 réalisations pour différents RSBs sans utilisation du filtre (3.65) . . . . .	90
3.12	Valeurs propres estimées de la matrice $\hat{A}$ pour 50 réalisations pour différents RSBs en utilisant le filtre (3.65) . . . . .	90
3.13	Critère d'erreur $J$ en fonction de l'ordre commensurable $\nu$ pour des dimensions différentes de la matrice de transition, $\dim(A) = n$ , dans le contexte stochastique avec RSB=30 dB . . . . .	92
4.1	Transfert de chaleur monodimensionnel dans un milieu homogène fini . . .	95
4.2	Schéma illustrant le transfert $H(x, s, L)$ du milieu fini . . . . .	98
4.3	Diagrammes de Bode de $F(0, j\omega, L)$ obtenus dans le cas de l'aluminium avec $L = 1$ m, $L = 0.5$ m, $L = 0.1$ m et $L = \infty$ . . . . .	100

4.4	Diagrammes de Bode de $H(0, j\omega, L)$ obtenus dans le cas de l'aluminium avec $L = 1$ m, $L = 0.5$ m, $L = 0.1$ m et $L = \infty$ . . . . .	101
4.5	Réponses fréquentielles $H(0, j\omega, L)$ dans le plan de Nichols dans le cas de l'aluminium avec $L = 1$ m, $L = 0.5$ m, $L = 0.1$ m et $L = \infty$ . . . . .	101
4.6	Diagrammes de Bode de $G(x, j\omega, L)$ et de $E(x, j\omega)$ obtenus dans le cas de l'aluminium avec $L = 1$ m et $x = 0.5$ cm . . . . .	104
4.7	Diagrammes de Bode de $G(x, j\omega, L)$ obtenus avec l'aluminium pour $L = 1$ m avec $x = 0.5$ cm, $x = 1$ cm et $x = 10$ cm . . . . .	104
4.8	Diagrammes de Bode de $H(x, j\omega, L)$ obtenus avec l'aluminium pour $L = 1$ m avec $x = 0$ cm, $x = 0.5$ cm et $x = 1$ cm . . . . .	105
4.9	Réponses fréquentielles $H(x, j\omega, L)$ dans le plan de Nichols obtenus avec l'aluminium pour $L = 1$ m avec $x = 0$ cm, $x = 0.5$ cm et $x = 1$ cm . . . . .	106
4.10	Système thermique constitué de deux barreaux équipés d'éléments chauffants créé sous COMSOL . . . . .	107
4.11	Schéma bloc du système thermique . . . . .	108
4.12	Entrées et sorties du système thermique constitué de deux barreaux en étain modélisé sous COMSOL . . . . .	108
4.13	Entrées et sorties du système de deux barreaux identiques en étain à valider obtenues en utilisant le logiciel COMSOL . . . . .	110
4.14	Critère d'erreur $J_{id}$ en fonction de l'ordre commensurable $\nu$ . . . . .	111
4.15	Sorties simulées avec COMSOL et sorties estimées sur <b>les données d'identification</b> avec la méthode MOESP. % $fit_{id} = 99.99\%$ . . . . .	112
4.16	Sorties simulées avec COMSOL et sorties estimées sur <b>les données de validation</b> avec la méthode MOESP. % $fit_{val} = 99.98\%$ . . . . .	113
4.17	Schéma du système thermique avec un intégrateur . . . . .	113
4.18	Entrées et sorties du système $G'(s)$ (avec l'entrée intégrée) de deux barreaux identiques à identifier obtenues en utilisant le logiciel COMSOL . . . . .	114
4.19	Critère d'erreur $J_{id}$ en fonction de l'ordre commensurable $\nu$ . . . . .	116
4.20	Sorties du modèle ayant un intégrateur simulées avec COMSOL et sorties estimées sur <b>les données d'identification</b> avec la méthode MOESP. % $fit_{id} = 99.95\%$ . . . . .	117
4.21	Sorties du modèle ayant un intégrateur simulées avec COMSOL et sorties estimées sur <b>les données de validation</b> avec la méthode MOESP. % $fit_{val} = 99.83\%$ . . . . .	118

4.22	Banc expérimental constitué de deux barreaux en étain équipés de leurs résistances chauffantes et de sondes de température . . . . .	119
4.23	Schéma électrique de commande piloté par ordinateur et constitué de deux résistances chauffantes $R_b$ de 12 $\Omega$ appliquées à chaque barreau et d'une résistance de shunt $R_{sh}$ de 10 $\Omega$ permettant de mesurer le courant . . . . .	120
4.24	Étude de couplage entre deux barreaux identiques en étain, où $u_1(t)$ , $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont liées au barreau 1 et $u_2(t)$ , $y_3(t)$ et $y_4(t)$ sont liées au barreau 2	120
4.25	(a) Températures mesurées du système thermique idéal, $y_{idéal,i}(t)$ , avec deux barreaux parfaitement isolés obtenues en utilisant COMSOL. (b) Températures mesurées du système thermique réel, $y_{réel,i}(t)$ . (c) Différence entre les deux températures due aux pertes, $p_i(t)$ . . . . .	122
4.26	Températures mesurées du système réel, $y_{réel,i}(t)$ , et températures simulées sous COMSOL du système thermique, $y_{pertes,i}(t)$ , avec deux types de transfert de chaleur pris en compte : la conduction et le rayonnement, avec $\epsilon = 1$ . . . . .	123
4.27	Isolation autour des barreaux créés sous COMSOL, en plastique ayant une épaisseur de 1 cm . . . . .	124
4.28	(a) Températures mesurées du système réel, $y_{réel}(t)$ , et températures simulées sous COMSOL, $y_{pertes}(t)$ , avec une isolation en plastique d'une épaisseur de 1 cm créée autour des barreaux, sans aucun rayonnement, $\epsilon = 0$ , et (b) avec un rayonnement, $\epsilon = 0.16$ . . . . .	124
4.29	Réponse du barreau thermique pour un échelon de flux d'amplitude 5.3 $\text{kWm}^{-2}$ ; régime permanent atteint au bout de $\approx 10$ h . . . . .	125
4.30	Entrées et sorties du système thermique (deux barreaux en étain) . . . . .	125
4.31	Entrées et sorties du système de deux barreaux identiques en étain utilisées pour la validation . . . . .	126
4.32	Critère d'erreur $J_{id}$ en fonction de l'ordre commensurable $\nu$ . . . . .	127
4.33	Sorties estimées sur <b>les données d'identification</b> avec la méthode MOESP. % $\text{fit}_{id} = 96.25\%$ . . . . .	128
4.34	Sorties estimées sur <b>les données de validation</b> avec la méthode MOESP. % $\text{fit}_{val} = 92.3\%$ . . . . .	129
4.35	Critère d'erreur $J_{id}$ en fonction de l'ordre commensurable $\nu$ . . . . .	130
4.36	Sorties du système ayant une entrée intégrée estimées sur <b>les données d'identification</b> avec la méthode MOESP. % $\text{fit}_{id} = 98.3\%$ . . . . .	132



---

4.37 Sorties du système ayant une entrée intégrée estimées sur <b>les données de validation</b> avec la méthode MOESP. $\% \text{ fit}_{val} = 94.2\%$ . . . . .	133
--	-----



# Liste des tableaux

3.1	Moyennes des valeurs propres $p_{1,2} = \text{eig}(A)$ et leur écart-type ( $\sigma_{p_1}$ et $\sigma_{p_2}$ ) pour trois simulations de Monte Carlo à différents niveaux de bruit . . . . .	79
3.2	Moyennes des valeurs propres $p_{1,2} = \text{eig}(A)$ et leur écart-type ( $\sigma_{p_1}$ et $\sigma_{p_2}$ ) pour trois simulations de Monte Carlo à différents niveaux de bruit . . . . .	91
4.1	Critère d'erreur obtenu pour différentes dimensions du système . . . . .	109
4.2	Critère d'erreur obtenu pour différentes dimensions du système avec l'entrée intégrée . . . . .	115
4.3	Critère d'erreur obtenu pour différentes dimensions du système . . . . .	126
4.4	Critère d'erreur obtenu pour différentes dimensions du système avec l'entrée intégrée . . . . .	130



# Notations

$\mathbb{N}$	ensemble des nombres entiers positifs
$\mathbb{N}_n$	ensemble des nombres entiers positifs de $[0, n]$
$\mathbb{Z}$	ensemble des nombres relatifs
$\mathbb{Z}^-$	ensemble des nombres relatifs négatifs
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^{*-}$	ensemble des nombres réels négatifs privé de 0
$\mathbb{R}^{*+}$	ensemble des nombres réels positifs privé de 0
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}^+$	demi-plan droit ouvert des nombres complexes $s \in \mathbb{C}$ tels que $\Re(s) > 0$
$\lceil \nu \rceil$	le plus petit entier majorant $\nu$ ( <i>ceil</i> ( $\nu$ ))
$\lfloor \nu \rfloor$	le plus grand entier minorant $\nu$ ( <i>floor</i> ( $\nu$ ))
$\delta(t)$	impulsion de <i>Dirac</i>
*	produit de convolution
$A^T$	transposée d'un vecteur ou d'une matrice $A$
$A^*$	transconjugée d'un vecteur ou d'une matrice $A$
$\mathbb{S}_n$	Ensemble des matrices symétriques d'ordre $n$ : $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\mathbb{H}_n$	Ensemble des matrices hermitiennes d'ordre $n$ : $A = A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$
$u^{(k)}$	dérivée d'ordre $k$ de $u$
$\nu$	ordre commensurable
$\omega$	pulsation
BIBO	entrée bornée sortie bornée (Bounded Input Bounded Output)
CRONE	Commande Robuste d'Ordre Non Entier
deg	degré d'un polynôme
<b>I</b>	opérateur d'intégration
<b>I'</b>	opérateur d'intégration d'ordre $\nu \in \mathbb{R}^+$

$\mathcal{I}m(a)$	partie imaginaire de $a$
$\mathcal{L}$	transformée de <i>Laplace</i>
$\mathcal{L}^{-1}$	transformée inverse de <i>Laplace</i>
MIMO	multi-variable (Multiple Input Multiple Output)
$\mathcal{D}$	opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$
$\mathcal{D}^\nu$	dérivée d'ordre $\nu \in \mathbb{R}^+$
$\mathcal{R}e(a)$	partie réelle de $a$
$s$	variable de Laplace
$s^\nu$	dérivateur d'ordre $\nu$ dans le domaine de <i>Laplace</i>
$\text{sgn}(\nu)$	fonction signe définie par $\text{sgn}(\nu) = \frac{\nu}{ \nu }$ et $\text{sgn}(0) = 1$
SISO	mono-entrée mono-sortie (Single Input Single Output)
sup	borne supérieure
$\otimes$	produit de Kronecker
$\bar{\sigma}(A)$	valeur singulière maximum de la matrice $A$

# Introduction générale

## Contexte

L'idée de la dérivation non entière est apparue pour la première fois en 1695 lorsque L'Hopital et Leibniz s'interrogèrent dans leurs correspondances sur la signification d'une dérivée d'ordre 0.5. Bien plus tard, au 19-ème siècle, Liouville et Riemann donnèrent une définition cohérente de la dérivée non entière. Ces travaux sont à la base de la théorie de la dérivation et de l'intégration non entières, largement développée depuis la seconde moitié du 20e siècle (Oldham et Spanier, 1974; K. Miller et Ross, 1993; Oustaloup, 1995).

Aujourd'hui, les modèles non entiers sont de plus en plus utilisés pour décrire le comportement dynamique de nombreux systèmes physiques. Les processus électrochimiques (Sabatier, Mbala et al., 2015; J.-D. Gabano, Poinot et Kanoun, 2015), la diffusion thermique (Malti, Sabatier et Akçay, 2009; Cois, 2002; Maachou et al., 2014; J.-L. Battaglia, Cois et al., 2001; J.-L. Battaglia, Maachou et al., 2012; Victor, Malti et al., 2013a; J. Gabano et Poinot, 2011; Datsko, 2012; Sierociuk et al., 2015; D. Wang, X. Wang et Han, 2010), les matériaux viscoélastiques (Moreau, Ramus-Serment et Oustaloup, 2002; Deng, Davies et Bajaj, 2004; Meral, Royston et Magin, 2010; Castaldo, 2013; Grzesikiewicz, Wakulicz et Zbiciak, 2013; Dai et al., 2015; Zopf, Hoque et Kaliske, 2015; Zerpa et al., 2015; Xu et al., 2015), les phénomènes hydrodynamiques (Tarasov, 2005), la polarisation diélectrique (Bohannan, 2000), l'économie (Machado et Mata, 2015), la bio-ingénierie (Spasic, Kovincic et Dankuc, 2016), la description du comportement musculaire (Sommacal et al., 2007), l'effet de peau du rotor dans les machines d'induction (Jalloul et al., 2013), les circuits électriques (Elwakil, 2010; Galvao et al., 2013), la robotique et la modélisation d'environnement (Melchior et al., 2003), ainsi que plusieurs autres domaines, présentent un comportement non entier dans une zone de fonctionnement, plus ou moins importante.

Par ailleurs, l'identification des systèmes par modèle non entier a été initiée dans les années 1990. Depuis, de nombreux résultats ont été obtenus dans les domaines temporel (Thomassin et Malti, 2009a; Thomassin et Malti, 2009b; Malti et Thomassin, 2013; Hu

et al., 2016) et fréquentiel (Mathieu, Oustaloup et Levron, 1995; Le Lay, 1998; Valério et Costa, 2007; Levy, 1959; Sanathanan et Koerner, 1963; Lawrence et G.J., 1979). Néanmoins, la plupart de ces méthodes font partie de la famille des méthodes à erreur de prédiction (prediction error methods, PEM), basées sur la minimisation de la norme  $l_2$  (pondérée ou non) de l'erreur d'estimation, avec des ordres de dérivation connus ou inconnus.

En ce qui concerne les méthodes des sous-espaces, elles sont relativement nouvelles dans la théorie de l'identification de systèmes linéaires (Van Overschee et De Moor, 1996). Basées sur des projections géométriques et l'algèbre linéaire, elles présentent une alternative intéressante aux méthodes classiques basées sur la régression linéaire ou non linéaire. Elles possèdent également certaines propriétés intéressantes, telles que la détermination automatique de l'ordre du modèle lors de l'identification. Elles permettent d'estimer les matrices d'un modèle à base d'une représentation d'état.

Dans le contexte des systèmes non entiers, la notion de pseudo-représentation d'état généralise la notion de représentation d'état en introduisant un paramètre supplémentaire qui est l'ordre commensurable. Les premières tentatives d'application des méthodes des sous-espaces pour de tels systèmes sont présentées dans (Thomassin et Malti, 2009a; Thomassin et Malti, 2009b; Malti et Thomassin, 2013), où la dimension de la matrice de transition est supposée connue et où un algorithme de programmation non linéaire est utilisé pour l'estimation de l'ordre commensurable.

## Objectifs de la thèse

Dans ce contexte, les objectifs de la thèse sont les suivants.

D'abord, il est important de garder à l'esprit, et ce même si plusieurs résultats existent déjà, que l'identification des systèmes non entiers est un problème non trivial. Dans le contexte de l'identification des systèmes linéaires multivariés (MIMO), une structure de type représentation d'état (et pseudo-représentation d'état pour des systèmes non entiers) a l'avantage de tenir compte des modes communs entre les différentes entrées-sorties permettant d'aboutir à des modèles ayant moins de paramètres. La méthode des sous-espaces est particulièrement bien adaptée à ce type de modèles.

Actuellement, la méthode des sous-espaces pour des systèmes non entiers n'a cependant été appliquée que dans le domaine temporel. Il est alors intéressant de développer une méthode des sous-espaces pour une telle classe de systèmes dans le domaine fréquentiel. De plus, comme les systèmes non entiers sont des systèmes à temps continu, un filtrage des données est nécessaire pour respecter la causalité des signaux et pour pouvoir réa-



liser l'identification. Il est également intéressant d'étudier et de comparer les différentes méthodes de filtrage dans le contexte de l'identification pour déduire leurs avantages et inconvénients.

Enfin, un dernier objectif est d'appliquer les méthodes développées à un système réel de diffusion thermique. Les systèmes thermiques se prêtent naturellement à une modélisation utilisant l'outil de la dérivation non entière, sachant que jusqu'à présent seuls les systèmes monovariables ont été modélisés avec un tel outil. Ces modèles sont généralisés à des matériaux soumis à plusieurs flux de chaleur en entrée tout en considérant leur température en plusieurs points de mesures.

## Organisation du mémoire

La progression de cette thèse est organisée selon quatre chapitres.

Ainsi, le **chapitre 1** intitulé *Systèmes à dérivées non entières : un tour d'horizon* présente d'abord un état de l'art de l'intégration et de la dérivation non entières. Ensuite, les principales fonctions de transfert élémentaires sont présentées, sachant que celles-ci font fréquemment l'objet d'études en ingénierie électrique et mécanique. Enfin, les conditions de stabilité et de résonance sont établies pour l'une d'entre elles, à savoir une fonction de transfert non entière incommensurable du deuxième ordre.

Le **chapitre 2** est consacré à la *Simulation des systèmes multi variables non entiers dans le domaine temporel*. Un tour d'horizon des méthodes de simulation de systèmes non entiers dans le domaine temporel est d'abord présenté. Une méthode de simulation de systèmes MIMO non entiers, basée exclusivement sur la représentation d'état, est développée par la suite. Enfin, deux illustrations sont présentées : l'une sur un exemple numérique avec une réponse analytique connue et l'autre sur un exemple d'application en thermique d'un système non entier MIMO non commensurable.

Le **chapitre 3** traite de l'*Identification de systèmes par modèle non entier en utilisant la méthode des sous-espaces*. Dans un premier temps, une brève présentation des différentes méthodes de type 4SID existantes dans la littérature est proposée, dont la méthode MOESP (angl. Multivariable Output Error State sPace algorithm), utilisée par la suite dans ce mémoire. Le reste du chapitre est divisé en deux parties. Dans la première partie, les algorithmes MOESP and PO-MOESP sont présentés dans des contextes déterministe et stochastique à partir de données temporelles. Différents filtres combinés aux méthodes MOESP et PO-MOESP (angl. Past Output) sont comparés. Dans la deuxième partie, la méthode des sous-espaces est appliquée pour l'identification de systèmes non entiers à partir de données fréquentielles. Finalement, une étude de Monte Carlo est réalisée

permettant d'évaluer statistiquement les propriétés des estimateurs.

Enfin, le **chapitre 4** met en *Application à la diffusion thermique dans deux barreaux métalliques* les algorithmes développés. La modélisation théorique du transfert thermique, décomposé en une cascade de transferts locaux dont les paramètres ont un sens physique, est d'abord présentée. Ensuite, deux barreaux métalliques sont décrits et modélisés numériquement en utilisant le logiciel COMSOL qui permet de générer des données de simulation à partir d'un modèle aux éléments finis. Enfin, des mesures réelles sont effectuées à partir de deux barreaux métalliques. Les données ainsi générées (en simulation et en expérimentation) sont utilisées pour l'estimation de modèles de diffusion thermique.

# Chapitre 1

## Systemes à dérivées non entières : un tour d'horizon

### Contents

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Définitions</b>	<b>7</b>
1.2.1	Dérivation non entière	7
1.2.2	Intégration non entière	8
1.2.3	Interprétation géométrique	10
<b>1.3</b>	<b>Représentation et stabilité des systèmes non entiers</b>	<b>11</b>
1.3.1	Pseudo-représentation d'état	11
1.3.2	Fonctions de transfert élémentaires	13
1.3.3	Condition de stabilité	15
<b>1.4</b>	<b>Fonction de transfert non entière du deuxième ordre</b>	<b>16</b>
1.4.1	Motivations et origines	17
1.4.2	Condition de stabilité	21
1.4.3	Condition de résonance	23
1.4.4	Lieux des pôles	25
1.4.5	Exemples numériques	30
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>35</b>

---

## 1.1 Introduction

C’est en 1695 que le concept de dérivation non entière apparut pour la première fois lorsque L’Hopital et Leibniz s’interrogeaient dans leurs correspondances sur la signification d’une dérivée d’ordre 0.5 (Dugowson, 1994). Ce n’est que bien plus tard, au 19-ème siècle, que Liouville et Riemann donnèrent une définition cohérente de la dérivée non entière.

Mais, c’est surtout depuis la seconde moitié du 20-ème siècle que de nombreuses avancées, concernant la théorie de la différenciation et de l’intégration non entières, ont été réalisées (Oldham et Spanier, 1974 ; K. Miller et Ross, 1993 ; Oustaloup, 1995). Aujourd’hui, il existe de nombreux systèmes physiques dont le comportement dynamique peut être décrit avec succès par des modèles non entiers : les processus électrochimiques (Sabatier, Mbala et al., 2015 ; J.-D. Gabano, Poinot et Kanoun, 2015), la diffusion thermique (Malti, Sabatier et Akçay, 2009 ; Cois, 2002 ; Maachou et al., 2014 ; J.-L. Battaglia, Cois et al., 2001 ; J.-L. Battaglia, Maachou et al., 2012 ; Victor, Malti et al., 2013a ; J. Gabano et Poinot, 2011 ; Datsko, 2012 ; Sierociuk et al., 2015 ; D. Wang, X. Wang et Han, 2010), les matériaux viscoélastiques (Moreau, Ramus-Serment et Oustaloup, 2002 ; Deng, Davies et Bajaj, 2004 ; Meral, Royston et Magin, 2010 ; Castaldo, 2013 ; Grzesikiewicz, Wakulicz et Zbiciak, 2013 ; Dai et al., 2015 ; Zopf, Hoque et Kaliske, 2015 ; Zerpa et al., 2015 ; Xu et al., 2015), les phénomènes hydrodynamiques (Tarasov, 2005), la polarisation diélectrique (Bohannan, 2000), l’économie (Machado et Mata, 2015), la bio-ingénierie (Spasic, Kovincic et Dankuc, 2016), la description du comportement musculaire (Sommacal et al., 2007), l’effet de peau du rotor dans les machines d’induction (Jalloul et al., 2013), les circuits électriques (Elwakil, 2010 ; Galvao et al., 2013), la robotique et la modélisation d’environnement (Melchior et al., 2003), etc.

Plus précisément, en électrochimie, la diffusion de charges dans les batteries acides est décrite par des modèles de Randles (Sabatier, Aoun et al., 2006 ; B. Wang et al., 2015) qui utilisent l’impédance de Warburg ayant un intégrateur d’ordre 0.5. Dans la diffusion thermique des milieux semi-infinis homogènes, Battaglia (J.-L. Battaglia, Cois et al., 2001) rappelle que la solution exacte de l’équation de la chaleur lie le flux thermique à une dérivée d’ordre 0.5 de la température de la surface sur laquelle le flux est appliqué. Par ailleurs, le concept de la dérivation non entière est très utilisé dans différents types d’applications, telles que la commande robuste (Oustaloup et Bansard, 1993 ; Oustaloup, Mathieu et Lanusse, 1993 ; Lanusse, Oustaloup et Mathieu, 1993 ; Victor, Melchior et Oustaloup, 2010 ; Gruel, Lanusse et Oustaloup, 2009), l’identification de systèmes (Poinot et Trigeassou, 2004 ; Cois, 2002 ; Rapaic et Pisano, 2013 ; Malti, Victor et Oustaloup, 2008 ; Malti, Raïssi et al., 2010 ; Victor, Malti et al., 2013b ; J.-D. Gabano et Poinot, 2011), la simulation dans le domaine temporel (Atherton, Tan et Yuce, 2015 ; Hwang, Leu et Tsay,

2002; Aoun, Malti et al., 2004; Oustaloup, 1995; Oldham et Spanier, 1974; Podlubny, 1999a). Certains systèmes particuliers complexes ont été étudiés, tels que les systèmes avec retard (Hua, D. Liu et Guan, 2014), ou encore les systèmes MIMO (angl. Multi-Input Multi-Output) (Khanra, Pal et Biswas, 2013).

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. La première partie rappelle tout d’abord les notions mathématiques autour de la dérivation non entière. Les opérateurs non entiers d’intégration puis de dérivation y sont définis au paragraphe 1.2. Ensuite, deux formes de représentation de systèmes non entiers sont rappelées au paragraphe 1.3 : pseudo-représentation d’état et fonction de transfert.

Les motivations pour le traitement d’un système non entier du deuxième ordre en génie électrique et en mécanique sont présentées au paragraphe 1.4.1. Ensuite, les principaux résultats sont présentés aux sous-paragraphe 1.4.2 et 1.4.3. Le lieu des racines en fonction de l’ordre de dérivation montre qu’il existe une discontinuité pour  $\nu = 1$  au sous-paragraphe 1.4.4. Deux exemples numériques sont présentés avec  $\nu \in (0, 1)$  et  $\nu \in (1, 2)$ , au sous-paragraphe 1.4.5 avant de conclure.

La contribution principale de ce chapitre, à savoir l’étude de fonctions de transfert non entières du deuxième ordre a donné lieu à une publication dans la revue internationale *Journal of Vibration and Control* (Ivanova, Moreau et Malti, 2016).

## 1.2 Définitions

### 1.2.1 Dérivation non entière

Le concept de dérivation d’ordre arbitraire (non entier),  $\mathcal{D}^\nu = \left(\frac{d}{dt}\right)^\nu$ ,  $\forall \nu \in \mathbb{R}_{>0}$ <sup>1</sup> a été défini au cours du 19-ème siècle. L’une des principales contributions à l’établissement de cette définition est due à Grünwald et Letnikov qui étendent la dérivation en utilisant des ordres non entiers réels ou complexes. La dérivée d’ordre non entier quand  $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$ , où l’intégrale quand  $\nu \in \mathbb{R}_{<0}$ , de  $x(t)$  est définie par Podlubny (1999a) :

$$\mathcal{D}^\nu x(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\nu}{k} x(t - kh)}{h^\nu}, \quad (1.1)$$

---

1.  $\mathbb{R}_{>0}$  est l’ensemble des nombres réels positifs privés de 0.

où  $\binom{\nu}{k}$  désigne le coefficient du binôme de Newton généralisé à des ordres réels :

$$\binom{\nu}{k} = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{k! \Gamma(\nu - k + 1)} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-k+1)}{k!} & \forall k \in \mathbb{N}_{>0} \end{cases}, \quad (1.2)$$

où  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{\nu-1} d\xi. \quad (1.3)$$

La transformée de Laplace, notée  $\mathcal{L}$ , est un outil algébrique plus concis qui permet d’écrire, en cas de conditions initiales nulles, (Podlubny, 1999a) :

$$\mathcal{L}\left\{\mathcal{D}^\nu x(t)\right\} = s^\nu X(s), \text{ avec } X(s) \triangleq \mathcal{L}\left\{x(t)\right\},$$

où  $s$  est la variable de Laplace.

## 1.2.2 Intégration non entière

Inspirée de la formule de Cauchy (K. Miller et Ross, 1993; Oldham et Spanier, 1974; Samko, Kilbas et Marichev, 1993), la définition de Riemann-Liouville de l’intégrale d’ordre  $\nu$  d’une fonction  $x(t)$ , avec  $\nu > 0$  et  $t > 0$ , a été établie au 19-ème siècle sous la forme :

$$\mathcal{I}^\nu x(t) = \mathcal{D}^{-\nu} x(t) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\nu) (t - \tau)^{1-\nu}} x(\tau) d\tau, \quad (1.4)$$

qui peut être vue comme le produit de convolution ( $\star$ )

$$\mathcal{I}^\nu x(t) = h_\nu \star x \quad (1.5)$$

du noyau

$$h_\nu = \frac{1}{\Gamma(\nu) t^{1-\nu}} \quad (1.6)$$

et de la fonction  $x$  (Matignon, 1994).

La transformée de Laplace de  $\mathcal{I}^\nu x(t)$  qui n’est autre que la fonction de transfert d’un intégrateur d’ordre  $\nu > 0$ , est donnée par Oldham et Spanier (1974) :

$$\mathcal{L}\left\{\mathcal{I}^\nu x(t)\right\} = \frac{1}{s^\nu} X(s), \text{ avec } X(s) \triangleq \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}.$$

Les Fig. 1.1 et 1.2 présentent les réponses fréquentielles et impulsionnelles d’un intégrateur généralisé pour des ordres  $m$  compris entre 0 et 2.

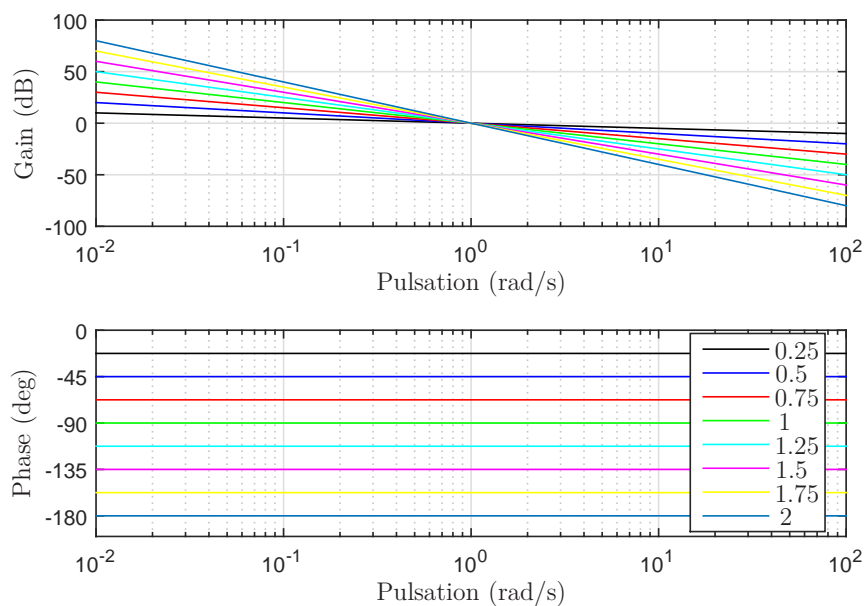


Fig. 1.1. Diagrammes de Bode d'un intégrateur généralisé pour des ordres compris entre 0 et 2

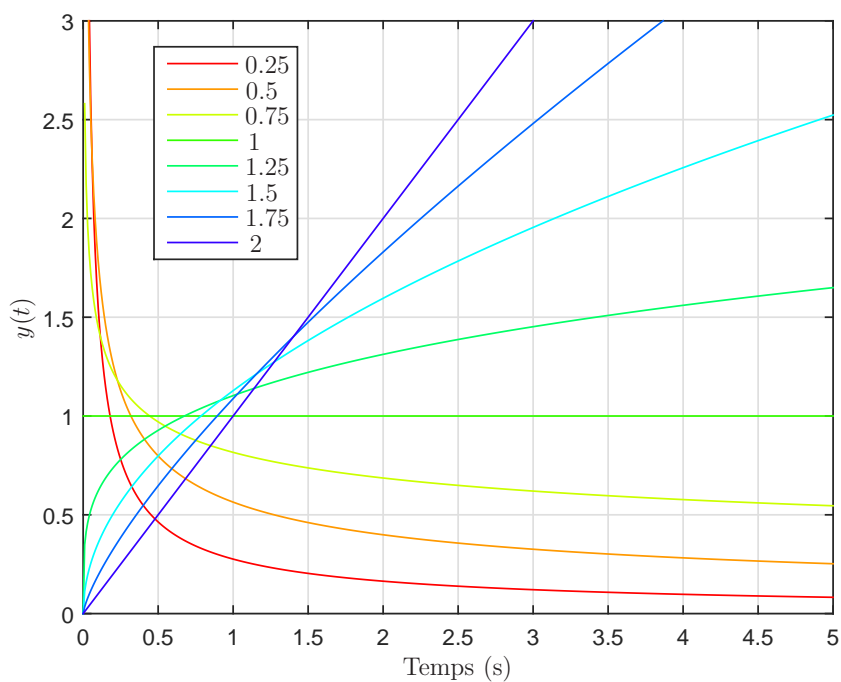


Fig. 1.2. Réponse impulsionnelle d'un intégrateur généralisé pour des ordres compris entre 0 et 2

### 1.2.3 Interprétation géométrique

Dans le cas où l’ordre  $\nu$  est réel, la définition (1.4) peut être interprétée comme l’aire de la surface que définit la fonction  $x(t)$  pondérée par un facteur d’oubli représenté par la fonction  $h_\nu(t - \tau)$  définie par :

$$h_\nu(t - \tau) = \frac{1}{\Gamma(\nu) (t - \tau)^{1-\nu}}. \quad (1.7)$$

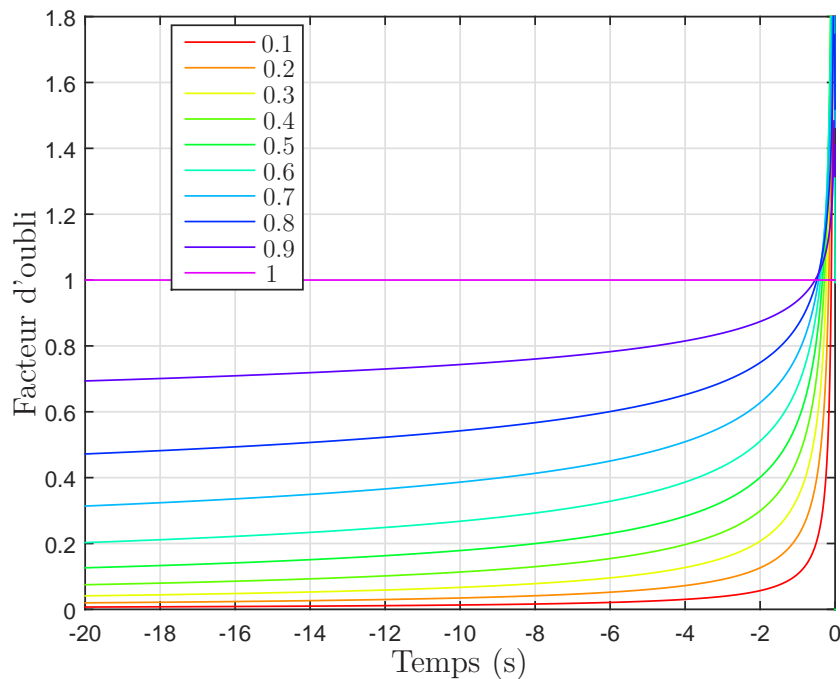


Fig. 1.3. Courbes représentatives des variations du facteur d’oubli  $h_\nu(t - \tau)$  dans le cas d’une intégrale d’ordre réel  $\nu$  tel que  $0.1 < \nu < 1$

Ainsi, si  $\nu$  est égal à 1,  $\mathcal{I}^\nu x(t)$  est une intégrale classique, toutes les valeurs de  $x(t)$  ayant le même « poids ». Si  $\nu$  est un réel compris entre 0 et 1, les valeurs les plus récentes ont plus de « poids » que les plus anciennes. La Fig. 1.3 représente les variations du facteur d’oubli  $h_\nu(t - \tau)$  pour des valeurs de  $\nu$  comprises entre 0.1 et 1. A travers cette interprétation, les différentes pondérations obtenues en faisant varier l’ordre d’intégration  $m$  mettent en évidence l’aptitude de cet opérateur à décrire des phénomènes physiques à mémoire longue tels que les phénomènes de diffusion (Serrier, 2008).



## 1.3 Représentation et stabilité des systèmes non entiers

D'une manière générale, un système SISO (angl. Single Input Single Output) non entier est un système dont la dynamique est décrite par une équation différentielle non entière :

$$y(t) + a_1 \mathcal{D}^{\nu_1} y(t) + \dots + a_N \mathcal{D}^{\nu_N} y(t) = b_0 \mathcal{D}^{\beta_0} u(t) + \dots + b_M \mathcal{D}^{\beta_M} u(t), \quad (1.8)$$

où  $(a_j, b_i) \in \mathbb{R}^2$ , et les ordres de dérivation  $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_N, \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_M$  sont des nombres réels positifs.

### 1.3.1 Pseudo-représentation d'état

#### 1.3.1.1 Commensurable

La pseudo-représentation d'état d'un système MIMO non entier commensurable s'écrit (Oustaloup, 1995; Matignon et d'Andréa-Novel, 1996) :

$$\mathcal{D}^\nu \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad (1.9)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \quad (1.10)$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur du pseudo-état,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  représente le vecteur de sortie.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  sont des matrices constantes. Les conditions initiales nulles sont considérées :  $\mathbf{x}(t) = 0$  pour  $t \leq 0$ . Matignon (1998a) prouve que le système non entier (1.9)-(1.10) est stable si et seulement si :

$$0 < \nu < 2 \quad \text{et} \quad \nu \frac{\pi}{2} < |\arg(\lambda_k)| \leq \pi \quad \forall k = 1, \dots, n$$

où  $\lambda_k$  est la  $k^{\text{ème}}$  valeur propre de  $A$ . La conversion de (1.9)-(1.10) vers une représentation par une matrice de fonctions de transfert MIMO est obtenue de la même façon que pour des systèmes rationnels par :

$$G(s) = C(s^\nu I - A)^{-1} B + D. \quad (1.11)$$

#### 1.3.1.2 Non commensurable

Dans le cas d'une pseudo-représentation d'état non commensurable, l'ordre de dérivation non entier  $\nu$  dans (1.9) est remplacé par un vecteur des ordres de dérivation :

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \end{bmatrix}^T. \quad (1.12)$$

Dans ce cas chaque pseudo-état possède son propre ordre de dérivation :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathcal{D}^{\nu_1} x_1(t) \\ \mathcal{D}^{\nu_2} x_2(t) \\ \vdots \\ \mathcal{D}^{\nu_n} x_n(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(t) \end{cases} = \begin{cases} A \\ C \end{cases} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{cases} B\mathbf{u}(t) \\ D\mathbf{u}(t) \end{cases}. \quad (1.13)$$

### 1.3.1.3 Transformation de similarité différentielle

**Théorème 1.3.1** (Malti et Thomassin, 2013) *La pseudo-représentation d’état non entière (1.9)-(1.10), ayant un ordre commensurable  $\nu$  et  $\dim(A) = n$ , est équivalente à la pseudo-représentation d’état non entière :*

$$\mathcal{D}^{(\frac{\nu}{k})} \mathbf{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & \cdots & 0_{n \times n} & A \\ I_{n \times n} & 0_{n \times n} & \cdots & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_{n \times n} & \cdots & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & \cdots & I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} B \\ 0_{n \times m} \\ 0_{n \times m} \\ \vdots \\ 0_{n \times m} \end{pmatrix}}_{\mathbb{B}} \mathbf{u}(t), \quad (1.14)$$

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{p \times n} & 0_{p \times n} & \cdots & 0_{p \times n} & C \end{pmatrix}}_{\mathbb{C}} \mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \quad (1.15)$$

ayant un ordre commensurable  $\nu/k$  et  $\dim(A) = kn$ , où  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{kn}$  est un nouveau vecteur d’état,  $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{kn \times kn}$ ,  $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{kn \times m}$ ,  $\mathbb{C} \in \mathbb{R}^{p \times kn}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ .

La transformation de similarité différentielle est une propriété importante d’un système non entier commensurable qui permet à un système donné d’être réécrit avec des représentations d’états différentes avec des ordres de dérivation différents. Un système de l’ordre  $\nu$  peut être réécrit comme un système avec l’ordre divisé par deux par exemple,  $\nu/2$ , mais avec deux fois plus d’états. Comme conséquence, chaque système a un nombre infini de réalisations.

### 1.3.1.4 Observabilité et contrôlabilité des pseudos-états

Dans (Matignon et d'Andréa-Novel, 1996 ; Matignon et d'Andréa-Novel, 1997 ; Hotzel et Fliess, 1998), plusieurs résultats sur l'observabilité et la contrôlabilité des systèmes non entiers sont présentés.

Selon Sabatier, Ch. Farges, Merveillaut et al. (2012), le problème de l'observabilité reste non résolu pour certaines raisons. Premièrement, les représentations de systèmes non entiers ne sont pas les représentations d'état de systèmes (Lorenzo et Hartley, 2008). Ainsi, les résultats obtenus ne démontrent pas l'observabilité de l'état du système. Deuxièmement, Sabatier, Merveillaut et al. (2010) ont démontré que ni Caputo, ni Riemann-Liouville définitions peuvent être utilisées pour obtenir la solution exacte d'un système non entier, parce que les conditions initiales ne sont pas considérées. Il est ainsi nécessaire de rajouter une fonction d'initialisation pour obtenir la réponse correcte du système (Lorenzo et Hartley, 2008). Une initialisation du système physiquement conscient peut être obtenue par une définition du système non entier à partir d'une combinaison d'un système linéaire conventionnel et d'un système parabolique (Sabatier, Merveillaut et al., 2010).

Concernant la propriété d'observabilité du système non-entier, un état non-entier ne peut être que approximativement observable, mais pas observable. L'observateur de Luenberger peut être utilisé pour obtenir une estimation d'un tel état (Sabatier, Ch. Farges, Merveillaut et al., 2012).

### 1.3.2 Fonctions de transfert élémentaires

Par conséquent, une représentation symbolique du système non entier, décrit par (1.8), est donnée par :

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i s^{\beta_i}}{1 + \sum_{j=1}^N a_j s^{\alpha_j}}. \quad (1.16)$$

Si  $F(s)$  (1.16) est commensurable d'ordre  $\nu$ , alors  $F(s)$  peut s'écrire comme :

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^m \tilde{b}_i s^{i'\nu}}{1 + \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j s^{j'\nu}}, \quad (1.17)$$

où  $i' = \frac{\beta_i}{\nu}$  et  $j' = \frac{\alpha_j}{\nu}$  sont des entiers.

Dans le cas rationnel,  $\nu$  est égal à 1 et les ordres de numérateur  $\alpha_N$  et de dénominateur  $\beta_M$  sont fixés, alors les coefficients  $b_i, i = 0, \dots, M$  et  $a_j, j = 1, \dots, N$  sont estimés. Dans le cas non entier, les ordres de dérivation (ou l'ordre commensurable) peuvent être également estimés.

Même si le domaine d’application de systèmes non entiers est grand, la plupart des systèmes linéaires sont habituellement décrits par des fonctions de transfert simples de première ou de deuxième espèces (Malti, Moreau et al., 2011). Par conséquent, il est utile de déduire les propriétés de ces modèles standards, tels que la stabilité, la résonance, le lieu des racines, etc. Lorsque la fonction de transfert (1.16) est commensurable, elle peut être développée en utilisant les fonctions de transfert élémentaires, de première ou de deuxième espèce.

### 1.3.2.1 Fonctions de transfert de première espèce

La fonction de transfert de première espèce,

$$F_1(s) = \frac{K}{1 + (\tau s)^\nu}, \quad (1.18)$$

est stable lorsque (Matignon, 1998b)

$$\begin{cases} \tau > 0, \\ 0 < \nu < 2 \end{cases}, \quad (1.19)$$

et présente une résonance lorsque  $\nu \in (1, 2)$  à la pulsation (Malti, Moreau et al., 2011)

$$\omega = \frac{\sqrt[\nu]{-\cos(\nu\frac{\pi}{2})}}{\tau}. \quad (1.20)$$

### 1.3.2.2 Fonctions de transfert de deuxième espèce

La fonction de transfert de deuxième espèce est définie comme :

$$F_2(s) = \frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{2\nu} + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^\nu + 1}, \quad (1.21)$$

avec les conditions de stabilité suivantes (Malti, Moreau et al., 2011) :

$$\begin{cases} \omega_0 > 0, \\ 0 < \nu < 2, \\ \zeta > -\cos(\nu\frac{\pi}{2}) \end{cases}. \quad (1.22)$$

De plus, les conditions de résonance du système élémentaire non entier sont étudiés par Malti, Moreau et al. (2011), elles sont tracées sur la Fig. 1.4. En supplément, la norme  $\mathcal{H}_2$  de tels systèmes est calculée par Malti, Aoun et al. (2011). Les conditions de bornitude des normes  $\mathcal{L}_p$  de la réponse impulsionnelle de ces systèmes sont données par Malti (2013).

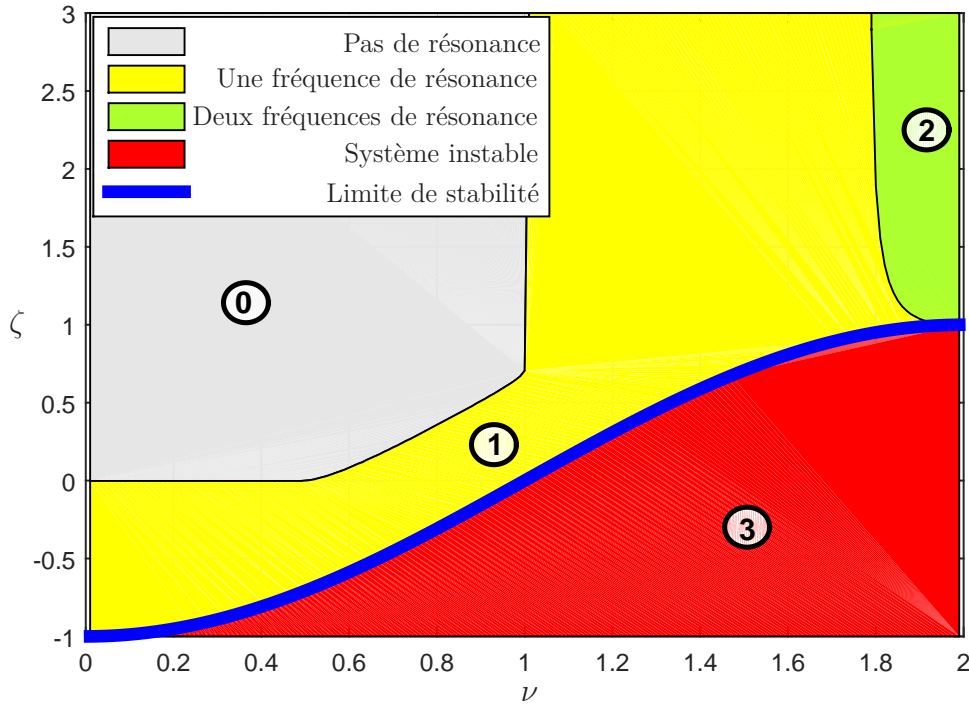


Fig. 1.4. Régions de stabilité et de résonance du système non entier du deuxième espèce (1.21) en fonction de  $\zeta$  et  $\nu$

### 1.3.2.3 Fonctions de transfert de troisième espèce

Par ailleurs, Ben Hmed, Amairi et Aoun (2015) établissent numériquement les conditions de stabilité et de résonance du système suivant :

$$F_3(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{\nu+1} + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^\nu + 1}, \quad (1.23)$$

qui est non commensurable  $\forall \nu \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ . Cependant un tel système n'a pas d'origine physique. Les zones de résonance sont tracées sur la Fig. 1.5.

Au paragraphe 1.4, une fonction de transfert non entière du deuxième ordre est étudiée, ayant un ordre non entier  $\nu \in [0, 2]$ .

### 1.3.3 Condition de stabilité

La stabilité des systèmes non entiers a été étudiée fréquemment dans la littérature. Par exemple, l'analyse de stabilité de Mittag-Leffler est proposée pour les systèmes qui sont décrits par des équations non entières par Podlubny (1999a), Li, Y. Chen et Podlubny (2010) et Sabatier, Moze et C. Farges (2010). La stabilité des systèmes incommensurables non entiers d'une forme générale est étudiée par Bonnet et Partington (2000), où les

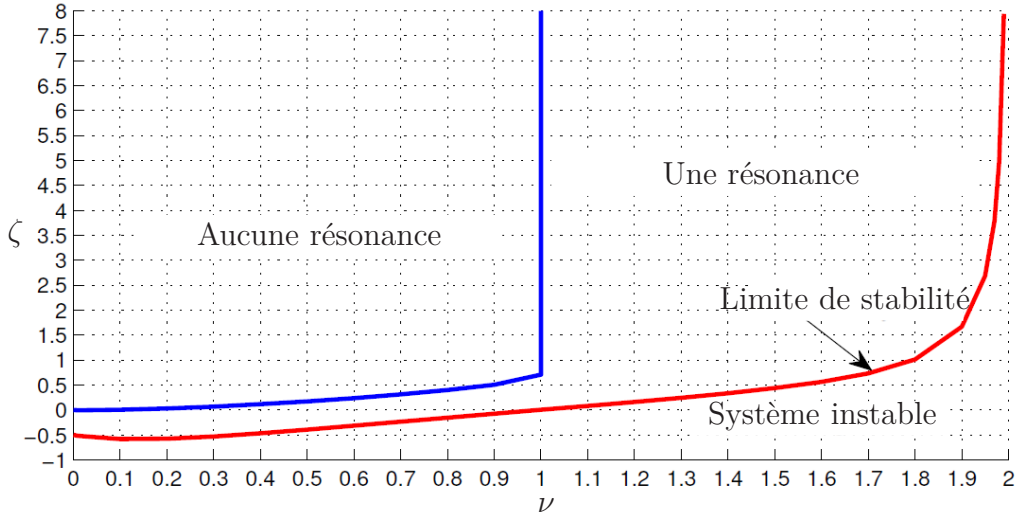


Fig. 1.5. Régions de stabilité et de résonance du système non entier du troisième espèce (1.23) en fonction de  $\zeta$  et  $\nu$

auteurs prouvent qu’un système d’ordre non entier est stable au sens BIBO (angl. Bounded Input, Bounded Output), si sa fonction de transfert est analytique dans le demi-plan droite complexe fermé  $\mathcal{C}^+$ . Une autre méthode pour l’analyse de stabilité est proposée par Sabatier, Ch. Farges et Trigeassou (2013). Elle utilise le principe de l’argument de Cauchy et un diagramme de Nyquist (Hwang et Cheng-Cheng, 2006) des fonctions de transfert équivalentes en boucle ouverte.

Le système décrit par  $G(s)$  est  $\mathcal{L}_p$ -stable,  $1 \leq p \leq \infty$ , si et seulement si :

$$\sup_{u \in \mathcal{L}_p, u \neq 0} \frac{\|g \star u\|_p}{\|u\|_p} < \infty, \quad (1.24)$$

où  $\star$  est un produit de convolution,  $g$  est la réponse impulsionnelle  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ , et  $u(t)$  est l’entrée du système. La stabilité au sens BIBO est définie comme la stabilité  $\mathcal{L}_\infty$ . En outre, comme le montre M. Dahleh, M. A. Dahleh et Verghese (2011), un système est BIBO stable si et seulement si la norme  $\mathcal{L}_1$  de sa réponse impulsionnelle est bornée :

$$\|g\|_{\mathcal{L}_1} < \infty. \quad (1.25)$$

## 1.4 Fonction de transfert non entière du deuxième ordre

Dans ce paragraphe, les systèmes non entiers d’ordre 2 sont étudiés permettant ainsi de bien mettre en évidence les propriétés les plus remarquables de tels systèmes. L’étude se voulant générique, aucun domaine de la physique n’est privilégié, d’où l’emploi

d’une terminologie générale en ce qui concerne les variables de puissance, à savoir le flux généralisé  $f(t)$  (vitesse, courant, débit, flux thermique,...) et l’effort généralisé  $e(t)$  (force, tension, pression, température,...), et ce telles qu’elles sont définies dans l’approche Bond-Graph. Néanmoins, conscient que tous les lecteurs ne sont pas nécessairement familiarisés avec l’approche Bond-Graph, les schémas retenus pour représenter ces systèmes relèvent plus des schémas « électriques » et « mécaniques » respectant l’analogie énergétique, et ce dans la mesure où la lecture de ces schémas est plus abordable pour un non spécialiste que ne le sont les schémas Bond-Graph.

### 1.4.1 Motivations et origines

Une fonction de transfert non entière du deuxième ordre est définie par :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^\nu + 1}, \quad (1.26)$$

avec  $\nu \in (0, 1)$ . Elle peut être utilisée pour modéliser des systèmes électriques et mécaniques comme illustré dans ce paragraphe. Néanmoins, à la connaissance de l’auteur, pour  $\nu \in (1, 2)$ , il n’existe pas de systèmes physiques qui correspondent à la fonction de transfert (1.26). Un tel cas est traité dans ce paragraphe comme un objet mathématique.

#### 1.4.1.1 Systèmes visco-élastiques

La fonction de transfert (1.26) peut être utilisée en ingénierie mécanique pour modéliser le comportement de systèmes visco-élastiques (Gaul, Klein et Kemple, 1991), (Schiesse et al., 1995), (Lewandowski et Chorzyczewski, 2010), (Moreau, Khemane et al., 2010), (Meral, Royston et Magin, 2010), (Castaldo, 2013), (Grzesikiewicz, Wakulicz et Zbiciak, 2013), (Dai et al., 2015), (Zopf, Hoque et Kaliske, 2015), (Zerpa et al., 2015), (Cataldo et al., 2015). En effet, par rapport à un modèle entier, le modèle linéaire standard non entier du comportement visco-élastique conduit à une meilleure approximation des courbes (Dai et al., 2015), (Wharmby et Bagley, 2014). Les modèles visco-élastiques peuvent être représentés de manière équivalente comme des circuits électriques, où les ressorts et les amortisseurs sont remplacés par des condensateurs et des résistances respectivement (Ala et al., 2014).

Ainsi, de manière générique, un système non entier du deuxième ordre avec  $\nu \in [0, 1]$  est constitué d’un élément inertiel  $I$  en série avec un élément capacitif  $C$  et un *fractor* (la contraction en anglais de FRActional integratOR) (Krishna, 2011), Fig. 1.6, pour lequel l’effort généralisé  $E_\lambda(s)$  est proportionnel à une intégrale non entier d’ordre  $m =$

$(1 - \nu) \in [0, 1]$  du flux généralisé  $F_\lambda(s)$  :

$$E_\lambda(s) = \frac{1}{\lambda s^\nu} F_\lambda(s). \quad (1.27)$$

Si  $\nu = 0$ , le *fractor* est un élément capacitif. Si  $\nu = 1$ , le *fractor* est un élément résistif.

Les diagrammes électrique et mécanique qui correspondent à de tels systèmes sont représentés respectivement sur les Fig. 1.7 et 1.8.



Fig. 1.6. Fractor ou intégrateur non entier

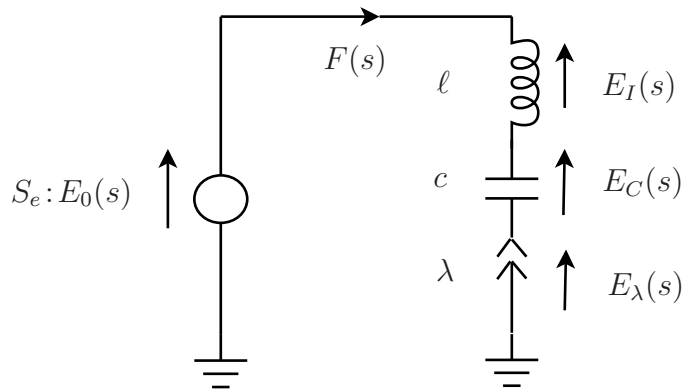


Fig. 1.7. Diagramme électrique d’un système non entier du deuxième ordre avec  $\nu \in [0, 1]$

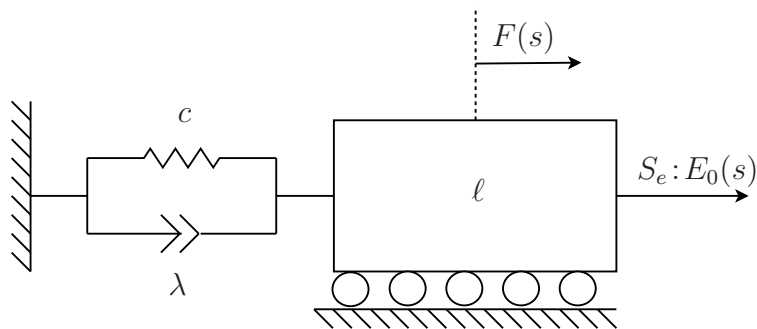


Fig. 1.8. Diagramme mécanique d’un système non entier du deuxième ordre avec  $\nu \in [0, 1]$ .



Les relations causales correspondantes sont :

$$F(s) = \frac{1}{\ell s} E_I(s), \quad (1.28)$$

$$E_C(s) = \frac{1}{cs} F(s), \quad (1.29)$$

$$E_\lambda(s) = \frac{1}{\lambda s^m} F(s), \quad (1.30)$$

$$E_I(s) = E_0(s) - E_C(s) - E_\lambda(s), \quad (1.31)$$

où  $F(s)$  et  $E(s)$  représentent respectivement le flux et l'effort généralisés. Le diagramme causal issu du système d'équations (1.28)-(1.31) est donné sur la Fig. 1.9.

La fonction de transfert  $\frac{E_c(s)}{E_0(s)}$  obtenue est donnée par

$$\frac{E_c(s)}{E_0(s)} = \frac{1}{cls^2 + \frac{c}{\lambda}s^{1-m} + 1} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{\tilde{\nu}} + 1}, \quad (1.32)$$

et elle correspond à  $G(s)$  (1.26) avec :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\ell c}}, \quad (1.33)$$

$$\zeta = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\ell^\nu c^{\nu-2}}}, \quad (1.34)$$

$$\tilde{\nu} = 1 - m = \nu, \quad (1.35)$$

où  $\tilde{\nu} \in [0, 1]$ .

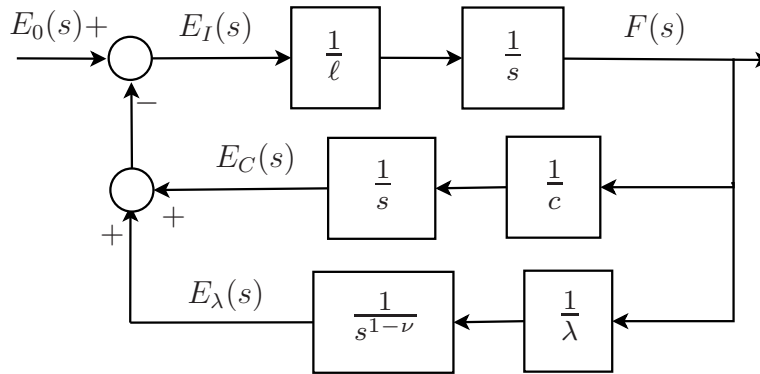


Fig. 1.9. Diagramme causal d'un système non entier du deuxième ordre avec  $\nu \in [0, 1]$ .

#### 1.4.1.2 Systèmes visco-inertiels

La fonction de transfert (1.26) peut être aussi utilisée pour la modélisation du comportement de systèmes visco-inertiels ayant un élément inertiel  $I$  en série avec une combinaison d'un élément capacitif  $C$  et un *fractor* en parallèle. Dans ce cas, le flux généralisé

$F_\lambda(s)$  est proportionnel à un intégral non entier d’ordre  $m = (\nu - 1) \in [0, 1]$  de l’effort généralisé  $E_\lambda(s)$  :

$$F_\lambda(s) = \frac{\lambda}{s^m} E_\lambda(s). \quad (1.36)$$

Si  $\nu = 1$ , le *fractor* est un élément inertiel. Si  $\nu = 0$ , le *fractor* est un élément résistif.

Les diagrammes électrique et mécanique de tels systèmes sont représentés respectivement sur les Fig. 1.10 et 1.11.

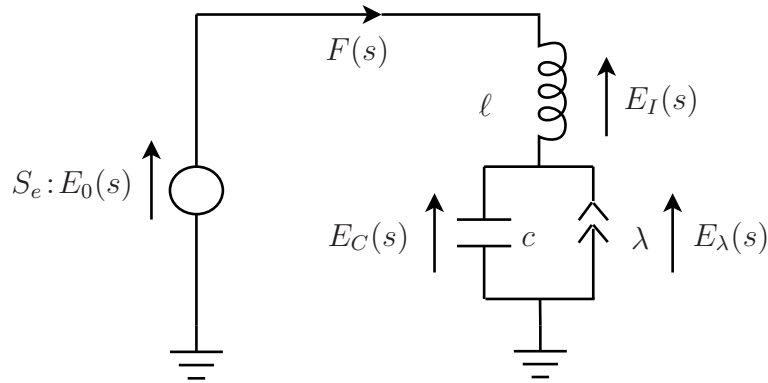


Fig. 1.10. Diagramme électrique d’un système non entier du deuxième ordre avec  $\nu \in [1, 2]$ .

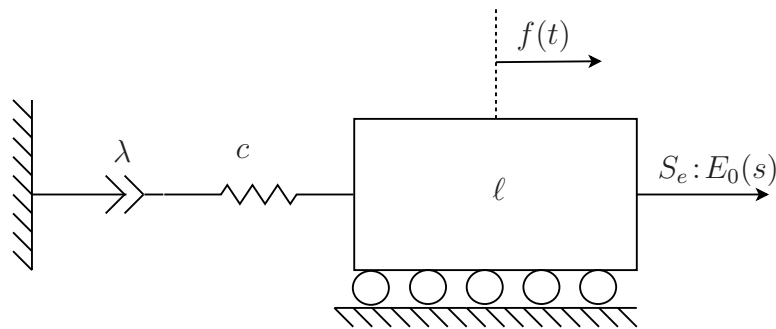


Fig. 1.11. Diagramme mécanique d’un système non entier du deuxième ordre avec  $\nu \in [1, 2]$ .

Les relations causales correspondantes sont :

$$F_I(s) = \frac{1}{\ell s} E_I(s), \quad (1.37)$$

$$E_C(s) = \frac{1}{cs} F_C(s), \quad (1.38)$$

$$F_\lambda(s) = \frac{\lambda}{s^m} E_\lambda(s), \quad (1.39)$$

$$E_I(s) = E_0(s) - E_C(s), \quad (1.40)$$

$$E_\lambda(s) = E_C(s), \quad (1.41)$$

$$F_C(s) = F_I(s) - F_\lambda(s). \quad (1.42)$$

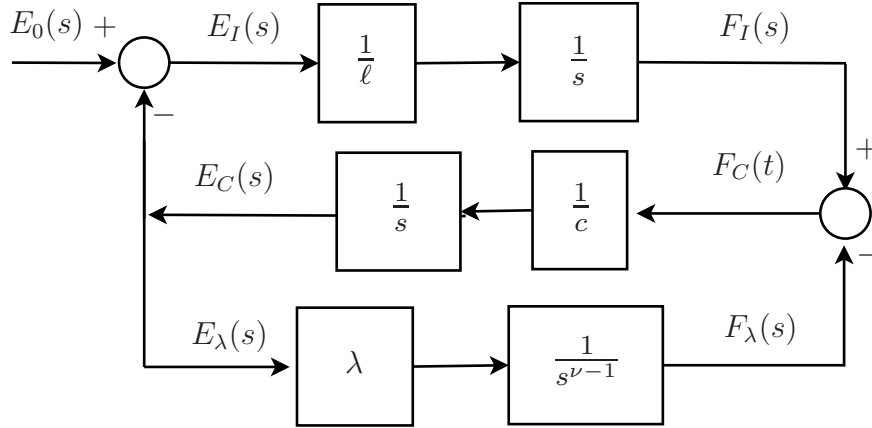


Fig. 1.12. Diagramme causal d'un système non entier du deuxième ordre avec  $\nu \in [1, 2]$ .

Le diagramme causal issu du système d'équations (1.37)-(1.42) est donné sur la Fig. 1.12.

La fonction de transfert  $\frac{E_c(s)}{E_0(s)}$  obtenue est donnée par

$$\frac{E_c(s)}{E_0(s)} = \frac{1}{cls^2 + \ell\lambda s^{1-m} + 1} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{\tilde{\nu}} + 1}, \quad (1.43)$$

et elle correspond à  $G(s)$  (1.26) avec :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\ell c}}, \quad (1.44)$$

$$\zeta = \frac{\lambda}{2\sqrt{c^{\tilde{\nu}}\ell^{\tilde{\nu}-2}}}, \quad (1.45)$$

$$\tilde{\nu} = 1 - m = 2 - \nu, \quad (1.46)$$

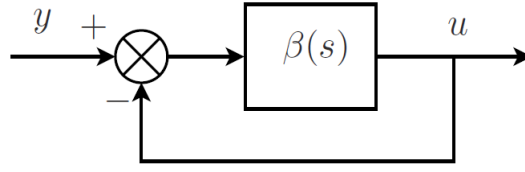
où  $\tilde{\nu} \in [0, 1]$ .

Le but principal de ce chapitre est d'étudier les conditions de stabilité et de résonance des systèmes non entiers du deuxième ordre (1.26) non commensurable pour tout  $\nu \in (0, 2)$ .

## 1.4.2 Condition de stabilité

Comme le système (1.26) n'est pas commensurable, il n'est pas possible de conclure sur sa stabilité en utilisant le théorème de Matignon (1998a). Un autre critère de stabilité est donc introduit.

**Théorème 1.4.1** *Le système décrit par (1.26) avec  $\nu \in [0, 2]$  est stable si et seulement si  $\zeta > 0$ .*


 Fig. 1.13. Interprétation de  $G(s)$  (1.48) comme étant un système bouclé

**Démonstration.** La stabilité du système est analysée en utilisant le critère de Nyquist simplifié appliqué sur le lieu de Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte  $\beta(j\omega)$ . Le critère de Nyquist simplifié stipule qu’un système à minimum de phase est stable si et seulement si le lieu de Nichols de  $\beta(j\omega)$  se trouve à droite du point critique ( $0$  dB,  $-180^\circ$ ) lorsqu’il est parcouru des basses vers les hautes fréquences. En outre, il est prouvé que lorsqu’un système est stable,

$$-180^\circ < \arg(\beta(j\omega)) < 0^\circ, \quad (1.47)$$

pour tous  $\omega > 0$ .

Pour l’analyse dans le domaine fréquentiel, le système décrit par (1.26) peut être interprété comme étant un système bouclé (voir Fig. 1.13) :

$$G(j\omega) = \frac{\beta(j\omega)}{1 + \beta(j\omega)} = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^\nu + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad (1.48)$$

où  $\beta(j\omega)$  représente la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$\beta(j\omega) = \frac{1}{2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^\nu + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}. \quad (1.49)$$

Le calcul de la marge de gain nécessite alors la résolution de :

$$\arg(\beta(j\omega)) = -180^\circ. \quad (1.50)$$

En posant  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ , la pulsation normalisée, on obtient, à partir de (1.49) et (1.50) :

$$\text{si } 0 < \Omega^{2-\nu} < 2\zeta \cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right), \text{ alors } -\arctan\left(\frac{2\zeta\Omega^\nu \sin\left(\nu\frac{\pi}{2}\right)}{2\zeta\Omega^\nu \cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) - \Omega^2}\right) = -\pi, \quad (1.51)$$

$$\text{si } \Omega^{2-\nu} > 2\zeta \cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right), \text{ alors } -\pi - \arctan\left(\frac{2\zeta\Omega^\nu \sin\left(\nu\frac{\pi}{2}\right)}{2\zeta\Omega^\nu \cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) - \Omega^2}\right) = -\pi. \quad (1.52)$$

Les équations (1.51) et (1.52) sont satisfaites si et seulement si :

$$2\zeta\Omega^\nu \sin\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ et} \quad (1.53)$$

$$2\zeta\Omega^\nu \cos\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) - \Omega^2 \neq 0. \quad (1.54)$$

La solution de (1.53) et (1.54) est  $\zeta = 0$  ou  $\sin(\nu\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \nu = 0$  ou  $\nu = 2$ , quelle que soit la pulsation  $\Omega$ . Par conséquent, pour ces valeurs triviales le lieu de Nichols de (1.49) correspond à l'axe vertical :  $\arg(\beta(j\omega)) = -180^\circ \forall \omega \in \mathbb{R}$ .

Quand  $\zeta \neq 0$  et  $\nu \notin \{0, 2\}$ , le lieu de Nichols de (1.49) ne traverse pas l'axe vertical  $\arg(\beta(j\omega)) = -180^\circ$ . Il reste à vérifier si le lieu se trouve à la droite du point critique pour que le système soit stable.

Ainsi, les inégalités (1.47) doivent être satisfaites pour que le système soit stable, ce qui est équivalent à :

$$\mathcal{I}m(\beta(j\omega)) < 0 \iff \mathcal{I}m\left(\frac{1}{2\zeta\Omega^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) - \Omega^2 + j2\zeta\Omega^\nu \sin(\nu\frac{\pi}{2})}\right) < 0, \quad (1.55)$$

d'où finalement :

$$\zeta \Omega^\nu \sin(\nu\frac{\pi}{2}) > 0. \quad (1.56)$$

Avec  $\Omega \in \mathbb{R}^+$  et  $\nu \in [0, 2] \Rightarrow \sin(\nu\frac{\pi}{2}) \geq 0$ , ce qui implique que  $\zeta$  doit être positif pour que le système soit stable. Ce résultat complète la démonstration.  $\square$

Il est vérifié numériquement sur les Fig. 1.14 et 1.15, pour certaines valeurs de  $\zeta$ , que la zone de stabilité correspond à  $\zeta \in \mathbb{R}^+$ . Les diagrammes de Bode de  $G(j\omega)$  (1.48) sont tracés sur les Fig. 1.16 et 1.17. Pour certaines valeurs de  $\nu < 1$  l'amplitude de résonance est négative en dB.

### 1.4.3 Condition de résonance

Le gain en dB,  $|G(j\omega)|_{dB}$ , du système (1.26) est donné par :

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \left( \left[ (1 - \Omega^2)(1 - \Omega^2 + 4\zeta\Omega^\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2})) + 4\zeta^2\Omega^{2\nu} \right]^{\frac{1}{2}} \right). \quad (1.57)$$

Un système décrit par  $G(s)$  est résonant, si  $|G(j\omega)|_{dB}$  possède au moins un maximum à une pulsation normalisée positive. Les pulsations de résonance normalisées peuvent être obtenues par la résolution de l'équation non linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d|G(j\Omega)|_{dB}}{d\Omega} = 0 \Rightarrow & -4\Omega + 4\Omega^3 - 4\Omega^{\nu+1}\zeta \cos(\nu\frac{\pi}{2})(2 + \nu) \\ & + 4\Omega^{\nu-1}\zeta\nu \cos(\nu\frac{\pi}{2}) + 8\zeta^2\nu\Omega^{2\nu-1} = 0. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Parmi toutes les solutions mathématiques de l'équation (1.58), les solutions qui correspondent à la pulsation de résonance  $\Omega_{res}$  doivent satisfaire la condition suivante :

$$\Omega_{res} = \max_{\Omega} \{G(j\Omega)\}, \quad \forall \Omega > 0. \quad (1.59)$$

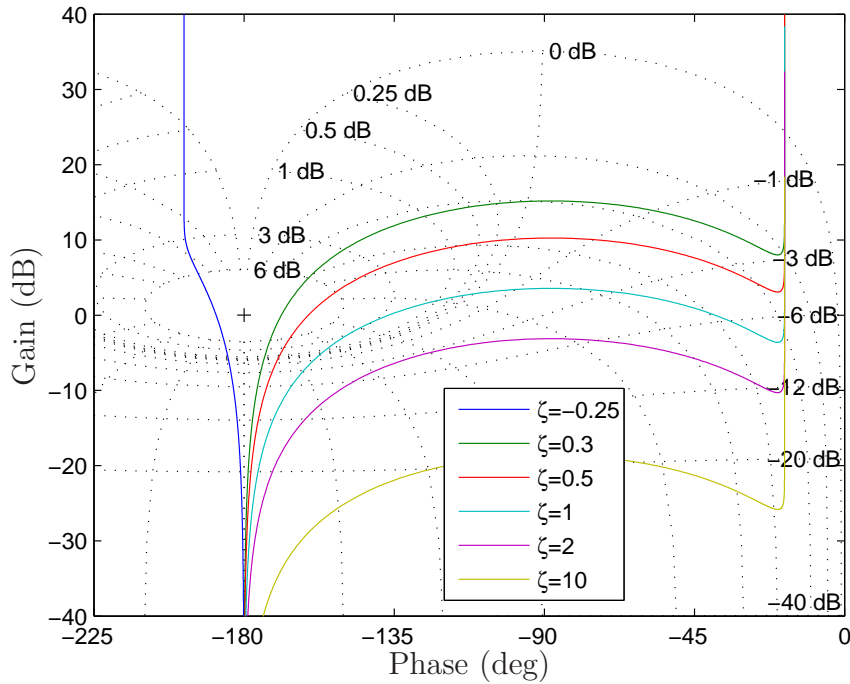


Fig. 1.14. Lieux de Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte (1.49) avec  $\nu = 0.2$  et différentes valeurs de  $\zeta$ . Quand  $\zeta = -0.25$ , les lieux de Nichols se trouvent à gauche du point critique : le système en boucle fermée  $G(s)$  (1.48) est alors instable. Pour toutes les autres valeurs de  $\zeta > 0$ , les lieux de Nichols se trouvent à droite et le système en boucle fermée  $G(s)$  est stable

Pour  $\nu = 1$ , l'équation (1.58) est réduite à  $2\zeta^2 + \Omega^2 - 1 = 0$ , dont la solution amène à la pulsation de résonance bien connue  $\Omega_{res} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^+$ , à condition que  $\zeta < \sqrt{2}/2$ .

Il est impossible de résoudre analytiquement l'équation non linéaire (1.58) dans le cas général, pour  $\nu \in [0, 2]$ . Désormais, une solution numérique est obtenue pour différentes combinaisons de  $\nu$  et  $\zeta$ . L'amplitude de résonance normalisée  $|\frac{G(j\Omega)}{G(j0)}|_{dB}$  est tracée sur la Fig. 1.18. Trois régions peuvent être distinguées :

- une région de non résonance, numérotée 0 ;
- une région de résonance, numérotée 1, avec une amplitude de résonance positive en dB ;
- une région de résonance, numérotée 2, avec une amplitude de résonance négative en dB.

Trois abaques sont donnés permettant de déterminer le facteur de pseudo-amortissement  $\zeta$  et l'ordre de dérivation  $\nu$  pour

- une pulsation de résonance normalisée souhaitée sur la Fig. 1.19,
- pour un gain normalisé souhaité sur la Fig. 1.20,

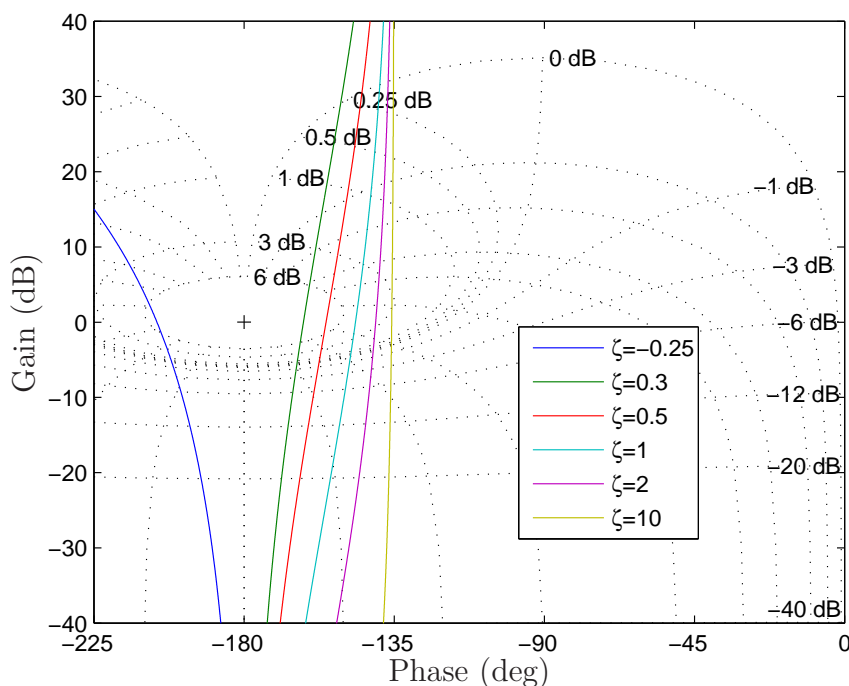


Fig. 1.15. Lieux de Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte (1.49) avec  $\nu = 1.5$  et différentes valeurs de  $\zeta$ . Quand  $\zeta = -0.25$ , le lieu de Nichols se trouve à gauche du point critique : le système en boucle fermée  $G(s)$  (1.48) est alors instable. Pour toutes les autres valeurs de  $\zeta > 0$ , les lieux de Nichols se trouvent à droite et le système en boucle fermée  $G(s)$  est stable

— pour une phase souhaitée sur la Fig. 1.21.

Deux exemples numériques illustrent au paragraphe 1.4.5 comment utiliser ces abaques.

#### 1.4.4 Lieux des pôles

Les lieux des pôles du système (1.26) sont déterminés à partir des lieux des racines du polynôme caractéristique  $P(s)$  suivant :

$$P(s) = 1 + 2\zeta \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^\nu + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2, \quad (1.60)$$

$$P(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 2\zeta\omega_0^{2-\nu}s^\nu + \omega_0^2 = 0. \quad (1.61)$$

Selon les valeurs de  $\nu$ , les cas suivants sont distingués :

- Si  $\nu = 0$ , le système (1.26) possède deux pôles conjugués imaginaires purs. La position des deux pôles dans le plan complexe ne dépend pas de la valeur de  $\zeta \in \mathbb{R}^+$ . Le système présente un caractère oscillatoire non amorti.

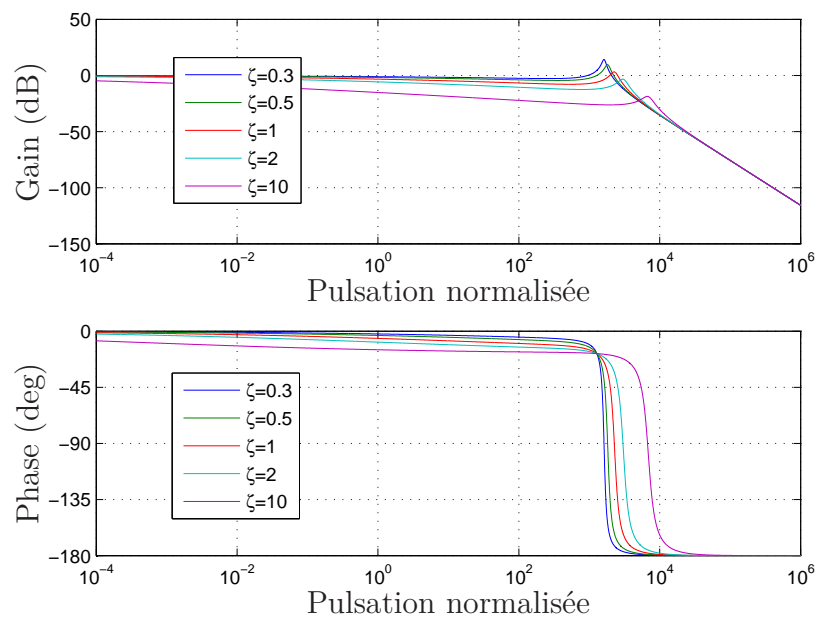


Fig. 1.16. Diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée  $G(j\omega)$  (1.48) avec  $\nu = 0.2$  et différentes valeurs de  $\zeta$

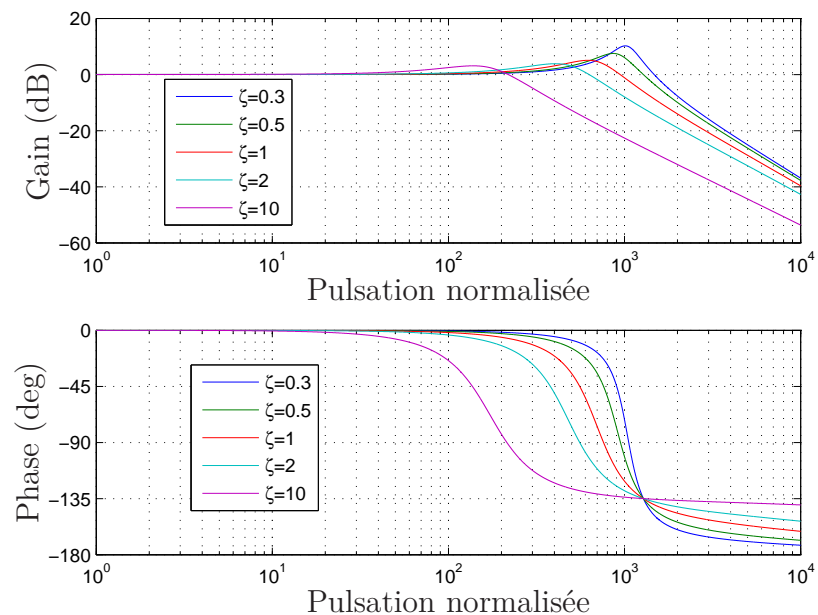


Fig. 1.17. Diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée  $G(j\omega)$  (1.48) avec  $\nu = 1.5$  et différentes valeurs de  $\zeta$



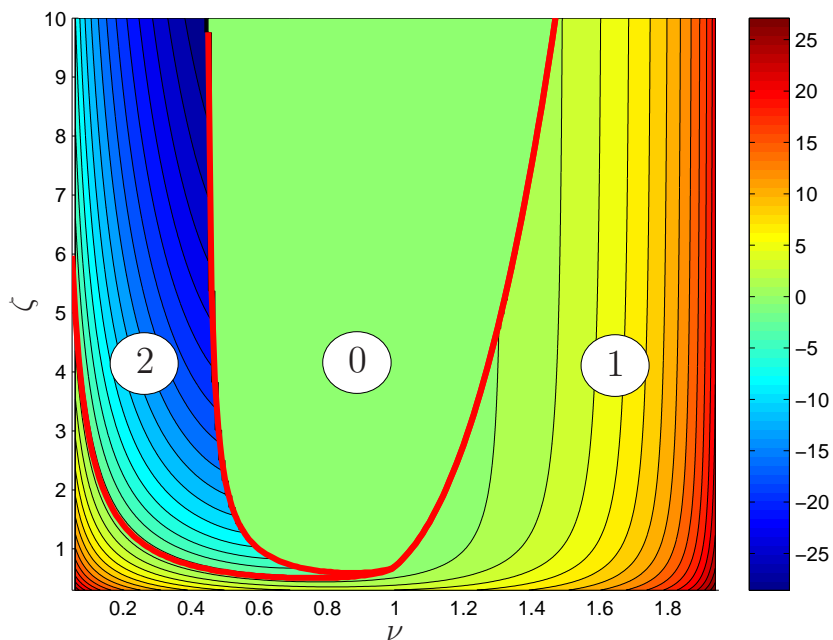


Fig. 1.18. Amplitude de résonance normalisée en dB :  $\Omega_{res} \in [10^{-1}, 10^1]$  identifiées délimitées par des trois zones rouges : 0 - aucune résonance, 1 - une résonance ayant une amplitude positive en dB et 2 - une résonance ayant une amplitude négative en dB

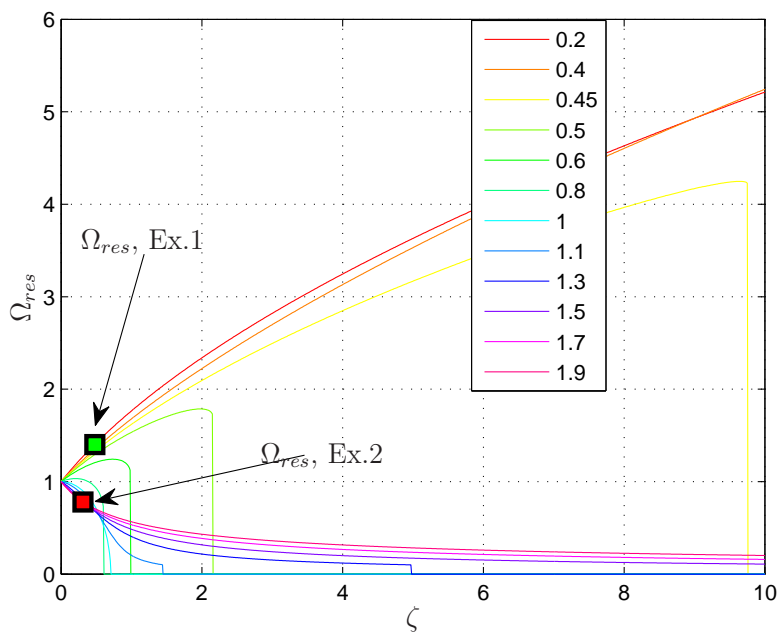


Fig. 1.19. Abaque : pulsation de résonance normalisée de (1.26) en fonction de  $\zeta$  pour différentes valeurs de  $\nu$

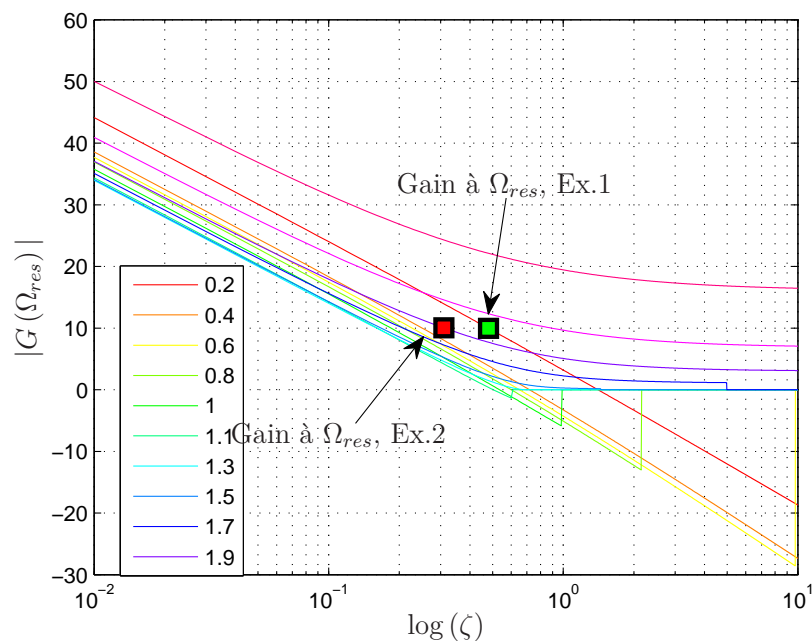


Fig. 1.20. Abaque : amplitude de résonance de (1.26) en fonction de  $\zeta$  pour différentes valeurs de  $\nu$  sur une échelle logarithmique

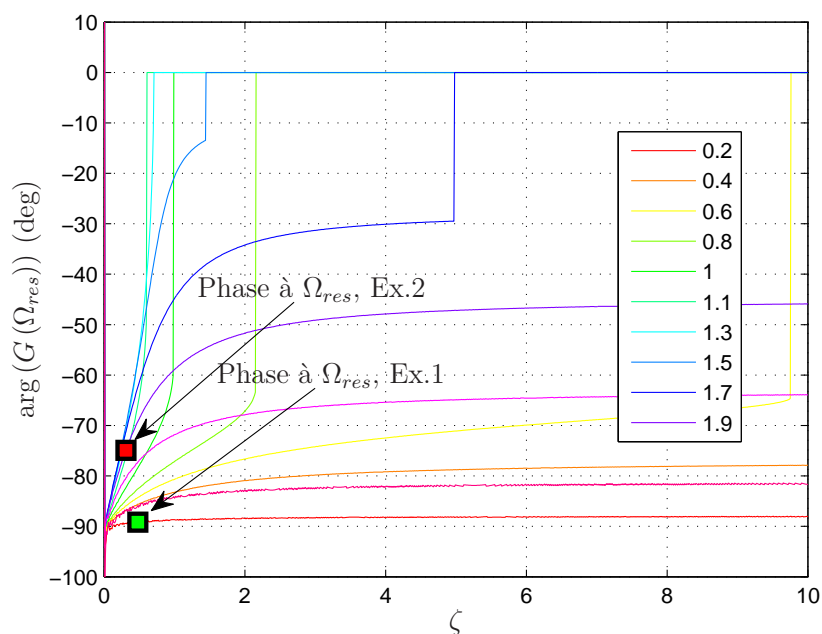


Fig. 1.21. Abaque : phase de (1.26) à la pulsation de résonance en fonction de  $\zeta$  pour différentes valeurs de  $\nu$

- Si  $\nu = 1$ , La position des deux pôles dans le plan complexe dépend de la valeur de  $\zeta \in \mathbb{R}^+$ .
  - Si  $\zeta > 1$ , le polynôme possède deux racines réelles distinctes situées sur le demi-axe réel négatif.
  - Si  $\zeta = 1$ , le polynôme possède deux racines réelles confondues situées sur le demi-axe réel négatif.
  - Si  $0 < \zeta < 1$ , le système possède deux pôles complexes conjugués situés dans le demi-plan gauche.
  - Si  $\zeta = 0$ , le système possède deux pôles complexes conjugués situés sur l'axe imaginaire.
- Si  $\nu \neq 0$  et  $\nu \neq 1$ , les pôles du système ne peuvent pas être calculés analytiquement. Ils le sont numériquement dans le reste de ce paragraphe.

Pour faciliter la recherche des lieux des racines du polynôme caractéristique, deux racines complexes conjuguées seront recherchées sous la forme polaire :

$$\begin{cases} s = r e^{j\theta} = r \cos \theta + jr \sin \theta \\ s^2 = r^2 e^{j2\theta} = r^2 \cos 2\theta + jr^2 \sin 2\theta \\ s^\nu = r^\nu e^{j\nu\theta} = r^\nu \cos \nu\theta + jr^\nu \sin \nu\theta \end{cases} \quad (1.62)$$

Tous les arguments de  $s$  sont limités à  $|\arg(s)| < \pi$  ; pour que la fonction  $s^\nu$  soit holomorphe, une coupure du plan complexe est réalisée le long de  $\mathbb{R} \leq 0$ , avec comme limitation  $-\pi < \arg(s) < \pi$ .

La combinaison de (1.62) et (1.61) donne les parties réelle et imaginaire séparées :

$$(r^2 \cos 2\theta + 2\zeta \omega_0^{2-\nu} r^\nu \cos \nu\theta + \omega_0^2) + j(r^2 \sin 2\theta + 2\zeta \omega_0^{2-\nu} r^\nu \sin \nu\theta) = 0. \quad (1.63)$$

La solution de (1.61) doit satisfaire :

$$r = \omega_0 \sqrt{\frac{\sin \nu\theta}{\sin(2-\nu)\theta}}, \quad \theta \neq 0, \quad (1.64)$$

$$\zeta = \pm \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{(\sin(2-\nu)\theta)^{2-\nu} (\sin \nu\theta)^\nu}}, \quad \theta \neq 0. \quad (1.65)$$

Les solutions analytiques de (1.61) en termes de coordonnées polaires  $r e^{j\theta}$  sont difficiles à obtenir dans le cas général. Par conséquent, les solutions numériques sont tracées

- sur la Fig. 1.22 pour  $\nu = (0.25; 0.5; 0.75; 1)$ ,
- sur la Fig. 1.23 pour  $\nu \in [0.8, 1]$ ,
- sur la Fig. 1.24 pour  $\nu = (0.99; 1; 1.01)$ .

Pour de grandes valeurs de  $\zeta$ , l'effet de migration des pôles du système (1.61) vers  $-\infty$  a lieu, comme illustré sur la Fig. 1.25.

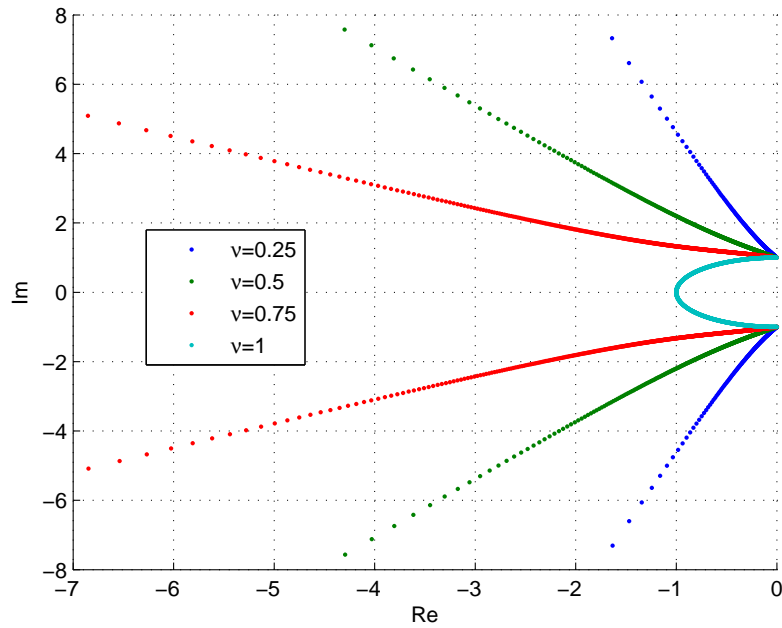


Fig. 1.22. Lieux des racines du système (1.26) pour l’ordre de dérivation  $\nu = 0.25$  (bleu), 0.5 (vert), 0.75 (rouge), 1 (cyan) et  $\zeta \in [0, \infty]$

**Remarque** Les lieux des pôles du système non entier du deuxième ordre (1.26) présentent une discontinuité pour  $\nu = 1$  (voir 1.24). En effet, lorsque  $\nu = 1$ , le système a un double pôle situé à  $\nu = 1$  et lorsque  $\nu \neq 1$ , le système a deux pôles complexes conjugués dont les lieux sont tracés sur la Fig. 1.24 pour différentes valeurs de  $\zeta$ . Même pour des valeurs très faibles de  $\epsilon$ ,  $(\nu - \epsilon)$  présente une discontinuité numérique pour  $\nu = 1$ .

## 1.4.5 Exemples numériques

Deux exemples montrent comment utiliser les abaques fournis pour choisir les paramètres d’une fonction de transfert non entière du deuxième ordre avec une résonance prescrite.

### 1.4.5.1 Exemple 1

Soit une fonction de transfert (1.26) avec un ordre non entier  $\nu = 0.2$ , une amplitude de résonance normalisée  $|G(j\omega_{res})|_{dB} = 10$  dB, une pulsation de résonance à  $\omega_{res} = 10^3$  rad/s, et un gain statique de 0 dB. A partir de la Fig. 1.20 la valeur correspondante du facteur de pseudo-amortisseur est déduite :  $\zeta = 0.5$  (plus précisément  $\zeta = 0.48$ ). En utilisant les Fig. 1.19 et 1.21, une valeur de la pulsation de résonance normalisée peut être obtenue,  $\Omega_{res} = 1.4$ , ainsi qu’un argument correspondant,  $\arg(G(j\Omega_{res})) = -89^\circ$ . À partir

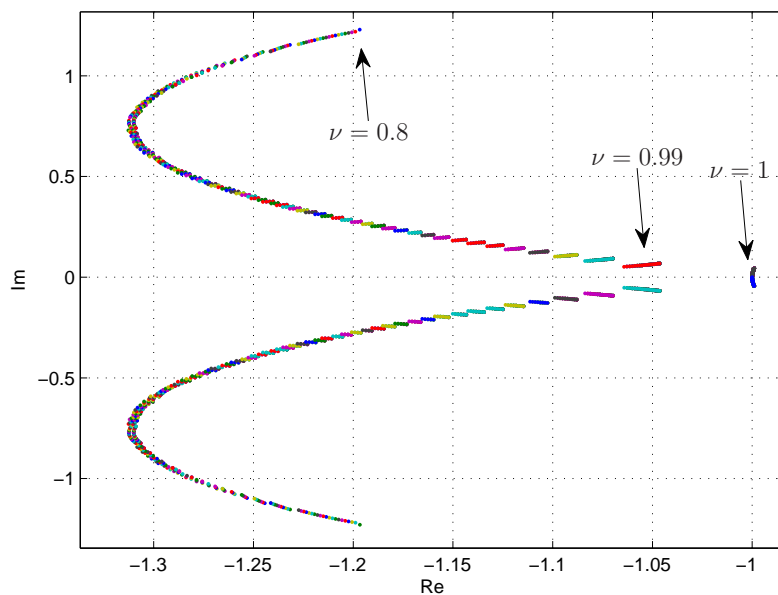


Fig. 1.23. Lieux de racines en fonction de l'ordre de dérivation  $\nu \in [0.8, 1]$  (avec un pas de  $10^{-3}$ ) et pour  $\zeta = 1$

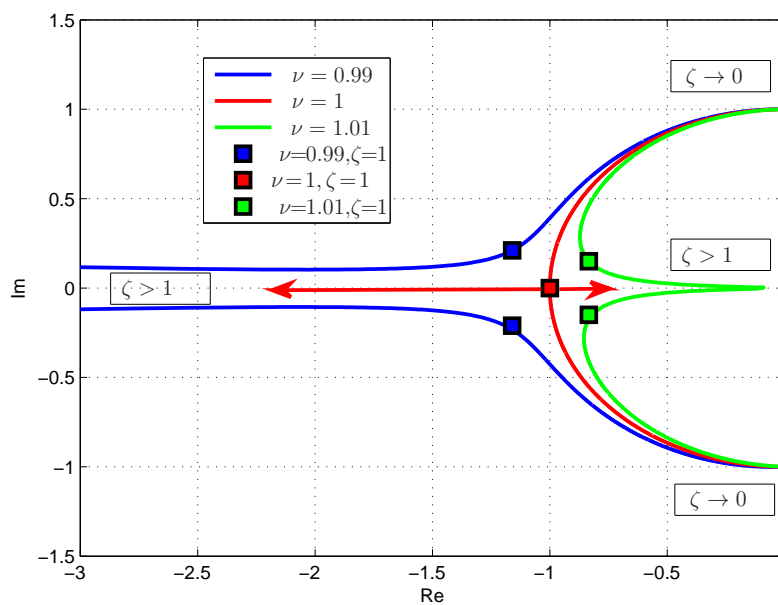
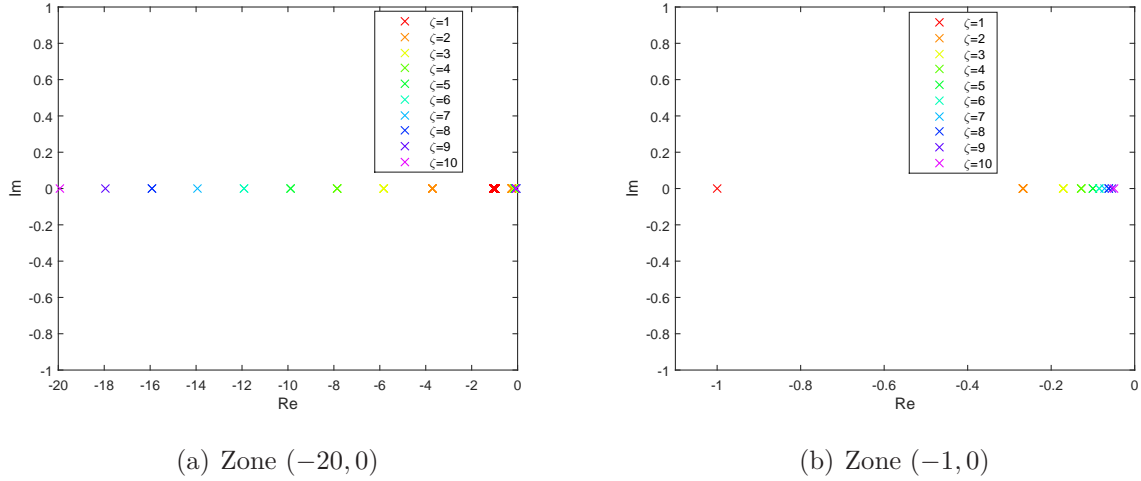


Fig. 1.24. Lieux des pôles du système (1.26) pour  $\nu = 0.99$ ,  $\nu = 1$ , et  $\nu = 1.01$  et  $\zeta \in [0, \infty]$


 Fig. 1.25. Lieux des pôles du système (1.26) pour  $\nu = 1$  et  $\zeta > 1$ 

de  $\Omega_{res}$ , une pulsation de résonance naturelle peut être calculée de la façon suivante :  $\omega_0 = \omega_{res}/\Omega_{res} = 714$  rad/s. La fonction de transfert obtenue est alors :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{714}\right)^2 + 2 \times 0.48 \left(\frac{s}{714}\right)^{0.2} + 1}. \quad (1.66)$$

Les diagrammes de Bode de (1.66) sont tracés sur la Fig.1.26 qui confirme que les spécifications de l’exemple ont été atteintes. L’équation (1.58) se réduit alors à :

$$-1 + \Omega^2 - \Omega^{0.2} + 0.09\Omega^{-1.8} + 0.09\Omega^{-1.6} = 0. \quad (1.67)$$

Elle possède deux solutions à valeurs réelles strictement positives à  $\Omega_1 = 0.28$  et  $\Omega_2 = 1.4$ . La première solution correspond au minimum de  $G(s)$  et la seconde à la pulsation de résonance de  $G(s)$ . La réponse indicielle est tracée sur la Fig. 1.27 à deux intervalles de temps distincts. Deux types de dynamiques apparaissent : une dominante (la plus lente), et une rapide, correspondant à la résonance.

Les lieux des racines sont déterminés à partir du polynôme caractéristique suivant :

$$s^2 + 1.31 \times 10^5 s^{0.2} + 5.1 \times 10^5 = 0 \quad (1.68)$$

et  $s_{1,2} = 1010e^{\pm 1.65j}$ .

#### 1.4.5.2 Exemple 2

Soit une fonction de transfert (1.26), avec un ordre non entier  $\nu = 1.5$ , une amplitude de résonance normalisée  $|G(j\omega_{res})|_{dB} = 10$  dB, une pulsation de résonance à  $\omega_{res} = 10^3$  rad/s, et un gain statique de 0 dB. À partir de la Fig. 1.20 une valeur correspondante

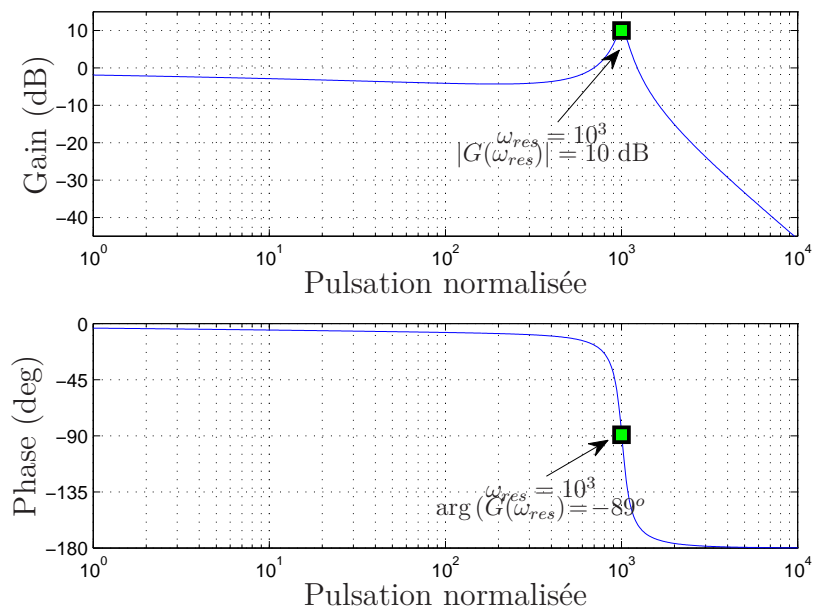


Fig. 1.26. Diagrammes de Bode de  $G(j\omega)$  avec  $\zeta = 0.48$  et  $\nu = 0.2$

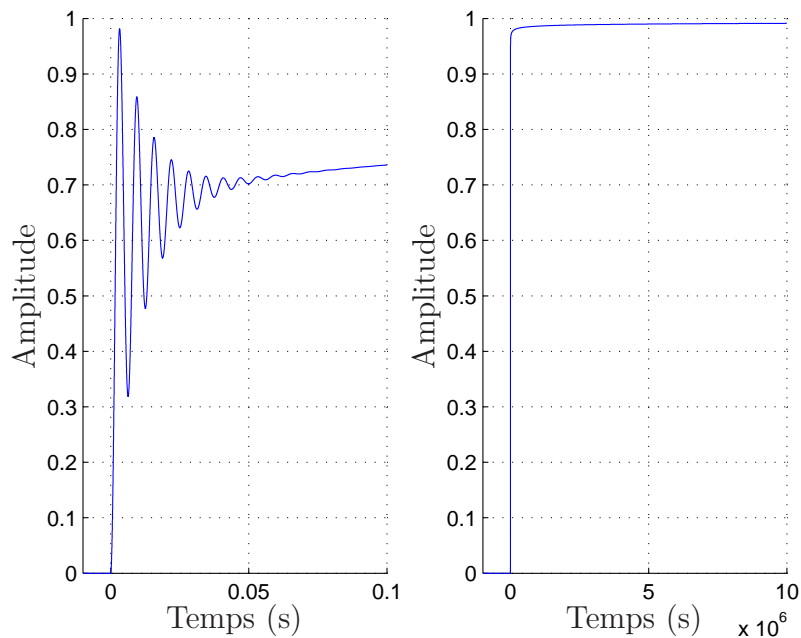
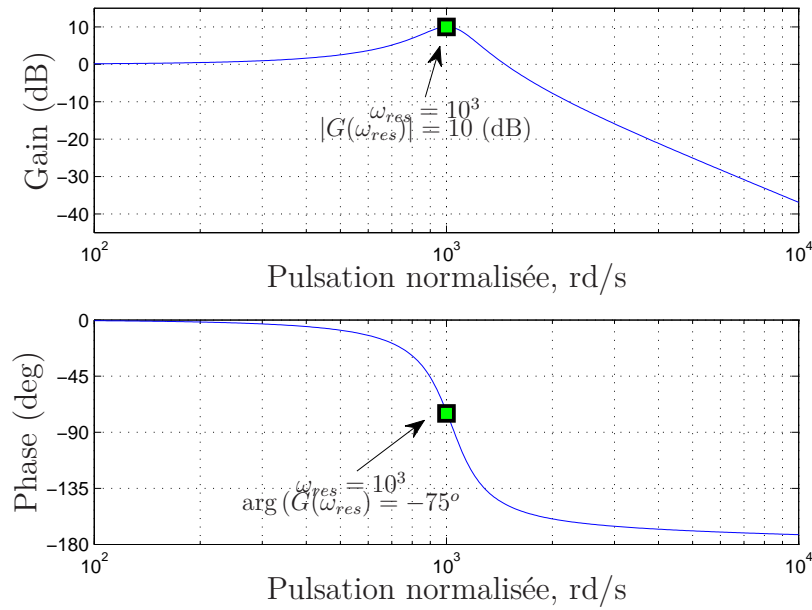


Fig. 1.27. Réponse indicielle de  $G(s)$  avec  $\zeta = 0.48$  et  $\nu = 0.2$ , pour des intervalles de temps différents


 Fig. 1.28. Diagrammes de Bode de  $G(j\omega)$  avec  $\zeta = 0.31$  et  $\nu = 1.5$ .

du facteur de pseudo-amortissement est  $\zeta = 0.3$  (plus précisément  $\zeta = 0.31$ ). En utilisant les Fig. 1.19 et 1.21, la pulsation de résonance normalisée est obtenue,  $\Omega_{res} = 0.78$ , ainsi que l’argument correspondant,  $\arg(G(j\Omega_{res})) = -75^\circ$ . À partir de  $\Omega_{res}$ , la pulsation de résonance naturelle est calculée :  $\omega_0 = \omega_{res}/\Omega_{res} = 1280$  rad/s. La fonction de transfert obtenue est alors :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{1280}\right)^2 + 2 \times 0.31 \left(\frac{s}{1280}\right)^{1.5} + 1}. \quad (1.69)$$

Les diagrammes de Bode de (1.69) sont tracés sur la Fig. 1.28. Ils répondent aux spécifications de l’exemple. L’équation (1.58) se réduit à :

$$-1 + \Omega^2 + 0.77\Omega^{1.5} + 0.29\Omega - 0.33\Omega^{-0.5} = 0. \quad (1.70)$$

L’équation (1.70) n’a qu’une solution à valeur réelle strictement positive à  $\Omega = 0.78$ , qui correspond à la résonance de  $G(s)$ . La réponse indicielle est tracée sur la Fig. 1.29.

Les lieux des racines sont déterminés à partir du polynôme caractéristique suivant :

$$s^2 + 22.2 s^{1.5} + 1.64 \times 10^6 = 0 \quad (1.71)$$

et  $s_{1,2} = 1032.4e^{\pm 1.75j}$ .

La réponse indicielle, tracée sur la Fig. 1.29, présente principalement un comportement oscillatoire dû à la résonance.



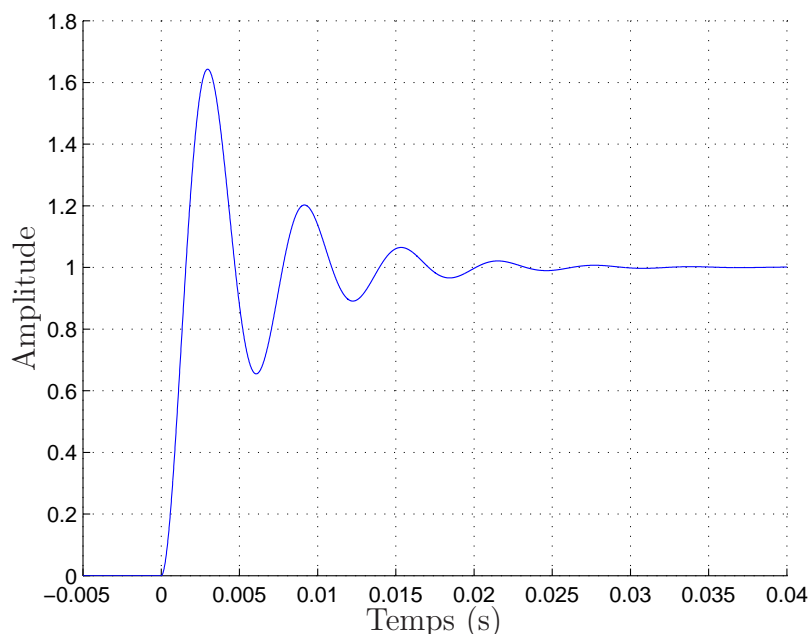


Fig. 1.29. Réponse indicielle de  $G(s)$  avec  $\zeta = 0.31$  et  $\nu = 1.5$ .

## 1.5 Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, les définitions de l'intégrale et de la dérivée non entières ont d'abord été rappelées. Deux formes de représentations de ces systèmes ont été décrites : une pseudo-représentation d'état et une fonction de transfert. Dans la deuxième partie de ce chapitre au paragraphe 1.4, les fonctions de transfert du deuxième ordre sont étudiées. Les motivations pour l'étude de tels systèmes sont décrites premièrement en ingénierie électrique et mécanique. Ensuite, les résultats principaux du travail sont présentés. Les conditions de stabilité et résonance sont établies en termes de facteur de pseudo-amortissement et de l'ordre de dérivation. En outre, trois abaques sont donnés permettant de déterminer le facteur de pseudo-amortissement et l'ordre de dérivation pour un gain normalisé souhaité à la résonance, une phase souhaitée à la résonance, et une pulsation normalisée de résonance souhaitée. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans la revue *Journal of Vibration and Control* (Ivanova, Moreau et Malti, 2016).



# Chapitre 2

## Simulation des systèmes multi variables non entiers dans le domaine temporel

### Contents

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction : état de l'art . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>2.2</b>	<b>Approximation d'Oustaloup d'un intégrateur non entier sous la forme d'une fonction de transfert . . . . .</b>	<b>41</b>
2.2.1	Avec un gain constant en dehors de la bande de fréquence . . .	41
2.2.2	Avec un intégrateur en dehors de la bande de fréquence (variante de Trigeassou) . . . . .	42
<b>2.3</b>	<b>Approximation d'Oustaloup d'un intégrateur non entier sous la forme d'une représentation d'état . . . . .</b>	<b>44</b>
2.3.1	Avec un gain constant en dehors de la bande de fréquence, pour $0 < \nu < 1$ . . . . .	44
2.3.2	Avec un intégrateur en dehors de la bande de fréquence, pour $0 < \nu < 1$ . . . . .	45
2.3.3	Avec un gain constant en dehors de la bande de fréquence, pour $\nu > 1$ . . . . .	46
2.3.4	Avec un intégrateur en dehors de la bande de fréquence, pour $\nu > 1$ . . . . .	48
<b>2.4</b>	<b>Représentation d'état de l'approximation d'un système non entier . . . . .</b>	<b>49</b>
2.4.1	Cas commensurable . . . . .	49
2.4.2	Cas non commensurable . . . . .	50
2.4.3	Exemple 2 - Exemple d'application à la diffusion thermique . .	53

**2.5 Conclusion . . . . . 58**

---

## 2.1 Introduction : état de l’art

La simulation de systèmes non entiers dans le domaine temporel est une tâche non triviale. Les systèmes non entiers ne peuvent pas être simulés directement et certains traitements sont nécessaires. Plusieurs approches existent. Dans (Aoun, Malti et al., 2004), les méthodes de simulation de systèmes non entiers dans le domaine temporel sont divisées en trois groupes principaux, basés sur l’approximation :

- de l’expression analytique de la sortie sur la base des fonctions de Mittag-Leffler, définies comme des séries infinies ;
- du modèle non entier par un modèle rationnel à TD (temps discret) ;
- du modèle non entier par un modèle rationnel à TC (temps continu).

Le premier groupe des méthodes se réfère souvent aux solutions des équations différentielles non entières. Dans (Podlubny, 1999b ; Orsingher et Beghin, 2004), une fonction de Mittag-Leffler est utilisée pour obtenir une réponse indicelle d’une fonction de transfert non entière. Dans (Oustaloup, 1995), la transformée de Laplace inverse d’un système non entier est décrite et le résultat est calculé comme une décomposition de deux modes : un mode exponentiel et un multimode apériodique. D’autres solutions existent, comme celles basées sur les fonctions de Fox (Huang et F. Liu, 2004), les fonctions de Green (Schneider et Wyss, 1989), les fonctions de Wright (Mainardi, 1996), les techniques de séparation de variables (J. Chen, F. Liu et Anh, 2007), etc. Néanmoins, le calcul des sorties des modèles non entiers en utilisant ces méthodes est très difficile, car le calcul d’une expression analytique complexe qui implique des séries infinies est toujours nécessaire.

Les méthodes basées sur l’approximation d’un modèle non entier par un modèle rationnel dans un contexte à TD consistent à remplacer l’opérateur de Laplace non entier par une certaine approximation  $w(z)$  à TD (Aoun, Malti et al., 2004). Parmi les techniques bien connues, le développement en série de puissance (angl. Power Series Expansion (PSE)) est décrit par Vinagre et al. (2000) et comparé à l’approximation d’Oustaloup, à l’expansion non entière continue (angl. General Continued Fraction Expansions (CFE) method) et d’autres. Dans (Aoun, Amairi et M.N., 2011), différentes règles d’approximation de l’opérateur de dérivation sont comparées les unes aux autres et à la définition de Grünwald. Dans (Hwang, Leu et Tsay, 2002), les auteurs proposent une méthode basée sur l’expansion de la série B-spline et la comparent aux méthodes d’approximation de Grünwald-Letnikov et Podlubny (Podlubny, 1999b). Dans (Rapaic, Pisano et Jelicic, 2012), une approximation trapézoïdale d’un intégrateur non entier est proposée qui peut être étendue au cas de systèmes non commensurables. D’autres méthodes basées sur les approximations d’Euler, de Tustin, de Simpson ou d’Al-Alaoui peuvent également être trouvées dans (Vinagre et al., 2000 ; Al-Alaoui, 1994 ; Tabak, 1971). L’inconvénient ma-

jeur de cette classe de méthodes est un ordre d'approximation très élevé. L'ordre obtenu des modèles à TD souvent augmente avec le nombre d'échantillons ce qui rend les modèles inutilisables pour des simulations en temps réel.

Les méthodes basées sur l'approximation à TC des systèmes non entiers consistent à remplacer de l'opérateur de Laplace non entier par une approximation rationnelle. Elles sont proposées dans un cas d'ordre commensurable par Oustaloup (1995), Trigeassou et al. (1999), Poinot et Trigeassou (2003), Krajewski et Viaro (2014) et Tavazoei et Haeri (2010) et dans un cas d'ordre non commensurable par Krajewski et Viaro (2014), Mansouri, Bettayeb et Djennoune (2010), Mansouri, Bettayeb et Djennoune (2011) et Bouafoura, Moussi et Braiek (2011). Le cas d'un système SISO (angl. Single-Input Single-Output) est traité par Trigeassou et al. (1999), Poinot et Trigeassou (2003), Krajewski et Viaro (2014), Tavazoei et Haeri (2010) et Bouafoura, Moussi et Braiek (2011) et MIMO (angl. multiple-input multiple-output) par Mansouri, Bettayeb et Djennoune (2010), Mansouri, Bettayeb et Djennoune (2011) et Khanra, Pal et Biswas (2013). Cette classe de méthodes de simulation présente un bon compromis entre le comportement non entier souhaité sur l'intervalle de fréquences donné et la complexité du calcul.

Dans ce chapitre, une méthode de simulation de systèmes MIMO non entiers à TC est développée. Elle est basée sur deux approximations d'intégrateurs non entiers présentés sous la forme de représentations d'état : l'approximation d'Oustaloup et la variante de Trigeassou. En outre, cette méthode peut être appliquée aux systèmes commensurables et non commensurables, quel que soit l'ordre de dérivation. Ce travail est basé principalement sur les travaux de (Oustaloup, 1995 ; Trigeassou et al., 1999 ; Poinot et Trigeassou, 2003), où une représentation d'état d'un opérateur d'intégration est utilisée pour construire un modèle d'état d'un système SISO non entier avec un ordre de dérivation fixé sur l'intervalle  $(0, 1)$ .

En plus de la méthode décrite par Mansouri, Bettayeb et Djennoune (2010) et Mansouri, Bettayeb et Djennoune (2011), le chapitre présent propose deux types d'approximations d'un intégrateur non entier : la première possède un gain constant en dehors de la bande de fréquences d'intérêt (connue comme l'approximation d'Oustaloup) et la seconde possède un intégrateur en dehors de la bande de fréquences d'intérêt (connue comme la variante de Trigeassou). Le choix de l'approximation a un impact direct sur la précision de la simulation. En effet, quand la partie non entière de l'ordre de dérivation,  $(\nu - \lfloor \nu \rfloor^1) \in (0, 1)$ , est proche de 0, il est préconisé d'utiliser la première approximation et lorsque la partie non entière de l'ordre de dérivation est proche de 1, c'est mieux d'utiliser la dernière. En outre, une combinaison des deux approximations peut être appliquée au

---

1.  $\lfloor \cdot \rfloor$  est la partie entière par défaut, « plancher »

même système pour obtenir des résultats plus précis.

Au paragraphe 2.2, l'approximation d'Oustaloup et la variante de Trigeassou sont décrites. Au paragraphe 2.3, les deux approximations sont présentées sous la forme d'une représentation d'état. Au paragraphe 2.4, il est montré comment approcher une pseudo-représentation d'état par une représentation d'état rationnelle dans le cas d'un système commensurable et non commensurable. La méthode est illustrée par un exemple numérique avec une réponse analytique connue et un exemple d'application dans la modélisation thermique d'un système non entier MIMO non commensurable au paragraphe 2.5. Enfin, les conclusions sont présentées au paragraphe 2.6.

La contribution principale de ce chapitre, à savoir la mise en place d'une méthode de simulation de systèmes MIMO non entiers à TC à partir de la représentation d'état, a donné lieu à une publication dans la revue internationale *Nonlinear Dynamics* (Ivanova, Malti et Moreau, 2016a).

## 2.2 Approximation d'Oustaloup d'un intégrateur non entier sous la forme d'une fonction de transfert

### 2.2.1 Avec un gain constant en dehors de la bande de fréquence

Oustaloup (1983) a proposé d'approcher un intégrateur non entier  $\mathcal{I}^\nu(s)$  avec  $0 < \nu < 1$  (de façon similaire un dérivateur) dans la bande de fréquence donnée  $[\omega_A \ \omega_B]$  par une distribution récursive de pôles et de zéros en ayant un gain constant en dehors de la bande de fréquence :

$$\mathcal{I}^\nu(s) = s^{-\nu}, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu(s) = \frac{1}{G_\nu} \left( \frac{1 + s/\omega_b}{1 + s/\omega_h} \right)^{-\nu}, \quad (2.2)$$

$${}^1_N\mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu(s) = \frac{1}{G_\nu} \prod_{i=1}^N \frac{1 + s/\omega_i}{1 + s/\omega'_i}, \quad (2.3)$$

où :

- ${}^1_N\mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu(s)$ , et notamment l'exposant 1, désigne l'approximation d'Oustaloup d'un intégrateur non entier en utilisant  $N$  cellules (ou  $N$  pôles et  $N$  zéros) ;
- $\omega_b < \omega_h$  sont choisis de telle sorte que  $\omega_b = \sigma^{-1}\omega_A$  et  $\omega_h = \sigma\omega_B$ ,  $\sigma$  est souvent fixé à 10 pour réduire les effets de bord ;
- $G_\nu$  est choisi pour obtenir un gain unitaire à la fréquence logarithmique inter-

médiaire  $\omega_u = \sqrt{\omega_b \omega_h}$  :

$$G_\nu = \left| \frac{1 + j \sqrt{\frac{\omega_h}{\omega_b}}}{1 + j \sqrt{\frac{\omega_b}{\omega_h}}} \right|^{-\nu} |j \sqrt{\omega_b \omega_h}|^\nu = \omega_b^\nu;$$

- $\omega'_i$  et  $\omega_i$  sont les pôles et les zéros respectivement,  $\omega'_1 = \omega_b$  et  $\omega_N = \omega_h$  définissent la bande de fréquence de l'approximation ;
- $N$  est le nombre de cellules (ou le nombre de pôles et de zéros) ;
- $\alpha, \eta$  sont deux paramètres récurrents tels que :

$$\omega_i = \alpha \omega'_i, \quad (2.4)$$

$$\omega'_{i+1} = \eta \omega_i, \quad (2.5)$$

$$\alpha = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{\nu}{N}}, \quad \eta = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{1-\nu}{N}};$$

- l'ordre de dérivation est donné par :

$$\nu = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha \eta)}.$$

L'expression (2.3) est appelée *approximation d'Oustaloup* d'un intégrateur d'ordre  $0 < \nu < 1$ . Si  $\nu > 1$ , l'approximation d'Oustaloup est formulée que pour la partie non entière de l'intégrateur :

$${}_N^1 \mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu (s) = s^{-[\nu]} \times {}_N^1 \mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^{\nu-[\nu]} = \frac{1}{s^{[\nu]}} \times \frac{1}{G_{\nu-[\nu]}} \prod_{i=1}^N \frac{1 + s/\omega_i}{1 + s/\omega'_i}. \quad (2.6)$$

Par exemple,  $\mathcal{I}^{0.8}(s)$  et  $\mathcal{I}^{1.8}(s)$  sont respectivement approchés par :

$${}_N^1 \mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^{0.8} (s) = \frac{1}{G_{0.8}} \prod_{i=1}^N \frac{1 + s/\omega_i}{1 + s/\omega'_i}, \quad (2.7)$$

$${}_N^1 \mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^{1.8} (s) = s^{-1} \times {}_N^1 \mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^{0.8} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{G_{0.8}} \prod_{i=1}^N \frac{1 + s/\omega_i}{1 + s/\omega'_i}. \quad (2.8)$$

Les diagrammes de Bode d'un intégrateur non entier  ${}_{10}^1 \mathcal{I}_{[10^{-3} \ 10^3]}^{0.75}(s)$  (2.3), avec un gain constant en dehors de la bande de fréquence, où  $\nu = 0.75$ ,  $N = 10$  et  $[\omega_A \ \omega_B] = [10^{-3} \ 10^3]$ , sont tracés en bleu sur la Fig. 2.1.

## 2.2.2 Avec un intégrateur en dehors de la bande de fréquence (variante de Trigeassou)

Trigeassou et al. (1999), Pointot et Trigeassou (2003) utilisent une autre variante de l'approximation d'Oustaloup qui consiste à avoir un intégrateur pur d'ordre 1 en dehors



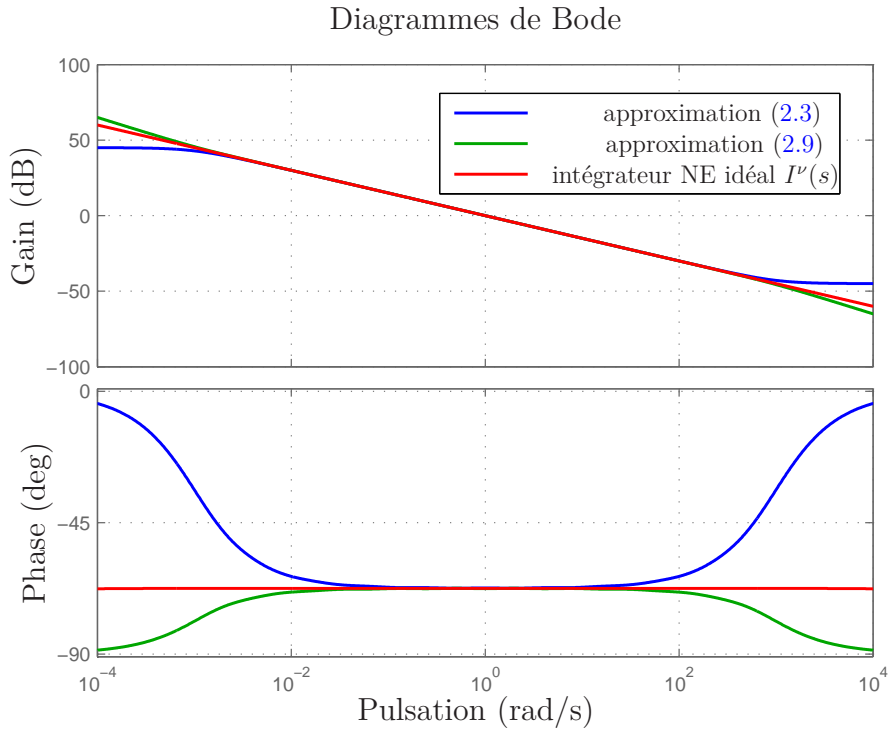


Fig. 2.1. Diagrammes de Bode d'un intégrateur idéal et d'un intégrateur non entier  $\frac{1}{10} \mathcal{I}_{[10^{-3} \ 10^3]}^{0.75}(s)$  (2.3), avec un gain constant en dehors de la bande de fréquence (approximation d'Oustaloup), et d'un intégrateur non entier  $\frac{2}{10} \mathcal{I}_{[10^{-3} \ 10^3]}^{0.75}(s)$  (2.9), avec un intégrateur en dehors de la bande de fréquence (variante de Trigeassou), où  $\nu = 0.75$ ,  $N = 10$  et  $[\omega_A \ \omega_B] = [10^{-3} \ 10^3]$

de la bande de fréquence d'intérêt et à utiliser l'approximation récursive d'Oustaloup à l'intérieur de cette bande de fréquence. Dans un tel cas, l'approximation récursive est appliquée sur un dérivateur d'ordre  $(\nu - 1)$ . Par conséquent, pour  $0 < \nu < 1$  :

$$\frac{2}{N} \mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu(s) = s^{-1} \times \frac{1}{\frac{1}{N} \mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^{1-\nu}} = \frac{G_{1-\nu}}{s} \prod_{i=1}^N \frac{1 + s/\omega'_i}{1 + s/\omega_i}, \quad (2.9)$$

où  $\frac{2}{N} \mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu(s)$ , et notamment l'exposant 2, désigne la variante de Trigeassou d'un intégrateur non entier et où  $\frac{1}{N} \mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^{1-\nu}$  est l'approximation d'Oustaloup.

Un tel opérateur est appelé variante de Trigeassou de l'approximation d'Oustaloup d'un intégrateur d'ordre  $0 < \nu < 1$ . Si  $\nu > 1$ , la variante de Trigeassou est formulée uniquement sur la partie non entière et l'approximation récursive est toujours appliquée sur un dérivateur d'ordre  $(\nu - \lceil \nu \rceil)$ , où  $\lceil \cdot \rceil$  représente l'opérateur *Ceiling* ou « plafond » et désigne la partie entière par excès :

$$\frac{2}{N} \mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu(s) = s^{-\lceil \nu \rceil} \times \frac{1}{\frac{1}{N} \mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^{\lceil \nu \rceil - \nu}} = \frac{G_{\lceil \nu \rceil - \nu}}{s^{\lceil \nu \rceil}} \prod_{i=1}^N \frac{1 + s/\omega'_i}{1 + s/\omega_i}. \quad (2.10)$$

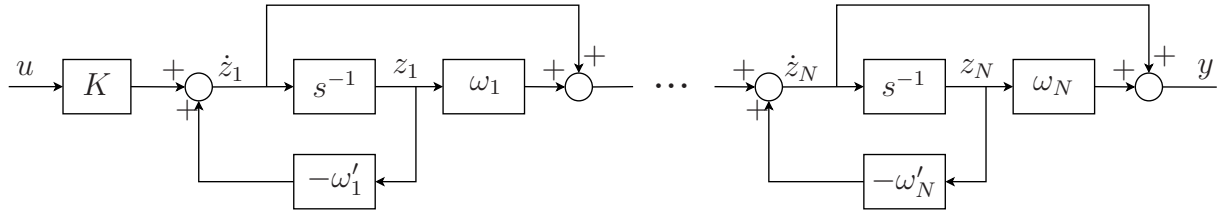


Fig. 2.2. Schéma d'état de l'intégrateur (2.6) avec  $0 < \nu < 1$  sous la forme d'une décomposition en cascade

Par exemple,  $\mathcal{I}^{0.8}(s)$  et  $\mathcal{I}^{1.8}(s)$  sont donnés selon la variante de Trigeassou par :

$${}^2_N\mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^{0.8}(s) = s^{-1} \times \frac{1}{{}^1_N\mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^{0.2}} = \frac{1}{s} \times G_{0.2} \prod_{i=1}^N \frac{1 + s/\omega'_i}{1 + s/\omega_i}, \quad (2.11)$$

$${}^2_N\mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^{1.8}(s) = s^{-2} \times \frac{1}{{}^1_N\mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^{0.2}} = \frac{1}{s^2} \times G_{0.2} \prod_{i=1}^N \frac{1 + s/\omega'_i}{1 + s/\omega_i}. \quad (2.12)$$

Les diagrammes de Bode d'un intégrateur non entier  ${}^2_{10}\mathcal{I}_{[10^{-3} \ 10^3]}^{0.75}(s)$  (2.9), avec un intégrateur en dehors de la bande de fréquence (variante de Trigeassou), où  $\nu = 0.75$ ,  $N = 10$  et  $[\omega_A \ \omega_B] = [10^{-3} \ 10^3]$ , sont tracés en vert sur la Fig. 2.1.

## 2.3 Approximation d'Oustaloup d'un intégrateur non entier sous la forme d'une représentation d'état

### 2.3.1 Avec un gain constant en dehors de la bande de fréquence, pour $0 < \nu < 1$

Pour  $0 < \nu < 1$ , une représentation d'état de l'opérateur (2.3) peut être retrouvée en utilisant une décomposition en cascade. En effet, en réécrivant (2.3) :

$${}^1_N\mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu(s) = K \prod_{i=1}^N \frac{s + \omega_i}{s + \omega'_i}, \quad (2.13)$$

où  $K = \frac{\omega'_1 \omega'_2 \dots \omega'_N}{G_\nu \omega_1 \omega_2 \dots \omega_N}$ . Le schéma fonctionnel associé à l'expression (2.13) est présenté sur la Fig. 2.2. La représentation d'état correspondante est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_N \end{bmatrix}}_z = \underbrace{\begin{bmatrix} -\omega'_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_1 - \omega'_1 & -\omega'_2 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_1 - \omega'_1 & \omega_2 - \omega'_2 & \omega'_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1 - \omega'_1 & \omega_2 - \omega'_2 & \omega_3 - \omega'_3 & \dots & -\omega'_N \end{bmatrix}}_{{}^1A_z} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K \\ K \\ \vdots \\ \vdots \\ K \end{bmatrix}}_{{}^1B_z} u \\ \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_1 - \omega'_1 & \omega_2 - \omega'_2 & \omega_3 - \omega'_3 & \dots & \omega_N - \omega'_N \end{bmatrix}}_{{}^1C_z} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} + \underbrace{K}_{{}^1D_z} u. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Par conséquent, l'intégrateur  $\mathcal{I}^\nu(s)$  de la Fig. 2.3, peut être approché par  $N$  pôles et  $N$  zéros en utilisant la représentation d'état (2.14).

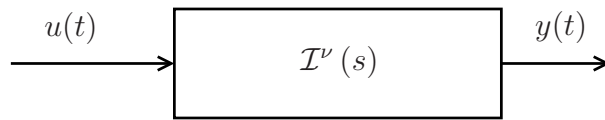


Fig. 2.3. Schéma d'un intégrateur idéal  $\mathcal{I}^\nu(s)$

### 2.3.2 Avec un intégrateur en dehors de la bande de fréquence, pour $0 < \nu < 1$

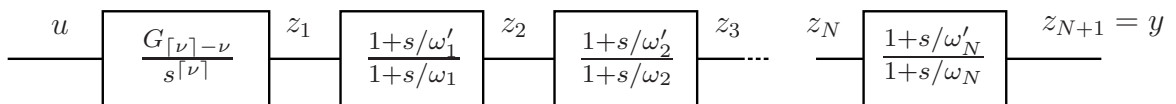


Fig. 2.4. Schéma de l'opérateur de Trigeassou  ${}^2_N \mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu(s)$  pour  $\forall \nu > 0$ .

Trigeassou et al. (1999) et Poinot et Trigeassou (2003) ont établi une représentation d'état de leur variante de l'approximation d'Oustaloup (relation (2.9)) avec  $0 < \nu < 1$  (ou relation (2.10) avec  $\nu > 2$  en correspondance). Lorsque  ${}^2_N \mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu(s)$  est constitué d'un produit de cellules (Fig. 2.4), les auteurs définissent les variables d'état comme les

sorties de chaque cellule. Avec cette décomposition, chaque variable d'état  $z_{i+1}$  est liée à la précédente  $z_i$ , soit :

$$\frac{\omega_{i+1}}{\omega'_{i+1}} \dot{z}_i - \dot{z}_{i+1} = \omega_i(-z_i + z_{i+1}), \quad (2.15)$$

qui est équivalent, en vertu de la relation (2.4), à

$$\alpha \dot{z}_i - \dot{z}_{i+1} = -\omega_i z_i + \omega_i z_{i+1}. \quad (2.16)$$

Il est évident que pour  $0 < \nu < 1$ , la première variable d'état est exprimée par :

$$\dot{z}_1 = G_{1-\nu} u. \quad (2.17)$$

La réécriture des relations (2.16)-(2.17) pour chaque cellule permet d'obtenir la notation matricielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \alpha & -1 \end{bmatrix}}_{{}^2M_1} \dot{\mathbf{z}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\omega_1 & \omega_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & \omega_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\omega_N & \omega_N \end{bmatrix}}_{{}^2A_{z_1}^*} \mathbf{z}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} G_{1-\nu} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{{}^2B_{z_1}^*} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{{}^2C_{z_1}} \mathbf{z}(t), \end{array} \right. \quad (2.18)$$

où  $\dim({}^2M_1) = \dim({}^2A_{z_1}^*) = N + 1$  et où  $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_{N+1}]^T$ , ou encore, de façon équivalente :

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = {}^2A_{z_1} \mathbf{z}(t) + {}^2B_{z_1} u(t), \quad (2.19)$$

avec  ${}^2A_{z_1} = ({}^2M_1)^{-1} ({}^2A_{z_1}^*)$ ,  ${}^2B_{z_1} = ({}^2M_1)^{-1} ({}^2B_{z_1}^*)$ .

### 2.3.3 Avec un gain constant en dehors de la bande de fréquence, pour $\nu > 1$

Le cas de  $1 < \nu < 2$  est d'abord considéré. Ici, un intégrateur pur d'ordre 1 est en cascade avec un intégrateur non entier d'ordre  $(1 - [\nu])$ . Dans ce cas, l'approximation d'Oustaloup :

$${}^1_N \mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu(s) = s^{-1} \times {}^1_N \mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^{\nu-1} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{G_{\nu-1}} \prod_{i=1}^N \frac{1 + s/\omega_i}{1 + s/\omega'_i} \quad (2.20)$$

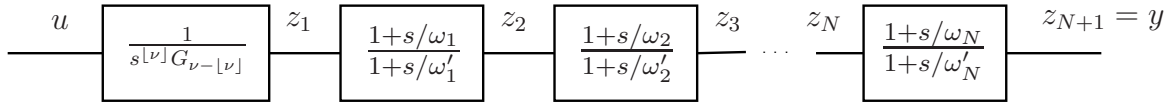


Fig. 2.5. Schéma de l'opérateur d'Oustaloup  ${}^1_N\mathcal{T}'_{[\omega_A \ \omega_B]}(s)$  avec  $\forall \nu > 0$ .

est très similaire à la variante de Trigeassou avec  $0 < \nu < 1$  (relation (2.9)). En effet, un intégrateur d'ordre 1 est en cascade avec l'approximation récursive des pôles et des zéros. Ainsi, la représentation d'état de l'approximation d'Oustaloup d'un intégrateur non entier, avec  $1 < \nu < 2$ , peut être déduite directement de la relation (2.18), avec les paramètres  $\alpha, \eta, \omega_i, \omega'_i$  qui correspondent à l'intégrateur d'ordre  $(1 - \nu)$  au lieu d'un ordre de dérivation  $(1 - \nu)$  dans la variante de Trigeassou avec  $0 < \nu < 1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -\alpha \end{bmatrix}}_{{}^1M_1} \dot{\mathbf{z}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\omega_1 & \omega_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & \omega_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\omega_N & \omega_N \end{bmatrix}}_{{}^1A_{z1}^*} \mathbf{z}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{G_{\nu-1}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{{}^1B_{z1}^*} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1C_{z1}} \mathbf{z}(t), \end{array} \right. \quad (2.21)$$

où  $\dim({}^1M_1) = \dim({}^1A_{z1}^*) = N + 1$ , ou encore, de façon équivalente :

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = {}^1A_{z1}\mathbf{z}(t) + {}^1B_{z1}u(t), \quad (2.22)$$

avec  ${}^1A_{z1} = ({}^1M_1)^{-1}({}^1A_{z1}^*)$ ,  ${}^1B_{z1} = ({}^1M_1)^{-1}({}^1B_{z1}^*)$ .

Le cas  $\nu > 2$  est maintenant considéré (Fig. 2.5). Les résultats précédents sont

directement généralisés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{([\nu]-1) \times ([\nu]-1)} & \mathbf{0}_{([\nu]-1) \times (N+1)} \\ \mathbf{0}_{(N+1) \times ([\nu]-1)} & {}^1M_1 \end{bmatrix}}_{{}^1M_{[\nu]}} \dot{\mathbf{z}}(t) = \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times ([\nu]-1)} & {}^1A_{z1}^*(1, :) \\ \mathbf{I}_{([\nu]-1) \times ([\nu]-1)} & \mathbf{0}_{([\nu]-1) \times (N+1)} \\ \mathbf{0}_{N \times ([\nu]-1)} & {}^1A_{z1}^*(2 : (N+1), :) \end{bmatrix}}_{{}^1A_{z[\nu]}^*} \mathbf{z}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{G_{\nu-[\nu]}} \\ \mathbf{0}_{(N+[\nu]-1) \times 1} \end{bmatrix}}_{{}^1B_{z[\nu]}^*} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times (N+[\nu]-1)} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^1C_{z[\nu]}} \mathbf{z}(t), \end{array} \right. \quad (2.23)$$

où  $\dim({}^1M_{[\nu]}) = \dim({}^1A_{z[\nu]}^*) = N + [\nu]$ . Ou encore, de façon équivalente :

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = {}^1A_{z[\nu]} \mathbf{z}(t) + {}^1B_{z[\nu]} u(t), \quad (2.24)$$

avec  ${}^1A_{z[\nu]} = ({}^1M_{[\nu]})^{-1} ({}^1A_{z[\nu]}^*)$ ,  ${}^1B_{z[\nu]} = ({}^1M_{[\nu]})^{-1} ({}^1B_{z[\nu]}^*)$ .

### 2.3.4 Avec un intégrateur en dehors de la bande de fréquence, pour $\nu > 1$

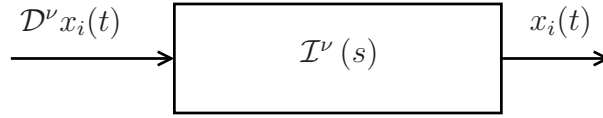
Si  $\nu > 1$ , le cas précédent peut être directement généralisé comme dans la relation (2.23) avec les paramètres  $\alpha, \eta, \omega_i, \omega'_i$  qui correspondent au dérivateur d'ordre  $([\nu] - \nu)$  au lieu d'un intégrateur d'ordre  $([\nu] - \nu)$  dans la variante d'Oustaloup, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{([\nu]-1) \times ([\nu]-1)} & \mathbf{0}_{([\nu]-1) \times (N+1)} \\ \mathbf{0}_{(N+1) \times ([\nu]-1)} & {}^2M_1 \end{bmatrix}}_{{}^2M_{[\nu]}} \dot{\mathbf{z}}(t) = \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times ([\nu]-1)} & {}^2A_{z1}^*(1, :) \\ \mathbf{I}_{([\nu]-1) \times ([\nu]-1)} & \mathbf{0}_{([\nu]-1) \times (N+1)} \\ \mathbf{0}_{N \times ([\nu]-1)} & {}^2A_{z1}^*(2 : (N+1), :) \end{bmatrix}}_{{}^2A_{z[\nu]}^*} \mathbf{z}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} G_{[\nu]-\nu} \\ \mathbf{0}_{(N+[\nu]-1) \times 1} \end{bmatrix}}_{{}^2B_{z[\nu]}^*} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times (N+[\nu]-1)} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^2C_{z[\nu]}} \mathbf{z}(t), \end{array} \right. \quad (2.25)$$

où  $\dim({}^2M_{[\nu]}) = \dim({}^2A_{z[\nu]}^*) = N + [\nu]$ . Ou encore, de façon équivalente :

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = {}^2A_{z[\nu]} \mathbf{z}(t) + {}^2B_{z[\nu]} u(t), \quad (2.26)$$

avec  ${}^2A_{z[\nu]} = ({}^2M_{[\nu]})^{-1} ({}^2A_{z[\nu]}^*)$ ,  ${}^2B_{z[\nu]} = ({}^2M_{[\nu]})^{-1} ({}^2B_{z[\nu]}^*)$ .


 Fig. 2.6. Schéma d'un intégrateur idéal  $\mathcal{I}^\nu(s)$ 

## 2.4 Représentation d'état de l'approximation d'un système non entier

L'objectif de ce paragraphe est de trouver une représentation d'état de l'approximation d'un système non entier défini par les relations (1.9)-(1.10).

### 2.4.1 Cas commensurable

Supposant que l'approximation d'Oustaloup  $\frac{1}{N}\mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu(s)$  est suffisamment précise et proche d'un intégrateur idéal  $\mathcal{I}^\nu(s)$  (Fig. 2.6 et 2.7), soit :

$$\left(\mathcal{D}^\nu x_i(t) - \frac{1}{N}x_i^{(\nu)}(t)\right) \rightarrow 0. \quad (2.27)$$

Soit le système commensurable défini par la représentation de pseudo-état (1.9) avec  $\dim(A) = n$ . Chaque variable de pseudo-état peut être approchée en utilisant l'approximation d'Oustaloup (ou la variante de Trigeassou) à la base de (2.23) (ou (2.25)). Les entrées et les sorties,  $u_{zi} = \mathcal{D}^\nu x_i(t)$  et  $y_{zi}(t) = x_i$ , de la représentation d'état sont alors utilisées (Fig. 2.6), soit :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_z & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_z & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \mathcal{D}^\nu x_1 \\ \mathcal{D}^\nu x_2 \\ \vdots \\ \mathcal{D}^\nu x_n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_z & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\zeta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_z & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & D_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} \mathcal{D}^\nu x_1 \\ \mathcal{D}^\nu x_2 \\ \vdots \\ \mathcal{D}^\nu x_n \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (2.28)$$

ou encore, de manière condensée :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta}(t) + \mathbf{B}\mathcal{D}^\nu \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\zeta}(t) + \mathbf{D}\mathcal{D}^\nu \mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (2.29)$$

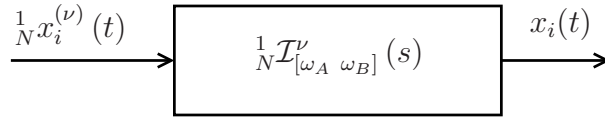


Fig. 2.7. Schéma d'un intégrateur  $\frac{1}{N}\mathcal{I}_{[\omega_A \ \omega_B]}^\nu(s)$

Par substitution  $\mathcal{D}^\nu \mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}$  dans la relation (1.9), la représentation d'état suivante est obtenue :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}(I - \mathbf{A}\mathbf{D})^{-1} \mathbf{A}\mathbf{C}) \boldsymbol{\zeta}(t) + \mathbf{B}(I - \mathbf{A}\mathbf{D})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} (I + \mathbf{D}(I - \mathbf{A}\mathbf{D})^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{C} \boldsymbol{\zeta}(t) + (\mathbf{C}\mathbf{D}(I - \mathbf{A}\mathbf{D})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) \mathbf{u}(t). \end{cases} \quad (2.30)$$

Les équations (2.30) correspondent à la représentation d'état de l'approximation d'Oustaloup (ou la variante de Trigeassou) du système non entier (relation (1.9)), avec, pour l'approximation d'Oustaloup :

$$\begin{aligned} \dim(\mathbf{A} + \mathbf{B}(I - \mathbf{A}\mathbf{D})^{-1} \mathbf{A}\mathbf{C}) &= n(N + \lfloor \nu \rfloor) \times n(N + \lfloor \nu \rfloor), \\ \dim(\mathbf{B}(I - \mathbf{A}\mathbf{D})^{-1} \mathbf{B}) &= n(N + \lfloor \nu \rfloor) \times m, \\ \dim(\mathbf{C}(I + \mathbf{D}(I - \mathbf{A}\mathbf{D})^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{C}) &= p \times n(N + \lfloor \nu \rfloor), \\ \dim(\mathbf{C}\mathbf{D}(I - \mathbf{A}\mathbf{D})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) &= p \times m, \end{aligned}$$

et avec, pour la variante de Trigeassou :

$$\begin{aligned} \dim(\mathbf{A} + \mathbf{B}(I - \mathbf{A}\mathbf{D})^{-1} \mathbf{A}\mathbf{C}) &= n(N + \lceil \nu \rceil) \times n(N + \lceil \nu \rceil), \\ \dim(\mathbf{B}(I - \mathbf{A}\mathbf{D})^{-1} \mathbf{B}) &= n(N + \lceil \nu \rceil) \times m, \\ \dim(\mathbf{C}(I + \mathbf{D}(I - \mathbf{A}\mathbf{D})^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{C}) &= p \times n(N + \lceil \nu \rceil), \\ \dim(\mathbf{C}\mathbf{D}(I - \mathbf{A}\mathbf{D})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) &= p \times m. \end{aligned}$$

## 2.4.2 Cas non commensurable

Dans le cas d'une pseudo-représentation d'état non commensurable, l'ordre de dérivation non entier  $\nu$  de la relation (1.9) est remplacé par un vecteur d'ordres de dérivation :

$$\boldsymbol{\nu} = [\nu_1 \ \nu_2 \ \cdots \ \nu_n]^T. \quad (2.31)$$



Dans ce cas, chaque variable de pseudo-état possède son propre ordre de dérivation :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathcal{D}^{\nu_1} x_1(t) \\ \mathcal{D}^{\nu_2} x_2(t) \\ \vdots \\ \mathcal{D}^{\nu_n} x_n(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(t) \end{cases} = \begin{cases} A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + B\mathbf{u}(t) \\ C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + D\mathbf{u}(t). \end{cases} \quad (2.32)$$

Chaque  $x_j$  ( $j = 1 \cdots n$ ) possède sa propre approximation d'Oustaloup (ou variante de Trigeassou) présentée sous la forme d'une représentation d'état. Par conséquent, il est nécessaire d'utiliser un indice supplémentaire dans la représentation d'état :  $A_{z,j}$ ,  $B_{z,j}$ ,  $C_{z,j}$ ,  $D_{z,j}$  correspondent à la dérivée  $\nu_j$  de  $x_j$ .

La représentation d'état de l'approximation rationnelle de (2.32) reste la même que celle de la relation (2.30), et les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  sont changées selon :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A_{z,\nu_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_{z,\nu_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & A_{z,\nu_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{z,\nu_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & B_{z,\nu_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & B_{z,\nu_n} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} C_{z,\nu_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & C_{z,\nu_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & C_{z,\nu_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{z,\nu_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & D_{z,\nu_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & D_{z,\nu_n} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Cet exemple illustre la méthode de simulation des systèmes non entiers dans le domaine temporel sous la forme d'une représentation d'état en utilisant l'approximation d'Oustaloup et la variante de Trigeassou. Les deux réponses obtenues sont comparées à une solution analytique exacte. Soit un système MIMO représenté sur la Fig. 2.8 et décrit par la relation (1.9), avec un vecteur d'ordre de dérivation  $\nu = [0.25 \ 0.75]$ . Le système à 2 entrées et 2 sorties est présenté soit par la matrice de transfert :

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{0.25}} & 0 \\ \frac{1}{s^{0.75}} & \frac{1}{s^{0.25}} \end{bmatrix} U(s), \quad (2.34)$$

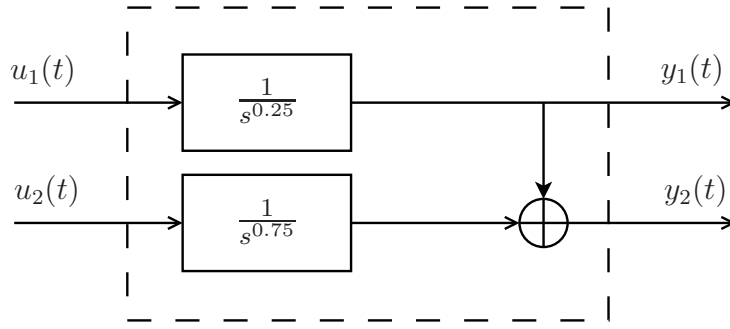


Fig. 2.8. Exemple d'illustration d'un système MIMO non entier

soit par la pseudo-représentation d'état équivalente

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mathcal{D}^{0.25}x_1(t) \\ \mathcal{D}^{0.75}x_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.35)$$

En utilisant les transformations de similarité différentielle (Malti et Thomassin, 2013), la pseudo-représentation d'état suivante, avec un ordre de dérivation commensurable  $\nu = 0.25$  (relation (2.35)) est obtenue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}^{0.25} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Le signal d'entrée  $u_1(t)$  est  $\mathbf{u}(t)$  (un échelon unitaire) et  $u_2(t)$  est  $\mathbf{u}(t - t_{02})$  (un échelon unitaire décalé de  $t_{02} = 7$  s). Par conséquent, les réponses analytiques du système (2.34) sont bien connues (Aoun, Malti et al., 2004) :

$$y_{a1}(t) = \frac{1}{\Gamma(1.25)} t^{0.25} \mathbf{u}(t), \quad (2.37)$$

$$y_{a2}(t) = \frac{1}{\Gamma(1.25)} t^{0.25} \mathbf{u}(t) + \frac{1}{\Gamma(1.75)} t^{0.75} \mathbf{u}(t - t_{02}). \quad (2.38)$$

Le système défini par les relations (2.34), (2.35) ou (2.36) est approché sur  $t \in [0 \ 30]$  en utilisant les techniques développées dans ce chapitre, conduisant ainsi à une représentation d'état. Les paramètres choisis sont :  $[\omega_b \ \omega_h] = [10^{-3} \ 10^3]$  et  $N = 18$ .

Les réponses indicielles sont présentées sur la Fig. 2.9 et la Fig. 2.10. Les résultats de simulation du système non entier utilisant la représentation d'état et l'approximation d'Oustaloup sont conformes à la réponse analytique du système (2.36), avec un ordre de dérivation commensurable. Les erreurs de simulation sont définies par :

$${}^j \epsilon_i(t) = \frac{y_{ai}(t) - {}^j_N y_i(t)}{y_{ai}(t)}, \quad (2.39)$$

où l'indice supérieur gauche  $j \in \{1, 2\}$  désigne respectivement l'approximation d'Oustaloup ou la variante de Trigeassou de la sortie  $y_i$  et l'indice  $i \in \{1, 2\}$  désigne le numéro de sortie. Les erreurs sont tracées sur la Fig. 2.11 dans le cas d'un système commensurable. Il est constaté que les erreurs sont progressives et augmentent dans le temps. En conséquence, plus longue est la simulation, plus grandes sont les valeurs d'erreur. En revanche, les erreurs sont relativement petites par rapport aux sorties, donc la durée de simulation nécessaire pour que les erreurs influent significativement sur le résultat doit être très longue.

Pour le système (2.35), avec deux ordres de dérivation utilisés séparément, l'approximation d'Oustaloup présente de meilleures performances lorsque les ordres de dérivation appartiennent à l'intervalle  $\nu \in [0 \ 0.5]$ . De même, la variante de Trigeassou présente de meilleures performances lorsque  $\nu \in [0.5 \ 1]$ . Les signaux d'erreur (2.39) sont tracés sur la Fig. 2.12 dans le cas non commensurable.

### 2.4.3 Exemple 2 - Exemple d'application à la diffusion thermique

Cet exemple est repris de (Victor, Melchior et Oustaloup, 2010). L'objectif est de valider la méthode de simulation dans le domaine temporel, développée dans ce chapitre, en la comparant à la méthode classique de simulation de Grünwald appliquée au système de diffusion thermique. Les données d'entrée/sortie d'un barreau d'aluminium fini sont simulées. La longueur du barreau est  $L = 0.15$  m et le rayon est  $R = 0.01$  m (Fig.2.13). Sa conductivité est  $\lambda = 210 \text{ W} \times \text{m}^{-1} \times \text{K}^{-1}$  et sa diffusivité  $\alpha = 10^{-5} \text{ m}^2 \times \text{s}^{-1}$ . Le barreau est chauffé des deux côtés par deux résistances qui produisent deux densités de flux de chaleur différentes,  $\phi_E$  et  $\phi_L$ , et les températures à la sortie sont simulées à deux distances,

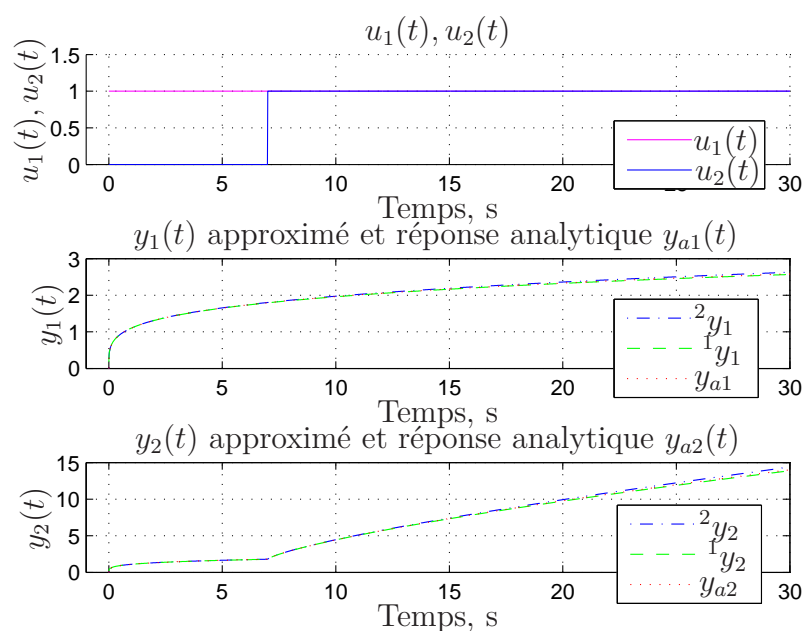


Fig. 2.9. Résultats de simulation du système (2.36) avec un ordre de dérivation commensurable, obtenus en utilisant l'approximation d'Oustaloup et la variante de Trigeassou, comparés aux réponses analytiques exactes

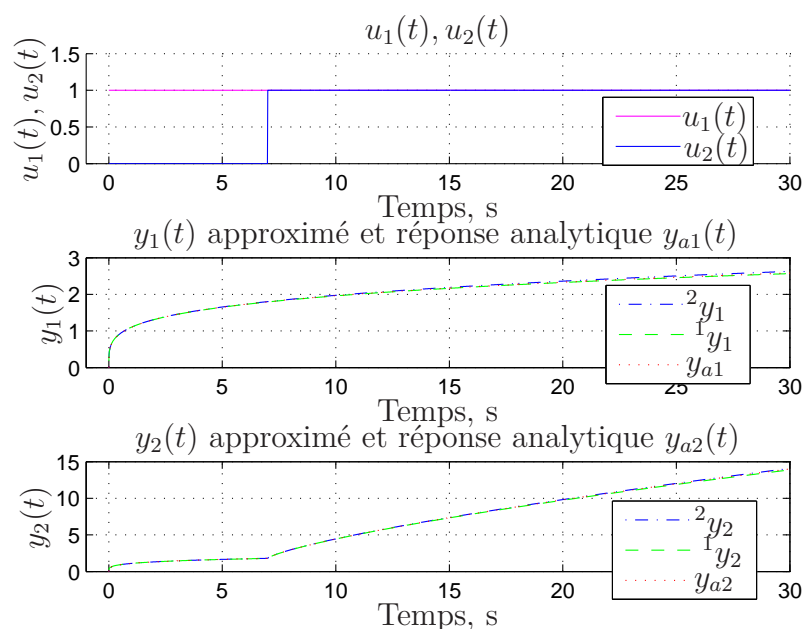


Fig. 2.10. Résultats de simulation du système (2.35) avec un ordre de dérivation non commensurable, obtenus en utilisant l'approximation d'Oustaloup et la variante de Trigeassou, comparés aux réponses analytiques exactes

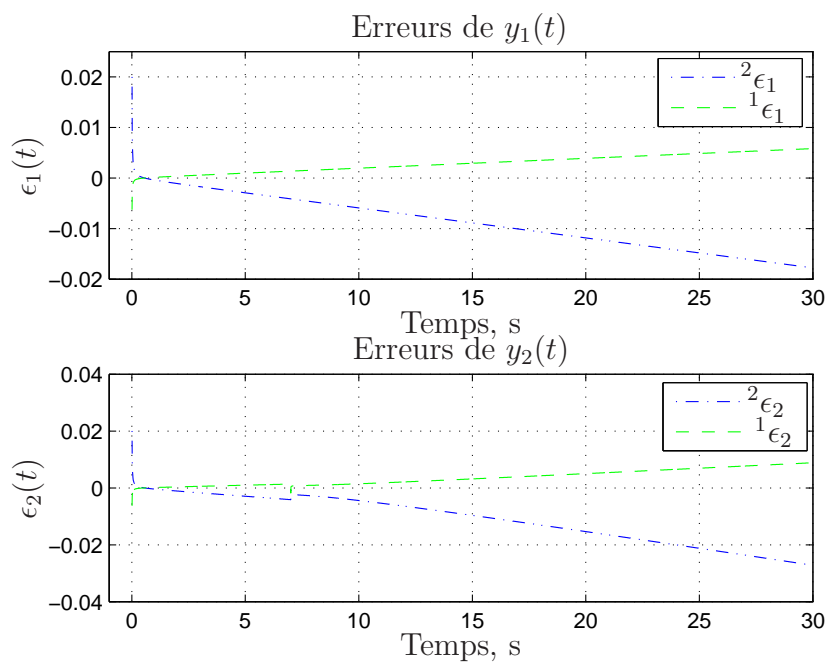


Fig. 2.11. Erreurs de sortie du système (2.36) avec un ordre de dérivation commensurable, obtenues en utilisant l'approximation d'Oustaloup et la variante de Trigeassou

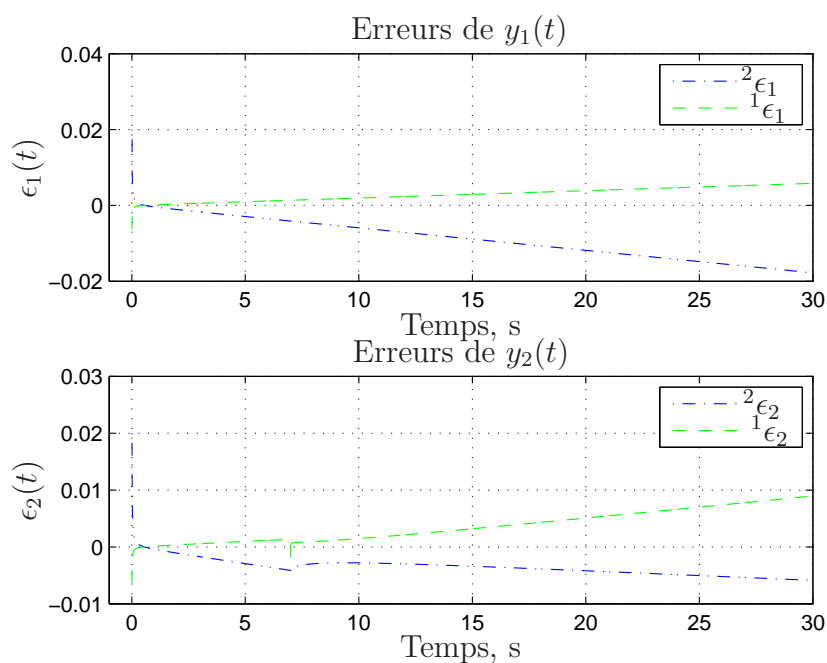


Fig. 2.12. Erreurs de sortie du système (2.35) avec un ordre de dérivation non commensurable, obtenues en utilisant l'approximation d'Oustaloup et la variante de Trigeassou

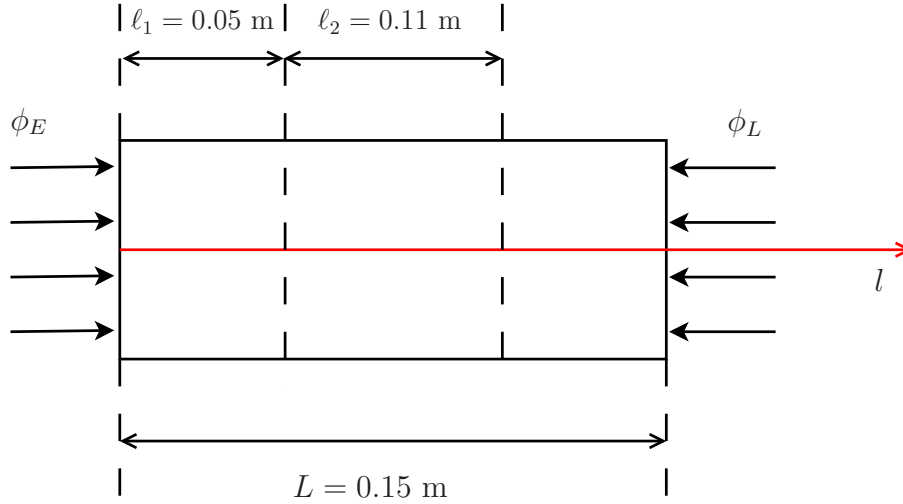


Fig. 2.13. Barreau métallique fini sous l'influence de deux flux thermiques, un de chaque coté

$l_1 = 0.05 \text{ m}$  et  $l_2 = 0.11 \text{ m}$ . Le barreau en aluminium est supposé complètement isolé et les pertes sur la surface, où les flux thermiques sont appliqués, sont négligées. Le modèle qui relie la densité de flux appliqué à la normale à la surface sortant du milieu à la température mesurée à une abscisse  $l_n$  ( $n = 1$  pour  $l_1$ ,  $n = 2$  pour  $l_2$ ) à l'intérieur du milieu est donné par la fonction de transfert  $H(l_n, s)$  obtenue à partir du théorème de superposition (le système est supposé linéaire), soit :

$$H(l_n, s) = H_E(l_n, s) + H_L(l_n, s), \quad (2.40)$$

où  $H_E(l_n, s)$  et  $H_L(l_n, s)$  sont approchées<sup>1</sup> par les fonctions de transfert non entières suivantes :

$$H_E(l_n, s) = \frac{T_E(l_n, s)}{S\phi_E(0, s)} \approx \frac{\sum_{k=0}^K b_k s^{k\nu}}{\sum_{k=1}^K a_k s^{(k+1)\nu}}, \quad (2.41)$$

$$H_L(l_n, s) = \frac{T_L(l_n, s)}{S\phi_L(L, s)} \approx \frac{\sum_{k=0}^K b'_k s^{k\nu}}{\sum_{k=1}^K a_k s^{(k+1)\nu}}, \quad (2.42)$$

où  $K = 5$ ,  $\phi_E(0, s)$  et  $\phi_L(L, s)$  sont les densités de flux venant de  $l = 0$  et  $l = L$  respectivement.  $T_E(l_n, s)$  et  $T_L(l_n, s)$  sont les températures à la distance  $l_n$  résultant de l'application de  $\phi_E(0, s)$  et  $\phi_L(L, s)$  respectivement.  $S = \pi R^2$  est la section du barreau, l'ordre commensurable  $\nu = 0.5$  et les paramètres de la fonction de transfert sont calculés par Victor, Melchior et Oustaloup (2010) en fonction des paramètres physiques décrits

1. Le modèle physique implique des fonctions sinus et cos hyperboliques (Maillet et al., 2000).

(conductivité, diffusivité, section du barreau) :  $b_k(\ell_n, s) = \frac{K![(2L-\ell_n)^k + \ell_n^k]}{k!S\lambda(2L)^K\alpha^{\frac{k-K-1}{2}}}$ ,  $a_k = \frac{K!(2L)^{k-K}}{k!\alpha^{\frac{k-K}{2}}}$  et  $b'_k(\ell_n, s) = \frac{K![(L+\ell_n)^k + (L-\ell_n)^k]}{k!S\lambda(2L)^K\alpha^{\frac{k-K-1}{2}}}$ . Pour des raisons d'identifiabilité il est préconisé de fixer  $a_K = 1$ .

Ainsi, la pseudo-représentation d'état non entière du système (2.40) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}^{0.5}\mathbf{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{(K+1)\times(K+1)} & \mathbf{0}_{(K+1)\times(K+1)} \\ \mathbf{0}_{(K+1)\times(K+1)} & A_{(K+1)\times(K+1)} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \mathbf{x}(t) \\ + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{(K+1)\times 1} \\ \mathbf{0}_{K\times 1} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ \left[ \begin{array}{l} y_1(t) \\ y_2(t) \end{array} \right] = \underbrace{\begin{bmatrix} b_K(l_1) & \dots & b_0(l_1) & b'_K(l_1) & \dots & b'_0(l_1) \\ b_K(l_2) & \dots & b_0(l_2) & b'_K(l_2) & \dots & b'_0(l_2) \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \mathbf{x}(t), \end{array} \right. \quad (2.43)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} -a_{K-1} & \dots & -a_1 & 0 & 0 \\ & I_{K\times K} & & & \mathbf{0}_{K\times 1} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_{2\times(K+1)}(t)]^T$ ,  $\dim(\mathcal{A}) = 2(K+1) \times 2(K+1)$ ,  $\dim(\mathcal{B}) = 2(K+1) \times 2$ ,  $\dim(\mathcal{C}) = 2 \times 2(K+1)$ ,  $\dim(\mathcal{D}) = 2 \times 2$ .

Les densités de flux d'entrée sont choisies :  $u_1(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - t_{01})$  (une fonction rectangulaire,  $\mathbf{u}(t)$  étant la fonction échelon) et  $u_2(t) = \mathbf{u}(t - t_{02}) - \mathbf{u}(t - t_{03})$  (une fonction rectangulaire décalée), avec  $t_{01} = 4$  s,  $t_{02} = 14$  s, et  $t_{03} = 18$  s. Le système est simulé de  $t = 0$  à 30 s, avec une période d'échantillonnage  $\delta t = 0.01$  s.

Le système décrit par la pseudo-représentation d'état (2.43) est approché en utilisant les deux approximations – d'Oustaloup et la variante de Trigeassou, avec les paramètres suivants :  $[\omega_b \ \omega_h] = [10^{-3} \ 10^3]$ ,  $N = 18$ . Pour des raisons de validation, les deux approximations sont comparées aux résultats de simulation de Grünwald sur la Fig. 2.14. De plus, les erreurs de simulation sont définies par :

$${}^j\epsilon_i(t) = \frac{y_{Gi}(t) - {}^j_N y_i(t)}{y_{Gi}(t)}, \quad (2.44)$$

où l'indice supérieur gauche  $j \in \{1, 2\}$  désigne respectivement l'approximation d'Oustaloup ou la variante de Trigeassou de la sortie  $y_i$  et où l'indice  $i \in \{1, 2\}$  désigne le numéro

de sortie,  $y_{Gi}$  étant simulé en utilisant la méthode de Grünwald. Les résultats de simulation du système non entier (2.43) sous la forme d’une représentation d’état en utilisant l’approximation d’Oustaloup et la variante de Trigeassou sont en accord avec la réponse obtenue par la méthode de Grünwald.

Les erreurs sont tracées sur la Fig. 2.15. Plus longue est la simulation, plus grandes sont les valeurs d’erreur. En plus, en régime transitoire, quand l’entrée change sa valeur, il a y de sautes d’erreur qui apparaissent. Ces erreurs sont relativement petites par rapport aux sorties.

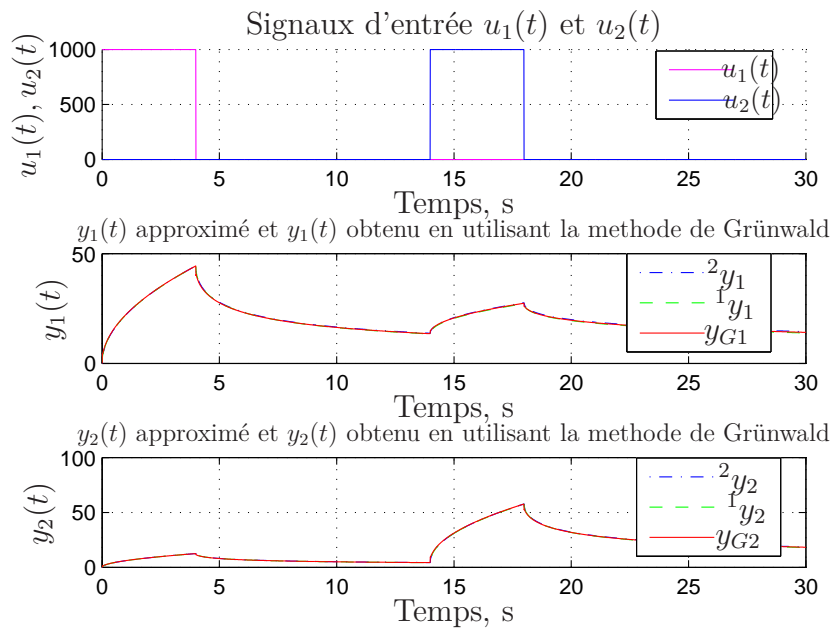


Fig. 2.14. Résultats de simulation du système (2.43), avec un ordre de dérivation commensurable, obtenus en utilisant l’approximation d’Oustaloup et la variante de Trigeassou

## 2.5 Conclusion

Une méthode originale de simulation des systèmes MIMO non entiers est proposée dans ce chapitre. Elle est basée sur l’approximation d’Oustaloup des opérateurs non entiers et permet d’obtenir une approximation d’une pseudo-représentation d’état non entière en utilisant une représentation d’état entière. En outre, cette méthode peut être appliquée aux systèmes commensurables et non commensurables, quel que soit l’ordre de dérivation. La méthode a été appliquée avec succès à la simulation d’un système thermique non commensurable d’un barreau d’aluminium de dimension finie ayant deux entrées et deux sorties.



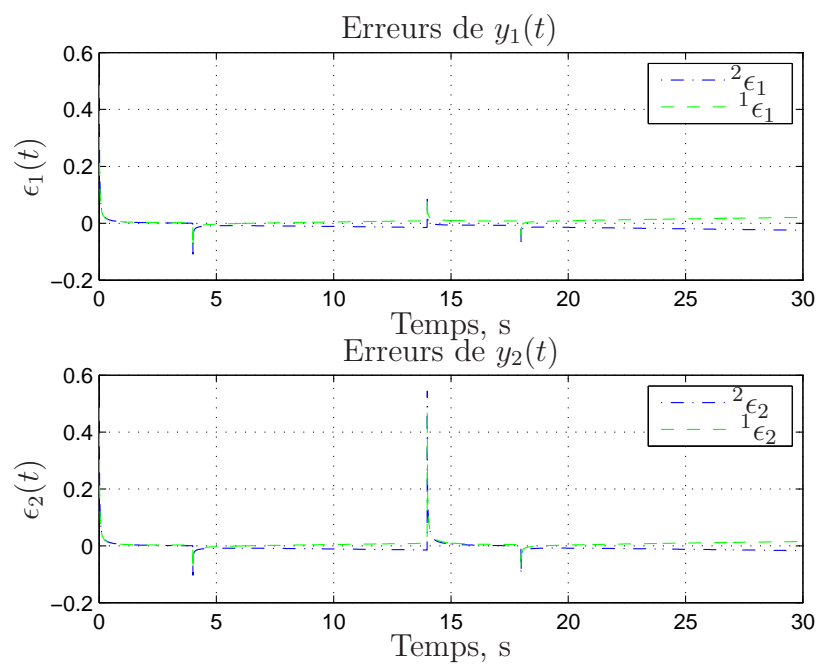


Fig. 2.15. Erreur de sortie du système (2.43) obtenue en utilisant l'approximation d'Oustaloup et la variante de Trigeassou

Les contributions présentées dans ce chapitre ont donné lieu à une publication dans la revue *Nonlinear Dynamics* (Ivanova, Malti et Moreau, 2016a).



# Chapitre 3

## Identification de systèmes par modèle non entier en utilisant la méthode des sous-espaces

### Contents

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction : état de l'art</b> . . . . .	<b>62</b>
<b>3.2</b>	<b>Méthodes des sous-espaces dans le domaine temporel</b> . . . . .	<b>65</b>
3.2.1	Contexte déterministe (MOESP) . . . . .	65
3.2.2	Contexte stochastique (PO-MOESP) . . . . .	68
3.2.3	Etude de différents types de filtres . . . . .	69
3.2.4	Tentative de généralisation de l'algorithme MOESP aux systèmes non entiers incommensurables . . . . .	73
3.2.5	Exemple d'illustration dans le contexte stochastique . . . . .	76
3.2.6	Estimation de l'ordre non entier . . . . .	78
3.2.7	Conclusion . . . . .	78
<b>3.3</b>	<b>Méthodes des sous-espaces dans le domaine fréquentiel</b> . . . . .	<b>81</b>
3.3.1	Contexte déterministe (algorithme MOESP) . . . . .	82
3.3.2	Contexte stochastique (algorithme MOESP combiné aux filtres passe-bas) . . . . .	83
3.3.3	Exemple d'illustration dans un contexte déterministe . . . . .	85
3.3.4	Exemple d'illustration dans le contexte stochastique . . . . .	87
3.3.5	Lorsque $n$ et $\nu$ sont inconnus . . . . .	89
3.3.6	Conclusion . . . . .	91

---

### 3.1 Introduction : état de l’art

De nombreux algorithmes d’identification de systèmes par la méthode des sous-espaces 4SID (angl. State-Space Subspace System IDentification) ont été développés dans la littérature. Le livre référence de Van Overschee et De Moor (1996) présente les principales méthodes développées à temps discret dont la méthode MOESP (angl. Multivariable Output Error State sPace algorithm) utilisée par la suite. Une comparaison détaillée de l’algorithme MOESP avec les méthodes 4SID, PO- et PI-MOESP (angl. Past Output/Input) est présentée dans (Haverkamp, 2001), avec N4SID (angl. Numerical algorithms for Subspace State Space System IDentification) et CVA (angl. Canonical Variate Analysis) dans (Van Overschee et De Moor, 1996 ; Favoreel et al., 1999). La complexité de calcul de la méthode CVA est plus petite que celle des méthodes MOESP et N4SID qui réduit les données aux covariances correspondantes évitant ainsi une décomposition QR des matrices de Hankel des données. Néanmoins, l’utilisation des covariances au lieu des données donne des résultats moins précis (Favoreel et al., 1999).

L’identification des systèmes à temps continu (TC), à partir de **données temporelles** en utilisant la méthode des sous-espaces (4SID), est décrite dans (Mensler et K. W. Sanada, 2000 ; Katayama, 2005 ; Johansson et Lindstedt, 1995 ; Ljung, 2003), où le filtrage des données d’entrée-sortie est nécessaire pour le calcul des dérivées temporelles des signaux d’entrées-sorties. Dans (Haverkamp, 2001 ; L. Wang et Mokhtar, 2007 ; Bergamasco et Lovera, 2011) l’opérateur  $w$  (filtre passe-tout) est utilisé à la place de l’opérateur de Laplace et les données sont filtrées par un filtre de Laguerre. Pour l’identification de systèmes à TC la toolbox CONTSID (angl. CONTinuous-Time System IDentification) a été développée par Garnier et L. Wang (2008). Trois classes de filtres en combinaison avec des méthodes de la famille 4SID ont été développés dans la toolbox :

- filtres linéaires (moments fonctionnels généralisés de Poisson - GPMF - angl. Generalized Poisson Moment Functional) ;
- méthodes intégrales (moments partiels réinitialisés - RPM - angl. Reinitialised Partial Moments, filtre linéaire intégral - LIF - angl. Linear Integral Filter) ;
- fonctions de modulation (fonctions de modulation de Hartley - HMF - angl. Hartley Modulating Functions et de Fourier - FMF - angl. Fourier Modulating Functions).

L’identification de systèmes à TC, à partir de **données fréquentielles** en utilisant la méthode des sous-espaces, est traitée dans (K. Liu et D. W. Miller, 1994 ; T. McKelvey et Ljung, 1996). Dans (K. Liu et D. W. Miller, 1994), l’algorithme FORSE (angl. Frequency Domain Observability Range Space Extraction) basé sur l’extraction de la plage fréquentielle d’observabilité est décrit et appliqué à l’identification d’un système ayant

des données distribuées de manière non-uniforme en présence d’un bruit blanc. Dans (T. McKelvey et Ljung, 1996), deux algorithmes basés sur la méthode des sous-espaces sont proposés pour l’identification de systèmes à partir de données échantillonnées uniformément et non uniformément. Dans ce dernier cas et en présence d’un bruit complexe, l’algorithme fournit une estimation biaisée en absence d’information sur la fonction de co-variance du bruit. Le cas de modèles à TC y est également traité. Par ailleurs, dans (Akçay et Turkey, 2004; Akçay et Turkey, 2011), une amélioration est proposée pour traiter des données distribuées de manière uniforme et non-uniforme dans un contexte stochastique. Les algorithmes 4SID dans le domaine fréquentiel à TC, en particulier l’algorithme MOESP, utilisant le filtre de Laguerre sont présentés dans (Z.-J. Yang et S. Sana, 2000; L. Wang et Mokhtar, 2009). Dans (L. Wang et Mokhtar, 2009), un exemple est traité dans le cas stochastique utilisant une approche basée sur les filtres FSF (angl. Frequency sampling filters), détaillés dans (L. Wang et Cluet, 1997). L’identification de systèmes par la méthode des sous-espaces est comparée à l’algorithme d’estimation proposé dans (R. Neumayer et Weigel, 2003). Les algorithmes 4SID sont développés dans le domaine fréquentiel pour les systèmes à TC et à TD avec des spectres de bruit inconnus dans (Pintelon, 2002).

L’identification des systèmes par **modèle non entier** a été initié dans les années 1990 à la fois dans le domaine temporel et fréquentiel.

Dans le domaine temporel, l’identification de systèmes par modèle non entier et par les méthodes de sous-espace a été traitée dans le contexte déterministe dans (Thomassin et Malti, 2009a) et dans le contexte stochastique dans (Thomassin et Malti, 2009b; Malti et Thomassin, 2013) et (Hu et al., 2016). Hu *et al.* traitent le problème de données distribuées non uniformément et utilisent les filtres de Laguerre pour compléter les données manquantes et le filtre GPMF pour le calcul des dérivées filtrées des signaux.

L’identification des systèmes dans le domaine fréquentiel en utilisant des modèles d’ordre non entier a été initiée par Mathieu, Oustaloup et Levron (1995) et Le Lay (1998). Récemment, Valério et Costa (2007) ont appliqué la méthode d’identification fréquentielle de Levy (1959), et ses améliorations (Sanathanan et Koerner, 1963; Lawrence et G.J., 1979), aux systèmes non entiers. La plupart des méthodes d’identification proposées sont basées sur la minimisation de la norme  $\ell_2$  (pondérée ou non) de l’erreur d’approximation. De plus, toutes ces méthodes utilisent une connaissance préalable pour fixer les ordres de dérivation. L’optimisation des ordres de dérivation est plus complexe car les modèles non entiers sont non linéaires par rapport à ces paramètres. La norme  $\ell_2$  de l’erreur d’approximation peut être non-convexe et des algorithmes à base de gradient pourraient converger vers un minimum local s’ils sont initialisés à son voisinage (Malti, Victor et

Oustaloup, 2008). Dans (Malti, Raïssi et al., 2010 ; Khemani et al., 2012), une approche ensembliste est utilisée pour l'identification de systèmes par modèles non entiers à partir de données fréquentielles.

La pseudo-représentation d'état non entière introduit un paramètre supplémentaire qui est l'ordre commensurable (Oustaloup, 1995). Dans (Thomassin et Malti, 2009a) et (Thomassin et Malti, 2009b), la dimension de la matrice de transition est supposée connue et un algorithme de programmation non linéaire est proposé pour l'optimisation de l'ordre commensurable. Cependant, lorsque ni la dimension de la matrice de transition ni l'ordre commensurable ne sont connus, il devient plus difficile d'appliquer les algorithmes des sous-espaces. On montre dans ce chapitre, qu'une pseudo-représentation d'état ayant une dimension surestimée peut avoir plusieurs minima globaux. A cet effet, le concept de *transformation de similarité différentielle* pour des pseudo-représentations d'état est utilisé par Malti et Thomassin (2013). En effet, une représentation d'état ayant un ordre de dérivation commensurable  $\nu$  et une dimension de la matrice de transition  $N$  peut être similaire à une représentation d'état ayant un ordre de dérivation  $\nu/k$  et une dimension de la matrice de transition  $kN$ , où  $k$  est un nombre entier.

Ce chapitre est divisé en deux parties. Dans la première partie du chapitre (section 3.2), les algorithmes MOESP and PO-MOESP sont présentés dans un contexte déterministe, puis stochastique, pour l'identification de systèmes non entiers commensurables à TC, à partir de **données temporelles**. Une comparaison détaillée de différents filtres combinés avec les méthodes MOESP et PO-MOESP est donnée.

Dans la deuxième partie de ce chapitre (section 4.3), les méthodes de sous-espace sont appliquées pour l'identification de systèmes d'ordre non entier (Oustaloup, 1995) à partir de **données fréquentielles**. Un système décrit par un modèle non entier est identifié dans le domaine fréquentiel selon la méthode MOESP ordinaire dans un contexte déterministe, puis stochastique pour un ordre de dérivation fixe. Les exemples montrent la similitude de plusieurs pseudo-représentations d'état. Finalement, une étude de Monte Carlo est présentée permettant d'évaluer statistiquement les propriétés des estimateurs.

Les contributions principales de la première partie du chapitre ont donné lieu à une communication dans la conférence *International Conference on Fractional Differentiation and its Applications* (Ivanova, Malti et Moreau, 2016b). Les contributions principales de la deuxième partie ont donné lieu aux communications dans les conférences internationale IEEE MESA (Ivanova, Malti et Moreau, 2014a) et nationale JDMACS (Ivanova, Malti et Moreau, 2015) et à un article accepté dans la revue nationale JESA (Ivanova, Malti et Moreau, 2017).

## 3.2 Méthodes des sous-espaces dans le domaine temporel

Dans cette section, l'identification de systèmes non entiers dans le domaine temporel est traitée dans des contextes déterministe et stochastique. Aux paragraphes 4.1-4.3, les méthodes des sous-espaces, MOESP ordinaire et PO-MOESP, sont présentées dans les contextes déterministe, puis stochastique en combinaison avec différents types de filtres passe-bas. Une comparaison détaillée des filtres est présentée. Au paragraphe 4.4, une tentative de généralisation de ces méthodes de sous-espaces aux systèmes non entiers non commensurables est présentée. Au paragraphe 4.5, un exemple de système décrit par un modèle non entier est traité dans le domaine temporel à l'aide des méthodes MOESP ordinaire et PO-MOESP dans un contexte stochastique avec des simulations de Monte Carlo. Ensuite au paragraphe 4.6, le cas où l'ordre de dérivation du système est inconnu est traité. Par rapport à Thomassin et Malti (2009a), où les pôles du système sont estimés dans le contexte stochastique en utilisant les algorithmes MOESP et PO-MOESP combinés aux filtres passe-bas (ou la méthode algébrique), dans cette section deux filtres supplémentaires sont étudiés pour l'estimation paramétrique.

### 3.2.1 Contexte déterministe (MOESP)

La pseudo-représentation d'état linéaire à TC est introduite par (1.9)-(1.10). Le problème consiste à estimer les matrices du système  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  à partir de données échantillonnées dans le domaine temporel  $\{u(t_k)\}_{k=1}^{k=N}$  et  $\{y(t_k)\}_{k=1}^{k=N}$ . L'ordre commensurable  $\nu$  est supposé connu.

En calculant les réponses successives dans le domaine temporel

$$\mathcal{D}^\nu \mathbf{y}(t) = C\mathcal{D}^\nu \mathbf{x}(t) + D\mathcal{D}^\nu \mathbf{u}(t) = CA\mathbf{x}(t) + C\mathbf{B}\mathbf{u}(t) + D\mathcal{D}^\nu u(t), \quad (3.1)$$

$$\mathcal{D}^{2\nu} \mathbf{x}(t) = A\mathcal{D}^\nu \mathbf{x}(t) + B\mathcal{D}^\nu \mathbf{u}(t) = A^2\mathbf{x}(t) + A\mathbf{B}\mathbf{u}(t) + B\mathcal{D}^\nu \mathbf{u}(t), \quad (3.2)$$

$$\mathcal{D}^{2\nu} \mathbf{y}(t) = C\mathcal{D}^{2\nu} \mathbf{x}(t) + D\mathcal{D}^{2\nu} \mathbf{u}(t) = CA^2\mathbf{x}(t) + CAB\mathbf{u}(t) + CBD\mathcal{D}^\nu \mathbf{u}(t) + D\mathcal{D}^{2\nu} \mathbf{u}(t), \quad (3.3)$$

etc, et par substitution, le modèle linéaire étendu suivant est obtenu :

$$\mathcal{Y}(t) = \Gamma_i X(t) + \Psi_i \mathcal{U}(t), \quad (3.4)$$

où les matrices de Hankel d'entrée et de sortie sont données par :

$$\mathcal{U}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathcal{D}^\nu \mathbf{u}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{D}^{(i-2)\nu} \mathbf{u}(t) \\ \mathcal{D}^{(i-1)\nu} \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathcal{D}^\nu \mathbf{y}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{D}^{(i-2)\nu} \mathbf{y}(t) \\ \mathcal{D}^{(i-1)\nu} \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

La matrice d'observabilité étendue  $\Gamma_i$  et la matrice bloc Toeplitz  $\Psi_i$  sont respectivement données par :

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ip \times n}, \quad (3.6)$$

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \cdots & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ip \times im}, \quad (3.7)$$

où  $i$  est un indice défini par l'utilisateur et qui est supérieur à l'ordre du système :  $i > n$ .

Soient les échantillons des signaux d'entrée et de sortie disponibles pour  $N$  intervalles de temps distincts  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , le modèle linéaire étendu (3.4) peut être réécrit de la façon suivante :

$$\mathcal{Y}_N = \Gamma_i \mathcal{X}_N + \Psi_i \mathcal{U}_N, \quad (3.8)$$

où  $\mathcal{U}_N \in \mathbb{R}^{im \times N}$ ,  $\mathcal{Y}_N \in \mathbb{R}^{ip \times N}$  et  $\mathcal{X}_N \in \mathbb{R}^{n \times N}$  sont définis ci-dessous :

$$\mathcal{U}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t_1) & \cdots & \mathbf{u}(t_N) \\ \mathcal{D}^\nu \mathbf{u}(t_1) & \cdots & \mathcal{D}^\nu \mathbf{u}(t_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{D}^{(i-2)\nu} \mathbf{u}(t_1) & \cdots & \mathcal{D}^{(i-2)\nu} \mathbf{u}(t_N) \\ \mathcal{D}^{(i-1)\nu} \mathbf{u}(t_1) & \cdots & \mathcal{D}^{(i-1)\nu} \mathbf{u}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t_1) & \cdots & \mathbf{y}(t_N) \\ \mathcal{D}^\nu \mathbf{y}(t_1) & \cdots & \mathcal{D}^\nu \mathbf{y}(t_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{D}^{(i-2)\nu} \mathbf{y}(t_1) & \cdots & \mathcal{D}^{(i-2)\nu} \mathbf{y}(t_N) \\ \mathcal{D}^{(i-1)\nu} \mathbf{y}(t_1) & \cdots & \mathcal{D}^{(i-1)\nu} \mathbf{y}(t_N) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\mathcal{X}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_1) & \mathbf{x}(t_2) & \cdots & \mathbf{x}(t_N) \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

L'équation (3.8) permet d'utiliser les algorithmes d'identification par méthodes des sous-espaces, développés initialement pour les systèmes à TD. L'algorithme MOESP ordinaire (Katayama, 2005) est développé dans la suite.



1. Calculer la décomposition LQ de la matrice de données :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_N^{re} \\ \mathcal{Y}_N^{re} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

où  $L_{11} \in \mathbb{R}^{im \times im}$ ,  $L_{21} \in \mathbb{R}^{ip \times im}$ ,  $L_{22} \in \mathbb{R}^{ip \times ip}$  avec les matrices  $L_{11}$ ,  $L_{22}$  triangulaires inférieures, et  $Q_1 \in \mathbb{R}^{2mN \times im}$ ,  $Q_2 \in \mathbb{R}^{2mN \times ip}$  orthogonales.

2. Décomposer en valeurs singulières (SVD) la matrice  $L_{22}$  par une approximation de l'espace de colonne de  $\Gamma_i$  :

$$L_{22} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

où  $U_1 \in \mathbb{R}^{ip \times n}$  et  $U_2 \in \mathbb{R}^{ip \times (ip-n)}$ . Le nombre d'états  $n$  peut être estimé à partir de la SVD tel que  $n = \dim \Sigma_1$  en absence de bruit.

3. Estimer la matrice d'observabilité étendue :

$$\hat{\Gamma}_i = U_1 \Sigma_1^{1/2}. \quad (3.13)$$

4. Estimer la matrice  $\hat{C}$  :  $\hat{C} = \hat{\Gamma}_i(1 : p, 1 : n)$ .

5. Estimer la matrice  $\hat{A}$  en résolvant l'équation linéaire :

$$\hat{\Gamma}_i(1 : p(i-1), 1 : n) \hat{A} = \hat{\Gamma}_i(p+1 : ip, 1 : n). \quad (3.14)$$

6. Estimer les matrices  $\hat{B}$  et  $\hat{D}$ . A cet effet, on peut montrer que :

$$U_2^T \Psi_i = U_2^T L_{21} L_{11}^{-1}, \quad (3.15)$$

où :

$$U_2^T \triangleq [\mathcal{L}_1 \quad \mathcal{L}_2 \quad \cdots \quad \mathcal{L}_i], \quad (3.16)$$

$$U_2^T L_{21} L_{11}^{-1} \triangleq [\mathcal{M}_1 \quad \mathcal{M}_2 \quad \cdots \quad \mathcal{M}_i], \quad (3.17)$$

avec  $\mathcal{L}_k \in \mathbb{R}^{(ip-n) \times p}$  et  $\mathcal{M}_k \in \mathbb{R}^{(ip-n) \times m}$  for  $k = 1, \dots, i$ . Ainsi, à partir de (3.15) :

$$\mathcal{L}_1 \hat{D} + \mathcal{L}_2 \hat{C} \hat{B} + \cdots + \mathcal{L}_i \hat{C} \hat{A}^{i-2} \hat{B} = \mathcal{M}_1,$$

$$\mathcal{L}_2 \hat{D} + \mathcal{L}_3 \hat{C} \hat{B} + \cdots + \mathcal{L}_i \hat{C} \hat{A}^{i-3} \hat{B} = \mathcal{M}_3,$$

⋮

$$\mathcal{L}_{i-1} \hat{D} + \mathcal{L}_i \hat{C} \hat{B} = \mathcal{M}_{i-1},$$

$$\mathcal{L}_i \hat{D} = \mathcal{M}_i.$$

En définissant  $\bar{\mathcal{L}}_k = [\mathcal{L}_k \ \dots \ \mathcal{L}_i] \in \mathbb{R}^{(ip-n) \times (i+1-k)p}$ ,  $k = 2, \dots, i$ , un système surdéterminé d'équations linéaires est obtenu :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \bar{\mathcal{L}}_2 \hat{\Gamma}_{i-1} \\ \mathcal{L}_2 & \bar{\mathcal{L}}_3 \hat{\Gamma}_{i-2} \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{L}_{i-1} & \bar{\mathcal{L}}_i \hat{\Gamma}_1 \\ \mathcal{L}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{D} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{i-1} \\ \mathcal{M}_i \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

où la matrice bloc de coefficients à gauche est de dimension  $i(ip - n) \times (p + n)$ . Les matrices  $\hat{B}$  et  $\hat{D}$  sont estimées en trouvant la solution par moindres carrés de (3.18).

Le calcul de dérivées fractionnaires des signaux d'entrée et de sortie est cependant nécessaire pour définir les matrices  $\mathcal{U}_N$  et  $\mathcal{Y}_N$ . Ce calcul provoque toujours des erreurs numériques qui sont encore plus importantes dans le contexte stochastique. Ces erreurs peuvent être évitées en introduisant des méthodes de filtrage décrites au paragraphe 3.2.3.

### 3.2.2 Contexte stochastique (PO-MOESP)

Soit le système (1.9)-(1.10) perturbé par un bruit de sortie de moyenne nulle :

$$s^\nu X(s) = AX(s) + BU(s), \quad (3.19)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) + V(s). \quad (3.20)$$

où  $V(s) \in \mathbb{R}^p$  est la transformée de Laplace d'un bruit blanc ayant une moyenne nulle. Dans cette section, une variante de l'algorithme PO-MOESP (angl. Past Output MIMO Output-Error State Space) décrite par Haverkamp (2001) est présentée pour obtenir des estimateurs non biaisés en présence d'un bruit de sortie. Une variable instrumentale  $\mathcal{Z}$ , corrélée avec le vecteur d'état mais non corrélée avec le bruit, est utilisée. Cette variable instrumentale de l'algorithme est choisie comme une combinaison d'entrée et de sortie passés :  $\mathcal{Z} = [\mathcal{U}_{0,\ell}^T \ \mathcal{Y}_{0,\ell}^T]$ , où les matrices  $\mathcal{U}_{0,\ell}$  et  $\mathcal{Y}_{0,\ell}$  sont formées comme dans (3.9). L'algorithme PO-MOESP est décrit ci-dessous :

1. Calculer une décomposition LQ de la matrice de données :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_{\ell+1,2\ell+1} \\ \mathcal{U}_{0,\ell} \\ \mathcal{Y}_{0,\ell} \\ \mathcal{Y}_{\ell+1,2\ell+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

avec les matrices triangulaires inférieures  $L_{jj}$  et  $Q_j$  orthogonales ( $j = 1, 2, 3, 4$ ).

2. Décomposer en valeurs singulières (SVD) la matrice  $[L_{42} \ L_{43}]$  par une approximation de l'espace de colonne de  $\Gamma_i$  :

$$[L_{42} \ L_{43}] = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

où  $U_1 \in \mathbb{R}^{ip \times n}$  et  $U_2 \in \mathbb{R}^{ip \times (ip-n)}$ . Le nombre d'états  $n$  peut être estimé à partir de la SVD tel que  $n = \dim \Sigma_1$  en absence de bruit.

Les étapes (3)-(6) sont les mêmes que pour l'algorithme MOESP.

### 3.2.3 Etude de différents types de filtres

Pour éviter la propagation du bruit lors du calcul des dérivées des signaux d'entrée et de sortie, nécessaires pour la définition de vecteurs  $\mathcal{U}(t)$  et  $\mathcal{Y}(t)$  dans (3.5), les filtres passe-bas sont introduits. Trois types de filtres sont étudiés dans ce paragraphe.

#### 3.2.3.1 Méthode algébrique

Dans (Thomassin et Malti, 2009a), l'utilisation d'un opérateur non entier de type filtre passe-bas est introduit pour la première fois :

$$\Lambda(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_f}\right)^\nu}, \quad (3.23)$$

qui correspond à un opérateur stable et causal. Il permet d'obtenir la transformation algébrique suivante de (3.19)-(3.20) :

$$X(s) = A_\lambda[\Lambda X(s)] + B_\lambda[\Lambda(s)U(s)], \quad (3.24)$$

$$[\Lambda Y(s)] = C[\Lambda X(s)] + D[\Lambda U(s)] + [\Lambda V(s)], \quad (3.25)$$

avec  $A_\lambda = I + \tau A$ ,  $B_\lambda = \tau B$  et  $\tau = \left(\frac{1}{\omega_f}\right)^\nu$ .

La transformée inverse de Laplace (3.24)-(3.25) donne :

$$\mathbf{x}(t) = A_\lambda[\lambda \mathbf{x}(t)] + B_\lambda[\lambda \mathbf{u}(t)], \quad (3.26)$$

$$[\lambda \mathbf{y}(t)] = C[\lambda \mathbf{x}(t)] + D[\lambda \mathbf{u}(t)] + [\lambda \mathbf{v}(t)], \quad (3.27)$$

où  $\lambda \mathbf{x}(t)$ ,  $\lambda \mathbf{y}(t)$ ,  $\lambda \mathbf{u}(t)$  et  $\lambda \mathbf{v}(t)$  correspondent aux états, entrées, sorties et bruit filtrés par  $\Lambda$ . En calculant les réponses successives dans le domaine temporel, un modèle linéaire étendu est obtenu :

$$\mathcal{Y}(t) = \Gamma_i \mathbf{x}_\lambda(t) + \Psi_{i,\lambda} \mathcal{U}(t) + \Psi_{i,\lambda} \mathcal{V}(t), \quad (3.28)$$

où

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} [\lambda^{i-1}\mathbf{y}] \\ [\lambda^{i-2}\mathbf{y}] \\ \vdots \\ [\lambda^1\mathbf{y}] \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}, \mathcal{U} = \begin{bmatrix} [\lambda^{i-1}\mathbf{u}] \\ [\lambda^{i-2}\mathbf{u}] \\ \vdots \\ [\lambda^1\mathbf{u}] \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \mathcal{V} = \begin{bmatrix} [\lambda^{i-1}\mathbf{v}] \\ [\lambda^{i-2}\mathbf{v}] \\ \vdots \\ [\lambda^1\mathbf{v}] \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{x}_\lambda = \lambda^{i-1}\mathbf{x} \quad (3.29)$$

et

$$\Gamma_{i,\lambda} = \begin{bmatrix} C \\ CA_\lambda \\ \vdots \\ CA_\lambda^{i-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ip \times n}, \Psi_{i,\lambda} = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB_\lambda & D & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ CA_\lambda^{i-2}B_\lambda & CA_\lambda^{i-3}B_\lambda & \dots & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ip \times im}. \quad (3.30)$$

Les vecteurs  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{U}$  dans (3.29) sont utilisés au lieu de (3.5) dans les algorithmes MOESP ou PO-MOESP. Ensuite, les matrices  $A_\lambda$ ,  $B_\lambda$ ,  $C$  et  $D$  sont calculées et finalement les matrices  $A$  et  $B$  sont déduites à partir de :

$$A = \frac{1}{\tau} (A_\lambda - I), \quad (3.31)$$

$$B = \frac{1}{\tau} B_\lambda. \quad (3.32)$$

Les diagrammes de Bode du filtre  $\Lambda(s)$  (3.23) avec l'ordre  $\nu = 0.9$  et  $\omega_f = 6$  rad/s sont tracés sur la Fig. 3.1. L'ordre minimal du filtre correspond à  $\nu i = 0.9 \times 1 = 0.9$  qui donne la pente de  $-18$  dB/dec.

### 3.2.3.2 Filtre GPMF entier

Le filtre de Poisson généralisé GPMF (angl. Generalized Poisson Moment Functional) a été développé par Unbehauen et Rao en 1987 (Wu, C. Yang et Song, 2009).

Pour un système non entier avec un ordre de dérivation commensurable  $\nu$ , le filtre GPMF est introduit de telle sorte que les signaux soient différenciés en basses fréquences et filtrés en hautes fréquences.

$$F_i(s) = \left( \frac{\beta}{s + \lambda} \right)^{[\nu i] + 1}. \quad (3.33)$$

L'ordre du filtre  $[\nu i] + 1$  est choisi de manière à obtenir un filtre passe-bas d'ordre au moins égal à un.

En appliquant le filtrage (3.33) sur les matrices de données, les transformées de

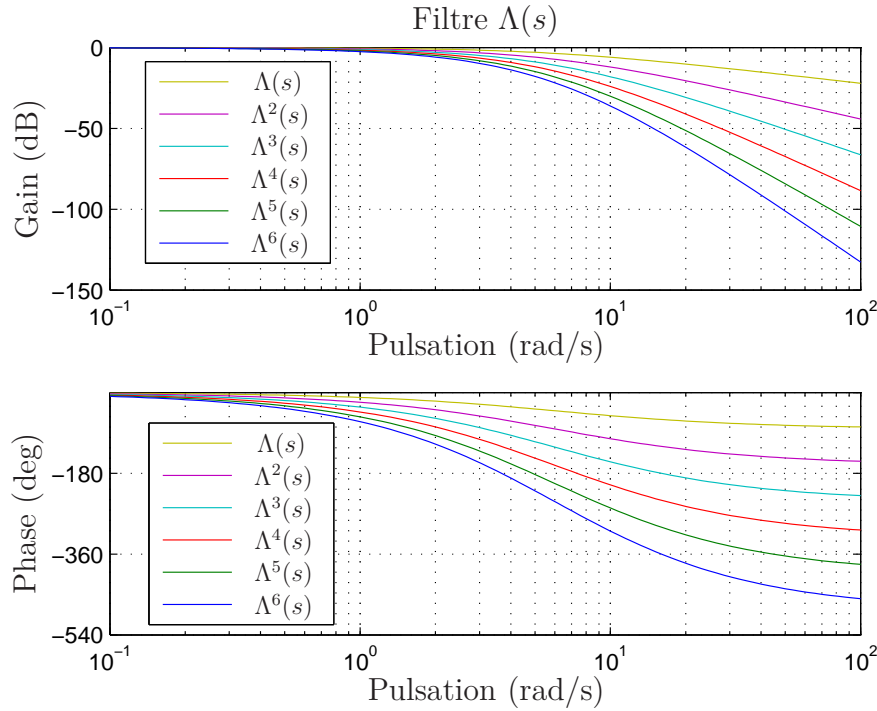


Fig. 3.1. Diagrammes de Bode du filtre  $\Lambda(s)$  (3.23) avec  $\nu = 0.9$ ,  $\omega_f = 6$  rad/s

Laplace de matrices de Hankel (3.5) s'écrivent :

$$\mathcal{U}(s) = \begin{bmatrix} F_{i-1}(s)U(s) \\ F_{i-1}(s)s^\nu U(s) \\ \vdots \\ F_{i-1}(s)s^{(i-2)\nu}U(s) \\ F_{i-1}(s)s^{(i-1)\nu}U(s) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}(s) = \begin{bmatrix} F_{i-1}(s)Y(s) \\ F_{i-1}(s)s^\nu Y(s) \\ \vdots \\ F_{i-1}(s)s^{(i-2)\nu}Y(s) \\ F_{i-1}(s)s^{(i-1)\nu}Y(s) \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Les vecteurs  $\mathcal{U}(t)$  et  $\mathcal{Y}(t)$  dans (3.34) sont utilisés au lieu de (3.5) dans l'algorithme MOESP (ou PO-MOESP) et les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont estimées directement.

Les diagrammes de Bode du filtre GPMF (3.33) combiné au dérivateur non entier d'ordre  $\nu = 0.9$  avec  $\beta = \lambda = 1$  sont tracés sur la Fig. 3.2. L'ordre minimal du filtre résultant est supérieur à 1,  $\nu i - (\lceil \nu i \rceil + 1) = 0.9 \times 6 - (\lceil 0.9 \times 6 \rceil + 1) = -1.6$ , ce qui donne la pente de  $-32$  dB/dec.

### 3.2.3.3 Filtre LIF entier

L'approche LIF (angl. Linear Integral Filter), développée par Sagara et Zhao dans 1988 (Sagara et Zhao, 1990), permet de résoudre le problème des conditions initiales qui se produit dans toutes les méthodes d'intégration.

Pour un système non entier avec un ordre de dérivation commensurable  $\nu$ , le filtre

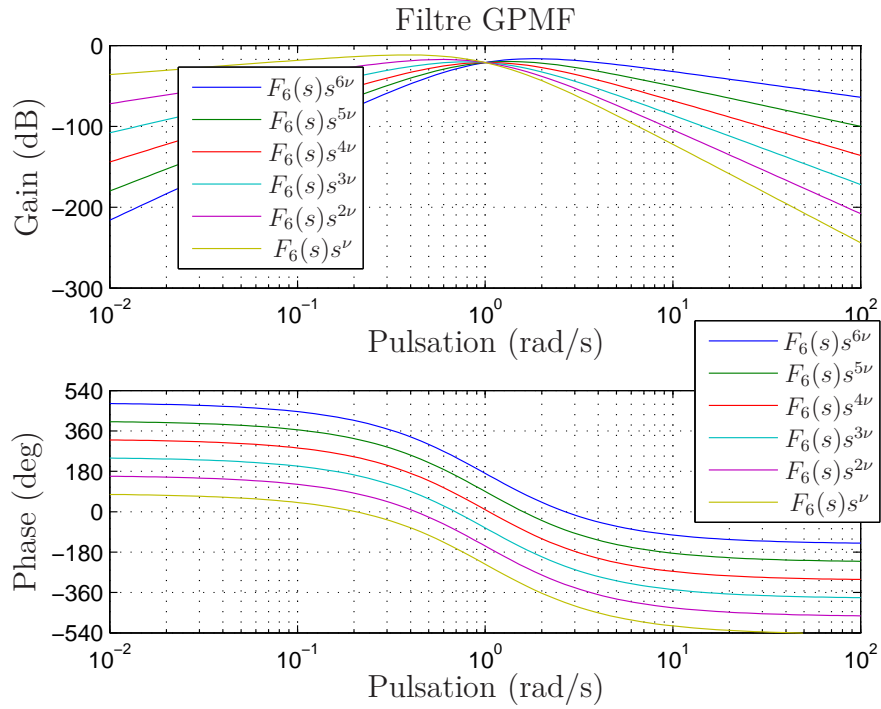


Fig. 3.2. Diagrammes de Bode du filtre GPMF (3.33) combiné au dérivateur non entier d'ordre  $\nu = 0.9$  avec  $\beta = \lambda = 1$

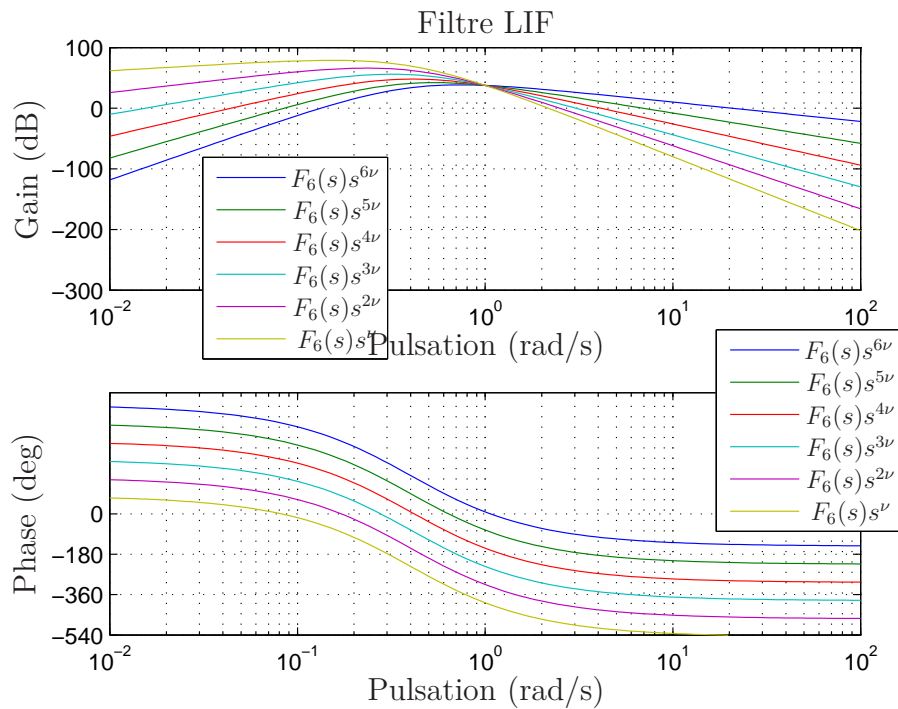


Fig. 3.3. Diagrammes de Bode du filtre LIF (3.35) combiné au dérivateur non entier d'ordre  $\nu = 0.9$  avec  $\ell = 100$  et  $T = 0.05$

LIF a la forme suivante :

$$F_i(s) = \frac{(1 - \exp(-\ell T s))^{\lceil \nu i \rceil + 1}}{s^{\lceil \nu i \rceil + 1}}, \quad (3.35)$$

où  $\ell$  est un entier choisi de manière à obtenir la bande passante du filtre la plus proche possible de la bande passante du système.

L'ordre du filtre  $\lceil \nu i \rceil + 1$  est choisi de manière à obtenir un filtre passe bas d'ordre au moins égal à un.

Les matrices de données filtrées sont identiques à (3.34). Après filtrage des données, les algorithmes MOESP ou PO-MOESP peuvent être utilisés pour l'estimation des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

Les diagrammes de Bode du filtre LIF (3.35) combiné au dérivateur non entier d'ordre  $\nu = 0.9$  avec  $\ell = 100$  et  $T = 0.05$  sont tracés sur la Fig. 3.3. Comme pour le filtre GPMF, l'ordre minimal du filtre résultant est supérieur à 1,  $\nu i - (\lceil \nu i \rceil + 1) = 0.9 \times 6 - (\lceil 0.9 \times 6 \rceil + 1) = -1.6$ , ce qui donne la pente de -32 dB/dec.

### 3.2.4 Tentative de généralisation de l'algorithme MOESP aux systèmes non entiers incommensurables

Dans le cas d'une pseudo-représentation d'état incommensurable, l'ordre de dérivation non entier  $\nu$  dans (1.9) est remplacé par un vecteur d'ordres de dérivation :

$$\boldsymbol{\nu} = [\nu_1 \quad \nu_2 \quad \cdots \quad \nu_n]^T. \quad (3.36)$$

Dans ce cas, chaque variable de pseudo-état  $x_i$  a son propre ordre de dérivation  $\nu_i$ . En calculant les réponses successives dans le domaine temporel, un modèle linéaire étendu est obtenu :

$$\mathcal{Y}(t) = \Gamma_i \mathcal{X}(t) + \Psi_i \mathcal{U}(t), \quad (3.37)$$

où les matrices de Hankel des entrées  $\mathcal{U}$ , des sorties  $\mathcal{Y}$  ainsi que la matrice d'état  $\mathcal{X}$  sont

données par :

$$\mathcal{Y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathcal{D}^{\nu_1} \mathbf{y}(t) \\ \mathcal{D}^{\nu_2} \mathbf{y}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{D}^{\nu_n} \mathbf{y}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{D}^{(i-1)\nu_1} \mathbf{y}(t) \\ \mathcal{D}^{(i-1)\nu_2} \mathbf{y}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{D}^{(i-1)\nu_n} \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathcal{D}^{\nu_1} \mathbf{u}(t) \\ \mathcal{D}^{\nu_2} \mathbf{u}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{D}^{\nu_n} \mathbf{u}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{D}^{(i-1)\nu_1} \mathbf{u}(t) \\ \mathcal{D}^{(i-1)\nu_2} \mathbf{u}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{D}^{(i-1)\nu_n} \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathcal{D}^{\nu_1} \mathbf{x}(t) \\ \mathcal{D}^{\nu_2} \mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{D}^{\nu_n} \mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{D}^{(i-1)\nu_1} \mathbf{x}(t) \\ \mathcal{D}^{(i-1)\nu_2} \mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{D}^{(i-1)\nu_n} \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

La matrice d'observabilité étendue  $\Gamma_i$  et la matrice-block Toeplitz  $\Psi_i$  sont données dans (3.40), avec :

$$\Gamma_i \in \mathbb{R}^{[p((i-1)n+1)] \times [n((i-1)n+1)]} \text{ et } \Psi_i \in \mathbb{R}^{[p((i-1)n+1)] \times [m((i-1)n+1)]}. \quad (3.39)$$

La différence principale entre (3.37)-(3.38) et le cas commensurable (3.8)-(3.10) est que le vecteur d'état  $\mathbf{x}(t)$  est utilisé directement dans (3.10) alors qu'un vecteur étendu est nécessaire en (3.38). La dimension de ce dernier est beaucoup plus importante. De plus  $\mathcal{X}(t)$  dans (3.38) ne peut pas être considéré comme un vecteur d'état étendu à cause des dépendances entre ses éléments. Par conséquent, la généralisation au cas incommensurable de la méthode MOESP n'est pas possible.



$$\begin{aligned}
\Gamma_i = & \begin{bmatrix}
C & \mathbf{0}_{p \times n} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{p \times n} \\
C \operatorname{diag}(1, \mathbf{0}_{(n-1)}) A & C \operatorname{diag}(0, \mathbf{I}_{(n-1)}) & \mathbf{0}_{p \times n} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{p \times n} \\
C \operatorname{diag}(0, 1, \mathbf{0}_{(n-2)}) A & \mathbf{0}_{p \times n} & C \operatorname{diag}(1, 0, \mathbf{I}_{(n-2)}) & \mathbf{0}_{p \times n} & \cdots & \mathbf{0}_{p \times n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
C \operatorname{diag}(\mathbf{0}_{(n-1)}, 1) A & (n-1) \times \mathbf{0}_{p \times n} & \vdots & C \operatorname{diag}(\mathbf{I}_{(n-1)}, 0) & \cdots & \mathbf{0}_{p \times n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
C(\operatorname{diag}(1, \mathbf{0}_{(n-1)}) A)^{i-1} & C(\operatorname{diag}(1, \mathbf{0}_{(n-1)}) A)^{i-2} \operatorname{diag}(0, \mathbf{I}_{(n-1)}) & \mathbf{0}_{p \times n} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{p \times n} \\
C(\operatorname{diag}(0, 1, \mathbf{0}_{(n-2)}) A)^{i-1} & \mathbf{0}_{p \times n} & C(\operatorname{diag}(0, 1, \mathbf{0}_{(n-2)}) A)^{i-2} \operatorname{diag}(1, 0, \mathbf{I}_{(n-2)}) & \mathbf{0}_{p \times n} & \cdots & \mathbf{0}_{p \times n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
C(\operatorname{diag}(\mathbf{0}_{(n-1)}, 1) A)^{i-1} & (n-1) \times \mathbf{0}_{p \times n} & \vdots & C(\operatorname{diag}(\mathbf{0}_{(n-1)}, 1) A)^{i-2} \operatorname{diag}(\mathbf{I}_{(n-1)}, 0) & \cdots & \mathbf{0}_{p \times n}
\end{bmatrix}, \\
\Psi_{\bar{i}} = & \begin{bmatrix}
D & \mathbf{0}_{p \times m} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{p \times m} \\
C \operatorname{diag}(1, \mathbf{0}_{(n-1)}) B & D & \mathbf{0}_{p \times m} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{p \times m} \\
C \operatorname{diag}(0, 1, \mathbf{0}_{(n-2)}) B & \mathbf{0}_{p \times m} & D & \mathbf{0}_{p \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{p \times m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
C \operatorname{diag}(\mathbf{0}_{(n-1)}, 1) B & (n-1) \times \mathbf{0}_{p \times m} & \vdots & D & \cdots & \mathbf{0}_{p \times m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
C \operatorname{diag}(1, \mathbf{0}_{(n-1)}) (\operatorname{diag}(1, \mathbf{0}_{(n-1)}) A)^{i-1} B & C \operatorname{diag}(1, \mathbf{0}_{(n-1)}) (\operatorname{diag}(1, \mathbf{0}_{(n-1)}) A)^{i-2} B & (n-1) \times \mathbf{0}_{p \times m} & D & \cdots & \mathbf{0}_{p \times m} \\
C \operatorname{diag}(0, 1, \mathbf{0}_{(n-2)}) (\operatorname{diag}(0, 1, \mathbf{0}_{(n-2)}) A)^{i-1} B & \mathbf{0}_{p \times m} & C(\operatorname{diag}(0, 1, \mathbf{0}_{(n-2)}) A)^{i-2} \operatorname{diag}(1, 0, \mathbf{I}_{(n-2)}) & \mathbf{0}_{p \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{p \times m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
C \operatorname{diag}(\mathbf{0}_{(n-1)}, 1) (\operatorname{diag}(\mathbf{0}_{(n-1)}, 1) A)^{i-1} B & (n-1) \times \mathbf{0}_{p \times m} & \vdots & C \operatorname{diag}(\mathbf{0}_{(n-1)}, 1) (\operatorname{diag}(\mathbf{0}_{(n-1)}, 1) A)^{i-2} B & \mathbf{0}_{p \times m} & D
\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(3.40)

### 3.2.5 Exemple d'illustration dans le contexte stochastique

Dans cette section, un exemple est présenté pour illustrer la performance de différents types de filtrage décrits ci-dessus et appliqués au système non entier commensurable dans le contexte stochastique. Considérons un système donné par (3.19)-(3.20), repris d'un travail de Thomassin et Malti (2009b), ayant une entrée (un signal binaire pseudo aléatoire), deux sorties, un ordre commensurable  $\nu = 0.9$  et des conditions initiales nulles. Le système est décrit par les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 1 & -0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.5 & -0.1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

La période d'échantillonnage est  $T_s = 0.05$  s. Les sorties sont perturbées par un bruit gaussien. Trois simulations de Monte Carlo sont effectuées avec 30 réalisations chacune et des rapports signal/bruit de 5, 10 et 15 dB, afin d'étudier la robustesse des méthodes et des filtres proposés. La norme  $\ell_2$  de l'erreur de sortie est évaluée dans chaque cas :

$$J = \frac{1}{p} \sum_{\ell=1}^p \left( \frac{\sum_{i=1}^N (y_{\ell}(t_i) - \hat{y}_{\ell}(t_i))^2}{\sum_{i=1}^N (y_{\ell}(t_i))^2} \right), \quad (3.42)$$

où  $y_{\ell}$  et  $\hat{y}_{\ell}$  sont les  $\ell$ -èmes sorties du système et du modèle.

Pour vérifier l'influence des paramètres du réglage : le nombre de bloc-lignes  $i$ ,  $\omega_f$  pour la méthode algébrique (3.23),  $\ell$  pour la méthode LIF (3.35),  $\lambda$  pour la méthode GPMF (3.33), la norme  $\ell_2$  de l'erreur de sortie pour la méthode MOESP combinée avec des filtres différents est tracée sur la Fig. 3.4. La variation de l'erreur quadratique moyenne n'est pas grande pour un large intervalle de paramètre de réglage des trois filtres. L'optimum se trouve :

- pour la méthode algébrique, dans la zone de petites valeurs de  $\omega_f$  et ne dépend presque pas du nombre de bloc-lignes des matrices de Hankel  $i$ ,
- pour la méthode LIF, dans la zone de petites valeurs de  $\ell$  et  $i$ ,
- pour la méthode GPMF, dans la zone de petites valeurs de  $i$ .

Les paramètres de l'algorithme MOESP sont réglés à :  $i = 8$  pour les méthodes MOESP et PO-MOESP ;  $\omega_f = 6$  rad/s pour la méthode algébrique ;  $\ell$  est choisi dans l'intervalle  $[30 \ 100]$  pour minimiser l'erreur quadratique de la méthode LIF,  $\lambda$  est choisi dans l'intervalle  $[0.1 \ 2]$  pour minimiser l'erreur quadratique de la méthode GPMF. Les valeurs propres estimées en utilisant les méthodes MOESP et PO-MOESP sont tracées en utilisant :

- la méthode algébrique sur la Fig. 3.5(a) et Fig. 3.5(b),
- les filtres LIF sur la Fig. 3.5(c) et Fig. 3.5(d),

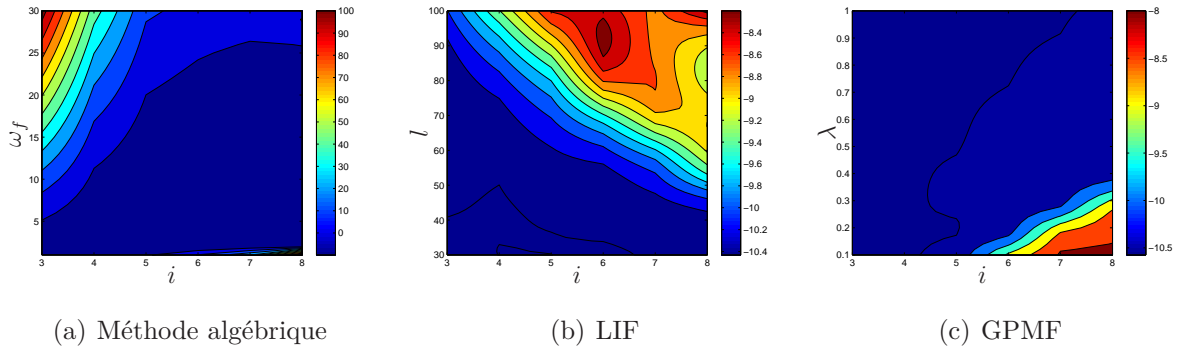


Fig. 3.4. Étude de l'effet des paramètres des filtres et du nombre des block-lignes  $i$  sur la méthode MOESP : critère d'erreur  $J$  en fonction de nombre des block-lignes  $i$  et de paramètres des filtres  $\omega_f$  (méthode algébrique),  $l$  (LIF) et  $\lambda$  (GPMF), avec RSB=10 dB

— les filtres GPMF sur la Fig. 3.5(e) et Fig. 3.5(f).

La Fig. 3.5(a) montre que l'algorithme MOESP combiné à la méthode algébrique est biaisé en présence de données bruitées. La Fig. 3.5(b) montre que l'algorithme PO-MOESP combiné à la même méthode algébrique permet d'avoir une meilleure estimation avec des valeurs propres non biaisées.

Dans le cas de l'algorithme MOESP combiné au LIF (Fig. 3.5(c)) et au GPMF (Fig. 3.5(e)), aucun biais n'apparait et les valeurs propres estimées de la matrice des pseudo-états sont moins dispersées comparés à l'algorithme PO-MOESP combiné au LIF (Fig. 3.5(d)) et au GPMF (Fig. 3.5(f)).

Les moyennes des valeurs propres estimées ainsi que leur écart-type, sont présentés sur le tableau 3.1.

Pour conclure, les trois méthodes suivantes sont retenues en présence de données bruitées dans la mesure où elles fournissent des résultats comparables :

- PO-MOESP avec la méthode algébrique,
- MOESP avec le LIF,
- MOESP avec le GPMF.

### 3.2.6 Estimation de l'ordre non entier

Dans cette sous-section, l'ordre de dérivation du système non entier  $\nu$  est considéré inconnu. Considérons le système de l'exemple précédent donné par (3.19)-(3.20) avec les matrices (3.41). Les signaux de sortie sont perturbés par un bruit ayant un RSB=15 dB. Le système est identifié pour des valeurs différentes de l'ordre de dérivation commensurable,  $\nu \in (0, 2)$ , qui est supposé inconnu et pour la dimension connue de la matrice d'état estimée,  $n = 2$ . La norme  $\ell_2$  de l'erreur de sortie (3.42) est évaluée. Le critère d'erreur en fonction de l'ordre commensurable  $\nu$  est tracé sur la Fig. 3.6(a).

Pour la vraie dimension du système identifié, l'optimum se trouve comme prévu à  $\nu = 0.9$ . Même en présence d'un bruit, les algorithmes MOESP et PO-MOESP combinés avec le filtrage de données permettent d'estimer précisément la dimension du système ainsi que les matrices de la représentation d'état. Le critère présente quelques sauts qui peuvent être expliqués par la présence d'un arrondi  $[\nu i]$  dans les expressions des filtres (3.33) et (3.35).

Dans un contexte plus général d'ordre de dérivation et de dimension du système inconnus, un test de plusieurs dimensions dans un ordre croissant ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) est recommandé. Le critère d'erreur est tracé dans le cas déterministe en fonction de l'ordre de dérivation sur la Fig. 3.6(b) et Fig. 3.6(c) pour  $n = 3$  et  $n = 4$  respectivement.

Néanmoins, dans le cas stochastique, la surestimation de la dimension du système ne permet pas d'obtenir des critères réguliers. Par conséquent, elle doit être évitée.

### 3.2.7 Conclusion

Dans cette section, les algorithmes d'identification de systèmes basés sur la méthode des sous-espaces dans le domaine temporel ont été présentés pour l'identification de système par modèle non entier utilisant la pseudo-représentation d'état. Dans le cas stochastique, en présence d'un bruit blanc en sortie, l'algorithme MOESP combiné avec le LIF et le GPMF et l'algorithme PO-MOESP combiné avec la méthode algébrique permettent d'obtenir les meilleures estimations. Aussi il est montré, sur un exemple, que l'identification de systèmes peut être effectuée avec succès dans le cas stochastique avec l'ordre de dérivation du système inconnu quand la dimension du système est proche de sa vraie valeur. Les contributions principales de cette section ont donné lieu à une communication dans la conférence *International Conference on Fractional Differentiation and its Applications* (Ivanova, Malti et Moreau, 2016b).

Vrais paramètres ou niveau de bruit (RSB)	Méthode algébrique		LIF		GPMF	
	$\overline{p_{1,2}}$	$\sigma_{p_{1,2}}$	$\overline{p_{1,2}}$	$\sigma_{p_{1,2}}$	$\overline{p_{1,2}}$	$\sigma_{p_{1,2}}$
Vrais paramètres	$-0.1 \pm 0.3i$		$-0.1 \pm 0.3i$		$-0.1 \pm 0.3i$	
MOESP						
15 dB	$-0.0895 \pm 0.3017i$	0.0036	$-0.0999 \pm 0.3i$	0.0023	$-0.0999 \pm 0.3004i$	0.0023
10 dB	$-0.0676 \pm 0.3623i$	0.0057	$-0.0995 \pm 0.3023i$	0.0039	$-0.1000 \pm 0.3009i$	0.0036
5 dB	$0.0058 \pm 0.3049i$	0.0157	$-0.1008 \pm 0.3043i$	0.0093	$-0.0994 \pm 0.3027i$	0.0059
PO-MOESP						
15 dB	$-0.1005 \pm 0.3021i$	0.0036	$-0.1001 \pm 0.2996i$	0.0068	$-0.1008 \pm 0.3001i$	0.0038
10 dB	$-0.1003 \pm 0.3017i$	0.0074	$-0.0982 \pm 0.3001i$	0.0101	$-0.1006 \pm 0.2999i$	0.0081
5 dB	$-0.1003 \pm 0.3011i$	0.0144	$-0.0969 \pm 0.3061i$	0.0208	$-0.1014 \pm 0.3026i$	0.0102

Tab. 3.1. Moyennes des valeurs propres  $p_{1,2} = \text{eig}(A)$  et leur écart-type ( $\sigma_{p_1}$  et  $\sigma_{p_2}$ ) pour trois simulations de Monte Carlo à différents niveaux de bruit

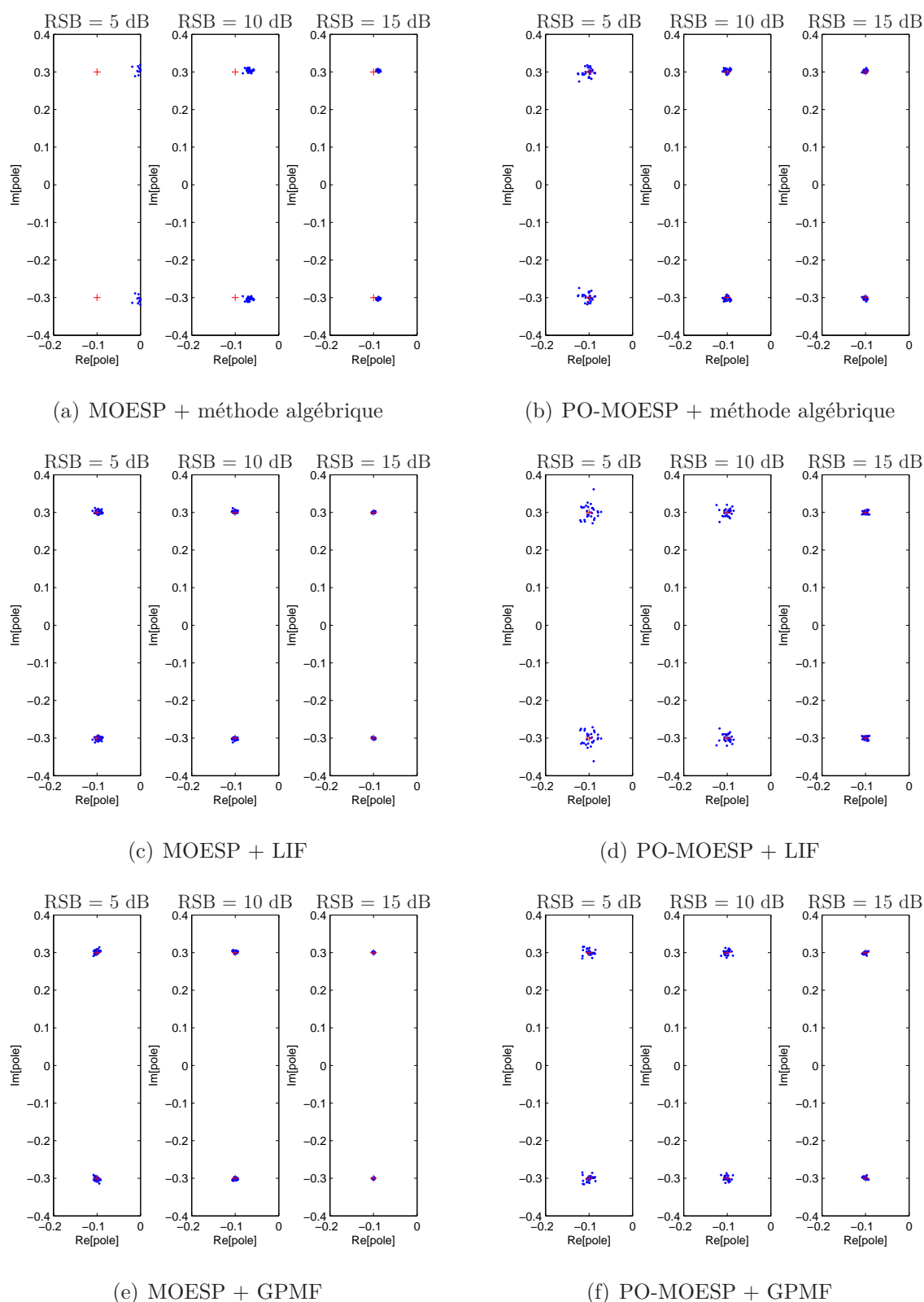


Fig. 3.5. Valeurs propres de la matrice  $A$  estimées avec les méthodes MOESP et PO-MOESP en utilisant la méthode algébrique, le LIF et le GPMF pour les simulations de Monte Carlo avec 30 réalisations et RSBs différents

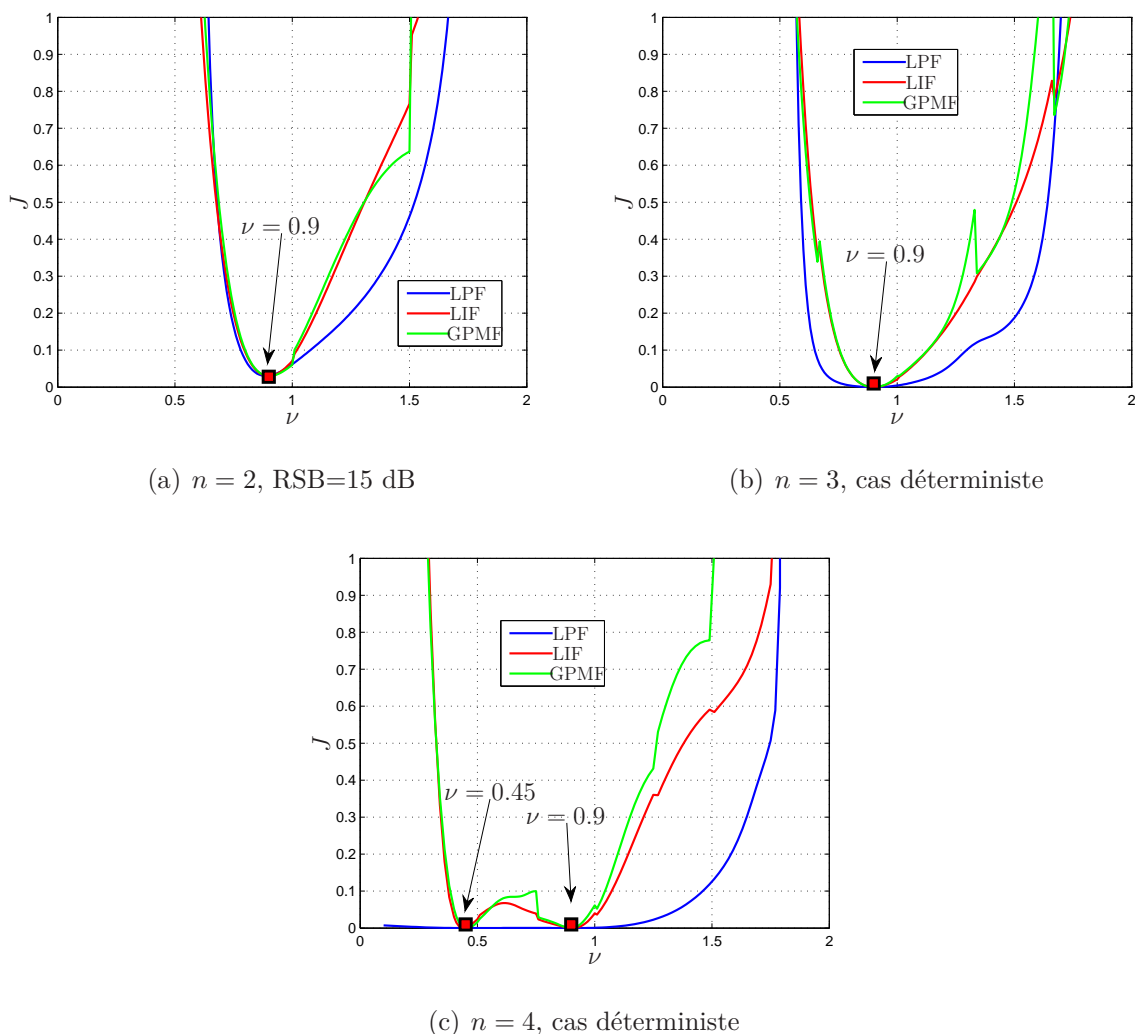


Fig. 3.6. Critère d'erreur  $J$  en fonction de l'ordre commensurable  $\nu$  pour différentes dimensions de la matrice d'état dans les cas déterministe et stochastique

### 3.3 Méthodes des sous-espaces dans le domaine fréquentiel

Dans cette section, un algorithme basé sur la méthode des sous-espaces est présenté pour l'identification de système par modèle non entier à partir de données fréquentielles. Les matrices de la pseudo-représentation d'état sont d'abord estimées par la méthode des sous-espaces utilisant les décompositions QR et en valeurs singulières. Ensuite, l'ordre de dérivation commensurable est estimé en choisissant celui qui minimise le critère dans l'intervalle  $(0, 2)$ . C'est la première méthode développée pour l'identification de systèmes multi-entrées multi-sorties par modèle non entier dans le domaine fréquentiel.

Au paragraphe 4.3.1, un système décrit par un modèle non entier est traité dans

le domaine fréquentiel selon la méthode MOESP ordinaire dans un contexte déterministe pour un ordre de dérivation fixe. Ensuite, au paragraphe 4.3.2, les étapes principales d'utilisation de la méthode MOESP en combinaison avec des filtres passe-bas sont présentées dans un contexte stochastique. Au paragraphe 4.3.3, un exemple montre la similitude de plusieurs pseudo-représentations d'état dans le contexte déterministe. Enfin, au paragraphe 4.3.4, un exemple avec simulations de Monte Carlo permet d'évaluer statistiquement les propriétés des estimateurs dans un contexte stochastique.

### 3.3.1 Contexte déterministe (algorithme MOESP)

Le problème d'identification est formulé comme l'estimation des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  de la pseudo-représentation d'état à TC (1.9)-(1.10), à partir de données fréquentielles  $\{u(j\omega_l)\}_{l=1}^{l=N}$  et  $\{y(j\omega_l)\}_{l=1}^{l=N}$ . L'ordre commensurable  $\nu$  est supposé connu. La représentation fréquentielle de (1.9)-(1.10) est donnée par :

$$(j\omega)^\nu X(j\omega) = AX(j\omega) + BU(j\omega), \quad (3.43)$$

$$Y(j\omega) = CX(j\omega) + DU(j\omega). \quad (3.44)$$

En calculant les réponses successives dans le domaine fréquentiel, un modèle linéaire étendu est obtenu :

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \Gamma_i \mathcal{X}(j\omega) + \Psi_i \mathcal{U}(j\omega), \quad (3.45)$$

dont les entrées et sorties sont données, grâce aux matrices de Hankel, par :

$$\mathcal{U}(j\omega) = \begin{bmatrix} (j\omega)^0 U(j\omega) \\ (j\omega)^\nu U(j\omega) \\ \vdots \\ (j\omega)^{(i-2)\nu} U(j\omega) \\ (j\omega)^{(i-1)\nu} U(j\omega) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}(j\omega) = \begin{bmatrix} (j\omega)^0 Y(j\omega) \\ (j\omega)^\nu Y(j\omega) \\ \vdots \\ (j\omega)^{(i-2)\nu} Y(j\omega) \\ (j\omega)^{(i-1)\nu} Y(j\omega) \end{bmatrix}.$$

La matrice d'observabilité étendue  $\Gamma_i$  et la matrice-bloc Toeplitz  $\Psi_i$  sont respectivement données par (3.6) et (3.7).

Soient les données d'entrées/sorties disponibles pour  $N$  fréquences distinctes  $\omega_l$ ,  $l = 1, \dots, N$ , le modèle linéaire étendu (3.45) peut être réécrit de la façon suivante :

$$\mathcal{Y}_N = \Gamma_i \mathcal{X}_N + \Psi_i \mathcal{U}_N, \quad (3.46)$$



où  $\mathcal{U}_N \in \mathbb{C}^{im \times N}$  et  $\mathcal{Y}_N \in \mathbb{C}^{im \times N}$  sont définis ci-dessous :

$$\mathcal{U}_N = \begin{bmatrix} (j\omega_1)^0 U(j\omega_1) & \cdots & (j\omega_N)^0 U(j\omega_N) \\ (j\omega_1)^\nu U(j\omega_1) & \cdots & (j\omega_N)^\nu U(j\omega_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (j\omega_1)^{(i-2)\nu} U(j\omega_1) & \cdots & (j\omega_N)^{(i-2)\nu} U(j\omega_N) \\ (j\omega_1)^{(i-1)\nu} U(j\omega_1) & \cdots & (j\omega_N)^{(i-1)\nu} U(j\omega_N) \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

$$\mathcal{Y}_N = \begin{bmatrix} (j\omega_1)^0 Y(j\omega_1) & \cdots & (j\omega_N)^0 Y(j\omega_N) \\ (j\omega_1)^\nu Y(j\omega_1) & \cdots & (j\omega_N)^\nu Y(j\omega_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (j\omega_1)^{(i-2)\nu} Y(j\omega_1) & \cdots & (j\omega_N)^{(i-2)\nu} Y(j\omega_N) \\ (j\omega_1)^{(i-1)\nu} Y(j\omega_1) & \cdots & (j\omega_N)^{(i-1)\nu} Y(j\omega_N) \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

et où  $\mathcal{X}_N \in \mathbb{C}^{n \times N}$  :

$$\mathcal{X}_N = \begin{bmatrix} X(j\omega_1) & X(j\omega_2) & \cdots & X(j\omega_N) \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

L'équation (3.46) à valeurs complexes est décomposée en parties réelle et imaginaire :

$$\mathcal{Y}_N^{re} = \Gamma_i \mathcal{X}_N^{re} + \Psi_i \mathcal{U}_N^{re}, \quad (3.50)$$

où

$$\mathcal{Y}_N^{re} = \begin{bmatrix} \Re \{ \mathcal{Y}_N \} & \Im \{ \mathcal{Y}_N \} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ip \times 2N}, \quad (3.51)$$

$$\mathcal{U}_N^{re} = \begin{bmatrix} \Re \{ \mathcal{U}_N \} & \Im \{ \mathcal{U}_N \} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{im \times 2N}, \quad (3.52)$$

$$\mathcal{X}_N^{re} = \begin{bmatrix} \Re \{ \mathcal{X}_N \} & \Im \{ \mathcal{X}_N \} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 2N}. \quad (3.53)$$

L'équation (3.50) permet d'utiliser l'identification de systèmes non entiers par la méthode des sous-espaces de la même façon que pour les systèmes rationnels à TD. L'algorithme MOESP ordinaire (Katayama, 2005), décrit au paragraphe 4.2.1, en remplaçant simplement les données temporelles (3.9) par des données fréquentielles (3.47)-(3.48), peut être appliqué.

### 3.3.2 Contexte stochastique (algorithme MOESP combiné aux filtres passe-bas)

Dans ce paragraphe, la sortie du système (1.9)-(1.10) est considérée comme étant perturbée par un bruit blanc additif  $v(t)$ , soit dans le domaine de Laplace :

$$s^\nu X(s) = AX(s) + BU(s), \quad (3.54)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) + V(s). \quad (3.55)$$

Compte-tenu de la présence du bruit, il est nécessaire de filtrer la sortie du système perturbé. Haverkamp (2001) propose d'utiliser la transformation  $w = (s - a)/(s + a)$  et de remplacer l'opérateur de Laplace  $s$  par son équivalent en  $w$  :  $s = a(1 + w)/(1 - w)$ . Pour un modèle non entier avec un ordre de dérivation  $\nu$ , le même principe peut être appliqué, en remplaçant le filtre passe-tout précédent par :  $w = (s^\nu - a)/(s^\nu + a)$ . De ce fait,  $s^\nu = a(1 + w)/(1 - w)$ .

L'équation (3.54) se transforme en :

$$a \frac{1 + w}{1 - w} X(s) = AX(s) + BU(s), \quad (3.56)$$

$$wX(s) = A_w X(s) + B_w (1 - w) U(s), \quad (3.57)$$

où

$$A_w = (A + aI)^{-1} (A - aI), \quad (3.58)$$

$$B_w = (A + aI)^{-1} B. \quad (3.59)$$

L'équation de sortie (3.55) devient quant à elle :

$$(1 - w) Y(s) = C(1 - w) X(s) + D(1 - w) U(s) + (1 - w) V(s), \quad (3.60)$$

$$(1 - w) Y(s) = C_w X(s) + D_w (1 - w) U(s) + (1 - w) V(s), \quad (3.61)$$

où

$$C_w = 2aC(A + aI)^{-1}, \quad (3.62)$$

$$D_w = D - C(A + aI)^{-1} B. \quad (3.63)$$

Le filtre obtenu  $(1 - w)$  permet de réduire l'effet du bruit de sortie :

$$L_0(s) = (1 - w) = 1 - \frac{s^\nu - a}{s^\nu + a} = \frac{2a}{s^\nu + a}, \quad (3.64)$$

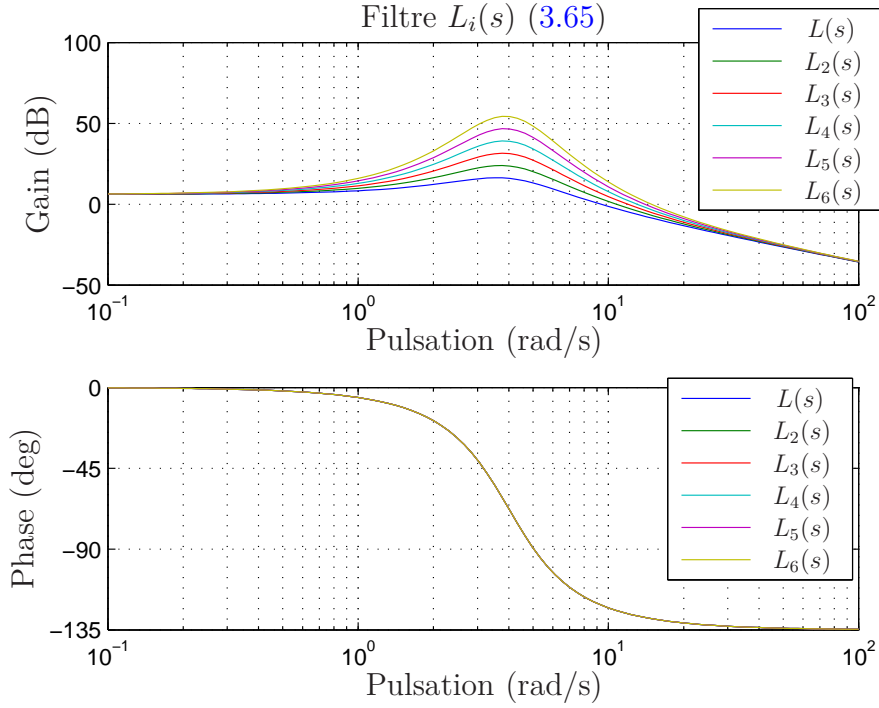
$$L_i(s) = (1 - w) w^i = 2a \frac{(s^\nu - a)^i}{(s^\nu + a)^{i+1}}. \quad (3.65)$$

Le filtre passe-bas (3.65), appliqué au système perturbé, réduit le bruit en hautes fréquences. Les diagrammes de Bode du filtre (3.65) avec  $a = 8$  sont tracés sur la Fig. 3.7.

Ainsi, le système (3.54)-(3.55) est équivalent à :

$$wX(s) = A_w X(s) + B_w (1 - w) U(s), \quad (3.66)$$

$$L_0(s) Y(s) = C_w X(s) + D_w L_0(s) U(s) + L_0(s) V(s). \quad (3.67)$$


 Fig. 3.7. Diagrammes de Bode du filtre  $L_i(s)$  (3.65) avec  $a = 8$  et  $\nu = 1.5$ 

Les matrices de Hankel sont construites à partir de données filtrées :

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \begin{bmatrix} L_0(j\omega) Y(j\omega) \\ L_1(j\omega) Y(j\omega) \\ \vdots \\ L_{i-1}(j\omega) Y(j\omega) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U}(j\omega) = \begin{bmatrix} L_0(j\omega) U(j\omega) \\ L_1(j\omega) U(j\omega) \\ \vdots \\ L_{i-1}(j\omega) U(j\omega) \end{bmatrix}.$$

Après filtrage des données, l'algorithme MOESP est utilisé pour estimer les matrices  $A_w$ ,  $B_w$ ,  $C_w$  et  $D_w$ . Ensuite, les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont calculées par transformations inverses :

$$A = a(I + A_w)(I - A_w)^{-1}, \quad (3.68)$$

$$B = 2a(I - A_w)^{-1}B_w, \quad (3.69)$$

$$C = C_w(I - A_w)^{-1}, \quad (3.70)$$

$$D = D_w + C_w(I - A_w)^{-1}B_w. \quad (3.71)$$

### 3.3.3 Exemple d'illustration dans un contexte déterministe

Dans cette section, un exemple simple est présenté pour illustrer la propriété de transformation de similarité (*Théorème 1*) des systèmes non entiers. A cet effet, l'algorithme MOESP ordinaire est appliqué dans le contexte déterministe. Considérons un sys-

tème ayant 2 entrées, 2 sorties décrit par (1.9)-(1.10) et un ordre commensurable  $\nu = 1.5$ . La dimension de la matrice d'état est  $\dim(A) = n = 2$ . Les données d'entrées/sorties sont générées dans le domaine fréquentiel. Le système est décrit par les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0.1 \\ 0.5 & -2.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Les paramètres de l'algorithme sont fixés à  $N = 100$  fréquences log-équidistantes dans la plage  $\omega_i \in [10^{-3} \ 10^1]$  rad/s, les signaux d'entrée sont fixés respectivement à  $U_1(j\omega_i) = 1$ , ce qui correspond dans le domaine temporel à une impulsion de Dirac idéale et  $U_2(j\omega_i) = \exp(-t_0 j\omega_i)$ , ce qui correspond dans le domaine temporel à une impulsion retardée de  $t_0$ , avec dans cet exemple  $t_0 = 3$  s.

Le système est identifié pour différentes valeurs de l'ordre commensurable  $\nu \in (0, 2)$  supposés inconnus et pour les quatre dimensions différentes de la matrice de transition  $n = \dim(A)$  :  $n = 2$ ;  $n = 3$ ;  $n = 4$  et  $n = 6$ .

L'ordre de dérivation commensurable est estimé par minimisation de la norme  $\ell_2$  de l'erreur de sortie, évaluée pour les 4 dimensions de la matrice de transition :

$$J = \frac{1}{p} \sum_{\ell=1}^p \left( \frac{\sum_{i=1}^N (Y_{\ell}(j\omega_i) - \hat{Y}_{\ell}(j\omega_i))^* (Y_{\ell}(j\omega_i) - \hat{Y}_{\ell}(j\omega_i))}{\sum_{i=1}^N (Y_{\ell}(j\omega_i))^* (Y_{\ell}(j\omega_i))} \right), \quad (3.73)$$

où  $Y_{\ell}$  et  $\hat{Y}_{\ell}$  sont respectivement la  $\ell$ -ième sortie du système et du modèle, ainsi que le critère % fit :

$$\% \text{ fit} = (1 - J) \times 100\%. \quad (3.74)$$

Dans le premier cas, lorsque la dimension du modèle identifié correspond à la dimension réelle du système, l'optimum se trouve comme prévu à  $\nu = 1.5$  (Fig. 3.8). Lorsque  $\dim(A) = 3$ , l'optimum se trouve à la vraie valeur de l'ordre commensurable,  $\nu = 1.5$ , et la matrice  $A$  est singulière, voire mal conditionnée, à cause de la chute de rang de  $n = 3$  à  $n = 2$  correspondant à la vraie dimension du système. Lorsque  $\dim(A) = 4$  (respectivement  $\dim(A) = 6$ ) deux (respectivement trois) optima globaux sont présents à 1.5 et à 0.75 (respectivement 1.5, 0.75 et 0.5), comme prévu par le *théorème 1*.

Lorsqu'à la fois la dimension du système  $n$  et l'ordre de dérivation  $\nu$  sont inconnus, il est préconisé de mettre en place une procédure itérative à partir d'une faible valeur de  $n$  (typiquement  $n = 1$  ou 2) et d'évaluer l'ordre optimal  $\nu$  pour ce  $n$ . Si l'identification n'est pas jugée acceptable,  $n$  est incrémenté et de nouveau  $\nu$  est recalculé jusqu'à ce que le couple  $(n, \nu)$  soit jugé acceptable ou que la procédure d'identification soit jugée inefficace.

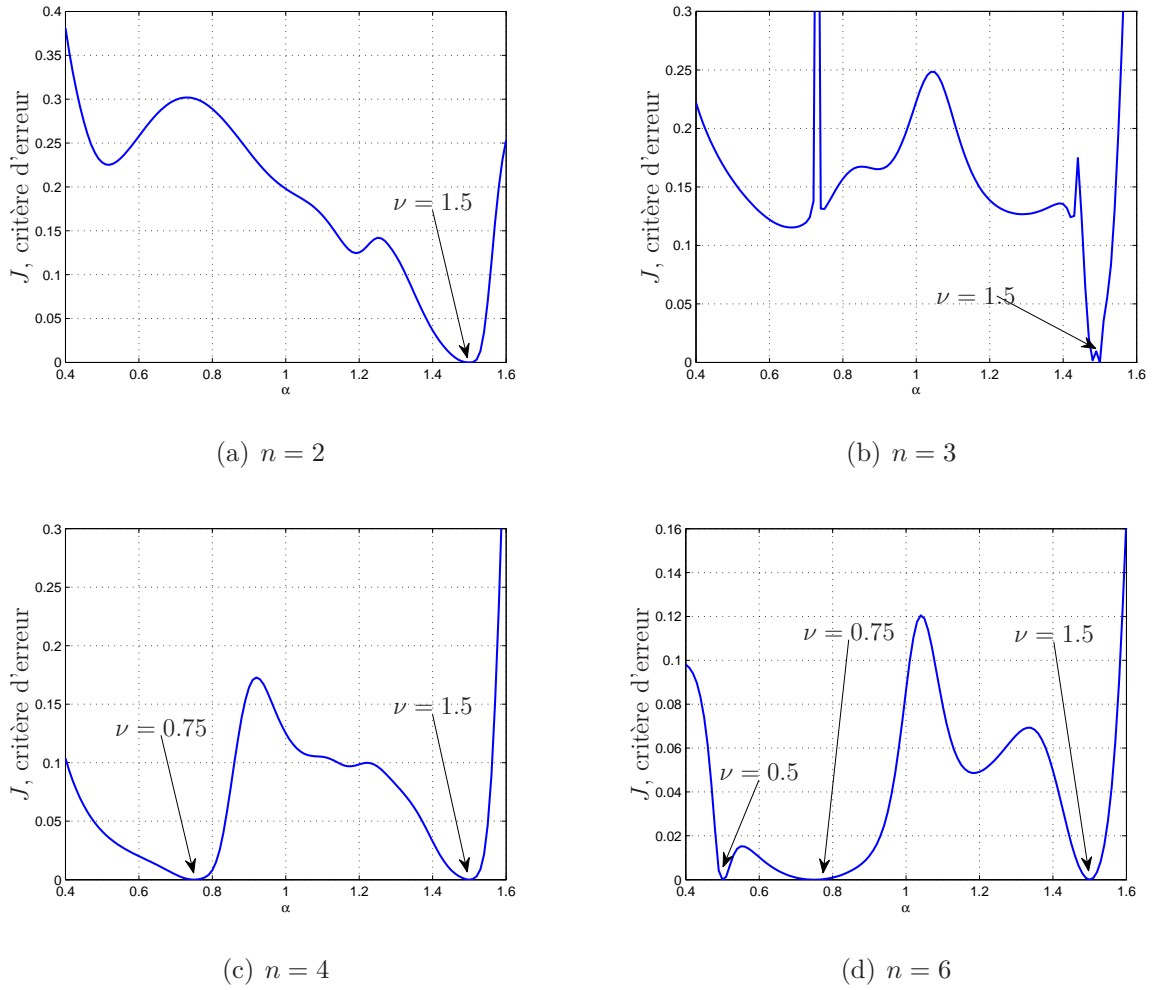


Fig. 3.8. Critère d'erreur  $J$  en fonction de l'ordre commensurable  $\nu$  pour des dimensions différentes de la matrice de transition,  $\dim(A) = n$ , dans le contexte déterministe

### 3.3.4 Exemple d'illustration dans le contexte stochastique

Considérons le même système que celui de l'exemple précédent, avec une sortie perturbée par un bruit blanc complexe ayant un rapport signal sur bruit (RSB) de 30 et 50 dB :

$$RSB = 10 \log_{10} \left( \frac{Y^*(j\omega) Y(j\omega)}{V^*(j\omega) V(j\omega)} \right), \quad (3.75)$$

où  $V$  est un bruit blanc à valeurs complexes avec des contributions équivalentes des parties réelles et imaginaires.

Pour vérifier l'influence du paramètre de réglage  $a$  du filtre (3.65), la norme  $\ell_2$  (3.42) de l'erreur de sortie est tracée en fonction de  $a$  et de  $\nu$  sur la Fig. 3.9. Différentes valeurs de  $a$  sont acceptables dans l'intervalle  $[6, 14]$ . Cette valeur est fixée à 8 pour la suite de cet exemple.

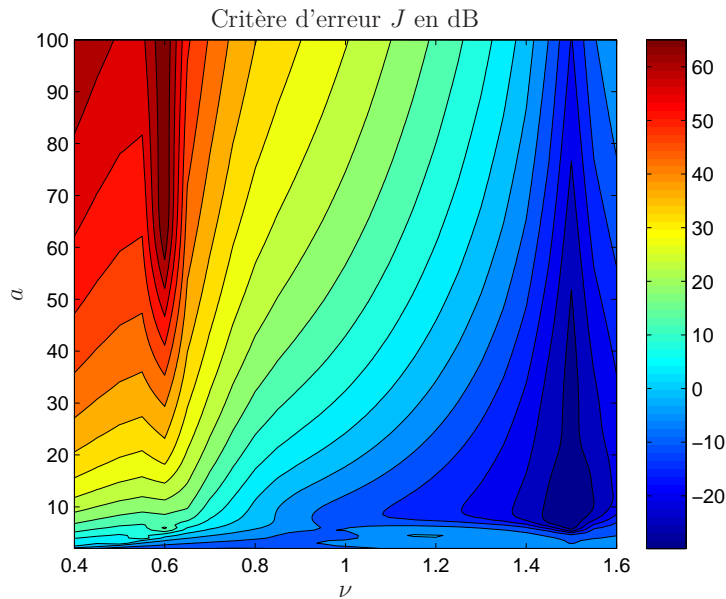


Fig. 3.9. Critère d'erreur  $J$  (3.42) en dB en fonction de l'ordre de dérivation du système  $\nu$  et du paramètre  $a$  du filtre (3.65) avec RSB=30 dB

Le système est identifié pour différentes valeurs de l'ordre commensurable  $\nu \in (0, 2)$  supposés inconnus et pour différentes dimensions de la matrice de transition. Les résultats sont présentés sur la Fig. 3.10.

Lorsque  $n = 2$  et  $n = 3$ , le minimum du critère  $J$  se trouve à  $\nu = 1.5$ . Lorsque  $n = 4$ , le minimum est à  $\nu = 0.75$ . Enfin, pour  $n = 6$ , le critère est très irrégulier dû au nombre important de paramètres. En conclusion, la transformation de similarité différentielle ne s'applique pas, en présence de bruit.

Maintenant la dimension de la matrice  $A$  est réglée à  $\hat{n} = 2$  et l'ordre commensurable est réglé à la valeur réelle  $\hat{\nu} = 1.5$ .

Les valeurs propres obtenues de la matrice estimée  $\hat{A}$  sont représentées en bleu sur la Fig. 3.11 et les vraies valeurs propres de la matrice  $A$  sont représentées en rouge. Comme le montre la Fig. 3.11 l'algorithme MOESP ordinaire n'est pas performant en présence de données bruitées avec un RSB = 30 dB, ce qui est généralement considéré comme un faible niveau de bruit.

Maintenant l'algorithme MOESP combiné au filtre (3.65) ayant  $a = 8$  est appliqué en utilisant les mêmes paramètres de simulation et des niveaux de bruit plus importants avec RSB = 30 et 20 dB. La Fig. 3.12 montre que cet algorithme fonctionne mieux dans le contexte stochastique car les valeurs propres estimées de la matrice de transition sont moins dispersées.

Les moyennes des valeurs propres ainsi que leur écart-type, présentés sur le tableau

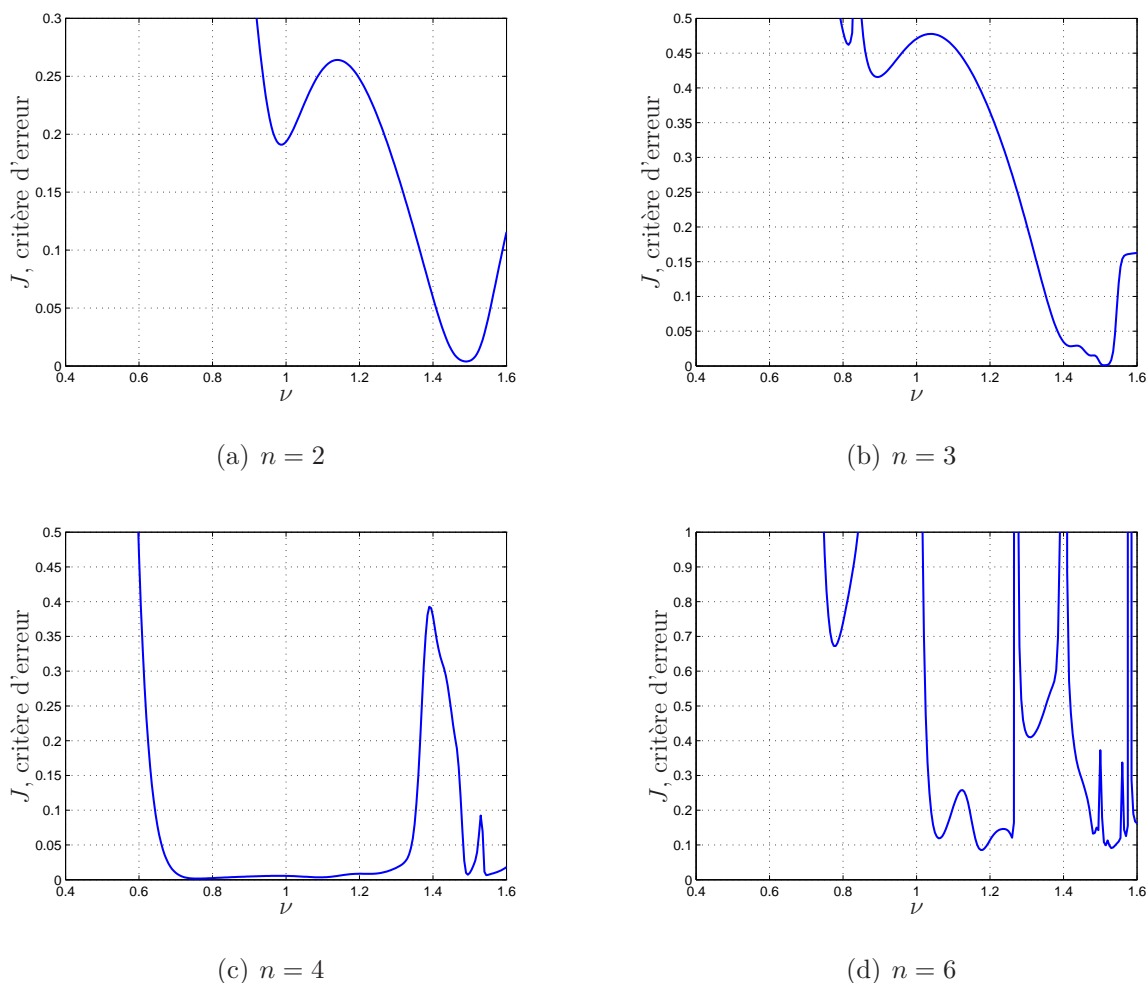


Fig. 3.10. Critère d'erreur  $J$  en fonction de l'ordre commensurable  $\nu$  pour des dimensions différentes de la matrice de transition,  $\dim(A) = n$ , dans le contexte stochastique avec RSB=30 dB

3.2, indiquent que l'algorithme est très peu (voir non-) biaisé.

### 3.3.5 Lorsque $n$ et $\nu$ sont inconnus

L'exemple décrit au paragraphe 4.1 est repris ici dans un contexte stochastique avec un niveau de bruit de RSB=30 dB. Lorsqu'à la fois la dimension du système  $n$  et l'ordre de dérivation  $\nu$  sont inconnus, une procédure itérative est mise en place. La dimension de la matrice de transition est d'abord fixée à  $n = 1$ , et la norme  $\ell_2$  de l'erreur de sortie (3.42) est tracée en fonction de l'ordre commensurable sur la Fig. 3.13(a) qui montre que le minimum du critère,  $\min(J) = 0.18$  (% fit = 82%), se trouve à  $\nu = 1.1$ . Ce critère étant jugé insatisfaisant,  $n$  est augmenté à 2 et la procédure est réitérée. Comme le montre la Fig. 3.13(b), le minimum,  $\min(J) = 0.001$  (% fit = 99.9%), se trouve à  $\nu = 1.5$ . Pour

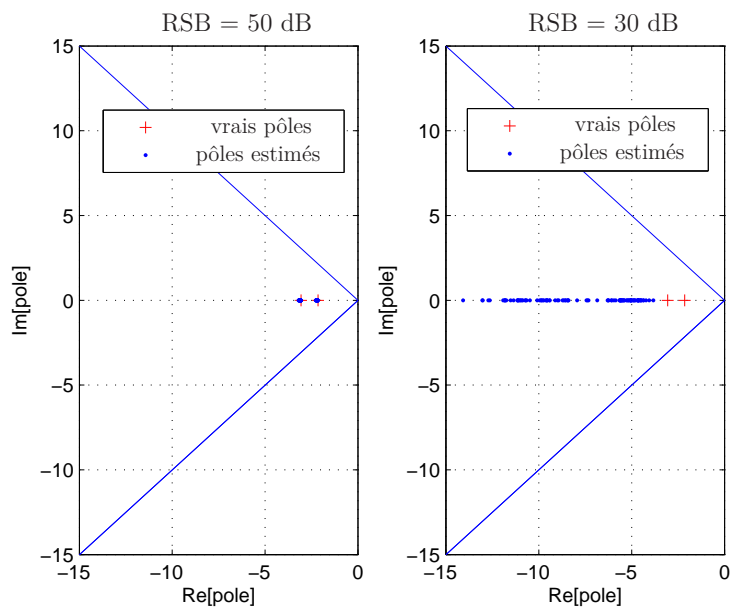


Fig. 3.11. Valeurs propres estimées de la matrice  $A$  pour 50 réalisations pour différents RSBs sans utilisation du filtre (3.65)

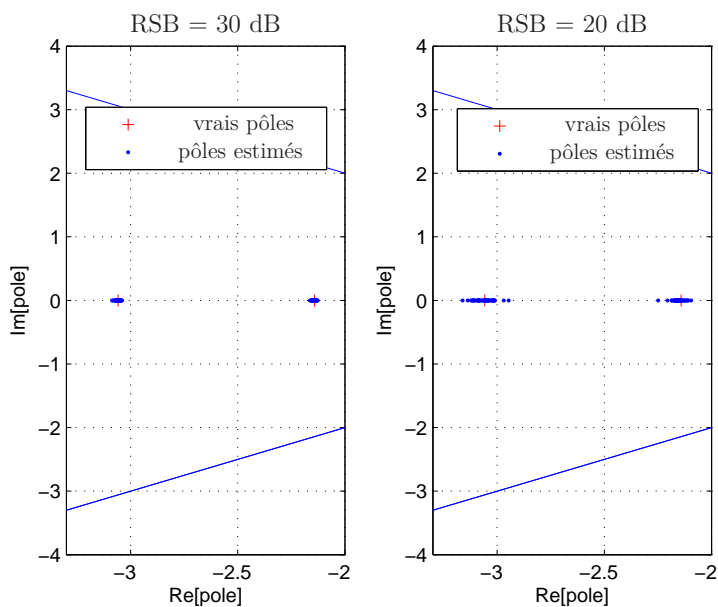


Fig. 3.12. Valeurs propres estimées de la matrice  $\hat{A}$  pour 50 réalisations pour différents RSBs en utilisant le filtre (3.65)



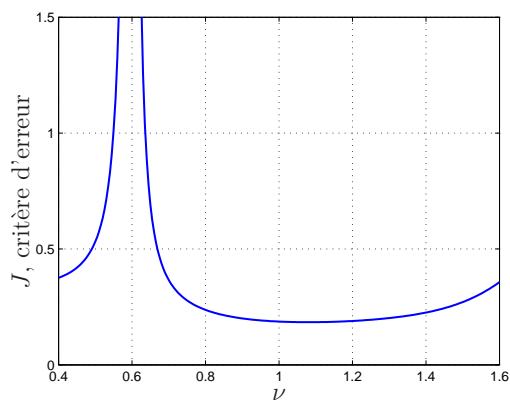
Vrais paramètres ou niveau de bruit (RSB)	$\bar{p}_1$	$\sigma_{p_1}$	$\bar{p}_2$	$\sigma_{p_2}$
Vrais paramètres	-3.0583	-	-2.1417	-
30 dB	-3.058	0.016	-2.141	0.010
20 dB	-3.047	0.035	-2.151	0.027
10 dB	-2.99	0.12	-2.21	0.08

Tab. 3.2. Moyennes des valeurs propres  $p_{1,2} = \text{eig}(A)$  et leur écart-type ( $\sigma_{p_1}$  et  $\sigma_{p_2}$ ) pour trois simulations de Monte Carlo à différents niveaux de bruit

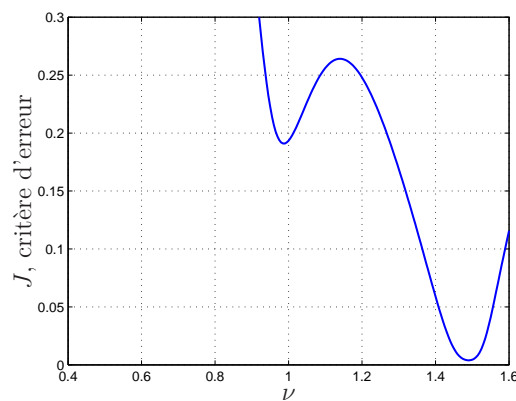
$n = 3$ , la Fig. 3.13(c) montre que l'optimum du critère,  $\min(J) = 0.002$  ((% fit = 99.8%)), se trouve à  $\nu = 1.51$ . Dans la mesure où l'évolution de l'erreur n'est pas significative, entre  $n = 2$  et  $n = 3$ , la dimension  $n = 2$  est retenue pour le système.

### 3.3.6 Conclusion

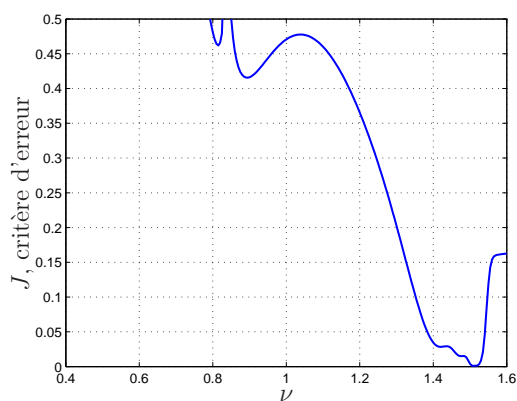
Dans cette section, un algorithme d'identification de systèmes non entiers utilisant la méthode des sous-espaces dans le domaine fréquentiel est présenté. Il illustre une caractéristique typique aux modèles non entiers : la transformation de similarité différentielle. Elle permet d'obtenir des minima globaux multiples dans un cas déterministe quand la dimension de la matrice d'état est surdimensionnée. Dans le cas stochastique, en présence d'un bruit blanc, l'algorithme MOESP combiné avec des filtres passe-bas permet d'avoir une meilleure estimation. Il introduit cependant un paramètre supplémentaire  $a$  qui doit être réglé. Les contributions principales de cette partie du chapitre ont donné lieu aux communications dans les conférences internationale IEEE MESA (Ivanova, Malti et Moreau, 2014a) et nationale JDMACS (Ivanova, Malti et Moreau, 2015) et à un article accepté dans la revue nationale JESA (Ivanova, Malti et Moreau, 2017).



(a)  $n = 1$



(b)  $n = 2$



(c)  $n = 3$

Fig. 3.13. Critère d'erreur  $J$  en fonction de l'ordre commensurable  $\nu$  pour des dimensions différentes de la matrice de transition,  $\dim(A) = n$ , dans le contexte stochastique avec RSB=30 dB

# Chapitre 4

## Application à la diffusion thermique dans deux barreaux métalliques

### Contents

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>94</b>
<b>4.2</b>	<b>Modélisation théorique du transfert thermique dans un milieu fini</b>	<b>95</b>
4.2.1	Schématisation, paramétrage et mise en équation	95
4.2.2	Résolution du système d'équations de la chaleur	96
4.2.3	Analyse en $x = 0$	98
4.2.4	Analyse en $0 \leq x \leq L$	102
4.2.5	Résumé	106
<b>4.3</b>	<b>Étude du modèle numérique du banc d'essai thermique</b>	<b>107</b>
4.3.1	Description et modélisation numérique du banc d'essai	107
4.3.2	Estimation paramétrique par la méthode des sous-espaces appliquée aux données de simulation	109
4.3.3	Conclusions	116
<b>4.4</b>	<b>Étude du banc d'essais physique</b>	<b>119</b>
4.4.1	Description et modélisation du banc expérimental	119
4.4.2	Étude du couplage entre les deux barreaux	119
4.4.3	Analyse de pertes par comparaison avec le modèle numérique	121
4.4.4	Estimation paramétrique par la méthode des sous-espaces appliquée aux données réelles	123
4.4.5	Conclusions	131
<b>4.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>131</b>

---

## 4.1 Introduction

Les modèles non entiers ont prouvé leur efficacité pour la modélisation de la diffusion thermique. De par leur compacité paramétrique, les modèles non entiers, comparés aux modèles entiers ou aux modèles par éléments finis, sont particulièrement adaptés à la modélisation de tels systèmes diffusifs. Oldham et Spanier (1970), Oldham et Spanier (1972) et Oldham et Spanier (1973) ont été les premiers à utiliser la dérivation non entière pour modéliser les phénomènes de diffusion. Ils ont montré que les systèmes diffusifs peuvent être modélisés par des fonctions de transfert ayant des ordres de dérivation multiples de 0.5. Leurs travaux ont été approfondis par d'autres (Chevrié et al., 2015 ; Daou, Christophy et al., 2013 ; Christophy et al., 2013 ; Daou, Moreau et al., 2012 ; Assaf et al., 2012 ; Benchellal, Poinot et Trigeassou, 2007 ; Benoit-Marand et al., 2006 ; Christophy, 2016). Pour les systèmes thermiques semi-infinis, J. Battaglia et al. (2000) et Agrawal (2004) ont montré que la solution exacte de l'équation de la chaleur, qui lie le flux thermique injecté en surface à la température, contient un intégrateur d'ordre 0.5.

Les développements théoriques des chapitres précédents sont appliqués à un système physique en diffusion thermique. Dans la littérature, le modèle liant la densité de flux de chaleur à travers un barreau métallique à la température mesurée, sous certaines hypothèses est non entier, car il découle de la résolution de l'équation de la chaleur (équation aux dérivées partielles) (Victor, 2010 ; J.-L. Battaglia, Cois et al., 2001 ; Cois, 2002 ; K. Miller et Ross, 1993 ; Podlubny, 1999b). De ce fait, le système thermique peut aussi être considéré comme un système entier de dimension infinie (Laroche, 2000). Toutefois, l'opérateur non entier est mieux adapté à la modélisation des systèmes de dimension infinie, comme les systèmes diffusifs, car il permet d'obtenir des modèles compacts. Une telle modélisation a permis, par exemple, à J.-D. Gabano et Poinot (2011) et J. Gabano et Poinot (2011) d'estimer la conductivité et la diffusivité thermiques dans un matériau homogène.

Dans ce chapitre, un système thermique, composé de deux barreaux en étain, est identifié, d'abord à partir de données de simulation, et ensuite à partir de données réelles.

La modélisation théorique du transfert thermique, décomposé en une cascade de transferts locaux dont tous les paramètres ainsi que toutes les variables d'entrée et de sortie ont un sens physique, est proposée au paragraphe 4.2.

L'étude du système thermique, constitué de deux barreaux en étain, est d'abord réalisée en simulation par éléments finis sous COMSOL au paragraphe 4.3, puis ensuite sur un procédé réel au paragraphe 4.4. Dans chaque cas, une identification par la méthode des sous-espaces est proposée.

## 4.2 Modélisation théorique du transfert thermique dans un milieu fini

La décomposition en cascade de transferts locaux facilite l'analyse de comportement du milieu fini de dimension  $L$ . Deux études complémentaires sont proposées (Christophy, 2016). La première est faite en surface (pour  $x = 0$ ) où d'un point de vue thermique le phénomène d'effusivité est dominant, puis la seconde en profondeur (pour  $x > 0$ ) où le phénomène de diffusivité thermique est fondamental.

### 4.2.1 Schématisation, paramétrage et mise en équation

Le transfert de chaleur monodimensionnel est considéré dans un milieu homogène fini (Fig. 4.1) de longueur  $L$  ( $x \in [0; L]$ ), de diffusivité  $\alpha_d$  et de conductivité  $\lambda$ , soumis à un flux  $\psi(t)$  en  $x = 0$ . L'absence de pertes est considérée en  $x = 0$ .

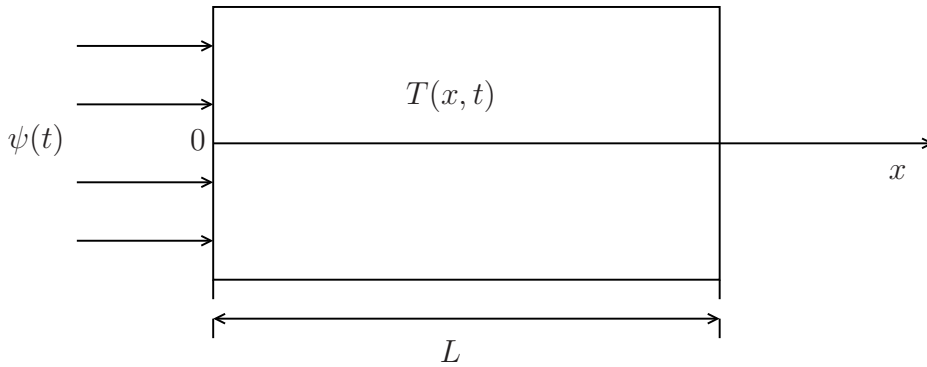


Fig. 4.1. Transfert de chaleur monodimensionnel dans un milieu homogène fini

Le transfert de chaleur est régi par un système d'équations aux dérivées partielles, soit :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha_d \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \phi(t), \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (4.2)$$

où  $\phi(t)$  représente la densité de flux égale au rapport du flux  $\psi(t)$  et de la section transversale  $S$  du milieu, soit  $\phi(t) = \psi(t)/S$ .

Les conditions initiale et aux frontières sont données par :

$$-\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0, \quad x = L, \quad t > 0, \quad (4.3)$$

$$T(x, t) = 0, \quad 0 \leq x < L, \quad t = 0. \quad (4.4)$$

## 4.2.2 Résolution du système d'équations de la chaleur

La condition initiale sur la température étant nulle, la transformation de Laplace de l'équation (4.1) conduit à une équation différentielle d'ordre 2 par rapport à la variable  $x$ , soit :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(x, s)}{\partial x^2} - \frac{s}{\alpha_d} \bar{T}(x, s) = 0, \text{ où } \bar{T}(x, s) = \mathcal{L}\{T(x, t)\}, \quad (4.5)$$

dont la solution est de la forme :

$$\bar{T}(x, s) = K_1(s) \exp\left(x\sqrt{s/\alpha_d}\right) + K_2(s) \exp\left(-x\sqrt{s/\alpha_d}\right). \quad (4.6)$$

La prise en compte des conditions aux frontières (en  $x = 0$  et en  $x = L$ ) permet d'établir un système de deux équations à deux inconnues,  $K_1(s)$  et  $K_2(s)$ , soit :

$$K_1(s) - K_2(s) = -\frac{1}{\lambda\sqrt{s/\alpha_d}} \bar{\phi}(s), \quad (4.7)$$

$$K_1(s) \exp\left(L\sqrt{s/\alpha_d}\right) - K_2(s) \exp\left(-L\sqrt{s/\alpha_d}\right) = 0, \quad (4.8)$$

dont la résolution, en introduisant  $\lambda = \alpha_d \rho C_p$ , conduit aux expressions de  $K_1(s)$  et  $K_2(s)$ , soit :

$$K_1(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda\rho C_p s}} \frac{\exp\left(-L\sqrt{s/\alpha_d}\right)}{\exp\left(L\sqrt{s/\alpha_d}\right) - \exp\left(-L\sqrt{s/\alpha_d}\right)} \bar{\phi}(s), \quad (4.9)$$

$$K_2(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda\rho C_p s}} \frac{\exp\left(L\sqrt{s/\alpha_d}\right)}{\exp\left(L\sqrt{s/\alpha_d}\right) - \exp\left(-L\sqrt{s/\alpha_d}\right)} \bar{\phi}(s). \quad (4.10)$$

En introduisant les expressions (4.9)-(4.10) dans la solution (4.5) et en remplaçant la densité de flux  $\bar{\phi}(s)$  par le flux  $\bar{\psi}(s)$  ( $\bar{\phi}(s) = \bar{\psi}(s)/S$ ), on obtient alors la fonction de transfert  $H(x, s, L)$  du milieu fini entre la température  $\bar{T}(x, s, L)$  et le flux  $\bar{\psi}(s)$ , soit :

$$H(x, s, L) = \frac{\bar{T}(x, s, L)}{\bar{\psi}(s)} = \frac{1}{S\sqrt{\lambda\rho C_p s}} \frac{\exp\left(-(L-x)\sqrt{s/\alpha_d}\right) + \exp\left((L-x)\sqrt{s/\alpha_d}\right)}{\exp\left(L\sqrt{s/\alpha_d}\right) - \exp\left(-L\sqrt{s/\alpha_d}\right)}, \quad (4.11)$$

ou encore, en introduisant les fonctions hyperboliques cosh et tanh,

$$H(x, s, L) = \frac{\bar{T}(x, s, L)}{\bar{\psi}(s)} = \frac{1}{S\sqrt{\lambda\rho C_p s}} \frac{1}{\tanh\left(L\sqrt{s/\alpha_d}\right)} \frac{\cosh\left((L-x)\sqrt{s/\alpha_d}\right)}{\cosh\left(L\sqrt{s/\alpha_d}\right)}. \quad (4.12)$$

En résumé, la fonction de transfert est de la forme :

$$H(x, s, L) = H_0 I^{0.5}(s) F(0, s, L) G(x, s, L), \quad (4.13)$$

en posant

$$H_0 = \frac{s^{0.5} \overline{T}(0, s, \infty)}{\overline{\psi}(s)} = \frac{1}{S\eta_d}, \quad (4.14)$$

$$I^{0.5}(s) = \frac{\overline{T}(0, s, \infty)}{s^{0.5} \overline{T}(0, s, \infty)} = \frac{1}{s^{0.5}}, \quad (4.15)$$

$$F(0, s, L) = \frac{\overline{T}(0, s, L)}{\overline{T}(0, s, \infty)} = \frac{1}{\tanh(\sqrt{s/\omega_L})}, \quad (4.16)$$

$$G(x, s, L) = \frac{\overline{T}(x, s, L)}{\overline{T}(0, s, L)} = \frac{\cosh(\sqrt{s/\omega_{Lx}})}{\cosh(\sqrt{s/\omega_L})}, \quad (4.17)$$

avec  $\eta_d = \sqrt{\lambda\rho C_p}$ , où  $\eta_d$  représente l'effusivité thermique,  $\omega_L = \alpha_d/L^2$  et  $\omega_{Lx} = \alpha_d/(L-x)^2$ . Les pulsations  $\omega_L$  et  $\omega_{Lx}$  sont liées par une relation de la forme :

$$\omega_L = \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \omega_{Lx}. \quad (4.18)$$

En outre, si  $x = 0$  alors  $\omega_L = \omega_{Lx}$ , si  $x \ll L$  alors  $\omega_L \approx \omega_{Lx}$ .

L'inverse de la fréquence transitionnelle  $\omega_L$  définit la constante de temps de diffusion,  $\tau_L$ , du milieu fini de longueur  $L$ , soit :

$$\tau_L = \frac{1}{\omega_L} = \frac{L^2}{\alpha_d}. \quad (4.19)$$

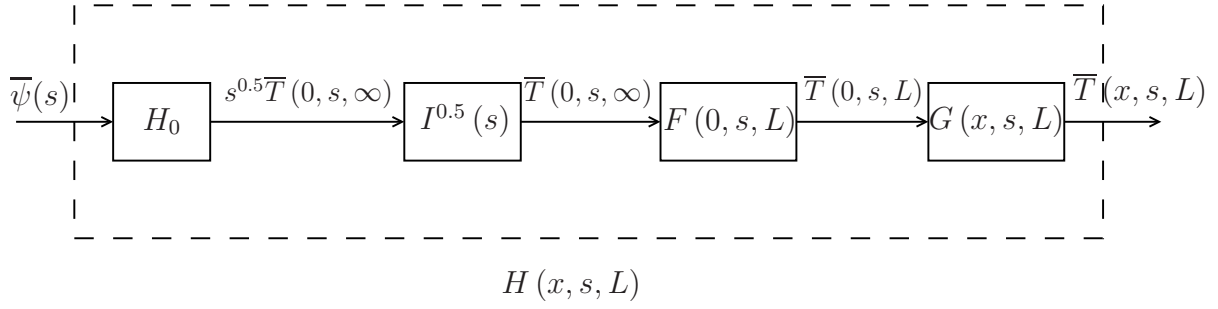
Les températures qui apparaissent dans les relations (4.14)-(4.17) sont décrites ci-dessous :

- $\overline{T}(0, s, \infty)$  est la température en  $x = 0$  si le milieu était semi-infini ;
- $\overline{T}(0, s, L)$  est la température en  $x = 0$  du milieu fini de longueur  $L$  ;
- $\overline{T}(x, s, L)$  est la température en  $x$ ,  $\forall x \in [0; L]$ .

D'un point de vue système, le transfert  $H(x, s, L)$  peut être interprété comme résultant de la mise en cascade (Fig. 4.2) :

- d'un gain  $H_0$  entre le flux  $\overline{\psi}(s)$  et la dérivée d'ordre 0.5 de la température en  $x = 0$  si le milieu était semi-infini,  $s^{0.5}\overline{T}(0, s, \infty)$ , gain identique à celui défini dans le cadre d'un milieu semi-infini ;
- d'un intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5,  $I^{0.5}(s)$ , entre  $s^{0.5}\overline{T}(0, s, \infty)$  et la température  $\overline{T}(0, s, \infty)$  ;
- d'un transfert  $F(0, s, L)$  entre  $\overline{T}(0, s, \infty)$  et  $\overline{T}(0, s, L)$  ;
- d'un transfert  $G(x, s, L)$  entre  $\overline{T}(0, s, L)$  et  $\overline{T}(x, s, L)$  dont l'analyse  $\forall x \in [0; L]$  permet d'étudier le phénomène de diffusion thermique dans le milieu fini.

Deux cas d'études font l'objet d'une distinction, à savoir en surface ( $x = 0$ ) où le phénomène d'effusivité est présent et en profondeur ( $0 < x \leq L$ ) où le phénomène de diffusivité est dominant.


 Fig. 4.2. Schéma illustrant le transfert  $H(x, s, L)$  du milieu fini

### 4.2.3 Analyse en $x = 0$

Dans la mesure où  $G(0, s, L) = 1$ , la température en  $x = 0$  du milieu fini de longueur  $L$ ,  $\bar{T}(0, s, L)$ , est donnée par :

$$\bar{T}(0, s, L) = H_0 I^{0.5}(s) F(0, s, L) \bar{\psi}(s), \quad (4.20)$$

le transfert  $F(0, s, L)$  permettant d'analyser l'influence du caractère fini du milieu sur la température en  $x = 0$ . A ce titre, posons  $z = \sqrt{s/\omega_L}$ . Compte tenu de l'expression de  $\omega_L = \alpha_d/L^2$ , on vérifie en premier lieu que :

1. Si  $L \rightarrow \infty$  alors  $\omega_L = \alpha_d/L^2 \rightarrow 0$  et  $z \rightarrow \infty$ , or :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tanh(z) = 1, \text{ d'où } \lim_{L \rightarrow \infty} F(0, s, L) = 1, \quad (4.21)$$

soit finalement

$$\lim_{L \rightarrow \infty} H(0, s, L) = H_0 I^{0.5}(s); \quad (4.22)$$

2. Si  $s \rightarrow 0$  alors  $z \rightarrow 0$ , or

$$\lim_{z \rightarrow 0} \tanh(z) \rightarrow z, \text{ d'où } \lim_{s \rightarrow 0} F(0, s, L) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}}, \quad (4.23)$$

soit

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(0, s, L) \rightarrow H_0 I^{0.5}(s) \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}}, \quad (4.24)$$

ou encore, en prenant en compte que  $\lambda = \alpha_d \rho C_p$

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(0, s, L) \rightarrow \frac{1}{C_{th} s}, \quad (4.25)$$

avec  $C_{th} = \rho C_p L$ , la capacité thermique du milieu fini (exprimée en  $\text{J m}^{-2} \text{K}^{-1}$ ).

La relation (4.25) met en évidence l'existence d'un comportement asymptotique, quand  $s \rightarrow 0$ , de type capacitif caractérisé par un intégrateur d'ordre 1.



3. Si  $s \rightarrow \infty$  alors  $z \rightarrow \infty$ , or

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tanh(z) = 1, \text{ d'où } \lim_{s \rightarrow \infty} F(0, s, L) = 1, \quad (4.26)$$

soit

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(0, s, L) \rightarrow H_0 I^{0.5}(s). \quad (4.27)$$

La relation (4.27) met en évidence l'existence d'un comportement asymptotique, quand  $s \rightarrow \infty$ , de type fractionnaire caractérisé par un intégrateur d'ordre 0.5.

La réponse fréquentielle  $H(x, j\omega, L)$  est donnée par :

$$H(x, j\omega, L) = H_0 I^{0.5}(j\omega) F(0, j\omega, L) G(x, j\omega, L). \quad (4.28)$$

En  $x = 0$ , dans la mesure où  $G(0, j\omega, L) = 1$ ,  $H(x, j\omega, L)$  se réduit à

$$H(0, j\omega, L) = H_0 I^{0.5}(j\omega) F(0, j\omega, L). \quad (4.29)$$

Dans un premier temps, l'analyse de la réponse fréquentielle  $F(0, j\omega, L)$  (Fig. 4.3) en  $x = 0$  montre que deux comportements asymptotiques existent, soit :

- aux basses fréquences, un comportement intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5.

En effet,

$$\forall \omega \ll \omega_L = \frac{\alpha_d}{L^2}, F(0, j\omega, L) \approx \left( \frac{\omega_L}{j\omega} \right)^{0.5} \Rightarrow \begin{cases} |F(0, j\omega, L)| = \left( \frac{\omega_L}{\omega} \right)^{0.5} \\ \arg(F(0, j\omega, L)) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}; \quad (4.30)$$

- aux hautes fréquences, un comportement proportionnel unitaire. En effet,

$$\forall \omega \gg \omega_L = \frac{\alpha_d}{L^2}, F(0, j\omega, L) = 1 \Rightarrow \begin{cases} |F(0, j\omega, L)| = 1 \\ \arg(F(0, j\omega, L)) = 0 \end{cases}, \quad (4.31)$$

la zone de transition entre ces deux comportements asymptotiques étant fixée par la fréquence transitionnelle  $\omega_L$ .

Dans un deuxième temps, l'analyse de la réponse fréquentielle globale  $H(0, j\omega, L)$  (Fig. 4.4) en  $x = 0$  montre :

- aux basses fréquences, un comportement d'intégrateur d'ordre 1. En effet,

$$\forall \omega \ll \omega_L = \frac{\alpha_d}{L^2}, H(0, j\omega, L) \approx \frac{1}{C_{th}j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(0, j\omega, L)| = \frac{1}{C_{th}\omega} \\ \arg(H(0, j\omega, L)) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}; \quad (4.32)$$

- aux hautes fréquences, un comportement intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5.

En effet,

$$\forall \omega \gg \omega_L = \frac{\alpha_d}{L^2}, H(0, j\omega, L) \approx H_0 \frac{1}{(j\omega)^{0.5}} \Rightarrow \begin{cases} |H(0, j\omega, L)| = \frac{H_0}{\omega^{0.5}} \\ \arg(H(0, j\omega, L)) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}, \quad (4.33)$$

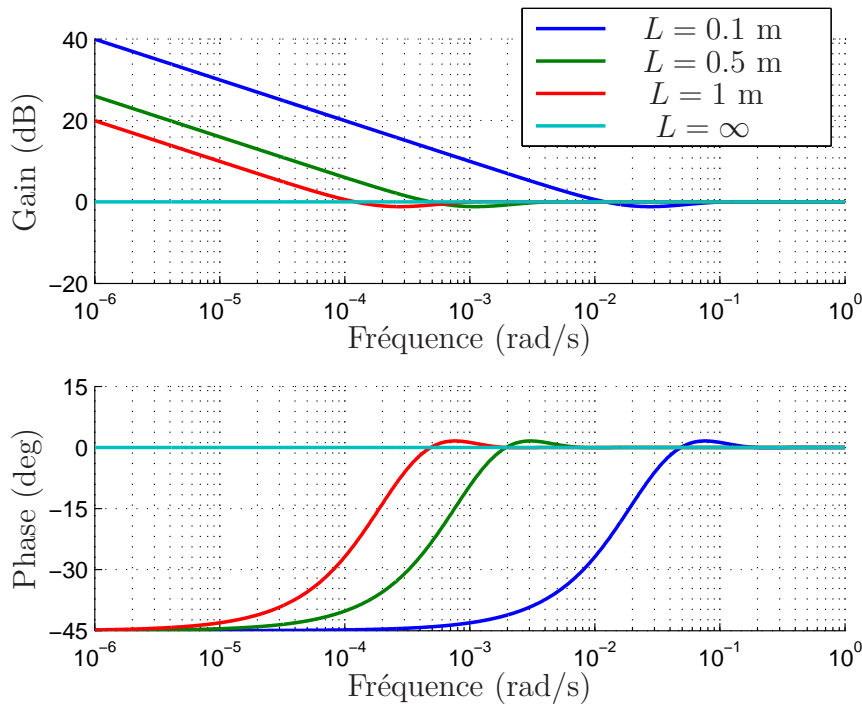


Fig. 4.3. Diagrammes de Bode de  $F(0, j\omega, L)$  obtenus dans le cas de l'aluminium avec  $L = 1$  m,  $L = 0.5$  m,  $L = 0.1$  m et  $L = \infty$

la zone de transition entre ces deux comportements asymptotiques étant fixée par  $\omega_L$ . Compte tenu de l'expression de  $\omega_L$ , cette zone de transition est d'autant plus basse en fréquence que la longueur  $L$  est grande.

En complément des diagrammes de Bode, la Fig. 4.5 présente les tracés de  $H(0, j\omega, L)$  dans le plan de Nichols toujours dans le cas de l'aluminium pour  $L = 1$  m et  $L = \infty$ .

L'étude en  $x = 0$  pour le milieu fini montre qu'un comportement intégrateur d'ordre 1 a lieu aux basses fréquences et un comportement intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5 apparaît aux hautes fréquences.

Par ailleurs, l'exploitation de la dualité temps-fréquence à l'aide des théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale permet d'affirmer que :

- dans les premiers instants, les réponses temporelles (impulsionnelles, indicielles, ...) sont celles obtenues avec un intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5 ;
- dans les grands instants, les réponses temporelles sont celles obtenues avec un intégrateur d'ordre 1.

Ainsi, le comportement fractionnaire du milieu fini dans les premiers instants « dégénère » en un comportement intégrateur d'ordre 1 pour des temps  $t \gg \tau_L = L^2/\alpha_d$ , c'est-à-dire lorsque la chaleur a complètement diffusé dans le milieu fini. Ceci étant, si la durée  $T_{sim}$  de la simulation temporelle est bien inférieure à la constante de temps  $\tau_L$  de diffusion,

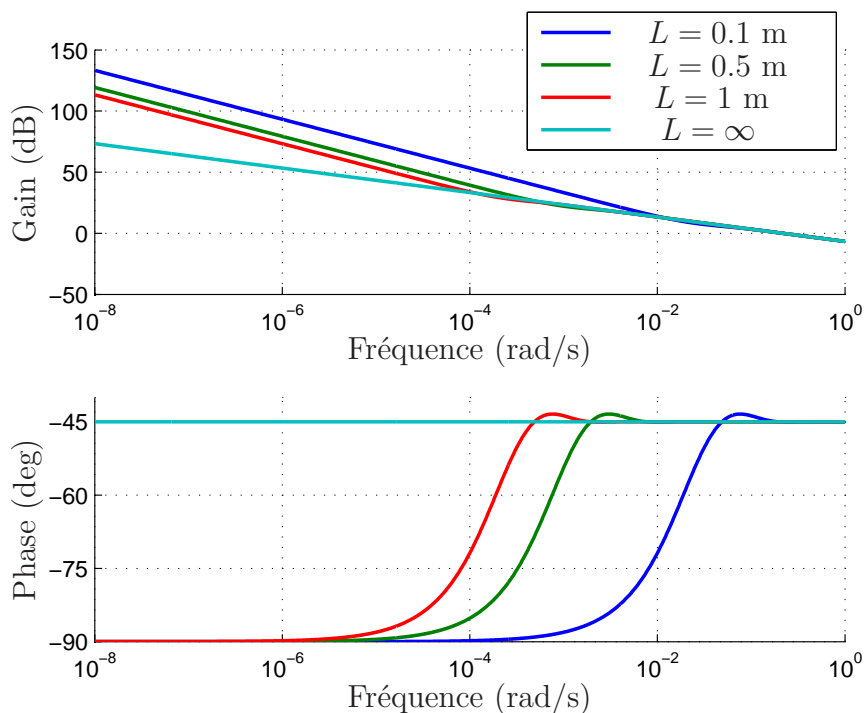


Fig. 4.4. Diagrammes de Bode de  $H(0, j\omega, L)$  obtenus dans le cas de l'aluminium avec  $L = 1$  m,  $L = 0.5$  m,  $L = 0.1$  m et  $L = \infty$

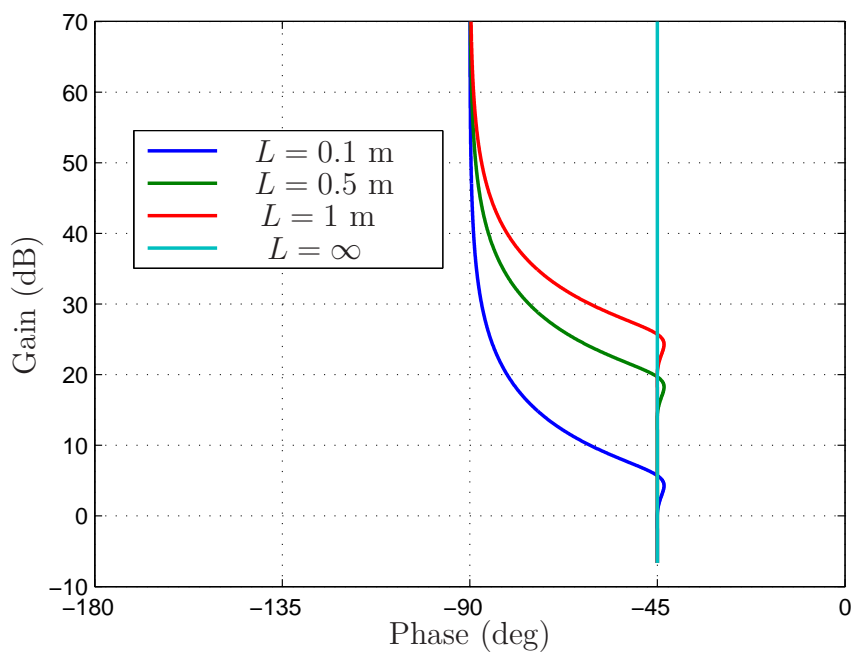


Fig. 4.5. Réponses fréquentielles  $H(0, j\omega, L)$  dans le plan de Nichols dans le cas de l'aluminium avec  $L = 1$  m,  $L = 0.5$  m,  $L = 0.1$  m et  $L = \infty$

alors seul le comportement fractionnaire est observé.

#### 4.2.4 Analyse en $0 \leq x \leq L$

Afin de faciliter l'analyse de l'influence de  $G(x, s, L)$  sur le transfert global  $H(x, s, L)$ , un retour à la définition de la fonction cosh est effectué, soit :

$$G(x, s, L) = \frac{\exp\left(\sqrt{s/\omega_{Lx}}\right) + \exp\left(-\sqrt{s/\omega_{Lx}}\right)}{\exp\left(\sqrt{s/\omega_L}\right) + \exp\left(-\sqrt{s/\omega_L}\right)}. \quad (4.34)$$

Ainsi, quand  $s \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(x, s, L) = 1, \quad (4.35)$$

alors

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(x, s, L) \rightarrow \frac{1}{C_{th}s}. \quad (4.36)$$

Comme en  $x = 0$ , la relation (4.34) met en évidence l'existence d'un comportement asymptotique, quand  $s \rightarrow 0$ , de type capacitif caractérisé par un intégrateur d'ordre 1.

De plus, si  $s \rightarrow \infty$  alors  $z \rightarrow \infty$ , or  $\lim_{z \rightarrow \infty} \exp(-z) = 0$ , d'où

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(x, s, L) \rightarrow \frac{\exp\left(\sqrt{s/\omega_{Lx}}\right)}{\exp\left(\sqrt{s/\omega_L}\right)}, \quad (4.37)$$

ou encore, après introduction de la relation (4.18) entre  $\omega_L$  et  $\omega_{Lx}$ , puis simplification,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(x, s, L) \rightarrow \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\alpha_d/x^2}}\right) = \exp\left(-\sqrt{s/\omega_x}\right) = E(x, s), \quad (4.38)$$

d'où

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(x, s, L) = \lim_{s \rightarrow \infty} H_0 I^{0.5}(s) \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\omega_x}}\right) = \lim_{s \rightarrow \infty} H_0 I^{0.5}(s) E(x, s) \rightarrow 0. \quad (4.39)$$

Ainsi, pour un milieu fini, la relation (4.39) met en évidence l'existence d'un comportement asymptotique, quand  $s \rightarrow \infty$ .

En fait, la similitude entre  $G(x, s, L)$  et  $E(x, L)$  n'existe pas seulement lorsque  $s \rightarrow \infty$ . L'expression (4.34) de  $G(x, s, L)$  peut se réécrire sous la forme :

$$G(x, s, L) = \exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}\right) \frac{\exp\left(L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}\right) + \exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}\right) \exp\left(2x\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}\right)}{\exp\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}\right)}, \quad (4.40)$$

ou encore, compte tenu des définitions de  $\omega_x$  et  $\omega_L$  et en introduisant la notation  $E(x, s)$ ,

$$G(x, s, L) = E(x, s) \frac{\exp\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}\right) + \exp\left(-(L-2x)\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}\right)}{\exp\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}\right)}, \quad (4.41)$$

Ainsi, si  $x \ll L$  alors  $G(x, s, L) \approx E(x, s)$ .

Dans le domaine fréquentiel, il convient dans un premier temps d'analyser la réponse fréquentielle de  $G(x, s, L)$  (Fig. 4.6) pour comprendre son influence sur la réponse globale  $H(x, j\omega, L)$ , car pour  $0 < x \leq L$  le gain de  $G(x, s, L)$  n'est plus unitaire, soit :

$$G(x, j\omega, L) = \frac{\exp\left(\sqrt{j\frac{\omega}{\omega_{Lx}}}\right) + \exp\left(-\sqrt{j\frac{\omega}{\omega_{Lx}}}\right)}{\exp\left(\sqrt{j\frac{\omega}{\omega_L}}\right) + \exp\left(-\sqrt{j\frac{\omega}{\omega_L}}\right)}. \quad (4.42)$$

Deux comportements apparaissent clairement :

- aux basses fréquences,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(x, j\omega, L) = 1 \implies \begin{cases} |G(x, j\omega, L)| = 1 \\ \arg(G(x, j\omega, L)) = 0 \end{cases} ; \quad (4.43)$$

- aux hautes fréquences,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(x, j\omega, L) \rightarrow E(x, j\omega) = \exp\left(-\sqrt{j\frac{\omega}{\omega_x}}\right) \implies \begin{cases} |G(x, j\omega, L)| \approx \exp\left(-\left(\frac{\omega}{2\omega_x}\right)^{0.5}\right) \rightarrow 0 \\ \arg(G(x, j\omega, L)) \approx -\left(\frac{\omega}{2\omega_x}\right)^{0.5} \rightarrow -\infty \end{cases}. \quad (4.44)$$

Comme on peut l'observer sur la Fig. 4.6, non seulement  $G(x, j\omega, L)$  et  $E(x, j\omega)$  ont le même comportement aux hautes fréquences, mais aussi aux moyennes et aux basses fréquences. Cet exemple illustre bien le cas où  $x \ll L$  conduit à  $G(x, j\omega, L) = E(x, j\omega)$ .

Pour faciliter la suite de l'analyse, introduisons la fréquence particulière  $\omega_c$  telle que  $|G(x, j\omega_c, L)| = 1/\sqrt{2}$ , soit -3 dB. Cette fréquence  $\omega_c$  diminue quand  $x$  augmente. C'est la raison pour laquelle, pour une fréquence  $\omega$  donnée, le gain et la phase sont d'autant plus faibles que  $x$  est important.

A titre d'illustration, la Fig. 4.7 présente les diagrammes de Bode de  $G(x, j\omega, L)$  toujours dans le cas de l'aluminium pour  $L = 1$  m et pour trois valeurs de  $x$ , à savoir 0.5 cm, 1 cm et 10 cm.

Dans un deuxième temps, l'analyse de la réponse globale  $H(x, j\omega, L)$  (Fig. 4.8) met clairement en évidence trois comportements :

- aux basses fréquences, un comportement intégrateur d'ordre 1 identique à celui obtenu en  $x = 0$  :

$$\forall \omega \ll \omega_L = \frac{\alpha_d}{L^2}, H(x, j\omega, L) \approx \frac{1}{C_{th}j\omega} \implies \begin{cases} |H(x, j\omega, L)| = \frac{1}{C_{th}\omega} \\ \arg(H(x, j\omega, L)) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} ; \quad (4.45)$$

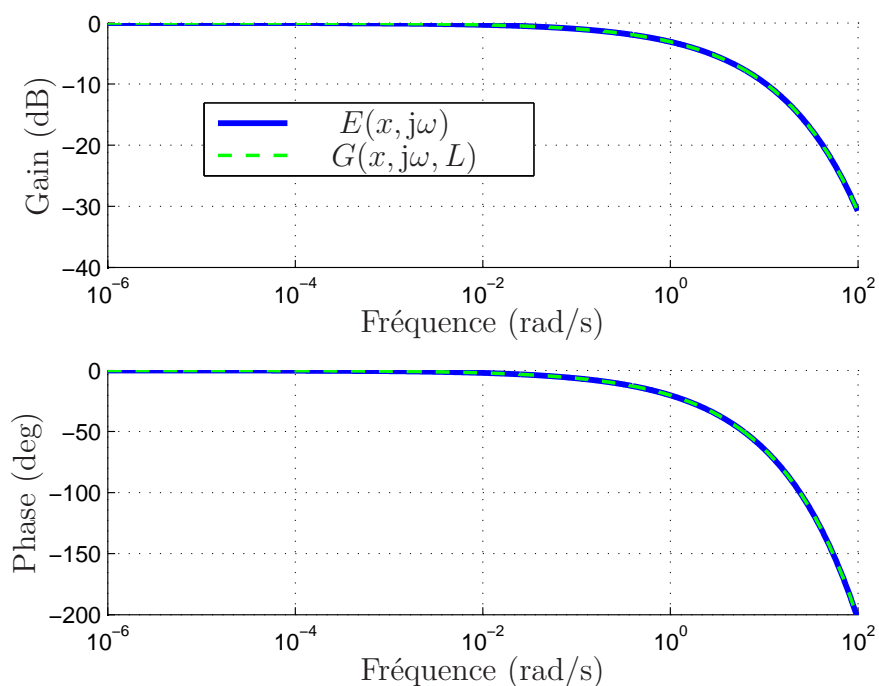


Fig. 4.6. Diagrammes de Bode de  $G(x, j\omega, L)$  et de  $E(x, j\omega)$  obtenus dans le cas de l'aluminium avec  $L = 1$  m et  $x = 0.5$  cm

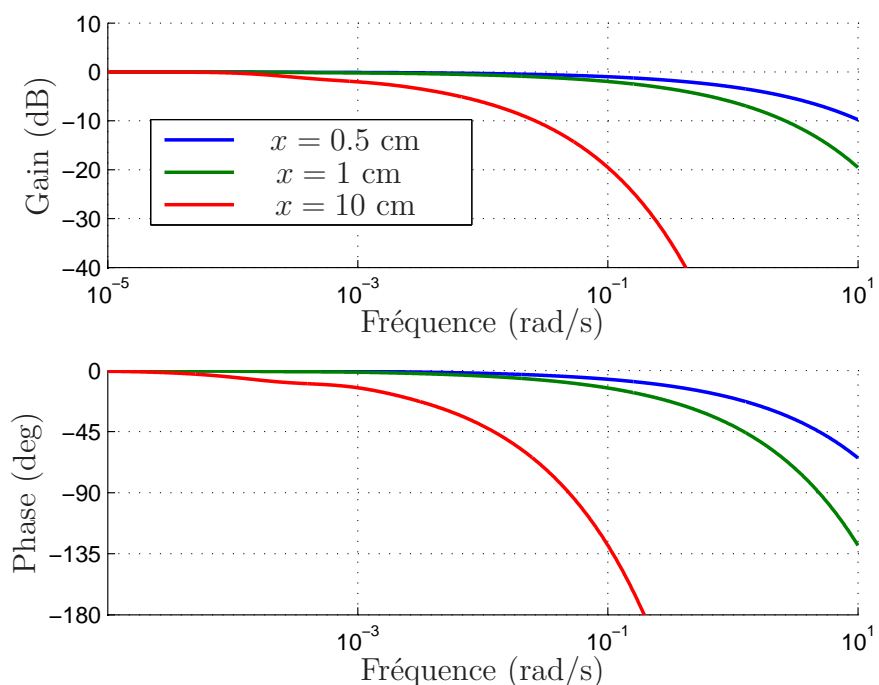


Fig. 4.7. Diagrammes de Bode de  $G(x, j\omega, L)$  obtenus avec l'aluminium pour  $L = 1$  m avec  $x = 0.5$  cm,  $x = 1$  cm et  $x = 10$  cm

- aux moyennes fréquences, un comportement intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5 :

$$\text{pour } \omega_L \ll \omega \ll \omega_c, H(x, j\omega, L) \approx H_0 I^{0.5}(j\omega) \implies \begin{cases} |H(x, j\omega, L)| = \frac{H_0}{\omega^{0.5}} \\ \arg(H(x, j\omega, L)) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}, \quad (4.46)$$

- aux hautes fréquences, un comportement identique à celui d'un milieu semi-infini :

$$\forall \omega \gg \omega_c, H(x, j\omega, L) \approx H_0 I^{0.5}(j\omega) \exp\left(-\sqrt{j\frac{\omega}{\omega_x}}\right) \implies \begin{cases} |H(x, j\omega, L)| = \frac{H_0}{\omega^{0.5}} \exp\left(-\left(\frac{\omega}{2\omega_x}\right)^{0.5}\right) \\ \arg(H(x, j\omega, L)) = -\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\omega}{2\omega_x}\right)^{0.5} \end{cases}, \quad (4.47)$$

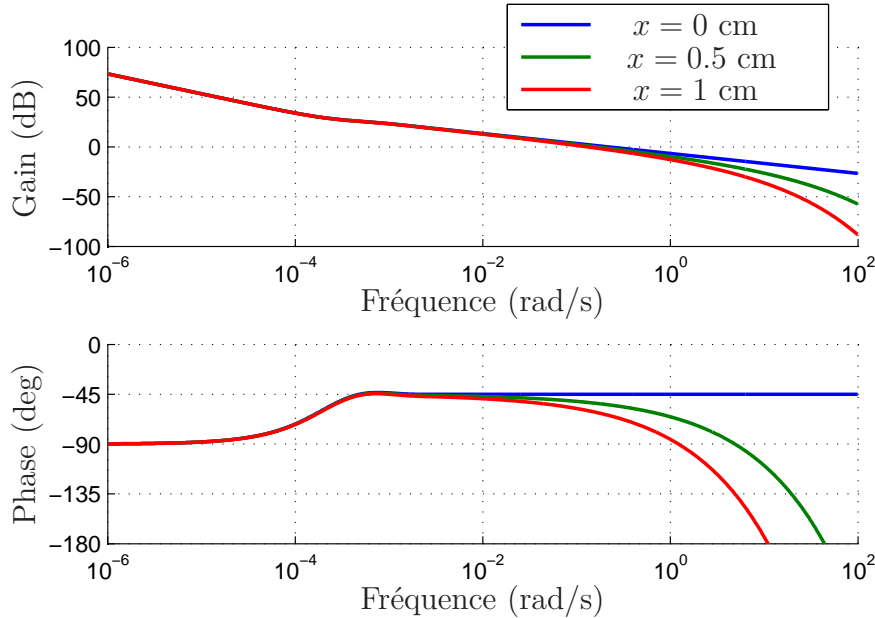


Fig. 4.8. Diagrammes de Bode de  $H(x, j\omega, L)$  obtenus avec l'aluminium pour  $L = 1$  m avec  $x = 0$  cm,  $x = 0.5$  cm et  $x = 1$  cm

En complément des diagrammes de Bode, la Fig. 4.9 présente les réponses fréquentielles  $H(x, j\omega, L)$  dans le plan de Nichols obtenues toujours avec l'aluminium pour  $L = 1$  m et pour les mêmes positions  $x = 0$  cm,  $x = 0.5$  cm et  $x = 1$  cm.

Le comportement intégrateur d'ordre 0.5 observé pour  $x = 0$  aux hautes fréquences disparaît progressivement lorsque  $x$  s'éloigne de l'origine, phénomène d'autant plus prononcé que la longueur  $L$  du milieu fini diminue.

Le comportement asymptotique aux hautes fréquences apparaît pour un milieu fini de dimension  $L$  à la profondeur  $x$ . Le comportement fractionnaire d'ordre 0.5 observé aux

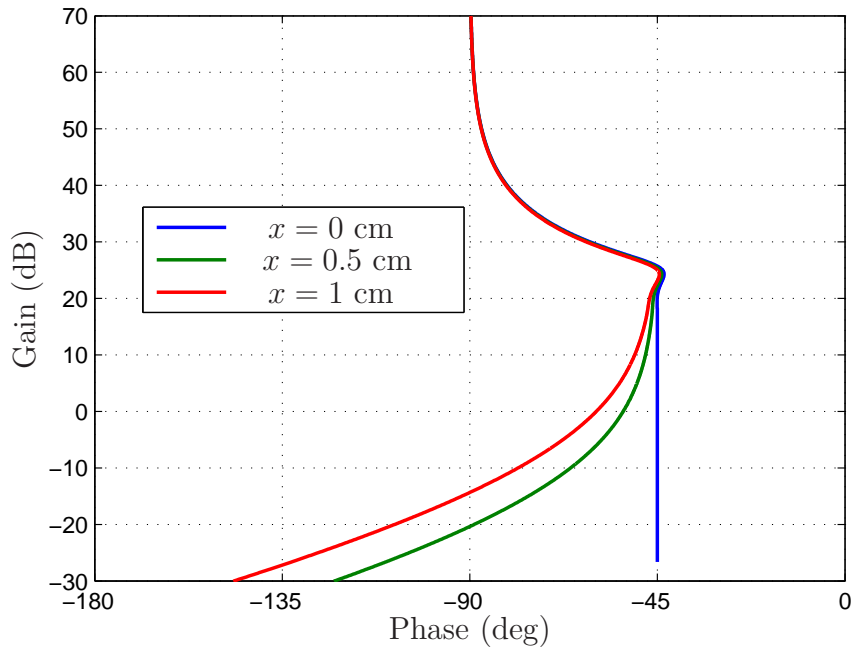


Fig. 4.9. Réponses fréquentielles  $H(x, j\omega, L)$  dans le plan de Nichols obtenus avec l'aluminium pour  $L = 1$  m avec  $x = 0$  cm,  $x = 0.5$  cm et  $x = 1$  cm

moyennes fréquences (relation (4.46)) se réduit lorsque  $\omega_x = \alpha_d/x^2$  diminue, c'est-à-dire lorsque  $x$  s'éloigne de l'origine.

Enfin, dans la mesure où le comportement fractionnaire d'ordre 0.5 est limité aux basses fréquences par la présence du comportement intégrateur d'ordre 1 (relation (4.45)), il peut complètement disparaître si  $\omega_x$  et  $\omega_L$  sont suffisamment proches.

## 4.2.5 Résumé

L'analyse en surface (en  $x = 0$ ) met en évidence que l'effusivité thermique, dans le cas du milieu fini, est caractérisée par un comportement intégrateur d'ordre 1 aux basses fréquences, et d'ordre 0.5 aux moyennes et hautes fréquences. L'analyse dans la profondeur (pour  $x > 0$ ) met en évidence que la diffusivité thermique conduit aux hautes fréquences au comportement caractérisé par une exponentielle complexe.



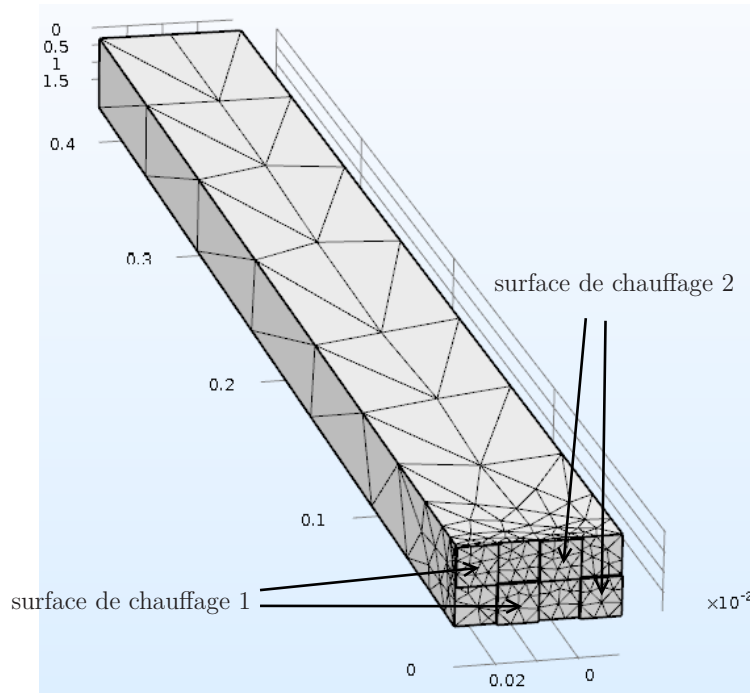


Fig. 4.10. Système thermique constitué de deux barreaux équipés d’éléments chauffants créé sous COMSOL

## 4.3 Étude du modèle numérique du banc d’essai thermique

Dans ce paragraphe le banc d’essai thermique constitué de deux barreaux métalliques est modélisé numériquement sous le logiciel COMSOL. Ainsi, les données de simulation, générées par éléments finis, sont utilisées dans un premier temps pour l’identification du banc thermique dans des conditions idéales sans pertes.

### 4.3.1 Description et modélisation numérique du banc d’essai

Le banc d’essais (Fig. 4.10), modélisé à l’aide du logiciel COMSOL, est constitué de deux barreaux en étain rectangulaires, de dimension  $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ , soumis aux éléments chauffants à une extrémité, et isolés thermiquement.

Le système thermique étudié possède deux entrées  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  qui représentent les densités de flux thermique appliquées à l’extrémité du barreau, aux surfaces de chauffe 1 et 2 (Fig. 4.10), et quatre sorties,  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$  et  $y_4(t)$  qui représentent les températures mesurées aux distances de  $l_1 = \{0.5, 1\}$  cm du premier barreau et  $l_2 = \{0.5, 1\}$  cm du second. Le schéma bloc du système est tracé sur la Fig. 4.11.

Pour obtenir un jeu de données riches, deux SBPA non-corrélées sont appliquées

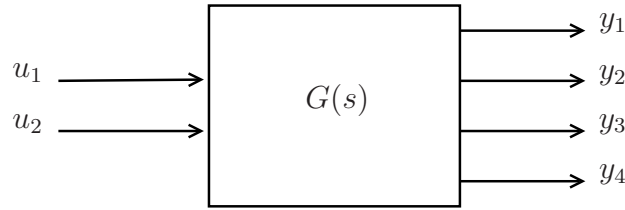


Fig. 4.11. Schéma bloc du système thermique

avec une amplitude de flux de  $5.3 \text{ kWm}^{-2}$ , des créneaux de taille minimale de 90 et 100 échantillons et une période d'échantillonnage de 1 sec. Les signaux sont tracés sur la Fig. 4.12 (a).

Les barreaux ont été coupés irrégulièrement par 60000 éléments finis, avec un pas de maillage de 1 mm sur les premiers 3 cm du barreau (de la source de chaleur) et un pas de 1 cm sur le reste du barreau (voir Annexe A). Les calculs sous COMSOL sont effectués sur l'horizon temporel  $t \in [0, 3000] \text{ s}$  et une précision en température de  $10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}$ .

Les températures obtenues à la sortie sont tracées sur la Fig. 4.12 (b).

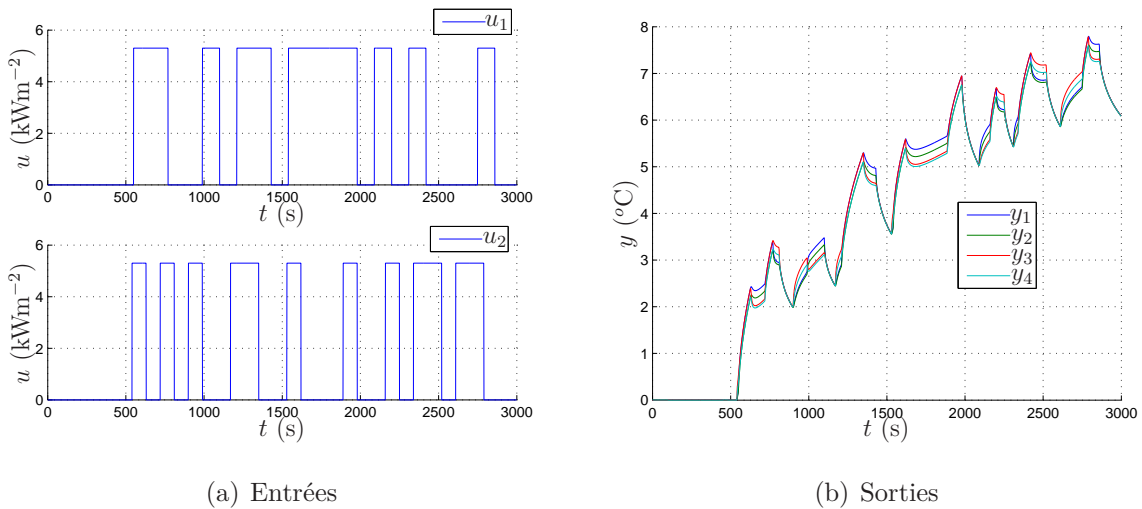


Fig. 4.12. Entrées et sorties du système thermique constitué de deux barreaux en étain modélisé sous COMSOL

La constante de temps de diffusion,  $\tau_L$ , de deux barreaux en étain de longueur  $L = 0.4 \text{ m}$ , est égale à  $\tau_L = L^2/\alpha_d = 0.4^2/(40.8 \times 10^{-6}) \approx 3900 \text{ s}$ . Compte tenu de la description du paragraphe 4.2, lorsque la durée  $T_{sim}$  de simulation est inférieure à la constante de temps  $\tau_L$  de diffusion, le comportement fractionnaire devrait être observé.

### 4.3.2 Estimation paramétrique par la méthode des sous-espaces appliquée aux données de simulation

L'estimation paramétrique par la méthode des sous-espaces est maintenant réalisée en utilisant le filtre GMPF décrit au chapitre 3, du système  $G(s) = \{A, B, C, D, \nu\}$  (1.11) liant les températures mesurées  $\theta_i(t)$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  aux densités du flux de chaleur  $\phi_j(t)$ ,  $j \in \{1, 2\}$  injectée, à partir de données obtenues en utilisant le logiciel COMSOL.

#### 4.3.2.1 A partir des entrées non intégrées

Le système est identifié pour différentes valeurs de l'ordre commensurable  $\nu \in (0, 2)$  et pour différentes dimensions du système.

La norme  $\ell_2$  (ou  $J_{id}$ ) de l'erreur de sortie est évaluée en utilisant les données d'identification (Fig. 4.12) :

$$J_{id} = \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^4 \left( \frac{\sum_{i=1}^N (y_{\ell}(t_i) - \hat{y}_{\ell}(t_i))^2}{\sum_{i=1}^N (y_{\ell}(t_i))^2} \right), \quad (4.48)$$

où  $y_{\ell}$  et  $\hat{y}_{\ell}$  sont les  $\ell$ -èmes sorties du système et du modèle. Le critère « % fit<sub>id</sub> » est défini par :

$$\% \text{ fit}_{id} = (1 - J_{id}) \times 100\%. \quad (4.49)$$

L'ordre de dérivation est estimé pour les différentes dimensions du système (tableau 4.1). Plus la dimension du système est grande, plus l'erreur d'estimation est importante. Ce résultat s'explique par l'augmentation de l'erreur numérique avec l'augmentation de la dimension du système. Les données d'entrée (deux SBPA non-corrélées ayant une amplitude de flux de  $5.3 \text{ kWm}^{-2}$  et des créneaux de taille minimale de 110 et 130 échantillons) et de sorties utilisées pour la validation sont tracées sur la Fig. 4.13. La norme  $\ell_2$  (ou  $J_{val}$ ) (4.48) est évaluée en utilisant les données de validation et le critère « % fit<sub>val</sub> » (4.49) est aussi indiqué dans le tableau 4.1.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$\nu$	0.45	0.65	0.55	1.15	1.1
Le « % fit <sub>id</sub> »	99.99 %	99.99 %	99.98 %	93.0%	64.0%
Le « % fit <sub>val</sub> »	99.95%	99.98%	99.72%	83.9 %	73 %

Tab. 4.1. Critère d'erreur obtenu pour différentes dimensions du système

Les erreurs d'identification et de validation sont minimales pour la dimension du système fixée à  $n = \dim A = 2$ . Le paramètre optimal de réglage du filtre GMPF est

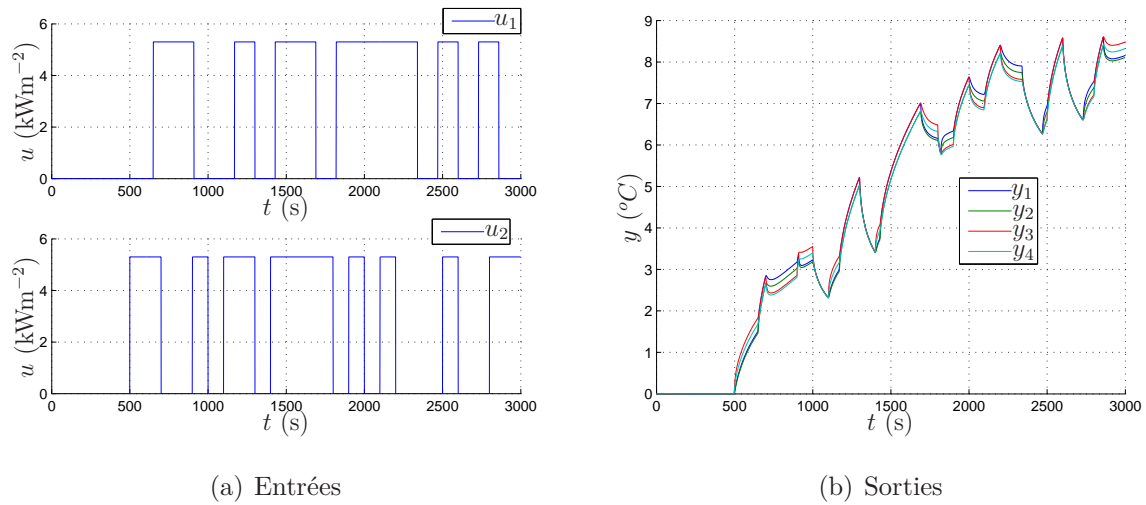


Fig. 4.13. Entrées et sorties du système de deux barreaux identiques en étain à valider obtenues en utilisant le logiciel COMSOL

fixé à  $\lambda = 0.011$ . A titre indicatif, pour  $n = 2$ , le critère quadratique normalisé est tracé en fonction de l'ordre commensurable sur la Fig. 4.14. A l'optimum, pour  $\nu = 0.65$ , les matrices d'état  $A, B, C, D$  du système identifié sont données par :

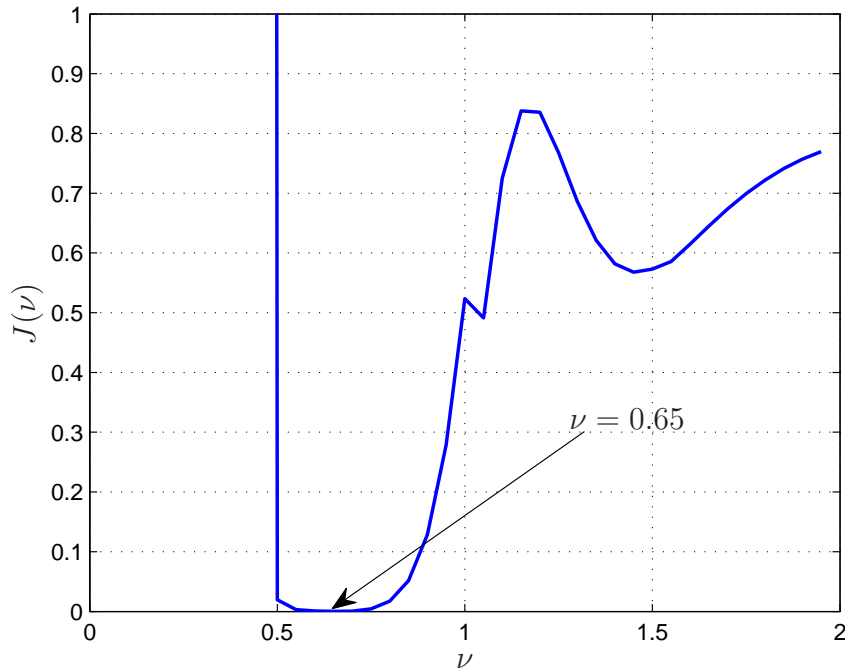
$$\begin{aligned}
 A &= 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 0.239 & 0 \\ 0 & -1.643 \end{bmatrix}, & B &= 10^{-3} \times \begin{bmatrix} -1.405 & -1.987 \\ 6.119 & 5.121 \end{bmatrix}, \\
 C &= 10^{-3} \times \begin{bmatrix} -2.319 & 1.510 \\ -2.308 & 1.509 \\ -2.306 & 1.520 \\ -2.306 & 1.518 \end{bmatrix}, & D &= 10^{-5} \times \begin{bmatrix} -1.747 & 4.485 \\ -2.410 & 1.784 \\ 4.292 & -1.582 \\ 1.554 & -2.253 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\tag{4.51}$$

Les sorties simulées sous COMSOL et les sorties estimées sont tracées, sur les données d'identification sur la Fig. 4.15 et sur les données de validation sur la Fig. 4.16. Des pics apparaissent dans les zones transitoires probablement à cause de l'estimation d'une matrice  $D$  non nulle. Or, l'étude théorique du paragraphe 4.2 montre l'inexistence d'un gain direct entre les flux d'entrées et les températures de sorties. Pour obtenir une estimation du système avec une matrice  $D$  nulle, une méthode est proposée au paragraphe suivant.

#### 4.3.2.2 A partir des entrées intégrées

Comme précisé au paragraphe 4.2, plusieurs recherches montrent qu'un système thermique possède en réalité un intégrateur non entier. Il est ainsi possible de considérer


 Fig. 4.14. Critère d'erreur  $J_{id}$  en fonction de l'ordre commensurable  $\nu$ 

la présence de cet intégrateur dans le modèle du système et d'identifier le modèle privé de l'intégrateur. Le système  $G(s) = \{A, B, C, D, \nu\}$  peut être réécrit sous la forme d'un intégrateur non entier d'ordre  $\nu$  appliqué à un nouveau système  $G'(s) = \{A', B', C', D', \nu\}$  :

$$G(s) = \frac{1}{s^\nu} G'(s). \quad (4.52)$$

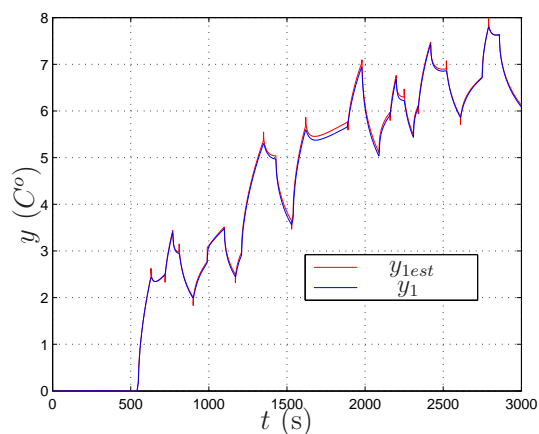
Le schéma du système (4.52) ayant un intégrateur est donné sur la Fig. 4.17. Pour montrer que l'introduction d'un intégrateur non entier dans le système permet d'annuler la matrice  $D$ , un exemple du système  $G(s)$  avec deux entrées et quatre états est proposé :

$$\mathcal{D}^\nu \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

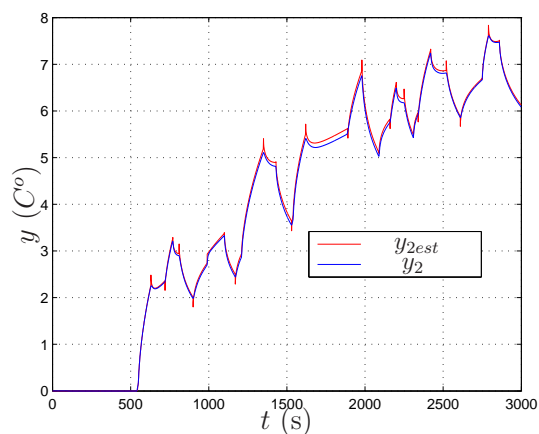
$$\mathbf{y}(t) = C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Soit  $X_1(s) = \frac{1}{s^\nu} U_1(s)$  et  $X_2(s) = \frac{1}{s^\nu} U_2(s)$ , d'où  $U_1(s) = s^\nu X_1(s)$  et  $U_2(s) = s^\nu X_2(s)$  :

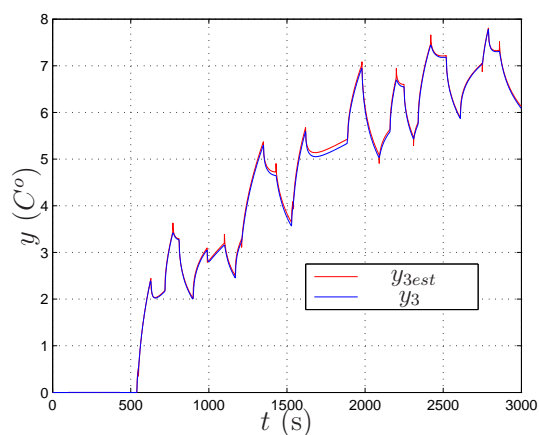
$$\mathcal{D}^\nu x_1(t) = u_1(t), \quad (4.55)$$



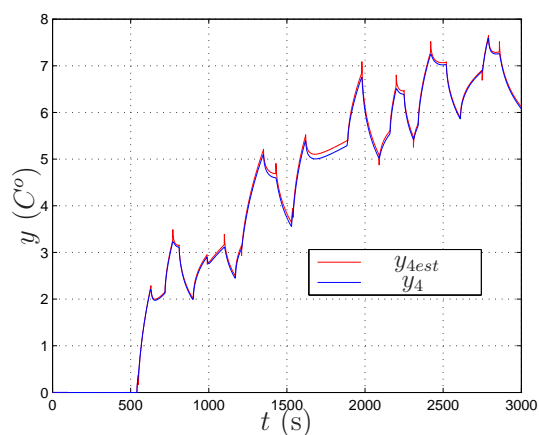
(a)  $y_1$  et  $y_{1est}$



(b)  $y_2$  et  $y_{2est}$



(c)  $y_3$  et  $y_{3est}$



(d)  $y_4$  et  $y_{4est}$

Fig. 4.15. Sorties simulées avec COMSOL et sorties estimées sur les **données d'identification** avec la méthode MOESP.  $\% \text{ fit}_{id} = 99.99\%$

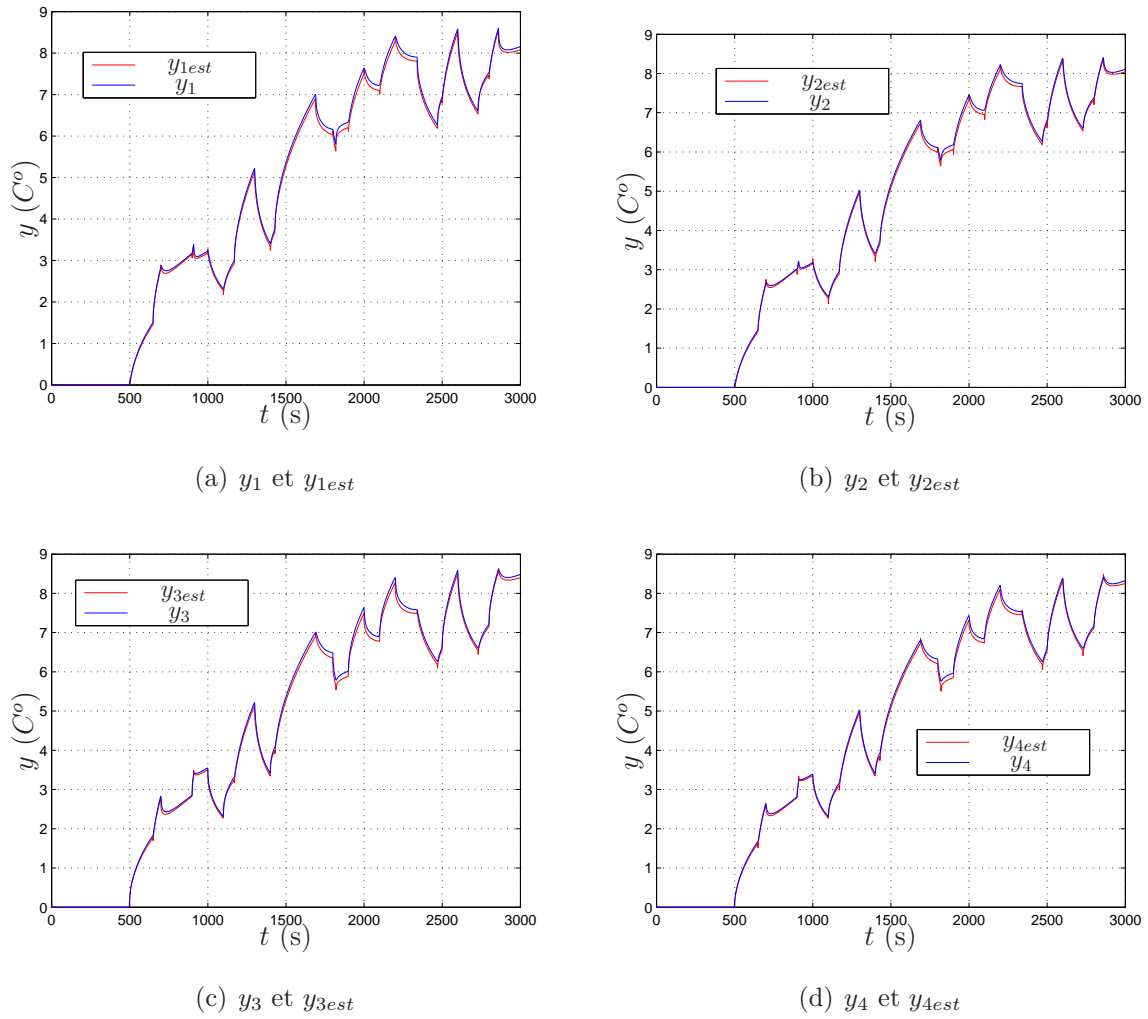


Fig. 4.16. Sorties simulées avec COMSOL et sorties estimées sur les **données de validation** avec la méthode MOESP.  $\% \text{ fit}_{val} = 99.98\%$

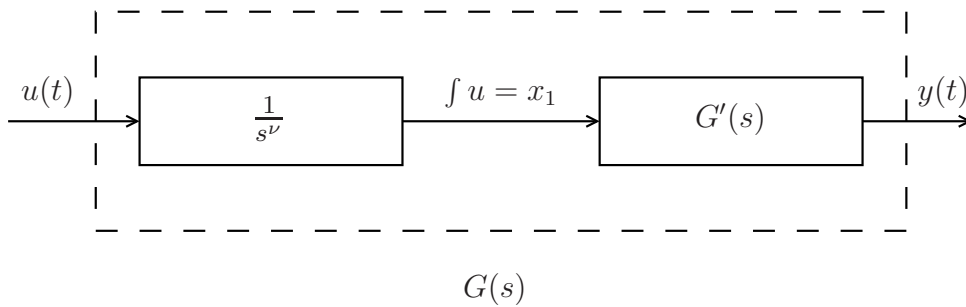


Fig. 4.17. Schéma du système thermique avec un intégrateur

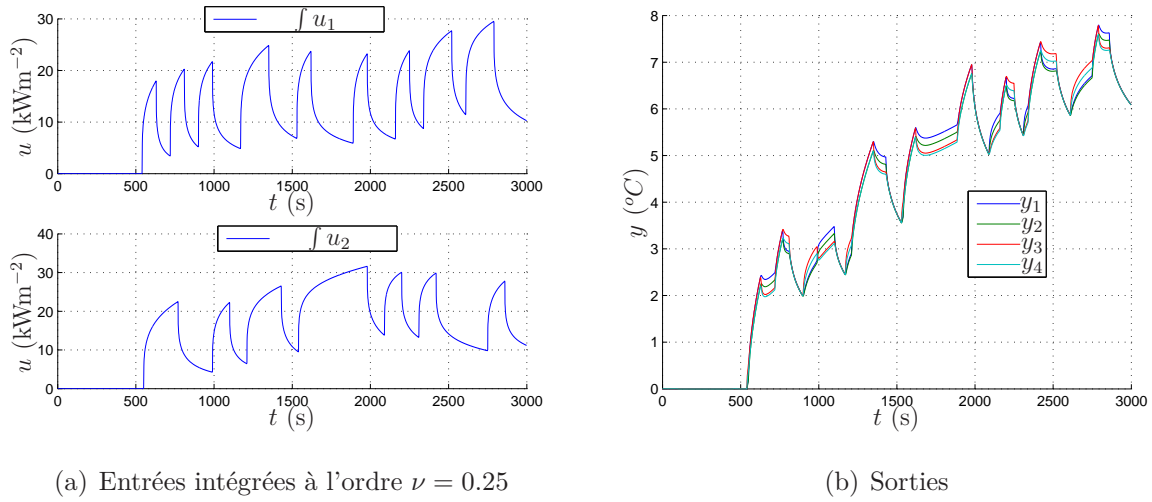


Fig. 4.18. Entrées et sorties du système  $G'(s)$  (avec l'entrée intégrée) de deux barreaux identiques à identifier obtenues en utilisant le logiciel COMSOL

$$\mathcal{D}^{\nu} x_2(t) = u_2(t). \quad (4.56)$$

Un nouveau système  $G'(s)$  est obtenu :

$$\mathcal{D}^{\nu} \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + B' \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (4.57)$$

$$\mathbf{y}(t) = C' \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + D' \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Pour reconstruire le système  $G(s)$  à partir de (4.55)-(4.58), les transformations suivantes doivent être effectuées :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B' & A' \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [D' \quad C'], \quad D = 0. \quad (4.59)$$

On procède maintenant à l'estimation paramétrique, par la méthode des sous-espaces en utilisant le filtre GPMF, du système  $G'(s) = \{A', B', C', D', \nu\}$  liant la température mesurée (Fig. 4.18 b) à l'intégrateur non entier de la densité du flux de chaleur (Fig. 4.18 a) injectée à partir de données de simulation.

Le système  $G'(s)$  (4.57)-(4.57) est identifié pour différentes valeurs de l'ordre commensurable  $\nu \in (0, 2)$ , supposé inconnu, et pour différentes dimensions du système.

La norme  $\ell_2$  (ou  $J_{id}$ ) de l'erreur de sortie (4.48) est évaluée ainsi que le critère « % fit<sub>id</sub> » (4.49), en utilisant les données d'identification (Fig. 4.18). L'ordre de dérivation



	$n' = 1$	$n' = 2$	$n' = 3$
$\nu$	0.6	0.25	0.6
Le « % fit <sub>id</sub> »	99.84 %	99.95 %	46.7 %
Le « % fit <sub>val</sub> »	99.15%	99.83%	0%

Tab. 4.2. Critère d'erreur obtenu pour différentes dimensions du système avec l'entrée intégrée

est estimé pour les différentes dimensions du système  $G'(s)$  (avec l'entrée intégrée) (tableau 4.2). Le critère « % fit<sub>val</sub> » évalué en utilisant les données de validation est aussi indiqué dans le tableau 4.2.

Les erreurs d'identification et de validation sont minimales pour la dimension du système fixée à  $n' = \dim A' = 2$ . Le paramètre optimal de réglage du filtre GPMF est  $\lambda = 0.046$ . A titre indicatif, pour  $n = 2$ , le critère quadratique normalisé est tracé en fonction de l'ordre commensurable sur la Fig. 4.19. A l'optimum, pour  $\nu = 0.25$ , les matrices d'état  $A', B', C', D'$  du système identifié  $G'(s)$  dans ce cas sont données par :

$$\begin{aligned}
 A' &= 10^{-2} \times \begin{bmatrix} -2.243 & 0 \\ 0 & 18.298 \end{bmatrix}, & B' &= 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 7.280 & 6.668 \\ 0.187 & -0.185 \end{bmatrix}, \\
 C' &= 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 4.324 & -3.646 \\ 4.316 & -3.639 \\ 4.297 & -3.649 \\ 4.295 & -3.637 \end{bmatrix}, & D' &= 10^{-5} \times \begin{bmatrix} -2.812 & -0.653 \\ -3.250 & -1.711 \\ -0.953 & -2.587 \\ -2.024 & -3.006 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Par conséquent, le système  $G(s)$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 A &= 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.728 & 0.668 & -2.243 & 0 \\ 0.019 & -0.018 & 0 & 18.298 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 C &= 10^{-3} \times \begin{bmatrix} -0.028 & -0.006 & 4.324 & -3.646 \\ -0.032 & -0.017 & 4.316 & -3.639 \\ -0.009 & -0.026 & 4.297 & -3.649 \\ -0.020 & -0.030 & 4.295 & -3.637 \end{bmatrix}, & D &= [O^{4 \times 2}].
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Les sorties estimées du système sont tracées sur la Fig. 4.20. Les pics dans les zones transitoires ont disparu. Les sorties obtenues en utilisant les données de validation sont tracées sur la Fig. 4.21.

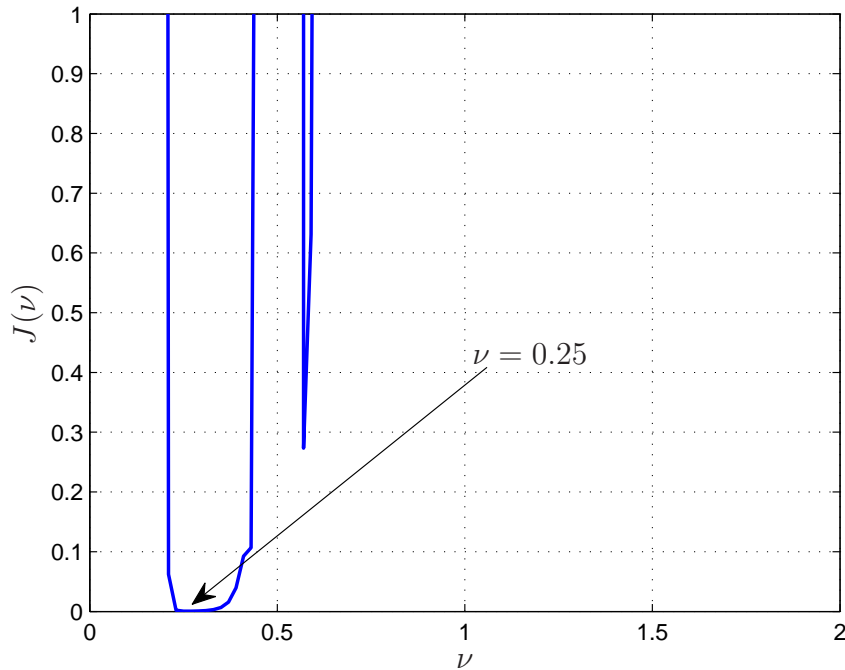


Fig. 4.19. Critère d'erreur  $J_{id}$  en fonction de l'ordre commensurable  $\nu$

### 4.3.3 Conclusions

1. En identifiant directement le système thermique sans aucun traitement, des pics apparaissent dans les zones transitoires à cause de l'estimation d'une matrice  $D$  non nulle. En introduisant un intégrateur non entier dans le système et en l'identifiant à nouveau, les pics dans les zones transitoires disparaissent grâce à une matrice  $D$  nulle.
2. En augmentant la dimension  $n$  du système, l'erreur d'estimation augmente à cause de la sensibilité de la méthode des sous-espaces aux problèmes de conditionnement numérique. Par conséquent, il est difficile d'identifier correctement un système d'ordre élevé.
3. L'ordre du système identifié est égale à  $\nu_{est} = 0.25$  pour un modèle ayant une entrée intégrée, ce qui justifie l'hypothèse du comportement non entier du système thermique.

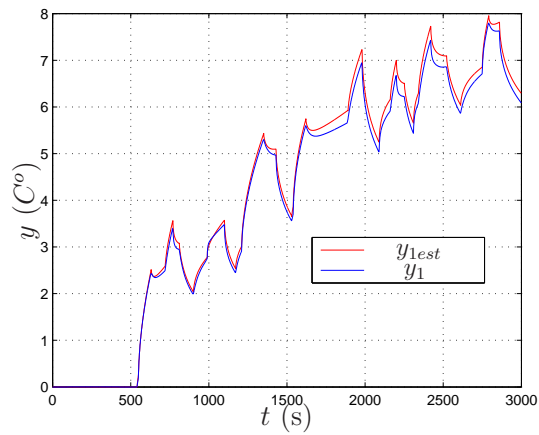
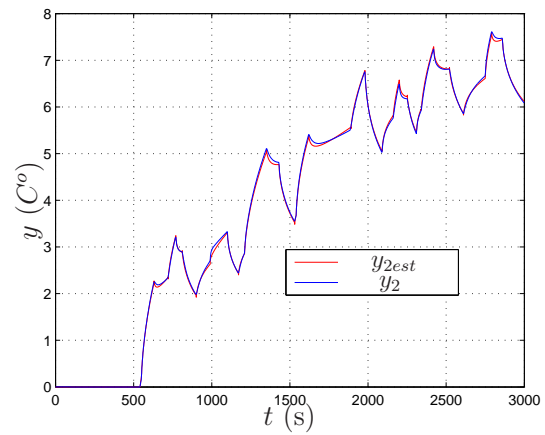
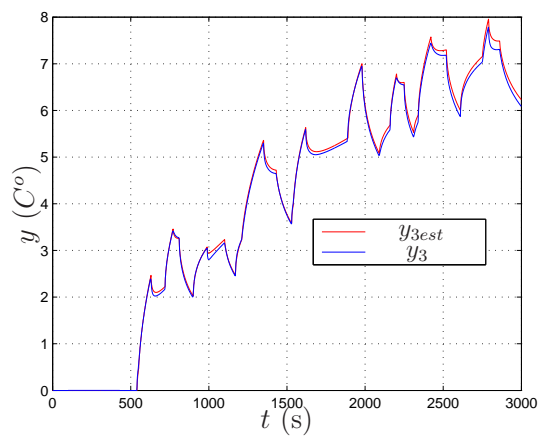
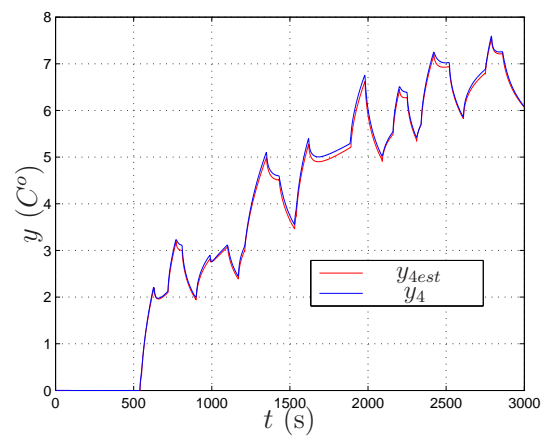
(a)  $y_1$  et  $y_{1est}$ (b)  $y_2$  et  $y_{2est}$ (c)  $y_3$  et  $y_{3est}$ (d)  $y_4$  et  $y_{4est}$ 

Fig. 4.20. Sorties du modèle ayant un intégrateur simulées avec COMSOL et sorties estimées sur les **données d'identification** avec la méthode MOESP.  $\% \text{ fit}_{id} = 99.95\%$

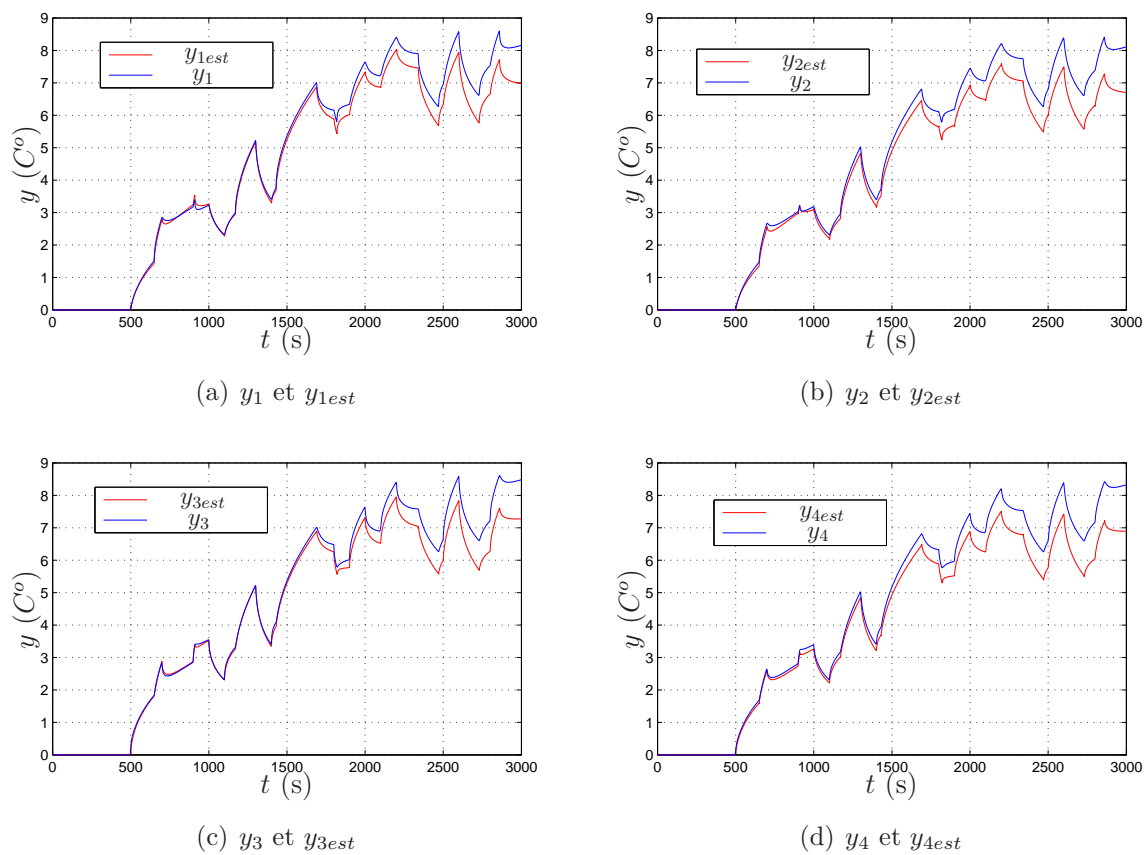


Fig. 4.21. Sorties du modèle ayant un intégrateur simulées avec COMSOL et sorties estimées sur **les données de validation** avec la méthode MOESP.  $\% \text{ fit}_{val} = 99.83\%$

## 4.4 Étude du banc d'essais physique

### 4.4.1 Description et modélisation du banc expérimental

Le banc expérimental (Fig. 4.22) est constitué de deux barreaux en étain, de dimension  $2\text{ cm} \times 2\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ . Chaque barreau est équipé de deux résistances chauffantes de  $12\ \Omega$  montées en série, et isolés thermiquement par une mousse et un coffre en bois et en plastique qui permet d'assurer un transfert unidirectionnel du flux de chaleur.

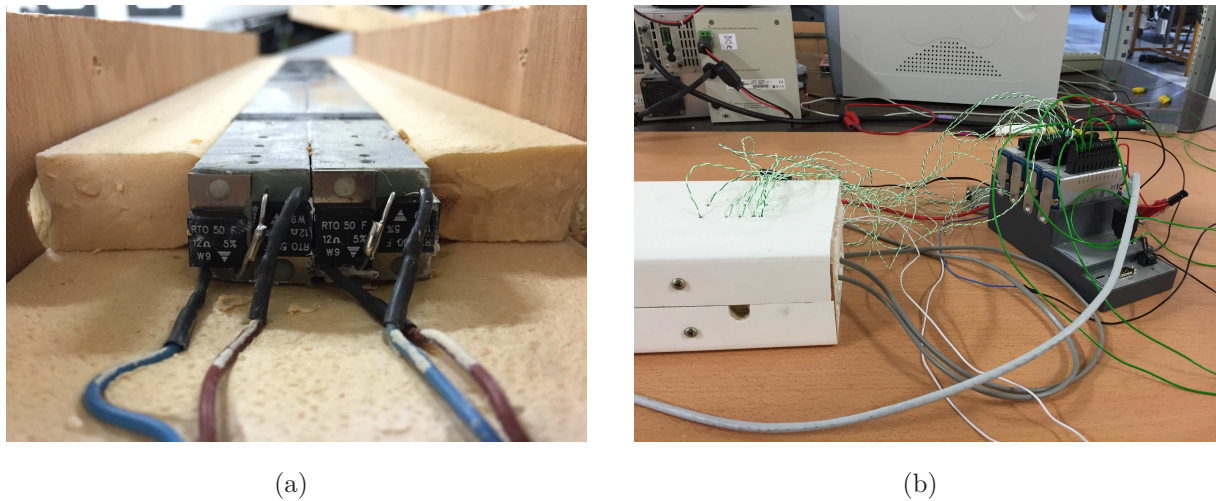


Fig. 4.22. Banc expérimental constitué de deux barreaux en étain équipés de leurs résistances chauffantes et de sondes de température

Les signaux d'entrée sont les flux de chaleur,  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ , générés par les résistances chauffantes commandées par ordinateur au travers d'un transistor on-off avec une amplitude de tension contrôlée (Fig. 4.23).

Les signaux de sortie sont les températures  $y_i(t)$  mesurées aux distances  $l_1 = \{0.5, 1\}$  cm et  $l_2 = \{0.5, 1\}$  cm de l'extrémité chauffée, où l'indice 1 ou 2 indique le barreau 1 ou 2.

Avant de passer à l'identification du système, une étude du couplage entre les deux barreaux et une analyse de pertes de chaleur sont effectuées.

### 4.4.2 Étude du couplage entre les deux barreaux

Le système thermique est identique à celui décrit au paragraphe 4.3.1 et conforme au schéma de la Fig. 4.11.

Pour étudier l'effet de couplage entre les deux barreaux, la fonction échelon du flux  $u_1(t)$  est appliquée au barreau 1. La température est mesurée aux distances  $l_1 = \{0.5, 1\}$

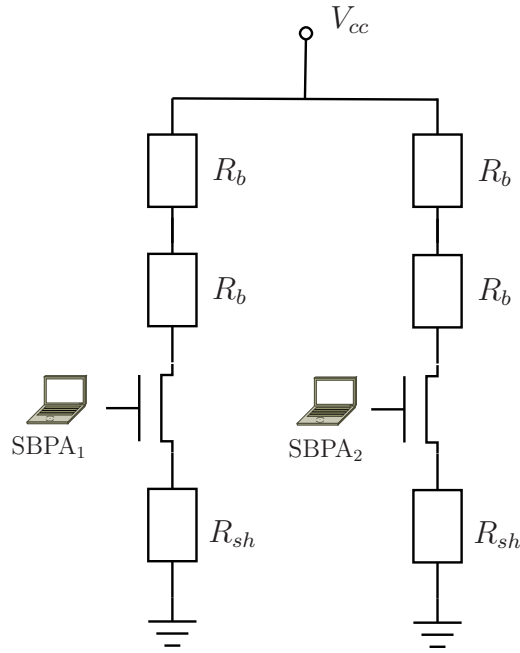


Fig. 4.23. Schéma électrique de commande piloté par ordinateur et constitué de deux résistances chauffantes  $R_b$  de  $12 \Omega$  appliquées à chaque barreau et d'une résistance de shunt  $R_{sh}$  de  $10 \Omega$  permettant de mesurer le courant

cm et  $l_2 = \{0.5, 1\}$  cm de l'extrémité de chaque barreau. Les signaux mesurés sont tracés sur la Fig. 4.24. Les sorties  $y_3$  et  $y_4$ , qui correspondent aux températures mesurées aux distances  $l_2 = \{0.5, 1\}$  cm sur le barreau 2, dépendent de l'entrée  $u_1$  appliquée au barreau 1. Le couplage des sorties est constaté.

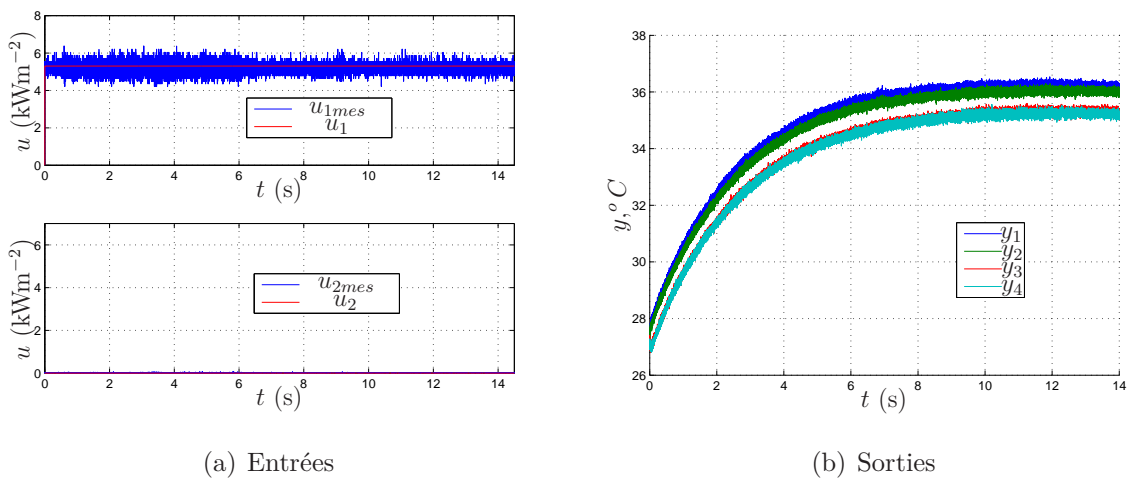


Fig. 4.24. Étude de couplage entre deux barreaux identiques en étain, où  $u_1(t)$ ,  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  sont liés au barreau 1 et  $u_2(t)$ ,  $y_3(t)$  et  $y_4(t)$  sont liés au barreau 2

### 4.4.3 Analyse de pertes par comparaison avec le modèle numérique

La température d’un corps dépend des échanges de chaleur (transferts thermiques) qu’il subit avec le milieu extérieur. Trois modes de transfert thermiques fondamentaux se distinguent : la conduction, la convection et le rayonnement.

La conduction intervient dans les solides ou les fluides au repos. Il s’agit d’un transfert de chaleur de proche en proche au niveau moléculaire et atomique au sein de la matière. Sous COMSOL, le module *heat transfer* est nécessaire pour simuler une conduction.

Le rayonnement est l’énergie émise par la matière sous la forme d’ondes électromagnétiques (c’est-à-dire des photons) lors de changements de la configuration électronique des atomes ou des molécules. L’émission s’effectue en surface pour les solides et les liquides opaques et dans tout le volume d’un gaz ou d’un liquide transparent. Ce mode de transfert thermique se distingue fondamentalement de la conduction et de la convection car il ne nécessite pas de milieu pour se propager. Sous COMSOL, le module *heat transfer* est également nécessaire pour simuler un rayonnement.

Le transfert de chaleur par convection s’effectue entre une surface solide et un fluide (liquide ou gaz) adjacent en mouvement. Ce mode de transfert est fortement lié à la géométrie de la surface d’échange et à la vitesse du fluide. Plus le fluide est rapide, plus l’échange de chaleur par convection est important. La convection dite naturelle est distinguée de la convection forcée. Sous COMSOL, le module *fluid dynamics* est nécessaire pour simuler une convection.

Dans un système de solides parfaitement isolés, seul l’effet de la conduction se produit. Pour effectuer l’analyse des pertes de chaleur, les fonctions échelon des flux  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  sont appliquées aux barreaux réels mais également sous COMSOL. La température est mesurée aux distances  $l_1 = \{0.5, 1\}$  cm et  $l_2 = \{0.5, 1\}$  cm de l’extrémité chauffée. Les signaux mesurés du système idéal et du système réel ainsi que la différence entre eux (les pertes) sont tracés sur la Fig. 4.25.

En réalité l’isolation autour de deux barreaux n’est pas parfaite. Les pertes augmentent avec le temps (Fig. 4.25(c)). Pour reproduire les pertes sous COMSOL, un effet de rayonnement est ajouté. A présent, deux types de transfert de chaleur sont pris en compte : la conduction et le rayonnement, avec un coefficient de rayonnement maximal  $\epsilon = 1$ <sup>1</sup>. Le résultat de simulation est tracé sur la Fig. 4.26. Même si les valeurs finales

---

1.  $\epsilon$  est un coefficient d’émission de la surface,  $\epsilon = 1$  correspond à un corps noir parfait et  $\epsilon \ll 1$  signifie que la surface n’émet aucun rayonnement (corps brillant)

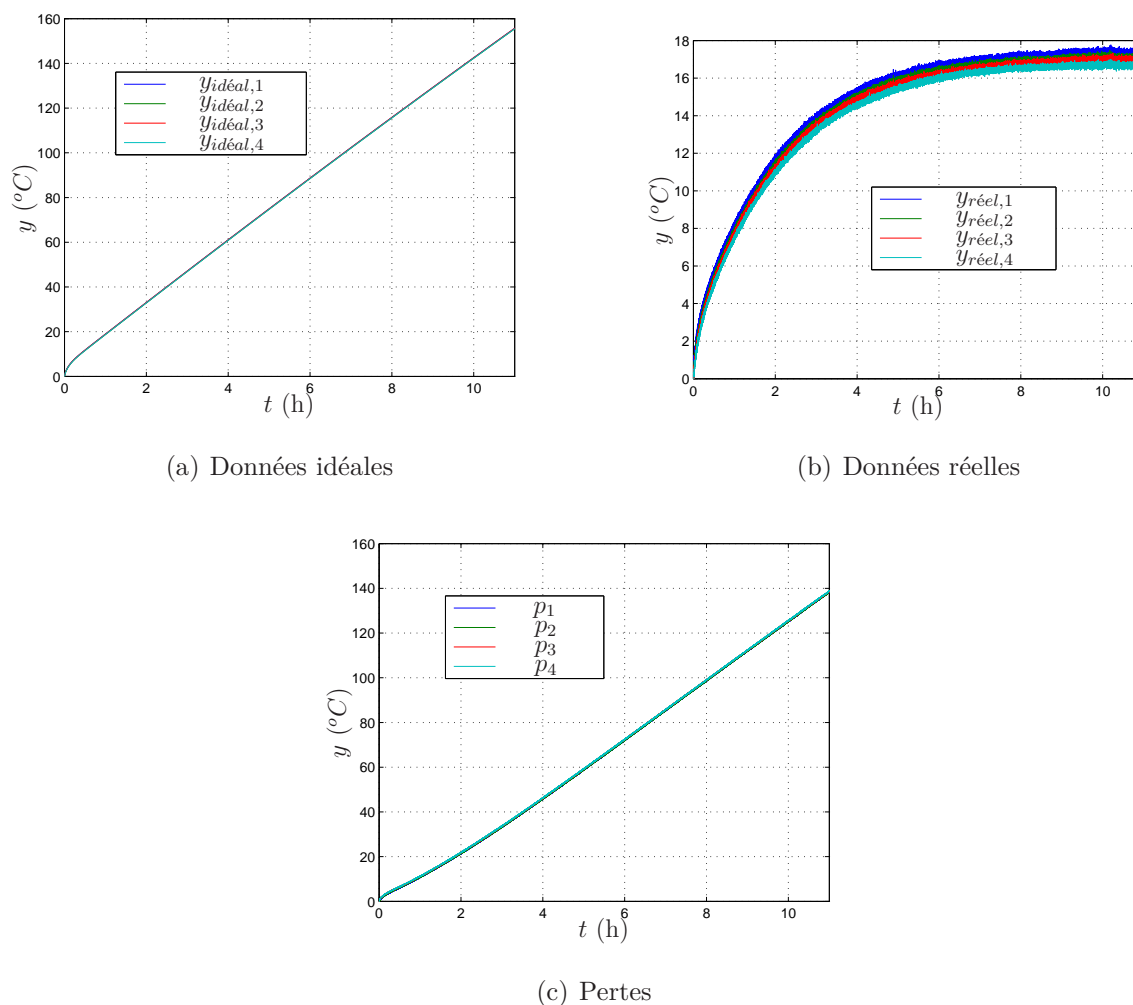


Fig. 4.25. (a) Températures mesurées du système thermique idéal,  $y_{idéal,i}(t)$ , avec deux barreaux parfaitement isolés obtenues en utilisant COMSOL. (b) Températures mesurées du système thermique réel,  $y_{réel,i}(t)$ . (c) Différence entre les deux températures due aux pertes,  $p_i(t)$

des températures simulées tendent vers les valeurs finales des températures mesurées, les formes des courbes réelles et simulées (les dynamiques) sont différentes.

Une isolation (un matériau supplémentaire) a été rajoutée maintenant sous COMSOL, en plastique ayant une épaisseur de 1 cm (Fig. 4.27). Les sorties obtenues pour ce type d'isolation sont tracées sur la Fig. 4.28. L'isolant en plastique de 1 cm en combinaison avec l'effet de rayonnement, avec  $\epsilon = 0.16$ , fournit le résultat qui correspond presque parfaitement aux vraies températures mesurées (Fig. 4.28(b)).



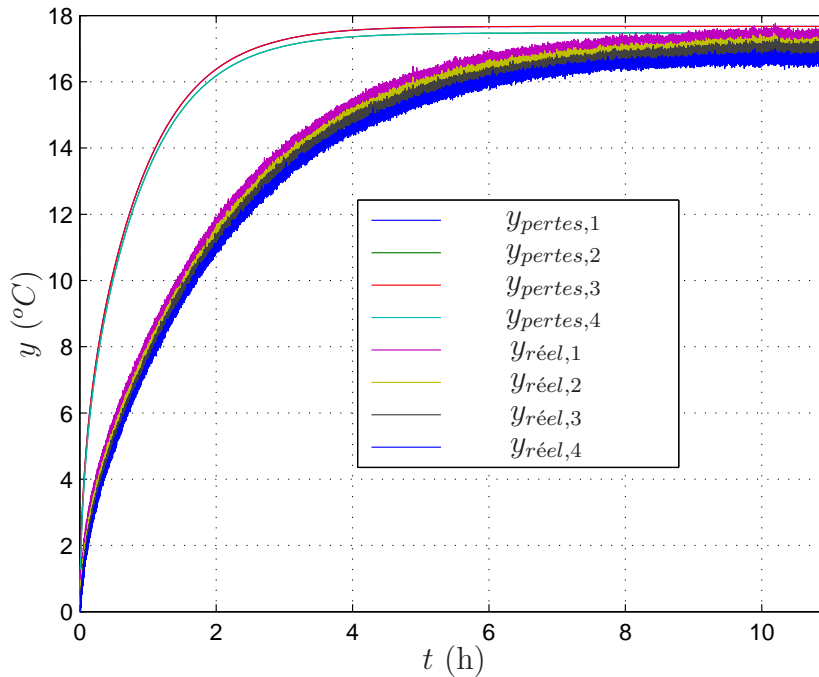


Fig. 4.26. Températures mesurées du système réel,  $y_{réel,i}(t)$ , et températures simulées sous COMSOL du système thermique,  $y_{pertes,i}(t)$ , avec deux types de transfert de chaleur pris en compte : la conduction et le rayonnement, avec  $\epsilon = 1$

#### 4.4.4 Estimation paramétrique par la méthode des sous-espaces appliquée aux données réelles

Pour obtenir un jeu de données riches, une SBPA est appliquée autour d'un point d'équilibre correspondant à un flux de  $5.3 \text{ kWm}^{-2}$ . Pour un essai de plus de 14 h, le régime permanent est atteint au bout de 12 h. L'hypothèse selon laquelle *l'énergie injectée compense les pertes thermiques* est vérifiée. Tous les essais sont effectués autour du régime permanent.

La température correspondant au régime permanent pour deux barreaux est égale à  $45.5^{\circ}\text{C}$ , elle est soustraite à la température mesurée pour avoir des conditions initiales nulles.

##### 4.4.4.1 A partir des entrées non intégrées

On procède maintenant à l'estimation paramétrique, par la méthode des sous-espaces, du système liant la température mesurée à la densité du flux de chaleur injectée à partir de données expérimentales. La puissance maximale du flux peut atteindre environ 2 W (le courant  $I_{max}=0.295 \text{ A}$  sous une tension maximale  $U_{max}$  de 6.95 V). Dans la plage

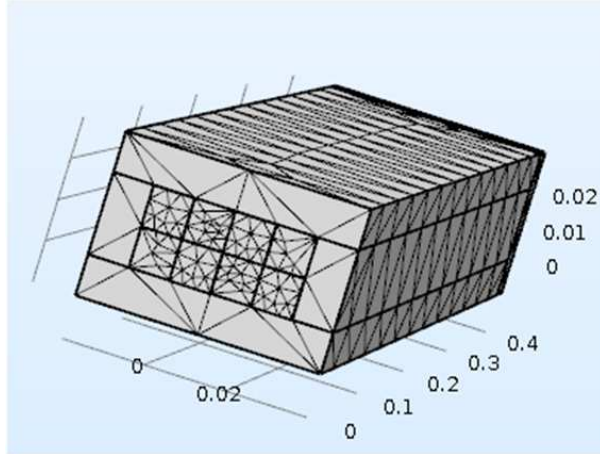
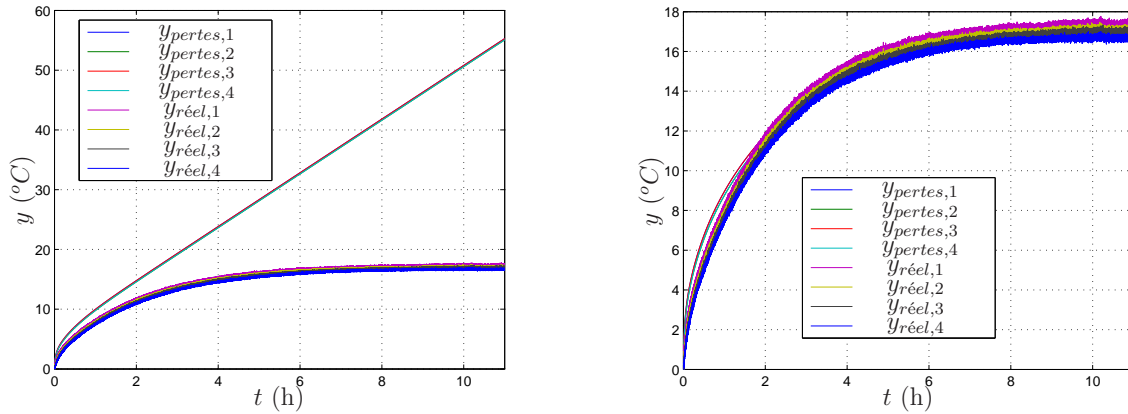


Fig. 4.27. Isolation autour des barreaux créés sous COMSOL, en plastique ayant une épaisseur de 1 cm



(a) Isolation en plastique de 1 cm, sans le rayonnement,  $\epsilon = 0$

(b) Isolation en plastique de 1 cm, avec le rayonnement,  $\epsilon = 0.16$

Fig. 4.28. (a) Températures mesurées du système réel,  $y_{réel}(t)$ , et températures simulées sous COMSOL,  $y_{pertes}(t)$ , avec une isolation en plastique d'une épaisseur de 1 cm créée autour des barreaux, sans aucun rayonnement,  $\epsilon = 0$ , et (b) avec un rayonnement,  $\epsilon = 0.16$

de température considérée, les résistances chauffantes sont constantes à  $24.3 \Omega$ . Ainsi, la densité de flux maximale est égale à :

$$\phi_{max} = \frac{U_{max}^2}{RS} = \frac{I_{max}^2 R}{S} = \frac{0.295^2 A \times 24.3 \Omega}{2 \times 10^{-4} m^2} = 10.6 \text{ kWm}^{-2}, \quad (4.62)$$

où  $S$  est la surface des résistances chauffantes,  $S = 2 \text{ cm}^2$ .

Les densités du flux thermique appliquées en entrée sont des SBPA comprises entre 0 et  $10.6 \text{ kWm}^{-2}$  correspondant aux tensions de commande comprises entre 0 et 10 V ; or, comme on se situe autour d'un point d'équilibre, les valeurs moyennes des signaux d'entrée

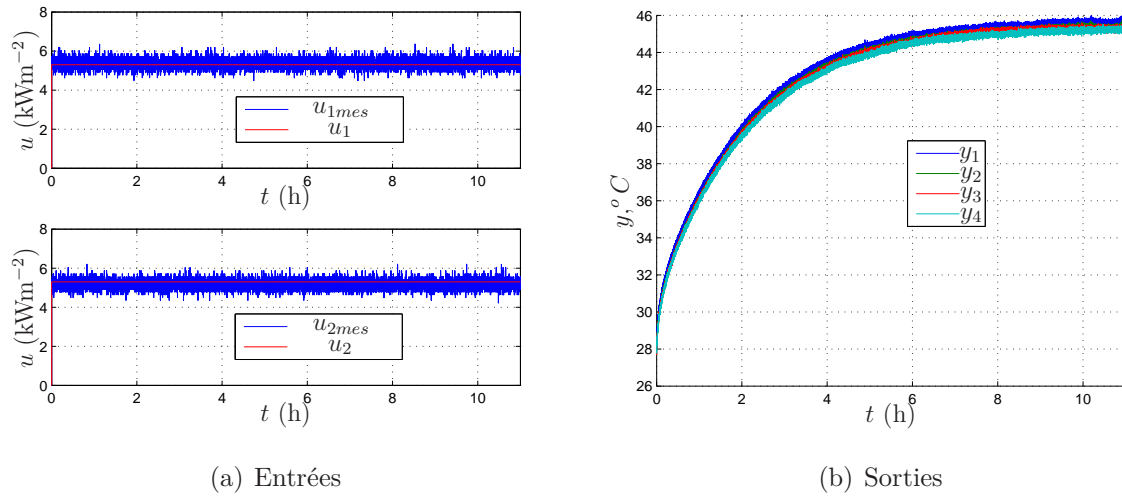


Fig. 4.29. Réponse du barreau thermique pour un échelon de flux d'amplitude  $5.3 \text{ kWm}^{-2}$  ; régime permanent atteint au bout de  $\approx 10 \text{ h}$

et de sortie sont retranchées. Par conséquent, les SBPA considérées pour l'algorithme d'estimation paramétrique sont comprises entre  $-5.3 \text{ kWm}^{-2}$  et  $5.3 \text{ kWm}^{-2}$  (Fig. 4.30 a).

Les températures mesurées aux distances  $l_1 = \{0.5, 1\} \text{ cm}$  et  $l_2 = \{0.5, 1\} \text{ cm}$  de l'extrémité chauffée de chaque barreau, sont tracées sur la Fig. 4.30 b.

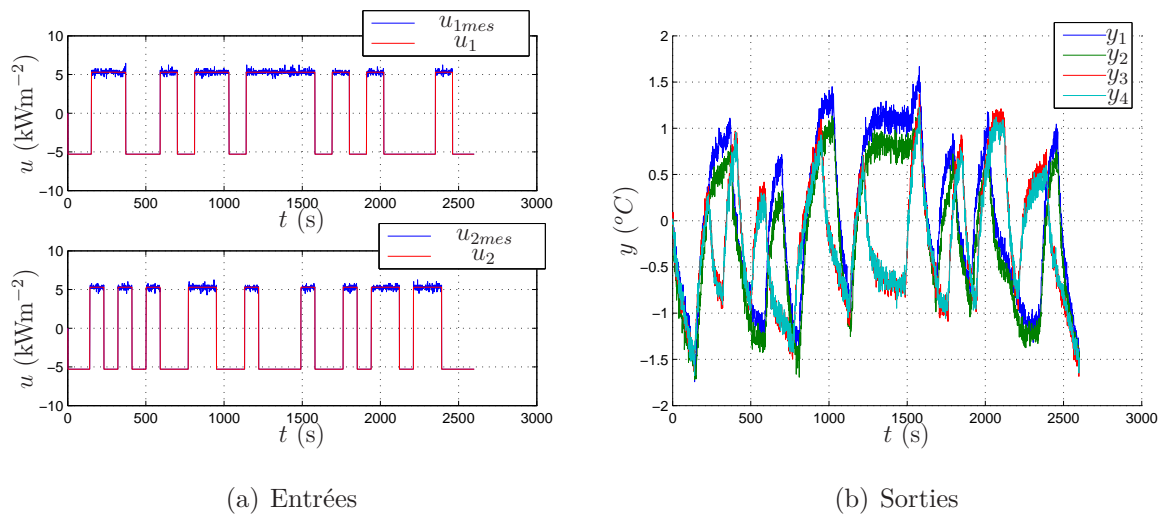


Fig. 4.30. Entrées et sorties du système thermique (deux barreaux en étain)

Le système est identifié pour différentes valeurs de l'ordre commensurable  $\nu \in (0, 2)$  supposé inconnu et pour différentes dimensions du système.

La norme  $\ell_2$  (ou  $J_{id}$ ) de l'erreur de sortie (4.48) calculée en utilisant les données d'identification (Fig. 4.30) ainsi que le critère « % fit<sub>id</sub> » (4.49), et l'ordre de dérivation estimé obtenu pour les différentes dimensions du système sont donnés dans le tableau 4.3.

Les données d'entrée/sorties utilisées pour la validation sont tracées sur la Fig. 4.31. Le critère « % fit<sub>val</sub> » calculé en utilisant les données de validation est aussi indiqué dans le tableau 4.3.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$\nu$	0.65	0.85	0.95	1.05	1.1
Le « fit <sub>id</sub> »	86.0%	95.5%	96.25%	90.3%	78.6%
Le « fit <sub>val</sub> »	87.8%	83.8%	92.3 %	91.4%	13%

Tab. 4.3. Critère d'erreur obtenu pour différentes dimensions du système

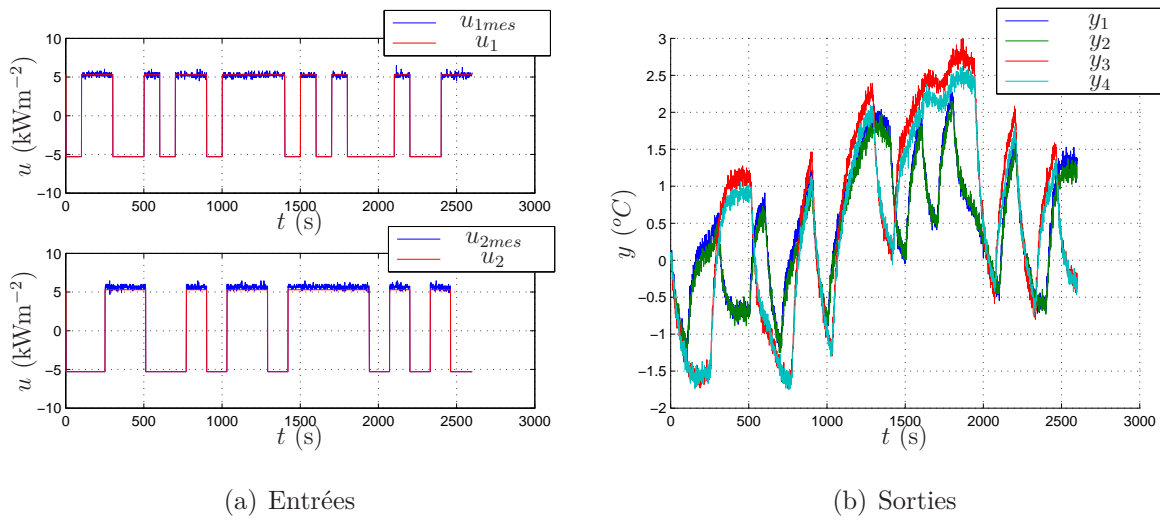


Fig. 4.31. Entrées et sorties du système de deux barreaux identiques en étain utilisées pour la validation

Les erreurs d'identification et de validation sont minimales pour une dimension du système fixée à  $n = \dim A = 3$ . Le paramètre optimal de réglage du filtre GPMF est fixé à  $\lambda = 0.022$ . A titre indicatif, pour  $n = 3$ , le critère quadratique normalisé est tracé en fonction de l'ordre commensurable sur la Fig. 4.32. A l'optimum, pour  $\nu = 0.95$ , les matrices d'état  $A, B, C, D$  du système identifié  $G(s)$  sont données par :

$$\begin{aligned}
 A &= 10^{-2} \times \begin{bmatrix} -3.780 & 0 & 0 \\ 0 & -0.386 & 0 \\ 0 & 0 & -0.007 \end{bmatrix}, & B &= 10^{-3} \times \begin{bmatrix} -5.099 & 4.223 \\ 1.264 & 1.577 \\ 0.011 & 0.171 \end{bmatrix}, \\
 C &= 10^{-3} \times \begin{bmatrix} -0.668 & 1.065 & -0.886 \\ -0.697 & 0.970 & 0.963 \\ 0.538 & 1.071 & -0.008 \\ 0.496 & 1.065 & 0.282 \end{bmatrix}, & D &= 10^{-5} \times \begin{bmatrix} 2.275 & 1.891 \\ 0.848 & 2.115 \\ 2.145 & 3.451 \\ 1.819 & 2.639 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

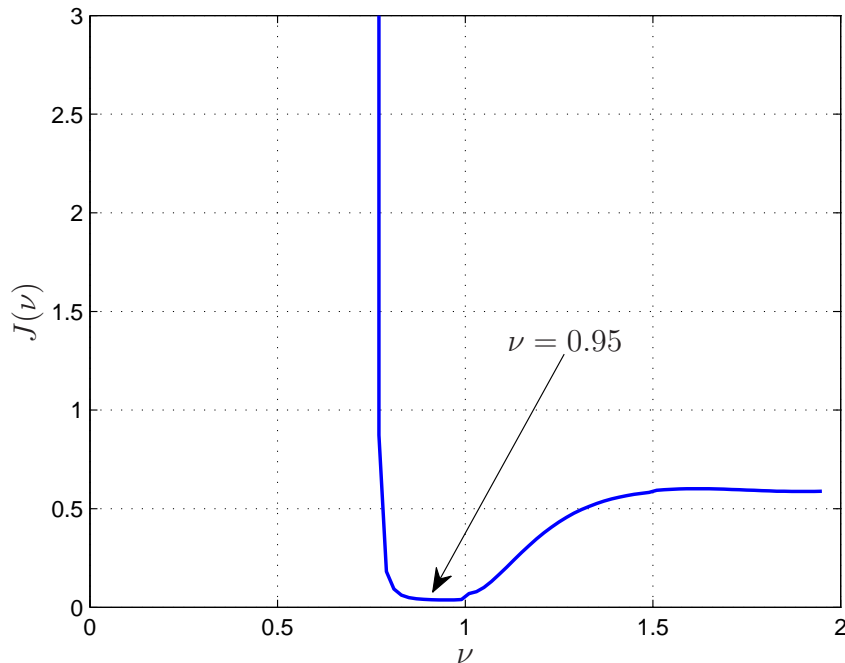


Fig. 4.32. Critère d’erreur  $J_{id}$  en fonction de l’ordre commensurable  $\nu$

Les mesures ainsi que les sorties du modèle sont tracées sur la Fig. 4.33 pour les données d’identification et sur la Fig. 4.34 pour les données de validation. Les pics apparaissent dans les zones transitoires comme au paragraphe 4.3 à cause probablement d’une matrice  $D$  non nulle. Or comme le montre la modélisation thermique du paragraphe 4.2, il n’existe pas de transfert direct entre l’entrée et la sortie. Pour obtenir une estimation du système avec une matrice  $D$  nulle et avec la présence d’un intégrateur, la méthode décrite au paragraphe 4.3 est utilisée.

#### 4.4.4.2 A partir des entrées intégrées

La présence de l’intégrateur dans le modèle du système est considérée et l’identification se passe sur le reste du modèle en utilisant l’intégrale de l’entrée. Le système  $G(s) = \{A, B, C, D, \nu\}$  se réécrit sous la forme d’un intégrateur non entier d’ordre  $\nu$  et un nouveau système  $G'(s) = \{A', B', C', D', \nu\}$ , comme illustré en (4.52) et tracé sur la Fig. 4.17.

Le système  $G'(s)$  (4.57)-(4.57) est identifié par la méthode des sous-espaces en utilisant le filtre GPMF, pour différentes valeurs de l’ordre commensurable  $\nu \in (0, 2)$ , supposé inconnu, et pour différentes dimensions du système.

La norme  $\ell_2$  (ou  $J_{id}$ ) de l’erreur de sortie (4.48) est évaluée ainsi que le critère « % fit<sub>id</sub> » (4.49), en utilisant les données d’identification. L’ordre de dérivation est estimé

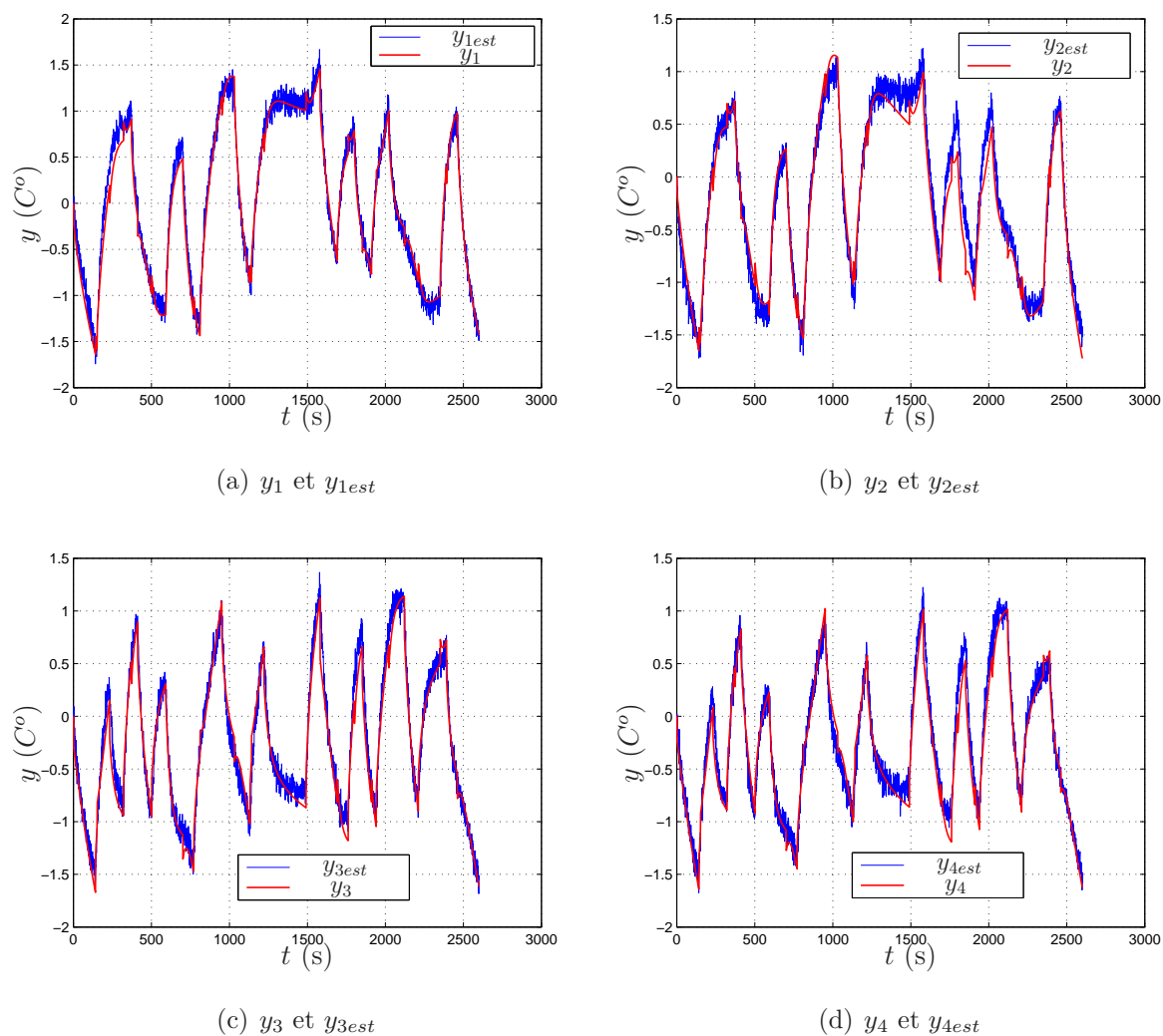


Fig. 4.33. Sorties estimées sur les données d'identification avec la méthode MOESP.  
 $\% \text{fit}_{id} = 96.25\%$

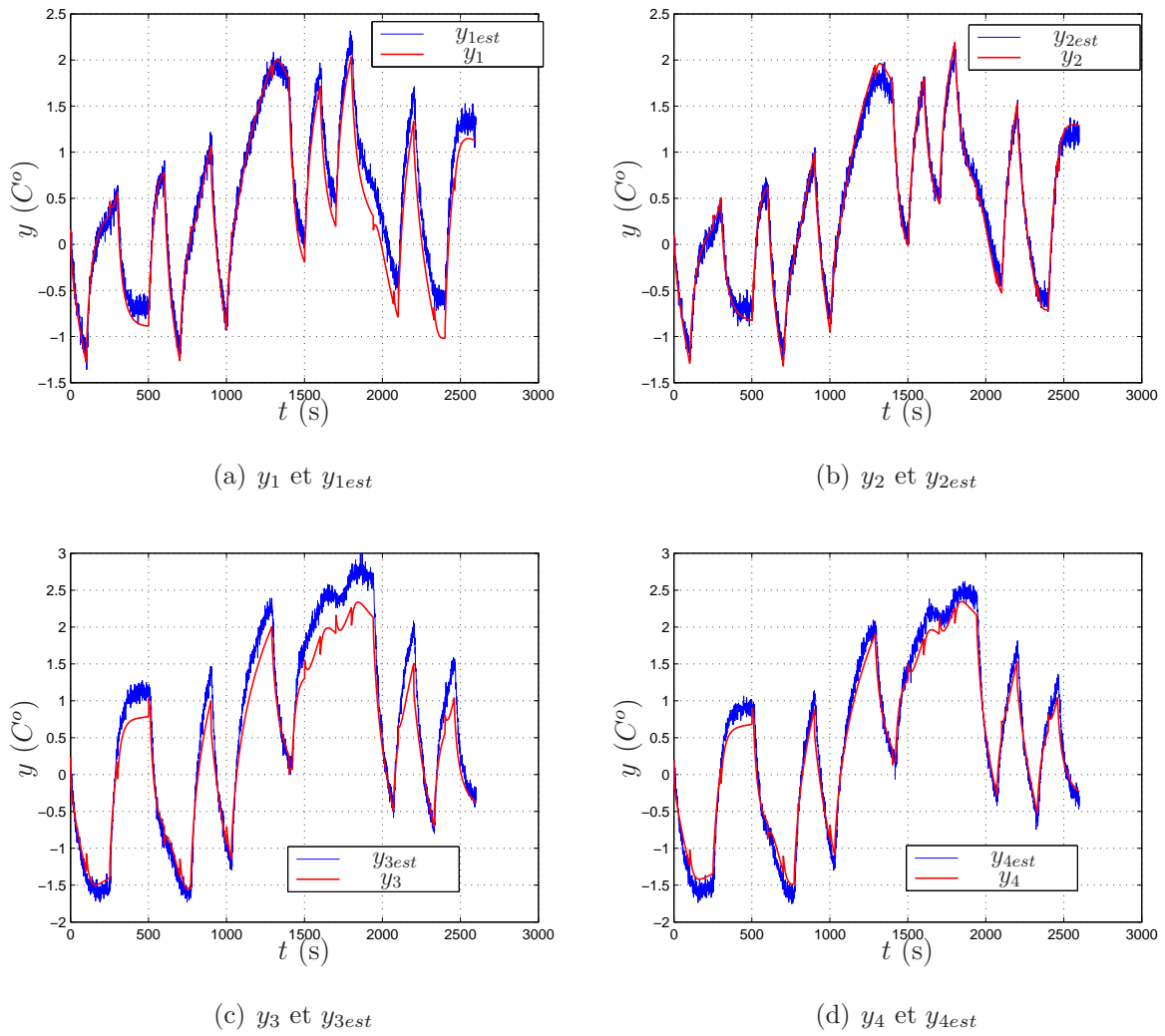


Fig. 4.34. Sorties estimées sur les **données de validation** avec la méthode MOESP.  
% fit<sub>val</sub> = 92.3%

pour les différentes dimensions du système  $G'(s)$  (avec l'entrée intégrée) (tableau 4.4). Le critère « % fit<sub>val</sub> » évalué en utilisant les données de validation est aussi indiqué dans le tableau 4.4.

	$n' = 1$	$n' = 2$	$n' = 3$	$n' = 4$
$\nu$	0.55	0.75	0.5	0.35
Le « fit <sub>id</sub> »	95.2%	98.3%	97.2%	40.0%
Le « fit <sub>val</sub> »	91.0 %	94.2 %	87.9%	0%

Tab. 4.4. Critère d'erreur obtenu pour différentes dimensions du système avec l'entrée intégrée

Les erreurs d'identification et de validation sont minimales pour une dimension du système fixée à  $n' = \dim A' = 2$ . Le paramètre optimal de réglage du filtre GPMF est fixé à  $\lambda = 0.012$ . A titre indicatif, pour  $n = 2$ , le critère quadratique normalisé est tracé en fonction de l'ordre commensurable sur la Fig. 4.35. A l'optimum, pour  $\nu = 0.75$ , les matrices d'état  $A', B', C', D'$  du système identifié  $G'(s)$  sont données par :

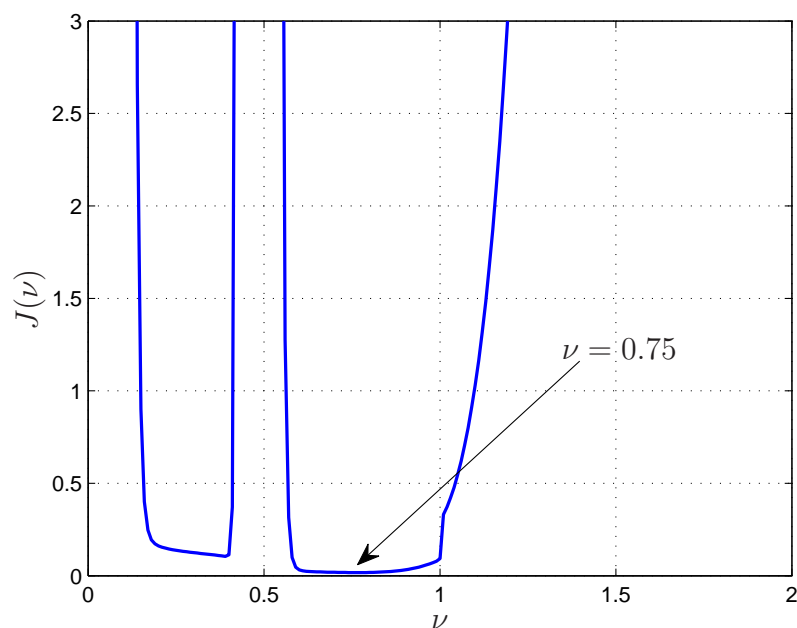


Fig. 4.35. Critère d'erreur  $J_{id}$  en fonction de l'ordre commensurable  $\nu$



$$\begin{aligned}
A' &= 10^{-2} \times \begin{bmatrix} -1.441 & 0 \\ 0 & -7.260 \end{bmatrix}, & B' &= 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 2.718 & 3.089 \\ 7.771 & -8.335 \end{bmatrix}, \\
C' &= 10^{-4} \times \begin{bmatrix} -2.381 & -6.067 \\ -1.375 & -5.604 \\ -1.640 & 5.535 \\ -1.433 & 5.274 \end{bmatrix}, & D' &= 10^{-5} \times \begin{bmatrix} 1.1000 & -0.235 \\ 1.016 & -0.187 \\ -0.176 & 1.068 \\ -0.157 & 0.999 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.64}$$

d'où le système  $G(s)$  :

$$\begin{aligned}
A &= 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.027 & 0.031 & -1.441 & 0 \\ 0.078 & -0.083 & 0 & -7.260 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
C &= 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.110 & -0.023 & -2.381 & -6.067 \\ 0.102 & -0.019 & -1.375 & -5.604 \\ -0.018 & 0.107 & -1.640 & 5.535 \\ -0.016 & 0.010 & -1.433 & 5.274 \end{bmatrix}, & D &= [O^{4 \times 2}].
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Les sorties du système estimées ainsi que les vrais sorties mesurées sont tracées sur la Fig. 4.36. Les pics dans les zones transitoires ont disparu grâce à une matrice  $D$  nulle. Les sorties obtenues en utilisant les données de validation et le modèle estimé sont tracées sur la Fig. 4.37.

#### 4.4.5 Conclusions

Les conclusions 1 et 2 du paragraphe 4.3.3 restent identiques. En revanche, l'ordre non entier du système identifié est égale à  $\nu = 0.75$ .

### 4.5 Conclusions

L'identification du système thermique multivariable constitué de deux barreaux en étain est réalisée à l'aide des méthodes des sous-espaces développées au chapitre 3. Un premier jeu de données a été généré en simulation par éléments finis, puis un second jeu de données à partir de mesures réelles.

En identifiant le système thermique avec la méthode MOESP sans aucun traitement, des pics apparaissent sur les courbes de la température obtenue dans les zones transitoires à cause de l'estimation d'une matrice  $D$  non nulle. Un modèle du système ayant un intégrateur explicite permet d'obtenir une matrice  $D$  nulle, correspondant au système thermique décrit au paragraphe 4.2.

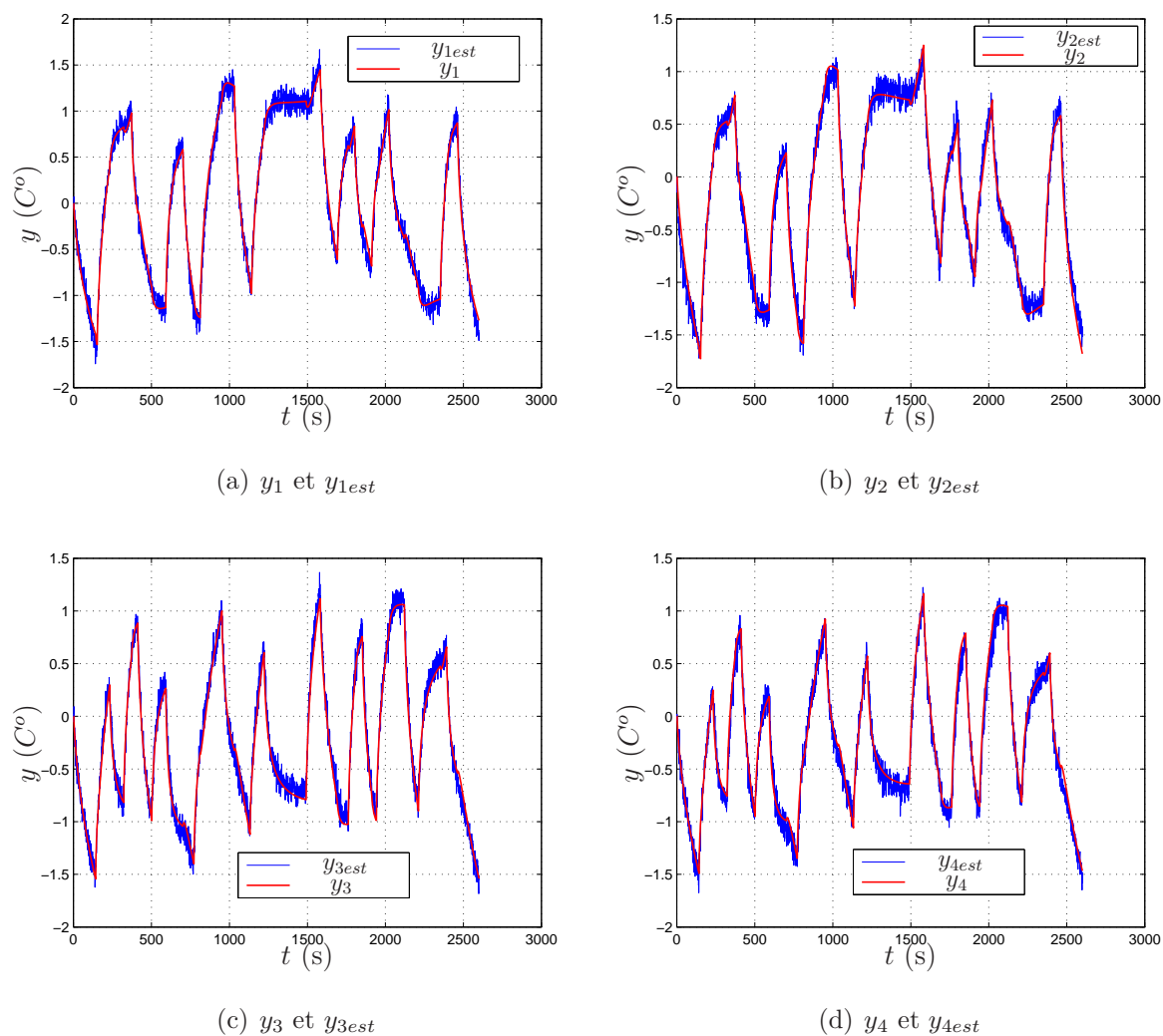


Fig. 4.36. Sorties du système ayant une entrée intégrée estimées sur les **données d'identification** avec la méthode MOESP.  $\% \text{ fit}_{id} = 98.3\%$

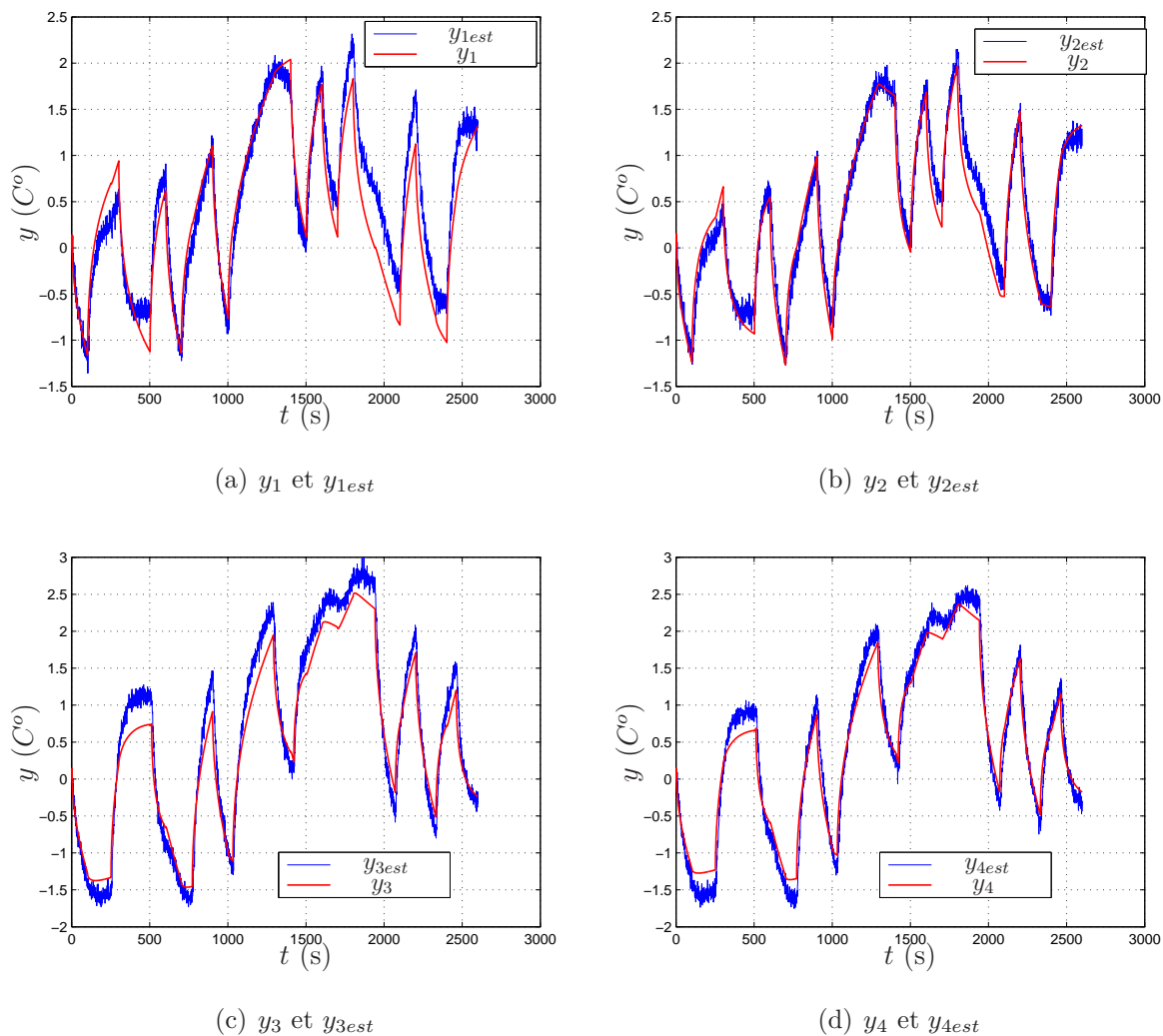


Fig. 4.37. Sorties du système ayant une entrée intégrée estimées sur **les données de validation** avec la méthode MOESP.  $\% \text{ fit}_{val} = 94.2\%$

Le résultat obtenu montre l'efficacité de la méthode des sous-espace pour l'identification des systèmes linéaires non entiers. L'avantage de la méthode est le choix « automatique » de l'ordre et de la dimension du système, ce qui permet d'éviter l'étape de sélection de structure du modèle. En revanche, la méthode est très sensible au bruit et l'utilisation d'un filtre approprié est nécessaire. De plus, il n'est pas possible d'imposer certaines contraintes « physiques » (comme une matrice  $D$  nulle).

En perspective, il serait intéressant d'appliquer d'autres méthodes d'identification et de comparer les résultats, ainsi que d'autres méthodes de filtrage. De plus, il est potentiellement possible d'améliorer le modèle en considérant les ordres de dérivation non commensurables.

# Conclusion générale et perspectives

L'interprétation et la discussion des principaux résultats présentés dans ce mémoire de thèse font l'objet de la conclusion.

Pour rappel, cette thèse a pour objectif l'application de la méthode des sous-espaces pour l'identification de systèmes non entiers MIMO à la fois dans les domaines temporel et fréquentiel. Plusieurs méthodes de filtrage, nécessaires pour l'identification des systèmes à TC, dont les systèmes non entiers sont également étudiées. L'identification d'un système non entier non commensurable n'est en revanche pas possible. Enfin, à titre applicatif, un système thermique composé de deux barreaux en étain est identifié par la méthode des sous-espaces non entière.

Le **chapitre 1** présente les propriétés principales des systèmes non entiers, les notions de pseudo-représentation d'état et les fonctions de transfert associées. Ce chapitre se focalise, par la suite, sur l'étude de fonctions de transfert de deuxième ordre non commensurables. Les conditions de stabilité et de résonance sont établies et trois abaques sont proposés permettant de déterminer le facteur de pseudo-amortissement et l'ordre de dérivation pour un gain, une phase ou une pulsation normalisée. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans la revue *Journal of Vibration and Control* (Ivanova, Moreau et Malti, 2016).

Dans le **chapitre 2**, une méthode originale de simulation des systèmes MIMO non entiers est développée. Elle permet d'obtenir une approximation d'une pseudo-représentation d'état non entière en utilisant une représentation d'état entière. Cette méthode peut être appliquée aux systèmes commensurables et non commensurables, quel que soit l'ordre de dérivation. La méthode est utilisée pour la simulation d'un système thermique constitué d'un barreau en étain de dimension finie ayant deux entrées et deux sorties. La contribution principale de ce chapitre, à savoir la mise en place d'une méthode de simulation de systèmes MIMO non entiers à TC à partir de la représentation d'état, a donné lieu à une publication dans la revue *Nonlinear Dynamics* (Ivanova, Malti et Moreau, 2016a).

Le **chapitre 3** est consacré à l'identification de systèmes par modèle non entier

utilisant la méthode des sous-espaces. Les algorithmes sont développés d'abord dans le domaine temporel. Dans le cas stochastique, en présence d'un bruit blanc en sortie, l'algorithme MOESP combiné au filtre LIF ou au filtre GPMF et l'algorithme PO-MOESP combiné à la méthode algébrique permettent d'obtenir les meilleures estimations. Aussi, il est montré sur un exemple que l'estimation de l'ordre de dérivation peut être effectuée avec succès dans le cas stochastique lorsque la dimension du système est proche de sa vraie valeur. Ensuite, l'identification dans le domaine fréquentiel est développée. Dans le cas stochastique, en présence d'un bruit blanc, l'algorithme MOESP combiné avec des filtres passe-bas permet d'avoir une meilleure estimation. Les contributions principales de la première partie ont donné lieu à une communication dans la conférence IEEE ICFDA (Ivanova, Malti et Moreau, 2016b). Les contributions de la deuxième partie ont donné lieu aux communications dans les conférences internationale IEEE MESA (Ivanova, Malti et Moreau, 2014a) et nationale JDMACS (Ivanova, Malti et Moreau, 2015), et à un article accepté dans la revue nationale JESA (Ivanova, Malti et Moreau, 2017).

Enfin dans le **chapitre 4**, l'identification d'un système thermique composé de deux barreaux identiques en étain est présentée. Un modèle aux éléments finis du système est simulé et identifié dans un premier temps, puis le système réel est identifié. Les deux modèles font l'objet d'une étude comparative et d'une analyse de pertes. Les résultats d'identification justifient bien l'hypothèse du comportement non entier du système thermique.

Les perspectives s'inscrivent directement dans la continuité des travaux en cours.

Une première perspective à court terme est la comparaison de la méthode des sous-espaces avec d'autres méthodes d'identification comme, les méthodes à erreur de prédiction ou à erreur de sortie. Une étude comparative est alors nécessaire pour analyser les performances des différentes méthodes et pour conclure sur leurs avantages et inconvénients.

Dans ce mémoire, les filtres classiques sont utilisés tels que GPMF, LIF ainsi que la méthode algébrique. Il est également possible d'étudier d'autres méthodes de filtrage comme par exemple le filtrage non linéaire.

De plus, le problème d'identification d'un système MIMO non entier non commensurable, par la méthode des sous-espaces, reste non résolu et constitue un verrou scientifique. Un tel problème a une formulation mathématique très complexe, dont la résolution n'est pas possible à cause des problèmes de conditionnement numérique.

Enfin, les résultats d'identification du système thermique montrent l'intérêt de l'utilisation de modèles non entiers, même dans le contexte MIMO. Néanmoins, certains phé-

nomènes physiques, comme les flux de chaleurs sortants (les pertes), restent difficiles à prendre en compte. Une étude supplémentaire sur la modélisation des pertes peut s'avérer utile.





# Annexe A

## COMSOL : simulation numérique basée sur la méthode des éléments finis

1. Définition de la géométrie :
  - a. créer deux barreaux en utilisant deux rectangles identiques de taille  $0.4 \times 0.02 \times 0.02$  ;
  - b. créer 4 résistances en utilisant 4 rectangles identiques de taille  $0.1 \times 0.1 \times 0.001$  ;
  - c. créer une union entre les barreaux et les résistances pour modéliser le contact thermiquement parfait ;
  - d. construire la géométrie.
2. Définition des matériaux :
  - a. choisir le matériau « Tin » (ou un autre) dans la liste des matériaux ;
  - b. imposer le matériau à tous les éléments du modèle ;
3. Définition de la physique :
  - a. sur la page « Valeurs initiales », choisir une température initiale des éléments ;
  - b. pour créer un flux de chaleur, choisir Source de chaleur de frontière (deux fois), relier chaque source à un barreau correspondant. Dans les paramètres de source, choisir la valeur de Flux égale à  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  respectivement ;
  - c. dans la section « Global » ajouter une définition de fonction par interpolation (deux fois). Dans les paramètres de chaque fonction, choisir « Source » - « Fichier » et indiquer le chemin vers le fichier .txt contenant deux colonnes : le temps et la valeur du signal d'entrée. Ensuite, donner un nom  $u_1, u_2$  aux signaux dans le tableau des paramètres, les noms des « Labels »  $u_1, u_2$  et les unités de l'axe x en [s].

4. Définition du maillage :
  - a. choisir « maillage personnalisé », puis maillage par utilisateur ;
  - b. imposer la valeur minimale d'un maille (ordre de 0.001m) et valeur maximale de maille (0.1m). Imposer le taux de croissance : de 1 à 2 (chaque maille consécutif est de la taille d'un maille précédent multiplié par le taux), d'ordre 1.1-1.2 ;
  - c. construire le maillage.
5. Réaliser l'étude et les calculs :
  - a. dans la liste « calculs » imposer le temps de simulation sous la forme (tmin,dt,tmax) (range(0,1,2600)). Effectuer les calculs.
6. Analyser les résultats :
  - a. créer une figure « Graphique ponctuel », choisir comme une source de données le point dans l'espace de trois dimensions créé précédemment.
7. Exporter les mesures :
  - a. choisir dans l'export comme une source de données le point d'observation créé précédemment ;
  - b. rajouter dans le tableau de données la variable  $T$  qui correspond à la température (variable globale) ;
  - c. indiquer le chemin vers le fichier avec des résultats désiré ;
  - d. exporter les données.

# Bibliographie

- Agrawal, P. (2004). « Application of fractional derivatives in thermal analysis of disk brakes. » In : *Nonlinear Dynamics* 38, p. 191–206.
- Akçay, H. et S. Turkay (2004). « Frequency domain subspace-based identification of discrete-time power spectra from nonuniformly spaced measurements ». In : *Automatica* 40.8, p. 1333–1347.
- Akçay, H. et S. Turkay (2011). « Frequency domain subspace-based identification of discrete-time power spectra from uniformly spaced measurements ». In : *Automatica* 47.2, p. 363–367.
- Ala, G., M. Di Paola, E. Francomano, Y. Li et F.P. Pinnola (2014). « Electrical analogous in viscoelasticity ». In : *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 19 (7), p. 2513–2527.
- Al-Alaoui, M.A (1994). « Novel IIR differentiator from the Simpson Integration rule ». In : *IEEE Trans. on Circuits and Systems I. Fundamental Theory and Applications* 41.2, p. 186–187.
- Aoun, M., M. Amairi et Abdelkrim M.N. (2011). « Simulation method of fractional systems based on the discrete-time approximation of the Caputo fractional derivatives ». In : *8th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*. Gabes, Tunisia.
- Aoun, M., R. Malti, F. Levron et A. Oustaloup (2004). « Numerical simulations of fractional systems : an overview of existing methods and improvements ». In : *Nonlinear Dynamics* 38.1-4, p. 117–131.
- Assaf, R., X. Moreau, R. A. Z. Daou et F. Christophy (2012). « Analysis of the fractional order system in the thermal diffusive interface - Part 2 : Application to a finite plane medium ». In : *2012 2nd International Conference on Advances in Computational Tools for Engineering Applications (ACTEA)*, p. 151–155.
- Atherton, D.P., N. Tan et A. Yuce (2015). « Methods for computing the time response of fractional-order systems ». In : *IET Control Theory Applications* 6.9, p. 817–830.

- Battaglia, J.-L., O. Cois, L. Puigsegur et A. Oustaloup (2001). « Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model ». In : *Int. J. of Heat and Mass Transfer* 44.14, p. 2671–2680.
- Battaglia, J.L., L. Le Lay, J.C. Batsale, A. Oustaloup et O. Cois (2000). « Heat flux estimation through inverted non integer identification models ». In : *Int. J. of Thermal Science* 39.3, p. 374–389.
- Battaglia, J.-L., A. Maachou, R. Malti, P. Melchior et A. Oustaloup (2012). « Nonlinear heat diffusion simulation using Volterra series expansion ». In : *International journal of thermal sciences*.
- Ben Hmed, A., M. Amairi et M. Aoun (2015). « Stability and resonance conditions of the non-commensurate elementary fractional transfer functions of the second kind ». In : *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 22, p. 842–865.
- Benchellal, A., T. Poinot et J.-C. Trigeassou (2007). « Advances in fractional calculus. Theoretical developments and applications in physics and engineering ». In : sous la dir. de J. Sabatier, O. M. Agrawal et J. A. Tenreiro Machado. Springer. Chap. Modelling and identification of diffusive systems using fractional models, p. 213–225.
- Benoit-Marand, F., L. Signac, A. Benchellal, T. Poinot et J. C. Trigeassou (2006). « Identification of diffusive interfaces using a simplified fractional integrator. Part II : non linear case ». In : *IECON 2006 - 32nd Annual Conference on IEEE Industrial Electronics*, p. 270–275.
- Bergamasco, M. et M. Lovera (2011). « Continuous-time predictor-based subspace identification using laguerre filters ». In : *Control Theory Applications, IET* 5.7, p. 856–867.
- Bohannan, J. (2000). « Application of fractional calculus to polarization dynamics in solid dielectric materials ». Thèse de doct. Montana State University.
- Bonnet, Catherine et Jonathan R. Partington (2000). « Coprime factorizations and stability of fractional differential systems ». In : *Systems & Control Letters* 41.3, p. 167–174.
- Bouafoura, M.K., O. Moussi et N.B. Braiek (2011). « A fractional state space realization method with block pulse basis ». In : *Signal Processing* 91, p. 492–497.
- Castaldo, P. (2013). « Integrated Seismic Design of Structure and Control Systems ». In : Springer. Chap. Modeling of Viscoelastic Dissipative Bracing Systems.
- Cataldo, E., S. Di Lorenzo, V. Vincenzo Fiore, M. Maurici, F. Francesco Nicoletti, A. Pirrotta, R. Scaffaro et A. Valenza (2015). « Bending test for capturing the vivid behavior of giant reeds, returned through a proper fractional visco-elastic model ». In : *Mechanics of Materials* 89, p. 159–168.

- Chen, J., F. Liu et V. Anh (2007). « Analytical solution for the time-fractional telegraph equation by the method of separating variables ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.
- Chevrié, M., J. Sabatier, C. Farges et R. Malti (2015). « H2-norm of a class of fractional transfer functions suited for modeling diffusive phenomena ». In : *2015 American Control Conference (ACC)*, p. 2199–2204.
- Christophy, F. (2016). « Etude de la régulation de température d'un milieu fini homogène diffusif et incertain à l'aide des trois générations de la commande CRONE ». Université de Bordeaux, France.
- Christophy, F., R. A. Z. Daou, R. Assaf et X. Moreau (2013). « Approximation of a thermal diffusive interface fractional-order system 2014; Part 2 : Application to a finite plane medium ». In : *2013 9th Asian Control Conference (ASCC)*, p. 1–6.
- Cois, O. (2002). « Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : application en thermique ». Thèse de doct. Talence, France : Université Bordeaux 1.
- Dahleh, M., M. A. Dahleh et G. Verghese (2011). *Constraint propagation with interval labels*. MIT Lecture notes, Spring 2011.
- Dai, Z., Y. Peng, H.A. Mansy, R.H. Sandler et T.J. Royston (2015). « A model of lung parenchyma stress relaxation using fractional viscoelasticity ». In : *Medical Engineering and Physics* 37, p. 752–758.
- Daou, R. A. Z., F. Christophy, R. Assaf et X. Moreau (2013). « Approximation of a thermal diffusive interface fractional-order system; Part 1 : Application to a semi-infinite plane ». In : *2013 9th Asian Control Conference (ASCC)*, p. 1–6.
- Daou, R. A. Z., X. Moreau, R. Assaf et F. christophy (2012). « Analysis of the fractional order system in the thermal diffusive interface - Part 1 : Application to a semi-infinite plane medium ». In : *2012 2nd International Conference on Advances in Computational Tools for Engineering Applications (ACTEA)*, p. 140–144.
- Datsko, B.Y. (2012). « Mathematical modeling of nonlinear dynamics in bistable reaction-diffusion systems with fractional derivatives ». In : *Journal of Mathematical Sciences* 184.2.
- Deng, R., P. Davies et A. Bajaj (2004). « A case study on the use of fractional derivatives : the low-frequency viscoelastic uni-directional behavior of polyurethane foam ». In : *Nonlinear Dynamics* 38, p. 247–265.
- Dugowson, S. (1994). « Les différentielles métaphysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation ». Thèse de doct. Université Paris XIII.
- Elwakil, A.S. (2010). « Fractional-order circuits and systems : An emerging interdisciplinary research area ». In : *IEEE Circuits and Systems Magazine* 10.4, p. 40–50.

- Favoreel, W., S. Van Huffel, B. De Moor, V. Sima et M. Verhaegen (1999). « Comparative study between three subspace identification algorithms ». In : *Control Conference (ECC), 1999 European*, p. 821–826.
- Gabano, J.D. et T. Poinot (2011). « Estimation of thermal parameters using fractional modelling ». In : *Signal Processing* 91.4, p. 938–948.
- Gabano, J.-D. et T. Poinot (2011). « Fractional modelling and identification of thermal systems ». In : *Signal Processing* 91.3, p. 531–541. *Advances in Fractional Signals and Systems*.
- Gabano, J.-D., T. Poinot et H. Kanoun (2015). « LPV continuous fractional modeling applied to ultracapacitor impedance identification ». In : *Control Engineering Practice* 45, p. 86–97.
- Galvao, R.K.H., S. Hadjiloucas, K.H. Kienitz, H.M. Paiva et R.J.M. Afonso (2013). « Fractional order modeling of large three-dimensional rc networks ». In : *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers* 60.3, p. 624–637.
- Garnier, H. et L. Wang (2008). *Identification of continuous-time models from sampled data*. Springer-Verlag.
- Gaul, L., P. Klein et S. Kemple (1991). « Damping description involving fractional operators ». In : *Mechanical System and Signal Processing* 5(2), p. 81–88.
- Gruel, D.N, P. Lanusse et A. Oustaloup (2009). « Robust control design for multivariable plants with time-delays ». In : *Chemical Engineering Journal* 146(3), p. 414–427.
- Grzesikiewicz, W., A. Wakulicz et A. Zbiciak (2013). « Non-linear problems of fractional calculus in modeling of mechanical systems ». In : *International Journal of Mechanical Sciences* 70, p. 90–98.
- Haverkamp, L. R. J. (2001). « State space identification. Theory and practice ». In : *PhD thesis*.
- Hotzel, R. et M. Fliess (1998). « On linear systems with a fractional derivation : Introductory theory and examples ». In : *Mathematics and Computers in Simulation* 45, p. 385–395.
- Hu, Y., Y. Fan, Y. Wei, Y. Wang et Q. Liang (2016). « Subspace-based continuous-time identification of fractional order systems from non-uniformly sampled data ». In : *International Journal of Systems Science* 47.1, p. 122–134.
- Hua, C.C., D. Liu et X.P. Guan (2014). « Necessary and sufficient stability criteria for a class of fractional-order delayed systems ». In : *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs* 61(1), p. 59–63.
- Huang, F. et F. Liu (2004). « The time fractional diffusion equation and the advection-dispersion equation ». In : *The Journal of the Australian Mathematical Society*.

- Hwang, C. et Y. Cheng-Cheng (2006). « A numerical algorithm for stability testing of fractional delay systems ». In : *Automatica* 42, p. 825–831.
- Hwang, C., J.F. Leu et S.Y. Tsay (2002). « A Note on Time-Domain Simulation of Feedback Fractional-Order Systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 47.4.
- Jalloul, A., J.-C. Trigeassou, K. Jelassi et P. Melchior (2013). « Fractional order modeling of rotor skin effect in induction machines ». In : *Nonlinear Dynamics* 73.1, p. 801–813.
- Johansson, R. et G. Lindstedt (1995). « An algorithm for continuous-time state space identification ». In : *Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on*. T. 1, p. 721–722.
- K. Liu, R. N. Jacques et D. W. Miller (1994). « Frequency domain structural system identification by observability range space extraction ». In : *Proc. Amer. Control Conf.* 1, p. 107–111.
- Katayama, T. (2005). *Subspace methods for system identification*. Springer.
- Khanra, M., J. Pal et K. Biswas (2013). « Reduced Order Approximation of MIMO Fractional Order Systems ». In : *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems* 3.3.
- Khemane, F., R. Malti, T. Raissi et X. Moreau (2012). « Robust estimation of fractional models in the frequency domain using set membership methods ». In : *Signal Processing* 92, p. 1591–1601.
- Krajewski, W. et U. Viaro (2014). « A method for the integer-order approximation of fractional-order systems ». In : *Journal of the Franklin Institute* 351.1, p. 555–564.
- Krishna, B.T. (2011). « Studies on fractional order differentiators and integrators : a survey ». In : *Signal Processing* 91, p. 386–426.
- Lanusse, P., A. Oustaloup et B. Mathieu (1993). « Third generation CRONE control ». In : *Systems, Man and Cybernetics, 1993. 'Systems Engineering in the Service of Humans', Conference Proceedings., International Conference on*, 149–155 vol.2.
- Laroche, B. (2000). « Extension de la notion de platitude à des systèmes décrits par des équation aux derivees partielles linéaires ». ENSM, Paris, France.
- Lawrence, P.J. et Rogers G.J. (1979). « Recursive identification for system models of transfer function type ». In : *Proc. Instn Elec. Engrs.* 126, p. 283–288.
- Le Lay, L. (1998). « Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier ». Thèse de doct. Talence, France : Université Bordeaux 1.
- Levy, E.C. (1959). « Complex Curve fitting ». In : *IRE Trans. Autom. Control* 4, p. 37–43.

- Lewandowski, R. et B. Chorazyczewski (2010). « Identification of the parameters of the Kelvin-Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers ». In : *Computers and Structures* 88, p. 1–17.
- Li, Y., Y.Q. Chen et I. Podlubny (2010). « Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability ». In : *Computers and Mathematics with Applications* 59, p. 1810–1821.
- Ljung, L. (2003). « Initialisation aspects for subspace and output-error identification methods ». In : *European Control Conference (ECC), 2003*, p. 773–778.
- Lorenzo, C. et T. Hartley (2008). « Initialization of fractional-order operators and fractional differential equations ». In : *Journal of computational and nonlinear dynamics. Special issue on discontinuous and fractional dynamical systems* 3. Sous la dir. de J.T. Machado et A. Luo, p. 021101–1, 021101–9.
- Maachou, A., R. Malti, P. Melchior, J.-L. Battaglia, A. Oustaloup et B. Hay (2014). « Nonlinear thermal system identification using fractional Volterra series ». In : *Control Engineering Practice* 29, p. 50–60.
- Machado, J.T. et M.E. Mata (2015). « Pseudo phase plane and fractional calculus modeling of western global economic downturn ». In : *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 22 (1-3), p. 396–406.
- Maillet, D., S. André, J.-C. Batsale, A. Degiovanni et C. Moyne (2000). *Thermal Quadrupoles. Solving the Heat Equation Through Integral Transforms*. Wiley, New York.
- Mainardi, F. (1996). « The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation ». In : *Applied Mathematics Letters* 9 (6), p. 23–28.
- Malti, R. (2013). « A note on  $L_p$ -norms of fractional systems ». In : *Automatica* 49.9, p. 2923–2927. IF : 2.171, SNIP : 5.429.
- Malti, R., M. Aoun, F. Levron et A. Oustaloup (2011). « Analytical computation of the  $\mathcal{H}_2$ -norm of fractional commensurate transfer functions ». In : *Automatica* 47.11, p. 2425–2432.
- Malti, R., X. Moreau, F. Khemane et A. Oustaloup (2011). « Stability and resonance conditions of elementary fractional transfer functions ». In : *Automatica* 47.11, p. 2462–2467.
- Malti, R., T. Raïssi, M. Thomassin et F. Khemane (2010). « Set membership parameter estimation of fractional models based on bounded frequency domain data ». In : *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 15.4, p. 927–938.
- Malti, R., J. Sabatier et H. Akçay (2009). « Thermal modeling and identification of an aluminum rod using fractional calculus ». In :



- Malti, R. et M. Thomassin (2013). « Differentiation similarities in fractional pseudo-state space representations and the subspace-based methods ». In : *Fractional Calculus and Applied Analysis* 16 (1), p. 273–287.
- Malti, R., S. Victor et A. Oustaloup (2008). « Advances in system identification using fractional models ». In : *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 3.2, p. 1–7.
- Mansouri, R., M. Bettayeb et S. Djennoune (2010). « Multivariable fractional system approximation with initial conditions using integral state space representation ». In : *Computers and Mathematics with Applications* 59, p. 1842–1851.
- Mansouri, R., M. Bettayeb et S. Djennoune (2011). « Comparison between two approximation methods of state space fractional systems ». In : *Signal Processing* 91, p. 461–469.
- Mathieu, B., A. Oustaloup et F. Levron (1995). « Transfer function parameter estimation by interpolation in the frequency domain ». In : *European Control Conference (ECC)*. Rome, Italie.
- Matignon, D. (1994). « Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire ». Thèse de doct. Orsay : Université de Paris-Sud.
- Matignon, D. (1998a). « Stability properties for generalized fractional differential systems ». In : *ESAIM : Proceedings, Fractional Differential Systems : Models, Methods and Applications*. T. 5, p. 145–158.
- Matignon, D. (1998b). « Stability properties for generalized fractional differential systems ». In : *ESAIM proceedings - Systèmes Différentiels Fractionnaires - Modèles, Méthodes et Applications* 5.
- Matignon, D. et B. d'Andréa-Novel (1996). « Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems ». In : *IEEE-CESA '96, SMC IMACS Multiconference*. Lille, France, p. 952–956.
- Matignon, D. et B. d'Andréa-Novel (1997). « Observer-based controllers for fractional differential systems ». In : *36th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, p. 4967–4972.
- Melchior, P., B. Orsoni, O. Lavielle, A. Poty et A. Oustaloup (2003). « Consideration of obstacle danger level in path planning using A and Fast-Marching optimisation : comparative study ». In : *Signal Processing* 83.11, p. 2387–2396.
- Mensler, M. et K. Wada Sanada (2000). « Subspace Method for Continuous-time System Identification ». In : *Proc ISCIE Int Symp Stoch Syst Theory Appl (Inst Syst Control Inf Eng)* 32, p. 21–26.
- Meral, F.C., T.J Royston et R. Magin (2010). « Fractional calculus in viscoelasticity : An experimental study ». In : *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 15, p. 939–945.

- Miller, K.S. et B. Ross (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. A Wiley-Interscience Publication.
- Moreau, X., F. Khemani, R. Malti et P. Serrier (2010). « Approximation of a fractance by a network of four identical rc cells arranged in gamma and a purely capacitive cell ». In : *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*, p. 107–120.
- Moreau, X., C. Ramus-Serment et A. Oustaloup (2002). « Fractional differentiation in passive vibration control ». In : *Journal of Nonlinear Dynamics – Special issue on Fractional Calculus* 29, p. 343–362.
- Oldham, K.B. et J. Spanier (1970). « The replacement of Fick’s laws by a formulation involving semi-differentiation ». In : *Electro-anal. Chem. Interfacial Electrochem* 26, p. 331–341.
- Oldham, K.B. et J. Spanier (1972). « A general solution of the diffusive equation for semi-infinite geometries ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 39, p. 655–669.
- Oldham, K.B. et J. Spanier (1973). « Diffusive transport to planar, cylindrical and spherical electrodes ». In : *Electroanal. Chem. Interfacial Electrochem.* 41, p. 351–358.
- Oldham, K.B. et J. Spanier (1974). *The fractionnal calculus - Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, New-York et London.
- Orsingher, E. et L. Beghin (2004). « Time-fractional telegraph equations and telegraph processes with brownian time ». In : *Probability Theory and Related Fields* 128, p. 141–160.
- Oustaloup, A. (1983). *Systèmes asservis linéaires d’ordre fractionnaire*. Masson - Paris.
- Oustaloup, A. (1995). *La dérivation non-entière : théorie, synthèse et applications*. Hermès - Paris.
- Oustaloup, A. et M. Bansard (1993). « First generation CRONE control ». In : *Systems, Man and Cybernetics, 1993. 'Systems Engineering in the Service of Humans', Conference Proceedings., International Conference on*, 130–135 vol.2.
- Oustaloup, A., B. Mathieu et P. Lanusse (1993). « Second generation CRONE control ». In : *Systems, Man and Cybernetics, 1993. 'Systems Engineering in the Service of Humans', Conference Proceedings., International Conference on*, 136–142 vol.2.
- Pintelon, R. (2002). « Frequency domain subspace system identification using non-parametric noise models ». In : *Automatica* 38 (8), p. 1295–1311.
- Podlubny, I. (1999a). *Fractional Differential Equations*. San Diego : Academic Press.
- Podlubny, I. (1999b). « Fractional-order systems and PI-lambda D-mu-controllers ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (1), p. 208–214.

- Poinot, T. et J.-C. Trigeassou (2003). « A method for modelling and simulation of fractional systems ». In : *Signal processing* 83, p. 2319–2333.
- Poinot, T. et J.-C. Trigeassou (2004). « Identification of fractional systems using an output-error technique ». In : *Nonlinear Dynamics* 38.1-4, p. 133–154.
- R. Neumayer, A. Stelzer et R. Weigel (2003). « A comparison of complex curve fitting and subspace identification algorithm for circuit modeling using frequency domain data ». In : *33rd European Microwave Conference, Munich 3*, p. 1007–1010.
- Rapaic, M.R. et A. Pisano (2013). « Variable-Order Fractional Operators for Adaptive Order and Parameter Estimation ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 59, 798–803.
- Rapaic, M.R., A. Pisano et Z.D. Jelcic (2012). « Trapezoidal Rule for Numerical Evaluation of Fractional Order Integrals with Applications to Simulation and Identification of Fractional Order Systems ». In : *IEEE International Conference on Control Applications*. Dubrovnik, Croatia.
- Sabatier, J., M. Aoun, A. Oustaloup, G. Grégoire, F. Ragot et P. Roy (2006). « Fractional system identification for lead acid battery state charge estimation ». In : *Signal Processing* 86.10, p. 2645–2657.
- Sabatier, J., Ch. Farges, M. Merveillaut et L. Feneteau (2012). « On observability and pseudo state estimation of fractional order systems ». In : *European Journal of Control* 18.3, p. 260–271.
- Sabatier, J., Ch. Farges et J.-C. Trigeassou (2013). « A stability test for non-commensurate fractional order systems ». In : *Systems and Control Letters* 62, p. 739–746.
- Sabatier, J., J. Mbala, F. Guillemard, L. Lavigne, M. Moze et M. Merveillaut (2015). « Lithium-ion batteries modeling : A simple fractional differentiation based model and its associated parameters estimation method ». In : *Signal Processing* 107, p. 290–301.
- Sabatier, J., M. Merveillaut, R. Malti et A. Oustaloup (2010). « How to impose physically coherent initial conditions to a fractional system? » In : *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 15.5, p. 1318–1326.
- Sabatier, J., M. Moze et C. Farges (2010). « LMI stability conditions for fractional order systems ». In : *Computers and Mathematics with Applications* 59.5, p. 1594–1609.
- Sagara, S. et Z-Y Zhao (1990). « Numerical integration approach to on-line identification of continuous-time systems ». In : *Automatica* 26.1, p. 63–74.
- Samko, S.G., A.A. Kilbas et O.I. Marichev (1993). *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*. Gordon et Breach Science.
- Sanathanan, C.H. et J. Koerner (1963). « Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomials ». In : *IEEE Trans. Autom. Control* AC-8, p. 56–58.

- Schiessel, H., R. Metzler, A. Blumen et T.F. Nonnenmacher (1995). « Generalized viscoelastic models : treir fractional equations with solutions ». In : *Journal of Physics A* 28, p. 6567–6584.
- Schneider, W. et W. Wyss (1989). « Fractional diffusion and wave equations ». In : *Journal of Mathematical Physics*.
- Serrier, P. (2008). « Analyse de l'influence des non-linéairités dans l'approche CRONE : Application en isolation vibratoire ». Thèse de doct. Université Bordeaux I, France.
- Sierociuk, D., T. Skovranek, M. Macias, I. Podlubny, I. Petras, A. Dzieliński et P. Ziubinski (2015). « Diffusion process modeling by using fractional-order models ». In : *Applied Mathematics and Computation* 257, p. 2–11.
- Sommacal, L., P. Melchior, A. Dossat, J. Petit, J.-M. Cabelguen, A. Oustaloup et A. J. Ijspeert (2007). « Improvement of the muscle fractional multimodel for low-rate stimulation ». In : *Biomedical Signal Processing and Control* 2.3, p. 226–233.
- Spasic, D.T., N.I. Kovincic et D.V. Dankuc (2016). « A new material identification pattern for the fractional kelvin-zenner model describing biomaterials and human tissues ». In : *Applied Mathematics and Computation* 37, p. 193–199.
- T. McKelvey, H. Akçay et L. Ljung (1996). « Subspace-Based Multivariable System Identification from Frequency Response Data ». In : *IEEE Transactions on automatic control* 41.7.
- Tabak, D. (1971). « Digitalization of control systems ». In : *Computer-Aided Design* 3 (2), p. 13–18.
- Tarasov, V.E. (2005). « Fractional hydrodynamic equations for fractal media ». In : *Annals of Physics* 318, p. 286–307.
- Tavazoei, M.S. et M. Haeri (2010). « Rational approximations in the simulation and implementation of fractional-order dynamics : A descriptor system approach ». In : *Automatica* 46.1, p. 94–100.
- Thomassin, M. et R. Malti (2009a). « Subspace method for continuous-time fractional system identification ». In : *15th IFAC SYmposium on System IDentification (SYSID)*. Saint-Malo France, p. 880–885.
- Thomassin, M. et R. Malti (2009b). « Multivariable identification of continuous-time fractional system ». In : *ASME IDETC/CIE Conferences*. San Diego CA USA, DETC2009–86984.
- Trigeassou, J.-C., T. Poinot, J. Lin, A. Oustaloup et F. Levron (1999). « Modeling and identification of a non integer order system ». In : *ECC*. Karlsruhe, Germany.
- Valério, D. et S. da Costa J. (2007). « Advances in Fractional Calculus Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering ». In : sous la dir. de J.

- Sabatier, O. P. Agrawal et J. A. Tenreiro Machado. Springer. Chap. Identification of fractional models from frequency data, p. 229–242.
- Van Overschee, P. et B. De Moor (1996). *Subspace identification for linear systems : theory, implementation, applications*. Springer.
- Victor, S. (2010). « Identification par modèle non entier pour la poursuite robuste de trajectoire par platitude ». Thèse de doct. Talence, France : Université Bordeaux 1.
- Victor, S., R. Malti, H. Garnier et A. Oustaloup (2013a). « Parameter and differentiation order estimation in fractional models ». In : *Automatica*. IF : 2.171, SNIP : 5.429.
- Victor, S., R. Malti, H. Garnier et A. Oustaloup (2013b). « Parameter and differentiation order estimation in fractional models ». In : *Automatica* 49.4, p. 926–935.
- Victor, S., P. Melchior et A. Oustaloup (2010). « Robust path tracking using flatness for fractional linear MIMO systems : A thermal application ». In : *Computers and Mathematics with Applications* 59, p. 1667–1678.
- Vinagre, B. M., I. Podlubny, A. Hernandez et V. Feliu (2000). « Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications ». In : *Fractional Calculus and Applied Analysis* 3(3), p. 231–248.
- Wang, B., S. Eben Li, H. Peng et Z. Liu (2015). « Fractional-order modeling and parameter identification for lithium-ion batteries ». In : *Journal of Power Sources* 293, p. 151–161.
- Wang, D., X. Wang et P. Han (2010). « Identification of thermal process using fractional-order transfer function based on intelligent optimization ». In : *IEEE/ASME International Conference on Mechatronics and Embedded Systems and Applications (MESA)*, p. 498–503.
- Wang, L. et W. R. Cluet (1997). « Frequency sampling filters : an improved model structure for step-response identification ». In : *Automatica* 33 (5), p. 939–944.
- Wang, L. et R. Mohd Mokhtar (2007). « Continuous-time System Identification using Subspace Methods ». In : *Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal (ANZIAM)* 47, p. 712–732.
- Wang, L. et R. Mohd Mokhtar (2009). « 2-Stage Identification Based on Frequency Sampling Filters and Subspace Frequency Response ». In : *Elektrika* 11 (2), p. 27–33.
- Wharmby, A. et R. Bagley (2014). « Modifying Maxwell’s equations for dielectric materials based on techniques from viscoelasticity and concepts from fractional calculus ». In : *International Journal of Engineering Science* 79, p. 59–80.
- Wu, P., C. Yang et Z. Song (2009). « Subspace identification for continuous-time errors-in-variables model from sampled data ». In : *Journal of Zhejiang University Science A* 10 (8), p. 1177–1186.

- Xu, B., D. Chen, H. Zhang et F. Wang (2015). « Modeling and stability analysis of a fractional-order Francis hydro-turbine governing system ». In : *Chaos, Solitons and Fractals* 75, p. 50–61.
- Yang, Zi-Jiang et Shingo Sanada (2000). « Frequency Domain Subspace Identification with the Aid of the w-operator ». In : *Electrical Engineering in Japan* 132.1, p. 326–334.
- Zerpa, P., A. Canelas, B. Sensale, D. Santana et R.L. Armentano (2015). « Modeling the arterial wall mechanics using a novel high-order viscoelastic fractional element ». In : *Applied Mathematical Modelling* 39, p. 4767–4780.
- Zopf, C., S.E. Hoque et M. Kaliske (2015). « Comparison of approaches to model viscoelasticity based on fractional time derivatives ». In : *Computational Materials Science* 98, p. 287–296.

# Production scientifique

## Publications dans des revues

- Ivanova, E., R. Malti et X. Moreau (2016a). « Time-domain simulation of MIMO fractional systems ». In : *Nonlinear Dynamics* 84(4), p. 2057–2068. DOI : [10.1007/s11071-016-2628-1](https://doi.org/10.1007/s11071-016-2628-1).
- Ivanova, E., R. Malti et X. Moreau (2017). « Identification fréquentielle de systèmes par modèle non entier en utilisant la méthode des sous-espaces ». In : *Journal Européen des Systèmes Automatisés*. (acceptée).
- Ivanova, E., X. Moreau et R. Malti (2016). « Stability and resonance conditions of second-order fractional systems ». In : *Journal of Vibration and Control*. DOI : [10.1177/1077546316654790](https://doi.org/10.1177/1077546316654790).

## Communications dans des conférences

- Ivanova, E., R. Malti et X. Moreau (2014a). « Frequency-domain subspace system identification with fractional differentiation models ». In : *The 10th IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications*. Senigallia, Italy, p. 1–6. DOI : [10.1109/MESA.2014.6935536](https://doi.org/10.1109/MESA.2014.6935536).
- Ivanova, E., R. Malti et X. Moreau (2015). « Identification fréquentielle de systèmes par modèle non entier en utilisant la méthode des sous-espaces ». In : *6èmes Journées Doctorales / Journées Nationales GDR MACS*. Bourges, France.
- Ivanova, E., R. Malti et X. Moreau (2016b). « Time-domain subspace system identification with fractional differentiation models : a study of filtering methods ». In : *IEEE International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA)*. Novi Sad, Serbia.

## Communications dans des groupes de travail

Ivanova, E., R. Malti et X. Moreau (2014b). *Frequency-domain subspace system identification with fractional differentiation models*. Poster, Groupe de Travail Identification, Paris.