



**HAL**  
open science

# Contrôle de forme de coques multistables : modélisation, optimisation et mise en œuvre

Walid Hamouche

► **To cite this version:**

Walid Hamouche. Contrôle de forme de coques multistables : modélisation, optimisation et mise en œuvre. Mécanique [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. Français. NNT : 2016PA066541 . tel-01523255

**HAL Id: tel-01523255**

**<https://theses.hal.science/tel-01523255>**

Submitted on 16 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité : MÉCANIQUE

Présentée par :

**Walid HAMOUCHE**

Pour obtenir le grade de :

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI**

École Doctorale Sciences Mécaniques, Acoustique, Électronique et Robotique

---

# Contrôle de Forme de Coques Multistables : Modélisation, Optimisation et Mise en Œuvre

---

soutenue devant le jury composé de :

K. DANAS	Chargé de recherche CNRS, LMS, Paris	Rapporteur
O. THOMAS	Professeur, ENSAM, Lille	Rapporteur
S. BOURGEOIS	Maitre de conférences, LMA, Marseille	Examineur
J. POUGET	Directeur de recherche CNRS, IJLRA, Paris	Examineur
B. ROMAN	Directeur de recherche CNRS, ESPCI, Paris	Examineur
K. SEFFEN	Professeur, Université de Cambridge	Examineur
A. VINCENTI	Maitre de conférences, IJLRA, Paris	Co-directrice de thèse
C. MAURINI	Professeur, IJLRA, Paris	Co-directeur de thèse
S. VIDOLI	Professeur, Université de Rome	Invité

Institut Jean Le Rond d'Alembert  
Université Paris VI / C.N.R.S – UMR 7190  
4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05



# Notations

---

$" \bullet "$	Quantités dimensionnelles
$a / \mathbf{a} / [\mathbf{a}] \equiv a_{\alpha\beta}$	Scalaire / vecteur ( $3 \times 1$ ) / matrice ( $2 \times 2$ )
$(k_x, k_y, k_{xy}) - (h_x, h_y, h_{xy})$	Courbures de la coque en coordonnées cartésiennes
$(c, \theta, g_0)$	Courbures de la coque en coordonnées polaires
$(\kappa_m, \kappa_d, \kappa_t) - (\eta_m, \eta_d, \eta_t)$	Courbures de la coque en coordonnées paraboliques
$(\kappa_m, \theta) - (\eta_m, \eta_d, \eta_t)$	Courbures de la coque en coordonnées elliptiques
$(k_I, k_{II}, g_0) - (h_x, h_y, h_{xy})$	Courbures de la coque en coordonnées principales
$R_0/R$	Rayon caractéristique/rayon de courbure
$\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}$	Tenseurs des contraintes/des déformations en notation de Voigt
$D$	Matrice de rigidité de flexion
$\nu, \beta, \gamma, \epsilon, \rho_c, \eta$	Paramètres de la matrice $D$
$E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$	Modules d'élasticité/de l'ingénieur du matériau
$\mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f$	Énergie potentielle d'extension, flexion
$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_f$	Énergie potentielle totale
$\mathcal{E}_c$	Énergie cinétique
$\phi$	Travail des forces extérieures
$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_f + \mathcal{E}_c - \phi$	Énergie mécanique
$t$	<a href="#">Chapitre 3</a> : angle d'actionnement, <a href="#">chapitre 4</a> : temps
$\dot{\bullet} = \partial \bullet / \partial t$	Dérivée temporelle
$\Upsilon$	Paramètre d'amortissement
$\xi$	Coefficient d'amortissement
$\omega_0, f_0$	Pulsations/fréquences propres de la coque
$w_0, \Omega$	Amplitude/pulsation d'excitation
$\mathbb{M}, \mathbb{H}$	Matrice de masse/de rigidité de la coque
$U_{\text{eff}}$	Tension efficace
$P_{\text{moy}}$	Puissance moyenne
$R_p, R_c$	Résistance interne piézoélectrique, résistance de charge
$\Delta U_{\text{pp}}$	Tension crête-à-crête

---

# Table des matières

Introduction générale	1
<b>1 Modélisation de coques multistables : l'influence de la combinaison entre courbures initiales et inélastiques</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction	8
1.2 Stratégie de réduction d'un modèle phénoménologique	9
1.2.1 Hypothèses cinématiques et équations fondamentales	9
1.2.2 Réduction du modèle : résolution du problème membranaire	11
1.2.3 Le cas de courbures uniformes	12
1.2.4 Estimation du rayon caractéristique $R_0$	14
1.2.5 Modèle extensible (exact) et limite d'inextensibilité (approximation)	16
1.3 Étude de coques multistables	19
1.3.1 Introduction	19
1.3.2 Le cas de plaques : $\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}$	21
1.3.3 Le cas $\mathbf{h}_0$ et $\mathbf{h}_i$ sphériques	24
1.4 Conclusion	37
<b>2 Des critères de conception et fabrication de coques multistables : application aux coques à faible énergie d'actionnement</b>	<b>39</b>
2.1 Introduction	40
2.2 Critères de conception de coques multistables	41
2.2.1 Résultats théoriques utiles pour la conception	41
2.2.2 Critères	43
2.2.3 Fabrication de prototypes-démonstrateurs	48
2.2.4 Conclusion	52
2.3 Conception et fabrication de coques multistables à faible énergie d'actionnement	53
2.3.1 Courbures inélastiques par thermoélasticité	54
2.3.2 Courbures inélastiques par plasticité	58
2.4 Conclusion	62
<b>3 Contrôle de forme multiparamétrique d'une coque quasi-infiniment stable</b>	<b>63</b>
3.1 Introduction	64
3.2 Aspects théoriques : coques inextensibles à courbure uniforme	65
3.2.1 Équations des coques inextensibles de Koiter	65
3.2.2 L'hypothèse de courbure uniforme et le problème géométrique analogue	66
3.2.3 Conception d'une loi d'actionnement continue	71
3.3 Dimensionnement d'une structure avec actionneurs intégrés	74
3.3.1 Choix d'une méthode d'actionnement	74
3.3.2 Architecture des matériaux actifs	76
3.3.3 Sens de positionnement des actionneurs	77
3.4 Prototype expérimental et résultats	79

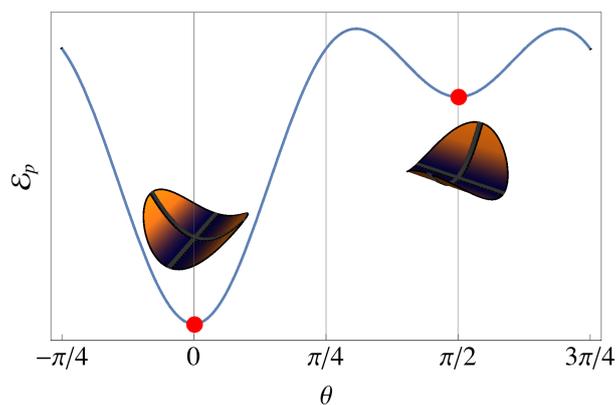
3.4.1	Prédictions théoriques . . . . .	80
3.4.2	Validation numérique . . . . .	82
3.4.3	Mise en œuvre expérimentale . . . . .	85
3.5	Conclusion . . . . .	90
<b>4</b>	<b>La dynamique non-linéaire d'une coque quasi-neutralement stable : des petites oscillations au chaos</b>	<b>91</b>
4.1	Introduction . . . . .	92
4.2	Modèle simplifié de dynamique non-linéaire en oscillations libres . . . . .	93
4.2.1	Énergie mécanique . . . . .	94
4.2.2	Cas isotrope . . . . .	95
4.2.3	Système avec imperfection : linéarisation autour des positions stables . . . . .	97
4.3	Étude expérimentale de dynamique et quelques simulations . . . . .	98
4.3.1	Étude expérimentale d'une coque bistable en oscillations forcées . . . . .	98
4.3.2	Quelques résultats numériques en oscillations forcées . . . . .	108
4.3.3	Conclusion sur la dynamique . . . . .	112
4.4	Application à la récupération d'énergie par voie piézoélectrique . . . . .	113
4.4.1	Démarche de récupération d'énergie . . . . .	114
4.4.2	Étude expérimentale du système 6P . . . . .	116
4.4.3	Étude expérimentale du système bistable 4P . . . . .	121
4.4.4	Conclusion sur la récupération d'énergie . . . . .	124
4.5	Conclusion . . . . .	125
	<b>Conclusion générale</b>	<b>127</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>a</b>



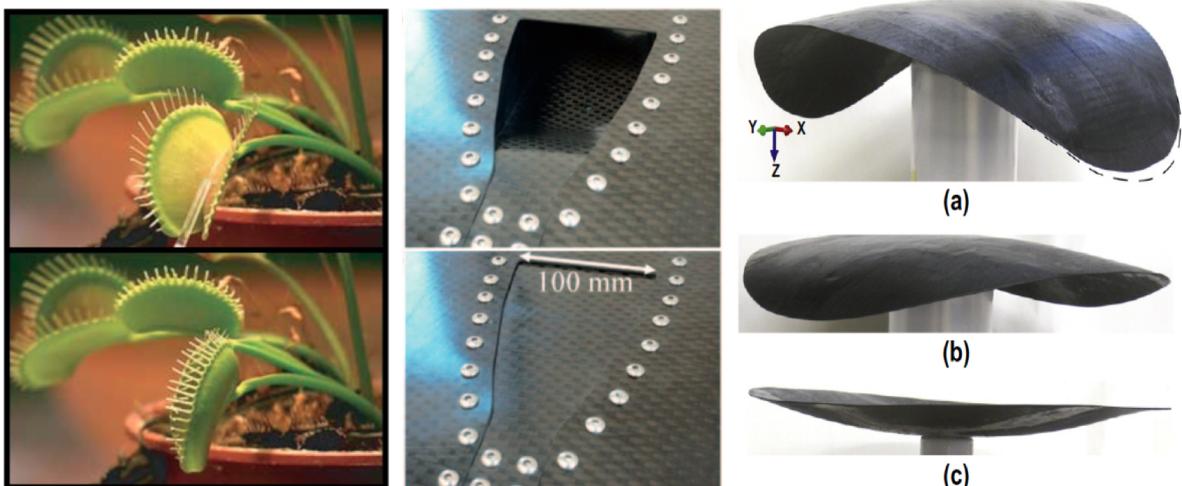
# Introduction générale

## Contexte

La multistabilité des structures minces de type plaques et coques est un phénomène maintenant bien connu en mécanique des structures. Par définition, on désigne par structure multistable une structure capable de maintenir différentes configurations distinctes d'équilibre stables en l'absence de toute sollicitation extérieure. Ces équilibres stables correspondent à des minima locaux de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$ , et sont chacun associés à une forme distincte de la structure et un niveau énergétique spécifique (*c.f.* figure 1(a) où  $\theta$  est l'orientation de la courbure principale).



(a) Énergie potentielle d'une plaque bistable chargée par un champ de courbures inélastiques sphérique



(b) Plante bistable : The Venus Fly-trap (Forterre et al., 2005)

(c) Soupape composites bistable (Daynes et al., 2011)

(d) Coque composite stratifiée tristable (Coburn et al., 2012)

FIGURE 1 – Quelques exemples de structures multistables.

La littérature fait état d'une multitude de structures multistables provenant de diverses variétés comme le montre, de manière non-exhaustive, la figure 1 : cela va de phénomènes naturels où l'on retrouve des plantes bistables auto-actionnées (b) à des applications industrielles de type soupape composite bistable (c) jusqu'à des séquences d'empilement spécifiques de coques composites stratifiées qui mènent à la tristabilité (d). Pour chaque cas de figure, les causes de la multistabilité sont différentes et spécifiques aux choix de propriétés aussi bien intrinsèques que extrinsèques au matériau.

Dans ces travaux de thèse, on se focalise exclusivement sur ce dernier cas de multistabilité, dit coques sans conditions aux limites (*i.e.* on modélise la coque comme étant encastrée en son centre uniquement) en une unique pièce. Intrinsèquement, et pour des sollicitations extérieures élastiques (thermo-hygro-élasticité entre autre), ce phénomène est principalement dû au couplage non-linéaire qui existe entre courbure Gaussienne et déformations de membrane. Dans ce sens, la capacité des composites stratifiés, pour lesquels il est possible de concevoir et optimiser localement l'architecture (couche par couche), peut être exploitée dans des applications spécifiques. Néanmoins, l'étude des structures multistables est une tâche relativement délicate tant du point de vue théorique que du point de vue technique. Cela demande de prendre en compte les aspects de non-linéarités auxquelles elles sont principalement sujettes et qui complexifient la résolution analytique du problème de multistabilité.

Sur le support de la cinématique de Föppl-von Kármán, les premiers travaux proposant un modèle non-linéaire prédictif de la bistabilité de plaques composites sont à créditer à Hyer (1981a,b, 1982) qui a étudié, au travers d'une extension non-linéaire de la théorie des stratifiés, les états stables de plaques stratifiées de type  $[0_n, 90_n]$  (avec  $n$  le nombre de couches) résultant d'une variation de température lors de leur élaboration. L'asymétrie du comportement mécanique induit un couplage se répercutant par des contraintes résiduelles (dilatation différentielle) lors de la phase de polymérisation de la matrice.

Pendant fort longtemps, cette bistabilité inhérente aux composites asymétriques était vue comme parasite et les concepteurs mettaient en place des méthodes afin d'annihiler ce phénomène, en ayant typiquement recours à des séquences d'empilement symétriques dans le but d'éliminer le couplage. Mais il s'avère que cette multistabilité peut être exploitée à bon escient, notamment dans le cadre des structures adaptatives. De fait, des modèles réduits de plus en plus élaborés ont été proposés dans l'objectif de prédire le comportement des coques multistables de tous matériaux, et le nombre et la forme des configurations stables associées. Dans ce sens, les modèles réduits basés sur la cinématique de Föppl-von Kármán sont particulièrement puissants car ils permettent, dans un contexte donné, de fournir une solution analytique simple à la multistabilité des coques peu profondes. Plusieurs auteurs, via l'hypothèse fondamentale de courbures uniformes (Kebadze et al., 2004; Guest and Pellegrino, 2006; Seffen, 2007; Seffen and Guest, 2011), ont proposé des modèles réduits dans l'optique d'obtenir des solutions analytiques sur la bistabilité de coques précontraintes isotropes et/ou anisotropes. Vidoli and Maurini (2008) ont étendu les travaux de Seffen (2007) en montrant des zones de tristabilité, confirmées expérimentalement par Coburn et al. (2012) plus récemment (*c.f.* figure 1(d)). En effet, la multistabilité peut résulter de choix de paramètres matériaux, de courbures initiales (Vidoli and Maurini, 2008) et/ou appliquées (Seffen, 2007; Seffen and Guest, 2011), ou encore de la texture du matériau (Norman et al., 2007, 2008a,b). Il est possible de coupler ces différents paramètres ajustables affectant la multistabilité de manière à enrichir le comportement mécanique des coques minces.

Par la suite, d'autres modèles, basés sur des approximations polynomiales d'ordres plus élevés et des variations linéaires ou quadratiques de courbures ont été établis (Pirrera et al., 2010; Vidoli, 2013; Lamacchia et al., 2015) afin d'améliorer la précision d'identification de la forme des coques sous une sollicitation donnée, spécifiquement lorsque l'hypothèse de courbures uniformes n'est plus valable, mais de telles hypothèses ne permettent pas de disposer de solutions analytiques.

En outre, les aspects de modélisation de structures multistables doivent tenir compte de la forte hypersensibilité aux imperfections (bien souvent inévitables) de fabrication. De très légers défauts peuvent modifier considérablement les caractéristiques mécaniques des coques jusqu'à annihiler l'existence de plusieurs états stables. En conséquence, les méthodes d'élaboration doivent se rapprocher au maximum des techniques industrielles, ce qui complexifie grandement la tâche au niveau expérimental.

---

## Positionnement de la thèse

Les applications envisageables par l'exploitation de la multistabilité des plaques et coques minces sont nombreuses et variées. On fait état dans les paragraphes ci-dessous de quelques applications d'intérêt dans ces travaux.

### Structures adaptatives

La plus naturelle et convoitée des applications en relation à la multistabilité des coques concerne les structures adaptatives, c'est-à-dire les structures capables d'adapter leur forme à différents régimes de fonctionnement. Cela comprend une première phase de conception de la forme et du matériau constitutif de la coque, et une seconde phase de conception d'une méthode d'actionnement optimale pour une application donnée. Par utilisation du terme actionnement, on fait référence à l'action de passer d'une configuration stable à une autre par l'intermédiaire d'un apport énergétique quelconque. Cette tâche peut s'effectuer par le biais d'une simple force ponctuelle à un endroit précis (Dano and Hyer, 2002; Zhang et al., 2014), mais s'effectue généralement, pour des raisons ergonomiques et dans une optique de structures intelligentes, au moyen de matériaux actifs que l'on fixe sur la structure. Différentes méthodes sont possibles et décrites dans la littérature. On compte parmi elles l'actionnement par l'utilisation d'alliages à mémoire de forme (Dano and Hyer, 2003; Ryu et al., 2011; Kim et al., 2014) généralement sous forme de fines bandes, l'auto-actionnement magnétique (Loukaides et al., 2015; Seffen and Vidoli, 2016) ou encore l'utilisation de matériaux piézo-composites (Schultz and Hyer, 2003; Portela et al., 2008), qui sont les plus convoités du fait de leurs aptitudes importantes.

Schultz and Hyer (2003) ont été les premiers à s'intéresser à l'actionnement d'une coque composite asymétrique bistable de type cross-ply  $[0, 90]$ , dont les états stables sont représentés sur la figure 2. Un patch piézoélectrique de type MFC est collé sur la structure et l'application d'une différence de potentiel électrique aux deux extrémités du patch provoque une dilatation et permet la transition entre les deux états. Cette transition se fait de façon dynamique par un phénomène dit de snap-through.

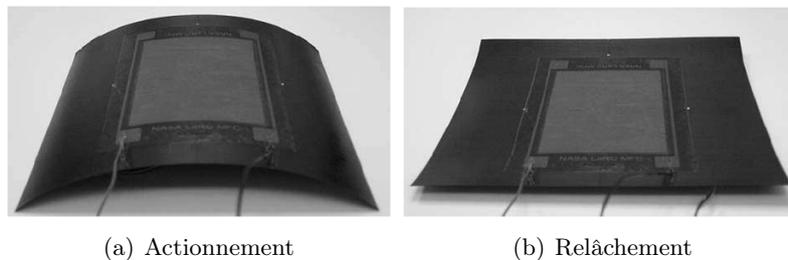


FIGURE 2 – Actionnement d'une coque composite bistable (Schultz and Hyer, 2003).

Sur cet appui, de très nombreux travaux ont été présentés afin de mieux appréhender les caractéristiques d'actionnement de ce type d'architecture. Giddings et al. (2008, 2010) ont étudié les propriétés d'actionnement et les effets de la composition du matériau constitutif de la coque. En parallèle, Portela et al. (2008) ont investigué expérimentalement la prise en compte d'effets hygroscopiques, réduisant la courbure résiduelle de la coque et susceptibles de supprimer la multistabilité à court terme. D'autres auteurs dont Dano et al. (2012) ont proposé des architectures différentes de patches piézoélectriques permettant de produire le snap-through dans un sens puis dans l'autre. Betts et al. (2010, 2011) se sont intéressés à l'optimisation de plaques composites bistables de manière à localiser la direction optimale d'actionnement et ainsi diminuer l'énergie de snap-through. Bowen et al. (2012) ont étudié des séquences d'empilement génériques associées à une énergie optimale d'actionnement. Kim et al. (2010) ont proposé une méthode hybride couplant patches piézoélectriques et alliages à mémoire de forme afin de faciliter l'actionnement. Mais si les structures composites ont montré leur aptitude dans cette application, nous verrons par la suite que d'autres matériaux peuvent être utilisés à cette fin.

## Actionnement dynamique et récupération d'énergie vibratoire

L'étude dynamique des coques multistables est récemment devenue une thématique de recherche d'intérêt. L'idée est de fixer une plaque multistable sur une source d'excitation (de type pot vibrant entre autre) et étudier sa dynamique (*c.f.* figure 3) de manière à mettre en évidence les différents modes intrinsèques. Toutefois, lorsque le comportement fortement non-linéaire des coques multistables, mettant en évidence de grands déplacements, est associé à une excitation extérieure, des phénomènes complexes tels que la résonance paramétrique ou encore des régimes d'oscillations chaotiques sont observés aussi bien théoriquement que expérimentalement.

Plusieurs auteurs ont établi des modèles dynamiques non-linéaires de coques afin de capturer les fréquences naturelles de plaques composites bistables (Vogl and Hyer, 2011) et étudier l'actionnement dynamique (Carrella et al., 2008; Diaconu et al., 2008; Arrieta et al., 2009). Ces modèles sont très pertinents dans la mesure où la multistabilité peut être conçue et optimisée pour atteindre de façon prépondérante (ou à l'inverse éviter) des modes particuliers. Néanmoins, une étude expérimentale est souvent effectuée préalablement à la proposition d'un modèle théorique du fait de la complexité d'identifier les conditions initiales.

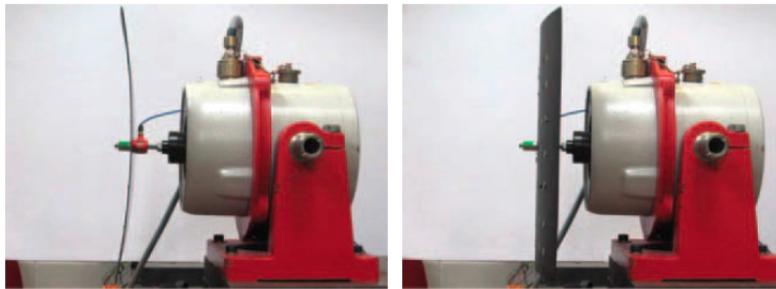


FIGURE 3 – Dynamique non-linéaire d'une coque composite bistable (Arrieta et al., 2009).

Enfin, l'application dont le nombre de publications s'est vu grimper de façon exponentielle ces quinze dernières années concerne la récupération d'énergie vibratoire. Différentes méthodes existent parmi lesquelles on compte principalement les méthodes électromagnétiques, électrostatiques et piézoélectriques. Cette dernière a été démontrée (Roundy et al., 2003) comme étant la plus efficace au regard de la multistabilité car elle permet de travailler sur une plus large bande de fréquence.

D'abord, de très nombreux systèmes monodimensionnels de type poutres résonantes ou même poutres bistables ont été examinés sous tous les angles ( $\mu$ GPE). Plus récemment, la multistabilité des coques a été exploitée dans la récupération d'énergie vibratoire par voie piézoélectrique. Arrieta et al. (2010) ont investigué les capacités de production énergétique de plaques composites bistables sur lesquelles sont attachés des patches piézoélectriques (*c.f.* figure 4). La mise en oscillations de la structure excite et dilate les matériaux actifs dans le but de produire une énergie électrique, qui peut être ensuite récupérée et stockée.

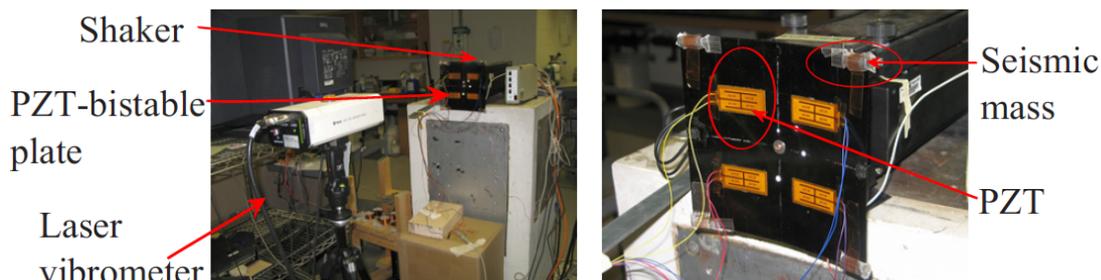


FIGURE 4 – Récupération d'énergie d'une coque piézocomposite bistable (Arrieta et al., 2010).

---

## Objectifs et plan de la thèse

Dans ces travaux de thèse, nous nous attachons à étudier du point de vue théorique, numérique et expérimental le comportement mécanique des coques minces multistables, aussi bien de façon qualitative que quantitative. On se focalise sur les diverses applications présentées précédemment en suivant une chronologie sur le support des résultats de chaque chapitre. Un contexte spécifique sera fourni dans chaque étude de manière à guider le lecteur.

La première partie, constituée des chapitres 1 et 2, a pour objet la modélisation théorique, numérique et expérimentale de la multistabilité des coques minces :

- Le [chapitre 1](#) est consacré à l'étude théorique et numérique de coques multistables. Sur la base d'un modèle non-linéaire de coques proposé par [Vidoli and Maurini \(2008\)](#), et doté d'un nombre minimal de trois degrés de liberté que sont les composantes du champ de courbures, on étudie les propriétés de multistabilité de plaques et coques vis-à-vis de l'anisotropie, des courbures naturelles et extérieures. On montre notamment que des choix judicieux de ces paramètres peuvent mener à la tristabilité lorsque courbures initiales et extérieures sont combinées. Dans un premier temps, on étudie l'influence des paramètres d'anisotropie du matériau sur la forme des domaines de multistabilité de plaques vis-à-vis de différents chargements extérieurs. Par la suite, on étend l'étude aux coques multistables en caractérisant l'influence du couplage entre courbure initiale et extérieure sur le nombre de configurations stables et les domaines de multistabilité intrinsèques. Enfin, une validation numérique est effectuée dans le but de confirmer les prédictions théoriques du modèle.
- Les résultats du [chapitre 1](#) sont ensuite exploités dans le [chapitre 2](#), qui est d'abord consacré à l'élaboration de critères de conception et fabrication de coques multistables. Ensuite, nous validons ces critères expérimentalement et nous les appliquons à la conception et à la fabrication de coques multistables à faible énergie d'actionnement, c'est-à-dire des coques dont l'apport énergétique à fournir pour effectuer la transition entre les équilibres stables est minime. Nous faisons la comparaison entre différents types de structures en partant des composites stratifiés jusqu'aux coques métalliques.

Sur ce support, la deuxième partie constituée des chapitres 3 et 4 est consacrée aux applications décrites précédemment :

- D'abord, le [chapitre 3](#), qui constitue le cœur de ces travaux de thèse, est dédié à une application au contrôle de forme de coques cylindriques multistables. On étudie du point de vue théorique, numérique et expérimental une structure optimale, couplée à une loi de contrôle de forme qui minimise l'énergie de déformation de la coque vis-à-vis de l'utilisation de matériaux actifs. On montre particulièrement qu'une transition continue et réversible des équilibres stables de la coque ne peut être obtenue qu'avec un minimum de trois directions de contrôle par courbures inélastiques additionnelles.
- Ensuite, le [chapitre 4](#), exploratoire, est ciblé en premier lieu sur l'étude préliminaire de la dynamique non-linéaire de coques multistables chargées par courbures inélastiques sphériques. L'objectif est d'identifier théoriquement et expérimentalement les propriétés de dynamique non-linéaire de ce type de coques, principalement les différents modes d'oscillations résultant d'une excitation extérieure de type pot vibrant. Spécifiquement, on montre que la coque peut entreprendre des régimes d'oscillations particuliers pour des valeurs précises de paramètres d'excitation. Par la suite, on propose un système de récupération d'énergie vibratoire par voie piézoélectrique en exploitant les propriétés de multistabilité et de dynamique des coques minces métalliques. Notamment, les grands déplacements mis en jeu dans la dynamique permettent de récupérer un niveau d'énergie intéressant.



# Chapitre 1

## Modélisation de coques multistables : l'influence de la combinaison entre courbures initiales et inélastiques

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1.2</b>	<b>Stratégie de réduction d'un modèle phénoménologique</b>	<b>9</b>
1.2.1	Hypothèses cinématiques et équations fondamentales	9
1.2.2	Réduction du modèle : résolution du problème membranaire	11
1.2.3	Le cas de courbures uniformes	12
1.2.4	Estimation du rayon caractéristique $R_0$	14
1.2.4.a	Autres formes du problème membranaire	14
1.2.4.b	Estimations de $R_0$ pour différentes géométries	15
1.2.5	Modèle extensible (exact) et limite d'inextensibilité (approximation)	16
1.2.5.a	Problème extensible ( $\det \mathbf{k} \neq \det \mathbf{h}_0$ )	17
1.2.5.b	Problème inextensible ( $\det \mathbf{k} = \det \mathbf{h}_0$ )	17
<b>1.3</b>	<b>Étude de coques multistables</b>	<b>19</b>
1.3.1	Introduction	19
1.3.2	Le cas de plaques : $\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}$	21
1.3.2.a	Cas de plaques orthotropes ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \mathbf{0}$ ) et limite d'isotropie	21
1.3.2.b	Cas de plaques anisotropes : $\epsilon_1 = \epsilon, \epsilon_2 = \pm \epsilon$	22
1.3.3	Le cas $\mathbf{h}_0$ et $\mathbf{h}_i$ sphériques	24
1.3.3.a	Équilibres et stabilité	25
1.3.3.b	Co-existence des équilibres de types I et II	29
1.3.3.c	Validation numérique	30
1.3.3.d	Identification des frontières de stabilité de coques multistables	33
1.3.3.e	Conclusion	36
<b>1.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>37</b>

---

Ce chapitre est consacré à l'étude théorique et numérique de coques multistables. D'abord, nous décrivons la stratégie de réduction d'un modèle à courbure uniforme proposé par *Vidoli and Maurini (2008)* permettant de capturer le comportement des coques avec un nombre minimal de degrés de liberté. Par la suite, on applique ce modèle à l'étude de la multistabilité de plaques et coques en considérant différents chargements et différents types d'anisotropie. Spécifiquement, nous étudions la multistabilité sur le cas particulier de coques sphériques soumises à des courbures inélastiques sphériques. Nous définissons analytiquement leur domaine de multistabilité et les résultats sont validés au moyen de simulations par éléments finis via le code Abaqus<sup>®</sup>.

## 1.1 Introduction

Le comportement fortement non-linéaire des coques minces couplé à des propriétés matériaux anisotropes et des précontraintes spécifiques permet de mettre en évidence des phénomènes intéressants tels que la multistabilité, c'est-à-dire l'existence de plusieurs configurations distinctes d'équilibre stables en l'absence de sollicitation extérieure. Ce type de comportement a trouvé un grand intérêt dans la littérature et est l'objet d'un vaste champ de recherche allant des systèmes biologiques tels que les structures naturelles multistables (Forterre et al., 2005), au problème de croissance des membranes élastiques (Dervaux and Ben-Amar, 2008; Lewicka et al., 2014), jusqu'à l'analyse et la conception de structures adaptatives, *i.e.* de structures qui peuvent adapter leur forme à différents régimes de fonctionnement (Seffen, 2007; Norman et al., 2007; Seffen and Guest, 2011). Plus généralement, l'intérêt s'est élargi aux structures élancées mettant en évidence de grands déplacements.

L'étude de la réponse non-linéaire des coques est perçue comme un problème complexe de mécanique des structures, souvent sujet à des solutions semi-analytiques. Comme cela a été souligné par Pirrera et al. (2012), il est difficile d'extrapoler des informations sur le comportement global non-linéaire des coques uniquement par le biais de simulations par éléments finis. En effet, l'analyse numérique non-linéaire des coques possédant plusieurs configurations stables reste une tâche délicate d'un point de vue technique, car seules des études paramétriques peuvent être menées pour un nombre limité de combinaisons de géométrie, propriétés matériaux ou conditions de chargement, et cela peut rendre difficile l'obtention d'une solution convergée (Gigliotti et al., 2004). C'est pourquoi la modélisation par éléments finis est préférée en tant qu'outil de validation, en parallèle à des études théoriques ou bien lorsque les géométries considérées sont difficilement descriptibles analytiquement.

Dans ce sens, l'utilisation de modèles analytiques simples est d'une importance particulière car ils peuvent fournir une idée globale du comportement non-linéaire des coques. Cela peut être obtenu via des modèles réduits en effectuant des hypothèses restrictives sur les modes de déformations admissibles des coques et/ou sur l'ordre de la non-linéarité matérielle ou géométrique envisagée. De manière non-fortuite, l'application de la cinématique de Föppl-von Kármán (FvK) a représenté une importante contribution dans l'étude des coques minces peu profondes (Dervaux and Ben-Amar, 2008; Giomi and Mahadevan, 2012; Klein et al., 2007). Spécifiquement, une meilleure compréhension du comportement des coques minces anisotropes a été possible grâce à l'hypothèse fondamentale de courbures uniformes (UC) (Vidoli and Maurini, 2008; Seffen, 2007; Seffen and Guest, 2011; Guest et al., 2011; Vidoli, 2013) *i.e.* un champ de courbures constant sur le domaine de la coque. Cette hypothèse, qui peut paraître réductrice, s'est révélée au contraire très utile et son champ d'application s'est élargi à une vaste gamme d'études.

Si l'utilisation de la cinématique de Föppl-von Kármán a déjà démontré toute sa pertinence et est, de toute évidence, la plus adaptée dans l'application à des modèles réduits, une validation de son domaine d'applicabilité reste une tâche vaste et importante à mener. Dans cette optique, des éléments de réponse ont été fournis par (Fernandes et al., 2010; Pirrera et al., 2012) sur l'étude des plaques orthotropes bistables soumises à des courbures inélastiques élevées.

C'est pourquoi dans ce chapitre, on tente d'évaluer l'applicabilité de l'hypothèse de courbures uniformes (UC) et de modéliser des coques multistables avec des courbures initiales et inélastiques élevées. D'abord, on décrit la démarche adoptée par Vidoli and Maurini (2008) pour déduire un modèle à courbures uniformes de coques minces peu profondes, basé sur la cinématique de Föppl-von Kármán. Ensuite, on applique ce modèle à l'étude de la multistabilité des coques anisotropes; de manière à rester dans un cadre général, on étudie des comportements spécifiques et courants d'anisotropie et de conditions de chargement. Particulièrement, on montre qu'une coque mince soumise à une courbure initiale élevée peut devenir tristable pour une large gamme de courbures inélastiques et de propriétés matériaux. Nous comparons ces résultats à des simulations numériques par éléments finis sur la base de courbures inélastiques de type thermoélasticité mais, en effet, les déformations peuvent également être associées à des effets élastoplastiques, ou encore à la contribution de matériaux actifs tels que les piézoélectriques.

## 1.2 Stratégie de réduction d'un modèle phénoménologique

Nous détaillons dans cette section une procédure pour déduire une approximation à courbures uniformes (UC) d'un modèle phénoménologique de coques minces peu profondes basé sur la cinématique de Föppl-von Kármán (FvK). Cette procédure a d'abord été décrite par [Mansfield \(1953\)](#) et plus récemment utilisée par [Seffen \(2007\)](#), puis généralisée à l'orthotropie ([Vidoli and Maurini, 2008](#); [Fernandes et al., 2010](#)). Cette formulation est valide dans le régime où les déplacements transverses sont de l'ordre de l'épaisseur (*i.e.* autour du point de bifurcation), mais nous verrons dans la suite que via l'hypothèse de courbures uniformes, les résultats sont précis même lorsque la coque devient profonde.

### 1.2.1 Hypothèses cinématiques et équations fondamentales

Les hypothèses de Föppl-von Kármán sont utilisées pour réduire au cas des coques minces et peu profondes le modèle non-linéaire complet de Koiter, et peuvent être vues comme une extension au cas des coques des hypothèses de Kirchhoff-Love auxquelles les effets non-linéaires sont ajoutés. En particulier, le couplage non-linéaire entre déformations de membrane et déplacement transverse est pris en compte, et se trouve être le point fondamental pour décrire certains comportements remarquables comme la multistabilité. La cinématique de la coque est basée sur un certain nombre d'hypothèses, notamment celles communes à la théorie des plaques stratifiées. Ainsi, on suppose que :

1. *La cinématique de Kirchhoff-Love est appliquée* : les sections droites de la coque restent droites et orthogonales au plan moyen avant et après déformations. Les effets de cisaillement transverse ne sont pas pris en compte.
2. *Les hypothèses générales des plaques stratifiées sont appliquées* : particulièrement, la modélisation de la coque est basée sur l'hypothèse de contraintes planes ( $\sigma_{iz} = 0, i = x, y, z$ ) en supposant également ( $\epsilon_{iz} = 0$ ). La rigidité de la coque est décrite par les matrices classiques de rigidité de membrane  $\bar{A}$ , couplage membrane-flexion  $\bar{B}$  et flexion  $\bar{D}$  de la théorie classique des plaques stratifiées, voir [Berthelot \(1999\)](#).
3. *La coque est mince et peu profonde* : l'hypothèse de coque mince implique que l'épaisseur  $h$  de la coque est petite devant sa longueur caractéristique  $L$  (côté ou diamètre) *i.e.*  $h \ll L$ . L'hypothèse de coque peu profonde se résume au fait que la courbure  $1/R$  (où  $R$  est le rayon de courbure) de la coque reste suffisamment petite pendant le processus de déformation, c'est-à-dire que l'on suppose  $R \gg L \gg h$ .
4. *Les courbures de la coque sont uniformes ou quadratiques* : l'hypothèse de courbures uniformes (*resp.* quadratiques) implique que la coque doit être uniformément (*resp.* quadratiquement) courbée lorsqu'aucun chargement n'est appliqué. Dans la suite, les travaux présentés dans ce manuscrit seront basés sur le cas de courbures uniformes et seront comparés au cas de courbures quadratiques ([Vidoli, 2013](#); [Brunetti et al., 2016](#)).
5. *La coque est libre aux bords* : la seule source de chargement admissible provient de courbures inélastiques (pré-contraintes/pré-déformations), par exemple par effet thermo-hygro-élastique. Les conditions aux limites cinématiques ainsi que les travaux des forces extérieures vis-à-vis des déplacements imposés ne sont pas pris en compte.

Compte tenu de ces hypothèses, considérons comme point de départ une configuration de référence plate pour la coque, décrite par un domaine bidimensionnel  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$  muni de coordonnées cartésiennes  $(\bar{x}, \bar{y})$  décrivant un point matériel  $\mathbf{P}$  du plan moyen. Soit  $\bar{\mathbf{u}}$  le champ de déplacements total, on note par  $(\bar{u}_x, \bar{u}_y)$  et  $\bar{w}$  les composantes de déplacements plans et transverse, respectivement. Dans les théories négligeant le cisaillement, les déformations sont repérées au moyen de deux tenseurs plans du second ordre que sont les déformations de membrane et de courbures du plan moyen, écrits en notation de Voigt sous la forme :

$$\bar{\mathbf{e}} := \{\bar{e}_x, \bar{e}_y, 2\bar{e}_{xy}\}^T = \left\{ \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2, \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2, \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right\}^T \quad (1.1a)$$

$$\bar{\mathbf{k}} := \{\bar{k}_x, \bar{k}_y, 2\bar{k}_{xy}\}^T = \left\{ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}, \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}, 2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right\}^T \quad (1.1b)$$

Tels que<sup>1</sup> :

$$\bar{\mathbf{e}}^{tot} = \bar{\mathbf{e}} + \bar{z} \bar{\mathbf{k}} \quad (1.2)$$

où  $\bar{z}$  désigne la cote verticale en référence au plan moyen de la coque. Les déformations de membrane  $\bar{\mathbf{e}}$  tiennent compte de la contribution au second ordre du déplacement transverse, qui se trouve être la source du comportement non-linéaire. L'équation de compatibilité des déformations qui permet entre autre d'assurer que (1.1a) soit intégrable conduit à l'expression :

$$\text{rot rot } \bar{\mathbf{e}} := \frac{\partial^2 \bar{e}_y}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{e}_x}{\partial \bar{y}^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{e}_{xy}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} = \bar{k}_x \bar{k}_y - \bar{k}_{xy}^2 := \det \bar{\mathbf{k}} \quad (1.3)$$

où  $\det \bar{\mathbf{k}}$  est la courbure Gaussienne de la coque. L'équation de compatibilité (1.3) est en réalité le *Gauss Theorema Egregium* linéarisé autour d'une configuration plane (Ciarlet, 2000) et représente de façon très explicite le couplage qui existe entre courbure Gaussienne et déformations de membrane. Spécifiquement, cela montre que tout changement de courbure Gaussienne entraîne une variation non-uniforme des déformations de membrane, et inversement.

Les équilibres stables du modèle sont définis comme les minimas locaux de la fonctionnelle énergie potentielle  $\bar{\mathcal{E}}_p(\bar{\mathbf{u}})$  :

$$\bar{\mathcal{E}}_p(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_S \bar{A} (\bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{f}}) \cdot (\bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{f}}) + 2 \bar{B} (\bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{f}}) \cdot (\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{h}}) + \bar{D} (\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{h}}) \cdot (\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{h}}) d\bar{S} \quad (1.4)$$

où  $\bar{A}, \bar{B}$  et  $\bar{D}$  sont les matrices ( $3 \times 3$ ) classiques de rigidité de membrane, couplage membrane-flexion et flexion, respectivement (Berthelot, 1999) et  $d\bar{S}$  est l'élément de surface infinitésimale de la coque. L'énergie (1.4) fait intervenir les termes  $\bar{\mathbf{f}}$  et  $\bar{\mathbf{h}}$ , définis comme suit :

$$\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{f}}_0 + \bar{\mathbf{f}}_i, \quad \bar{\mathbf{h}} = \bar{\mathbf{h}}_0 + \bar{\mathbf{h}}_i, \quad \text{tels que} \quad \text{rot rot } \bar{\mathbf{f}}_0 = \det \bar{\mathbf{h}}_0. \quad (1.5)$$

où  $\bar{\mathbf{f}}_0$  et  $\bar{\mathbf{h}}_0$  désignent respectivement les déformations initiales de membrane et courbure de la coque, c'est-à-dire qu'ils assignent sa configuration naturelle, libre de contraintes. Les termes  $\bar{\mathbf{f}}_i$  et  $\bar{\mathbf{h}}_i$  désignent les déformations et courbures résiduelles de la coque, par exemple par application de précontraintes d'origine thermoélastique, hydroélastique ou encore par l'application de matériaux actifs tels que les piézoélectriques. Plus précisément,  $\bar{\mathbf{f}}_i$  et  $\bar{\mathbf{h}}_i$  sont les courbures résiduelles résultant du problème élastique linéaire ; ainsi, le modèle tel qu'il est présenté a pour vocation de déterminer la réponse non-linéaire d'une structure intrinsèquement à la solution élastique linéaire préalablement déterminée.

Par l'introduction des efforts de membrane de la coque, fonction des déformations et courbures via la loi de comportement, et définis par l'expression :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{k}}) = \{\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_{xy}\}^T := \bar{A} (\bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{f}}) + \bar{B} (\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{h}}) \quad (1.6)$$

l'énergie (1.4) peut être réécrite sous la forme :

$$\bar{\mathcal{E}}_p(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_S \left( \bar{A}^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{k}}) \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{k}}) \right) + \tilde{D} (\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{h}}) \cdot (\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{h}}) d\bar{S} \quad (1.7)$$

où l'on a posé  $\tilde{D} = \bar{D} - \bar{B}^T \bar{A}^{-1} \bar{B}$ .

---

1. La convention adoptée ici impose déplacement transverse et courbure principale de même signe ; cette convention sera utilisée dans toute la suite.

### 1.2.2 Réduction du modèle : résolution du problème membranaire

On décrit ici l'étape fondamentale qui permet la réduction du modèle en fonction du seul champ de courbures  $\bar{\mathbf{k}}$  grâce à la résolution du problème membranaire. La condition de stationnarité de l'énergie (1.7) vis-à-vis des déplacements plans  $(\bar{u}_x, \bar{u}_y)$  met en évidence les équations d'équilibre du problème plan, qui s'écrivent :

$$\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \text{ sur } \mathcal{S}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{S} \quad (1.8)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à la frontière  $\partial\mathcal{S}$ , supposée libre de contraintes. On remarque dans l'équation (1.6) que  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  dépend implicitement du déplacement transverse  $\bar{w}$  via les déformations de membrane  $\bar{\mathbf{e}}$ , uniquement.

L'équation de compatibilité peut être utilisée pour résoudre de manière définitive le problème statique (1.8) en termes des contraintes  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ . Pour ce faire, résoudre (1.6) vis-à-vis de  $\bar{\mathbf{e}}$  puis substituer dans (1.3) en tenant compte de la linéarité de l'opérateur rotationnel donne :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \left( \bar{A}^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right) = \det \bar{\mathbf{k}} - \det \bar{\mathbf{h}}_0 - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left( \bar{\mathbf{f}}_i - \bar{A}^{-1} \bar{B} (\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{h}}) \right) \text{ sur } \mathcal{S} \quad (1.9)$$

Le système d'équations (1.8)–(1.9) constitue un problème standard d'élasticité linéaire. Plus précisément, il s'agit d'un problème d'élasticité plane elliptique où le terme de forçage est assigné par une précontrainte via les quantités  $\bar{\mathbf{f}}_i$  et  $\bar{\mathbf{h}}_i$ .

Résoudre vis-à-vis de  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  ce problème elliptique permet d'exprimer l'énergie de membrane en termes des courbures  $\bar{\mathbf{k}}$  et, en conséquence, de réduire la fonctionnelle énergie potentielle (1.7) à une unique inconnue  $\bar{\mathbf{k}}$ . Cette étape constitue le point fondamental dans l'objectif d'obtention de modèles réduits car elle élimine l'apparition explicite des déformations de membrane dans l'énergie sans omettre leur contribution.

A ce stade, il est pertinent d'introduire un adimensionnement des quantités étudiées de manière à simplifier les expressions, où l'on pose :

$$\mathbf{k} = R_0 \bar{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{h} = R_0 \bar{\mathbf{h}}, \quad x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad y = \frac{\bar{y}}{L}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\bar{A}_{11}}, \quad A = \frac{\bar{A}}{\bar{A}_{11}}, \quad D = \frac{\tilde{D}}{\tilde{D}_{11}}, \quad \mathcal{E}_p = \frac{R_0^2 \bar{\mathcal{E}}_p}{\bar{S} \tilde{D}_{11}} \quad (1.10)$$

où  $R_0$  est un rayon caractéristique utilisé pour adimensionner les courbures et  $\bar{S} = L^2$  est la section de la projection orthogonale du plan moyen de la coque sur le plan  $\bar{z} = 0$ . En tenant compte de l'adimensionnement (1.10), le problème (1.8)–(1.9) peut se réécrire :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ sur } \mathcal{S}, & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{S} \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} (A^{-1} \boldsymbol{\sigma}) = \frac{L^2}{R_0^2} (\det \mathbf{k} - \det \mathbf{h}_0) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{f}_i - A^{-1} B (\mathbf{k} - \mathbf{h})) := g \text{ sur } \mathcal{S} \end{cases} \quad (1.11a)$$

$$\quad (1.11b)$$

et l'énergie a désormais pour expression :

$$\mathcal{E}_p(\mathbf{k}, \mathbf{h}, \mathbf{f}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} D(\mathbf{k} - \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{h}) \, d\bar{S} + \mathcal{E}_s(\mathbf{k}, \mathbf{h}, \mathbf{f}) \quad (1.12)$$

avec

$$\mathcal{E}_s(\mathbf{k}, \mathbf{h}, \mathbf{f}) = \frac{\zeta^2}{2} \int_{\mathcal{S}} A^{-1} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{h}, \mathbf{f}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{h}, \mathbf{f}) \, d\bar{S} \quad (1.13)$$

où  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_i$  et  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_i$ . Le terme  $\mathcal{E}_s$  représente l'énergie d'extension de la coque en fonction des courbures uniquement, et se trouve être l'unique source de non-linéarité dans le modèle.

Le paramètre  $\zeta$  quant à lui contrôle le ratio entre énergies d'extension et de flexion, et s'écrit :

$$\zeta^2 = \frac{\bar{A}_{11} R_0^2}{\tilde{D}_{11}} \equiv \frac{12 R_0^2}{t_{eq}^2}; \quad t_{eq} = \sqrt{\frac{12 \tilde{D}_{11}}{\bar{A}_{11}}} \quad (1.14)$$

où  $t_{eq}$  est l'épaisseur équivalente de la coque, qui coïncide, dans le cas de matériaux homogènes, avec l'épaisseur réelle de la coque.

### 1.2.3 Le cas de courbures uniformes

L'hypothèse de courbures uniformes est une approximation éminemment pertinente dans la mesure où elle reste valide pour une large gamme d'applications et, par ailleurs, cette hypothèse est clé dans l'optique de réduction du nombre de degrés de liberté de la coque. En particulier, en supposant le champ de déplacement transverse sous la forme :

$$w(x, y) = \frac{1}{2} (k_x x^2 + k_y y^2 + 2 k_{xy} xy) \quad (1.15)$$

on obtient un champ de courbures constant, de la forme :

$$[\mathbf{k}] = \begin{pmatrix} k_x & k_{xy} \\ k_{xy} & k_y \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

De fait, en supposant que :

1. Le champ de déplacement transverse  $w(x, y)$  a la forme (1.15) ;
2.  $\det \mathbf{k}$  et  $\det \mathbf{h}_0$  sont constants sur le domaine  $\mathcal{S}$  ;
3. Le terme  $(\mathbf{f}_i - A^{-1}B(\mathbf{k} - \mathbf{h}))$  dans (1.11) est *au plus* une fonction affine de  $(x, y)$  ;

par linéarité, la solution  $\boldsymbol{\sigma}$  du problème (1.11) est nécessairement de la forme (Vidoli, 2013) :

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \frac{L^2}{R_0^2} (\det \mathbf{k} - \det \mathbf{h}_0) \boldsymbol{\tau}(x, y) \quad (1.17)$$

où  $\boldsymbol{\tau}$  est un champ tensoriel caractérisant la distribution des contraintes dans la coque, et satisfaisant au problème auxiliaire :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0 \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} (A^{-1} \boldsymbol{\tau}) = 1 \end{cases} \quad \text{sur } \mathcal{S}, \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{S} \quad (1.18)$$

ce qui implique pour l'énergie de membrane l'expression :

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{2} \frac{\zeta^2 \psi L^4}{R_0^4} (\det \mathbf{k} - \det \mathbf{h}_0)^2 \quad (1.19)$$

où le paramètre  $\psi$  est défini par :

$$\psi = \int_{\mathcal{S}} A^{-1} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} dS \quad (1.20)$$

De fait, l'énergie totale écrite uniquement en fonction des courbures s'exprime par :

$$\mathcal{E}_p(\mathbf{k}, \mathbf{h}_0, \mathbf{h}_i) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} D(\mathbf{k} - \mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_i) \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_i) dS + \frac{1}{2} \frac{\zeta^2 \psi L^4}{R_0^4} (\det \mathbf{k} - \det \mathbf{h}_0)^2 \quad (1.21)$$

où  $\mathcal{S}$  est une surface unitaire. Sous l'hypothèse supplémentaire de matrice de rigidité  $D$  uniforme, l'énergie (1.21) peut s'écrire par son ultime forme :

$$\mathcal{E}_p(\mathbf{k}, \mathbf{h}_0, \mathbf{h}_i) = \frac{1}{2} D(\mathbf{k} - \mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_i) \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_i) + \frac{1}{2} (\det \mathbf{k} - \det \mathbf{h}_0)^2 \quad (1.22)$$

où le rayon caractéristique  $R_0$  a été choisi de manière à supprimer toute contribution extrinsèque aux différentes courbures de la coque :

$$R_0 := \sqrt{\frac{12\psi L^4}{t_{eq}^2}} \quad (1.23)$$

Le rayon caractéristique  $R_0$  est fondamental car il permet de re-dimensionner les courbures et plus généralement l'énergie. Il dépend implicitement de la forme de la coque au travers de  $\psi$ ; de fait, sa détermination doit être menée pour chaque géométrie.

L'énergie (1.22) a été proposée et exploitée par Vidoli and Maurini (2008) avec  $\mathbf{h}_i = \mathbf{0}$  pour déduire le comportement tristable de coques orthotropes, et par Fernandes et al. (2010) avec  $\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}$  pour étudier les transitions réversibles entre les équilibres stables de plaques orthotropes bistables. Le cas ( $\mathbf{h}_0 \neq \mathbf{0}, \mathbf{h}_i \neq \mathbf{0}$ ) constitue un cas d'étude intéressant qui sera traité en détail dans la section 1.3.3.

Pour un matériau orthotrope quelconque, la matrice de rigidité de flexion adimensionnée  $D$  dans l'énergie (1.22) a la forme :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \nu^2 < \beta, \quad \gamma = \rho^c(1 - \nu^2/\beta) > 0 \quad (1.24)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson,  $\beta = E_2/E_1$  le rapport entre les modules d'Young dans les directions d'orthotropie, et  $\rho^c$  le module de cisaillement, tels que :

$$\nu = \frac{\tilde{D}_{12}}{\tilde{D}_{11}} \equiv \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}, \quad \beta = \frac{\tilde{D}_{22}}{\tilde{D}_{11}} \equiv \frac{E_2}{E_1}, \quad \rho^c = \frac{\tilde{D}_{33}\tilde{D}_{22}}{\tilde{D}_{11}\tilde{D}_{22} - \tilde{D}_{12}^2} \equiv \frac{G_{12}}{E_1} \quad (1.25)$$

Par l'introduction d'une seconde étape de réduction sur les courbures, il est possible de réduire (1.22) au cas de matériaux à symétrie du carré avec  $\beta = 1$ , sans aucune perte de généralité. En particulier, en posant :

$$k_x = \hat{k}_x \sqrt{\beta}, \quad k_y = \hat{k}_y \sqrt{\beta}, \quad k_{xy} = \hat{k}_{xy} \sqrt[4]{\beta} \quad (1.26a)$$

$$h_x = \hat{h}_x \sqrt{\beta}, \quad h_y = \hat{h}_y \sqrt{\beta}, \quad h_{xy} = \hat{h}_{xy} \sqrt[4]{\beta} \quad (1.26b)$$

on obtient :

$$\frac{\mathcal{E}_p}{\beta} = \frac{1}{2} \hat{D} (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{h}}_0 - \hat{\mathbf{h}}_i) \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{h}}_0 - \hat{\mathbf{h}}_i) + \frac{1}{2} (\det \hat{\mathbf{k}} - \det \hat{\mathbf{h}}_0)^2 \quad (1.27)$$

Auquel cas, la matrice  $\hat{D}$  a la forme suivante :

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad -1 < \mu < 1, \quad \gamma > 0, \quad (1.28)$$

avec  $\mu := \nu/\sqrt{\beta}$  et  $\gamma := \rho^c(1 - \nu^2/\beta)/\sqrt{\beta}$ . Par la suite, le terme " $\hat{\cdot}$ " sera omis de sorte que la distinction entre les énergies (1.22) et (1.27) se situe exclusivement sur la matrice  $D$  avec  $\beta = 1$ . Dans ce cas particulier de symétrie du carré,  $\mu$  et  $\gamma$  sont les deux seuls paramètres constitutifs du matériau qui affectent le comportement mécanique et donc la stabilité des coques minces à courbures uniformes. Le second cas remarquable concerne le cas générique de l'isotropie pour lequel la contribution du cisaillement se réduit à l'expression :

$$\gamma_{iso} = \frac{1 - \mu}{2} \quad (1.29)$$

Finalement, pour cet ultime cas, le coefficient de Poisson  $\mu$  devient l'unique paramètre affectant le comportement mécanique de la coque.

Le champ de déplacement transverse (1.15) est lié à l'hypothèse de courbures uniformes *i.e.* le tenseur de courbures associé est constant sur tout le domaine de la coque. Toutefois, lorsque la courbure ne peut plus être supposée uniforme, le champ (1.15) peut être remplacé par des expressions plus complexes, faisant intervenir des fonctions polynomiales (Vidoli, 2013). Par exemple, si l'on suppose la courbure évoluer quadratiquement sur le domaine  $\mathcal{S}$ , le champ cinématiquement admissible suivant peut être supposé :

$$w(x, y) = \frac{1}{2} (k_x x^2 + k_y y^2 + 2 k_{xy} xy) + c_1 x^2 (x^2 - q_1^2) + c_2 y^2 (y^2 - q_2^2) \quad (1.30)$$

conduisant au tenseur de courbures quadratiques suivant :

$$[\mathbf{k}] = \begin{pmatrix} k_x - 2c_1(q_1^2 - 6x^2) & k_{xy} \\ k_{xy} & k_y - 2c_2(q_2^2 - 6y^2) \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux paramètres Lagrangiens qui contrôlent la variation quadratique de la courbure sur le domaine  $\mathcal{S}$ ,  $q_1$  et  $q_2$  sont deux paramètres qui contrôlent le rapport d'aspect de la coque. La principale différence entre modèles à courbures uniformes et quadratiques réside dans le fait que l'hypothèse de courbure quadratique permet de satisfaire aux conditions aux limites sur les moments de flexion, voir Vidoli (2013). Dans la suite, par souci de concision, on notera par "UC" le modèle à courbures uniformes déduit de (1.15)–(1.22) et par "QC" le modèle déduit de (1.30) associé à la fonctionnelle énergie potentielle intrinsèque.

## 1.2.4 Estimation du rayon caractéristique $R_0$

### 1.2.4.a Autres formes du problème membranaire

Le problème (1.11) constitue un problème standard elliptique d'élasticité linéaire sur  $\mathcal{S}$  de solution (1.17), qui peut également être résolu par plusieurs méthodes décrites succinctement ci-dessous :

- Si l'on suppose  $\boldsymbol{\sigma} = A\mathbf{e} + \Omega$  dans (1.11) où  $\Omega$  est un champ de précontraintes quelconque, on obtient :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A\mathbf{e}) + \operatorname{div}\Omega = 0 \\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{e} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \mathcal{S}, \quad (A\mathbf{e}) \cdot \mathbf{n} = -\Omega \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial\mathcal{S} \quad (1.32)$$

*i.e.* un problème standard d'élasticité plane avec des forces volumiques quelconques  $\mathbf{b} = \operatorname{div}\Omega$  et de traction  $\mathbf{t} = -\Omega \cdot \mathbf{n}$  pour tout tenseur symétrique ( $2 \times 2$ )  $\Omega$  satisfaisant à la condition  $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(A^{-1}\Omega) = g$  où  $g$  est une fonction polynomiale des coordonnées  $(x, y)$ . Cette dernière condition est très simple à vérifier dans la mesure où l'on dispose de trois fonctions (les composantes indépendantes de  $\Omega$ ) pour résoudre une équation scalaire. Par exemple, en supposant un matériau orthotrope en membrane et en choisissant, sans perte de généralité,  $\Omega_{12} = 0$ ,  $\Omega_{22} = \nu\Omega_{11}$ , il reste à trouver la solution générale de l'équation différentielle :

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\overline{A}^{-1}\Omega\right) \equiv \frac{\partial\Omega_{11}}{\partial y^2} = g(x, y) \quad (1.33)$$

pour la fonction scalaire inconnue  $\Omega_{11}$ . De fait, il est légitime de choisir  $\Omega_{11} = y^2/2$ , ce qui donne :

$$\mathbf{b} = \operatorname{div}\Omega = \{0, \nu_A y\}^T, \quad \mathbf{t} = -\Omega \cdot \mathbf{n} = -\frac{y^2}{2} \{n_1, \nu_A n_2\}^T \quad (1.34)$$

où la solution, déjà obtenue par Seffen (2007) s'écrit :

$$\tau_{11} = D_1 \left( x^2 + 3\eta^2 y^2 - \frac{\varrho}{\pi} \right), \quad \tau_{22} = D_1 \left( 3\frac{x^2}{\varrho^2} + y^2 - \frac{1}{\pi\varrho} \right), \quad \tau_{12} = -2D_1 xy, \quad (1.35a)$$

$$D_1 = \frac{2\varrho^2 (\beta_A - \nu_A^2)}{12\eta^4 \beta_A + \eta^2 (\beta_A / \rho_A^c - 8\nu_A) + 12}, \quad \varrho = a/b \quad (1.35b)$$

- De manière analogue, il est possible de voir (1.11) comme un problème standard d'élasticité avec prédéformations. En supposant par exemple  $\boldsymbol{\sigma} = A(\mathbf{e} - \mathbf{e}_0)$ , on obtient :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(\mathbf{e} - \mathbf{e}_0)) = 0 \\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{e} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \mathcal{S}, \quad A(\mathbf{e} - \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{S}$$

pour tout champ de déformations  $\mathbf{e}_0$  satisfaisant à la condition  $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{e}_0 = -g$ .

- Finalement, l'équation (1.11) peut être reformulée en introduisant la fonction de contraintes d'Airy. Notamment, en supposant  $\boldsymbol{\sigma} = \text{rot rot}(\Phi \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)$ , l'équation d'équilibre (1.11a) est automatiquement vérifiée tandis que l'équation de compatibilité (1.11b), en supposant  $A$  isotrope, s'écrit :

$$\Delta\Delta\Phi = g \text{ sur } \mathcal{S} \quad (1.36)$$

#### 1.2.4.b Estimations de $R_0$ pour différentes géométries

Le rayon caractéristique  $R_0$  défini dans l'équation (1.23) est le paramètre qui permet de re-dimensionner les courbures et l'énergie totale. C'est en réalité dans ce paramètre que la géométrie de la structure est assignée, notamment au travers du paramètre  $\psi$  dont la précision d'évaluation est d'une importance fondamentale. Il est explicitement fonction de la forme  $\mathcal{S}$  du domaine et de la rigidité de membrane adimensionnée  $A$ . L'évaluation (1.20) de  $\psi$  est obtenue en résolvant le problème auxiliaire (1.18), qui peut être réécrit sous la forme :

$$\psi = \int_{\mathcal{S}} A^{-1} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dS, \quad \boldsymbol{\tau} = \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (1.37a)$$

où la fonction d'air y  $\Phi$  satisfait au problème elliptique :

$$\Delta\Delta\Phi = 1 \text{ sur } \mathcal{S}, \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{S} \quad (1.37b)$$

Concrètement, la détermination de  $\psi$  constitue le point fondamental et de toute évidence le plus compliqué dans la procédure de réduction. Elle peut être menée de façon analytique pour des formes elliptiques, spécifiquement lorsque le matériau est orthotrope ou isotrope en membrane. Auquel cas la matrice de rigidité a la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \nu_A & 0 \\ \nu_A & \beta_A & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_A \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

Ainsi, pour une surface  $\mathcal{S}$  elliptique de matériau orthotrope, de demi grand-axe  $a$  et de demi petit-axe  $b$ , la solution s'écrit (Seffen, 2007) :

$$\psi^{ell} = \frac{\beta_A - \nu_A^2}{24\pi^2 (3(a/b)^2 \beta_A + (\beta_A/\rho_A^c - 2\nu_A) + 3(b/a)^2)} \quad (1.39)$$

L'évaluation (1.39) peut être réduite au cas particulier de géométrie circulaire ( $a/b \rightarrow 1$ ) et de matériau isotrope en membrane ( $\beta_A \rightarrow 1, \gamma_A \rightarrow (1 - \nu_A)/2$ ). Dans un tel cas,  $\psi$  s'exprime par :

$$\psi^{ic} = \frac{1 - \nu_A^2}{192\pi^2} \quad (1.40)$$

Pour plus de détails sur ces aspects, voir Vidoli (2013) où les cas de courbures linéaires et quadratiques sont traités en détail.

Si  $\mathcal{S}$  est de forme rectangulaire, le problème membranaire ne peut plus être résolu analytiquement, et en conséquence l'évaluation de  $\psi$  doit être menée par intégration numérique. Toutefois, il est possible de s'affranchir de ce calcul numérique par l'utilisation d'un facteur de correction associé à la solution analytique (1.39) issue d'un domaine elliptique. En effet, nous avons calculé numériquement les valeurs de  $\psi$  pour des domaines de forme rectangulaire de différents rapports d'aspect  $a/b$  et, en les comparant avec les valeurs analytiques  $\psi^{ell}$  correspondant aux formes elliptiques, on en déduit la relation :

$$\psi^{rect} = 0.74 \times \psi^{ell} \quad (1.41)$$

On donne un exemple de cette estimation sur la figure 1.1 : sur la figure 1.1(a), on montre l'évolution du rapport  $\psi/\psi^{ic}$  en fonction du rapport d'aspect  $a/b$  dans le cas d'un matériau isotrope, où  $\psi$  désigne

une forme circulaire, rectangulaire ou elliptique,  $\psi^{ic}$  désigne la valeur de  $\psi$  pour une surface isotrope circulaire. Notamment, on trace en trait plein le ratio  $\psi^{ell}/\psi^{ic}$ , et de façon évidente on remarque que ce ratio atteint sa valeur maximale lorsque  $a/b \rightarrow 1$ . De la même manière, nous reportons en points noirs le ratio  $\psi^{rect}/\psi^{ic}$  déterminé en résolvant le problème membranaire numériquement pour différents rapports d'aspect, et en traits discontinus la fonction analytique  $0.74 \times \psi^{ell}/\psi^{ic}$ . On vérifie clairement que l'erreur associée à l'approximation (1.41) est très faible et reste inférieure à 5% lorsque  $a/b \in [0.5, 2]$  comme le montre la figure 1.1(b). Le nombre 0.74 a été obtenu par des simulations numériques comme le ratio entre les valeurs de  $\psi$  pour un rectangle et un cercle de matériau isotrope ; ceci étant, on a aussi vérifié que l'erreur associée reste similaire pour des matériaux non-isotropes.

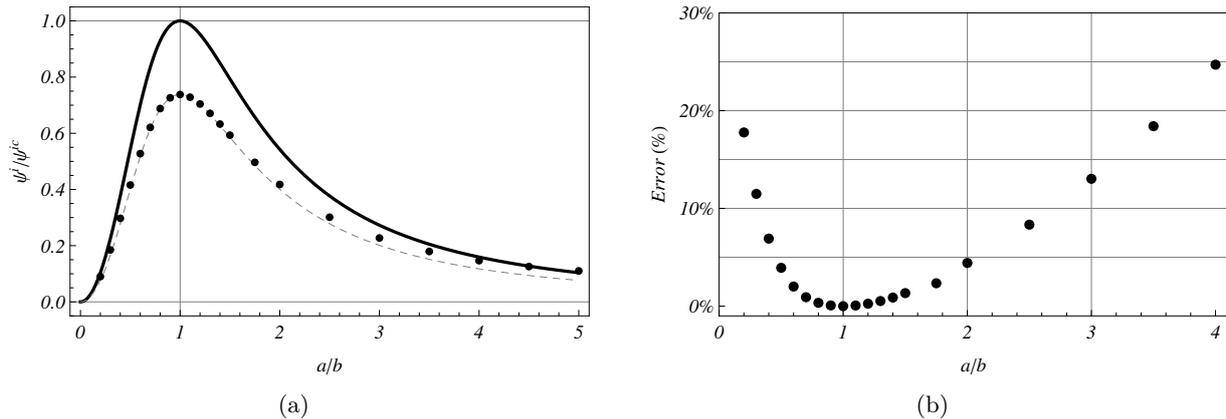


FIGURE 1.1 – (a) Variations de  $\psi/\psi^{ic}$  en fonction du rapport d'aspect pour différentes géométries. Les traits continus correspondent à  $\psi^{ell}/\psi^{ic}$ , les points et traits discontinus correspondent respectivement à la fonction  $\psi^{rect}/\psi^{ic}$  résolue numériquement, et à l'approximation  $0.74 \times \psi^{ell}/\psi^{ic}$ . (b) erreur associée à la détermination de  $\psi^{rect}$  vis-à-vis de l'hypothèse (1.41).

**Remarque 1 :** Le modèle proposé par Vidoli and Maurini (2008) au travers de l'énergie potentielle (1.22) ne fait pas apparaître le travail des forces extérieures ainsi que l'énergie cinétique de la coque. Toutefois, le rayon caractéristique  $R_0$  étant défini, la prise en compte des termes de travail des forces extérieures et d'énergie cinétique peut se faire comme on le montrera dans le chapitre 4 de cette thèse, afin d'obtenir un modèle mécanique complet de la coque. Par ailleurs, différents changements de variables seront introduits afin d'adapter le modèle à différents cas de figure particuliers et ainsi simplifier leur résolution.

### 1.2.5 Modèle extensible (exact) et limite d'inextensibilité (approximation)

Comme souligné précédemment, l'énergie (1.22) est la somme d'une énergie de flexion, caractérisée par la matrice  $D$ , qui dépend quadratiquement des courbures de la coque, et d'une énergie d'extension qui est une forme du quatrième ordre des déformations de courbure, cette dernière étant l'unique source de comportement non-linéaire dans le modèle. Dans cette fonction des courbures, on remarque particulièrement que, lorsque  $\mathbf{h}_i = \mathbf{0}$ , la solution  $\mathbf{k} = \mathbf{h}_0$  est le minimum global de l'énergie, ce qui permet d'étudier de façon simple et efficace la multistabilité des coques dont on fait varier uniquement la courbure initiale (Vidoli and Maurini, 2008). A l'inverse, lorsque  $\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}$ , la solution  $\mathbf{k} = \mathbf{h}_i$  n'est pas un minimum du fait qu'elle ne satisfait pas à la minimisation de l'énergie d'extension, excepté lorsque l'on suppose cette contribution comme étant dominante, ce qui constitue la limite d'inextensibilité ; dans un tel cas, parmi l'ensemble des courbures annulant l'énergie d'extension, on cherche les solutions qui minimisent l'énergie de flexion. De fait, les seuls déplacements cinématiquement admissibles de la coque sont associés et limités à des déformations de flexion pure.

### 1.2.5.a Problème extensible ( $\det \mathbf{k} \neq \det \mathbf{h}_0$ )

Le problème extensible est le problème exact général intrinsèque à l'énergie (1.22), valable pour tous les cas de chargement par courbures inélastiques. Spécifiquement, lorsque l'on envisage des changements importants de courbure Gaussienne, du type d'un changement de signe des courbures entre deux configurations sphériques de signes opposés (par exemple une demi-balle de tennis), la quantité d'énergie à fournir et la quantité d'énergie dépensée par la coque sont toutes deux drastiques car le passage d'une position à l'autre impose une extension importante du plan moyen de la coque, ce qui rend fortement non-négligeable la contribution de l'énergie d'extension ; qui plus est, cette énergie d'extension est très grande devant l'énergie de flexion. C'est pourquoi, pour ce type de déformation, on préférera tenir compte de la contribution de l'extension. Ainsi, dans un cadre tout à fait général de chargement par courbures inélastiques, le problème extensible de recherche des configurations stables de la coque, via la minimisation de l'énergie potentielle totale, s'exprime de la façon suivante :

*Pour une coque mince peu profonde à courbures uniformes, libre aux bords et, étant données les courbures initiale  $\mathbf{h}_0$  et inélastique  $\mathbf{h}_i$ , trouver en fonction du champ de courbures  $\mathbf{k}$  tous les minimas de l'énergie potentielle :*

$$\mathcal{E}_p(\mathbf{k}, \mathbf{h}_0, \mathbf{h}_i) = \frac{1}{2} D (\mathbf{k} - \mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_i) \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_i) + \frac{1}{2} (\det \mathbf{k} - \det \mathbf{h}_0)^2 \quad (\mathfrak{P}\epsilon)$$

*i.e.*  $\min_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_p(\mathbf{k}, \mathbf{h}_0, \mathbf{h}_i)$

### 1.2.5.b Problème inextensible ( $\det \mathbf{k} = \det \mathbf{h}_0$ )

Lorsque l'on suppose la coque travailler en flexion pure, il est possible d'introduire une limite d'inextensibilité dans le but de simplifier la résolution du problème. Cette limite implique explicitement que les courbures Gaussiennes actuelle  $\det \mathbf{k}$  et initiale  $\det \mathbf{h}_0$  sont égales à tout instant. Elle est souvent utilisée pour étudier des cas spécifiques de structures multistables car elle permet parfois de disposer d'une solution analytique que le problème extensible n'est pas capable de fournir. Dans ce sens, [Guest and Pellegrino \(2006\)](#) ont utilisé un modèle inextensible pour étudier la bistabilité de coques cylindriques, permettant de fournir des solutions analytiques simples. [Vidoli and Maurini \(2008\)](#) ont quant à eux utilisé cette limite pour étudier la tristabilité de coques orthotropes vis-à-vis d'un rang de courbures initiales spécifiques. On justifiera par la suite que dans un tel cadre, il est judicieux de procéder à un changement de variables dans la représentation du champ de courbures  $\mathbf{k}$ , en passant des composantes cartésiennes de courbures  $(k_x, k_y, k_{xy})$  aux nouvelles composantes  $(\kappa_m, \kappa_d, \kappa_t)$  :

$$\begin{cases} \kappa_m \propto (k_x + k_y) \\ \kappa_d \propto (k_x - k_y) \\ \kappa_t \propto k_{xy} \end{cases} \quad (1.42)$$

Telles qu'exprimées dans (1.42), les composantes  $\kappa_m$  et  $\kappa_d$  représentent respectivement la partie moyenne (ou sphérique) et la partie déviatorique du champ de courbures, alors que  $\kappa_t$  correspond à la torsion. Ainsi, le problème inextensible de recherche des configurations stables, via la minimisation de l'énergie potentielle totale de la coque, s'exprime de la façon suivante :

Pour une coque mince à courbures uniformes, libre aux bords et, étant données les courbures initiale  $\mathbf{h}_0$  et inélastique  $\mathbf{h}_i$ , trouver les champs de courbures  $\mathbf{k}$  qui minimisent la quantité :

$$\| \mathbf{k} - \mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_i \|^2$$

sous la contrainte d'inextensibilité :

( $\mathfrak{P}_i$ )

$$\det \mathbf{k} = \det \mathbf{h}_0$$

*i.e.* pour des courbures initiale  $\mathbf{h}_0$  et inélastique  $\mathbf{h}_i$  données, trouver tous les points  $\mathbf{k}$  appartenant à la variété  $\det \mathbf{k} = \det \mathbf{h}_0$ , et minimisant la quantité  $\| \mathbf{k} - \mathbf{h}_0 - \mathbf{h}_i \|^2$ .

D'un point de vue mathématique, le problème  $\mathfrak{P}_i$  est complètement différent du problème  $\mathfrak{P}_e$  car il abandonne la cinématique de Föppl-von Kármán et de fait l'hypothèse de coque peu profonde ; il correspond à un modèle non-linéaire général de coques minces à courbures uniformes, formulé comme un problème d'optimisation avec contrainte de type égalité. Autrement dit, il reste valide pour de petites comme de grandes déformations ou courbures, que la coque soit profonde ou non, à condition que l'extension de la coque soit nulle ou négligeable. De fait, il devient mieux adapté aux *grandes courbures* que le problème  $\mathfrak{P}_e$ . Ceci étant, le cadre d'application de ce problème, en termes de détermination des trajets de déformations de la coque, se limite aux structures à géométries simples (sphériques ou cylindriques) de manière à n'envisager aucune variation du signe des courbures principales n'induisant aucune extension du plan moyen de la coque. Néanmoins, la recherche des positions d'équilibre stables n'est pas affectée par cette considération, pourvu que la courbure de la coque soit uniforme.

On montrera par la suite que ce problème ( $\mathfrak{P}_i$ ), déduit de la cinématique de FvK et de l'hypothèse de courbures uniformes, est équivalent au même problème obtenu sous la cinématique de Koiter. Nous verrons aussi que l'introduction de cette limite d'inextensibilité peut s'avérer judicieuse dans certaines applications car elle permet d'en simplifier la compréhension, l'interprétation du comportement de la coque étant analytique et/ou géométrique.

Sur les variétés  $\det \mathbf{k} = \det \mathbf{h}_0$ , il est possible de visualiser d'une part les différents équilibres stables, et d'autre part le trajet de chargement et en conséquence les trajets de variations de courbures de la coque. Cependant, la forme de cette contrainte d'inextensibilité est fortement influencée par le signe de la courbure Gaussienne initiale (*c.f.* figure 1.2). Lorsque  $\det \mathbf{h}_0 > 0$ , la variété est une parabolôïde simple dans l'espace des courbures. Lorsque  $\det \mathbf{h}_0 < 0$ , la variété devient une parabolôïde de Flamm ; dans un tel cas le domaine est continu en tout point. Enfin, lorsque  $\det \mathbf{h}_0 = 0$ , la variété est un cône dans l'espace des courbures. En outre, la section de ces variétés évolue avec le degré d'anisotropie du matériau ; les sections du plan  $\kappa_m = \text{constante}$  sont circulaires lorsque le matériau est isotrope et ellipsoïdales lorsqu'il est orthotrope.

Aussi, cette contrainte met invariablement en évidence une symétrie miroir par rapport au plan  $\kappa_m = 0$ , et ce quelle que soit la courbure Gaussienne initiale. Remarquons que lorsque  $\det \mathbf{h}_0 > 0$ , il y a une discontinuité entre les domaines à  $\kappa_m > 0$  et  $\kappa_m < 0$  et l'écart entre ces domaines augmente à mesure que la courbure Gaussienne initiale augmente. Cette considération explique et confirme d'un point de vue géométrique la raison pour laquelle une coque sphérique bistable requiert un niveau d'énergie important pour passer d'une configuration sphérique stable à son opposée *i.e.* plus la coque est initialement profonde, plus l'énergie à fournir pour changer le sens des courbures est élevée. Le second point remarquable est que l'écart entre les domaines induit systématiquement une variation dynamique des courbures car il n'existe pas de chemin continu et potentiellement quasi-statique pour effectuer une transition contrôlée et réversible entre les configurations stables à  $\kappa_m > 0$  et  $\kappa_m < 0$ .

Enfin, notons que pour chaque cas, la configuration plate ( $\mathbf{k} = 0$ ) n'est pas admissible, inexistante lorsque  $\det \mathbf{h}_0 \neq 0$  et point singulier lorsque  $\det \mathbf{h}_0 = 0$ , car non-consistante avec la formulation mathématique du modèle.

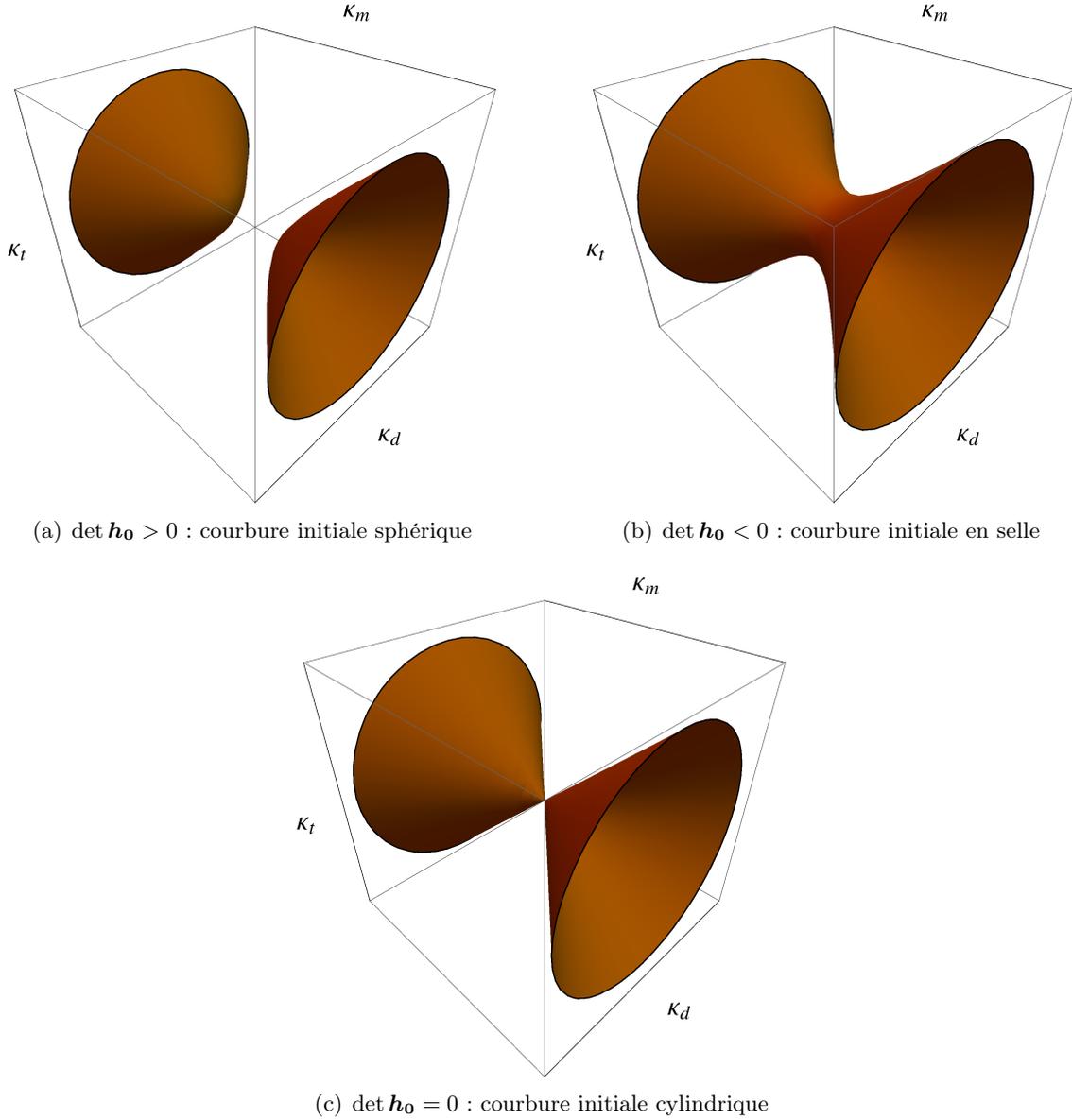


FIGURE 1.2 – Forme de la contrainte d’inextensibilité du problème  $\mathfrak{P}_i$  vis-à-vis du signe de la courbure Gaussienne initiale  $\det \mathbf{h}_0$ .

## 1.3 Étude de coques multistables

### 1.3.1 Introduction

Cette section a pour objectif de mener l’étude analytique ou semi-analytique de coques multistables vis-à-vis de la minimisation de l’énergie potentielle (1.22). Plusieurs situations peuvent être envisagées au travers d’hypothèses sur les courbures ; on considère notamment le cas de courbures initiales nulles, de courbures inélastiques nulles, ou encore un couplage entre les deux tenseurs. Dans toute cette section, et dans l’optique de rester dans un cadre général et en concordance avec les modèles proposés dans la littérature, on utilisera exclusivement le modèle extensible, présenté dans la section précédente, associé au problème  $\mathfrak{P}_e$ .

Bien que le domaine de validité des modèles déduits des hypothèses de FvK est mathématiquement limité aux plaques et coques peu profondes, un certain nombre de travaux, dont quelques uns sont introduits ci-dessous, ont montré que, du moins pour des coques sollicitées par déformations inélastiques,

les hypothèses de FvK peuvent fournir des résultats en bonne concordance avec l'expérimentation, et ce pour une large gamme de courbures aussi bien initiales que inélastiques, même lorsque ces modèles sont restreints à l'hypothèse de courbures uniformes.

Dans un récent travail intéressant, [Lewicka et al. \(2010\)](#) ont montré par le biais d'expansion asymptotique et Gamma-convergence que la cinématique de FvK est la plus pertinente pour inclure les effets non-linéaires géométriques dans les plaques et coques peu profondes sollicitées par déformations inélastiques. Ceci étant, une définition du domaine de validité de l'hypothèse de courbures uniformes ainsi qu'une validation numérique par le biais d'approximations non-linéaires d'ordres supérieurs semble nécessaire de manière à attester de l'efficacité de tels modèles. Dans cette voie, des premiers éléments de réponse ont été introduits ([Fernandes et al., 2010](#); [Pirrer et al., 2012](#)) par l'étude de plaques multistables. [Fernandes et al. \(2010\)](#), au travers du modèle UC, ont étudié le comportement non-linéaire de plaques orthotropes sujettes à de grandes courbures inélastiques induites par effets thermo-élastique et piézo-électrique, pour lesquelles la validité du modèle UC présenté dans la section 1.2 a été établie au moyen de simulations par éléments finis, où les courbures théoriques et numériques ont été comparées sur une trajectoire d'actionnement, montrant une bonne concordance. [Pirrer et al. \(2012\)](#) ont quant à eux comparé les résultats obtenus analytiquement pour des plaques stratifiées par le biais d'approximations de FvK d'ordres supérieurs avec des simulations par éléments finis, exhibant également des résultats intéressants. Néanmoins, lorsque courbures initiales et inélastiques sont combinées, le comportement multistable devient plus riche et fait intervenir des difficultés supplémentaires ; la validation numérique est alors primordiale pour comprendre et définir le domaine de validité des hypothèses de courbure uniforme ou même quadratique.

C'est pourquoi dans cette section, nous proposons d'étudier la multistabilité de coques anisotropes sujettes à de grandes courbures initiales et inélastiques, de manière à vérifier le domaine de validité des hypothèses UC et QC d'une part, et vérifier que les hypothèses de FvK restent pertinentes même lorsque la coque sort de son domaine de définition, spécifiquement lorsqu'elle ne peut plus être supposée comme étant peu profonde.

Dans cette étude, on se place exclusivement sous l'hypothèse  $\beta = 1$ , ce qui permet de focaliser l'étude sur les structures multistables à configurations stables orthogonales et de même niveau énergétique. On suppose la matrice de rigidité anisotrope complète de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \mu & \epsilon_1 \\ \mu & 1 & \epsilon_2 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \gamma \end{pmatrix}, \quad -1 < \mu < 1, \quad \gamma > 0 \quad (1.43)$$

si bien que lorsque  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ , on recouvre le cas de symétrie du carré. Les valeurs critiques de  $\mu$  et  $\gamma$  sont déterminées par la condition de positivité de la matrice  $D$ . Les valeurs critiques de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont déterminées de la même façon au moyen d'hypothèses ; dans un cadre général, on distinguera uniquement trois cas vis-à-vis de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ . Le premier cas orthotrope, plus précisément à symétrie du carré avec  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ , le second cas anisotrope avec  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$  qui induit le domaine de variabilité pour  $\epsilon$  :

$$-\sqrt{\frac{\gamma(1+\mu)}{2}} < \epsilon < \sqrt{\frac{\gamma(1+\mu)}{2}} \quad (1.44)$$

et enfin le troisième cas anisotrope avec  $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \epsilon$  qui découle sur le domaine de variabilité pour  $\epsilon$  :

$$-\sqrt{\frac{\gamma(1-\mu)}{2}} < \epsilon < \sqrt{\frac{\gamma(1-\mu)}{2}} \quad (1.45)$$

d'autres hypothèses sur  $\epsilon$  induisant systématiquement  $\beta \neq 1$ . L'étude du cas  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$  ne sera pas traitée ici mais pourrait être menée en détail avec le modèle UC. Ce type de matériaux anisotropes avec  $\beta = 1$  se trouve fréquemment dans les séquences d'empilement de composites stratifiés multistables et constitue un cas intéressant vis-à-vis du nombre d'applications possibles qui en découlent.

On étudiera dans un premier temps le cas d'une plaque soumise à des courbures inélastiques sphériques pures ou déviatoriques pures, puis, dans un second temps, le cas d'une coque soumise à des

courbures initiales et inélastiques sphériques. Ce dernier cas étant le plus général, il fera seul l'objet d'une validation numérique.

### 1.3.2 Le cas de plaques : $\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}$

Dans cette étude, on se focalise sur des plaques ( $\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}$ ) chargées par déformations inélastiques uniformes, en supposant  $h_{xy} = 0$ , de manière à restreindre la multistabilité à l'espace des courbures inélastiques à deux dimensions  $h_x$  et  $h_y$ . Cela étend les travaux de Seffen (2007) et Loukaides et al. (2011) à d'autres types d'anisotropie. Dans cette optique, les composites stratifiés sont d'excellents candidats à la multistabilité car il est possible de concevoir localement l'architecture de la coque (Montemurro et al., 2012; Vincenti et al., 2013). En effet, la séquence d'empilement peut être choisie optimalement de manière à contraindre le signe des courbures inélastiques  $h_x$  et  $h_y$ .

#### 1.3.2.a Cas de plaques orthotropes ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ ) et limite d'isotropie

Un exemple classique de coque multistable à symétrie du carré est celui du composite stratifié *cross-ply* d'empilement  $[0_n^{\circ}, 90_n^{\circ}]$ , où  $n$  désigne le nombre de couches, menant à deux configurations stables égales mais de courbures opposées en signe. Pour ce type de coques, il existe une solution analytique lorsque  $h_x = \pm h_y = h$ ; le détail est fourni dans les travaux de Fernandes et al. (2010). Le diagramme des phases/de stabilité correspondant est représenté sur la figure 1.3, où les régions monostables et bistables sont représentées en gris clair et gris foncé, respectivement. Spécifiquement, la figure 1.3(a) montre qu'il existe une solution à la multistabilité pour chaque zone du diagramme, quel que soit le signe de  $h_x$  et  $h_y$ . La figure 1.3(b) représente la limite d'une structure isotrope, cas pour lequel le coefficient de Poisson  $\mu$  est l'unique paramètre de la matrice  $D$  et donc le seul à influencer la forme du diagramme. De manière intuitive, on constate que lorsque  $h_x$  et  $h_y$  sont de même signe, l'unique moyen d'obtenir la multistabilité se trouve sur la droite  $h_x = h_y$ . Cette considération a une importance non-négligeable dans le sens où elle démontre que seule une courbure inélastique parfaitement sphérique appliquée à une plaque parfaitement isotrope permet d'obtenir la multistabilité. Toutefois, cette contrainte est quasiment impossible à respecter en pratique au vu de la forte dépendance de la multistabilité aux imperfections. Ce cas spécifique sera étudié expérimentalement dans le chapitre 2.

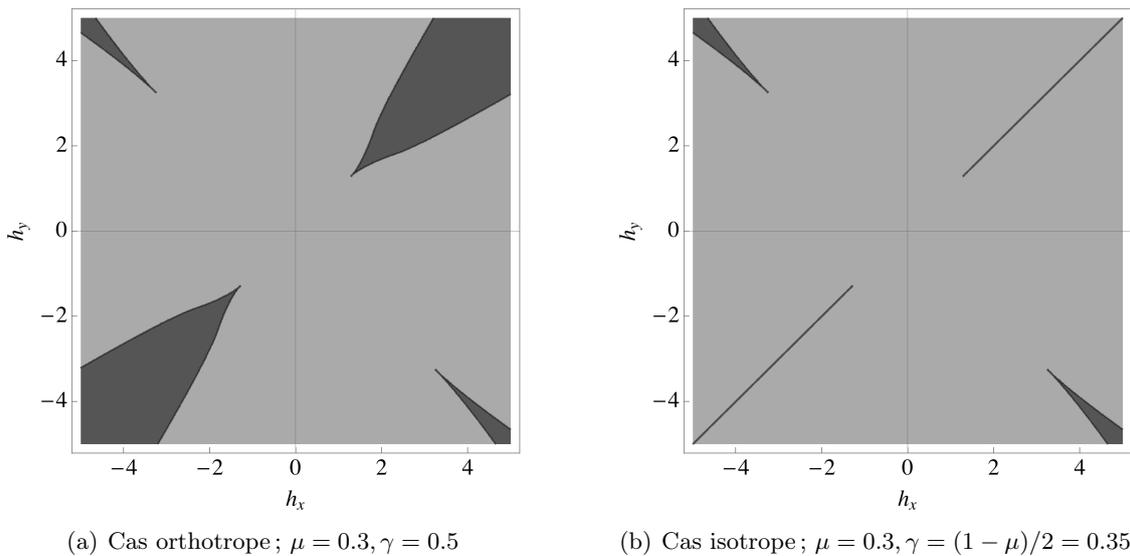


FIGURE 1.3 – Diagramme des phases représentant les régions monostables (gris clair) et bistables (gris foncé) dans les cas (a) de symétrie du carré et (b) d'isotropie.

### 1.3.2.b Cas de plaques anisotropes : $\epsilon_1 = \epsilon, \epsilon_2 = \pm\epsilon$

L'anisotropie dans les stratifiés peut être exploitée de façon intéressante dans la mesure où elle augmente considérablement le domaine des conception des coques stratifiées multistables. Néanmoins, l'introduction de ce paramètre  $\epsilon$  dans la matrice  $D$  rend le problème plus compliqué à résoudre car il n'existe pas toujours de solution analytique dans une telle situation ; en outre, s'il en existe, il n'est pas toujours assuré de trouver toutes les solutions. Un moyen de palier à cette difficulté peut être d'exploiter une méthode de perturbations dites régulières pour les équations algébriques, en supposant que le paramètre  $\epsilon$  est lié à une perturbation du cas orthotrope, ce qui permet d'avoir une estimation de la solution avec une précision acceptable lorsque l'on utilise un certain nombre de fonctions d'approximations (ordre du développement de Taylor sur  $\epsilon$ ). Toutefois, les méthodes de perturbations sont fortement limitées sur la variation de  $\epsilon$ , supposé être très petit devant les autres paramètres ( $\mu$  et  $\gamma$ ) pour que la solution soit mathématiquement acceptable. De plus, il existe des situations pour lesquelles  $\epsilon$  peut être supérieur à  $\mu$  et/ou  $\gamma$  comme le montrent les bornes sur  $\epsilon$  (1.44) et (1.45). En outre, une solution analytique via les méthodes de perturbations existe si et seulement si on connaît la solution pour  $\epsilon = 0$ , ce qui n'est également pas toujours le cas.

C'est pourquoi, pour plus de clarté, on préférera ici se focaliser directement sur une solution semi-analytique, permettant d'obtenir une solution pour toute valeur de  $\epsilon$  comprise dans son intervalle de définition. Les cas spécifiques où  $\epsilon_1 = \pm\epsilon_2 = \epsilon$  correspondent *entre autre* à la famille des stratifiés à empilements de couches unidirectionnelles (UD) composés de couches orientées à  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  ou  $90^\circ$ , d'autres orientations induisant systématiquement  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$  et donc  $\beta \neq 1$ .

#### Cas 1 : $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$

Cette classe de matériaux correspond par exemple aux composites stratifiés UD de séquence d'empilement  $[0_n^\circ, 45_n^\circ, 90_n^\circ]$ . Dans ce cadre, la variation du domaine d'admissibilité de  $\epsilon$  croit en fonction de  $n$ , modifiant  $\mu$  et  $\gamma$ .

On trace sur la figure 1.4 la variation du diagramme des phases dans le plan  $(h_x, h_y)$  pour différentes valeurs de  $\epsilon$ . On constate clairement que la contribution de  $\epsilon$  modifie de façon très prononcée les frontières de multistabilité. Lorsque  $\epsilon = \epsilon_{max}/2$ , les surfaces de bistabilité sont très faibles tandis que lorsque  $\epsilon$  atteint sa valeur critique, les surfaces de bistabilité sont très étendues. Il est ainsi possible de concevoir des coques de manière à maximiser ou minimiser l'étendue de ces surfaces.

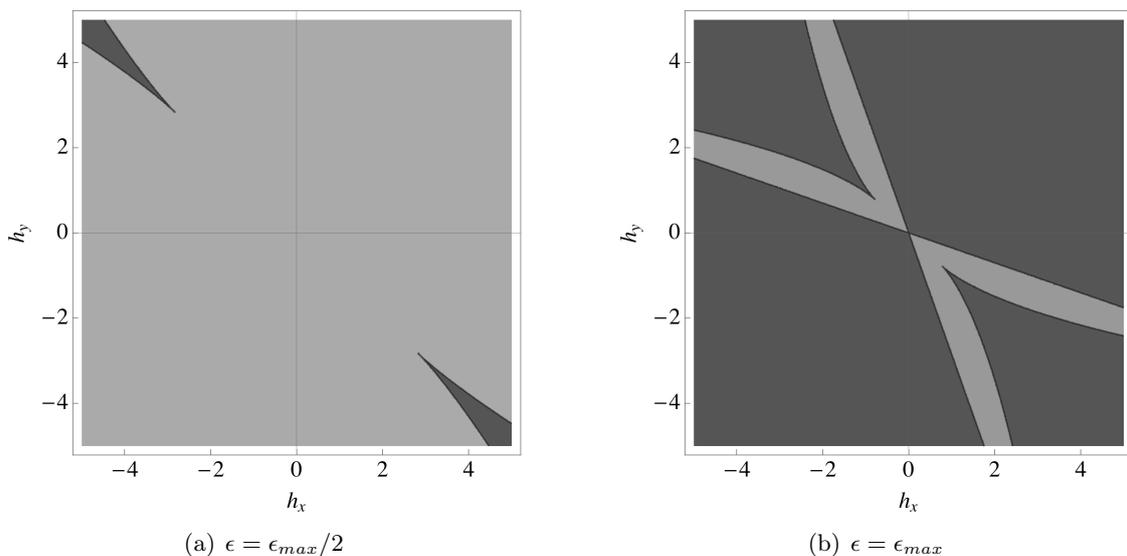


FIGURE 1.4 – Diagramme des phases dans le plan  $(h_x - h_y)$  pour différentes valeurs de  $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$  représentant les régions monostables (gris clair) et bistables (gris foncé) pour  $\mu = 0.3, \gamma = 0.5$ .

La majorité des applications est caractérisée par des courbures inélastiques sphériques pures ou déviatoriques pures *i.e.* sur les droites  $h_x = \pm h_y$ . C'est pourquoi on représente sur la figure 1.5 le diagramme des phases en fonction de  $\epsilon$  pour ces deux familles de chargement. Là encore, le choix d'un champ de courbures inélastiques sphérique ou déviatorique affecte très fortement la forme des régions de multistabilité. Le cas  $h_x = h_y$  représenté sur la figure 1.5(a) montre que pour une courbure inélastique élevée donnée (par exemple  $h = 4$ ), la variation de  $\epsilon$  entraîne une variation du nombre de configurations stables. A l'inverse, le cas  $h_x = -h_y$  (figure 1.5(b)) montre que, pour une courbure inélastique suffisamment élevée donnée, on dispose de deux configurations stables quelle que soit la variation de  $\epsilon$ . L'unique différence non-négligeable entre ces deux familles de courbures inélastiques se trouve sur le signe de courbure des configurations stables, de même signe dans le cas où  $\mathbf{h}_i$  est sphérique, et de signes opposés dans le cas déviatorique.

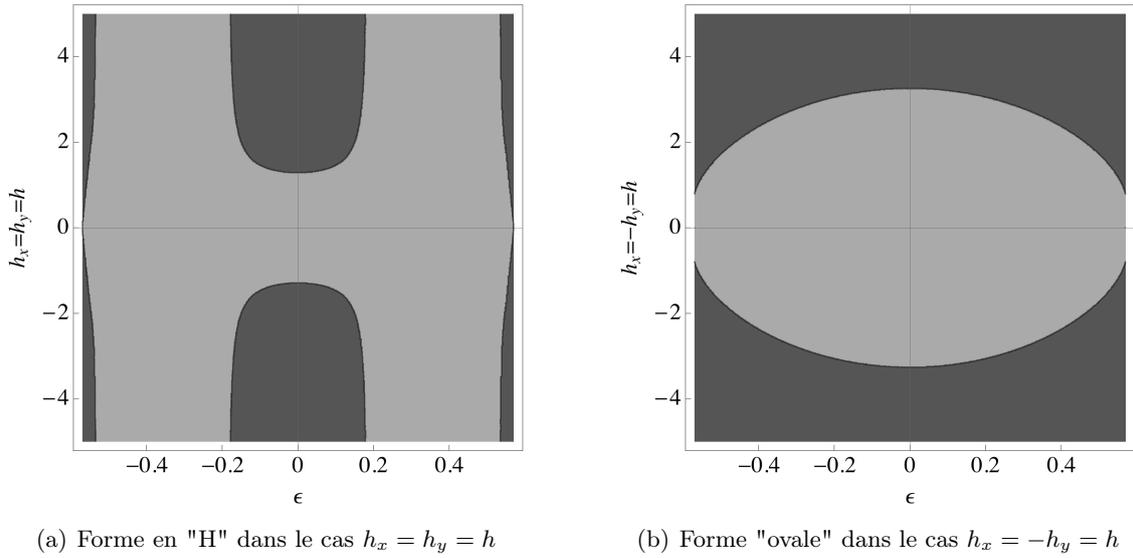


FIGURE 1.5 – Diagramme des phases représentant les régions monostables (gris clair) et bistables (gris foncé) pour  $\mu = 0.3$ ,  $\gamma = 0.5$  dans le cas  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ .

Ces diagrammes sont très utiles dans une démarche de conception lorsque l'on souhaite être en mesure de contrôler chaque aspect des propriétés de multistabilité d'une coque *i.e.* le nombre de configurations stables, la courbure inélastique minimale pour atteindre la multistabilité ou encore le signe des courbures des configurations stables recherchées, *i.e.* la forme des configurations stables. C'est là l'intérêt des modèles adimensionnés dans le sens où ces diagrammes sont valables pour toutes courbures inélastiques physiquement admissibles. Précisons cependant que le fait de varier  $\mu$  et  $\gamma$  modifie nettement la position des frontières de multistabilité et permet de disposer d'autres formes de ces diagrammes.

### Cas 2 : $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \epsilon$

Cette autre classe de matériaux correspond (parmi d'autres) aux composites stratifiés UD de séquence d'empilement  $[0_{2n}^\circ, 45_n^\circ, -45_n^\circ, 90_{2n}^\circ]$  avec  $n$  le nombre de couches. La figure 1.6 représente les régions de multistabilité associées. Les conclusions sont les mêmes que précédemment, la différence étant simplement sur le ratio entre surfaces monostables et bistables, plus élevé dans le premier cas.

Finalement, la multistabilité est toujours plus simple à mettre en évidence dans le cas d'une courbure inélastique déviatorique car il suffit simplement de franchir une "limite"  $\mathbf{h}_i^{crit}$  pour garantir la bistabilité pour toute valeur de  $\epsilon$ . Entre outre, on constate que plus l'anisotropie au travers du paramètre  $\epsilon$  est élevée, plus la courbure inélastique induisant la multistabilité diminue. Ces aspects sont très utiles dans une démarche de conception où l'on peut ajuster les paramètres d'optimisation pour garan-

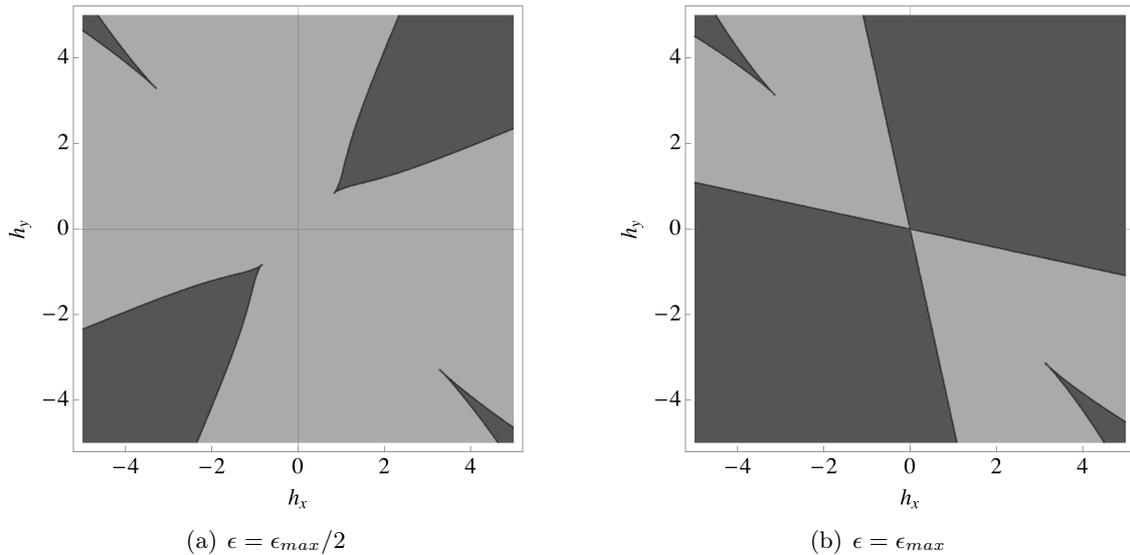


FIGURE 1.6 – Diagramme des phases dans le plan  $(h_x - h_y)$  pour différentes valeurs de  $\epsilon = \epsilon_1 = -\epsilon_2$  représentant les régions monostables (gris clair) et bistables (gris foncé) pour  $\mu = 0.3, \gamma = 0.5$ .

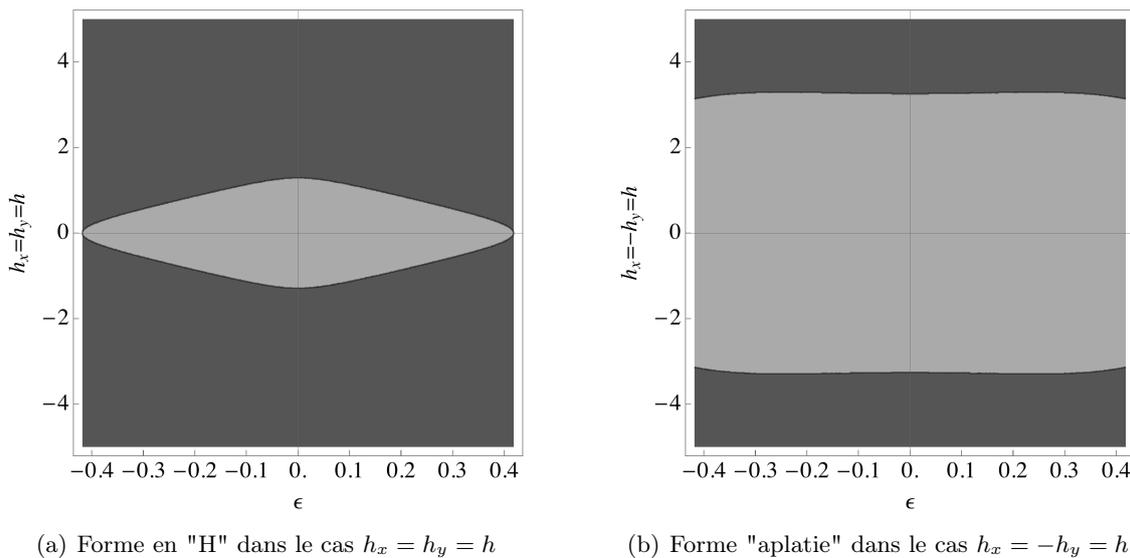


FIGURE 1.7 – Diagramme des phases représentant les régions monostables (gris clair) et bistables (gris foncé) pour  $\mu = 0.3, \gamma = 0.5$  dans le cas  $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \epsilon$ .

tir un comportement spécifique. Le couplage avec un algorithme d'optimisation structurale permettrait ainsi de concevoir des structures optimales au regard de critères et objectifs prédéfinis.

### 1.3.3 Le cas $h_0$ et $h_i$ sphériques

Nous proposons ici d'étudier la multistabilité des coques pour le cas de courbures initiales et inélastiques sphériques et uniformes. Ce cas permet de représenter de manière synthétique les résultats fondamentaux en fonction d'un nombre limité de paramètres. Par ailleurs, malgré sa simplicité, il peut avoir un intérêt dans un certain nombre d'applications, comme on le montrera dans la suite de ce travail. Par conséquent, la validation numérique sera concentrée uniquement sur les résultats issus de cette étude spécifique. On suppose ici les tenseurs de courbures initiales et inélastiques sous la forme :

$$[\mathbf{h}_0] = \begin{pmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [\mathbf{h}_i] = \begin{pmatrix} c_i & 0 \\ 0 & c_i \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

Ainsi, la multistabilité de la coque est décrite uniquement par deux paramètres scalaires que sont la courbure initiale  $c_0$  et la courbure inélastique  $c_i$ . Ce choix restreint la géométrie initiale à être une portion de demi-sphère, et la courbure inélastique est limitée par l'application d'un champ de contraintes sphérique. En outre, ces hypothèses permettent d'obtenir une solution analytique dont le détail est fourni dans les paragraphes suivants.

### 1.3.3.a Équilibres et stabilité

Sous l'hypothèse (1.46), les équations d'équilibre (ou conditions d'optimalité d'ordre 1) pour l'énergie (1.22) s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial k_x} = k_x + k_y (\det \mathbf{k} + \mu - c_0^2) - (c_i + c_0)(1 + \mu) = 0 & (1.47a) \\ \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial k_y} = k_y + k_x (\det \mathbf{k} + \mu - c_0^2) - (c_i - c_0)(1 + \mu) = 0 & (1.47b) \\ \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial k_{xy}} = k_{xy} (c_0^2 + 2\gamma - \det \mathbf{k}) = 0 & (1.47c) \end{cases}$$

En soustrayant puis sommant les deux premières équations d'équilibre, on obtient :

$$\begin{cases} (1.47a) - (1.47b) \equiv (k_x - k_y) (\det \mathbf{k} - c_0^2 + \mu - 1) = 0 & (1.48a) \\ (1.47a) + (1.47b) \equiv (\det \mathbf{k} - c_0^2 + \mu + 1) \Delta - 2(c_i + c_0)(1 + \mu) = 0 & (1.48b) \\ - (1.47c) \equiv k_{xy} (\det \mathbf{k} - c_0^2 - 2\gamma) = 0 & (1.48c) \end{cases}$$

où  $\Delta := \sqrt{4 \det \mathbf{k} + 4k_{xy}^2 + (k_x - k_y)^2}$ . La stabilité des positions d'équilibre est associée au signe de la matrice Hessienne  $H_s$  définie par :

$$H_s = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial k_x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial k_x \partial k_y} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial k_x \partial k_{xy}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial k_y \partial k_x} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial k_y^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial k_y \partial k_{xy}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial k_{xy} \partial k_x} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial k_{xy} \partial k_y} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial k_{xy}^2} \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

de telle manière que les équilibres stables sont ceux qui vérifient la condition de matrice Hessienne (1.49) définie positive (ou condition d'optimalité d'ordre 2). Son déterminant s'exprime par :

$$\begin{aligned} M_s &:= \det H_s \\ &= (c_0^2 - k_x k_y + 3k_{xy}^2 + 2\gamma) \left( (1 + k_x^2) (1 + k_y^2) - (c_0^2 - 2k_x k_y + k_{xy}^2 - \mu)^2 \right) + \\ &\quad - 2k_x k_{xy}^2 (k_y (c_0^2 + k_{xy}^2 - \mu) + k_x (1 - k_y^2)) + \\ &\quad - 2k_y k_{xy}^2 (k_x (c_0^2 + k_{xy}^2 - \mu) + k_y (1 - k_x^2)) \end{aligned} \quad (1.50)$$

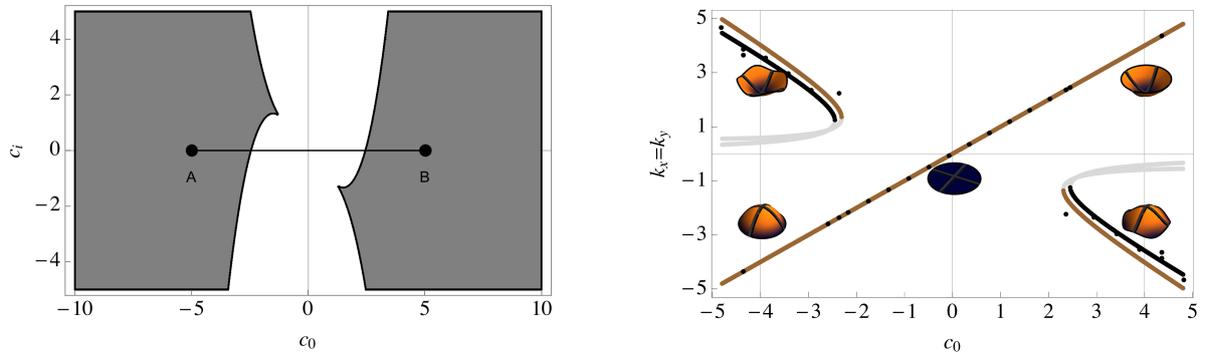
La condition de positivité de  $H_s$  peut être vérifiée au choix avec le critère de Sylvester ou le critère des valeurs propres, les plus souvent utilisés pour leur simplicité. On remarque que  $M_s$  et, en conséquence, les propriétés de stabilité des coques minces de FvK, ne dépendent pas de la courbure inélastique  $\mathbf{h}_i$  décrite ici par le paramètre scalaire  $c_i$ . Lorsque  $M_s = 0$ , au moins une position d'équilibre change de signe ; ainsi, on utilise l'équation  $M_s = 0$  pour tracer les frontières entre les différentes zones de stabilité. L'étude du système (1.48) montre que quatre différents types d'équilibres sont possibles tels que décrits ci-dessous.

### Équilibres de type I. $k_x = k_y$ et $k_{xy} = 0$

Cette condition sur les courbures résolvant simultanément les équations (1.48a) et (1.48c) correspond à des équilibres à "torsion nulle" conduisant à des configurations sphériques lorsque  $\beta = 1$ . De fait, l'équation indéterminée (1.48b) impose la résolution d'un polynôme du troisième ordre sur  $k_y$ . La résolution de ce polynôme peut conduire à une racine réelle et deux racines complexes conjuguées, ou trois racines réelles vis-à-vis du signe de son discriminant qui s'exprime par :

$$f_I(\mu) = 4c_0^6 - 54c_0c_i(1 + \mu)^2 - (1 + \mu)^2(27c_i^2 + 4\mu + 4) - 12c_0^4(1 + \mu) - 15c_0^2(1 + \mu)^2 \quad (1.51)$$

On constate que dans la région  $f_I < 0$ , il existe un unique équilibre stable correspondant à la configuration actuelle de la coque. Lorsque  $f_I > 0$ , il existe trois équilibres dont seulement deux sont stables, ces derniers correspondant à la configuration actuelle et son éverse. Lorsque  $f_I = 0$ , la configuration éverse devient instable par point tournant. En correspondance, la région  $f_I > 0$  est représentée en gris sur la figure 1.8(a) et la courbe  $f_I = 0$  trace les frontières entre zones monostable et bistables.



(a) Diagramme de stabilité dans le cas I; zone monostable (blanc) et bistable (gris)

(b) Variations de la courbure moyenne sur le chemin A - B et les différentes configurations stables associées

FIGURE 1.8 – (a) Diagramme des phases dans le plan  $(c_0, c_i)$  pour une coque à symétrie du carré dans le cas I avec  $\mu = 0.5$  et (b) variations de la courbure moyenne de la coque en fonction de la courbure initiale lorsque  $c_i = 0$ . Les points noirs correspondent aux simulations par éléments finis sur Abaqus, les traits noirs et marrons correspondent respectivement aux modèles UC et QC. Les traits gris représentent les équilibres instables.

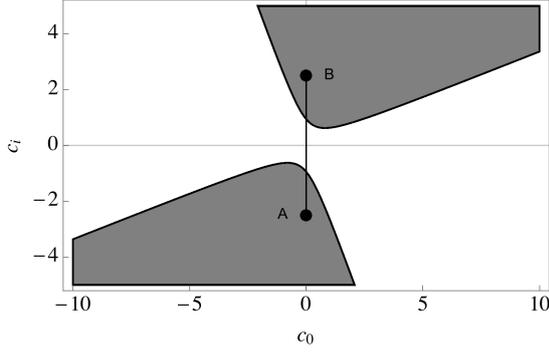
### Équilibres de type II. $\det k = c_0^2 + 1 - \mu > 0$ et $k_{xy} = 0$

Ces équilibres correspondent à des configurations "sans torsion" pour lesquelles la courbure Gaussienne est attirée et positive. En combinant la condition de stationnarité (1.48b) et la frontière de stabilité (1.50), on trouve l'expression :

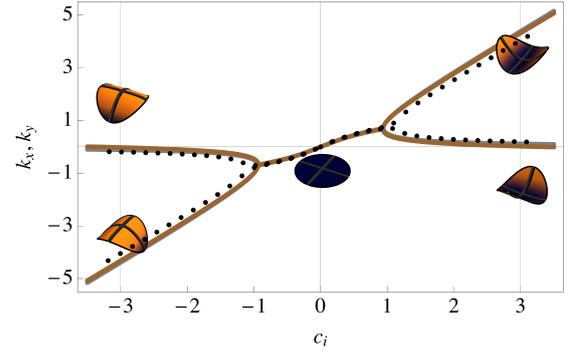
$$f_{II}(\mu) = (\mu(c_0 + c_i) - c_0 + c_i)(\mu(c_0 + c_i) + 3c_0 + c_i) - 4(1 - \mu) \quad (1.52)$$

On constate de façon claire que ces équilibres sont stables uniquement lorsque  $f_{II} > 0$ . Ils sont à l'origine d'équilibres de type I à travers une bifurcation de type *pitchfork* sur la frontière  $f_{II} = 0$ . En concordance, la région  $f_{II} > 0$  est représentée en gris sur la figure 1.9 où deux configurations stables bifurquées sont possibles, et la courbe  $f_{II} = 0$  représente les frontières entre zones monostable et bistables.

**Remarque 2 :** Pour les équilibres de type I et II, les frontières de multistabilité (1.51) et (1.52) ne dépendent pas du module de cisaillement  $\gamma$  et ne dépendent ainsi que du coefficient de Poisson  $\mu$ .



(a) Diagramme de stabilité dans le cas II ; zone monostable (blanc) et bistable (gris)



(b) Variations de la courbure moyenne sur le chemin A – B et les différentes configurations stables associées

FIGURE 1.9 – (a) Diagramme des phases dans le plan  $(c_0, c_i)$  pour une coque à symétrie du carré dans le cas II avec  $\mu = 0.5$  et (b) variations de la courbure moyenne de la coque en fonction de la courbure inélastique lorsque  $c_0 = 0$ . Les points noirs correspondent aux simulations par éléments finis sur Abaqus, les traits noirs et marrons correspondent respectivement aux modèles UC et QC.

De fait, ces diagrammes restent génériques pour tous matériaux à  $\beta = 1$  et paramétrés par le même coefficient de Poisson, quelle que soit la géométrie, pourvu que la coque soit uniformément courbée.

### Équilibres de type III. $k_x = k_y$ et $\det \mathbf{k} = c_0^2 + 2\gamma$

Ces équilibres correspondent à des configurations "avec torsion" pour lesquelles la courbure Gaussienne est assignée et positive. On vérifie avec la condition de stabilité que ces équilibres peuvent être stables si et seulement si :

$$0 < \gamma < \gamma_{iso} = \frac{1 - \mu}{2} \leq 1 \quad (1.53)$$

c'est-à-dire pour des coques non-isotropes à *faible* rigidité de cisaillement. Dans un tel cas de figure, les frontières de multistabilité sont désormais dépendantes de  $\gamma$ , suivant l'expression :

$$f_{III}(\mu, \gamma) = \frac{4(2\gamma + \mu - 1)(2\gamma(2\gamma + \mu + 1)^2 + 4\gamma c_0^2(\gamma + \mu + 1) - 2c_0 c_i(\mu + 1)^2 - c_i^2(\mu + 1)^2)}{2\gamma + \mu + 1} \quad (1.54)$$

### Équilibres de type IV. $\det \mathbf{k} = c_0^2 + 1 - \mu \equiv c_0^2 + 2\gamma$

Ces équilibres, correspondant à un cas particulier du cas III, ne sont possibles que si  $2\gamma = (1 - \mu)$  *i.e.* pour des coques isotropes. Les configurations associées ont une courbure Gaussienne attitrée ; cependant, la condition sur  $\det \mathbf{k}$  résolvant simultanément les équations (1.48a) et (1.48c), la courbure de torsion  $k_{xy}$  et la différence  $(k_x - k_y)$  peuvent être choisies arbitrairement pourvu que :

$$4k_{xy}^2 + (k_x - k_y)^2 = (c_0 + c_i)^2 (1 + \mu)^2 - 4(c_0^2 + 1 - \mu) \quad (1.55a)$$

et

$$(k_x + k_y) = (c_0 + c_i)(1 + \mu) \quad (1.55b)$$

On dispose de fait d'un ensemble unidimensionnel de configurations (1.55) partageant le même niveau énergétique. La frontière de stabilité  $M_s$  correspondante est ainsi inexistante ; c'est-à-dire que, lorsque  $\gamma = \gamma_{iso} = (1 - \mu)/2$  :

$$f_{III}(\mu, \gamma_{iso}) = 0 \quad (1.56)$$

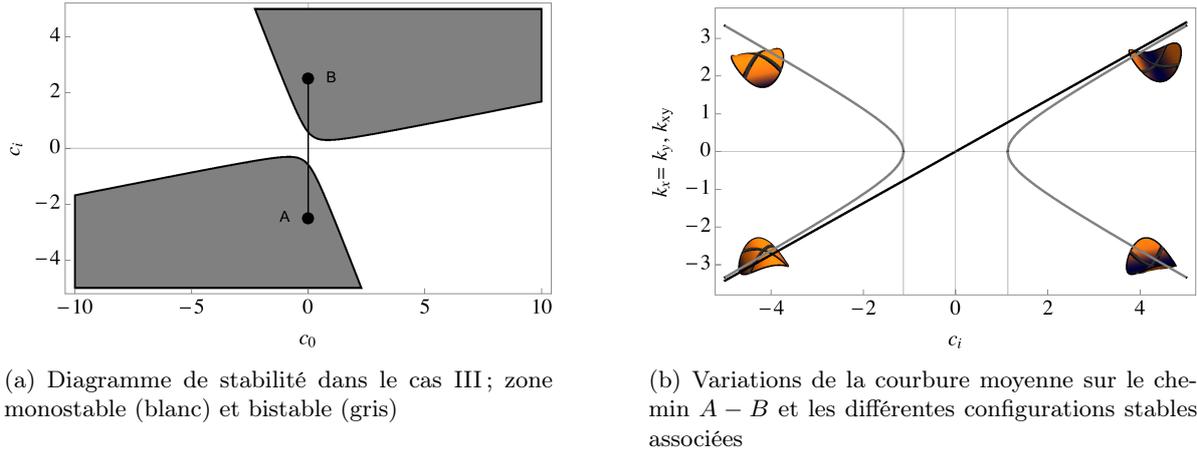


FIGURE 1.10 – (a) Diagramme des phases dans le plan  $(c_0, c_i)$  pour une coque à symétrie du carré dans le cas III avec  $\mu = 0.5$ ,  $\gamma = (1 - \mu)/4$  et (b) variations de la courbure moyenne de la coque en fonction de la courbure inélastique lorsque  $c_0 = 0$ . Les traits noirs et gris correspondent à  $k_x = k_y$  et  $k_{xy}$ , respectivement.

En réalité ce type de coque se comporte comme un mécanisme à rigidité nulle (*zero-stiffness shell*) *i.e.* toutes les configurations cylindriques de la coque sont stables et de même niveau énergétique (*c.f.* figure 1.11); le niveau énergétique de la coque est ainsi invariant vis-à-vis de la courbure de torsion  $k_{xy}$  (ou  $\theta$  en coordonnées polaires). Ce type de comportement a déjà été souligné par Seffen and Guest (2011) et Guest et al. (2011) sous le nom de *neutrally-stable shells*. Dans la pratique, l'unique moyen d'obtenir ce comportement est de disposer d'une coque parfaitement isotrope et soumise à une courbure inélastique parfaitement sphérique, si bien que dans le cas contraire la coque est nécessairement (fortement) monostable comme on le montrera expérimentalement dans le chapitre 2.

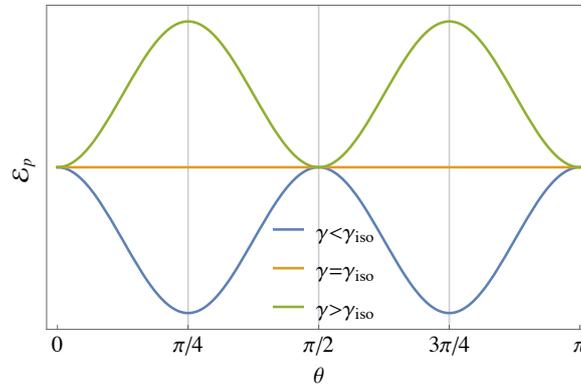


FIGURE 1.11 – Variations énergétiques des configurations cylindriques d'une coque bistable à symétrie du carré vis-à-vis de  $\gamma$ .

**Remarque 3 :** Les cas II et III sont semblables de par la forme de leurs domaines de multistabilité respectifs (*c.f.* figures 1.9(a) et 1.10(a)). Néanmoins, ils comportent une différence majeure du fait que le cas II résulte de l'hypothèse de courbures de torsions  $k_{xy}$  nulles tandis que le cas III permet des configurations avec torsion. D'ailleurs, pour ce dernier, les régions de multistabilité dépendent explicitement du module de cisaillement  $\gamma$ , celui-ci étant l'unique paramètre contrôlant l'anisotropie de la coque lorsque  $\beta = 1$ . Ainsi, les équilibres correspondant aux cas I et II, tous deux "sans torsion", peuvent co-exister : si on considère ces deux cas simultanément, le diagramme de stabilité présente une plus grande variété de configurations stables possibles, menant à des cas de coques tristables.

## 1.3.3.b Co-existence des équilibres de types I et II

Lorsque l'on combine les cas I et II, le comportement multistable devient sensiblement plus riche et met en évidence des régions de bistabilité et tristabilité comme le montre la figure 1.12, obtenue en combinant les figures 1.8(a) et 1.9(a). Seule la moitié du diagramme est représentée ( $c_i > 0$ ) du fait que pour  $c_i < 0$ , l'effet de  $(c_0, -c_i)$  est équivalent à l'effet de  $(-c_0, c_i)$ . Sur ce diagramme, on constate qu'il existe une zone de domaine monostable (blanc), deux familles distinctes de domaines bistables (gris clair) et une famille de domaines tristables (gris foncé). Les domaines bistables à "configurations sphériques" ( $c_i$  proche de 0) sont obtenus en assignant à la coque une courbure initiale suffisamment élevée (en valeur absolue) pour que la configuration stable éverse existe, *i.e.* en choisissant une portion de sphère avec un rayon suffisamment petit pour pouvoir franchir la frontière du domaine monostable  $f_I = 0$ . A l'inverse, le domaine bistable à "configurations cylindriques" ( $c_0$  proche de 0) est obtenu en appliquant à une coque peu profonde une courbure inélastique sphérique suffisamment élevée pour que cette dernière bifurque vers deux configurations stables quasi-cylindriques au travers d'une bifurcation de type *pitchfork*. Finalement, le comportement tristable est obtenu en combinant ces deux aspects, c'est-à-dire en appliquant à une coque une courbure initiale suffisamment élevée et une courbure inélastique (par exemple par effet de thermoélasticité) suffisamment élevée également. De cette manière, la configuration sphérique actuelle de la coque bifurque vers deux configurations quasi-cylindriques comme illustré sur la figure 1.12. Les trois configurations stables de la coque sont les deux états quasi-cylindriques ainsi obtenus et l'état éverse sphérique ; rappelons que la convention adoptée ici impose courbures principales et déplacement transverse de la coque de même signe.

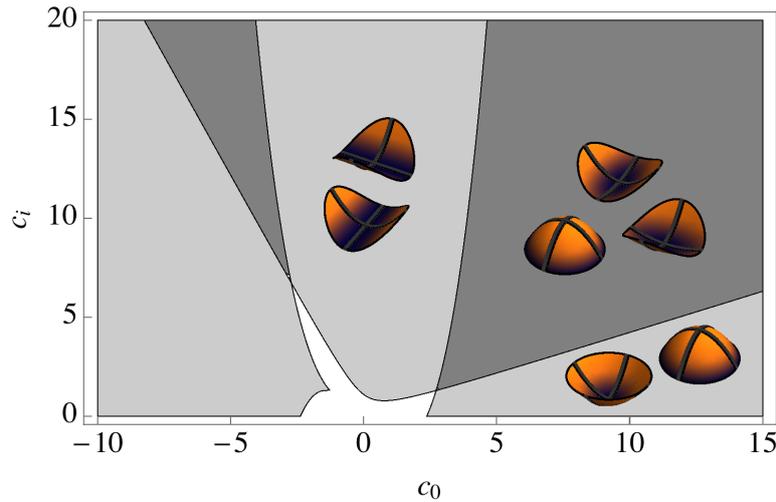


FIGURE 1.12 – Diagramme de multistabilité pour toute coque à symétrie du carré paramétrée par  $\mu = 0.4$  par combinaison des cas I et II. Le diagramme montre les régions monostable (blanc), bistables (gris clair) et tristables (gris foncé).

L'autre aspect intéressant de ce diagramme est dû à la variation de ses frontières, paramétrée uniquement par le coefficient de Poisson  $\mu$  du matériau. De fait, pour  $\mu$  fixé, il reste générique pour tout matériau orthotrope à symétrie du carré, classe pour laquelle le cas limite d'isotropie est compris, ce qui constitue une très large gamme de matériaux. Quelle que soit la valeur de  $\gamma$ , la forme des frontières et des configurations stables reste la même, l'impact du cisaillement  $\gamma$  étant essentiellement ciblé sur la forme du trajet énergétique entre les configurations stables (*c.f.* figure 1.11). En somme, ce diagramme généralise au cas de l'orthotropie les travaux de [Seffen and Guest \(2011\)](#) sur des coques isotropes.

La figure 1.13 décrit l'évolution des frontières  $f_I$  et  $f_{II}$  en fonction de  $\mu$  ; on remarque clairement que lorsque  $\mu$  approche ses valeurs critiques ( $\mu = \pm 1$ ), les positions des frontières de multistabilité dans l'espace des chargements sont minimales ou maximales. Finalement, ce diagramme montre que,  $\forall \mu \in ]-1, 1[$ , la tristabilité est attestée par le modèle UC.

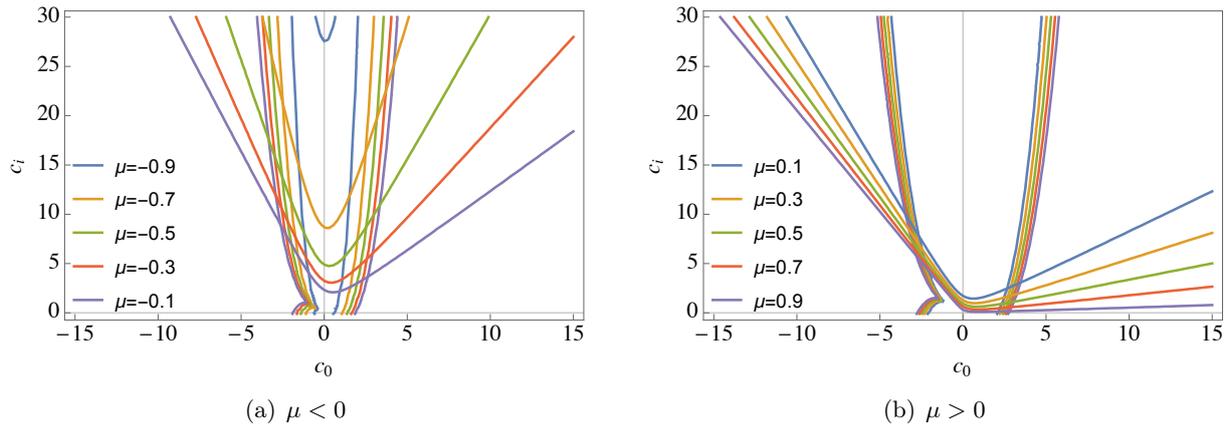


FIGURE 1.13 – Evolution du diagramme des phases en fonction de  $\mu$ .

Les éléments issus de cette étude spécifique s'appliquant à une très large classe de matériaux et chargements, ils feront l'objet de la mise en place de critères de conception et fabrication de coques multistables, détaillés dans le [chapitre 2](#).

**Remarque 4 :** Le cas étudié ici est différent de ceux traités par [Vidoli and Maurini \(2008\)](#) et par [Coburn et al. \(2012\)](#). Dans les travaux de [Vidoli and Maurini \(2008\)](#), la tristabilité était obtenue en fixant  $\mathbf{h}_i = \mathbf{0}$  et en assignant à une coque orthotrope une courbure initiale  $h_0^x$  suffisamment plus grande que  $h_0^y$  avec  $h_0^{xy} = 0$ . Intrinsèquement, la tristabilité est maximisée lorsque la matrice de rigidité orthotrope atteint la condition de dégénérescence  $\nu^2 \rightarrow \beta$ . Dans les travaux de [Coburn et al. \(2012\)](#), ces résultats ont été utilisés pour démontrer expérimentalement la faisabilité d'une telle structure, montrant une très bonne concordance entre modèle UC, simulations numériques et expérience.

### 1.3.3.c Validation numérique

La figure [1.12](#) montre qu'une coque orthotrope à laquelle on a assigné une courbure initiale sphérique suffisamment élevée peut devenir tristable lorsque la courbure inélastique sphérique est également suffisamment élevée, les frontières étant sensiblement modifiées avec  $\mu$ . Toutefois, une validation numérique est nécessaire et importante de manière à attester de l'existence de ces configurations stables d'une part, et voir les limites des hypothèses de courbures uniformes et quadratiques d'autre part.

Pour ce faire, nous avons réalisé des simulations par éléments finis dans le code de calcul Abaqus pour chaque frontière de ce diagramme, ce qui amène au choix du type de modélisation non-linéaire. Dans la pratique, plusieurs types de non-linéarité peuvent être rencontrés :

1. Les non-linéarités matérielles dues à la loi de comportement, par exemple hyperélastique ;
2. Les non-linéarités géométriques qui se manifestent dans les problèmes mettant en évidence des grands déplacements, des grandes rotations et des grandes déformations ;
3. Les non-linéarités liées à l'évolution des conditions aux limites. Ce type de non-linéarité apparaît en particulier dans les problèmes de contact et de frottement entre solides.

Ici, on se focalise sur les non-linéarités géométriques, qui sont à la base du comportement des coques minces. Les simulations sont menées via l'élément fini S4R qui est un élément de coque quadrangulaire linéaire à 4 nœuds et 5 degrés de liberté sous intégration réduite selon le schéma d'intégration Full Newton. Cet élément fini est remarquablement intéressant car il est capable de modifier la prise en compte du cisaillement transverse à mesure que l'on augmente l'épaisseur de la coque. Les simulations sont effectuées sous l'hypothèse de comportement non-linéaire géométrique (\*NLGEOM) *i.e.* avec l'hypothèse de grands déplacements et petites déformations, nécessaire pour capturer la multistabilité. Cette option est utilisée pour simuler *entre autre* la plasticité, la viscoélasticité ou même le comportement post-flambage de structures élancées.

Toutefois, ce type de modélisation se base sur un schéma non-linéaire complet et nous oblige à abandonner l’hypothèse de courbures uniformes ou même quadratiques. En effet, la modélisation non-linéaire géométrique est capable de capturer toutes formes complexes et/ou profondes pourvu que les déformations restent admissibles. A l’inverse des modèles de coques peu profondes pour lesquels la configuration actuelle de la coque est calculée en référence à sa configuration initiale, toutes deux supposées confondues, le code Abaqus basé sur la non-linéarité géométrique sort du domaine d’admissibilité de l’hypothèse de petites perturbations (hpp) et met à jour à chaque itération la configuration initiale de la coque. Autrement dit, la configuration initiale pour un pas de calcul donné correspond à la configuration calculée au pas précédent en référence à la configuration libre de contraintes. De cette manière, il est possible de déterminer précisément la solution même lorsque de grands déplacements ou de grandes courbures sont envisagés. En résumé, la non-linéarité vient du fait que le domaine bidimensionnel  $\mathcal{S}$  qui constitue la forme de la coque devient une inconnue du problème à chaque itération. Sur le plan mathématique, la formulation variationnelle s’effectue sur un domaine connu  $\mathcal{S}_0$ , par l’introduction des tenseurs non-linéaires de contraintes de Piola-Kirchhoff et de déformations de Green-Lagrange. Au niveau local discrétisé, le système non-linéaire nécessite alors le recours à une technique de linéarisation, telle que la méthode de Newton-Raphson, permettant de manière itérative d’obtenir une solution convergée.

C’est pourquoi il est particulièrement intéressant et utile de confronter les modèles réduits UC et QC, mathématiquement adaptés pour des coques minces peu profondes et basés sur une non-linéarité du premier ordre, aux simulations non-linéaires—complet du code Abaqus. Les simulations sont menées sur deux matériaux de propriétés mécaniques fortement différentes. Le premier matériau est un composite stratifié en Verre/Époxyde de stratification remarquable  $[+45^\circ, -45^\circ_2, +45^\circ, -45^\circ, +45^\circ_2, -45^\circ]$ . Cette stratification est particulière car le comportement est découplé ( $\bar{B} = 0$ ) et orthotrope en membrane et flexion. De plus, les comportements de membrane et flexion sont homogènes. Pour celui-ci, les simulations sont achevées sur des formes carrées et circulaires, respectivement de cotés et diamètre 400 mm et d’épaisseur 1 mm. Les propriétés du monocouche homogène équivalent sont fournies dans le tableau 1.1. Le second matériau étudié est un disque bilame de silicone de diamètre 200 mm, constitué de deux couches de silicone, chacune d’épaisseur 1 mm et de propriétés élastiques légèrement différentes.

→ Propriété	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
↓ Matériau	(GPa)	(GPa)	(GPa)		( $10^{-5}/^\circ\text{C}$ )	( $10^{-5}/^\circ\text{C}$ )
Verre/Époxy	24.26	24.26	16.02	0.41	1.024	1.024
Silicone E32	$1.36 \times 10^{-3}$	$1.36 \times 10^{-3}$	$4.55 \times 10^{-4}$	0.5	—	—
Silicone E8	$186 \times 10^{-6}$	$186 \times 10^{-6}$	$62.0 \times 10^{-5}$	0.5	—	—

TABLEAU 1.1 – Propriétés des matériaux utilisés pour les simulations numériques du diagramme des phases de la figure 1.12.

La figure 1.14 représente les frontières du diagramme des phases pour ces deux familles de matériaux ; la méthode utilisée pour déterminer chaque frontière est détaillée dans le paragraphe 1.3.3.d. On remarque que pour chacun des deux cas, la forme des frontières est très bien capturée par le modèle UC vis-à-vis des simulations par éléments finis. En particulier, la prédiction des frontières de monostabilité du modèle UC est remarquablement précise et reste systématiquement inférieure à 3%.

Toutefois, les frontières des domaines tristables calculées numériquement sont assez espacées des modèles UC et QC, l’erreur de prédiction du modèle UC étant de l’ordre de 14% en norme. Cette déficience est due à un phénomène de flambement local de la coque rencontré dans les simulations numériques. Spécifiquement, on comprend qu’il y a une localisation de la courbure de torsion (*c.f.* figure 1.15) entraînant une perte de stabilité de la configuration sphérique, phénomène que les hypothèses de courbures uniformes ou quadratiques ne sont pas capables de prédire. En conséquence le calcul s’arrête ; les points reportés sur la figure 1.14 correspondent à la valeur maximale de  $c_i$  pour laquelle une solution EF converge. Il apparaît que la localisation est plus prononcée sur les coques carrées, ce qui explique

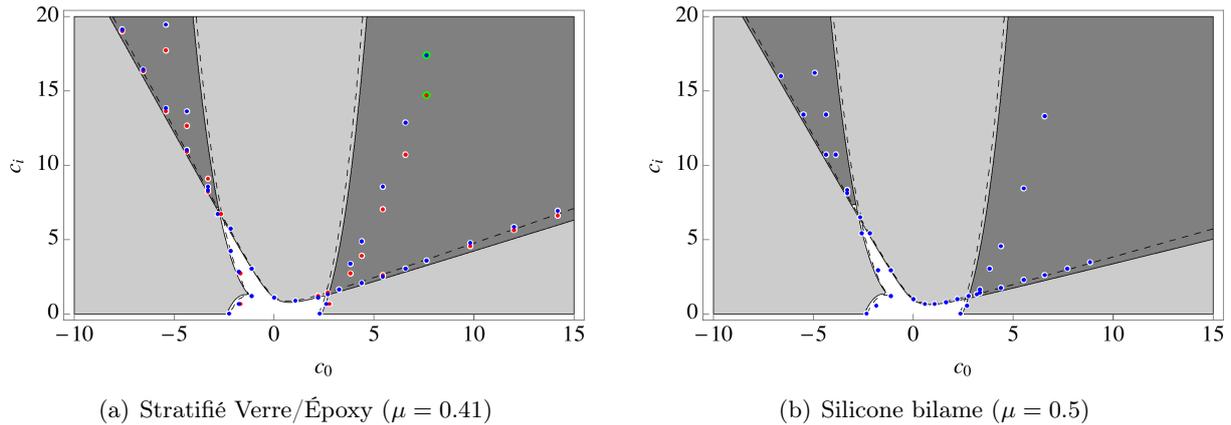


FIGURE 1.14 – Diagramme des phases pour différents types de matériaux. Les traits continus et discontinus représentent les modèles UC et QC, respectivement. Les points rouges et bleus représentent des géométries carrées et circulaires simulées par éléments finis.

pourquoi ces dernières deviennent instables pour de plus faibles valeurs de  $c_i$  en comparaison avec des coques circulaires. Un moyen de palier partiellement à cette déficience numérique serait d'utiliser une méthode de stabilisation proposée dans Abaqus. Cela consiste à ajouter un terme d'amortissement virtuel contrôlé dans les équations d'équilibre de manière à limiter légèrement ce phénomène d'instabilité. Cela permet ainsi d'avoir une solution plus proche de la théorie mais cette méthode n'est pas utilisée ici car il est difficile d'affirmer que la solution ainsi calculée correspond à la solution réelle.

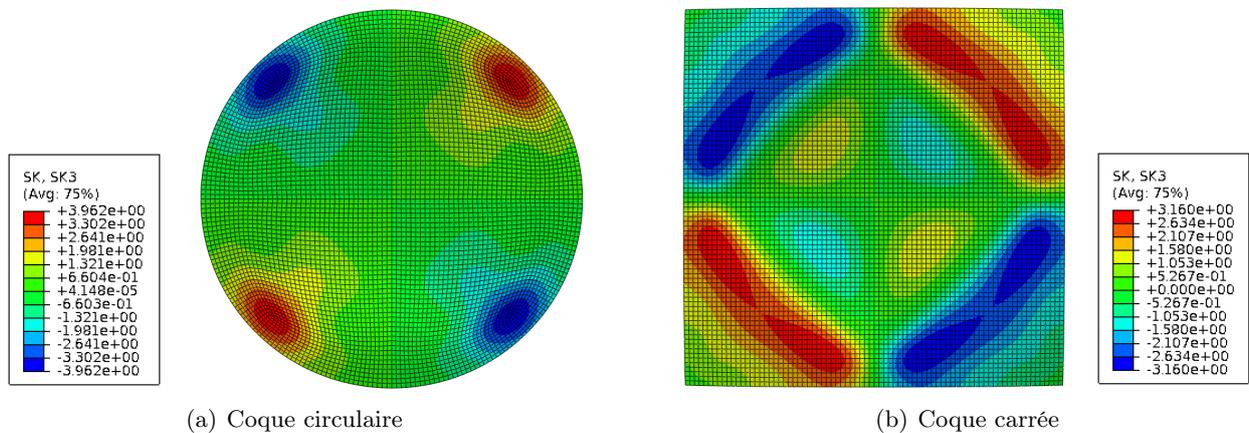
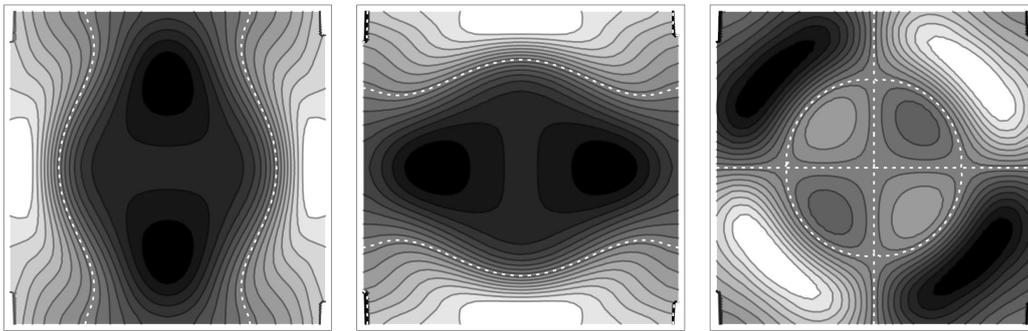


FIGURE 1.15 – Champ de courbures  $k_{xy}$  lorsque la coque devient instable, correspondant aux points (à fond) verts de la figure 1.14(a).

La figure 1.16 montre les formes théoriques et numériques d'une coque tristable dans le domaine ( $c_0 > 0, c_i > 0$ ). Les configurations bifurquées sont très bien reproduites par les deux modèles. En revanche, on note une nette différence de prédiction de la configuration éverse entre les deux modèles théoriques; cette forme est en effet plus complexe à capturer car soumise à un champ de contraintes bien plus important, d'une part la courbure inélastique positive et d'autre part le changement de signe des courbures qui requiert une énergie importante. C'est là une limite de l'hypothèse de courbures uniformes, très adaptée à des formes cylindriques ou sphériques simples mais incapable de prédire les effets de bord et limitée sur des formes complexes. Cependant, le modèle UC est plus précis que le modèle QC pour déterminer le niveau de courbures sur un trajet de déformations comme on peut le noter sur les figures 1.8(b) et 1.9(b).



(a) Configurations d'une coque tristable



(b) Variations de la courbure simulée par éléments finis

FIGURE 1.16 – (a) Configurations d'une coque tristable dans le domaine  $c_0 > 0, c_i > 0$  prédites par le modèle UC (jaune) et QC (marron). Les formes calculées par éléments finis ne sont pas représentées car presque confondues avec le modèle QC. (b) Variations de la courbure moyenne simulées par éléments finis ( $k_x, k_y, k_{xy}$ ) de la configuration éverse (sphérique).

Finalement, la figure 1.17 montre la variation des courbures pour différentes valeurs de  $c_0$  de manière à comparer les solutions du modèle UC et les simulation EF sur un trajet de déformation. Là encore, le modèle UC est capable de prédire avec une précision remarquable la variation des courbures de la coque. Les mêmes graphes ont été effectués sur le silicone bilame et montrent des résultats identiques.

#### 1.3.3.d Identification des frontières de stabilité de coques multistables via la simulation numérique par éléments finis

Sur la figure 1.12, nous résumons les prédictions analytiques, déterminées via les modèles UC et QC, des frontières de stabilité de coques multistables à symétrie du carré. Ces résultats théoriques sont comparés aux simulations par éléments finis dans une optique de validation numérique. On montre dans ce paragraphe la méthodologie qui a été utilisée pour déterminer ces frontières indépendamment, telles que représentées sur la figure 1.18.

Dans les modèles UC et QC, la coque est supposée libre, c'est-à-dire qu'on ne suppose aucune conditions aux limites cinématiques ou contribution de travaux des forces extérieures. Toutefois, dans les simulations, il est nécessaire de recourir à des chargements de type force ponctuelle, linéique, ou déplacement imposé, afin d'effectuer la transition d'une position stable à une autre, et ainsi pouvoir vérifier leur existence. Ceci étant, ces types de sollicitation ne sont utilisés que dans une étape de transition de stabilité et n'affectent en rien la comparaison avec les modèles théoriques, car on ne compare aucunement les trajets de déformation mais uniquement l'existence des positions stables

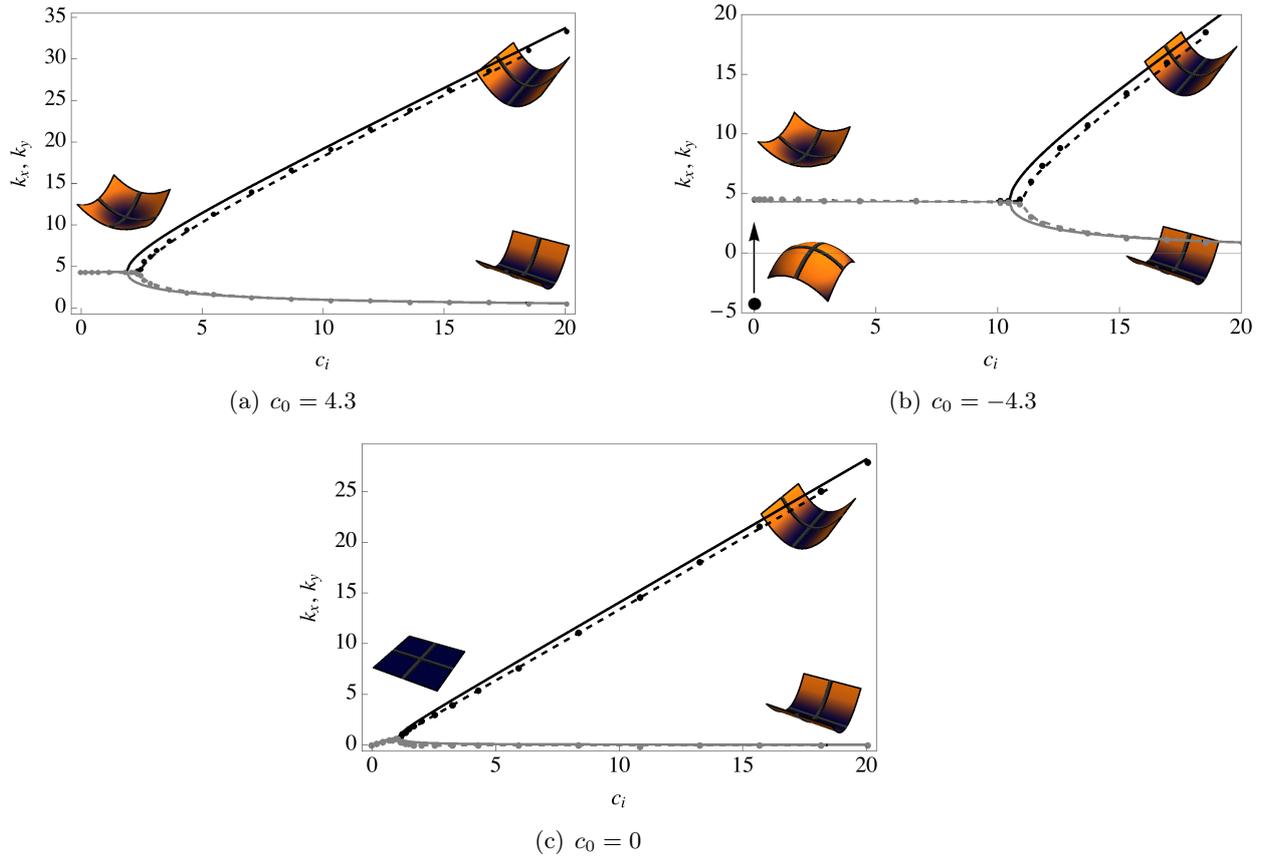


FIGURE 1.17 – Variations de la courbure moyenne de la coque (noir :  $k_x$ , gris :  $k_y$ ) en fonction de la courbure inélastique  $c_i$  pour différentes valeurs de  $c_0$ . Les traits continus représentent le modèle UC ; les points et traits discontinus représentent les simulations par éléments finis sur des coques circulaires et carrées, respectivement.

et leurs domaines de stabilité dans l'espace des courbures initiale et inélastique. De fait, dans les simulations numériques, seul le nœud central de la coque est bloqué de manière à éviter les éventuels mouvements de corps rigides.

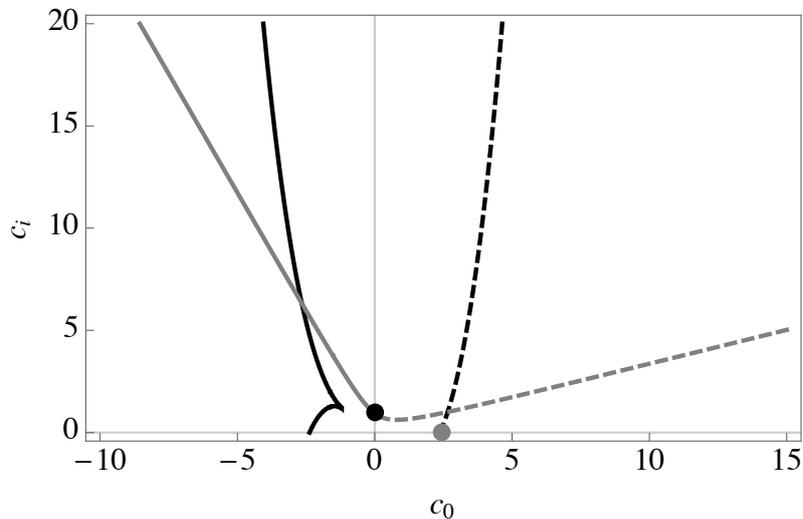
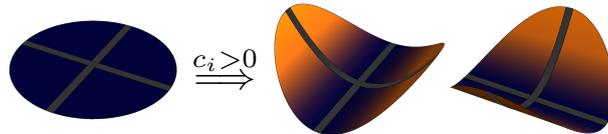


FIGURE 1.18 – Diagramme des phases d'une coque à symétrie du carré pour  $\mu = 0.5$ .

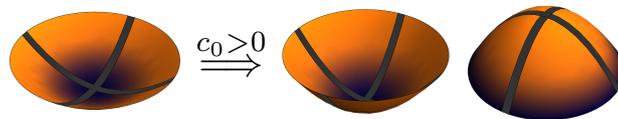
Pour reproduire le diagramme, les deux seuls paramètres variables sont la courbure initiale  $c_0$  et la courbure inélastique  $c_i$  selon leur définition établie dans la section 1.3.3. Différents niveaux de courbure initiale correspondent simplement à différentes surfaces paraboliques de la coque  $\frac{c_0}{R_0}(x^2 + y^2)$ , où  $R_0$  est le rayon caractéristique. Modifier  $c_0$  requiert la construction d'un nouveau maillage pour la configuration initiale, libre de contraintes. A titre d'exemple, pour les géométries circulaires du silicone modélisé, le nombre d'éléments varie de 1456 (9114 d.d.l) pour un disque ( $c_0 = 0$ ) à 1828 (11346 d.d.l) pour la coque la plus profonde considérée ( $c_0 = 9$ ). Différents niveaux de courbure inélastique sont induits par l'application d'un gradient de température  $\Delta T$  à la coque de manière à rester en consistance avec un champ de contraintes sphérique.

Du point de vue opérationnel, nous avons fixé un ensemble de valeurs de  $c_0$  et, pour chaque  $c_0$ , nous avons cherché la configuration éverse (si elle existe) en appliquant des déplacements imposés aux extrémités de la coque à  $c_i=0$ . Il apparait clairement dans les simulations qu'il existe un ensemble de valeurs de  $c_0$  ( $c_0 \in [-c_0^*, c_0^*]$ ) où la configuration éverse est instable. En concordance, en partant de chaque configuration naturelle et de chaque configuration éverse, nous avons progressivement augmenté la valeur de  $c_i$  (en pratique le gradient de température  $\Delta T$ ) jusqu'à ce que la stabilité soit modifiée (instabilité ou bifurcation), marquant ainsi les valeurs critiques de courbures inélastiques induisant une bifurcation des courbures ou une perte d'équilibre ; dans ce dernier cas, la simulation diverge.

**Intersection entre frontières continue et discontinue grises :** ce point correspond à la détermination de  $c_i^*$ . En partant d'une structure plate ( $c_0 = 0$ ), nous appliquons une courbure inélastique sphérique  $c_i$  jusqu'à trouver la valeur de  $c_i^*$  induisant une bifurcation de type *pitchfork* vers deux configurations stables cylindriques.



**Intersection entre la frontière discontinue noire et l'axe horizontal :** ce point correspond à la détermination de  $c_0^*$ . En partant d'une coque peu profonde, nous imposons des déplacements sur les bords de la coque de manière à trouver la configuration éverse. On répète les simulations en augmentant la valeur de  $c_0$  jusqu'à ce que la configuration éverse devienne stable.



**Frontière discontinue grise :** en partant d'une coque sphérique munie d'une courbure initiale  $c_0 > 0$ , nous appliquons une courbure inélastique  $c_i$  jusqu'à obtenir la valeur correspondant à une bifurcation de type *pitchfork* de la configuration naturelle vers deux configurations quasi-cylindriques. La coque possède ainsi trois configurations stables.



**Frontière discontinue noire :** en partant d'une coque sphérique munie d'une courbure initiale  $c_0 > 0$ , nous déterminons tout d'abord la configuration éverse. Nous appliquons ensuite une courbure inélastique  $c_i$  positive jusqu'à ce que cette dernière devienne instable. En effet, au dessus de la frontière noire discontinue, la configuration éverse n'est plus stable. La tristabilité est attestée entre les frontières discontinues noire et grise.

**Frontière continue grise :** en partant d'une coque sphérique munie d'une courbure initiale  $c_0 < 0$ , on applique une courbure inélastique  $c_i$  jusqu'à ce que cette dernière devienne instable pour les mêmes raisons évoquées dans le cas précédent.



**Frontière continue noire :** en partant d'une coque sphérique munie d'une courbure initiale  $c_0 < 0$ , nous cherchons la configuration éverse puis nous appliquons à cette dernière une courbure inélastique  $c_i$  jusqu'à obtenir une bifurcation de type *pitchfork* vers deux configurations quasi-cylindriques.

### 1.3.3.e Conclusion

Compte tenu des simulations effectuées, quelques éléments de conclusion peuvent être apportés :

1. Les modèles UC et QC, limités en théorie à des coques minces et peu profondes, sont capables de reproduire correctement la forme du diagramme des phases, même lorsque la coque devient très profonde. La détermination du niveau de courbure de la coque le long d'un trajet de chargement est également très bien prédite par les modèles. Les simulations numériques sur des matériaux très différents ont permis de valider convenablement les deux modèles sur ces aspects.
2. Le modèle UC fournit des indications précises sur la multistabilité des coques, même pour de grandes courbures initiales et inélastiques, et ce malgré l'hypothèse très simple de courbures uniformes. En particulier, les régions de monostabilité sont précises à 3% au regard des simulations numériques. On note que cela reste vrai même lorsque la coque quitte son domaine d'admissibilité ou lorsqu'elle passe outre l'hypothèse d'uniformité. L'absence de prise en compte de la géométrie (circulaire, triangulaire...) dans les modèles adimensionnés permet ainsi de s'affranchir des difficultés qui peuvent être rencontrées sur des formes complexes. Par ailleurs, cela permet d'étendre l'application du diagramme 1.12 à des formes quelconques uniformément courbées. Ensuite, la géométrie de la coque est retrouvée au moyen du rayon caractéristique (1.23). Rappelons que ce rayon caractéristique peut être déterminé analytiquement pour des formes elliptiques et via la correction (1.41) pour des formes rectangulaires. Pour d'autres géométries plus compliquées, il faut avoir recours à des simulations numériques.
3. Le modèle QC, basé sur une approximation quadratique du champ de déplacements, est plus précis que le modèle UC pour déterminer la forme géométrique de la coque lorsque la courbure devient complexe (*c.f.* figure 1.16). Néanmoins, le modèle UC, malgré sa grande simplicité, est capable de fournir toutes les informations utiles sur la multistabilité de la coque. Ce dernier est, selon nous, préféré car il reproduit remarquablement la multistabilité tant d'un point de vue qualitatif que quantitatif. C'est de fait le modèle UC qui sera exploité dans toute la suite de ces travaux.
4. Des simulations ont également été effectuées sur des coques anisotropes au moyen du modèle UC. Les conclusions sont identiques au cas des plaques et ne sont pas reportées ici. Même lorsque la coque devient fortement anisotrope *i.e.* avec des valeurs élevées de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ , la tristabilité est toujours possible.

## 1.4 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif d'introduire en premier lieu le modèle à courbures uniformes (UC) proposé par [Vidoli and Maurini \(2008\)](#) au travers de l'énergie potentielle (1.22). Ce modèle a la particularité essentielle de pouvoir identifier complètement le comportement multistable de coques non-linéaires avec un nombre minimal de trois degrés de liberté (les trois composantes du champ de courbures) lorsque la plupart des modèles proposés dans la littérature ont recours à *au moins* 14 degrés de liberté pour pouvoir prendre en compte les effets de la courbure de torsion.

Ensuite, nous avons appliqué ce modèle à l'étude de la multistabilité des coques minces anisotropes sur des cas classiques d'anisotropie souvent rencontrés en pratique. D'abord, nous avons vu que dans les plaques chargées par déformations inélastiques uniformes, l'anisotropie affecte uniquement la forme des domaines de bistabilité mais non leur existence. Ce comportement *au plus* bistable peut se retrouver pour une large plage d'hypothèses sur les paramètres variables de la coque, tels que les propriétés matériaux  $\mu$  et  $\gamma$  ainsi que le chargement. L'utilité de ces diagrammes réside dans leur généralité au vu de leur compatibilité avec toute classe de chargement par courbures inélastiques. Le couplage avec un algorithme d'optimisation structurale permettrait de définir des combinaisons optimales de propriétés matériaux anisotropes et de géométrie au regard d'un critère donné tel que la minimisation du niveau énergétique entre les configurations stables, par exemple.

Par la suite, nous avons de nouveau appliqué ce modèle à l'étude de la tristabilité. Nous avons mené de façon complètement analytique l'étude des coques orthotropes à symétrie du carré chargées par déformations inélastiques sphériques, cas remarquable pour lequel il existe une solution analytique pour la tristabilité. En particulier, nous avons montré que ces coques peuvent être tristables pour une large gamme de courbures initiales et inélastiques; dans ce cas spécifique, le coefficient de Poisson est le seul paramètre constitutif du matériau affectant les frontières de multistabilité dans l'espace des chargements. Ce contexte spécifique étant le plus représentatif dans les applications, nous l'avons comparé avec l'hypothèse de courbures quadratiques et avec les simulations par éléments finis. Il apparait que le modèle UC reproduit de façon remarquable les frontières de multistabilité au regard du modèle QC, plus contraignant dans l'utilisation et ne permettant pas de solution analytique. Les simulations par éléments finis ont permis de valider le modèle UC, à la fois sur sa capacité à déterminer le nombre et la forme des configurations stable, mais aussi sur des trajets de chargement spécifiques.

En somme, le modèle UC s'est montré, malgré sa grande simplicité, être très pertinent pour capturer la multistabilité des coques même lorsque l'on enfreint l'hypothèse de coques peu profondes. Sur la base des résultats théoriques du modèle UC issus de cette étude, le [chapitre 2](#) aura pour vocation de fournir des critères de conception et fabrication de coques multistables.



## Chapitre 2

# Des critères de conception et fabrication de coques multistables : application aux coques à faible énergie d'actionnement

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>40</b>
<b>2.2</b>	<b>Critères de conception de coques multistables</b>	<b>41</b>
2.2.1	Résultats théoriques utiles pour la conception	41
2.2.2	Critères	43
2.2.2.a	Règles communes à tous les cas	43
2.2.2.b	Coques bistables sphériques	44
2.2.2.c	Coques bistables cylindriques	44
2.2.2.d	Coques tristables	44
2.2.2.e	Considérations complémentaires	45
2.2.3	Fabrication de prototypes-démonstrateurs	48
2.2.3.a	Coque sphérique bistable : balle de tennis	48
2.2.3.b	Coque cylindrique bistable et coque tristable : silicone	49
2.2.4	Conclusion	52
<b>2.3</b>	<b>Conception et fabrication de coques multistables à faible énergie d'actionnement</b>	<b>53</b>
2.3.1	Courbures inélastiques par thermoélasticité	54
2.3.1.a	Disque bilame Aluminium-Cuivre	54
2.3.1.b	Disque composite stratifié hybride Verre-Carbone	56
2.3.2	Courbures inélastiques par plasticité	58
2.3.2.a	Disque de Cuivre laminé	58
2.3.2.b	Méthode d'identification du comportement mécanique des cuivres laminés	59
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>62</b>

---

*Sur la base des résultats théoriques décrits dans le [chapitre 1](#), nous proposons dans un premier temps des critères de conception de coques multistables allant jusqu'à la tristabilité. Ensuite, ces critères sont exploités afin de mettre en place une démarche expérimentale efficace de fabrication de coques multistables dont la différence de niveau énergétique est minimale. Plusieurs cas de figure seront étudiés au travers de différentes familles de courbures inélastiques de manière à sélectionner la méthode la plus pertinente dans une application au contrôle de forme.*

## 2.1 Introduction

Le nombre conséquent d'applications envisageables via l'utilisation de structures multistables suscite un grand intérêt quant à leur modélisation, où l'on cherche à identifier et prévoir les paramètres et conditions qui mènent à un comportement donné. Dans ce sens, les modèles phénoménologiques sont très utiles car ils permettent d'appréhender et contrôler le comportement mécanique des coques vis-à-vis d'une sollicitation donnée et, de plus, ils rendent le dimensionnement plus intuitif. Les matériaux composites, dont il est possible de concevoir localement l'architecture, sont d'excellents candidats à la multistabilité comme on l'a fait remarquer dans le [chapitre 1](#). L'anisotropie est exploitée de manière à privilégier un comportement au regard d'un critère préalablement défini, tel qu'une charge critique de flambement élevée ou un poids faible ([Montemurro et al., 2012](#); [Vincenti et al., 2013](#)).

Un grand nombre de modèles ont été proposés dans la littérature pour capturer le comportement non-linéaire des coques minces. Spécifiquement, les structures composites ont été largement modélisées, la plus célèbre d'entre elles étant la famille des *cross-ply* ([Hyer, 1981a,b, 1982](#); [Hamamoto and Hyer, 1987](#); [Jun and Hong, 1990](#)) ou encore celle des *angle-ply* ([Peeters et al., 1995](#)). Ces auteurs ont proposé des modèles très utiles pour déterminer les configurations stables qui résultent du procédé de fabrication de composites stratifiés asymétriques. Toutefois, ces modèles ont souvent recours à un grand nombre de degrés de liberté (jusqu'à 28) pour pouvoir capturer le comportement complet des coques, spécifiquement la courbure de torsion  $k_{xy}$ , ce qui force le recours à des solutions semi-analytiques.

D'autres auteurs ([Kebadze et al., 2004](#); [Guest and Pellegrino, 2006](#); [Seffen, 2007](#); [Seffen and Guest, 2011](#)) ont proposé des modèles réduits à courbures uniformes de manière à obtenir des solutions analytiques sur la bistabilité de coques cylindriques précontraintes, là aussi très utiles pour la conception. Toutefois, la limitation de tels modèles à des solutions analytiques bornées par la bistabilité restreint le nombre d'applications dans une perspective de conception analytique. Les premières démonstrations de tristabilité ont été établies par [Norman et al. \(2008b\)](#) sur des coques ondulées peu profondes. S'en sont suivis les premiers résultats de tristabilité proposés par [Vidoli and Maurini \(2008\)](#) sur des coques "lisses" au travers du modèle UC qui permet, comme on l'a montré dans le [chapitre 1](#), des solutions analytiques sur la tristabilité dans des conditions d'orthotropie limitées à la symétrie du carré. Cette classe de matériaux regroupe un large champ d'applications, rendant ce modèle très pertinent dans une perspective d'élaboration de critères analytiques de conception de coques multistables. En effet, la conception de structures multistables reste une tâche délicate à mener dès lors que l'on tient compte des non-linéarités mises en jeu. C'est pourquoi l'élaboration de critères simples de conception de structures multistables est nécessaire et privilégiée pour les applications. Dans ce sens, le modèle UC est bien adapté car il permet de capturer globalement le comportement qualitatif et quantitatif des coques.

En application directe, la fabrication de coques multistables peut mettre en évidence des difficultés importantes dans la mesure où ces structures sont redoutablement sensibles aux imperfections, aussi bien matérielles que géométriques ou encore lors de la fabrication. En effet, la moindre variation d'un paramètre de conception telle qu'une épaisseur irrégulière ou bien l'application d'un joint de colle non-homogène peut alors changer de façon irréversible le comportement mécanique de la coque, comme on le verra dans la section [2.3](#). Il faut alors avoir recours à des techniques s'approchant au plus des méthodes industrielles de fabrication.

Dans ce chapitre, le but est d'abord d'exploiter les résultats théoriques via le modèle UC mis en évidence dans le [chapitre 1](#) afin de proposer des critères de conception et fabrication de structures multistables. Ces critères, basés sur le modèle UC couplé aux simulations par éléments finis, ont pour objectif la conception de coques multistables appartenant à chaque zone du diagramme [1.12](#).

Ensuite, on utilise ces critères en application à la fabrication de structures multistables à faible énergie d'actionnement, c'est-à-dire des structures pour lesquelles le niveau énergétique nécessaire au passage d'une configuration stable à l'autre est le plus faible possible. L'objet d'une telle structure sera d'être ensuite utilisée dans une application au contrôle de forme, application pour laquelle on tente de contrôler la transition entre les différentes configurations stables de la coque. On envisagera différents cas de fabrication suivant différents types de courbures inélastiques appliquées à la coque de manière à sélectionner la méthodologie la plus pertinente.

## 2.2 Critères de conception de coques multistables

### 2.2.1 Résultats théoriques utiles pour la conception

Le chapitre 1 a permis de valider le modèle UC en montrant que l'on peut obtenir jusqu'à trois configurations stables lorsque courbures initiales et inélastiques sont combinées. Notamment, nous avons montré que dans le cas de coques à symétrie du carré, la multistabilité est complètement identifiée au moyen du coefficient de Poisson  $\mu$  du matériau. De fait, nous pouvons déterminer analytiquement chaque point du diagramme des phases, rappelé sur la figure 2.1, uniquement en fonction de ce paramètre, ce qui permet l'écriture de critères de conception sous des formes très concises. Dans ce sens, la simulation par éléments finis a permis de corriger ces frontières vis-à-vis de configurations que le modèle UC n'est pas capable de prédire, ce qui permet la mise en place de critères de conception hybrides, c'est-à-dire basés sur les résultats théoriques corrigés par les simulation EF.

Les matériaux à faible rigidité de cisaillement, *i.e.* vérifiant la condition  $\gamma < (1 - \mu)/2$  (équilibres de type III) sont rares (*c.f.* figure 1.11). On se focalise ici sur les cas d'équilibres de types I et II sans tenir compte de l'instabilité de torsion sur  $k_{xy}$  résultant des équilibres de type III. Dans la limite importante d'isotropie (équilibres de type IV), la torsion  $k_{xy}$  devient un mode de déformation *dégénéré* à rigidité nulle ou neutralement stable, que l'on exploitera dans la suite au travers d'expérimentations.

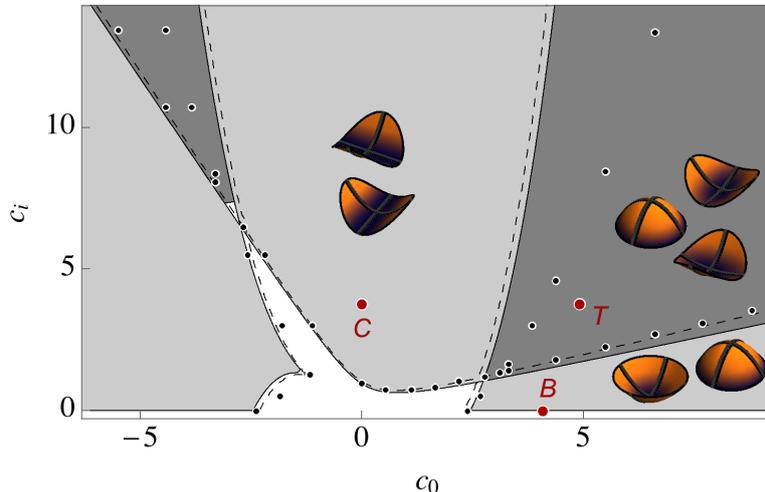


FIGURE 2.1 – Diagramme de multistabilité pour  $\mu = 0.5$ . Les points B, C et T correspondent à des prototypes de démonstration qui seront détaillés dans la section 2.2.3.

Ayant déterminé analytiquement les frontières  $f_I$  et  $f_{II}$  des régions monostables, bistables et tristables, nous pouvons dériver des indications analytiques précises pour la conception de coques multistables. On se focalise sur la zone particulière ( $c_0 > 0, c_i > 0$ ) tracée sur la figure 2.2 pour laquelle la surface de tristabilité est bien plus étendue que dans le cas  $c_0 < 0$ . Les valeurs critiques de courbures d'intérêt sont dans la pratique les courbures initiales critiques à  $c_i = 0$  ( $c_0^*$ ), les courbures inélastiques critiques à  $c_0 = 0$  ( $c_i^*$ ) ou encore un couplage entre les deux ( $c_0^{**}, c_i^{**}$ ). En particulier, ce dernier point constitue un point limite entre quatre domaines de stabilité distincts. De cette façon, on obtient :

$$c_0^* = 2\sqrt{1 + \mu}, \quad c_i^* = \sqrt{7 + \mu} \quad (2.1)$$

pour les courbures initiales critiques et :

$$c_i^* = \frac{2\sqrt{1 - \mu}}{1 + \mu}, \quad c_0^{**} = \frac{4\sqrt{2}}{1 + \mu} - \sqrt{7 + \mu} \quad (2.2)$$

pour les courbures inélastiques critiques. Les valeurs de  $c_0^*$  et  $c_i^*$  sont obtenues en intersectant  $f_I = 0$  avec  $c_i = 0$  et  $f_{II} = 0$  avec  $c_0 = 0$ , respectivement. Les deux ensembles  $f_I$  et  $f_{II}$  s'intersectent à

l'apex de la région tristable, ce qui constitue le point  $(c_0^{**}, c_i^{**})$ . Rappelons que la valeur de  $c_0^*$  donne la courbure initiale critique, en l'absence de courbure inélastique, pour qu'une configuration éverse existe. A l'inverse, la valeur de  $c_i^*$  donne la courbure inélastique critique pour qu'une plaque bifurque vers deux configurations cylindriques, en l'absence de courbure initiale.

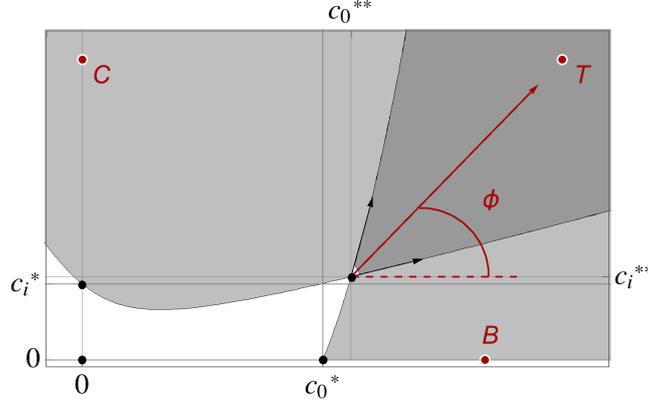


FIGURE 2.2 – Zoom du diagramme de multistabilité dans le plan  $(c_0 > 0, c_i > 0)$ .

De la même manière, on détermine les tangentes aux deux frontières de stabilité (vecteurs noirs de la figure 2.2) avec l'objectif de pouvoir se déplacer librement à l'intérieur de la région de tristabilité. Notamment, on montre que tout point de la forme :

$$\{c_0^{**}, c_i^{**}\} + \lambda\{\cos \phi, \sin \phi\}, \quad \lambda > 0 \quad (2.3)$$

avec

$$\phi = \arctan \left( \frac{3\sqrt{7+\mu} + p(\sqrt{7+\mu} - \sqrt{2}(1+\mu))}{\sqrt{2}p(1+\mu)} \right), \quad 0 < p < 1 \quad (2.4)$$

reste à l'intérieur de la région de tristabilité. Pour  $p \ll 1$ , le point (2.3) reste proche de la frontière inférieure  $f_{II}$  tandis que lorsque  $p \simeq 1$ , ce point est plus proche de la frontière supérieure  $f_I$ . A titre d'exemple, le point T de la figure 2.2 correspond à  $p \simeq 0.24$  et  $\lambda \simeq 3.4$ .

Sur la figure 2.3, on examine la variation des courbures critiques en fonction de  $\mu$ . Il apparaît sur ces tracés des différences très marquées de comportement de la coque vis-à-vis de ces paramètres. Pour les courbures initiales  $c_0^*$  et  $c_0^{**}$ , on observe une dépendance modérée lorsque  $\mu \geq 0$ . A l'inverse, les courbures inélastiques critiques  $c_i^*$  et  $c_i^{**}$  tendent toutes deux vers zéro lorsque  $\mu \rightarrow 1$ . Cette considération est d'une importance pratique car même une très faible courbure inélastique peut conduire à une bifurcation de la courbure lorsque  $\mu \rightarrow 1$ . En se rappelant de la définition de  $\mu$ , la condition  $\mu \rightarrow 1$  est obtenue lorsque :

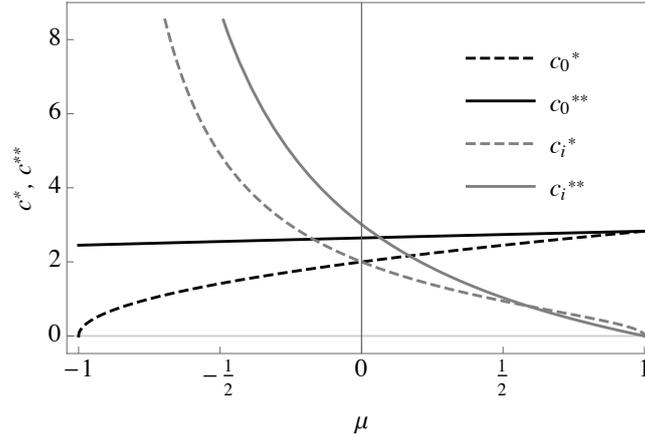
$$\nu^2 \rightarrow \beta = E_2/E_1 \quad (2.5)$$

une propriété matériau remarquable, déjà soulignée dans d'autres travaux (Vidoli and Maurini, 2008; Giomi and Mahadevan, 2012).

Sur la base des résultats explicités plus haut, nous détaillons dans la suite des directives générales pour construire des structures multistables pour chaque zone du diagramme tracé sur la figure 2.2, correspondant aux cas suivants :

- (B) Coque bistable avec configurations naturelle et éverse ( $f_I > 0, c_0 > 0$ );
- (C) Coque bistable avec deux configurations bifurquées quasi-cylindriques ( $f_{II} > 0, c_i > 0$ );
- (T) Coque tristable avec deux configurations bifurquées quasi-cylindriques et la configuration éverse sphérique ( $f_I > 0, f_{II} > 0, c_0 > 0, c_i > 0$ ).

Préliminairement, et pour tous les cas exposés, il y a le choix important de la forme du domaine  $\mathcal{S}$  et du matériau. En ce qui concerne la forme, les résultats les plus précis sont obtenus lorsque  $\mathcal{S}$


 FIGURE 2.3 – Variations des valeurs critiques des courbures en fonction de  $\mu$ .

est circulaire car ils minimisent les valeurs critiques de courbures de multistabilité et, par ailleurs, on dispose de solutions analytiques pour le rayon caractéristique  $R_0$ . En effet, les valeurs dimensionnelles de courbures sont inversement proportionnelles au rayon  $R_0$ , qui à son tour est proportionnel à  $\sqrt{\psi}$ . En conséquence, plus  $\psi$  est grand, plus  $R_0$  est grand et la courbure dimensionnelle petite ; la figure 1.1(a) montre que la valeur maximale de  $\psi$  est obtenue pour une géométrie circulaire.

Concernant le matériau, dans le cas orthotrope nous supposons donnés le coefficient de Poisson  $\nu$ , le module d'Young  $E_1$ , le ratio entre les modules d'Young  $\beta = E_2/E_1$  et le module de cisaillement  $\rho^c$ . Les meilleurs résultats sont obtenus pour des matériaux ayant un module de cisaillement suffisamment élevé, *i.e.* vérifiant  $2\rho^c \geq 1 + \nu$  ( $\equiv 2\gamma \geq 1 + \mu$ , de manière à éviter les instabilités de torsion rencontrées principalement pour les matériaux à faible rigidité de cisaillement, voir § 1.3.3.a) et vérifiant (2.5) dans le but de minimiser les courbures de multistabilité.

Globalement, le problème de conception requiert le choix des quantités suivantes :

- 1 La forme  $\mathcal{S}$  du domaine de la coque ;
- 2 Les dimensions de la coque :
  - La section de la coque ;
  - L'épaisseur de la coque ;
  - La courbure ciblée *i.e.* le point où l'on cherche à se situer dans le diagramme 2.1.
- 3 Les propriétés mécaniques du matériau :
  - Le coefficient de Poisson  $\nu$  ;
  - Le module d'Young  $E_1$  ;
  - Le module de cisaillement  $\rho^c$ <sup>1</sup>.

## 2.2.2 Critères

### 2.2.2.a Règles communes à tous les cas

- (I) En concordance avec la forme  $\mathcal{S}$  choisie, calculer  $\psi$  :
  - en utilisant (1.39) si la forme de la coque est elliptique ;
  - en utilisant (1.41) si la forme de la coque est rectangulaire ;
  - en résolvant numériquement (1.37) si la coque n'est ni elliptique, ni rectangulaire.

1. Comme on l'a souligné dans le chapitre 1, les propriétés de stabilité de la coque ne dépendent pas du module de cisaillement. Cependant, ce module peut être ajusté de manière à définir la différence de niveau énergétique entre les configurations stables (*c.f.* figure 1.11).

- (II) Choisir la section  $L^2$  de la coque et son épaisseur  $h$ . Notons que le ratio  $L^2/h$  est un facteur d'échelle pour le rayon caractéristique  $R_0$ ; en conséquence, plus  $L^2/h$  est grand, plus la courbure nécessaire pour la multistabilité diminue.
- (III) Calculer le rayon caractéristique  $R_0$  donné par (1.23).

### 2.2.2.b Coques bistables sphériques

- (IV) Calculer  $c_0^*$  via l'équation (2.1);
- (V) Construire une coque ayant, comme configuration naturelle (libre de contraintes) le champ de courbures :

$$\bar{h}_0^x = \sqrt{\beta} \bar{h}_0^*; \quad \bar{h}_0^y = \bar{h}_0^*; \quad \bar{h}_0^{xy} = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{h}_0^* \geq 1.05 c_0^*/R_0 \quad (2.6)$$

étant donné que, vis-à-vis des résultats des simulations par éléments finis, le modèle UC surestime avec une erreur de 3% la courbure naturelle critique. Le coefficient 1.05 dans (2.6) garantit l'existence d'une configuration éverse stable. Remarquons que les valeurs indiquées dans (2.6) sont les courbures initiales minimales de bistabilité, mais des valeurs plus élevées sont possibles et conseillées pour augmenter la différence entre les deux configurations. Cependant, il est important de noter que l'énergie nécessaire pour le passage d'une configuration stable à l'autre augmente rapidement lorsque l'on augmente la courbure initiale du fait qu'elle soit échelonnée par  $(\det \bar{\mathbf{h}}_0 - (\bar{h}_0^*)^2)^2$ , voir (1.22). Notons aussi que ce cas spécifique de coques bistables sphériques est le seul pour lequel au moins une configuration stable est libre de contraintes.

### 2.2.2.c Coques bistables cylindriques

- (IV) Calculer  $c_i^*$  via l'équation (2.2);
- (V) Construire une plaque et lui appliquer un champ de courbures inélastiques :

$$\bar{h}_i^x = \sqrt{\beta} \bar{h}_i^*; \quad \bar{h}_i^y = \bar{h}_i^*; \quad \bar{h}_i^{xy} = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{h}_i^* \geq c_i^*/R_0 \quad (2.7)$$

étant donné que, vis-à-vis des résultats des simulations par éléments finis, le modèle UC estime parfaitement la courbure inélastique critique  $c_i^*$ , la condition (2.2) garantit l'existence de deux configurations stables cylindriques sans la nécessité d'un coefficient additionnel. De même que précédemment, les valeurs indiquées dans (2.7) sont les courbures inélastiques minimales de bistabilité, mais des valeurs plus élevées sont possibles et conseillées pour augmenter la différence entre les deux configurations. Aussi, l'énergie nécessaire pour le passage d'un état stable à l'autre varie *moins* rapidement lorsque l'on augmente la courbure inélastique du fait qu'elle soit échelonnée par  $(\bar{h}_i^x - \bar{h}_i^*)^2$ .

### 2.2.2.d Coques tristables

- (IV) Calculer  $c_0^{**}$  et  $c_i^{**}$  via les équations (2.1) et (2.2);
- (V) Construire une coque ayant comme configuration naturelle le champ de courbures :

$$\bar{h}_0^x = \sqrt{\beta} \bar{h}_0^{**}; \quad \bar{h}_0^y = \bar{h}_0^{**}; \quad \bar{h}_0^{xy} = 0 \quad (2.8)$$

et lui appliquer un champ de courbures inélastiques :

$$\bar{h}_i^x = \sqrt{\beta} \bar{h}_i^{**}; \quad \bar{h}_i^y = \bar{h}_i^{**}; \quad \bar{h}_i^{xy} = 0 \quad (2.9a)$$

avec :

$$\{\bar{h}_0^{**}, \bar{h}_i^{**}\} = \frac{\{c_0^{**}, c_i^{**}\} + \lambda \{\cos \phi, \sin \phi\}}{R_0}; \quad \lambda > 1; \quad 0.05 < p < 0.5 \quad (2.9b)$$

avec  $\phi$  donné par l'équation (2.4). Ceci étant, un mot d'attention est nécessaire quant au choix de  $\lambda$  et  $p$ . Étant donné que le modèle UC surestime l'apex de la région tristable de 14% en norme, la condition  $\lambda > 0$  devrait être remplacée par une condition plus sûre  $\lambda > 1$ . De plus, l'angle  $\phi$  (contrôlé par  $0 < p < 1$ ) est plus sûr lorsque l'on reste proche de la frontière inférieure du domaine tristable; de fait, les valeurs les plus sûres de  $p$  sont celles qui sont comprises dans l'intervalle  $0.05 < p < 0.5$ . Ce choix permet d'éviter les instabilités locales que l'on peut rencontrer proche de la frontière supérieure (voir § 1.3.3.c) et que le modèle UC n'est pas capable de décrire.

### 2.2.2.e Considérations complémentaires

Les critères proposés dans les paragraphes précédents sont généraux et s'appliquent à tous types de coques à courbures uniformes faites de tous matériaux. Néanmoins, deux aspects qui peuvent être rencontrés en pratique n'ont pas été pris en compte, à savoir l'influence du poids de la coque sur la multistabilité et la limite d'élasticité du matériau.

Pour le premier aspect, la grande majorité des matériaux (dont les composites sont une référence) sont suffisamment rigides et *peu* denses pour que, du moins à l'échelle du laboratoire (centimétrique), ils ne se déforment pas sous leur poids propre et l'influence de la gravité devient alors naturellement négligeable. Toujours est-il, certains matériaux (typiquement les silicones) sont très denses ( $\rho_v \simeq 1250 \text{ kg/m}^3$ ) vis-à-vis de leur rigidité ( $E \simeq 1 \text{ MPa}$ ) et cette considération est très importante car le comportement est significativement affecté lorsque le rapport  $E/\rho_v$  est petit.

En ce qui concerne la limite d'élasticité du matériau, elle peut devenir un paramètre important à prendre en compte lorsque l'on envisage d'obtenir une coque avec une grande courbure, par exemple par effet bilame avec un gradient de température très élevé, ce qui reste néanmoins rare en pratique. Dans une telle situation, on sortirait aussi du cadre d'application de ces critères vis-à-vis de l'hypothèse de coque peu profonde.

Intrinsèquement à ces remarques, ce paragraphe a pour objectif de donner des contraintes à respecter en termes de dimensionnement. Pour plus de clarté, on se place dans le contexte d'une coque cylindrique ( $\bar{k} = \bar{k}_x \neq 0$ ) homogène isotrope de module d'Young  $E$ , de masse volumique  $\rho_v$ , de longueur  $L$  et d'épaisseur  $h$ . La figure 1.12 montre que la coque est multistable pour des courbures adimensionnées de l'ordre de  $c_0^*$ . Ensuite, l'ordre de grandeur pour recouvrir des courbures dimensionnelles est donné par le rayon caractéristique  $R_0$  exprimé par (1.23), et pouvant être réécrit sous la forme :

$$R_0 = \sqrt{12\psi} \frac{L^2}{h} \xrightarrow{\text{Oiso}} \frac{R_0}{L} = \frac{\sqrt{1-\nu^2} L}{4\pi} \frac{L}{h} \quad (2.10a)$$

$$\equiv \frac{R}{L} = \frac{\sqrt{1-\nu^2} L}{4\pi c_{max}} \frac{L}{h} \quad (2.10b)$$

où la valeur de  $\psi$  est écrite selon son expression analytique  $\psi^{ic}$  pour une coque isotrope circulaire via (1.40),  $c_{max}$  est la courbure adimensionnée inextensible de la coque vis-à-vis des choix de  $c_0$  et  $c_i$ . L'équation (2.10b) donne une relation clé entre deux paramètres sans dimension caractérisant la géométrie de la coque que sont le rapport de profondeur  $R/L$  et le rapport d'élancement  $L/h$  en fonction des propriétés matériaux et du niveau de courbure de la coque. Si l'on veut rester en consistance avec l'hypothèse de coque mince peu profonde, on doit respecter la condition  $R \gg L \gg h$  mais, comme le confirmera expérimentalement, le modèle UC est capable de caractériser de manière remarquable le comportement de la coque même lorsque  $R \sim L$ .

### Influence de la gravité

Pour mesurer l'influence de la gravité de façon simple et efficace, il suffit d'estimer l'impact du travail des forces extérieures dues au poids propre de la coque au regard de son énergie de déformation en termes d'ordre de grandeur. L'énergie d'extension étant très grande devant celle de flexion, on peut

se limiter à comparer l'énergie potentielle de flexion  $\mathcal{E}_f$  avec le travail dû à la pesanteur  $\phi_p$ . Il vient :

$$\begin{aligned}\phi_p &= mg\bar{w}(L) = \frac{1}{2}\rho_v g L^4 h \bar{k} \quad \text{avec} \quad \bar{w}(L) = \frac{1}{2}\bar{k}L^2 \quad (\text{hypothèse UC}) \\ \bar{\mathcal{E}}_f &= \frac{1}{2} \int_S \bar{D} \cdot \bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{k}} \, d\bar{S} \simeq \frac{L^2}{2} \bar{D}_{11} \bar{k}^2 \simeq \frac{L^2}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \bar{k}^2 \quad \text{avec} \quad \bar{D}_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\end{aligned}$$

En conséquence, pour que la contribution de la gravité soit négligeable, on doit vérifier la condition :

$$\frac{1}{2}\rho_v g L^4 h \bar{k} \ll \frac{L^2}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \bar{k}^2 \quad \text{ou, de manière équivalente,} \quad L_g \gg 12(1-\nu^2) \frac{R_0}{c_{max}} \frac{L^2}{h^2} \quad (2.12)$$

où  $L_g = E/\rho_v g$  est une longueur caractéristique, propriété fixe du matériau qui compare directement sa rigidité et son poids,  $c_{max} \sim (c_0 + c_i)(1 + \nu)$  est l'ordre de grandeur de la courbure adimensionnée de la coque. De fait, en combinant (2.12) et (2.10b), on obtient la contrainte :

$$\left(\frac{L}{h}\right)^3 \ll \frac{1}{3} \frac{\pi c_{max}}{(1-\nu^2)^{3/2}} \frac{L_g}{L} \quad (2.13)$$

qui peut être vue comme une condition de *rigidité* pour que la gravité puisse être considérée comme négligeable. En pratique, on constate que cette condition sur-contraint le dimensionnement et a peu d'incidence sur le comportement final de la coque. En effet, le poids de la coque impacte (selon sa rigidité) son niveau de courbure mais n'influe pas sur l'existence de plusieurs configurations stables car les choix typiques de  $\mathbf{h}_0$  et  $\mathbf{h}_i$  pour la multistabilité corrigent cette dépendance. De fait, le signe " $\ll$ " dans (2.13) peut logiquement être remplacé par "<", ce qui assure la négligence du poids vis-à-vis de la multistabilité mais il doit être maintenu si l'on souhaite que la coque conserve sa courbure si l'on en vient par exemple à la retourner (changer le sens d'effet du poids).

### Influence de la limite d'élasticité

Pour mesurer l'influence de la limite d'élasticité sur la multistabilité, il suffit naturellement de s'assurer que la coque reste dans le domaine élastique à tout instant. En supposant que les déformations sont limitées à de la flexion pure, on obtient très simplement :

$$\bar{e}_x^{tot} \simeq \bar{z}\bar{k} \simeq \frac{h}{2} \frac{c_{max}}{R_0} < \bar{e}_{max} \quad (2.14)$$

où  $\bar{e}_{max}$  est la limite d'élasticité du matériau. En combinant (2.14) et (2.10b), on obtient la contrainte :

$$\left(\frac{L}{h}\right)^2 > \frac{2\pi c_{max}}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{1}{\bar{e}_{max}} \quad (2.15)$$

qui peut être vue comme une condition d'*élasticité*. Remarquons tout de même que dans certaines applications, la courbure inélastique peut tout aussi bien être appliquée par effets d'élastoplasticité et, dans un tel contexte, il faut tenir compte de la nouvelle limite d'élasticité après écrouissage.

Enfin, on peut ajouter à ces deux conditions la condition intrinsèque au modèle UC portant sur le respect de l'hypothèse de coque peu profonde ( $R \gg L$ ), il vient ainsi en utilisant (2.10b) :

$$\left(\frac{L}{h}\right) \gg \frac{4\pi c_{max}}{\sqrt{1-\nu^2}} \quad (2.16)$$

Cette condition est purement indicative et n'est dans la plupart des cas pas respectée car son respect induirait des échelles de longueur de coque très faibles et sans intérêt dans la pratique.

→ Propriété	$E$	$\rho_v$	$L_g$	$\bar{e}_{max}$	$L_g/\bar{e}_{max}$
↓ Matériau	(GPa)	(kg/m <sup>3</sup> )	(m)	–	(m)
Aciers	200	7800	$2.5 \times 10^6$	0.0015	$1.7 \times 10^9$
Cuivres	124	8890	$1.4 \times 10^6$	0.0020	$7.0 \times 10^8$
Aluminiums	69	2705	$2.5 \times 10^6$	0.0018	$1.4 \times 10^9$
Silicones	0.001	1250	$1.1 \times 10^2$	0.1000	$1.0 \times 10^3$
Carbone/Ép.	181	1600	$11. \times 10^6$	0.0060	$1.8 \times 10^9$

TABLEAU 2.1 – Propriétés typiques de quelques matériaux.

En résumé, en plus des critères énoncés précédemment, on peut ajouter les contraintes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{L}{h}\right) \gg \frac{4\pi c_{max}}{\sqrt{1-\nu^2}} \quad (\gg 1 - \text{condition de coque peu profonde}) \quad (2.17a) \\ \left(\frac{L}{h}\right)^2 > \frac{2\pi c_{max}}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{1}{\bar{e}_{max}} \quad (\gg 1 - \text{condition de coque élastique}) \quad (2.17b) \\ \left(\frac{L}{h}\right)^3 < \frac{1}{3} \frac{\pi c_{max}}{(1-\nu^2)^{3/2}} \frac{L_g}{L} \quad (\gg 1 - \text{condition de coque rigide}) \quad (2.17c) \end{array} \right.$$

En outre, si les trois contraintes complémentaires (2.17) sont vérifiées, la condition de coque mince est implicitement vérifiée car ces dernières sont exprimées explicitement en fonction du rapport d'élanement  $L/h$  de la coque. Toutefois, les conditions (2.17a)–(2.17b) requièrent un rapport d'élanement élevé, alors que la condition (2.17c) requiert un rapport d'élanement suffisamment petit pour limiter l'effet relatif de la gravité. Cette dernière condition introduit un effet d'échelle, la valeur limite étant inversement proportionnelle à la longueur de la coque. Cela signifie qu'il est plus simple pour les structures denses et peu rigides d'obtenir la multistabilité à de petites échelles de longueur plutôt qu'à de grandes échelles, ce qui se vérifie facilement expérimentalement. En pratique, pour obtenir des valeurs raisonnables de profondeur de coque, le rapport d'élanement doit varier entre 100 et 500 (voir (2.10b)). Il est donc plus intuitif en termes de dimensionnement de remplacer les règles II et III par les suivantes :

- (II) Choisir  $c_{max}$  vis-à-vis du domaine de multistabilité ciblé, puis choisir le rapport d'élanement adéquat par (2.10b) de manière à vérifier (2.17a). Comme on l'a souligné, cette condition n'est qu'indicative et peut ne pas être respectée ;
- (III) Sélectionner la longueur  $L$  de la coque de manière à respecter vis-à-vis de  $h$  les conditions (2.17b)–(2.17c) puis calculer  $R_0$  par (1.23).

### Application

Le tableau 2.1 donne pour différentes familles des valeurs typiques de propriétés matériaux affectant le problème de conception au travers des relations (2.17). Par exemple, pour un aluminium, ces relations donnent avec  $c_{max} = 2c_0^{**}$  :

$$\left(\frac{L}{h}\right) \gg 7.2 \times 10^1 ; \quad \left(\frac{L}{h}\right)^2 > 2 \times 10^4 ; \quad \left(\frac{L}{h}\right)^3 < \frac{1.7 \times 10^7}{L} \quad (2.18)$$

Pour la condition de coque élastique, des valeurs raisonnables de rapport d'élanement sont autour de 200 et les déformations sont deux fois inférieures à la limite d'élasticité. Pour la condition de rigidité, elle

est très facilement vérifiée pour un intervalle très étendu de rapports d'élanement et ces considérations restent les mêmes pour les aciers, métaux ou matériaux composites.

Si l'on considère à présent un matériau comme le silicone, très peu rigide mais doté d'une limite d'élasticité très élevée, la situation est complètement différente du cas précédent. On obtient les contraintes suivantes :

$$\left(\frac{L}{h}\right) \gg 7.9 \times 10^1 ; \quad \left(\frac{L}{h}\right)^2 > 3.9 \times 10^2 ; \quad \left(\frac{L}{h}\right)^3 < \frac{9.2 \times 10^2}{L} \quad (2.19)$$

A l'échelle macroscopique, la condition la plus limitative concerne la rigidité de la coque, cette dernière étant très conservatrice. En considérant des valeurs modérées de rapport d'élanement et donc une coque modérément profonde, c'est-à-dire  $L/h \sim 50$ , la dernière condition impose une longueur  $L$  de l'ordre du mm pour que la gravité soit négligeable, ce qui forcerait un niveau de courbure initial ou inélastique ne vérifiant plus la condition de coque élastique. Autrement dit, pour ce type de matériaux denses et peu rigides, il n'est pas possible de vérifier à la fois les trois conditions (2.17). Il est préférable de construire une coque profonde, élastique et suffisamment rigide pour négliger son poids propre, voire construire des structures hybrides via un couplage avec un matériau *rigide*, dont un exemple sera proposé dans la suite.

En résumé, ces contraintes supplémentaires formulées sont complémentaires aux critères proposés. La condition (2.17a) est difficilement vérifiable mais sa vérification a peu d'intérêt surtout au vu de la capacité du modèle UC à représenter le comportement des coques profondes. Quant aux conditions (2.17b) et (2.17c), elles sont très facilement vérifiées pour la grande majorité des applications, spécifiquement les métaux, alliages et matériaux composites. Nous verrons dans la suite au travers d'expérimentations que le non-respect de ces contraintes (excepté (2.17b)) n'affecte pas l'existence de plusieurs configurations stables, quel que soit le domaine où l'on se situe dans le diagramme des phases et même si la gravité ne peut pas être négligée. Notons aussi qu'elles ont été écrites pour le cas de coques cylindriques mais sont identiques dans le cas de coques sphériques.

### 2.2.3 Fabrication de prototypes-démonstrateurs

Dans le but de valider expérimentalement le diagramme des phases 2.1 et ainsi ces critères, nous avons construit des coques multistables pour chacun des trois cas de multistabilité évoqués et correspondant aux points B, C et T de la figure 2.2.

Le prototype correspondant au point B est une demi-balle de tennis en caoutchouc tandis que les matériaux constituant les points C et T sont faits de silicone, dont les propriétés sont données dans le tableau 2.2. Ces deux familles de matériaux sont paramétrées par  $\mu = 0.5$ , ce qui permet de les visualiser toutes deux sur le même diagramme des phases. Notons que cette valeur de 0.5 pour le coefficient de Poisson est la plus élevée possible pour les matériaux isotropes (incompressibles) et donc la valeur la plus proche de la condition (2.5) qui maximise la tristabilité.

#### 2.2.3.a Coque sphérique bistable : balle de tennis

Une balle de tennis est une coque constituée de deux demi-sphères faites essentiellement de caoutchouc. La moitié d'une balle de tennis constitue un exemple simple et concret de coque bistable possédant sa configuration naturelle (libre de contraintes) et son éverse (non-libre de contraintes) comme le montre la figure 2.4. Vis-à-vis des dimensions standard, nous pouvons la modéliser comme une coque profonde de rayon 0.03 m et d'épaisseur 0.003 m. Le matériau étant isotrope et, connaissant  $\mu$ , nous pouvons en déduire  $\gamma$  par la relation  $\gamma = \gamma_{iso} = (1 - \mu)/2 = 0.25$ . Compte tenu de ces valeurs, on peut calculer les quantités utiles :

$$\psi = 3.96 \times 10^{-4}; \quad L = \sqrt{2\pi}R \simeq 0.075 \text{ m}; \quad \frac{L}{h} \simeq 25; \quad R_0 = 0.13 \text{ m}; \quad \bar{h}_0^* = 18.84 \text{ m}^{-1} \quad (2.20)$$

→ Propriété	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
↓ Matériau	(GPa)	(GPa)	(GPa)		( $10^{-5}/^\circ\text{C}$ )	( $10^{-5}/^\circ\text{C}$ )
Verre Éq.	16	16	2.7	0.15	1	1
Carbone Éq.	54	54	4	0.045	0.1	0.1
Silicone E32	$1.36 \times 10^{-3}$	$1.36 \times 10^{-3}$	$4.5 \times 10^{-4}$	0.5	–	–
Silicone E8	$186. \times 10^{-6}$	$186. \times 10^{-6}$	$62. \times 10^{-5}$	0.5	–	–
Al H18	69	69	26	0.33	2.45	2.45
Cua1 H14	124	124	47	0.33	1.73	1.73
Polycarbonate	2.3	2.3	0.84	0.37	–	–

TABLEAU 2.2 – Propriétés des matériaux utilisés dans la fabrication des structures multistables.

Étant donné que  $\beta = 1$  et que la courbure initiale  $\bar{h}_0 = 1/R = 33.33 \text{ m}^{-1}$  est sensiblement plus grande que la valeur critique  $\bar{h}_0^*$ , la configuration éverse est stable. Les contraintes (2.17) donnent :

$$\left(\frac{L}{h}\right) = 25 \gg 87 ; \quad \left(\frac{L}{h}\right)^2 = 628 > 14 ; \quad \left(\frac{L}{h}\right)^3 = 15000 < 3.3 \times 10^7 \quad (2.21)$$

Concrètement, une demi-balle de tennis n'est pas une coque peu profonde mais le modèle UC est tout de même capable de prédire des propriétés de stabilité correctes.



(a) Configuration naturelle



(b) Configuration retournée

FIGURE 2.4 – Les deux configurations stables d'une balle de tennis correspondant au point B de la figure 2.1.

### 2.2.3.b Coque cylindrique bistable et coque tristable : silicone

L'exemple de la balle de tennis est un cas très simple de structure multistable car il ne requiert aucune manipulation particulière. En revanche, les points C et T requièrent la présence de courbures inélastiques, ce qui n'est pas une tâche triviale sur le plan expérimental. Un grand nombre de techniques sont envisageables mais nous adoptons pour des raisons de simplicité l'utilisation de silicones. Les deux silicones utilisés sont le *Zhermack Elite double 32* (référé ici par "vert") et le *Zhermack Elite double 8* (référé par "rose") dont les propriétés sont données dans le tableau 2.2. Ces matériaux *mous*, isotropes et incompressibles sont très facilement moulables et permettent de contrôler le niveau de courbure inélastique lorsque qu'ils sont convenablement préparés ; ils sont à l'état naturel sous forme de polymère liquide qui, une fois mixé avec un durcisseur, entame une phase de polymérisation très rapide (de l'ordre de quelques minutes en fonction de l'humidité et la température).

Ces deux silicones ont des propriétés mécaniques semblables *i.e.*  $\nu = 0.5, \beta = 1, \rho^c = 1/3$  conduisant à  $\mu = 0.5$  et  $\gamma = 0.25$ , mais caractérisés par des modules d'Young différents (voir tableau 2.2) et par des propriétés hygroscopiques différentes. C'est précisément ces différences que l'on exploite pour produire des coques avec une courbure inélastique contrôlée.

En effet, on observe que la polymérisation de la couche de silicone rose, construite directement par dessus la couche inférieure (déjà polymérisée) de silicone vert, produit une structure bilame avec une courbure inélastique non-nulle ; cet effet n'est pas documenté dans les spécifications techniques. Il s'agit d'une réaction à l'interface entre les deux couches due à un phénomène de retrait lorsque la couche supérieure polymérise, ce qui conduit à un champ de contraintes sphérique car les matériaux sont tous deux homogènes isotropes. De plus, ce phénomène est également obtenu lorsque la couche supérieure est faite d'un mix entre silicones vert et rose et la courbure inélastique résultante peut être contrôlée en adaptant le pourcentage de chaque silicone utilisé dans le mélange. Plus précisément, on suppose la couche inférieure faite exclusivement de silicone vert pur et la couche supérieure faite d'un mix entre les deux silicones de manière à pouvoir adapter le pourcentage  $\rho$  de silicone rose ( $\rho \in [0, 100]$ ), le pourcentage de silicone vert étant donc  $(100 - \rho)$ . On mesure expérimentalement la courbure inélastique résultante  $\bar{h}_i$  via des bandes bilames de 2 mm d'épaisseur liées à différentes valeurs de  $\rho$  comme indiqué sur la figure 2.5.

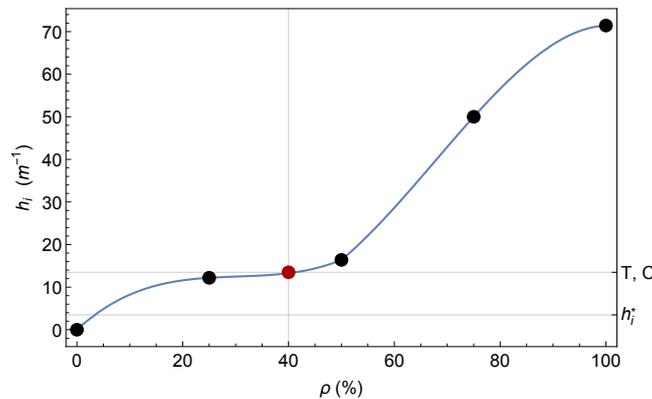


FIGURE 2.5 – Courbure inélastique  $\bar{h}_i$  d'une bande bilame (silicone vert–silicone vert+rose) induite par le pourcentage  $\rho$  de silicone rose dans le mélange de la couche supérieure. La valeur critique  $\bar{h}_i^*$  nécessaire pour les prototypes expérimentaux étudiés ainsi que la courbure inélastique des points C et T sont réportées, ces dernières correspondant à un mélange 60%vert–40%rose.

On note que dans un tel assemblage, un faible pourcentage de silicone rose suffit pour produire une courbure inélastique supérieure à  $\bar{h}_i^*$ . Toutefois, après ce point il apparaît que la variation  $\bar{h}_i(\rho)$  devient fortement non-linéaire, probablement en raison du comportement hyperélastique de ce type de silicone. Pour de tels silicones et en choisissant une géométrie circulaire, les étapes préliminaires décrites dans la section 2.2.2.a donnent :

- (I)  $\psi = 3.96 \times 10^{-4}$  ;
- (II) La section choisie est circulaire de rayon 50 mm et l'épaisseur est fixée à 2 mm. On obtient  $L^2/h = 3.93$  m ;
- (III)  $R_0 = 0.271$  m.

Pour construire la coque bistable de configurations quasi-cylindriques, on suit les étapes écrites dans la section 2.2.2.c, ce qui donne :

- (IV)  $c_i^* = 0.943$  ;
- (V)  $\bar{h}_i^* = 3.48$   $m^{-1}$ .

En considérant ces valeurs, la figure 2.5 indique qu'un pourcentage  $\rho$  dans la couche supérieure dépassant 5% est nécessaire pour obtenir la multistabilité. Le choix de  $\rho = 40\%$  correspond à une

courbure  $\bar{h}_i^x = \bar{h}_i^y = 13 \text{ m}^{-1}$  et au point C de la figure 2.1 ; les expérimentations sont présentées sur la figure 2.6. Les contraintes (2.17) donnent :

$$\left(\frac{L}{h}\right) = 50 \gg 87 ; \quad \left(\frac{L}{h}\right)^2 = 2500 > 435 ; \quad \left(\frac{L}{h}\right)^3 = 125000 < 10000 \quad (2.22)$$

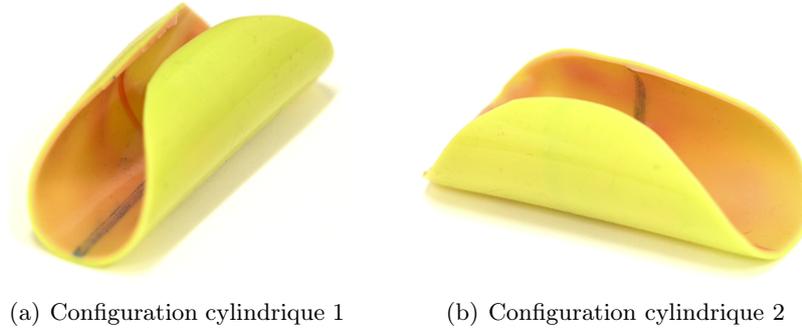


FIGURE 2.6 – Les deux configurations stables cylindriques de la coque silicone bicouche correspondant au point C de la figure 2.1.

Finalement, pour construire la coque tristable, nous avons suivi les étapes détaillées dans le paragraphe 2.2.2.d, pour obtenir :

(IV)  $c_0^{**} = 2.74$  et  $c_i^{**} = 1.03$  ;

(V) Les choix  $\lambda = 3.4$  et  $p = 0.24$  conduisent à  $\bar{h}_0^{**} \simeq 18.1 \text{ m}^{-1}$  et  $\bar{h}_i^{**} \simeq 13 \text{ m}^{-1}$ .

Les contraintes (2.17) donnent :

$$\left(\frac{L}{h}\right) = 50 \gg 195 ; \quad \left(\frac{L}{h}\right)^2 = 2500 > 980 ; \quad \left(\frac{L}{h}\right)^3 = 125000 < 22500 \quad (2.23)$$

Les choix faits pour  $\lambda$  et  $p$  permettent d'obtenir la même courbure inélastique que dans le cas précédent et correspondent également à un mélange 60%vert–40%rose de la couche supérieure. Ceci étant, dans ce cas, la structure bilame doit être pré-courbée (conformément au choix de  $\lambda$  et  $p$ ) de rayon de courbure  $1/\bar{h}_0 = 55 \text{ mm}$  égal dans les deux directions du fait que  $\beta = 1$ . Pour ce faire, via l'utilisation d'une imprimante 3D, nous avons produit le moule représenté sur la figure 2.7 et les phases de polymérisation des couches verte et verte–rose ont eu lieu au sein de ce moule. Les trois configurations stables résultantes sont représentées sur la figure 2.8.



FIGURE 2.7 – Moule en résine plastique fabriqué par impression 3D, de rayon de courbure  $R = 55 \text{ mm}$  utilisé pour créer la coque tristable de la figure 2.8.

Bien que toutes les coques construites (balle de tennis et coques en silicone) sont clairement profondes, leur comportement multistable est très bien identifié en appliquant les règles proposées via le modèle UC.

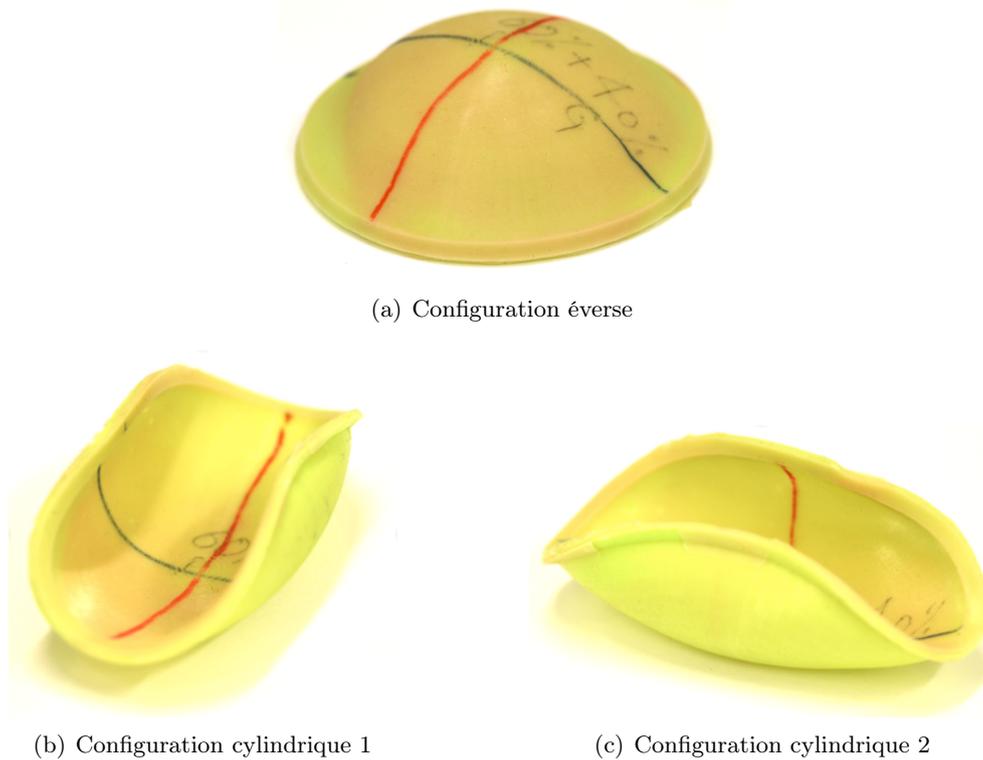


FIGURE 2.8 – Les trois configurations stables quasi-cylindriques et sphérique de la coque silicone bicouche correspondant au point T de la figure 2.1.

## 2.2.4 Conclusion

Cette section avait pour objectif de présenter et d'appliquer sur des cas expérimentaux simples les critères de conception de coques multistables que nous avons proposés. Ces critères hybrides, basés sur les résultats du modèle UC couplés aux simulations par éléments finis, ont l'avantage d'être très simples à exploiter et très performants pour le concepteur, bien qu'ils tiennent compte du comportement non-linéaire des coques.

Les éléments complémentaires ajoutés à ces critères sous forme de contraintes supplémentaires sont exprimés en fonction du rapport d'élongement et permettent un dimensionnement plus simple grâce à l'utilisation du rayon caractéristique  $R_0$ . Ces contraintes ont toute leur importance lorsque l'on travaille avec des matériaux peu rigides du type des silicones ou lorsque l'on se trouve aux limites des hypothèses de coque mince et peu profonde, mais sont limitées à un faible nombre d'applications et sont dans la pratique souvent négligeables. En effet, les métaux sont suffisamment rigides pour permettre un intervalle suffisamment large de rapport d'élongement vérifiant ces contraintes. Par ailleurs, pour obtenir une courbure d'un ordre raisonnable, les non-linéarités résultant du comportement de la coque ne nécessitent que de faibles niveaux de déformations inélastiques, ce qui permet à la coque de rester dans le domaine élastique. En résumé, l'objectif de ces contraintes complémentaires est de pouvoir ajuster le dimensionnement de la coque via le rapport d'élongement uniquement.

En somme, les indications fournies par ces critères ont permis de concevoir précisément les propriétés de multistabilité pour chaque cas expérimenté, dont aucun ne respecte l'hypothèse de coque peu profonde. Bien que le silicone fabriqué soit un matériau très mou et profond, le non-respect des contraintes (2.17) n'affecte en rien l'existence de plusieurs configurations stables, mais affecte uniquement le niveau de courbure de la coque. Finalement, la contrainte à respecter la plus limitative concerne la limite d'élasticité de manière à s'assurer de l'intégrité de la coque et conserver la multistabilité en toutes circonstances.

## 2.3 Conception et fabrication de coques multistables à faible énergie d'actionnement

La section précédente a décrit et appliqué des critères de conception de coques multistables pour des cas spécifiques de multistabilité pour lesquels on ne tenait pas compte d'une part du niveau énergétique des configurations stables et d'autre part du niveau énergétique qui les sépare.

Cette section a pour objectif d'exploiter ces critères, cette fois en les appliquant à la conception de coques multistables à faible énergie d'actionnement, c'est-à-dire des coques dont l'apport énergétique nécessaire au passage d'une position stable à l'autre est le plus faible possible. Dans ce sens, deux paramètres précis sont à optimiser lors de la phase de conception, à savoir la différence (ou gap) énergétique entre les états stables que l'on note  $\Delta_1$  ainsi que l'énergie à parcourir pour passer d'un état à l'autre que l'on note  $\Delta_2$ , comme le montre la figure 2.9 qui représente l'énergie potentielle d'une coque cylindrique anisotrope bistable. Notons que l'énergie à fournir pour passer de l'état  $A$  à l'état  $B$  vaut  $\Delta_2$  tandis que l'énergie à fournir pour le passage inverse vaut  $(\Delta_1 + \Delta_2)$ .

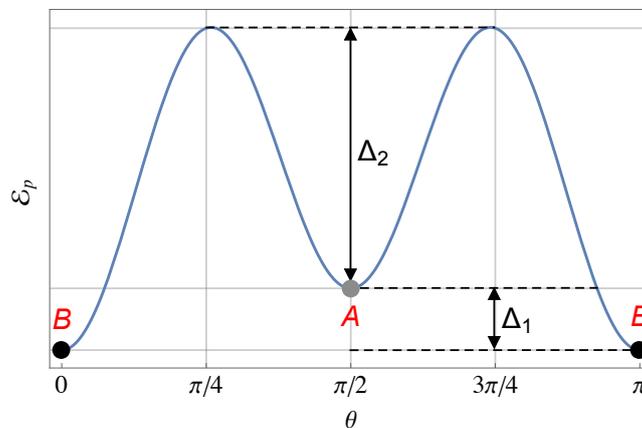


FIGURE 2.9 – Différence de niveau énergétique entre deux configurations stables ( $\Delta_1$ ) et énergie nécessaire au passage d'une position à l'autre ( $\Delta_1 + \Delta_2$ ) pour une coque cylindrique anisotrope bistable.

En théorie, on obtient implicitement  $\Delta_1 = 0$  du fait que l'on a supposé  $\beta = 1$  et  $\mathbf{h}_i$  sphérique dans l'élaboration des critères analytiques. En pratique, il s'avère très complexe d'appliquer une courbure inélastique parfaitement sphérique, ce qui introduit des imperfections qui mènent souvent à des résultats inattendus comme on le verra dans le paragraphe suivant. Quant au paramètre  $\Delta_2$ , il dépend essentiellement du comportement mécanique de la coque et peut être optimisé en ajustant la valeur de  $\gamma$  (*c.f.* figure 1.11).

Autrement dit, l'objectif est de concevoir et fabriquer une coque multistable pour laquelle  $\Delta_1 \rightarrow 0$  et  $\Delta_2 \rightarrow 0$ . La condition  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$  correspond exclusivement aux matériaux isotropes, qui sont de façon non-fortuite les meilleurs candidats dans cette application, du moins du point de vue théorique. D'un autre côté, ces conditions sur  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  forcent implicitement le choix de coques multistables dont les configurations stables sont de même signe, car un changement de signe de la courbure Gaussienne exige forcément un niveau d'énergie à fournir  $\Delta_2$  très important. C'est pourquoi on se restreint à des formes du type de celles présentées sur la figure 2.6 pour lesquelles la courbure Gaussienne est (quasi-) nulle, même dans les configurations cylindriques intermédiaires. Notons que les structures multistables fabriquées en silicone pur ne sont pas utilisables dans cette application, car trop peu rigides pour recevoir des matériaux actifs tels que les alliages à mémoire de forme ou les piézoélectriques.

Pour ce faire, on étudiera différentes structures associées à différents types de courbures inélastiques de manière à sélectionner la plus adéquate pour une telle application. On traitera d'abord des courbures inélastiques de type thermo-hygro-élasticité sur des structures isotropes et anisotropes et, enfin, on étudiera le cas de l'élasto-plasticité.

### 2.3.1 Courbures inélastiques par thermoélasticité

Dans ce paragraphe, on se focalise sur des courbures inélastiques obtenues par thermoélasticité, plus précisément par effet bilame qui consiste à appliquer une variation de température  $\Delta T$  à une structure composite dont les propriétés thermoélastiques diffèrent d'une couche à l'autre. Ce gap, ciblé principalement sur les coefficients de dilatation thermique, va induire après variation de température des contraintes résiduelles dues à la dilatation différentielle qui mène à une courbure inélastique non-nulle et plus ou moins élevée vis-à-vis du choix de  $\Delta T$ . En général, ce phénomène est évité par les concepteurs mais constitue un moyen simple d'application de courbure inélastique sphérique que l'on choisit d'exploiter ici.

#### 2.3.1.a Disque bilame Aluminium-Cuivre

Lorsque l'on souhaite utiliser l'effet bilame de façon contrôlée, il est important de veiller à ce que les propriétés thermoélastiques des matériaux soient suffisamment différentes pour obtenir un niveau de courbure satisfaisant, et suffisamment proches pour nécessiter des variations de température acceptables et ainsi rester dans le domaine élastique. Dans ce sens, les métaux non-ferreux tels que l'aluminium et le cuivre sont d'excellents candidats car leurs propriétés mécaniques et thermoélastiques sont du même ordre de grandeur (*c.f.* tableau 2.2) et requièrent des variations de température de l'ordre de 100° C pour obtenir des niveaux de courbure raisonnables.

On considère un disque bi-couche de rayon  $R_b = 122.5$  mm (choix qui sera justifié par la suite) et d'épaisseur totale  $h_b = 0.6$  mm, constitué d'une couche d'aluminium et d'une couche de cuivre, étant toutes deux de même épaisseur et de même coefficient de Poisson  $\nu_a = \nu_c = \nu$ . L'objectif étant de disposer d'une coque exploitable à température ambiante, nous sommes forcés d'appliquer un gradient thermique  $\Delta T < 0$  et donc de lier les deux couches à haute température. Pour ce faire, nous proposons d'utiliser une colle Epoxy monocomposant polymérisant à haute température. Ainsi, on applique le joint de colle à température ambiante (supposée à 25° C) et on fait subir à la structure une élévation de température de 25 à 150° C. Après polymérisation de la colle à 150° C, on fait subir un refroidissement à la structure  $\Delta T = -125$ ° C jusqu'à atteindre la température ambiante.

Pour déterminer  $\bar{h}_i$  qui est égal à la courbure du problème élastique linéaire, nous pouvons au choix utiliser la théorie des stratifiés ou les équations d'équilibre sous l'hypothèse de déformations planes. La première méthode, bien plus simple, donne :

$$\bar{h}_i = \mathbf{p}^{th} \Delta T = \frac{24E_a E_c (\alpha_c - \alpha_a)}{E_a^2 + 14E_a E_c + E_c^2} \frac{\Delta T}{h} \{1, 1, 0\}^T \quad (2.24)$$

où  $\mathbf{p}^{th}$  est la matrice de couplage thermoélastique conformément à la théorie des stratifiés (Berthelot, 1999). Ensuite, en combinant (2.24) et (1.23)–(2.2), on obtient la valeur du gradient thermique de multistabilité (bifurcation de type pitchfork) :

$$\Delta T^* = \frac{E_a^2 + 14E_a E_c + E_c^2}{3E_a E_c (\alpha_c - \alpha_a)} \frac{1}{\sqrt{1 - \nu}(1 + \nu)^2} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \quad (2.25)$$

Pour les propriétés matériaux données dans le tableau 2.2 et la géométrie considérée, on obtient :

$$\Delta T^*(R = R_b, h = h_b) = -11.5^\circ\text{C} \quad (2.26)$$

La figure 2.10(a) montre le domaine de conception des disques bilames Al-Cu en fonction des dimensions et du gradient de température appliqué. La zone multistable correspond à la zone grise délimitée par la surface orange. Autrement dit, cette surface est l'analogie (via  $\Delta T$ ) de  $\bar{h}_i^*$  et correspond, pour une géométrie donnée, au point de bifurcation lorsque la coque passe d'une configuration sphérique à une infinité de configurations cylindriques dégénérées à rigidité nulle. Le point noir correspond à l'application que l'on mène avec  $R_b = 122.5$  mm,  $h_b = 0.6$  mm et  $\Delta T = -125$ ° C. Ces graphes s'avèrent

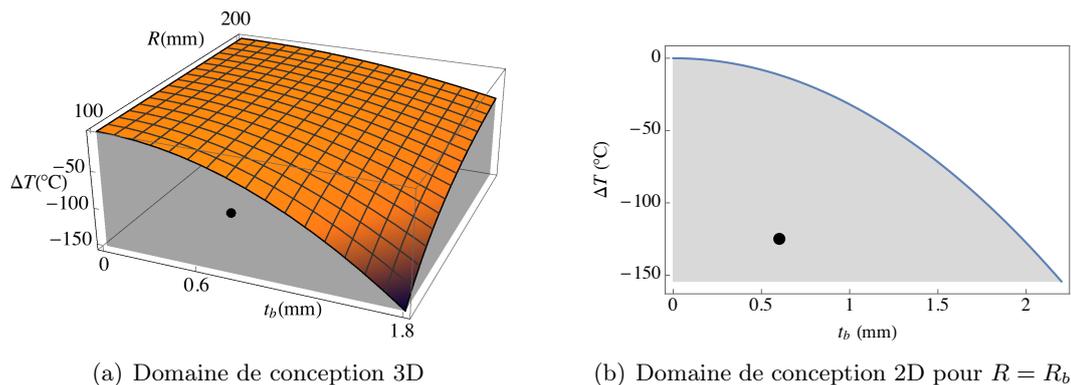


FIGURE 2.10 – Domaine de conception (a) 3D et (b) 2D de bilames Al-Cu. Les régions blanches et grises correspondent respectivement aux domaines monostable et *infiniment stable*.

très utiles en termes de conception de par la simplicité des expressions analytiques obtenues par le biais du modèle UC.

Lors de la fabrication, on constate de façon très nette que la structure est bien cylindrique mais très fortement monostable. En effet, les imperfections de fabrication dues à l'application *à la main* du joint de colle favorisent de façon très prononcée une unique direction de bifurcation, car il est impossible d'appliquer un joint de colle homogène isotrope, si ce n'est par des méthodes robotisées. Plus précisément, la non-homogénéité du joint de colle (systématiquement négligée dans les calculs) a un impact fondamental et rend la courbure inélastique imparfaitement sphérique, ce qui conduit au niveau global à un comportement non-isotrope où une direction est favorisée. Différents tests ont été effectués et mènent à des résultats identiques. Par ailleurs, le processus de refroidissement joue aussi un rôle très important car des variations linéaires et brutales de température ont chacune un impact différent sur la courbure finale de la coque comme le montre la figure 2.11. Finalement, cette structure monostable n'est pas utilisable dans une application au contrôle de forme de coques multistables.

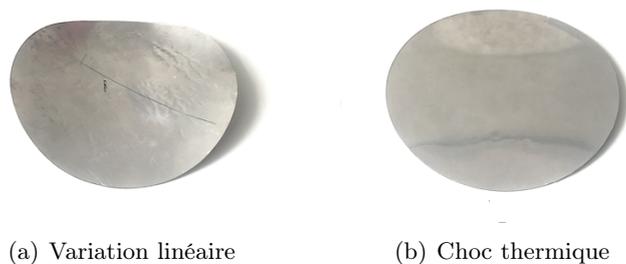


FIGURE 2.11 – Refroidissement linéaire (a) et brutal (b) de la coque bilame Al-Cu.

**Remarque :** Des simulations et expérimentations ont été effectuées par l'utilisation de courbures inélastiques de type hydroélasticité pour lesquelles la démarche est semblable à la thermoélasticité, notamment le domaine de conception en remplaçant le coefficient de dilatation thermique par l'expansion hydrique et la variation de température par une variation d'humidité, et ne sont donc pas présentées ici. Des structures hybrides de type silicone/Polycarbonate et silicone/Aluminium ont été fabriquées. Pour obtenir une courbure inélastique suffisante, la méthode consiste à tremper la plaque de silicone dans un bain de fluide volatil (ici du White Spirit) de manière à augmenter son volume et ensuite la coller sur l'autre couche de matériau différent. Après polymérisation du joint de colle et évaporation du White Spirit, la couche de silicone se rétracte et applique un champ de contraintes sphérique sur la seconde couche, menant, après bifurcation, à une structure cylindrique. Toutefois, de la même manière que pour la structure Al-Cu, la coque ainsi fabriquée est fortement monostable en

raison des imperfections de collage et elle se trouve également inutilisable pour l'application envisagée (*c.f.* figure 2.12). Notons cependant que, comme on l'a dit précédemment, le couplage du silicone avec ces matériaux *rigides* supprime complètement l'effet du poids de la coque vis-à-vis de la contrainte (2.17c), et des méthodes robotisées pourraient rendre ces structures particulièrement intéressantes.

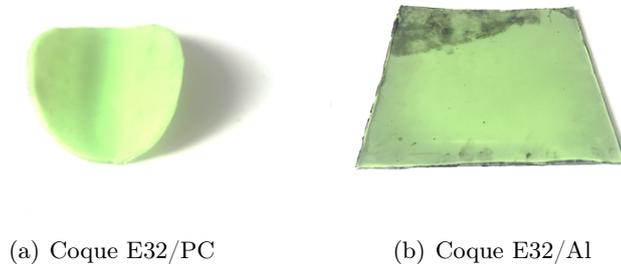


FIGURE 2.12 – Coques (a) Silicone-E32/PC et (b) Silicone-E32/Al fabriquées par hydroélasticité.

### 2.3.1.b Disque composite stratifié hybride Verre-Carbone

Les paragraphes précédents ont montré que les structures isotropes, bien que naturellement optimales d'un point de vue théorique pour minimiser  $\Delta_2$ , posent des problèmes complexes en pratique. Un excellent moyen de contourner ces problèmes expérimentaux réside dans l'utilisation de matériaux composites, que l'on peut concevoir et optimiser de telle manière qu'ils s'approchent le plus possible du cas isotrope, sans l'atteindre pour que la structure soit bistable.

Cependant, la stratification retenue doit permettre l'application d'une courbure inélastique suffisamment élevée et contrôlée, ce qui reste une tâche délicate avec de tels matériaux. En effet, l'utilisation de composites contraint la courbure inélastique à être obtenue pendant le procédé même de polymérisation de la résine, sans l'application d'un joint de colle. Cela écarte donc naturellement les stratifications symétriques, bien connues pour être découplées mécaniquement et thermoélastiquement et conduisant à une courbure inélastique nulle ou presque. De plus, si l'on envisage des configurations stables de même signe, l'utilisation de couches de même matériau résulte à de faibles courbures inélastiques et requiert un grand nombre de couches. En conséquence, on préférera l'utilisation de stratifiés hybrides, c'est-à-dire faits de couches de différents matériaux, de manière à pouvoir contrôler le niveau de courbure inélastique par le biais du coefficient de dilatation thermique de chaque type de matériau. Dans ce sens, deux matériaux optimaux sont les plis (*pré-pregs*) équilibrés ( $E_1 = E_2$  *i.e.* le renfort est constitué de fibres tissées orientées à 0 et 90°) Verre/Époxyde et Carbone/Époxyde, dont la dilatation thermique varie d'un facteur 10 de l'un à l'autre (voir tableau 2.2).

Du point de vue du modèle, on introduit un changement de variables pour lequel, de la même manière que pour tout tenseur symétrique, le tenseur de courbures peut être réécrit uniquement en fonction de ses valeurs propres  $k_I$  et  $k_{II}$ , et de ses vecteurs propres  $\mathbf{m}(\theta) = \{\cos \theta, \sin \theta\}$  et  $\mathbf{n}(\theta) = \{-\sin \theta, \cos \theta\}$  où  $\theta$  est l'orientation des vecteurs propres vis-à-vis des axes d'orthotropie. Cela correspond à la représentation spectrale du tenseur de courbures :

$$\tilde{\mathbf{k}} = k_I \mathbf{m}(\theta) \otimes \mathbf{m}(\theta) + k_{II} \mathbf{n}(\theta) \otimes \mathbf{n}(\theta) \quad (2.27)$$

Sous cette représentation,  $\det \tilde{\mathbf{k}} = k_I k_{II} = g_0$  est la courbure Gaussienne de la coque. Les courbures respectant implicitement la condition d'inextensibilité<sup>2</sup> ont l'expression (Vidoli and Maurini, 2008) :

---

2. Avec les coordonnées (2.28), la contrainte d'inextensibilité est implicitement vérifiée et le problème (P<sub>i</sub>) devient un problème de minimisation sans contrainte.

$$\begin{cases} \tilde{k}_x = \frac{c}{2}(1 + \cos 2\theta) + \frac{g_0}{2c}(1 - \cos 2\theta) & (2.28a) \\ \tilde{k}_y = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\theta) + \frac{g_0}{2c}(1 + \cos 2\theta) & (2.28b) \\ \tilde{k}_{xy} = \left(\frac{c^2 - g_0}{2c}\right) \sin 2\theta & (2.28c) \end{cases}$$

où  $c$  correspond au niveau de courbure ( $c > 0$ ),  $\theta$  à l'orientation de la courbure ( $\theta \in [0, \pi]$ ) et  $g_0$  est la courbure Gaussienne.

Des calculs ont été effectués via un algorithme génétique pour mettre en évidence la stratification optimale selon le problème de conception suivant :

Pour une variation de température donnée  $\Delta T = -125^\circ\text{C}$ , concevoir la stratification optimale minimisant  $\Delta_2$  :

$$\min_{\Delta_2} \mathcal{E}_p(c, \theta, \Delta_2) \quad (\mathfrak{P}_{\Delta_2}^{min})$$

et respectant les contraintes de :

- Coque cylindrique  $\equiv g_0 = 0$ ;
- Configurations stables de même signe  $\equiv$  matrice de couplage thermoélastique  $\mathbf{p}^{th}$  sphérique;
- Nombre minimal de couches utilisées dans l'empilement  $\equiv n \geq 2$ .

Les résultats montrent que les stratifications tri-couche sont les plus adaptées car une stratification bi-couche conduit à un paramètre  $\Delta_2$  élevé tandis qu'une stratification quadri-couche réduit fortement la courbure finale de la coque. La figure 2.13 montre les variations énergétiques pour différentes stratifications. Il apparaît clairement que les stratifications de type Verre/Carbone/Carbone sont celles qui minimisent la quantité  $\Delta_2$  au regard des stratifications Carbone/Verre/Verre. Les résultats d'optimisation donnent lieu à deux stratifications optimales  $[V_0/C_0/C_{41}]$  et  $[V_0/C_0/C_{45}]$  menant à des valeurs de  $\Delta_2$  identiques, où  $\Delta_2 = 0.5\% \mathcal{E}_p^{max}$  seulement.

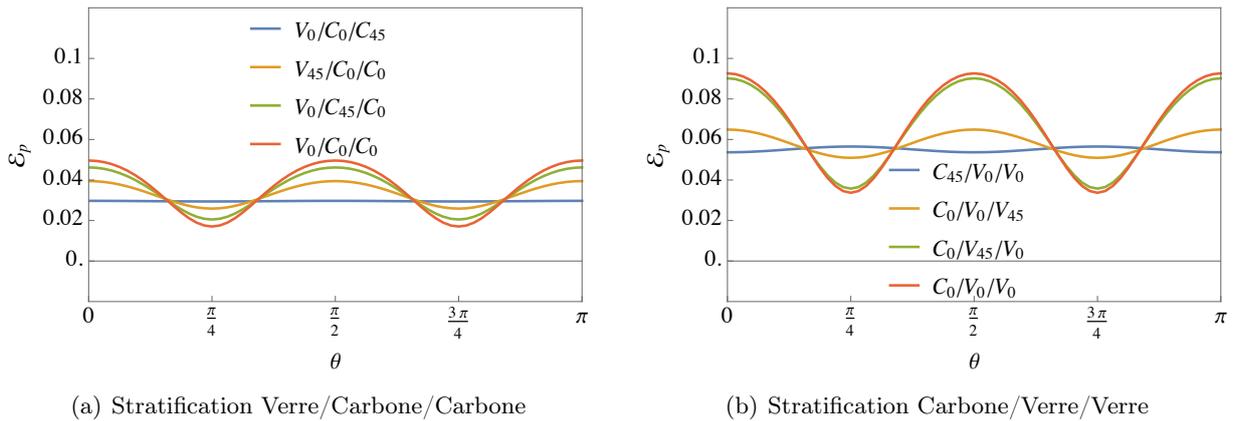


FIGURE 2.13 – Variations énergétiques de coques hybrides Verre/Carbone pour différentes stratifications tri-couches.

On fixe le diamètre de la coque à 245 mm et chaque couche a une épaisseur de 0.2 mm. Les deux stratifications optimales ont été fabriquées conformément aux méthodes classiques de fabrication des composites stratifiés. La polymérisation a été effectuée à  $150^\circ\text{C}$  et la coque a subi ensuite une variation linéaire de température jusqu'à la température ambiante supposée à  $25^\circ\text{C}$  (*c.f.* figure 2.14).

Les structures fabriquées ont toutes deux une courbure quasi-uniforme dont le niveau est proche des prédictions théoriques et numériques. Ceci étant, les deux expérimentations ont mené à des structures

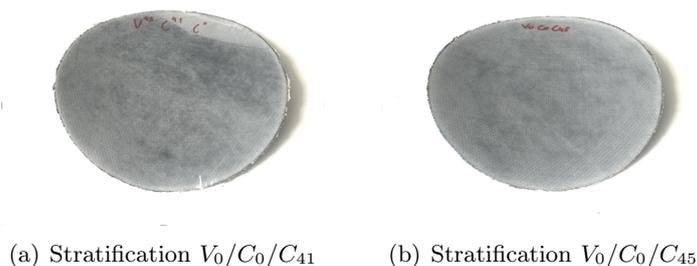


FIGURE 2.14 – Les deux stratifiés optimaux vis-à-vis du problème  $\mathfrak{P}_{\Delta_2}^{min}$ .

fortement monostables, cette fois en raison d'imperfections dues à la fabrication même des plis (*pré-pregs*). En effet, les couches équilibrées telles qu'utilisées ici sont fabriquées avec des fibres orthogonales dont le procédé nécessite obligatoirement un chevauchement entre les fibres selon une période qui diffère d'un fabricant à l'autre. Ce chevauchement qui, pour ces spécimens, suit l'évolution de deux fibres à  $90^\circ$  pour une fibre à  $0^\circ$  résulte à un pli imparfaitement équilibré qui favorise une direction vis-à-vis de l'autre. A cela s'ajoute l'imperfection de fabrication où les fibres ne sont pas parfaitement orthogonales et l'imperfection de découpe des pré-pregs. Finalement, ces structures sont fortement monostables et ne sont également pas utilisables pour l'application envisagée.

### 2.3.2 Courbures inélastiques par plasticité

Les paragraphes précédents ont montré qu'il est remarquablement délicat de construire des structures multistables isotropes ou même quasi-isotropes lorsque l'on envisage des configurations stables de même signe de courbure. C'est pourquoi on propose dans ce paragraphe de créer la multistabilité par le biais de courbures inélastiques appliquées par plasticité. En conséquence, les matériaux composites, dont le comportement élastoplastique est très restreint (la rupture fragile étant prépondérante), ne sont pas de bons candidats et on préfère privilégier les métaux à haute limite d'élasticité. Pour ces derniers, le choix de l'état métallurgique est très important car c'est précisément ce choix qui caractérise le comportement mécanique final de la coque et la possibilité (ou non) de créer la multistabilité.

#### 2.3.2.a Disque de Cuivre laminé

La limite d'élasticité des cuivres de type Cu-a1 varie fortement entre l'état recuit *amorphe* et l'état super-ressort *crystallin* (*c.f.* tableau 2.3), ce dernier étant néanmoins bien plus rare. L'état recuit n'est pas adapté car la structure adopte uniquement la forme qu'on lui impose et il en résultera nécessairement une structure monostable, ce quel que soit le chargement appliqué ; cela explique son utilisation essentiellement limitée aux procédés de mise en forme de tôles. On préférera donc se positionner sur les cuivres de types durs H14 (4/4-dur) qui sont raisonnablement résistants vis-à-vis de l'application envisagée et surtout facilement obtenables dans l'industrie.

État mét.	Recuit	1/4-dur	1/2-dur	4/4-dur	Ressort	Super-ressort
$\sigma_y$ (MPa)	60	190	250	320	360	440

TABLEAU 2.3 – Limite d'élasticité à 0.2% des cuivres Cua1 en fonction de l'état métallurgique.

Cette transition d'états intermédiaires (Recuit  $\rightarrow$  Super-ressort) est obtenue par un procédé de laminage qui consiste à réduire l'épaisseur d'une tôle par écrasement entre deux cylindres rigides (*c.f.* figure 2.15). Les cuivres laminés sont supposés se comporter comme des matériaux élastoplastiques homogènes isotropes à écrouissage isotrope, ce type d'écrouissage étant le plus représentatif. De fait,

il est implicitement supposé que le module d'Young du matériau reste isotrope. Cependant, le procédé d'écrasement est monodirectionnel et a pour effet de perturber l'isotropie du matériau, c'est-à-dire de privilégier une direction de rigidité, ce qui rend son comportement orthotrope car à l'échelle de la microstructure la propagation des dislocations est elle aussi monodirectionnelle.

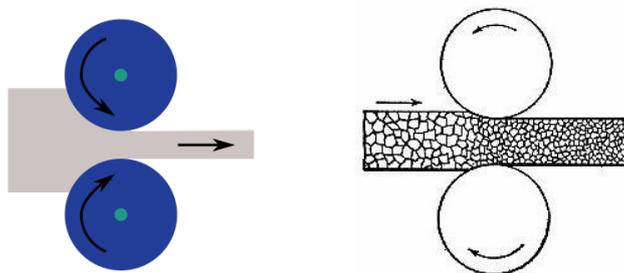


FIGURE 2.15 – Principe du laminage.

En conséquence, l'application d'une courbure inélastique sphérique aura pour effet de créer une structure bistable, mais dont le gap énergétique entre les configurations stables ( $\Delta_2$ ) est faible. Comme cela a été souligné par [Kebadze et al. \(2004\)](#), la détermination de  $\mathbf{h}_i$  élastoplastique est délicate car l'obtention d'une solution analytique élastique linéaire n'est possible qu'avec l'hypothèse de comportement élastique parfaitement plastique, très approximative car limitée à l'hypothèse de rotule plastique *i.e.* de noyau élastique entouré d'une phase plastique, ce qui ne représente pas le comportement réel de la coque. Toujours est-il, on peut s'affranchir du calcul de  $\mathbf{h}_i$  élastoplastique en se restreignant à le mesurer expérimentalement.

La méthode utilisée dans cette application consiste à enrouler *à la main* un disque de cuivre de rayon 245 mm autour d'un cylindre de PVC rigide. Le disque est enroulé dans deux directions orthogonales de manière à rester en consistance avec un champ de courbures inélastiques sphérique. Ces deux directions de plastification correspondent à la direction de laminage/écrasement et son orthogonale. Après plusieurs cycles de plastification en faisant décroître le rayon des cylindres de 80 mm à 70 mm puis enfin 55 mm, la structure devient bistable. On note que, malgré le nombre non-négligeable de sources d'imperfections, on obtient une structure cylindrique bistable dont les configurations stables sont parfaitement orthogonales, et la courbure résultante est très proche de l'hypothèse d'uniformité comme le montre la figure 2.16.

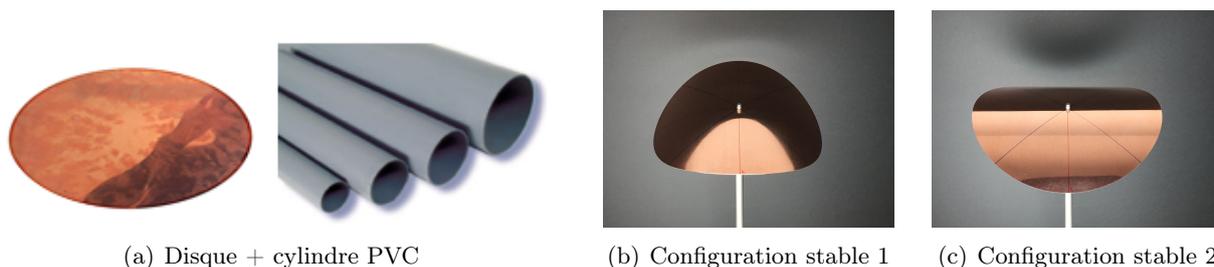


FIGURE 2.16 – Les deux configurations stables cylindriques d'un disque de cuivre Cua1 H14 résultant du procédé de plastification.

### 2.3.2.b Méthode d'identification du comportement mécanique des cuivres laminés

Comme on l'a souligné précédemment, le comportement mécanique des métaux laminés ne peut plus être supposé comme homogène isotrope. Cela apporte une contrainte importante quant à l'identification du *nouveau* comportement de la coque. Nous proposons une méthode hybride basée sur le modèle UC associé à des mesures expérimentales pour identifier ce comportement de façon qualitative, spécifiquement le module de cisaillement  $\gamma$ .

D'abord, on suppose que le procédé de laminage n'affecte pas l'isotropie du module d'Young de la coque, hypothèse raisonnable et courante qui revient à considérer que la loi de comportement met en évidence une unique pente linéaire lors de la charge et de la décharge. Finalement, nous supposons la coque se comporter comme un matériau élastoplastique homogène orthotrope de directions d'orthotropie coïncidant avec la direction de laminage et son orthogonale, plus précisément un matériau à symétrie du carré avec  $\beta = 1$ . De fait, l'anisotropie est supposée être ciblée exclusivement sur le module de cisaillement  $\gamma$  au travers d'une perturbation  $\eta$ , de telle manière que<sup>3</sup> :

$$\begin{cases} \beta = \frac{E_2}{E_1} = 1 & (2.29a) \\ \gamma = \gamma_{iso} + \eta; \eta > 0 & (2.29b) \end{cases}$$

Le paramètre d'anisotropie  $\eta$  est implicitement supposé positif car la rigidité de cisaillement de la coque augmente lorsqu'elle est soumise au procédé de laminage. Pour déterminer ce paramètre  $\eta$  qui est directement lié à la valeur de  $\Delta_2$  ( $\eta = 0 \iff \Delta_2 = 0$ ), nous proposons une méthode expérimentale associée au modèle UC qui consiste à appliquer une force ponctuelle  $\bar{F}$  par le biais de masses ponctuelles aux deux extrémités courbées de la coque comme le montre la figure 2.17. De cette manière, on peut augmenter cette force jusqu'à atteindre le passage d'une configuration stable à l'autre et donc obtenir une mesure de  $\Delta_2$  en fonction de  $\bar{F}$ .

Du point de vue théorique, on considère comme point de départ une coque cylindrique uniformément courbée par plasticité, ce qui permet d'apporter plusieurs hypothèses. Premièrement, on suppose que la coque est et reste cylindrique *i.e.* que la configuration sphérique n'existe pas ( $\det \mathbf{k} = g_0 = 0$ ). On suppose également que la coque travaille en flexion pure, ce qui nous permet de nous baser sur l'hypothèse d'inextensibilité associée au problème  $\mathfrak{P}i$  avec les variables (2.28). Ces hypothèses sont utiles car elles réduisent le nombre de degrés de liberté de trois à deux, que sont le niveau de courbure  $c$  et l'orientation de la courbure  $\theta$ . On suppose que la courbure inélastique appliquée par plasticité est de la forme :

$$[\mathbf{h}_i] = \begin{pmatrix} h_m & 0 \\ 0 & h_m \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Sous ces hypothèses, les deux positions stables ont pour expression ;

$$c_1 = c_2 = c = h_m (1 + \mu); \quad \begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = \pi/2 \end{cases} \quad (2.31)$$

la valeur de  $c$  étant mesurée expérimentalement au travers du déplacement vertical de la coque, on en déduit ensuite  $h_m$  par (2.31). L'application de forces ponctuelles requiert l'introduction du travail des forces extérieures dans le problème  $\mathfrak{P}i$ , qui s'exprime sous forme dimensionnelle par :

$$\bar{\phi} = \bar{F} \left( \bar{w}(R, 0) + \bar{w}(-R, \pi) \right) = \bar{F} k_x \frac{R^2}{R_0} = \frac{2c\bar{F} \left( 1 + \cos(2\theta) \right) R^2}{\sqrt{\frac{(1-\mu^2)R^4}{h^2}}} \frac{R^2}{R_0} \quad (2.32)$$

On en déduit donc le travail adimensionné :

$$\phi = \frac{R^2}{\bar{S}\bar{D}_{11}} \frac{\bar{F}}{F_c} \bar{\phi} = \frac{c}{2} F \left( 1 + \cos(2\theta) \right) \quad (2.33)$$

où  $F_c$  est une force caractéristique utilisée pour adimensionner le travail, et s'exprime par :

$$F_c = \frac{\pi h R^4 E}{3 \left( \frac{(1-\mu^2)R^4}{h^2} \right)^{3/2}} \quad (2.34)$$

---

3. Le procédé de laminage étant monodirectionnel, la direction de laminage a une limite d'élasticité plus importante que son orthogonale. Toutefois, lorsque le diamètre d'enroulement est suffisamment petit, l'effet de cette différence est complètement négligeable car l'écrouissage engendré par le processus de plastification est le même dans les deux directions.

de telle sorte que  $F = \bar{F}/F_c$ . L'énergie totale s'exprime ainsi par :

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_p - \phi = \frac{1}{4} \left[ c^2(2 + \eta) - c \left( c\eta \cos(4\theta) + 4F \cos^2(\theta) \right) - 4h_m c(1 + \mu) + 4h_m^2(1 + \mu) \right] \quad (2.35)$$

Finalement, les configurations de la coque sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_s = \frac{F + 2h_m(1 + \mu)}{2(1 + \eta)} \end{array} \right. \quad (2.36a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_s = \tan^{-1} \left( \pm \frac{\sqrt{2\eta h_m(1 + \mu) - F}}{\sqrt{\eta(F + 2h_m(1 + \mu))}}, \pm \frac{\sqrt{F(1 + 2\eta) + 2\eta h_m(1 + \mu)}}{\sqrt{\eta(F + 2h_m(1 + \mu))}} \right) \end{array} \right. \quad (2.36b)$$

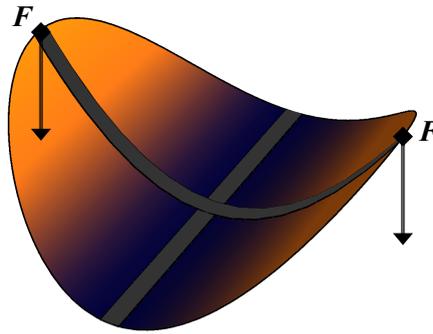


FIGURE 2.17 – Points d'application de masses ponctuelles pour la détermination du paramètre  $\eta$ .

Supposant l'application de deux forces ponctuelles à  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ , ce problème conduit à une unique configuration stable orientée à  $\theta = \pi/2$ . Ensuite, la valeur de  $\eta$  peut être déterminée au choix en résolvant l'équation  $\theta_s = \pi/2$  ou en vérifiant la positivité de la matrice Hésienne (1.50). Spécifiquement, pour cette dernière, on doit vérifier la condition  $\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\text{tot}}}{\partial \theta^2}(c_s, \theta_s) = F + 2c_s \eta = 0$  *i.e.* vérifier pour quelle condition les valeurs propres de (1.50) changent de signe. On obtient l'expression suivante pour  $\eta$  :

$$\eta = -\frac{F}{2(F + h_m(1 + \mu))} \quad (F < 0) \quad (2.37)$$

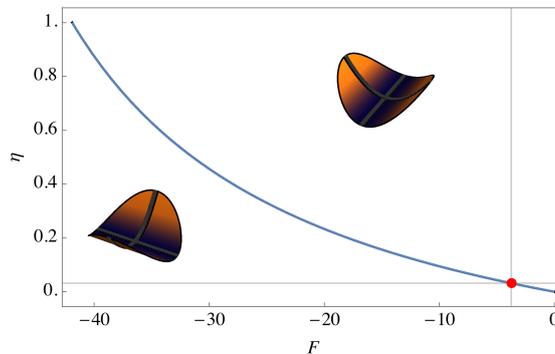


FIGURE 2.18 – Variation de  $\eta$  en fonction de  $F$ . Le point rouge correspond à  $\eta = 0.032$  et  $F = -3.77$  pour le spécimen représenté sur la figure 2.16.

La figure 2.18 montre l'évolution de  $\eta$  en fonction de  $F$  qui fait clairement apparaître une variation non-linéaire. Ceci-étant, pour des valeurs de  $F$  comprises entre 0 et -5, dont font partie les spécimens

étudiés, la variation reste quasi-linéaire, ce qui signifie que l'imperfection de mesure a peu de répercussions sur l'estimation de  $\eta$ . Différents tests ont été effectués sur différents spécimens montrant que l'ordre de grandeur du paramètre  $\eta$  est d'environ 3/100 (moyennant des imperfections de fabrication manuelle), correspondant à un ordre de grandeur de masses ponctuelles d'environ 30 g. Des simulations par éléments finis ont été effectuées via Abaqus dans les mêmes conditions de chargement et montrent que l'erreur d'estimation analytique de  $\eta$  est de l'ordre de 3% vis-à-vis des imperfections de plastification.

On dispose ainsi d'une structure parfaitement bistable, uniformément courbée, à faible énergie d'actionnement et dont le comportement mécanique est globalement identifié. Cette structure optimale vis-à-vis de toutes celles fabriquées fera l'objet d'une application au contrôle de forme qui sera détaillée dans le [chapitre 3](#).

## 2.4 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif d'exploiter les résultats analytiques mis en exergue dans le [chapitre 1](#) de manière à en faire usage avec l'objectif de mettre en place des critères hybrides de conception et fabrication de coques multistables basés sur le modèle UC et les simulations par éléments finis. Ces critères s'avèrent particulièrement utiles de par les expressions analytiques très concises obtenues grâce au modèle UC tout en respectant l'accord avec les simulations numériques par éléments finis non-linéaires, notamment sur les régions de tristabilité où l'écart est maximal. A ces critères, nous avons ajouté des contraintes complémentaires qui s'appliquent dans des cas spécifiques mais sont négligeables dans la plupart des applications et, comme on l'a montré expérimentalement, n'affectent en rien la multistabilité. De plus, il apparaît que ces critères restent très précis même lorsque la coque ne respecte ni l'hypothèse de coque peu profonde, ni celle de coque mince qui sont à la base de l'élaboration du modèle UC. Finalement, les différents prototypes expérimentaux ont démontré toute la pertinence de ces critères et leur mise en application très simple.

Par la suite, l'objectif était d'exploiter ces critères dans l'optique de concevoir et fabriquer des coques multistables à faible énergie d'actionnement. Là encore, ces critères ont permis de faciliter la démarche de conception et la mise en place de résultats concis. En outre, on peut tirer de ces expérimentations plusieurs conclusions :

1. Les coques isotropes, naturellement meilleures candidates pour minimiser  $\Delta_2$ , montrent des difficultés très prononcées lors de la fabrication de par la prépondérance des imperfections de fabrication sur le comportement mécanique de la coque, en affectant la multistabilité. La principale cause limitative dans cette application se trouve sur le procédé de collage car c'est l'hétérogénéité même du joint qui rend la tâche non-faisable. Finalement, il n'est pas possible, du moins avec des méthodes non-industrielles, de fabriquer des structures neutralement stables par thermoélasticité/hydroélasticité ou plus généralement lorsqu'un procédé de collage est envisagé ou lorsque les imperfections matérielles et/ou géométriques sont trop importantes.
2. Les métaux laminés, associés à des courbures inélastiques par plasticité, sont probablement les meilleurs candidats dans cette application car ils mettent en évidence plusieurs configurations stables dont l'énergie nécessaire au passage de l'une à l'autre est très raisonnablement faible. En outre, des techniques se rapprochant des méthodes industrielles permettraient de diminuer encore le gap énergétique  $\Delta_2$  nécessaire au passage entre les deux équilibres stables.
3. La méthode hybride basée sur des mesures expérimentales associées au modèle UC pour identifier le comportement des métaux laminés se montre très efficace et permet de décrire complètement le comportement mécanique global de la coque vis-à-vis des simulations par éléments finis.

En somme, la conception de structures multistables est très simplifiée par l'utilisation du modèle UC et des critères proposés. Toutefois, il reste sensiblement délicat de fabriquer des structures multistables lorsque les imperfections ne sont pas contrôlées, ce qui a (dans la majorité des cas) pour effet d'annihiler l'existence de plusieurs configurations stables.

# Chapitre 3

## Contrôle de forme multiparamétrique d'une coque quasi-infiniment stable

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>64</b>
<b>3.2</b>	<b>Aspects théoriques : coques inextensibles à courbure uniforme</b>	<b>65</b>
3.2.1	Équations des coques inextensibles de Koiter	65
3.2.2	L'hypothèse de courbure uniforme et le problème géométrique analogue	66
3.2.2.a	Formulation du problème	66
3.2.2.b	Coques isotropes avec courbure inélastique sphérique	69
3.2.2.c	Coques anisotropes avec courbure inélastique sphérique	69
3.2.3	Conception d'une loi d'actionnement continue	71
<b>3.3</b>	<b>Dimensionnement d'une structure avec actionneurs intégrés</b>	<b>74</b>
3.3.1	Choix d'une méthode d'actionnement	74
3.3.2	Architecture des matériaux actifs	76
3.3.3	Sens de positionnement des actionneurs	77
<b>3.4</b>	<b>Prototype expérimental et résultats</b>	<b>79</b>
3.4.1	Prédictions théoriques	80
3.4.1.a	Processus de plastification	80
3.4.1.b	Trois paires d'actionneurs	80
3.4.2	Validation numérique	82
3.4.2.a	Mise en données	82
3.4.2.b	Résultats	84
3.4.3	Mise en œuvre expérimentale	85
3.4.3.a	Processus de plastification : obtention de la multistabilité	85
3.4.3.b	Collage des MFCs : d'une coque multistable à une structure adaptative	86
3.4.3.c	Application des tensions : contrôle de forme	87
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>90</b>

---

*Ce chapitre a pour objectif de définir le dimensionnement complet et la mise en œuvre expérimentale d'une application au contrôle de forme sur une coque avec actionneurs intégrés (coque multistable–matériaux actifs). D'abord, on dérive un modèle inextensible de coques minces de Koiter à courbures uniformes que l'on utilise pour démontrer l'application envisagée. Ensuite, nous choisissons la méthode de contrôle adaptée via l'utilisation de matériaux actifs de manière à définir une architecture d'actionneurs optimisée visant à minimiser l'énergie d'actionnement. Enfin, les mises en œuvre numérique et expérimentale sont présentées.*

### 3.1 Introduction

L'exploitation de la multistabilité dans des applications de structures adaptatives a reçu un intérêt grandissant ces quelques dernières années. Par structure adaptative, on désigne une structure qui est capable d'adapter sa forme à différents régimes de fonctionnement. Les applications associées sont nombreuses et variées, allant des structures déployables pour l'aérospatial (Brinkmeyer et al., 2016) jusqu'à la conception d'ailes adaptatives pour l'aéronautique (Mattioni et al., 2008b). Cette capacité d'adaptation est naturellement facilitée par l'exploitation de structures multistables qui, par une faible énergie apportée, sont capables de passer d'une configuration stable à une autre. Une fois la multistabilité mise en évidence, une étape de dimensionnement est nécessaire, dans laquelle on sélectionne une méthode de contrôle de forme par l'emploi de matériaux intelligents que l'on vient attacher à la structure, afin de concevoir un chemin d'actionnement qui minimise l'énergie de déformation de la coque. Cela peut être obtenu par plusieurs types de matériaux actifs dont les deux plus utilisés sont les alliages à mémoire de forme (AMF) et les matériaux piézocomposites (MFC).

Les plaques composites stratifiées asymétriques bistables sont de bonnes candidates et ont été particulièrement étudiées du fait de leur habileté à posséder deux configurations stables, mises en évidence lors de la phase d'élaboration où les deux configurations sont de courbures égales mais opposées en signe. L'avantage majeur des structures multistables réside dans leur capacité à subir de grands changements de forme tout en limitant l'apport énergétique nécessaire pour cette transition, car l'application d'une force ponctuelle (ou autre méthode) n'est nécessaire que pour passer d'une position stable à une autre. Ensuite, la force peut être retirée et la structure maintient sa position comme stable.

Un nombre très conséquent d'auteurs se sont intéressés à l'étude du contrôle de forme de coques composites bistables. Schultz and Hyer (2003) ont étudié la transition dynamique de type snap-through de composites stratifiés bistables par l'utilisation d'un unique patch piézoélectrique disposé sur une face. D'autres auteurs ont étudié l'effet de l'humidité sur la multistabilité (Portela et al., 2008), ou l'utilisation de différentes architectures d'actionneurs piézoélectriques (Dano et al., 2012), et même des méthodes hybrides couplant AMF et MFCs (Kim et al., 2010). Les recherches ont évolué par l'étude de stratifications génériques (Bowen et al., 2012) et aussi par la conception et l'optimisation de structures composites minimisant l'énergie de snap-through (Betts et al., 2011).

En outre, plusieurs auteurs ont proposé des modèles de coques capables de modéliser de façon qualitative ou quantitative le comportement des structures multistables (Schultz and Hyer, 2003; Ren and Parvizi-Majidi, 2006; Fernandes et al., 2010), dans le but de faciliter la conception d'une méthode de contrôle de forme.

Si les composites stratifiés ont exhibé toute leur habileté dans les applications aux structures adaptatives, ils ont souvent l'inconvénient d'être globalement rigides et requièrent tout de même une énergie d'actionnement élevée. Aussi, la transition est souvent dynamique (snap-through) et non-contrôlée dans le temps. Dans ce sens, Fernandes et al. (2010) ont étudié des chemins d'actionnement permettant d'établir une transition quasi-statique par l'emploi de plusieurs paramètres d'actionnement via l'utilisation de patches piézoélectriques, en se limitant au cadre théorique.

Les structures métalliques isotropes sont d'excellentes candidates dans des applications au contrôle de forme, notamment pour leur capacité à subir de grandes déformations en dépensant une énergie moindre. Si les configurations stables sont de même signe de courbure, alors elle se classent dans la catégorie des structures multistables à faible énergie d'actionnement, dans le sens où elles possèdent plusieurs configurations stables dont la différence de niveau énergétique est très faible, et dont l'énergie nécessaire au passage de l'une à l'autre est aussi très faible.

Dans ce chapitre, on étudie en détail une application au contrôle de forme par l'exploitation d'une structure multistable à faible énergie d'actionnement, en référence au chapitre 2. Dans un premier temps, on propose un modèle non-linéaire de coques profondes basé sur la cinématique de Koiter, et associé à l'hypothèse d'inextensibilité. Ensuite, on utilise ce modèle pour concevoir et dimensionner une structure multistable avec actionneurs intégrés. Cette tâche comprend le choix et l'architecture des matériaux intelligents que l'on fixe sur la structure, ainsi que la conception d'une loi d'actionnement adéquate. Pour finir, on effectue une validation numérique et la mise en œuvre expérimentale.

## 3.2 Aspects théoriques : coques inextensibles à courbure uniforme

Dans cette section, on revisite le modèle non-linéaire de coques minces de Koiter sous l'hypothèse d'inextensibilité. Pour des détails précis sur les aspects de géométrie différentielle et topologie associés à cette formulation, voir Ciarlet (2000). L'objectif est de dériver un modèle à courbures uniformes, analogue au modèle UC mais en abandonnant l'hypothèse de coque peu profonde et de fait la cinématique de Föppl-von Kármán, de manière à se focaliser sur le cas général au moyen des uniques hypothèses de coque mince à courbure uniforme.

### 3.2.1 Équations des coques inextensibles de Koiter

Dans une démarche analogue à la cinématique de FvK, on considère une configuration plate comme configuration de référence pour la coque, décrite par un domaine bidimensionnel  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , sur la base des hypothèses formulées dans le paragraphe 1.2.1. En référence aux coordonnées cartésiennes  $(\bar{x} = \{\bar{x}, \bar{y}\})$  du plan moyen, les première et seconde formes fondamentales de la surface de référence s'écrivent, en notation indicielle et suivant la convention classique de sommation pour les géométries bidimensionnelles, respectivement :

$$a_{\alpha\beta}^0 = \delta_{\alpha\beta}; \quad b_{\alpha\beta}^0 = 0; \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (3.1)$$

où  $\delta_{\alpha\beta}$  est le symbole de Kronecker. Le choix  $b_{\alpha\beta}^0 = 0$  indique implicitement que la courbure initiale de la coque est nulle.

Étant donné un champ de déplacements  $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , on suppose la surface  $\mathcal{S} = \Omega + \bar{\mathbf{u}} \subset \mathbb{R}^3$  décrire la configuration déformée de la coque, pour laquelle on désigne par  $a_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}})$  et  $b_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}})$  les première et seconde formes fondamentales, respectivement. Cela conduit à la formulation classique du modèle non-linéaire de Koiter avec  $\gamma$  le tenseur métrique et  $\bar{\mathbf{k}}$  le tenseur de courbures du plan moyen. Leurs composantes covariantes s'expriment par :

$$\gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) - a_{\alpha\beta}^0) \equiv \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) - \delta_{\alpha\beta}) \quad \text{et} \quad \bar{k}_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) = b_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) - b_{\alpha\beta}^0 \equiv b_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) \quad (3.2)$$

On se focalise sur des coques inextensibles en supposant le tenseur métrique nul en tout point de la surface *i.e.*  $\gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) = 0$  sur  $\Omega$ , c'est-à-dire que la distance entre deux points infiniment voisins mesurée sur la surface est invariante durant toute transformation. La courbure de Gauss d'une surface étant invariante par isométrie locale, l'hypothèse d'inextensibilité est bien liée à la condition  $\gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) = 0$ . En associant cette condition à l'hypothèse  $b_{\alpha\beta}^0 = 0$ , cela implique que  $\det \bar{k}_{\alpha\beta} = 0$  durant toute la transformation (Ciarlet, 2000) et la coque est nécessairement cylindrique. Avec l'hypothèse supplémentaire de coque libre aux bords (*i.e.* uniquement fixée en son centre et dont le travail des forces extérieures est nul en tout point), cela restreint l'énergie potentielle de la coque à être stockée uniquement en termes de sa contribution de flexion. Cette dernière, pour un matériau muni d'une loi de comportement élastique linéaire, est une forme quadratique du tenseur de courbures, et s'exprime par :

$$\bar{\mathcal{E}}_f(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{D}^{\alpha\beta\sigma\tau} (\bar{k}_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) - \bar{h}_{\sigma\tau}) (\bar{k}_{\gamma\delta}(\bar{\mathbf{u}}) - \bar{h}_{\sigma\tau}) \, d\Omega \quad (3.3)$$

Dans cette expression, les termes  $\bar{D}^{\alpha\beta\sigma\tau}$  sont les composantes contravariantes du tenseur du quatrième ordre de rigidité de flexion réduit à l'hypothèse de contraintes et déformations planes, tandis que les termes  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  sont les composantes covariantes des courbures imposées (ou inélastiques dans notre terminologie) à la coque. En l'absence de chargement extérieur et en supposant les déplacements quasi-statiques, (3.3) est finalement l'énergie totale de la coque. Ses configurations d'équilibre stables sont celles qui résolvent le problème de minimisation sous contrainte :

$$\min_{\bar{\mathbf{u}}} \bar{\mathcal{E}}_f(\bar{\mathbf{u}}) \quad \text{sous la contrainte} \quad \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (3.4)$$

Dans l'esprit intrinsèque aux approches de l'élasticité (Ciarlet et al., 2009), on peut résoudre le même problème en minimisant l'énergie en termes des courbures, pourvu qu'elles vérifient les équations de compatibilité (c.f. chapitre 1). En particulier, si  $\Omega$  est simplement connecté *i.e.* si chaque chemin entre deux points de  $\Omega$  peut être continument transformé en restant dans le même espace (si il n'existe aucun "trou" sur  $\Omega$ ), les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier le champ de courbures  $\bar{k}_{\alpha\beta}$  pour correspondre à un champ de déplacements  $\bar{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega)$  sont :

$$\det \bar{k}_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{k}_{\alpha\sigma,\beta} - \bar{k}_{\alpha\beta,\sigma} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.5)$$

où  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert muni de son produit scalaire et de la norme associée. Les conditions (3.5) sont établies à partir des équations de Gauss et Codazzi-Mainardi pour la surface  $\mathcal{S}$ , une fois que l'on a souligné que  $a_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) = a_{\alpha\beta}^0 = \delta_{\alpha\beta}$  et  $b_{\alpha\beta} = \bar{k}_{\alpha\beta}$  (Ciarlet et al., 2008). En conséquence, une approche intrinsèque, équivalente à (3.4) pour trouver les équilibres stables serait de résoudre le problème suivant :

$$\min_{\bar{k}_{\alpha\beta} = \bar{k}_{\beta\alpha}} \bar{\mathcal{E}}_f \quad \text{sous les contraintes} \quad \begin{cases} \det \bar{k}_{\alpha\beta} = 0 \\ \bar{k}_{\alpha\sigma,\beta} - \bar{k}_{\alpha\beta,\sigma} = 0 \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

Les solutions du problème (3.4) peuvent être retrouvées en résolvant pour le déplacement  $\bar{\mathbf{u}}$  les équations  $\bar{k}_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) = \tilde{k}_{\alpha\beta}^i$  pour chaque minimum  $\tilde{k}_{\alpha\beta}^i$  de (3.6). On note que, vis-à-vis de la détermination du champ de déplacements actuel  $\bar{\mathbf{u}}$ , on peut associer de façon univoque à chaque tenseur de courbures  $\bar{k}_{\alpha\beta}$  satisfaisant (3.5) une configuration déformée de la coque, vis-à-vis de l'hypothèse faite sur la variation de la courbure sur le domaine  $\mathcal{S}$  (uniforme, quadratique...).

### 3.2.2 L'hypothèse de courbure uniforme et le problème géométrique analogue

#### 3.2.2.a Formulation du problème

Le problème (3.6) est le problème inextensible associé à la minimisation de l'énergie de flexion, qui peut être simplifié avec l'hypothèse de courbure uniforme, pour laquelle on suppose la forme de la structure donnée par le champ de déplacement transverse  $\bar{w}(\bar{\mathbf{x}}) = 1/2 \bar{k}_{\alpha\beta} \bar{x}_\alpha \bar{x}_\beta$ . Le tenseur de courbures associé  $\bar{k}_{\alpha\beta}$  est uniforme dans l'espace, et est défini comme sa double dérivée covariante  $\bar{k}_{\alpha\beta} = \bar{w}_{,\alpha\beta}$ . Après réécriture en notation de Voigt<sup>1</sup> ( $\bar{\mathbf{k}} = \{\bar{k}_x, \bar{k}_y, 2\bar{k}_{xy}\}$ ,  $\bar{\mathbf{h}} = \{\bar{h}_x, \bar{h}_y, 2\bar{h}_{xy}\}$ ), et une procédure d'adimensionnement telle que décrite dans la section 1.2, le problème (3.6) peut être réécrit sous la forme :

$$\min_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_f = \frac{1}{2} D (\mathbf{k} - \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{h}) \quad \text{sous la contrainte} \quad \det \mathbf{k} = k_x k_y - k_{xy}^2 = 0 \quad (3.7)$$

En effet, les équations de Codazzi-Mainardi dans (3.5) sont trivialement vérifiées pour tout tenseur de courbures uniforme. Pour les matériaux orthotropes dont les plans de symétrie sont confondus avec le système de coordonnées  $(x, y)$ , la matrice de rigidité de flexion adimensionnée de la coque peut toujours être réduite sous la forme :

$$D = D_0 \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{avec } D_0 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \nu^2 < \beta, \quad 1 \geq \beta > 0, \quad \gamma \geq 0 \quad (3.8)$$

où  $E_1 > 0$  est le module d'Young dans la direction  $x$ ,  $h$  est l'épaisseur de la coque, et  $\nu$  et  $\gamma$  sont le coefficient de Poisson et le module de cisaillement, comme précédemment. Les conditions dans (3.8) sur les paramètres matériaux  $\nu$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont liées à la positivité de la matrice  $D$ ; sans perte de généralité, on a choisi  $E_1 \geq E_2$  et donc  $\beta \leq 1$ .

---

1. Dans la suite, on notera parfois les matrices en termes de leurs composantes covariantes pour une meilleure lisibilité. Toutefois, l'intégralité des calculs est faite en utilisant la notation de Voigt.

On introduit le changement de variables (3.9), en passant des coordonnées  $(k_x, k_y, k_{xy})$  aux coordonnées  $(\kappa_m, \kappa_d, \kappa_t)$ , obtenu par un problème aux valeurs propres sur la matrice  $D$  :

$$\begin{cases} \kappa_m = \sqrt{1 + \frac{\nu}{\sqrt{\beta}}} \left( \frac{k_x + k_y \sqrt{\beta}}{2} \right) \\ \kappa_d = \sqrt{1 - \frac{\nu}{\sqrt{\beta}}} \left( \frac{k_y \sqrt{\beta} - k_x}{2} \right) \\ \kappa_t = \sqrt{2\gamma} k_{xy} \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_m = \sqrt{1 + \frac{\nu}{\sqrt{\beta}}} \left( \frac{h_x + h_y \sqrt{\beta}}{2} \right) \\ \eta_d = \sqrt{1 - \frac{\nu}{\sqrt{\beta}}} \left( \frac{h_y \sqrt{\beta} - h_x}{2} \right) \\ \eta_t = \sqrt{2\gamma} h_{xy} \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $\boldsymbol{\kappa} = \{\kappa_m, \kappa_d, \kappa_t\}$  est la courbure actuelle de la coque et  $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_m, \eta_d, \eta_t\}$  la courbure inélastique en supposant la courbure initiale nulle. La matrice  $D$  étant définie positive, les relations (3.9) sont inversibles et représentent un véritable changement de coordonnées dans l'espace des courbures. La subtilité de ce changement de variables réside dans le fait qu'il diagonalise l'énergie de flexion qui a désormais la forme suivante :

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2} D (\mathbf{k} - \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{h}) = D_0 \left[ (\kappa_m - \eta_m)^2 + (\kappa_d - \eta_d)^2 + (\kappa_t - \eta_t)^2 \right] = D_0 \|\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\eta}\|^2 \quad (3.10)$$

Par l'utilisation de (3.9), la contrainte d'inextensibilité s'exprime par :

$$\det \mathbf{k} = \frac{\kappa_m^2}{\sqrt{\beta} + \nu} - \frac{\kappa_d^2}{\sqrt{\beta} - \nu} - \frac{\kappa_t^2}{2\gamma} = f(\boldsymbol{\kappa}) = 0 \quad (3.11)$$

De fait, l'ensemble des courbures satisfaisant à la condition d'inextensibilité (3.11) correspond à un cône  $\mathcal{C}$  dans l'espace du nouveau système de coordonnées. Particulièrement, l'axe de ce cône est l'axe de la courbure moyenne  $\kappa_m$  et les sections du cône dans le plan  $\kappa_m = cste$  sont des ellipses strictes si le matériau est anisotrope, des cercles s'il est isotrope. Par exemple, pour le plan  $\kappa_m = 1$ , la contrainte (3.11) définit une ellipse de demi-axes :

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta} - \nu}{\sqrt{\beta} + \nu}}; \quad b = \sqrt{\frac{2\gamma}{\sqrt{\beta} + \nu}} \quad (3.12)$$

En supposant un matériau à symétrie du carré avec  $\beta = 1$  et donc une matrice  $D$  de la forme (1.24), les deux paramètres du matériau  $\nu$  et  $\gamma$  caractérisent complètement les sections du cône  $\mathcal{C}$  des courbures inextensibles. En résumé, le changement de variables (3.9) conduit au problème (3.10)–(3.11) et permet ainsi de remplacer le problème (3.7) par le problème suivant :

$$\min_{\boldsymbol{\kappa}} \|\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\eta}\| \quad \text{sous la contrainte } \boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{C} \quad (3.13)$$

Finalement, la détermination des équilibres stables des coques inextensibles précontraintes de Koiter à courbures uniformes revient à trouver tous les points  $\boldsymbol{\kappa}^{(i=1,2,\dots)}$  sur le cône  $\mathcal{C}$ , à distance minimale d'un point donné  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3$ . Le tableau 3.1 résume les analogies entre interprétations analytique (3.7) et géométrique (3.13) du problème de minimisation de l'énergie.

De toute évidence, les problèmes (3.7) et (3.13) sont tous deux possiblement non-linéaires et non-convexes, et qui plus est munis de plusieurs minimas locaux. Cependant, la forme (3.13) est particulièrement utile pour interpréter d'un point de vue géométrique les résultats du problème de minimisation, en l'occurrence les différents équilibres stables et les trajets de variation de la courbure de la coque sous une sollicitation par courbures inélastiques donnée. C'est là l'intérêt de l'hypothèse d'inextensibilité, plus précise pour de grandes courbures, et capable de fournir des solutions analytiques non-obtenables avec un modèle extensible.

Courbure inélastique uniforme $h_{\alpha\beta}$	$\iff$	Point $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3$
Configurations stables $k_{\alpha\beta}^i$ associées à $h_{\alpha\beta}$	$\iff$	Points $\boldsymbol{\kappa}^{(i)} \in \mathcal{C}$ à une distance minimale de $\boldsymbol{\eta}$
Énergie de flexion	$\iff$	Distance $\ \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\eta}\ $ pour $\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{C}$
Énergie d'extension	$\iff$	Distance $\boldsymbol{\kappa}$ à partir du cône $\mathcal{C}$

TABLEAU 3.1 – Analogies analytiques  $\stackrel{(3.9)}{\iff}$  géométriques.

En notant que les sections du cône sont des ellipses dans le plan  $(\kappa_d, \kappa_t)$  vis-à-vis de l'anisotropie du matériau, on peut introduire localement le changement de variables :

$$\begin{cases} \kappa_d = a \cos \theta \\ \kappa_t = b \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (3.14)$$

et le problème (3.13) peut être transformé en problème de minimisation sans contrainte. En effet, chaque point  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{C}$  a la forme :

$$[\boldsymbol{\kappa}](\kappa_m, \theta) = \kappa_m \begin{pmatrix} 1 & b \sin \theta \\ b \sin \theta & a \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

pour  $\theta \in [0, 2\pi]$  la coordonnée azimutale le long des sections du cône. Via (3.14), une autre forme de (3.13) est donnée par :

$$\min_{(\kappa_m, \theta)} \left[ (\kappa_m - \eta_m)^2 + (\kappa_m a \cos \theta - \eta_d)^2 + (\kappa_m b \sin \theta - \eta_t)^2 \right] \quad (3.16)$$

Intrinsèquement, les conditions nécessaires de stationnarité de la distance carrée (3.16) sont :

$$\begin{cases} \kappa_m = \frac{\eta_m + a \eta_d \cos \theta + b \eta_t \sin \theta}{1 + a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} & (3.17a) \\ \eta_d = \eta_t \frac{b(1+a^2)}{a(1+b^2)} \frac{1}{\tan \theta} + \eta_m \frac{a^2 - b^2}{a(1+b^2)} \cos \theta & (3.17b) \end{cases}$$

où la solution  $\kappa_m = 0$  *i.e.* le vertex du cône a été exclue car physiquement inadmissible dans cette analyse étant donné que  $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$ . Une fois fixée la courbure inélastique  $\boldsymbol{\eta}$  et les constantes du matériau  $a$  et  $b$ , pour chaque solution  $\theta = \theta^{(i)}$  de (3.17b), on a via (3.17a) et (3.15) une unique solution  $\boldsymbol{\kappa}^{(i)}$  sur le cône.

Excepté pour les coques neutralement stables pour lesquelles il existe une infinité de solutions à ce problème vis-à-vis de  $\theta$ , on peut vérifier simplement par l'utilisation d'identités géométriques standard qu'il y a au plus quatre solutions au problème (3.17b) pour  $\theta \in [0, 2\pi]$ . En conséquence, il y a au plus quatre points  $\boldsymbol{\kappa}^{(1,2,3,4)}$  sur le cône  $\mathcal{C}$  ayant une distance stationnaire d'un point donné  $\boldsymbol{\eta}$ . On dispose d'une solution analytique de (3.17b) (non-reportée ici car trop longue) qui met en évidence quatre solutions  $\theta^{(1,2,3,4)}$ .

Finalement, nous pouvons encore simplifier les problèmes (3.13)–(3.16) par une approche plus *géométrique*. En effet, une condition nécessaire de stationnarité de la distance  $\|\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\eta}\|$  s'écrit :

$$\boldsymbol{\kappa}(\kappa_m, \theta) - \boldsymbol{\eta} = \lambda \mathbf{n}(\theta) \quad \text{avec} \quad [\mathbf{n}](\theta) = \begin{pmatrix} a b & -a \sin \theta \\ -a \sin \theta & -b \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

avec  $\lambda$  un réel et  $\mathbf{n}(\theta)$  un vecteur normal au cône au point  $\boldsymbol{\kappa}(\kappa_m, \theta)$ . On doit ainsi résoudre un système de trois équations sur les inconnues  $(\lambda, \kappa_m, \theta)$ . Une fois projetées dans la directions  $\mathbf{n}(\theta)$  et résolues pour  $\lambda$ , ces équations se réduisent naturellement à (3.17). Cela permet d'obtenir via  $\lambda$  une expression plus simple de la distance carrée en fonction de  $\theta$  uniquement :

$$\| \boldsymbol{\kappa}^i - \boldsymbol{\eta} \|^2 = \lambda^2 \mathbf{n}(\theta) \cdot \mathbf{n}(\theta) = \frac{(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n}(\theta))^2}{\mathbf{n}(\theta) \cdot \mathbf{n}(\theta)} = \frac{2(a b \eta_m - a \eta_t \sin \theta - b \eta_d \cos \theta)^2}{a^2 + 2a^2 b^2 + b^2 + (b^2 - a^2) \cos 2\theta} \quad (3.19)$$

qui peut être utilisée pour vérifier la minimalité des solutions  $\theta^{(1,2,3,4)}$  de (3.17b). A titre d'exemple et de validation du modèle, on détaille dans les paragraphes suivants les cas isotropes et anisotropes pour lesquels on recouvre des solutions existantes dans la littérature via (3.17) et (3.19) avec  $\boldsymbol{\eta}$  sphérique.

### 3.2.2.b Coques isotropes avec courbure inélastique sphérique

On suppose une coque isotrope à laquelle on applique une courbure inélastique sphérique  $h_x = h_y = h_m$  et  $h_{xy} = 0$ . On déduit via (3.9) que les points  $\boldsymbol{\eta}$  associés se trouvent sur l'axe du cône  $\mathcal{C}$  (voir figure 3.1). En l'occurrence, on a  $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_m, 0, 0\}$  avec  $\eta_m = \sqrt{1 + \nu} h_m$ . De plus, le matériau étant isotrope, on a  $\gamma = (1 - \nu)/2$  et les sections du cône sont des cercles étant donné que  $a = b$ . Cela correspond au cas dégénéré à rigidité nulle décrit dans le chapitre 1, pour lequel l'équation (3.17b) est trivialement vérifiée  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ . Autrement dit, il existe une infinité de points  $\boldsymbol{\kappa}$  appartenant au cône  $\mathcal{C}$ , à égale distance d'un point stationnaire  $\boldsymbol{\eta}$  donné sur l'axe du cône, c'est-à-dire tous les points :

$$[\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\theta)] = \kappa_m \begin{pmatrix} 1 & a \sin \theta \\ a \sin \theta & a \cos \theta \end{pmatrix}; \quad \kappa_m = \frac{\eta_m}{1 + a^2}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (3.20)$$

La distance carrée (3.19) de ces points vis-à-vis de  $\boldsymbol{\eta}$  se réduit à une constante indépendante de  $\theta$ . En outre, cette distance carrée étant proportionnelle à l'énergie de flexion, on en déduit que l'énergie potentielle de la coque est la même pour tous les points (3.20). Autrement dit, la coque est neutralement stable pour toutes les courbures correspondantes :

$$[\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\theta)] = h_m \sqrt{1 + \nu} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & 2 \sin \theta \\ 2 \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}; \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (3.21)$$

Les configurations associées aux courbures (3.21) sont tracées sur la figure 3.1. Notons sur cette figure que le paramètre  $\theta$  mesure l'angle entre une direction fixe dans le plan de la coque (courbe noire continue) et l'axe de courbure maximale (courbe noire discontinue). La courbure moyenne de la coque étant constante, et dont le niveau est donné par  $h_m$ , toutes les configurations cylindriques de la coque sont stables et de même niveau énergétique. Ce cas a déjà été considéré précédemment par Guest et al. (2011) où la courbure inélastique était appliquée par effets de plasticité sur des feuilles métalliques isotropes. Un choix différent de l'abscisse angulaire du cône *i.e.*  $\theta \rightarrow (\pi - 2\theta)$  fait correspondre les solutions (3.21) aux solutions fournies par Guest et al. (2011).

### 3.2.2.c Coques anisotropes avec courbure inélastique sphérique

On suppose désormais une coque anisotrope ( $2\gamma \neq 1 - \nu$ ) à laquelle on applique une courbure inélastique sphérique  $h_x = h_y = h_m$  et  $h_{xy} = 0$ . On commence par considérer les coques à haute rigidité de cisaillement pour lesquelles  $2\gamma > (1 - \nu)$  et, en conséquence,  $b > a$ . Dans ce cas, les sections  $\kappa_m = cste$  du cône sont des ellipses strictes de demi-axe sur l'axe  $\kappa_t$  supérieure au demi-axe suivant  $\kappa_d$  comme le montre la figure 3.2. De manière identique au cas précédent, on choisit  $\eta_d = \eta_t = 0$  et la courbure inélastique est représentée par un point sur l'axe du cône. L'équation (3.17) se réduit à :

$$\kappa_m = \frac{\eta_m}{1 + a^2}; \quad (a^2 - b^2) \sin 2\theta = 0 \quad (3.22)$$

Cette équation a quatre solutions  $\theta^{(1,2,3,4)} = (0, \pi, \pi/2, 3\pi/2)$ . La distance carrée (3.19) se résume dans ce cas à l'expression :

$$\| \boldsymbol{\kappa}^i - \boldsymbol{\eta} \|^2 = \frac{2a^2 b^2 \eta_m^2}{a^2 + 2a^2 b^2 + b^2 + (b^2 - a^2) \cos 2\theta} \quad (3.23)$$

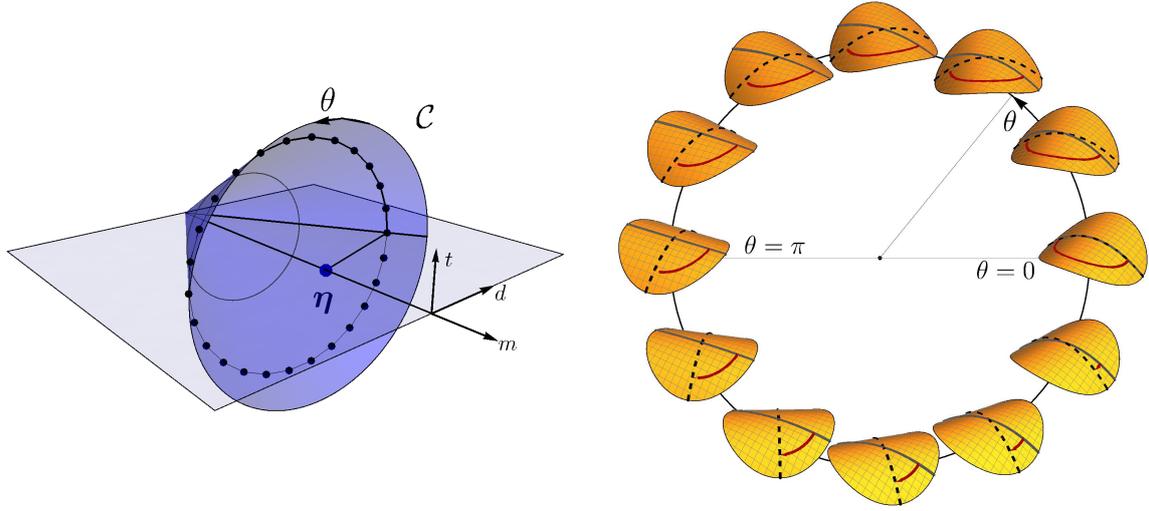


FIGURE 3.1 – (a) Cône des courbures inextensibles pour les plaques isotropes chargées par courbures inélastiques sphériques et (b) configurations stables associées.

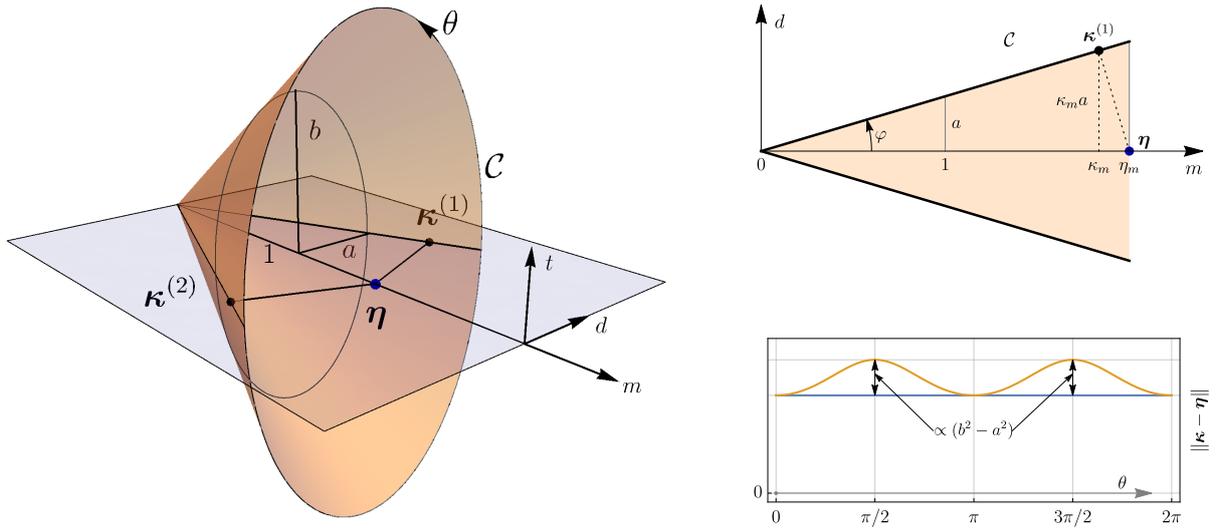


FIGURE 3.2 – Cône des courbures inextensibles pour les plaques anisotropes chargées par déformations inélastiques sphériques suivant les axes d'anisotropie et (b) configurations stables associées.

qui montre que  $\theta^{(1)} = 0$  et  $\theta^{(2)} = \pi/2$  sont les uniques valeurs qui minimisent cette distance. En conséquence, il n'existe que deux points sur le cône à une distance minimale de  $\eta$ , à savoir  $\kappa^{(1,2)} = \kappa_m \{1, \pm a, 0\}$ . On en conclut que la coque est bistable, de configurations stables :

$$[\mathbf{k}^{(1)}] = h_m(1 + \nu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{k}^{(2)}] = h_m(1 + \nu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Ces configurations sont les limites inextensibles des formes quasi-cylindriques décrites par [Seffen and McMahon \(2007\)](#) où la bifurcation des équilibres a été étudiée par effets thermoélastiques.

Dans le second cas  $2\gamma < (1 - \nu)$ , on obtient  $b < a$  et les sections du cône sont des ellipses strictes, cette fois avec le demi-axe le plus grand selon l'axe  $\kappa_d$ . Les équations (3.22) sont toujours valables et les points stationnaires sont toujours au nombre de quatre,  $\theta^{(1,2,3,4)} = (0, \pi, \pi/2, 3\pi/2)$ . Cependant, étant donné que  $b < a$ , les minimas de la distance carrée (3.23) sont désormais  $\theta^{(3)} = \pi/4$  et  $\theta^{(4)} = 3\pi/4$ .

Les configurations stables de la coque sont donc :

$$[\mathbf{k}^{(1)}] = h_m \frac{(1+\nu)}{2\gamma+1+\nu} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{k}^{(2)}] = h_m \frac{(1+\nu)}{2\gamma+1+\nu} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

En comparant (3.24) et (3.25), on remarque que les directions principales de courbures sont parallèles aux plans de symétrie matérielle lorsque  $2\gamma > (1-\nu)$  *i.e.*  $\gamma > \gamma_{iso}$  et tournées de  $\pm 45^\circ$  vis-à-vis des plans de symétrie matérielle lorsque  $2\gamma < (1-\nu)$  *i.e.*  $\gamma < \gamma_{iso}$ , voir figure 1.11. De façon évidente, c'est dans ce dernier cas que le module de cisaillement apparaît explicitement dans la courbure actuelle de la coque.

Comme on l'a fait remarquer dans le chapitre 2, les métaux laminés auxquels on applique une courbure inélastique sphérique par plasticité sont caractérisés par  $\gamma$  légèrement supérieur à  $\gamma_{iso}$ . En somme, disposant d'un modèle capable de prédire le comportement des coques, l'objectif est maintenant de concevoir une méthode d'actionnement permettant de contrôler efficacement et de façon quasi-statique la courbure de la coque autour d'une section du cône.

### 3.2.3 Conception d'une loi d'actionnement continue

On considère des courbures inélastiques additionnelles comme paramètres de contrôle de forme, qui sont imposées pour conduire la configuration déformée de la coque selon un chemin pré-établi. Dans cette perspective, l'analogie géométrique proposée précédemment permet de simplifier la conception d'une stratégie convenable d'actionnement. De manière non-fortuite, le chemin d'actionnement qui minimise l'énergie de déformation de la coque, et qui nécessite donc le moindre apport énergétique concerne le chemin décrivant les configurations de la figure 3.1.

Ainsi, considérons un ensemble unidimensionnel de familles de configurations désirées pour la coque en termes de courbures :

$$t \in [0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \hat{\mathbf{k}}(t) \in \mathcal{P} \subset \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3 \quad (3.26)$$

où  $\mathcal{P}$  est un chemin unidimensionnel décrit par les courbures  $\hat{\mathbf{k}}(t)$  sur le cône  $\mathcal{C}$  des courbures inextensibles lorsque  $t$ , paramètre qui contrôle l'orientation de la courbure, varie. Intrinsèquement, l'objectif est de concevoir une famille de paramètres unidimensionnels de courbures inélastiques :

$$t \in [0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \hat{\boldsymbol{\eta}}(t) \in \mathbb{R}^3 \quad (3.27)$$

de telle manière que  $\hat{\mathbf{k}}(t)$  se trouve à une distance minimale de  $\hat{\boldsymbol{\eta}}(t)$  pour chaque valeur de  $t$  comprise entre 0 et  $2\pi$ . En particulier, pour suivre la séquence de configurations de la figure 3.1, on cherche à obtenir  $\hat{\mathbf{k}}(t) \simeq \tilde{\mathbf{k}}(t)$  de sorte que la courbure inélastique additionnelle soit petite. En concordance, le chemin associé  $\mathcal{P}$  doit être une courbe fermée autour du cône  $\mathcal{C}$ .

Si la coque est parfaitement isotrope, on peut vérifier facilement que, même une petite perturbation du point d'actionnement considéré dans le paragraphe 3.2.2.b, à savoir :

$$[\hat{\boldsymbol{\eta}}_\varrho](t) = \begin{pmatrix} \eta_m & \varrho \sin t \\ \varrho \sin t & \varrho \cos t \end{pmatrix}; \quad 1 \gg \varrho > 0 \quad (3.28)$$

conduit à une séquence de points sur le cône arbitrairement proches du chemin désiré. En d'autres termes, pour chaque point  $\hat{\mathbf{k}}_\varrho(t)$  sur le cône étant à une distance minimale du point  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_\varrho(t)$ , on a :

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} [\hat{\mathbf{k}}_\varrho](t) = \kappa_m \begin{pmatrix} 1 & a \sin t \\ a \sin t & a \cos t \end{pmatrix} \equiv [\tilde{\mathbf{k}}(t)] \quad (3.29)$$

comme dans (3.20). Cette circonstance physique correspond au fait qu'un apport énergétique d'actionnement proche de zéro ( $\varrho \rightarrow 0$ ) est en fait suffisant pour conduire la coque le long d'un ensemble de configurations neutralement stables.

Cependant, il est impossible en pratique d'obtenir cette condition d'isotropie parfaite comme on l'a montré dans le [chapitre 2](#). En effet, même si la structure est convenablement produite, il existe systématiquement des très faibles imperfections qui conduisent à de très fortes perturbations du comportement mécanique final de la coque. En conséquence, on considère le problème du point de vue plus *réaliste* d'une coque anisotrope. On limite notre attention sur le cas  $2\gamma > (1 - \nu)$  lorsque le cône  $\mathcal{C}$  a une section elliptique avec  $b > a$ , ce qui fait l'objet du comportement mécanique de la coque optimale présentée dans le paragraphe [2.3.2.a](#). On considère la famille de courbures inélastiques :

$$[\hat{\boldsymbol{\eta}}](t) = \begin{pmatrix} \eta_m & \rho b \sin t \\ \rho b \sin t & \rho a \cos t \end{pmatrix}; \quad \eta_m > 0, \quad \rho \geq 0 \quad (3.30)$$

où le rayon d'actionnement  $\rho$  est non-nécessairement petit. Par rayon d'actionnement, on fait référence au fait que, lorsque  $\rho = 0$ , le point  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  se trouve sur l'axe du cône et deux équilibres stables sont à égale distance de ce point, tandis que lorsque  $\rho \neq 0$ , le point  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  quitte l'axe du cône et seulement un équilibre stable (la configuration actuelle) minimise la distance  $\|\hat{\boldsymbol{\kappa}} - \hat{\boldsymbol{\eta}}\|$ . De fait, le parcours du point  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  dans le plan  $(\kappa_d, \kappa_t)$  décrit un cercle de rayon  $\rho$  lorsque  $t$  varie entre 0 et  $2\pi$ .

On utilise l'équation [\(3.17b\)](#) avec  $\eta_d = \rho \cos t$  et  $\eta_t = \rho \sin t$  pour déterminer les équilibres correspondant à [\(3.30\)](#). Ils sont de la forme [\(3.15\)](#) avec  $\theta$  satisfaisant :

$$\tan \theta = \left( \frac{b^2(1+a^2)}{a^2(1+b^2)} + \frac{a^2-b^2}{a^2(1+b^2)} \frac{\eta_m}{\rho} \right) \tan t \quad (3.31)$$

On étudie comment les solutions  $\theta^{(i)}(t)$  de [\(3.31\)](#) dépendent du paramètre d'actionnement  $\rho$  lorsque  $t$  varie. Pour ce faire, on se focalise sur le cas particulier des branches  $\theta^{(1)}(t)$  identifiées avec celles du point  $(t=0, \theta=0)$ ; on note que, pour  $t=0$ , on obtient la solution  $\theta=0$  de [\(3.31\)](#) et, étant donné que  $b > a$ , cet équilibre est stable. Concernant le rayon d'actionnement  $\rho$ , il s'avère qu'il en existe deux valeurs seuil, d'expressions :

$$\rho^s := \frac{\eta_m(b^2 - a^2)}{a^2 + 2a^2b^2 + b^2}; \quad \rho^* := \frac{\eta_m(b^2 - a^2)}{a^2b^2 + b^2} \geq \rho^s \quad (3.32)$$

distinguant trois différents régimes de solutions  $\theta^{(i)}(t)$  de [\(3.31\)](#), décrits ci-dessous :

- (S<sub>I</sub>) Pour  $\rho > \rho^*$ , il existe une unique branche stable définissant une relation continue et monotone entre l'angle d'actionnement  $t \in [0, \pi]$  et l'angle de coordonnées  $\theta \in [0, \pi]$ . Cette branche stable de l'équilibre  $\theta = \theta^{(1)}(t)$  démarre à  $(t=0, \theta=0)$  et se poursuit jusqu'à  $(t=\pi, \theta=\pi)$ ; cette dernière est représentée par une courbe noire sur la figure [3.3\(a\)](#) pour  $\rho/\eta_m = 0.5$ ,  $a=1$  et  $b=1.5$ . Étant donné que l'angle  $\theta$  représente la coordonnée azimutale sur le cône, un actionnement similaire est suffisant et optimal pour conduire continument les équilibres de la coque autour du cône (voir figure [3.3\(d\)](#)).
- (S<sub>II</sub>) Pour  $\rho^* > \rho > \rho^s$ , il existe plusieurs branches. La branche démarrant à  $\theta=0$  pour  $t=0$  est stable jusqu'à atteindre un point tournant pour  $t=t_c > \pi/2$  et  $\theta=\theta_c < \pi/2$ . En conséquence, pour  $t > t_c$  l'équilibre doit nécessairement sauter sur une autre branche stable, à savoir la branche qui passe par  $\theta=\pi$  pour  $t=\pi$ , voir figure [3.3\(b\)](#). Un actionnement similaire est suffisant pour conduire les équilibres de la coque autour du cône mais cette fois de façon discontinue et dynamique, et la courbure est non-contrôlée dans la transition entre les équilibres, voir figure [3.3\(e\)](#). La courbure actuelle ne suit pas en chaque point l'évolution de la courbure imposée.
- (S<sub>III</sub>) Pour  $0 < \rho < \rho^s$ , il existe encore plusieurs branches. La branche  $\theta^{(1)}(t)$  démarrant à  $\theta=0$  pour  $t=0$  est stable et continue, mais selon cette branche l'angle de coordonnées  $\theta$  reste toujours strictement inférieur à  $\pi/2$  pour  $t \in [0, \pi]$ . De plus, lorsque  $t \rightarrow \pi$ , on a  $\theta^{(1)}(t) \rightarrow 0$ , voir figure [3.3\(c\)](#). Un tel niveau d'actionnement est insuffisant pour conduire les équilibres stables de la coque autour du cône, et cette dernière revient systématiquement à son équilibre stable de départ  $\theta=0$ , (voir figure [3.3\(f\)](#)).

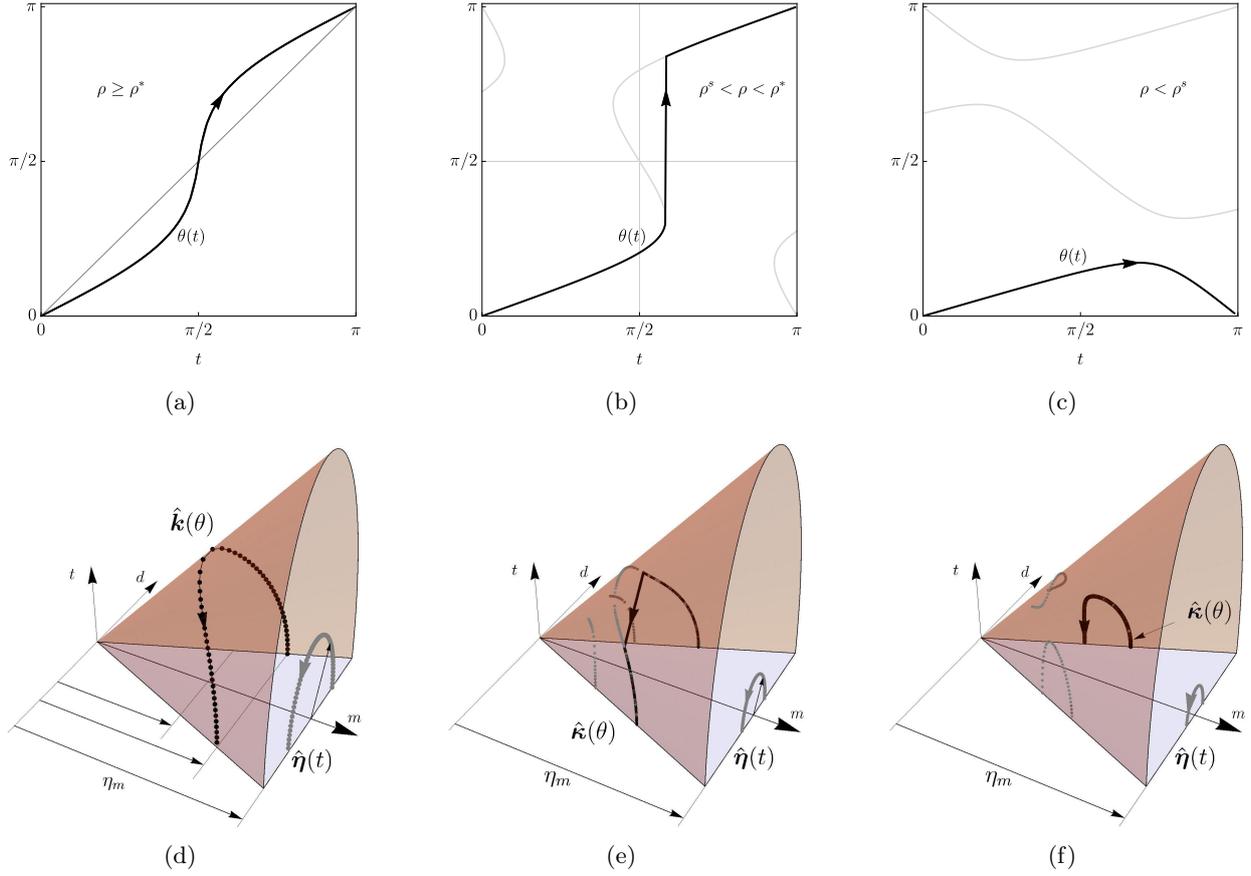


FIGURE 3.3 – (a), (b), (c) Variations de  $\theta$  en fonction de  $t$  et (d), (e), (f) variations associées des courbures sur le cône, respectivement dans les cas (S<sub>I</sub>), (S<sub>II</sub>), (S<sub>III</sub>).

Dans un souci de concision, on s'est limités aux solutions pour  $t \in [0, \pi]$  en raison des symétries du cône  $\mathcal{C}$  d'une part, et de la loi d'actionnement (3.30) d'autre part, mais on peut obtenir les mêmes résultats pour  $t \in [\pi, 2\pi]$ . Pour conclure, le chemin d'actionnement  $\hat{\boldsymbol{\eta}}(t)$  dans (3.30) est capable de conduire un équilibre stable de la coque le long d'une révolution complète autour du cône si le rayon d'actionnement  $\rho$  est suffisamment grand vis-à-vis de ses valeurs seuils (3.32).

**Remarque 1 :** Les deux valeurs seuil sont encadrées par  $0 \leq \rho^s \leq \rho^* \leq \eta_m(b - a)$ . De fait, lorsque  $b \rightarrow a$ , le degré d'anisotropie diminue jusqu'à atteindre l'isotropie, cas pour lequel on a  $\rho^s \rightarrow 0$  et  $\rho^* \rightarrow 0$ ; comme on peut le voir dans (3.29), même un faible rayon d'actionnement serait suffisant dans un tel scénario. Par ailleurs, dans la limite  $b \rightarrow a$ , (3.31) se réduit à  $(\tan \theta = \tan t)$ . En conséquence, la condition d'isotropie étant approchée, l'angle d'actionnement  $t$  et l'angle de courbure  $\theta$  sur le cône tendent à coïncider et il n'y a aucun décalage (ou retard) à l'actionnement.

**Remarque 2 :** Au moins trois paramètres sont nécessaires pour conduire l'actionnement  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3$ . En effet, si on considère un seul paramètre de contrôle  $\eta_t$  ( $\propto h_{xy}$ ), cela conduit à une solution pour laquelle la branche démarant à  $\theta = 0$  pour  $t = 0$  est stable et continue mais  $\theta$  reste toujours compris entre  $-\pi/4$  et  $\pi/4$  et la coque oscille autour de sa configuration de départ. La trajectoire associée dans l'espace des courbures inélastiques ne correspond plus à un cercle de rayon  $\rho$  mais à une droite de longueur  $2\rho$  sur l'axe  $\eta_t$ . Si on considère maintenant deux directions de contrôle via  $\eta_d$  ( $\propto h_x - h_y$ ) avec  $\rho$  supérieur à  $\rho^*$ , l'équilibre  $\theta^{(1)} = 0$  saute directement vers l'équilibre  $\theta^{(2)} = \pi/2$ , quel que soit le choix de  $t$ . Cela correspond à une solution dynamiquement incontrôlée, pour laquelle on ne connaît pas le chemin transitoire d'un équilibre stable à l'autre, à la manière d'un "snap". La trajectoire de

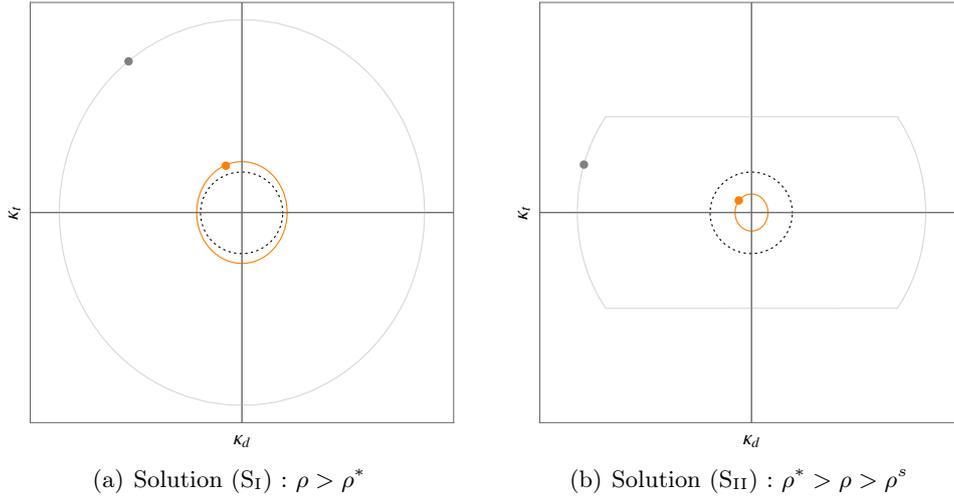


FIGURE 3.4 – Trajectoire d'actionnement dans le plan  $(\kappa_d, \kappa_t)$  pour les solutions (S<sub>I</sub>) et (S<sub>II</sub>), respectivement représentées sur les figures (a) et (b). Les contours gris, orange et noir représentent respectivement la trajectoire d'actionnement, le rayon actuel  $\rho$  et le rayon critique  $\rho^*$ .

courbure inélastique associée décrit une droite de longueur  $2\rho$  sur l'axe  $\eta_d$ . Enfin, si l'on dispose de trois directions de contrôle  $(\eta_m, \eta_d, \eta_t)$ , les solutions correspondent aux cas (S<sub>I</sub>), (S<sub>II</sub>) ou (S<sub>III</sub>) vis-à-vis du choix de  $\rho$ .

**Remarque 3 :** La loi d'actionnement choisie est conçue pour pouvoir effectuer une transition continuellement quasi-statique et réversible entre les équilibres stables de la coque. Cela est en effet facilité par l'utilisation de fonctions trigonométriques mais d'autres lois d'actionnement sont tout à fait envisageables.

**Remarque 4 :** Du point de vue géométrique, une rotation de  $\pi$  sur le cône représente une rotation réelle de  $2\pi$ . Cela fait suite au choix du changement de variables (3.9).

### 3.3 Dimensionnement d'une structure avec actionneurs intégrés

Dans cette section, on s'intéresse au dimensionnement d'une structure constituée d'une coque bistable et d'actionneurs nécessaires pour contrôler la forme de la coque, en concordance avec les résultats mis en évidence dans la section précédente, notamment le respect d'un nombre minimal de trois directions de contrôle. Naturellement, la structure choisie pour cette application est un disque de cuivre laminé bistable, de même type que celui étudié dans le chapitre 2, du fait de son optimalité en termes d'énergie nécessaire à l'actionnement. Concernant la méthodologie, différents choix de matériaux actifs et différentes architectures associées sont envisageables, dont quelques unes seront étudiées dans les paragraphes suivants.

#### 3.3.1 Choix d'une méthode d'actionnement

Les deux principales familles d'actionneurs utilisées dans la littérature sont les alliages à mémoire de forme (Dano and Hyer, 2003) et les actionneurs piézoélectriques de type piézocéramique MFC (Schultz and Hyer, 2003) développés par Smart Materials Corp. Les AMF, pour lesquels les déformations sont obtenues au moyen d'un chauffage résistif induisant un changement de phase, sont souvent utilisés pour leur capacité à appliquer une contrainte importante lorsqu'ils sont adéquatement attachés à une structure. En effet, parmi les matériaux électroactifs, les AMF sont ceux qui présentent la densité d'énergie spécifique la plus élevée. Néanmoins, ils sont limités à des fréquences de fonctionnement très faibles,

restreignant les applications à des vitesses proches du quasi-statique. Aussi, leur rigidité et leur poids non-négligeables peuvent avoir des répercussions globales importantes sur le comportement mécanique effectif de la structure sur laquelle ils sont disposés, et peuvent compromettre la multistabilité.

A l'inverse, les matériaux piézo-céramiques dont la charge électrique est de nature capacitive, sont capables de travailler à des fréquences très élevées (allant du Hz au kHz) tout en étant capables de subir un nombre de cycles élevé ( $\sim 10^9$ ), de manière à pouvoir travailler dans des applications en quasi-statique ou même en dynamique. Par ailleurs, le comportement électromécanique des MFCs est orthotrope, et permet de privilégier/assigner les directions de sollicitation par courbures inélastiques. Ces considérations en font des matériaux intelligents idéaux et les rendent non-fortuitement bien adaptés à l'application envisagée, surtout dans la mesure où l'on a besoin de trois directions indépendantes de contrôle. De plus, ils sont capables de subir de grandes déformations sans rompre et peuvent suivre des trajets de déformation complexes. Enfin, les déformations/courbures engendrées par ces actionneurs sont relativement faibles, de l'ordre de  $10^{-4}$ , ce qui peut tout de même être suffisant lorsque l'énergie nécessaire à l'actionnement est raisonnablement faible intrinsèquement au dimensionnement.

→ Propriété	Rigidité	Free-strain	Contrainte	Fréquence
↓ Matériau	(GPa)	( $\times 10^{-6}$ )	(MPa)	(Hz)
AMF	30 – 90	7000 – 70000	10 – 700	0.02 – 1
PVDF	2 – 10	200 – 1000	0.5 – 5	$10^5 – 10^7$
MFC	30	1800	4.5	$10^7$

TABLEAU 3.2 – Propriétés typiques de quelques matériaux actifs.

Compte tenu de ces remarques, le choix fait ici se porte sur les actionneurs piézo-céramiques de type MFC. Rappelons que les matériaux piézo-électriques fonctionnent sous les effets direct et inverse. L'effet direct consiste à appliquer une déformation à un matériau piézo-électrique, ce qui va avoir pour conséquence de créer un champ électrique en son sein ; cet effet est particulièrement intéressant dans les applications de récupération d'énergie. L'effet piézo-électrique inverse consiste quant à lui à appliquer une différence de potentiel électrique aux deux extrémités d'un matériau piézo-électrique, ce qui va avoir pour conséquence de le déformer vis-à-vis de sa direction de polarisation.

→ Propriété	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$\alpha$	$\beta_1$	$\beta_2$
↓ Matériau	(GPa)	(GPa)	(GPa)		( $10^{-5}/^\circ\text{C}$ )	( $10^{-8}/\text{V}$ )	( $10^{-8}/\text{V}$ )
Cua1	124	124	46.6	0.33	1.73	–	–
Cua1 H14	124	124	51	0.33	1.73	–	–
MFC P1 $d_{33}$	30.3	15.9	5.51	0.31	–	7.2	–3.8

TABLEAU 3.3 – Propriétés des matériaux utilisés dans l'application au contrôle de forme.

Un autre point important concerne la modélisation numérique des matériaux piézo-électriques. Une telle modélisation requiert l'utilisation d'éléments finis tridimensionnels du fait du degré de liberté électrique en sus des degrés de liberté cinématiques car, comme il est bien connu, il n'existe pas d'élément fini bidimensionnel qui permette de représenter le comportement électrique à travers l'épaisseur. Toujours est-il, comme cela a été souligné (notamment) par [Dano et al. \(2012\)](#), il est possible de modéliser l'effet piézo-électrique en deux dimensions par l'exploitation d'un effet thermoélastique équivalent, permettant de très bien reproduire le comportement électromécanique de la couche piézo-électrique. En effet, un matériau piézo-électrique soumis à une variation de potentiel électrique se dilate de la même manière qu'un matériau orthotrope quelconque sous une variation de température ; il est donc possible d'introduire un coefficient de *dilatation électrique* équivalent pour modéliser ce phénomène.

Ainsi, pour une couche de matériau piézocomposite de matrice de souplesse réduite  $S$  (Berthelot, 1999), la loi de comportement s'exprime par :

$$\begin{aligned}\bar{e}_x^{tot} &= S_{11}\bar{\sigma}_x + S_{12}\bar{\sigma}_y + \alpha_1\Delta T + d_{11}E^1 \\ \bar{e}_y^{tot} &= S_{12}\bar{\sigma}_x + S_{22}\bar{\sigma}_y + \alpha_2\Delta T + d_{12}E^1 \\ \bar{e}_{xy}^{tot} &= S_{66}\bar{\sigma}_{xy}\end{aligned}\tag{3.33}$$

où  $E^1 = \Delta V/w_e$  est le champ électrique sous une différence de potentiel électrique  $\Delta V$ ,  $w_e$  est la distance entre les électrodes, et les paramètres  $d_{ij}$  sont les coefficients de déformation piézoélectrique dans la direction  $j$ . On peut ensuite simplifier ces expressions par :

$$\begin{aligned}\bar{e}_x^{tot} &= S_{11}\bar{\sigma}_x + S_{12}\bar{\sigma}_y + \alpha_1\Delta T + \beta_1\Delta V \\ \bar{e}_y^{tot} &= S_{12}\bar{\sigma}_x + S_{22}\bar{\sigma}_y + \alpha_2\Delta T + \beta_2\Delta V \\ \bar{e}_{xy}^{tot} &= S_{66}\bar{\sigma}_{xy}\end{aligned}\tag{3.34}$$

avec  $\beta_j = d_{1j}/w_e$ . Les coefficients  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont appelés les *free strain per volt* ou coefficients de dilatation électrique. Cette formulation de la loi de comportement électromécanique simplifie aussi la détermination de  $\mathbf{h}_i$  piézoélectrique par l'utilisation de la théorie des stratifiés. Notons qu'on utilise ici une formulation très simplifiée de la loi de comportement électromécanique mais des modèles plus complexes existent (Fernandes and Pouget, 2001; Thomas et al., 2007a).

### 3.3.2 Architecture des matériaux actifs

En lien direct avec ce choix de méthode d'actionnement, l'étape suivante consiste à définir une architecture de matériaux actifs que l'on dispose sur la coque. Comme point de départ, on considère un disque de cuivre laminé de diamètre 245 mm, d'épaisseur 0.3 mm, enroulé autour d'un cylindre de 110 mm de diamètre.

L'étude précédente a montré que le contrôle de forme de la coque à 360° nécessite l'utilisation d'au moins trois directions de contrôle. Aussi, pour des raisons industrielles de faisabilité, les seules formes d'actionneur possibles sont droites (carrées, triangulaires, hexagonales... *i.e.* ne comportant aucune portion de cercle) et d'épaisseur constante  $h = 0.3$  mm qui est un paramètre fixe, quelle que soit la surface des actionneurs. En concordance, les contraintes d'architecture imposent de respecter :

1. Une disposition avec un minimum de trois directions d'actionnement ;
2. Une surface active d'actionneurs minimale sur la structure de manière à minimiser leur effet sur le comportement mécanique de la coque ; en effet, la pratique montre que le collage d'actionneurs sur la structure réduit fortement la courbure finale de la coque.
3. Une puissance d'actionnement maximale.

Si l'on s'intéresse à la troisième contrainte, la disposition la plus efficace est constituée de trois paires d'actionneurs de géométrie triangulaire (*c.f.* figure 3.5(a)) orientées à 90° et  $\pm 30^\circ$ . Cette architecture ne requiert, selon les calculs par éléments finis, que 200 V pour pouvoir effectuer une transition complète et continue entre les équilibres stables. Toutefois, une surface active maximale telle que celle-ci supprime quasi-totalement la courbure de la coque, qui devient fortement non-uniforme, ce qui amène naturellement au choix de la disposition de la figure 3.5(b).

Si l'on se focalise sur la deuxième contrainte, la disposition de la figure 3.5(b) est encore la plus adaptée car le ratio entre surface active totale des actionneurs et surface du disque  $\zeta = S_{piezo}/S_{disque}$  est de seulement 15%, et leur coût est bien moindre du fait de leurs dimensions standard. En somme, une très large gamme de disposition d'actionneurs sont possibles, mais ce choix de patches rectangulaires est le moins contraignant en termes de conception, notamment en termes de tension d'actionnement minimale.

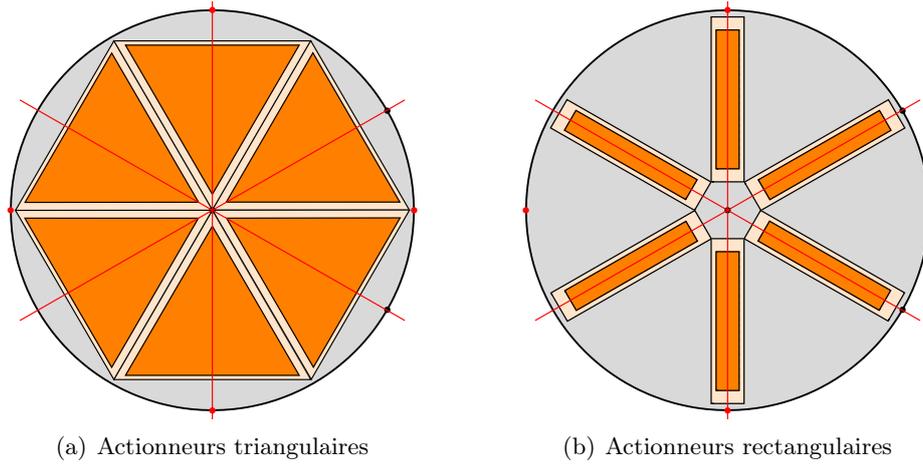


FIGURE 3.5 – Différentes architectures possibles des actionneurs sur le disque de cuivre. Les surfaces oranges et beiges correspondent respectivement aux parties actives et inactives des actionneurs.

→ Contraintes	$\zeta$	$\Delta V_{min}^{EF}$	Réduction de	Dimensions
↓ Architecture	$(S_{piezo}/S_{disque})$	(V)	la courbure	
Triangulaire 3.5(a)	61%	200	$\sim 3/4$	Non-standard
Rectangulaire 3.5(b)	15%	960	$\sim 1/3$	standard

TABLEAU 3.4 – Contraintes de choix d'architecture des actionneurs.

### 3.3.3 Sens de positionnement des actionneurs

Comme dernière étape du dimensionnement, le choix du positionnement des actionneurs est aussi un paramètre important. En effet, bien qu'une couche orthotrope de MFC soit constituée d'un empilement de sept sous-couches symétriques par rapport au plan moyen, le fait de coller les actionneurs sur une surface à courbure positive ou négative impacte différemment la capacité d'actionnement.

A cela s'ajoute le choix du type de polarisation ; il existe deux différents types de MFCs électromécaniquement orthotropes, mais n'étant pas polarisés dans la même direction. Les MFCs de type P1 travaillant sous l'effet  $d_{33}$  ( $-500 \text{ V} \rightarrow 1500 \text{ V}$ ) sont polarisés le long de leur axe longitudinal, et les déformations dans cette direction sont de même signe que la tension imposée. A l'inverse, les MFCs de type P2 travaillant sous l'effet  $d_{31}$  ( $-60 \text{ V} \rightarrow 360 \text{ V}$ ) sont polarisés suivant l'épaisseur, et les déformations longitudinales sont de signe opposé à la tension imposée. Aussi, les tensions supportées par les actionneurs sont bien différentes, mais équilibrées vis-à-vis de leurs coefficients de dilatation électrique respectifs (ou free-strain per volt).

L'objectif de ce paragraphe est de savoir quelle disposition et quel type de MFC permettent de maximiser la courbure inélastique piézoélectrique. Pour faire rigoureusement ces deux choix, nous avons réalisé des essais sur des poutres de cuivre de dimensions  $240 \times 0.3 \times 25 \text{ mm}^3$  auxquelles on applique une courbure inélastique par plasticité à l'aide d'un cylindre de PVC de 90 mm de diamètre. On considère quatre poutres (*c.f.* figure 3.7) sur lesquelles sont collés un actionneur de chaque type, et sur des courbures positive et négative, de manière à sélectionner parmi ces quatre spécimens la disposition la plus adéquate dans l'application envisagée. Tous les actionneurs ont une surface active de  $85 \times 14 \text{ mm}^2$ , et sont collés après aplatissage de la poutre (*c.f.* figure 3.6).

Chaque spécimen est encastré à une extrémité et libre à l'autre. On leur applique des tensions entre  $-350 \text{ V}$  et  $350 \text{ V}$  pour les MFCs de type P1, et entre  $-70 \text{ V}$  et  $350 \text{ V}$  pour les MFCs de type P2, avec pour objectif de visualiser quel spécimen permet d'appliquer la plus grande courbure *i.e.* quel spécimen maximise  $\Delta \bar{k} = \bar{k}(\Delta V_{max}) - \bar{k}(\Delta V_{min})$ . En outre, la comparaison avec une solution élastique linéaire

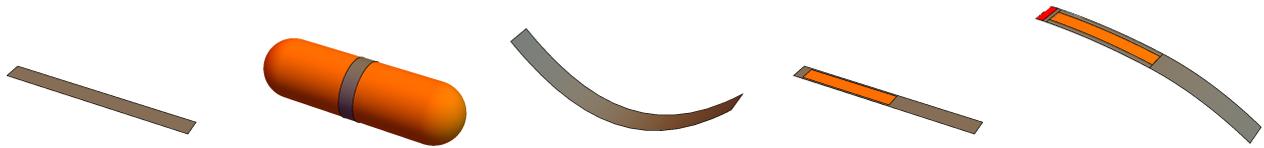


FIGURE 3.6 – Processus pour obtenir une poutre piézocomposite courbée par plasticité (a) poutre initiale (b) enroulement (c) poutre courbée (d) position de collage du patch (e) poutre piézocomposite encastée (à gauche)-libre (à droite).

permet de définir la loi de comportement de la poutre piézoélectrique de manière à pouvoir mesurer le coefficient de dilatation électrique  $\beta_1$ .

Les spécimens sont tournés de  $90^\circ$  de manière à négliger l'effet de la gravité, avec l'axe vertical (du laboratoire) coïncidant avec la largeur de la poutre. La figure 3.8(a) décrit le montage expérimental réalisé. Une photographie est prise pour chaque variation de tension de 35 V et la courbure associée est ensuite mesurée par analyse d'images à l'aide du logiciel ImageJ (<https://imagej.nih.gov/ij/>). Pour ce faire, on capture simplement le profil de la poutre pour chaque variation de tension, de manière à obtenir une courbe dont on peut extraire le champ de déplacements et donc la courbure par double dérivation (*c.f.* figure 3.8(b)). On se restreint pour ces mesures à la partie active (orange) des actionneurs du fait que la courbure ne soit pas uniformément répartie sur toute la poutre.

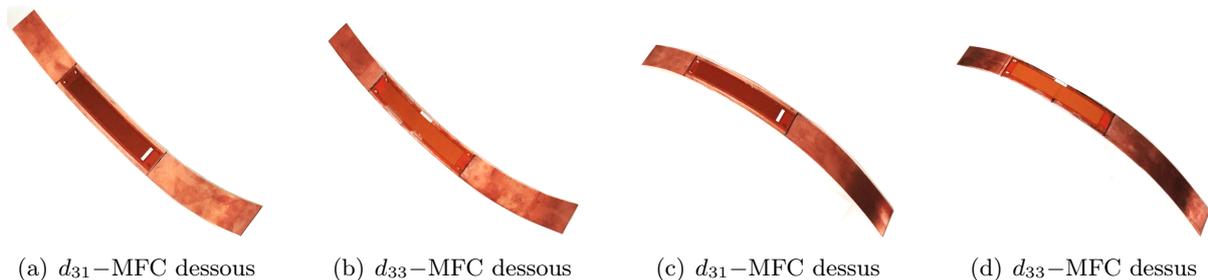


FIGURE 3.7 – Les différentes architectures de positionnement des patches sur les poutres.

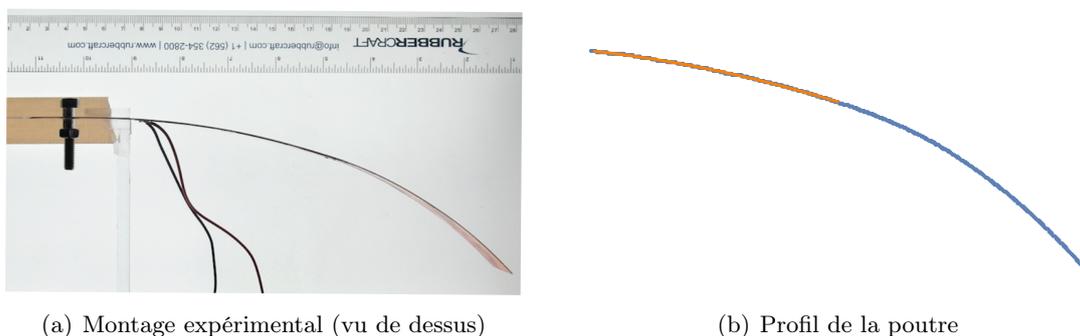


FIGURE 3.8 – (a) Montage expérimental de la poutre piézocomposite encasté-libre et (b) profil de la poutre obtenu après traitement d'images.

On reporte sur la figure 3.9 la variation de la courbure de la poutre sous tension appliquée pour chaque cas. D'abord, notons que les quatre poutres ont approximativement la même courbure lorsqu'aucune tension n'est appliquée, même si les parties inactives sont de section légèrement différente entre types  $d_{33}$  et  $d_{31}$ . On constate sur cette figure que la disposition qui maximise le potentiel d'ac-

tionnement est la disposition pour laquelle le patch est collé sur une surface à courbure positive et sous l'effet  $d_{31}$  (figure 3.9(c)), suivie de peu par la même disposition en  $d_{33}$ . Toutefois, l'actionneur de type  $d_{31}$  est utilisé sur toute sa gamme de puissance disponible ( $-60 \rightarrow 360$  V), qui correspond à une petite partie de la gamme de fonctionnement des actionneurs de type  $d_{33}$ , et c'est finalement cette dernière disposition qui permet d'appliquer la plus grande courbure inélastique à la poutre de cuivre.

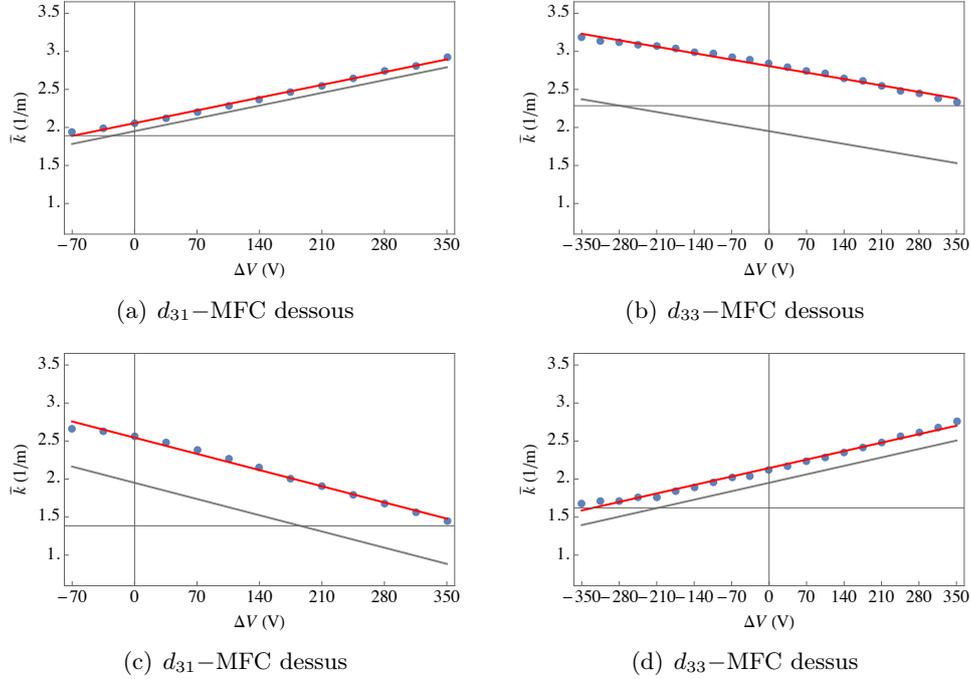


FIGURE 3.9 – Variation de la courbure en fonction de la tension appliquée pour différentes architectures. Les points bleus correspondent aux mesures expérimentales. Les traits rouges et gris correspondent respectivement au fit de la mesure expérimentale et à la solution théorique élastique linéaire.

Dans ces mesures, la précision est de l'ordre de  $\pm 10\%$  mais demeure la même pour chaque spécimen, ce qui n'affecte en rien le choix final. En résumé, on utilisera par la suite l'architecture de six actionneurs rectangulaires espacés de  $60^\circ$  (c.f. figure 3.5(b)) par le biais de MFCs collés sur la partie supérieure de la structure et travaillant sous l'effet  $d_{33}$  (c.f. figure 3.7(d)).

### 3.4 Prototype expérimental et résultats

Dans cette section, on détaille l'étude du prototype expérimental pour lequel la loi d'actionnement (3.30) a été implémentée. On considère comme point de départ un disque de cuivre Cua1 H14 de propriétés données dans le tableau 3.3, de géométrie circulaire de rayon 122.5 mm et d'épaisseur 0.3 mm. Ce choix de rayon du disque est fait pour s'adapter aux dimensions standard sélectionnées pour les actionneurs. Ce choix d'épaisseur est fait pour des raisons pratiques ; d'une part, il coïncide avec l'épaisseur des matériaux actifs, et d'autre part une épaisseur plus ou moins élevée rendrait la tâche délicate. En effet, pour obtenir une courbure résiduelle acceptable avec une épaisseur  $h < 0.3$  mm, le diamètre de cylindre utilisé pour la plastification doit être suffisamment petit, et cela amène la coque à entrer en contact avec elle même lors de l'enroulement. À l'inverse, une épaisseur plus élevée rendrait l'actionnement impossible avec cette architecture du fait des faibles déformations engendrées par les actionneurs. Notons toutefois qu'une épaisseur plus petite minimiserait drastiquement l'énergie d'actionnement du fait de la dépendance cubique de l'épaisseur dans la rigidité de flexion, mais cela nécessiterait des techniques de plastification plus élaborées.

À l'état initial, la structure est libre de contraintes ( $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ ), plate ( $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}$ ) et orthotrope ( $\eta \neq 0$ ).

L'application d'une courbure inélastique élastoplastique puis d'une courbure inélastique additionnelle (3.30) pour l'actionnement conduit à un champ de courbures inélastiques total de la forme suivante :

$$[\hat{\boldsymbol{\eta}}](t) = \eta_m^{\text{EP}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \rho^{\text{MFC}} \begin{pmatrix} 0 & b \sin t \\ b \sin t & a \cos t \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

que l'on explicitera dans les paragraphes suivants. Le terme  $\eta_m^{\text{EP}}$  fait référence aux déformations inélastiques élastoplastiques tandis que le terme  $\rho^{\text{MFC}}$  fait référence aux déformations inélastiques via l'utilisation de matériaux actifs de type MFCs.

### 3.4.1 Prédiction théorique

#### 3.4.1.a Processus de plastification

On suppose la coque enroulée dans deux directions orthogonales, et que ce processus de mise en forme produit une distribution de contraintes résiduelles (ou dans notre terminologie courbures inélastiques). Étant donné que les déformations élastoplastiques sont appliquées dans deux directions supposées parfaitement équilibrées<sup>2</sup>, on a  $h_x^{\text{EP}} = h_y^{\text{EP}}$  et  $h_{xy}^{\text{EP}} = 0$  où  $x$  et  $y$  correspondent aux directions d'enroulement.

En se rappelant du changement de variables (3.9), le point représentatif des courbures inélastiques se trouve sur l'axe de la courbure moyenne  $\kappa_m$ . A ce stade, on a appliqué la première partie de la loi d'actionnement (3.35),  $\boldsymbol{\eta} = \eta_m^{\text{EP}} \{1, 0, 0\}$  et la structure est bistable. Par ailleurs, étant donné que les directions principales de courbure de la coque sont alignées avec les directions de plastification, nous en déduisons vis-à-vis des résultats du paragraphe 3.2.2.c que l'on se trouve dans le cas  $2\gamma > (1 - \nu)$  *i.e.*  $\eta > 0$ , cas pour lequel les configurations stables de la coque sont décrites par (3.24), que l'on peut réécrire sous la forme :

$$[\mathbf{k}^{(1)}] = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{k}^{(2)}] = c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c = h_m(1 + \nu) \quad (3.36)$$

Comme on l'a souligné, le calcul théorique de  $\mathbf{h}_i$  élastoplastique est délicat et on préfère, pour des raisons de simplicité, le mesurer expérimentalement via (3.36). En effet, mesurer la courbure maximale expérimentale  $\bar{c}$  de la coque et ensuite utiliser (3.36)–(3.9) permet d'obtenir :

$$\bar{c} = 5.31 \text{ m}^{-1}, \quad \bar{\eta}_m^{\text{EP}} = \bar{h}_m \sqrt{1 + \nu} = \frac{\bar{c}}{\sqrt{1 + \nu}} = 4.61 \text{ m}^{-1} \quad (3.37)$$

Dans ce cas,  $\bar{\eta}_m^{\text{EP}} \simeq 45 \bar{\eta}_m^*$  où  $\bar{\eta}_m^*$  est la valeur critique de bifurcation des équilibres vis-à-vis de (2.2). A ce stade, il reste à mesurer la valeur de  $\gamma$ , tâche que l'on effectue en suivant la démarche décrite dans le paragraphe 2.3.2.b, ce qui permet d'estimer le gap énergétique  $\eta$  entre les configurations stables. Comme on peut le constater sur la figure 3.2, ce paramètre  $\eta$ , en termes des variables (3.9), est l'analogie géométrique de la différence  $(b^2 - a^2)$ . De fait, connaissant le coefficient de Poisson  $\nu$ , on peut estimer la quantité  $\eta$  au travers des paramètres  $a$  et  $b$  suivant leur définition dans (3.12). Cela conduit à :

$$\gamma_{iso} = 0.335 \implies a = 0.71; \quad \gamma = 0.367 \implies b = 0.743; \quad b/a = 1.047 \quad (3.38)$$

#### 3.4.1.b Trois paires d'actionneurs

La seconde contribution dans (3.35) tient compte de l'application de courbures inélastiques au travers d'un ensemble de patches piézoélectriques tels que représentés sur la figure 3.5(b). Après attachement des patches, les deux configurations sont quasi-cylindriques et quasi-uniformes. On obtient :

$$\bar{\eta}_m = 3.58 \text{ m}^{-1} \simeq 34.4 \bar{\eta}_m^*; \quad \gamma = 0.371 \implies b = 0.746; \quad b/a = 1.052 \quad (3.39)$$

---

2. Les déformations plastiques sont appliquées à la main en supposant que la courbure résultante est rigoureusement la même dans les deux directions et que les deux configurations stables sont parfaitement orthogonales *i.e.* en supposant que les imperfections de manutention sont négligeables.

De façon évidente, la courbure de la coque a été réduite après attachement des actionneurs mais reste tout de même sur l'axe de courbure moyenne du cône  $\kappa_m$  (les configurations stables sont toujours orthogonales) et bien supérieure au seuil  $\bar{\eta}_m^*$ . De plus, l'anisotropie (le paramètre  $\eta$ ) n'a été que très peu affectée par l'étape de collage des patches. Cela signifie que le gap énergétique entre les configurations stables est toujours faible et l'énergie nécessaire à l'actionnement a très peu évolué.

Concernant la loi d'actionnement, un simple actionneur de type MFC orienté dans la direction  $e_j = \{\cos \theta_j, \sin \theta_j\}$  pour lequel on applique une tension  $V_j$  impose à la coque un champ de courbures inélastiques  $h_j^{\text{MFC}} = \chi V_j e_j \otimes e_j$ . Dans cette relation,  $\chi$  dépend de l'excentricité du patch vis-à-vis du plan moyen de la coque et de ses propriétés mécaniques.

Dans la configuration proposée, les actionneurs sont électriquement connectés par paires d'orientation ( $90^\circ$  et  $\pm 30^\circ$ ) de manière à pouvoir conduire chaque paire avec le même signal électrique. Cela correspond à un ensemble de trois directions principales décalées de  $120^\circ$  entre elles (*i.e.*  $\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = \theta_1 + 2\pi/3, \theta_3 = \theta_1 - 2\pi/3$ ) produisant un champ de courbures inélastiques :

$$h_{ij}^{\text{MFC}} = \chi \sum_{j=1}^3 V_j e_j \otimes e_j = \frac{1}{4} \chi \begin{pmatrix} 4V_1 + V_2 + V_3 & \sqrt{3}(V_3 - V_2) \\ \text{sym.} & 3(V_2 + V_3) \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Clairement, un choix convenable des trois tensions indépendantes ( $V_1, V_2, V_3$ ) permet de sélectionner toutes les composantes covariantes de ce tenseur. En, particulier, dans les coordonnées (3.9) et en choisissant des tensions strictement positives<sup>3</sup>, on propose les courbures inélastiques :

$$\begin{cases} \eta_m^{\text{MFC}} = \frac{\chi}{2} \sqrt{1+\nu} (V_1 + V_2 + V_3) & (3.41a) \\ \eta_d^{\text{MFC}} = \frac{\chi}{4} \sqrt{1-\nu} (2V_1 - V_2 - V_3) & (3.41b) \\ \eta_t^{\text{MFC}} = \frac{\chi}{2} \sqrt{\frac{3\gamma}{2}} (V_2 + V_3) & (3.41c) \end{cases}$$

associées aux tensions :

$$\begin{cases} V_1(t) = 2\bar{V} \cos t \\ V_2(t) = -\bar{V} (\sqrt{3} \sin t + \cos t) \\ V_3(t) = \bar{V} (\sqrt{3} \sin t - \cos t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{V} = \frac{2}{3} \frac{\rho^{\text{MFC}}}{\chi \sqrt{1+\nu}} \\ V_1 + V_2 + V_3 = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

de manière à produire une courbure inélastique équivalente à la seconde contribution de la loi d'actionnement (3.35) :

$$[\boldsymbol{\eta}^{\text{MFC}}](t) = \rho^{\text{MFC}} \begin{pmatrix} 0 & b \sin t \\ b \sin t & a \cos t \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Ainsi, les conditions dérivées dans le paragraphe 3.2.3 pour les valeurs seuil (3.32) du rayon d'actionnement s'expriment désormais en termes de la constante  $\bar{V}$ , qui contrôle l'amplitude des tensions de sortie des actionneurs.

Vis-à-vis de (3.42), nous avons mesuré expérimentalement le paramètre  $\chi$  pour le prototype considéré. Pour ce faire, les patches courbés sur la coque (orientés à  $\pm 30^\circ$ ) dans la configuration  $C_1$  (figure 3.16(b)) ont été soumis aux voltages  $V_2 = V_3$  entre 0 et 1500 V, alors que la paire de patches orientée à  $90^\circ$  se trouve dans une configuration plate pour laquelle on n'applique aucune tension ( $V_1 = 0$ ). L'augmentation de la courbure moyenne de la coque sous ces tensions est représentée sur la figure 3.10. En utilisant (3.40), on peut simplement déduire que le paramètre  $\chi$  correspond à la pente de cette courbe ; notamment, le caractère non-linéaire de ce graphe montre que  $\chi$  varie vis-à-vis de la tension appliquée, ayant pour valeur maximale  $\chi_{\text{max}} = 2.3 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}/\text{V}$  à faibles voltages, et  $\chi_{\text{min}} = 1.1 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}/\text{V}$

3. Les MFCs sélectionnés ont une gamme de tension allant de  $-500 \text{ V}$  à  $1500 \text{ V}$ . Pour des raisons de simplicité, on préfère se positionner sur un choix de tensions positives, mais il est bien entendu possible de travailler sur toute la gamme disponible si nécessaire, en utilisant par exemple une loi d'actionnement constituée de trois sinusoides décalées de  $2\pi/3$ .

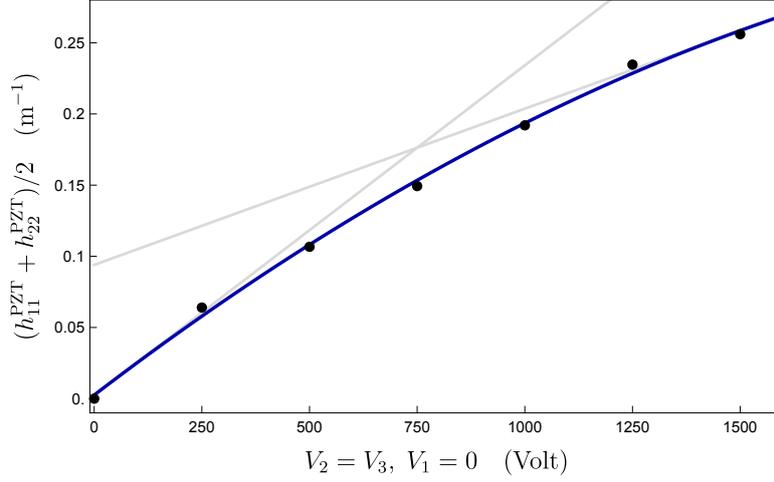


FIGURE 3.10 – Variation de la courbure en fonction de la tension appliquée dans la configuration  $C_1$  pour estimer le paramètre  $\chi$ .

à 1500 V. Via (3.32) et la définition de  $\bar{V}$ , on peut déduire le seuil de tension pour une transition stable de type  $(S_I)$  entre les équilibres, qui mène à la condition :

$$\bar{V} \geq \bar{V}^* = \frac{\eta_m}{\chi_{min}} \frac{(2\gamma + \nu - 1)\sqrt{1 + \nu}}{6\gamma} \simeq 1270 \text{ V} \quad (3.44)$$

Cette estimation est conservative car étant obtenue en supposant les paramètres (3.39) dans le cas défavorable  $\chi = \chi_{min}$ .

**Remarque 4 :** Telle que la loi d'actionnement est présentée, le choix de  $V_2$  et  $V_3$  impose une rotation de la courbure dans le sens trigonométrique mais il suffit simplement de commuter ces paramètres pour inverser le sens de la rotation. De plus, elle est écrite pour démarrer dans la configuration  $C_1$  ( $\theta(t=0) = 0$ ) et doit être écrite différemment pour démarrer dans une autre configuration.

### 3.4.2 Validation numérique

#### 3.4.2.a Mise en données

Pour valider numériquement cette application vis-à-vis de la loi d'actionnement (3.40), on utilise le logiciel Abaqus CAE, comme précédemment via l'élément fini S4R (quadrangulaire à quatre nœuds et cinq degrés de liberté sous intégration réduite), en suivant le schéma de résolution Full Newton. Cela nous oblige d'une part à abandonner l'hypothèse de courbures uniformes, et d'autre part à revenir dans un système de coordonnées cartésiennes. Ainsi, les tensions d'actionnement (3.42) peuvent se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta V_{MFC}^{90}(\Xi, t) = \frac{2}{3}\Xi (1 - \cos(2t)) & (3.45a) \\ \Delta V_{MFC}^{30}(\Xi, t) = \frac{1}{3}\Xi (2 + \cos(2t) + \sqrt{3}\sin(2t)) & (3.45b) \\ \Delta V_{MFC}^{-30}(\Xi, t) = \frac{1}{3}\Xi (2 + \cos(2t) - \sqrt{3}\sin(2t)) & (3.45c) \end{cases}$$

et sont tracées sur la figure 3.11 sous forme polaire (a) et cartésienne (b). Le point orange sur la figure 3.11(a) correspond à la valeur actuelle de l'angle d'actionnement  $t$  qui varie continument entre 0 et  $2\pi$ . Le paramètre  $\Xi$  contrôle l'amplitude de la tension ( $\Xi \in [0, 1125] \equiv \Delta V \in [0, 1500]$ ).

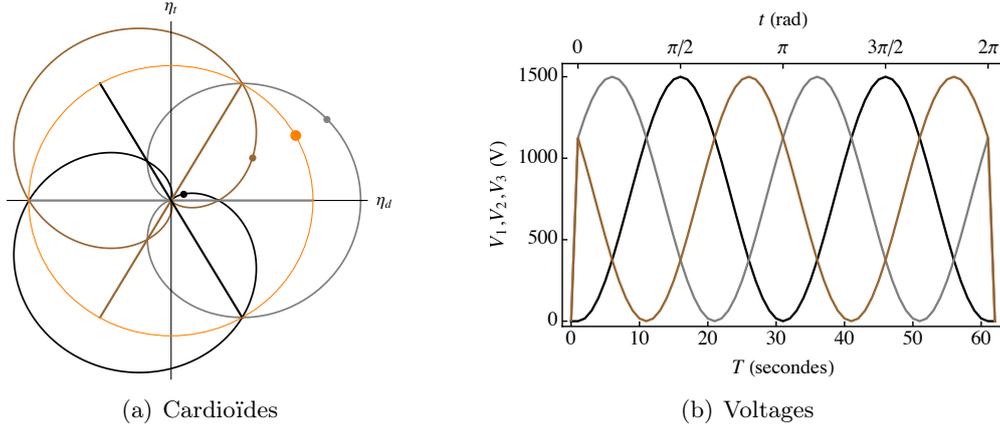


FIGURE 3.11 – (a) Tracé polaire des trois cardioïdes (3.45) ( $\Delta V_{\text{MFC}}^{90}$  : noir,  $\Delta V_{\text{MFC}}^{30}$  : gris,  $\Delta V_{\text{MFC}}^{-30}$  : marron) et le chemin d'actionnement résultant (orange) et (b) les mêmes tensions en fonction de l'angle  $t$  pour un temps  $T$  donné qui comprend une seconde de montée et une seconde de descente (toutes deux linéaires) des tensions.

Aussi, le paramètre d'anisotropie  $\eta$  doit être exprimé en termes du module de cisaillement anisotrope  $G_\eta$  du disque, que l'on peut déterminer vis-à-vis de sa valeur isotrope  $G_{iso}$ , en notant simplement que :

$$\gamma = \frac{G_\eta(1 - \nu^2)}{E} = \frac{1 - \nu}{2} + \eta \implies G_\eta = \frac{E \left( \frac{1 - \nu}{2} + \eta \right)}{1 - \nu^2} \quad (3.46)$$

ce qui donne  $\Delta G = G_\eta - G_{iso} = 4.45 \times 10^9$  GPa, qui reste une amplitude non-négligeable.

Le comportement mécanique du matériau étant établi, l'étape suivante consiste à effectuer le maillage et à la mise en données des déformations appliquées à la structure, détaillée dans le tableau 3.5. La courbure inélastique élastoplastique est remplacée par un gradient thermique équivalent, via une dilatation thermique équivalente de manière à faciliter la modélisation et s'affranchir de simulations par éléments finis en régime élastoplastique non-linéaire géométrique avec contact, délicate à mettre en place, coûteuse en temps, et nécessitant de connaître précisément la loi de comportement des matériaux.

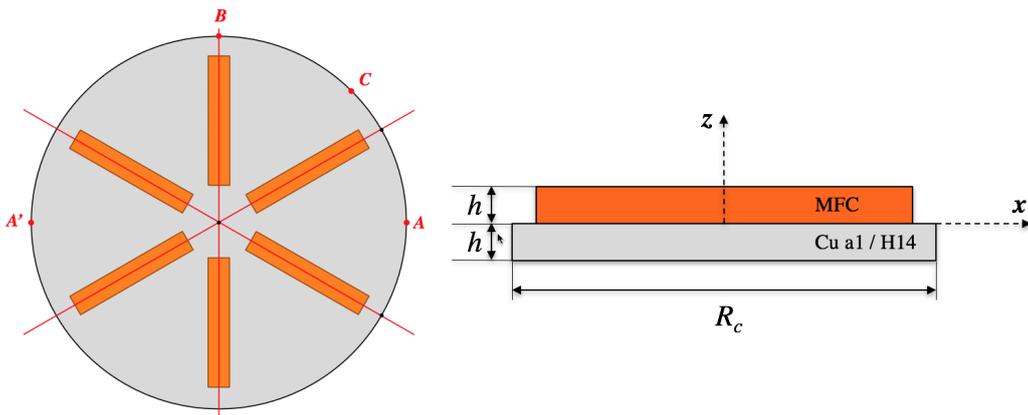


FIGURE 3.12 – Parties actives des actionneurs sur le disque de cuivre (configuration  $C_0$ ).

Pour pouvoir capturer la multistabilité, on utilise l'option de calcul non-linéaire géométrique (NLG) qui, vis-à-vis du comportement mécanique supposé avec  $\beta = 1$ , requiert l'introduction d'une source d'imperfection pour pouvoir converger vers une solution non-linéaire. Dans la pratique, plusieurs choix sont possibles entre perturber le coefficient de dilatation thermique fictif, perturber la géométrie circulaire du disque, ou encore appliquer des forces ponctuelles  $F_b$  aux deux extrémités A et A' (c.f. figure

3.12). Le choix se porte ici sur la dernière méthode car les deux premières contraignent la structure à être perturbée pendant toute la modélisation, tandis que l'application de forces ponctuelles peut être supprimée dans l'étape suivante, ce qui est plus consistant avec le respect du comportement mécanique réel de la coque qui, étant proche du cas de rigidité de torsion nulle, est très sensible à ces types d'imperfection.

Par ailleurs, une anisotropie faible peut conduire à des difficultés de modélisation numérique importantes. En effet, les mécanismes à rigidité nulle (ou presque) peuvent amener la solution à diverger car l'énergie de déformation de la coque pendant le passage d'une configuration à l'autre est proche de l'énergie de chaque configuration stable. Aussi, il existe deux sens d'actionnement (trigonométrique et horaire), ce qui peut créer une instabilité lorsque qu'une paire d'actionneurs est sollicitée.

Pour palier à cette déficience, on utilise une méthode de stabilisation dans Abaqus. Cette méthode consiste à ajouter un terme d'amortissement virtuel dans les équations d'équilibre de manière à éviter les comportements de mécanismes à rigidité nulle en stabilisant la solution. Cela se fait par le biais d'un coefficient d'amortissement virtuel et d'une fraction d'énergie dissipée afin d'éviter toute instabilité sans perturber la solution réelle<sup>4</sup> en termes de tension minimale d'actionnement.

Step	Modèle	Action	Intensité	Forme
1	Statique NLG	Plastification + collage MFCs	$\eta_m^{EP} = 4.61$ $F_b \neq 0$	$C_0 \rightarrow C_1$
2	Statique NLG	Relâchement	$F_b = 0$	$C_1$
3	Statique NLG Stabilize	Tensions électriques dans les patches	$\Delta V_{MFC}^{\forall} \geq 0$	$C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C'_1$
4	Statique NLG	Relâchement des tensions	$\Delta V_{MFC}^{\forall} = 0$	$C'_1 \equiv C_1 + \pi$

TABLEAU 3.5 – Démarche du calcul par éléments finis pour une rotation de 180° du champ de courbures.

### 3.4.2.b Résultats

Compte tenu de cette mise en données, les résultats des simulations par éléments finis sont tracés sur la figure 3.14 sur laquelle, en référence à la solution analytique, on compare les courbures (a), les variations énergétiques (b) et le chemin d'actionnement résultant sur le cône (c). Il apparaît clairement que les trajets de variation des courbures sont très bien reproduits par le modèle, en étant presque confondus avec les simulations par éléments finis, et ce malgré le nombre d'hypothèses qui ont été faites, particulièrement l'abandon de l'hypothèse de courbures uniformes dans les simulations.

Les courbures simulées par éléments finis sont calculées en utilisant les formules consistantes avec un champ de déplacements à courbures uniformes, vis-à-vis des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  de la figure 3.12 :

$$k_x = \frac{2w(A)}{R^2}; \quad k_y = \frac{2w(B)}{R^2}; \quad k_{xy} = \frac{1}{2} \left( k_x + k_y - \frac{4w(C)}{R^2} \right) \quad (3.47)$$

et les courbures dans les nouvelles coordonnées sont retrouvées via le changement de variables (3.9).

La figure 3.14(b) montre que la variation d'énergie de la coque ne dépasse pas 5% de l'énergie totale, ce qui reste raisonnablement faible. Cela confirme que l'énergie dépensée par la coque pour effectuer une transition continue est faible et lui permet de subir un grand nombre de cycles en limitant le phénomène de fatigue, à l'inverse des matériaux composites bistables qui dépendent généralement une quantité d'énergie non-négligeable lors de la transition.

En somme, ces comparaisons permettent de valider d'une part la méthodologie d'actionnement retenue, et d'autre part le modèle à courbures uniformes proposé sur une application concrète.

---

4. Lorsque le coefficient d'amortissement virtuel est géré automatiquement par le code, cela ne perturbe pas la solution réelle. En revanche, certains cas, notamment le cas isotrope parfait, nécessitent d'augmenter l'amortissement fictif, et il est alors délicat d'affirmer avec certitude que la solution calculée est bien la solution réelle.

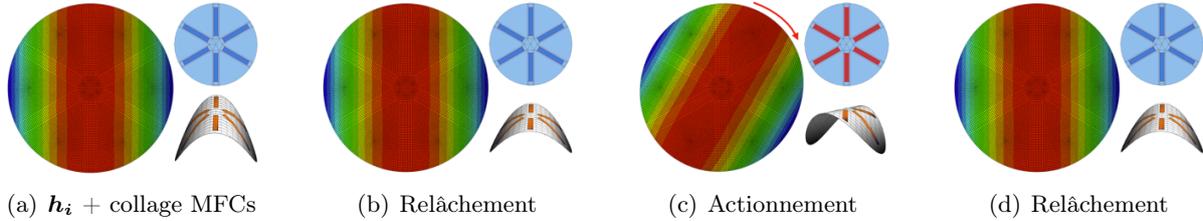
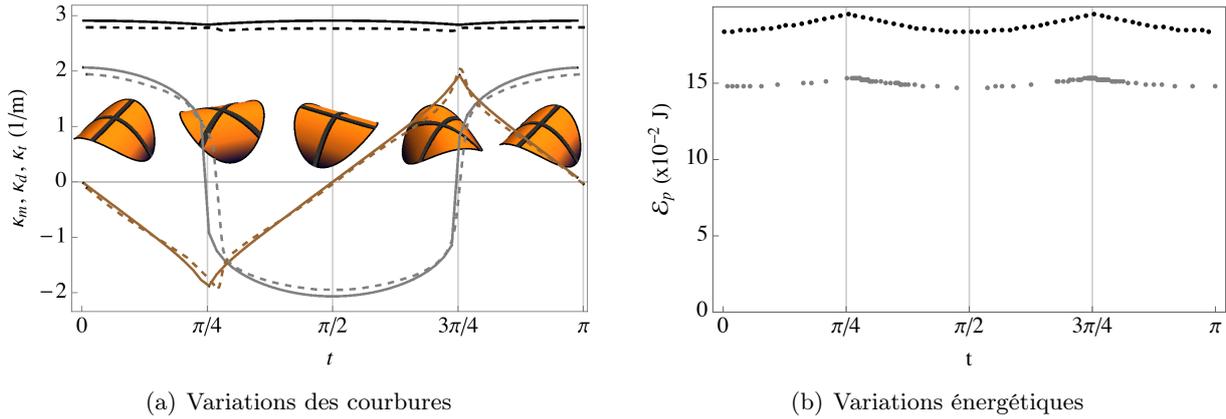
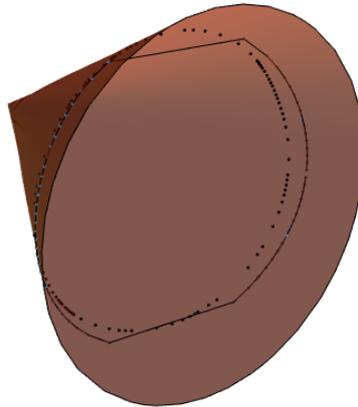


FIGURE 3.13 – Résultats des simulations numériques par éléments finis de l'actionnement.



(a) Variations des courbures

(b) Variations énergétiques



(c) Chemin d'actionnement

 FIGURE 3.14 – (a) Variations des courbures  $\kappa_m$  (noir),  $\kappa_d$  (gris) et  $\kappa_t$  (marron) analytiques (traits continus) et simulées par éléments finis (traits discontinus), (b) variations énergétiques analytiques (noir) et numériques (gris) et (c) chemin d'actionnement résultant sur le cône analytiques (traits continus) et numériques (traits discontinus) pour une tension maximale de 1500 V.

### 3.4.3 Mise en œuvre expérimentale

#### 3.4.3.a Processus de plastification : obtention de la multistabilité

Cette étape consiste à obtenir la multistabilité par effets élastoplastiques. Comme on l'a détaillé dans le paragraphe 2.3.2.a, le disque de cuivre laminé est enroulé dans deux directions orthogonales autour d'un cylindre rigide de PVC, supposé indéformable. Ces deux directions d'enroulement coïncident avec les plans de symétrie de la coque, c'est-à-dire la direction de laminage et son orthogonale. Après avoir plastifié le disque dans une direction, ce dernier maintient fortement cette configuration cylindrique comme "courbure initiale". Cependant, après plusieurs cycles alternés dans les deux directions, les équilibres bifurquent vers deux configurations cylindriques quasi-parfaitement orthogonales

et stables. Les cycles de plastification sont répétés plusieurs fois au moyen de plusieurs cylindres dont le diamètre va en décroissance, de 160 mm à 140 mm puis 110 mm pour atteindre le rayon de courbure final (*c.f.* figure 3.15) et une énergie d'actionnement faible. Le diamètre des rouleaux est choisi pour obtenir une courbure résiduelle adéquate vis-à-vis de la rigidité des patches mais d'autres choix conduisent aux mêmes résultats, pourvu que les patches restent dans le domaine élastique.

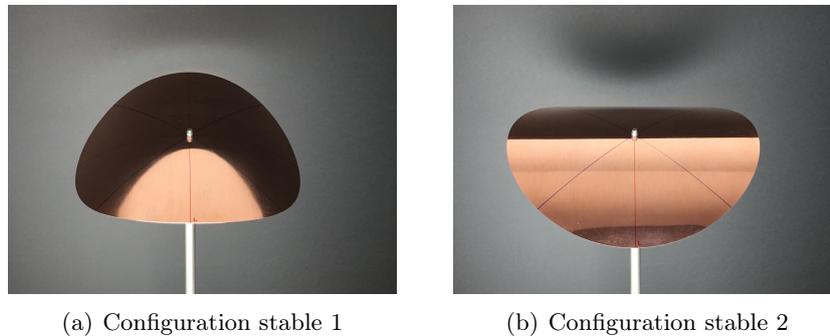


FIGURE 3.15 – Les deux configurations stables cylindriques du disque de cuivre plastifié.

Hormis quelques étroites zones proches des bords, la courbure de la coque peut très légitimement être supposée uniforme. L'avantage principal de cette structure, outre son énergie d'actionnement minimale, réside dans le fait que l'énergie de déformation dépensée dans le passage d'une configuration à l'autre est aussi très faible. L'objectif lors du collage des actionneurs est de conserver cette capacité, ce qui a fait l'objet principal du choix d'architecture proposé.

### 3.4.3.b Collage des MFCs : d'une coque multistable à une structure adaptative

Selon l'architecture retenue et le sens de collage optimal étudié dans le paragraphe 3.3.3, nous avons collé les trois paires de patches au moyen d'une colle élastique (Loctite M121HP) capable de supporter les déformations des patches, grâce un allongement à la rupture de l'ordre de 200%. Les actionneurs sont collés lorsque la structure est aplatie de manière à homogénéiser le champ de contraintes. L'ensemble est conservé dans cet état aplati pendant 48 heures de manière à assurer une polymérisation complète des différents joints de colle, ce qui résulte à deux configurations stables représentées sur la figure 3.16(b). La répétition des mesures montre que l'anisotropie reste quasi-identique après collage des actionneurs, et la faible énergie d'actionnement de cette structure est maintenue.

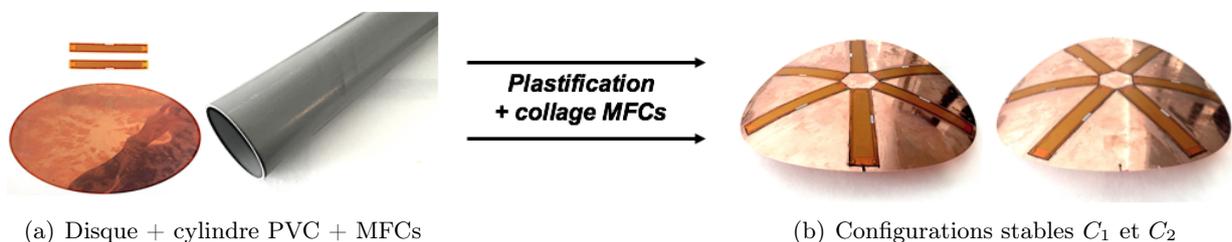


FIGURE 3.16 – Les deux configurations stables de la coque avec actionneurs intégrés, résultant du procédé de collage.

Aussi, rappelons que la théorie et les simulations numériques ne tiennent pas compte du joint de colle, qui a finalement une importance non-négligeable en pratique car il participe activement à la réduction de courbure et aux pertes de transmission des efforts des patches à la coque. Aussi, l'application manuelle de la colle peut mener à des imperfections dans le sens où chaque actionneur est lié par un joint différent (épaisseur, homogénéité) qui impose un champ de contraintes légèrement différent.

Globalement, la difficulté de mise en œuvre résulte du nombre conséquent d'imperfections possibles dans tout le processus d'obtention de la structure avec actionneurs. En effet, une simple déficience d'identification des directions de laminage ou un décalage entre les directions de laminage et l'axe du cylindre lors de la phase de plastification peuvent introduire des imperfections conduisant à deux configurations stables non-orthogonales et/ou de niveaux énergétiques différents. Ensuite, une in-homogénéité des joints de colle ou un décalage de positionnement des actionneurs peuvent influencer une direction de réduction de courbure plutôt qu'une autre, conduisant à une structure monostable. Néanmoins, la pratique sur différents cas-tests permet de corriger chacun de ces aspects et, de plus, un procédé industriel robotisé supprimerait complètement chacune de ces imperfections.

### 3.4.3.c Application des tensions : contrôle de forme

En dernière étape de cette étude, on effectue l'application expérimentale de l'actionnement multi-paramétrique, qui nécessite le matériel présenté sur la figure 3.17. Il comprend tout d'abord un logiciel de contrôle permettant de piloter un générateur de signaux avec trois sorties analogiques, de manière à contrôler les trois paires d'actionneurs indépendamment via la loi (3.45). Ce générateur est lui même relié à un amplificateur de tension, connecté directement en parallèle sur chaque paire d'actionneurs. Enfin, on utilise un oscilloscope pour vérifier l'intégrité des tensions envoyées aux actionneurs.

L'utilisation d'un générateur de signaux analogiques permet de générer tout type de formes de tensions envoyées aux actionneurs. Cela permet aussi de contrôler finement la fréquence de génération du signal afin d'être en mesure de travailler en quasi-statique ou bien en dynamique, car ce type d'actionneurs peut en effet supporter des fréquences allant jusqu'au kHz.

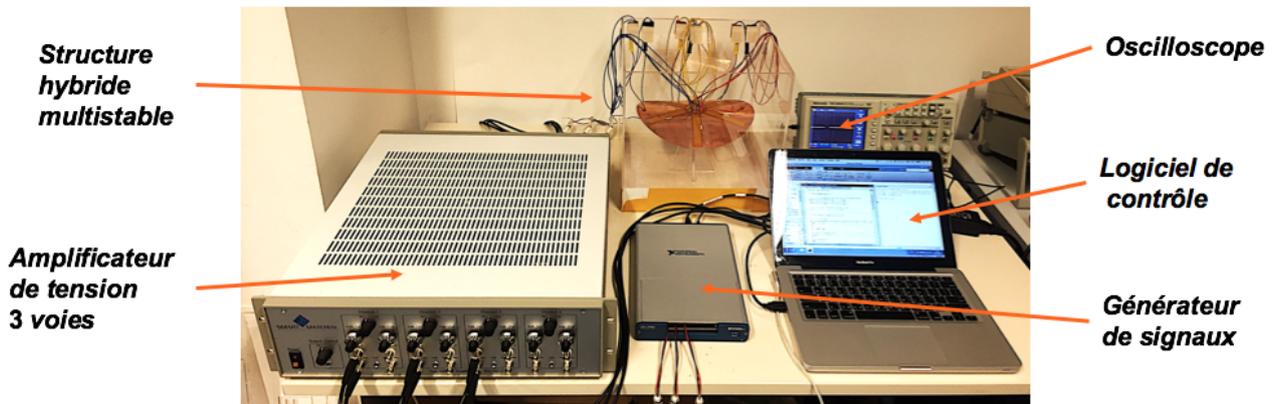


FIGURE 3.17 – Montage expérimental nécessaire pour mener l'actionnement de la coque piézoélectrique.

La mise en œuvre a été effectuée pour différentes fréquences en termes de temps effectif pour effectuer un tour complet de rotation de la courbure ( $2\pi$ ), de manière à évaluer la dépendance de la vitesse d'actionnement sur la variation de l'angle  $\theta$ . Pour ce faire, la loi d'actionnement cartésienne (3.45) a été utilisée comme pour les simulations numériques, en remplaçant le terme ( $2t$ ) par ( $2\Omega t$ ) où  $\Omega = 2\pi f$  est la pulsation. Par ailleurs, la loi contient des temps supplémentaires d'une seconde de montée et d'une seconde de descente (toutes deux linéaires) des tensions de manière à éviter un choc brutal de tension de 0 à 1500 V dans les actionneurs, ce qui n'a aucune importance dans les simulations et qui n'est donc pas pris en compte dans la confrontation avec les résultats théoriques et numériques.

A titre de comparaison, on propose d'étudier la variation de l'angle de courbure principale  $\theta$  vis-à-vis de l'imposition de l'angle d'actionnement  $t$ . Du point de vue expérimental, le paramètre  $\theta$  est mesuré par traitement d'images via le logiciel ImageJ (validé par Matlab), en remarquant que la coque, en vue de dessus, a une forme elliptique ; il suffit ainsi de capturer l'angle d'inclinaison de l'ellipse à chaque instant et pendant toute la durée d'application des tensions (*c.f.* figure 3.18).

La figure 3.19(a) représente la variation de  $\theta$  expérimentale pour différents temps d'actionnement.

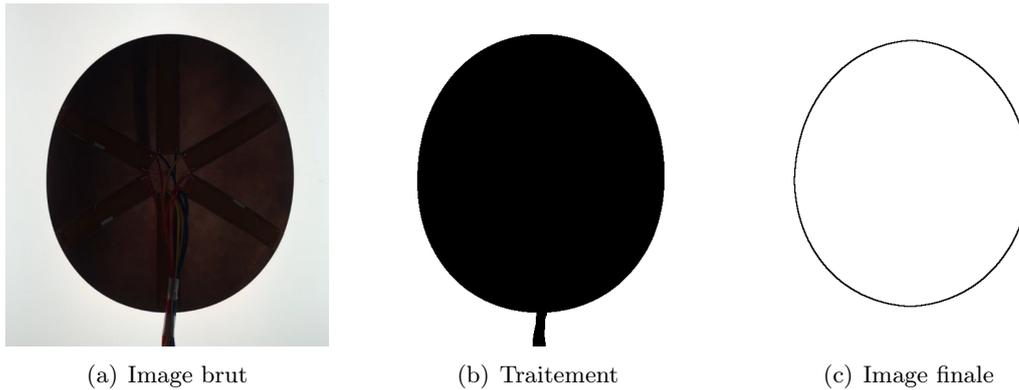


FIGURE 3.18 – Identification de la forme elliptique de la coque vue de dessus dans la mesure de  $\theta(t)$ .

Les courbes rouge, marron et orange correspondent respectivement à des fréquences de 0.016 Hz (1 Tr/min), 0.0055 Hz (1/3 Tr/min) et 0.0033 Hz (1/5 Tr/min). Ce graphe montre une légère dépendance de la vitesse imposée sur la variation de  $\theta$ , mais la tendance reste la même pour les trois courbes.

La figure 3.19(b) montre la comparaison théorique-expérimentale. Les résultats de simulations par éléments finis sont confondus avec le modèle UC et ne sont pas reportés, ce qui est remarquable au vu des différences fondamentales qui existent dans leur élaboration. Malgré le nombre d'hypothèses faites, on constate une bonne concordance entre théorie, simulations numériques et réalisation expérimentale. De façon évidente, plus la vitesse imposée est faible, plus la solution se rapproche de la théorie. D'autres tests ont été effectués avec succès jusqu'à une fréquence de 1 Hz (60 Tr/min), mais des vitesses plus élevées sont encore possibles.

Du point de vue expérimental, il s'avère que la vitesse de rotation de la courbure n'est pas constante pendant une révolution complète, et introduit un léger décalage entre  $t$  et  $\theta$ , ce qui a pour effet d'augmenter l'écart avec la solution analytique. Cela est principalement dû à l'anisotropie et la disposition des actionneurs; en effet, le passage de la configuration  $C_1$  à la configuration  $C_2$  nécessite moins d'énergie que la rotation inverse, du fait qu'une paire d'actionneurs soit alignée avec la configuration  $C_2$  et ainsi  $\Delta_1$  est non-nul (*c.f.* figure 2.9), mais ces considérations n'ont effectivement aucune incidence pratique sur la capacité d'actionnement. En outre, tous les résultats analytiques ont été confrontés à une solution extensible, obtenue de façon semi-analytique et exhibant des résultats identiques pour la variation de  $\theta(t)$ .

Un autre point important concerne l'énergie d'actionnement. Après collage des actionneurs, la tension minimale pour effectuer une révolution complète de la courbure est de 1170 V. Après environ quatre jours, la colle atteint sa configuration chimique finale et la tension minimale d'actionnement passe à 1400 V, alors que les tensions minimales théorique et numérique sont respectivement de 1270 V et 960 V. Ces écarts sont dus aux différences d'hypothèses qui sont faites dans les différentes modélisations, principalement l'effet du joint de colle qui rigidifie la coque ainsi que la surface inactive dont on ne tient pas compte dans la modélisation. Finalement, ces écarts sont typiques de ce que l'on trouve dans la littérature sur les structures multistables munies d'actionneurs piézoélectriques.

Enfin, notons que contrairement à la quasi-totalité des structures multistables en matériaux composites, très sensibles aux variations d'humidité qui ont souvent pour effet de supprimer la multistabilité à court terme, la structure métallique conçue reste bien bistable même après plusieurs semaines, à condition que la position de repos soit alternée dans le temps. En effet, la pratique montre que, lorsque la coque reste un certain temps (typiquement quelques jours) dans une configuration donnée, le joint de colle qui supporte un champ de contraintes important, a tendance à se stabiliser dans cette configuration et la structure tend à fixer cette position plutôt que la seconde, ce qui modifie légèrement le niveau énergétique entre les positions. Le fait d'alterner la position de repos permet de conserver une répartition des contraintes homogénéisée dans chaque configuration, assurant un équilibre énergétique entre les deux.

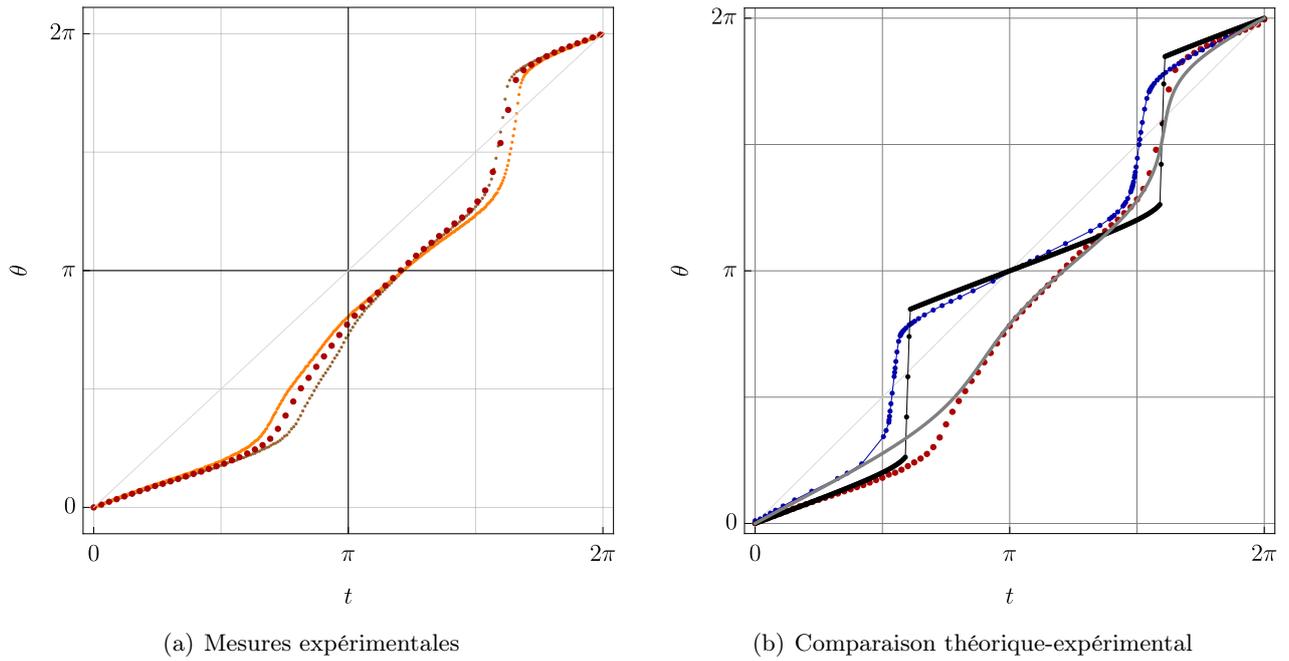


FIGURE 3.19 – (a) Mesure expérimentale de  $\theta(t)$  : rouge (pour une vitesse de  $2\pi/300$  s), marron ( $2\pi/180$  s), orange ( $2\pi/60$  s) et (b) Comparaison théorique-expérimentale pour une vitesse d'actionnement de  $2\pi/300$  s : bleu (modèle UC,  $\rho > \rho^*$ ), noir (modèle UC,  $\rho < \rho^*$ ), gris (fit du modèle UC avec une matrice  $D$  complètement anisotrope :  $\nu = 0.32, \beta = 0.98, \gamma = 0.34, \epsilon_1 = -0.01, \epsilon_2 = -0.02$ ).

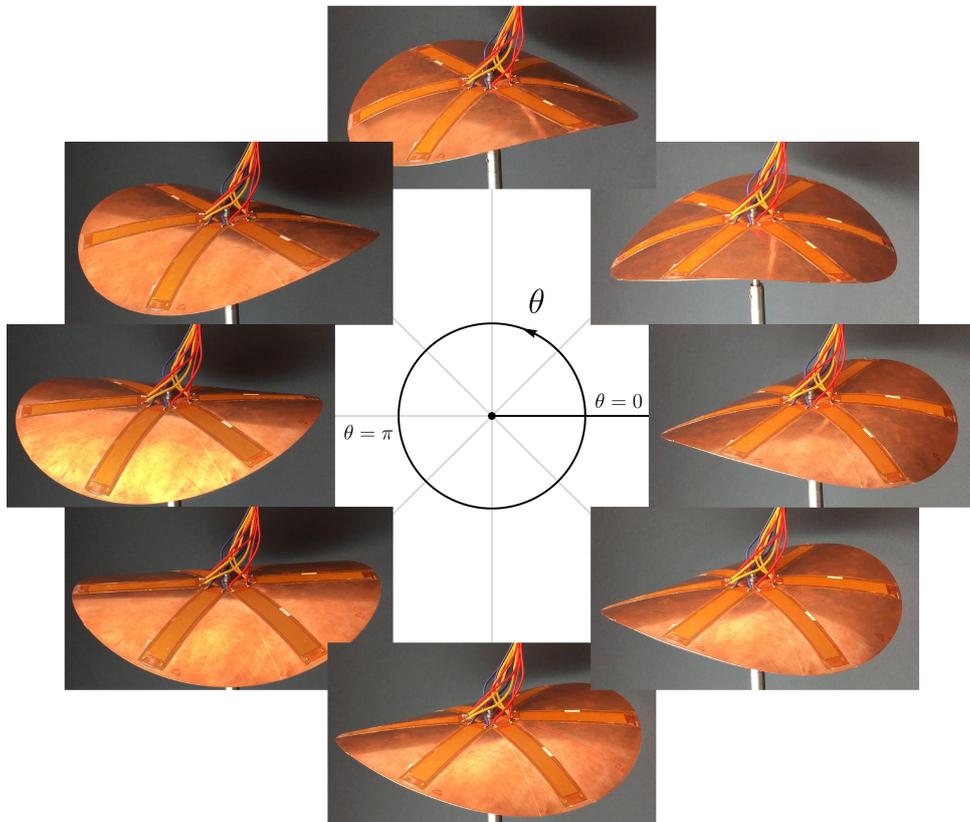


FIGURE 3.20 – Séquence de déformations de la coque pendant l'actionnement.

En somme, cette étude a montré que modèle proposé est capable de prédire avec précision le comportement global de la coque et constitue un outil puissant de dimensionnement et de modélisation. La formulation géométrique proposée pour ce problème est très efficace et permet de disposer de solutions analytiques concises, ce qui reste remarquable par l'utilisation de seulement trois degrés de liberté, réduits à une unique inconnue  $\theta$ .

**Remarque 5 :** Par souci de simplicité, on s'est limités à exploiter une géométrie de coque circulaire simple à modéliser, mais tout type de géométrie pourrait être envisagé avec cette loi d'actionnement et le modèle à courbures uniformes, pourvu qu'il soit possible de déterminer le rayon caractéristique.

### 3.5 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif de réaliser le dimensionnement complet et l'étude d'actionnement multiparamétrique d'une coque multistable pour laquelle l'apport énergétique nécessaire au passage d'une configuration stable à l'autre est minimal.

Pour effectuer cette étude, nous avons d'abord dérivé un modèle non-linéaire de coques basé sur la cinématique de Koiter et l'hypothèse d'inextensibilité, car étant la plus pertinente pour les coques minces, profondes et chargées en flexion pure. Par le biais de ce modèle, nous avons proposé une formulation permettant de remplacer l'étude analytique par une étude géométrique analogue. Cette dernière approche a l'avantage de faciliter la compréhension du comportement mécanique de la coque et ainsi de faciliter la modélisation grâce à la réduction du problème à un unique degré de liberté qu'il n'est pas possible d'obtenir avec une solution extensible.

Ensuite, nous avons exploité cette approche sur l'étude de la transition entre les configurations stables, en montrant particulièrement que l'obtention d'une transition complètement continue, quasi-statique et réversible des équilibres stables cylindriques de la coque autour d'une révolution complète du cône nécessite l'utilisation d'au moins trois directions indépendantes de contrôle par courbures inélastiques additionnelles.

Sur la base de ces résultats, nous avons établi une démarche de dimensionnement à laquelle nous avons associé une loi d'actionnement continue, permettant de conduire de façon quasi-statique ou même dynamique la courbure de la coque selon un chemin continu et réversible, qui minimise son énergie de déformation. Nous avons ainsi réalisé l'étude théorique, la validation numérique ainsi que la mise en œuvre expérimentale de cette application, où ces trois aspects montrent une très bonne concordance malgré le nombre d'hypothèses faites analytiquement. Spécifiquement, l'hypothèse d'inextensibilité se montre particulièrement efficace pour ce type de problèmes où la loi d'actionnement peut avoir une forme non-triviale. Les essais expérimentaux montrent que l'actionnement peut être mené à bien pour des fréquences allant jusqu'au Hertz ( $2\pi/s$ ), ce qui est remarquable au vu de la faible surface de matériaux actifs sur la structure (15%) ainsi que les très faibles déformations engendrées par les actionneurs ( $< 10^{-4}$ ).

Les géométries considérées ont l'avantage de simplifier l'étude mais d'autres géométries plus complexes peuvent être exploitées par cette loi d'actionnement pourvu que l'on puisse déterminer le rayon caractéristique  $R_0$ .

En somme, nous avons montré qu'il est possible de contrôler la forme de coques multistables au moyen d'un apport énergétique particulièrement faible si la structure complète (coque-matériaux actifs) est convenablement dimensionnée.

# Chapitre 4

## La dynamique non-linéaire d'une coque quasi-neutralement stable : des petites oscillations au chaos

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>92</b>
<b>4.2</b>	<b>Modèle simplifié de dynamique non-linéaire en oscillations libres</b>	<b>93</b>
4.2.1	Énergie mécanique	94
4.2.2	Cas isotrope	95
4.2.3	Système avec imperfection : linéarisation autour des positions stables	97
<b>4.3</b>	<b>Étude expérimentale de dynamique et quelques simulations</b>	<b>98</b>
4.3.1	Étude expérimentale d'une coque bistable en oscillations forcées	98
4.3.1.a	Petites oscillations sur la coordonnée $c$ : réponse en fréquence	99
4.3.1.b	Observations expérimentales de la dynamique non-linéaire	100
4.3.2	Quelques résultats numériques en oscillations forcées	108
4.3.2.a	Équations du mouvement en oscillations forcées	108
4.3.2.b	Résultats	109
4.3.3	Conclusion sur la dynamique	112
<b>4.4</b>	<b>Application à la récupération d'énergie par voie piézoélectrique</b>	<b>113</b>
4.4.1	Démarche de récupération d'énergie	114
4.4.2	Étude expérimentale du système 6P	116
4.4.2.a	Cas monostable	116
4.4.2.b	Cas bistable	120
4.4.3	Étude expérimentale du système bistable 4P	121
4.4.3.a	Réponse en fréquence et modes dynamiques	122
4.4.3.b	Quantification de l'énergie récupérable du système bistable 4P	122
4.4.4	Conclusion sur la récupération d'énergie	124
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>125</b>

---

*Ce chapitre est dédié à l'étude de dynamique non-linéaire d'une coque bistable métallique. Dans un premier temps, on propose un modèle simple de dynamique non-linéaire, qui est une extension du modèle UC, de manière à pouvoir étudier la dynamique de la coque en oscillations libres et forcées. Ensuite, on étudie de façon expérimentale la dynamique de la coque afin de mettre en évidence les différents régimes d'oscillations engendrés par une source d'excitation. On effectue quelques simulations numériques dans le but de retrouver les observations expérimentales. Enfin, on propose une application à la récupération d'énergie vibratoire par voie piézoélectrique.*

## 4.1 Introduction

La dynamique non-linéaire des coques multistables est un sujet qui a très récemment suscité l'intérêt de la communauté scientifique. Jusqu'alors, la modélisation quasi-statique était privilégiée, trouvant son utilité dans les applications de structures adaptatives contrôlées par l'utilisation de matériaux intelligents. Cependant, il s'avère que ces structures multistables excitées mécaniquement par une contribution extérieure à des fréquences de l'ordre du Hertz sont capables de changements de forme importants, et peuvent également être de bonnes candidates en tant que structures adaptatives, à condition que les paramètres d'excitation soient correctement contrôlés.

Si l'étude quasi-statique non-linéaire des plaques et coques minces est désormais bien maîtrisée (même lorsque l'on va jusqu'à la tristabilité), les considérations dynamiques mettent en évidence des difficultés supplémentaires quant à l'identification des régimes dynamiques susceptibles d'apparaître. En effet, les non-linéarités engendrées par le comportement mécanique des structures minces font souvent entrer en jeu les phénomènes de chaos (Touzé et al., 2011) et/ou de résonance paramétrique, difficiles à modéliser. De plus, il n'est souvent pas possible d'obtenir des solutions analytiques concises sur les régimes d'oscillations du fait de la présence de paramètres supplémentaires à prendre en compte, et qui complexifient les équations régissant la dynamique de la coque. Dans ce contexte, la simulation par éléments finis est un outil puissant permettant de modéliser avec précision la dynamique non-linéaire des coques, mais impose des temps de calcul très importants pour obtenir une solution convergée, et seules des études paramétriques peuvent être menées pour des combinaisons limitées de géométrie et de paramètres d'excitation. De fait, l'utilisation de modèles réduits menant à des solutions analytiques ou semi-analytiques trouve toute sa pertinence dans ce type d'étude.

Une application directe très intéressante est liée à la récupération d'énergie vibratoire. L'idée de récupérer de l'énergie via les vibrations ambiantes pour générer de l'électricité a suscité un intérêt spectaculaire ces quinze dernières années. Au début des années 2000, tous types de dispositifs de récupération d'énergie piézoélectrique ont vu le jour. Cela va de la chaussure piézoélectrique (Paradiso and Starner, 2005) aux poutres piézocomposites (Roundy and Wright, 2004; Lu et al., 2004). En particulier, les systèmes monostables constitués de poutres sur lesquelles sont attachés des matériaux électroactifs ont été particulièrement convoités. D'autres systèmes hybrides piézoélectriques, électromagnétiques ou encore électrostatiques ont également été étudiés afin d'évaluer le dispositif le plus efficace dans un but d'optimalité. Dans ce contexte, de nombreux auteurs ont démontré la pertinence des systèmes piézoélectriques car capables de générer un niveau d'énergie plus important que leurs concurrents (Roundy et al., 2003; Poulain et al., 2004), en fournissant une énergie moindre. Cela consiste à coller une pastille piézoélectrique sur la surface d'une poutre console sur laquelle est disposée une masse inertielle à l'extrémité, et mettre ensuite le bâti en oscillations jusqu'à la résonance afin de produire un champ électrique engendré par effet piézoélectrique direct dans les matériaux électroactifs.

Par la suite, de nombreux dispositifs monodimensionnels étendus à la bistabilité ont été proposés dans le but de maximiser l'énergie récupérable, de l'ordre du microWatt; on parle alors de micro-générateurs piézo-électriques ( $\mu$ GPE). Ces systèmes, généralement sous la forme de poutres flambées (Cottone et al., 2012), sont très utiles car du point de vue ergonomique, ils sont restreints à des volumes de l'ordre du millimètre cube et peuvent être utilisés dans un grand nombre d'applications, notamment les MEMS (*Micro-Electro-Mechanical Systems*). De façon non-fortuite, les structures multistables sont de bonnes candidates à la récupération d'énergie piézoélectrique comme on le verra par la suite.

C'est pourquoi dans ce chapitre, on effectue une étude exploratoire de la dynamique non-linéaire d'une coque métallique quasi-neutralement stable, et on applique ces propriétés de dynamique à la récupération d'énergie. Ces travaux sortent du cadre de la thèse et sont donc restreints à des résultats préliminaires. L'objectif est d'exploiter la multistabilité atypique des coques métalliques afin d'identifier les différents régimes inhérents à son comportement mécanique. D'abord, on propose un modèle simplifié de dynamique non-linéaire, qui est une extension du modèle UC au cas dynamique. Ensuite, on étudie expérimentalement la dynamique non-linéaire de la coque vis-à-vis d'une source d'excitation extérieure de type pot vibrant. Ces expérimentations sont confrontées au modèle UC afin d'évaluer sa pertinence. Enfin, on propose un système de récupération d'énergie vibratoire par voie piézoélectrique.

## 4.2 Modèle simplifié de dynamique non-linéaire en oscillations libres

L'étude de la dynamique non-linéaire des coques multistables est une tâche complexe, tant du point de vue théorique que du point de vue expérimental. C'est pourquoi les modèles simplifiés sont très importants pour comprendre les phénomènes impliqués. Dans ce sens, [Carrella et al. \(2008\)](#) ont été les premiers à s'intéresser à l'étude dynamique de plaques composites bistables asymétriques de type cross-ply, encastrées en leur centre, en modélisant la plaque comme un système à un degré de liberté par l'hypothèse d'un oscillateur de Duffing, montrant des régions chaotiques vis-à-vis des paramètres d'excitation, confirmées expérimentalement.

Par la suite, [Vogl and Hyer \(2011\)](#) ont proposé un modèle non-linéaire de coques afin d'étudier les vibrations naturelles intrinsèques, et ainsi pouvoir identifier les paramètres propres à la coque tels que la fréquence de résonance. Compte tenu de ces résultats prometteurs, d'autres auteurs ([Diaconu et al., 2008](#); [Arrieta et al., 2009, 2011a,b,c](#)) ont poussé l'étude des composites stratifiés asymétriques dans le but d'identifier précisément les cycles chaotiques inhérents au comportement de la coque. Les études tiennent également compte de l'effet des conditions aux limites sur la dynamique lorsque la coque est encastrée sur un coté entier ([Arrieta et al., 2013a](#)), ce qui permet de privilégier des mouvements.

Néanmoins, l'inconvénient des plaques bistables à courbures inélastiques opposées en signe (entre autre les stratifiés  $[0^\circ, 90^\circ]$ ) se trouve sur leur limitation importante en termes de degrés de liberté, qui restreint les mouvements de la coque. En effet, pour ces matériaux, les courbures de torsion ne sont pas prépondérantes voire inexistantes lors des déformations, ce qui contraint la coque à passer de façon dynamique d'un état stable à l'autre avec  $k_{xy}(t) \sim 0 \forall t$ . Aussi, les composites stratifiés soumis à des cycles chaotiques mettent en évidence des bruits sonores importants et nuisibles, restreignant les applications. Le fait d'exploiter des structures dont la cinématique privilégie des courbures de torsion peut mettre en évidence de nouveaux régimes que cet autre type de coques n'est pas capable de capturer.

Le modèle UC présenté dans les chapitres précédents était consacré à une modélisation quasi-statique, ne faisant intervenir que l'énergie potentielle de la coque dans le but de définir les équilibres stables et/ou les trajets de variations de courbures sous une sollicitation donnée. Dans l'optique de disposer d'un modèle dynamique complet au travers de l'énergie mécanique de la coque, on s'attache dans cette section à introduire l'énergie cinétique afin d'obtenir les équations du mouvement en oscillations libres. On suppose la coque inextensible de géométrie circulaire, bien adaptée au système de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} k_x = \frac{c}{2}(1 + \cos 2\theta) + \frac{g_0}{2c}(1 - \cos 2\theta) & (4.1a) \\ k_y = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\theta) + \frac{g_0}{2c}(1 + \cos 2\theta) & (4.1b) \\ k_{xy} = \left(\frac{c^2 - g_0}{2c}\right) \sin 2\theta & (4.1c) \end{cases}$$

où  $c$  correspond au niveau de courbure principale ( $c > 0$ ),  $\theta$  à l'orientation de la courbure principale ( $\theta \in [0, \pi]$ ) et  $g_0 = \det \mathbf{k}$  est la courbure Gaussienne. On se limite aux plaques inextensibles cylindriques chargées par déformations inélastiques uniformes et sphériques avec  $\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}$  et  $g_0 = 0 \forall t$ . Les courbures étant supposées uniformes dans l'espace,  $c$  et  $\theta$  sont des fonctions de la seule variable temps  $t$ . De fait, pour simplifier les expressions, on omet la présence explicite du temps, de sorte que  $c = c(t)$ ,  $dc/dt = \dot{c}$  et  $\theta = \theta(t)$ ,  $d\theta/dt = \dot{\theta}$ . Enfin, on suppose la matrice de rigidité de flexion adimensionnée  $D$  et le champ de courbures inélastiques sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{iso} + \eta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [\mathbf{h}_i] = \begin{pmatrix} h_m + \varepsilon & 0 \\ 0 & h_m - \varepsilon \end{pmatrix}; \quad h_m > 0 \quad (4.2)$$

Cela revient à considérer des coques isotropes perturbées. Le paramètre  $\eta$ , comme précédemment, permet de faire la distinction entre coques isotropes et coques à symétrie du carré, qui correspondent

comme on l'a montré précédemment au comportement des cuivres laminés. Le paramètre  $\varepsilon$  dépend des imperfections de fabrication de la coque lors de l'obtention de la multistabilité, et est équivalent à des niveaux de courbure inélastique différents dans chaque axe d'orthotropie.

### 4.2.1 Énergie mécanique

Sous ces hypothèses, l'énergie potentielle totale de la coque a la forme classique :

$$\mathcal{E}_p(c, \theta) = \frac{1}{2}D(\mathbf{k} - \mathbf{h}_i) \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{h}_i) \quad (4.3)$$

où la contrainte d'inextensibilité  $\det \mathbf{k} = 0$  est automatiquement satisfaite avec le système de coordonnées choisi. L'énergie potentielle peut être réécrite succinctement sous la forme :

$$\mathcal{E}_p(c, \theta) = \frac{c^2}{2} \left[ 1 + \frac{\eta}{2}(1 - \cos 4\theta) \right] - c \left[ h_m(1 + \mu) + \varepsilon(1 - \mu) \cos 2\theta \right] + h_m^2(1 + \mu) + \varepsilon^2(1 - \mu) \quad (4.4)$$

pour  $\theta \in [0, \pi]$ . La minimisation sans contrainte de l'énergie (4.3) mène aux deux configurations stables suivantes (tracées sur la figure 4.1) :

$$\begin{cases} c_1^* = h_m(1 + \mu) + \varepsilon(1 - \mu), & \theta_1^* = 0 \\ c_2^* = h_m(1 + \mu) - \varepsilon(1 - \mu), & \theta_2^* = \pi/2 \end{cases} \quad (4.5a)$$

$$\quad (4.5b)$$

Les configurations instables ont l'expression :

$$\begin{cases} c_1^{*i} = \frac{h_m(1 + \mu)}{1 + \eta}, & \theta_1^{*i} = \frac{\tan^{-1} \left( \frac{(1 + \eta)(\mu - 1)\varepsilon}{\eta h_m(1 + \mu)}, -\frac{\sqrt{\eta^2 h_m^2(1 + \mu)^2 - (1 + \eta)^2(\mu - 1)^2 \varepsilon^2}}{\sqrt{\eta^2 h_m^2(1 + \mu)^2}} \right)}{2} \end{cases} \quad (4.6a)$$

$$\begin{cases} c_2^{*i} = \frac{h_m(1 + \mu)}{1 + \eta}, & \theta_2^{*i} = \frac{\tan^{-1} \left( \frac{(1 + \eta)(\mu - 1)\varepsilon}{\eta h_m(1 + \mu)}, \frac{\sqrt{\eta^2 h_m^2(1 + \mu)^2 - (1 + \eta)^2(\mu - 1)^2 \varepsilon^2}}{\sqrt{\eta^2 h_m^2(1 + \mu)^2}} \right)}{2} \end{cases} \quad (4.6b)$$

et sont orientées respectivement à  $\theta = \pi/4$  et  $\theta = 3\pi/4$  lorsque  $\varepsilon = 0$ .

Tout comme le paramètre  $\eta$ , le paramètre  $\varepsilon$  peut être estimé expérimentalement en mesurant les niveaux de courbure  $c_1^*$  et  $c_2^*$ , et en utilisant (4.5), ce qui donne :

$$\varepsilon = \frac{c_1^* - c_2^*}{2(1 - \mu)} \quad (4.7)$$

On suppose la coque travailler en flexion pure, en négligeant l'énergie associée aux déplacements plans  $\bar{u}_x$  et  $\bar{u}_y$ . Le déplacement vertical de la coque s'exprime sous forme dimensionnelle par :

$$\bar{w}(x, y, t) = \frac{1}{2} (k_x x^2 + k_y y^2 + 2k_{xy} xy) / R_0 \quad (4.8)$$

et permet d'introduire l'énergie cinétique totale dimensionnelle par l'expression :

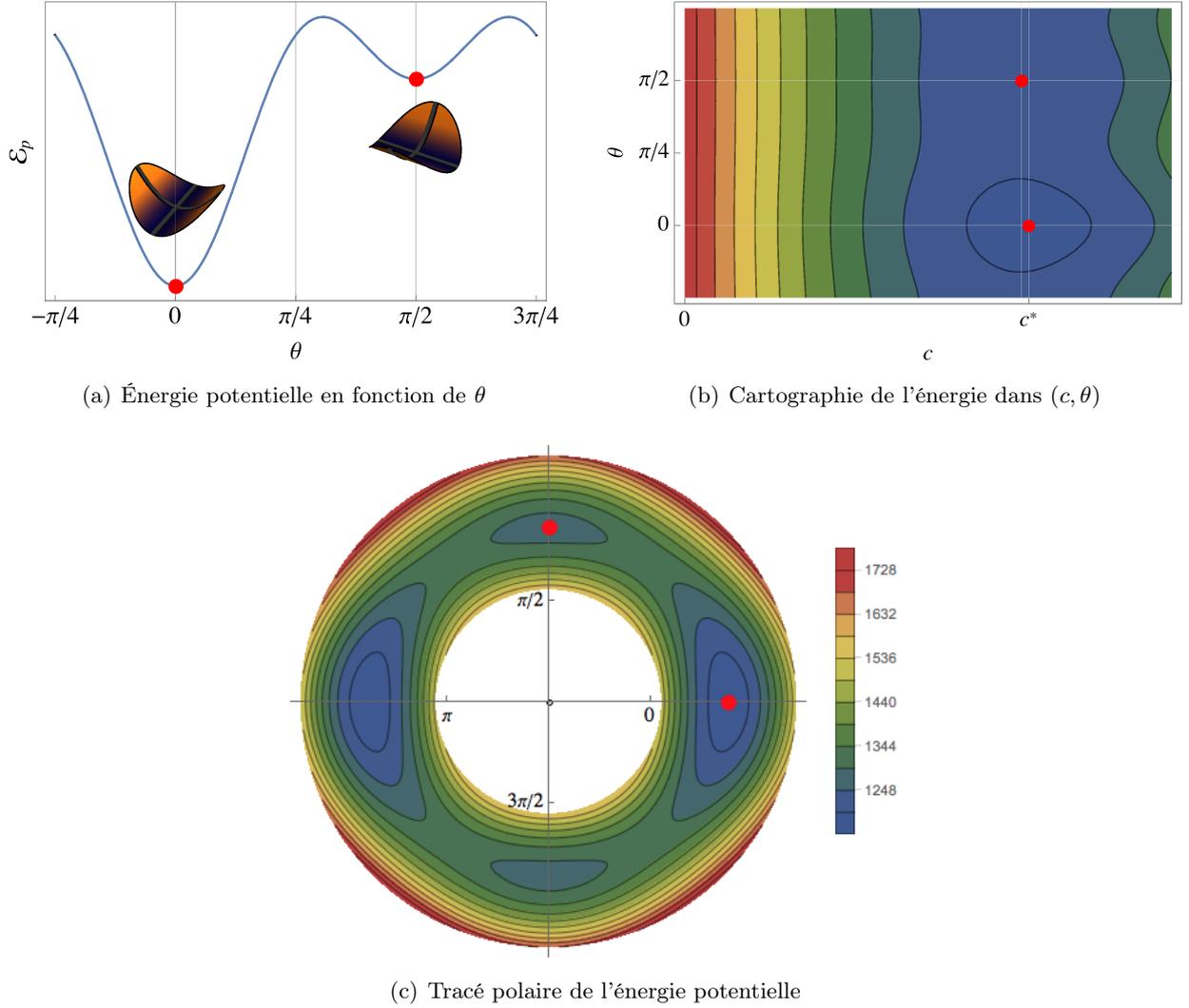
$$\bar{\mathcal{E}}_k(c, \dot{c}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \rho_v h \int_S \left( \frac{\partial \bar{w}(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 dS \quad (4.9)$$

qui peut être réécrite sous forme adimensionnée via le temps caractéristique :

$$T_c = \frac{R^2}{h} \sqrt{\frac{3\rho_v(1 - \mu^2)}{8E}} \quad (4.10)$$

par l'expression :

$$\mathcal{E}_k(c, \dot{c}, \dot{\theta}) = \frac{R^2}{S \tilde{D}_{11}} \frac{\bar{\mathcal{E}}_k}{T_c^2} = \frac{1}{2} \dot{c}^2 + \frac{2}{3} c^2 \dot{\theta}^2 \quad (4.11)$$


 FIGURE 4.1 – Énergie potentielle de la coque pour  $\varepsilon = 1.178$  et  $\eta = 0.032$ .

Les équations de Lagrange associées à ces énergies s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{c} + \frac{1}{6}c \left[ 3\eta(1 - \cos 4\theta) - 8\dot{\theta}^2 + 6 \right] - h_m(1 + \mu) - \varepsilon(1 - \mu) \cos 2\theta = 0 & (4.12a) \\ \frac{1}{3}c \left[ 8\dot{c}\dot{\theta} + c \left( 4\ddot{\theta} + 3\eta \sin 4\theta \right) + 6\varepsilon(1 - \mu) \sin 2\theta \right] = 0 & (4.12b) \end{cases}$$

et les quantités dimensionnelles sont retrouvées ensuite via les relations :

$$\bar{c} = c/R_0; \quad \bar{\omega} = \omega/T_c; \quad \bar{t} = T_c t \quad (4.13)$$

#### 4.2.2 Cas isotrope

Lorsque  $(\eta = 0, \varepsilon = 0)$  *i.e.* cas isotrope sans imperfection, le Lagrangien se réduit à :

$$\mathcal{L} = \mathcal{E}_k - \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\dot{c}^2 + \frac{2}{3}c^2\dot{\theta}^2 - \frac{c^2}{2} + ch_m(1 + \mu) - h_m^2(1 + \mu) \quad (4.14)$$

et les équations du mouvement sont déterminées via les équations de Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (4.15)$$

Finalement, le système d'équations régissant la dynamique de la coque s'écrit :

$$\begin{cases} \ddot{c} + \frac{1}{3}c(3 - 4\dot{\theta}^2) - h_m(1 + \mu) = 0 \\ \frac{1}{3}c(8\dot{c}\dot{\theta} + 4c\ddot{\theta}) = 0 \end{cases} \quad (4.16a)$$

$$\quad (4.16b)$$

Le Lagrangien est intégrable, ayant comme intégrales premières (constantes du mouvement) la quantité de mouvement  $Q_m$  et l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$  :

$$Q_m = c^2\dot{\theta}; \quad \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p \quad (4.17)$$

On suppose  $c(t)$  strictement positif  $\forall t$ . De (4.17), on déduit  $\dot{\theta} = Q_m/c^2$ , ce qui mène à :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_m = \frac{\dot{c}^2}{2} + U(c) \\ U(c) = \frac{2Q_m^2}{3c^2} + \frac{c^2}{2} - ch_m(1 + \mu) + h_m^2(1 + \mu) \end{cases} \quad (4.18a)$$

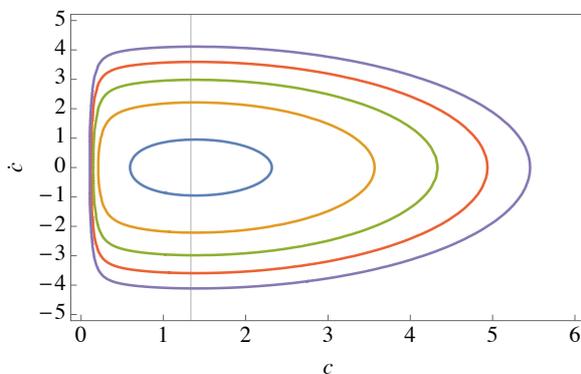
$$\quad (4.18b)$$

On en déduit que :

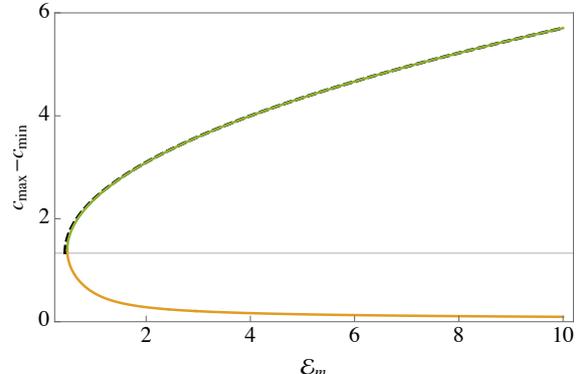
$$\dot{c}^2 = 2(\mathcal{E}_m - U(c)) \quad (4.19)$$

Les valeurs maximales et minimales de  $c$  durant ces oscillations non-linéaires peuvent être déterminées en résolvant  $U(c) = \mathcal{E}_m$ , et sont représentées sur la figure 4.2(a) sous forme de sections de l'espace des phases dans le plan  $(c, \dot{c})$  autour d'une position d'équilibre statique arbitraire (étant donné que la coque est neutralement stable). L'expression de  $c_{min}$  n'est pas donnée ici car trop longue et celle de  $c_{max}$ , obtenue pour  $Q_m = 0$ , s'écrit :

$$c_{max} = h_m(1 + \mu)\sqrt{2\mathcal{E}_m + h_m^2(\mu^2 - 1)} \quad (4.20)$$



(a) Sections de l'espace des phases



(b)  $c_{max}$  et  $c_{min}$

FIGURE 4.2 – Variations dans le plan  $(c, \dot{c})$  pour différentes valeurs d'énergie mécanique initiale.

### 4.2.3 Système avec imperfection : linéarisation autour des positions stables

La dynamique non-linéaire dans le cas où l'on tient compte des imperfections  $\varepsilon$  et  $\eta$  est en générale complexe. Bien que des approches perturbatives pourraient permettre d'en déduire les propriétés fondamentales, ces types d'étude sortent du cadre de travail exploratoire sur la dynamique mené dans cette thèse. On peut néanmoins aisément déterminer l'influence des imperfections  $\eta$  et  $\varepsilon$  sur le comportement du système proche des équilibres stables  $(c_1^*, \theta_1^*)$  ou  $(c_2^*, \theta_2^*)$ . Les matrices de masse et de rigidité sont données par (4.21) et (4.22), et permettent de déduire les fréquences propres de la coque.

$$\mathbb{M} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}_k}{\partial \dot{q}_i^2}(c^*, \theta^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \left( h_m(1+\mu) + \varepsilon(1-\mu) \right)^2 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$\mathbb{K} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial q_i^2}(c^*, \theta^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \left( h_m(1+\mu) + \varepsilon(1-\mu) \right) \left( \eta \left( h_m(1+\mu) + \varepsilon(1-\mu) \right) + \varepsilon(1-\mu) \right) \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

avec  $q_i = \{c, \theta\}$  et  $\dot{q}_i = \{\dot{c}, \dot{\theta}\}$ . De fait, les pulsations propres  $\omega$  sont les solutions du système :

$$\det(\mathbb{K} - \mathbb{M}\omega^2) = 0 \quad (4.23)$$

et ont pour expression adimensionnée autour de la configuration  $\theta = 0$  ( $C_1$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_c^1(h_m, \mu, \varepsilon, \eta) = \sqrt{\frac{\sqrt{\left( (1-3\eta)(1+\mu)h_m - (2+3\eta)(1-\mu)\varepsilon \right)^2 + \left( (1+3\eta)(1+\mu)h_m + (4+3\eta)(1-\mu)\varepsilon \right)}}{2 \left( h_m(1+\mu) + \varepsilon(1-\mu) \right)}} \\ \omega_\theta^1(h_m, \mu, \varepsilon, \eta) = \sqrt{\frac{\sqrt{\left( (1-3\eta)(1+\mu)h_m - (2+3\eta)(1-\mu)\varepsilon \right)^2 + \left( (1+3\eta)(1+\mu)h_m + (4+3\eta)(1-\mu)\varepsilon \right)}}{2 \left( h_m(1+\mu) + \varepsilon(1-\mu) \right)}} \end{array} \right. \quad (4.24a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_c^1(h_m, \mu, \varepsilon, \eta) = \sqrt{\frac{\sqrt{\left( (1-3\eta)(1+\mu)h_m - (2+3\eta)(1-\mu)\varepsilon \right)^2 + \left( (1+3\eta)(1+\mu)h_m + (4+3\eta)(1-\mu)\varepsilon \right)}}{2 \left( h_m(1+\mu) + \varepsilon(1-\mu) \right)}} \\ \omega_\theta^1(h_m, \mu, \varepsilon, \eta) = \sqrt{\frac{\sqrt{\left( (1-3\eta)(1+\mu)h_m - (2+3\eta)(1-\mu)\varepsilon \right)^2 + \left( (1+3\eta)(1+\mu)h_m + (4+3\eta)(1-\mu)\varepsilon \right)}}{2 \left( h_m(1+\mu) + \varepsilon(1-\mu) \right)}} \end{array} \right. \quad (4.24b)$$

De la même manière, les pulsations propres autour de la configuration  $\theta = \pi/2$  ( $C_2$ ) ont l'expression :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_c^2(h_m, \mu, \varepsilon, \eta) = \sqrt{\frac{\frac{1+3\eta}{2} - \frac{3\varepsilon(1-\mu) - \sqrt{\left( (3\eta-1)(1+\mu)h_m + (3\eta+2)(\mu-1)\varepsilon \right)^2}}{2 \left( h_m(1+\mu) - \varepsilon(1-\mu) \right)}}{\frac{1+3\eta}{2} - \frac{3\varepsilon(1-\mu) - \sqrt{\left( (3\eta-1)(1+\mu)h_m + (3\eta+2)(\mu-1)\varepsilon \right)^2}}{2 \left( h_m(1+\mu) - \varepsilon(1-\mu) \right)}}} \\ \omega_\theta^2(h_m, \mu, \varepsilon, \eta) = \sqrt{\frac{\frac{1+3\eta}{2} - \frac{3\varepsilon(1-\mu) + \sqrt{\left( (3\eta-1)(1+\mu)h_m + (3\eta+2)(\mu-1)\varepsilon \right)^2}}{2 \left( h_m(1+\mu) - \varepsilon(1-\mu) \right)}}{\frac{1+3\eta}{2} - \frac{3\varepsilon(1-\mu) + \sqrt{\left( (3\eta-1)(1+\mu)h_m + (3\eta+2)(\mu-1)\varepsilon \right)^2}}{2 \left( h_m(1+\mu) - \varepsilon(1-\mu) \right)}}} \end{array} \right. \quad (4.25a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_c^2(h_m, \mu, \varepsilon, \eta) = \sqrt{\frac{\frac{1+3\eta}{2} - \frac{3\varepsilon(1-\mu) - \sqrt{\left( (3\eta-1)(1+\mu)h_m + (3\eta+2)(\mu-1)\varepsilon \right)^2}}{2 \left( h_m(1+\mu) - \varepsilon(1-\mu) \right)}}{\frac{1+3\eta}{2} - \frac{3\varepsilon(1-\mu) - \sqrt{\left( (3\eta-1)(1+\mu)h_m + (3\eta+2)(\mu-1)\varepsilon \right)^2}}{2 \left( h_m(1+\mu) - \varepsilon(1-\mu) \right)}}} \\ \omega_\theta^2(h_m, \mu, \varepsilon, \eta) = \sqrt{\frac{\frac{1+3\eta}{2} - \frac{3\varepsilon(1-\mu) + \sqrt{\left( (3\eta-1)(1+\mu)h_m + (3\eta+2)(\mu-1)\varepsilon \right)^2}}{2 \left( h_m(1+\mu) - \varepsilon(1-\mu) \right)}}{\frac{1+3\eta}{2} - \frac{3\varepsilon(1-\mu) + \sqrt{\left( (3\eta-1)(1+\mu)h_m + (3\eta+2)(\mu-1)\varepsilon \right)^2}}{2 \left( h_m(1+\mu) - \varepsilon(1-\mu) \right)}}} \end{array} \right. \quad (4.25b)$$

L'unique distinction entre les pulsations autour des configurations  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/2$  se trouve sur  $\varepsilon$  comme on peut le noter dans (4.2), si bien que lorsque  $\varepsilon = 0$ , on a :

$$\omega_c^1(\varepsilon = 0) = \omega_c^2(\varepsilon = 0) \quad \text{et} \quad \omega_\theta^1(\varepsilon = 0) = \omega_\theta^2(\varepsilon = 0) \quad (4.26)$$

Les expressions (4.24) et (4.25) montrent que les pulsations naturelles  $\omega_c$  et  $\omega_\theta$  dépendent explicitement de  $\mu$ ,  $\varepsilon$ ,  $h_m$  et  $\eta$ . Lorsque  $\varepsilon = \eta = 0$  (*i.e.* isotropie parfaite), les pulsations naturelles ne dépendent plus d'aucun paramètre, et on a  $\omega_c^1 = \omega_c^2 = 1$  et  $\omega_\theta^1 = \omega_\theta^2 = 0$ . En revanche, lorsque l'un de ces deux paramètres est non-nul, les pulsations ont pour expression autour de  $\theta = 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_c^1(\varepsilon = 0) = 1 \\ \omega_\theta^1(\varepsilon = 0) = \sqrt{3\eta} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_c^1(\eta = 0) = \frac{\left( h_m(1+\mu) + 4\varepsilon(1-\mu) \right) + \sqrt{\left( h_m(1+\mu) - 2\varepsilon(1-\mu) \right)^2}}{2 \left( h_m(1+\mu) + 4\varepsilon(1-\mu) \right)} \\ \omega_\theta^1(\eta = 0) = \frac{\left( h_m(1+\mu) + 4\varepsilon(1-\mu) \right) - \sqrt{\left( h_m(1+\mu) - 2\varepsilon(1-\mu) \right)^2}}{2 \left( h_m(1+\mu) + 4\varepsilon(1-\mu) \right)} \end{array} \right. \quad (4.27)$$

De façon évidente, la présence du paramètre  $\eta$  affecte uniquement les pulsations propres sur la coordonnée  $\theta$ . Il est intrinsèque au comportement du matériau choisi et est nécessairement non-nul pour les cuivres laminés. Quant au paramètre  $\varepsilon$ , il est une conséquence des imperfections de fabrication et peut être évité si le processus d'enroulement est correctement effectué, ce qui n'est pas une tâche facile en pratique comme on l'a noté précédemment. Dans une étude quasi-statique telle qu'une démarche d'actionnement, son effet est très modéré et peut légitimement être négligé. Toutefois, dans une étude dynamique non-linéaire, son éventuelle présence peut affecter considérablement le comportement mécanique de la coque.

La figure 4.3 représente la variation des pulsations propres vis-à-vis des paramètres relatifs à la coque pour  $\mu$  et  $h_m$  fixés. Il apparaît clairement que  $\omega_c$  et  $\omega_\theta$  sont susceptibles de se croiser pour certaines valeurs des paramètres  $\varepsilon$  et  $\eta$ . Auquel cas, ce point de croisement constitue un point de déviation et les trajectoires des pulsations sont inversées. Notons toutefois que ce phénomène ne se produit principalement que pour de faibles courbures inélastiques (ici  $h_m = 3$ ) et pour des valeurs de coefficient de Poisson proches de leurs limites ( $\mu = \pm 1$ ).

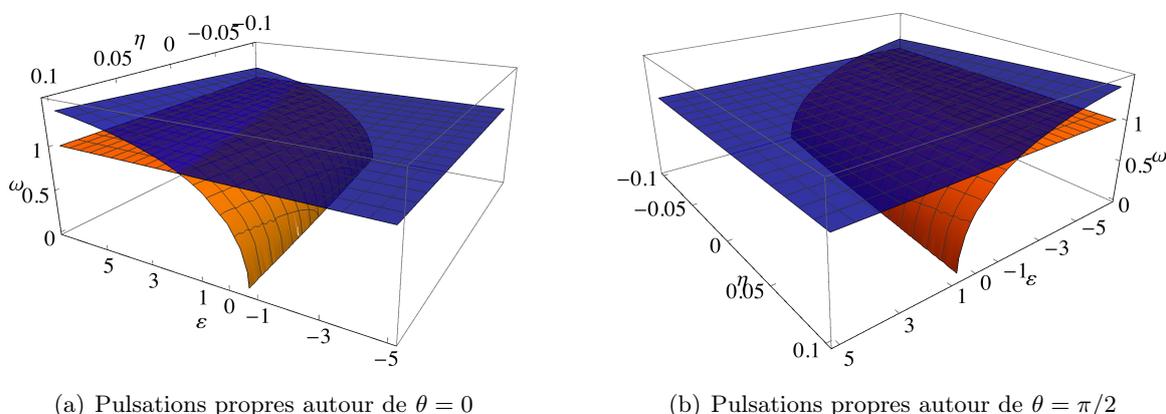


FIGURE 4.3 – Variations des pulsations propres  $\omega_c$  (bleu) et  $\omega_\theta$  (orange) pour ( $h_m = 3, \mu = 1/3$ ).

Ces diagrammes confirment l'influence importante des imperfections sur la dynamique de la coque, si bien qu'un paramètre  $\varepsilon$  même faible produit déjà des variations considérables des pulsations propres. Les fréquences propres dimensionnelles sont retrouvées au moyen du temps caractéristique  $T_c$  par la relation  $\bar{f}_i = \omega_i / 2\pi T_c$ .

Lorsque  $\varepsilon$  et  $\eta$  sont tous deux non-nuls, les niveaux d'énergie des deux positions stables sont différents, et la configuration  $\theta = 0$  est le minimum global de l'énergie. Concrètement, le paramètre  $\varepsilon$  assigne le niveau énergétique des positions stables tandis que le paramètre  $\eta$  assigne le niveau énergétique qui les sépare. A petites oscillations sur la coordonnée  $c$  *i.e.* dans un domaine quasi-linéaire, les oscillations sont maintenues sur la position d'équilibre de départ. En revanche, pour de grandes amplitudes, la dynamique devient non-linéaire et la prépondérance des oscillations est liée au minimum global de l'énergie.

## 4.3 Étude expérimentale de dynamique et quelques simulations

### 4.3.1 Étude expérimentale d'une coque bistable en oscillations forcées

Dans cette section, on étudie expérimentalement la dynamique non-linéaire d'une coque multistable métallique. De la même manière que précédemment, le système étudié est constitué d'une coque de cuivre bistable, mais cette fois disposée sur un pot vibrant utilisé comme source d'excitation, dont le schéma est indiqué sur la figure 4.4 (référence Bruel&Kjaer type 4809). De cette manière, il est possible de contrôler la dynamique de la coque au moyen de deux paramètres que sont l'amplitude  $w_0$  de la base ainsi que la fréquence d'excitation  $f = 2\pi/\Omega$  où  $\Omega$  est la pulsation d'excitation.

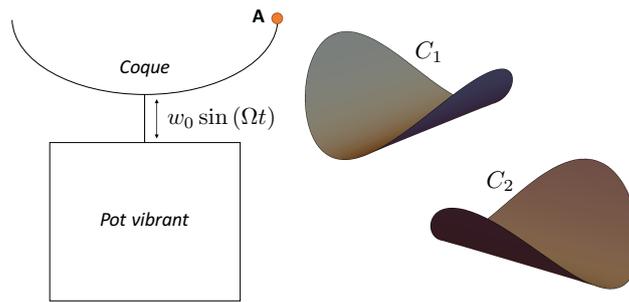


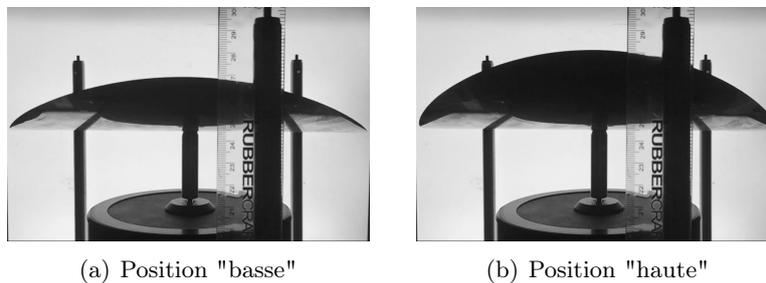
FIGURE 4.4 – Montage expérimental (pot vibrant-coque multistable).

La coque est percée en son centre (d'un trou de diamètre 4.5 mm) puis encastrée sur la source d'excitation à l'aide de rondelles d'acier (d'un diamètre extérieur de 15 mm).

#### 4.3.1.a Petites oscillations sur la coordonnée $c$ : réponse en fréquence

Comme pour tout système dynamique, la première étape a pour objet d'identifier la fonction de réponse en fréquence (FRF) du système étudié. Du point de vue expérimental, la FRF a un objectif double : d'une part, elle permet d'identifier la fréquence propre de la coque autour de ses positions d'équilibre statiques, et d'autre part elle permet d'identifier le coefficient d'amortissement, que l'on suppose ici lié à l'amortissement visqueux dû au frottement de l'air avec la surface de la coque. Pour ce faire, la démarche classique consiste à mettre en oscillations la structure à "basse" amplitude/accélération et effectuer un balayage en fréquence permettant d'identifier un maximum d'amplitude correspondant à la fréquence de résonance et donc à la fréquence propre de la coque sur le mode associé. On se restreint à de petites vibrations autour des différentes positions d'équilibre, afin d'identifier le comportement du système linéarisé, ce qui ne met en évidence aucune oscillation sur  $\theta$ .

Du point de vue expérimental, la mesure de l'amplitude des oscillations est effectuée par traitement d'images à l'aide du logiciel ImageJ. Pour ce faire, on capture à chaque fréquence la position de la coque à l'aide d'une caméra rapide<sup>1</sup> comme indiqué sur la figure 4.5. En effet, pour de petites amplitudes de la base de l'excitateur, les oscillations se situent exclusivement sur la coordonnée  $c$  quelle que soit la fréquence, et on récupère le maximum et le minimum de ces oscillations dont l'amplitude est simplement la différence.

FIGURE 4.5 – Capture de l'amplitude des oscillations sur la coordonnée  $c$ .

La figure 4.6 représente l'amplitude des vibrations autour de la configuration  $C_1$ , dont on identifie la fréquence propre  $\omega_c^1 = 17.75$  Hz. Les mêmes mesures ont été effectuées sur la configuration  $C_2$  et montrent des résultats identiques avec une fréquence propre de 18 Hz.

1. Toutes les mesures expérimentales sont effectuées par analyse d'images via une caméra rapide (240 images par seconde) et un traitement dans le logiciel ImageJ.

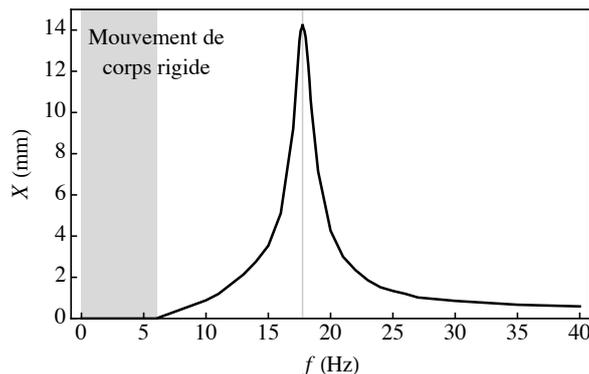


FIGURE 4.6 – Amplitude des oscillations de la coque de cuivre bistable autour de la configuration  $C_1$  ( $\theta = 0$ ) en fonction de la fréquence d'excitation.

Du point de vue théorique, en se plaçant autour d'une position d'équilibre statique ( $\theta = 0$  ou  $\pi/2$ ), on verra que l'équation (4.33b) sur la coordonnée  $\theta$  est automatiquement vérifiée, tandis que l'équation (4.33a) correspond à l'équation du mouvement sur la courbure principale  $c$ , et permet de mettre en évidence l'équation classique d'un système oscillant à un degré de liberté amorti et forcé tel que celui-ci.

#### 4.3.1.b Observations expérimentales de la dynamique non-linéaire

##### a) Balayage en fréquence

Connaissant les fréquences propres de la structure sur la coordonnée  $c$  autour des deux positions d'équilibre statiques, on poursuit l'étude par une analyse de la dynamique non-linéaire de la coque d'un point de vue plus global afin d'identifier les régimes d'oscillations intrinsèques à la source d'excitation. Dans ce but, deux manières équivalentes de procéder sont envisageables, à savoir fixer l'amplitude/accélération de la base et effectuer un balayage en fréquence, ou l'inverse. La première méthode a été exploitée, où l'on a fixé l'amplitude de la base  $w_0 \simeq 1.85$  mm, et permet de mettre en lumière sept régimes distincts (i) à (vii) identifiés comme suit :

(i)	$f : 0 \rightarrow 13.2$ Hz	régime de petites $\rightarrow$ grandes oscillations sur la coordonnée $c$
(ii)	$f : 13.2 \rightarrow 15.5$ Hz	régime de petites $\rightarrow$ grandes oscillations sur la coordonnée $\theta$
(iii)	$f : 15.5 \rightarrow 17.2$ Hz	régime aléatoire entre oscillations sur les coordonnées $c$ et/ou $\theta$ et oscillations chaotiques (à courbure non-uniforme)
(iv)	$f = 15.90$ Hz	régime d'oscillations intermittentes
(v)	$f = 16.35$ Hz	régime d'oscillations à rigidité nulle
(vi)	$f : 17.2 \rightarrow 17.8$ Hz	régime de grandes $\rightarrow$ petites oscillations sur la coordonnée $\theta$
(vii)	$f > 17.8$ Hz	régime de grandes $\rightarrow$ petites oscillations sur la coordonnée $c$

TABLEAU 4.1 – Régimes dynamiques non-linéaires de la coque de cuivre bistable identifiés par balayage en fréquence pour une amplitude de base  $w_0 \simeq 1.85$  mm.

##### b) Analyse des régimes d'oscillations

Les régimes dynamiques identifiés expérimentalement comportent des régimes d'oscillations sur les coordonnées  $c$  et  $\theta$ , des régimes couplés et même chaotiques où la courbure peut devenir non-uniforme et la prédiction des oscillations devient impossible. Chacun de ces régimes a une propriété bien précise et existe dans un intervalle de paramètres d'excitation bien défini.

### Petites oscillations sur la coordonnée $c$

De façon évidente, le régime d'oscillations sur la coordonnée  $c$  est le régime dynamique "naturel" de la coque vis-à-vis des paramètres d'excitation choisis. La structure se déforme de façon exclusivement cylindrique autour de sa position d'équilibre statique  $c = h_m(1 + \mu)$ , à  $\theta = 0$  pour la configuration stable  $C_1$  et  $\theta = \pi/2$  pour la configuration stable  $C_2$  (c.f. figure 4.7). En effet, pour de petites valeurs d'excitation, cet unique régime caractérise complètement la dynamique de la coque comme le confirme la FRF, et les oscillations peuvent être considérées comme quasi-linéaires. En revanche, lorsque la fréquence/amplitude augmente, on atteint un régime de grandes oscillations non-linéaires périodiques sur la coordonnée  $c$  comme le montre la figure 4.10(a).

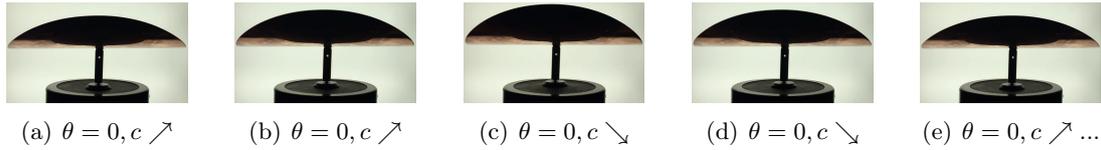


FIGURE 4.7 – Capture de la forme de la coque à différents instants dans le régime d'oscillations sur la coordonnée  $c$  pour ( $w_0 \simeq 1.85$  mm,  $f = 12$  Hz).

### Petites oscillations sur la coordonnée $\theta$

Si le régime d'oscillations sur la coordonnée  $c$  est caractérisé par  $\theta = cste$ , tous les autres régimes, également dus aux non-linéarités géométriques, induisent une variation de  $\theta$ . En effet, pour une amplitude d'excitation fixée et suffisamment élevée (ici à  $\simeq 1.85$  mm), il existe une transition non-linéaire entre le régime d'oscillations sur  $c$  et celui sur  $\theta$ , qui intervient instantanément lorsque la fréquence d'excitation atteint 13.2 Hz. Dans ce régime, la coque oscille toujours autour de sa position d'équilibre statique, mais cette fois suivant  $\theta$ , qui, selon les différents tests effectués, semble rester borné entre  $-\pi/6$  et  $\pi/6$  (c.f. figure 4.8). Ce régime d'oscillations est également périodique et les différentes expériences montrent que l'amplitude de rotation est symétrique par rapport à la position d'équilibre statique de départ.



FIGURE 4.8 – Capture de la forme de la coque à différents instants dans le régime de petites oscillations sur la coordonnée  $\theta$  pour ( $w_0 \simeq 1.85$  mm,  $f = 14.45$  Hz).

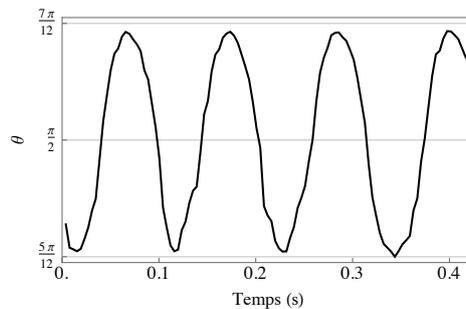
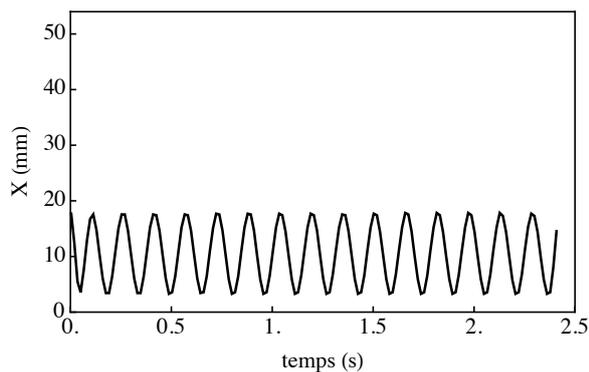
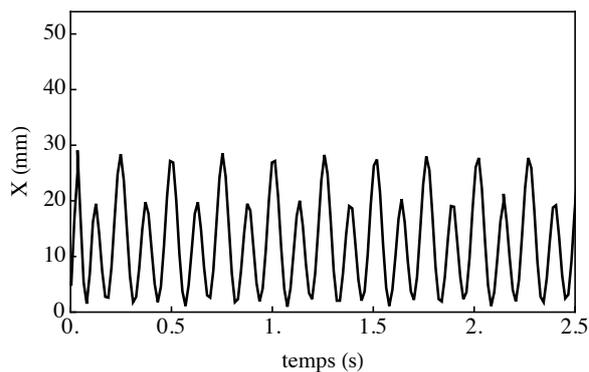


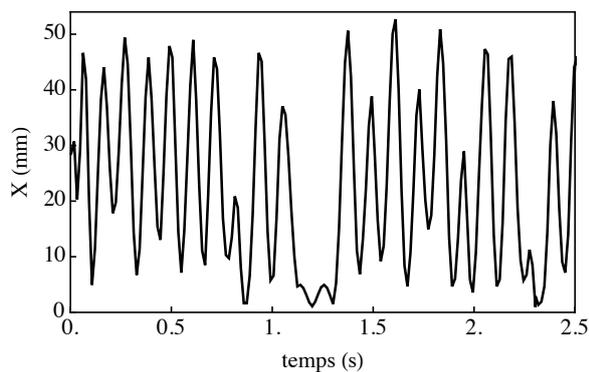
FIGURE 4.9 – Capture de la variation de  $\theta$  dans le régime de petites oscillations sur la coordonnée  $\theta$  pour ( $w_0 \simeq 1.85$  mm,  $f = 14.45$  Hz).



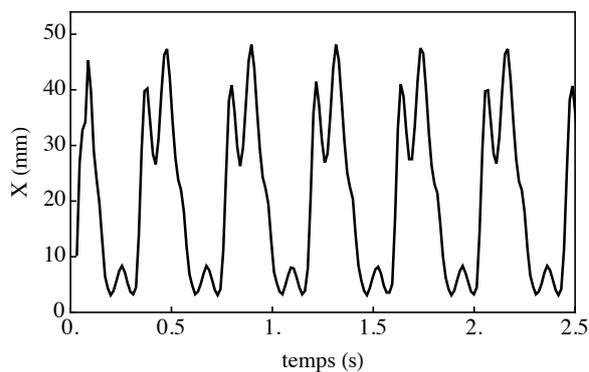
(a) régime i : petites oscillations sur "c" (12 Hz)



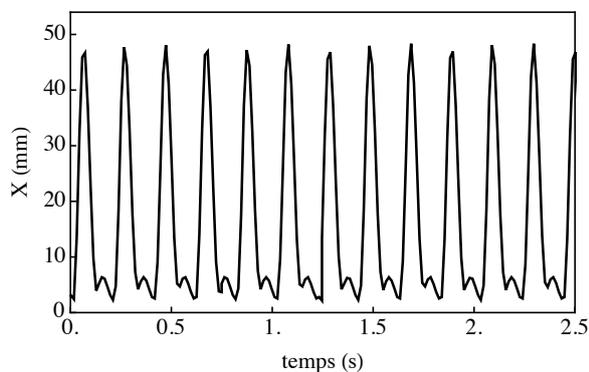
(b) régime ii : petites oscillations sur "theta" (14.45 Hz)



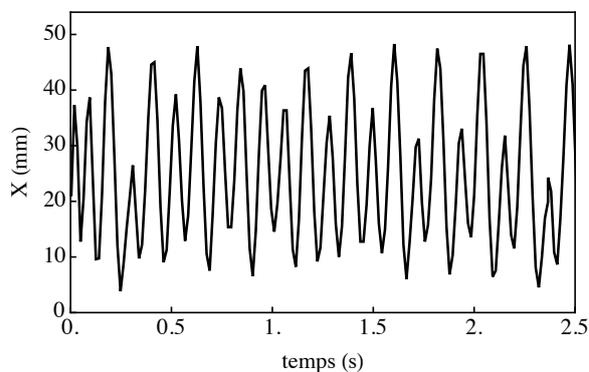
(c) régime iii-a : oscillations "chaotiques 1" (15.5 Hz)



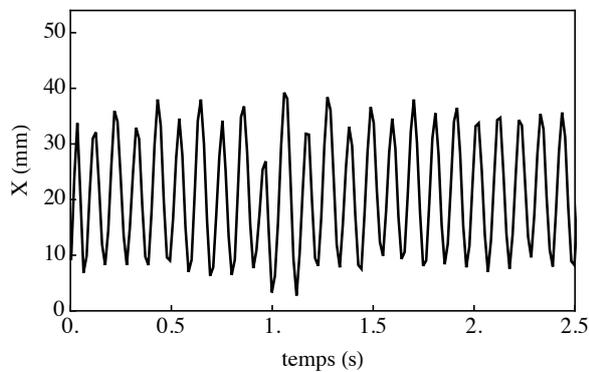
(d) régime iv : oscillations "intermittentes" (15.9 Hz)



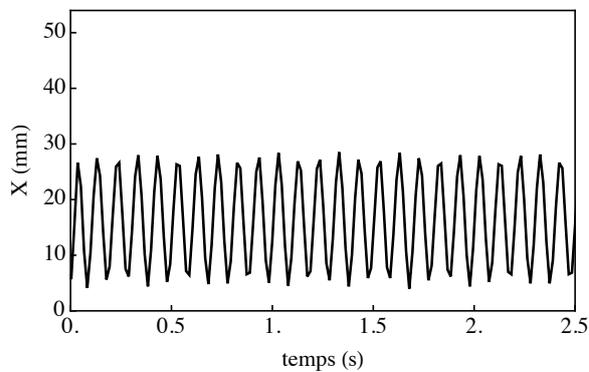
(e) régime v : oscillations "à rigidité nulle" (16.35 Hz)



(f) régime iii-b : oscillations "chaotiques 2" (16.6 Hz)



(g) régime vi : oscillations sur "theta" (17.4 Hz)



(h) régime vii : oscillations sur "c" (19 Hz)

FIGURE 4.10 – régimes d'oscillations d'une coque de cuivre bistable : balayage en fréquence pour une amplitude de la base  $w_0 \simeq 1.85$  mm. Les graphiques correspondent à l'amplitude du déplacement vertical du point A (*c.f.* figure 4.4).

### Oscillations aléatoires

Le régime d'oscillations sur  $\theta$  demeure jusqu'à une seconde fréquence de transition, entre oscillations sur  $\theta$  et oscillations dites aléatoires comprenant du chaos. Par l'utilisation du terme chaotique, on fait référence au fait que la courbure devient fortement non-uniforme et la coque effectue des "claquages" de façon aléatoire (*c.f.* figure 4.11(a)–4.11(c)) qui ont la particularité d'être significativement brusques et bruyants. Il est très délicat d'attester de la cause précise de ce type de comportement, mais il s'avère qu'il demeure, pour une amplitude ou accélération donnée, dans une bande de fréquences bien précise ( $[15.5 - 17.2]$  Hz à  $w_0 \simeq 1.85$  mm).

Par ailleurs, on note que la forte non-uniformité de la courbure, principalement localisée aux extrémités de la coque (*c.f.* figure 4.11(a)), n'induit pas de déformations irréversibles et la courbure devient à nouveau uniforme lorsque l'excitation est stoppée. Outre ces déformations non-uniformes, ce régime chaotique fait intervenir aléatoirement tous les régimes identifiés de façon non-contrôlée, et il est impossible, contrairement aux autres régimes, d'obtenir des figures 4.10(c) et 4.10(f) périodiques. En effet, ce type d'oscillations entraîne des variations particulièrement brutales de  $\theta$  *i.e.* la coque peut effectuer des "sauts" brusques d'une configuration stable à l'autre (*c.f.* figure 4.11).

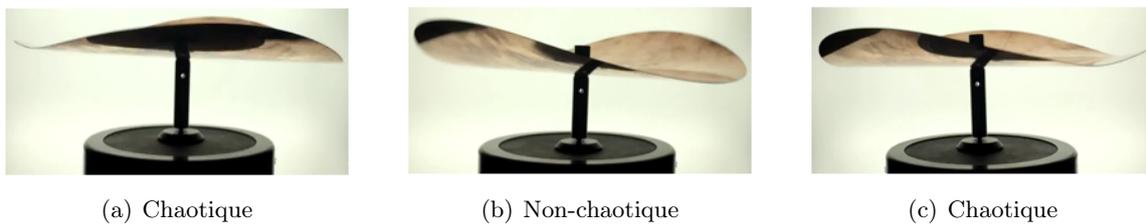


FIGURE 4.11 – Capture de la forme de la coque à différents instants pris aléatoirement dans le régime chaotique pour ( $w_0 \simeq 1.85$  mm,  $f = 15.5$  Hz).

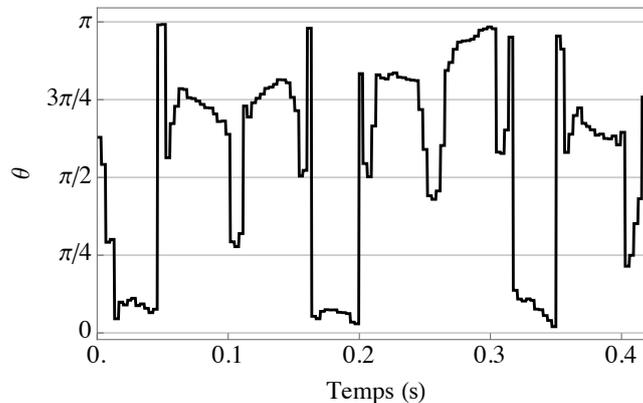


FIGURE 4.12 – Capture de la variation de  $\theta$  dans le régime d'oscillations chaotiques pour ( $w_0 \simeq 1.85$  mm,  $f = 15.5$  Hz).

Néanmoins, il est clair que ces oscillations chaotiques sont très nocives pour l'encastrement de la structure. En effet, après plusieurs cycles dans ce régime, des fissurations apparaissent jusqu'à la ruine totale de la zone encastree comme le montre la figure 4.13. Dans ce régime spécifique, et contrairement à tous les autres, la trajectoire de l'excitateur n'est plus exclusivement verticale et rectiligne (*c.f.* figure 4.11) et même non-uniforme. Finalement, cette trajectoire aléatoire contraint l'encastrement à subir un moment très élevé de réaction de la coque sur le pot vibrant. Aussi, l'utilisation d'un accéléromètre devient délicate car les mouvements de la base se situent sur les trois axes.

Un moyen de palier à ce problème serait d'utiliser des rondelles spécifiques capables d'absorber la réaction de la coque sur le pot vibrant tout en maintenant la zone de contact. De plus, une étude

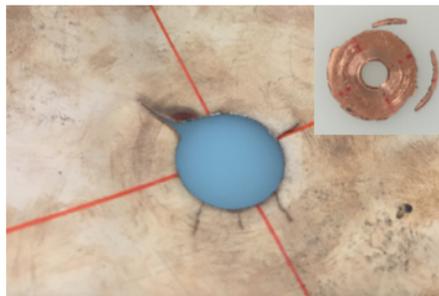


FIGURE 4.13 – Dégradation/rupture de l'encastrement après plusieurs cycles dans le régime d'oscillations chaotiques.

sur le diamètre optimal de la rondelle vis-à-vis des dimensions du disque permettrait de prolonger la durée de vie de la coque. On constate que l'utilisation d'une rondelle de diamètre trop élevé limite les mouvements de la structure et pourrait être une cause d'impossibilité d'obtention de certains régimes.

### Oscillations intermittentes

Au sein même de ce régime chaotique, on note que, pour un couple amplitude–fréquence précis de la source d'excitation, il existe un régime que l'on nomme "à intermittence". Dans ce régime, la structure effectue de grandes oscillations selon la coordonnée  $\theta$  en passant continument d'une configuration cylindrique stable à l'autre, et par alternance du sens de rotation de la courbure lorsqu'une position stable est atteinte, comme décrit sur la figure 4.14.

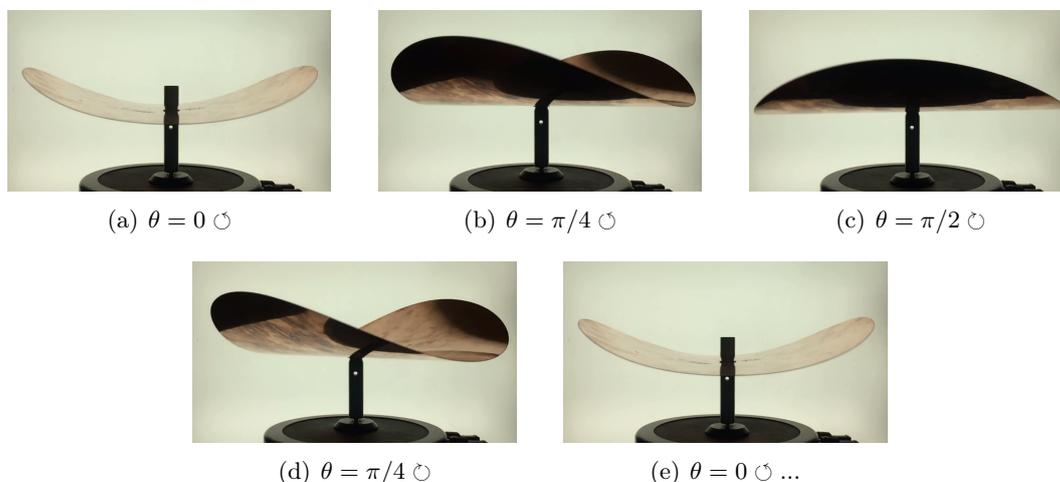


FIGURE 4.14 – Capture de la forme de la coque à différents instants dans le régime d'oscillations intermittentes pour ( $w_0 \simeq 1.85$  mm,  $f = 15.9$  Hz).

On constate clairement sur la figure 4.15 que ce régime est caractérisé par une amplitude de rotation supérieure à  $\pi/2$ , probablement du fait de l'inertie de rotation lors du changement de sens alterné. En effet, la dynamique démarre dans la configuration  $C_1$  pour  $\theta = 0$  et une variation brutale du sens de rotation a pour conséquence de générer une inertie d'entraînement. Ce changement de sens peut être la cause d'une vitesse de rotation  $\dot{\theta}$  non-uniforme, avec un ralentissement à l'approche de chaque position, et une accélération lors du départ vers l'autre. Les analyses d'images montrent que la coque atteint ses équilibres stables  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/2$  lorsque l'excitateur est en position "basse", tandis qu'elle atteint l'équilibre instable  $\theta = \pi/4$  lorsque l'excitateur se trouve en position "haute". C'est probablement ce fait de passer par une position instable équidistante aux deux positions stables lorsque l'excitateur atteint une de ses extrémités qui amène la courbure à alterner son sens de rotation.

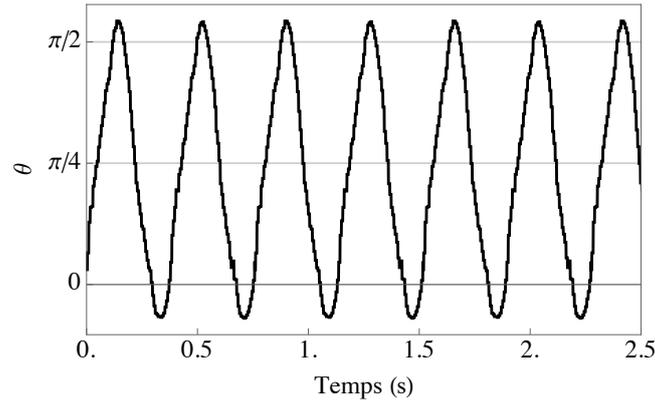


FIGURE 4.15 – Capture de la variation de  $\theta$  dans le régime d'oscillations intermittentes pour ( $w_0 \simeq 1.85$  mm,  $f = 15.9$  Hz).

### Oscillations à rigidité nulle

Enfin, toujours dans ce régime chaotique et pour un couple amplitude–fréquence fixé, on note qu'il existe un régime d'oscillations que l'on nomme "à rigidité nulle", où la coque parcourt continuellement et continument chacune de ses configurations cylindriques dans un sens donné (*c.f.* figure 4.16). Par ailleurs, il s'avère que le sens de rotation est aléatoire, ce qui confirme la présence et la mise en cause des imperfections dans la dynamique.

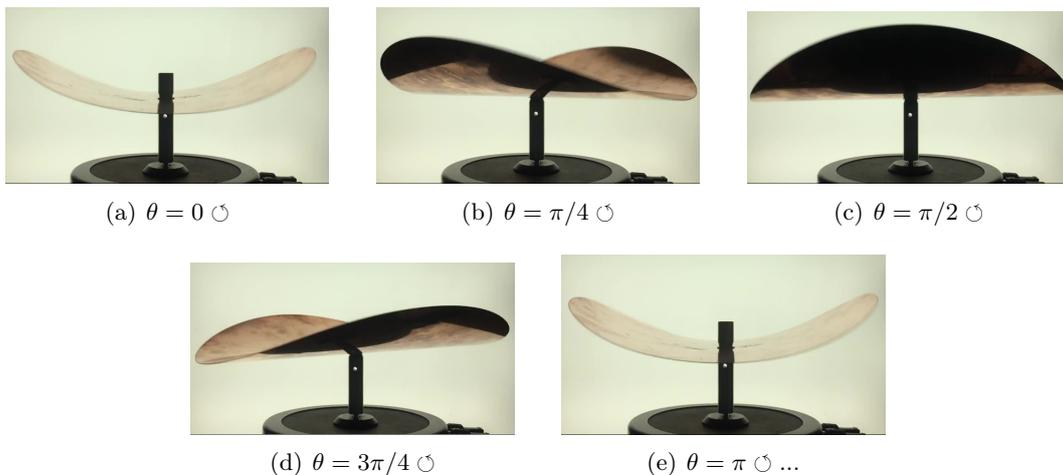


FIGURE 4.16 – Capture de la forme de la coque à différents instants dans le régime d'oscillations à rigidité nulle pour ( $w_0 \simeq 1.85$  mm,  $f = 16.35$  Hz).

Les graphes 4.15 et 4.17 montrent que, en dépit du fait que les fréquences d'obtention des régimes à intermittence et à rigidité nulle soient très proches, leurs périodes d'oscillations respectives sont clairement différentes. Pour le cas présent, l'analyse montre que la coque passe par la configuration stable  $\theta = 0$  lorsque l'excitateur est en position basse, alors qu'elle passe par la configuration stable  $\theta = \pi/2$  lorsqu'il est en position haute. Cela explique la raison pour laquelle la période des oscillations de ce régime est environ deux fois celle du régime à intermittence.

### Identification de l'existence du régime d'oscillations à rigidité nulle

Comme dernière analyse, on cherche à identifier l'existence de ce régime à rigidité nulle dans l'espace des paramètres d'excitation. Pour ce faire, il suffit comme précédemment de procéder à un balayage en fréquence à amplitude fixe, mais cette fois pour différentes amplitudes et en se focalisant

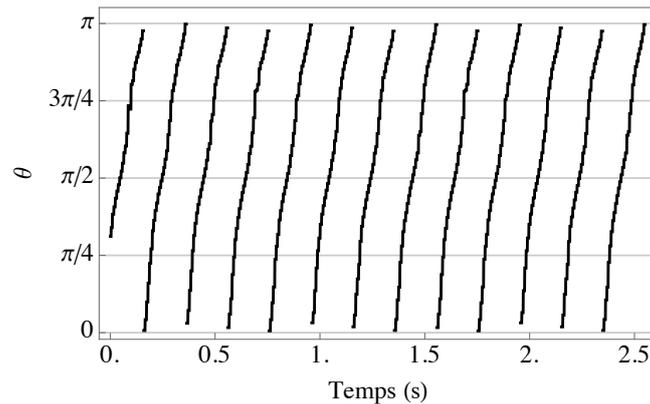


FIGURE 4.17 – Capture de la variation de  $\theta$  dans le régime d’oscillations à rigidité nulle pour ( $w_0 \simeq 1.85$  mm,  $f = 16.35$  Hz).

sur ce type d’oscillations. La figure 4.18 montre les résultats expérimentaux. Nous avons identifié six couples de paramètres d’excitation pour lesquels ce régime existe, et on note une variation non-linéaire dont la courbe rouge est la meilleure approximation continue.

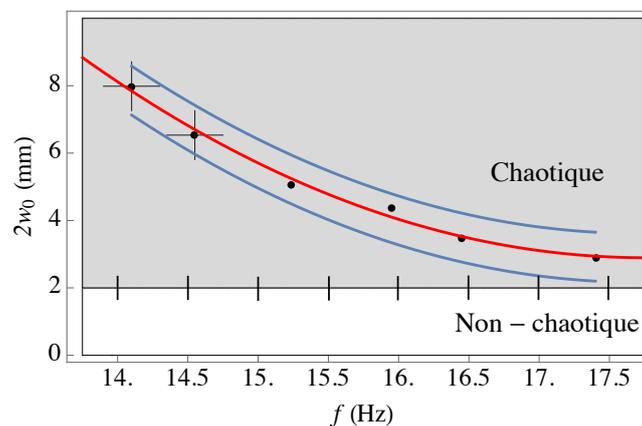


FIGURE 4.18 – Identification de l’existence du régime d’oscillations à rigidité nulle dans l’espace des paramètres d’excitation.

Les croix noires représentent les domaines pour lesquels ce régime, une fois atteint, reste maintenu. Lorsque l’on se trouve dans ce régime à vitesse constante, une petite perturbation des paramètres d’excitation autour de ces points n’influe que légèrement sur le niveau de courbure ou la vitesse de rotation, et ne supprime pas son existence. Pour des perturbations plus importantes, il existe naturellement une limite pour laquelle on observe une transition de l’état à rigidité nulle vers l’état chaotique. Ces analyses ont été effectuées sur deux uniques couples car la structure devient inutilisable du fait de la dégradation de l’encastrement. Les courbes bleues représentent approximativement le domaine d’existence et de maintien de ce mode à rigidité nulle, perdu dans un cycle chaotique.

En outre, on constate que l’intervalle de fréquences d’existence de ce régime est borné dans celui pour lequel les oscillations sur la coordonnée  $c$  ne sont pas prépondérantes, c’est-à-dire au dessus de 13.2 Hz et en dessous de la fréquence propre de la coque sur la coordonnée  $c$ , c’est-à-dire 17.75 Hz pour le spécimen étudié.

### c) Discussion

Les sept différents régimes capturés sont spécifiques et existent pour des valeurs précises de paramètres d’excitation. L’avantage d’une telle approche réside dans le fait qu’il est simple de capturer les paramètres d’excitation pour lesquels une transition de régime apparaît.

De manière évidente, l'unique régime non-périodique est le régime aléatoire. Dans ce régime, l'hypermensibilité aux conditions initiales qui est une caractéristique inhérente aux comportements chaotiques confirme leur existence et, bien que ce régime chaotique soit très bruyant et nocif pour la structure, les autres régimes mettent en évidence des comportements différents. En effet, les régimes d'oscillations sur  $c$  et  $\theta$  sont très légèrement bruyants (par frottement de l'air) et uniquement pour des fréquences élevées ou proches des fréquences de changement de régime. Par ailleurs, les deux régimes spécifiques à intermittence et rigidité nulle ne mettent en évidence absolument aucun bruit sonore, qu'importe la fréquence à laquelle ils sont capturés ou le sens de rotation. Cela confirme d'une part qu'ils ne sont pas dommageables pour la structure, et d'autre part qu'ils sont d'excellents candidats dans des applications dynamiques où l'ergonomie est un aspect prédominant. Néanmoins, il est important de noter que ces deux régimes sont délicats à obtenir, car perdus dans un régime aléatoire où les oscillations chaotiques sont prépondérantes, et où tous les régimes sont susceptibles d'apparaître de façon non-contrôlée.

En effet, ces derniers ont la particularité de n'exister que ponctuellement *i.e.* pour une unique fréquence à amplitude fixée, et inversement. La difficulté d'identification expérimentale provient du fait que, même en connaissant les couples précis de paramètres d'excitation pour lesquels ils existent, il est difficile de les capturer à nouveau si l'on recommence la manipulation. Il ne suffit pas de se positionner sur le couple identifié pour atteindre le régime, mais il est nécessaire d'effectuer de très légers balayages en fréquence (ou en amplitude) autour de ces valeurs. Cela confirme que l'existence de ces régimes est due principalement aux conditions initiales, qui sont très délicates à déterminer dès lors que le chaos est prépondérant.

Par ailleurs, on note que, outre la dégradation de l'encastrement dans le régime aléatoire, les oscillations chaotiques sont susceptibles de perturber voire supprimer la multistabilité. En effet, après plusieurs cycles dans ce régime, la configuration la *plus stable* persiste tandis que la seconde existe toujours mais devient instable. Toutefois, l'expérience montre que cette (éventuelle) suppression de multistabilité n'affecte en rien l'existence de chacun des régimes décrits précédemment, mais modifie uniquement et très légèrement les valeurs de paramètres d'excitation pour lesquels ils sont obtenus.

Les non-linéarités associées au comportement dynamique de la coque sont intrinsèques à la géométrie *très mince* de la structure et aux précontraintes. Les différentes transitions d'états obtenues peuvent être dues aux imperfections expérimentales, dont différentes sources sont possiblement en cause :

- Un paramètre  $\eta$  non-nul : dans cette étude, on se situe dans une configuration pour laquelle la coque est bistable, mais dont la différence de niveau énergétique reste proche du cas dégénéré à rigidité nulle ( $\Delta_2 \neq 0$  mais faible).
- Un paramètre  $\varepsilon$  non-nul : une très faible différence de niveau énergétique entre les configurations stables ( $\Delta_1 \neq 0$ ), due aux imperfections de manutention lors de la création de la multistabilité, peut aussi rendre difficile l'obtention du régime de rotation à rigidité nulle ;
- Des imperfections d'encastrement : les possibles "décalages" d'encastrement de la coque vis-à-vis du perçage de son centre peuvent faire l'objet de "perturbations géométriques" affectant la dynamique de la coque ;
- Un paramètre  $d\theta_0$  non-nul : une imperfection  $d\theta_0 = \theta(C_2) - \theta(C_1)$  *i.e.* une non-orthogonalité des configurations stables, peut influencer les valeurs de paramètres d'excitation pour lesquelles les régimes sont identifiés, ainsi que le sens de rotation.
- L'hétérogénéité : le cuivre étant un métal dense ( $\rho_v \sim 9690 \text{ kg/m}^3$ ), le laminage peut affecter une direction dont la masse est non-uniformément répartie ;
- La position de la source d'excitation : une position imparfaitement verticale de la source d'excitation est susceptible de favoriser l'effet du poids de la coque sur des zones préférentielles ;
- L'architecture de l'encastrement : le type d'encastrement choisi peut avoir des répercussions non-négligeables sur la dynamique de la coque. De façon évidente, une rondelle de forme circulaire semble optimale au vu de la géométrie du disque. En revanche, le diamètre, l'épaisseur ainsi que le matériau de la rondelle peuvent limiter/favoriser des mouvements vis-à-vis de la transmission des efforts ;

- Les conditions initiales : les conditions initiales sont probablement les paramètres les plus difficiles à évaluer expérimentalement et les plus importants dans la dynamique de la coque.

En somme, il existe un nombre important de sources de perturbation plausibles, dont la plupart sont délicates à évaluer et également à prendre en compte d'un point de vue théorique. Si l'étude dynamique proposée a permis de localiser les différents régimes d'oscillations, leur cause reste certes délicate à confirmer et requiert des investigations plus poussées. D'un point de vue global, les différents commentaires faits s'appuient sur plusieurs expérimentations. Différents spécimens semblables ont été étudiés et mènent à des conclusions similaires, où les différences de paramètres d'excitation menant à un régime donné sont minimales, ce qui confirme la reproductibilité d'une telle étude.

### 4.3.2 Quelques résultats numériques en oscillations forcées

Dans cette section, on tente d'illustrer quelques résultats de simulations numériques en dynamique non-linéaire, obtenus avec le modèle réduit présenté en début de chapitre. L'objectif est de montrer que le modèle réduit proposé est potentiellement capable de reproduire les phénomènes observés dans les expériences.

#### 4.3.2.a Équations du mouvement en oscillations forcées

En première étape, on introduit dans le modèle la présence d'une source d'excitation verticale au centre de la coque, comme décrite sur la figure 4.4. On suppose cette contribution extérieure agir exclusivement dans l'énergie cinétique de la coque au travers du déplacement vertical de son centre, et que la puissance des efforts extérieurs reste nulle à tout instant. De fait, on suppose le centre de la coque se déplacer verticalement selon la loi :

$$w_c(t) = w_0 \sin(\Omega t) \quad (4.28)$$

où  $w_0$  et  $\Omega$  représentent l'amplitude et la pulsation d'excitation, respectivement. Le champ de déplacements total de la coque a ainsi pour expression :

$$\bar{w}(x, y, t) = \frac{1}{2} (k_x x^2 + k_y y^2 + 2k_{xy} xy + w_0 \sin(\Omega t) R^2) / R_0 \quad (4.29)$$

De la même manière que précédemment, on détermine l'énergie cinétique adimensionnée via (4.9) et (4.10). Il vient :

$$\mathcal{E}_k(c, \dot{c}, \dot{\theta}) = \frac{R^2}{S\bar{D}_{11}} \frac{\bar{\mathcal{E}}_k}{T_c^2} = \frac{1}{2} \dot{c}^2 + \frac{2}{3} c^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{9} \left( 240 w_0^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega t) + 40 w_0 \Omega \cos(\Omega t) \dot{c} \right) \quad (4.30)$$

Les quantités dimensionnelles sont retrouvées via les relations suivantes :

$$\bar{c} = c/R_0; \quad \bar{w}_0 = w_0 R^2/R_0; \quad \bar{\omega} = \omega/T_c; \quad \bar{t} = T_c t \quad (4.31)$$

Un tel système excité mécaniquement en son centre est non-conservatif, et on a recours aux équations de Lagrange pour mettre en place les équations du mouvement et étudier la dynamique non-linéaire. Le Lagrangien a pour expression :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{18} \dot{c} \left( 9\dot{c} + 80 w_0 \Omega \cos(\Omega t) \right) + c \left( h_m (1 + \mu) + \varepsilon (1 - \mu) \cos 2\theta \right) + \frac{1}{12} c^2 \left( -3\eta + 3\eta \cos 4\theta + 8\dot{\theta}^2 - 6 \right) - h_m^2 (1 + \mu) + \frac{80}{3} w_0^2 \Omega^2 \cos^2(\Omega t) - \varepsilon^2 (1 - \mu) \quad (4.32)$$

et permet de déduire via (4.15) le système d'équations du mouvement à résoudre :

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{c} + \frac{1}{6} c \left( 3\eta (1 - \cos 4\theta) - 8\dot{\theta}^2 + 6 \right) &= h_m (1 + \mu) + \varepsilon (1 - \mu) \cos 2\theta + 4 w_0 \Omega^2 \sin(\Omega t) = 0 \end{aligned} \right. \quad (4.33a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{3} c \left[ c \left( 4\ddot{\theta} + 3\eta \sin 4\theta \right) + 8\dot{c}\dot{\theta} + 6\varepsilon (1 - \mu) \sin 2\theta \right] &= 0 \end{aligned} \right. \quad (4.33b)$$

qui constitue un système d'équations différentielles du second ordre non-linéaires et couplées. On ne dispose pas de solution analytique pour résoudre ce problème et on a donc recours à des méthodes numériques de type Runge Kutta implicite pour déterminer la courbure  $c(t)$  et l'angle de courbure principale  $\theta(t)$  solutions via le logiciel Mathematica.

### 4.3.2.b Résultats

Pour le montage proposé, on dispose de deux paramètres d'excitation à varier pour contrôler la dynamique de la coque, que sont l'amplitude de la base et la fréquence d'excitation. Toutefois, ils ne sont pas les seuls paramètres à affecter la dynamique de la coque car les conditions initiales sont prépondérantes sur son comportement vis-à-vis du point de départ choisi. Les deux degrés de liberté du problème mènent aux quatre conditions initiales suivantes sur les coordonnées  $c$  et  $\theta$  :

$$\begin{cases} c(0) = c^* + dc & \text{(courbure à l'instant initial)} & (4.34a) \\ \dot{c}(0) = \dot{c}_0 & \text{(vitesse de courbure à l'instant initial)} & (4.34b) \\ \theta(0) = \theta^* + d\theta & \text{(position angulaire à l'instant initial)} & (4.34c) \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 & \text{(vitesse angulaire à l'instant initial)} & (4.34d) \end{cases}$$

Les quantités  $c^*$  et  $\theta^*$  correspondent aux configurations statiques (4.5), tandis que les quantités  $dc$  et  $d\theta$  sont les (éventuels) décalages initiaux par rapport à la position d'équilibre statique. On suppose donc la coque, à l'instant initial  $t = 0$ , avoir une forme cylindrique dans la position d'équilibre statique (4.5a) ou (4.5b). Ensuite, on fixe les conditions initiales (4.34) vis-à-vis d'une perturbation de la position d'équilibre statique. Différents choix de conditions initiales et paramètres d'excitation mènent à différents régimes d'oscillations brièvement exposés ci-dessous. Toutes les simulations sont effectuées pour  $\eta = 0.032$  et  $\varepsilon = 0$ .

### Oscillations sur la coordonnée $c$

Le régime d'oscillations sur la coordonnée  $c$  est le régime prépondérant au regard de la méthode d'excitation choisie au centre de la coque, dont la trajectoire est supposée parfaitement verticale. En conséquence, en l'absence d'une quelconque imperfection, ce régime est l'unique caractéristique de la dynamique de la coque lorsque les conditions initiales sur  $\theta$  sont nulles, quels que soient les choix de  $w_0$  et  $\Omega$ , comme on peut le constater sur la figure 4.19 qui représente les résultats théoriques dans ce régime d'oscillations. Les oscillations restent non-linéaires autour de la position d'équilibre statique et symétriques, avec  $\theta = 0$  à tout instant.

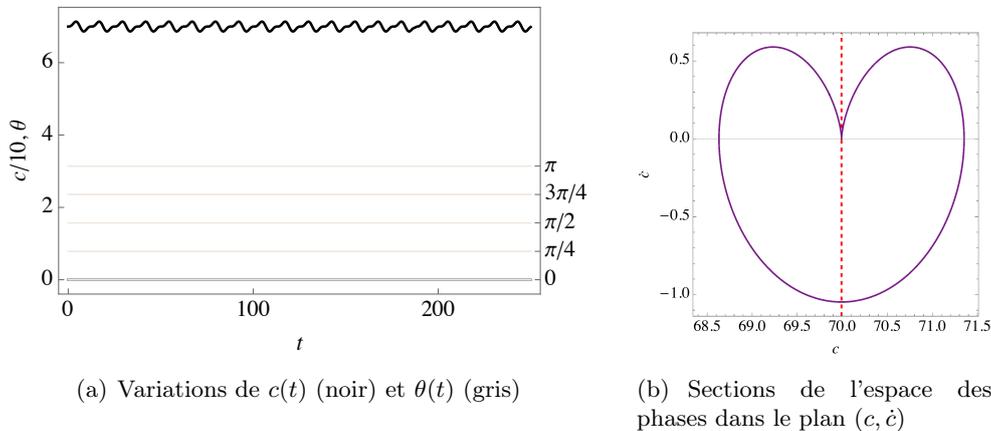


FIGURE 4.19 – Résultats du problème (4.33b) dans le régime de petites oscillations sur la coordonnée  $c$  autour de la position (4.5a) pour  $(w_0 = 1 \text{ mm}, \Omega = 0.5 \omega_0)$  et  $(dc = d\theta = \dot{c}_0 = \dot{\theta}_0 = 0)$ .

Cela va à l'encontre des observations expérimentales pour lesquelles on note une transition non-linéaire entre oscillations sur  $c$  et  $\theta$  lorsque les paramètres d'excitation atteignent des valeurs critiques. Cette différence doit probablement provenir du fait que des imperfections parasites existent mais ne sont pas observables en pratique, comme une non-verticalité de la trajectoire de l'excitateur (*c.f* figure 4.11). En effet, les pots vibrants sont conçus pour autoriser de petites rotations autour des axes du plan horizontal ayant pour objectif d'amortir la réaction de la structure qui y est fixée, et cela peut avoir une incidence sur la dynamique lorsque l'on sait que de petites imperfections mènent à des comportements inattendus. Ce phénomène ne pouvant pas être pris en compte analytiquement, cela pose des problèmes quant à la comparaison entre théorie et expérimentation.

### Oscillations sur la coordonnée $\theta$

Du point de vue théorique, il existe plusieurs moyens de mettre en évidence des oscillations sur la coordonnée  $\theta$ . En effet, une perturbation de la position d'équilibre statique  $d\theta$ , une vitesse angulaire  $\dot{\theta}_0$  non-nulle ou un couplage entre les deux entraînent des oscillations  $\theta(t)$  non-nulles. Les simulations montrent que le fait de varier uniquement la position initiale  $d\theta$  n'induit que des oscillations autour de  $\theta^*$ , c'est-à-dire que la coque oscille autour de sa position d'équilibre statique vis-à-vis du point de départ choisi. Dans un tel cas, la coque oscille indéfiniment et de façon périodique comme on peut le voir sur la figure 4.20(c).

Par ailleurs, même à amplitude et fréquence fixées à un niveau raisonnable, une légère imperfection sur la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$  entraîne des perturbations conduisant de façon préférentielle à des oscillations sur  $\theta$ . Puis, lorsque l'on considère des vitesses angulaires initiales élevées ( $\simeq 5\pi/s$ ), les oscillations deviennent aléatoires et mettent en évidence du chaos.

En outre, une combinaison entre  $d\theta \neq 0$  et  $\dot{\theta}_0 \neq 0$  amène la coque à entrer dans un régime aléatoire. Autrement dit, il existe théoriquement une transition non-linéaire entre oscillations sur  $c$  et  $\theta$ , mais cette transition n'existe que lorsque  $d\theta$  et/ou  $\dot{\theta}_0$  sont non-nuls. En notant que, au niveau expérimental, les amplitudes et pulsations d'excitation sont variées manuellement par un potentiomètre, l'apparition d'oscillations sur la coordonnée  $\theta$  peut être expliquée par des conditions initiales parasites liées à une variation à vitesse non-constante des potentiomètres. En conséquence, il s'avère qu'il existe bel et bien des conditions initiales qu'il n'est pas (ou difficilement) possible de mesurer expérimentalement de manière à pouvoir comparer théorie et expérimentation.

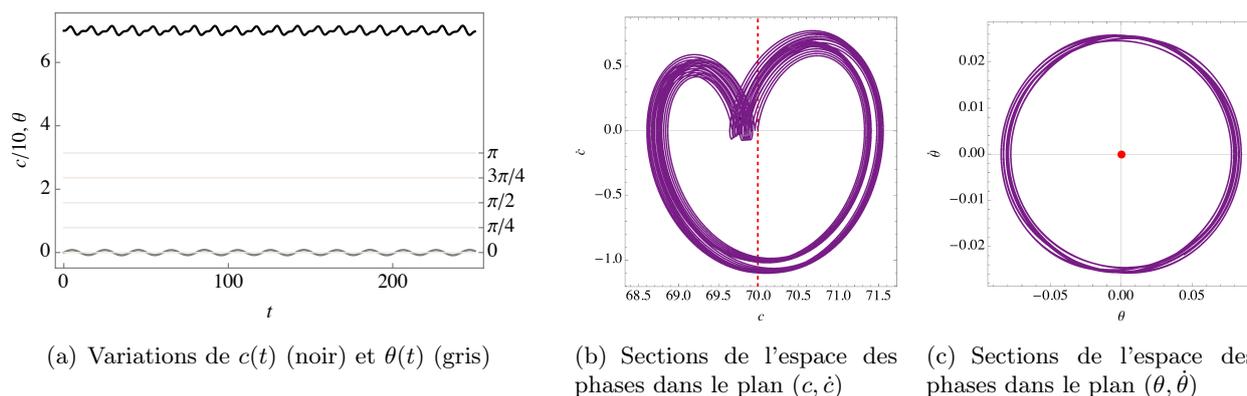


FIGURE 4.20 – Résultats du problème (4.33b) dans le régime de petites oscillations sur la coordonnée  $\theta$  autour de la position (4.5a) pour  $(w_0 = 1 \text{ mm}, \Omega = 0.5 \omega_0, dc = d\theta = \dot{c}_0 = 0 \text{ et } \dot{\theta}_0 = \pi/s)$ .

### Oscillations aléatoires

Lorsque l'on considère des valeurs de  $\dot{\theta}_0$  non-nulles et suffisamment élevées, les simulations montrent que les oscillations aléatoires existent majoritairement pour une très large gamme de choix des paramètres d'excitation, et la coque peut effectuer des mouvements non-contrôlés comme le montre la

figure 4.21. Rappelons que, contrairement à la pratique, les non-uniformités de courbure localisées aux extrémités de la coque ne sont pas tolérées par les hypothèse du modèle. De fait, les seuls mouvements capturés sont aléatoires de par des changements de régime entre oscillations sur  $\theta$ , à intermittence et à rigidité nulle, pourvu que la courbure reste uniforme.

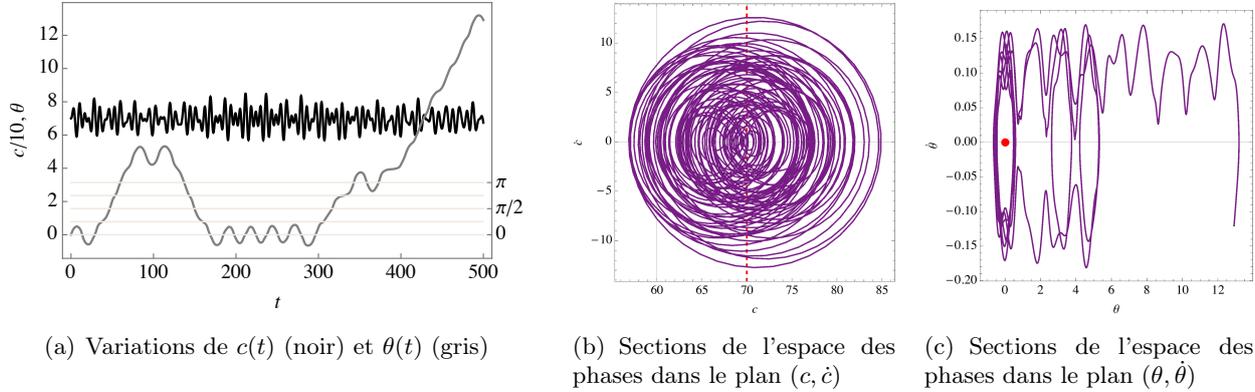


FIGURE 4.21 – Résultats du problème (4.33b) dans le régime d'oscillations chaotiques pour ( $w_0 = 1.5$  mm,  $\Omega = 0.75 \omega_0$ ) et ( $dc = d\theta = \dot{c}_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 5.62\pi/s$ ).

La présence de chaos est classiquement mise en évidence par l'effet d'hypersensibilité aux conditions initiales comme on peut le constater sur la figure 4.22. En effet, une infime variation de la condition de vitesse de rotation initiale suffit pour modifier complètement la trajectoire de déformation de la coque et la rendre non-prédictible à long terme aussi bien qu'à court terme.

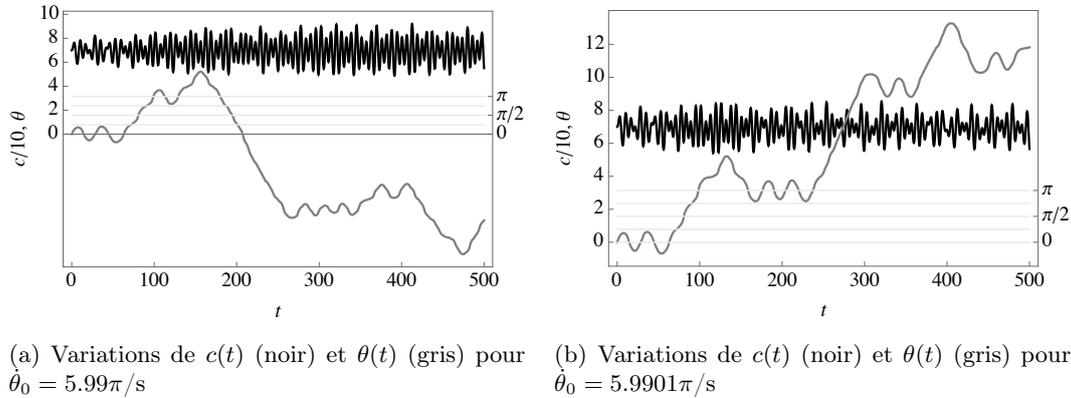


FIGURE 4.22 – Résultats du problème (4.33b) dans le régime d'oscillations chaotiques pour ( $w_0 = 1.5$  mm,  $\Omega = 0.75 \omega_0$ ) et ( $dc = d\theta = \dot{c}_0 = 0$ ).

### Oscillations à rigidité nulle

D'un point de vue théorique, les oscillations à rigidité nulle n'existent que lorsque la vitesse angulaire initiale  $\dot{\theta}_0$  est non-nulle et atteint une valeur critique  $\pm \dot{\theta}_0^{crit}$ . En dessous de cette limite, les petites oscillations sur la coordonnée  $\theta$  et les oscillations chaotiques sont prépondérantes. Au dessus de cette limite, la coque effectue des oscillations dans un sens qui dépend du signe de  $\dot{\theta}_0$ . La valeur de  $\dot{\theta}_0^{crit}$  dépend du choix de  $w_0$  et  $\Omega$  et il est compliqué d'en trouver une estimation précise de façon paramétrique.

La figure 4.23(c) décrit les résultats théoriques dans ce régime. Manifestement, il apparaît que la vitesse de rotation  $\dot{\theta}(t)$  n'est pas constante et non-périodique. Aussi, la variation de  $c$  n'est pas périodique et la non-prévision à long terme confirme que l'on se trouve dans un régime chaotique. En revanche, contrairement aux observations expérimentales pour lesquelles ce régime existe pour un

point bien précis dans le plan  $(w_0, \Omega)$ , il apparaît ici que l'on peut le trouver théoriquement pour une large gamme de vitesses de rotation initiales pourvu que  $|\dot{\theta}(0)| > \dot{\theta}_0^{crit}$ . Cependant, des niveaux "trop" élevés de vitesse angulaire initiale ne sont plus physiquement plausibles au vu des expérimentations.

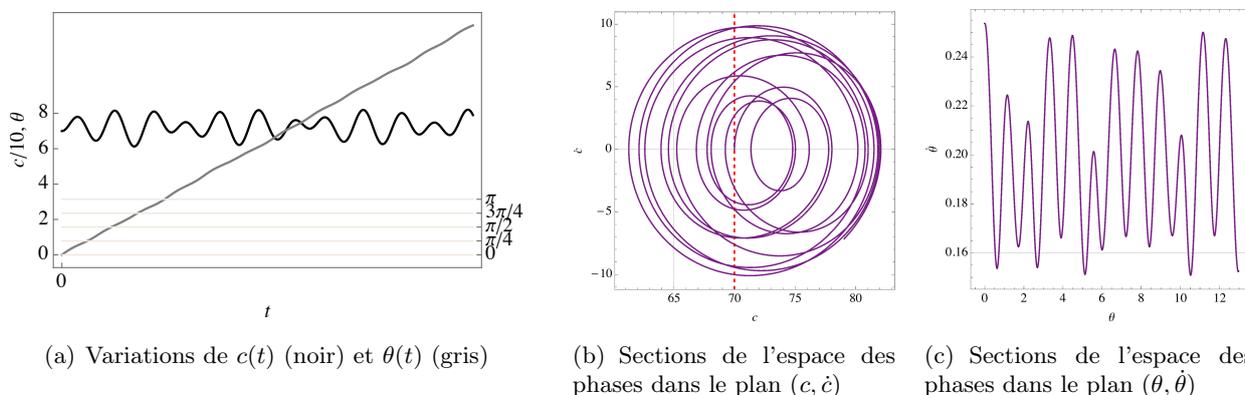


FIGURE 4.23 – Résultats du problème (4.33b) dans le régime d'oscillations à rigidité nulle pour  $(w_0 = 1 \text{ mm}, \Omega = 0.5\omega_0)$  et  $(dc = d\theta = \dot{c}_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 10\pi/\text{s})$ .

En somme, par la supposition d'imperfections géométriques négligeables, l'étude théorique montre que tous les régimes mettant en évidence des valeurs de  $\theta$  non-nulles sont directement liés à des positions et/ou vitesses angulaires initiales non-nulles qui sont largement prépondérantes vis-à-vis des paramètres d'excitation  $w_0$  et  $\Omega$ . Une comparaison rigoureuse des résultats théoriques et expérimentaux exige de connaître précisément tous les paramètres, ce qui reste une tâche très délicate.

### 4.3.3 Conclusion sur la dynamique

Les expérimentations permettent d'observer sept régimes d'oscillations distincts, pour lesquels deux régimes originaux existent pour des paramètres d'excitation fixes. Le modèle, réduit ici à deux degrés de liberté et à l'hypothèse d'inextensibilité, est capable de prédire les régimes observés en pratique, excepté le régime d'oscillations à courbure non-uniforme qui va à l'encontre de l'hypothèse fondamentale du modèle UC, et le régime d'oscillations intermittentes pour lequel la variation du sens de rotation reste (théoriquement) inconnue. Les non-linéarités montrent l'apparition de cycles chaotiques qui sont identifiés et confirmés par l'hypersensibilité aux conditions initiales et par la non-prédictibilité à long terme de la solution numérique. Le modèle est capable de prendre en compte l'imperfection de maintenance  $\varepsilon$ . Des simulations ont été effectuées avec un paramètre  $\varepsilon$  non-nul et/ou avec la prise en compte d'un amortissement visqueux. Dans ces cas, le comportement dynamique est beaucoup plus complexe et nécessiterait le recours à des approches perturbatives semi-analytiques, mais le modèle UC se prête bien à ce type de modélisation.

Les paramètres d'excitation menant à des transitions de régimes dynamiques étant simples à mesurer en pratique, ce n'est pas le cas des conditions initiales, qui sont manifestement les paramètres prépondérants conduisant aux comportements identifiés. En effet, la présence de chaos rend cette mesure complexe voire infaisable du fait des imprécisions inévitables de mesures expérimentales. Le fait de varier à la main les paramètres d'excitation est susceptible de modifier à chaque instant les conditions initiales imposées vis-à-vis du pas de variation de la fréquence ou de l'amplitude. De fait, il est particulièrement délicat de confronter les résultats théoriques et expérimentaux de par la difficulté d'identifier précisément les causes des différents types de comportement.

Si l'étude effectuée a permis de mettre en évidence des phénomènes intéressants, spécifiquement les régimes à intermittence et à rigidité nulle, une investigation plus complète est nécessaire pour comprendre globalement la dynamique non-linéaire des coques métalliques multistables. En effet, une étude plus poussée est nécessaire de manière à identifier clairement les paramètres extrinsèques à la coque qui affectent la dynamique, et relatifs aux valeurs pour lesquelles les différents régimes sont obtenus.

Cette étude aurait toute son importance dans la mesure où il est fondamental d'identifier clairement les paramètres d'excitation permettant d'éviter les cycles chaotiques nocifs pour la structure. Cela permettrait d'exploiter ce modèle dans une démarche de dimensionnement de structures multistables, de manière à cibler des régimes particuliers d'oscillations, afin d'assurer l'intégrité de la coque.

Aussi, le modèle UC étant rigoureusement validé via la simulation par éléments finis dans des applications quasi-statiques, une telle validation numérique serait nécessaire sur des cas dynamiques. Dans ce sens, il serait important d'analyser la pertinence des hypothèses de courbures uniformes et d'inextensibilité en les confrontant à d'autres types de modélisation. Par exemple, la prise en compte d'une variation quadratique de la courbure permettrait probablement de capturer les changements locaux de signe de courbure durant les cycles chaotiques.

Les résultats préliminaires issus de ce chapitre sortent du cadre de la thèse et nécessitent une étude rigoureuse plus complète sur cette base, afin de déterminer clairement le comportement mécanique des disques métalliques laminés multistables excités mécaniquement. Toutefois, ces différentes tâches restent délicates à mener comme on l'a constaté et pourraient faire l'objet d'un sujet de thèse, de par la complexité de l'étude et du nombre conséquent de tâches à effectuer.

En somme, cette richesse de régimes d'oscillations disponibles par l'exploitation de coques métalliques multistables est intéressante et peut être exploitée dans différentes applications, notamment la récupération d'énergie vibratoire qui fera l'objet de la section 4.4.

## 4.4 Application à la récupération d'énergie par voie piézoélectrique

Initialement, la majorité des dispositifs de récupération d'énergie vibratoire ont été consacrés aux structures monodimensionnelles pour leur aptitude à occuper un volume faible, de l'ordre du centimètre cube. Par la suite, des chercheurs ont proposé d'autres dispositifs, cette fois appliqués sur des structures de type plaques et coques (Rupp et al., 2009). L'avantage majeur des plaques est de pouvoir mettre en évidence de grands déplacements sur les deux coordonnées d'espace, permettant d'améliorer les capacités de production énergétique. Dans cette perspective, la multistabilité des coques peut être exploitée car les déplacements subis pour une excitation donnée sont plus importants comparés aux systèmes monodimensionnels, et convertissent plus efficacement l'énergie cinétique en énergie électrique lorsque des matériaux piézoélectriques y sont attachés.

Les résultats prometteurs des architectures bidimensionnelles ont donné lieu à d'autres systèmes basés sur les plaques et coques multistables qui, grâce aux mouvements importants effectués lors de la transition de position stable, fournissent un niveau d'énergie maximisé (Arrieta et al., 2010, 2013b). Spécifiquement, la multistabilité des composites stratifiés permet une conception simple et a de fait été exploitée. Betts et al. (2012a,b, 2013) ont proposé des architectures de composites stratifiés bistables optimales vis-à-vis de la récupération d'énergie piézoélectrique large bande. Un point remarquable des structures bidimensionnelles (de longueur caractéristique de l'ordre de 15 à 20 cm) est dû à leur fréquence de résonance de l'ordre du Hertz. Ceci étant, les structures bidimensionnelles sont plus volumineuses que les  $\mu$ GPE et les applications sont quelque peu différentes.

Si les plaques à courbures inélastiques opposées en signe ( $h_x = -h_y = h$ ) ont démontré leurs capacités à produire de l'énergie piézoélectrique, elles disposent de certains inconvénients. En effet, leur rigidité limite les amplitudes d'oscillations et on a souvent recours à l'utilisation de masses ponctuelles de manière à fournir une inertie supplémentaire afin de réduire la fréquence de snap-through. Aussi, la bistabilité des stratifiés est souvent conçue pour privilégier deux degrés de libertés limités aux directions de courbures principales vis-à-vis des axes d'orthotropie. La forte limitation du mouvement de torsion entraîne la coque à passer d'une configuration stable à l'autre de façon brutale et bruyante, restreignant le cadre d'application de ces dispositifs. À l'inverse, les coques métalliques multistables du type de celle présentée dans le chapitre 2 ( $h_x = h_y = h$ ) permettent des mouvements dans les trois degrés de liberté ( $k_x, k_y, k_{xy}$ ). Cela ajoute un mode d'oscillations sur la coordonnée de torsion et de fait le dispositif ne nécessite pas de masses inertielles, bien que ces dernières puissent tout de même être exploitées pour ajuster la fréquence de résonance à une application donnée.

#### 4.4.1 Démarche de récupération d'énergie

Cette section présente la réalisation expérimentale de systèmes de récupération d'énergie vibratoire par voie piézoélectrique par le biais de coques monostables et multistables (coque–patches piézoélectriques). Pour ce faire, et contrairement à une démarche de contrôle de forme pour laquelle on utilise l'effet piézoélectrique inverse pour créer une déformation de l'actionneur via l'application d'un potentiel électrique, on utilise désormais l'effet piézoélectrique direct de manière à exploiter l'effet d'oscillations dynamiques pour créer un champ électrique au sein des patches. Ce champ est ensuite récupéré sous forme de puissance dissipée dans une résistance de charge, ce qui représente une mesure de l'énergie électrique récupérable, et peut être stocké dans un condensateur.

Dans un souci de simplicité, on utilise des matériaux de type MFC, mais d'autres matériaux piézocéramiques existent et peuvent être optimaux. L'objectif est simplement de démontrer la faisabilité d'un tel système. Dans un second temps, des étapes de conception et dimensionnement seront nécessaires de manière à optimiser et maximiser l'énergie récupérable vis-à-vis des systèmes étudiés.

→ Propriété	Type <sup>2</sup>	Gamme de tension	Capacité	Déformation libre	Force de blocage
↓ Référence		(V)	(nF)	(ppm)	(N)
MFC 8514P1	$d_{33}$	−500 → 1500	3.39	1600	202
MFC 8514P2	$d_{31}$	−60 → 360	84.04	−700	−85
MFC 8528P2	$d_{31}$	−60 → 360	177.07	−820	−205

TABLEAU 4.2 – Propriétés des matériaux utilisés dans l'application au contrôle de forme.

Comme le montre le tableau 4.2, la capacité des patches piézoélectriques augmente significativement avec la surface de matériaux actifs. Il faut tenir compte de cet aspect, associé au fait qu'une surface active trop importante modifie considérablement le comportement mécanique de la coque, et limite l'amplitude des oscillations. En effet, une surface active élevée donne lieu à des quantités d'énergie récupérable intéressantes mais limite voire supprime certains régimes dynamiques du fait de la rigidité et de la masse des patches. Il est donc important de trouver un compromis entre énergie récupérable et liberté d'oscillations de la coque.

La littérature montre que le niveau d'énergie récupérable pour les systèmes unidimensionnels de type poutre piézoélectrique bistable excitée à la résonance ( $1 \text{ cm}^3$ , 120 Hz,  $375 \text{ } \mu\text{W}$ ) est de l'ordre du microWatt (Roundy and Wright, 2004), tandis que les systèmes bidimensionnels de type plaque piézoélectrique multistable ( $10 \text{ cm}^3$ , 40 Hz, 30 mW) permettent un niveau d'énergie jusqu'au miliWatt (Arrieta et al., 2010). Ainsi, l'idée est d'exploiter les résultats des sections précédentes mettant en évidence différents régimes d'oscillations sur les cuivres bistables afin d'évaluer les niveaux d'énergie récupérables dans chacun des modes disponibles. Les systèmes monostables étant moins sensibles aux oscillations chaotiques que les systèmes bistables, on propose de les comparer afin de visualiser la pertinence de l'une ou l'autre des architectures vis-à-vis du fait que les oscillations chaotiques sont très nocives pour la structure, même à court terme.

La source d'excitation exploitée est la même que celle utilisée précédemment. Cela nous place dans le cadre de la récupération d'énergie en régime sinusoïdal entretenu, c'est-à-dire que l'excitation extérieure est supposée continuellement sinusoïdale. En régime de petites oscillations, les déformations dans les patches peuvent être supposées proportionnelles aux mouvements de l'excitateur. En revanche, de grandes oscillations modifient la forme des tensions de sortie des patches, devenant chaotiques dans le cas d'oscillations aléatoires. Nous avons vu dans la section 4.3 que la fréquence de résonance des cuivres bistables est de l'ordre de 20 Hz. C'est autour de cette fréquence que les tensions de sortie des patches délivrent une énergie maximale que l'on cherche à exploiter. En outre, l'attachement de patches

---

2. Les MFCs sont disponibles sous différentes polarisations. Les MFCs de type  $d_{33}$  sont polarisés suivant la longueur tandis que les MFCs de type  $d_{31}$  sont polarisés suivant l'épaisseur (c.f. § 3.3.3).

sur la coque induit un amortissement supplémentaire qui peut réduire l'amplitude des oscillations du fait de leur rigidité, du même ordre de grandeur que la coque de cuivre.

Le système {coque—patchs piézoélectriques—source d'excitation} devient ainsi un générateur piézoélectrique (GPE). L'objectif des GPEs est d'alimenter les circuits électroniques à faible consommation moyenne (de l'ordre de la centaine de miliWatts) qui requièrent généralement une tension d'alimentation continue obtenue par redressement et filtrage de la tension alternative (ou quelconque) délivrée par les patchs piézoélectriques. La technique SSHI (*Synchronised Switch Harvesting on Inductor*) est aussi souvent utilisée (Delpero et al., 2013), car capable de multiplier par trois la puissance moyenne récupérée (Arrieta et al., 2013b). Cette technique ne sera pas utilisée ici mais peut être très facilement adaptée aux systèmes présentés dans la suite. On se limite ici à évaluer les tensions de sortie efficaces des patchs dans les différents régimes d'oscillations et en déduire la puissance générée.

En référence aux travaux de Wu (2014) et par application du théorème de Norton, on suppose le modèle équivalent piézoélectrique comme source de tension munie d'une capacité  $C_p$  et d'une résistance interne  $R_p$ , connectée en série à une résistance de charge  $R_c$ , tel que représenté sur la figure 4.24.

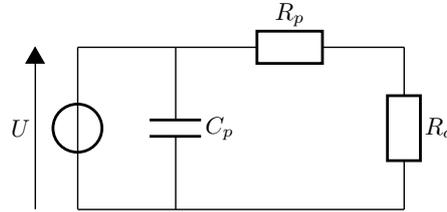


FIGURE 4.24 – Modèle équivalent piézoélectrique comme source de tension.

Notons que, comme la résistance interne  $R_p$  des patchs n'est pas donnée par le constructeur, on s'attache à la mesurer expérimentalement vis-à-vis des considérations théoriques. Par définition, une source de tension a une impédance nulle, en notant  $U$  la tension de la source (MFC), la puissance moyenne à travers la résistance de charge s'écrit :

$$P_{\text{moy}} = U_{\text{eff}}^2 \frac{R_c}{(R_p + R_c)^2} \quad (4.35)$$

Conformément aux hypothèses retenues pour ce problème, la puissance moyenne préalablement calculée est une fonction de la seule variable  $R_c$ . Aussi,  $R_p$  et  $R_c$  étant positifs, cette fonction est positive dans tout l'intervalle et s'annule pour  $R_c = 0$  et  $R_c = \infty$ . Sa dérivée est égale à :

$$\frac{dP_{\text{moy}}}{dR_c} = U_{\text{eff}}^2 \frac{R_p - R_c}{(R_p + R_c)^3} \quad (4.36)$$

et est positive pour  $R_c < R_p$ , négative pour  $R_c > R_p$ . Elle s'annule lorsque  $R_c = R_p$  et admet donc un maximum égal à  $U_{\text{eff}}^2/4R_p$  (car  $d^2P_{\text{moy}}/dR_c^2 < 0$ ).

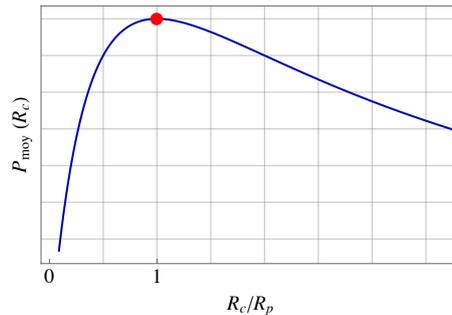


FIGURE 4.25 – Puissance en fonction de la resistance de charge.

#### 4.4.2 Étude expérimentale du système 6P

Dans cette section, nous étudions un système de récupération d'énergie constitué d'une coque de cuivre sur laquelle sont disposés six patches piézoélectriques de type MFC. Nous faisons la distinction entre systèmes monostables et bistables de manière à évaluer la pertinence de l'une ou l'autre des approches dans le processus de récupération d'énergie.

On considère un disque de cuivre métallique plastifié de dimensions  $245 \times 0.3 \text{ mm}^2$  sur lequel sont disposés six patches piézoélectriques de dimensions  $85 \times 14 \times 0.3 \text{ mm}^3$  de type P2 ( $d_{31}$ ). Les conditions de fabrication de la coque sont les mêmes que celles décrites dans le paragraphe 3.4.3.a. Ici, la monostabilité est due aux imperfections de plastification (facilement contrôlables) qui conduisent la coque à privilégier une configuration stable, à la manière d'une courbure initiale. Pour ce faire, il suffit de plastifier la coque en effectuant des répétitions privilégiées dans une configuration.

Le système monostable correspond à la configuration  $C_1$  de la figure 4.26(b) (en haut). Le système avec patches est représenté sur la source d'excitation, qui est un pot vibrant de marque Bruel&Kjaer. Comme on l'a vu dans le chapitre 3, cette architecture de patches est optimale dans une démarche de contrôle de forme, mais rien ne montre qu'elle le soit également dans une démarche de récupération d'énergie. L'objectif de ce système est simplement de démontrer la faisabilité de l'approche de récupération d'énergie et comparer les cas monostable et bistable.

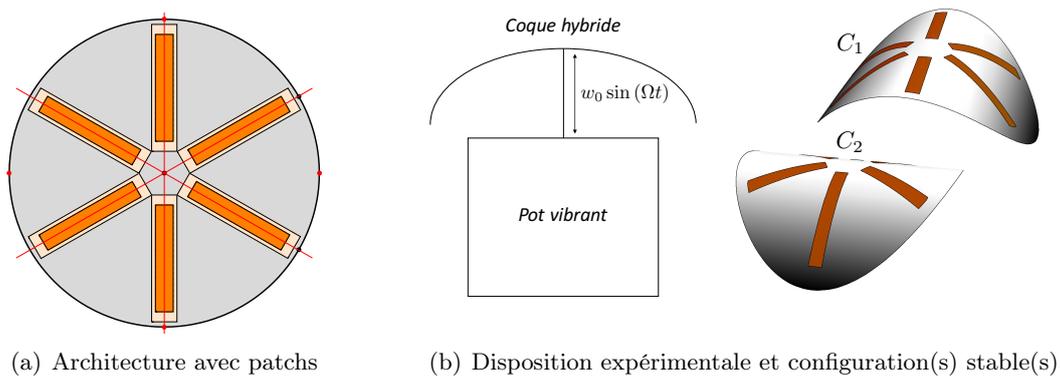


FIGURE 4.26 – (a) Architecture des patches et (b) configurations de la coque sur la source d'excitation.

##### 4.4.2.a Cas monostable

##### Réponse en fréquence et modes dynamiques

Pour rester en consistance avec les résultats de la littérature, on résonne désormais en termes d'accélération de la base et non en termes d'amplitude. Comme première étape, on étudie la réponse en fréquence du système vis-à-vis de la source d'excitation dans le but d'identifier sa fréquence de résonance. Pour ce faire, on effectue classiquement un balayage en fréquence à accélération fixée, ici à 2g. La figure 4.27 montre la réponse en fréquence pour chaque paire de patches connectés en parallèle, où l'on trace la tension crête-à-crête  $\Delta U_{pp}$ . Pour chacune de ces paires, on constate une résonance sur la coordonnée  $c$  à une fréquence d'environ 18 Hz et une résonance sur la coordonnée  $\theta$  à une fréquence d'environ 23 Hz. Pour ce niveau d'accélération, le fait que le système soit monostable supprime l'apparition de régimes chaotiques, normalement visibles autour de la résonance. Ce régime chaotique est remplacé par un régime d'oscillations sur la coordonnée  $\theta$ . Néanmoins, pour des niveaux d'accélération plus élevés, il est possible de faire apparaître des régions de chaos mais on se restreint à une gamme d'accélération pour laquelle elles n'apparaissent pas, du fait qu'il soit délicat dans un tel cas de mesurer l'accélération de la base pour cause d'une réaction importante de la coque à l'encastrement.

La réponse en fréquence du système est systématiquement effectuée pour des fréquences supérieures à 10 Hz, car en dessous le mouvement de la coque est un mouvement de corps rigide. Ce balayage

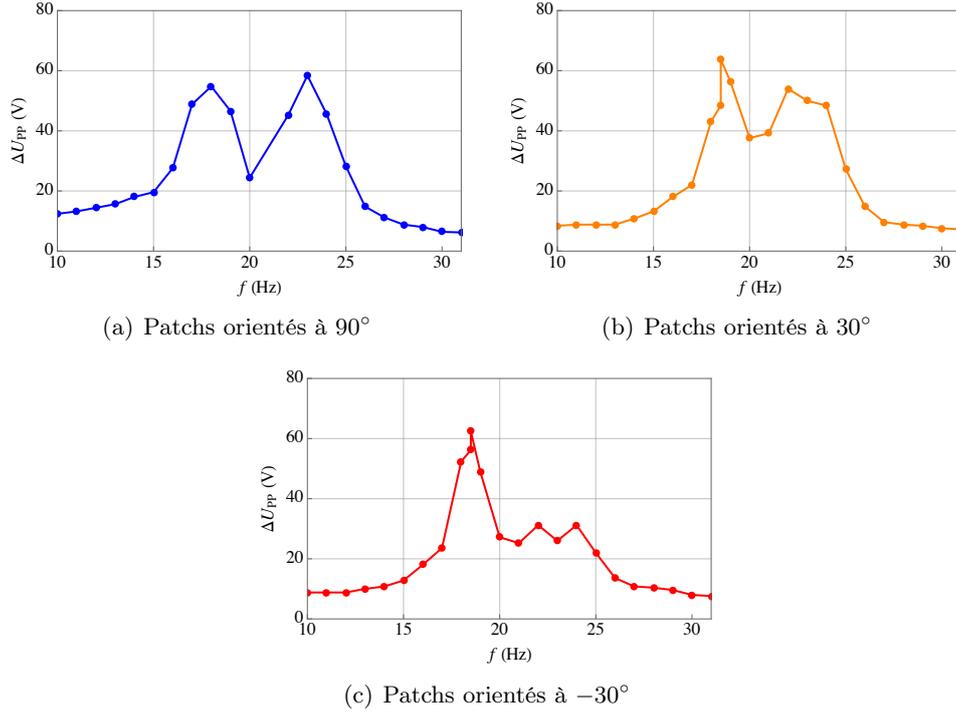


FIGURE 4.27 – Fonction de réponse en fréquence des tensions de sortie des patches en circuit ouvert du système 6P monostable, pour une accélération de la base de  $2g$ .

en fréquence associé aux observations expérimentales permet d'identifier quatre modes d'oscillations distincts pour la coque, détaillés ci-dessous :

(i)	$f : 0 \rightarrow 18$ Hz	régime de petites $\rightarrow$ grandes oscillations sur la coordonnée $c$
(ii)	$f : 18 \rightarrow 26$ Hz	régime de petites $\rightarrow$ grandes oscillations sur la coordonnée $\theta$
(iii)	$f = 19$ Hz	régime alterné entre oscillations sur les coordonnées $c$ et $\theta$
(iv)	$f > 26$ Hz	régime de grandes $\rightarrow$ petites oscillations sur la coordonnée $c$

TABLEAU 4.3 – Régimes dynamiques non-linéaires de la coque piézoélectrique monostable 6P obtenus par balayage en fréquence pour une accélération de base de  $2g$ .

La figure 4.29 montre les tensions de sortie des patches associées à ces différents régimes. La monostabilité réduit fortement l'amplitude des oscillations sur la coordonnées  $\theta$  car la structure se contente d'osciller autour de sa position d'équilibre statique. L'unique mode atypique est un mode alterné entre oscillations sur  $c$  et  $\theta$  obtenu ponctuellement lorsque la fréquence d'excitation vaut 19 Hz (*c.f.* figure 4.29(c)). Ce mode particulier semble périodique mais reste délicat à reproduire.

Toutefois, l'absence de chaos améliore significativement la durée de vie de la coque dans cette gamme de fréquence et pour une telle amplitude d'accélération. On note aussi qu'un régime d'oscillations à intermittence est obtenu pour une accélération de base de l'ordre de  $4g$ , ce qui reste assez élevé.

### Quantification de l'énergie récupérable du GPE monostable

Le niveau d'énergie récupérable pour les GPEs se mesure comme la puissance moyenne dissipée dans une résistance de charge  $R_c$ , par la relation :

$$P_{\text{moy}}(R_c) = R_c (I_{\text{eff}}^c)^2 = \frac{(U_{\text{eff}}^c)^2}{R_c} \quad (4.37)$$

où  $U_{\text{eff}}^c$  est la tension efficace de sortie du GPE, mesurée aux bornes de la résistance de charge  $R_c$ . Comme on l'a montré précédemment, la puissance dissipée dans la résistance de charge  $R_c$  est maximale lorsque cette dernière équivaut la résistance interne  $R_p$  du GPE. Ne disposant pas de cette valeur pour les MFCs, on utilise une autre approche consistant à mesurer expérimentalement  $R_p$  par balayage en résistance de charge à fréquence et accélération fixées. Ainsi, on reproduit expérimentalement le graphe 4.25 et le maximum de la fonction  $P_{\text{moy}}(R_c)$  correspond à la puissance associée à une résistance de charge optimale et donc à  $R_p$ .

La figure 4.28(a) montre la variation de puissance moyenne associée aux patches orientés à  $90^\circ$  vis-à-vis du balayage en résistance de charge. Le maximum de cette courbe correspondant à la résistance optimale est identifié à  $53 \text{ k}\Omega$ , ordre de grandeur typique pour ce type de matériaux piézocomposites. Vis-à-vis de (4.37), on constate que plus  $R_c$  est petit, plus la puissance dissipée dans la résistance de charge est élevée. Cela constitue donc un critère important de sélection de matériaux piézocomposites dans une démarche de récupération d'énergie.

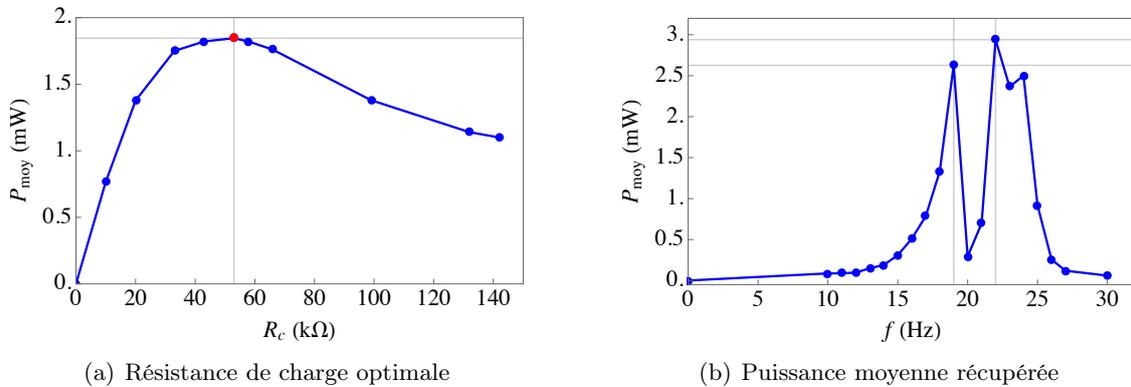
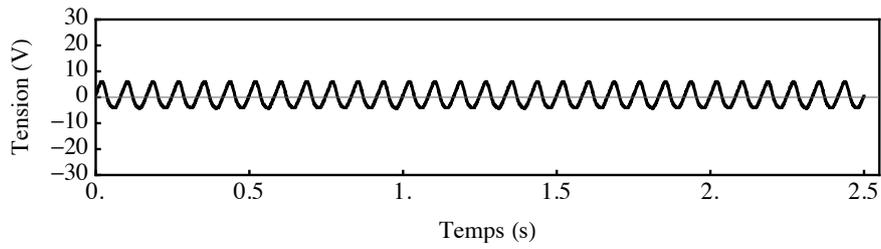


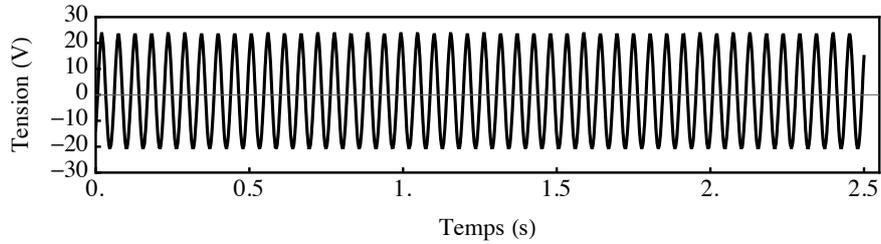
FIGURE 4.28 – (a) Résistance de charge optimale pour une accélération de base de  $0.5g$  à une fréquence de  $19.8 \text{ Hz}$  du système 6P monostable et (b) puissance moyenne dissipée dans la résistance de charge par les patches à  $90^\circ$  en fonction de la fréquence, pour une accélération de base de  $2g$  et  $R_c^{\text{opt}} = 53 \text{ k}\Omega$ .

La figure 4.28(b) représente la puissance moyenne récupérable à  $R_c = 53 \text{ k}\Omega$  pour une accélération de base d'une amplitude de  $2g$ . On note comme précédemment deux maximum qui sont respectivement liés aux oscillations sur les coordonnées  $c$  et  $\theta$ . Pour une telle excitation, la puissance moyenne récupérée est de l'ordre de  $3 \text{ mW}$  pour cette seule paire de patches. Les mêmes mesures ont été effectuées sur les deux autres paires orientées à  $\pm 30^\circ$  et montrent des résultats semblables. Les résistances de charge optimales et tensions de sortie sont quasi-identiques. Globalement, le niveau de puissance récupérable par l'ensemble de ce GPE monostable est de l'ordre de  $8$  à  $10 \text{ mW}$  pour une accélération de  $2g$ , lorsque la résonance est atteinte. Rappelons qu'il est possible d'augmenter l'accélération de la base de manière à augmenter la puissance générée mais l'inertie devient dangereuse pour l'encastrement de la coque sur le pot vibrant. Par ailleurs, le mode d'oscillations à intermittence est capturé pour de grandes accélérations mais, plus l'accélération de base est élevée, plus il est délicat de l'identifier dans les cycles chaotiques. En effet, la rigidité des patches influe énormément sur les capacités de déformation de la structure et limite l'amplitude des oscillations, aussi bien sur la coordonnée  $c$  que sur la coordonnée  $\theta$ .

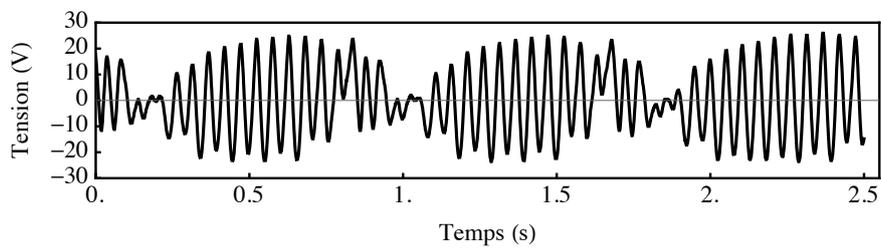
Le déplacement vertical de la coque sans patches est d'environ  $40$  à  $45 \text{ mm}$  vis-à-vis des différents cas-tests effectués et du nombre de cycles d'enroulement. Le collage des patches dans cette configuration monostable ne réduit que très peu la courbure de la coque ( $\sim 5$  à  $10 \text{ mm}$ ). Cela permet à la coque de pouvoir entreprendre de grandes oscillations sur la coordonnée  $c$  principalement. Ceci étant, on remarque que la puissance récupérée est du même ordre entre oscillations sur  $c$  et  $\theta$ , ce qui montre l'importance du mode d'oscillations de torsion sur la récupération d'énergie, dont l'amplitude est maximisée lorsque la structure est bistable.



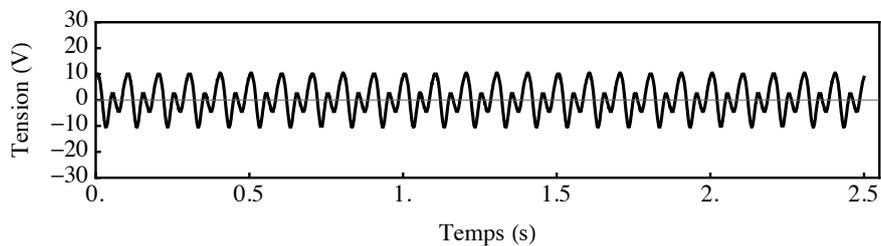
(a)  $f = 12$  Hz : petites oscillations sur la coordonnée  $c$



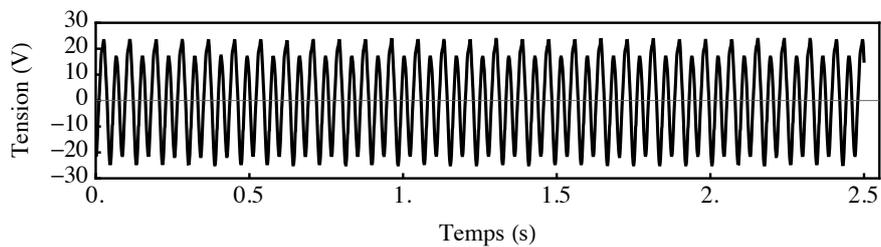
(b)  $f = 18.5$  Hz : petites oscillations sur la coordonnée  $\theta$



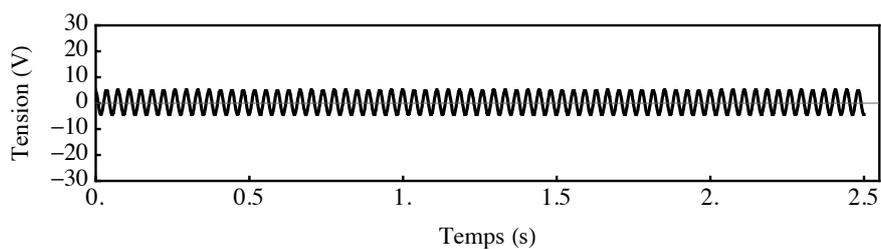
(c)  $f = 19$  Hz : alternance entre oscillations sur  $c$  et  $\theta$



(d)  $f = 20$  Hz : petites oscillations sur la coordonnée  $\theta$



(e)  $f = 23.5$  Hz : grandes oscillations sur la coordonnée  $\theta$



(f)  $f = 27$  Hz : petites oscillations sur la coordonnée  $c$

FIGURE 4.29 – Tensions de sortie en circuit ouvert des patches à  $90^\circ$  du système 6P monostable pour une accélération de base de  $2g$ .

#### 4.4.2.b Cas bistable

Des mesures identiques ont été réalisées sur un dispositif semblable mais bistable. On trace sur la figure 4.30 la réponse en fréquence pour les tensions de sortie. Comme précédemment, on observe deux fréquences de résonance sur  $c$  et  $\theta$ , respectivement à 17 Hz et 19 Hz. En revanche, contrairement au cas monostable, la résonance sur  $\theta$  induit des tensions de sortie plus élevées que la résonance sur  $c$ .

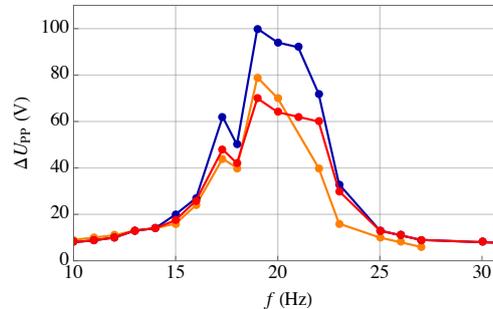
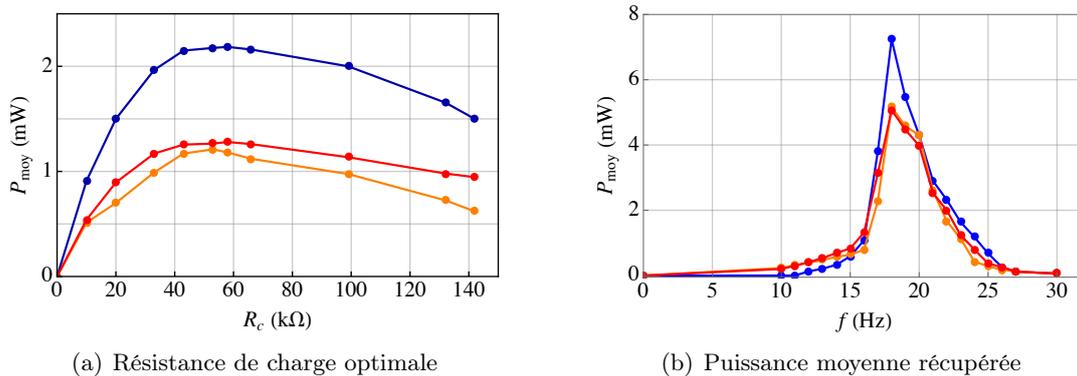


FIGURE 4.30 – Fonction de réponse en fréquence des tensions de sortie des patches en circuit ouvert du système 6P bistable, pour une accélération de base de 2g. Les courbes bleue, orange et rouge correspondent respectivement au patches orientés à  $90^\circ$ ,  $30^\circ$  et  $-30^\circ$ .

La figure 4.31 représente les résistances de charge optimales pour chaque paire de patches et la puissance moyenne récupérable pour des niveaux d'excitation identiques au cas monostable.



(a) Résistance de charge optimale

(b) Puissance moyenne récupérée

FIGURE 4.31 – (a) Résistance de charge optimale pour une accélération de base de 0.5g à une fréquence de 19.8 Hz et (b) puissance moyenne dissipée dans la résistance de charge en fonction de la fréquence, pour une accélération de base de 2g et  $R_c^{opt} = 53 \text{ k}\Omega$  du système 6P bistable. Les courbes bleue, orange et rouge correspondent respectivement au patches orientés à  $90^\circ$ ,  $30^\circ$  et  $-30^\circ$ .

On constate avec ce système que les modes d'oscillations sont quasi-semblables au cas monostable, excepté le fait que les oscillations sur  $\theta$  sont désormais prépondérantes. La bistabilité met en évidence des régions d'oscillations chaotiques pour des niveaux d'excitation équivalents, mais l'énergie électrique générée par le système est supérieure au cas monostable.

(i)	$f : 0 \rightarrow 18 \text{ Hz}$	régime de petites $\rightarrow$ grandes oscillations sur la coordonnée $c$
(ii)	$f : 18 \rightarrow 22 \text{ Hz}$	régime de petites $\rightarrow$ grandes oscillations sur la coordonnée $\theta$ et oscillations légèrement aléatoires
(iii)	$f > 22 \text{ Hz}$	régime de grandes $\rightarrow$ petites oscillations sur la coordonnée $c$

TABLEAU 4.4 – Régimes dynamiques non-linéaires du système 6P bistable obtenus par balayage en fréquence pour une accélération de base de 2g.

Pour ce cas bistable, la courbure de la coque est réduite d'un facteur 1/3 environ ( $43 \text{ mm} \rightarrow \sim 30 \text{ mm}$ ), et cela limite l'amplitude des oscillations sur la coordonnée  $c$  et favorise celles sur  $\theta$ .

Par ailleurs, la coque est bistable mais les imperfections inévitables de fabrication entraînent une configuration à être *plus stable* que l'autre. A petites accélérations de base ( $\sim 0.5 \text{ g}$ ), la structure oscille autour de sa configuration stable de départ. Ensuite, lorsque le niveau d'accélération augmente et que les oscillations sur la coordonnée  $\theta$  démarrent, la structure se dirige systématiquement vers sa configuration qui minimise l'énergie potentielle, ici la configuration  $C_2$  ( $k_x \sim 0, k_y > 0$ ). De fait, la réponse en fréquence et les mesures énergétiques sont effectuées dans la position  $C_2$  ( $\theta = \pi/2$ ), pour chaque paire de patches. Cela explique pourquoi les amplitudes des courbes (figures 4.30–4.31) sont légèrement différentes entre patches à  $90^\circ$  et patches à  $\pm 30^\circ$ .

En résumé, on note quelques différences et similitudes entre dispositifs monostables et bistables :

- A excitation équivalente ( $\sim 2 \text{ g}$ ), les dispositifs bistables permettent une génération de puissance supérieure aux systèmes monostables ;
- Le régime d'oscillations intermittentes est obtainable pour les systèmes monostables et bistables à des niveaux d'accélération différents ( $\sim 4 \text{ g}$  dans le cas monostable et  $\sim 3.5 \text{ g}$  dans le cas bistable). Pour tous les cas, plus le niveau d'accélération est élevé, plus les oscillations deviennent chaotiques et il est délicat de cibler ce mode de déformation.
- L'amplitude des oscillations sur la coordonnée  $c$  est réduite pour les systèmes bistables, et les oscillations autour de  $\theta$  sont prépondérantes sur le niveau d'énergie récupéré. A l'inverse, l'énergie produite par les systèmes monostables est quasi-équivalente autour des deux points de résonance ;
- Les régimes chaotiques sont visibles pour des plus faibles accélérations pour les systèmes bistables.

Finalement, les systèmes bistables sont plus pertinents dans cette démarche de récupération d'énergie du fait de la capacité d'oscillations sur la coordonnée  $\theta$ .

### 4.4.3 Étude expérimentale du système bistable 4P

On propose d'expérimenter un second système bistable, constitué d'une coque métallique bistable identique à celle utilisée précédemment, sur laquelle sont disposés quatre patches piézoélectriques (*c.f.* figure 4.32(a)) de type MFC, de dimensions  $85 \times 28 \times 0.3 \text{ mm}^3$ . Les patches sont collés de manière à ce que leurs axes principaux coïncident avec les directions de configurations stables (*c.f.* figure 4.32(b)). Cette disposition a pour objectif de permettre à la coque de posséder deux configurations stables dont le niveau énergétique est censé être parfaitement identique (moyennant certaines imperfections de manufacture). Aussi, comparé au système précédent, la surface active des patches (et donc la capacité) est plus élevée afin d'envisager un niveau de puissance produite supérieur.

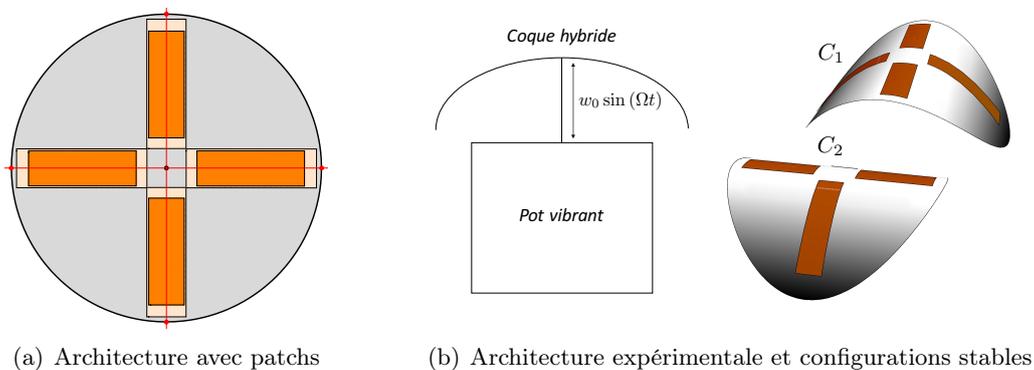


FIGURE 4.32 – (a) Architecture des patches et (b) configurations de la coque sur la source d'excitation.

#### 4.4.3.a Réponse en fréquence et modes dynamiques

La figure 4.33 représente la réponse en fréquence du GPE bistable 4P. Comme précédemment, à petites fréquences, la coque oscille sur la coordonnée  $c$  autour de sa position d'équilibre statique initiale. Ensuite, une transition d'oscillations entre coordonnées  $c$  et  $\theta$  est identifiée à 15.6 Hz et les mesures de réponse en fréquence et puissance sont effectuées dans la configuration la plus stable  $\theta = \pi/2$ .

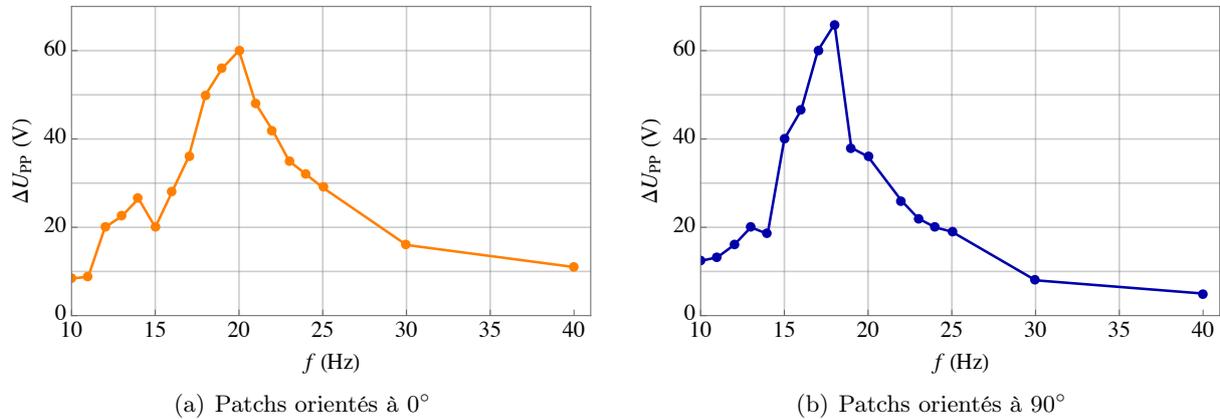


FIGURE 4.33 – Fonction de réponse en fréquence des tensions de sortie des patches en circuit ouvert du système 4P bistable, pour une accélération de base de 2g. Les courbes orange et bleue correspondent respectivement au patches orientés à  $0^\circ$  et  $90^\circ$ .

Par balayage en fréquence à accélération fixée à environ 2g, on distingue différents modes d'oscillations décrits ci-dessous, semblables au système bistable 6P :

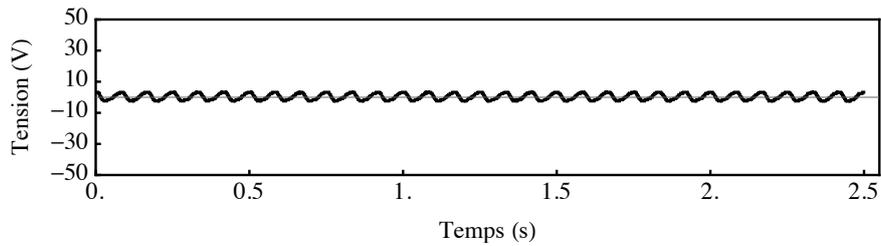
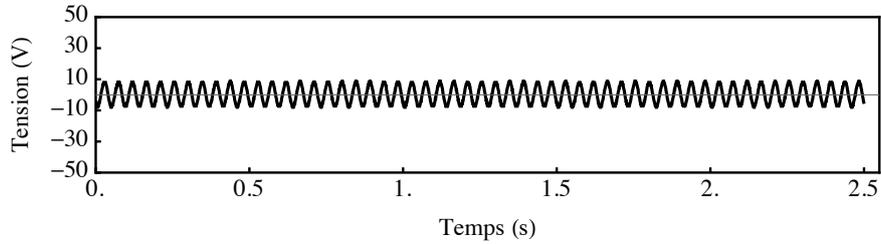
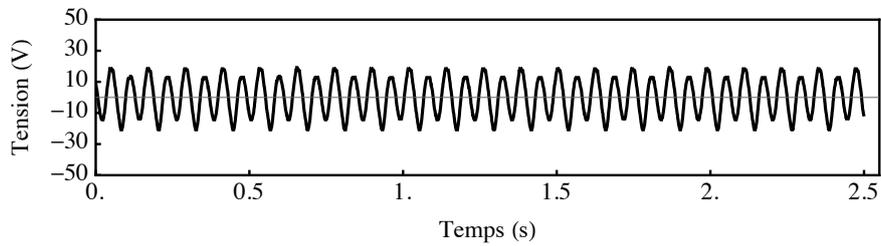
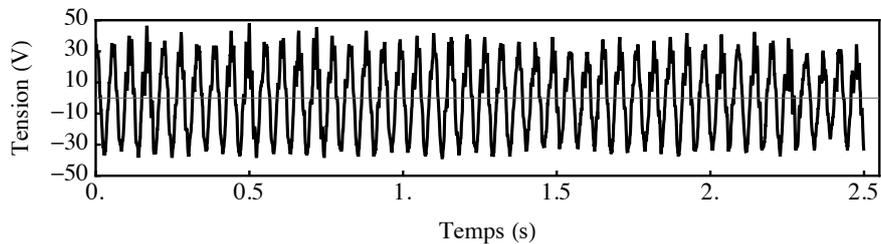
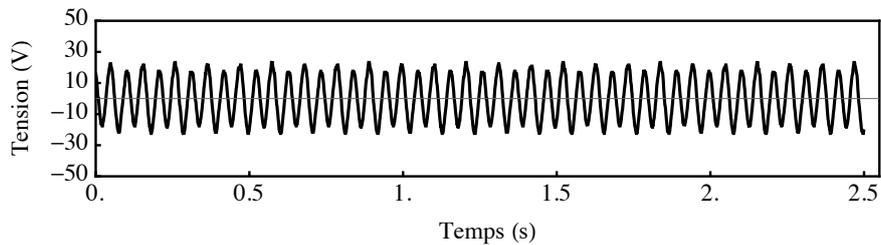
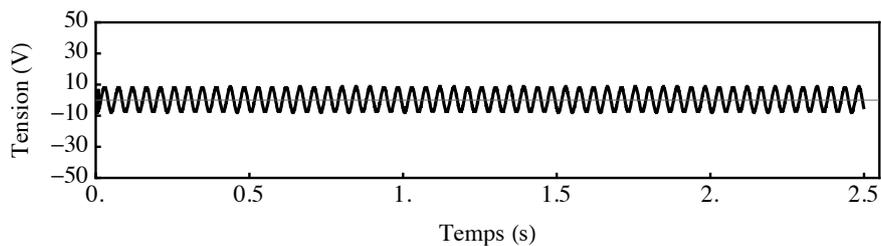
(i)	$f : 0 \rightarrow 15.6$ Hz	régime de petites $\rightarrow$ grandes oscillations sur la coordonnée $c$
(ii)	$f : 15.6 \rightarrow 21$ Hz	régime de petites $\rightarrow$ grandes oscillations sur la coordonnée $\theta$ et oscillations légèrement aléatoires
(iii)	$f > 21$ Hz	régime de grandes $\rightarrow$ petites oscillations sur la coordonnée $c$

TABLEAU 4.5 – Régimes dynamiques non-linéaires d'une coque piézoélectrique bistable obtenus par balayage en fréquence pour une accélération de base de 2g.

La figure 4.34 représente les tensions de sortie en circuit ouvert pour les patches orientés à  $90^\circ$ . Les formes des tensions sont semblables à celle du système 6P bistable mais les amplitudes sont quelque peu différentes. De plus, les régions chaotiques sont plus rapidement observées. En effet, pour ce système, la surface des patches réduit la courbure d'un facteur 2 ( $40 \text{ mm} \rightarrow \sim 20 \text{ mm}$ ), ce qui limite fortement la capacité d'obtention du mode à intermittence, et qui favorise les claquages et donc les oscillations chaotiques.

#### 4.4.3.b Quantification de l'énergie récupérable du système bistable 4P

La résistance de charge optimale a été mesurée à 20 k $\Omega$  pour chaque paire de patches. Globalement, pour des niveaux d'excitation équivalents, ce système 4P permet de récupérer une énergie plus importante que son analogue 6P, voir figure 4.36. Même si l'amplitude des oscillations est plus faible, les tensions de sortie sont plus élevées et de fait l'énergie récupérable est maximisée. Cela montre l'importance de la capacité des patches dans la conversion d'énergie. Néanmoins, l'augmentation de la capacité est directement liée à la taille des patches et de fait une étape d'optimisation topologique a toute son importance. Aussi, l'utilisation de patches avec une surface active élevée et une rigidité (épaisseur) moindre pourrait améliorer encore la conversion d'énergie. Dans ce sens, les MFCs ne sont clairement pas une référence mais sont de bons candidats dans une démonstration de faisabilité.

(a)  $f = 12$  Hz : petites oscillations sur la coordonnée  $c$ (b)  $f = 16.2$  Hz : petites oscillations sur la coordonnée  $\theta$ (c)  $f = 16.42$  Hz : grandes oscillations sur la coordonnée  $\theta$ (d)  $f = 18.2$  Hz : oscillations sur la coordonnée  $\theta$  légèrement chaotiques(e)  $f = 19.24$  Hz : grandes oscillations sur la coordonnée  $\theta$ (f)  $f = 22$  Hz : petites oscillations sur la coordonnée  $c$ FIGURE 4.34 – Tensions de sortie en circuit ouvert des patchs à  $90^\circ$  du système 4P bistable pour une accélération de base de  $2g$ .

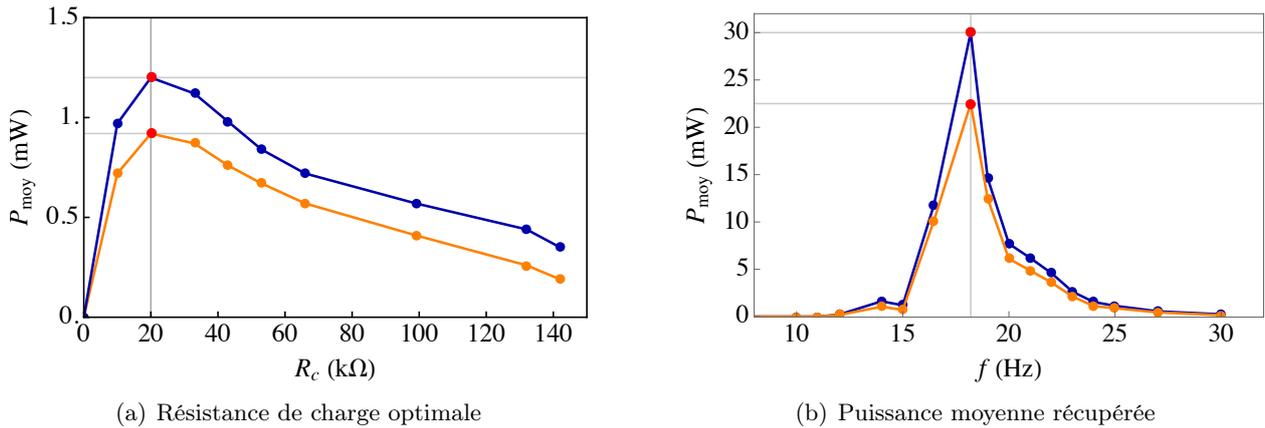


FIGURE 4.35 – (a) Résistance de charge optimale pour une accélération de base de 0.5g à une fréquence de 17 Hz pour les patches orientés à  $0^\circ$  (orange) et  $90^\circ$  (bleu) du système 4P bistable et (b) puissance moyenne dissipée dans la résistance de charge en fonction de la fréquence, pour une accélération de base de 2g et  $R_c^{\text{opt}} = 20$  k $\Omega$ .

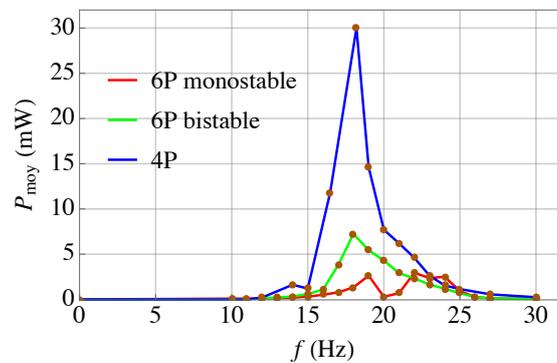


FIGURE 4.36 – Puissance moyenne récupérée pour une accélération de 2 g, en fonction de la fréquence. Les courbes rouges, verte et bleue représentent respectivement les systèmes 6P monostable, 6P bistable et 4P pour les patches orientés à  $90^\circ$  dans chaque dispositif.

#### 4.4.4 Conclusion sur la récupération d'énergie

L'objectif de cette section était de démontrer la faisabilité de systèmes de récupération d'énergie vibratoire par voie piézoélectrique, appliqués sur des coques métalliques monostables et multistables. Les coques métalliques chargées par courbures inélastiques sphériques présentent plusieurs avantages vis-à-vis de l'utilisation classique de matériaux composites ou plus généralement de plaques bistables de configurations stables opposées en signe. D'une part, le contrôle de l'état métallurgique permet de dimensionner des structures capables d'entreprendre des déplacements importants sans plastifier ou rompre, ce qui n'est pas le cas avec les matériaux composites, caractérisés par des modes de rupture fragile. D'autre part, la rigidité de torsion des métaux quasi-isotropes multistables est bien moindre et l'amplitude des oscillations est suffisamment élevée pour générer une énergie acceptable sans l'utilisation de masses inertielles, à des niveaux d'excitation semblables. Enfin, ces coques permettent des régimes d'oscillations où la structure n'émet aucun bruit sonore, ce qui se prête mieux à des applications où elle est susceptible d'être disposée dans des endroits délicats (de type toit de train etc...).

Dans cette étude, il apparaît que les systèmes monostables, moins sensibles aux oscillations chaotiques, sont capables de produire une puissance de l'ordre de la dizaine de milliWatts, ce qui est remarquable dans la mesure où le bruit sonore engendré par la coque est peu nuisible, voire inexistant lorsque l'excitation est correctement contrôlée. Les oscillations chaotiques sont visibles à des excitations plus élevées et permettent naturellement d'obtenir une puissance plus élevée.

Les architectures bistables sont capables de générer une énergie électrique plus importante que leurs analogues monostables, mais la présence d'oscillations aléatoires survient à des excitations moindres. Dans les régimes d'oscillations aléatoires, l'énergie électrique est largement maximisée mais les tensions de sortie des patchs ne sont plus périodiques. Par ailleurs, comme on l'a souligné, une dégradation de l'encastrement intervient rapidement. Cependant, ces modes chaotiques sont moins soutenus en présence de patchs. En effet, leur rigidité, même si elle ne modifie que très peu la différence de niveau énergétique entre les positions stables, réduit significativement la courbure de la coque. De fait, la structure piézoélectrique est capable de mieux supporter les oscillations chaotiques que le cuivre seul.

Pour toutes les architectures étudiées, le mode à intermittence est envisageable, mais pour des accélérations de base assez élevées et de fait le bruit sonore n'est pas totalement inexistant. Le mode à rigidité nulle n'est pas identifié. Des essais ont été effectués en inversant la disposition de la coque sur la source d'excitation et montrent des résultats semblables. En somme, les niveaux énergétiques mis en évidence dans cette étude sont largement comparables à ceux obtenus avec les stratifiés, et ce sans aucune étape d'optimisation. Ces premiers résultats expérimentaux sont prometteurs et ouvrent la voie à diverses perspectives.

## 4.5 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif l'étude introductive de la dynamique non-linéaire d'une coque quasi-neutralement stable, et une application à la récupération d'énergie vibratoire par voie piézoélectrique.

Concernant la dynamique, nous nous sommes limités à faire état des observations expérimentales, et proposer un cadre de modélisation possible qui semble pouvoir potentiellement expliquer les phénomènes fondamentaux observés en pratique. Une étude dynamique complète reste à faire mais il s'avère que le modèle UC semble un bon candidat dans cette voie. Notamment, l'hypothèse d'inextensibilité permet de déduire analytiquement les fréquences propres de la coque sur les deux coordonnées d'étude. Outre les paramètres matériaux et la courbure inélastique, les fréquences propres tiennent compte de l'imperfection de courbures inélastiques  $\varepsilon$  et du paramètre d'anisotropie  $\eta$ , ce qui est particulièrement intéressant en termes de conception dans le sens où il est possible d'ajuster leur valeur.

Les régimes d'oscillations intéressants qui ont été mis en évidence ont été appliqués à la récupération d'énergie vibratoire par voie piézoélectrique. Cette étude, vue comme une preuve de concept, démontre la faisabilité d'une telle approche de récupération d'énergie sur des coques métalliques. Par la suite, des étapes de dimensionnement et d'optimisation seront nécessaires afin de trouver un système optimal pour lequel le mode à rigidité nulle identifié dans la section 4.3 serait disponible. Une première étape pourrait être d'utiliser d'autres types de patchs piézoélectriques, moins rigides, moins épais et avec une capacité élevée, de manière à limiter leur influence en termes de rigidité sur la dynamique, et en conséquence "libérer" les différents modes d'oscillations que la coque est capable d'entreprendre en l'absence de patchs. En effet, le mode à rigidité nulle étant à énergie potentielle quasi-constante, il serait particulièrement intéressant de concevoir une structure avec patchs intégrés permettant de l'atteindre, afin d'accroître drastiquement le facteur de qualité et le rendement du dispositif, et de pouvoir récupérer de l'énergie de façon continue.

Par ailleurs, le contrôle des directions de plastification autorise une démarche de conception permettant de sélectionner un mode d'oscillations spécifique pour la récupération d'énergie parmi les différents modes disponibles, en concordance avec l'application envisagée. Enfin, une réduction de taille du dispositif pourrait être étudiée à des fins d'applications aux MEMS ( $\mu$ GPEs).

En outre, un modèle électromécanique couplé à une campagne de simulations par éléments finis seraient très pertinents en termes de comparaison vis-à-vis de la prédiction des différents modes d'oscillations. Dans cette perspective, une extension du modèle UC au cas électromécanique est envisageable et idéale dans une étape d'optimisation.



# Conclusion générale et perspectives

## Conclusion générale

Le sujet de cette thèse était le contrôle de forme de coques multistables, thème qui incorpore la modélisation, l'optimisation et la mise en œuvre expérimentale. Ces travaux s'inscrivent dans le cadre de la mécanique des plaques et coques, dont la base repose sur le phénomène de multistabilité. Lorsqu'une structure multistable est couplée à des matériaux actifs, elle devient une structure adaptative, c'est-à-dire qu'elle est capable d'adapter sa forme à différents régimes de fonctionnement. Si la littérature fait état d'autant de travaux de recherche associés à la multistabilité des coques, c'est aussi bien en raison des difficultés résultantes de leur comportement non-linéaire que du nombre conséquent d'applications possibles qui en découle. Dans ces travaux de thèse, nous nous sommes attachés à étudier du point de vue théorique, numérique et expérimental le comportement mécanique des coques multistables associé à différentes applications.

Le [chapitre 1](#) a été dédié à l'étude de coques multistables isotropes et anisotropes. Par l'exploitation d'un modèle de coques proposé par [Vidoli and Maurini \(2008\)](#), et caractérisé par seulement trois degrés de liberté que sont les composantes du tenseur ( $2 \times 2$ ) de courbures, nous avons dans un premier temps étudié numériquement l'influence des paramètres anisotropes des matériaux sur les zones de multistabilité de plaques vis-à-vis de sollicitations extérieures de type courbures inélastiques sphériques et/ou anti-sphériques. Notamment, la forme du diagramme des phases est fortement influencée par un choix précis des paramètres du matériau. Par la suite, nous avons mené l'étude complètement analytique de la multistabilité des coques minces orthotropes. On montre notamment que, en supposant une coque à symétrie du carré, associée à des champs de courbures initiale et inélastique sphériques (chacun représenté par un unique paramètre scalaire), la multistabilité des coques est caractérisée uniquement par le coefficient de Poisson du matériau, ce qui permet une exploitation simple et concise du modèle. En conséquence, la coque est capable de posséder jusqu'à trois configurations stables vis-à-vis de l'amplitude des courbures initiales et inélastiques. Ces propriétés sont établies analytiquement sous forme de diagramme des phases dans l'espace des courbures initiale et inélastique sphériques, pour un coefficient de Poisson donné. La validation numérique confirme l'existence de configurations tristables et valide les frontières des domaines où la coque possède des propriétés de stabilité différentes. Ces résultats étendent au cas spécifique de la symétrie du carré les travaux de [Seffen and Guest \(2011\)](#) sur les coques isotropes, et complètent les résultats de [Vidoli and Maurini \(2008\)](#) où la tristabilité était attestée par un choix spécifique de courbures initiales et paramètres du matériau, en l'absence de courbure inélastique.

Sur la base de ces résultats, le [chapitre 2](#) a été consacré à la mise en place de critères de conception et fabrication de coques multistables basés sur les résultats théoriques corrigés via les simulations par éléments finis non-linéaires par le biais du logiciel Abaqus. L'existence de trois configurations stables prédite analytiquement par le diagramme des phases a été validée expérimentalement par la fabrication de prototypes-démonstrateurs, pour chaque zone de stabilité. La dépendance unique du coefficient de Poisson dans le choix de la zone de multistabilité envisagée permet aux critères de rester génériques pour tout matériau orthotrope à symétrie du carré, ce qui englobe une large classe de matériaux. Par la suite, ces critères ont été appliqués à la conception et à la fabrication de structures multistables à faible transition énergétique, *i.e.* des structures pour lesquelles l'énergie nécessaire au passage d'une

position stable à l'autre est minimale. Différentes structures ont été étudiées et fabriquées afin de mettre en place une méthodologie efficace de conception et fabrication de telles coques multistables. Particulièrement, les résultats montrent la pertinence de l'utilisation de métaux quasi-isotropes laminés vis-à-vis des composites stratifiés dans une perspective de multistabilité, requérant une énergie de contrôle de forme moindre. Parallèlement, nous avons proposé une méthode, basée sur le modèle UC associé aux expérimentations, permettant d'identifier le comportement mécanique des métaux laminés bistables, en l'occurrence le module de cisaillement.

Le [chapitre 3](#), qui constitue le cœur de ces travaux de thèse, a quant à lui porté sur l'étude théorique, numérique et expérimentale du contrôle de forme de coques quasi-neutralement stables. Par une extension au cas des coques de Koiter du modèle UC, nous avons proposé une méthodologie générale de contrôle de forme de coques cylindriques bistables métalliques à faible énergie d'actionnement. Ce modèle, associé à l'hypothèse d'inextensibilité, permet de traiter le problème d'un point de vue géométrique parallèlement à la démarche analytique, où la variété étudiée est un cône dans l'espace des courbures. Cette approche permet de représenter géométriquement le phénomène de coques neutralement stables (*neutrally-stable shells*) mis en évidence par [Guest et al. \(2011\)](#). De plus, appliqué au problème du contrôle de forme, ce modèle peut être réduit à un unique degré de liberté caractérisant la coordonnée azimutale sur une surface donnée du cône. On montre que la transition continue, quasi-statique et réversible entre chaque configuration cylindrique de la coque est obtenue avec un minimum de trois directions d'actionnement par courbures inélastiques additionnelles. Sur cette base, nous avons proposé une architecture avec actionneurs intégrés comprenant une coque multistable couplée à des matériaux électroactifs de type MFC. La validation numérique et la mise en œuvre expérimentale ont été effectuées et confirment la pertinence de l'approche de contrôle de forme proposée.

Le [chapitre 4](#), qui sort du cadre de la thèse, est resté limité à quelques résultats préliminaires de dynamique non-linéaire. D'abord, nous avons étudié la dynamique non-linéaire de coques métalliques multistables (sections [4.2](#) et [4.3](#)). La coque multistable utilisée précédemment a été disposée sur une source d'excitation de type pot vibrant de manière à contrôler sa dynamique au moyen de deux paramètres que sont l'amplitude/accélération et la pulsation de cette source. Nous avons montré expérimentalement que sous ces conditions, la coque peut entreprendre différents régimes non-linéaires, parfois chaotiques et particulièrement bruyants. Spécifiquement, perdus dans ces régions chaotiques, deux régimes particuliers, complètement silencieux et nouveaux ont été mis en évidence. Nous avons intitulé ces régimes par oscillations à "intermittence" et à "rigidité nulle". Pour le premier cas, la coque passe d'une position cylindrique stable à la seconde par intermittence du sens de rotation. Pour le second, la coque parcourt continuellement et dans le même sens toutes ses configurations cylindriques. Par la suite, le modèle UC inextensible a été étendu au cas dynamique de manière à confronter ses résultats aux observations expérimentales. Concrètement, le modèle est capable de prédire chaque mode observé en pratique, excepté le mode à intermittence pour lequel les causes précises d'apparition ne sont pas clairement identifiées (imperfections, conditions initiales...). Bien que les résultats sont prometteurs, il reste un travail conséquent à effectuer de manière à comprendre globalement les propriétés de dynamique non-linéaire des coques métalliques multistables. En l'occurrence, les conditions initiales qui sont les causes prépondérantes d'existence de chaque comportement sont délicates à identifier.

Compte tenu de ces résultats intéressants, la section [4.4](#), exclusivement expérimentale et exploratoire, a consisté à appliquer ces propriétés de multistabilité et de dynamique non-linéaire sur des systèmes de récupération d'énergie vibratoire par voie piézoélectrique, afin d'en démontrer la faisabilité. Nous avons étudié différentes architectures monostables et bistables de dispositifs constitués de coques métalliques sur lesquelles sont collés des patches piézoélectriques. Cette approche constitue une alternative intéressante à l'utilisation de matériaux composites pour lesquels les modes d'oscillations sont limités en nombre, et bruyants car souvent synonymes de chaos. Si le mode à intermittence est obtainable pour des niveaux d'excitation importants, les oscillations à rigidité nulle n'ont pas été captées du fait de la présence de patches, dont la rigidité influe considérablement sur le comportement de la coque. Finalement, les résultats présentés montrent que le niveau d'énergie récupérable via ces systèmes est très cohérent et comparable à leurs analogues composites stratifiés.

---

## Contribution originale

En résumé, ces travaux de thèse font l'objet de quelques contributions originales :

- Étude de coques multistables orthotropes précontraintes. Mise en évidence théorique, numérique et expérimentale de la tristabilité ;
- Mise en place de critères de conception et fabrication de coques multistables précontraintes jusqu'à la tristabilité ;
- Conception et fabrication de structures multistables à très faible différence de niveau énergétique entre les états stables. Identification du comportement mécanique effectif des cuivres laminés ;
- Étude théorique, numérique et expérimentale du contrôle de forme de plaques métalliques cylindriques bistables avec actionneurs intégrés ;
- Découverte de modes d'oscillations originaux associés aux plaques métalliques cylindriques bistables excitées mécaniquement par pot vibrant ;
- Démonstration de faisabilité de l'exploitation de coques métalliques cylindriques bistables pour la récupération d'énergie vibratoire piézoélectrique large bande.

## Perspectives

Cette thèse, les problématiques qu'elle soulève, ainsi que les résultats obtenus mettent en lumière différentes perspectives directes, tant sur le plan théorique que numérique ou même expérimental.

Si les travaux de dynamique non-linéaire ont permis de découvrir des modes d'oscillations intéressants et nouveaux, un travail conséquent reste à effectuer dans ces trois aspects. D'abord, ces résultats sont donnés pour une géométrie spécifique de disque de cuivre laminé qui semble être le matériau optimal vis-à-vis de sa rigidité, de son poids, et de son état métallurgique. Toutefois, une étude paramétrique rigoureuse permettrait de confirmer l'existence ou non de ces modes avec des diamètres ou épaisseurs différents (Touze and Thomas, 2006). La simulation par éléments finis qui, dans ce contexte, reste une tâche particulièrement délicate pourrait permettre de répondre à cette question. En outre, une caractérisation claire de l'influence du sens de positionnement de la coque sur la source d'excitation est également importante aussi bien qu'une identification des courbures inélastiques minimales permettant l'apparition de ces différents modes. Le modèle dynamique proposé est capable de prendre en compte la plupart des imperfections de fabrication, à condition que celles-ci soient correctement mesurées, mais une étude plus poussée de l'influence des imperfections dans la dynamique est également importante (Touze et al., 2008b; Camier et al., 2009). Aussi, tous les modes obtenus théoriquement ne sont pas directement comparables aux observations expérimentales du fait de la non-identification des valeurs précises de paramètres affectant la dynamique. Cela montre l'importance fondamentale d'une estimation rigoureuse des conditions initiales afin d'être en mesure de confronter les résultats théoriques aux observations expérimentales. La performance quasi-statique du modèle étant démontrée, une estimation des conditions initiales permettrait au modèle de devenir très performant et un excellent outil de dimensionnement de coques multistables en dynamique.

Concernant la récupération d'énergie, les premiers résultats démontrent la pertinence de l'exploitation de cuivres laminés dans ce processus. Par une étape rigoureuse de conception et optimisation topologique, la richesse de comportements dynamiques non-linéaires des coques métalliques peut être exploitée à meilleur escient et améliorer significativement les niveaux énergétiques récupérables. Dans ce contexte, une extension du modèle UC dynamique au cas électromécanique serait une étape importante pour concevoir un système puissant et optimisé de récupération d'énergie vibratoire. Cela concernerait principalement les aspects d'adaptation de fréquence de résonance aux conditions ambiantes vis-à-vis de jeux de paramètres contrôlables tels que les dimensions du disque, ou bien les aspects de suppression de modes parasites (typiquement chaotiques) pour une ergonomie (dimensions, émission de bruit sonore...) optimale du dispositif de récupération d'énergie.

## Publications

### Revue scientifique

- [1] W. Hamouche, C. Maurini, A. Vincenti, S. Vidoli. *A gearless motor : the multiparametric actuation of a neutrally-stable shell*. En cours d'écriture.
- [2] W. Hamouche, C. Maurini, A. Vincenti, S. Vidoli. *Basic criteria to design and produce multistable shells*. *Meccanica*, 10.1007/s11012-016-0375-5, 2016.

### Actes de conférences

- [1] W. Hamouche, A. Vincenti, C. Maurini, S. Vidoli. *Non-linear dynamic actuation of multistable shells*. XXIV ICTAM, 21-26 August 2016, Montreal, Canada.
- [2] W. Hamouche, A. Vincenti, C. Maurini, S. Vidoli. *Contrôle de forme de coques multistables*. 22<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, 24-28 Août 2015, Lyon, France.
- [3] W. Hamouche, A. Vincenti, C. Maurini, S. Vidoli. *Shape control of multistable plates*. 9<sup>th</sup> European Solid Mechanics Conference, 6-10 July 2015, Madrid, Spain.
- [4] W. Hamouche, A. Vincenti, C. Maurini, S. Vidoli. *Contrôle de forme de coques multistables*. 12<sup>ème</sup> Colloque National en Calcul des Structures, 18-22 Mai 2015, Presqu'île de Giens, France.



# Bibliographie

- Arrieta, A., Bilgen, O., Friswell, M., and Ermanni, P. (2013a). Modelling and configuration control of wing-shaped bi-stable piezoelectric composites under aerodynamic loads. *Aerospace Science and Technology*, vol. 29, pp. 453-461.
- Arrieta, A., Delpero, T., Bergamini, A., and Ermanni, P. (2013b). Broadband vibration energy harvesting based on cantilevered piezoelectric bi-stable composites. *Applied Physics Letters*, 102 : 173904-1.
- Arrieta, A., Hagedorn, P., Erturk, A., and Inman, D. (2010). A piezoelectric bistable plate for nonlinear broadband energy harvesting. *Applied Physics Letters*, 104102-1.
- Arrieta, A., Neild, S., and Wagg, D. (2009). Nonlinear dynamic response and modeling of a bi-stable composite plate for applications to adaptive structures. *Nonlinear dynamics*, vol. 58, pp. 259–272.
- Arrieta, A., Neild, S., and Wagg, D. (2011a). Dynamic snap-through for morphing of bi-stable composite plates. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 22, pp. 103–112.
- Arrieta, A., Neild, S., and Wagg, D. (2011b). On the cross-well dynamics of a bi-stable composite plate. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, pp. 3424–3441.
- Arrieta, A., Spelsberg-Korspeter, G., Hagedorn, P., Neild, S., and Wagg, D. (2011c). Low order model for the dynamics of bi-stable composite plates. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 22, pp. 2025–2043.
- Avitabile, P. (2001). Experimental modal analysis : A simple non-mathematical presentation. *Sound and Vibrations*.
- Berthelot, J. (1999). Composite materials : mechanical behavior and structural analysis. *Springer*.
- Betts, D., Bowen, C., Kim, H., Gathercole, N., Clarke, C., and Inman, D. (2013). Nonlinear dynamics of a bistable piezoelectric composite energy harvester for broadband application. *European Physical Journal*, vol. 222, pp. 1553–1562.
- Betts, D., Kim, H., and Bowen, C. (2011). Modeling and optimization of bistable composite laminates for piezoelectric actuation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 22, pp. 2181–2191.
- Betts, D., Kim, H., and Bowen, C. (2012a). Preliminary study of optimum piezoelectric cross-ply composites for energy harvesting. *Smart Materials Research*, 2012 : 621364.
- Betts, D., Kim, H., Bowen, C., and Inman, D. (2012b). Optimal configurations of bistable piezo-composites for energy harvesting. *Applied Physics Letters*, vol. 100, pp. 114-104.
- Betts, D., Salo, A., Bowen, C., and Kim, H. (2010). Characterisation and modelling of the cured shapes of arbitrary layup bistable composite laminates. *Composite Structures*, vol. 92, pp. 1694-1700.
- Bowen, C., Betts, D., Giddings, P., Salo, A., and Kim, H. (2012). A study of bistable laminates of generic lay-up for adaptive structures. *Strain*, vol. 48, pp. 235-240.

- Brinkmeyer, A., Pellegrino, S., and Weaver, P. (2016). Effects of long-term stowage on the deployment of bistable tape springs. *Journal of Applied Mechanics*, 83 :011008-1.
- Brunetti, M., Vincenti, A., and Vidoli, S. (2016). A class of morphing shell structures satisfying clamped boundary conditions. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 82, pp. 47-55.
- Calladine, C. (1983). Theory of shell structures. *Cambridge University Press*.
- Camier, C., Touzé, C., and Thomas, O. (2009). Non-linear vibrations of imperfect free-edge circular plates and shells. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 28, pp. 500-515.
- Carrella, A., Mattioni, F., Diaz, A., Friswell, M., Wagg, D., and Weaver, P. (2008). Static and dynamic analysis of a bistable plate for application in morphing structures. *7th European Conference on Structural dynamics*.
- Ciarlet, P. (2000). Mathematical elasticity. vol.III : theory of shells.
- Ciarlet, P., Gratie, L., and Mardare, C. (2009). Intrinsic methods in elasticity : A mathematical survey. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, vol. 23(1-2), pp. 133-164.
- Ciarlet, P., Gratie, L., Mardare, C., and Shen, M. (2008). Saint venant compatibility equations on a surface application to intrinsic shell theory. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 18(2), pp. 165-194.
- Coburn, B., Pirrera, A., Weaver, P., and Vidoli, S. (2012). Tristability of an orthotropic doubly curved shell. *Composite Structures*, vol. 96.
- Cottone, F., Gammaitoni, L., Vocca, H., Ferrari, M., and Ferrari, V. (2012). Piezoelectric buckled beams for random vibration energy harvesting. *Smart Materials and Structures*, vol. 21(3), pp. 21-35.
- Dano, M.-L. and Hyer, M. (1998). Thermally-induced deformation behaviour of unsymmetric laminates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, pp. 2101-2120.
- Dano, M.-L. and Hyer, M. (2002). Snap-through of unsymmetric fiber-reinforced composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, pp. 175-198.
- Dano, M.-L. and Hyer, M. (2003). Sma-induced snap-through of unsymmetric fiber-reinforced composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, pp. 5949-5972.
- Dano, M.-L., Jean-St-Laurent, M., and Fecteau, A. (2012). Morphing of bistable composite laminates using distributed piezoelectric actuators. *Smart Materials Research*, vol. 1155, pp. 695-475.
- Daynes, S., Weaver, P., and Trevarthen, J. (2011). A morphing composite air inlet with multiple stable shapes. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 22.
- Delpero, T., Di Lillo, L., Bergamini, A., and Ermanni, P. (2013). Energy harvesting module for the improvement of the damping performance of autonomous synchronized switching on inductance. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 24(7), pp. 837-845.
- Dervaux, J. and Ben-Amar, M. (2008). Morphogenesis of growing soft tissues. *Physical Review Letter*, 101 :06810-11-06810-14.
- Diaconu, C., Weaver, P., and Arrieta, A. (2008). Dynamic analysis of bi-stable composite plates. *Journal of Sound and Vibration*.
- Eckstein, E., Pirrera, A., and Weaver, P. (2014). Multi-mode morphing using initially curved composite plates. *Composite Structures*, vol. 109, pp. 240-245.

- Emam, S. and Inman, D. (2015). A review on bistable composite laminates for morphing and energy harvesting. *Applied Mechanics Reviews*, 67 :060803-1.
- Etches, J., Potter, K., Weaver, P., and Bond, I. (2009). Environmental effects on thermally induced multistability in unsymmetric composite laminates. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 40, pp. 1240–1247.
- Ewins, D. (2003). Modal testing : theory, practice and application (mechanical engineering research studies : engineering dynamics series).
- Fernandes, A., Maurini, C., and Vidoli, S. (2010). Multiparameter actuation for shape control of bistable composite plates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, pp. 1449–1458.
- Fernandes, A. and Pouget, J. (2001). An accurate modelling of piezoelectric plates. single-layered plate. *Applied Mechanics*, vol. 71, pp. 509–24.
- Fernandes, A. and Pouget, J. (2002). An accurate modelling of piezoelectric multi-layer plates. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 21.
- Forterre, Y., Skotheim, J., Dumai, J., and Mahadevan, L. (2005). How the venus flytrap snaps. *Nature*, vol. 433, pp. 421–425.
- Giddings, P., Bowen, C., Butler, R., and Kim, H. (2008). Characterisation of actuation properties of piezoelectric bi-stable carbon-fibre laminates. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 39, pp. 697–703.
- Giddings, P., Bowen, C., Salo, A., Kim, H., and Ive, A. (2010). Bistable composite laminates : Effects of laminate composition on cured shape and response to thermal load. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 92, pp. 2220–2225.
- Giddings, P., Kim, H., Salo, A., and Bowen, C. (2011). Modelling of piezoelectrically actuated bistable composites. *Materials Letters*, vol. 65, pp. 1261–1263.
- Gigliotti, M., Wisnom, M., and Potter, K. (2004). Loss of bifurcation and multiple shapes of thin [0/90] unsymmetric composite plates subject to thermal stress. *Compo Sci Technol*, vol. 64, pp. 109–128.
- Giomi, L. and Mahadevan, L. (2012). Multi-stability of free spontaneously curved anisotropic strips. *Proceeding of the Royal Society A*, vol. 468(2138), pp. 511–530.
- Golabchi, M. and Guest, S. (2009). Morphing multistable textured shells. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures*.
- Gude, M., Hufenbach, W., and Kirvel, C. (2011). Piezoelectrically driven morphing structures based on bistable unsymmetric laminates. *Composite Structures*, vol. 93, pp. 377–382.
- Guest, S., Kebabze, E., and Pellegrino, S. (2011). A zero stiffness elastic shell structure. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*.
- Guest, S. and Pellegrino, S. (2006). Analytical models for bistable cylindrical shells. *Proceedings of the Royal Society : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 462, pp. 839–854.
- Hamamoto, A. and Hyer, M. (1987). Non-linear temperature-curvature relationships for unsymmetric graphite-epoxy laminates. *Internartional Journal of Solids and Structures*, vol. 23, pp. 919-935.
- Harne, R., Thota, M., and Wang, K. (2013). Concise and high-fidelity predictive criteria for maximizing performance and robustness of bistable energy harvesters. *Applied Physics Letters*, 053903.

- Hyer, M. (1981a). Calculations of the room-temperature shapes of thin unsymmetric laminates. *Journal of Composites Materials*, vol. 15, pp. 296–310.
- Hyer, M. (1981b). Some observations on the cured shape of thin unsymmetric laminates. *Journal of Composites Materials*, vol. 15, pp. 175–194.
- Hyer, M. (1982). The room-temperature shapes of 4-layer unsymmetric cross-ply laminates. *Journal of Composites Materials*, vol. 16, pp. 318–340.
- Iqbal, K. and Pellegrino, S. (2000). Bistable composite shells. *In Proceedings of the 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference, GA, USA*.
- Jun, W. and Hong, C. (1990). Effect of residual shear strain on the cured shape of unsymmetric cross-ply thin laminates. *Composites Science and Technology*, vol. 38, pp. 55–67.
- Kebadze, E., Guest, S., and Pellegrino, S. (2004). Bistable prestressed shell structures. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, pp. 2801–2820.
- Kim, H., Betts, D., Salo, A., and Bowen, C. (2010). Shape memory alloy–piezoelectric active structures for reversible actuation of bistable composites. *AIAA Journal*, vol. 48, pp. 1265–1268.
- Kim, S., Koh, J., Lee, J., Ryu, J., Cho, M., and Cho, K. (2014). Flytrap-inspired robot using structurally integrated actuation based on bistability and a developable surface. *Bioinspiration & Biomimetics*.
- Klein, Y., Efrati, E., and Sharon, E. (2007). Shaping of elastic sheets by prescription of non-euclidean metrics. *Science*, vol. 315, pp. 1116–1120.
- Lamacchia, E., Pirrera, A., Chenchiah, I., and Weaver, P. (2015). Morphing shell structures : A generalised modelling approach. *Composite Structures*, vol. 131, pp. 1017–1027.
- Lewicka, M., Mahadevan, L., and Pakzad, M. (2011). The foppl-von karman equations for plates with incompatible strains. *Proceeding of the Royal Society A*, vol. 467, pp. 402–426.
- Lewicka, M., Mahadevan, L., and Pakzad, M. (2014). Models for elastic shells with incompatible strains. *Proceeding of the Royal Society A*, vol. 470(2165).
- Lewicka, M., Mahadevan, L., and Pakzad, M. R. (2010). The föppl–von kármán equations for plates with incompatible strains. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 467,401–426.
- Loukaides, E., Maurini, C., and Seffen, K. (2011). Elementary morphing shells : Their complete behaviour. ??
- Loukaides, E., Smoukov, S., and Seffen, K. (2015). Magnetic actuation and transition shapes of a bistable spherical cap. *International Journal of Smart and Nano Materials*, vol. 5, pp. 270–282.
- Lu, F., Lee, H., and Lim, S. (2004). Modeling and analysis of micro piezoelectric power generators for micro-electromechanical-systems applications. *Smart Materials and Structures*, vol. 13, pp. 57–63.
- Mansfield, E. (1953). Bending, buckling and curling of a heated thin plate. *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 6, pp. 1–15.
- Mansfield, E. (1989). The bending & stretching of plates. *Cambridge University Press*, vol.
- Mattioni, F., Weaver, P., Potter, K., and Friswell, M. (2008a). Analysis of thermally induced multistable composites. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, pp. 657–675.

- Mattioni, F., Weaver, P., Potter, K., and Friswell, M. (2008b). The application of thermally induced multistable composites to morphing aircraft structures. *Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies*, 6930 :693012.
- Montemurro, M., Vincenti, A., and Vannucci, P. (2012). A two-level procedure for the global optimum design of composite modular structures—application to the design of an aircraft wing. *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 155 (1), pp. 1-53.
- Norman, A., Golabchi, M., Seffen, K., and Guest, S. (2008a). Multistable textured shell structures. *Advances in Science and Technology*.
- Norman, A., Guest, S., and Seffen, K. (2007). Novel multistable corrugated structures. *Collect Tech Pap AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct Struct Dyn Mater Conf*, vol. 6, pp. 6379–6390.
- Norman, A., Seffen, K., and Guest, S. (2008b). Multistable corrugated shells. *Proceedings of the Royal Society : Mathematical, Physical & Engineering Sciences*, vol. 464, pp. 1653–1672.
- Paradiso, J. and Starner, T. (2005). Energy scavenging for mobile and wireless electronics. *Pervasive Computing, IEEE*, vol. 4, pp. 18-27.
- Peeters, L., Powell, P., and Warnet, L. (1995). Thermally-induced shapes of unsymmetric laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 603-24.
- Pirrerera, A., Avitabile, D., and Weaver, P. (2010). Bistable plates for morphing structures : A refined analytical approach with high-order polynomials. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 47, pp. 3412–3425.
- Pirrerera, A., Avitabile, D., and Weaver, P. (2012). On the thermally induced bistability of composite cylindrical shells for morphing structures. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49,685-700.
- Portela, P., Camanho, P., Weaver, P., and Bond, I. (2008). Analysis of morphing multistable structures actuated by piezoelectric patches. *Computers and Structures*, vol. 86, pp. 347–356.
- Poulain, G., Sarraute, E., and Costa, F. (2004). Generation of electrical energy for portable devices. comparative study of an electromagnetic and a piezoelectric system. *Sensors and Actuators A : Physical*, vol. 116, pp. 461-471.
- Ren, L. (2006). Theoretical study on shape control of thin cross-ply laminates using piezoelectric actuators. *Composite Structures*, vol. 80, pp. 451–460.
- Ren, L. (2007). A theoretical study on shape control of arbitrary lay-up laminates using piezoelectric actuators. *Composite Structures*, vol. 83, pp. 110–118.
- Ren, L. and Parvizi-Majidi, A. (2006). A model for shape control of cross-ply laminated shells using a piezoelectric actuator. *Journal of Composite Materials*, 40 :1271.
- Roundy, S. and Wright, P. (2004). A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics. *Smart Materials and Structures*, vol. 13, pp. 1131-1144.
- Roundy, S., Wright, P., and Rabaey, J. (2003). A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes. *Computer communications*, vol. 26, pp. 1131-1144.
- Rupp, C., Evgrafov, A., Maute, K., and Dunn, M. (2009). Design of piezoelectric energy harvesting systems : A topology optimization approach based on multilayer plates and shells. *Journal of Intelligent Material Systems ans Structures*, vol. 20, pp. 1923-1940.

- Ryu, J., Lee, J., Cho, M., Kim, S., Hoh, J., and Cbo, K. (2011). Snap-through behavior of bi-stable composite structure using sma spring actuator. *In Proceedings of the 52nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference, CO, USA*.
- Schlecht, M., Schulte, K., and Hyer, M. (1995). Advanced calculation of the room-temperature shapes of thin unsymmetric composite laminates. *Composite Structures*, vol. 32, pp. 627–633.
- Schultz, M., Hulse, M., Keller, P., and Turse, D. (2008). Neutrally stable behavior in fiber-reinforced composite tape springs. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, pp. 1012–1017.
- Schultz, M. and Hyer, M. (2003). Snap-through of unsymmetric cross-ply laminates using piezoceramic actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 03 :0795–20.
- Schultz, M. and Hyer, M. (2004). A morphing concept based on unsymmetric composite laminates and piezoceramic mfc actuators. *In Proceedings of the 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference, CA, USA*.
- Seffen, K. (2007). Morphing bistable orthotropic elliptical shallow shells. *Proceedings of the Royal Society*, vol. 463, pp. 67–83.
- Seffen, K. (2008). Multistable anisotropic shells : Governing equations of deformation. *Engineering Department, Cambridge University, Technical Report No. CUED/D-STRUCT/TR 225*.
- Seffen, K. and Guest, S. (2011). Prestressed morphing bistable and neutrally stable shells. *Journal of Applied Mechanics*.
- Seffen, K. and McMahon, R. (2007). Heating of a uniform wafer disk. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 49(2), pp. 230–238.
- Seffen, K. and Vidoli, S. (2016). Eversion of bistable shells under magnetic actuation : a model of nonlinear shapes. *Smart Materials and Structures*.
- Sharon, E. and Efrati, E. (2010). The mechanics of non-euclidean plates. *Soft Matter*, vol. 6, pp. 5693–5704.
- Syta, A., Bowen, C., Kim, H., Rysak, A., and Litak, G. (2015). Experimental analysis of the dynamical response of energy harvesting devices based on bistable laminated plates. *Meccanica*, vol. 50, pp. 1961–1970.
- Thomas, O., Nicu, L., Ayela, C., and Touzé, C. (2007a). Buckling and non-linear vibrations of a piezoelectric stratified plate – application to a mems biosensor. *EUROMECH Colloquium 483, Geometrically Non-linear Vibrations of Structures*, 9–11 July 2007, FEUP, Porto, Portugal.
- Thomas, O., Touzé, C., and Luminais, E. (2007b). Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : Experiments on a 1 :1 :2 internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, vol. 49, pp. 259-284.
- Touze, C., Amabili, M., and Thomas, O. (2008a). Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, pp. 2030-2045.
- Touze, C., Camier, C., Favraud, G., and Thomas, O. (2008b). Effect of imperfections and damping on the type of nonlinearity of circular plates and shallow spherical shells. *Mathematical Problems in Engineering*, ID 678307, 19 pages.
- Touze, C. and Thomas (2006). Non-linear behaviour of free-edge shallow spherical shells : Effect of the geometry. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 41, pp. 678-692.

- Touze, C., Thomas, O., and Huberdeau, A. (2004). Asymptotic non-linear normal modes for large amplitude vibrations of continuous structures. *Computers & Structures*, vol. 82, pp. 2671-2682.
- Touzé, C., Thomas, O., and Amabili, M. (2011). Transition to chaotic vibrations for harmonically forced perfect and imperfect circular plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 46, pp. 234-246.
- Vidoli, S. (2013). Discrete approximations of the föppl–von kármán shell model : From coarse to more refined models. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 50 (9), pp. 1241-1252.
- Vidoli, S. and Maurini, C. (2008). Tristability of thin orthotropic shells with uniform initial curvature. *Proceedings of the Royal Society*, vol. 464, pp. 2949–2966.
- Vincenti, A., Ahmadian, M., and Vannucci, P. (2013). Optimization of laminated composites by using genetic algorithm and the polar description of plane anisotropy. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 20(3), pp. 242-255.
- Vogl, G. and Hyer, M. (2011). Natural vibration of unsymmetric cross-ply laminates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, pp. 4764-4779.
- Wittrick, W., Myers, D., and Blunden, W. (1962). Stability of a bimetallic disk. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 268 (1334), pp. 316–327.
- Wu, Y. (2014). Récupération d'énergie vibratoire large bande à partir de transducteurs piézoélectriques. *Thèse de doctorat*.
- Zhang, Z., Wu, H., Ye, G., Wu, H., He, X., and Chai, G. (2014). Systematic experimental and numerical study of bistable snap processes for anti-symmetric cylindrical shells. *Composite Structures*, vol. 112, pp. 368–377.



# Résumé

Ces travaux de thèse sont basés principalement sur le phénomène de multistabilité des structures minces de type plaques et coques ainsi que quelques applications associées.

Les travaux sont divisés en deux parties. La première partie a pour objet l'étude théorique, numérique et expérimentale de la multistabilité des coques minces orthotropes peu profondes à courbures uniformes. On montre notamment qu'une telle coque, lorsqu'elle est soumise à la combinaison d'une courbure initiale et d'une précontrainte suffisamment élevées, possède jusqu'à trois configurations stables vis-à-vis des propriétés matériaux. Dans un premier temps, nous proposons des critères de conception et fabrication de coques multistables allant jusqu'à la tristabilité, validés numériquement et expérimentalement. Ensuite, nous appliquons ces critères à la conception et à la fabrication de coques multistables cylindriques dont la différence de niveau énergétique entre les deux états stables est minime.

Sur ce support, la deuxième partie est consacrée à des applications exploitant la bistabilité des coques cylindriques minces à faible différence énergétique. Nous effectuons tout d'abord une application au contrôle de forme via l'utilisation de matériaux actifs que l'on attache à la structure. Cela comprend une première phase théorique de conception de la structure et de la loi d'actionnement, et une seconde phase de mise en œuvre expérimentale. Ensuite, nous étudions théoriquement et expérimentalement les propriétés de dynamique non-linéaire de ce type de coques dans le but de mettre en évidence les modes d'oscillations intrinsèques à une source d'excitation externe. Enfin, nous proposons une application à la récupération d'énergie vibratoire non-linéaire de coques multistables cylindriques métalliques par voie piézoélectrique.

**Mots-clés** : Multistabilité des coques, Critères de conception, Contrôle de forme, Dynamique non-linéaire, Récupération d'énergie.

---

## Abstract

This work is essentially based on the phenomenon of multistability of thin structures as plates and shells and some associated applications.

The work is divided in two parts. The first part aims to study theoretically, numerically and experimentally the multistability of thin orthotropic shallow shells with uniform curvature. We show notably that such a shell, when submitted to the combination of initial curvature and pre-stresses sufficiently high, possesses up to three stable states towards the choice of the material. First, we propose criteria to design and manufacture multistable shells up to tristability; this work is validated by finite element simulations and experiments. After, we apply those criteria to the design and manufacture of cylindrical multistable shells for which the energetic gap between stable states is minimal.

The second part is dedicated to direct applications of bistability of thin cylindrical bistable shells with low energetic gap. We first propose an application on shape control via the use of active materials which we bond on the structure. This includes a first phase of theoretical design of both the structure and the actuation law, and a second phase of experimental demonstration. After, we study both theoretically and experimentally the non-linear dynamic properties of such structures with the aim to highlight the different modes of oscillations intrinsic to an external excitation source. Finally, we propose an application to non-linear broadband energy harvesting from vibrations based on multistable piezoelectric excited shells.

**Keywords** : Multistability of shells, Design criteria, Shape control, Non-linear dynamics, Energy harvesting.