



**HAL**  
open science

# Comportement élasto-plastique incrémental des poudres ductiles : simulation de l'écoulement plastique par la méthode des éléments finis multi-particules

Nouha Abdelmoula

## ► To cite this version:

Nouha Abdelmoula. Comportement élasto-plastique incrémental des poudres ductiles : simulation de l'écoulement plastique par la méthode des éléments finis multi-particules. Matériaux. Université Grenoble Alpes, 2016. Français. NNT : 2016GREAI036 . tel-01523452

**HAL Id: tel-01523452**

**<https://theses.hal.science/tel-01523452>**

Submitted on 16 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### **DOCTEUR DE LA COMMUNAUTE UNIVERSITE GRENOBLE ALPES**

Spécialité : **Matériaux, Mécanique, Génie Civil,  
Electrochimie**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Nouha ABDELMOULA**

Thèse dirigée par **Pierre DOREMUS**

Codirigée par **Didier IMBAULT** et **Barthélémy HARTHONG**

préparée au sein du **Laboratoire 3SR**  
dans l'**École Doctorale IMEP2**

## **Comportement élasto-plastique incrémental des poudres ductiles: Simulation de l'écoulement plastique par la méthode des éléments finis multi- particules**

Thèse soutenue publiquement le **13/07/2016**,  
devant le jury composé de :

**Mr Pascal VILLARD**

Professeur, UMR 5521, 3SR, Président

**Mr Jean-Yves DELENNE**

Directeur de recherche, UMR 1208, INRA, Rapporteur

**Mr Abderrahim MICHRAFY**

Ingénieur de recherche, UMR 5302, RAPSODEE, Rapporteur

**Mr Philippe Boisse**

Professeur, UMR 5259, LaMCoS, Examineur

**Mr Christophe Desrayaud**

Professeur, UMR 5307, LGF, Examineur

**Mr Barthélémy HARTHONG**

Maître de conférences, UMR 5521, 3SR, Co-Encadrant de thèse

**Mr Didier IMBAULT**

Maître de conférences, UMR 5521, 3SR, Co-Encadrant de thèse



*À mes parents  
À ma soeur et mon frère  
À mon chéri, Moncef*



# Remerciement

Au terme de ce travail, c'est avec un grand plaisir que je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de cette thèse qui représente pour moi le fruit de trois ans de travail, échecs et réussites, tristesse et joie.

Je tiens à remercier mes chers encadrants : Pierre DORÉMUS, Didier IMBAULT et Barthélémy HARTHONG pour leur disponibilité, confiance, conseils, compétences et soutien durant cette thèse.

Je remercie également Mr Pascal VILLARD, Mr Jean-Yves DELENNE, Mr Abderrahim MICHRAFEY, Mr Philippe BOISSE et Mr Christophe DESRAYAUD pour avoir accepté de participer à la soutenance de thèse qui était très fructueuse et très riche en débat.

Je souhaiterais adresser ma gratitude aux personnels du laboratoire 3SR : directions, personnel technique, doctorants et amis pour tous les bons moments passés ensemble.

Un grand merci à toute ma famille de m'avoir soutenue bien avant et tout au long de la thèse : mon père, ma mère, ma soeur, mon frère et surtout mon mari Moncef. Je te remercie chéri, d'avoir été toujours à mes cotés et surtout pour tes encouragements.



# Résumé

Cette thèse concerne la modélisation du comportement mécanique de poudres ductiles au cours de leur mise en forme par le procédé de compression à froid. L'approche utilisée consiste à modéliser la poudre par un échantillon numérique de 50 particules sphériques distribuées aléatoirement. Chaque particule est maillée en éléments finis avec un comportement élastoplastique et interagit par contact avec ses voisines. Sous l'effet du chargement, les particules se déforment et subissent de grandes transformations.

La méthode développée consiste à imposer aux frontières de l'échantillon numérique des conditions aux limites en déplacement ou en force afin de simuler une réponse continue équivalente en termes de contrainte-déformation pour plusieurs chemins de chargement depuis les faibles valeurs de densité relative jusqu'aux fortes valeurs. Outre le fait que la méthode permet d'appliquer par la simulation des chemins de chargement inaccessibles aux techniques expérimentales, elle fournit de nombreuses indications sur la phénoménologie du comportement aux frontières de l'échantillon en relation avec la morphologie des particules déformées plastiquement et l'évolution des surfaces de contact inter-particules.

Cette réponse obtenue sera étudiée au moyen des notions de l'élastoplasticité classique, à savoir la surface de charge et la loi d'écoulement. L'accent est mis sur l'analyse de l'écoulement plastique et l'existence du potentiel plastique. Les résultats montrent que la direction d'écoulement est approximativement unique pour les états de contrainte éloignés du point de chargement. En revanche, la direction d'écoulement cesse d'être unique à proximité de point de chargement, ce qui révèle le caractère anisotrope de l'écrouissage. Ce comportement, propre aux poudres ductiles, est intimement lié à la déformation des grains. La dégradation anisotrope des propriétés mécaniques résultant du mécanisme de dilatance est également étudiée.

**Mots-Clefs :** Matériaux granulaires, Méthode des éléments finis, Élastoplasticité, Surface de charge, Loi d'écoulement, Dilatance



# Abstract

This thesis is concerned with the modelling of the mechanical behaviour of ductile powders during cold compaction process. A numerical method was implemented, in which a powder sample was assimilated to an assembly of 50 meshed particles in a cubic box which was submitted to compressive loadings simulated by means of the finite element method. Each particle was meshed and assigned an elastic-plastic constitutive behaviour. Particles interacted through mechanical, frictional contact and underwent large transformation during loading.

The method developed in the thesis consisted in imposing boundary conditions as displacements or forces on the bounding walls of the numerical sample. The mechanical response of the sample was averaged to obtain the equivalent response of a continuum in terms of stress and strain. Various loading paths, including loading paths that are technically not attainable by experimental means, were applied up to different values of relative densities, from low (60%) to high values (98%). Much information on the phenomenological behaviour of the numerical sample could be obtained, in relation with the morphology of deformed particles and the evolution of contact surfaces.

The results were interpreted based on the concepts of classical elasto-plasticity, i.e., yield surface and flow rule. The main focus of the study was the analysis of incremental plastic flow and the existence of a plastic potential. Results showed that the flow rule postulate, based in the plastic potential, could be considered as valid for stress states relatively far from the loading point. In the vicinity of the loading point, the direction of the plastic strain increment vector ceases to be unique. This behaviour, which is an original feature of ductile powders mechanical behaviour, was attributed to the anisotropic strain-hardening processes at stake, related to the anisotropic formation of contact surfaces between particles. The drop in mechanical properties related to dilatancy was also studied.

**Keywords :** Granular materials, Finite element method, Elasto-plasticity, Yield surface, Flow rule, Dilatancy



# Table des matières

Remerciement	iii
Résumé	v
Abstract	vii
Table des matières	ix
Notations et abréviations	xxiii
Introduction générale	1
<b>1 État de l'art.</b>	<b>5</b>
1.1 Procédé de la compression à froid. . . . .	6
1.1.1 La phase de compression. . . . .	6
1.1.2 Simulation numérique du procédé. . . . .	8
1.2 Modélisation d'un matériau granulaire. . . . .	10
1.2.1 Notions élémentaires d'élasto-plasticité. . . . .	10
1.2.2 Modèle de Drucker-Prager Cap. . . . .	16
1.3 Approches de caractérisation des poudres. . . . .	20
1.3.1 Approche expérimentale. . . . .	20
1.3.2 Approche multi-échelles. . . . .	29
1.3.3 Positionnement de la MEFMP par rapport à la DEM. . . . .	35
1.3.4 Validation expérimentale de la MEFMP. . . . .	38
1.3.5 Évolution de la surface de charge avec la MEFMP. . . . .	42
1.3.6 Conclusion. . . . .	47
<b>2 Protocole de simulation numérique.</b>	<b>51</b>
2.1 Introduction. . . . .	52
2.2 Modèle numérique. . . . .	53
2.2.1 Construction de l'échantillon numérique. . . . .	53

2.2.2	Obtention d'une surface de charge en pilotage en dé- formation. . . . .	57
2.2.3	Choix de l'empilement initial. . . . .	63
2.3	Simulation en contrainte. . . . .	69
2.3.1	Mise en place du pilotage en contrainte. . . . .	70
2.3.2	Étude de l'écoulement plastique. . . . .	73
2.4	Simulation en déformation. . . . .	78
2.4.1	Dissipation d'énergie en fonction de la direction de l'incrément de déformation totale pour un matériau à potentiel. . . . .	79
2.4.2	Test de validation : cas d'un matériau dense élasto- plastique de type Von Mises. . . . .	84
2.5	Conclusion. . . . .	88
<b>3</b>	<b>Résultats et analyse.</b>	<b>89</b>
3.1	Introduction. . . . .	90
3.2	Surfaces de charge. . . . .	90
3.2.1	Évolution de la surface de charge avec la densité. . . . .	91
3.2.2	Modification de la surface de charge lors d'un change- ment de direction du chemin de chargement. . . . .	93
3.3	Écoulement plastique. . . . .	100
3.3.1	Courbes enveloppes de déformation plastique. . . . .	101
3.3.2	Influence du chemin de chargement et de la densité relative. . . . .	105
3.3.3	Influence relative des énergies dissipées par plasticité et par frottement en fonction du chemin de chargement. . . . .	114
3.3.4	Influence du coefficient de frottement. . . . .	124
3.4	Chargement dilatant. . . . .	126
3.4.1	Contrainte-Déformation en chargement dilatant. . . . .	128
3.4.2	Surface de rupture. . . . .	130
3.4.3	Évolution de la surface de charge sous l'effet du phé- nomène de dilatance. . . . .	131
3.4.4	Conclusion. . . . .	137
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>138</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>142</b>

# Table des figures

1.1	Présentation du procédé de mise en forme. . . . .	6
1.2	Description des différentes étapes d'un cycle de compression à froid en matrice. . . . .	7
1.3	Intérêt de la simulation numérique au sein du processus d'industrialisation. La partie rouge correspond au processus qu'on veut l'éviter par le développement des nouvelles simulations numériques. . . . .	10
1.4	Schématisation du domaine élastique et de la surface de charge dans l'espace des contraintes principales. . . . .	12
1.5	Principe du travail plastique maximal : règle de normalité. . .	13
1.6	(a) Loi d'écoulement non associée. (b) Loi d'écoulement associée.	14
1.7	Schéma des différents types d'écrouissage. . . . .	16
1.8	Surface de charge et de rupture correspondant à la modélisation Drucker-Prager Cap. . . . .	18
1.9	Chargement couramment utilisés. (a) Compression hydrostatique. (b) Compression en matrice. . . . .	20
1.10	L'incapacité des surfaces de Drucker-Prager Cap à reproduire l'influence du chemin de chargement peut mener à des erreurs importantes sur les valeurs de contraintes ou de déformations calculées avec des chemins de chargements complexes. . . . .	20
1.11	Dispositif d'une machine de compression en matrice. . . . .	21
1.12	Schéma de la machine triaxial de révolution utilisée par Pavier [69]. . . . .	22
1.13	Évolutions monotones de différents trajets en simple charge au cours des essais de compression. Représentation des chemins de chargement dans le plan (p-q) des contraintes moyennes et déviatoires. (a) Traction. (b) Compression simple. (c) Compression triaxiale. (d) Compression en matrice. (e) Compression isotrope. . . . .	23

1.14	Composante axiale et radiale (a) de contraintes et (b) de déformations sur un comprimé de poudre dans le cas d'un chargement triaxial de révolution. . . . .	24
1.15	Méthode pour tracer la surface de charge : chargement initial, décharge élastique et recharge dans toutes les directions. . . .	24
1.16	Obtention de courbes isodensité. . . . .	25
1.17	Surfaces de charge obtenues par Akisanya et al.[4] pour une compression isotrope et en matrice, avec une poudre de cuivre à grains sphériques. La densité relative finale atteinte lors de ces deux chargements correspond à 0,8. . . . .	26
1.18	Courbes isodensité obtenues sur une poudre de fer par Pavier [69] suivant deux chargements : (a) essai normalement consolidé (chargement isotrope puis axial à pression constante); (b) essai surconsolidé (chargement isotrope, décharge puis recharge axiale à pression constante). La densité 7,2 correspond à une densité relative de 0,98. . . . .	27
1.19	(a) Vecteurs incrément de déformation obtenus par Pavier [69] pour des essais normalement consolidés. Les traits foncés correspondent aux segments perpendiculaires à ces incréments de déformation. (b) Segments de potentiels pour les essais surconsolidés et normalement consolidés obtenus par Pavier [69].	28
1.20	Empilement de particule en éléments discrets. . . . .	31
1.21	La limite des méthodes utilisées par Martin et al. [62] et Storåkers [86] à une densité relative de 0,8 par rapport aux résultats expérimentaux de James [49]. Cette figure est issue des travaux de Martin et al. [62] . . . . .	33
1.22	Particule discrétisée par des éléments finis hexaédriques est utilisée dans les simulations numérique par la MEFMP pour des grandes déformations. Cette figure est issue de la thèse de Jérier [51] . . . . .	35
1.23	Comparaison des contraintes macroscopiques sur l'échantillon de 32 sphères en compression isotrope avec les méthodes MEFMP et MED [42]. . . . .	37
1.24	Illustration du contact entre la méthode des éléments discrets et la méthode des éléments finis multi-particules. Cette figure est issue de la thèse de Harthong [42]. . . . .	39
1.25	Ajustement des paramètres du matériau sur un essai de compression simple homogène d'un échantillon cylindrique de plomb [16]. . . . .	40

1.26 Comparaison d’une simulation MEFMP avec l’expérience [16] pour une particule et 9 particules. (a) Empilement maillé. (b) Empilement déformé pour une densité relative de 0,97. (c) Empilement déformé expérimentalement pour une densité relative de 0,97. . . . . 41

1.27 Comparaison des résultats des simulations et des données expérimentales de Chen [16] pour une compression de 9 particules dans une matrice cylindrique. Pour la simulation, des coefficients de frottement de 0,25 entre les particules et la matrice et 0,1 entre les particules ont été appliqués. . . . . 42

1.28 Comparaison entre les résultats des simulations et les données expérimentales pour une compression en matrice cylindrique d’un empilement de 150 particules de plomb de trois tailles différentes [16]. . . . . 43

1.29 Résultats obtenus par Harthong [42] : (a) Empilement monodisperse de 15 particules. Évolution des surfaces de charge avec différentes valeurs de densité relative pour deux chargements monotones : (b) Compression isotrope, (c) Compression en matrice. La ligne en pointillé est le chemin de charge/décharge initial. (d) Comparaison entre le résultat de Harthong [43] pour une compression en matrice à  $D_f = 0,8$  et les résultats : expérimentaux de Schneider et Cocks [80], analytiques de Storåkers [86] et MED de Martin [60] pour des poudres sphériques. Les surfaces de charge sont normalisées par  $p_y$  qui est la pression moyenne au point de chargement. . . . . 44

1.30 Chemins de chargement utilisés pour obtenir des surfaces de charge. (a) Isotrope-déviatoire : compression isotrope suivie du chemin déviatoire. (b) Matrice-déviatoire : compression en matrice suivie du chemin déviatoire. (c) Déviatoire : chemin déviatoire monotone, sans compression préalable.  $D_1$  correspond à la densité relative intermédiaire du point de chargement intermédiaire ( $M_1$ ).  $D_f$  correspond à la densité relative finale du point de chargement final ( $M_f$ ). Les petites figures avec des flèches indiquent le déplacement des parois pour chaque chemin de chargement [42]. . . . . 45

1.31	Évolution des surfaces de charge avec différentes densités relatives intermédiaires $D_1 = 0,6$ et $0,9$ pour (a) et (b) chargement isotrope-déviatoire et (c) et (d) chargement matrice-déviatoire. Les nombres indiquent la densité relative finale $D_f$ pour chaque surface. La surface en pointillés gris est la surface de charge qui correspond à la première partie du chargement isotrope déviatoire (c'est-à-dire la compression isotrope jusqu'à la densité relative $D_1$ ). Les chemins de chargement associés sont également représentés (lignes avec flèches)[43]. . . . .	46
1.32	Courbes isodensités (en pointillés) et potentielles (continues) obtenues pour une poudre de fer par Pavier [69] pour un essai normalement consolidé. La densité de $7,2 \text{ g/cm}^3$ correspond à une densité relative de $0,98$ . . . . .	49
2.1	Boite cubique entourée de six parois rigides. . . . .	54
2.2	C3D10M : élément quadratique tétraédrique [2]. . . . .	54
2.3	Particule discrétisée par des éléments tétraédriques : (a) essai isotrope, (b) essai en matrice. . . . .	55
2.4	Description de la méthode <i>General contact interactions</i> . . . . .	57
2.5	Les différents chemins de chargement classique : (a) Compression isotrope, (b) Compression en matrice. . . . .	58
2.6	Méthode d'obtention d'une surface de charge. (a) Charge, (b) Décharge élastique, (c) Recharge élasto-plastique : Chemins de déformations appliqués. (d) Charge, (e) Décharge et (f) Recharge : Réponses en contrainte. . . . .	59
2.7	Évolution de l'énergie dissipée pendant la détermination de la surface de charge : (a) Charge, (b) Décharge et (c) Recharge. . . . .	62
2.8	(a) Empilement de 50 particules non déformé : (b) après compression isotrope, (c) après compression en matrice avec la MEFMP. . . . .	64
2.9	Avant et après une compression isotrope d'un empilement de : (a) 50 particules, (b) 15 particules et (c) 9 particules. . . . .	66
2.10	Influence du nombre de particules sur les surfaces de charge pour trois empilements différents : 9, 15 et 50 particules avec une densité relative finale $D_f = 0,9$ pour une compression : (a) isotrope et une compression (b) en matrice. Les lignes pointillées correspondent à la première charge/décharge. . . . .	67
2.11	Avant et après une compression en matrice pour un empilement de (a) 50 particules, (b) 350 particules et (c) 1000 particules jusqu'à une densité relative finale $D_f = 0,9$ . . . . .	68

2.12	Influence du nombre de particules sur les surfaces de charge pour trois empilements différents : 50, 350 et 1000 particules avec une densité relative finale $D_f = 0,9$ pour une compression en matrice. . . . .	69
2.13	Différence de maillage utilisé pour une compression en matrice entre trois empilements différents : (a) 50 particules (3278 éléments/particule), (b) 350 particules (442 éléments/particule) et (c) 1000 particules (150 éléments/particule). . . . .	69
2.14	Méthode d'obtention d'une surface de charge avec un pilotage en déformation : (a) Charge, (b) Décharge élastique et un pilotage en contrainte : (c) Stabilisation et (d) Recharge élasto-plastique . . . . .	72
2.15	Recharges élasto-plastique dans toutes les directions pour obtenir la surface de charge avec un pilotage en contrainte. (a) Première recharge, (b) Deuxième recharge. . . . .	72
2.16	Surfaces de charge dans le plan contrainte déviatoire-contrainte moyenne avec les deux types de pilotage : en contrainte et en déformation pour un empilement de 50 particules avec une densité relative finale de 0,98 et pour une compression isotrope. . . . .	74
2.17	Identification de la zone où il n'est pas possible de maintenir l'équilibre statique. . . . .	75
2.18	Méthode utilisée pour détecter le potentiel plastique. Sollicitation en contrainte : (a) Une recharge à l'aide d'une série d'incrément de contrainte $d\sigma$ , (b) Une décharge jusqu'à un état de contrainte donné. (c) Réponse du matériau . . . . .	76
2.19	Courbes enveloppe de déformation plastique. (a) Réponse conforme à loi d'écoulement plastique. (b) Réponse dans le cas où l'équation de l'écoulement plastique n'est pas valide. . . . .	77
2.20	Méthode utilisée pour détecter le potentiel plastique. (a) Sollicitation en déformation à l'aide d'une série d'incrément de déformation $d\epsilon$ . (b) Réponse du matériau. . . . .	78
2.21	Schématisation de l'ensemble des points qui définissent le vecteur d'énergie dissipée. $f$ correspond à la surface de charge et $g$ correspond à la surface iso-potentielle. . . . .	82
2.22	Schématisation de la réponse d'un matériau élasto-plastique à potentiel dans un plan axisymétrique. . . . .	83
2.23	Modèle de Von Mises modélisé par cube maillé de dimensions 1 x 1 x 1 (mm). . . . .	84

2.24	Essai de compression à volume constant réalisé sur un échantillon cubique de dimension 1 x 1 x 1 (mm). Les flèches suivant les directions Y et Z correspondent à une traction et les flèches suivant la direction X correspondent à une compression. . . . .	85
2.25	Réponse numérique d'un matériau dense de type Von Mises. (a) Réponse en contrainte de Von Mises à la fin de la compression à volume constant de l'échantillon numérique. (b) Courbe contrainte de Von Mises/Déformation totale. $\sigma_0$ , $\sigma_{VM}$ et $\varepsilon_X$ correspondent respectivement à la limite d'élasticité, contrainte de Von Mises en fin d'essai et la déformation totale ( $\varepsilon_X = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl}$ ). . . . .	86
2.26	Réponse de l'échantillon numérique en énergie dissipée d'un matériau dense élasto-plastique de type Von Mises représentée dans un repère de coordonnées polaire. . . . .	87
3.1	Évolution des surfaces de charge d'une valeur initiale de densité relative $D_i = 0,45$ aux différentes valeurs $D_f = 0,6; 0,7; 0,9$ et $0,98$ , avec deux chargements monotones : (a) compression isotrope et (b) compression en matrice. Les lignes en pointillées correspondent au chemin de chargement. . . . .	92
3.2	Un zoom sur l'évolution des surfaces de charge de $D_f = 0,6$ et $D_f = 0,7$ pour les deux chargements monotones : (a) compression isotrope et (b) compression en matrice. . . . .	93
3.3	Évolution de la surface de charge avec le chemin du chargement : (a) Compression isotrope suivie du chemin déviatoire. (b) Compression en matrice suivie du chemin déviatoire. (c) Chemin déviatoire monotone sans compression préalable effectué pour faire des comparaisons. (d) Évolution des surfaces de charge pour le chargement isotrope-déviatoire avec une densité relative intermédiaire $D_1 = 0,6$ . (e) Modification des surfaces de charge sous l'effet d'une déformation plastique de faible amplitude ( $D_f - D_1 = 0,03$ ) le long du chemin déviatoire à faible densité relative ( $D_1 = 0,6$ ). Les nombres indiquent les densités relatives finales $D_f$ . Les surfaces modifiées sont représentées en noir et les surfaces initiales sont représentées en gris : (d) chargement en matrice, (e) chargement isotrope. Résultats obtenus par Harthong [42]. . . . .	94

3.4	Méthode pour obtenir des surfaces de charge associées à plusieurs chemins de chargement. (a) Compression isotrope : charge/décharge. (b) Recharge dans toutes les directions afin de détecter les points de la surface de charge. (c) Recharge élasto-plastique dans deux directions différentes dans l'espace des contraintes puis décharge élastique jusqu'à un état de contrainte très faible. (d) Recharge dans toutes les directions. . . . .	96
3.5	Évolution des surfaces de charge pour un chargement décrit sur la figure 3.4. La surface en vert est la surface de charge qui correspond au premier chargement isotrope jusqu'à une densité relative finale $D_f = 0,6$ . . . . .	97
3.6	(a) Identification du mécanisme d'écroutissage positif. (b) Identification du mécanisme d'écroutissage positif et négatif. (1) Surface de charge correspond au chargement monotone. (2) Surface de charge correspond au chargement AB. (3) Surface de charge correspond au chargement AB'. . . . .	98
3.7	Des pertes de contact détectées dans l'empilement après des recharges élasto-plastiques afin de détecter la surface de charge	100
3.8	(a) Courbe enveloppe dans le plan déformation déviatoire-déformation volumique. (b) Courbe enveloppe associée à un plan de la surface de charge tracée dans le plan déformation déviatoire-déformation volumique qui est superposé avec le plan contrainte déviatoire-contrainte moyenne. . . . .	101
3.9	Courbes enveloppes associées à quelques points de la surface de charge d'un empilement de 50 particules comprimé suivant un chemin de chargement isotrope jusqu'à $D_f = 0,9$ . . . . .	102
3.10	Représentation de la courbe enveloppe de déformation plastique correspond au point D de la figure 3.9 dans le plan déviatoire. . . . .	105
3.11	Courbes enveloppes associées à quelques points de la surface de charge d'un empilement de 50 particules. (a) et (b) Compression isotrope, (c) et (d) compression en matrice jusqu'à une densité relative finale $D = 0,9$ . (b) et (d) Courbes enveloppes normalisées. Les lignes en pointillées correspondent à la première charge. . . . .	107
3.12	Courbes enveloppes associées à quelques points de la surface de charge d'un empilement de 50 particules. (a) et (b) Compression isotrope, (c) et (d) compression en matrice jusqu'à une densité relative finale $D_f = 0,7$ . (b) et (d) Courbes enveloppes normalisées. Les lignes en pointillées correspondent à la première charge. . . . .	108

3.13	Courbes enveloppes associées à quelques points de la surface de charge d'un empilement de 50 particules. (a) et (b) Compression isotrope, (c) et (d) compression en matrice jusqu'à une densité relative finale $D_f = 0,6$ . (b) et (d) Courbes enveloppes normalisées. Les lignes en pointillées correspondent à la première charge. . . . .	109
3.14	Phénomène de la dilatance lié au déplacement des particules. .	110
3.15	Zoom sur deux courbes enveloppes associées à deux points de la surface de charge d'un empilement de 50 particules soumis à une compression en matrice jusqu'à $D = 0,9$ afin d'identifier la direction de l'écoulement plastique. . . . .	111
3.16	Méthode d'obtention des courbes enveloppes par un (a) pilotage en contrainte et (b) pilotage en déformation. . . . .	115
3.17	Courbes enveloppes des énergies dissipées (unité arbitraire) pour un empilement de 50 particules qui est soumis à une compression isotrope jusqu'à une densité relative $D_f = 0,9$ . (a) : Dissipation de l'énergie par frottement. (b) : Dissipation d'énergie plastique. L'échelle correspondant à l'énergie dissipée est arbitraire mais identique pour (a) et (b). . . . .	116
3.18	Courbes enveloppes des énergies dissipées (unité arbitraire) pour un empilement de 50 particules qui est soumis à une compression isotrope jusqu'à des densités relatives $D_f = 0,7$ et $0,6$ . (a), (c) : Dissipation de l'énergie par frottement. (b), (d) : Dissipation d'énergie plastique. L'échelle correspondant à l'énergie dissipée est arbitraire mais identique entre (a) et (b) d'une part, (c) et (d) d'autre part. . . . .	117
3.19	Courbes enveloppes des énergies dissipées (unité arbitraire) pour un empilement de 50 particules qui est soumis à une compression en matrice jusqu'à une densité relative $D_f = 0,9$ . (a) : Dissipation de l'énergie par frottement. (b) : Dissipation d'énergie plastique. L'échelle correspondant à l'énergie dissipée est arbitraire mais identique pour (a) et (b). . . . .	118
3.20	Courbes enveloppes des énergies dissipées (unité arbitraire) pour un empilement de 50 particules qui est soumis à une compression en matrice jusqu'à des densités relatives $D_f = 0,7$ et $0,6$ . (a), (c) : Dissipation de l'énergie par frottement. (b), (d) : Dissipation d'énergie plastique. L'échelle correspondant à l'énergie dissipée est arbitraire mais identique entre (a) et (b) d'une part, (c) et (d) d'autre part. . . . .	119

- 3.21 Courbes enveloppes des énergies dissipées (unité arbitraire) pour un empilement de 50 particules qui est soumis à une compression isotrope jusqu'à des densités relative  $D_f = 0,98$  et  $0,7$  et qui est piloté en déformation. (a) et (c) : Dissipation de l'énergie par frottement. (b) et (d) : Dissipation d'énergie plastique. L'échelle correspondant à l'énergie dissipée est arbitraire mais identiques entre (a) et (b) d'une part, (c) et (d) d'autre part. . . . . 120
- 3.22 Courbes enveloppes des énergies dissipées totales pour un empilement de 50 particules qui est soumis à une compression isotrope jusqu'à des densités relative : (a)  $D_f = 0,98$  et (b)  $D_f = 0,7$  et qui est piloté en déformation. . . . . 121
- 3.23 Évolution schématique de la surface de charge en fonction de la densité relative finale  $D_f$ . Les traits en pointillés correspondent à la surface de rupture (cf. paragraphe 3.4.2). . . . . 122
- 3.24 Les chiffres correspondent au rapport  $\frac{E_f}{E_p}$  pour le cas d'une compression : (a), (c) et (e) isotrope et (b), (d) et (f) en matrice jusqu'à des densités relatives  $D_f = 0,9$  ;  $0,7$  et  $0,6$ . . . . . 123
- 3.25 Évolution de la surface de charge en fonction du coefficient de frottement ( $f = 0,1$  et  $f = 0,5$ ) pour un empilement de 50 particules qui est soumis à une compression isotrope jusqu'à une densité relative finale  $D_f = 0,6$ . Les lignes pointillées correspondent au chemin de chargement. . . . . 125
- 3.26 Courbes enveloppes associées à quelques points de la surface de charge d'un empilement de 50 particules qui est comprimée suivant un chemin de chargement isotrope jusqu'à  $D_f = 0,6$  et avec un coefficient de frottement  $f = 0,5$ . (a) Courbes enveloppes non normalisées. (b) Courbes enveloppes normalisées. 125
- 3.27 Courbes enveloppes des énergies dissipées (unité arbitraire) par une compression isotrope jusqu'à la densité relative finale  $D_f = 0,6$  avec un coefficient de frottement égal à  $0,5$ . (a) Dissipée par frottement. (b) Dissipation plastique. L'échelle correspondant à l'énergie dissipée est arbitraire mais identique pour (a) et (b). . . . . 127
- 3.28 Les chiffres correspondent au rapport  $\frac{E_f}{E_p}$  pour le cas d'une compression isotrope jusqu'à des densités relatives  $D_f = 0,6$  et avec un coefficient de frottement : (a)  $f = 0,1$  ; (b)  $f = 0,5$ . 127

3.29	(a) Évolution de la contrainte déviatoire ( $\bar{q}$ ) en fonction de la contrainte moyenne ( $\bar{p}$ ). (b) Évolution de la contrainte déviatoire ( $\bar{q}$ ) en fonction de la déformation déviatoire ( $\bar{\varepsilon}_d$ ). (c) Évolution de la déformation volumique ( $\bar{\varepsilon}_v$ ) en fonction de la déformation déviatoire ( $\bar{\varepsilon}_d$ ). Les traits pointillés en bleu correspondent à la réapparition de la plasticité quand $E_d$ atteint 0,3% de la valeur de $E_d^0$ (cf. paragraphe 2.2.2 du Chapitre 2). Les points noirs correspondent au point de plasticité. . . . .	129
3.30	Allure de l'énergie cinétique pour un chemin de recharge avec différentes valeurs du critère de rupture $\psi$ . . . . .	131
3.31	En vert la surface de charge d'un empilement de 50 particules comprimé suivant un chargement isotrope jusqu'à $D_f = 0,9$ . En bleu quelques chemins de recharge balayant l'espace de contrainte pour détecter la surface de rupture (les points en noirs correspondent à $\psi = 0,1\%$ ). . . . .	132
3.32	Différentes surfaces de rupture pour 3 valeurs seuil différentes (0,1 %; 0,01% et 0,001%). . . . .	133
3.33	La surface verte correspond à la surface de charge d'un empilement de 50 particules avec $D_f = 0,9$ pour une compression isotrope. La surface noire correspond à la surface de rupture avec une valeur seuil de 0,1%. . . . .	134
3.34	(1) Géométrie déformée de l'empilement au niveau de la surface de charge. (2) Structure créée au niveau de la rupture avec l'apparition de quelques pertes de contact. (3) Géométrie déformée qui perd l'équilibre statique. . . . .	135
3.35	Effet de la dilatance sur les modèles de : (a) "Cap" et (b) "Cam-Clay". . . . .	135
3.36	Méthode sur l'évolution de la surface de charge sous un chargement dilatant. (a) Compression isotrope suivie d'un chemin de recharge pour obtenir le point de la surface de charge pour une densité relative $D_f = 0,9$ . Le point C correspond au point de la surface de charge. (b) Une décharge élastique appliquée sur l'empilement jusqu'à le point A. (c) Recharge dans toutes les directions pour obtenir la nouvelle surface de charge. . . . .	136
3.37	Évolution des surfaces de charge avec différentes amplitudes de recharge (100%, 97% et 90% du trajet AC qui est décrit dans la figure 3.36). . . . .	137

# Liste des tableaux

2.1	Paramètres matériau utilisés. . . . .	56
2.2	Ordre de grandeur des temps du calcul avec 4 CPU. . . . .	63
2.3	Valeurs de rapport de taille, densités relative initiales $D_0$ et nombre d'éléments par particule pour cinq empilements différents qui vont subir une compression en matrice jusqu'à une densité relative finale $D_f = 0,9$ . . . . .	66
2.4	Les conditions aux limites appliquées sur l'échantillon cubique plein suivant les trois directions (X, Y et Z). . . . .	85
3.1	Les valeurs de $d\sigma$ pour la surface de charge correspond à une compression isotrope jusqu'à la densité relative $D_f = 0,9$ (figure 3.9). . . . .	103
3.2	Les valeurs de $d\sigma$ pour $D_f = 0,9$ (figure 3.11). . . . .	106
3.3	Les valeurs de $d\sigma$ pour $D_f = 0,7$ (figure 3.12). . . . .	106
3.4	Les valeurs de $d\sigma$ pour $D_f = 0,6$ (figure 3.13). . . . .	106



# Notations et abréviations

$\varepsilon_i$	Déformation principale du tenseur de déformation de Henky, relative à la direction $i$ ( $i = 1,2,3$ )
$\varepsilon_v$	Déformation volumique
$\varepsilon_d$	Déformation déviatoire
$\bar{\varepsilon}_v$	Premier invariant de déformation correspond à la déformation volumique cf. Chapitre 2, équation (2.7)
$\bar{\varepsilon}_d$	Deuxième invariant de déformation correspond à la déformation volumique cf. Chapitre 2, équation (2.8)
$\boldsymbol{\varepsilon}_v^{pl}$	Tenseur de déformation volumique plastique
$\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$	Taux de déformation plastique
$d\boldsymbol{\varepsilon}$	Tenseur incrément de déformation totale
$d\varepsilon_{ij}$	Composante (i, j) du tenseur incrément de déformation
$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$	Tenseur incrément de déformation plastique
$d\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$	Tenseur incrément de déformation élastique
$d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{pl}$	Tenseur incrément de déformation volumique plastique
$d\varepsilon$	Norme de l'incrément de déformation totale
$d\varepsilon^{pl}$	Norme de l'incrément de déformation plastique
$d\varepsilon^{el}$	Norme de l'incrément de déformation élastique
$\overrightarrow{d\varepsilon}$	Vecteur incrément de déformation totale en notation de Voigt
$\overrightarrow{d\varepsilon}^{pl}$	Vecteur incrément de déformation plastique en notation de Voigt
$\overrightarrow{d\varepsilon}^{el}$	Vecteur incrément de déformation élastique en notation de Voigt
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur de contraintes de Cauchy
$\sigma_i$	Contrainte principale du tenseur de contraintes de Cauchy, relative à la direction $i$ ( $i = 1,2,3$ )
$\boldsymbol{\sigma}^*$	Tenseur des contraintes admissibles
$\boldsymbol{\sigma}_0$	État de contrainte sur la surface de charge
$\sigma_0$	Limite élastique initiale et qui est égale à 5MPa
$\sigma_y$	Limite élastique courante

	cf. Chapitre 2, équation (2.1)
$\sigma_r$	Contrainte radiale
$\sigma_z$	Contrainte axiale
$\sigma_{VM}$	Contrainte de Von Mises
$d\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur incrément de contrainte
$d\sigma$	Norme de l'incrément de contrainte
$\vec{\sigma}$	Vecteur représentatif du tenseur de contrainte en notation de Voigt
$p$	Pression moyenne
	cf. Chapitre 1, équations (1.6) et (1.12)
$q$	Contrainte déviatoire
	cf. Chapitre 1, équations (1.10) et (1.13)
$\bar{p}$	Premier invariant de contrainte correspond à la contrainte moyenne
	cf. Chapitre 2, équation (2.5)
$\bar{q}$	Deuxième invariant de contrainte correspond à la contrainte déviatoire
	cf. Chapitre 2, équations (2.6)
$\mathbf{s}$	Tenseur de la contrainte déviatoire
$I_1$	Premier invariant des contraintes principales
$J_2$	Second invariant du tenseur déviatoire
$\mathbf{v}$	Vitesse relative de deux surfaces en contact
$\boldsymbol{\tau}_f$	Effort surfacique de frottement
$\lambda$	Multiplicateur plastique
$X$	Variation d'écrouissage
$K$	Paramètre relatif à l'écrouissage : multiplicateur du matériau
$n$	Paramètre relatif à l'écrouissage : exposant de l'écrouissage
$d$	Paramètre du matériau, équivalent à la cohésion du modèle de Drucker-Prager Cap
$\beta$	Paramètre du matériau, équivalent à l'angle de la droite de rupture du modèle de Drucker-Prager Cap
$P_b$	La fonction d'écrouissage du modèle de Drucker-Prager Cap
$D$	Densité relative globale d'un empilement aléatoire ou d'un massif de poudre
$E$	Module de Young
$\nu$	Coefficient de Poisson
$X_i$	Direction principale de déformation $i$ ( $i = 1,2,3$ )
$l_{i0}$	Dimension initiale de l'empilement dans la direction $X_i$ .
$l_i$	Dimension finale de l'empilement dans la direction $X_i$
$E_d$	Énergie volumique dissipée
$E_d^0$	Énergie volumique dissipée atteinte lors du premier chargement

$dE_d$	Incrément d'énergie volumique dissipée
$E_f$	Énergie volumique dissipée par frottement
$E_p$	Énergie volumique dissipée par frottement
$dE_p$	Incrément de dissipation plastique
$E_c$	Énergie cinétique
$t$	Temps
$V$	Volume de l'empilement
$F$	Force
$dF$	Incrément de la force $F$
$du$	Incrément de déplacement
$\alpha$	Angle que fait l'incrément de contrainte avec la normale
$\theta$	Angle que fait l'incrément de déformation totale avec la normale
$\psi$	Critère de rupture : rapport entre $E_c$ et $E_d$
$\vec{n}$	Vecteur unitaire, normal à la surface iso-potentielle
$\vec{\delta}$	Vecteur unitaire définissant la direction des incréments de déformation totale
$R$	Un scalaire
<b>MED</b>	Méthode des éléments discrets
<b>MEFMP</b>	Méthode des éléments finis multi-particules



# Introduction générale

Cette thèse s'inscrit comme une contribution au développement de modèles numériques pour une description quantitative précise du comportement mécanique des poudres métalliques ductiles lors de leur mise en forme par compression à froid. Dans ce but, une approche discrète, est développée, permettant de retrouver le comportement mécanique d'un matériau constitué d'un grand nombre de grains à partir du comportement d'un grain.

Les modèles continus généralement employés pour les simulations numériques pour des applications industrielles sont issus de la mécanique des sols et correspondent à une approche macroscopique pour aborder la description du comportement. À ce jour, la plupart des études menées dans le domaine de la simulation numérique ont montré les faiblesses de l'approche expérimentale surtout au niveau des problèmes d'écoulements granulaires à cause du nombre limité de chemins de chargement auxquelles donne accès.

C'est pourquoi, actuellement, l'approche discrète est considérée comme la meilleure alternative par rapport à l'approche expérimentale afin d'obtenir des informations pour la formulation d'un modèle continu pour les poudres ductiles à travers l'accès à un grand nombre de chemin de chargement.

Parmi les approches discrètes développées dans les derniers années dans le domaine de la compression à froid, on trouve la méthode des éléments discrets (MED). Cette méthode a été introduite dans un premier temps pour la modélisation des milieux granulaires dans les domaines de la géomécanique et de l'écoulement granulaire, puis dans un deuxième temps elle a été appliquée à des matériaux en poudre dures et ductiles. Cependant, cette approche ne permet pas de décrire les grandes déformations subies par les particules lors de la compression parce qu'elle suppose que les grains sont rigides.

La démarche mise en place dans cette thèse consiste à étudier au moyen d'une méthode de simulation numérique discrète avec des particules maillées

en éléments finis (méthode des éléments finis multi-particules MEFMP), les grandes amplitudes de déformation transformant les sphères de l'échantillon en polyèdres imbriqués tout en tenant compte des interactions intra-particules et inter-particules.

Au cours du procédé de mise en forme, les poudres subissent de grandes déformations accompagnées d'une densification importante ce qui entraîne l'apparition de défauts dans certaines pièces. Ces défauts peuvent survenir à la suite d'un chargement déviatoire appliqué sur des zones singulières de pièces à la géométrie complexe. Comme le comportement mécanique des poudres métalliques est très complexe, les méthodes analytiques sont insuffisantes. Par ailleurs, la modélisation du procédé de mise en forme par compression de ces matériaux est devenue une nécessité dans le contexte industriel actuel.

Cette thèse fait suite aux travaux réalisés par Yuan Chen [16] et Barthélémy Harthong [42] avec la MEFMP. Les travaux de Yuan Chen concernent la mise en place et la validation de cette méthode sur la base des résultats expérimentaux. Ensuite les travaux de Barthélémy Harthong sont fondés sur l'étude du comportement macroscopique des milieux granulaires à partir de l'analyse des mécanismes d'écroutissage et de la microstructure granulaire.

A partir de cette thèse, la méthode de simulation discrète maillée (MEFMP) est appliquée afin de caractériser l'écoulement plastique dans les domaines des poudres métalliques ductiles en vue de l'écriture d'une loi d'écoulement adaptée à ces matériaux.

Le travail de ce mémoire est organisé en trois chapitres.

Le Chapitre 1 a pour objectif de positionner le cadre de ce travail de thèse. Une brève description du contexte industriel de la métallurgie des poudres est effectuée. Ensuite, les notions de base de l'élasto-plasticité tels que la surface de charge, la loi d'écoulement (qui sera principalement l'objet de cette étude) et l'écroutissage seront rappelées. Par ailleurs, le modèle de comportement Drucker-Prager Cap qui est généralement utilisé en simulation numérique dans l'industrie des poudres sera présenté. Dans un deuxième temps, une analyse critique des différentes approches expérimentales et numériques (continue et discrète) utilisées à ce jour pour caractériser le comportement mécaniques des poudres ductiles lors de la densification est réalisé. Cette analyse sera faite de façon approfondie en rappelant notamment les résultats expérimentaux obtenus par Yuan Chen [16], Edith Pavier [69] et numériques

obtenus par Barthélémy Harthong [42]. Ce Chapitre 1 prend ainsi la forme d'un état de l'art qui permettra de mettre en avant l'approche numérique par éléments discrets maillées (MEFMP) pour étudier le comportement mécanique à haute densité relative des poudres ductiles.

Le Chapitre 2 décrit l'application de la méthode de simulation par éléments finis sur un échantillon comprenant un certain nombre de particules sphériques maillées pour simuler les déformations élasto-plastiques de grandes amplitudes. Cette méthode permet d'étudier qualitativement les surfaces de charge et l'écoulement plastique. Plus précisément, une description détaillée des différents protocoles de simulation (en imposant aux frontières de l'empilement numérique des conditions en déplacement ou en force) pour obtenir le vecteur écoulement plastique (réponse en énergie dissipée ou en déformation plastique) pour les poudres ductiles sera évoquée. Ce deuxième Chapitre met un accent particulier sur une méthode basée sur le pilotage en contrainte des conditions aux limites qui nous a offert la possibilité de séparer l'incrément de déformation plastique et l'incrément de déformation élastique au moyen d'un cycle de charge/décharge.

Le Chapitre 3 réunira tous les éléments de validation et les résultats issus du modèle numérique. Tout d'abord des résultats concernant la caractérisation des surfaces de charge des poudres métalliques avec la densité relative et les mécanismes de rotation de ces surfaces lors d'un changement de direction de chargement seront présentés. Ensuite, une étude du comportement incrémental des poudres métalliques ductiles à travers la méthode des éléments finis multi-particules pour vérifier l'existence d'une loi d'écoulement sera développée. Finalement, le comportement des poudres ductiles soumises à un chargement dilatant est observé lors de l'étude de l'écoulement plastique explorées.



# Chapitre 1

---

## État de l'art.

*Dans ce chapitre, on présente le procédé de compression-frittage de poudres métalliques et les notions élémentaires du comportement mécanique de ces poudres ductiles. Les différentes méthodes possibles de la caractérisation du comportement du matériau (approche expérimentale et approche multi-échelle) sont décrites au travers de résultats tirés de la littérature afin de choisir la méthode de simulation la mieux adaptée. Ces résultats soulignent l'intérêt de l'approche discrète pour décrire le comportement mécanique d'un matériau constitué d'un grand nombre de grains à haute densité relative à partir du comportement d'un grain.*

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Procédé de la compression à froid.</b>	<b>6</b>
1.1.1	La phase de compression.	6
1.1.2	Simulation numérique du procédé.	8
<b>1.2</b>	<b>Modélisation d'un matériau granulaire.</b>	<b>10</b>
1.2.1	Notions élémentaires d'élasto-plasticité.	10
1.2.2	Modèle de Drucker-Prager Cap.	16
<b>1.3</b>	<b>Approches de caractérisation des poudres.</b>	<b>20</b>
1.3.1	Approche expérimentale.	20
1.3.2	Approche multi-échelles.	29
1.3.3	Positionnement de la MEFMP par rapport à la DEM.	35
1.3.4	Validation expérimentale de la MEFMP.	38
1.3.5	Évolution de la surface de charge avec la MEFMP.	42
1.3.6	Conclusion.	47

---

## 1.1 Généralités sur le procédé de compression à froid.

### 1.1.1 La phase de compression.

Pendant les dernières décennies, les procédés de mise en forme de pièces à partir de poudres métalliques ont rencontré un succès croissant dans plusieurs secteurs industriels tels que l'automobile, l'aérospatial, l'énergie... L'un des intérêts majeurs de ces procédés est de pouvoir obtenir des pièces de formes assez complexes et qui sont directement utilisables sans usinage supplémentaire et sans perte de matière première. Parmi les procédés de la mise en forme des poudres métalliques, on s'intéresse dans cette étude à la compression à froid des poudres industrielles. Les étapes de mise en forme (figure 1.1) pour obtenir une pièce de qualité sont le mélange des poudres afin d'obtenir la composition chimique souhaitée ; la compression à froid où le mélange est comprimé au sein d'une matrice et qui donne à la pièce sa forme finale ou presque ; puis le frittage où la pièce est chauffée à une température inférieure à la température de fusion des constituants de la poudre, ce qui lui confère sa résistance finale.

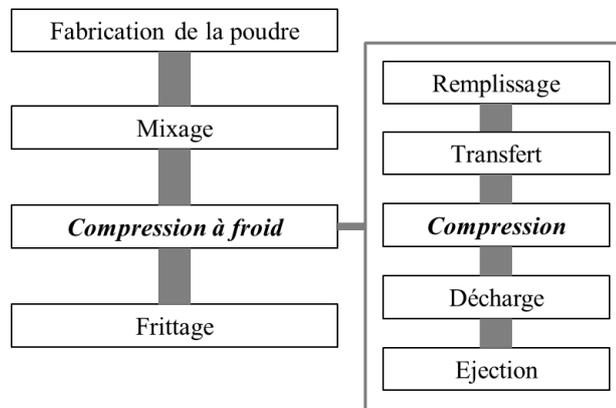


FIGURE 1.1 – Présentation du procédé de mise en forme.

La compression à froid se décompose en cinq phases : le remplissage, le transfert, la compression, la décharge axiale et finalement l'éjection de la pièce. Lors du remplissage (figure 1.2.a), la poudre est acheminée au sein d'une matrice puis arasée à l'aide d'un sabot. La phase suivante, nommée transfert de la poudre (figure 1.2.b), consiste à mettre en position les diffé-

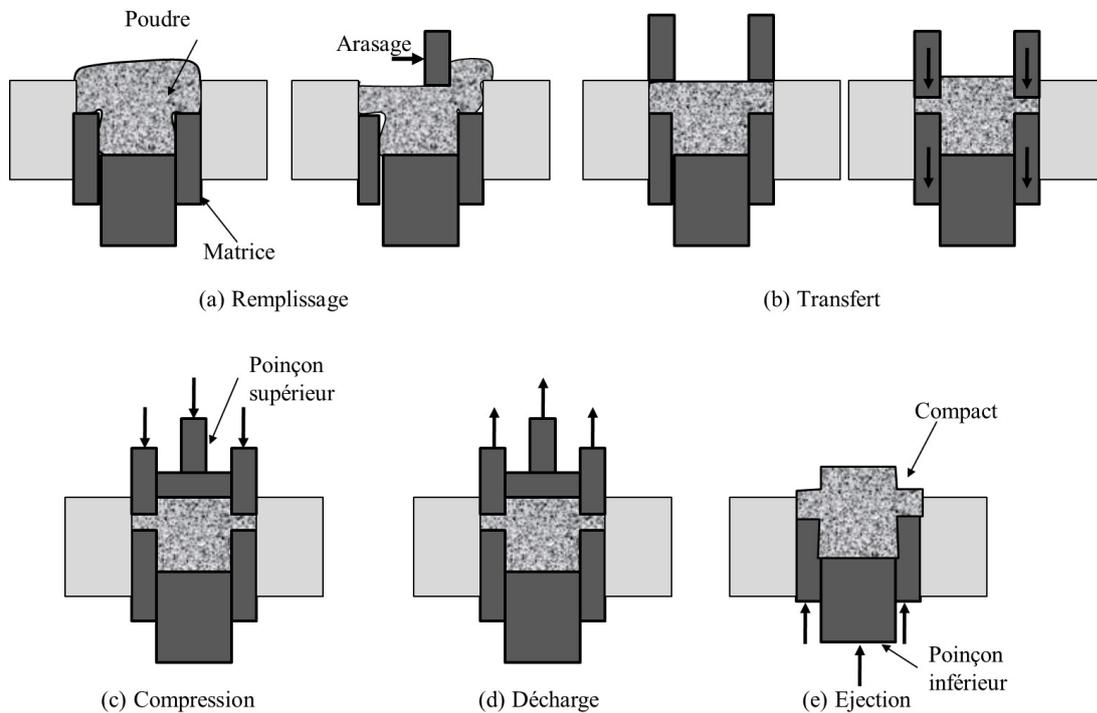


FIGURE 1.2 – Description des différentes étapes d’un cycle de compression à froid en matrice.

rents poinçons pour modifier la géométrie du volume occupé par la poudre suite au remplissage de sorte à donner à la poudre une forme de la pièce finale. Au cours de cette phase, le réarrangement des particules de poudres s’effectue de sorte que la matrice, de forme souvent complexe, soit complètement remplie. Cette modification de forme est effectuée à volume constant. Pendant la phase de compression (figure 1.2.c) les différents poinçons se rapprochent. Au début de cette phase, la poudre peut s’écouler et les particules se réarrangent assez librement. Au cours du temps, ces réarrangement deviennent plus difficiles. Puis, la densification continue jusqu’à ce que les porosités entre les particules deviennent très petites. Suite à cette phase, intervient la phase de décharge (figure 1.2.d) correspondant au relâchement des efforts appliqués par les poinçons. La dernière phase du procédé est l’éjection de la pièce de la matrice (figure 1.2.e). Cette phase est également délicate parce que le relâchement des efforts latéraux peut générer des fissures.

Chacune de ces étapes fait l’objet d’efforts de recherche dans le but d’être maîtrisée et optimisée. Le travail de cette thèse concerne uniquement la phase

de compression.

Pendant cette phase la poudre se densifie sous l'action des efforts de compression appliqués. Le volume initial après remplissage ou transfert est réduit du tiers ou de la moitié selon la poudre utilisée. Prenons l'exemple de la poudre de fer, le volume initial (densité initiale de l'ordre de  $3 \text{ g/cm}^3$ ) est réduit environ de moitié (densité finale de l'ordre de  $7 \text{ g/cm}^3$ ). La densification des poudres industrielles est caractérisée par la densité relative qui est le ratio entre la densité apparente et la densité théorique du matériau dense. La valeur de la densité relative est alors inférieure ou égale à l'unité.

Pendant la phase de compression, la poudre se densifie suivant les deux mécanismes suivants :

### **Réarrangement.**

Durant les premiers instants de la compression, les particules de poudre ont tendance à se déplacer les unes par rapport aux autres pour former un volume plus compact. Cette étape est influencée surtout par la morphologie des particules et le frottement. Le réarrangement est facilité par la présence de particules aux formes arrondies. Parallèlement, les déplacements et la réorganisation des particules sont limités par le frottement (plus le frottement est faible, plus le réarrangement est facile) qui est toutefois réduit par l'utilisation d'un lubrifiant.

### **Déformation locale et plastiques des particules.**

Lorsque les contraintes appliquées deviennent importantes, les particules subissent des déformations élastiques et plastiques importantes engendrant la densification du massif de poudre. La déformation des particules permet leur rapprochement, entraînant une augmentation du nombre de contacts et des surfaces de contact. L'aptitude des particules à se déformer plastiquement va permettre leur indentation mutuelle et leur enchevêtrement, entraînant une diminution de la porosité.

#### **1.1.2 Simulation numérique du procédé.**

La phase de compression occupe une place importante dans le procédé de la métallurgie des poudres pour les industries, car lors de cette phase, il arrive que les pièces présentent des défauts comme l'apparition de fissures, à cause du frottement trop important entre la pièce et les outils ou des efforts

déviatoires trop élevés qui sont appliqués à la surface de la pièce, ou bien à cause d'une forte hétérogénéité dans la distribution de la matière influant sur les propriétés mécaniques de la pièce finale. Ces défauts peuvent rendre les pièces inutilisables.

Pour contrôler ces problèmes, les industriels de la métallurgie des poudres utilisent encore aujourd'hui des procédures d'essais-erreurs pour mettre en oeuvre de nouvelles gammes de pièces, ou des outils pour repérer les fissures afin d'éliminer les pièces défectueuses [54]. Mais tous ces efforts sont très coûteux au niveau du temps d'opération.

Pour éviter de telles dépenses, il est intéressant de pouvoir disposer de modèles numériques capables de simuler les procédés de mise en forme et de prédire l'apparition de tels défauts. Mais quel est l'intérêt et la place de la simulation numérique dans le processus industriel ? On sait très bien que la forme et les dimensions de la pièces sont déterminées par des bureaux d'études de conception. Ces derniers doivent prévoir des géométries compatibles avec le mode de mise en forme pour avoir une qualité requise compte tenu des spécificités de la compression en matrice. Puis le fabricant doit déterminer les différents paramètres caractéristiques du protocole de mise en forme de la pièce industrielle de la phase de remplissage jusqu'à l'éjection.

La simulation numérique du procédé de mise en forme par compression de poudre métalliques a fait l'objet de nombreuses recherches scientifiques [9, 34, 66, 21, 38, 22, 10, 19, 42, 77]. Grâce à ces simulations numériques, il est possible d'envisager la résolution de certains problèmes ainsi que d'optimiser le procédé de fabrication. En effet, la simulation numérique doit tout d'abord intégrer une base de données complète relative au comportement mécanique de la poudre. Par la suite, des analyses des résultats numériques doivent être faites pour vérifier la répartition des densités finales et l'apparition des défauts (figure 1.3) pour une cinématique donnée. Suite à cette analyse, si la répartition des densités ne convient pas ou si des défauts apparaissent sur les pièces, la cinématique des outils doit être modifiée.

Il est alors nécessaire d'améliorer la simulation numérique afin de pouvoir optimiser la compression sans avoir recours à l'expérimentation, et de chercher à simuler l'apparition des défauts. Il faut aussi mettre en évidence le rôle de la simulation numérique comme un outil d'optimisation de la cinématique des outils et des efforts de compression. Afin d'évaluer un tel outil, la démarche qu'on cherche à développer est d'arriver à simplifier la mise en place des outillages par l'élimination de la partie sélectionnée en rouge dans la

figure 1.3. Mais il faut noter que les résultats de simulation doivent être validés pour un certain nombre de paramètres par comparaison avec l'expérience.

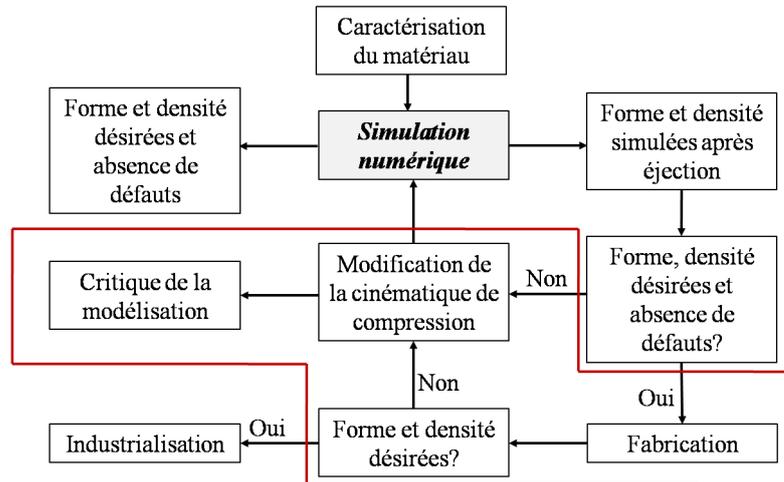


FIGURE 1.3 – Intérêt de la simulation numérique au sein du processus d'industrialisation. La partie rouge correspond au processus qu'on veut l'éviter par le développement des nouvelles simulations numériques.

Pour améliorer et comprendre le comportement de la poudre, l'outil numérique se présente comme une aide à la définition de la phase de compression à froid. La simulation numérique a pour objectif d'être un outil d'optimisation pour la compression des poudres dans un contexte industriel afin de déterminer et de contrôler les propriétés mécaniques du matériau. Cette optimisation est réalisée par le fait qu'on n'a besoin ni de matière première ni de presse de fabrication. Néanmoins, un nombre restreint d'essais expérimentaux restera toujours requis pour caractériser les matériaux puis calibrer les paramètres des modèles de comportement utilisés dans les codes éléments finis. L'amélioration de cet outil constitue l'objectif de cette thèse.

## 1.2 Modélisation d'un matériau granulaire compressible élasto-plastique.

### 1.2.1 Notions élémentaires d'élasto-plasticité.

La modélisation des poudres métalliques est généralement basée sur les principes de la mécanique des milieux continus. Dans ce type d'approche, on

cherche un matériau homogène équivalent. Dans cette étude, le mécanisme de déformation pris en compte est l'élasto-plasticité. Lors de la densification, la poudre subit de grandes déformations (réduction de moitié du volume initial), la partie élastique des déformations est très petite par rapport à la partie plastique. C'est à cet effet qu'on va rappeler dans la suite quelques notions essentielles de ce type de comportement qui sont :

- la surface de charge : définit le domaine élastique du matériau.
- la loi d'écoulement : donne la déformation plastique.
- l'écroûissage : décrit l'évolution de la forme, de la taille et de la position de la surface de charge au cours de la déformation.

### Surface de charge.

Lorsque la limite du domaine élastique (comportement réversible) est atteinte, le comportement est dit élasto-plastique (ou irréversible).

Il existe un seuil de contrainte où la courbe contrainte/déformation change nettement son allure. Ce seuil est initialement associé à la limite entre le comportement élastique et plastique. Dans le cas d'une sollicitation uniaxiale, il est possible de mettre en évidence la décomposition du comportement en une partie élastique et une partie plastique, le seuil de plasticité dans ce cas est exprimé par un niveau de contrainte ( $\sigma_y$ ).

Dans le cas des sollicitations tridimensionnelles, le seuil de plasticité est une surface dans l'espace des contraintes. Soit  $f(\boldsymbol{\sigma})$  la fonction de charge qui caractérise cette surface. Le signe de cette fonction indique si le comportement du matériau est élastique ou plastique. En fait, trois cas se présentent :

- $f(\boldsymbol{\sigma}) < 0$  : le comportement est élastique.
- $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  : le comportement est élasto-plastique.
- $f(\boldsymbol{\sigma}) > 0$  : un état de contrainte impossible.

Lorsque la fonction  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ , cela correspond à un état de contrainte situé sur la surface de charge,  $f(\boldsymbol{\sigma}) < 0$  correspond à l'intérieur de la surface et  $f(\boldsymbol{\sigma}) > 0$  correspond à l'extérieur de la surface (figure 1.4).

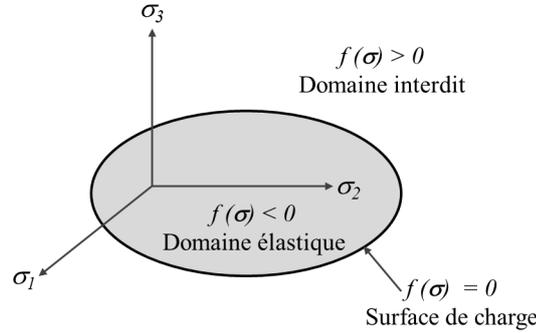


FIGURE 1.4 – Schématisation du domaine élastique et de la surface de charge dans l'espace des contraintes principales.

Le critère de plasticité est associé à la notion de surface de charge et s'écrit sous la forme  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ . Il dépend de l'état de contrainte. Les incréments de déformation plastique sont déterminés à partir de l'état de contrainte au travers de la loi d'écoulement.

### Loi d'écoulement.

Si le critère de plasticité nous permet de connaître quand la déformation plastique a lieu, la loi d'écoulement va nous donner la direction et l'intensité de la déformation plastique. Il s'agit de préciser que la déformation est décomposée en déformation élastique et plastique. Cette dernière n'évolue pas tant que les contraintes restent à l'intérieur du domaine élastique, c'est à dire :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \mathbf{0} \quad \text{si} \quad f < 0 \quad (1.1)$$

Où  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  est le tenseur incrément de déformation plastique.

La description macroscopique de l'écoulement plastique est généralement obtenue dans le cadre de la théorie de l'écoulement, qui utilise le principe du travail maximal attribué à Hill [47], mais il a été discuté par Von Mises [65] et Taylor [88]. Il stipule que, pour un incrément de déformation plastique donné  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ , le travail des contraintes réelles  $\boldsymbol{\sigma}$  est supérieur au travail de tout autre tenseur de contraintes admissibles  $\boldsymbol{\sigma}^*$  associé à  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ . Il vient alors :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \geq 0 \quad (1.2)$$

Si l'on admet ce principe, l'incrément de déformation plastique  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  se détermine par la loi de normalité qui montre que  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  doit être proportionnel à la normale extérieure (tenseur  $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ ) à la surface de charge :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.3)$$

Où  $\lambda$  est une constante appelée multiplicateur plastique.

L'expérience a montré que pour la quasi-totalité des matériaux les domaines d'élasticité initial et actuels sont convexes. Cette propriété sera admise dans toute la suite de ce travail.

Dans le cas où  $\boldsymbol{\sigma}$  est un point régulier de la surface de charge (figure 1.5), on a l'équation (1.3) a pour conséquence que  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \perp f$ .

Si  $\boldsymbol{\sigma}$  est un point singulier de la surface de charge, la convexité de  $f$  implique l'existence d'un cône convexe des normales extérieures à  $f$  en  $\boldsymbol{\sigma}$  à l'intérieur duquel se trouve la direction de l'incrément de déformation plastique  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  (elle n'est donc pas unique, cf. figure 1.5).

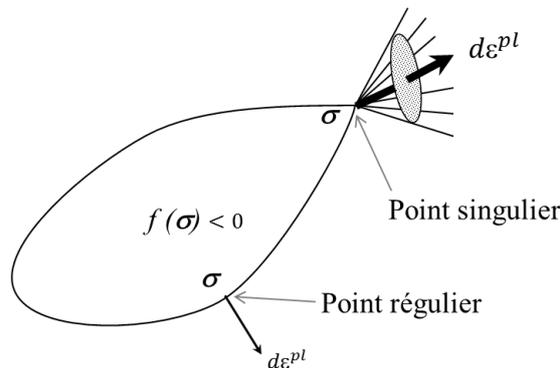


FIGURE 1.5 – Principe du travail plastique maximal : règle de normalité.

L'expérience a montré que le comportement des matériaux granulaires est non associé (l'incrément de déformation plastique  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  n'est pas perpendiculaire à la surface de plasticité). Pour cette raison, la fonction  $f$  dans l'équation (1.3) est remplacée par une autre fonction  $g$  appelée potentiel plastique (équation (1.4)). Ainsi le vecteur incrément de déformation plastique n'est pas nécessairement normal à la surface de charge, mais il est normal à une autre surface d'équation  $g = \text{constante}$ . Cette méthode permet de généraliser la théorie de la plasticité et de développer des modèles qui décrivent le comportement des matériaux granulaires.

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.4)$$

Il faut noter que la notion de potentiel étant une généralisation de loi d'écoulement issue des théories de la plasticité dans les monocristaux, elle suppose que dans le cas où  $g$  est une fonction régulière du tenseur de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$ , alors l'existence de  $g$  implique l'unicité de la direction de l'incrément de déformation plastique  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ . Cette hypothèse est bien pratique puisqu'elle permet l'écriture de la loi d'écoulement, et il est très délicat de la contredire par l'expérience car il n'existe aucun argument expérimental qui évoque cette unicité de  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  pour un état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  donné en raison des difficultés techniques de la caractérisation expérimentale.

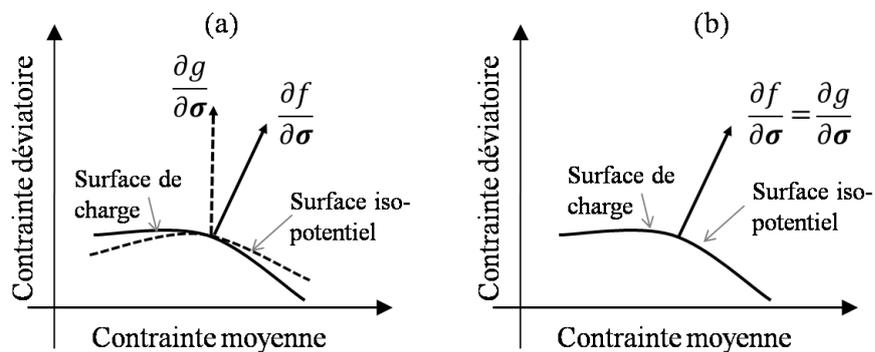


FIGURE 1.6 – (a) Loi d'écoulement non associée. (b) Loi d'écoulement associée.

La détection expérimentale du potentiel plastique est très délicate. En effet, il est difficile d'arriver à isoler expérimentalement la déformation plastique et la déformation élastique. Pour contourner ce problème, beaucoup d'auteurs utilisent la surface de charge comme potentiel plastique. Quand la surface iso-potentielle et la surface de charge sont confondues ( $f = g$ ), le vecteur incrément de déformation plastique est nécessairement normal à la surface de charge (figure 1.6.b), la loi de comportement est dite associée et on parle d'un matériau standard. Dans le cas contraire qui est un cas plus général (figure 1.6.a), la plasticité est dite non associée ( $f \neq g$ ). Cette modélisation est beaucoup utilisée en mécanique des sols pour les matériaux granulaires.

### **Écrouissage.**

L'écrouissage permet de décrire le comportement du matériau en fonction de l'histoire de chargement du matériau à partir de l'évolution de la surface de charge sous l'effet de la déformation plastique et éventuellement d'autres facteurs. Dans la suite, l'état d'écrouissage sera représenté symboliquement par un vecteur  $X$  représentant l'ensemble des variables décrivant l'histoire de chargement du matériau.

Pour décrire l'écrouissage, il existe deux modèles principaux : l'écrouissage isotrope d'après Taylor et Quinney [89] et l'écrouissage cinématique d'après Prager [73]. L'écrouissage isotrope est une homothétie de la surface de charge sans modification de sa forme. L'écrouissage cinématique est une translation de la surface de charge sans modification de taille ni de forme. La figure 1.7 illustre ces deux modèles d'écrouissage, ainsi qu'une combinaison des deux types.

La fonction de charge s'obtient en écrivant que le point représentatif du chargement reste sur la limite du domaine d'élasticité. Elle peut être exprimée sous la forme générale :

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}, X) \tag{1.5}$$

Dans la suite, on va rajouter les variables d'écrouissage  $X$  dans tout ce qui précède au niveau de l'équation d'écoulement (1.3) et (1.4).

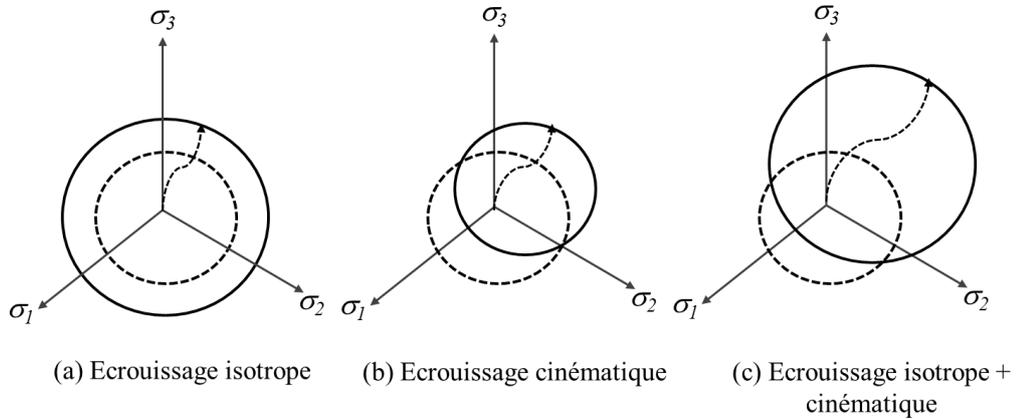


FIGURE 1.7 – Schéma des différents types d'érouissage.

Les notions de surface de charge, de loi d'écoulement et d'érouissage constituent l'approche la plus courante de la modélisation continue des poudres ductiles dans le cadre de l'élasto-plasticité. On cherche dans un premier temps à caractériser l'évolution des surfaces de charge en fonction du chemin de chargement et dans un deuxième temps à caractériser le potentiel dans le but de formuler la loi d'écoulement associée ou non associée.

Le bon choix des fonctions  $f$  et  $g$  ainsi que les variables d'érouissage consiste à identifier un modèle de comportement qui permet la bonne description du comportement des poudres. Plusieurs modèles ont été développés pour rendre compte du comportement des matériaux granulaires. Le paragraphe suivant décrit la loi de comportement la plus exploitée dans l'industrie des poudres.

### 1.2.2 Modèle de Drucker-Prager Cap.

Pour arriver à simuler le procédé de mise en forme des poudres métalliques, des lois de comportement de la mécanique des sols ont été utilisées en raison de certaines similitudes entre les matériaux étudiés. Il est couramment admis que le comportement des poudres pendant la compression à froid est un comportement élasto-plastique. Les déformations élastiques sont supposées petites devant les déformations plastique, cette hypothèse est validée dans les travaux de Pavier et al. [69]. À l'heure actuelle, plusieurs modèles plus ou moins compliqués sont utilisés pour simuler la compression à froid des poudres métalliques. Le modèle le plus utilisé dans l'industrie des poudres [33, 55] est le modèle isotrope qui intègre une loi de comportement avancée de

type Drucker-Prager modifiée avec un Cap et qui est basée sur une approche de matériau continu.

Généralement ce modèle est nommé Drucker-Prager Cap mais en réalité, le nom de Drucker-Prager Cap ne représente pas un modèle de comportement mais simplement la forme des surfaces de charge.

Le modèle de Drucker-Prager Cap [28, 27] est basé sur l'approche de l'élasto-plasticité développée ci-dessus. La représentation de ce modèle est généralement faite dans le plan axisymétrique de l'espace des contraintes principales (plan qui correspond aux chargements axisymétriques, par exemple,  $\sigma_2 = \sigma_3$ ) qui est défini par l'axe des contraintes isotropes  $p$  et l'axe des contraintes déviatoire  $q$ .

La contrainte isotrope  $p$  également nommée contrainte hydrostatique ou moyenne est exprimée comme suit :

$$p = \frac{1}{3}I_1 = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma}) \quad (1.6)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy et  $I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma})$  est le premier invariant et qui est une fonction des contraintes principales.

La contrainte déviatoire  $q$  vient de la décomposition du tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  en une partie sphérique et une partie déviatoire de telle sorte que :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} + \mathbf{s} \quad (1.7)$$

où  $\mathbf{s}$  est le tenseur déviateur des contraintes dont la trace est nulle ( $tr(\mathbf{s})=0$ ). Par la suite, la contrainte déviatoire  $q$  est déterminée par l'équation suivante :

$$q = \sqrt{3J_2} \quad (1.8)$$

avec  $J_2$  est le second invariant pour le tenseur déviateur  $\mathbf{s}$

$$J_2 = \frac{1}{2}tr(\mathbf{s}^2) \quad (1.9)$$

Si on remplace (1.9) dans (1.8), la contrainte déviatoire devient :

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}(\mathbf{s}^2)} \quad (1.10)$$

La surface de charge de ce modèle est décrite par deux parties essentielles : une première surface de forme elliptique dite "Cap" (associée aux modes de chargements contractant, entraînant une diminution du volume de l'échantillon et une augmentation de la densité), et une deuxième surface dite droite de rupture de Drucker-Prager (correspond aux modes de chargement dilatants, entraînant une augmentation du volume de l'échantillon et une diminution de la densité) (figure 1.8). Une troisième surface de transition entre les deux premières est parfois définie afin de rendre la surface de charge régulière.

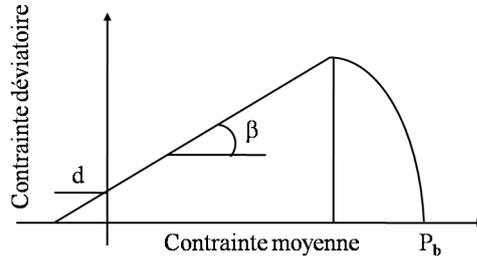


FIGURE 1.8 – Surface de charge et de rupture correspondant à la modélisation Drucker-Prager Cap.

L'évolution des surfaces de charge (écrouissage) dépend d'une seule variable d'histoire, la déformation volumique plastique qui est reliée directement à la densité relative. Cette déformation est définie par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v^{pl} = \int d\boldsymbol{\varepsilon}_v^{pl} = \int \text{tr} (d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \quad (1.11)$$

Ainsi, la surface de charge est indépendante du chemin suivi et ne dépend que de la densité relative courante. L'évolution de la surface est décrite par les trois paramètres  $d$ ,  $\beta$  et  $P_b$  visible sur la figure 1.8, qui sont respectivement

la contrainte limite de cohésion, l'angle de la droite de rupture et la fonction d'écroutissage.

Ce modèle est disponible dans les codes commerciaux d'éléments finis comme ABAQUS [1, 2]. Il permet de prédire les distributions de densité et de contrainte pendant la phase de compression et les contraintes résiduelles. Plusieurs travaux ont utilisé la méthode des éléments finis intégrant le modèle de Drucker-Prager pour simuler la mise en forme des pièces [3, 53, 37].

De nombreuses variantes de ce modèle existent, on trouve par exemple le modèle proposé par Chtourou et al. [20, 19] où la ligne de rupture de Drucker-Prager est remplacée par deux surfaces ( $f_1$  et  $f_2$ ). Une autre différence identifiée est que la ligne de Drucker-Prager utilise un potentiel non-associé alors que les surfaces de charge  $f_1$  et  $f_2$  utilisées par Chtourou et al. [20, 19] correspondent à des lois de comportement associées où la règle de normalité des composantes de la déformation est appliquée.

L'équation de la surface Cap du modèle de Chtourou et al. [20] est identique à celle utilisée pour la loi de Cap modèle pré-intégrée dans ABAQUS où la règle de normalité est appliquée. Ainsi, la formule du potentiel correspond à celle de la surface de charge.

La loi phénoménologique macroscopique de Drucker-Prager Cap prédit avec précision la distribution de densité en fin de compression [33, 34]. Cette loi de comportement assure des simulations assez rapides ce qui la positionne comme un outil de première analyse [53, 12]. Les surfaces de Drucker-Prager Cap possèdent la propriété d'être symétriques par rapport à l'axe hydrostatique. Mais des campagnes de mesures expérimentales ont montré les faiblesses de ce modèle [4, 80] (le paragraphe 1.3.1 développera cette idée) parce qu'il ne reproduit pas correctement l'évolution des efforts au cours du chargement, ni l'asymétrie des surfaces de charge par rapport à l'axe hydrostatique en compression en matrice (figure 1.9.b) qui est le procédé de compression industrielle le plus utilisé (figure 1.10).

La seule variable d'écroutissage (densité relative) que ce modèle intègre est incapable de prendre en compte l'histoire de chargement. Pour arriver à détecter l'anisotropie de la structure en fonction du chemin de chargement, Pavier [69] a montré qu'il est nécessaire d'ajouter au moins une autre variable d'écroutissage qui caractérise le chemin.

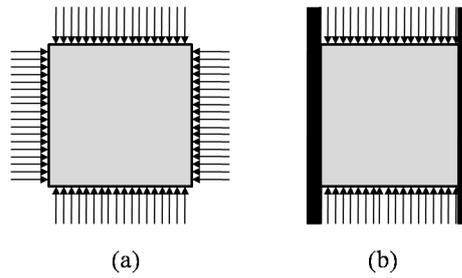


FIGURE 1.9 – Chargement couramment utilisés. (a) Compression hydrostatique. (b) Compression en matrice.

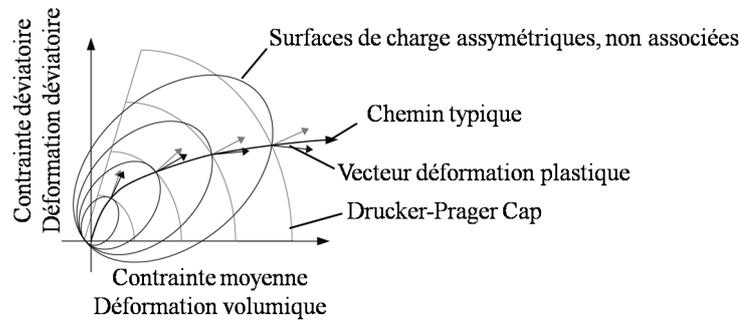


FIGURE 1.10 – L’incapacité des surfaces de Drucker-Prager Cap à reproduire l’influence du chemin de chargement peut mener à des erreurs importantes sur les valeurs de contraintes ou de déformations calculées avec des chemins de chargements complexes.

## 1.3 Méthodes de caractérisation du comportement du matériau.

### 1.3.1 Approche expérimentale.

Produire des résultats de simulations identiques aux mesures expérimentales obtenues directement sur des presses de laboratoire instrumentées, est le résultat vers lequel la communauté scientifique veut tendre le plus efficacement possible.

Pour arriver à développer et à valider des lois de comportement de la littérature, il est inévitable de connaître un maximum de données expérimentales sur le comportement mécanique de la poudre soumise à des sollicitations variées. Cependant, la complexité de l’approche expérimentale rend l’étude de

l'évolution des surfaces de charge en fonction du chemin de chargement assez délicate. Donc l'objectif de cette thèse n'est pas de chercher à calibrer les modèles phénoménologiques de type Drucker-Prager Cap à partir des résultats expérimentaux mais d'obtenir des éléments nouveaux afin de formuler un modèle plus fin pour modéliser le comportement mécaniques des poudres ductiles.

Dans le cadre de l'industrie de la métallurgie des poudres, l'objectif est de fabriquer des pièces le plus rapidement possible à moindre coût par des techniques simples de compression. Les paramètres du matériau doivent être par la suite identifiés de façon rapide et directe pour avoir à la fin des centaines de milliers de pièces sans défaut. Donc beaucoup d'entreprises utilisent la compression en matrice pour arriver à comprendre les phénomènes présents lors de la phase de compression (figure 1.11). Leur but majeur est d'optimiser cette phase de sorte à obtenir moins de résidus et d'avoir des pièces plus résistantes mécaniquement.

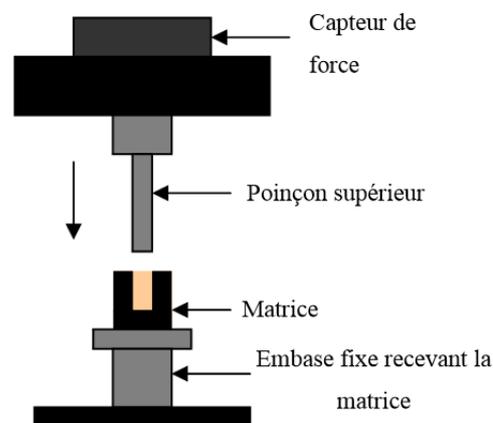


FIGURE 1.11 – Dispositif d'une machine de compression en matrice.

Pour l'activité de recherche en laboratoire, la compression à froid des poudres métalliques est étudiée généralement par l'intermédiaire des dispositifs de compression en matrice<sup>1</sup> et de compression triaxiale de révolution (figure 1.12). La figure 1.13 montre les différents essais de compression pour

---

1. La compression en matrice peut être réalisée dans une machine triaxiale de révolution. L'échantillon est soumis à des incréments de pression axiale et radiale, tout en assurant que la déformation axiale reste égale à la déformation volumique et la déforma-

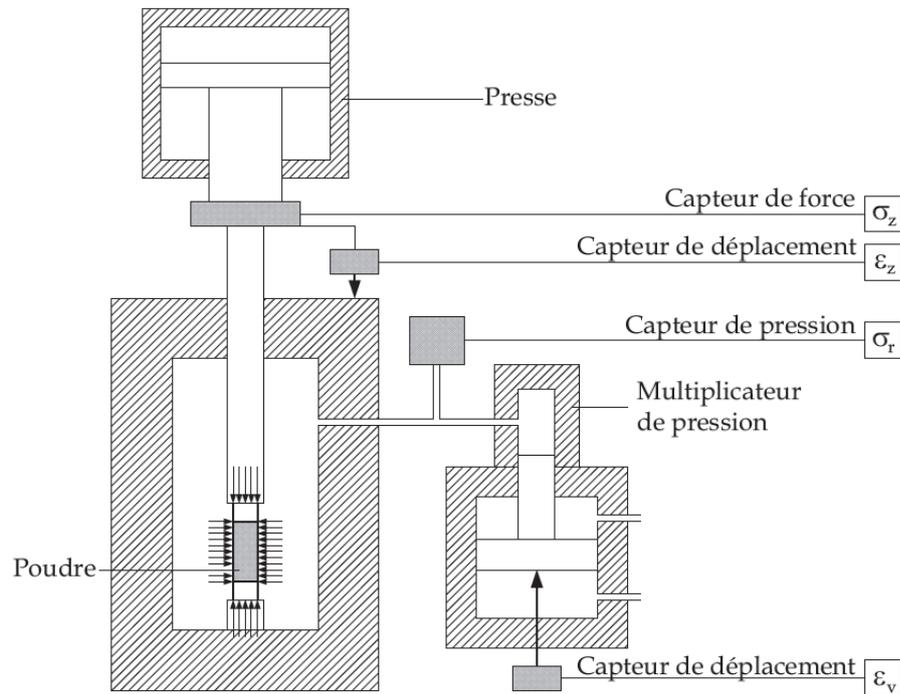


FIGURE 1.12 – Schéma de la machine triaxiale de révolution utilisée par Pavier [69].

caractériser le comportement des poudres lors de la compression à froid. Ces dispositifs comme la compression en matrice ne permettent de réaliser qu'un seul chemin de chargement, sauf le dispositif de compression triaxiale de révolution qui permet de soumettre l'échantillon à diverses contraintes (réaliser un grand nombre de chemins de chargement) afin de déterminer et identifier les propriétés du matériau sous charge. Ce type de dispositif est utilisé surtout pour étudier le comportement des poudres compactées à froid. Par contre ce dispositif est particulièrement cher et difficile à mettre oeuvre.

Les dispositifs triaxiaux de révolution permettent d'appliquer des chargements axisymétriques et donc de réaliser plusieurs chargements qui sont compris dans le plan des contraintes principales (plan d'équation  $\sigma_2 = \sigma_3$ , cf. paragraphe 2.2.2).

---

tion radiale reste à peu près nulle. Il faut noter que ce type d'expérience ne tient pas compte du frottement entre la poudre et la matrice [4, 80].

Généralement, le plan de l'espace des contraintes qui correspond au chargement axisymétrique où les différents chemins de chargement peuvent être représentés est défini par le plan (p-q) (Plan de contrainte déviatoire - contrainte moyenne) comme présenté dans la figure 1.13. Dans le cas d'un chargement triaxial de révolution (figure 1.14), la contrainte moyenne p est donnée par l'équation suivante :

$$p = \frac{1}{3}\sigma_z + \frac{2}{3}\sigma_r \quad (1.12)$$

et la contrainte déviatoire q est décrite par :

$$q = |\sigma_z - \sigma_r| \quad (1.13)$$

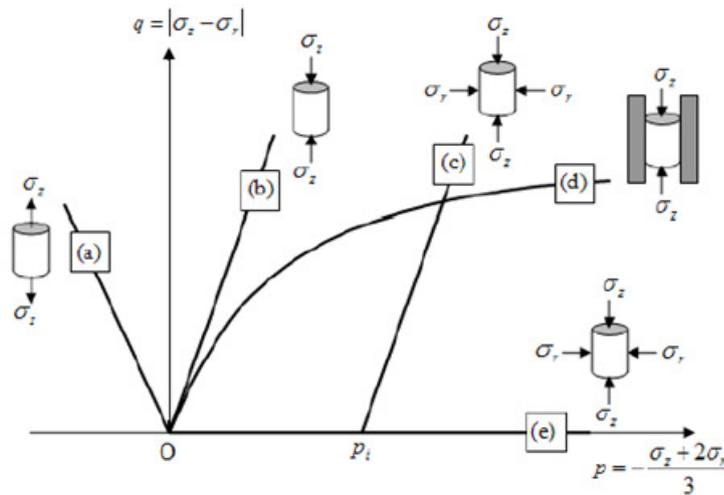


FIGURE 1.13 – Évolutions monotones de différents trajets en simple charge au cours des essais de compression. Représentation des chemins de chargement dans le plan (p-q) des contraintes moyennes et déviatoires. (a) Traction. (b) Compression simple. (c) Compression triaxiale. (d) Compression en matrice. (e) Compression isotrope.

La caractérisation expérimentale du comportement mécanique des poudres pour identifier le domaine élastique à travers les surfaces de charge est effectuée à partir d'un dispositif qui permet de réaliser des essais de type

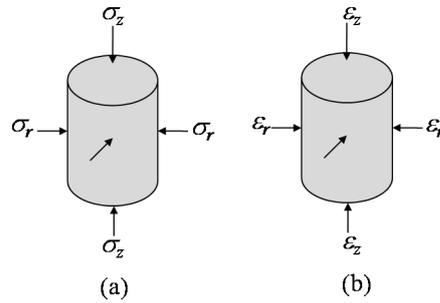


FIGURE 1.14 – Composante axiale et radiale (a) de contraintes et (b) de déformations sur un comprimé de poudre dans le cas d'un chargement triaxial de révolution.

compression triaxiale sur un échantillon à travers des trajets de chargement qui sont constitués de trois chemins. Tout d'abord, l'échantillon est soumis à un chargement initial, qui peut être une compression isotrope ou une compression en matrice, pour le consolider jusqu'à une densité désirée. Ensuite, une décharge élastique est appliquée dont la pression isotrope diminue jusqu'à une valeur fixée (généralement elle est très petite). Enfin, une recharge dans toutes les directions possibles est réalisée afin d'obtenir les points de la surface de charge (figure 1.15) qui correspondent à l'entrée en plasticité.

La détection expérimentale de la plasticité est arbitraire. Souvent, l'entrée en plasticité correspond à un seuil de déformation résiduelle après décharge (axiale ou/et radiale) de l'ordre de 0.1%, c'est le cas de Akisanya et al. [4], Schneider et al. [80] et Sridhar et al. [84].

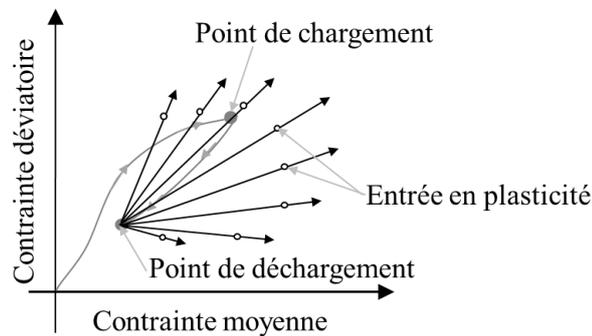


FIGURE 1.15 – Méthode pour tracer la surface de charge : chargement initial, décharge élastique et recharge dans toutes les directions.

Il faut vérifier, en utilisant ce critère de plasticité, que l'échantillon n'a pas été plastifié lors de la recharge. Pour cela, la plasticité des poudres est évoquée par plusieurs chercheurs de manière plus simple en utilisant la densité relative comme critère de plasticité. Les surfaces de charge sont alors assimilées à des surfaces isodensité. Avec ce critère, Pavier [69] a tracé des courbes isodensité en utilisant un chemin de chargement différent pour chaque échantillon initial (figure 1.16), c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire de conserver le même échantillon qui subit le chargement initial pour obtenir la surface de charge. Avec cette démarche, moins d'information de l'effet du chemin de chargement sur la surface de charge est fournie (souvent la surface de charge est considérée comme indépendante du chemin suivi), mais il est possible d'avoir des informations sur le comportement des poudres à très haute densité relative.

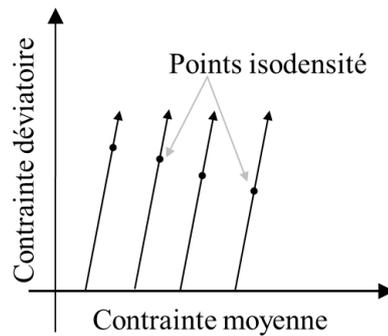


FIGURE 1.16 – Obtention de courbes isodensité.

Le fait de supposer que le chemin de chargement n'a pas d'influence sur les surfaces de charge est une hypothèse contraignante. Akisanya et al. [4] et Sridhar et Fleck [84] ont abordé dans leur travaux l'effet du chemin de chargement (compression en matrice et isotrope) sur la surface de charge en utilisant l'approche illustrée par la figure 1.15. La figure 1.17 montre leur résultats expérimentaux sur les poudres de cuivre de particules sphériques obtenus par une compression isotrope et en matrice. Les surfaces de charge obtenues pour les deux types de chargement sont de forme très différente. Dans le cas d'une compression isotrope, la surface de charge est approximativement elliptique sur le plan (p-q), alors que dans le cas où le premier chemin correspond à une compression en matrice, la surface de charge est allongée suivant la direction du chemin de chargement. Cependant, leurs études sont

limitées à des densités relatives de l'ordre de 0,8 par rapport aux études fournies par Pavier [69] qui a travaillé avec des densités relatives très élevées (0,98).

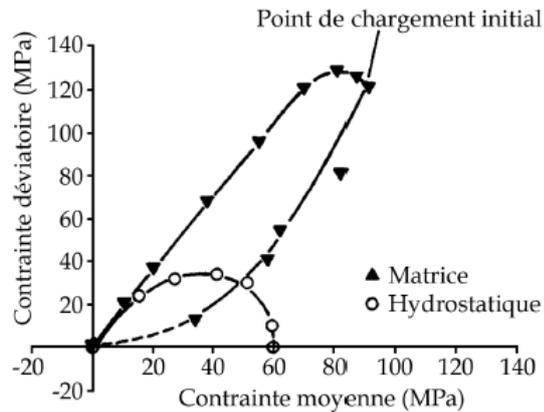


FIGURE 1.17 – Surfaces de charge obtenues par Akisanya et al.[4] pour une compression isotrope et en matrice, avec une poudre de cuivre à grains sphériques. La densité relative finale atteinte lors de ces deux chargements correspond à 0,8.

Pavier [69] a observé aussi que la forme des surfaces de charge dépend du chemin suivi (essai surconsolidé et normalement consolidé). La figure 1.18 illustre l'influence du trajet de chargement imposé sur les surfaces isodensité pour atteindre la même densité. Ce phénomène a été observé aussi dans les travaux de Shima et al.[81].

Il n'y a pas que le chemin de chargement ou la densité relative qui influent sur la surface de charge, les travaux de Schneider et Cocks [80] ont montré que la morphologie des grains de poudre agit aussi sur la surface de charge.

Les vecteurs incréments de déformation plastique peuvent être obtenus avec les deux démarches utilisées par Akisanya et al.[4] (figure 1.15, c'est la méthode utilisée dans cette thèse cf. Chapitre 2) et Pavier[69] (figure 1.16) en négligeant les déformations élastiques. Ces méthodes permettent de tracer les surfaces iso-potentielles.

La figure 1.19.a montre les vecteurs incréments de déformation dans le plan (p-q) obtenus par des essais normalement consolidés réalisés par Pavier

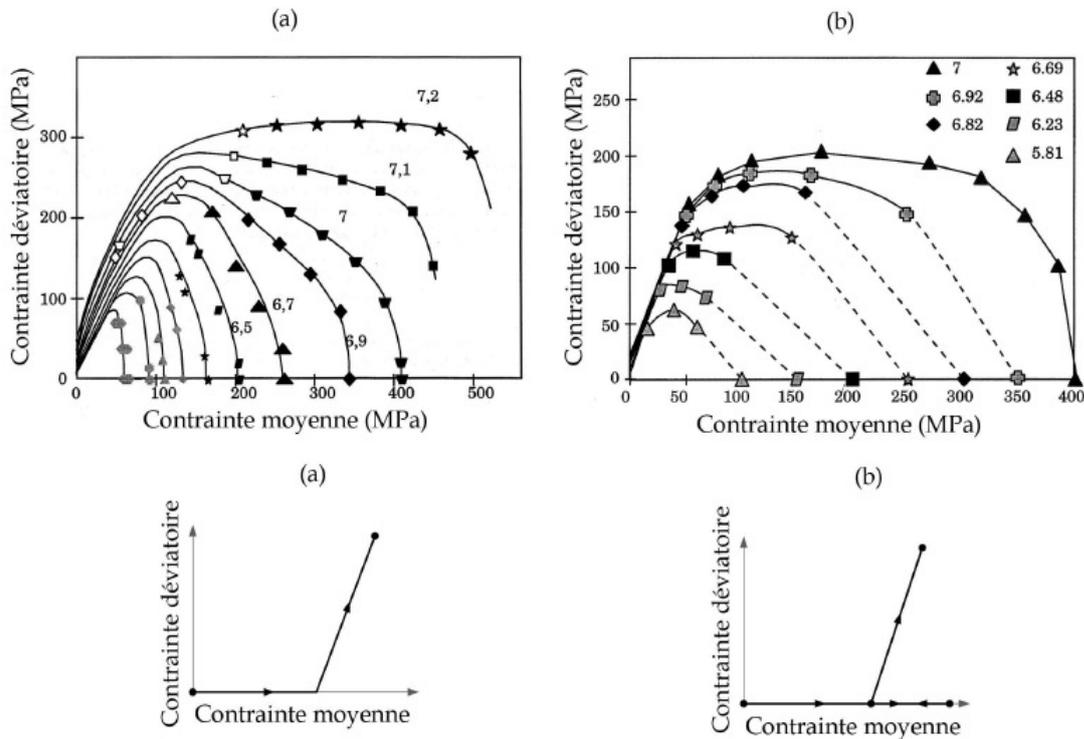


FIGURE 1.18 – Courbes isodensité obtenues sur une poudre de fer par Pavier [69] suivant deux chargements : (a) essai normalement consolidé (chargement isotrope puis axial à pression constante) ; (b) essai surconsolidé (chargement isotrope, décharge puis recharge axiale à pression constante). La densité 7,2 correspond à une densité relative de 0,98.

[69] et des segments perpendiculaires à ces vecteurs. Cette figure montre que la norme de l'incrément de déformation augmente au fur et à mesure du chargement triaxial. Et pour une contrainte déviatoire donnée, la norme de l'incrément de déformation diminue avec la pression moyenne donc avec la densité.

En plus, Pavier a montré que les surfaces iso-potentielles dépendent aussi du chargement suivi c'est-à-dire que le vecteur écoulement plastique n'a pas toujours la même direction en changeant le chemin de chargement. Ce résultat est illustré sur la figure 1.19.b qui montre des segments perpendiculaires aux vecteurs incrément de déformation qui correspondent à des portions de potentiels obtenus lors d'un chargement normalement consolidé et surconsolidés. En un point du plan (p-q), le vecteur écoulement n'a pas toujours

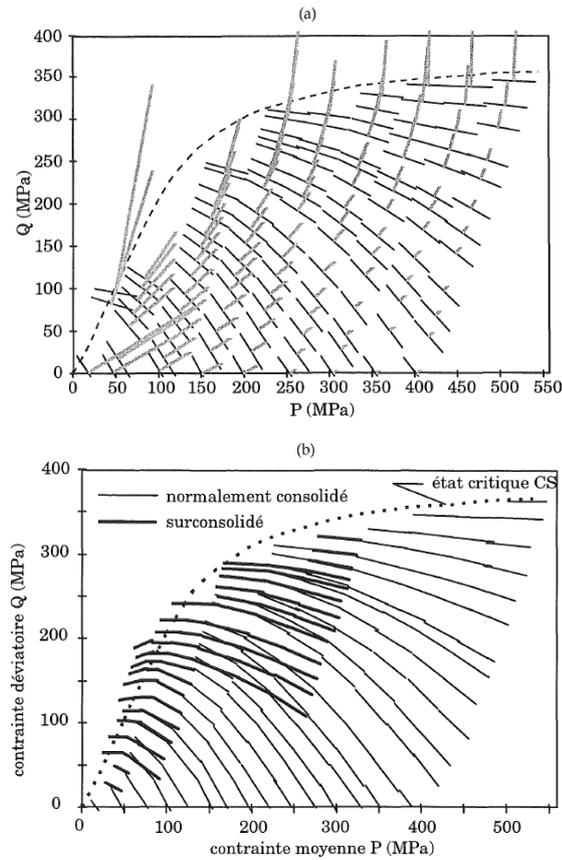


FIGURE 1.19 – (a) Vecteurs incrément de déformation obtenus par Pavier [69] pour des essais normalement consolidés. Les traits foncés correspondent aux segments perpendiculaires à ces incréments de déformation. (b) Segments de potentiels pour les essais surconsolidés et normalement consolidés obtenus par Pavier [69].

de même direction suivant que le point ait été atteint lors d'un essai simplement consolidé ou surconsolidé. L'intérêt de tracer ces segments est de vérifier l'hypothèse de la loi de normalité qui postule que le vecteur taux de déformation plastique doit être normal au potentiel plastique  $g$  (cf. paragraphe 1.2.1).

Lorsque l'état de contrainte se rapproche de la courbe d'état critique (cf. figure 1.19), la direction des vecteurs écoulement entre les essais normalement consolidés et surconsolidés devient presque la même jusqu'à devenir verticale à l'état critique pour les deux types de chargement (déformation à volume constant).

Actuellement, les recherches expérimentales sont délicates au niveau de l'effet du chemin de chargement sur la forme des surfaces de charge en raison de plusieurs problèmes techniques qui résident dans le nombre limité de chemin de chargement possibles avec les dispositifs expérimentaux, aussi au niveau de la caractérisation de l'écoulement plastique en raison de la difficulté de séparer l'incrément de déformation plastique et la déformation élastique.

### 1.3.2 Approche multi-échelles.

Les limites de l'approche expérimentale qui résident dans l'insuffisance des chemins accessibles et dans le coût de mise en oeuvre de dispositifs complexes, ont amené les chercheurs à se concentrer sur des outils numériques qui sont aptes à l'étude du comportement de la poudre au cours de sa mise en forme à l'aide d'une approche multi-échelle. Cette approche consiste à modéliser le grain de poudre, et les interactions entre grains jusqu'à arriver à comprendre les liens entre les phénomènes impliqués à l'échelle du grain et les phénomènes macroscopiques observés expérimentalement.

Cette approche s'oppose à l'approche dite continue qui consiste à considérer les matériaux granulaires comme des matériaux continus et d'utiliser directement des modèles de comportement dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

Lors de la phase de compression, la déformation plastique macroscopique de la poudre résulte de l'indentation mutuelle des particules. L'écoulement plastique de la matière vers les directions libres remplit peu à peu les porosités jusqu'à atteindre quasiment la pleine densité. Ce phénomène plastique engendre par la suite la densification de la poudre de sorte à obtenir progressivement la forme globale désirée de la pièce. La modélisation micromécanique de ce comportement nécessite une grande connaissance du comportement mécanique des particules en contact lors de l'indentation plastique.

L'approche discrète s'est imposée afin de prendre en compte la complexité des matériaux granulaires et des difficultés techniques qui en résultent pour leur caractérisation expérimentale parce qu'elle permet d'étudier des chemins de chargements simulés qui ne sont pas réalisables par l'expérimentation. Elle permet de plus d'avoir accès à des informations à l'échelle granulaire qui ne sont pas accessibles par les mesures, et même à séparer les phénomènes, c'est-à-dire qu'il est possible par exemple de supprimer le frottement afin d'identifier son influence sur le comportement macroscopique d'un ensemble de grains. Par contre, cette approche présente par rapport à l'approche ex-

périmentale l'inconvénient d'imposer des simplifications au niveau de la modélisation à l'échelle microscopique.

Le but de cette section est de présenter l'approche discrète, à travers les trois méthodes : approche analytique [29, 32, 31], la méthode des éléments discrets (MED) [23, 26, 50, 52] et la méthode des éléments finis multi-particules (MEFMP) [38, 74, 43, 18], qui nous permettra par la suite d'identifier laquelle de ces méthodes est la plus adaptée pour notre étude.

### **Approche analytique.**

Le problème du contact mécanique remonte à 1882 [45]. La première solution du problème de contact a été celle de Hertz entre deux corps élastiques. Mais, dans les poudres le problème est nettement plus complexe car les contacts entre particules sont élasto-plastiques et les déformations élastiques sont généralement négligeables devant les déformations plastiques. Le contact élasto-plastique entre deux particules en contact a été abordé et développé dans plusieurs théories, qui sont à la base des premiers modèles de contact élasto-plastique, comme les études de Hill et al. [48], Biwa et Storåkers sur un matériau rigide-plastique [8] puis Storåkers et al. [85] sur un matériau rigide-viscoplastique. Storåkers et al. [85, 86] ont développé une loi analytique qui prend en compte la relation entre la force de contact et le déplacement relatif des particules.

Par la suite, des études ont été réalisées sur plusieurs particules qui sont basées sur des relations empiriques pour définir la surface moyenne des contacts, le nombre moyen de contacts par particules et la force moyenne sur les particules. Parmi les premiers modèles analytiques proposés on trouve le modèle de Fischmeister et Artz [29] qui se sont intéressés à la modélisation micromécanique du comportement plastique des poudres tout en décrivent les efforts de compression jusqu'à des valeurs de densités relatives très élevées. Puis, Fleck a proposé une nouvelle modélisation analytique qui résulte d'une approche affine où il suppose que le déplacement de chaque particule obéit au champ de vitesse de déformation moyen imposé à l'empilement [31, 32].

Le modèle développé par Fleck [31, 32] prédit des surfaces de charge associées aux compressions isotrope et en matrice mais à faible densité relative, parce que le modèle est basé sur l'hypothèse d'indépendance du contact entre deux particules par rapport aux contacts voisins (i.e, il faut que les différents contacts autour d'une même particule soient suffisamment éloignés les uns des autres pour qu'on puisse négliger l'influence d'un contact sur l'autre).

Grâce aux progrès rapides du matériel informatique, de nouveaux modèles numériques ont été développés qui permettent d'introduire directement les particules de poudres dans des simulations numériques avec un temps de calcul réduit. Dans la suite, une présentation détaillée des deux méthodes MED et MEFMP est faite.

### Méthode des éléments discrets (MED).

La méthode des éléments discrets (MED) initialement proposée par Cundall [23] conduit à des simulations numériques à travers lesquelles de nombreux phénomènes physiques peuvent être reproduits.

Cette méthode permet de reproduire le comportement macroscopique des milieux granulaires sollicités mécaniquement en simulant le comportement de l'interaction entre les particules. Chaque particule "élément discret" assimilée à une sphère est représentée par son centre et son rayon. L'interaction entre les éléments discrets en contact est décrite par plusieurs relations qui relient le déplacement relatif des particules à une force de contact. Ces relations représentées sur la figure 1.20 par des ressorts seront désignées dans la suite par le terme loi de contact.

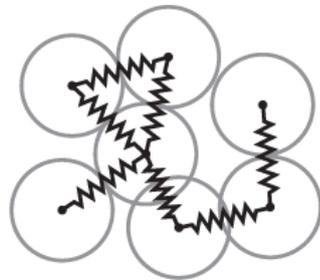


FIGURE 1.20 – Empilement de particule en éléments discrets.

Le principe de cette méthode est d'intégrer pour chaque pas de temps et chaque élément discret, l'équation de Newton qui permet d'obtenir les déplacements relatifs pour le pas de temps suivant à partir des forces de contact au pas de temps actuel [51].

Les éléments discrets sont indéformables, c'est à dire que les particules ne changent pas de forme. La méthode des éléments discrets est utilisée pour des

problèmes d'écoulement granulaires, dans lesquels la déformation des particules physiques est négligeable [91, 92, 94]. Cependant, les éléments discrets peuvent s'interpénétrer, et cette interpénétration est contrôlée par la loi de contact, de sorte à modéliser la déformation des particules, d'où son utilité dans l'étude du phénomène de densification des poudres industrielles.

Parmi les premières applications de la méthode des éléments discrets à la densification des poudres qui se sont reposées sur la théorie de Storåkers et al. [85], on cite : Martin [60] ; Martin et al. [62, 61], Heyliger et McMeeking [46] ; Skinjar et Larsson [82]. Cette méthode forme à ce jour le modèle éléments discrets le plus complet pour la modélisation de la compression des poudres métalliques. À travers les travaux de Heyliger et McMeeking [46] et Martin [60], il est possible à l'aide de la méthode des éléments discrets d'obtenir des surfaces de charge et de comparer les résultats de cette méthode et ceux des théories qui sont basées sur des champs de déformation homogènes.

Il faut préciser que l'application du modèle de Storåkers à la simulation par MED pour l'étude de la densification des poudres ductiles est limité par des valeurs de densité relative inférieures à 0,85 [62]. La figure 1.21 montre une comparaison entre les travaux réalisés par Martin et al. [62] (MED), Storåkers et al. [86] et les résultats expérimentaux de James [49] pour l'évolution de la pression moyenne en fonction de la densité relative d'une poudre de cuivre. En effet, à partir d'une densité relative de 0,85, l'interaction entre les différents contacts d'une même particule n'est plus négligeable. Aussi, les résultats issus de la MED, ont permis à Martin et al. [62] d'identifier l'importance de la prise en compte des mouvements non-affines des particules par le réarrangement local qui influe sur la réponse mécanique des matériaux granulaires.

Cependant, des études récentes dans le cadre de la description de la densification des poudres jusqu'à des densités relatives très élevées (supérieur à 0,9) ont été réalisées par la MED par Jérier et al. [50, 52], Harthong et al. [44, 42], Persson et Frenning [71] et Gonzalez [40]. Les modèles utilisés par ces auteurs permettent de prendre en compte les interactions entre plusieurs contacts sur une même particule dans un milieu confiné comme la poudre en haute densité relative. Olsson et Larsson [68] ont également formulé un nouveau modèle de contact permettant d'étendre le modèle de Storåkers à des déplacements relatifs nettement plus grands. Toutefois, ces travaux ne concernent que la force normale de contact et ne prennent pas en compte le changement de forme des particules, qui a une influence très importante sur

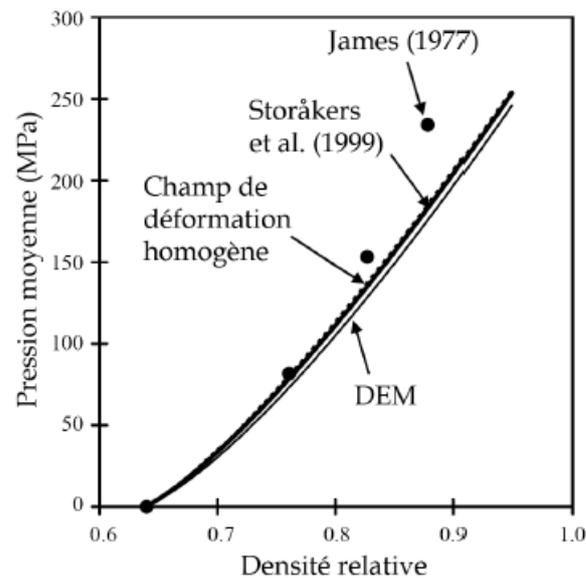


FIGURE 1.21 – La limite des méthodes utilisées par Martin et al. [62] et Storåkers [86] à une densité relative de 0,8 par rapport aux résultats expérimentaux de James [49]. Cette figure est issue des travaux de Martin et al. [62]

la cinématique des grains, et donc sur la déformation macroscopique ainsi que sur l'hétérogénéité des propriétés finales de la poudre comprimée.

### Méthode des éléments finis multi-particules (MEFMP).

L'utilisation de la MED reste limitée dès lors que la densité relative de l'empilement comprimé atteint une valeur importante, proche de l'unité. Généralement, les résultats trouvés par la MED sont intéressants par rapport aux mesures expérimentales jusqu'à des densités relatives qui ne dépassent pas 0,85. Cette limitation est due à l'expression de la loi analytique de contact issue de Storåkers et al. [86] reliant la force de contact entre deux particules et le rapprochement des centres.

La méthode multi-particule est désignée dans la littérature sous le nom de la méthode des éléments finis multi-particules (MEFMP) ou méthode des éléments discrets maillés (MEDM). Cette approche qui est un couplage de la méthode des éléments finis et d'une description géométrique discrète du milieu permet de caractériser les différents phénomènes physiques qui appa-

raissent au sein de l'empilement granulaire lors de la compression.

Le principe de cette méthode est de modéliser un empilement de particules maillées pour des simulations par la méthode des éléments finis. Chaque particule est décrite comme un corps continu déformable, décrit et composé par un maillage éléments finis. Ainsi, il n'est plus nécessaire d'utiliser des lois de contact analytiques pour modéliser la déformation des particules comme pour la méthode exposée précédemment car elles sont des ingrédients indispensables aux modèles éléments discrets (MED). La MEFMP possède des lois de contact au niveau des noeuds des surfaces en contact qui permettent de modéliser la physique locale au contact.

Comme la MED, cette méthode permet de mettre en place une approche multi-échelles très puissante, permettant de remonter au comportement du milieu granulaire à partir du comportement du grain.

Parmi ceux qui ont développé cette méthode pour l'étude de la compression des poudres métalliques on trouve Ransing et al. [75], Gethin et al. [38], Gethin et al. [39] et Lewis et al. [59]. Par la suite, cette méthode a été développée par Procopio et Zavaliangos [74]. En 2007, elle est adaptée et utilisée par Chen et al. [16] pour la simulation en 3D et aussi par Frenning [35, 36]. Par la suite, Schmidt et al. [79] et Harthong et al. [42] ont utilisé cette méthode pour obtenir des surfaces de charge.

Cette méthode permet d'analyser la compression d'un empilement de particules sous des conditions de chargement quasi-statiques et utilisant un schéma d'intégration explicite présent dans les codes commerciaux d'éléments finis comme ABAQUS [2]. L'utilisation de ce schéma de résolution dans les simulations numériques est adaptée dans le cas d'un grand nombre de contact et de grandes amplitudes de déformation.

Dans ce type de méthode, les lois de comportement utilisées pour les simulations incluent les propriétés intrinsèques attribuées au matériau constitutif des particules comme le module de Young, le coefficient de Poisson, le coefficient de frottement, l'écroutissage, etc.

L'intérêt de cette méthode est la possibilité de prendre en compte des particules déformables et de simuler les interactions entre un petit nombre de particules à partir de la déformation du maillage en un temps raisonnable (figure 1.22). La mise en oeuvre du maillage confère à la MEFMP la capacité de pouvoir simuler précisément l'action d'un contact inter-particules par

des conditions classiques de contact (la formulation de contact utilisée dans cette thèse est celle d'ABAQUS [2] et qui sera développée dans le paragraphe suivant) ce qui permet de contourner le problème de contact élasto-plastique.

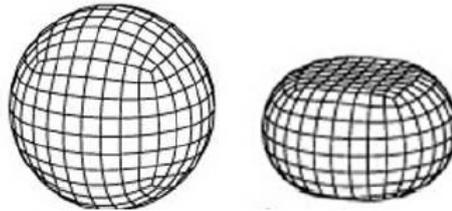


FIGURE 1.22 – Particule discrétisée par des éléments finis hexaédriques est utilisée dans les simulations numériques par la MEFMP pour des grandes déformations. Cette figure est issue de la thèse de Jérier [51]

La méthode des éléments finis multi-particule permet, potentiellement, la prise en compte relativement aisée de formes plus complexes et plus réalistes pour les particules, ce qui n'est pas le cas avec les éléments discrets où la forme des particules est constante pendant toute la simulation. De plus, elle a l'avantage de fournir plusieurs informations à l'intérieur des particules, dont les répartitions des contraintes et des déformations afin de comprendre les différents aspects de la densification.

Le principal handicap de cette méthode réside dans le temps de calcul, qui résulte du nombre d'éléments nécessaires pour mailler chaque particule. Dans ce cas, la modélisation des particules aux formes complexes par cette méthode sera limitée à cause du nombre limité d'éléments nécessaires pour décrire ces formes ainsi que le nombre de particules qu'il est possible de modéliser.

### 1.3.3 Positionnement de la MEFMP par rapport à la DEM.

La méthode des éléments discrets conduit à des simulations numériques à travers lesquelles une grande partie des phénomènes intervenant dans la compression des poudres ductiles sont reproduits à travers la réalisation des trajets de chargements qui ne sont pas réalisables par l'expérimentation.

Du point de vue modélisation, la méthode analytique et la MED possèdent une limitation qui réside dans la loi de contact. Les problèmes de contact élastique en petites déformation sont résolus par la théorie de Hertz mais les solutions trouvées jusqu'à maintenant pour les problèmes de contact élasto-plastique sont assez limitées au niveau de la densité relative et de la taille de contact [63, 64]. En d'autres termes, les équations issues de Storåkers et al. [85], qui ne sont valides que pour des contacts indépendants et pour de petites surfaces de contact, ne permettent pas de décrire les efforts macroscopiques pendant la densification des poudres métalliques ductiles au-delà d'une densité relative de 0,85.

Aucun modèle micromécanique rencontré dans la littérature qui repose sur la théorie de Storåkers et qui est intégré à la méthode des éléments discrets n'est capable de décrire et prendre en compte les phénomènes apparaissant lors de la compression de poudres ductiles lorsque la densité relative dépasse cette valeur. En effet, cette méthode est incapable de reproduire les efforts de compression mesurés lors de la compression dès lors que les densités relatives atteintes sont supérieures à des valeurs de l'ordre de 0,8-0,85. Cette limitation est essentiellement due à la formulation de la loi de contact analytique entre deux particules.

Actuellement, dans le cadre des hautes densités relatives, proche de l'unité, les travaux de Jérier et al. [50, 52], Harthong et al. [44] ont permis de combiner les avantages des deux méthodes MED et MEFMP pour formuler une loi de contact pour la méthode des éléments discrets en haute densité relative qui était nommée *loi haute-densité*. Cette loi de contact est destinée à reproduire les efforts de l'interaction entre les différents contacts autour d'une particule à haute densité relative. Après avoir déterminé l'expression analytique de cette loi de contact, elle a été implantée par la suite dans un code d'éléments discrets open-source YADE pour modéliser un empilement de 32 particules avec une compression isotrope et en matrice. Cette approche démontre qu'il est possible de déterminer la force normale de contact en haute densité relative qui permet de reproduire par la suite les contraintes macroscopiques sur l'empilement (figure 1.23).

La figure 1.23 montre la contrainte macroscopique (la force résultante sur chaque paroi divisée par la surface correspondante) est presque confondue pour les deux méthodes numériques et le modèle de Storåkers pour une densité relative qui ne dépasse pas la valeur de 0,8, et pour la loi haute-densité pour une densité relative de 0,95.

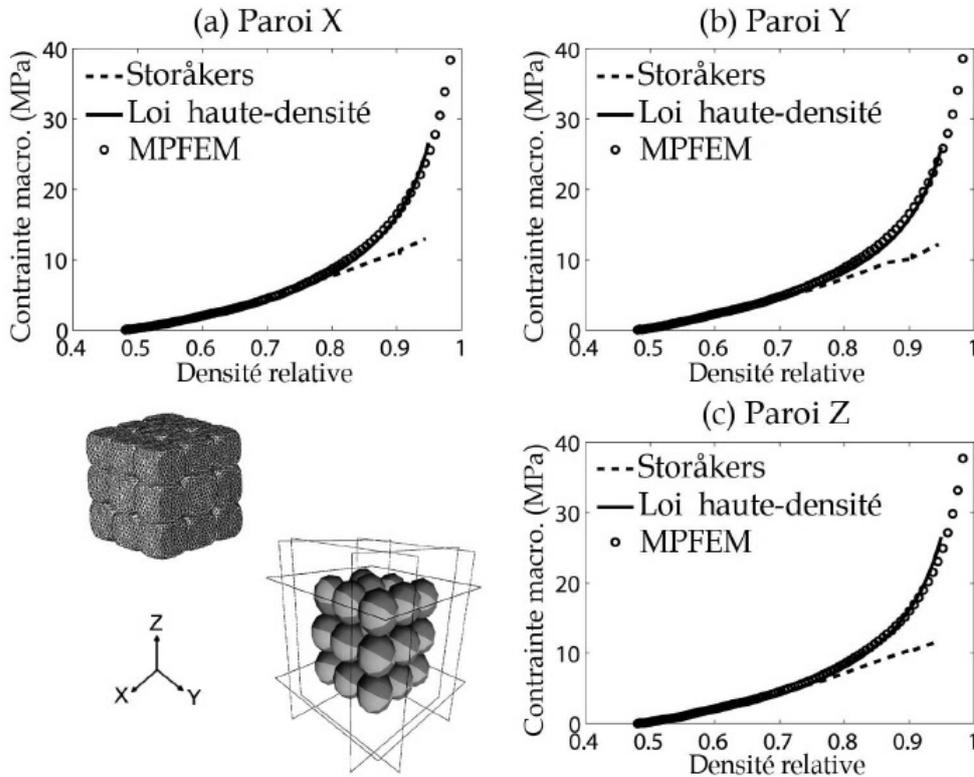


FIGURE 1.23 – Comparaison des contraintes macroscopiques sur l'échantillon de 32 sphères en compression isotrope avec les méthodes MEFMP et MED [42].

La limite de cette approche réside dans le fait que seule l'évolution en haute densité relative de la composante normale de la force de contact a été prise en compte. La modélisation de la compression à haute densité relative comporte d'autres phénomènes comme, par exemple, le problème de la détection des contacts en haute densité relative. Aussi, avec cette modélisation, les rotations des particules sont laissées libres, de sorte qu'il est difficile d'obtenir une cinématique proche de la MEFMP ce qui influe sur la répartition des contraintes ou sur la densité relative locale. En plus, leurs travaux sont limités aux chargements classiques (isotrope et en compression) sur un petit empilement de 32 sphères. Il est intéressant alors d'étudier la réponse mécanique d'un empilement aléatoire avec un nombre important de sphères pour toutes sortes de sollicitations.

De sorte à simuler des empilements à très haute densité relative, la méthode des éléments finis multi-particules (MEFMP) fournit de beaux résultats impliquant de grandes amplitudes de déformation plastique dans les particules maillées (figure 1.24). Cette méthode permet la prise en compte de formes plus complexes et plus réalistes des particules, aussi elle n'a pas besoin de formuler des lois de contact pour caractériser le comportement mécanique du matériau. En effet, les interactions entre les particules maillées sont intégrées par des conditions classiques de contact. La formulation utilisée dans ce travail est celle implantée dans le logiciel ABAQUS [1, 2] qui est fondée sur le principe suivant :

- Si la surface d'une particule A est en contact avec la surface d'une autre particule B ou la distance entre les deux particules A et B est positive (c'est-à-dire les surfaces des deux particules ne sont pas en contact), alors chaque noeud appartenant à la surface A se voit appliquer une force nulle.
- Si les deux surfaces A et B s'interpénètrent, la distance qui les sépare est négative, alors chaque noeud appartenant à la surface A attribue une force proportionnelle à la distance qui le sépare de B.

Dans le cas où la raideur est très grande, l'interpénétration des surfaces est quasi nulle, ce qui réalise la condition de contact. À l'inverse de la DEM, les particules s'interpénètrent selon une relation force-déplacement non linéaire pour simuler la déformation des particules.

### 1.3.4 Validation expérimentale de la MEFMP.

Actuellement, la simulation discrète pour les chercheurs s'avère être un outil très intéressant et peu coûteux par rapport à la démarche expérimentale présentée dans le paragraphe 1.3.1. La modélisation discrète permet l'accès d'une part, à la compréhension des phénomènes granulaires à travers les informations locales qu'elle permet d'obtenir, et d'autre part, aux réponses des matériaux lors de chargements pratiquement quelconques.

L'étude de la compression en 3D par la méthode des éléments finis multi-particules des poudres métalliques ductiles a été proposée dans les travaux de Chen [17, 16] à partir d'un code commercial d'éléments finis ABAQUS. Chen a présenté une démarche de validation expérimentale de la méthode des éléments finis multi-particules. Dans ces travaux, il a étudié au cours de

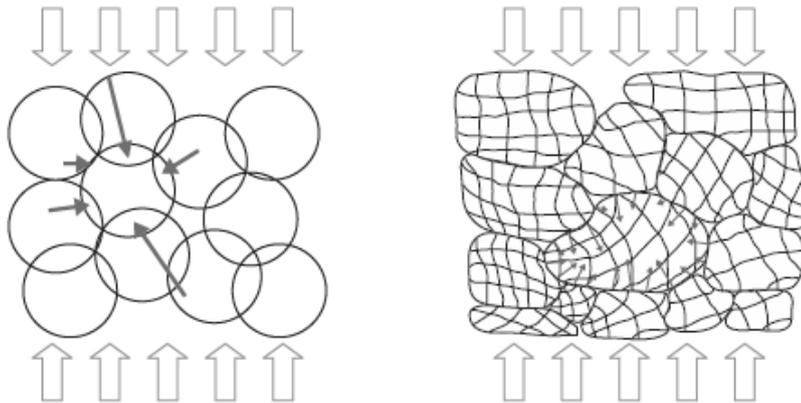


FIGURE 1.24 – Illustration du contact entre la méthode des éléments discrets et la méthode des éléments finis multi-particules. Cette figure est issue de la thèse de Harthong [42].

la compression plusieurs empilements de particules de plomb de taille macroscopique (de l'ordre de 10 mm de diamètre) mono-disperses et poly-disperses sous divers types de sollicitations afin de comparer les résultats de la MEFMP et de l'expérience.

L'utilisation de l'alliage de plomb est expliquée par le fait qu'il est possible de comprimer des échantillons de tailles assez importantes avec des pressions raisonnables, d'autre part, qu'il se moule facilement en des particules de grands diamètres. De plus, le plomb est un matériau intéressant car il est très malléable et il supporte des grandes déformations plastique avant rupture. Néanmoins, il possède l'inconvénient d'avoir une sensibilité importante à la vitesse de déformation. Pour remédier à ce problème, des essais ont été réalisés avec des vitesses de déformation faibles, de l'ordre de  $10^{-3}$  à  $10^{-4}$   $s^{-1}$  en prenant soin d'y intégrer des étapes de relaxation afin de supprimer l'effet visqueux du matériau. L'ajustement des données est ensuite réalisé sur le fond des pics de relaxation. La figure 1.25 montre l'étude réalisé par Chen [16] pour caler la loi de comportement à partir des résultats expérimentaux après relaxation sur un cylindre constitué par l'alliage de plomb soumis à des compressions jusqu'aux hautes valeurs de densité relative.

Afin de valider et d'analyser la MEFMP en 3D en terme de sensibilité et de robustesse pour qu'elle soit capable de remplacer l'expérience dans les études à venir, une étude a été réalisée et testée en variant quelques paramètres typiques d'une approche éléments finis (maillage, schéma de résolution, etc...)

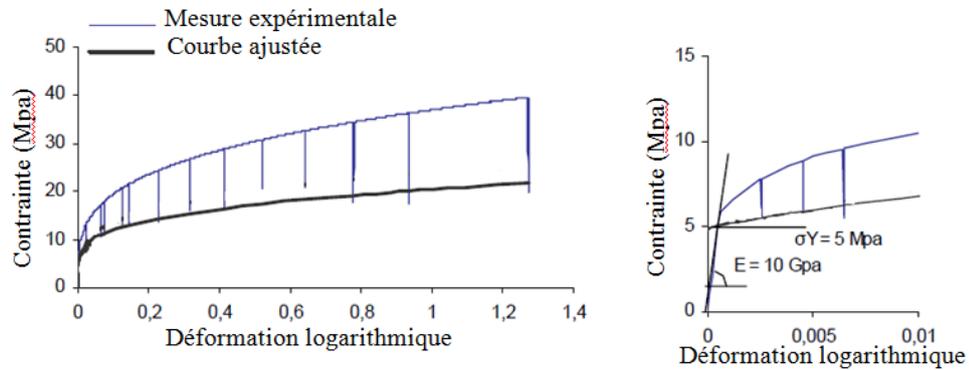


FIGURE 1.25 – Ajustement des paramètres du matériau sur un essai de compression simple homogène d'un échantillon cylindrique de plomb [16].

dans le but d'optimiser dans l'avenir les coûts de calculs des simulations de la MEFMP.

Afin de valider la MEFMP par rapport aux résultats expérimentaux, Chen a commencé par un essai de compression simple d'une particule entre deux plans puis deux essais en compression en matrice cylindrique sont appliqués sur des empilements de neuf particules identiques (figure 1.26). Lors de ces essais les 9 particules sont extraites de la matrice puis séparées, et la géométrie de la particule centrale est comparée avec succès à celle calculée par la simulation.

La figure 1.27 illustre une comparaison entre la simulation numérique et l'expérience pour le cas de la particule centrée de l'empilement de 9 particules soumis à une compression en matrice jusqu'à une densité relative  $D_f = 0,97$ . Lors de ces essais, les 9 particules sont retirées de la matrice puis séparées et la géométrie de la particule centrale est comparée à celle obtenue par la simulation. La comparaison des résultats est effectuée par la mesure des angles entre deux surfaces voisines (les angles  $\beta$  et  $\theta$  sont bien illustrés sur la figure 1.27). Les angles mesurés sont  $\beta = 116^\circ$  et  $\theta = 92^\circ$  pour l'expérience et  $\beta = 117^\circ$  et  $\theta = 104^\circ$  pour la simulation. Les résultats observés sont plutôt satisfaisants. Il est clair que l'allure de l'empilement numérique après compression à haute densité relative montre une grande ressemblance avec l'allure de l'empilement réel de particules de poudre déformé sous presse.

Un autre essai de compression a été réalisé sur un empilement cylindrique de 150 particules de plomb de tailles différentes (trois diamètres différents)

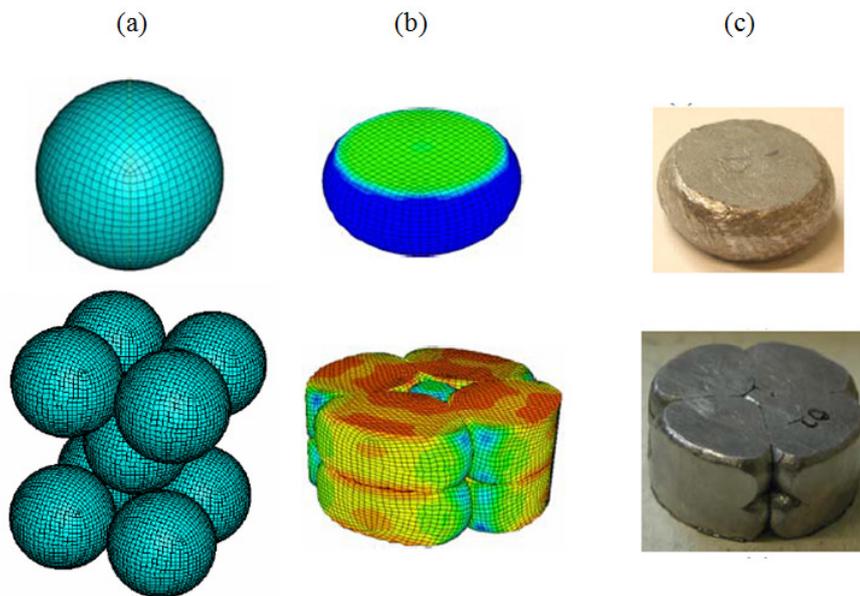


FIGURE 1.26 – Comparaison d’une simulation MEFMP avec l’expérience [16] pour une particule et 9 particules. (a) Empilement maillé. (b) Empilement déformé pour une densité relative de 0,97. (c) Empilement déformé expérimentalement pour une densité relative de 0,97.

jusqu’à une densité relative de 0,92. Les résultats ont été satisfaisants. En effet, les géométries des échantillons numérique et expérimental après compression dans la figure 1.28 montre que les résultats expérimentaux du déplacement et de la déformation des particules sont bien reproduits par la simulation.

Ainsi, la méthode des éléments finis multi-particules présente de nombreux avantages en termes de précision qui sont dus à la discrétisation par les éléments finis de chaque particule. Les simulations numériques mises en place par Chen ont la capacité de reproduire de grandes déformations des particules mais surtout la compression de poudre à de très hautes valeurs de densité relative avec une grande précision par rapport aux résultats expérimentaux.

La fiabilité et la robustesse des résultats de la MEFMP nous permet de considérer cette méthode comme une référence par rapport aux théories sur la densification des poudres ou à la méthode des éléments discrets.

Au vu des quelques éléments présentés dans les paragraphes 1.3.3 et 1.3.4,

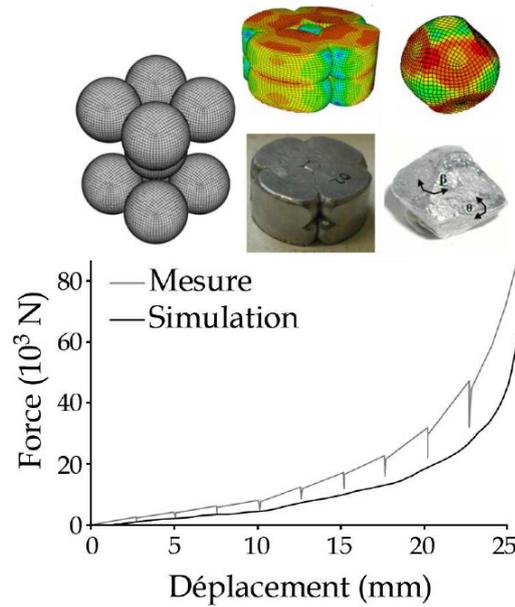


FIGURE 1.27 – Comparaison des résultats des simulations et des données expérimentales de Chen [16] pour une compression de 9 particules dans une matrice cylindrique. Pour la simulation, des coefficients de frottement de 0,25 entre les particules et la matrice et 0,1 entre les particules ont été appliqués.

il apparaît que la méthode des éléments finis multi-particules est potentiellement très précise et fiable, mais qu'elle est limitée par un temps de calcul important pour un grand nombre de particules, alors que la méthode des éléments discrets est moins précise puisque qu'elle considère des particules rigides (non déformables) ce qui empêche de reproduire le comportement mécanique des poudres à très haute densité relative. Ainsi, la MEFMP pourrait représenter un compromis très intéressant entre précision et temps de calcul si on travaille avec des empilements de tailles réduite. Cette méthode sera retenue pour la suite de notre étude.

### 1.3.5 Évolution de la surface de charge avec la MEFMP.

Dans cette partie, on se concentre sur la caractérisation des surfaces de charge en fonction du chemin de chargement qui a fait l'objet d'efforts de recherche importants avec des approches différentes : expérimentales [4, 69, 70, 80, 84], analytiques [29, 32, 31] et numériques [46, 61, 62, 52, 79, 42, 43].

On s'intéresse dans la suite aux travaux de mon prédécesseur Barthélémy

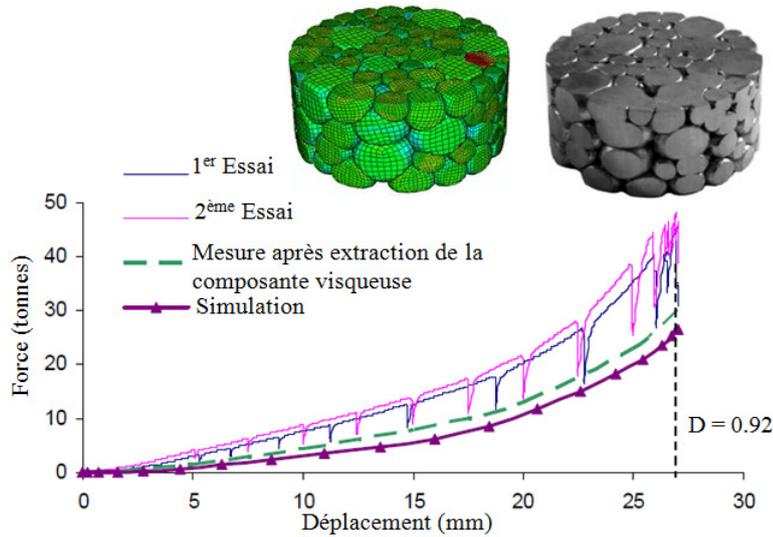


FIGURE 1.28 – Comparaison entre les résultats des simulations et les données expérimentales pour une compression en matrice cylindrique d’un empilement de 150 particules de plomb de trois tailles différentes [16].

Harthong réalisés lors de sa thèse [42] au sein du laboratoire 3SR parce qu’elle porte sur l’utilisation de la méthode des éléments finis multi-particules pour l’étude d’un empilement aléatoire de particules (15 particules) pour caractériser l’évolution des surfaces de charge en fonction du chemin de chargement avec différentes densités relatives.

Les figures 1.29.b et 1.29.c montrent, pour une compression isotrope et en matrice, les surfaces de charge associées à un empilement aléatoire monodisperse de 15 particules pour différentes valeurs de densités relative (jusqu’à 0,95). Elles montrent également que les résultats sont qualitativement similaires aux résultats expérimentaux [80], analytiques [86] et MED [60] connus. En effet, les surfaces de charge correspondant au chargement isotrope possèdent une forme similaire, approximativement elliptique et symétrique par rapport à l’axe hydrostatique. En plus, elles sont orientées dans la direction du chemin qui correspond à l’axe hydrostatique pour le cas isotrope et qui en diffère dans le cas de la compression en matrice. Il est clair que l’évolution des surfaces de charge avec la densification est une croissance approximativement homothétique et leur taille est liée à la position du point de chargement.

Contrairement aux analyses analytiques [32, 31, 86] et numériques à travers la MED [46, 60], aucun point singulier ou sommet n’était visible sur

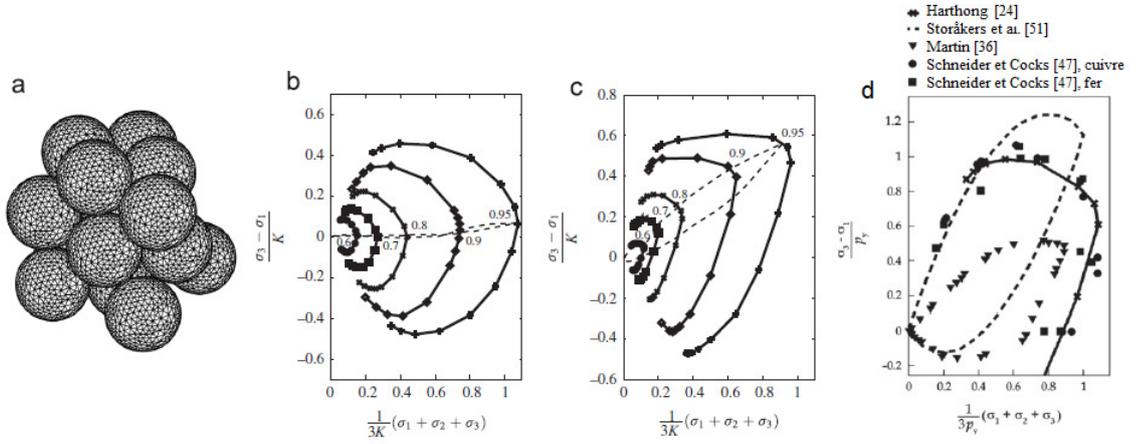


FIGURE 1.29 – Résultats obtenus par Harthong [42] : (a) Empilement monodisperse de 15 particules. Évolution des surfaces de charge avec différentes valeurs de densité relative pour deux chargements monotones : (b) Compression isotrope, (c) Compression en matrice. La ligne en pointillé est le chemin de charge/décharge initial. (d) Comparaison entre le résultat de Harthong [43] pour une compression en matrice à  $D_f = 0,8$  et les résultats : expérimentaux de Schneider et Cocks [80], analytiques de Storakers [86] et MED de Martin [60] pour des poudres sphériques. Les surfaces de charge sont normalisées par  $p_y$  qui est la pression moyenne au point de chargement.

les surfaces de charge de Harthong [42]. Selon Fleck [32], ce point singulier est dû à une incertitude de la réponse en déformation causée par le fait que tous les contacts subissent un chargement purement normal. L'existence du point singulier n'a été ni approuvée ni dénoncée par l'expérimentation en raison de la difficulté de détecter plus de points proches du point de chargement.

Harthong a étudié aussi dans ses travaux l'évolution des surfaces de charge au cours d'un changement de direction du chemin de chargement afin d'identifier les mécanismes mis en jeu. Cinq chemins de chargement ont été utilisés : Le premier et le deuxième correspondent à un premier chargement classique (isotrope et en matrice) qui ont créé une surface de charge du type celles présentées en figures 1.29.b et 1.29.c. Le troisième chemin correspond à un chemin nommé "isotrope-déviatoire" (figure 1.30.a), le quatrième correspond à un chemin qui est appelé "matrice-déviatoire" (figure 1.30.b) et enfin le cinquième chemin est définie par "chemin déviatoire" (figure 1.30.c) .

La figure 1.31 montre les surfaces de charge obtenues par Harthong [43]

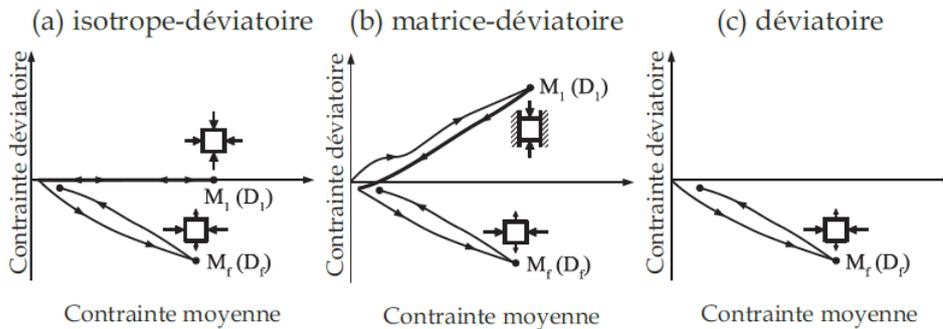


FIGURE 1.30 – Chemins de chargement utilisés pour obtenir des surfaces de charge. (a) Isotrope-déviatoire : compression isotrope suivie du chemin déviatoire. (b) Matrice-déviatoire : compression en matrice suivie du chemin déviatoire. (c) Déviatoire : chemin déviatoire monotone, sans compression préalable.  $D_1$  correspond à la densité relative intermédiaire du point de chargement intermédiaire ( $M_1$ ).  $D_f$  correspond à la densité relative finale du point de chargement final ( $M_f$ ). Les petites figures avec des flèches indiquent le déplacement des parois pour chaque chemin de chargement [42].

qui sont représentées dans le plan contrainte déviatoire-contrainte moyenne. Les résultats montrent que la forme de la surface de charge pour les chemins composés dépend de la densité relative intermédiaire  $D_1$  qui varie entre 0,6 et 0,9. En effet, pour les faibles densités relatives intermédiaires  $D_1 = 0,6$ , les surfaces obtenues avec les chargements isotrope-déviatoire et matrice-déviatoire sont orientées sur le second chemin. Pour les hautes densités relatives intermédiaires  $D_1 = 0,9$ , les surfaces de charge restent orientées suivant le premier chemin (figure 1.31).

Il ressort d'après ces résultats que les surfaces de charge sont d'une part, liées aux chemins de chargement et à la position du point de chargement et d'autre part, elles peuvent évoluer suivant deux différents types d'écroûissage : isotrope (croissance homothétique des surfaces) ou cinématique (rotation des surfaces). Ce type de comportement a été identifié en mécanique des sols pour les sables [58], les argiles [24]. Dans la métallurgie des poudres, Brandt et Nilsson [11] ont développé un modèle avec écroûissage cinématique pour des carbures dans le cadre où la densité relative reste faible.

L'application de la méthode des éléments finis multi-particules sur un empilement de taille réduite a permis la mise en évidence de mécanismes d'écroûissage qui n'avaient pas été observés précédemment pour les poudres

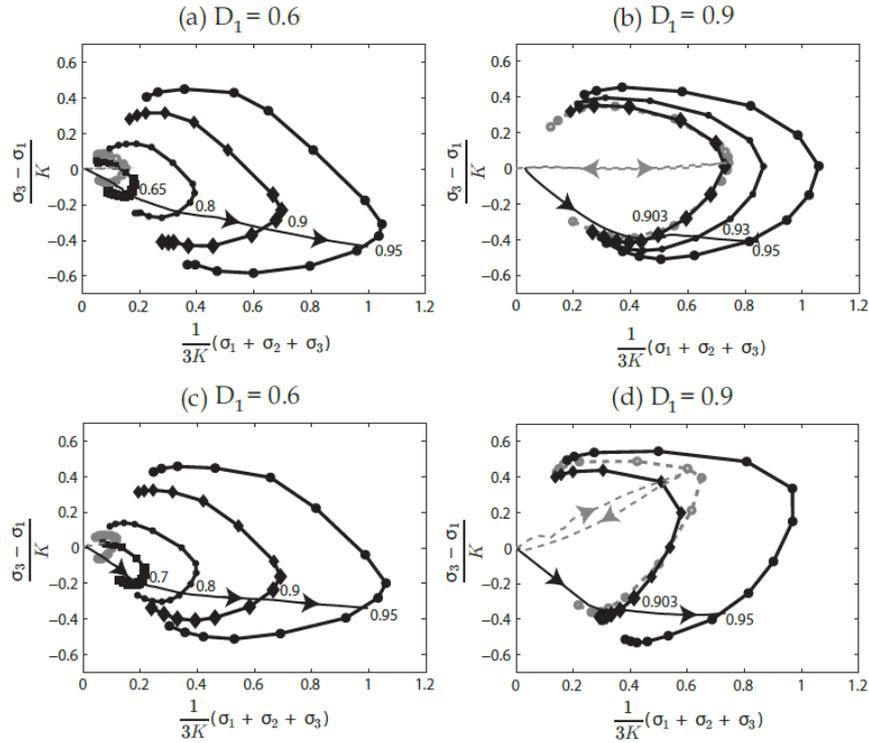


FIGURE 1.31 – Évolution des surfaces de charge avec différentes densités relatives intermédiaires  $D_1 = 0,6$  et  $0,9$  pour (a) et (b) chargement isotrope-déviatoire et (c) et (d) chargement matrice-déviatoire. Les nombres indiquent la densité relative finale  $D_f$  pour chaque surface. La surface en pointillés gris est la surface de charge qui correspond à la première partie du chargement isotrope déviatoire (c'est-à-dire la compression isotrope jusqu'à la densité relative  $D_1$ ). Les chemins de chargement associés sont également représentés (lignes avec flèches)[43].

métalliques ductile. Elle permet de plus de relier ces mécanismes à l'évolution de la microstructure de l'empilement numérique et notamment à l'évolution du réseau de contact entre les particules [42] (ce sujet sera développé plus en détails dans le paragraphe 3.2.2 du Chapitre 3). Toutefois, très peu de travaux dans le domaine des poudres industrielles se rapportent à la caractérisation de l'écoulement plastique en vue de l'écriture d'une loi d'écoulement adaptée à ces matériaux. Ce travail est l'objectif principal des chapitres suivants.

### 1.3.6 Conclusion.

Dans ce chapitre, des généralités sur le procédé de compression à froid ont été présentées. La phase de compression a été bien développée puisqu'elle conditionne fortement les propriétés mécaniques finales de la pièce. L'objectif de cette thèse est de modéliser le comportement de la poudre ductile pendant cette phase pour anticiper et optimiser les propriétés mécaniques de la pièce finale et d'arriver à éviter les défauts sur les pièces.

La modélisation du comportement mécanique des poudres ductiles lors de la densification peut être appréhendée par des approches numériques continues et discrètes.

L'approche macroscopique représente la première approche utilisée pour simuler la compression de la poudre. Elle utilise les hypothèses des milieux continus à l'aide d'un maillage éléments finis associé à une loi de comportement macroscopique, par exemple construite autour d'un modèle de Drucker-Prager Cap. Cette approche est caractérisée par la facilité de sa mise en oeuvre. Néanmoins, elle reste encore limitée et doit connaître certaines évolutions surtout au niveau de l'effet des chemins de chargement appliqués sur la poudre pendant la phase de compression.

Pour pallier aux problèmes des modèles macroscopiques existants, de nouveaux formalismes ont été développés à travers des approches discrètes qui abordent une description à l'échelle des particules de poudre. Parmi ces simulations discrètes on trouve la méthode des éléments discrets (MED) qui permet de caractériser le comportement mécanique de la poudre ductile à travers la modélisation d'un empilement contenant un nombre important de particules à travers des lois de contacts simplifiées, mais cette méthode n'arrive pas à reproduire le comportement phénoménologique de la compression de poudres pour des valeurs élevées de densité relative. La deuxième méthode est la méthode des éléments finis multi-particules (MEFMP) qui est très efficace, mais malheureusement très coûteuse en temps de calculs dès lors que l'empilement dépasse une centaine de particules. Toutefois, la MEFMP est retenue pour notre étude, tout en travaillant avec un empilement de taille réduite, en raison :

- de la possibilité de modéliser le comportement du matériau sans avoir recours à des lois de contact. En plus, il est possible de simuler des particules de toute géométrie et tous matériaux.

- de sa précision au niveau de la description de la réponse mécanique à l'échelle granulaire.
- d'avoir une description très fine de la microstructure déformée au cours du chargement, ce qui permet de relier ce comportement mécanique moyen à la forme et la configuration des particules et des contacts.

Quelle que soit l'approche utilisée, un certain nombre de travaux sur la caractérisation expérimentale des poudres industrielles ont été publiés. En revanche, les études expérimentales ou numériques de la déformation plastique incrémentale sont très peu nombreuses. On cite le travail expérimental de Pavier [69] qui a mis en évidence certaines spécificités du comportement d'une poudre de fer à travers les notions des surfaces de charge et de potentiel plastique. Ces études montrent que le comportement des poudres n'est pas associé (c'est-à-dire que les surfaces de charge et les surfaces iso-potentielles ne sont pas confondues) surtout au voisinage de l'axe des contraintes isotrope (figure 1.32). Aussi, les surfaces iso-potentielles ainsi que les surfaces de charge dépendent du chemin suivi (essai surconsolidé et normalement consolidé).

Cependant, plusieurs études expérimentales et numériques ont été réalisées sur la caractérisation du comportement incrémental des sols granulaires. Royis et Doanh [76], Nakai et Wood [67] ont réalisé des campagnes d'expérimentation sur le sable d'Hostun où ils ont appliqué des chemins proportionnels de contrainte et mesuré l'incrément de déformation. Cependant, peu de travaux expérimentaux ont été effectivement réalisés sur le sable en raison de la difficulté extrême de l'application de ces incréments de contrainte par l'expérience. En effet, il faut arriver à la fois à séparer la déformation plastique de la déformation totale pour chaque incrément de contrainte appliqué.

Dans une tentative de contourner ces problèmes expérimentaux, Bardet et Proubet [7] sont les premiers chercheurs qui ont proposé l'utilisation de la simulation numérique avec la méthode des éléments discret (MED) comme un outil pratique pour étudier l'écoulement plastique des matériaux granulaires. Les premières études ont été réalisées sur des empilements aléatoires de disques circulaires en 2D, puis d'autres améliorations ont été fournies par Bardet [5, 6] et Calvetti et di Prisco [13].

Récemment, cette approche a été relancée, grâce aux améliorations significatives des moyens de calcul, puisqu'il est possible aujourd'hui d'effectuer des campagnes d'expérimentations numériques en 3D. Parmi les études ré-

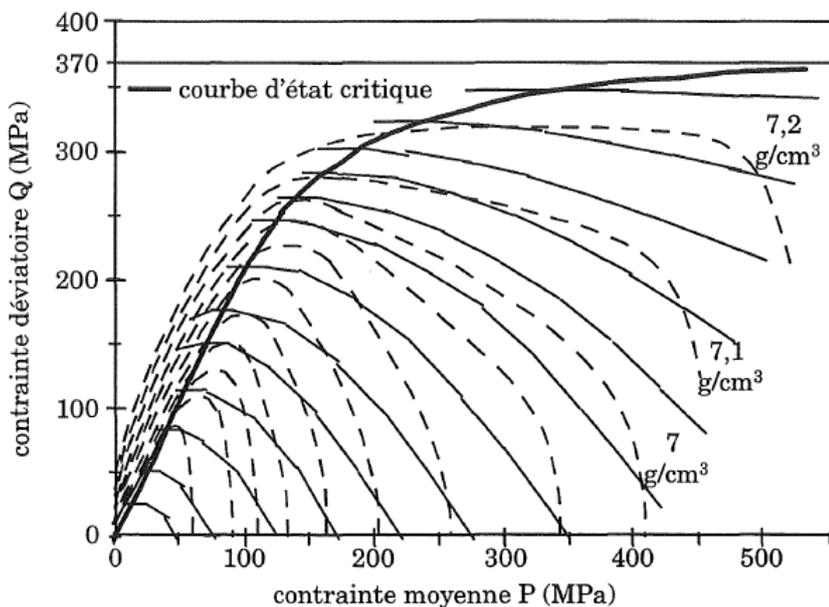


FIGURE 1.32 – Courbes isodensités (en pointillés) et potentielles (continues) obtenues pour une poudre de fer par Pavier [69] pour un essai normalement consolidé. La densité de  $7,2 \text{ g/cm}^3$  correspond à une densité relative de 0,98.

centes des chercheurs sur cette étude, on cite Calvetti et al. [14, 15, 90], Darve et al. [25], Tamagnini et al. [87], Kishino et al. [57], Kishino [56], Plassiard et al. [72] et Wan et al. [93].

En raison de manque de résultats sur l'étude de l'écoulement plastique par la MEFMP dans le domaine des poudres métalliques ductiles et grâce à son grand potentiel, cette méthode sera utilisée dans le cadre de notre étude afin de donner un aperçu sur la loi d'écoulement.

Le Chapitre 2 est dédié à la description des protocoles de simulations numériques afin d'étudier l'écoulement plastique des matériaux granulaires.



# Chapitre 2

---

## Protocole de simulation numérique.

*Dans ce chapitre, on présente les protocoles de simulation d'un échantillon numérique par la méthode des éléments finis multi-particules MEFMP pour décrire le comportement élasto-plastique des poudres métalliques ductiles pendant la phase de compression.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction.</b>	<b>52</b>
<b>2.2</b>	<b>Modèle numérique.</b>	<b>53</b>
2.2.1	Construction de l'échantillon numérique.	53
2.2.2	Obtention d'une surface de charge en pilotage en déformation.	57
2.2.3	Choix de l'empilement initial.	63
<b>2.3</b>	<b>Simulation en contrainte.</b>	<b>69</b>
2.3.1	Mise en place du pilotage en contrainte.	70
2.3.2	Étude de l'écoulement plastique.	73
<b>2.4</b>	<b>Simulation en déformation.</b>	<b>78</b>
2.4.1	Dissipation d'énergie en fonction de la direction de l'incrément de déformation totale pour un matériau à potentiel.	79
2.4.2	Test de validation : cas d'un matériau dense élasto-plastique de type Von Mises.	84
<b>2.5</b>	<b>Conclusion.</b>	<b>88</b>

---

## 2.1 Introduction.

La formulation d'un modèle continu consiste à considérer la poudre comme un matériau continu et à observer sa réponse à partir d'une étude expérimentale à travers différents types de sollicitations et de chemin de chargement. Le Chapitre 1 a expliqué les difficultés rencontrées dans la démarche expérimentale au niveau de la caractérisation, en particulier le nombre limité de chemins de chargement techniquement réalisables et aussi l'importance pour les industriels de la maîtrise du comportement mécanique des poudres jusqu'à des hautes densités relatives.

Parmi les autres pistes pour arriver à comprendre le comportement mécanique des poudres, on trouve la modélisation discrète. L'utilisation de cette approche pour l'étude du comportement des poudres en haute densité relative est peu coûteuse et donne la possibilité de réaliser en simulation numérique un grand nombre de chemins de chargement ainsi que d'obtenir des informations sur la structure granulaire.

Puisque l'utilisation de la MED exige l'application d'une loi de contact, on peut utiliser avantageusement la méthode des éléments finis multi-particules, qui consiste à modéliser un assemblage de particules maillées en éléments finis interagissant par contact, pour reproduire les essais mécaniques expérimentaux sur des poudres métalliques ductiles (cf. paragraphe 1.3.3 du Chapitre 1). L'application de cette méthode permet d'une part d'avoir des informations locales et précises sur la distribution des contraintes et des déformations ainsi que les surfaces de contact.

Ce chapitre décrit l'application de la méthode des éléments finis multi-particules pour étudier le comportement élasto-plastique d'un empilement numérique à travers les notions de surface de charge, qui ont fait l'objet d'efforts de recherches expérimentales [4, 69, 70, 80], analytiques [29, 32, 31, 86] et numériques [46, 78, 79, 39, 61, 60, 42, 43] et de loi d'écoulement. Il existe très peu de recherches scientifiques dans le domaine des poudres métalliques ductiles [70] qui ont donné un aperçu sur la loi d'écoulement parce qu'il est difficile d'arriver à séparer l'incrément de déformation plastique et l'incrément de déformation élastique. Mais on peut trouver beaucoup d'études numériques et expérimentales dans le domaine de la mécanique des sols [67, 13, 14, 15, 25].

La mise en oeuvre de cette méthode assure notamment la description précise des variations de formes des particules et la modélisation du contact en grandes déformations élasto-plastiques de manière à simuler la compaction

des poudres de faible (0,6) à haute (0,98) densités relatives afin d'éclaircir certains aspects de la mécanique des matériaux granulaires à grains très déformables.

Ce chapitre détaille les différents protocoles de simulation de la réponse d'un empilement numérique utilisés dans ce travail. Nous présentons dans ce chapitre la méthode mise en place par la MEFMP pour caractériser très finement l'écoulement plastique d'un échantillon numérique. Le paragraphe 2.2 détaille les éléments de modélisation pour la simulation par la MEFMP. Le paragraphe 2.3 présente les protocoles de simulation pour obtenir le vecteur écoulement plastique. Le paragraphe 2.4 est destiné à l'étude de la dissipation plastique en pilotage en déformation.

## 2.2 Construction et choix de l'échantillon numérique ; modèles de comportement et de contact.

### 2.2.1 Construction de l'échantillon numérique.

Cette partie est dédiée à la mise en place d'un échantillon numérique sous la forme d'un empilement de particules en comportement élasto-plastiques distribuées aléatoirement (par la méthode des éléments finis multi-particules).

#### Génération d'un empilement de particules aléatoire.

La méthode mise en place consiste à développer des scripts en langage python qui créent de manière automatique un échantillon sous la forme d'un empilement de particules distribuées aléatoirement et des fichiers de calculs nécessaires à la simulation des différents chemins de chargement. Ces routines sont exécutées par la suite avec le code commercial d'éléments finis ABAQUS /Explicit.

En réalité, la forme des particules pour des poudres métalliques réelles varie entre des formes régulières "sphériques" et des formes irrégulières. Pour simplifier, on considère ici un empilement de particules sphériques qui est censé reproduire les caractéristiques essentielles des poudres métalliques au cours d'une compression. Cet empilement a été obtenu à l'aide d'un générateur d'empilement implanté dans le code open source d'éléments discrets YADE [83] et il est décrit par les coordonnées des centres des particules sphé-

riques  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et leurs rayons. Les particules sont introduites dans un volume cubique de dimensions  $1 \times 1 \times 1$  (mm) entouré par six parois rigides (Figure 2.1).

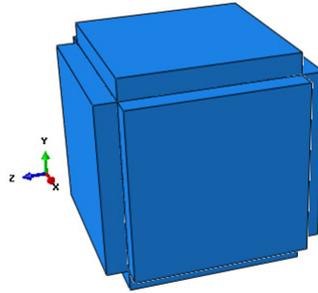


FIGURE 2.1 – Boite cubique entourée de six parois rigides.

### Maillage des particules.

Dans cette étude, le modèle 3D utilisé dans le logiciel ABAQUS est constitué par des éléments tétraédriques à 10 noeuds (figure 2.2) et qui utilisent une interpolation du deuxième ordre et qui sont nommés éléments quadratiques ou éléments de deuxième ordre : C3D10M (*10-node modified tetrahedron with hourglass control*). Ces éléments quadratiques sont robustes pour les problèmes de grande déformation et de contact et ils sont accompagnés d'un contrôle de l'effet "sablier".

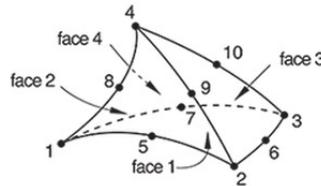


FIGURE 2.2 – C3D10M : élément quadratique tétraédrique [2].

Le maillage optimum utilisé dans cette étude utilise des éléments de petite taille à la périphérie des particules et des éléments fins de plus grande taille dans la région centrale de chaque particule, voir figure 2.3.

Le nombre d'éléments fins exploité ici atteint 4607 éléments quadratiques tétraédriques par particule pour un essai isotrope et 3278 éléments quadra-

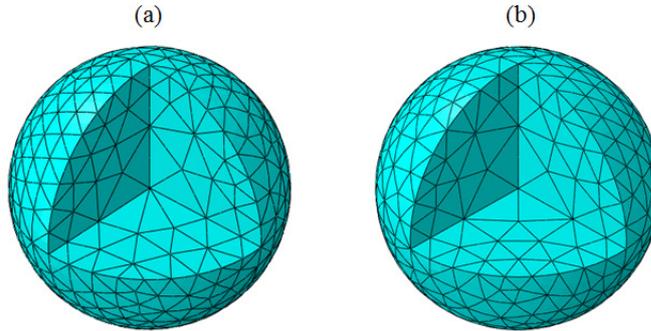


FIGURE 2.3 – Particule discrétisée par des éléments tétraédriques : (a) essai isotrope, (b) essai en matrice.

tique tétraédriques par particule pour un essai en matrice. Le nombre d'éléments dans le cas de l'essai en matrice a été réduit afin de diminuer un peu le temps de calcul. Le choix du maillage a été fait pour décrire des efforts au niveau des contacts puisqu'il permet de représenter correctement les efforts locaux.

### Matériaux constitutif des particules.

Dans la présente étude, l'empilement est constitué d'un seul et même matériau qui est l'alliage de plomb. Ce matériau a été choisi afin de correspondre aux essais expérimentaux effectués par Chen [16]. Les particules sont modélisées par une loi élasto-plastique qui est un couplage entre un comportement élastique linéaire isotrope définie par le module d'élasticité  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$  et un comportement plastique de type Von Mises écrouissable.

La loi d'écrouissage de Von Mises est définie par :

$$\sigma_y = K \cdot (\varepsilon^{pl})^n + \sigma_0 \quad (2.1)$$

où  $K$  et  $n$  sont les paramètres d'écrouissage (multiplicateur et exposant d'écrouissage).  $\sigma_y$ ,  $\varepsilon^{pl}$  et  $\sigma_0$  sont respectivement la limite élastique courante, la déformation plastique équivalente et la limite élastique initiale qui est égale dans notre étude à 5 MPa.

Les paramètres de ce matériau correspondent aux essais expérimentaux réalisés par Chen et al. [17, 18] et sont donnés dans le tableau suivant :

TABLE 2.1 – Paramètres matériau utilisés.

$E$	10000 MPa
$\nu$	0,435
$K$	15,5 MPa
$n$	0,35

### Gestion du contact en éléments finis.

Les interactions entre les particules maillées sont définies par des conditions classiques de contact qui évitent la pénétration des surfaces, les particules étant déformables contrairement à la méthode des éléments discrets. On évite ainsi le recours à des lois de contact analytiques. ABAQUS/Explicit fournit deux algorithmes pour la modélisation du contact : "*General contact interactions*" et "*Contact pairs*". Dans cette thèse, on s'intéresse au "*General contact interactions*" (figure 2.4) qui permet de définir le contact entre toutes les régions de l'empilement avec une seule interaction. La formulation adaptée pour modéliser le contact particule/particule et particule/paroi est "*Penalty contact*" qui permet de calculer des forces de contact tout en minimisant les pénétrations afin d'avoir une description simple et efficace du contact.

Dans cette partie, une brève description de l'algorithme de contact est proposée et qui se trouve aussi dans la documentation d'ABAQUS [2]. Soit une fonction distance  $d$  (figure 2.4), entre un noeud de la frontière d'une particule A, noté  $n_A$ , et une particule B qui est définie par :

- $d = 0$ , si  $n_A$  est sur la frontière de la particule B ; ou  $d > 0$ , si  $n_A$  est à l'extérieur de la particule B, dans ces deux cas  $n_A$  va appliquer une force nulle.
- $d < 0$ , si  $n_A$  est dans la particule B, dans ce cas, une force proportionnelle à la distance  $d$  est appliquée. Ainsi, si la raideur de contact est suffisamment grande, l'interpénétration des surfaces est quasi nulle, ce qui entraîne une description efficace du contact.

Afin de gagner en terme de temps de calcul, la recherche numérique du contact sur ABAQUS se produit sur les noeuds frontière de la particule A qui se trouvent à une distance inférieure à  $d_{pen}$  (qui est très petite) de la

particule B (figure 2.4) où il va essayer d'appliquer des forces (nulles, ou proportionnelles à la distance). Au delà de cette distance  $d_{pen}$ , l'interaction entre les particules ne sera pas gérée et aucune force n'est appliquée.

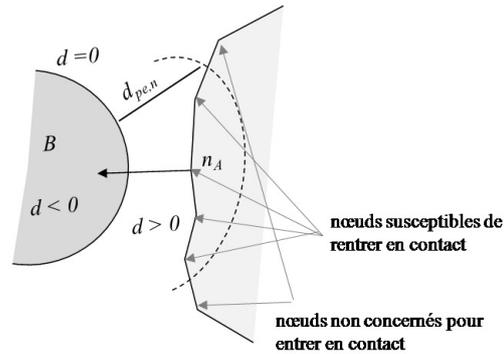


FIGURE 2.4 – Description de la méthode *General contact interactions*.

Un seul coefficient de frottement (particule/particule et particule/parois) a été choisi pour ce modèle numérique par la loi de Coulomb classique avec une valeur égale à 0,1. Ce coefficient est issue de la littérature [16]. Aucune cohésion de contact n'est introduite.

### 2.2.2 Obtention d'une surface de charge en pilotage en déformation.

Un protocole de simulation a été adopté pour tracer une surface de charge. L'échantillon numérique est compacté suivant deux types de compression classiques : compression isotrope et compression en matrice. Les parois rigides subissent une translation de sorte que les parois initialement parallèles restent parallèles tout au long du chargement (figure 2.5).

Les conditions aux limites sont soit pilotées en déformation (un déplacement normal est imposé afin de contrôler les déformations souhaitées) soit pilotées en contrainte (la force normale totale sur chaque paroi est contrôlée pour atteindre des valeurs de contraintes souhaitées). En utilisant de telles conditions aux limites, il est possible de vérifier que la force tangentielle sur les parois rigides est négligeable par rapport à la force normale (ce qui signifie qu'aucune contrainte ou déformation de cisaillement n'est appliquée).

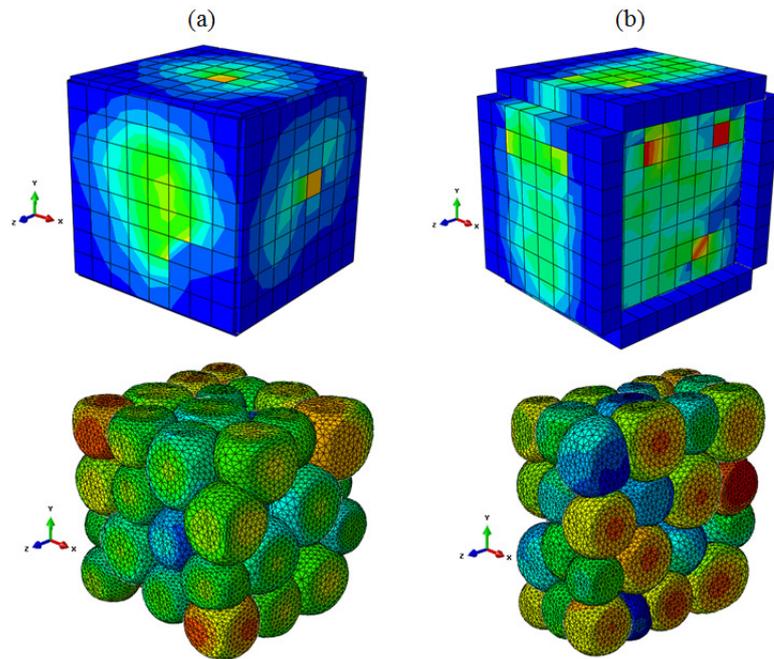


FIGURE 2.5 – Les différents chemins de chargement classique : (a) Compression isotrope, (b) Compression en matrice.

Avec ces conditions, on peut appliquer par la suite l'hypothèse que les repères principaux des contraintes et des déformations sont les mêmes et restent fixes tout au long des simulations. Pour cette raison, on restreint l'étude au domaine des contraintes ou déformations principales.

Dans cette partie, le pilotage en déformation est adopté pour toutes les simulations. Ce type de pilotage est utilisé dans les travaux de Harthong et al. [43] et Harthong [42] afin de caractériser l'évolution des surfaces de charge en fonction du chemin de chargement. Ce pilotage est plus facile à mettre en oeuvre au sein des codes numériques pour imposer des conditions aux limites cinématiques à l'empilement et avoir des réponses en contraintes.

Tout d'abord, l'empilement est comprimé suivant un chemin souhaité jusqu'à une densité relative désirée (figure 2.6.a) à travers une translation des parois rigides. Ensuite une décharge élastique est appliquée sur l'assemblage de particules jusqu'à des contraintes faibles, ce qui est illustré sur la figure 2.6.b (Il faut vérifier que les valeurs des contraintes normales sur les parois restent toujours positives, ce qui signifie le maintien du contact entre les parois et les particules). Pour obtenir la surface de charge, l'empilement doit

subir une recharge élasto-plastique balayant tout l'espace de contrainte afin de relever l'entrée en plasticité (figure 2.6.c). Le critère utilisé pour détecter la plasticité est explicité un peu plus loin dans ce même paragraphe.

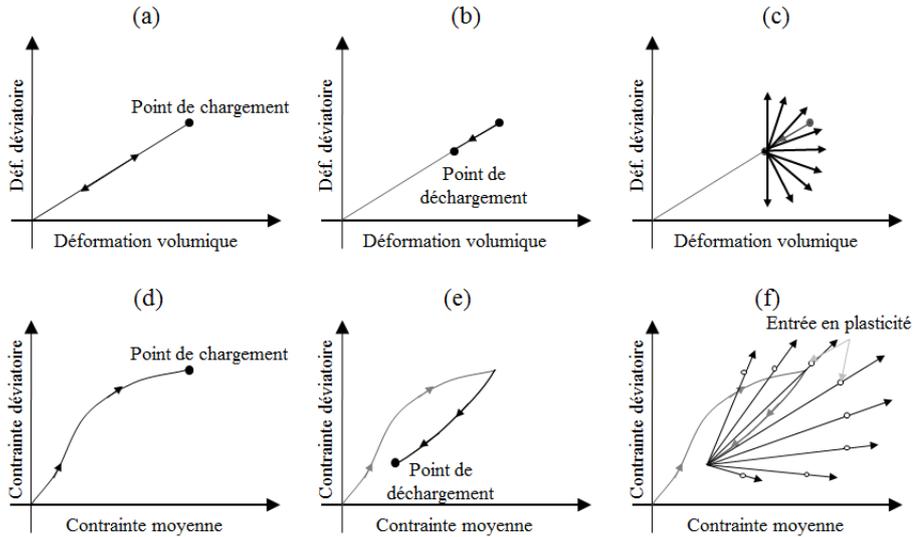


FIGURE 2.6 – Méthode d'obtention d'une surface de charge. (a) Charge, (b) Décharge élastique, (c) Recharge élasto-plastique : Chemins de déformations appliqués. (d) Charge, (e) Décharge et (f) Recharge : Réponses en contrainte.

### Plan axisymétrique des contraintes.

On se limite, dans cette thèse, aux chargements axisymétriques. Soient  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  les directions principales de déformation, et  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  les déformations principales du tenseur de déformation de Hencky qui sont définies par :

$$\varepsilon_i = \ln\left(\frac{l_i}{l_{i0}}\right) \quad (2.2)$$

avec  $l_i$  et  $l_{i0}$  sont respectivement la dimension finale et la dimension initiale de l'empilement dans la direction  $X_i$ .

Le plan de chargement axisymétrique en déformation est défini par l'équation  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$  dans l'espace des déformations principales. Les chemins de char-

gement sont pilotés par la déformation volumique  $\varepsilon_v$  et la déformation déviatoire  $\varepsilon_d$ , qui sont définies respectivement comme suit :

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_d = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (2.4)$$

En supposant que l'empilement à l'état initial est isotrope, les directions principales de contrainte et de déformation sont supposées rester coaxiales tout au long de la simulation, donc un chargement axisymétrique en déformation produit une réponse en contrainte axisymétrique. La conséquence d'une telle approche est que le comportement mécanique de l'empilement est observé seulement dans l'espace 3D des contraintes principales à la place de l'espace général de contrainte 6D. Ainsi, si  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont les contraintes principales de Cauchy alors  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  sont les directions principales de contrainte et les chemins de contrainte obtenus en réponse au chargement axisymétrique en déformation appartiennent au plan d'équation  $\sigma_2 = \sigma_3$ .

La réponse en contrainte sera représentée dans un plan de contrainte déviatoire-contrainte isotrope  $(\bar{p}-\bar{q})$ . De manière à représenter le rapport d'aspect du vecteur incrément de déformation plastique par rapport à la surface de charge, nous utilisons des invariants de contrainte et de déformation légèrement différents de (1.6), (1.10), (2.3) et (2.4) :

$$\bar{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2.5)$$

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \quad (2.6)$$

$$\bar{\varepsilon}_v = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \quad (2.7)$$

$$\bar{\varepsilon}_d = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \varepsilon_1 - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \right] \quad (2.8)$$

où  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$ ,  $\bar{\varepsilon}_v$  et  $\bar{\varepsilon}_d$  seront nommés respectivement le 1<sup>er</sup> et le 2<sup>me</sup> invariant de contrainte et de déformation.

Ainsi, la réponse tracée dans le plan  $\bar{p}$ - $\bar{q}$  ou dans le plan  $\bar{\varepsilon}_v$ - $\bar{\varepsilon}_d$  correspond à la projection sur le plan axisymétrique de la réponse dans l'espace 3D des contraintes principales ou des déformations principales .

Les invariants de contrainte et de déformation définis par les équations (2.5), (2.6), (2.7) et (2.8) seront utilisés systématiquement dans la suite de ce travail.

### Critère de détection des points de plasticité.

L'une des difficultés rencontrées pour tracer des surfaces de charge est d'arriver à détecter l'entrée en plasticité lors de la recharge élasto-plastique à partir du point de déchargement. Dans les études expérimentales, Pavier et Dorémus [70] ont assimilé les surfaces de charge à des surfaces isodensités, ainsi la déformation plastique est repérée lorsque la densité relative augmente.

Schmidt et al. [78] proposent d'utiliser comme critère l'énergie volumique dissipée  $E_d$ , qui contient à la fois les informations sur la plasticité par glissement des particules et par déformation plastique du matériau constitutif des particules. Pour un matériau élasto-plastique, l'énergie volumique dissipée est la somme de l'énergie volumique plastique  $E_p$  et de l'énergie volumique dissipée par frottement  $E_f$  :

$$E_d = E_p + E_f \quad (2.9)$$

L'énergie plastique pour un volume V est due à la déformation plastique des particules :

$$\int_V E_p \, dV = \int_V \left( \int_0^t \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} dt \right) dV \quad (2.10)$$

où  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$  est le taux de déformation plastique.

L'énergie dissipée par frottement pour une surface S, correspond au déplacement relatif des particules :

$$\int_V E_f dV = \int_S \left( \int_0^t \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_f dt \right) dS \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{v}$  et  $\boldsymbol{\tau}_f$  sont respectivement, la vitesse relative de deux surfaces en contact en un point et l'effort surfacique de frottement appliqué au même point.

Dans notre cas, seule l'énergie dissipée sera utilisée comme critère de plasticité dans la suite de ce travail car elle possède l'avantage d'intégrer la contribution à la plasticité macroscopique du glissement des particules et de leur déformation intrinsèque, alors que les surfaces isodensité ne décrivent que la variation de volume. Le seuil de plasticité est déterminé de la manière suivante : lors du premier chargement, l'énergie dissipée atteint une valeur  $E_d^0$  (figure 2.7.a). Lors de la décharge, cette valeur reste constante avec une très bonne approximation (figure 2.7.b). Puis, lors de la recharge,  $E_d$  ré-augmente à partir au moment où la plasticité réapparaît. On considère que la plasticité réapparaît lorsque  $E_d$  pendant la recharge atteint 0,3% de la valeur  $E_d^0$  atteinte lors du premier chargement (figure 2.7.c). Le choix de cette valeur seuil nous a permis, avec une bonne approximation, d'obtenir des surfaces de charge qui contiennent le point de chargement.

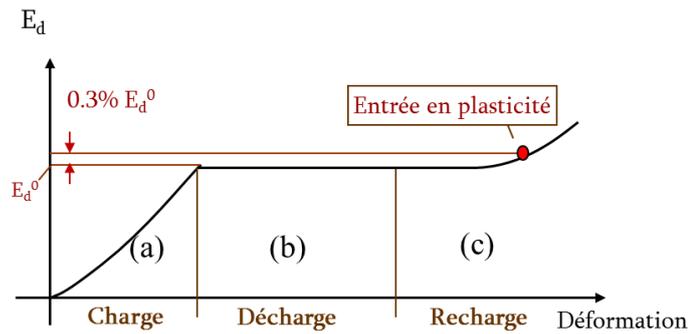


FIGURE 2.7 – Évolution de l'énergie dissipée pendant la détermination de la surface de charge : (a) Charge, (b) Décharge et (c) Recharge.

### 2.2.3 Choix de l'empilement initial.

Deux aspects principaux conditionnent la taille globale du modèle numérique à simuler. Le premier concerne le temps de calcul qui est un critère très important. Le second aspect est relatif à la représentativité de l'échantillon. Pour cela, on a essayé d'augmenter le nombre de particules dans un empilement par rapport aux travaux précédents même s'il est prévisible que ce nombre reste restreint devant un échantillon représentatif.

#### Temps de calcul.

Chaque particule maillée est considérée comme un corps solide élasto-plastique. Plusieurs niveaux d'amélioration du maillage ont été testés afin de trouver le meilleur ordre de grandeur des temps de calcul et une meilleure simulation au niveau des déformations élasto-plastique sans recours à un nombre d'éléments trop grand par particule.

Le tableau 2.2 montre l'ordre de grandeur de temps de calcul pour trois empilements différents pour les deux types de chargement classique et pour la même densité relative finale  $D_f=0,9$ . Toutes les simulations ont été réalisées en calcul parallèle sur un processeur comportant 4 coeurs (CPU : Intel Xeon E7450 avec 2,4 GHz).

TABLE 2.2 – Ordre de grandeur des temps du calcul avec 4 CPU.

Empilement	Type de chargement	Temps de calcul
9 particules	Isotrope	6 heures
	Matrice	9 heures
15 particules	Isotrope	10 heures
	Matrice	12 heures
50 particules	Isotrope	19 heures
	Matrice	22 heures

La compression en matrice nécessite plus de temps de calcul que la compression isotrope en raison du chargement plus déviatoire et des grandes amplitudes de déplacement impliquées. Ces temps de calcul correspondent aux étapes charge/décharge/recharge pour arriver à tracer une surface de charge avec 15 points.

Dans les travaux de Harthong [42], l'étude de la surface de charge par la

méthode des éléments finis multi-particules (MEFMP) a été faite avec un empilement aléatoire mono-disperse de 15 particules. L'étude du comportement des poudres est abordée dans cette thèse par l'utilisation de deux chargements : une déformation isotrope et une déformation uniaxiale (compression en matrice), sur un empilement numérique constitué de 50 particules aléatoire poly-disperses (figure 2.8) avec un rapport de taille de 1,80.

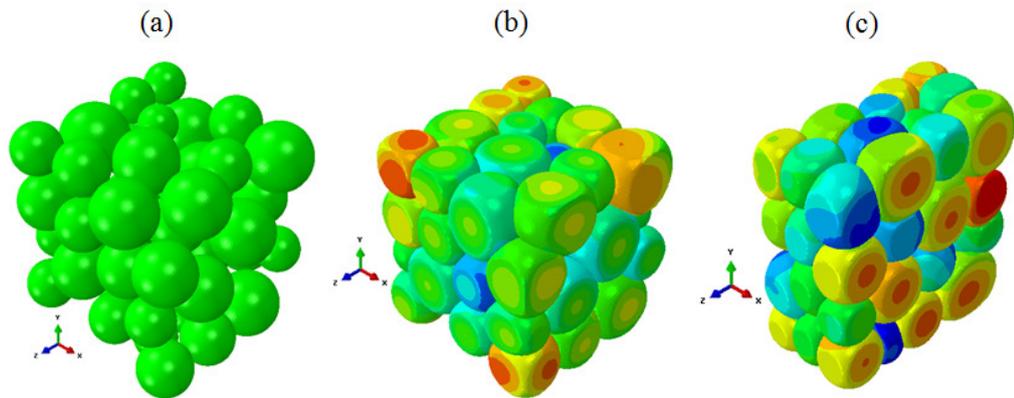


FIGURE 2.8 – (a) Empilement de 50 particules non déformé : (b) après compression isotrope, (c) après compression en matrice avec la MEFMP.

### Représentativité de l'échantillon.

Ce critère est relatif au nombre de particules composant l'empilement sollicité. Il influe directement sur le temps de calcul car le nombre de particules est en relation directe avec le nombre de degrés de liberté du modèle numérique. Ainsi, le nombre de particules doit être choisi le plus petit possible, en même temps une diminution de ce nombre de particules entraîne une moins bonne représentativité du comportement mécanique globale de l'empilement.

D'après le tableau 2.2, le temps de calcul évolue très rapidement en fonction du nombre de particules.

Le choix qui a été fait dans ce travail pour déterminer le nombre de particules de l'empilement numérique est basé sur un temps de calcul le plus faible possible avec une bonne précision de la réponse mécanique. D'après ces deux aspects, pour un empilement de 50 particules, la réponse en contrainte est proche de celle d'un empilement comprenant trois fois moins de particules (empilement de 15 particules utilisé par Harthong [42] avec un maillage de

2600 éléments quadratiques tétraédriques par particule) pour un temps de calcul raisonnable. En plus, Schmidt et al. [78, 79] ont adopté un nombre de particules similaire (50 particules) mais avec un maillage plus grossier, en appliquant des conditions aux limites périodiques pour tracer des surfaces de charge avec un pilotage en contrainte.

Il est clair qu'un empilement de 50 particules ne suffit pas pour obtenir une bonne représentativité des matériaux en poudre réels en termes de réponse moyenne. Cependant, cet empilement est capable de fournir une grande quantité d'informations qualitatives mais surtout pertinentes sur les mécanismes des incréments de déformation plastique pour les poudres métalliques ductiles.

### **Influence du nombre de particule dans un empilement sur la surface de charge.**

Les résultats des différentes simulations, exposés sur la figure 2.10, représentent des surfaces de charge dans le plan  $(\bar{p}-\bar{q})$  pour les deux chemins de chargement : compression isotrope (figure 2.10.a) et compression en matrice (figure 2.10.b) et pour une densité relative finale  $D_f = 0,9$ , pour trois empilements différents (9, 15 et 50 particules) qui sont représentés sur la figure 2.9.

De ces essais numériques, il ressort que les surfaces de charge obtenues sont qualitativement similaires aux résultats expérimentaux connus [4, 84, 80] et aux résultats numériques [42, 43]. Comme indiqué par Harthong, les surfaces de charge possèdent la même forme, approximativement elliptique. En plus, elles sont orientées dans la direction des chemins de chargement qui est l'axe hydrostatique dans le cas de la compression isotrope ce qui en diffère dans le cas de la compression en matrice.

D'autres essais numériques ont été réalisés avec des empilements plus grands en terme de nombre de particules (350 et 1000 particules) (figure 2.11). Afin d'avoir un temps de calcul raisonnable pour tracer les surfaces de charge, ces simulations ont été effectuées avec un maillage plus grossier, de manière à maintenir constant le nombre de degrés de liberté de l'empilement total. Pour cette raison, on va séparer par la suite les surfaces de charge des empilements (9 et 15) des empilements (350 et 1000). Le tableau 2.3 montre le rapport de taille  $(\frac{D_{max}}{D_{min}})$  et les densités relatives initiales  $D_0$  pour chaque type d'empilement.

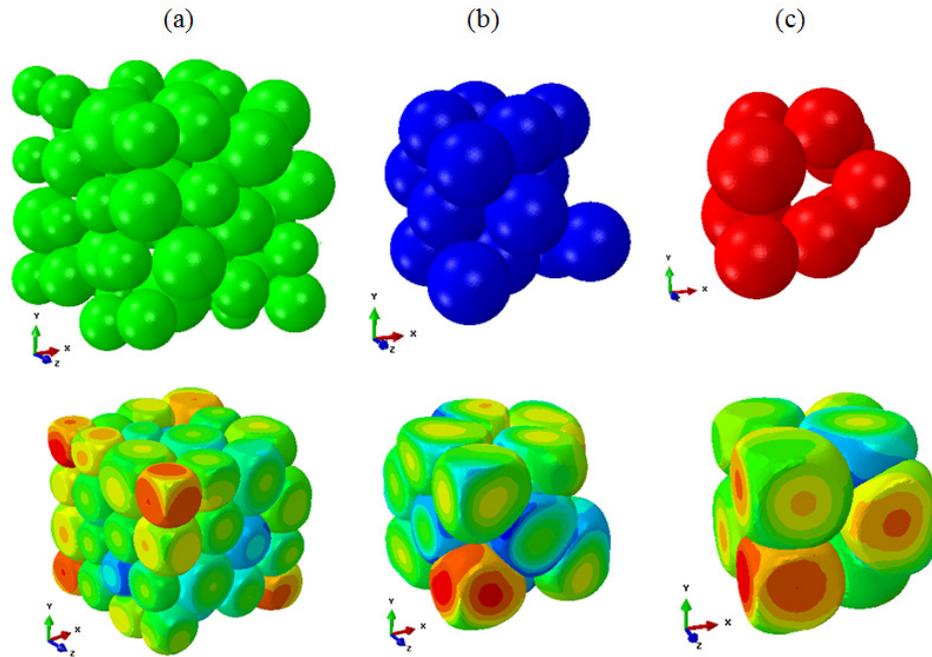


FIGURE 2.9 – Avant et après une compression isotrope d'un empilement de : (a) 50 particules, (b) 15 particules et (c) 9 particules.

TABLE 2.3 – Valeurs de rapport de taille, densités relative initiales  $D_0$  et nombre d'éléments par particule pour cinq empilements différents qui vont subir une compression en matrice jusqu'à une densité relative finale  $D_f = 0,9$ .

Rapport de taille	Particules	$D_0$	Éléments/particule
1,30	9	0,38	3278
1,00	15	0,44	3278
1,80	50	0,45	3278
1,80	350	0,49	442
1,85	1000	0,50	150

La figure 2.12 montre, pour une compression en matrice jusqu'à une densité relative finale de 0,9, les surfaces de charge associées à trois empilements différents (50, 350 et 1000 particules). Il est clair que sur cette figure les trois surfaces de charge sont complètement différentes.

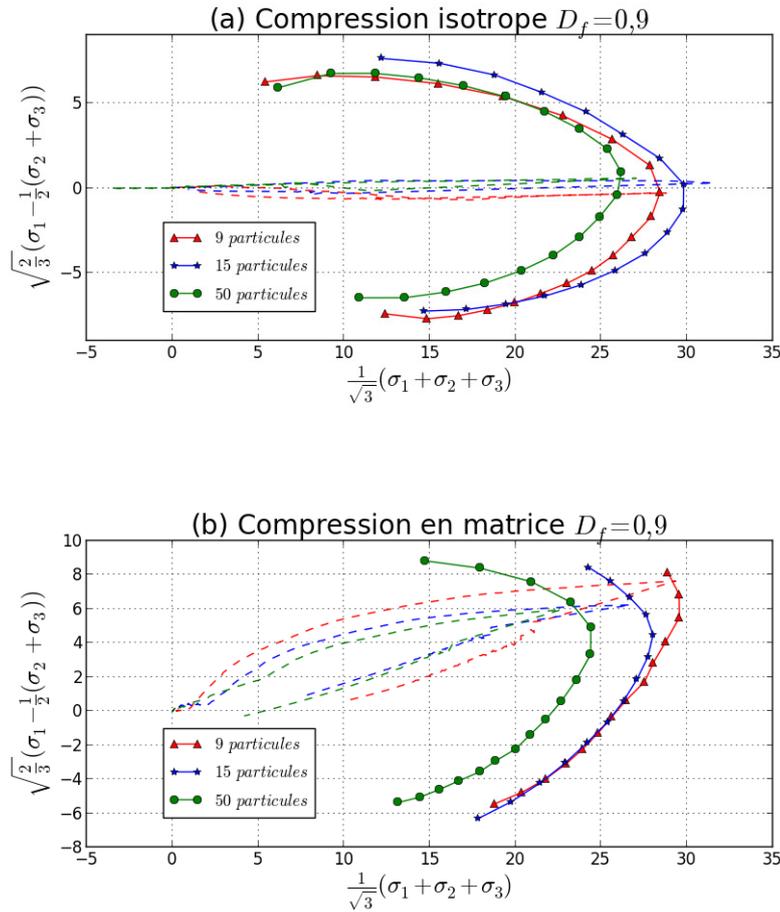


FIGURE 2.10 – Influence du nombre de particules sur les surfaces de charge pour trois empilements différents : 9, 15 et 50 particules avec une densité relative finale  $D_f = 0,9$  pour une compression : (a) isotrope et une compression (b) en matrice. Les lignes pointillées correspondent à la première charge/décharge.

L'augmentation du nombre de particules a pour effet de diminuer significativement la taille de la surface de charge (figure 2.12). L'empilement de 1000 particules ne suffit pas à faire converger la réponse globale. Toutefois, la surface de charge correspondant à l'empilement de 1000 particules est légèrement bruitée, ce qui suggère que le maillage pourrait être trop grossier 2.13.c.

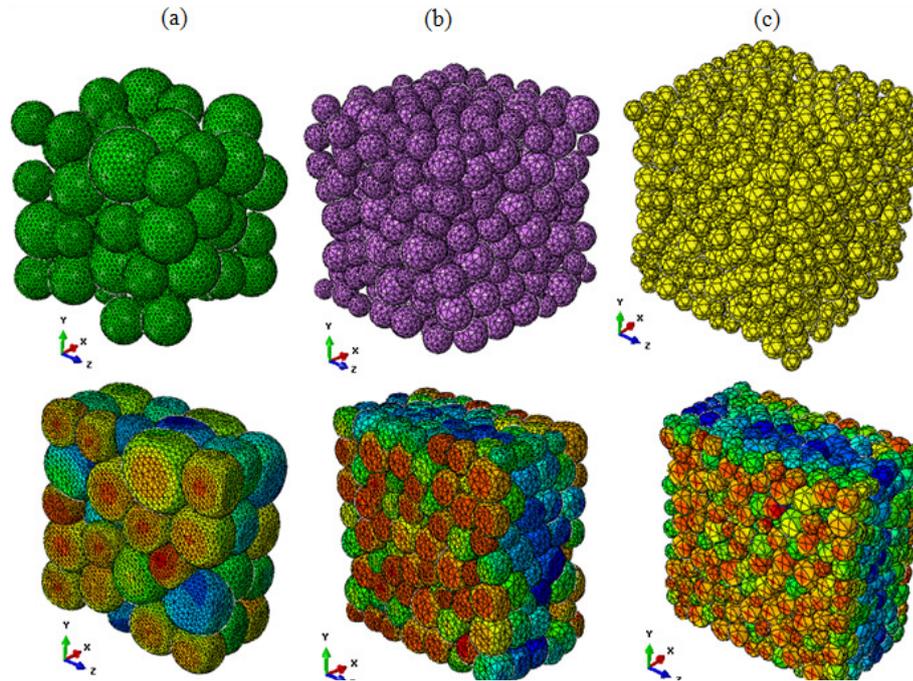


FIGURE 2.11 – Avant et après une compression en matrice pour un empilement de (a) 50 particules, (b) 350 particules et (c) 1000 particules jusqu'à une densité relative finale  $D_f = 0,9$ .

Des études préliminaires ont montré que la force de contact entre deux particules commence à se stabiliser à partir d'environ 2000 éléments par particule. Même si la réponse moyennée sur l'empilement converge probablement pour un maillage plus grossier. Le choix effectué dans cette étude est de se satisfaire de l'empilement de 50 particules qui, s'il n'est pas représentatif d'une poudre réelle, garantit la validité des résultats à l'échelle du grain au niveau des forces de contact entre 2 particules.

Néanmoins, à partir de cette étude, il sera considéré dans la suite que l'empilement de 50 particules poly-disperse avec une densité relative initiale égale à  $D_0 = 0,45$  a les propriétés nécessaires pour étudier les surfaces de charge et les mécanismes de caractérisation de l'écoulement plastique.

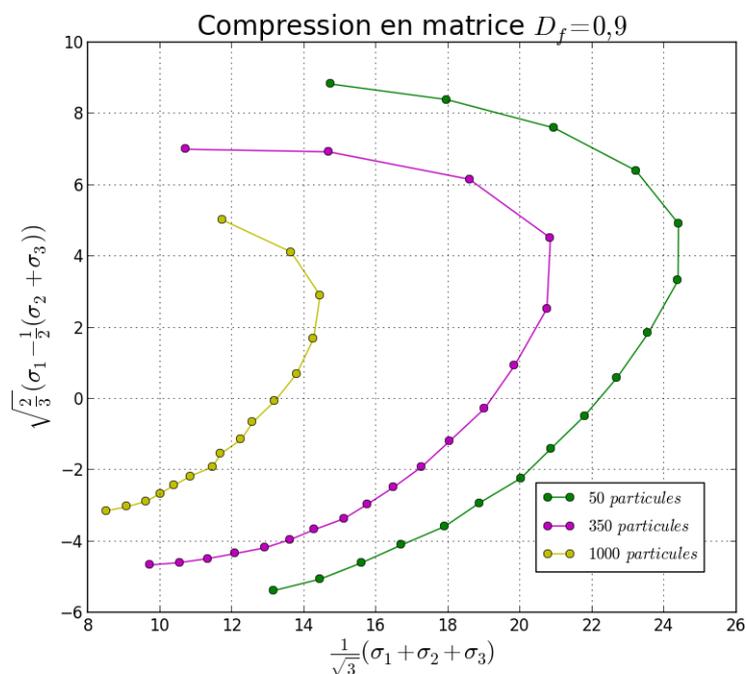


FIGURE 2.12 – Influence du nombre de particules sur les surfaces de charge pour trois empilements différents : 50, 350 et 1000 particules avec une densité relative finale  $D_f = 0,9$  pour une compression en matrice.

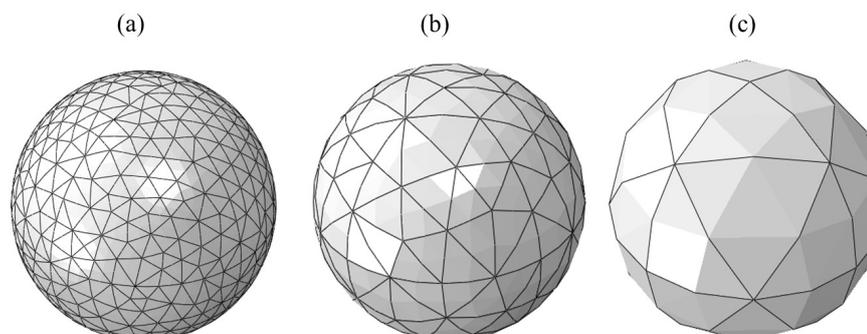


FIGURE 2.13 – Différence de maillage utilisé pour une compression en matrice entre trois empilements différents : (a) 50 particules (3278 éléments/particule), (b) 350 particules (442 éléments/particule) et (c) 1000 particules (150 éléments/particule).

## 2.3 Simulation de la réponse de l'échantillon numérique à un incrément de contrainte.

Cette partie décrit la caractérisation du mécanisme de déformation plastique des assemblages de grains en vue d'étudier l'existence d'une règle d'écou-

lement.

Lorsque la surface de charge est atteinte et lorsque la charge augmente, le matériau se déforme de manière irréversible et des déformations plastiques se produisent. Dans ce cas, le comportement plastique est classiquement modélisé par une loi d'écoulement.

La méthode des éléments finis multi-particules offre la possibilité de caractériser l'écoulement plastique à partir de la détermination des incréments de déformation plastique  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  et de simuler le comportement d'un matériau élasto-plastique en utilisant des conditions aux limites qui sont pilotées en contrainte.

La déformation totale est la somme de deux déformations : élastique, reliée linéairement ou non au tenseur des contraintes, et plastique. L'incrément de déformation étant petit, on peut admettre une décomposition additive de la forme suivante :

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (2.12)$$

L'utilisation du pilotage en contrainte est nécessaire dans la modélisation numérique afin de séparer l'incrément de déformation plastique  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  et l'incrément de la déformation élastique  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ , à travers la formule (2.12), au moyen d'un cycle de charge/décharge appliqué sur l'empilement numérique (à partir d'un état de contrainte donné  $\boldsymbol{\sigma}_0$ , une série d'incrément de contrainte  $d\boldsymbol{\sigma}$  est appliquée, puis une décharge de ces incréments est réalisée pour revenir à l'état de contrainte initial donnée  $\boldsymbol{\sigma}_0$ ) afin de déterminer la déformation résiduelle qui correspond à la déformation irréversible  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ .

### 2.3.1 Mise en place du pilotage en contrainte.

L'intérêt de l'utilisation du pilotage en contrainte est d'arriver à séparer la déformation plastique de la déformation totale au moyen d'un cycle de charge/décharge et de caractériser la loi d'écoulement. Néanmoins, ce type de pilotage est très difficile à le réaliser avec une démarche expérimentale pour étudier le comportement incrémental des poudres ductiles d'où la nécessité de la simulation numérique.

La méthode utilisée dans cette thèse est d'appliquer des conditions aux limites à travers des contraintes ou des déplacements imposés sur les 6 parois modélisées en 3D. Le cube a été maillé par des éléments finis linéaire hexaédriques du type C3D8 dont le nombre est 64 éléments finis par paroi, avec un comportement purement élastique ( $E = 210000$  MPa et  $\nu = 0,3$ ).

La surface de charge pour un empilement numérique est obtenue comme suit :

- Étape 1 : L'empilement subit une compression (isotrope ou en matrice) suivant un certain chemin jusqu'à un état de déformation souhaité (cette phase comporte des grandes déformations) (figure 2.14.a).
- Étape 2 : L'empilement déformé subit une décharge élastique jusqu'à des contraintes faibles pour éviter toute perte de contact entre les particules et les parois (figure 2.14.b).
- Étape 3 : Un passage en pilotage en contrainte est effectué et une phase de stabilisation est réalisée (figure 2.14.c) afin d'affranchir des petites vibrations liées aux imprécisions numériques lors du changement des conditions aux limites.
- Étape 4 : L'empilement est rechargé en contrainte (sous la forme d'une pression uniforme appliquée sur chaque paroi. Cette pression est calculée à travers le rapport entre la force totale appliquée sur le paroi et sa surface initiale qui est égale à  $1 \times 1 \text{ mm}^2$ . En réalité, le pilotage utilisé n'est pas un pilotage en contrainte mais il s'agit d'un pilotage en force) balayant tout l'espace de contraintes (figure 2.14.d) afin de détecter l'entrée en plasticité (méthode citée en 2.2.2).

Les Étapes 1 et 2 sont pilotées en déformation et les Étapes 3 et 4 en contrainte.

Dans ces travaux, l'Étape 4 est réalisée en deux étapes :

- Étape 4.1 : Une première recharge élasto-plastique balayant tout l'espace de contrainte est appliquée afin de détecter les points de la surface de charge (figure 2.15.a).
- Étape 4.2 : L'Étape 4.1 est répétée en repartant de l'Étape 3 mais cette fois on s'arrête sur la surface détectée lors de l'Étape 4.1 (figure 2.15.b).

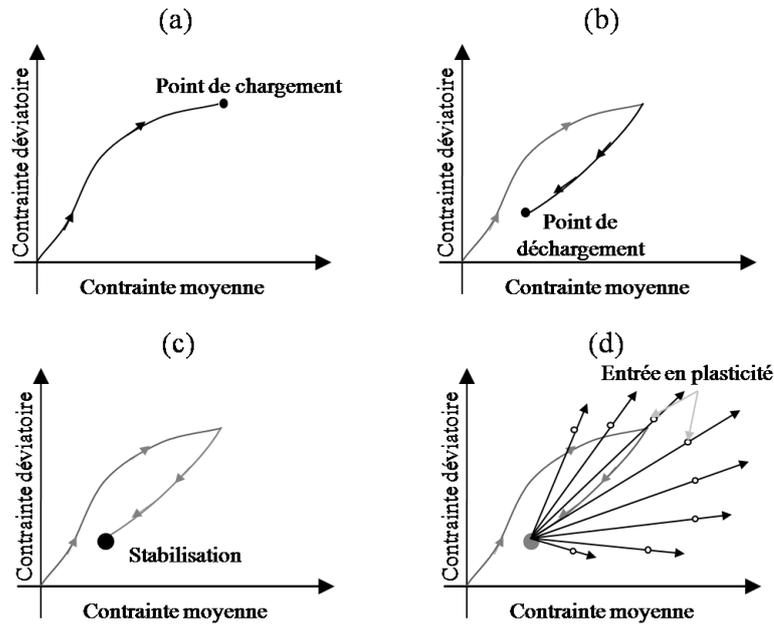


FIGURE 2.14 – Méthode d'obtention d'une surface de charge avec un pilotage en déformation : (a) Charge, (b) Décharge élastique et un pilotage en contrainte : (c) Stabilisation et (d) Recharge élasto-plastique

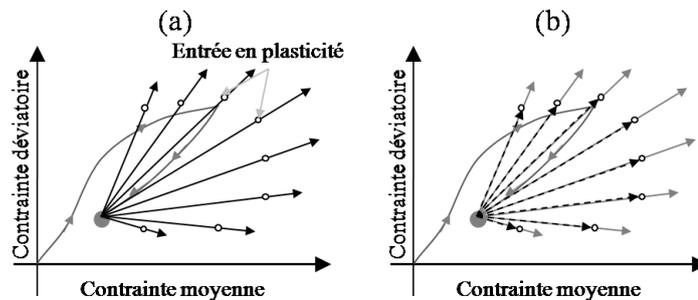


FIGURE 2.15 – Recharges élasto-plastique dans toutes les directions pour obtenir la surface de charge avec un pilotage en contrainte. (a) Première recharge, (b) Deuxième recharge.

Il est nécessaire maintenant de tracer deux surfaces de charge, une avec le pilotage en contrainte et une autre avec le pilotage en déformation pour le même empilement (50 particules) qui subit une compression isotrope jusqu'à une densité relative finale  $D_f = 0,98$  afin de comparer les résultats. En

compression isotrope, les contraintes au bord des parois pour les matériaux élasto-plastique ductiles incompressibles augmentent en tendant vers l'infini lorsque la densité relative se rapproche de 1. C'est la raison pour laquelle dans cette étude on a travaillé avec  $D_f = 0,98$  qui est d'une part, une densité relative finale assez grande ; et d'autre part, dans les travaux de Harthong [42] la densité relative finale atteinte est  $D_f = 0,95$  pour tracer des surfaces de charge.

En théorie, les deux surfaces de charge devraient être rigoureusement superposées. Les résultats numériques sont illustrés par la figure 2.16 dans le repère contrainte déviatoire-contrainte moyenne. Les deux surfaces de charge pilotées en déformation et en contrainte sont très similaires et elles sont presque confondues.

La figure 2.16 montre que les deux surfaces de charge sont proches et elles possèdent la même forme, la surface pilotée en contrainte est légèrement plus petite que celle pilotée en déformation. Cette différence est faible et peut être justifiée par le fait qu'il y a un peu de dissipation par frottement lors de l'étape de stabilisation (paragraphe 2.3.1), ce qui est cohérent avec le fait que la surface de charge obtenue par le pilotage en contrainte est plus petite.

Par conséquent, ce résultat nous permet de valider cette méthode de pilotage puisque les résultats d'une part semblent être satisfaisants et d'autre part, le temps de calcul est raisonnable. Par ailleurs, le pilotage en contrainte sera utilisé par la suite pour étudier l'écoulement plastique.

La figure 2.17 montre le domaine de l'espace des contraintes où on n'arrive pas à atteindre le critère de plasticité. Sur cette zone, une petite variation de contrainte entraîne une grande variation de déformation. Au niveau des simulations numériques, le calcul numérique converge mais les résultats sont erronés parce que le matériau n'est plus en équilibre statique. En effet, dans cette zone, la déformation est dilatante (augmentation de volume) et puisque il n'y a pas de cohésion, les particules se séparent et on ne trouve plus de contact (l'empilement numérique n'atteint plus l'équilibre statique et perd toute la résistance mécanique, c'est la limite de rupture).

### 2.3.2 Étude de l'écoulement plastique.

Dans le présent travail, l'existence d'un potentiel plastique, ou plus généralement, l'incrément de déformation plastique est étudié sur un empilement

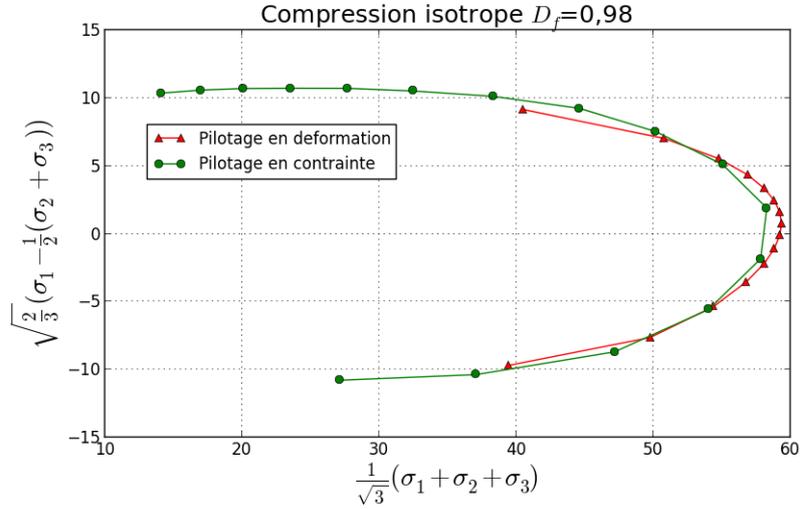


FIGURE 2.16 – Surfaces de charge dans le plan contrainte déviatoire-contrainte moyenne avec les deux types de pilotage : en contrainte et en déformation pour un empilement de 50 particules avec une densité relative finale de 0,98 et pour une compression isotrope.

numérique en utilisant la méthode de recherche directionnelle [32, 13, 14, 15, 25, 87, 72, 90, 93]. Cette méthode donne la possibilité à partir d'un état de contrainte donné  $\sigma_0$ , d'étudier le comportement incrémental d'un empilement à l'aide de ce qu'on appelle la courbe enveloppe de déformation plastique "*Response envelope*", proposée au début par Gudehus [41], qui constitue un outil très puissant pour la représentation graphique des lois constitutives du type incrémental et qui indique l'existence ou la non existence du potentiel plastique.

Afin d'étudier le comportement incrémental des matériaux granulaires, l'approche la plus naturelle est de déterminer les incréments de déformation à partir de l'application d'une série d'incrément de contraintes sur un empilement numérique.

### Unicité ou non-unicité de la direction d'écoulement plastique.

Dans le cas d'un modèle de comportement avec un potentiel plastique, l'incrément de déformation plastique  $d\epsilon^{pl}$  obéit à la loi d'écoulement donnée par l'équation (1.3) :

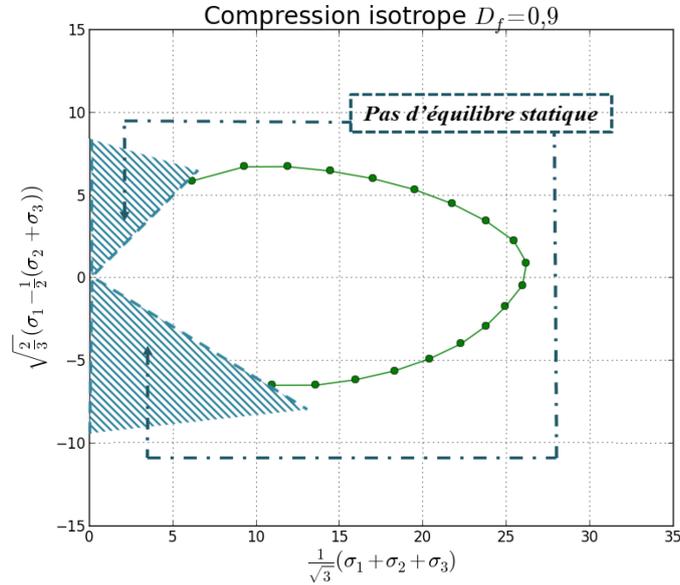


FIGURE 2.17 – Identification de la zone où il n'est pas possible de maintenir l'équilibre statique.

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.13)$$

D'après cette équation, pour un état de contrainte donné de la surface de charge, la direction de l'incrément de déformation est unique.

Si le potentiel existe et qu'il ne présente pas de points singuliers, l'incrément de déformation plastique est porté par la normale aux surfaces isopotentielles et sa direction ne dépend que de  $\boldsymbol{\sigma}$  et des variables d'écrouissage. Et si le potentiel n'est pas régulier et présente des points singuliers, il existe alors un cône des normales à l'intérieur duquel se trouve l'incrément de déformation plastique. Si le potentiel plastique n'existe pas, l'incrément de déformation plastique peut être quelconque.

**Notion de courbe enveloppe de déformation plastique.**

Dans cette étude, l'existence du potentiel plastique peut être vérifiée par une méthode de recherche directionnelle [15, 25, 87] qui consiste à appliquer une série d'incrément de contrainte  $d\sigma$  de normes identiques mais de directions différentes à partir d'un état de contrainte donné situé sur la surface de charge.

Le protocole de simulation numérique pour l'étude de l'écoulement numérique consiste d'abord à charger l'échantillon jusqu'à un état de contrainte donné  $\sigma_0$  sur la surface de charge (ceci correspond à l'Étape 4.2 comme indiqué précédemment dans la partie 2.3.1). Ensuite, les deux étapes suivantes sont appliquées :

- Étape 5 : Une série d'incrément de contrainte de norme identique mais de direction différente est appliqué. Dans ce cas, les incréments de contraintes définissent un cercle de rayon  $d\sigma = \text{constante}$  dans l'espace des contraintes (figure 2.18.a).
- Étape 6 : Une décharge est appliquée, par la suite, sur l'empilement jusqu'à l'état de contrainte  $\sigma_0$  (figure 2.18.b).

Supposant que la dissipation plastique est négligeable pendant l'Étape 6 de décharge, l'incrément de déformation plastique  $d\varepsilon^{pl}$  est défini comme étant la déformation résiduelle et qui est égale à la différence de la déformation totale entre la fin de l'Étape 4.2 et la fin de l'Étape 6.

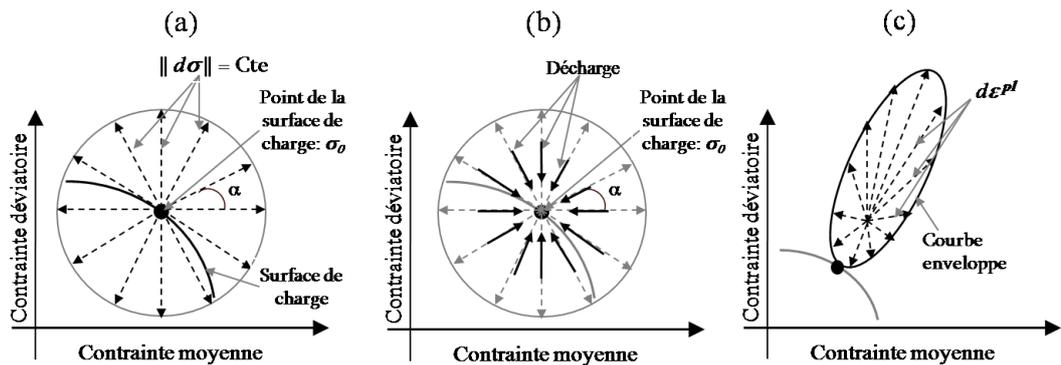


FIGURE 2.18 – Méthode utilisée pour détecter le potentiel plastique. Sollicitation en contrainte : (a) Une recharge à l'aide d'une série d'incrément de contrainte  $d\sigma$ , (b) Une décharge jusqu'à un état de contrainte donné. (c) Réponse du matériau

La réponse du matériau est illustrée sur la figure 2.18.c par la courbe enveloppe qui est une surface fermée contenant les extrémités de tous les vecteurs incréments de déformation plastique  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ .

Dans le cas général, la courbe enveloppe des incréments de déformation est une hypersurface dans un espace à 6 dimensions. Cependant, dans le cas particulier d'un chargement axisymétrique pour des repères principaux de contrainte et de déformation coaxiaux de sorte que les chemins de chargement ne balayent que le plan correspondant de l'espace des contraintes principales, le nombre de variables des contraintes et des déformations est réduit à deux et la représentation de la courbe enveloppe peut se faire dans le plan  $(\bar{\varepsilon}_v - \bar{\varepsilon}_d)$ .

En se référant à l'équation (2.13), si la loi d'écoulement plastique est applicable et si le potentiel plastique existe, l'orientation de l'incrément de déformation plastique  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  ne dépend pas de l'orientation de l'incrément de contrainte  $d\boldsymbol{\sigma}$ . Étant donné que la direction de  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  est unique et complètement définie par  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $X$ , dans ce cas, la courbe enveloppe correspond à un segment de droite (figure 2.19.a). Si la courbe enveloppe n'est pas une ligne droite,  $d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  dépend de la direction de  $d\boldsymbol{\sigma}$ , ce qui signifie que l'équation de la loi d'écoulement 2.13 n'est pas valide (figure 2.19.b).

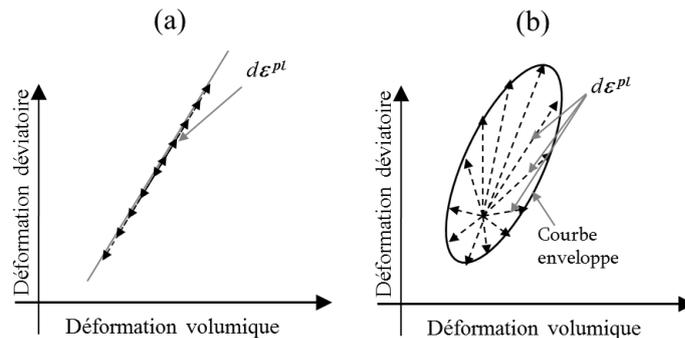


FIGURE 2.19 – Courbes enveloppe de déformation plastique. (a) Réponse conforme à loi d'écoulement plastique. (b) Réponse dans le cas où l'équation de l'écoulement plastique n'est pas valide.

## 2.4 Simulation de la réponse de l'échantillon numérique à un incrément de déformation.

Ce paragraphe propose d'expliquer l'intérêt de l'utilisation du pilotage en déformation afin d'analyser les mécanismes de l'écoulement plastique pour les poudres ductiles.

La partie 2.2.2 décrit la procédure de détection des surfaces de charge dans le plan contrainte déviatoire-contrainte moyenne avec des conditions aux limites pilotées en déformation.

La stratégie mise en place pour étudier l'influence de la direction de l'incrément de déformation totale  $d\varepsilon$  sur la dissipation plastique est similaire à celle développée dans la partie 2.3.2. À partir d'un état de contrainte donné, on applique une série d'incrément de déformation de norme identique mais de direction différentes dans le plan déformation déviatoire-déformation volumique. La réponse du matériau correspond à des énergies dissipées qui forment la courbe enveloppe d'énergie dissipée (figure 2.20).

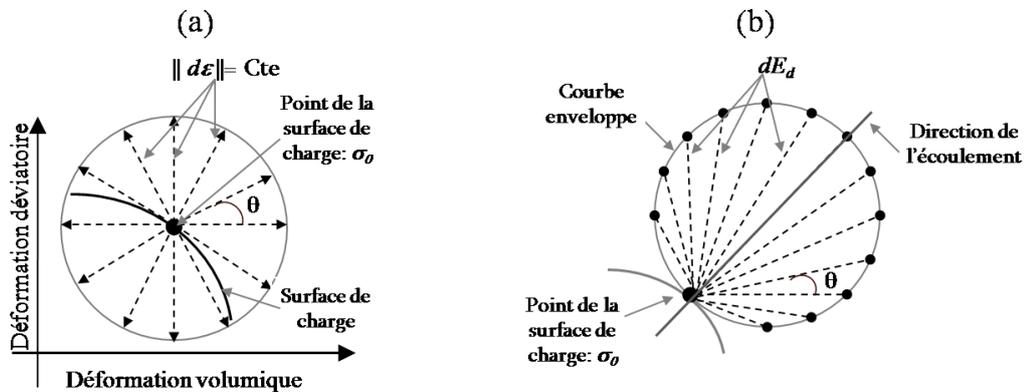


FIGURE 2.20 – Méthode utilisée pour détecter le potentiel plastique. (a) Sollicitation en déformation à l'aide d'une série d'incrément de déformation  $d\varepsilon$ . (b) Réponse du matériau.

À partir de la méthode illustrée sur la figure 2.20, on s'intéresse dans cette partie à analyser le comportement de l'écoulement pour un matériau à potentiel. En premier lieu, une étude sur les équations de dissipation d'énergie des matériaux à potentiel est évoquée. En deuxième lieu, une approche de

validation avec un matériau dense élasto-plastique de type Von Mises est proposée pour vérifier la validité de l'implantation numérique effectuée.

### 2.4.1 Dissipation d'énergie en fonction de la direction de l'incrément de déformation totale pour un matériau à potentiel.

L'objectif de cette partie est d'étudier analytiquement la dissipation d'énergie en fonction de la direction de l'incrément de déformation totale pour un matériau à potentiel.

Lors d'un essai de compression triaxiale, beaucoup de matériaux présentent un comportement élasto-plastique caractérisé par une relation linéaire entre la contrainte et la déformation et par la limite d'élasticité. Tout chargement qui atteint cette limite de contrainte conduit à une déformation permanente ou déformation plastique. Si on impose des incréments de déformation infinitésimaux sur le matériau dans les directions principales, le tenseur incrément de déformation totale  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  peut être écrit sous cette forme :

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} d\varepsilon_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & d\varepsilon_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & d\varepsilon_{ZZ} \end{pmatrix}_{(X,Y,Z)} \quad (2.14)$$

Mais notre empilement étant a priori anisotrope, la réponse du matériau est donnée par le tenseur de contrainte  $d\boldsymbol{\sigma}$  sous cette forme :

$$d\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} & \sigma_{YZ} & \sigma_{ZZ} \end{pmatrix}_{(X,Y,Z)} \quad (2.15)$$

D'après l'équation (2.12),  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  se décompose en incrément de déformation élastique et plastique (décomposition additive car les incréments de déformation sont petits) :

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \begin{pmatrix} d\varepsilon_{XX}^{el} & d\varepsilon_{XY}^{el} & d\varepsilon_{XZ}^{el} \\ d\varepsilon_{XY}^{el} & d\varepsilon_{YY}^{el} & d\varepsilon_{YZ}^{el} \\ \varepsilon_{XZ}^{el} & \varepsilon_{YZ}^{el} & \varepsilon_{ZZ}^{el} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d\varepsilon_{XX}^{pl} & d\varepsilon_{XY}^{pl} & d\varepsilon_{XZ}^{pl} \\ d\varepsilon_{XY}^{pl} & d\varepsilon_{YY}^{pl} & d\varepsilon_{YZ}^{pl} \\ d\varepsilon_{XZ}^{pl} & d\varepsilon_{YZ}^{pl} & d\varepsilon_{ZZ}^{pl} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\text{avec } d\varepsilon_{XY}^{el} + d\varepsilon_{XY}^{pl} = d\varepsilon_{XZ}^{el} + d\varepsilon_{XZ}^{pl} = d\varepsilon_{YZ}^{el} + d\varepsilon_{YZ}^{pl} = 0.$$

Pour faire une démonstration géométrique vectorielle, il est intéressant d'utiliser la notation de Voigt et de remplacer les tenseurs de contrainte et de déformation par des vecteurs de dimension 6 :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{XX} \\ \sigma_{YY} \\ \sigma_{ZZ} \\ \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} \end{bmatrix} \quad \vec{d\varepsilon} = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{XX} \\ d\varepsilon_{YY} \\ d\varepsilon_{ZZ} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{d\varepsilon}^{el} = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{XX}^{el} \\ d\varepsilon_{YY}^{el} \\ d\varepsilon_{ZZ}^{el} \\ 2d\varepsilon_{YZ}^{el} \\ 2d\varepsilon_{XZ}^{el} \\ 2d\varepsilon_{XY}^{el} \end{bmatrix} \quad \vec{d\varepsilon}^{pl} = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{XX}^{pl} \\ d\varepsilon_{YY}^{pl} \\ d\varepsilon_{ZZ}^{pl} \\ 2d\varepsilon_{YZ}^{pl} \\ 2d\varepsilon_{XZ}^{pl} \\ 2d\varepsilon_{XY}^{pl} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

La dissipation plastique est alors le produit scalaire de la contrainte et de l'incrément de déformation plastique :  $dE_p = \vec{\sigma} \cdot \vec{d\varepsilon}^{pl}$ . Supposons maintenant que le matériau étudié possède un potentiel plastique régulier, c'est-à-dire que pour tout état de contrainte sur la limite de plasticité, le vecteur incrément de déformation plastique a une direction unique (la direction d'écoulement) définie par le potentiel plastique. On notera  $\vec{n}$  le vecteur unitaire définissant la direction d'écoulement (normal à la surface iso-potentielle et qui est égale à la dérivée de la surface de charge par rapport aux contraintes).

Considérons maintenant qu'on applique une série d'incrément de déformation  $\vec{d\varepsilon}$  de la forme (2.17), tous étant de même norme mais de direction différente, et notons  $\vec{\delta}$  le vecteur unitaire définissant la direction des incréments de sorte que :

$$\vec{d\varepsilon} = d\varepsilon \cdot \vec{\delta} \quad (2.18)$$

où  $d\varepsilon$  est une constante.

Faisons maintenant une hypothèse supplémentaire : admettons que  $\vec{d\varepsilon}^{el} \cdot \vec{n} \ll \|d\varepsilon^{pl}\|$  ( $\|d\varepsilon^{pl}\|$  étant la norme de  $d\varepsilon^{pl}$ ). Autrement dit, on ne néglige pas l'incrément de déformation élastique devant l'incrément de déformation plastique, mais on néglige la composante de  $\vec{d\varepsilon}^{el}$  dans la direction d'écoulement devant  $\vec{d\varepsilon}^{pl}$ . Ceci a pour conséquence que  $\vec{d\varepsilon}^{el}$  est normal à  $\vec{n}$ , ainsi :

$$\|d\varepsilon^{pl}\| = \vec{d\varepsilon} \cdot \vec{n} \quad (2.19)$$

d'où, compte tenu de 2.18 :

$$\vec{\delta} \cdot \vec{n} = \frac{\|d\varepsilon^{pl}\|}{d\varepsilon} \quad (2.20)$$

D'autre part,  $\vec{d\varepsilon}^{pl} = \|d\varepsilon^{pl}\| \cdot \vec{n}$ , et par conséquent la dissipation plastique s'écrit :

$$dE_p = \vec{\sigma} \cdot \vec{d\varepsilon}^{pl} = \|d\varepsilon^{pl}\| \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (2.21)$$

Démontrons maintenant que si l'on associe à la dissipation  $dE_p$  la direction  $\vec{\delta}$  de l'incrément de déformation totale  $d\varepsilon$  imposé, le lieu des extrémités des vecteurs  $dE_p \vec{\delta}$  est une 6-sphère dont un des diamètres est orienté suivant  $\vec{n}$ . Si tel est le cas, il est possible de trouver un scalaire  $R$  tel que :

$$\left( dE_p \vec{\delta} - R \vec{n} \right)^2 = R^2 \quad (2.22)$$

Autrement dit, l'ensemble des points définis par le vecteur  $dE_p \vec{\delta}$  sont situés à une distance  $R$  d'un point défini par le vecteur  $R \vec{n}$  (figure 2.21).

En développant (2.22), on obtient :

$$\left( dE_p \vec{\delta} - R \vec{n} \right)^2 = (dE_p)^2 \vec{\delta}^2 + R^2 \vec{n}^2 - 2dE_p R \vec{\delta} \cdot \vec{n} = R^2 \quad (2.23)$$

En tenant compte que  $\vec{\delta}$  et  $\vec{n}$  sont des vecteurs unitaires, alors  $\vec{\delta}^2 = \vec{n}^2 = 1$ . Introduisant maintenant les deux équations (2.20) et (2.21) dans l'équation (2.23), on obtient :

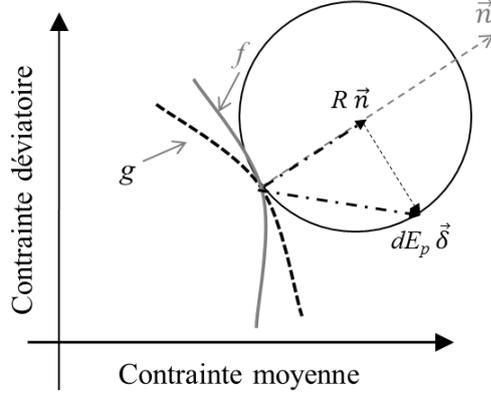


FIGURE 2.21 – Schématisation de l'ensemble des points qui définissent le vecteur d'énergie dissipée.  $f$  correspond à la surface de charge et  $g$  correspond à la surface iso-potentielle.

$$\|d\varepsilon^{pl}\|^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^2 + R^2 - 2Rd\varepsilon^{pl} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \frac{\|d\varepsilon^{pl}\|}{d\varepsilon} = R^2 \quad (2.24)$$

Finalement :

$$\|d\varepsilon^{pl}\|^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \left[ \vec{\sigma} \cdot \vec{n} - \frac{2R}{d\varepsilon} \right] = 0 \quad (2.25)$$

On constate que dans la relation (2.25) seul  $\|d\varepsilon^{pl}\|$  n'est pas constant, et qu'elle est vérifiée quelque soit  $\|d\varepsilon^{pl}\|$  pour  $2R = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} d\varepsilon$ .

Le lieu des vecteurs  $dE_p \vec{\delta}$  est donc une 6-sphère dont un diamètre est orienté suivant la direction d'écoulement  $\vec{n}$ .

Si l'on projette l'ensemble des vecteurs à six dimensions utilisés de ce raisonnement dans l'espace 3D des déformations principales, cela revient à ne garder que les trois premières composantes de chaque vecteur. On peut alors voir que les équations (2.22) et celles qui suivent restent formellement valides, et ainsi la projection de la 6-sphère dans l'espace des déformations principales est une sphère dont un des diamètres est porté par la projection de la direction d'écoulement dans l'espace des déformations principales.

Le but de cette partie est d'arriver à donner une représentation de la dissipation d'énergie en fonction de la direction de l'incrément de déformation totale dans une représentation 2D (plan axisymétrique) puisque on se limite dans cette étude aux chargements axisymétriques. Dans ce cas, il faut introduire un angle qu'on le note  $\theta$  entre l'incrément de déformation totale et la normale à la surface iso-potentiel, d'où :

$$\cos \theta = \vec{\delta} \cdot \vec{n} \quad (2.26)$$

Ainsi, la projection de cette sphère dans le plan axisymétrique de déformation est un cercle, dont le diamètre est porté par la projection dans le plan de direction d'écoulement (figure 2.22).

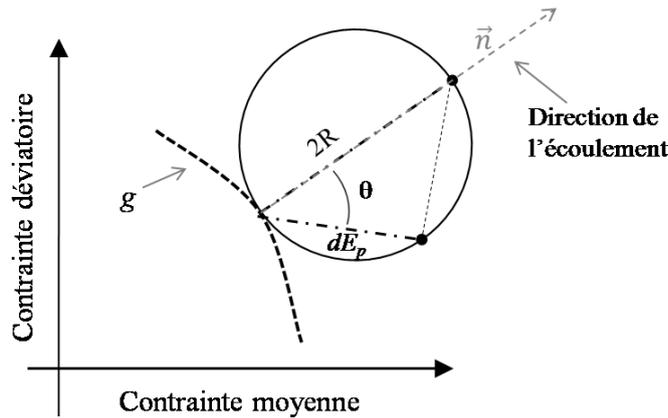


FIGURE 2.22 – Schématisation de la réponse d'un matériau élasto-plastique à potentiel dans un plan axisymétrique.

Dans ce cas, l'énergie dissipée peut être exprimée sous cette forme :

$$dE_p = 2R \cdot \cos \theta \quad (2.27)$$

Cette conclusion prouve que l'énergie dissipée pour un matériau dense élasto-plastique à potentiel correspond à un cercle dans un plan axisymétrique.

### 2.4.2 Test de validation : cas d'un matériau dense élasto-plastique de type Von Mises.

Ce paragraphe est consacré à la validation des hypothèses utilisées dans le paragraphe 2.4.1 ainsi que les routines de post-traitement implémentées. Pour ce faire on utilise un matériau dont le comportement est connu, on trace l'énergie dissipée en fonction de l'incrément de déformation totale  $d\varepsilon$  définie par l'angle  $\theta$ , puis on compare la solution numérique avec la solution analytique.

À cette occasion, un volume cubique 3D de dimensions 1 x 1 x 1 (mm) est modélisé dans le logiciel ABAQUS. Le type du matériau utilisé pour ce modèle numérique est un Von Mises écrouissable avec les paramètres du plomb (cf. tableau 2.1). La figure 2.23 montre que des éléments tétraédriques à 10 noeuds ont été adoptés et que le nombre d'éléments finis utilisé dans ce modèle correspond à 16520 éléments quadratiques tétraédriques.

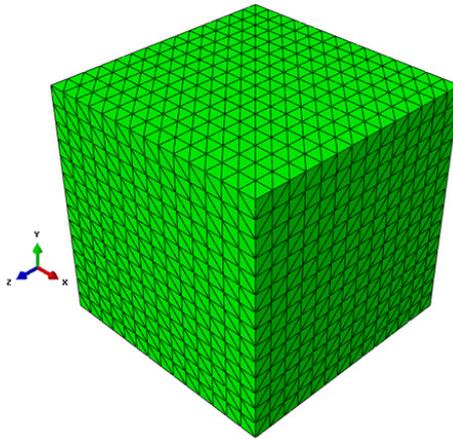


FIGURE 2.23 – Modèle de Von Mises modélisé par cube maillé de dimensions 1 x 1 x 1 (mm).

Un essai de compression à volume constant (figure 2.24) a été adopté sur l'échantillon numérique de sorte à dépasser la limite élastique et atteindre un état de contrainte sur la limite élastique. Le tableau 2.4 donne les conditions aux limites utilisées pendant ce chargement.

La figure 2.25 montre la réponse de l'échantillon numérique après une compression à volume constant. La courbe présentée en figure 2.25.b corres-

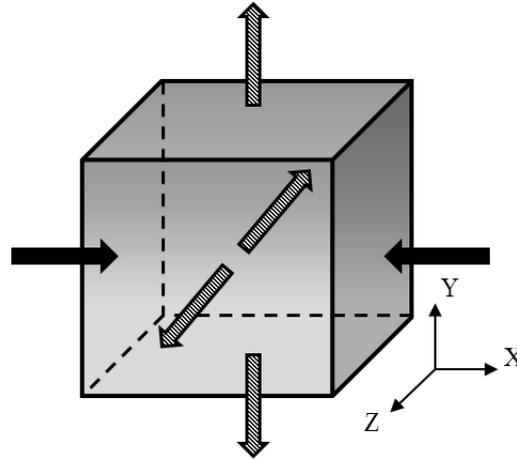


FIGURE 2.24 – Essai de compression à volume constant réalisé sur un échantillon cubique de dimension 1 x 1 x 1 (mm). Les flèches suivant les directions Y et Z correspondent à une traction et les flèches suivant la direction X correspondent à une compression.

TABLE 2.4 – Les conditions aux limites appliquées sur l'échantillon cubique plein suivant les trois directions (X, Y et Z).

Direction	X	Y	Z
Déplacement U (mm)	-0,005	0,0025	0,0025

pond à la contrainte de Von Mises/ Déformation totale ( $\varepsilon_X$ ) d'un matériau dense élasto-plastique. La valeur de la contrainte de Von Mises obtenue à la fin de cet essai vaut  $\sigma_{VM} = 6.184 MPa$ . Cette valeur est supérieure à la valeur de la contrainte limite élastique initiale  $\sigma_0 = 5 MPa$ .

Le protocole de simulation décrit dans le paragraphe 2.4.1 a ensuite été suivi. Une série d'incrément de déformation de norme identique ( $d\varepsilon = 1,7610^{-4}$ ) mais de directions différentes a été appliquée à partir de l'état de contrainte atteint précédemment. La réponse numérique du matériau est représentée en pointillés sur la figure 2.26. Cette figure est une représentation des incréments d'énergie dissipée  $dE_d$  en fonction de la direction  $\theta$  de l'incrément de déformation totale  $d\varepsilon$  dans un graphique en coordonnées polaires. Il est clair d'après ce résultat que la courbe enveloppe correspond à un cercle, et on peut de plus vérifier que la plus grande dissipation d'énergie correspond à  $\theta = 90^\circ$ , ce qui correspond à  $d\varepsilon$  orienté dans la direction du chemin à volume constant ( $\overline{d\varepsilon_v} = 0$ ), qui correspond bien à la direction de

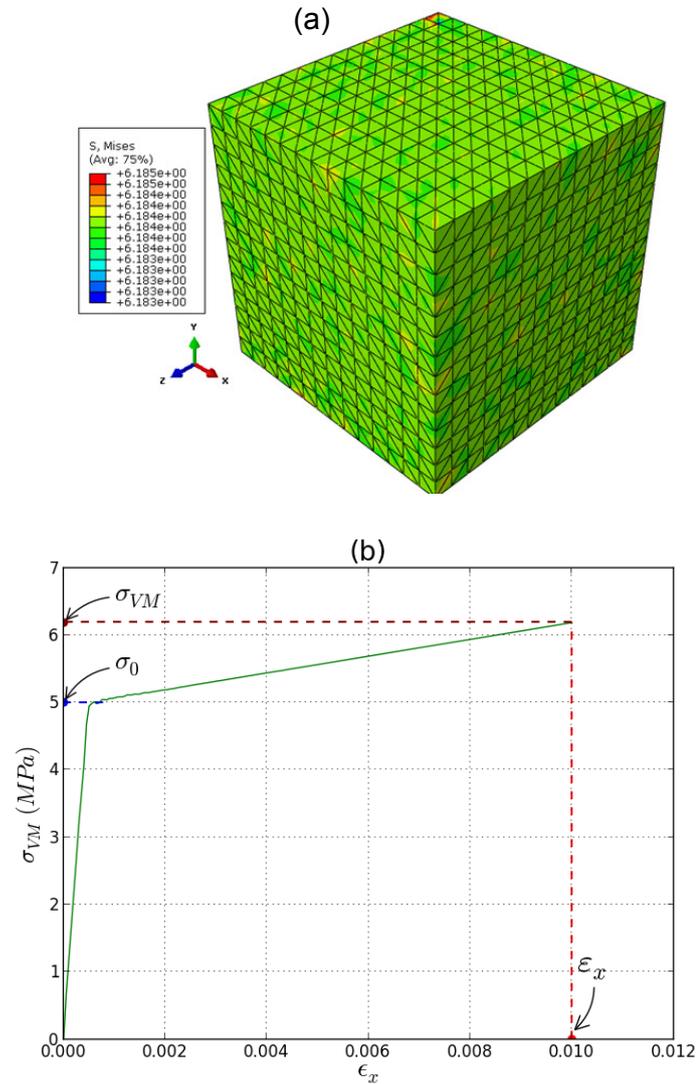


FIGURE 2.25 – Réponse numérique d'un matériau dense de type Von Mises. (a) Réponse en contrainte de Von Mises à la fin de la compression à volume constant de l'échantillon numérique. (b) Courbe contrainte de Von Mises/Déformation totale.  $\sigma_0$ ,  $\sigma_{VM}$  et  $\epsilon_X$  correspondent respectivement à la limite d'élasticité, contrainte de Von Mises en fin d'essai et la déformation totale ( $\epsilon_X = \epsilon^{el} + \epsilon^{pl}$ ).

l'écoulement plastique pour un modèle de Von Mises.

Une vérification analytique a été faite à l'aide de l'équation (2.27) pour déterminer l'énergie dissipée et comparer le résultat avec celui trouvé numé-

riquement. La courbe issue du calcul analytique est tracée dans la figure 2.26 en trait plein.

On remarque que les deux courbes correspondent aux résultats numérique et analytique sont quasiment identiques et possèdent la même forme. Cette légère différence est due au fait de négliger la composante élastique  $\overrightarrow{d\varepsilon}^{el} \cdot \vec{n}$  devant la composante plastique  $d\varepsilon^{pl}$ . On peut alors confirmer que cette approximation est bonne puisque la différence est très petite.

Ce résultat nous permet de valider l'implémentation numérique du pilotage et du post-traitement des simulations, et de vérifier que les courbes de l'énergie dissipée  $dE_d$  en fonction de  $\theta$  permettent d'identifier la direction de l'écoulement dans le cas d'un matériau à potentiel.

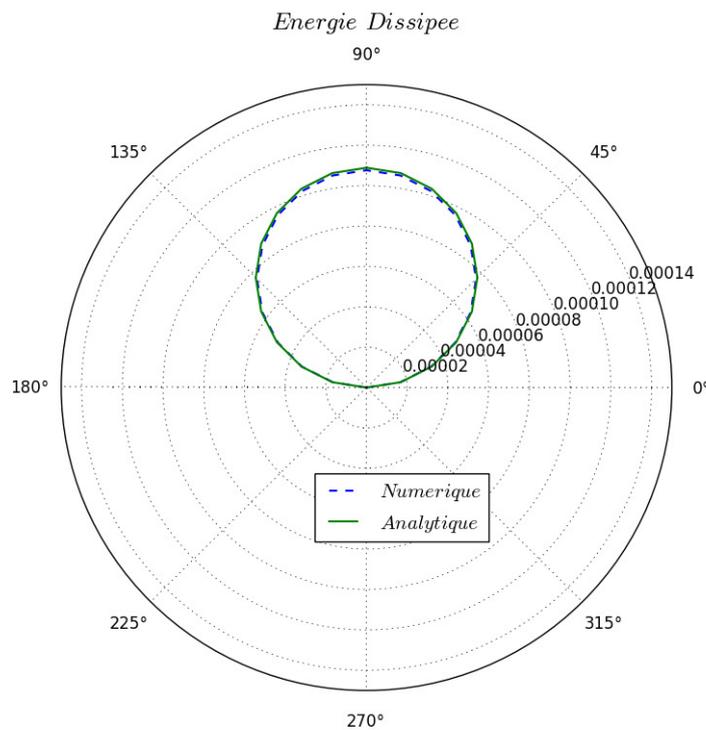


FIGURE 2.26 – Réponse de l'échantillon numérique en énergie dissipée d'un matériau dense élasto-plastique de type Von Mises représentée dans un repère de coordonnées polaire.

## 2.5 Conclusion.

Ce chapitre a présenté les protocoles de simulation de la réponse d'un matériau ductile modélisé par un empilement numérique de 50 particules par la méthode des éléments finis multi-particules afin d'explorer le comportement mécanique à haute densité relative des métaux en poudres élasto-plastiques, pour lesquelles la déformation des particules joue un rôle important dans le comportement mécanique macroscopique.

L'empilement choisi dans ce travail semble loin d'être représentatif d'une poudre réelle ; cependant, il permet de garantir la validité des résultats à l'échelle des particules et d'étudier qualitativement les surfaces de charge et l'écoulement plastique d'un ensemble de particules élasto-plastiques.

La MEFMP offre la possibilité d'étudier la formation et l'évolution des surfaces de charge pour les poudres ductiles avec le chemin de chargement et de caractériser les mécanismes de déformation plastique en vue de vérifier l'existence d'une règle d'écoulement à travers l'application des conditions aux limites qui peuvent être pilotées en contrainte ou/et en déformation.

Le pilotage en contrainte est utilisé dans ce travail afin d'étudier le comportement incrémental d'un empilement numérique pour caractériser la loi d'écoulement. L'avantage de ce pilotage est la possibilité de séparer l'incrément de déformation plastique et l'incrément de déformation élastique au moyen d'un cycle de charge/décharge. Il est alors possible avec cette méthode de détecter les courbes enveloppes de déformation plastique qui indiquent l'existence ou la non existence du potentiel plastique.

Néanmoins, le pilotage en déformation qui est utilisé dans plusieurs travaux scientifiques [42, 43] a été adopté aussi dans cette thèse afin de comparer les résultats à ceux obtenus avec le pilotage en contrainte au moyen de l'énergie dissipée.

Le Chapitre 3 présente les résultats et les analyses effectuées avec la MEFMP par les deux types de pilotage sur l'empilement numérique afin de caractériser l'écoulement plastique et d'évaluer l'existence du potentiel plastique pour les poudres métalliques ductiles.

# Chapitre 3

---

## Résultats et analyse.

*Dans ce chapitre, on présente des résultats numériques portant sur les mécanismes de la déformation plastique dans les poudres ductiles, dans le but d'identifier les éléments permettant de formuler une loi de comportement adaptée à la compression des poudres. Une première partie est consacrée à l'étude de l'évolution des surfaces avec le chemin de chargement. La deuxième partie du chapitre est dédiée à l'étude de l'écoulement plastique d'un empilement de particules élasto-plastiques très déformables. Enfin, quelques résultats décrivant l'évolution des surfaces de charge pour un chargement dilatant sont présentés.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction.</b>	<b>90</b>
<b>3.2</b>	<b>Surfaces de charge.</b>	<b>90</b>
3.2.1	Évolution de la surface de charge avec la densité.	91
3.2.2	Modification de la surface de charge lors d'un changement de direction du chemin de chargement.	93
<b>3.3</b>	<b>Écoulement plastique.</b>	<b>100</b>
3.3.1	Courbes enveloppes de déformation plastique.	101
3.3.2	Influence du chemin de chargement et de la densité relative.	105
3.3.3	Influence relative des énergies dissipées par plasticité et par frottement en fonction du chemin de chargement.	114
3.3.4	Influence du coefficient de frottement.	124
<b>3.4</b>	<b>Chargement dilatant.</b>	<b>126</b>
3.4.1	Contrainte-Déformation en chargement dilatant.	128
3.4.2	Surface de rupture.	130
3.4.3	Évolution de la surface de charge sous l'effet du phénomène de dilatance.	131
3.4.4	Conclusion.	137

---

### 3.1 Introduction.

La détermination de la direction d'écoulement en déformation n'est pas évidente. À ce titre, le Chapitre 2 a présenté en détail les différents protocoles de simulation de la réponse d'un échantillon numérique avec la MEFMP pour caractériser les mécanismes de déformation plastique des poudres métalliques ductiles. Nous avons vu qu'il est possible d'étudier le comportement incrémental d'un échantillon numérique à travers l'identification des courbes enveloppes d'énergie dissipée dans le cas des conditions aux limites qui sont pilotées en déformation, ou des courbes enveloppes de déformation plastique dans le cas du pilotage en contrainte.

Dans ce chapitre, la mise en pratique des protocoles de simulation par la MEFMP pour l'étude du comportement élasto-plastique d'un empilement numérique de 50 particules, présentés dans le chapitre précédent, est réalisée avec pour objectif de mieux comprendre le comportement incrémental des poudres ductiles.

L'étude des résultats des simulations consiste à donner un aperçu de l'écoulement plastique sur lequel on trouve très peu d'études dans le domaine des poudres métalliques ductiles. On s'intéressera à présenter dans ce chapitre un maximum d'informations apportées par la MEFMP.

Nous présentons dans ce chapitre une campagne d'expérimentation numérique, centrée sur l'étude des surfaces de charge et la loi d'écoulement. Le paragraphe 3.2 présente la première application concernant l'étude de la surface de charge avec la densité relative et les mécanismes de rotation de ces surfaces lors d'un changement de direction de chargement. Le paragraphe 3.3 est consacré à l'étude des vecteurs écoulement plastique pour vérifier l'existence d'une loi d'écoulement pour les poudres ductiles, ainsi que l'influence de la densité relative, du coefficient de frottement et du chemin de chargement initial sont évoqués. Enfin, une étude sur le chargement dilatant est effectuée dans le paragraphe 3.4.

### 3.2 Surfaces de charge.

Dans cette partie, une analyse sur les mécanismes d'évolution des surfaces de charge avec le chemin de chargement est présentée. Cette étude est réalisée par la méthode de la simulation décrite dans le Chapitre 2. Les simulations numériques sont appliquées dans ABAQUS sur un empilement numérique

qui subit une compression isotrope et une compression en matrice.

### 3.2.1 Évolution de la surface de charge avec la densité.

Cette partie est dédiée à l'influence de la densité relative finale de l'empilement numérique sur l'évolution des surfaces de charge sous l'effet des chemins de chargement isotrope et en matrice.

Le travail présenté dans cette partie fait suite à l'étude réalisée par Harthong [42] au moyen de simulation d'un empilement aléatoire de taille réduite (15 particules) avec la MEFMP pour des chemins de chargement avec changement de direction jusqu'au haute densité relative ( $D_f = 0,95$ ).

À ce titre, des campagnes d'expérimentation numérique ont été réalisées sur un empilement de 50 particules de densité relative initiale égale à  $D_i = 0,45$  (empilement présenté dans le paragraphe 2.2.3 du chapitre 2). Des essais de compression isotrope et de compression en matrice ont été réalisés jusqu'à des densités relatives finales différentes  $D_f = 0,6 ; 0,7 ; 0,9$  et  $0,98$ .

La figure 3.1 montre des surfaces de charge dans le plan contrainte déviatoire - contrainte moyenne avec différentes valeurs de densité relative finale. Elle montre également les chemins de chargement (les lignes en pointillés). Les résultats sont qualitativement similaires aux résultats expérimentaux [4, 80, 84] et numériques [42, 43] connus. Comme montré par Harthong et al. [43], l'évolution des surfaces de charge avec la densification, quels que soient les chemins de chargement monotone (compression isotrope ou compression en matrice) est une croissance approximativement homothétique et leur taille est liée à la position du point de chargement.

De plus, les surfaces de charge sont orientées suivant la direction du chargement. En effet, les surfaces de charge correspondant au chargement isotrope sont approximativement symétriques par rapport à l'axe hydrostatique (figure 3.1.a et figure 3.2.a) ce qui n'est pas le cas pour un chargement en matrice (figure 3.1.b et figure 3.2.b) surtout en basse densité relative. Cette dissymétrie s'explique par l'anisotropie de l'échantillon induite par l'anisotropie du chargement.

La figure 3.1.b illustre que le comportement du matériau en compression en matrice tend vers un comportement isotrope quand le matériau devient très dense. Ce résultat est bien visible sur la surface de charge correspondant à  $D_f = 0,98$ . Ceci est dû au fait que la porosité devient très faible dans

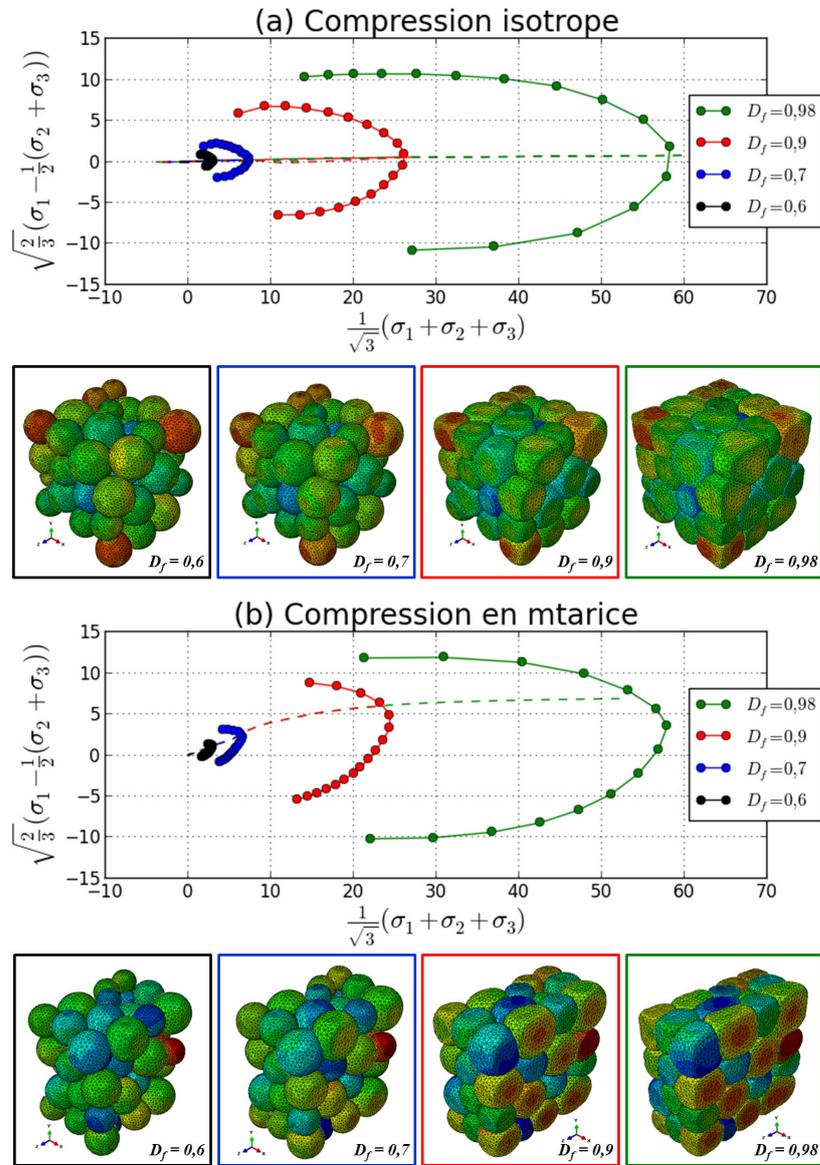


FIGURE 3.1 – Évolution des surfaces de charge d’une valeur initiale de densité relative  $D_i = 0,45$  aux différentes valeurs  $D_f = 0,6; 0,7; 0,9$  et  $0,98$ , avec deux chargements monotones : (a) compression isotrope et (b) compression en matrice. Les lignes en pointillées correspondent au chemin de chargement.

l’empilement. Par hypothèse, les particules ont un écrouissage isotrope, ce qui impose au comportement des particules de rester isotrope au cours de la déformation. L’anisotropie développée lors du chargement en matrice est donc purement une anisotropie de structure liée à une orientation préféren-

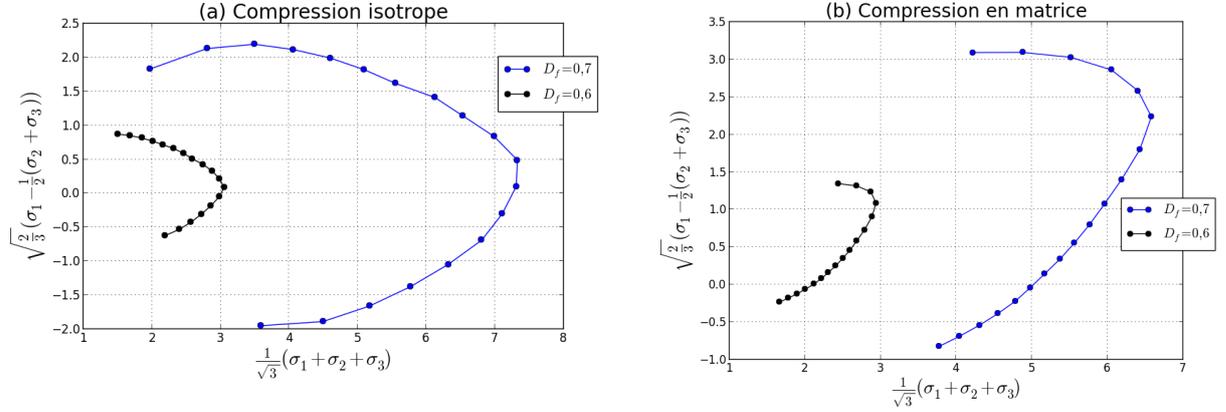


FIGURE 3.2 – Un zoom sur l'évolution des surfaces de charge de  $D_f = 0,6$  et  $D_f = 0,7$  pour les deux chargements monotones : (a) compression isotrope et (b) compression en matrice.

tielle des contacts entre particules. Dans le cas où il n'y a plus de porosité le comportement du matériau tend vers un comportement de type Von Mises isotrope.

En réalité, le comportement des particules ne peut pas rester isotrope sous l'effet d'une déformation anisotrope et d'une aussi grande amplitude. Comme les matériaux, de même que les structures de contact, tendent à aligner leurs directions d'anisotropie avec celles du chargement qui en est la cause, il est très probable que l'anisotropie réelle d'un massif de poudre soit plus importante que celle prédite par le modèle, tout spécialement en haute densité relative.

### 3.2.2 Modification de la surface de charge lors d'un changement de direction du chemin de chargement.

L'étude de l'évolution des surfaces de charge en fonction du chemin de chargement a été effectuée dans les travaux de Harthong [42, 43] avec la MEFMP sur un échantillon numérique de 15 particules, afin d'identifier les différents mécanismes de transformation des surfaces de charge. La méthode appliquée dans ce travail consistait, dans un premier temps, à écrouir l'échan-

tillon suivant un premier chargement monotone (compression isotrope ou en matrice), créant ainsi un premier état d'érouissage caractérisé par une première surface de charge. Dans un deuxième temps, l'échantillon était déchargé puis rechargé suivant un chemin déviatoire consistant à comprimer radialement l'échantillon tout en relaxant les parois axiales (figures 3.3.a, 3.3.b et 3.3.c). Lorsque la limite élastique était atteinte, la première surface de charge se trouvait modifiée par le deuxième chargement.

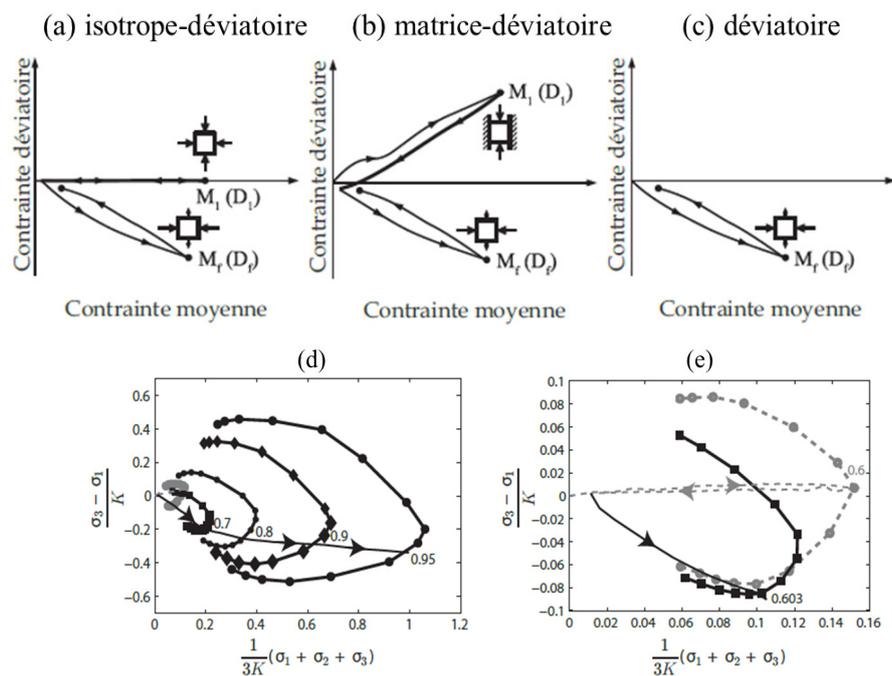


FIGURE 3.3 – Évolution de la surface de charge avec le chemin du chargement : (a) Compression isotrope suivie du chemin déviatoire. (b) Compression en matrice suivie du chemin déviatoire. (c) Chemin déviatoire monotone sans compression préalable effectué pour faire des comparaisons. (d) Évolution des surfaces de charge pour le chargement isotrope-déviatoire avec une densité relative intermédiaire  $D_1 = 0,6$ . (e) Modification des surfaces de charge sous l'effet d'une déformation plastique de faible amplitude ( $D_f - D_1 = 0,03$ ) le long du chemin déviatoire à faible densité relative ( $D_1 = 0,6$ ). Les nombres indiquent les densités relatives finales  $D_f$ . Les surfaces modifiées sont représentées en noir et les surfaces initiales sont représentées en gris : (d) chargement en matrice, (e) chargement isotrope. Résultats obtenus par Harthong [42].

Cette deuxième surface de charge est représentée pour deux cas particu-

liers sur les figures 3.3.d et 3.3.e. Il est possible de voir sur cet exemple que lors de la recharge avec le chemin déviatoire se produit une rotation de la surface de charge, et qu'il n'y a plus de rotation supplémentaire lorsqu'on poursuit le chargement en suivant le chemin déviatoire. La figure 3.3.e montre de plus que pour observer la rotation de la surface de charge, il suffit d'une déformation plastique de petite amplitude (caractérisée ici par une augmentation de densité relative de 0,03 soit 0,5%).

En variant l'amplitude du premier et du second chemin de chargement, Harthong et al. [42, 43] ont étudié de quelle manière l'échantillon numérique conserve la mémoire de la surface de charge formée par le premier chargement. Ils ont observé que lorsque le changement de direction du chemin de chargement intervient à faible densité, la surface de charge modifiée par le second chargement est quasiment identique à celle obtenue lorsqu'on supprime le premier chargement. La surface de charge s'oriente dans la direction du second chemin, comme elle le fait dans le cas d'un chargement monotone.

Dans le présent travail, une approche similaire a été utilisée sur l'échantillon de 50 particules, en utilisant cette fois le pilotage en contrainte défini au Chapitre 2 dans le paragraphe 2.3.1 pour effectuer un changement de direction du chemin de chargement sans passer par une décharge. La méthode utilisée est illustrée sur la figure 3.4. Les figures 3.4.a et 3.4.b représentent les deux étapes pour obtenir une surface de charge associée à un chargement isotrope représenté sur la figure par le trajet OA (cf. paragraphe 2.3.1 du chapitre 2). À partir du point A situé à l'extrémité de la surface de charge, on applique, dans un premier temps, un chemin de chargement AB (chargement essentiellement axial, c'est-à-dire  $\sigma_1 > \sigma_2, \sigma_3$ ) ou AB' (chargement essentiellement radial, c'est-à-dire  $\sigma_2, \sigma_3 > \sigma_1$ ). Dans un deuxième temps, une décharge élastique est appliquée jusqu'au point de déchargement (trajets BO et B'O sur la figure 3.4.c), à partir duquel on recharge dans toutes les directions afin de détecter la nouvelle surface de charge (figure 3.4.d).

La figure 3.5 montre les deux surfaces de charge obtenues à l'issue des trajets OAB et OAB' en comparaison avec la surface de charge initiale correspondant au chemin de chargement isotrope OA. D'après ces résultats, la surface de charge est modifiée lors du changement de direction du chemin de chargement. La nouvelle surface effectue une rotation et tourne dans la direction du nouveau chemin de chargement, tout en augmentant de taille, ce qui est conformes aux tendances observées par Harthong et al. pour de faibles densités relatives.

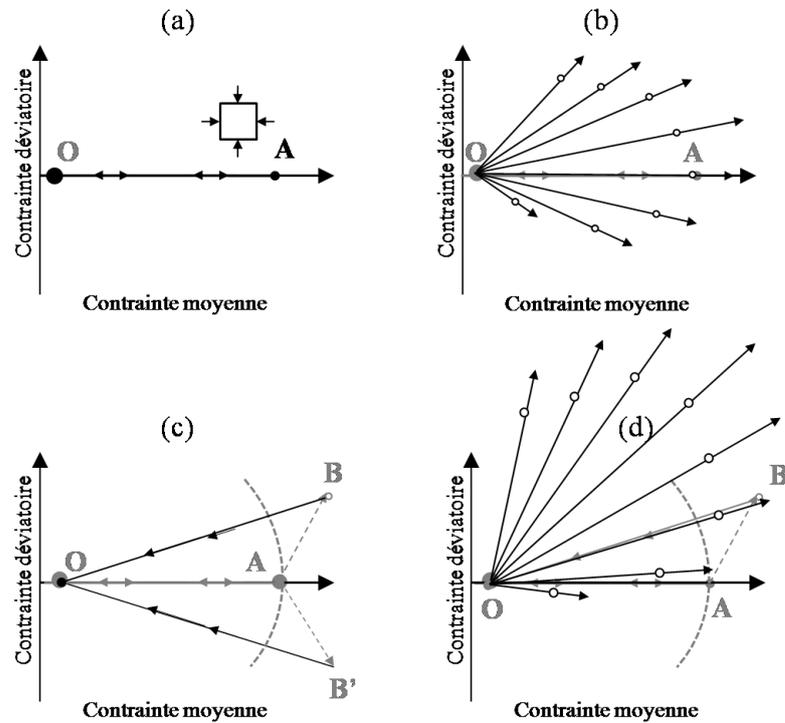


FIGURE 3.4 – Méthode pour obtenir des surfaces de charge associées à plusieurs chemins de chargement. (a) Compression isotrope : charge/décharge. (b) Recharge dans toutes les directions afin de détecter les points de la surface de charge. (c) Recharge élasto-plastique dans deux directions différentes dans l'espace des contraintes puis décharge élastique jusqu'à un état de contrainte très faible. (d) Recharge dans toutes les directions.

On observe de plus que lors du trajet AB, le domaine élastique augmente, c'est-à-dire que quel que soit le chemin de chargement effectué depuis l'intérieur de la surface de charge, la limite élastique a augmenté ou est resté la même (écrouissage positif, cf. figure 3.6.a). En revanche, à la suite du trajet AB', il existe des directions de chargement pour lesquelles la limite élastique a diminué (écrouissage négatif, cf. figure 3.6.b).

L'écrouissage négatif ne peut pas s'expliquer par l'écrouissage des particules. En effet, le comportement constitutif des particules est un modèle de Mises à écrouissage isotrope en loi puissance (équation (2.1)), de sorte que, quel que soit le chemin de chargement, la limite élastique ne peut qu'augmenter (elle est définie comme une fonction strictement croissante de la déformation plastique équivalente). L'explication du comportement observé sur

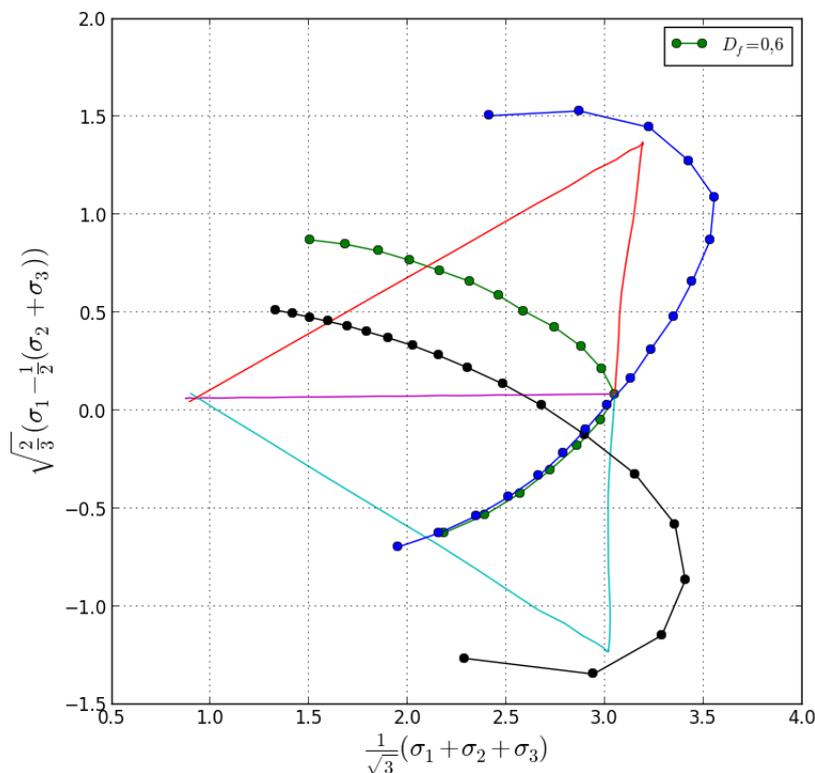


FIGURE 3.5 – Évolution des surfaces de charge pour un chargement décrit sur la figure 3.4. La surface en vert est la surface de charge qui correspond au premier chargement isotrope jusqu'à une densité relative finale  $D_f = 0,6$ .

la figure 3.6.b est donc à chercher dans la structure des contacts.

Harthong et al. ont attribué ce phénomène à des pertes de contact entre particules au sein de l'échantillon. En effet, au cours d'une compression monotone, les surfaces de contact se forment aux endroits où les efforts se concentrent, et s'orientent naturellement dans les directions des efforts qui les créent. De ce fait, elles contribuent à augmenter la résistance de l'échantillon au chargement qui les crée, en répartissant les contraintes sur des surfaces de plus en plus grandes. Lorsqu'un changement se produit dans la direction du chemin de chargement, les efforts exercés aux limites de l'échantillon sont modifiés, et avec eux les chaînes de forces entre les particules. Si le changement de direction est assez important, certains contact qui étaient jusqu'alors sollicités en compression se retrouvent sollicités en traction et se séparent instan-

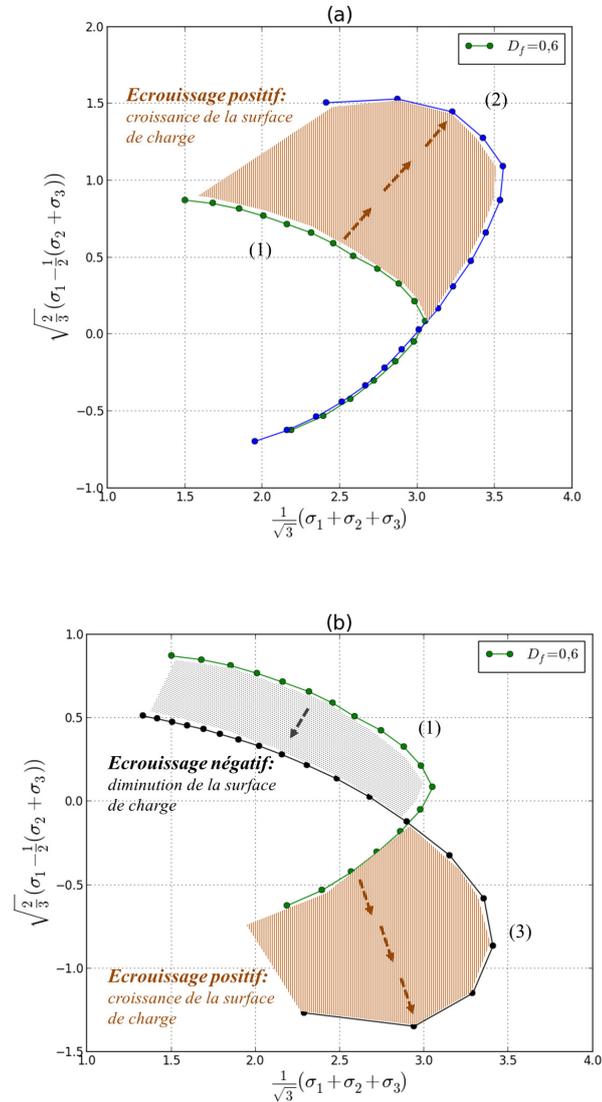


FIGURE 3.6 – (a) Identification du mécanisme d'écroissage positif. (b) Identification du mécanisme d'écroissage positif et négatif. (1) Surface de charge correspond au chargement monotone. (2) Surface de charge correspond au chargement AB. (3) Surface de charge correspond au chargement AB'.

tanément. Il se produit alors une réorganisation des particules dans l'échantillon qui, en quelques sorte, s'adapte au nouveau chargement. Le nouveau chargement mobilise des contacts dont les surfaces continuent à grandir, et supprime d'autres contacts, diminuant la résistance aux autres chargements,

du fait qu'une même contrainte macroscopique est distribuée sur une surface totale de contact plus faible. Ce phénomène est anisotrope : pour s'en convaincre, prenons un exemple simple. Un échantillon est comprimé de manière isotrope jusqu'à une densité  $D$ . Puis, il est soumis à une compression uniaxiale suivant la direction X. Par effet Poisson, certains contacts orientés suivant les directions Y et Z se séparent. Alors, la limite élastique pour une compression simple dans la direction X augmente, mais du fait des pertes de contact, la limite élastique dans une compression simple de direction Y et Z diminue. Au niveau de la surface de charge, ce phénomène se caractérise par une diminution du domaine élastique pour les directions de chargement impliquant une compression suivant Y et Z, et une augmentation du domaine élastique pour les directions de chargement mobilisant essentiellement une compression suivant X. Géométriquement, ce phénomène s'apparente approximativement à une rotation de la surface de charge.

On peut noter de plus, dans l'analyse de Harthong et al., que pour qu'une réorganisation des particules se produise lors d'un changement de direction du chemin de chargement, il est nécessaire que l'échantillon soit peu dense. Si celui-ci est très dense, les surfaces de contact entre les particules sont grandes et restreignent très fortement les mouvements des particules. Au-delà d'une certaine densité relative, il devient impossible de séparer deux particules en contact. Cela a pour conséquence que le phénomène de rotation des surfaces de charge disparaît progressivement lorsque la densité relative augmente, ce qui est une caractéristique originale des poudres ductiles.

Dans le cas présent (figure 3.5), il a été possible d'observer des pertes de contact lors du trajet AB'. Ces pertes de contact sont mises en évidence sur la figure 3.7 montrant une coupe de l'échantillon à la suite du chemin de chargement AB'. En revanche, pour le trajet AB (pour lequel aucune diminution de la surface de charge n'est observée), il n'a pas été possible de visualiser des pertes de contact. Ces observations sont en accord avec les conclusions de Harthong et al., attribuant la diminution des surfaces de charge aux pertes de contact.

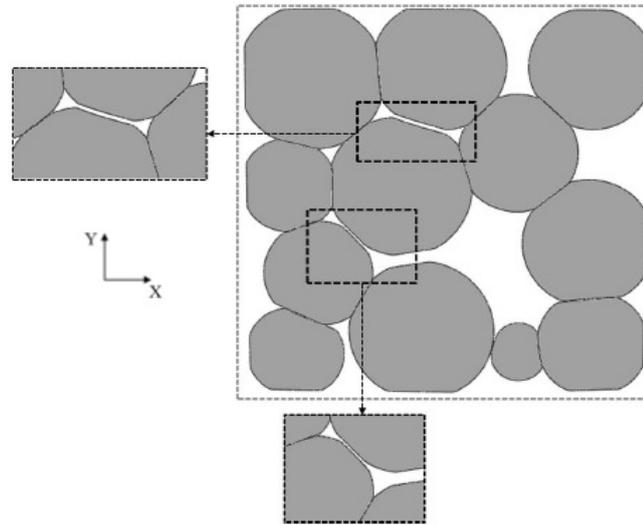


FIGURE 3.7 – Des pertes de contact détectées dans l’empilement après des recharges élasto-plastiques afin de détecter la surface de charge

### 3.3 Écoulement plastique d’un empilement de particules élasto-plastiques au cours de la déformation.

Dans cette partie, les différents protocoles de simulation pour étudier l’écoulement plastique présentés dans le Chapitre 2 sont appliqués dans ABAQUS sur un empilement numérique de 50 particules qui est compacté suivant deux chemins de chargement monotones : compression isotrope et compression en matrice. On s’intéresse cette fois à la direction du vecteur écoulement plastique au cours d’une déformation incrémentale ; en particulier, si cette direction est unique pour un état de contrainte donné.

On va appliquer une variation de contrainte  $\Delta\sigma$  qui est supposée suffisamment petite pour être assimilée à un incrément de contrainte  $d\sigma$ , et de même la réponse recherchée est une petite variation  $\Delta\varepsilon^{pl}$  qui sera assimilée à un incrément de déformation plastique  $d\varepsilon^{pl}$ . En vertu de cette hypothèse, pour garder des notations simples nous continuerons de noter par "d" les petites variations imposées ou mesurées de la déformation ou de la contrainte dans la suite de cette thèse.

### 3.3.1 Courbes enveloppes de déformation plastique.

Les courbes enveloppes des incréments de déformation plastique (cf. paragraphe 2.3.2 du Chapitre 2) sont tracées dans un plan déformation déviatoire-déformation volumique qui est superposé par la suite au plan contrainte déviatoire-contrainte moyenne au niveau des points de la surface de charge qui leur sont associés (figure 3.8).

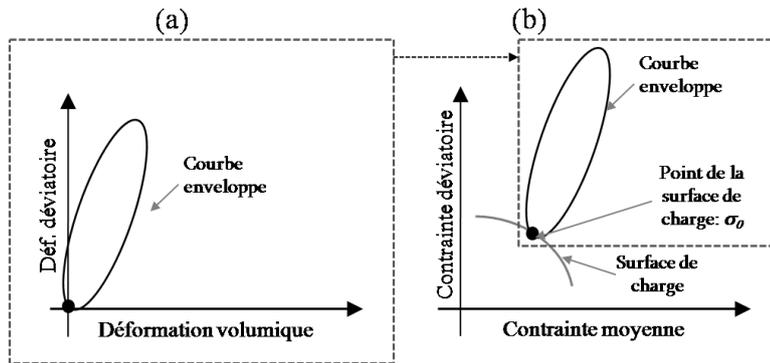


FIGURE 3.8 – (a) Courbe enveloppe dans le plan déformation déviatoire-déformation volumique. (b) Courbe enveloppe associée à un plan de la surface de charge tracée dans le plan déformation déviatoire-déformation volumique qui est superposé avec le plan contrainte déviatoire-contrainte moyenne.

Afin de préserver le rapport d'aspect des surfaces de charge et des courbes enveloppes de déformation plastique, des invariants de contrainte et de déformation ont été définis d'une manière légèrement non conventionnelle. On utilise ainsi  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$ ,  $\bar{\varepsilon}_v$  et  $\bar{\varepsilon}_d$ , définis par les équations (2.5), (2.6), (2.7) et (2.8) présentées au Chapitre 2.  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$ ,  $\bar{\varepsilon}_v$  et  $\bar{\varepsilon}_d$  sont respectivement le 1<sup>er</sup> et le 2<sup>me</sup> invariant de contrainte et de déformation. Ces invariants de contrainte et de déformation correspondent à la projection sur le plan axisymétrique de la réponse et qui sont légèrement différents des contraintes déviatoire ( $q = \sqrt{\frac{3}{2}tr(\mathbf{s}^2)}$ ) et moyenne ( $p = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})$ ) et des déformations déviatoire ( $\varepsilon_d = \sqrt{\frac{2}{3}tr(\boldsymbol{\varepsilon}_d^2)}$ ) et volumique ( $\varepsilon_v = tr(\boldsymbol{\varepsilon})$ ) définies habituellement.

La figure 3.9 montre les courbes enveloppes de déformation plastique associées à quelques points de la surface de charge pour une compression isotrope jusqu'à une densité relative  $D_f = 0,9$ . À partir d'un état de contrainte situé sur la surface de charge, une série d'incrément de contrainte de normes  $d\sigma$

identiques mais de directions différentes est appliquée (cf. paragraphe 2.3.2 du Chapitre 2). En fonction de l'état de contrainte, la réponse de l'échantillon numérique à un incrément de norme  $d\sigma$  peut être un incrément de déformation plastique de norme très petite (comme c'est le cas dans la zone du point de chargement sur la figure 3.9), ou au contraire très grande si l'état de contrainte est fortement déviatoire. Par conséquent, si l'on souhaite obtenir en réponse un incrément de déformation plastique  $d\varepsilon^{pl}$  à la fois suffisamment petit pour garder un caractère incrémental et suffisamment grand pour que le bruit numérique soit négligeable, il est nécessaire de choisir une norme  $d\sigma$  différente en chaque point. Pour ce faire, pour chaque point de la surface de charge et pour chaque surface de charge, il faut réaliser un ensemble d'essais-erreurs afin de définir la norme  $d\sigma$  appropriée.

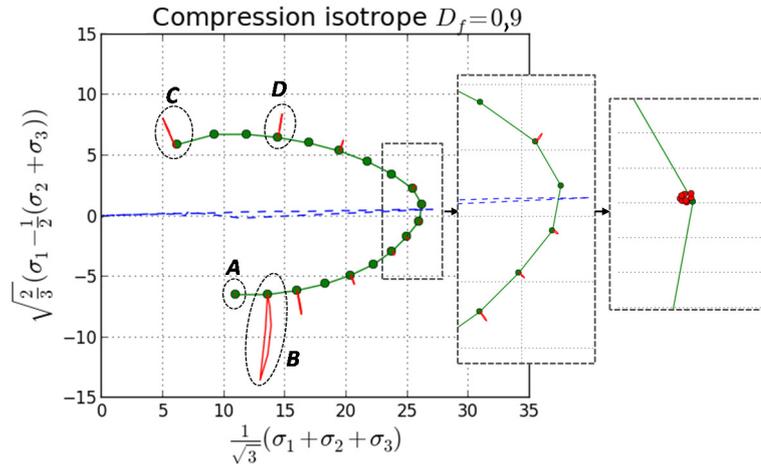


FIGURE 3.9 – Courbes enveloppes associées à quelques points de la surface de charge d'un empilement de 50 particules comprimé suivant un chemin de chargement isotrope jusqu'à  $D_f = 0,9$ .

De plus, la réponse incrémentale étant par nature petite, il est nécessaire d'utiliser une vitesse de chargement faible lors du pilotage des simulations afin d'obtenir une réponse raisonnablement précise. Chaque point de chaque courbe enveloppe représente un temps de calcul de l'ordre de 11h, temps de calcul à multiplier par 12 points par courbe enveloppe, puis par une dizaine d'états de contraintes par surface de charge et six surfaces de charge correspondant à trois valeurs de densité relative et deux chemins de chargement.

Par conséquent, il a été choisi ici d'appliquer la même amplitude  $d\sigma$  pour

tous les points d'une même surface de charge, afin de gagner du temps de calcul en évitant la procédure d'essais-erreurs pour un maximum d'états de contrainte. Le choix d'une amplitude constante des incréments de contrainte imposés pour chaque surface de charge permet de plus de comparer l'amplitude de la déformation plastique incrémentale pour différents états de contrainte. La figure 3.9 montre ainsi que la déformation plastique est beaucoup plus petite pour les états de contrainte peu déviatoire (c'est-à-dire, pour les faibles valeurs de  $\frac{q}{p}$ ).

On peut voir que pour le point de la surface de charge situé au plus près du point de chargement<sup>1</sup> (figure 3.9), la réponse en déformation plastique est trop petite et peut être considérée nulle vis-à-vis de la précision des résultats obtenus. La courbe enveloppe de déformation plastique correspondant au point noté B est nettement plus grande que les autres et montre une courbure caractéristique attribuée au fait que l'amplitude  $d\sigma$  appliquée est un peu trop grande. Pour les points A et C de la surface de charge, l'amplitude  $d\sigma$  appliquée a été réduite car les résultats obtenus ont été estimés insatisfaisants. Les amplitudes  $d\sigma$  utilisées pour les différents points de la surface de charge de la figure 3.9 sont explicitées dans le tableau 3.1.

TABLE 3.1 – Les valeurs de  $d\sigma$  pour la surface de charge correspond à une compression isotrope jusqu'à la densité relative  $D_f = 0,9$  (figure 3.9).

Chargement	Points de la surface de charge	$d\sigma$ (MPa)
Isotrope	A	0,08
	C	0,5
	Reste	2

La petitesse des amplitudes  $d\sigma$  impose un pilotage précis des simulations, ce qui a pour conséquence un temps de calcul important. Là encore, un compromis a dû être fait entre la précision du pilotage et le temps de calcul. Ainsi, une vérification de la norme des incréments de contrainte effectivement appliqués pendant la simulation a été faite. Cette vérification a mis en évidence un écart relatif allant jusqu'à 10-15% de  $d\sigma$  par rapport à la consigne. Cet écart a été considéré comme satisfaisant. Il est très probable que la direction des incréments de contrainte imposés est également pilotée avec une imprécision de même ordre.

1. Le point de chargement caractérise l'état de contrainte à la fin du premier chargement (Étape 1, cf. paragraphe 2.3.1 du Chapitre 2)

Cependant, lorsque l'incrément de déformation plastique a une direction unique, la courbe enveloppe de déformation plastique se réduit à un segment de droite du fait que tous les incréments de déformation plastique sont colinéaires. Ceci reste vrai quelle que soit l'amplitude et la direction des incréments de contrainte imposées. Si la courbe enveloppe n'est pas assimilable à un segment de droite, alors sa forme est influencée par l'imprécision du pilotage des incréments de contrainte. Néanmoins, l'unicité de la direction de l'incrément de déformation plastique pourra être jugée de cette manière sans risque d'erreur. Les résultats présentés plus loin seront analysés en gardant cette restriction à l'esprit.

La figure 3.9 montre que dans le plan contrainte déviatoire-contrainte moyenne (déformation déviatoire-déformation volumique) certaines courbes enveloppes de déformation plastique qui sont assimilables à des segments de droite, comme par exemple celle associée au point D. Ceci suggère la validité d'un modèle basé sur un potentiel plastique. Il est connu toutefois que dans le cas d'un matériau granulaire constitués de particules rigides, les courbes enveloppes de déformation plastique sont des courbes planes perpendiculaires au plan axisymétrique des déformations, de sorte que la représentation dans le plan déformation déviatoire-déformation volumique ( $\overline{\varepsilon_v}$ - $\overline{\varepsilon_d}$ ) ne permet pas de mettre en évidence la non-unicité de la direction d'écoulement [15, 93]. Il est alors nécessaire de considérer le troisième invariant pour assimiler ou non la courbe enveloppe à un segment de droite. Ainsi, la figure 3.10 montre la courbe enveloppe de déformation plastique associée au point D de la figure 3.9, dans le plan déviatoire. Ce résultat permet de vérifier que la courbe enveloppe de déformation plastique obtenue reste très allongée et proche d'un segment de droite, ce qui conforme l'hypothèse d'une unicité approximative de la direction d'écoulement au point D de la surface de charge de la figure 3.9. La figure 3.10 donne aussi un ordre de grandeur de l'amplitude des incréments de déformation plastique obtenus, qui est de l'ordre de  $10^{-4}$  ( $\overline{\varepsilon_d} = 1,12 \cdot 10^{-4}$ , l'aspect incrémental est bien vérifié) pour les états de contrainte les plus déviatoires. Finalement, la courbe enveloppe de déformation plastique pour le point B de la figure 3.9 correspond à  $4 \cdot 10^{-4}$  ce qui reste petit.

Nous allons maintenant étudier la direction de l'écoulement plastique en variant la densité relative finale de l'empilement ainsi que le chemin de chargement.

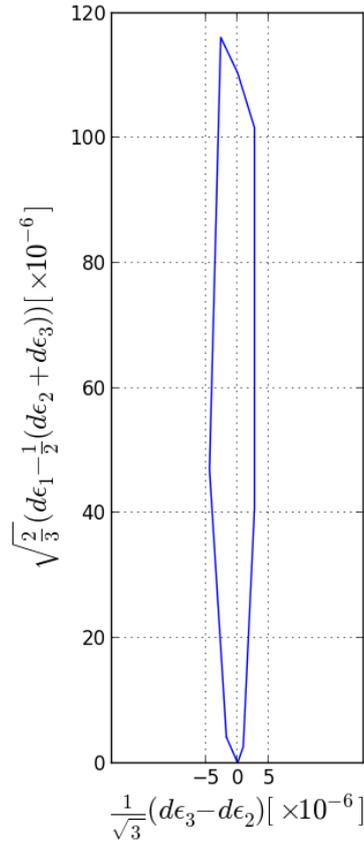


FIGURE 3.10 – Représentation de la courbe enveloppe de déformation plastique correspond au point D de la figure 3.9 dans le plan déviatoire.

### 3.3.2 Influence du chemin de chargement et de la densité relative.

Dans cette partie, on va étudier l'évolution au cours du chargement de l'écoulement plastique de l'empilement numérique de 50 particules qui est soumis à une compression isotrope et une compression en matrice.

Les tableaux 3.2, 3.3 et 3.4 présentent les valeurs approximatives des amplitudes  $d\sigma$  des incréments de contrainte appliqués sur l'empilement numérique afin de détecter les courbes enveloppes pour des densités relatives finales égales à  $D_f = 0,9$ ;  $0,7$  et  $0,6$ .

TABLE 3.2 – Les valeurs de  $d\sigma$  pour  $D_f = 0,9$  (figure 3.11).

Chargement	Points de la surface de charge	$d\sigma$ (MPa)
Isotrope	A	0,08
	C	0,5
	Reste	2
Matrice	Tous	2,5

TABLE 3.3 – Les valeurs de  $d\sigma$  pour  $D_f = 0,7$  (figure 3.12).

Chargement	Points de la surface de charge	$d\sigma$ (MPa)
Isotrope	E	0,06
	F	0,3
	Reste	0,46
Matrice	Tous	0,8

TABLE 3.4 – Les valeurs de  $d\sigma$  pour  $D_f = 0,6$  (figure 3.13).

Chargement	$d\sigma$ (MPa)
Isotrope	0,5
Matrice	0,4

Les figures 3.11, 3.12 et 3.13 montrent la réponse du matériau dans le plan contrainte déviatoire-contrainte moyenne, qui correspond à des courbes enveloppes associées à plusieurs points de la surface de charge pour une compression isotrope et une compression en matrice jusqu'à une densité relative finale  $D_f = 0,9$ ;  $0,7$  et  $0,6$ .

Ces figures montrent que, pour les deux types de chargement et pour différentes valeur de densité relative, la norme des incréments de déformation plastique varie très significativement d'un point à l'autre de la surface de charge. Pour cette raison, les vecteurs incréments de déformation plastique ont été normalisés par la norme du plus grand d'entre eux pour chaque état de contrainte afin de bien visualiser la forme de toutes les courbes enveloppes sur la même figure (figures 3.11.b, 3.11.d, 3.12.b, 3.12.d, 3.13.b et 3.13.d).

Dans le cas de la compression isotrope et pour une haute densité relative, on remarque que sur le point de la surface de charge le plus proche du point de chargement (figure 3.11.b), aucune courbe enveloppe normalisée n'a été tracée, ce qui se justifie par le fait que les vecteurs incréments de déformation

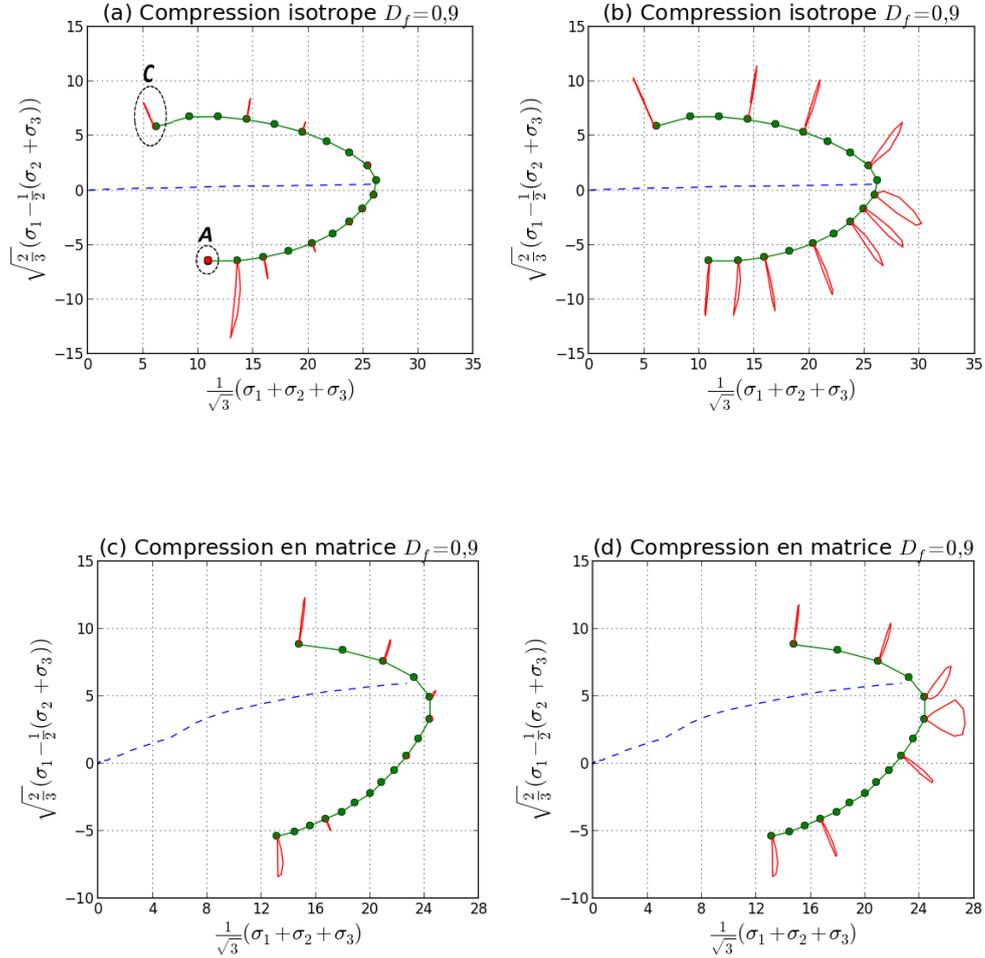


FIGURE 3.11 – Courbes enveloppes associées à quelques points de la surface de charge d’un empilement de 50 particules. (a) et (b) Compression isotrope, (c) et (d) compression en matrice jusqu’à une densité relative finale  $D = 0,9$ . (b) et (d) Courbes enveloppes normalisées. Les lignes en pointillées correspondent à la première charge.

plastique sont trop petits pour être détectés (cf. figure 3.11.a).

Que ce soit avec une grande densité relative finale  $D_f = 0,9$  (figure 3.11) ou avec des faibles valeurs ( $D_f = 0,7$ ; figure 3.12 ou  $D_f = 0,6$ ; figure 3.13), les courbes enveloppes de déformation plastique correspondant à des états de contrainte éloignés du point de chargement et de l’axe hydrostatique sont

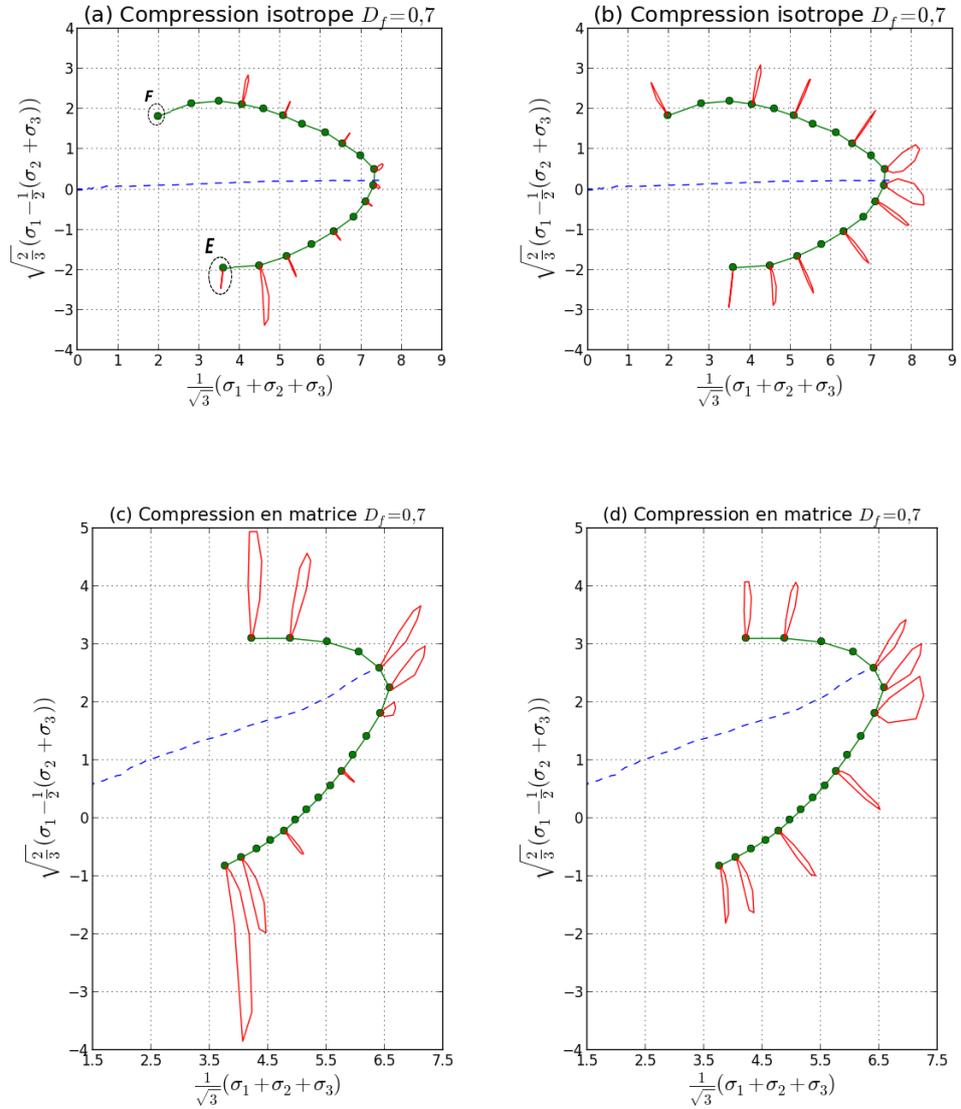


FIGURE 3.12 – Courbes enveloppes associées à quelques points de la surface de charge d'un empilement de 50 particules. (a) et (b) Compression isotrope, (c) et (d) compression en matrice jusqu'à une densité relative finale  $D_f = 0,7$ . (b) et (d) Courbes enveloppes normalisées. Les lignes en pointillées correspondent à la première charge.

proches de segments de droite. Ces segments sont plus approximativement normaux à la surface de charge, sauf pour  $D_f = 0,6$  dans le cas des états de

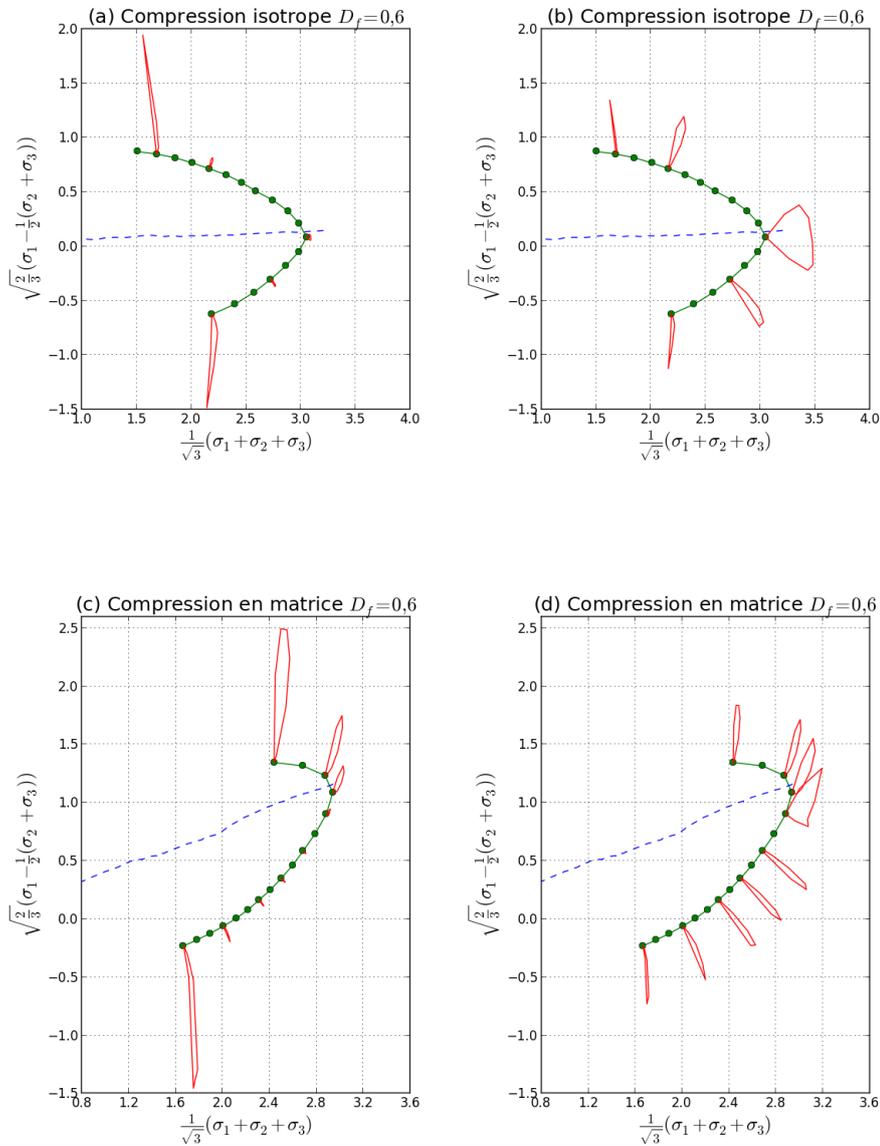


FIGURE 3.13 – Courbes enveloppes associées à quelques points de la surface de charge d'un empilement de 50 particules. (a) et (b) Compression isotrope, (c) et (d) compression en matrice jusqu'à une densité relative finale  $D_f = 0,6$ . (b) et (d) Courbes enveloppes normalisées. Les lignes en pointillées correspondent à la première charge.

contraintes les plus déviatoires. Pour les états de contrainte les plus déviatoire (c'est-à-dire pour  $\frac{\bar{q}}{p}$  très grand), on observe un comportement dilatant<sup>2</sup> dans le cas des compressions isotropes pour  $D_f = 0,6$  et  $D_f = 0,9$ . La dilatance (figure 3.14) est usuellement expliquée par le fait que deux rangées de particules en contact doivent s'écarter pour pouvoir glisser l'une par rapport à l'autre, ce qui implique une augmentation du volume. Ce comportement dilatant est bien illustré sur les figures 3.11.a et 3.13.a où les courbes enveloppes de déformation plastique sont orientées vers la gauche, ce qui traduit, avec les conventions de signe appliquées ici, une augmentation du volume de l'échantillon.

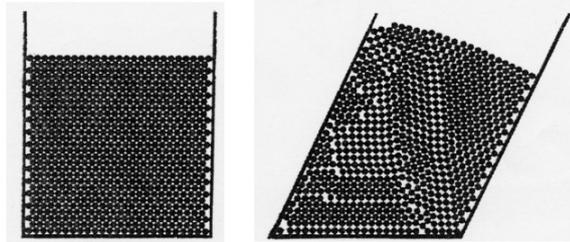


FIGURE 3.14 – Phénomène de la dilatance lié au déplacement des particules.

Au niveau du point de chargement, que ce soit pour la compression isotrope ou en matrice, et pour toutes les valeurs de densité relative, les courbes enveloppes de déformation plastique ne sont plus du tout assimilables à des segments de droite, ce qui traduit la non-unicité de la direction du vecteur incrément de déformation plastique (cf. figure 3.15).

En revanche, dans le cas de la compression en matrice on remarque que premièrement, les courbes enveloppes de déformation plastique sont les plus petites au niveau des points de la surface de charge proches de l'axe hydrostatique; et deuxièmement, la non-unicité de la direction de l'incrément de déformation plastique est la plus évidente au niveau du point de chargement.

Ces deux observations entraînant deux conclusions :

- Il n'y a pas de corrélation entre la taille de la courbe enveloppe et leur forme; la forme ovoïde des courbes enveloppes associées à une

---

2. La dilatance constitue une caractéristique particulière des matériaux granulaires. À la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, Reynolds a constaté que lorsqu'une certaine masse de poudre est placée dans une enveloppe flexible, son volume augmente invariablement lorsque cette enveloppe est déformée.

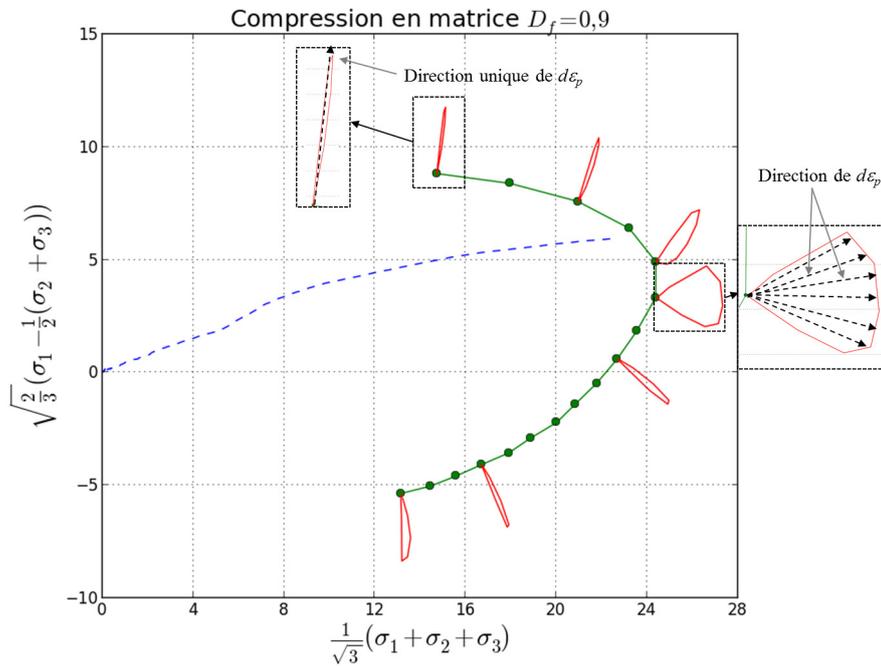


FIGURE 3.15 – Zoom sur deux courbes enveloppes associées à deux points de la surface de charge d’un empilement de 50 particules soumis à une compression en matrice jusqu’à  $D = 0,9$  afin d’identifier la direction de l’écoulement plastique.

direction d’écoulement non unique ne peut donc pas être attribuée au seul fait que le bruit numérique devient plus important par rapport à la norme des vecteurs incréments de déformation plastique, contribuant ainsi à l’imprécision de la courbe enveloppe observée. En effet, si tel était le cas, on n’observerait pas de courbes enveloppes de déformation plastique à la fois petite et proche d’un segment de droite.

- L’indétermination de la direction d’écoulement n’est pas liée au caractère isotrope du champ de contrainte.

Le comportement observé se résume ainsi :

1. L’amplitude de l’incrément de déformation plastique est très petite pour les états de contrainte isotropes, et de plus en plus grande lorsque l’état de contrainte devient plus déviatoire (lorsque  $\frac{\bar{q}}{p}$  augmente). Ceci

peut s'interpréter par le fait que l'état de contrainte étant isotrope, il n'existe pas de direction unique dans laquelle les contraintes seraient plus faibles, autorisant ainsi les particules à se déplacer plus facilement que dans les autres directions.

2. Partout ailleurs, la direction d'écoulement est approximativement unique.
3. À proximité du point de chargement, la direction d'écoulement n'est pas unique.

Les points 2 et 3 suggèrent la validité d'un modèle de comportement incluant un potentiel plastique, qui toutefois doit être singulier au niveau du point de chargement, afin de permettre la non-unicité de la direction d'écoulement. Cette singularité de la direction d'écoulement rappelle les résultats de Fleck et al. [32, 31, 30, 86]. Fleck et al. ont établi un modèle à partir d'une modélisation micromécanique qui aboutit à une loi d'écoulement associée où la surface de charge (assimilée au potentiel plastique du fait du caractère associé) possède une singularité au niveau du point de chargement. Cette singularité s'explique, dans le cadre de ce modèle, par le fait que les particules se déplacent suivant un champ de déformation affine dans le cadre d'une hypothèse de petites déformations où la rotation des plans de contact au cours du chargement est négligée. L'état de contrainte correspondant au point de chargement est alors précisément celui pour lequel tous les contacts sont sollicités de manière purement normale. La singularité résulte alors de la modélisation utilisée à l'échelle du contact entre deux particules, pour laquelle une surface de charge singulière est définie, la direction du déplacement relatif des particules étant non-unique dans le cas d'une force de contact purement normale [32].

Dans le cas présent, la plupart des hypothèses du modèle de Fleck ne s'applique pas, notamment du fait que les particules sont libres de se réarranger, que les déformations et les surfaces de contact ne peuvent pas être considérées comme petites, et que les surfaces de contacts ne sont pas planes. Il n'y a donc aucune raison de penser que les contacts puissent être sollicités de manière purement normale. Cependant, l'état de contrainte correspondant au point de chargement a ceci de particulier qu'il correspond au chargement qui a créé les surfaces de contact. Comme mentionné au paragraphe 3.2.2, les surfaces de contact s'orientent dans la direction des forces qui les créent, et par conséquent elles sont orientées de manière à résister au maximum aux états de contrainte situés sur le chemin de chargement.

Cette propriété peut expliquer la non-unicité de la direction d'écoulement au niveau du point de chargement, par le fait que la déformation plastique associée à l'état de contrainte est très petite du fait de la grande résistance de l'échantillon à cet état particulier de contrainte, ce qui a pour effet d'augmenter l'effet de l'incrément de contrainte relativement à celui de l'état de contrainte. Pour mieux comprendre ce phénomène, il est possible de faire une analogie avec le cas d'un bloc solide glissant sur un plan. Sur ce bloc s'exerce une force  $F$  qui est l'analogie de l'état de contrainte ; le plan est l'analogie de la structure de l'échantillon. Supposons que la force  $F$  est telle que le bloc est à la limite du glissement (qui est l'analogie de la limite élastique). La force  $F$  se voit ensuite augmentée d'un petit incrément  $dF$  (l'analogie de l'incrément de contrainte d'amplitude  $d\sigma$ ) qu'on peut appliquer dans toutes les directions, et le petit déplacement du bloc,  $du$ , résultant de l'application de  $dF$ , est l'analogie de l'incrément de déformation plastique. Lorsqu'on applique  $dF$ , le bloc se met à glisser. Mais comme  $dF$  est très petit devant  $F$ , sa direction n'influe pratiquement pas sur le petit déplacement  $du$  (sauf si  $dF$  s'oppose à  $F$ , en quel cas le bloc ne glisse pas - c'est le cas d'une charge). La direction de  $du$  sera la projection de  $F$  sur le plan : la "direction d'écoulement"  $du$  est alors quasiment unique.

Considérons maintenant que le plan est déformable. Ce qui précède reste vrai : la composante de  $du$  due au glissement a une direction déterminée par le plan et la direction de la force  $F$ . En revanche,  $du$  possède une autre composante qui résulte de la déformation du plan. Supposons par exemple que la résistance à la déformation du plan est maximale pour une force  $F$  normale au plan, et supposons que le coefficient de frottement entre le bloc et le plan est relativement faible. Alors, lorsque  $F$  est normale au plan, le déplacement du bloc dans la direction normale au plan sera très petit, et le déplacement du bloc dans les directions tangentes au plan ne sera dû qu'à la petite composante  $dF$ . Mais dans le cas où le plan offre beaucoup moins de résistance au déplacement tangent qu'au déplacement normal, il se peut que le déplacement dû à la composante tangentielle de  $F+dF$  devienne important comparé au déplacement causé par la composante normale de  $F+dF$ . Dans un tel cas, la direction du déplacement total du bloc n'est pas déterminée uniquement par  $F$  et par la direction du plan, mais aussi par  $dF$  : la direction d'écoulement n'est plus unique pour un état de contrainte donné.

Ce comportement résulte du caractère écrouissable de l'échantillon, conséquence de la croissance anisotrope des surfaces de contact, qui elle-même est dépendante de l'anisotropie du chargement. Dans ce scénario, la non-unicité

de la direction d'écoulement au voisinage du point de chargement est une propriété particulière des poudres ductiles, qui résulte directement du caractère déformable des particules.

Le scénario présenté ci-dessus repose sur l'idée que la résistance à la déformation plastique est très anisotrope, c'est-à-dire qu'il existe des directions de déformation suivant lesquelles une contrainte relativement faible peut entraîner une déformation plastique relativement importante. D'autre part, la déformation est due à deux mécanismes combinés qui sont le glissement des particules et leur déformation plastique. La question qui se pose alors est de savoir la part du frottement dans la déformation plastique en fonction de l'état de contrainte. Pour estimer cela il est possible de mesurer la part de dissipation plastique et de dissipation par frottement au cours de la déformation incrémentale, ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

### 3.3.3 Influence relative des énergies dissipées par plasticité et par frottement en fonction du chemin de chargement.

Dans cette partie, on s'intéresse à déterminer l'évolution de la dissipation d'énergie avec la direction des incréments de contrainte (avec le pilotage en contrainte) et de déformation totale (avec le pilotage en déformation).

L'intérêt d'étudier l'énergie dissipée réside dans la possibilité d'étudier séparément la contribution du frottement et de la déformation plastique des particules. La méthode basée sur le pilotage en contrainte consiste à appliquer à l'échantillon numérique, comme précédemment, un ensemble d'incrémentes de contrainte de norme identique et de direction différente, puis de récupérer en réponse la quantité d'énergie dissipée. On trace alors (en coordonnées polaires) l'énergie dissipée en fonction de la direction de l'incrément de contrainte pour obtenir une courbe fermée qui sera nommée courbe enveloppe d'énergie dissipée (figure 3.16.a). La méthode basée sur le pilotage en déformation est exactement la même, à la seule différence près qu'on impose des incréments de déformation totale à la place des incréments de contrainte (figure 3.16.b).

Les figures 3.17, 3.18, 3.19 et 3.20 présentent la réponse du matériau qui correspond à des courbes enveloppes d'énergie dissipée obtenues avec un pilotage en contrainte pour une compression isotrope et une compression en matrice jusqu'à des valeurs de densité relatives  $D_f = 0,9 ; 0,7$  et  $0,6$ . Les résul-

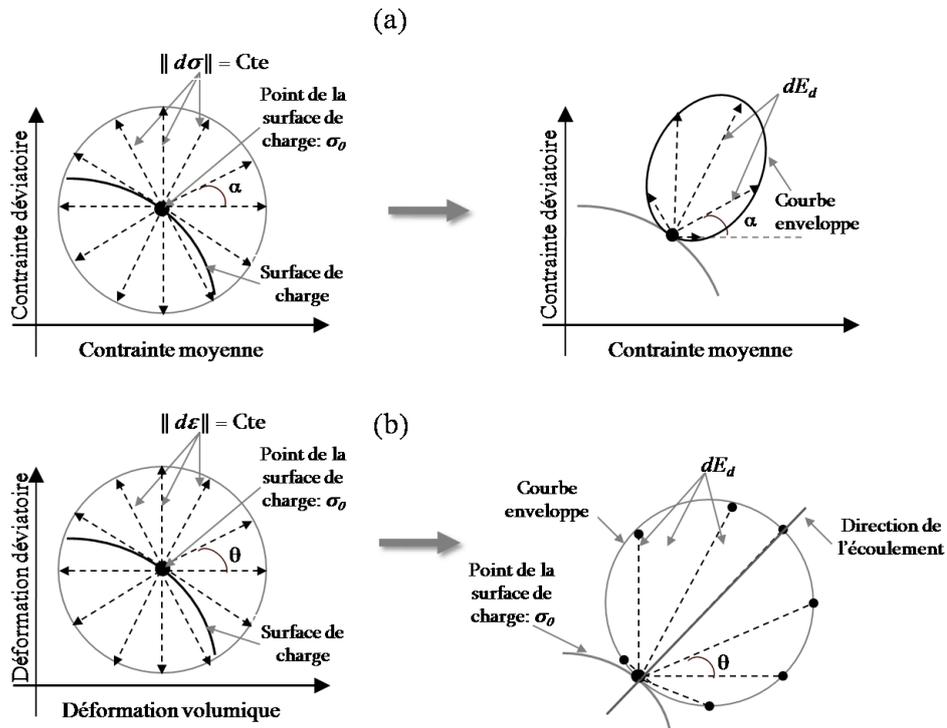


FIGURE 3.16 – Méthode d'obtention des courbes enveloppes par un (a) pilotage en contrainte et (b) pilotage en déformation.

tats sont représentés dans le plan contrainte déviatoire-contrainte moyenne.

Les figures 3.17, 3.18, 3.19 et 3.20 montrent que les courbes enveloppes d'énergie dissipée ne possèdent pas la même taille. Elles augmentent quand  $\frac{\bar{q}}{\bar{p}}$  devient plus grand : dans la zone où le matériau a une limite élastique plus faible, le même incrément de contrainte appliqué va conduire à une déformation plastique plus grande d'où une énergie dissipée plus grande. De plus, les courbes enveloppes qui correspondent à la dissipation plastique sont plus grandes que celles qui correspondent à la dissipation par frottement, ce qui montre que le principal mécanisme de la déformation plastique macroscopique est la déformation plastique des grains. On remarque également que pour la compression isotrope et en matrice les courbes enveloppes d'énergie dissipée les plus petites correspondent à un chargement isotrope, c'est-à-dire où l'incrément de déformation plastique est le plus petit.

Au niveau du point de chargement pour les deux types de compression, les courbes enveloppes d'énergie dissipée par frottement sont très petites, ce

qui implique que pour ces états de contrainte, la déformation plastique de l'échantillon est presque entièrement due à la déformation plastique des particules.

Dans les figures 3.17, 3.18.a et 3.18.b, les courbes enveloppes d'énergie dissipée pour les points où on a changé l'amplitude de l'incrément de contrainte  $d\sigma$  n'ont pas été représentées afin d'arriver à comparer la taille des courbes enveloppes d'énergie dissipée obtenues avec le même  $d\sigma$ .

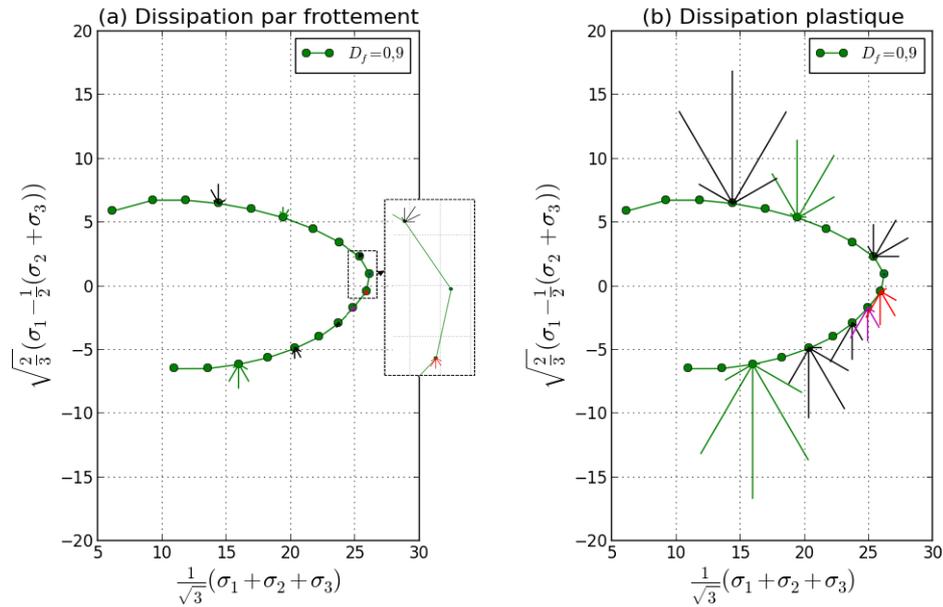


FIGURE 3.17 – Courbes enveloppes des énergies dissipées (unité arbitraire) pour un empilement de 50 particules qui est soumis à une compression isotrope jusqu'à une densité relative  $D_f = 0,9$ . (a) : Dissipation de l'énergie par frottement. (b) : Dissipation d'énergie plastique. L'échelle correspondant à l'énergie dissipée est arbitraire mais identique pour (a) et (b).

Le pilotage en déformation est appliqué par la suite à l'empilement numérique avec un seul type de chargement monotone, la compression isotrope, jusqu'à deux densités relatives  $D_f = 0,98$  et  $0,7$  afin de comparer les courbes enveloppes avec celles obtenues avec le pilotage en contrainte.

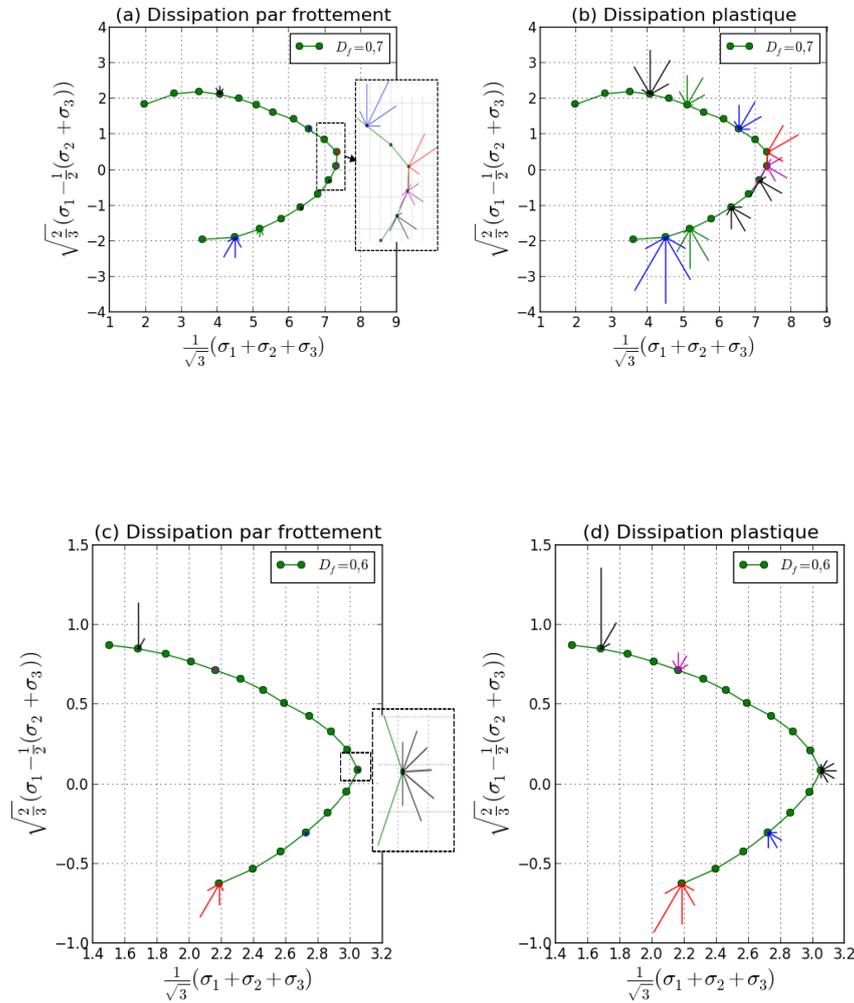


FIGURE 3.18 – Courbes enveloppes des énergies dissipées (unité arbitraire) pour un empilement de 50 particules qui est soumis à une compression isotrope jusqu'à des densités relatives  $D_f = 0,7$  et  $0,6$ . (a), (c) : Dissipation de l'énergie par frottement. (b), (d) : Dissipation d'énergie plastique. L'échelle correspondant à l'énergie dissipée est arbitraire mais identique entre (a) et (b) d'un part, (c) et (d) d'autre part.

La figure 3.21 montre les courbes enveloppes d'énergie dissipée pilotées en déformation tracées dans le plan contrainte déviateur-contrainte moyenne. Elles possèdent la même forme en coquille que les courbes enveloppes d'éner-

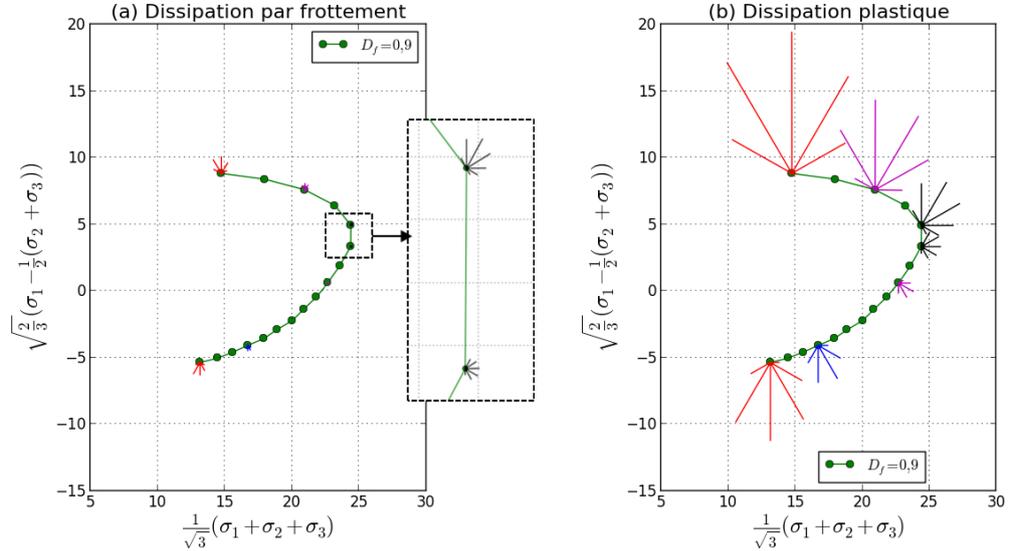


FIGURE 3.19 – Courbes enveloppes des énergies dissipées (unité arbitraire) pour un empilement de 50 particules qui est soumis à une compression en matrice jusqu’à une densité relative  $D_f = 0,9$ . (a) : Dissipation de l’énergie par frottement. (b) : Dissipation d’énergie plastique. L’échelle correspondant à l’énergie dissipée est arbitraire mais identique pour (a) et (b).

gie dissipée trouvées à partir d’un pilotage en contrainte (figures 3.17 et 3.18). Par contre, on remarque que l’énergie dissipée au niveau du point de chargement est plus importante par rapport aux autres points de la surface de charge puis elle diminue en allant vers un chargement fortement déviatoire (lorsque  $\frac{\bar{q}}{p}$  augmente). En effet, avec ce type de pilotage, on impose des incréments de déformation totale donc les incréments de déformation plastique sont globalement de même ordre de grandeur partout ce qui explique que la taille des courbes enveloppes d’énergie dissipée sera approximativement en proportion de l’amplitude des contraintes (les courbes enveloppes d’énergie dissipée ont le même ordre de grandeur partout mais un peu plus petites aux extrémités).

Néanmoins en pilotage en contrainte, on obtient des courbes enveloppes d’énergie dissipée plus grandes pour les états de contraintes plus déviatoires (plus grandes valeurs de  $\frac{\bar{q}}{p}$ ) parce qu’avec ce type de pilotage, le même in-

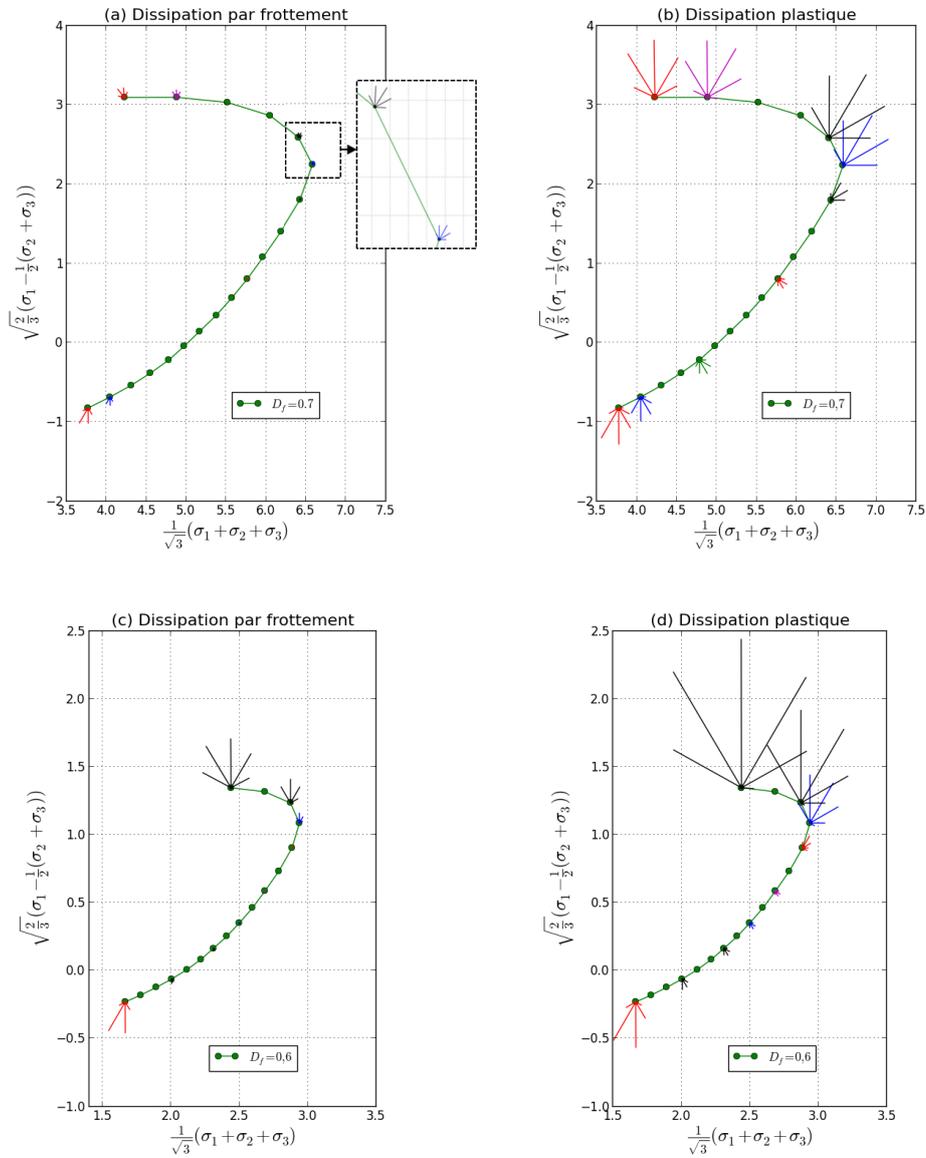


FIGURE 3.20 – Courbes enveloppes des énergies dissipées (unité arbitraire) pour un empilement de 50 particules qui est soumis à une compression en matrice jusqu'à des densités relatives  $D_f = 0,7$  et  $0,6$ . (a), (c) : Dissipation de l'énergie par frottement. (b), (d) : Dissipation d'énergie plastique. L'échelle correspondant à l'énergie dissipée est arbitraire mais identique entre (a) et (b) d'une part, (c) et (d) d'autre part.

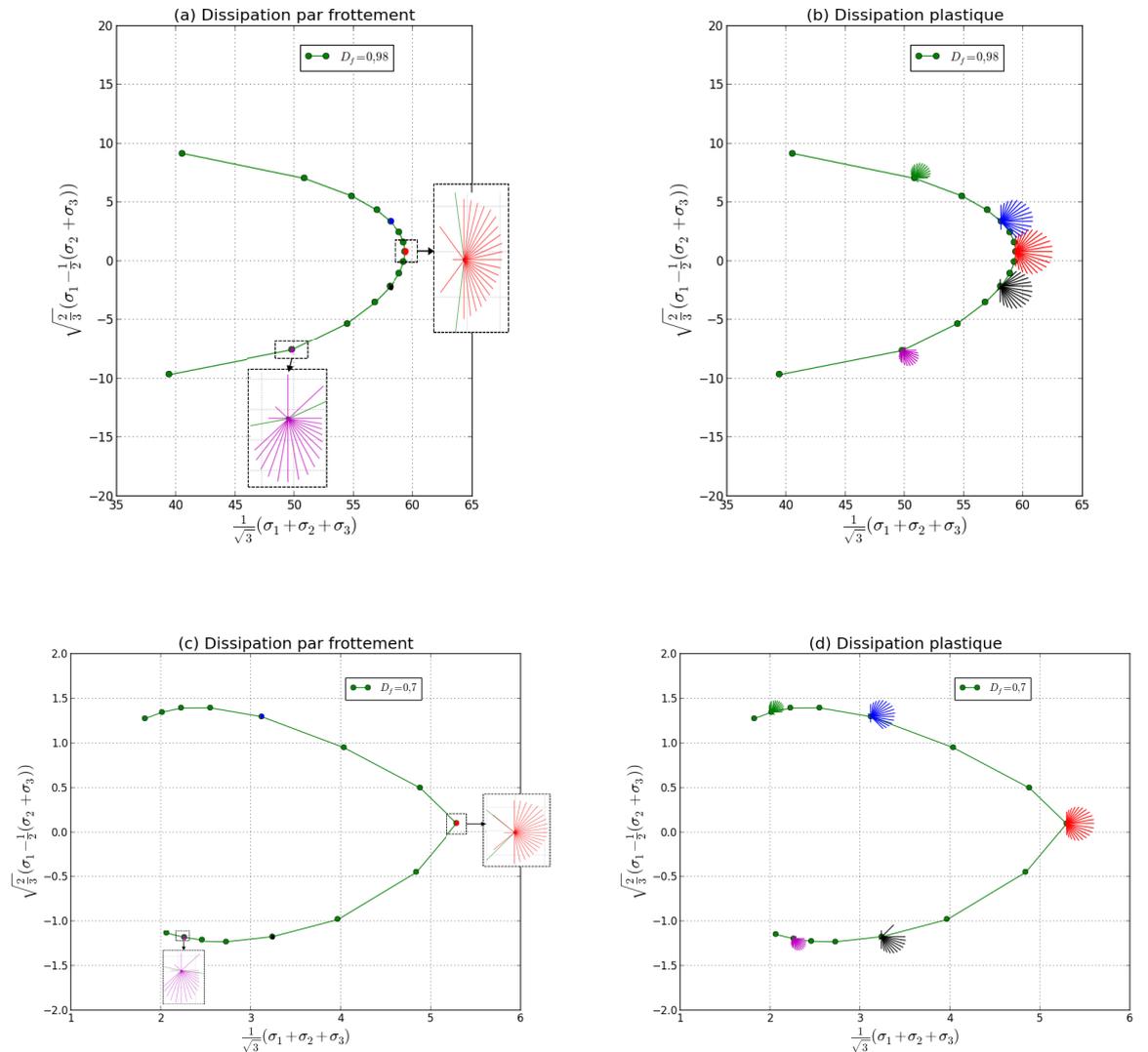


FIGURE 3.21 – Courbes enveloppes des énergies dissipées (unité arbitraire) pour un empilement de 50 particules qui est soumis à une compression isotrope jusqu'à des densités relative  $D_f = 0,98$  et  $0,7$  et qui est piloté en déformation. (a) et (c) : Dissipation de l'énergie par frottement. (b) et (d) : Dissipation d'énergie plastique. L'échelle correspondant à l'énergie dissipée est arbitraire mais identiques entre (a) et (b) d'une part, (c) et (d) d'autre part.

crément de contrainte entraîne un incrément de déformation qui peut être très grand quand on se rapproche de la limite de rupture, d'où une énergie

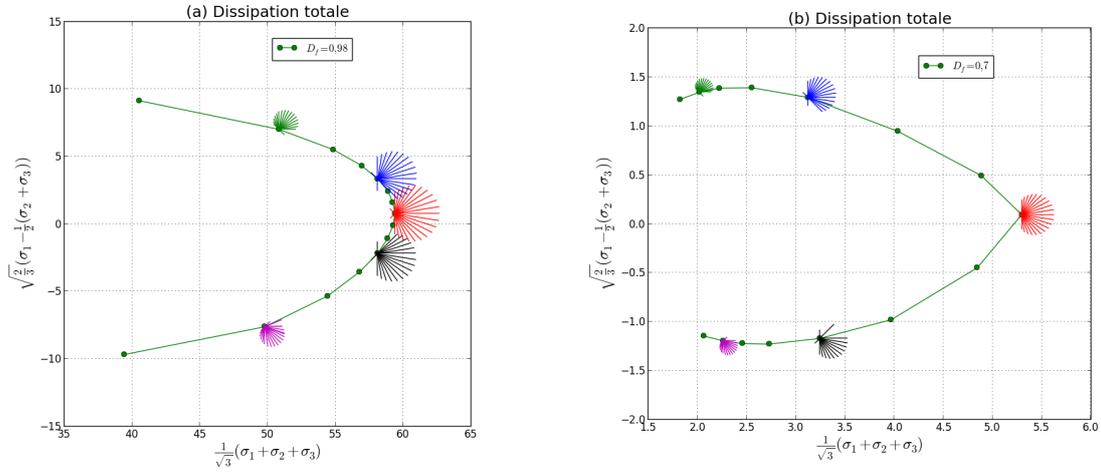


FIGURE 3.22 – Courbes enveloppes des énergies dissipées totales pour un empilement de 50 particules qui est soumis à une compression isotrope jusqu’à des densités relative : (a)  $D_f = 0,98$  et (b)  $D_f = 0,7$  et qui est piloté en déformation.

dissipée beaucoup plus grande aux points extrêmes de la surface de charge.

Les figures 3.17, 3.18, 3.19 et 3.20 montrent que pour les points proches de la limite de rupture, la quantité d’énergie dissipée est certes plus grande relativement aux autres points de la surface de charge mais elle ne suit pas une tendance très claire avec la densité relative finale  $D_f$ . Il est probable que les points extrêmes sont plus ou moins proches de la limite de rupture lorsqu’on change la densité relative finale. Ce résultat est illustré sur la figure 3.23 où on a représenté une évolution schématique de trois surfaces de charge avec la densité relative ( $D_f = 0,9$ ;  $0,7$  et  $0,6$ ). La courbe enveloppe pour le point extrême de la surface de charge obtenue avec  $D_f = 0,6$  est très grande par rapport à celle obtenue pour  $D_f = 0,7$  car à faible densité les points extrêmes sont plus proches de la limite de rupture. Cet effet résulte seulement du fait que la présence de la limite de rupture n’est pas prise en compte lors de la détermination des chemins de recharge.

En plus, les figures 3.17, 3.18, 3.19, 3.20 et 3.21 montrent que les énergies dissipées par frottement  $E_f$  et par plasticité  $E_p$  suivent une tendance similaire. En effet, si la densité relative  $D_f$  augmente,  $E_p$  et  $E_f$  augmentent et vis versa, pour autant, le rapport  $\frac{E_f}{E_p}$  n’est pas constant. La figure 3.24 montre le rapport  $\frac{E_f}{E_p}$  pour le cas d’une compression isotrope et en matrice pour

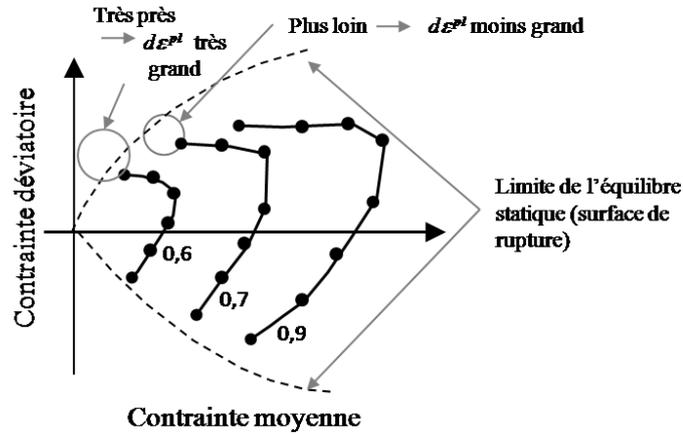


FIGURE 3.23 – Évolution schématique de la surface de charge en fonction de la densité relative finale  $D_f$ . Les traits en pointillés correspondent à la surface de rupture (cf. paragraphe 3.4.2).

les trois valeurs de densité relative. Il est clair que ce rapport augmente avec  $\frac{\bar{q}}{p}$  cependant, au niveau du point de chargement ce rapport devient très faible.

La figure 3.21 montre qu'à haute densité relative la part de l'énergie de frottement est quasiment nulle relativement à la plasticité. Ceci s'explique par le fait qu'à haute densité relative les particules sont tellement bloquées que leur mouvement relatif est extrêmement restreint. Il est probable que la dissipation par frottement soit essentiellement le résultat de la croissance asymétrique des surfaces de contact entre deux particules de taille différente et de la rotation des contacts plutôt qu'à un mécanisme de glissement des surfaces de contact.

On voit sur la figure 3.21 (en particulier 3.21.a) que pour un même point de la surface de charge, l'énergie dissipée par frottement est nettement plus faible pour les incréments de déformation proches d'une déformation isotrope (incrément proche de l'horizontale) que pour les incréments de déformation comprenant plus de cisaillement. Si on regarde maintenant ce qui se passe en pilotage en contrainte (figures 3.17, 3.18, 3.19, 3.20) on ne voit pas la même tendance mais l'incrément de contrainte isotrope n'est jamais celui où la dissipation par frottement est maximale. En effet, la dissipation d'énergie par frottement est liée au glissement entre les particules. Logiquement, une déformation isotrope permet d'avoir moins d'énergie dissipée par frottement, ce qui n'est pas totalement vrai pour le cas d'une contrainte isotrope car l'anisotropie peut induire du cisaillement au niveau des déformations.

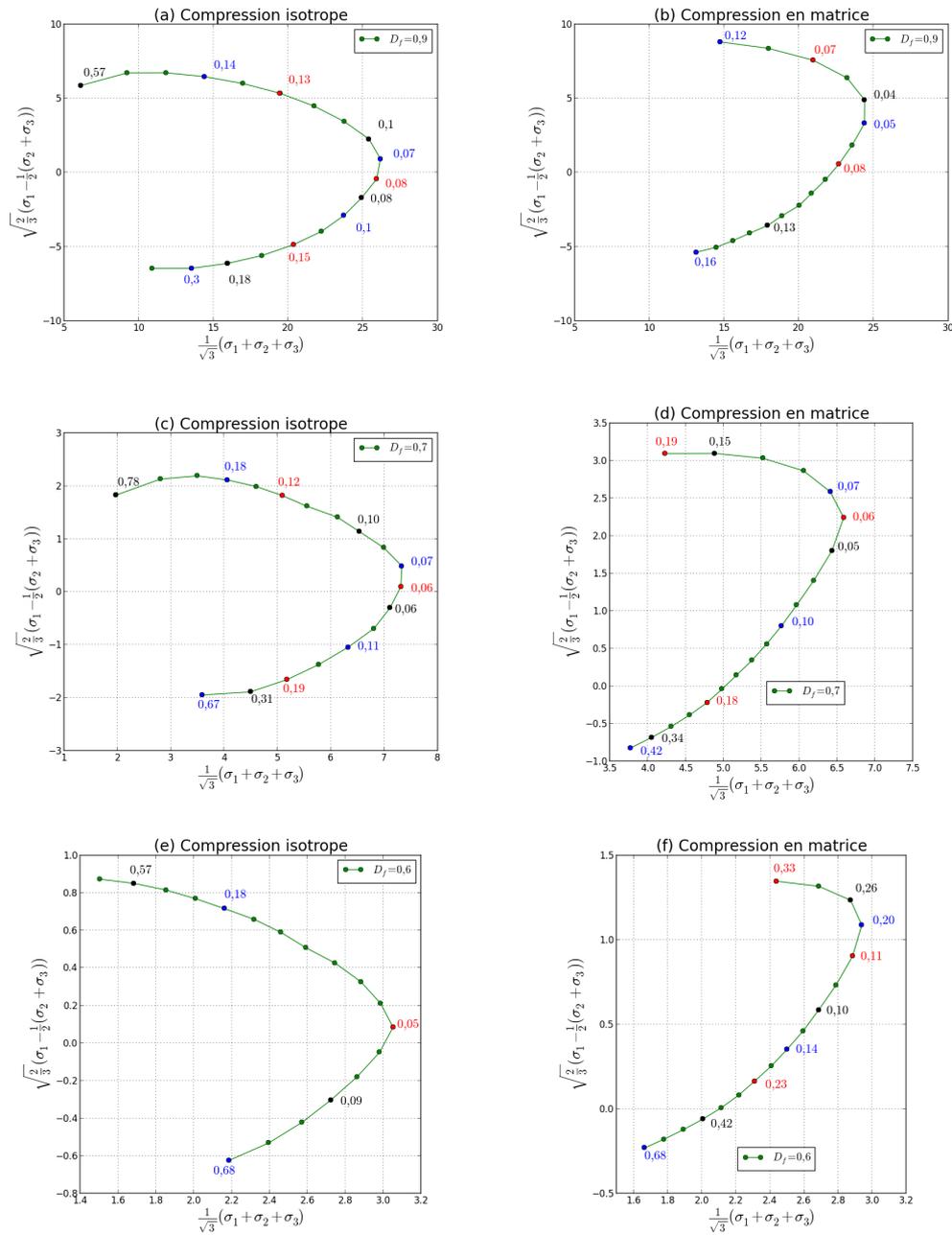


FIGURE 3.24 – Les chiffres correspondent au rapport  $\frac{E_f}{E_p}$  pour le cas d'une compression : (a), (c) et (e) isotrope et (b), (d) et (f) en matrice jusqu'à des densités relatives  $D_f = 0,9; 0,7$  et  $0,6$ .

Comme on a vu au chapitre précédent, la courbe enveloppe d'énergie dissipée pour un pilotage en déformation sera un cercle dans le cas où on a un potentiel plastique. Pour vérifier ce comportement, on a tracé sur la figure 3.22 les courbes enveloppes d'énergie dissipée totale associées à quelques points de la surface de charge dans le plan contrainte déviatoire-contrainte moyenne pour la compression isotrope jusqu'à  $D_f = 0,98$  et  $0,7$ . On remarque bien que la forme des courbes enveloppes d'énergie dissipée totale ne correspond pas à un cercle et donc on s'éloigne du cas à potentiel pour le pilotage en déformation.

### 3.3.4 Influence du coefficient de frottement.

Dans cette partie, on va étudier l'effet de l'augmentation du coefficient de frottement sur les résultats présentés précédemment.

L'échantillon numérique est soumis à un chargement isotrope jusqu'à une densité relative finale  $D_f = 0,6$ , avec un coefficient de frottement  $f = 0,5$ . La figure 3.25 montre deux surfaces de charge pour deux valeurs différentes de coefficient de frottement  $f = 0,1$  et  $f = 0,5$  (ce coefficient est le même pour le frottement entre particule/particule et particule/paroi) qui sont représentées dans le plan contrainte déviatoire-contrainte moyenne. Lorsque le coefficient de frottement augmente, la surface de charge conserve une forme très similaire, comme on peut voir à la figure 3.25. On peut voir aussi l'effet du frottement sur la taille de la surface de charge. En effet, en augmentant le coefficient de frottement le domaine élastique augmente.

Par ailleurs, une étude sur l'écoulement plastique a été réalisée sur le même empilement. Des incréments de contrainte de norme  $\|d\sigma\| = 0,1$  MPa et de direction différentes ont été appliqués sur 7 points de la surface de charge. La réponse correspond à des courbes enveloppes d'incrément de déformation plastique. La figure 3.26 illustre le fait que les courbes enveloppes présentent une allure similaire au cas  $f = 0,1$  (cf. figures 3.13.a et 3.13.b) dans les zones correspondent à un chargement déviatoire, elles sont relativement grandes et présentent une forme très allongée proche d'un segment de droite ; autour du point de chargement elles sont petites et de forme ovoïde.

Cependant, la comparaison avec le cas de  $f = 0,1$  montre que les directions d'écoulement ne sont pas les mêmes ; en effet, les vecteurs incréments de déformation plastique ont une composante de déformation volumique net-

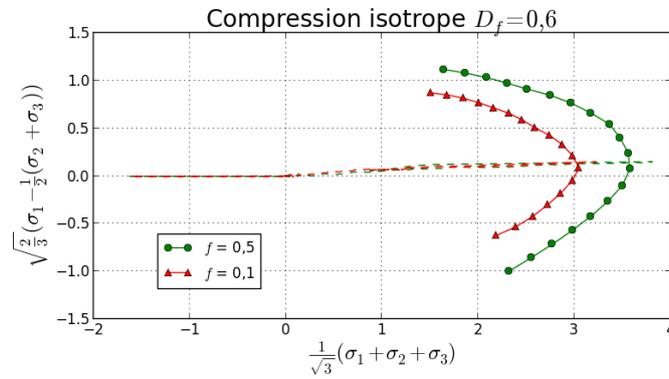


FIGURE 3.25 – Évolution de la surface de charge en fonction du coefficient de frottement ( $f = 0,1$  et  $f = 0,5$ ) pour un empilement de 50 particules qui est soumis à une compression isotrope jusqu'à une densité relative finale  $D_f = 0,6$ . Les lignes pointillées correspondent au chemin de chargement.

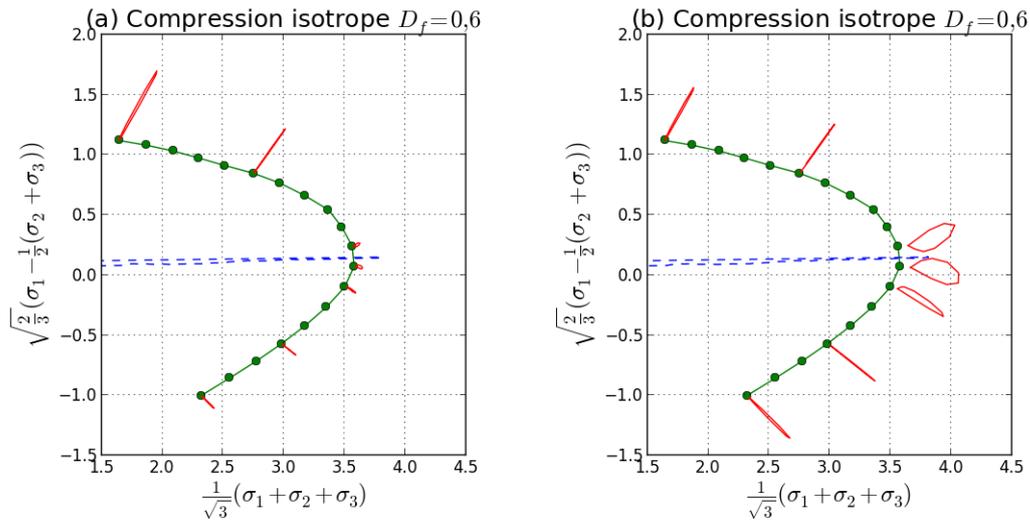


FIGURE 3.26 – Courbes enveloppes associées à quelques points de la surface de charge d'un empilement de 50 particules qui est comprimée suivant un chemin de chargement isotrope jusqu'à  $D_f = 0,6$  et avec un coefficient de frottement  $f = 0,5$ . (a) Courbes enveloppes non normalisées. (b) Courbes enveloppes normalisées.

tement plus grande, et l'effet de dilatance visible sur les points extrêmes de la figure 3.13.b disparaît lorsque le frottement est de 0,5. Cet effet peut s'expliquer par le fait que les forces de frottement plus importantes diminuent significativement le déplacement relatif des particules, de sorte que la part de déformation plastique des particules dans la déformation plastique de l'échantillon augmente. En particulier, ceci explique pourquoi le mécanisme de dilatance est neutralisé. En effet, la dilatance disparaît si le glissement entre les particules disparaît au profit de la déformation plastique des particules.

On remarque sur la figure 3.26.b que les courbes enveloppes de déformation plastique voisines du point de chargement ne touchent pas les points de la surface de charge. Ceci est dû au fait que l'incrément de déformation plastique est tellement petit que l'imprécision du calcul numérique devient sensible.

La figure 3.27 montre l'allure des courbes enveloppes de dissipation d'énergie plastique et de frottement pour l'échantillon comprimé suivant un chargement isotrope jusqu'à  $D_f = 0,6$  et avec  $f = 0,5$ . Ces courbes montrent une tendance similaire à celles obtenues avec un coefficient de frottement  $f = 0,1$  (figure 3.18.c et 3.18.d). L'énergie dissipée (que ce soit par frottement ou par plasticité) est plus importante pour les états de contrainte les plus déviatoires, et la part d'énergie dissipée par plasticité reste plus importante que la part d'énergie dissipée par frottement. Cependant, la part d'énergie dissipée par frottement diminue relativement à la part d'énergie dissipée par plasticité, ce qui conforte l'hypothèse selon laquelle le mécanisme de glissement est moins mobilisé dans la déformation plastique de l'échantillon que pour  $f = 0,1$ . La proportion  $\frac{E_f}{E_p}$  sur la figure 3.28 justifie ce résultat puisque ce rapport est plus faible pour  $f = 0,5$  dans la zone où le chargement est très déviatoire.

### 3.4 Comportement mécanique de l'échantillon lors d'un chargement dilatant.

La dilatance est définie par l'augmentation de volume engendrée par l'augmentation de la partie déviatoire de la contrainte (les particules doivent se contourner puisqu'elles ne peuvent pas se pénétrer). Les variations de volume pour ces matériaux sont dus à l'application des contraintes qui peuvent être décomposées en une partie isotrope qui provoque une diminution de volume

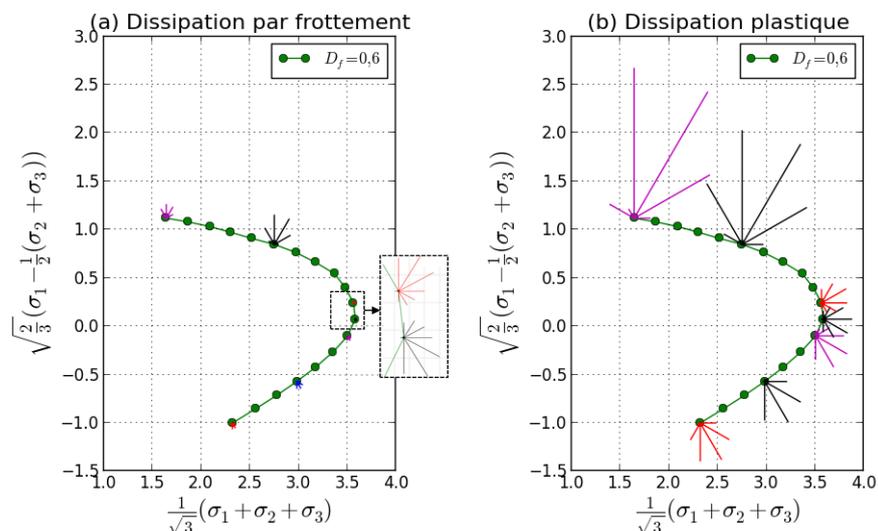


FIGURE 3.27 – Courbes enveloppes des énergies dissipées (unité arbitraire) par une compression isotrope jusqu’à la densité relative finale  $D_f = 0,6$  avec un coefficient de frottement égal à  $0,5$ . (a) Dissipée par frottement. (b) Dissipation plastique. L’échelle correspondant à l’énergie dissipée est arbitraire mais identique pour (a) et (b).

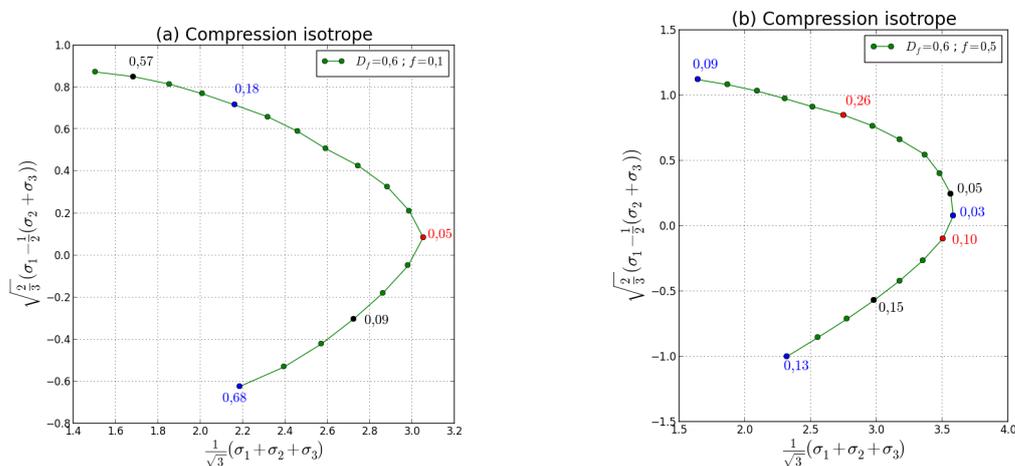


FIGURE 3.28 – Les chiffres correspondent au rapport  $\frac{E_f}{E_p}$  pour le cas d’une compression isotrope jusqu’à des densités relatives  $D_f = 0,6$  et avec un coefficient de frottement : (a)  $f = 0,1$ ; (b)  $f = 0,5$ .

et une partie déviatoire qui provoque des déformations volumique (augmentation du volume).

La dilatance entraîne logiquement la séparation des particules qui se traduit par une dégradation des propriétés mécaniques. L'objectif de cette partie est l'étude et la caractérisation du comportement des poudres métalliques ductiles soumises à un chargement dilatant.

### 3.4.1 Contrainte-Déformation en chargement dilatant.

La courbe enveloppe du point C de la figure 3.9 illustre le comportement dilatant du matériau. Pour étudier ce comportement il est nécessaire de choisir un chemin de chargement qui permet d'identifier les différents mécanismes de la dilatance sur un matériau ductile. À ce titre, l'empilement numérique a été écroui dans un premier temps suivant un chargement classique (compression isotrope jusqu'à une densité relative finale égale à 0,9). Ce premier chargement a créé la surface de charge illustrée dans la figure 3.9. Après la décharge élastique, un seul chemin de recharge élasto-plastique, suivant le même chemin qui mène au point C, a été appliquée avec une amplitude plus grande sur l'empilement.

La figure 3.29.a représente l'évolution de la contrainte déviatoire ( $\bar{q}$ ) en fonction de la contrainte moyenne ( $\bar{p}$ ) pour le chemin de recharge élasto-plastique. La courbe montre une évolution croissante de la contrainte déviatoire qui atteint un pic puis diminue. Cette diminution est due au fait que le pilotage en contrainte réalisé ne prend pas en compte la surface de contact vraie entre l'échantillon et les parois (cf. paragraphe 2.3.1 du Chapitre 2). Dans le cas présent, la déformation devient très grande lorsqu'on approche de la limite de rupture, la surface de contact particule/paroi augmente considérablement, ce qui résulte en une diminution de la contrainte de Cauchy.

Les deux figures 3.29.b et 3.29.c représentent la contrainte déviatoire ( $\bar{q}$ ) et la déformation volumique ( $\bar{\varepsilon}_v$ ) en fonction de la déformation déviatoire ( $\bar{\varepsilon}_d$ ). Une importante transition dans l'évolution de la contrainte déviatoire en fonction de la déformation déviatoire nous permet de définir deux comportements.

Regardons dans un premier temps le comportement où  $\bar{\varepsilon}_d$  ne dépasse pas 0,1. La figure 3.29.b montre que  $\bar{q}$  croît avec  $\bar{\varepsilon}_d$  jusqu'à une valeur de  $\bar{\varepsilon}_d = 0,02$  (qui correspond au point de plasticité) où elles augmentent rapidement, ce qui permet de révéler le comportement quasi-élastique du matériau. Ensuite,

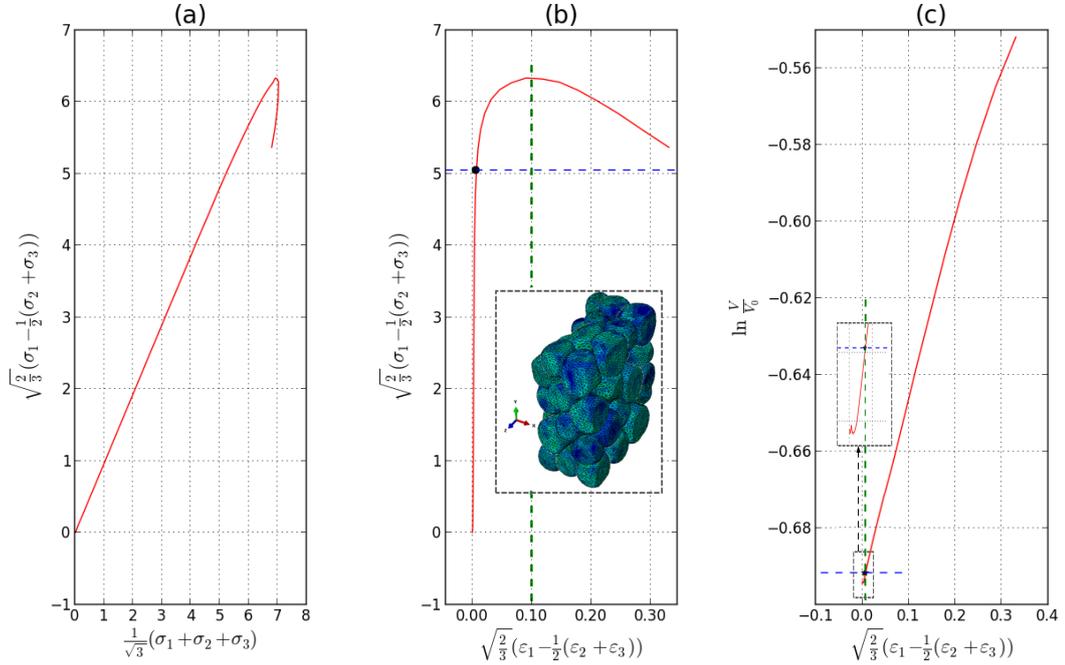


FIGURE 3.29 – (a) Évolution de la contrainte déviatoire ( $\bar{q}$ ) en fonction de la contrainte moyenne ( $\bar{p}$ ). (b) Évolution de la contrainte déviatoire ( $\bar{q}$ ) en fonction de la déformation déviatoire ( $\bar{\varepsilon}_d$ ). (c) Évolution de la déformation volumique ( $\bar{\varepsilon}_v$ ) en fonction de la déformation déviatoire ( $\bar{\varepsilon}_d$ ). Les traits pointillés en bleu correspondent à la réapparition de la plasticité quand  $E_d$  atteint 0,3% de la valeur de  $E_d^0$  (cf. paragraphe 2.2.2 du Chapitre 2). Les points noirs correspondent au point de plasticité.

pour les déformations entre 0,02 et 0,1; la contrainte déviatoire augmente nettement moins vite.

Regardons maintenant ce qui se passe lors des déformations plus importantes (l'amplitude de  $\bar{\varepsilon}_d$  continue à croître jusqu'à une valeur égale à 0,34) : la contrainte déviatoire ( $\bar{q}$ ) diminue (figure 3.29.b). Ainsi, on identifie un régime mécanique de type adoucissement.

La figure 3.29.c montre la déformation volumique logarithmique en fonction de la déformation déviatoire ( $\bar{\varepsilon}_d$ ). Ce résultat met en évidence l'augmentation du volume liée au phénomène de dilatance.

### 3.4.2 Surface de rupture.

Lors de l'analyse du comportement à la rupture à travers l'empilement numérique comprimé suivant un chemin isotrope jusqu'à une densité relative finale  $D_f = 0,9$ , il est intéressant d'arriver à détecter une limite de rupture puisqu'au delà de cette limite l'empilement numérique n'est plus capable de supporter une charge statique. Dans l'espace des contraintes, cette limite prend la forme d'une surface appelée surface de rupture.

Dans ce but, on va utiliser une procédure identique à celle employée pour la recherche des surfaces de charge où le critère de détection de la plasticité est remplacé par un critère de détection de la rupture. Des chemins de recharge (cf. Étape 4, Chapitre 2) ont été appliqués sur l'empilement numérique afin de détecter les points de la surface de rupture. Le critère utilisé dans ce travail est une valeur seuil  $\psi$  du rapport entre l'énergie cinétique  $E_c$  et l'énergie volumique dissipée  $E_d$  (équation (2.9) Chapitre 2) :

$$\psi = \frac{E_c}{E_d} \quad (3.1)$$

Pour avoir l'équilibre quasi-statique, il faut vérifier que  $E_c$  est négligeable devant  $E_d$ . Lorsque cette énergie devient non négligeable devant  $E_d$ , cela signifie que l'empilement n'est plus stable (l'empilement n'est plus capable de supporter le chargement). C'est la raison pour laquelle la valeur seuil dépend de  $E_c$  (figure 3.30).

La figure 3.31 montre la surface de charge de l'empilement numérique qui est comprimé suivant un chemin isotrope jusqu'à  $D_f = 0,9$  et les sept chemins de recharge suivant des directions différentes dans l'espace des contraintes pour détecter les points de la surface de rupture (représentés par des points noirs) avec un seuil qui est égal à  $\psi = 0,1\%$ .

Le seuil de rupture est déterminé de la manière suivante : lors de la recharge élasto-plastique la valeur de  $\psi$  augmente (figure 3.30). On considère alors que la rupture commence au moment où  $\psi$  devient non négligeable devant la valeur atteinte à la fin de la décharge élastique. Le choix de cette valeur seuil est arbitraire. Plusieurs calcul ont été effectués avec différentes valeurs seuil (0,001 % ; 0,01% et 0,1%) (figure 3.32). D'après la figure 3.32, la surface de rupture déterminée avec la valeur seuil qui est égale à 0,001% est à l'intérieur de la surface de charge, ce qui n'est pas cohérent. Ainsi, 0,1% apparaît comme une valeur raisonnable par rapport au seuil de 0,3% utilisé

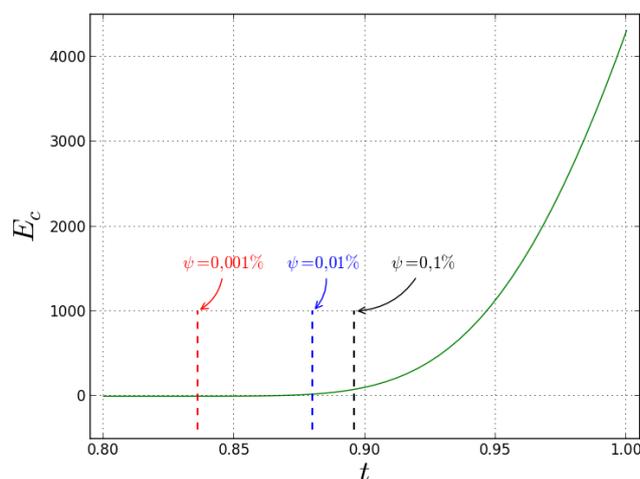


FIGURE 3.30 – Allure de l'énergie cinétique pour un chemin de recharge avec différentes valeurs du critère de rupture  $\psi$ .

pour le critère de plasticité (figure 3.33).

Dans la suite, on s'intéresse à étudier les différents mécanismes de modification de structure associées aux changements des surfaces de charge par un chargement dilatant.

### 3.4.3 Évolution de la surface de charge sous l'effet du phénomène de dilatance.

La figure 3.34 montre la surface de charge obtenue pour un chargement isotrope jusqu'à la densité relative finale  $D_f = 0,9$  et un chemin de contrainte qui correspond au point où on a détecté la courbe enveloppe de déformation plastique qui est orientée vers la gauche et qui reflète le mécanisme de dilatance. Cette figure montre aussi trois structures de contact obtenues par ce chemin de recharge au niveau du point de la surface de charge, du point de la surface de rupture et un point loin de l'équilibre statique. On remarque que la structure de contact de ces trois points présente des différences visibles. En effet, on identifie dans la géométrie déformée (1) de l'empilement une structure de contact qui a été créée par le premier chemin. Ensuite cette structure est modifiée par des pertes de contact mises en évidences dans la structure (2). La structure évolue ensuite avec ce chemin de contrainte jusqu'à ce que les contacts restant dans l'échantillon ne supportent plus le chargement (3).

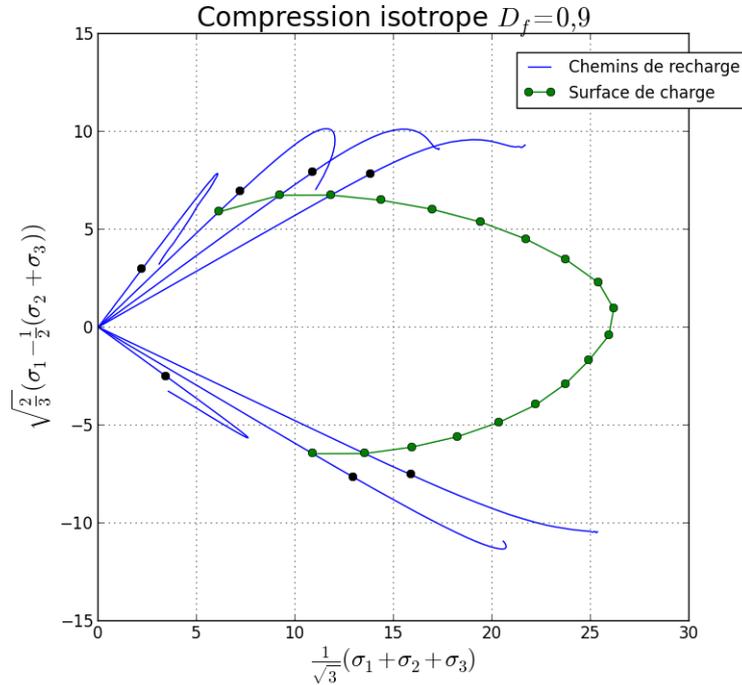


FIGURE 3.31 – En vert la surface de charge d'un empilement de 50 particules comprimé suivant un chargement isotrope jusqu'à  $D_f = 0,9$ . En bleu quelques chemins de recharge balayant l'espace de contrainte pour détecter la surface de rupture (les points en noirs correspondent à  $\psi = 0,1\%$ ).

L'évolution de la surface de charge sous l'effet du phénomène de dilatance a été étudié par Pavier [69] à partir d'un essai surconsolidé. La figure 3.35.a illustre le comportement du modèle "Cap" : le matériau est d'abord comprimé sous une contrainte isotrope  $P_c$  et atteint une déformation volumique plastique  $\varepsilon_v^{pl}$ . Le domaine élastique est représenté par une surface de charge constituée de deux portions, la surface  $f_2$  (correspond à la surface Cap et qui est une surface écrouissable paramétrée par  $\varepsilon_v^{pl}$ ) et la surface  $f_1$  (correspond à la surface de rupture et qui n'est pas écrouissable). Ensuite une diminution de la pression isotrope est effectuée jusqu'à la valeur  $P_2$ , pendant cette décharge le comportement du matériau est élastique, la déformation volumique plastique ne varie pas ainsi que la surface de charge. Puis une recharge axiale est appliquée sur l'échantillon. Le matériau conserve un comportement élastique jusqu'à ce que le chemin de contrainte atteigne la surface de charge  $f_1$  au niveau du point D. À partir de ce point, le comportement du maté-

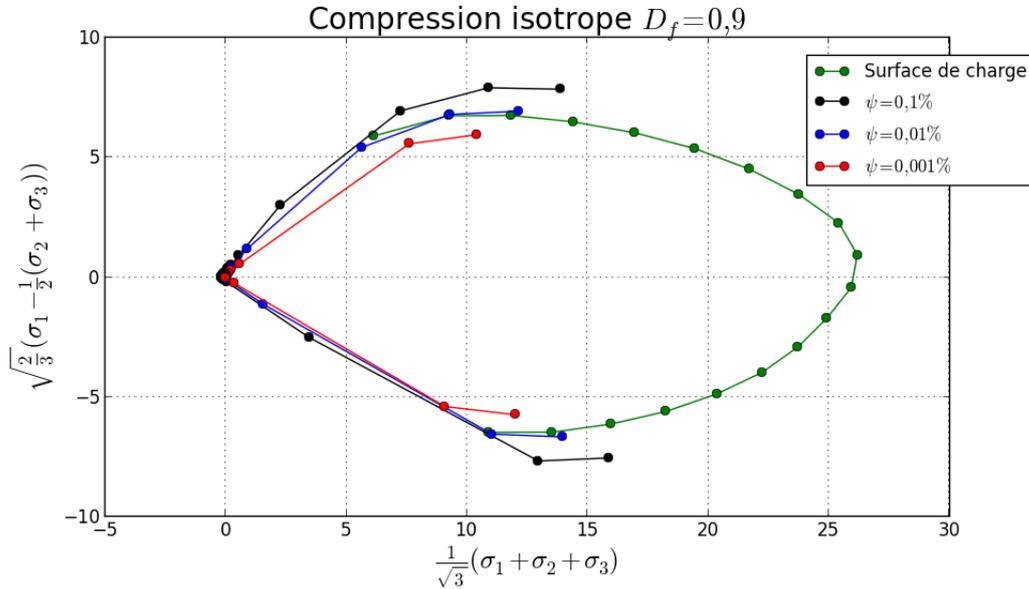


FIGURE 3.32 – Différentes surfaces de rupture pour 3 valeurs seuil différentes (0,1 % ; 0,01% et 0,001%).

riau devient plastique et le vecteur d'écoulement plastique  $d\varepsilon^{pl}$  indique une dilatance. Ainsi la déformation volumique plastique diminue entraînant la diminution du domaine élastique (surface de charge  $f_2'$ ) alors que la surface  $f_1$  reste fixe. La même démarche a été utilisée par Pavier mais cette fois ci avec un modèle de "Cam-Clay" (figure 3.35.b) à écouissage isotrope dont le domaine élastique est défini par une seule surface  $f_1$ , dans ce cas, la déformation volumique plastique diminue entraînant la diminution de toute la surface de charge (une nouvelle surface de charge  $f_1'$  est obtenue)

Les deux exemples de la figure 3.35 traduisent, avec deux modèles différents, la chute des propriétés mécaniques à l'approche de la rupture, sous l'effet de la dilatance. Ces deux modèles sont basés sur des hypothèses, en particulier l'hypothèse d'isotropie, et s'ils permettent de retrouver l'observation expérimentale faite par Pavier de la diminution de la densité lors d'un essai surconsolidé, ils reflètent imparfaitement la réalité du comportement de la poudre. Il est alors intéressant d'utiliser les possibilités offertes par la MEFMP pour observer l'évolution de la surface de charge lors d'un tel chargement.

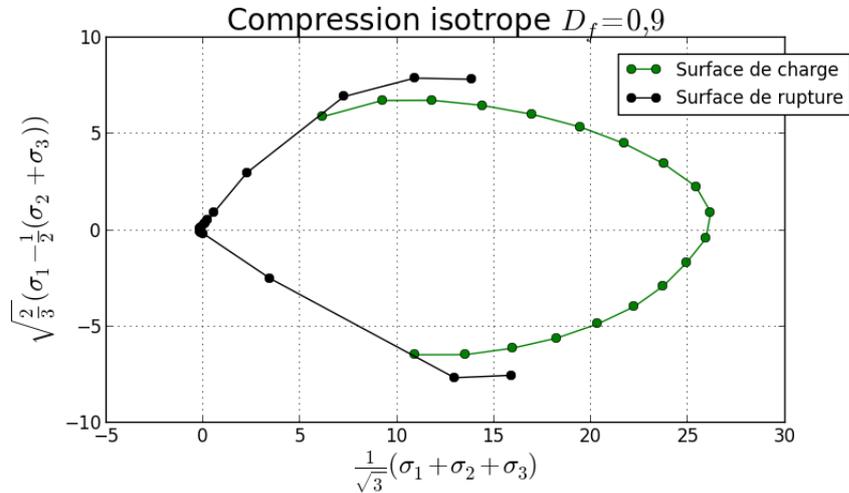


FIGURE 3.33 – La surface verte correspond à la surface de charge d’un empilement de 50 particules avec  $D_f = 0,9$  pour une compression isotrope. La surface noire correspond à la surface de rupture avec une valeur seuil de 0,1%.

La méthode utilisée dans ce but est illustrée sur la figure 3.36. La figure 3.36.a représente les étapes (développées dans le paragraphe 2.3.1 du Chapitre 2) pour obtenir une surface de charge associée à un chargement isotrope. À partir du point C situé à l’extrémité de la surface de charge, on applique une décharge élastique jusqu’au point A (figure 3.36.b). Puis une recharge est appliquée dans toutes les directions afin d’obtenir la nouvelle surface de charge (figure 3.36.c). Cette dernière étape a été réalisée trois fois pour tracer trois surfaces de charge afin d’identifier la transformation progressive de la surface de charge. En effet, trois recharges avec trois différentes amplitudes ont été appliquées : la première correspond à une amplitude qui est égale à 100% (c’est-à-dire que le chargement correspond au trajet AC), la deuxième recharge correspond à une amplitude de 97% du trajet AC et finalement le dernier chargement correspond à une amplitude de 90% du trajet AC. Dans les deux derniers cas, la surface de charge ne devait théoriquement pas être modifiée. Il se trouve qu’elle l’est, car la transition élastique-plastique est progressive, le critère de plasticité détermine un point dans la zone de transition.

La figure 3.37 montre les différentes surfaces de charge obtenues à l’issue

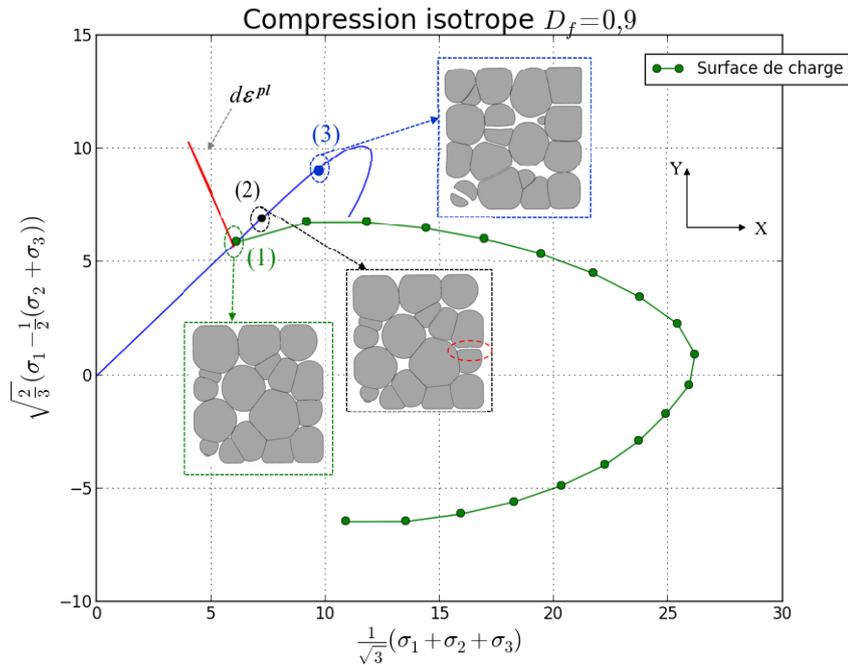


FIGURE 3.34 – (1) Géométrie déformée de l'empilement au niveau de la surface de charge. (2) Structure créée au niveau de la rupture avec l'apparition de quelques pertes de contact. (3) Géométrie déformée qui perd l'équilibre statique.

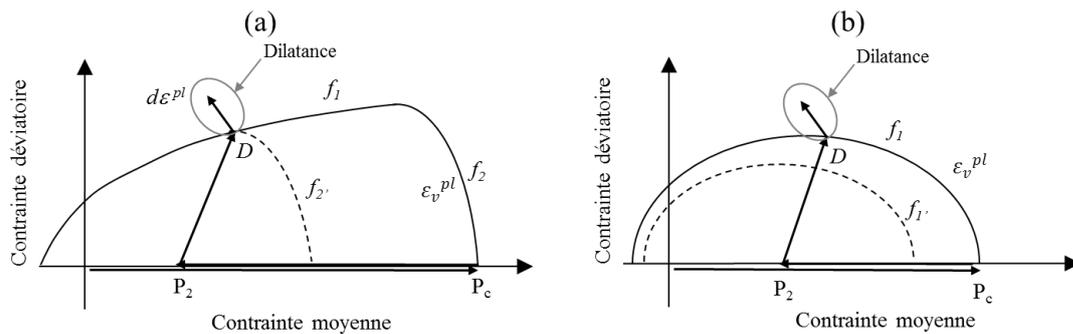


FIGURE 3.35 – Effet de la dilatance sur les modèles de : (a) "Cap" et (b) "Cam-Clay".

des différentes amplitudes de recharge (100%, 97% et 90% du trajet AC) en comparaison avec la surface de charge initiale correspondant au chemin

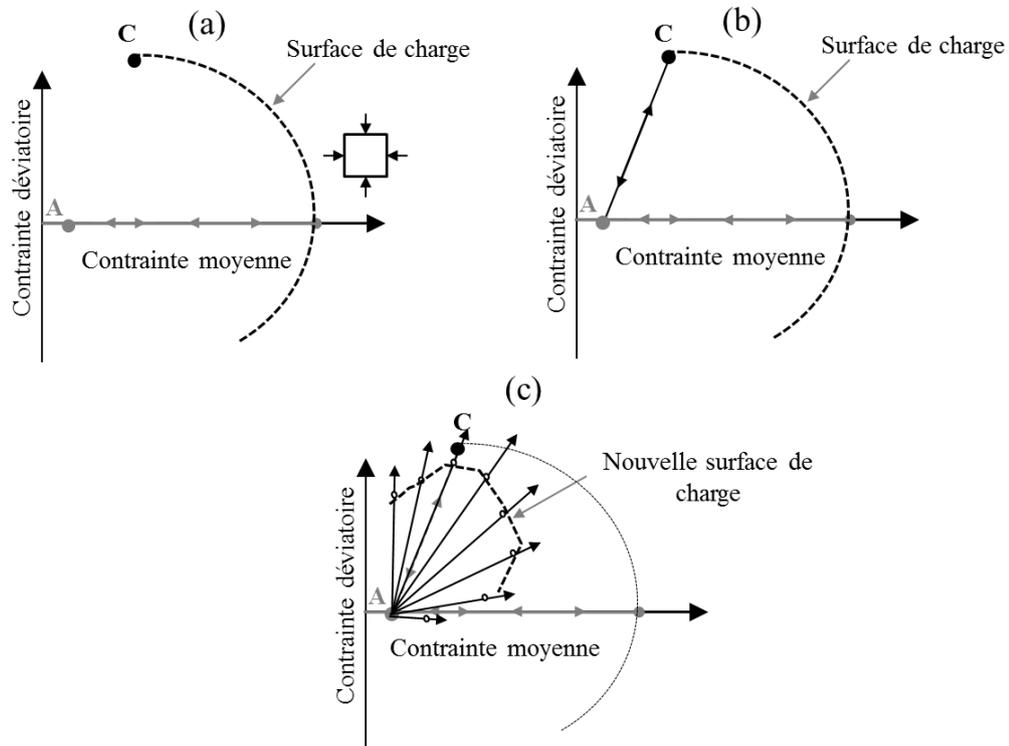


FIGURE 3.36 – Méthode sur l'évolution de la surface de charge sous un chargement dilatant. (a) Compression isotrope suivie d'un chemin de recharge pour obtenir le point de la surface de charge pour une densité relative  $D_f = 0,9$ . Le point C correspond au point de la surface de charge. (b) Une décharge élastique appliquée sur l'empilement jusqu'à le point A. (c) Recharge dans toutes les directions pour obtenir la nouvelle surface de charge.

isotrope jusqu'à la densité relative de  $D_f = 0,9$ . D'après ces résultats, on constate une modification de forme de la surface de charge lors d'un chargement dilatant surtout pour la surface obtenue avec l'amplitude de 100% du chemin AC. La nouvelle surface de charge a tendance à s'orienter suivant le nouveau chargement, ce qui entraîne une rotation de la surface de charge, mais cette fois ci sans augmentation de taille, au contraire on observe une diminution de la taille de la surface même dans la direction de chargement, donc diminution du domaine élastique.

Sur la figure 3.37, les surfaces de charge à 90% et 97% du trajet AC ne comportent pas de points pour les valeurs négatives de  $\bar{q}$ . Ceci est dû au fait que pour ces chemins, la rupture survient avant d'atteindre le seuil de

plasticité, de sorte que les points correspondants n'ont pas de sens.

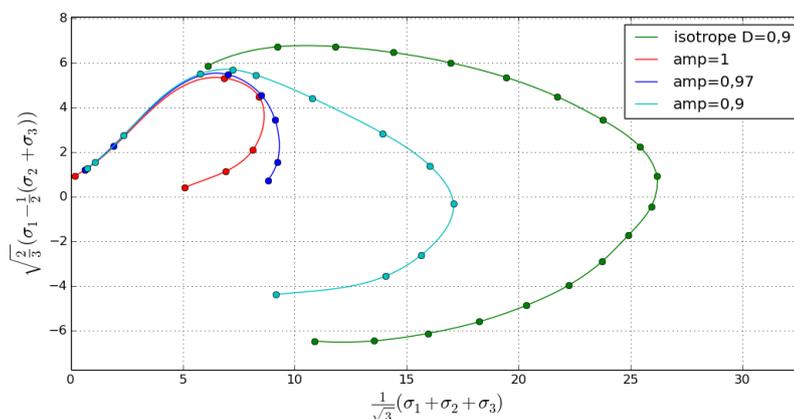


FIGURE 3.37 – Évolution des surfaces de charge avec différentes amplitudes de recharge (100%, 97% et 90% du trajet AC qui est décrit dans la figure 3.36).

### 3.4.4 Conclusion.

L'utilisation des courbes enveloppes de déformation plastique a permis de caractériser l'influence de la direction de l'incrément de contrainte sur la direction d'écoulement. Les résultats présentés dans ce chapitre montrent que pour un état d'écrouissage donné correspondant à une surface de charge donnée, trois cas se présentent :

- les états de contraintes isotropes correspondent à la plus petite réponse en termes de norme du vecteur incrément de déformation plastique ;
- la direction d'écoulement est pratiquement unique pour les états de contrainte éloignées du point de chargement ;
- au voisinage du point de chargement, la direction d'écoulement n'est pas du tout unique, ce qui signifie que la direction de l'incrément de contrainte a une très forte influence sur la direction d'écoulement ;
- cette forte influence de l'incrément de contrainte peut s'expliquer par la nature anisotrope de l'écrouissage qui tend à augmenter très for-

tement la résistance de l'échantillon dans la direction de chargement, de sorte que la composante de la déformation plastique due à l'état de contrainte est tellement petite qu'elle devient du même ordre que celle provoquée par l'incrément de contrainte ;

- la nature anisotrope de l'état de contrainte est due à la croissance des surfaces de contacts, qui sont orientées dans des directions préférentielles liées à l'histoire du chargement.

Ces conclusions mettent en évidence la particularité du comportement élasto-plastique d'un matériau granulaire constitué de grains très déformables par rapport à des matériaux granulaires constitués de grains rigides ou purement élastiques dont la déformation plastique macroscopique n'est due qu'au réarrangement. Ce comportement particulier est propre aux poudres ductiles et n'a jamais été mis en évidence auparavant.

De plus, ces résultats illustrent l'intérêt de la méthode des éléments finis multi-particules pour ce type de matériau, en comparaison aux méthodes de type éléments discrets, dans lesquelles les grains ne peuvent pas se déformer, et qui sont à l'heure actuelle incapables de décrire à la fois l'évolution des surfaces de contact et de leurs orientations.

D'autre part, une étude succincte de la chute des propriétés mécaniques causée par les pertes de contact liées au phénomène de dilatance est proposée, qui permet de suivre l'effondrement progressif de la surface de charge lorsque la dilatance apparaît. Ce résultat met en évidence l'aspect anisotrope de cette dégradation, en comparaison aux prédictions des modèles habituellement isotropes.

Grâce à tous les développements utilisés au sein de cette thèse, nous avons montré à travers ce chapitre que le modèle numérique utilisé par la MEFMP pour modéliser et caractériser les mécanismes de l'écoulement plastique pour les poudres métalliques ductiles sont accessibles.

# Conclusion générale

Rares sont les travaux numériques ou même expérimentaux dans le domaine des poudres industrielles qui s'intéressent à l'étude de l'écoulement plastique en vue de formuler une loi d'écoulement adaptée à ces matériaux. Cette thèse présente une étude approfondie sur ce thème au moyen de simulations par éléments finis du comportement incrémental des poudres métalliques ductiles lors d'une compression. En particulier, la question de l'existence du potentiel plastique est examinée.

Cette thèse a donné lieu à une revue bibliographique concernant les possibilités offertes par les modèles discrets et les études associées dans le contexte de l'analyse de la compression des poudres ductiles à hautes densités relatives. En raison des limitations qui sont apparues dans l'utilisation de la MED qui réside dans la difficulté de formuler des lois de contacts entre particules en haute densité relative, il s'avère que la MEFMP est une méthode efficace pour analyser le comportement mécanique des poudres ductiles en raison du comportement déformable des particules qui peut être pris en compte explicitement. Cette étude bibliographique a mis en évidence un nombre restreint de résultats antérieurs spécifiquement dédiés à la caractérisation de l'écoulement plastique avec la MEFMP pour les matériaux granulaires, spécifiquement les poudres métalliques ductiles.

L'avantage de la MEFMP consiste dans la précision des résultats sur le comportement mécanique des poudres lors de la compression avec des chemins de chargement plus variés et qui ne sont pas accessibles avec une approche expérimentale. Cette méthode est capable de fournir des informations sur les grandes déformations des particules au cours de la compression, les répartitions de contrainte et de déformation, les forces de contact ainsi que les interactions entre les contacts. L'inconvénient majeur de cette méthode réside dans le temps de calcul important, qui impose des échantillons de taille réduite. Toutefois, cette thèse montre la validité de cette méthode avec des échantillons qui sont restreints à un nombre limité de particules.

La mise en oeuvre de cette méthode offre la possibilité d'étudier qualitativement les surfaces de charge et l'écoulement plastique à travers l'application des conditions aux limites aux frontières de l'échantillon qui peuvent être pilotées en contrainte ou/et en déformation. L'aspect novateur dans cette thèse consiste dans l'étude du comportement incrémental d'un empilement numérique de poudres ductiles par la MEFMP à travers un cycle de charge/décharge couplé au pilotage en contrainte. L'originalité dans l'utilisation de ce type de pilotage lors de cette thèse est d'arriver à séparer la déformation plastique et la déformation élastique à partir de l'application d'une série d'incrément de contrainte de norme identique mais de direction différente, ce qui permet de détecter les courbes enveloppes de déformation plastique qui peuvent répondre à la question de l'existence du potentiel plastique pour les matériaux en poudres élasto-plastiques.

Le dernier chapitre de cette thèse rassemble tous les résultats de simulation obtenus sur la caractérisation des mécanismes de déformation plastique à travers le pilotage en contrainte et en déformation développés au Chapitre 2. La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des surfaces de charge avec la densification. Les résultats n'ont pas été comparés qualitativement avec des résultats expérimentaux de la littérature à cause du nombre limité de particules utilisées. Cependant les résultats obtenus pour des chemins de chargement monotone (compression isotrope et en matrice) possèdent la même ressemblance qualitative aux résultats expérimentaux et numériques antérieurs. Un autre aspect a été étudié sur l'évolution des surfaces de charge avec un changement de direction du chargement pour les faibles densités relatives qui montrent que les réseaux de contact et les interactions entre les contacts ont permis la rotation des surfaces de charge suivant la direction du second chemin tout en augmentant de taille, ce qui est conforme aux résultats numériques antérieurs pour les faibles densités.

La deuxième partie du Chapitre 3 est consacrée à l'étude de l'écoulement plastique des poudres ductiles par la MEFMP avec les deux types de pilotage en contrainte et en déformation. L'étude avec le pilotage en contrainte pour différentes valeurs de densité relative et pour les deux types de compression isotrope et en matrice a montré que :

- l'amplitude de l'incrément de déformation plastique est très petite pour les états de contrainte isotrope et de plus en plus grande lorsque l'état de contrainte devient plus déviatoire.

- les courbes enveloppes de déformation plastique sont assimilables à des segments de droite pour des états de contrainte éloignés du point de chargement et de l'axe hydrostatique. Ceci suggère la validité d'un modèle basé sur un potentiel plastique.
- au niveau du point de chargement, que ce soit pour une compression isotrope ou en matrice, et pour toutes les valeurs de densité relative, les courbes enveloppes de déformation plastique ne sont plus du tout assimilables à des segments de droite. Ce résultat montre que la direction du vecteur incrément de déformation plastique n'est pas unique pour les états de contrainte proches du point de chargement.

La non-unicité de la direction d'écoulement traduit une influence significative de la direction de l'incrément de contrainte qui est attribué au caractère écrouissable de l'échantillon issu de la croissance anisotrope des surfaces de charge peut être considéré comme une propriété particulière des poudres ductiles et qui est dû aux grandes déformations plastiques subites par les particules.

Pour avoir une idée sur la part du frottement dans la déformation plastique, des études sur les dissipations d'énergie par le pilotage en déformation et le pilotage en contrainte ont été réalisées afin de détecter la contribution du frottement et de la déformation plastique. Cette étude a révélé que le principal mécanisme de déformation plastique macroscopique est la déformation plastique des particules et qui résulte de la croissance des surfaces de contact plutôt qu'à un mécanisme de glissement entre les particules.

Un comportement dilatant a été observé à travers les courbes enveloppes de déformation plastique détectées au voisinage de la rupture dans le cas d'une compression isotrope pour  $D_f = 0,6$  et  $D_f = 0,9$ . Ceci nous a permis par la suite d'étudier l'évolution des surfaces de charge pour un chargement dilatant.

Tous ces résultats donnent accès à des multiples perspectives comme :

- La méthode des éléments finis appliquée à des empilements de particules maillées avec un pilotage en contrainte pour détecter les courbes enveloppes en déformation plastique peut être appliquée sur des empilement comprenant plus de particules et/ou avec des conditions aux limites périodiques afin de comparer les résultats avec des résultats issus des études expérimentales.

- Le travail du Chapitre 3 peut être continué par une étude approfondie sur la microstructure afin de comprendre le phénomène de dilatance.
- Un autre axe consiste à fournir plus d'information sur le phénomène de rupture à partir de la détection des surfaces de rupture à travers la MEFMP.
- Aux interfaces entre les particules, il est intéressant d'envisager des lois de frottement plus complexes ou d'introduire le phénomène de cohésion interfaciale qui permettent de comprendre les causes et les mécanismes de fissuration pendant la compression à froid des poudres industrielles.
- Concernant le matériau il est possible d'utiliser des matériaux différents ou même des géométries de particules plus complexes afin de se rapprocher de particules réelles.

# Bibliographie

- [1] ABAQUS. *ABAQUS Version 6-12, Theory Manual*. Dassault systèmes Simulia, 2012.
- [2] ABAQUS. *ABAQUS Version 6-12, User documentation*. Dassault systèmes Simulia, 2012.
- [3] Comparison of computer models representing powder compaction process : State of the art review. In *PM Modnet Modelling Group : Powder Metallurgy* (1999), pp. 301–311.
- [4] AKISANYA, A., COCKS, A., AND FLECK, N. The yield behaviour of metal powders. *International Journal of Mechanical Sciences* 39, 12 (1997), 1315–1324.
- [5] BARDET, J. Numerical tests with discrete element method. *Proc. Modern approaches to plasticity*. D. Kolymbas ed., Elsevier (1993), 179–197.
- [6] BARDET, J. Numerical simulations of the incremental responses of idealized granular materials. *International Journal of Plasticity* 10, 8 (1994), 879–908.
- [7] BARDET, J., AND PROUBET, J. Application of micro-mechanics to incrementally nonlinear constitutive equations for granular media. *Powders and grains* (1989), 265–273.
- [8] BIWA, S., AND STORÅKERS, B. An analysis of fully plastic brinell indentation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 43, 8 (1995), 1303–1333.
- [9] BORTZMEYER, D. Modelling ceramic powder compaction. *Powder Technology* 70, 2 (1992), 131–139.
- [10] BRANDT, J. On constitutive modelling of the compaction and sintering of cemented carbides. *LINKOPING STUDIES IN SCIENCE AND TECHNOLOGY-DISSERTATIONS-* (1998).
- [11] BRANDT, J., AND NILSSON, L. A constitutive model for compaction of granular media, with account for deformation induced anisotropy. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials* 4, 4 (1999), 391–418.

- [12] BREWIN, P. R., COUBE, O., DOREMUS, P., AND TWEED, J. H. *Modelling of powder die compaction*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [13] CALVETTI, F., AND DI PRISCO, C. Fabric evolution of granular materials : a numerical approach. In *Proc. First Forum Young European Researchers* (1993), pp. 115–120.
- [14] CALVETTI, F., TAMAGNINI, C., AND VIGGIANI, G. On the incremental behaviour of granular soils. *Numerical Models in Geomechanics* (2002), 3–9.
- [15] CALVETTI, F., VIGGIANI, G., AND TAMAGNINI, C. A numerical investigation of the incremental behavior of granular soils. *Rivista italiana di geotecnica* 37, 3 (2003), 11–29.
- [16] CHEN, Y. *Contribution à la modélisation de la compression des poudres par une méthode d'éléments discrets mailles*. PhD thesis, Grenoble, INPG, 2008.
- [17] CHEN, Y., IMBAULT, D., AND DORÉMUS, P. Numerical simulation of cold compaction of 3d granular packings. In *Materials science forum* (2007), vol. 534, Trans Tech Publ, pp. 301–304.
- [18] CHEN, Y., IMBAULT, D., AND DOREMUS, P. Experiment and simulation using meshed discrete particles. comparison for compaction of 3d irregular randomly packed particles. *EURO PM 2008 p. 139 144* (2008).
- [19] CHTOUROU, H., GAKWAYA, A., AND GUILLOT, M. Modeling of the metal powder compaction process using the cap model. part ii : Numerical implementation and practical applications. *International Journal of solids and Structures* 39, 4 (2002), 1077–1096.
- [20] CHTOUROU, H., GUILLOT, M., AND GAKWAYA, A. Modeling of the metal powder compaction process using the cap model. part i. experimental material characterization and validation. *International Journal of solids and Structures* 39, 4 (2002), 1059–1075.
- [21] COCCOZ, G. *Compactage à froid des poudres métalliques : Approche expérimentale et simulation numérique* thèse, 1995.
- [22] COUBE, O., AND RIEDEL, H. Numerical simulation of metal powder die compaction with special consideration of cracking. *Powder Metallurgy* 43, 2 (2000), 123–131.
- [23] CUNDALL, P. A., AND STRACK, O. D. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique* 29, 1 (1979), 47–65.
- [24] DAFALIAS, Y. F., MANZARI, M. T., AND PAPADIMITRIOU, A. G. Saniclay : simple anisotropic clay plasticity model. *International Journal*

- for *Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 30, 12 (2006), 1231–1257.
- [25] DARVE, F., AND NICOT, F. On flow rule in granular media : phenomenological and multi-scale views (part ii). *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics* 29, 14 (2005), 1411–1432.
- [26] DONZÉ, F. V., RICHEFEU, V., AND MAGNIER, S.-A. Advances in discrete element method applied to soil, rock and concrete mechanics. *State of the art of geotechnical engineering. Electronic Journal of Geotechnical Engineering* 44 (2009), 31.
- [27] DRUCKER, D. C., GIBSON, R. E., AND HENKEL, D. J. Soil mechanics and work hardening theories of plasticity. *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 122 (2013).
- [28] DRUCKER, D. C., AND PRAGER, W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of applied mathematics* 10 (2013).
- [29] FISCHMEISTER, H. F., AND ARZT, E. Densification of powders by particle deformation. *Powder Metallurgy* 26, 2 (1983), 82–88.
- [30] FLECK, N. A crystal plasticity view of powder compaction. *Acta metallurgica et materialia* 43, 8 (1995), 3177–3184.
- [31] FLECK, N. On the cold compaction of powders. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 43, 9 (1995), 1409–1431.
- [32] FLECK, N. A., KUHN, L. T., AND MCMEEKING, R. Yielding of metal powder bonded by isolated contacts. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40, 5 (1992), 1139–1162.
- [33] FRACHON, A. Modélisation et simulation numérique de la compression en matrice de poudres métalliques thèse, 2002.
- [34] FRACHON, A., IMBAULT, D., DOREMUS, P., RIERA, M., AND PRADO, J. Modelling of the spring-back of green compact. In *EURO PM 2001 : 2001 European Congress and Exhibition on Powder Metallurgy* (2001), pp. 22–28.
- [35] FRENNING, G. An efficient finite/discrete element procedure for simulating compression of 3d particle assemblies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197, 49 (2008), 4266–4272.
- [36] FRENNING, G. Compression mechanics of granule beds : A combined finite/discrete element study. *Chemical Engineering Science* 65, 8 (2010), 2464–2471.
- [37] GETHIN, D. Finite element simulation in metal powder die compaction. *Metal Powder Report* 47, 10 (1992), 53.

- [38] GETHIN, D., RANSING, R., LEWIS, R., DUTKO, M., AND CROOK, A. Numerical comparison of a deformable discrete element model and an equivalent continuum analysis for the compaction of ductile porous material. *Computers & Structures* 79, 13 (2001), 1287–1294.
- [39] GETHIN, D. T., LEWIS, R. W., AND RANSING, R. S. A discrete deformable element approach for the compaction of powder systems. *Modelling and simulation in Materials Science and Engineering* 11, 1 (2003), 101.
- [40] GONZALEZ, M., AND CUITIÑO, A. M. A nonlocal contact formulation for confined granular systems. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 60, 2 (2012), 333–350.
- [41] GUDEHUS, G. A comparison of some constitutive laws for soils under radially symmetric loading and unloading. *Canadian Geotechnical Journal* 20 (1979), 502–516.
- [42] HARTHONG, B. *Modélisation du comportement des poudres métalliques à l'échelle du grain*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 2010.
- [43] HARTHONG, B., IMBAULT, D., AND DORÉMUS, P. The study of relations between loading history and yield surfaces in powder materials using discrete finite element simulations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 60, 4 (2012), 784–801.
- [44] HARTHONG, B., JÉRIER, J., RICHEFEU, V., CHAREYRE, B., DORÉMUS, P., IMBAULT, D., AND DONZÉ, F. Fem-dem models for high-density compaction of ductile powders. *Submitted to Mechanics of Materials* (2010).
- [45] HERTZ, H. On the contact of elastic solids. *J. reine angew. Math* 92, 110 (1881), 156–171.
- [46] HEYLIGER, P., AND MCMEEKING, R. Cold plastic compaction of powders by a network model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49, 9 (2001), 2031–2054.
- [47] HILL, R., AND HILL, R. The mathematical theory of plasticity.
- [48] HILL, R., STORAKERS, B., AND ZDUNEK, A. A theoretical study of the brinell hardness test. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (1989), vol. 423, The Royal Society, pp. 301–330.
- [49] JAMES, P. Particle deformation during cold isostatic pressing of metal powders. *Powder Metallurgy* 20, 4 (1977), 199–204.

- [50] JÉRIER, J., HARTHONG, B., RICHEFEU, V., CHAREYRE, B., IMBAULT, D., DONZÉ, F., AND DORÉMUS, P. Numerical simulations for isostatic and die compaction of powder by the discrete element method. *Powder Technology* (2010).
- [51] JÉRIER, J.-F. *Modélisation de la compression haute densité des poudres métalliques ductiles par la méthode des éléments discrets*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2009.
- [52] JÉRIER, J.-F., HATHONG, B., RICHEFEU, V., CHAREYRE, B., IMBAULT, D., DONZE, F.-V., AND DOREMUS, P. Study of cold powder compaction by using the discrete element method. *Powder Technology* 208, 2 (2011), 537–541.
- [53] JONSÉN, P., AND HÄGGBLAD, H.-Å. Modelling and numerical investigation of the residual stress state in a green metal powder body. *Powder Technology* 155, 3 (2005), 196–208.
- [54] JONUSCHEIT, H., AND ERNST, E. Tools for improving pm : Crack detection using acoustic testing technology. In *European Congress and Exhibition on Powder Metallurgy. European PM Conference Proceedings* (2008), vol. 3, The European Powder Metallurgy Association, p. 109.
- [55] KHOEI, A., AZAMI, A., ANAHID, M., AND LEWIS, R. A three-invariant hardening plasticity for numerical simulation of powder forming processes via the arbitrary lagrangian–eulerian fe model. *International journal for numerical methods in engineering* 66, 5 (2006), 843–877.
- [56] KISHINO, Y. On the incremental nonlinearity observed in a numerical model for granular media. *Italian Geotechnical Journal* 3 (2003), 3–12.
- [57] KISHINO, Y., AKAIZAWA, H., AND KANEKO, K. On the plastic flow of granular materials. *See Kishino (2001)* (2001), 199–203.
- [58] LADE, P. V., AND INEL, S. Rotational kinematic hardening model for sand. part i concept of rotating yield and plastic potential surfaces. *Computers and Geotechnics* 21, 3 (1997), 183–216.
- [59] LEWIS, R. W., GETHIN, D. T., YANG, X. S., AND ROWE, R. C. A combined finite-discrete element method for simulating pharmaceutical powder tableting. *International journal for numerical methods in engineering* 62, 7 (2005), 853–869.
- [60] MARTIN, C. Elasticity, fracture and yielding of cold compacted metal powders. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 52, 8 (2004), 1691–1717.
- [61] MARTIN, C., AND BOUVARD, D. Study of the cold compaction of composite powders by the discrete element method. *Acta Materialia* 51, 2 (2003), 373–386.

- [62] MARTIN, C., BOUVARD, D., AND SHIMA, S. Study of particle rearrangement during powder compaction by the discrete element method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 51, 4 (2003), 667–693.
- [63] MESAROVIC, S. D., AND FLECK, N. A. Spherical indentation of elastic–plastic solids. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (1999), vol. 455, The Royal Society, pp. 2707–2728.
- [64] MESAROVIC, S. D., AND FLECK, N. A. Frictionless indentation of dissimilar elastic–plastic spheres. *International Journal of Solids and Structures* 37, 46 (2000), 7071–7091.
- [65] MISES, R. v. Mechanik der plastischen formänderung von kristallen. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 8, 3 (1928), 161–185.
- [66] MOSBAH, P. *Etude expérimentale et modélisation du comportement de poudres métalliques au cours du compactage en matrice fermée*. PhD thesis, 1995.
- [67] NAKAI, T., AND WOOD, D. M. Analysis of true triaxial and directional shear cell tests on leighton buzzard sand. *Proc. of Int. Sym. On pre-failure deformation characteristics of geomaterials (IS-Sapporo) 1* (1994), 419–425.
- [68] OLSSON, E., AND LARSSON, P.-L. A unified model for the contact behaviour between equal and dissimilar elastic–plastic spherical bodies. *International Journal of Solids and Structures* (2015).
- [69] PAVIER, E. *Caractérisation du comportement d’une poudre de fer pour le procédé de compression en matrice*. PhD thesis, 1998.
- [70] PAVIER, E., AND DOREMUS, P. Triaxial characterisation of iron powder behaviour. *Powder metallurgy* 42, 4 (1999), 345–352.
- [71] PERSSON, A.-S., AND FRENNING, G. An experimental evaluation of discrete element simulations of confined powder compression using an extended truncated-sphere model. *Powder Technology* 284 (2015), 257–264.
- [72] PLASSIARD, J., DONZÉ, F., AND LORENTZ, J. Simulations of rockfall impacts on embankments using a discrete element method. In *Proceedings of Interdisciplinary Workshop on Rockfall Protection, Morschach, Switzerland* (2008), pp. 23–25.
- [73] PRAGER, W., KIEFFER, J., AND EPAIN, R. *Problèmes de plasticité théorique*. Dunod, 1958.

- [74] PROCOPIO, A. T., AND ZAVALIANGOS, A. Simulation of multi-axial compaction of granular media from loose to high relative densities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 53, 7 (2005), 1523–1551.
- [75] RANSING, R., GETHIN, D., KHOEI, A., MOSBAH, P., AND LEWIS, R. Powder compaction modelling via the discrete and finite element method. *Materials & Design* 21, 4 (2000), 263–269.
- [76] ROYIS, P., AND DOANH, T. Theoretical analysis of strain response envelopes using incrementally non-linear constitutive equations. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics* 22, 2 (1998), 97–132.
- [77] RUI, Z., ZHANG, L.-H., HE, B.-Y., AND LIU, Y.-H. Numerical simulation of residual stress field in green power metallurgy compacts by modified drucker–prager cap model. *Transactions of Nonferrous Metals Society of China* 23, 8 (2013), 2374–2382.
- [78] SCHMIDT, I., KRAFT, T., AND RIEDEL, H. Numerical homogenisation of elasto-plastic granule assemblies using discretised particles. *Proceedings of the Euro PM2008* (2008), 169–173.
- [79] SCHMIDT, I., TRONDL, A., KRAFT, T., AND WONISCH, A. Simulation of the material behaviour of metal powder during compaction. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E : Journal of Process Mechanical Engineering* 224, 3 (2010), 187–194.
- [80] SCHNEIDER, L., AND COCKS, A. Experimental investigation of yield behaviour of metal powder compacts. *Powder Metallurgy* 45, 3 (2002), 237–245.
- [81] SHIMA, S., KOTERA, H., HONG, Z., AND FUNATO, M. A study of iron powders by three-dimensional compaction. *Advances in Powder Metallurgy and Particulate Materials–1996. 2* (1996), 7.
- [82] SKRINJAR, O., AND LARSSON, P.-L. On discrete element modelling of compaction of powders with size ratio. *Computational Materials Science* 31, 1 (2004), 131–146.
- [83] ŠMILAUER, V., CATALANO, E., CHAREYRE, B., DOROFENKO, S., DURIEZ, J., GLADKY, A., KOZICKI, J., MODENESE, C., SCHOLTÈS, L., SIBILLE, L., ET AL. Yade documentation. the yade project, 2010, 2010.
- [84] SRIDHAR, I., AND FLECK, N. Yield behaviour of cold compacted composite powders. *Acta Materialia* 48, 13 (2000), 3341–3352.
- [85] STORÅKERS, B., BIWA, S., AND LARSSON, P.-L. Similarity analysis of inelastic contact. *International Journal of Solids and Structures* 34, 24 (1997), 3061–3083.

- [86] STORÅKERS, B., FLECK, N., AND MCMEEKING, R. The viscoplastic compaction of composite powders. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 47, 4 (1999), 785–815.
- [87] TAMAGNINI, C., CALVETTI, F., AND VIGGIANI, G. An assessment of plasticity theories for modeling the incrementally nonlinear behavior of granular soils. *Journal of Engineering Mathematics* 52, 1-3 (2005), 265–291.
- [88] TAYLOR, G. A connexion between the criterion of yield and the strain ratio relationship in plastic solids. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (1947), vol. 191, The Royal Society, pp. 441–446.
- [89] TAYLOR, G. I., AND QUINNEY, H. The plastic distortion of metals. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* (1932), 323–362.
- [90] VIGGIANI, F. C. G., AND TAMAGNINI, C. A numerical investigation of the incremental behavior of granular soils.
- [91] VU-QUOC, L., AND ZHANG, X. An accurate and efficient tangential force–displacement model for elastic frictional contact in particle-flow simulations. *Mechanics of materials* 31, 4 (1999), 235–269.
- [92] VU-QUOC, L., ZHANG, X., AND LESBURG, L. Normal and tangential force–displacement relations for frictional elasto-plastic contact of spheres. *International journal of solids and structures* 38, 36 (2001), 6455–6489.
- [93] WAN, R., AND PINHEIRO, M. On the validity of the flow rule postulate for geomaterials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 38, 8 (2014), 863–880.
- [94] WU, C.-Y., COCKS, A. C., GILLIA, O. T., AND THOMPSON, D. A. Experimental and numerical investigations of powder transfer. *Powder Technology* 138, 2 (2003), 216–228.